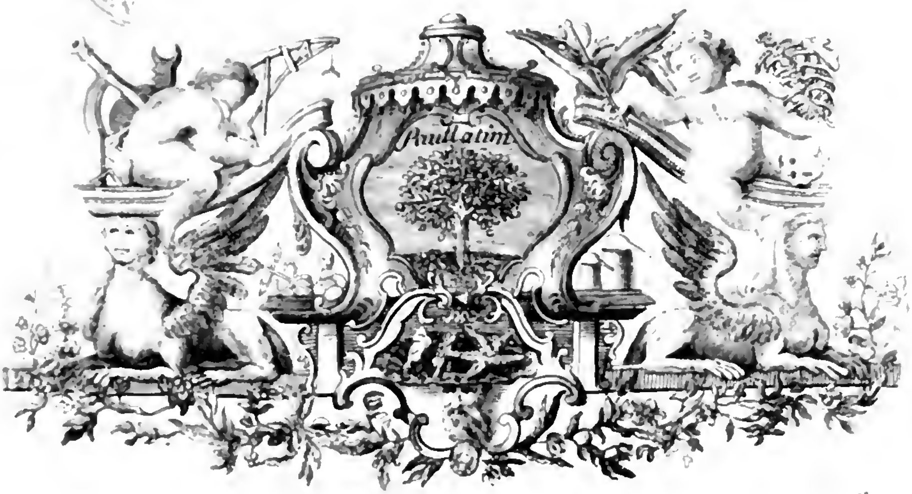
COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANAE*

TOMVS IV.

AD ANNVM cIↄ Iↄcc xxix.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE

cIↄ Iↄcc xxxv.

INDEX
COMMENTARIORVM
IN CLASSE MATHEMATICA.

Iac.

IN CLASSE PHYSICA.

Dan.

IN CLASSE HISTORICA.

Eius

CLASSIS PRIMA

CONTINENS

MATHEMATICA

DE ORBITA SOLIS DEFINIENDA.

Auctore F. C. Majero.

1.

Qui ſolem ſecundum Kepleri placita moveri ſupponunt, (quod hodierni omnes faciunt Aſtronomi) majores inveniunt difficultates in determinatione viæ ſolaris, quam qui alias ſequuntur hypotheſes. Suſcepi in me idem opus ad mentem Kepleri abſolvendum; ſenſi quoque difficultates ſolitas; ſuperavi tamen ſubſidio Theorematum Geometricorum, quæ, quantum ſcio, a nemine in hoc negotio uſurpata ſunt. Hæc profero nunc, ut quam bene opere defunctus ſim, alii judicare poſſint. M. Januario, 1729.

2. Tribus abſolvam capitibus omnia. Primo theoremata explicabo. Secundo exemplis illuſtrabo theoremata, idoneisque obſervationibus ſpeciem orbitæ definiam. Tertio capite de ſole varia huc pertinentia dicam.

CA-

CAPUT I.

Theorema I.

Fig. 1 3. *Sit datus radius circuli* $=r$, *et quadrilineum ABDE a diametro AB et chorda parallella DE formatum, cujus area sit* $=2bb$; *Erit hoc pacto normalis*

$$FC=\frac{bb}{r}+\frac{b^6}{2.3.r^5}+\frac{1.b^{10}}{2.4.5r^7}+\frac{1.3.b^{14}}{2.4.6.7.r^{13}}+\frac{1.3.5.b^{18}}{2.4.6.8.9.r^{17}}$$
$$+\text{ - - - - - - - -}$$

Ponatur FC$=$x, et inde FE$=\surd(rr-xx)$; sit *fe* ipsi FE quam proxima, ut habeatur F*f*E*e* elementum spatii FCBE, scilicet $=\surd(rr-xx)\,dx$, cujus integrale est $=rx-\frac{x^3}{2.3.r}-\frac{1.x^5}{2.4.5\,r^3}-\frac{1.3.x^7}{2.4.6.7.r^5}-$ $\text{- - - - -}=bb$. Extracta igitur radice ex hac æquatione, prodit $x=\frac{bb}{r}+\frac{b^6}{2.3.r^5}+\frac{b^{10}}{2.4.5.r^7}+$ - - - - Q.E.D.

Problema I.

Fig. 2. 4. *Ex datis quatuor solis in sua orbita locis, quorum bina sibi opposita sunt, et temporibus, quibus ibi sol extitit, invenire locum apogæi et eccentricitatem.*

Sit ALPM eccentricus orbitæ ellipticæ, in quo quatuor data loca, ♈♎ et ♌♒, quasi legitime ad eum reducta essent, existant (reducentur autem postmodum si opus est.)

Quo-

Quoniam areae ♌♎P♒, & ♎P♒♈, ſunt ad integrum circulum, uti tempora ab ♌ ad ♒, itemque ab ♎ ad ♈ elapſa ad integrum ſolis circuitum, patet data eſſe magnitudine ſegmenta ♌P♒ & ♎P♈, & proinde etiam quadrilinea ♌L♒M, NO♎♈, quorum normales BC & CD ex centro C ductae innoteſcunt per §. 3.

Lineae oppoſitorum locorum ♌♒ & ♎♈ interſecant ſeſe in loco obſervatoris, hoc eſt in terra, exiſtit igitur Terra in T; ducta autem AP per centrum C & terram T tranſeunte, erit in A locus apogaei, in P locus perigaei, & CT erit eccentricitas. Haec omnia per ſe intelliguntur.

Ob data quatuor loca, datur diſtantia ipſius ♌ ab ♎ hoc eſt angulus ♌T♎, ſive ejus aequalis verticalis ♒T♈. Hoc modo angulus BCD normalium BC & CD etiam datus eſt, aequalis quippe ang. ♌T♎.

In triangulo BCE datur BC & angulus ad C, dabitur inde quoque CE, quae ablata ab CD, relinquit ED; ſic in rectangulo EDT ex data ED, et angulis, invenitur DT. Tandem in rectangulo CDT, datis CD et DT, invenitur eccentricitas CT, et angulus ad T, quo linea apſidum AP inclinatur ad datam ♎♈, quo ipſo locus apogaei innoteſcit ultro.

Hoc pacto ſpecies ellipſis quaeſitae determinata eſt, ſed nondum quam exactiſſime. Supra enim quatuor data ſolis loca, quae in ellipſi ſunt, tanquam in eccentrico exiſtere ponebantur, ex qua hypothesi nonnihil erroris oritur. Corrigi autem nunc facile potest: *reducantur nimirum more solito quatuor haec loca ex inventa ellipsi ad eccentricum, et repetatur calculus ut veritas dispalescat quaesita.* Ceterum exemplis posthac patebit, correctione non opus esse, quia error nullius est momenti.

Theorema 2.

Fig. 3. 5. In semicirculo ANMB sit datus radius $AC = r$, eccentricitas $FC = f$ angulus anomaliae verae MFB, adeoque et arcus $MB = q$, ejusque sinus $MP = p$: dico esse anomaliam mediam $NB = \frac{fp}{r} + q$

Ob datas FC et PM est area trianguli FMC $= \frac{1}{2} fp$ et area sectoris $MCB = \frac{1}{2} rq$, ob arcum MB datum; collectis sectore et triangulo, habetur area anomaliae verae $MFB = \frac{fp + rq}{2}$, sed tanta debet quoque esse area anomaliae mediae, hoc est sector NCB, qui est $=$ arc. NB. $r : 2 = (bp + rq) : 2$ fit ergo reducta aequatione, arc. $NB = \frac{fp}{r} + q$. Q.E.D.

CAPUT II.

6. Exempla quibus praemissam illustrarem theoriam ab Hevelio mutuavi. Ex observationibus altitudinum solis meridianarum, quas per plures annos multa diligentia et fide habuit, loca solis sibi mutuo opposita elicui, methodo paucis nunc indicanda.

7. Ad

7. Ad corrigendas altitudines, tabulas refractionum Hireanas adhibui, quoniam illarum ope vera altitudo poli Dantiſcana, et obliquitas eclipticae ex maxima et minima altitudinibus producuntur. Altitudo ſolis maxima ab Hevelio in ſuis obſervationibus traditur $= 59^{\circ}\ 7'\ 20''$ minima autem $= 12^{\circ}\ 12'\ 45''$, altitudines hae, ſecundum Hiraei tabulas refractionum, correctae, dant altitudinem poli Dantiſcanam $= 54^{\circ}\ 22'\ 40''$ et obliquitatem eclipticae $= 23^{\circ}\ 29'\ 16''$ quae obliquitas congruit ei quam recepere Aſtronomi hodie fere omnes. Altitudo vero poli ab Hevelio, ex obſervatis ſtellae polaris altitudinibus inventa, traditur $= 54^{\circ}\ 22'\ 52''$ cui ante dicta valde appropinquat. Non dubito quin refractiones ab Hevelio ipſo in tabulam redactae idem praeſtent, quod refractiones Hireanae; ſed ad manus mihi non ſunt. Aliorum Autorum refractionum tabulas conſului quoque, deprehendi autem per eas omnes altitudinem poli et eclipticae obliquitatem obtineri a vero nimis aberrantes, ut iis merito tabulam Hiraei longe praetulerim.

8. Datis itaque altitudine poli, obliquitate eclipticae, et altitudine meridiana correcta, invenitur locus ſolis ad illum meridiem; invenitur praeterea locus ſolis pro meridie ſequente aut antecedente, ſi vel motus ſolis diurnus aliunde cognitus loco ſolis invento demitur aut adjicitur, vel ſi ad meridiem ſequentem praecedentemve altitudo ſolis quoque obſervata fuit; Datis hoc pacto ſolis locis ad duos meridies contiguos dabitur etiam ſolis locus

ad

quodvis momentum intermedium, inſtituto ſimplici analogia, pro more ſolito.

9. Hac ratione plurima loca ſolis ſibi oppoſita inveni, maxime autem in eo fui ut aequinoctiorum intervalla certo cognoſcerem. Eo fine plures ſolis ingreſſus in arietem et libram methodo ante deſcripta, erui, quorum aliquot in ſequente tabula continentur.

Annus et		tempus apparens et completum					Intervalla æquinoctiorum			
	æquinoctium	Menſ.	D.	H.	′	″	D.	H.	′	″
1657	vernale	Martii	18.	16.	18.	1.				
	autumnale	Septembr.	21.	7.	13.	18.	186.	14.	55.	17.
							178.	15.	5.	21.
1658	vernale	Martii	18.	22.	18.	39.				
	autumnale	Septembr.	21.	12.	39.	12.	186.	14.	20.	33.
1661	vernale	Martii	18.	15.	18.	0.				
	autumnale	Septemb.	21.	6.	38.	0.	186.	15.	20.	0.

10. Quam lubrica ſit et incerta methodus qua aequinoctia inquiſivi, (quae et ſola fere vulgo in uſu eſt,) patet non tam ex intuitu tabulae praecedentis, quam potiſſimum ex plurimis calculis quos hic non communico. Tria in tabula ſunt ab aequinoctio vernali ad autumnale intervalla, quae ultra ſemihorium a ſeſe differunt, quodnam verius ſit, dictu impoſſibile eſt; eligo autem ultimum, quod aequatione temporis rite correctum, eſt $=$ 186 D. 15 *h.* 0′. et ſic cum intervallo a Caſſino proditum propius convenit, qui ei tribuit 186 D. 14 *h.* 53′.

11. Quae porro hic ſequitur tabula, diverſa alia continet eclipticae loca ſibi mutuo oppoſita, methodo priori reperta.

Annus

Annus	Tempus completum apparens				Locus solis				Intervalla temporis aequata		
	Mens.	D.	H.	′	S.	°.	′	″	D.	H.	′
1660	Maji.	11.	0.	0.	1.	22.	23.	10.	185.	13.	30.
	Nov.	12.	13.	42.	7.	22.	23.	10.			
1661	Maji.	8.	0.	0.	1.	19.	13.	15.	185.	16.	30.
	Nov.	8.	16.	40.	7.	19.	13.	15.			
1661	Maji.	9.	0.	0.	1.	20.	10.	53.	185.	15.	25.
	Nov.	10.	15.	37.	7.	20.	10.	53.			
1662	Febr.	9.	5.	48.	10.	22.	17.	57.	185.	10.	0.
	Aug.	13.	15.	36.	4.	22.	17.	57.			
1673	Maji.	2.	0.	0.	1.	13.	29.	35.	185.	22.	0.
	Nov.	3.	22.	11.	7.	13.	29.	35.			

Praeter haec loca opposita plura alia computavi, pauca haec speciminis caussa adducere volui. Id vero reticendum non est, intervalla haec aeque incerta esse, ac aequinoctiorum intervallum, quod supra (§§ 9 et 10) dubium deprehensum est.

12. Ut nunc problema articulo 4to memoratum exemplo illustrem, assumo opposita solis loca quatuor haec: $0^{s}\ 0^{\circ}\ 0'\ 0''$ et $6^{s}\ 0^{\circ}\ 0'\ 0''$ item $10^{s}\ 22^{\circ}\ 17'\ 57''$ et $4^{s}\ 22^{\circ}\ 17'\ 57''$. Intervallum temporis duorum priorum est $= 186^{D}\ 15^{H}\ 0'$ quod supra §. 10. definitum est. Intervallum posteriorum locorum temporarium est $185^{D}\ 10^{H}\ 0'$ uti ad annum 1662 ex tabella praecedente constat.

Haec intervalla converto in areas circuli, inferendo: ut tota anni quantitas ($365^{D}\ 5^{H}\ 49'$ ad intervallum aequinoctiorum ($186^{D}\ 15^{H}\ 0'$) ita tota circuli area (3. 141593) ad segmentum ♎ A O ♈ Fig. 2.

(1.

(1. 605193) Sic et alterum ſegmentum ♌LA♒ reperitur eſſe = 1. 594770.

Auferatur ab inventis ſegmentis dimidia circuli area, reſidui ſumatur ſemisſis, ut reſtent quadrilinea ♈OCD=0. 017198 et ♒MCB=0. 011987. Haec quadrilinea repraeſentantur in articulo 3. per bb. radius per r. et perpendicula BC et DC per x, igitur per theorema ibi demonſtratum perpendicula reperiuntur. Sufficiunt autem ad calculum vel praeciſisſimum duo priora theorematis membra $\frac{bb}{r} + \frac{b^6}{6r^5}$

Dat inde calculus

$$\frac{bb}{r} = 0.\ 017198$$

$$\frac{b}{6r^5} = 0.\ 000001$$

$$x = 0.\ 017199 = DC$$

eodem modo altera normalis BC reperitur = 0. 011987.

Porro angulus ♌T♎=ang. BCD habetur auferendo $4^{s}\ 22^{\circ}\ 17'\ 57''$ ab $6^{s}\ 0^{\circ}\ 0'\ 0''$ is ergo eſt = $37^{\circ}\ 42'\ 3''$. Igitur in rectangulo BCE, data normali BC et angulis, invenitur latus EC=0. 015149 quod ablatum a normali DC, relinquit lineam ED=0. 002050.

In rectangulo DET dato latere DE et angulis per priora, invenitur DT, tandemque in rectangulo EDT, datis DT, per antecedentem calculum, et normali CD, invenitur CT=0. 017404 *quae eſt eccentricitas quaeſita.* Invenitur etiam per eadem data angulus DCT= $8^{\circ}\ 46'\ 2''$ = angulo AT♋ quo nimimirum Apogaeum superat principium cancri; igitur *locus apogaei solaris est in* ♋ $8^{\circ}\ 46'\ 2''$. Q. E. I.

13. Reperta eccentricitas et locus apogaei correctione indigent. (§. 4.) Nam loca solis quatuor assumta pertinent ad Ellipsin, et in adjecto schemate designantur per ♈ ♎ ♌ ♒. In solutione problematis autem eccentricus ACBDA loco Ellipseos adhibitus est, ergo adhibenda quoque erant loca solis ad eccentricum reducta. Nimirum pro loco ♌ in Ellipsi sumendus erat locus C in eccentrico, qui, data nunc Ellipseos specie, solito more invenitur = $4^{s}\ 22^{\circ}\ 18'\ 13''$ ejusque oppositus D = $10^{s}\ 22^{\circ}\ 18'\ 13''$. Locorum ♈ et ♎ nulla est reductio, quia prope diagaeum versantur. Restaurato igitur superiore calculo (§. 12.) reperitur *eccentricitas correcta* = 0. 017404 *et apogaeum in* ♋ $8^{\circ}\ 46'\ 20''$. Quo ipso patet correctionem hanc nullius esse momenti; nam eccentricitas invariata mansit, locus autem apogaei $18''$ auctus est. Fig. 4.

14. Quoniam computus ostensus brevis est et facilis, ex aliis datis plurimis eccentricitatem et apogaeum quaesitum indagavi. Sic ex assumtis locis oppositis ad annum 1660 repertis (§. 11.) et aequinoctiorum intervallo inveni *eccentricitatem* = 0. 017381 et *locum apogaei* in ♋ $8^{\circ}\ 16'\ 20''$, Ex oppositis locis anni 1661, elicui eccentricitatem = 0. 017496, et *locum apogaei* = ♋ $8^{\circ}\ 36'$ denique ex oppositione ad annum 1673 notata *eccentricitas prodiit* = 0. 01738 et locus apogaei = ♋ $8^{\circ}\ 18'\ 32''$. (Notandum hic est, quod in omnibus hisce casibus altera oppositio semper fuerit aequinoctiorum.)

 Com-

Commissis autem duabus oppositionibus annorum 1661 et 1662 sc. ♉—♏ 20° 10′ 53″ et ♌-♒ 22° 17′ 57″ *apogaeum locatur in* ♋ 8° 0′ et *eccentricitas* provenit = 0. 01722. Praeter hos casus bene multos alios computavi, quorum pauci quidam ab allatis ultro citroque ita differunt, ut differentia in positione aphelii ad 4 gradus assurgat.

15. Paucorum casuum dissensum non moror: sufficit ad stabiliendam veritatem consensus plurium casuum, quorum aliquot recensui articulo praecedente. Dico illos consentire, licet aliqui ultra semigradum discrepent ab invicem; Nam in hoc lubrico negotio multum me profecisse autumo, quod consensum intra gradum assecutus sum. Si aliorum labores circa hanc rem considero, animadverto neminem facile tot casus, calculo examinasse, nec quenquam tantum consensum plurium casuum expertum esse. Nonnihil igitur tribuo meis repertis, inventamque *eccentricitatem* = 0. 0174, itemque *apogaeum in* ♋ 8° 46′ tamdiu pro verioribus amplector, donec certiora discam.

16. Reperta eccentricitate reliquae orbitae affectiones ex natura Ellipseos determinantur. Subjecta tabula eas continet fere omnes.

			logarithmi
Axis major	=	2. 000000	10. 3010300
Axis minor	=	1. 999677	10. 3009642
Parameter	=	1. 999848	10. 3009971
Dist. aphelii a sole	=	1. 017400	10. 0074917
Dist. perihelii	=	0. 982600	9. 9923768
Eccentricitas	=	0. 017400	8. 2405492

17 Da-

17. Dabo et modum quo proſthaphaereſium tabulam repertae eccentricitati congruam in meos uſus calculaverim. Uſui fuit theorema articulo 5to allatum, quod regulam praeſtat, qua ex vera anomalia computatur media. Exemplum ejus hoc eſto: In figura 5ta ſit anomalia vera BFM = 30° reducatur ea ad anomaliam circularem BFN ita: Fig. 5.

$$\begin{array}{lr} \text{log. tang. } 30^\circ = & 9.\,7614394 \\ \text{log. ſin. tot.} = & 10.\,0000000 \\ \hline & 19.\,7614394 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{log. axis min. CD} = & 9.\,9999342 \\ \hline \text{log. tang. ang. NFB} = & 9.\,7615052 \end{array}$$

$$\text{ang. NFB} = 30^\circ\ 0'\ 14''$$

Inveniatur porro angulus NCB qui angulo NCF deinceps jacet:

$$\begin{array}{lr} \text{log. FC, eccentr.} = & 8.\,2405492 \\ \text{log. ang. } 30^\circ\ 0'\ 14'' = & 9.\,6990210 \\ \hline \text{log. ang. FNC} = & 7.\,9395702 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrr} & {}^\circ & ' & '' \\ \text{ang. ipſe} = & 0 & 29 & 55 \\ \text{ang. NFC} = & 30 & 0 & 14 \\ \hline \text{ang. NCB} = & 30 & 30 & 9 \end{array}$$

Hujus anguli ſinus in theoremate allegato denotatur litera p ejusque arcus explicatus litera q; $ſ$, ibidem eſt eccentricitas, ipſaque anomalia media eſt $= \frac{fp}{r} + q$. Hinc calculus oritur

$$\log. f = 8.\ 2405492$$
$$\log. p = 9.\ 7055010$$
$$\log. \frac{fp}{r} = 7.\ 9460502$$

ipſum $\frac{fp}{r} = 0.\ 008832 =$ arcui NM fig. 2.

		°	′	″
ſive	=	0	30	22
q	=	30	30	9
Anomalia media	=	31	0	31 Q. E. F.

18. Pro conſtruendis tabulis proſthaphaereticis, problema prioris inverſum (quo ſc. ex media anomalia vera exquiritur) ſolvere vulgo ſolent; At vero ſolutio ſuas habet difficultates; Certe ad ſolutionis articulo 17. exhibitae facilitatem nunquam perducetur. Deinde nulla ratio eſt, cur potius hoc quam priore problemate tabulae condantur. Malo ergo ob facilitatem ſuam prius problema in uſum adhibere.

19. Tertium tandem caput conſcribendum eſſet quoque. Id vero ut omittam graves cogunt cauſae: erit tamen ubi id alio loco uberius excolam. Ago in eo de epocha motuum mediorum, quam ex obſervationibus Hevelii pluribus conſtitui. Ea cum epocha tabularum Rudolphinarum in ipſis ſecundis convenit, qua quidem re Rudolphinarum motus medii pro optimis declarantur. De aphelii loco et motu multa diſputo: ſtatuo locum ejus in Zodiaco immobi-

bilem, hoc eſt conſtanter in ♋ 8° 46′: ſed per conſequens ſub coelo ſtellato mobilem, motumque tribuo aequalem praeceſſioni aequinoctiorum. Oſtendo tandem, hiſce meis ſuppoſitionibus, Albategnii non ſolum, ſed et Hipparchi, antiquiſſimas obſervationes tam bene congruere quam aliis aliorum hypotheſibus. Haec vero omnia nunc miſſa faciam, donec opportunitas melius faveat.

DE LOCIS SOLIDIS AD MENTEM CARTESII CONCINNE CONSTRUENDIS.

A. I. Hermanno.

Per *loca geometrica* intelligunt Geometræ Figuras quaſcunque Curvilineas, quarum indoles per æquationes duas indeterminatas x et y, quas coordinatas vocant, et quantitates conſtantes involventes, explicatur. In hoc vero ſchediaſmate ea tantum loca conſiderabimus, quæ, *ſectiones conicæ*, aut paſſim etiam, *loca ſolida*, appellantur; haud dubie ideo, quia ex ſolido, nempe ex cono ſecari poſſunt, et præterea ad conſtructionem problematum ſolidorum conducunt. Menſ. Febr. 1729.

Jam antiquitus geometræ hæc loca ſolida contemplati ſunt, teſtibus ſeptem, qui adhuc ſuperſunt, libris conicorum Apollonii Pergæi, et iis, quæ de *Euclidis* inventis circa ſectiones conicas et *Ariſtæi* ſenionioris libris circa loca ſolida refert *Pappus Alexandrinus* in collectionibus ſuis mathematicis, ſed quæ temporum injuria perierunt.

Vocantur autem figuræ illæ *loca geometrica*, quia locum indicant, quem lineæ quædam variabiles, certam aliquam inter ſe relationem ubique ſervantes, occupant.

Inter recentiores inſignis ille Philoſophus *Renatus Des-Cartes* doctrinam locorum geometricorum primus, quod ſciam, algebraice excoluit, atque methodi ſuæ magnificum ſpecimen edidit Lib. II. Geometriæ, ubi veterum problema de loco ad quatuor lineas poſitione datas, quod narrante Pappo, veteribus inſolutum manſerat, feliciſſime expedivit, et ſectiones conicas aut ſubinde etiam circulum aut lineam rectam, pro circumſtantiarum varietate loco quæſito aſſignavit. Sed aſſertionum ſuarum demonſtrationes fere ubique reticuit, adeo ut *Florimundus a Beaune*, et *Franciſcus a Schooten* in hanc et alias Geometriæ Carteſianæ partes, notas et commentarios conſcribere neceſſum haberent, quibus aditum in hanc geometriam planiorem redderent. *Beaunius* quidem paucis & brevibus notis rem ſuam peregit; *Schootenius* vero ea quæ pertractanda ſumſit fuſius perſecutus eſt, percurrendo ſingulos caſus quibus modo hanc modo illam ſectionem conicam, circulum vel etiam lineam rectam in locum quæſitum abire Carteſius edixerat, adductis ubique demonſtrationibus analyticis.

Sed

Sed prolixa hæc Schootenii diligentia successoribus procul dubio ansam dedit alias vias in doctrina locorum tentandi, quæ magis expeditæ essent. Nam Ill. *Joh. de Witt* in elementis linearum curvarum geometriæ Cartesii annexis, æquationes suas locales ut libet compositas, ad æquationes primitivas sectionum conicarum reducere docuit. Hoc modo viam ad constructiones facilem sternere conatus est.

Sed quia forte neque hæc methodus satis brevis visa est, ideo in alias adhuc Geometræ inquisiverunt. Sane Vir Cl. *Joh. Craige* ad calcem tractatus de *Quadraturis*, quem anno 1693 Londini edidit, rem paullo aliter aggressus est. Non enim ex æquatione construenda, positionem et magnitudinem diametri ejusque parametri eruere suscepit, sed per comparationem singulorum terminorum æquationis construendæ, cum totidem terminis homologis æquationis generalis illius sectionis conicæ, quæ ad rem facit, omnia ea elicit, quæ ad loci quæsiti constructionem requiruntur. Dedit ideo pro singulis sectionibus conicis æquationes generales, ad quos deinceps omnem æquationem localem exigere et constructionem inde derivare posset.

Ut pulchra est hæc methodus, ita non parum videtur placuisse Geometris. Nam Ill. *Hospitalius* in tractatu suo posthumo de sectionibus conicis eam non modo suam fecit; sed in multis quoque illustravit, et Cel. *Wolfius*, hanc solum, missis reliquis, in suis analyseos elementis exposuit.

Veruntamen cum Carteſiana methodus æque brevis ſit, ſi non brevior quam ulla alia methodus ad eundem ſcopum tendens, præterea vero directe procedat, et hoc tamen non obſtante nunc pene oblivioni tradita ſit, eam nitori ſuo reſtitutam et illuſtratam poſtliminio in ſcenam producere viſum eſt. Hæc methodus enim nullis ſubſtitutionibus peregrinis, nullis reductionibus æquationis propoſitæ ad primitivas, aut aliis ejusmodi metamorphoſibus eget, ſed magnitudo et poſitio diametri et parametri ſectionis immediate ex æquatione conſtruenda, nullo fere negotio eruuntur, quibus inventis locus facile conſtrui poteſt.

I. Æquatio generalis ad ſectiones conicas ea eſt quæ ſignatur littera A - - - $\alpha yy + 2\beta xy + \gamma xx + 2\delta y + 2\varepsilon x + \Phi = 0$.

In hac x ſignificat abſciſſas, y applicatas, litteræ vero græcæ α, β, γ, δ, ε, Φ coefficientes indefinitas cum ſuis ſignis $+$ vel $-$. Extrahendo radices ex æquatione A, obtinetur altera B.

$$\text{B} \quad y = \frac{-\beta x}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha} \underline{+} \sqrt{\left(\frac{\beta\beta - \alpha\gamma}{\alpha\alpha} xx + \frac{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}{\alpha\alpha} x + \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{\alpha\alpha}\right)}$$

Dicatur in hac pars rationalis u, et irrationalis z, et conſtruenda eſt utraque ſeorſim.

II. Conſtructio partis rationalis $\frac{-\beta x}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha} = u$, perfacilis eſt, nam ſi primum fingatur $x = 0$, fiet $u = \frac{-\delta}{\alpha}$. Aſſumo nunc in omnibus figuris adjectis PQ ſignificare lineam rectam in qua abſciſſæ x capiantur a puncto in ea fixo A, et ſi per hoc punctum ducatur in dato angulo altera indefinita Ll, capienda eſt in

ea

ea portio AB$=\frac{-\delta}{\alpha}$, et quidem ſurſum verſus L ſi fractio $\frac{-\delta}{\alpha}$ eſt affirmativa, aut in partem oppoſitam *l* ſi negativa eſt, punctum B jam erit in linea illa in qua diameter ſectionis conicæ ſeu loci quæſiti ſita eſt.

Alterum punctum hujus lineæ reperitur ſi in æquatione $u = \frac{-\beta x}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha}$, nunc ponatur $u = o$, invenietur $x = \frac{-\delta}{\beta}$; abſcindatur ergo in indefinita PQ, pars AC$=\frac{-\delta}{\beta}$, ad partes Q ſi fractio $\frac{-\delta}{\beta}$ eſt quantitas affirmativa vel in partes oppoſitas P, ſi negativa eſt: linea BC quam vocabo ubique $=\eta$ quantum opus eſt producta, dat poſitionem diametri ſectionis reſpectu lineæ indefinitæ PQ.

III. Quantum ad partem irrationalem attinet æquationis B, ea debite evoluta manifeſtabit magnitudinem diametri ejuſque conjugatæ, et locum verticum. Hos vertices ſignabimus in figuris per litteras *G*, *g*, centrum ſectionis littera O. Ductisque per puncta *G*, *g*, *O*, rectis *GN*, *gn*, et *OM* parallelis ad *Ll*, indefinitæ *PQ* occurrentibus in punctis *N*, *n* et *M*. Puncta *N*, *n* dicentur veſtigia verticum in recta *PQ*, et *M* veſtigium centri; Quare *Nn* veſtigium erit ipſius diametri.

IV. Conſideremus nunc æquationem $Z = \sqrt{(\frac{\beta\beta - \alpha\gamma}{\alpha\alpha}xx + \frac{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}{\alpha\alpha}x + \frac{\delta\delta - \alpha\phi}{\alpha\alpha})}$ ex qua dixi eliciendas eſſe magnitudines parametri et diametri ſectionis; hæc vero æquatio ſic generaliter ſpectata eſt ad ſectiones conicas; veruntamen in quibusdam caſibus, mutatur in æquationem quæ eſt ad lineam rectam: nam ſi $\varepsilon = \frac{\beta\delta + \sqrt{(\beta\beta\delta\delta + \alpha\alpha\gamma\phi - \alpha\gamma\delta\delta - \alpha\beta\beta\phi)}}{\alpha}$, æquatio illa tranſit fit in $Z = \frac{x\sqrt{\beta\beta-\alpha\gamma} + \sqrt{\delta\delta-\alpha\Phi}}{\alpha}$, et æquatio totius loci in $y = \frac{-\beta x-\delta \pm x\sqrt{\beta\beta-\alpha\gamma} \pm \sqrt{\delta\delta-\alpha\Phi}}{\alpha}$, quæ eſt ad lineam rectam, cujus conſtr. per §. 11. facile obtinetur.

Fig. 1. Nempe capiatur in PQ pars $AC = \frac{\delta}{\beta}$, et in Ll pars $AB = \frac{\delta}{\alpha}$, producatur CB in utramque partem, et abſcindantur præterea in Ll partes $BL = Bl = \frac{\sqrt{(\delta\delta-\alpha\Phi)}}{\alpha}$, in PQ vero pars $AN = \frac{\sqrt{(\delta\delta-\alpha\Phi)}}{\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma)}}$, ductaque per N recta NG, jungantur GL, et Gl, partes earum LF, et lf ſunt locus quæſitus. Nam applicatæ EF quæ ſunt in angulo LAQ præbent omnes $+y$, et applicatæ Ef, quæ ſunt in angulo lAQ omnes $-y$. Demonſtratio facilis.

Ducta enim ubilibet FKf parallela Ll, ſi ergo $AE = x$, et $EF = y$, propter parallelas FK et LB, invenientur $GB = \frac{\beta\eta\sqrt{(\delta\delta-\alpha\Phi)}}{\delta\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma)}}$, $KE = \frac{\beta x+\delta}{\alpha}$, et $KF = \frac{x\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma)} + \sqrt{(\delta\delta-\alpha\Phi)}}{\alpha}$, adeoque $+y(EF = KF - KE)$ $= \frac{-\beta x-\delta + x\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma)} + \sqrt{(\delta\delta-\alpha\Phi)}}{\alpha}$ et $-y(= Ef) = \frac{\beta x+\delta - x\sqrt{(\beta\beta-\alpha\gamma)} - \sqrt{(\delta\delta-\alpha\Phi)}}{\alpha}$. Qui eſt locus conſtruendus.

Si $\varepsilon = \frac{\beta\delta}{\alpha}$, et $\Phi = \frac{\delta\delta}{\alpha}$, erit etiam nunc locus quæſitus linea recta.

V. Si in æquatione $Z = \sqrt{\left(\frac{\beta\beta-\alpha\gamma}{\alpha\alpha}xx + \frac{2\beta\delta-2\alpha\varepsilon}{\alpha\alpha}x + \frac{\delta\delta-\alpha\Phi}{\alpha\alpha}\right)}$ ſit $\beta\beta\alpha\gamma = 0$, vel $\gamma = \frac{\beta\beta}{\alpha}$, æquatio erit ad *Parabolam*, cujus vertex invenietur ponendo $Z = 0$, inde enim reſultat $x = \frac{\delta\delta-\alpha\Phi}{2\alpha\varepsilon-2\beta\delta}$, quæ dat veſtigium N verticis Parabolæ G, in linea PQ. Si jam $\beta\delta-\alpha\varepsilon$ exiſtente affirmativa $\delta\delta-\alpha\Phi$ ſit negativa, fractio $\frac{\delta\delta-\alpha\Phi}{2\alpha\varepsilon-2\beta\delta}$ vel $\frac{\alpha\Phi-\delta\delta}{2\beta\delta-2\alpha\varepsilon} = x$. Ideo capienda eſt in PQ portio

AN

$AN = \frac{\alpha\Phi - \delta\delta}{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}$ versus Q, ductaque NG parallela Ll, quæ BB productæ occurrat in G, erit hoc punctum vertex parabolæ. Ejus parameter vero, quam π deinceps vocabimus erit $= \frac{(2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon)\delta}{\alpha\alpha\beta\eta}$. Pono autem α, β et δ æquationis A esse singulas affirmativas. His positis, vertice G, parametro $\pi = \frac{(2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon)\delta}{\alpha\alpha\gamma\eta}$ descripta circa diametrum GK parabola FGf, pars ejus quæ est in angulo LAQ dat omnes $+y$, et pars ejus quæ est in angulo lAQ dat omnes $-y$. Fig. 2.

Ducta enim recta FKf parallela Ll, vocandoque $AE = x$, $EF = y$, erunt $BK = \frac{\beta\eta x}{\delta}$, et $BG = \frac{(\alpha\Phi - \delta\delta)\beta\eta}{(\beta\delta - \alpha\varepsilon)2\delta}$, ergo $GK = (x + \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon})\frac{\beta\eta}{\varepsilon}$. Quare $\sqrt{\pi\, GK} = \sqrt{(x + \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon})\frac{\beta\eta}{\delta}} \times \sqrt{\frac{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}{\alpha\alpha\beta\eta}} = \sqrt{(\frac{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}{\alpha\alpha}x + \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{\alpha\alpha})} = Z$, nec non $EK = \frac{\beta x + \delta}{\alpha}$, quare $y = \frac{-\beta x}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha} \pm \sqrt{(\frac{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}{\alpha\alpha}x + \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{\alpha\alpha})}$. Qui erat locus construendus.

Secundo, si ambæ quantitates $2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon$, et $\delta\delta - \alpha\Phi$ sint affirmativæ, erit $x = \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{2\alpha\varepsilon - 2\beta\delta}$ negativa, adeoque in hoc casu $AN = \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}$ capienda est ad partes ipsius P, ductaque NG parallela LL, erit nunc vertex G parabolæ ad partes P inter A & P, parameter $\pi = \frac{(2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon)\delta}{\alpha\alpha\beta\eta}$, ut in casu præcedenti, et parabola qualis Fig. 3. Fig. 3.

Tertio, si $\delta\delta - \alpha\Phi$ sit adhuc positiva, sed $2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon$ negativa, invenietur $x = \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{2\alpha\varepsilon - 2\beta\delta}$ affirmativa. Propterea capienda est versus Q, pars $AN = \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{2\alpha\varepsilon - 2\beta\delta}$ propterea parabola FGf, vertice G, parametro Fig. 4.

 $\pi =$

$\pi = \frac{(2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon)\delta}{\alpha x \beta \eta}$ circa diametrum GC deſcripta habebit poſitionem qualis fig. 4 cernitur.

VI. Si in æquatione $Z = \sqrt{\left(\frac{\beta\beta - \alpha\gamma}{\alpha\alpha} xx + \frac{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}{\alpha\alpha} x + \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{\alpha\alpha}\right)}$ quantitas $\beta\beta - \alpha\gamma$ ſit negativa, vel qnod idem eſt, ſi γ excedit $\frac{\beta\beta}{\alpha}$, hæc æquatio pertinet ad *Ellipſes*. Eſt enim $Z = \frac{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)}}{\alpha} \times \sqrt{\left(-xx + \frac{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}{\alpha\gamma - \beta\beta} x + \frac{\delta\delta - \Phi\alpha}{\alpha\gamma - \beta\beta}\right)}$. Dicantur brevitatis cauſa $\lambda = \frac{\beta\delta - \alpha\varepsilon}{\alpha\gamma - \beta\beta}$, et $\mu = \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{\alpha\gamma - \beta\beta}$, eritque $Z = \frac{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)}}{\alpha} \times \sqrt{(-xx + 2\lambda x + \mu)}$. Si nunc $Z = 0$, æquatio $-xx + 2\lambda x + \mu = 0$ duas habet radices nempe $x = \lambda + \sqrt{(\lambda\lambda + \mu)}$ et $x = \lambda - \sqrt{(\lambda\lambda + \mu)}$. Quod indicat hanc ſectionem duos habere vertices. Poſitis enim α, β, δ, affirmativis et conſtructione lineæ CB poſita ex §. 11. Si $\beta\delta - \alpha\varepsilon$, et $\delta\delta - \alpha\Phi$ ſint
Fig. 5. affirmativæ, capiatur in PQ pars $AM = \lambda$, dein $MN = Mn = \sqrt{(\lambda\lambda + \mu)}$ erunt puncta N, *n veſtigia* verticum Ellipſis et M veſtigium centri ejus, quare ductis NG, *ng* et MO parallelis L*l*, vertices ipſi erunt G et *g* et centrum Ellipſeos O, atque adeo diameter $Gg = \frac{2\beta\eta\sqrt{(\lambda\lambda + \mu)}}{\delta}$. Diameter vero conjugata R*r* invenietur, ſi in $Z = \frac{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)}}{\alpha} \times \sqrt{(-xx + 2\lambda x + \mu)}$, pro x ſcribatur λ, invenietur hoc modo $OR = \frac{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta \times \lambda\lambda + \mu)}}{\alpha}$. Parameter vero π ad diametrum G*g* ſpectans, eſt tertia proportionalis ad G*g* et R*r*, hanc ob cauſam $\pi = \frac{2\delta(\alpha\gamma - \beta\beta)\sqrt{(\lambda\lambda + \mu)}}{\alpha\alpha\beta\eta}$. Quare Ellipſis G*lgl* hac parametro $\pi = \frac{2\delta(\alpha\gamma - \beta\beta)\sqrt{(\lambda\lambda + \mu)}}{\alpha\alpha\beta\eta}$, circa diametrum $Gg = \frac{2\beta\eta\sqrt{(\lambda\lambda + \mu)}}{\delta}$ deſcripta, eſt *locus* quæſitus.

Ducta

Ducta enim ubilibet FK, dicantur $AE = x$, $EF = y$, erit $EK = \frac{\beta x + \delta}{\alpha}$ et $FK = y + \frac{\beta x + \delta}{\alpha}$; ex natura vero Ellipsis fit $FK = \sqrt{(\frac{\pi\, gK.GK}{Gg})}$. Per constr. habemus $\frac{\pi}{Gg} = \frac{\delta\delta\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)}}{\alpha\alpha\beta\beta\eta}$, et propter parallelas AB, EK, rectum $GKg = \frac{\beta\beta\eta\eta\, nE.NE}{\delta\delta}$, quare fit $\frac{\pi.GK\, gK}{Gg} = \frac{\overline{\alpha\gamma - \beta\beta}\, nE.NE}{\alpha\alpha}$, sed $nE.NE = \overline{Mn}^2 - \overline{ME}^2 = \mu + \lambda\lambda, -\lambda\lambda + 2\lambda x - xx = -xx + 2\lambda x + \mu$, ergo $FK = \frac{\sqrt{\alpha\gamma - \beta\beta}}{\alpha} \times \sqrt{(-xx + 2\lambda x + \mu)}$ $= \sqrt{(\frac{\beta\beta - \alpha\gamma}{\alpha\alpha} xx + \frac{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}{\alpha\alpha} x + \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{\alpha\alpha})} = y + \frac{\beta x + \delta}{\alpha}$, quare $y = \frac{-\beta x}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha} + \sqrt{(\frac{\beta\beta - \alpha\gamma}{\alpha\alpha} xx + \frac{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}{\alpha\alpha} x + \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{\alpha\alpha})}$. Qui erat locus construendus.

VII. Omnes reliquos casus percensere, qui a signorum varietate pendent, nimis longum foret, sed eorum loco libet construere æquationem generalem quam Illustriss. *Marchio Hospitalius* in suis sectionibus conicis pag. 226 pro ellipsibus instar canonis dedit, cum qua omnes casus particulares locorum ad Ellipsis comparavit. Ejus æquatio hæc est

$$yy - \frac{2nxy}{m} + \frac{nn}{mm} xx - 2ry + \frac{2nr}{m} x + rr - \frac{ptt}{2t} + \frac{pss}{2t} = 0.$$
$$\qquad\qquad + \frac{eep}{2mmt} \qquad\qquad - \frac{2eps}{mt}$$

Sunt ergo $\alpha = 1$, $\beta = \frac{-n}{m}$, $\gamma = \frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$, $\delta = -r$, $\varepsilon = \frac{nr}{m} - \frac{eps}{mt}$, $\Phi = rr - \frac{ptt}{2t} + \frac{pss}{2t}$. Ergo $\alpha\gamma - \beta\beta = \frac{eep}{2mmt}$, $\beta\delta - \alpha\varepsilon = \frac{eps}{2mmt}$, $\beta\delta - \alpha\varepsilon = \frac{eps}{2mt}$, $\delta\delta - \alpha\Phi = \frac{ptt - pss}{2t}$, et $\lambda (= \frac{\beta\delta - \alpha\varepsilon}{\alpha\gamma - \beta\beta}) = \frac{ms}{e}$, $\mu (= \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{\alpha\gamma - \beta\beta}) = \frac{mmtt - mmss}{ee}$, ergo $\sqrt{(\lambda\lambda + \mu)}$ $= \frac{mt}{e}$, hinc $Gg (= \frac{2\beta r \sqrt{\lambda\lambda + \mu}}{\delta}) = \frac{2nt\eta}{er}$ (vel propter $n\eta = er$) $= 2t$. Denique $\pi (= \frac{2\delta . \overline{\alpha\gamma - \beta\beta} \sqrt{\lambda\lambda + \mu}}{\alpha\alpha\beta\eta}) = \frac{epr}{n\eta} = p$. Ex hisce jam manat constructio facilis.

Ca-

Fig. 6. Capiatur in PQ pars $AC = \frac{mr}{n}$ verſus P, et in Ll pars $AB = r$, ductaque CBO, abſcindantur porro in PQ partes $AM (= \lambda) = \frac{ms}{e}$, dein $MN = Mn = \frac{mt}{e}$, ductisque NG, ng et MO, invenietur $Gg = 2t$, quare ſi circa hanc diametrum parametro $\pi = p$, Ellipſis GRgr deſcribatur erit ea locus æquationis Hoſpitalianæ.

VIII. Si in æquatione $Z = \sqrt{\left(\frac{\beta\beta - \alpha\gamma}{\alpha} xx + \frac{2\beta\delta - 2\alpha\varepsilon}{\alpha\alpha} x + \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{\alpha\alpha}\right)}$ quantitas $\beta\beta$, excedit $\alpha\gamma$, æquatio eſt ad *Hyperbolam*, fit enim $Z = \frac{\sqrt{\beta\beta - \alpha\gamma}}{\alpha} \times \sqrt{xx + 2\lambda x + \mu}$ exiſtentibus $\lambda = \frac{\beta\delta - \alpha\varepsilon}{\beta\beta - \alpha\gamma}$, et $\mu = \frac{\delta\delta - \alpha\Phi}{\beta\beta - \alpha\gamma}$, atqui $xx + 2\lambda x + \mu = 0$ præbet $x = -\lambda \pm \sqrt{\lambda\lambda + \mu}$. Capiantur ergo $AM = -\lambda = \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\beta\beta - \alpha\gamma}$, et $MN = Mn = \sqrt{\lambda\lambda + \mu}$, ductisque NG, ng et MO parallelis Ll, erit Gg Diameter
Fig. 7. $= \frac{2\beta\gamma\sqrt{\lambda\lambda + \mu}}{\delta}$, et parameter $\pi = \frac{2\delta, \overline{\beta\beta - \alpha\gamma}\sqrt{\lambda\lambda + \mu}}{\alpha\alpha\beta\eta}$. Ex hiſce datis hyperbola facile deſcribitur. Demonſtratio fere eadem eſt ac pro Ellipſi, in §. præcedenti tradita.

IX. Si $x = \infty$, fiet $\sqrt{xx + 2\lambda x + \mu} = x + \lambda$, quare deprehendetur $y = \frac{-\beta x}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha} \pm \frac{x\sqrt{\beta\beta - \alpha\gamma}}{\alpha} \pm \frac{\beta\delta - \alpha\varepsilon}{\alpha\sqrt{\beta\beta - \alpha\gamma}}$, Cujus conſtructio breviter huc redit, ut in Ll capiantur $BL = Bl = \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\alpha\sqrt{\beta\beta - \alpha\gamma}}$, atque per centrum hyperbolæ O ducantur LOr et LOR erunt hæ, binæ ejus aſymptotæ.

X. Si in æquatione A coefficiens α evaneſcit æquatio mutatur in $y = \frac{-\gamma xx - 2\varepsilon x - \Phi}{2\beta x + 2\delta} = \frac{-\gamma x}{\beta 2} + \frac{\gamma\delta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta} + \frac{2\beta\delta\varepsilon - \beta\beta\Phi - \gamma\delta\delta}{2\beta\beta \times \overline{\beta x + \delta}}$ æquationem ad hyperbolam inter aſymptotas. Ejus con-

constructio ita habet: in linea PQ capiatur $AC = \frac{\gamma\delta - 2\beta\varepsilon}{\beta\gamma}$, et in Ll, portio $AB = \frac{\gamma\delta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta}$, ductaque BC erit una ex asymptotis, facta deinceps $AN = \frac{\delta}{\beta}$, ductaque MN parallela AB occurret ea alteri CB in centro hyperbolæ O, quare facta insuper $Al = \frac{\Phi}{2\delta}$, si intra asymptotas OC et OM per punctum l hyperbola Ff describatur erit ea locus Fig. 8.

$$2\beta xy + \gamma xx + 2\delta y + 2\varepsilon x + \Phi = 0.$$

DE AEQUINOCTIORUM ET SOLSTITIORUM MOMENTIS, NEC NON DE OBLIQUITATE ECLIPTICAE OBSERVANDIS.

Auth. F. C. *Mayero.*

1.

Venit mihi in mentem modus, quo has res omnes observationibus definire licet; Nescio autem an aliis jam notus fuerit? aut praxi satis accommodus futurus sit? Dicam tantum quid meditatus sim. Mens. Mart. 1729.

2. Observetur quotidie solis sub meridiano et momentum et altitudo, (quod vulgo fit) quavis etiam nocte (dieve si possit fieri) stellæ unius alterius vefixæ culminatio quam accuratissime observetur: Dico, si observatio talis per integrum annum continuetur, ejus ope innotescere æquinoctiorum et solstitiorum momenta, itemque eclipticæ obliquitatem.

3. Nam

3. Nam per tempus quod intercessit culminationem solis et stellæ innotescit ascensio recta stellæ a loco solis (quem in meridie præcedente obtinuit) numerata, vel vicissim, A. R. loci solaris culminantis, a stella numerata; Exinde, si observationes sint quotidianæ, incrementa A.Ræ solaris diurna fiunt nota. Imo, etsi cœli obscuritas impediat quotidianas observationes, nihilominus assignare licet cuilibet meridiei solis A.Rm a stella; Nam quia incrementa hæc intra dies aliquot non multum variant, distributione facta idonea (ope interpolationis methodi, aut alia adhibita dexteritate) arcus ejus qui intra duas observatas A.Ras intercipitur, per totum annum scire licet, quantum distiterit sol a stella (quoad A.Rm) quolibet meridie, imo (instituta proportione debita) quolibet temporis momento.

4. Deinde ex duabus altitudinibus meridianis æqualibus, cis et ultra solstitium factis, reperiuntur duo loca antiscia in quorum medio exacte jacet solstitium. Locorum antisciorum As. Ræ a stella dantur (§. 3.) ergo et arcus interjectus, cujus semissis addita uni antiscio vel demta alteri ascensionem a stella rectam prodit, quam sol obtinuit solstitii momento: Hæc Asc.R. inter observationes illius anni habitas (§. 3.) disquiratur, ut pateat quo temporis momento hæc Asc. R. sive ipsum solstitium observatum fuerit. Equidem nec altitudines meridianæ prorsus æquales, nec Asc. recta solstitii exacte inter observationes (§. 3.) habitas continebuntur

tur (nisi rarissime): At jam monui (§. 3.) partem proportionalem detegere momenta extra meridiem sita.

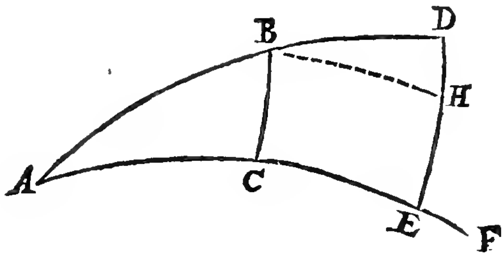
5. Cognitis solstitiis, æquinoctia non amplius ignota manent; Nam eorum Asc. rectæ distant quadrante ab Asc. recta solstitii alterutrius, dantur ergo eorum Af. Ræ a stella, quæ in catalogo observationum (§. 3.) quæsitæ tempus produnt, in quod istæ Af. Ræ adeoque ipsa æquinoctia ceciderunt.

6. Hic ergo modus est observandi puncta cardinalia, quem duo commoda habere autumo; primum est, quod quæsita non ex una aut paucis, sed pluribus observationibus elici possint, sic enim ex consensu aut dissensu calculi observationes certæ ab incertis quodammodo discernuntur, et animi certitudo firmatur. Secundum est, quod a refractionibus ne hilum quidem turbetur, quæ sane res magni momenti esse censetur, nimium enim insidiosæ sunt refractiones. Quod si insuper accedat justum horologium, et quadrans exacte meridionalis et stabilis, non video quid attentum Astronomum impedire possit amplius quo minus omnia impetret quæ optaverat.

7. Restat ut explicem quomodo per has observationes obliquitas eclipticæ inveniatur. Hic mox in limine moneo, rem non æque facile ut ante procedere; Calculus enim molestior evadit et refractionum insidiæ verendæ sunt nonnihil, quod statim palam fiet. Præmittenda sunt autem ad rei

intelligentiam lemma unum et problema, quibus ſtabilitis, reliqua plana ſunt. Lemma igitur hoc eſto:

8. Sint datæ duorum arcuum tangentes, majoris quidem $= p$ et minoris $= q$. Dico: tangentem ſummæ horum arcuum eſſe $= rr \frac{p+q}{\pm pq \mp r^2}$ (ubi r ſignificat radium). Demonſtratio lemmatis in elementis trigonometriæ tradita poteſt omitti; ſequatur problema.



9. Datu arcu DH, quo differunt arcus DE et BC ad AF normales; datisque arcubus AC et AE; invenire angulum ad A.

Sint Sinus arcus AC $= m$
Sinus arcus AE $= n$.
Tangens arcus DH $= t$
Contangens anguli ad A $= x$.

Eſt autem per præcepta trigonometriæ ſphæricæ, ut cotangens ang. A, ad radium, ita ſinus arc. AC ad tangentem arcus BC. Sive

$x : r = m : \frac{mr}{x} =$ tangenti arcus BC ſive HE.

Exin-

Exinde porro conficitur tangens arcus DE (per §. 8.) $= \frac{t \pm \frac{mr}{x}}{\mp \frac{tmr}{x} \pm r} r^2 = r \frac{tx \pm mr}{\pm mt \mp rx}$ Eadem vero tangens invenitur per priorem analogiam, hoc modo: $x : r = n : \frac{nr}{x} =$ tang. arc. DE.

Formetur ergo æquatio et reducatur $\frac{nr}{x} = \frac{tx \pm mr}{\pm mt \mp rx} r$ unde fit

$$\frac{\pm \sqrt{(m \pm n)^2 r^2 \mp 4mnt^2} - (m \pm n) r}{2t} = x.$$

Hac regula invenitur cotangens anguli ad A; nec adeo difficilis est executu, uti videri posset; ostendam suo tempore exemplis, quomodo per solos logarithmos effici possit.

10. Nunc ad propositum revertar: Repræsentet in priori schemate arcus AF æquatorem; arcus ABD eclipticam; Angulus ad A sit obliquitas eclipticæ, et arcus BC, DE, sint duæ diversæ declinationes solis. Per superiores observationes innotescunt ascensiones rectæ solis tam a stella (§. 3.) quam a principio arietis (§. 5.) dantur ergo arcus AC et AE. Porro (per §. 2.) dantur quotidianæ solis altitudines maximæ, earumque differentiæ; hæ vero differentiæ sunt simul differentiæ declinationum solarium; ergo per observationes easdem notus sit arcus DH, ex quibus omnibus elicitur angulus ad A, sive obliquitas eclipticæ. (per §. 9.) Q. E. J.

11. Omnia, puto, plana forent, modo arculus DH refractionibus obnoxius non esset: Dispiciam ergo quantum refractiones valeant in hunc arcum

cum. Si refractiones ubique æquales forent, arcus hic salvus evaderet, nam quantum una altitudo solis sive declinatio BC turbaretur, tantum turbaretur quoque altera DE, ergo differentia DH nil turbaretur, quod per se clarum est; ast quia declinatio BC (si borealis sit) plus turbatur quam altera DE, patet arcum DH turbari quidem, sed non nisi a refractionum differentiis; hoc est, quantum refractio in BC major est refractione in DE, tantum quoque arcus DH justo major observatur. Existimo autem, si Authorum celebrium refractionum tabulæ exactissimæ non sint, satis tamen exactas esse quoad refractionum differentias, quia in eas minima pars erroris redundat, maxime in minoribus majorum altitudinum refractionibus. Corrigatur ergo arculus DH per differentias refractionum in tabulis Authorum obvias, eligantur autem declinationes boreales, sic error qui irrepere potest, erit, meo judicio, pene contemnendus.

12. Ne autem vel curiosissimus quisquis habeat quod ipsum cruciet, ostendam alio tempore modum quo omnis a refractionibus formido e medio tollatur in hoc negotio, nihilque præter instrumentorum et observatoris exactitudinem animum suspendere possit. Hæc vero pro nunc satis sunto.

PRO-

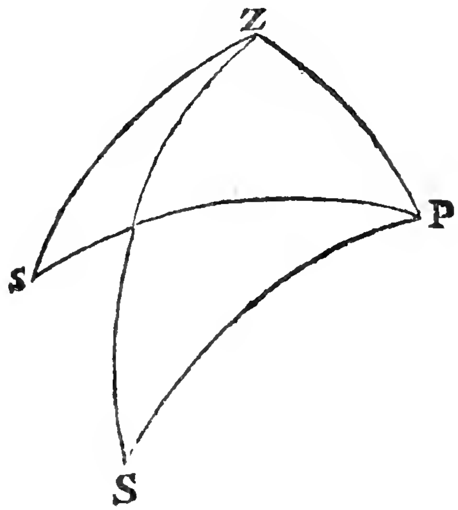
PROBLEMA
TRIGONOMETRICOSPHAERICUM.
Auth. F. C. Mayero.

1.

Si duo triangula ſphaerica ſibi mutuo ita inſeruntur, ut duae partes in uno ſint duabus partibus in altero aequales vel coincidentes, ſi præterea quatuor aliae partes cognitae ſunt vel datae; reliquae ſex omnes determinatæ ſunt quoque, et reperiri poſſunt. Multa hujus generis problemata comminiſci licet, in quibus nonnulla ſolutu difficilia ſunt valde. Horum praecipua, uſusque aſtronomicos non contemnendos habentia, ſolvere mihi contigit, quae, quia ab aliis nondum ſatis exculta videntur, in medium proferre, intelligentiumque judicio ſubdere volui. Si occaſio aliquando faverit ut idoneis obſervationibus theoriam hanc illuſtrare detur, officio non deero communicaboque reperta.

2. Primum itaque nunc deſcribendum problema ſic ſe habet: In duobus triangulis ſphaericis SPZ et sPZ, communi baſi PZ inſiſtentibus, et latera SP, sP aequalia habentibus, ſint dati anguli ad P et Z omnes: quaeruntur reliqua.

Sit



Sit igitur

Sinus anguli	$SPZ = A$	cosinus ejus	$= C$		
- - -	$sPZ = a$	- - -	$= c$		
Sinus anguli	$SZP = P$	cosinus	$= Q$	cotangens	M
- - -	$sZP = p$	- - -	$= q$	- -	m
Sinus baseos	$PZ = x$	cosinus	$= y$		
- lateris	$PS = Ps = t$	- - -	$= z$		

radius $=$ r

propter analogiam inter latera et sinus angulorum lateribus oppositorum erit quoque.

Sinus lateris $SZ = \frac{At}{P}$, qui ponatur $= f$ ejus cosinus $= g$. Cum igitur in triangulo SPZ latera omnia denominata sint, una cum angulis SPZ, et SZP poterunt duae aequationes formari ope theorematis in in II. Tom. Comment. pag. 23. atque tractari ſequente modo:

1 - - $C = \frac{rg - yz}{tx} r$ adeoque

2 - - $g = \frac{txC + yzr}{rr}$ item

3 - - $Q = \frac{rz - yg}{fx} r$, adeoque

4 - - $g = \frac{rrz - fxQ}{ry}$

ex aeq. 2 et 4 fit

5 - - $txCy + y^2 rz = r^3 z - rfxQ$

ſubſtituantur pro f et y^2 aequivalentia

ſc. $f = \frac{At}{P}$ et $y^2 = rr - xx$. Fiet ita

6 . . $txCy - xxrz = -\frac{rxtAQ}{P}$

dividatur aequatio per tx et transponantur termini

7 . . $Cy + \frac{rAQ}{P} = \frac{rxz}{t}$ vel

8 . . $Cy + AM = \frac{rxz}{t}$ (ob $\frac{rQ}{P} = M$)

Quod ſi idem calculus pro altero triangulo sPZ repetatur, invenietur denuo

9 . . $cy + am = \frac{rxz}{t}$

igitur ex 8 et 9. fiet porro

10 . . $(c - C) y + am - AM = 0$. ſive

11 . . $y = \frac{AM - am}{c - C}$ Q. E. J.

3. Formula igitur inſervit inveniendo lateri PZ, quo dato, reliqua omnia per communia praecepta trigonometrica indagari poſſunt. Ceterum ut formula ad calculum aptior fiat, ponatur ſinus ſemiſummae angulorum SPZ et sPZ $= N$, ſinus vero ſemidifferentiae $= n$. Ita fiet $c - C = \frac{2Nn}{r}$ (per §. 9. pag. 17. commentar. Tom. II.) et conſequenter $y = \frac{AM - am}{2Nn} r$.

4. Notandum eſt in ſolutione problematis omnes triangulorum partes quadrante minores ſumtas fuiſſe; eaque propter formulam $\frac{AM-am}{2Nn}r$ pro ſolo hoc caſu valere. Quod ſi igitur angulus sZP obtuſus fuerit, erit ejus cotangens negativa ($=-m$) adeoque hoc caſu fiet $y=\frac{AM+am}{2Nn}r$. Si uterque angulus ad Z obtuſus fuerit fiet $y=\frac{am-AM}{2Nn}r$. Si tandem angulus SZP rectus fuerit, fit $M=o$ adeoque $y=\frac{amr}{2Nn}$. Eodem modo ceteri caſus definiuntur.

5. Uſum problematis aſtronomicum ut paucis attingam, notandum eſt S et s deſignare duo loca ſideris alicujus in ſuo parallelo, quod declinationem intra horas aliquot aut nihil aut inſenſibiliter mutat. Angulos ad verticem Z eſſe azimuta ſideris obſervata, angulos ad P eſſe horarios azimutis datis reſpondentes. Eſſe etiam PZ altitudinem aequatoris, et PS$=$Ps, declinationis complementum, item, ZS et Zs eſſe altitudinum complementa.

6. Datis itaque obſervatione ſideris alicujus declinationem ad ſenſum intra paucas horas non mutantis duobus azimutis, vel eorum complementis ad duos rectos SZP et sZP, angulisque horariis SPZ et sPZ ad dicta azimuta pertinentibus, invenire licet. 1° altitudinem aequatoris PE ſive poli, quae eſt prioris complementum ad 90°. 2°. declinationem ſideris, cujus ad 90 complementum eſt PS$=$Ps, 3°. altitudinem ſideris ad momenta obſervationis, latera enim SZ et sZ ſunt altitudinum complementa ad 90°.

7. Quod

7. Quod si ad momenta transituum per azimuta capiantur simul altitudines visae, atque ab iis auferantur altitudines verae ante repertae, dispalescet sideris refractio, si modo parallaxi careat, aut residuum refractionis a parallaxi, si parallaxi afficiatur: Secernitur autem parallaxis a refractione, si per aliud sidus a parallaxi liberum refractio ejusdem altitudinis simul indagetur, residuum enim illud ab hac refractione subductum relinquit parallaxim quaesitam, unde quartus hujus problematis usus est, quod per illud inveniantur siderum refractiones, et 5to eorundum parallaxes.

8. Aliis vulgo methodis indagantur, altitudo poli, declinationes siderum, eorumque refractiones et parallaxes, nec memini methodum a me recensitam cuiquam in mentem venisse antea. Differt autem mea haec methodus ab aliis, quod praeter observationum possibilitatem et exactitudinem nil supponat nisi motum primum aequabilem, aequabiles etiam aut observatione definiendos motus planetarum diurnos et horarios quoad ascensiones eorum rectas, reliqua pure geometrica sunt. Aliae vero methodi praeter supposita ante recensita, precario vel ex conjectura assumunt ut cognita, mox theoriam solis, mox declinationes siderum; mox refractiones; et quae sunt alia &c. &c. Vincit ergo mea methodus paucitate suppositorum.

9. Posset alicui observationum facilitas vel exactitudo scrupulum movere. Videamus quid differam ego ab aliis. 1. Requiro horologium oscilla-

torium probum. 2. Momentum quo ſidus ad verticalem azimuthi alicujus appellit. 3. Quadrantem quo altitudines viſae capiuntur. 4. Inſtrumentum vel obſervandi methodum idoneam qua azimutha exacte definiuntur. De horologio oſcillatorio notum eſt, quam commendetur ab omnibus, ut non opus ſit plura dicere. Appulſus ſiderum ad verticales ſive in tubo ad filum verticale, vel in camera obſcura ad filum horizontale extenſum (prout Dnus Pr. Del'isle facere ſolet) vel et ad utrumque latus dioptrarum Tychonicarum obſerventur, ſatis diſtincte percipiuntur, ita ut exercitatus obſervator nunquam facile unius minuti ſecundi errorem committat; igitur et hoc requiſitum ſatis exacte obtinetur. Quod quadrantem attinet, eo utuntur etiam alii pro ſuis methodis, inſtruunt eum quoque Aſtronomi hodierni ejusmodi artificiis, ut fidem non parvam habeat. Igitur quoad tria priora requiſita nulla difficultas mihi objici poteſt qua magis premar ac alii.

10. Verum enim vero azimuthorum inventio ët determinatio accurata, operam faceſſit forſan? Tycho jam de incertitudine azimuthorum conqueſtus eſt. Hodierni quoque fere omnes aſtronomi azimuthorum uſum quocunque modo effugiunt, conſcii, opinor, difficultatum quibus obnoxia eſt eorum obſervatio. Me quod attinet, fateor, nullum dum rei experimentum cepi; at rem perpendens, inveniſſe me puto modum non unum, queis, niſi fallor azimuthorum obſervatio aeque facilis et certa, ſaltem pro uſu praeſentis problematis, evadit, ac obſervationes

ones aliae. Multum me confirmavit inspectio schematismorum quibus Romeri machinae astronomicae novae depinguntur, quas inter et azimutale instrumentum est, cui sine dubio Romerus aliquid tribuit cum ei locum inter reliquas fecerit. At de hac re ut plura dicam nunc nil attinet. Dixi, quae problemati meo valorem conciliare queunt. Dicant alii, quae illum aut adimere possint, aut minuere.

CONSIDERATIO CURVARUM IN PUNCTUM POSITIONE DATUM PROJECTARUM, ET DE AFFECTIONIBUS EARUM INDE PENDENTIBUS.

Auctore Iac. Hermanno.

I.

Curva AHD mihi in punctum E projici dicitur, cum ex singulis ejus punctis ad punctum illud rectæ ducuntur, ut HE, BE, CE, AE, DE, &c. Has lineas deinceps *radios* projectionis, et angulos HED, BEA, CED, angulos projectionis vocabo, atque radios EB, EC ad communem angulum pertinentes, *coincidentes*. Sinus cujuslibet anguli projectionis CED dicatur m, ejus cosinus $n = \sqrt{(1-mm)}$, existente sinu toto $=1$. Dicantur radii EB(EC) $=z$, applicatae orthogonales BF(CG) $=y$, erunt $y=mz$, EF(EG) $=nz$. Tab. III. Fig. I.

 II. In

II. In doctrina locorum Carteſiana hactenus recepta, curvarum natura per aequationes coordinatas AF(AG) et BF(CG) atque quantitates conſtantes involventes explicatur. Sed pari jure per relationem quam radii projectionis et ſinus aut coſinus angulorum projectionis inter ſe ſervant, exponi poteſt, ex hac enim conſideratione manant proprietates curvarum aeque elegantes ac ſunt illae quae conſueto more eliciuntur.

III. Ad id oſtendendum opus eſt, ut aequatio curvae more conſueto coordinatas AF(AG)$=x$ et BF(CG)$=y$ continens convertatur in aliam, in quam radii tantum projectionis et ſinus aut coſinus angulorum projectionis ingrediuntur, quod facile ſuccedet, ſufficiendo in data aequatione mz pro y, et $nz-a$ pro x, poſita nempe EA$=a$. Sed ſi punctum datum E caderet inter A et D, tunc pro x, ſcribendum eſſet $a-nz$. His poſitis.

IV. Sit aequatio Parabolae $yy=px$, exiſtente p parametro, cumque ſint $y=mz$, et $x=nz-a$, aequatio mutabitur in $mmzz=npz-ap$, cujus binae radices dant radios coincidentes majorem EC et minorem EB, nempe

$$EC=\frac{np+\sqrt{(nnpp-4mmap)}}{2mm}$$

$$EB=\frac{np-\sqrt{(nnpp-4mmap)}}{2mm}, \text{ adeoque}$$

$$EC+EB=\frac{np}{mm}$$

$$EC-EB=BC=\frac{\sqrt{(nnpp-4mmap)}}{mm}$$

$$EC.EB=\frac{ap}{mm}$$

Hinc

Hinc si $BC = \frac{\sqrt{(nnpp-4mmap)}}{mm} = 0$, id est $a = \frac{nnp}{4mm}$, fiet $EH = z = \frac{np}{2mm}$, adeoque $a \left(= \frac{nnp}{4mm}\right) = \frac{1}{2}nz$, atque adeo subtangens Parabolae duplo abscissae, ut fieri oportet.

V. Sit generalius aequatio ad sectiones conicas $yy = gxx + 2bx + i$, haec mutabitur

$$\begin{array}{llll} \text{in} & +mmzz = & -2agnz & +aag, \\ & -gnn & +2bn & -2ab \\ & & & +i \end{array}$$

surrogatis in ea mz et $nz-a$, y et x. Ex ista vero eliciuntur

$$EC = \frac{agn-bn}{gnn-mm} + \sqrt{\left(\overline{\frac{agn-bn}{gnn-mm}}\Big|^{2} - \frac{aag+2abi}{lgnn-mm}\right)}$$

$$EB + \frac{agn-bn}{lgnn-mm} - \sqrt{\left(\overline{\frac{\overline{ag-b}\,n}{gnn-mm}}\Big|^{2} - \frac{aag+2ab-i}{lgnn-mm}\right)}. \quad \text{Ergo}$$

$$EC + EB = \frac{\overline{2ag-2b}\,n}{gnn-mm}$$

$$EC - EB = 2\sqrt{\left(\overline{\frac{\overline{ag-b}\,n}{gnn-mm}}\Big|^{2} - \frac{aag+2ab-i}{lgnn-mm}\right)}.$$

$$EC.EB = \frac{aag-2ab+i}{lgnn-mm}.$$

Hinc si $EC - EB = 0$, fiet $a = \frac{bm + \sqrt{(\overline{gnn-mm} \times \overline{gi-bb})}}{gm}$, adeoque $EH \left(= \frac{\overline{ag-b}\,n}{gnn-mm}\right) = \frac{n\sqrt{(gi-bb)}}{m\sqrt{(gnn-mm)}}$. Ex hisce jam passim notas proprietates Diametrorum in Sectionibus Conicis et multa alia facili negotio deduci possent, sed nolo in rebus jam satis cognitis atque usu tritis prolexior esse.

VI. Si aequatio curvae AHD sit $y^3 = bxy - x^3$, Fig. 2. invenietur propter $y = mz$ et $x = nz - a$, aequatio $-m^3z^3 = -n^3z^3 + 3annzz - 3aanz + a^3$, quae rejectis omnibus ad eandem aequationis partem abit

$$\begin{array}{llll} \text{in} & +m^3z^3 & -3annzz & +3aanz - a^3 = 0, \\ & -n^3 & -bmn & +abm \end{array}$$

cu-

cujus tres radices reales totidem radios ad unum eundemque projectionis angulum pertinentes praebet, ex quo proinde constat lineam quamlibet per punctum projectionis E ductam curvam AHD in tribus punctis secare, quoties radices illae omnes inaequales sunt. Sed si $a = 0$, hoc est, si punctum projectionis cadit in ipsum initium abscissarum x, invenietur tunc $z = \frac{bmn}{m^3 + n^3}$.

VII. Sed missis pluribus exemplis aliis, nunc rem paulo invertere libet quaerendo curvas AHD in quibus radii projectionis coincidentes EC et EB, determinatam aliquam relationem inter se habeant. Hujus generis Problema primus quod sciam Cel. *Joh. Bernoulli* attigit in schediasmate Actis Erudit. 1696 pag. 264 inserto, cui titulus fuit, *Supplementum Defectus Geometriae Cartesianae circa inventionem locorum*, in quo duorum casuum solutiones exhibuit celata tamen analysi et demonstratione. Eorum primus est, ut inveniantur curvae AHD, in quibus ducta ex puncto projectionis E radio EBC rectangulum CEB sit ubique aequale quadrato tangentis EH vel dato plano, ad hujus solutionem exhibuit aequationes sequentes $y = ax^\alpha + ax^{2-\alpha}$, vel $y = ax^\alpha + ax^{2-\alpha} + bx^\beta + bx^{2-\beta}$, vel $y = ax^\alpha + ax^{2-\alpha} + bx^\beta + bx^{2-\beta} + cx^\gamma + cx^{2-\gamma}$, vel $y =$ quantitati hoc modo quousque libuerit continuatae, in quibus aequationibus $x = EB(EC)$ et $y = BF(CG)$, et hae in dato angulo ad AD inclinatae sunt. Alter casus cujus etiam solutionem sine demonstratione dedit, est, ut inveniantur curvae in quibus EC + EB ubique $= 2$EH, pro

pro his curvis dedit aequationem $y = x.\overline{x-x.x}^{\,n}$. Sed in programmate quod ineunte anno 1697 Groningae edidit, quo Geometras ad solutionem problematis de Curva celerrimi descensus invenienda invitabat, problema paulo generalius proposuit, postulando curvas, in quibus $\overline{EC}^{a} + \overline{EB}^{a}$ ubique constantem summam efficere debet. Hujus solutiones exhibuerunt Geometrae illius aevi Illustrissimi *Leibnitius*, *Jac. Bernoulli*, *Marchio Hospitalius*, atque *Newtonus*. Videantur Acta Erudit. 1697. Mens. Maj. Sed nullus eorum solutionis suae analysin edidit.

VIII. Primo intuitu videntur haec problemata facillima et tantum non ludicra esse; ecquid enim facilius est, quam ut in data curva ABH ducta indefinite per punctum datum E recta EBC, in ea invenire possit punctum C tale, ut tota EC ad ejus partem EB relationem pro libitu assignatam habeat. Ultro fateor nihil esse hoc facilius, sed non est id de quo agitur. Curva enim ABH non debet esse data, sed est ea quae quaeritur: nam si ABH est data et per constructionem expositam invenitur altera HCD, non sequitur quod haec altera pars sit continuatio primae ABH, ita ut utriusque natura per unam eandemque aequationem localem exponatur, sed fere semper curvae anterioris ABH aequatio diversa esset ab ea quae naturam curvae alterius exprimit, uno verbo ut rem expediam, curvae ABH et DCH essent diversae, et quaeruntur curvae AHD Fig. 3.

ei

in quibus radii EC, EB assignatam inter se relationem habeant et tamen utraque earum pars ABH et DCH una eademque aequatione locali exponatur.

IX. Ad ejusmodi problematum solutionem vocando EC(EB)$=z$; CG(BF)$=y$, et EG(EF)$=x$, adhibeo aequationem quadraticam $Z^{2\eta}-2QZ^{\eta}+R=0$, sit EC$=Z$, et EB$=z$, erit $Z^{\eta}=Q+\sqrt{(QQ-R)}$ et $z^{\eta}=Q-\sqrt{(QQ-R)}$, ipsae vero Q et R ex Problematis circumstantiis varie dantur.

X. Quod si ergo curvae AHD quaerantur in quibus EC.EB$=\overline{EH}^2$ problemati ilico satisfiet, nam quia $Z^{\eta}=Q+\sqrt{QQ-R}$, et $z^{\eta}=Q-\sqrt{QQ-R}$, fiet utique $Z^{\eta}z^{\eta}=R$, atqui debet esse $Zz=cc$, vocando tangentem EH$=c$, ergo $Z^{\eta}z^{\eta}=c^{2\eta}=R$; itaque in locum ipsius R poni debet in aequatione $z^{2\eta}-2Qz^{\eta}+R=0$, quantitas $c^{2\eta}$, et habetur $z^{2\eta}-2Qz^{\eta}+c^{2\eta}=0$, vel $2Q=z^{\eta}+c^{2\eta}z^{-\eta}$, sed quid est Q? Si Q esset constans, aequatio $2Q=z^{\eta}+c^{2\eta}z^{-\eta}$, non esset ad curvam, sed ad duo puncta. Quare opus est, ut Q sit variabilis, et tamen eadem pro duobus punctis B, et C; nempe si angulus CED sit alius major aut minor etiam Q debet esse alia major vel minor, ita tamen, ut eadem sit pro radio minore AB ac pro majore AC; fiat ergo $Q=b+\frac{m}{2a}$, seu quaelibet quantitas composita ex constante b et sinu anguli CED diviso per $2a$, vel quia $y=mz$ adeoque $m=\frac{y}{z}$, $Q=b+\frac{y}{2az}$, adeoque $2b+\frac{y}{az}=z^{\eta}+c^{2\eta}z^{-\eta}$, vel $y=-2abz+az^{1+\eta}+ac^{2\eta}z^{1-\eta}$, sit $\alpha=\eta+1$, aequatio mutabitur in $y=-2abz+az^{\alpha}+ac^{2\alpha-2}z^{2-\alpha}$, faciendo vero $b=0$,

et

et $c=1$, fit $y=az^{\alpha}+az^{2-\alpha}$, et haec eſt prima aequatio earum quas Cel. *Joh. Bernoulli* dedit in ſolutionem Problematis, ſed reliquae ejus aequationes methodo hoc loco expoſita non eliciuntur, earum tamen in locum ex infinities infinitis, quae omnes problemati ſatis faciunt, adducam ſequentes.

$$1.\ \overset{\circ}{a}z^{\beta}+byz^{\beta-1}+cyyz^{\beta-2}\ \ldots\ +vy^{\beta}\ \ldots\ldots\ldots\ =z^{\alpha+\beta}+c^{2\alpha-2}z^{2+\beta-\alpha}$$

$$2.\ \overset{\circ}{a}z^{\beta}+bxz^{\beta-1}+cxxz^{\beta-2}\ \ldots\ +vx^{\beta}\ \ldots\ldots\ldots\ =z^{\alpha+\beta}+c^{2\alpha-2}z^{2+\beta-\alpha}$$

$$3.\ \overset{\circ}{a}z^{\beta}+byz^{\beta-1}+cxz^{\beta-1}+eyyz^{\beta-2}+fxyz^{\beta-2}+gxxz^{\beta-2}+lx^{\beta}+vy^{\beta}=z^{\alpha+\beta}+c^{2\alpha-2}z^{2+\beta-\alpha}$$

Ex infinities infinitis tranſcentibus unam

$$4.\ dy=-\overset{\circ}{a}dx+\frac{exdz-ydz}{z}+(z^{\eta-1}+c^{2\eta}z^{-\eta-1})\times(zdx-xdz.)$$

XI. Invenire curvas AHD in quibus $\overline{EC}^{\alpha}+\overline{EB}^{\alpha}$ facit ubique ſummam conſtantem. Quoniam (§. IX.) $Z^{\eta}=Q+\sqrt{(QQ-R)}$ et $z^{\eta}=Q-\sqrt{(QQ-R)}$ fiet $Z^{\eta}+z^{\eta}=2Q$, fac $\eta=a$, erit $Z^{a}+z^{a}=2Q=2c^{a}$, quare $Q=c^{a}$. Surrogataque hac litterae Q aeſtimatione in aequatione $Z^{2\eta}-2QZ^{\eta}+R=0$, proveniet $z^{2a}-2c^{a}z^{a}+R=0$, et $R=2c^{a}z^{a}-z^{2a}$. Haec etiam ſuppeditat, infinities infinitas curvas quaeſtioni ſatisfacientes, nam ſi $R=b+cm+dn+emm+fmn+gnn+$ &c. habebimus $bz^{\beta}=cyz^{\beta-1}+dxz^{\beta-1}+eyyz^{\beta-2}+fxyz^{\beta-2}+gxxz^{\beta-1}+$ &c. $=2c^{a}z^{\alpha+\beta}-z^{2a+\beta}$. Si b, d, e, f, g &c. $=0$, $a=1$, et c in parte ſiniſtra aequationis $=1$, in parte vero dextra $c=\frac{1}{2}$, prodibit $y=x.x-x.x$, quae eſt aequatio Cel. *Joh. Bernoulli* cum in ea $n=1$.

Sed ipſa quoque $y=x.\overline{x-xx}^{n}$ ex praecedentibus facile

 de-

deducitur, nam $R = 2c^a z^a - z^{2a}$ praebet $R^n = (2c^a - z^a)^n z^{na}$, si nunc R^n facias $= b + em + fn + gmm + hmn +$ &c. habebis $bz^\beta + eyz^{\beta-1} + fxz^{\beta-1} + gyyz^{\beta-2} + hxyz^{\beta-2} +$ &c. $= z^{an+\beta} \times (2c^a - z^a)^n$, in qua si $a = 1$, $b = 0$, $g = 0$, $h = 0$, &c. invenietur $y = z^{n+1}(1-z)^n$, posita $c = \frac{1}{2}$, id est $y = z.\overline{z - zz}^n$, ut habet solutio Bernoulliana, sed mallem adhibere $y = -b + z.\overline{z - zz}^n$.

XII. Invenire curvas AHD in quibus EC^m. $EB^n = EH^{m+n}$. Quoniam (§. IX.) $Z^\eta z^\eta = B$, vel posita $\eta = m$, $Z^m z^m = R$, adeoque $Zz = R^{\frac{1}{m}}$, et $Z^m z^n = Rz^{n-m}$ (hyp.) $= c^{m+n}$, fiet $R = c^{m+n} z^{m-n}$, quod in aequatione $z^{2m} - 2Qz^m + R = 0$, suffectum, praebet $z^{2m} - 2Qz^m + c^{m+n} z^{m-n} = 0$, Hinc $2Q = c^{m+n} z^{-n} + z^m$, et $(2Q)^p = (c^{m+n} + z^{m+n})^p z^{-np}$. Ponatur nunc $(2Q)^p = b + em + fn + gmm + hmn +$ &c. et positis pro m et n, $\frac{y}{z}$ et $\frac{x}{z}$, proveniet $bz^\beta + eyz^{\beta-1} + fxz^{\beta-1} + gyyz^{\beta-2} +$ &c. $+ tx^\beta + vy^\beta = (c^{m+n} + z^{m+n})^p . z^{\beta-np}$. Possent adhuc infinities infinitae aequationes aliae, praeter hanc generalem, exhiberi in solutionem Problematis.

Ad duo problemata §. §. XI, XII non addidi exempla curvarum transcendentium quorum infinita problemati satisfaciunt, qualia unusquisque juxta ductum praecedentium facile excogitabit.

Fig. 4. XIII. Methodus in superioribus tradita extendi potest etiam ad curvas BHC in quibus secantes CBE sunt parallelae tangenti HI. Si RE sit axis ad quem secantes CBE et tangens HI in dato angulo inclinatae sunt.

Di-

Dicantur nunc $AE=x$, $CE(BE)=y$, tangens $HI=c$, et si quaerantur curvae BHC, in quibus $CE.BE=HI^2$, vel $Yy=cc$. Huc etiam nunc faciet aequatio $y^{2n}-2Qy^n+R=0$, habens duas radices majorem $Y^n=Q+\sqrt{(QQ-R)}$ et minorem $y^n=Q-\sqrt{(QQ-R)}$, quare $Y^n y^n=R=(\text{hyp.})c^{2n}$, et si hic valor in aequatione $y^{2n}-2Qy^n+R=0$, substituatur, reperietur iterum $2Q=y^n+c^{2n}y^{-n}$. Ubi autem Q dari debet per x et constantes quomodo cunque libet;

Si $n=1$, et $2Q=x$, erit aequatio $x=y+ccy^{-1}$ ad Hyperbolam cujus centrum est in A et recta AF est una Asymptota, $AI=2HI$, productaque IH in K, ut $HK=HI$, altera Asymptota erit AK producta sursum, et AH, in eundem sensum protensa, Diameter. Aliunde jam constat Hyperbolae intra asymptotas competere proprietatem quam fundamenti loco assumsimus, sed non est sola; infinitae enim aliae curvae hanc eadem proprietatem habent, cum in superiori aequatione $2Q=y^n+c^{2n}y^{-n}$, pro Q substitui possit quantitas, ut libet composita indeterminata x, et constantibus.

Si quaerantur curvae in quibus $CE^m.BE^n=HI^{m+n}$, in hoc casu per ratiocinium simile illi quo §. XII. usi sumus invenietur aequatio $2Q=(c^{m+n}+y^{m+n})y^{-n}$, quare si $2Q=ax$, resultabit aequatio $axy^n=c^{m+n}+y^{m+n}$, quae est etiam Hyperbolici generis et simplicissima earum quae problemati satisfaciunt et quoque Hyperbolici generis sunt quorum numerus infinitus est.

Si quaeruntur curvae BHC, in quibus $CE^m + BE^m = 2HI^m$, inveniemus nunc iterum ut in §. XI. $R = 2c^m y^m - y^{2m}$, in qua R nunc designat quantitatem ut libet datam per x et constantes. Si $R = ax$ et $m = 1$, aequatio tunc fiet $ax = 2cy - yy$, quae est ad *Parabolam*.

Jac. Hermanni.

DE ELLIPSI CONICA CUJUS AXIS ALTERUTER DATUS EST, ANGULO POSITIONE ET MAGNITUDINE DATO ITA INSCRIBENDA, UT CENTRUM EJUS INTRA DATUM ANGULUM SIT ETIAM POSITIONE DATUM.

Mens. Aug. 1729. Tab. IV.

Insignis Geometra *Philippus de la Hire* per plura elegantia problemata circa sectiones conicas in novem libris, quos de his lineis Lutetiæ olim edidit, soluta dedit; in iis tamen frustra quæras illud quod huic dissertatiunculæ argumentum præbebit, quoque ipsi quoque *de la Hire* acceptum est ferendum, qui interventu Cel. *Varignon* illud ad Excell. aliquem Geometram olim miserat, fassusque erat, nullam tunc sibi solutionem ejus occurrisse. Vir autem eximius ad quem problema sic delatum erat, solutionem ejus statim nactus erat ope calculi analytici et in æquationem biquadraticam parium ni fal-

fallor dimensionem incidit, quam simplicissimam suppeditare puto solutionem earum, quæ per hanc viam sperari possunt. Quod si vero via geometrica in constructionem problematis inquirere velimus, invenietur ea oppido simplex et facilis, quod hoc loco ostendere placet, ut eo magis veritas ejus quod alibi jam monui, pateat, geometriam linearem absque calculo procedentem, simpliciores subinde solutiones suppeditare, quam calculum analyticum.

Problema ita habet: *Dato angulo* CQE *Ellipsin* CAE *inscribere cujus axis transversus* AD *æqualis sit datæ lineæ* MN, *ita ut Ellipsis crura anguli contingat in* C *et* E, *et centrum ejus sit in puncto intra angulum* PZS *positione dato* R. Fig. 1.

Ut ergo per analysin geometricam in constructionem hujus problematis inquirerem, ita ratiocinatus sum. Positis ACDE ea Ellipsi, quæ quæritur, et AD axe transverso, punctisque C et E punctis contactus, ex his punctis duxi ad focos Ellipsis, quos posui in H et *h*, rectas CH, C*h*, et EH, E*h*, et videbam propter Ellipsin esse tum HC+*h*C=AD=MN, tum etiam HE+*h*E=AD=MN. Videram quoque, quod, ductis ex foco H perpendicularibus HI et HT ad crura anguli dati QP et QS, iisque productis in K et L ita, ut IK=HI, et TL=HT, rectæ *h*K et *h*L ex altero foco *h* ad terminos K et L rectarum IK et TL ductæ, axi transverso AD, æquales sint futuræ Sunt enim HC=CK et HE=EL, propter HI=IK, et HT=TL et angulos ad I et T rectos. Vi-

Videram præterea, ductis RI et RT has ipsis bK et bL parallelas esse, ac denique propter HR$=b$R; fore RI$=\frac{1}{2}b$K$=\frac{1}{2}$AD$=\frac{1}{2}$MN, et RT$=\frac{1}{2}b$L$=\frac{1}{2}$AD$=\frac{1}{2}$MN, atque adeo RI$=$RT$=\frac{1}{2}$MN, id quod mihi sequentem constructionem facillimam suppeditavit.

Constructio. Centro R et intervallo RI$=\frac{1}{2}$MN, descripto circulo IDT, secante crura QP et QS in I et T, demittantur ex his punctis perpendicula IH et TH, sese secantia in puncto H, erit hoc punctum alteruter focus Ellipseos describendæ, rectaque ex centro R per hunc focum H ducta dabit positionem axis, factisque RD$=$RA$=\frac{1}{2}$MN, tota AD erit axis ipse major. Semiaxis conjugatus vero RB vel RT
Fig. 2. erit media geometrica inter AH et HD. Ex hisce jam Ellipsis facile describi potest. Demonstratio ex præcedenti Analysi facilis est.

Quid si vero circulus IDT crura QP, et QS nusquam secet? Constructio nihilo difficilior erit. Nam (Fig. 2.) descripto centro R et intervallo RB $=\frac{1}{2}mn$ circulo BF, ductisque RP et RS normalibus ad QC et QE, et ex P ac S tangentibus circuli BF, nempe PW et SV, captisque RX$=$PW et RY$=$SV, ducantur XH parallela QC, et YH parallela QE, et YH parallela QE, occurrent hæ sibi invicem in H alterutro foco Ellipseos quæsitæ; ductaque RH ipsique normali RB, erit BH$=$ semissi axis transversi, atque adeo Ellipsis describi potest.

De-

Demonſtratio. Nam demiſſis perpendicularibus HI, HT ad rectas PQ et SQ, erunt HI=PX, et HT=SY, jungantur BH, TH et invenietur $BH^2 = BR^2 + RH^2 = BR^2 + RX^2 + PI^2 = RW^2 + PW^2 + PI^2 = PR^2 + PI^2 = RI^2$, ergo BH=RI, ſimili argumento erit TH=RT, atqui BH=TH, ergo RI=RT, adeoque per praec. caſum erit RI ſemi axis major, et BR ſemi axis minor. Q. E. D.

DE INNUMERABILIBUS CURUIS TAUTOCHRONIS IN VACUO.

Auct. Leonh. Eulero.

§. 1.

Quoties ego inſignem tautochroniſmi proprietatem, quam *Hugenius* primus in cycloide ineſſe deprehendit, contemplatus ſum, ſemper dubitabam, an praeter cycloidem aliae curuae eandem forte habeant proprietatem. Hocque mihi eo probabilius videbatur, quod ipſum *Hugenium* non ex tautochroniſmi contemplatione ad cycloidem perueniſſe intelligebam: ſed potius cycloidis proprietates ſcrutantem hanc ipſum inter alias detexiſſe. *Newtonus* quidem atque *Hermannus*, qui deinceps eandem rem tractarunt, ana-

Menſ. Sept. 1729.

Tab. V. & VI.

analytice cycloidem elicuerunt, ſed vſi ſunt principio non ſatis late patente hoc; accelerationes viis percurrendis eſſe oportere proportionales. Aliis enim modis accelerationes poſſunt determinari, ut tautochronismus nihilominus conſeruetur. Quamobrem mihi jure ſuſpicari viſus ſum, praeter cycloidem in alias fortaſſe curvas eandem tautochronismi proprietatem competere.

§. 2. Ad hanc dubitationem tollendam genuina opus eſſe methodo cenſebam, qua ſine vllo principio aliunde aſſumto ex ſola tautochronismi conſideratione curuae hac proprietate praeditae erui poſſent. Diu igitur omne ſtudium operamque in hanc inueſtigationem contuli, donec tandem voti compos factus, quicquid deſiderabam, ſum conſecutus. Animaduerti autem, cum de curua tautochrona inuenienda quaeſtio proponitur, duas omnino quaeſtiones bene a ſe inuicem diſtinguendas in ea eſſe inuolutas. Quarum altera hujusmodi curuam requirit, in qua graue deſcendens aequalibus temporibus ad punctum infimum perueniat, ubicunque ſumatur initium deſcenſus. Altera vero in ejusmodi curuis inquirendis eſt occupata, ſuper quibus integrae oſcillationes ex deſcenſu et aſcenſu conſtantes omnes ſint iſochronae. Illi quidem quaeſtioni ſolam cycloidem ſatisfacere deprehendi: huic vero praeter cycloidem innumerabiles aliae conuenire mihi inuentae ſunt.

Fig. 1. §. 3. Poſteriorem hanc quaeſtionem primum hoc modo propoſui, vt data curua quacunque AMC in-

inueniatur curua ei in A jungenda AND ejusmodi, vt graue super composita ex iis curuae CMAND oscillans omnes oscillationes absoluat aequalibus temporibus. Postquam autem hujus solutionem sum adeptus, eos inuestigaui casus, quibus hae duae curuae vnam constituant lineam continuam, atque eadem contineantur aequatione. Hujusmodi mihi curuae admodum notatu dignae visae sunt, eo quod eundem quem cyclois, praestent effectum et aeque ac illa ad horologia accommodari possint. Praeterea non sine admiratione cognoui in his curuis tautochronis curuas etiam algebraicas contineri, ad quas Analystae in problematis soluendis tanto semper studio peruenire nituntur. Haec igitur omnia eo, quo ipse sum assecutus modo, hic proponere constitui tam propter ipsius methodi nouitatem, quam eorum, quae ex ea prodierunt, dignitatem.

§. 4. Sit igitur curua data AMC, quaesita vero AND, quae communem habeant axem verticalem AB. Incipiat graue descensum ex puncto quocunque C, ascendet id rursus in altera curua ad eandem altitudinem D, ita vt recta CD sit horizontalis; animum enim ab omni resistentia abstrahimus. Hac ergo oscillatione percurrit corpus arcum CAD, secundum legem Galileanam et in quouis loco M habebit celeritatem, quam lapsu ex altitudine BP acquirit, ducta nempe per M horizontali MPN. Tautochronismi autem conditio requirit, vt tempus hujus oscillationis sit constans, retineatque eandem quantitatem, ubicunque accipiatur punctum C. Fig. 1.

Quamobrem formula hoc tempus exprimens ita esse debebit comparata, vt in ea neque linea AB insit neque quaequam alia quantitas a loco puncti C pendens.

§. 5. Maxima celeritas corporis, dum hanc oscillationem absoluit, est in puncto infimo A, atque respondet altitudini AD, quippe ex qua est genita. Haecque celeritas ipsa debet exponi radice quadrata ex hac altitudine AD, et simili modo in loco quocunque M celeritas est vt radix quadrata ex altitudine BP. Quamobrem sumtis elementis Mm et Nn aeque altis, erit corporis celeritas dum vtrumque describit eadem atque vt $\sqrt{BP}$; Et tempusculorum, quibus haec elementa percurruntur, summa est $\frac{Mm+Nn}{\sqrt{BP}}$. Hujus ergo integrale dabit tempus, quo arcus MAN absoluitur, et posito in eo AP$=$AB, prodibit tempus integrae oscillationis.

§. 6. Ponantur nunc AB$=b$, AP$=x$; arcus AM$=s$ et AN$=t$. Erit P$p=dx$; M$m=ds$; N$n=dt$ et BP$=b-x$. Celeritas ergo, quam habet corpus elementa Mm et Nn percurrens, erit $=\sqrt{(b-x)}$. Et propterea tempus, quo haec elementa absoluuntur, est $\frac{ds+dt}{\sqrt{(b-x)}}$, seu posito $ds+dt=dv$, erit id $\frac{dv}{\sqrt{(b-x)}}$. Cujus integrale dabit tempus, quo arcus MAN absoluitur, siquidem tanta constans adjicitur, ut facto $x=o$ ipsum tempus euanescat. In illo integrali deinde, si ponatur $x=b$, habebitur tempus totius oscillationis. Quamobrem in eo neque litera b neque alia ab ea pendens inesse debet. Inveniri ergo debet litera v in x vt integrale hanc obtineat proprietatem.

§. 7.

§. 7. Fiat $dv = pdx : c$; per c diuiso, vt homogeneitas conseruari possit, cum cognita fuerit functio p. Est itaque differentiale summae temporum $= pdx : c\sqrt{(b-x)}$ siue $\frac{1}{c}. pdx : \sqrt{(b-x)}$. Jam, ut ex praecedentibus elucet, oportet $pdx : \sqrt{(b-x)}$ ita esse constitutum, ut, si integretur talisque constans addatur, quae faciat integrale $= 0$, si $x = 0$ factoque $x = b$, tum b penitus ex expressione excedat. Hisque conditionibus ut satis fiat, oportet determinare p. Consistat integrale hujus $pdx : \sqrt{(b-x)}$ debita constante auctum quotcunque terminis simplicibus; nam et irrationalia in series hujusmodi terminorum resoluere licet. Necesse est igitur, vt vnusquisque horum terminorum quantitate x seu dignitate ejus exponentis affirmativi sit affectus; ea propter ut tota expressio euanescat, si fiat $x = 0$.

§. 8. Singuli ergo termini talem habebunt formam gx^m, ubi g etiam in b dari ponitur. Cum Cum vero in hisce omnibus facto $x = b$, b debeat euanescere seu ex computo egredi: fiat $x = b$, termini hanc habebunt formam gb^m, ex qua vt b eliminetur, oportet sit $g = nb^{-m}$ vbi n ipsa b non sit affectum, sed denotet numerum quem vis in quantitatem datam ductum; hanc vero quantitatem in c complecti licet, vt ergo n solum numerum significare possit. Hac ergo ratione singuli termini erunt $nb^{-m}.x^m$. Ubi cum dimensiones ipsius b destruant dimensiones ipsius x, perspicuum est integrale nullam dimensionem habere debere. Deinde id quoque manifestum est in integrali praeter b et x, et numeros alias quantitates contineri non oportere; vnde ſequitur idem et in differentiali locum habere. Quapropter p cum ab b affici nequeat, in meris x dari debebit, eritque p potentia ipſius x quae ſit x^n.

§. 9. Ex hac conditione differentiale $pdx : V(b-x)$ transmutatum eſt in $x^n dx : V(b-x)$. Accedat altera atque prior conditio, qua integrale nullam habere debet dimenſionem, ut inde n determinetur. Requiritur autem ad id, vt integrale nullius ſit dimenſionis, vt et in differentiali dimenſiones ſeſe deſtruant elemento dx vnam dimenſionem implere poſito; manifeſtum enim eſt, ſemper differentiale tot habere dimenſiones, quot integrale. Numerus vero dimenſionum in noſtro differentiali $x^n dx : V(b-x)$ eſt $n+1-\frac{1}{2}$ ſeu $n+\frac{1}{2}$, qui ergo debet aequari nihilo; vnde habetur $n=-\frac{1}{2}$. Ex quo emergit $p=x^{-\frac{1}{2}}$ ſeu $1 : Vx$, hinc porro erit $dv = dx : eVx$. Quia e eum in finem tantummodo erat aſſumtum vt homogeneitas conſeruetur, fiat $e=1 : Va$; eritque $dv=dxV(a : x)$.

§. 10. Erat vero $dv=ds+dt$, quare $ds+dt = dxV(a : x)$, cujus integrale eſt $s+t=2Vax$. Erit igitur ſumma arcuum AM+AN ſemper in ratione ſubduplicata ſagittae AP. Conſtruatur ergo alia curva ALE, talis vt productis MN, mn in L et l ſit arcus AL=AM+AN. Eritque $Ll=Mm+Nn=ds+dt=dv$. Vnde AL$=v=2Vax$, adeoque $vv=4ax$. Ex quâ perſpicuum eſt curuam ALE eſſe cycloidem, cu-

cujus circuli generatoris diameter eſt a. Deſcendat corpus in hac cycloide ex puncto E aeque alto ac C vel D; erit velocitas ejus in L vt $V(b-x)$. Ergo tempuſculum per Ll eſt $dv : V(b-x)$. Id quod igitur aequale eſt ſummae tempuſculorum per elementa Mm, Nn. Quare totum tempus deſcenſus per ELA, aequale erit ſummae temporum per arcus CA et DA. Oſcillatio ergo per CAD contemporanea eſt dimidiae oſcillationi penduli longitudinis $2a$, ſeu integrae oſcillationi penduli long. $\frac{1}{2}a$.

§. 11. Ex his jam facile apparet, quomodo data altera curua AC inueniri debeat altera AD. Sit quaeſitae AD applicata $PN = z$; erit $Nn = dt = V\overline{dx^2 + dz^2}$. Erit igitur $ds + V(dx^2 + dz^2) = dxV(a : x)$. Vnde $V(dx^2 + dz^2) = dxV(a : x) - ds$. Denique $dz = V(adx^2 : x + ds^2 - dx^2 - 2dsdxV(a : x))$. Cum curua AMC ſit data, dabitur ds in x et dx; ponatur igitur $ds = pdx$. Erit $dz = dxV(a : x + p^2 - 1 - 2pV(a : x))$. Quae aequatio, cum p in x dari ponatur, exprimet naturam curuae AND quaeſitae. Hinc intelligitur, cum a non a curua pendeat, et ideo pro lubitu accipi poſſit, infinitas inueniri poſſe curuas loco quaeſitae AND, quae cum AMC junctae tautochronas praebeant. Notandum tamen accidere caſus, quibus, ſi a quantitate quadam minor accipiatur, curua quaeſita fiat immaginaria.

§. 12. Sit curua data AC linea recta, cum verticali AB angulum quemcunque BAC conſtituens, erit $ds = ndx$, n denotante numerum ei angulo conue- Fig. 2.

ueníentem, vnde $p = n$, quare $dz = dx\sqrt{(a : x + nn - 1 - 2n\sqrt{(a : x)})}$. Quae aequatio integrationem admittit in caſu $n = 1$, quo recta AC fit verticalis inciditque in AB. Hic fit $dz = dx\sqrt{(a : x - 2\sqrt{(a : x)})}$, fiat $2\sqrt{ax} = q$, erit $x = qq : 4a$, et $dx = qdq : 2a$; ergo $dz = \frac{qdq}{2a}\sqrt{(\frac{4aa}{qq} - \frac{4a}{q})} = dq\sqrt{(\frac{a-q}{a})}$. Eſt igitur $z = C - \frac{2(a-q)\sqrt{(a-q)}}{3\sqrt{a}} = C - \frac{2(a-2\sqrt{ax})\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{3\sqrt{a}}$. Vt z fiat $= 0$ ſi $x = 0$, oportet ſit $C = \frac{2a}{3}$, adeoque eſt $z = \frac{2a\sqrt{a} - 2(a-2\sqrt{ax})\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{3\sqrt{a}}$. Quae eſt aequatio ad curuam quarti ordinis; Hic x nunquam $\frac{1}{4}a$ ſuperare poteſt.

§. 13. Si curua altera AMC fuerit ſemicyclois, cujus diameter circuli generatoris $AB = b$. Erit dictis AP, x, AM, s, tum $ss = 4bx$, ergo $s = 2\sqrt{bx}$. Sit altera curua quaeſita ANE in qua $AN = t$, oportet ſit $s + t = 2\sqrt{ax}$, unde habebitur $t = 2\sqrt{ax} - 2\sqrt{bx}$. Dicatur $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c}$; $t = 2\sqrt{cx}$. Eſt itaque altera curua ANE etiam cyclois, idque quaecunque: ejus enim diameter c pro lubitu poteſt accipi. Oſcillationes vero cotemporaneae ſunt dimidiae oſcillationi penduli, cujus longitudo eſt $2a$, vel integrae ſi longitudo fuerit $\frac{1}{2}a$. Eſt vero $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$, unde $a = b + 2\sqrt{bc} + c$. Longitudo igitur perduli iſochroni eſt $\frac{1}{2}b + \sqrt{bc} + \frac{1}{2}c$. Notandum vero in cycloide majori AMC initium deſcenſus non ſupra punctum E, vbi ED producta ſecat, eſſe accipiendum; alioquin enim corpus aſcendens in curua AE ultra E aſcenderet, et oſcillatio nusquam terminaretur.

§. 14.

§. 14. Quaeramus casus, quibus ambae curuae sint inter se aequales. Erit igitur $s=t$. Quare cum sit $s+t=2\sqrt{ax}$; erit $2s=2\sqrt{ax}$; seu $s=\sqrt{ax}$. Ex quo cognoscitur, vtramque curuam esse cycloidem, neque alias hoc sensu satisfacere curuas praeter cycloidem: Supra enim demonstratum est nostra methodo problema propositum generalissime solvi. Quemadmodum hic positum erat $s=t$, sic quaecunque aequatio inter s et t potest accipi, et deinde duae curuae dari, vt arcus ascensus et descensus eam habeant inter se relationem. Vt, si quaerantur duae curuae problemati satisfacientes CA, DA, ut sit semper AM : AN $=m:n$, erit $mt=ns$, et $t=ns:m$. Ergo $s+t=(ms+ns):m=2\sqrt{ax}$, unde efficitur $s=\frac{2m}{m+n}\sqrt{ax}$. Perspicuum ergo est, curuam AC esse semicycloidem diametri $\frac{m^2a}{(m+n)^2}$, et alteram ADN quoque semicycloidem diametri $\frac{n^2a}{(m+n)^2}$. Fig. 1

§. 15. Cum esse debeat $s+t=2\sqrt{ax}$, vt ambae curuae praebeant tautochronam oscillationes isochronas penduli longitudinis $\frac{1}{2}a$ habentem; Sit $s=\sqrt{ax}+v$, et $t=\sqrt{ax}-v$. Hoc igitur modo duae curuae inuenientur satisfacientes. Erit itaque $ds=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}+dv$, et $dt=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}-dv$. Ponatur $dv=udx$: habebitur $ds=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}+udx$, et $dt=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}-udx$. Quare si y illius et z hujus curuae denotent applicatas, erit $dy=dx\sqrt{(\frac{a}{4x}+\frac{au}{\sqrt{ax}}+uu-1)}$. Atque $dz=dx\sqrt{(\frac{a}{4x}-\frac{au}{\sqrt{ax}}+uu-1)}$. Hic si loco u substituatur quaecunque fun-

 ctio

ctio ipſius x; habentur duae aequationes pro curuis problemati ſatisfacientibus. Obſeruandum hic, ſi ponatur $a = 4b$ fore $dz = dx\sqrt{(\frac{b}{x} - \frac{2bu}{\sqrt{bx}} + uu - 1)}$. Quae aequatio conuenit cum aequatione §. 11. $dz = dx\sqrt{(\frac{a}{x} + pp - 1 - \frac{2ap}{\sqrt{ax}})}$ ſi ſit $b = a$, et $u = p$. Ex quo intelligitur curuam $dz = dx\sqrt{(\frac{a}{4x} - \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$, etiam cum hac $ds = udx$ ſeu $dy = dx\sqrt{(uu - 1)}$, conjunctam conſtituere tautochronam oſcillationes abſoluentem eodem tempore, quo pendulum longitudinis $\frac{1}{2}b$ ſeu $\frac{1}{8}a$.

Fig. 4. & 5. §. 16. Conſtituatur ſuper axe AP curua quaecunque BE, in qua poſita AP $= x$ ſit PE $= u$. Tum deſcribatur hyperbola cubicalis VKLT, cujus applicata PK vel PL ſi dicatur r, ſit $4xr^2 = a$, recta quadam pro unitate accepta, erit PK vel PL $= \sqrt{(a:4x)}$. Deinde conſtituantur duae nouae curuae RF, SG, in quibus ſit PF $= \sqrt{(LE^2 - 1)}$; et PG $= \sqrt{(KE^2 - 1)}$. Erit PF $= \sqrt{(\frac{a}{4x} - \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$ et PG $= \sqrt{(\frac{a}{4x} + \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$. Quibus factis accipiatur PM in 1 ducta aequalis areae APFR: et PN in 1 ducta aequalis areae APGS. Erunt, cum ſit APFR $= \int dx\sqrt{(\frac{a}{4x} - \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$ et APGS $= \int dx\sqrt{(\frac{a}{4x} + \frac{au}{\sqrt{ax}} + u^2 - 1)}$, PM $= z$ et PN $= y$, atque eapropter curuae MA et NA junctae in A exhibebunt curuam tautochronam.

§. 17. Ex hiſce perſpicuum eſt, quomodo data curua quacunque inueniri oporteat alteram tautochroniſmo producendo aptam. Nunc eos inueſtigare ſtatui caſus, quibus ambae eae curuae ita, vt decet, junctae, eandem conſtituunt curuam contitinuam; vt et aliae curuae eaeque innumerae cycloidis similes habeantur, eundem effectum in horologiis praestantes. Sit MAN hujusmodi curua circa axem verticalem AP posita. Dicatur, vt ante, AP, x, arcus AM, s et alter AN, t, oportet esse $s+t=2\sqrt{ax}$. Constituatur alia curua GAH talis, ut ejus applicatae PG, PH sint arcubus AM, AN respectiue aequales. Erit ergo PG$=s$, PH$=t$, eaque curuae GAH erit proprietas, ut sit $s+t=2\sqrt{ax}$. Perspicuum est, si curua GAH fuerit data, alteram MAN ex ea posse construi, atque si illa fuerit curua continua, et hanc quaesitam talem fore. Huc igitur quaestio est reducta, vt inueniatur curua GAH, quae sit continua, eamque habeat proprietatem, vt sit GP+GH$=2\sqrt{a.\,\mathrm{AP}}$. Fig. 6.

§. 18. Respondent ergo in curua GAH singulis abscissis AP duae applicatae GP, PN, quarum altera est negatiua, si altera affirmatiua fuerit. Talis proinde aequatio inter abscissas et applicatas esse debet, vt litera applicatas denotans pro singulis abscissis duos habeat valores ad conditionem quaestionis accommodatos. Vt haec facilius efficiam, assumo nouam indeterminatam v, ex qua vna cum constantibus et abscissae et applicatae determinari debent; ita autem, ut, posita v affirmatiua, inueniatur punctum G; posita vero v negatiua, tunc punctum H inueniatur. Consideremus igitur x, tanquam functionem ipsius v, atque s. Functio autem s significans dabit t sed negatiue, quia PN ad alteram axis AP partem cadit, si v abeat in $-v$.

§ 19. Cum abſciſſa AP eadem maneat pro utroque puncto G et H, oportet ut ea x ita in v determinetur, vt eadem maneat transmutato v in $-v$. Siue x debet eſſe functio par ipſius v: ſit talis functio P, erit $x=P$. Ponatur applicata PG, $s=Q+R$, denotantibus Q functionem imparem, R vero parem ipſius v. Ponatur in hac formula $Q+R$ loco v, $-v$, abibit ea in $-Q+R$; quemadmodum conſtat ex iis, quae de functionibus paribus et imparibus in diſſertatione de trajectoriis reciprocis tradidi. Poſito vero $-v$ loco v, habebitur punctum H, quare $-Q+R$ exprimet applicatam PH. Quae autem, cum in alteram partem cadere debeat, erit valor $-Q+R$ negatiuus. Abſoluta ergo applicatae PH ſeu t magnitudo erit $Q-R$, unde habetur $t=Q-R$. At vero eſt $s=Q+R$, et $x=P$.

§. 20. Ex conditione problematis haec habetur proprietas, vt ſit $s+t=2\sqrt{ax}$, vt in §. 17. oſtenſum eſt. Quare cum ſit $s=Q+R$, $t=Q-R$, et $x=P$, erit $2Q=2\sqrt{a}P$ ſeu $QQ=aP$, hincque $P=QQ:a$. Hic inquirendum eſt, an hic valor ipſius P inuentus, et ſuperior, ſecundum quem P debet eſſe functio par ipſius x inter ſe non repugnent? Si enim repugnarent, nihil inde ad propoſitum elici poſſet. Non autem ii inter ſe repugnant: nam, quia Q eſt functio impar, ejus quadratum erit functio par; porro diuiſore a nihil ad haec faciente, perſpicuum eſt hic P functioni pari aequale poni. Eſt ergo $P=QQ:a$. Ex his curua GAH inuenitur. Accipiatur enim AP ſeu $x=QQ:a$, et PG ſeu $s=Q+R$,

vbi

vbi loco Q quaecunque functio impar, loco R vero quaecunque par substitui potest ipsius v. Quia $x = QQ : a$ erit $Q = \sqrt{ax}$, et idcirca $s = R + \sqrt{ax}$. Hic R potest accipi functio par ipsius Q seu $\sqrt{ax}$, siue duntaxat ipsius $\sqrt{x}$.

§. 21. Ex hisce facile elicitur curuarum nostro instituto inseruientium constructio. Circa axem verticalem AP constituatur parabola MAN, cujus parameter $= a$. Ducta ergo ordinata ad axem orthogonali MN, erit, si sit $AP = x$, $PM = \sqrt{ax}$. Infra hanc parabolam circa eundem axem describatur curua quaecunque QAS, cujus axis AQ simul est diameter. Ducantur verticales MR, NS, horizontalem per A transeuntem secantes in T et V. Erit $AT = \sqrt{ax}$, et $AV = -\sqrt{ax}$; TR autem et SV erunt aequales. Quae, cum sint ad eandem plagam sitae, erunt functio par lineae AI quae est $\sqrt{ax}$, quare IR exprimet functionem R. Tum noua construatur curua GAH, cujus applicata PG sit $= PM + TR$, erit altera PH ob legem continuitatis $= PN - SV$ seu $PN - TR$. Quare erit $PG = R + \sqrt{ax}$, et $PH = -R + \sqrt{ax}$. Vnde sequitur curuam GAH eandem esse, quae quaeritur.

§. 22. Hoc ergo modo inueniuntur curuae infinitae, non quidem tautochronae, sed tales ex quibus tautochronae possunt construi. Sit curua AG praecedenti modo constructa, inde si alia AM construatur, ut ejus arcus AM ubique sit aequalis respondenti applicatae PG, erit haec curua tautochrona (§. 17.). Ex data vero AG, requisita AM Fig. 8.

 se-

sequenti modo construetur. Ducatur recta in G tangens GI, occurrens axi producto in I. Centro G radio GP describatur arcus circuli PL, quem horizontalis ex I ducta secet in L. Jungatur GL, et a P in axe capiatur longitudo arbitraria PE, sed ubique eadem. Tum ex E ducatur linea ER parallela ipsi LG, secans applicatam PG in R. Per omnia hoc modo determinata puncta R transeat curua SR, quae plerumque assymtoton habebit horizontalem AO. Denique construatur curua AM talis, vt rectang. PM. PE aequale sit spatio OAPRS. Erit haec AM curua tautochrona. Est enim arcus AM $=$PG.

§. 23. Rem analytice persequor. Cum x debeat esse functio par ipsius v, insuper autem sit $Q = \sqrt{ax}$, oportet sit $\sqrt{ax}$ functio impar ipsius v, pono $\sqrt{ax} = v$, erit $x = v^2 : a$ functio par, vt requiritur. Habemus igitur ex §. 20. hanc aequationem $s = R + v$, vbi R denotat functionem parem ipsius v. Erit itaque $ds = dR + dv$, sit $dR = Vdv$, necesse est, vt V sit functio ipsius v impar. Quare erit $ds = dv(1+V)$, ideoque $ds^2 = dv(1+2V+VV) = dx^2 + dy^2$. Quoniam autem $x = v^2 : a$, erit $dx = 2vdv : a$, et $dx^2 = 4v^2dv^2 : a^2$. Consequenter $dy^2 = dv^2(1+2V+VV-4v^2 : a^2)$ atque $dy = \frac{dv}{a}\sqrt{(a^2+2a^2V+a^2V^2-4v^2)}$. Hanc aequationem nullo modo rationalem efficere potui, substituendis loco V valoribus legitimis, vt nimirum V aequalis ponatur functioni impari ipsius v. Quamobrem nescio, an alii casus in-

inde erui queant, quae integrationem admittunt, praeter eum, quem hic expositurus sum.

§. 24. Ponatur aV, id quod fieri potest; aequale $2v$, vt termini a^2V^2 et $4v^2$ sese destruant; erit $dy = \frac{dv}{a}\sqrt{(aa + 4av)}$, quae aequatio integrationem admittit quia v unius tantum est dimensionis. Integralis ejus est haec aequatio $y = \frac{C + (a + 4v)\sqrt{(a + 4v)}}{6\sqrt{a}} = \frac{C + (a + 4\sqrt{ax})\sqrt{(a + 4\sqrt{ax})}}{6\sqrt{a}}$ ob $v = \sqrt{ax}$. Vt y euanescat, posito $x = 0$, oportet vt sit $C = -a\sqrt{a}$; erit igitur $y = \frac{-a\sqrt{a} + (a + 4\sqrt{ax})\sqrt{(a + 4\sqrt{ax})}}{6\sqrt{a}}$ seu $6y\sqrt{a} + a\sqrt{a} = (a + 4\sqrt{ax})\sqrt{(a + 4\sqrt{ax})}$. Hinc habebitur $a + 4\sqrt{ax} = (6y\sqrt{a} + a\sqrt{a})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(36ayy + 12aay + a^3)}$. Quamobrem sumtis utrinque cubis erit $12aa\sqrt{ax} + 48aax + 64ax\sqrt{ax} = 36ayy + 12aay$ seu $12ax + (3a + 16x)\sqrt{ax} = 9yy + 3ay$. Quae penitus ad rationalitatem reducta dabit hanc aequationem ordinis quarti: $81y^4 + 54ay^3 - 216axyy - 256ax^3 + 9aayy - 72aaxy + 48aaxx - 9a^3x = 0$.

§. 25. Habemus ergo curuam algebraicam ordinis quartis, quae perinde atque cyclois ad oscillationes omnes aequitemporaneas faciendas est idonea. Eam igitur aliquanto accuratius hic describere operae pretium erit. Sit axis AE; habebit curua nostra hanc formam BACD, ejusque, dictis AP, x, PM, y, ea erit aequatio, quam §. praecedente inuenimus. Tempus autem, quo oscillatio quaecunque per MAN absoluitur, aequale erit tempori oscillationis penduli ordinarii, cujus longitudo est $\frac{1}{2}a$. Notandum est, hanc curuam ab altera parte axis AE, in

Fig. 9.

in C habere punctum reuersionis; Punctum vero C reperitur sumendo $AE = \frac{1}{16}a$, et applicatam $EC = \frac{1}{6}a$. Porro in C curua producta ita reuertitur, vt sit arcus CD aequalis similisque arcui CAB. Quapropter si ex C ducatur verticalis CF, erit ea diameter curuae orthogonalis. Oscillationes vero in alterutra tantum parte BAC constitui debent.

§. 26. Cum igitur CF sit diameter hujus curuae, quaeramus aequationem ad hanc diametrum relatam. Sit nimirum $CQ = t$, et $QM = z$, erit $AP = x = AE - CQ = \frac{1}{16}a - t$, et $PM = y = QM - CE = z - \frac{1}{6}a$, his valoribus loco x et y in aequatione inuenta §. 24. substitutis, sequens resultabit aequatio, $81z^4 + 216atzz + 256at^3 - 18aazz = 0$, siue, quae ad hujus curuae proprietates inueniendas magis est apta, haec $t = \frac{aa - (\sqrt{36azz - a})^{\frac{3}{2}}}{16a}$ seu $z = \pm(a \pm \sqrt{(aa - 16at)})^{\frac{3}{2}} : 6\sqrt{a}$. Unde perspicuum est z quatuor valores habere manente t, idque hoc modo, si ambo signa $+$ valeant habetur punctum M; Si prius signum $-$ et alterum $+$ valeant habebitur punctum K; Si prius $+$ et posterius $-$ sumantur, punctum N; Si denique vtrumque signum $-$ locum habeat, obtinebitur punctum L.

§. 27. Ex hac aequatione perspicitur curuam hanc esse quadrabilem. Ponatur $a \pm \sqrt{(aa - 16at)} = p$, erit $t = \frac{2ap - pp}{16a}$ et $z = \frac{p\sqrt{a}}{6\sqrt{a}}$. Ergo $dt = \frac{dp}{8} - \frac{pdp}{8a}$. Itaque $zdt = \frac{pdp\sqrt{p}}{48\sqrt{a}} - \frac{ppdp\sqrt{p}}{48a\sqrt{a}}$. Quod integratum dabit $\int zdt = \frac{pp\sqrt{p}}{120\sqrt{a}} - \frac{p^3\sqrt{p}}{168a\sqrt{a}}$. Quae quantitas exprimit spatium inter

ter abſciſſam, applicatam et curuam contentum. Conſtat deinde ex curuae inuentione eam eſſe rectificabilem. Quia $z = \frac{p\sqrt{p}}{6\sqrt{a}}$ erit $dz = \frac{dp\sqrt{p}}{4\sqrt{a}}$; vnde $dz^2 = \frac{pdp^2}{16a}$. Eſt vero $dt^2 = \frac{dp^2}{64} - \frac{pdp^2}{32a} + \frac{p^2dp^2}{64aa}$. Quare $dt^2 + dz^2 = \frac{dp^2}{64} + \frac{pdp^2}{32a} + \frac{p^2dp^2}{64aa}$, et hinc $V(dt^2 + dz^2) = \frac{dp}{8} + \frac{pdp}{8a}$. Conſequenter $\int V(dt^2 + dz^2) = \frac{2ap + pp}{16a}$. Quae expreſſio dat vel arcum CN vel CAM vel quoque eorum negatiuos CL vel CLK.

§. 28. Inuentis area et longitudine hujus curuae; reſiduum eſt id, quod maxime ad uſum ejus in horologiis pertinet, vt inueſtigemus radium oſculi, eoque inuento curuae hujus euolutam, quo pendulum oſcillationes in hac curua abſoluens conſtitui queat. Radius osculi vero erit, poſito dz conſtante $\frac{(dt^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dzddt}$, cujus valor ex ſuperioribus inuenietur Namque eſt $(dt^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{(a+p)^3 dp^3}{512a^3}$, atque $dz = \frac{dp\sqrt{p}}{4\sqrt{a}}$, hinc quia dz ponitur conſtans, erit $ddz = 0 = \frac{2pddp + dp^2}{8\sqrt{ap}}$, unde habetur $ddp = \frac{-dp^2}{2p}$. Denique quia $dt = \frac{adp - pdp}{8a}$, erit $ddt = \frac{addp - dp^2 - pddp}{8a} = \frac{-adp^2 - pdp^2}{16ap}$. His valoribus in formula $\frac{(dt^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dzddt}$ ſubſtitutis, orietur radius osculi $= \frac{-(a+p)^2\sqrt{ap}}{8aa}$, ſignum − indicat radium osculi et diametrum inter ſe diuergere.

 §. 29

§. 29. Cum radius osculi sit cognitus, facile erit curuae nostrae tautochronae euolutam inuenire: Fig. 10. Sit CNB tautochrona. Maneant $CQ = t = \frac{2ap - pp}{16a}$, $QN = z = \frac{p\sqrt{p}}{6\sqrt{a}}$. Sit radius osculi $= \frac{(a+p)^2\sqrt{ap}}{8aa}$, qui tanget in M euolutam quaesitam CM. Demittatur ex M in axem applicata MP, sintque $CP = x$, $PM = y$. Inuenientur hae coordinatae ex relatione cognita coordinatarum CQ et QN. Calculo vtpote facili hic omisso habebitur $x = \frac{2ap + 5pp}{16a}$ et $y = \frac{(3aa - 3pp + 4ap)\sqrt{ap}}{24aa}$, harum aequationum ope euoluta CM per infinita puncta jam describi poterit. Si autem velimus p eliminare, vt aequatio inter x et y supersit, p ex priore aequatione inuenitur in a et x, qui valor si deinde in altera substituatur, sequens emergit aequatio: $576ayy - \frac{37632}{125}axx - \frac{32160}{625}a^2x + \frac{529}{3125}a^3 = (\frac{2304}{125}xx + \frac{8608}{625}ax + \frac{529}{3125}a^2)\sqrt{(a^2 + 80ax)}$. Quae aequatio si prorsus ad rationalitatem reducatur, erit ordinis quinti.

§. 30. Id denique silentio praetereundum non est, hanc curuam tautochronam eandem esse prorsus, quam lineae rectae verticali jungendam inuenimus (§. 12.). In eo enim solo aequationes differunt, quod ibi parameter a quadruplo sit major quam hic. Quia igitur longitudo penduli isochroni pro nostrâ curua tautochrona est $\frac{1}{2}a$, erit si haec eadem curua cum verticali AE jungatur, longitudo penduli isochroni $\frac{1}{8}a$. Tempora ergo oscillationum in curua MAN duplo sunt majora quam oscillacillationum per PAN. Quare si in vtroque lapsu graue ad N vsque perueniat ascendendo, erit $tMA + tAN = 2tPA + 2tAN$. Consequenter $tMA - tAN = 2tPA$. Differentia ergo temporum descensuum per arcus MA et NA aequatur duplo tempori descensus per verticalem AP.

CURVA TAUTOCHRONA IN FLUIDO RESISTENTIAM FACIENTE SECUNDUM QUADRATA CELERITATUM.

Auct. Leonh. Eulero.

§. 1.

Postquam *Hugenius* primum inuenisset cycloidem esse curuam Tautochronam in vacuo et Hypothesi grauitatis vniformis; *Neutonus* atque *Hermannus* dederunt quoque Tautochronas pro hypothesi grauitatis difformiter agentis et tendentis ad punctum quodcunque fixum tanquam centrum. Posuerunt autem motum fieri in vacuo, neque vllam pati resistentiam. Quod vero ad media resistentia attinet, *Neutonus* etiam demonstrauit cycloidem esse tautochronam in medio in celeritatum ratione resistente; ad alia autem resistentia media neque ipse neque quisquam alius est progressus, vt, quae curuae in iis tautochronismum producant, ostenderent. M. Octobr. 1729. Tab. VII.

I 2 §. 2.

§. 2. Non quidem eſt difficile in medio quocunque reſiſtente inuenire curuam, ſuper quâ graue eodem modo deſcendat, quo ſuper data curuâ in vacuo. Id, cum intellexiſſem eas quaeſiui in quacunque reſiſtentiae hypotheſi curuas, ſuper quibus graue aequaliter deſcendat ac ſuper cycloide in vacuo, quae mihi curuae tum tautochronae in mediis his reſiſtentibus eſſe videbantur, eo quod corporis ſuper iis deſcenſus aequalis eſſet deſcenſui corporis ſuper Tautochronâ curua in vacuo. Atque hanc ipſam proprietatem eae habent curuae, quas in Actis Lipſ. Ao. 1726. dedi, et corpora ſuper quâque earum in medio, ad quod ea pertinet, reſiſtente collocata eodem deſcendunt modo, quo ſuper cycloide in vacuo; quamobrem eas etiam Tautochronarum nomine appellaui.

§. 3. Rem vero hanc poſtea accuratius perpendens, eam ita habere deprehendi; vt tota curua in medio reſiſtente percurrenda ab initio deſcenſus ſuper curua in vacuo percurrenda aſſumto pendeat. Quare ſi in curua data aliud ponatur deſcenſus initium ipſa curua datae in medio reſiſtente ſimilem deſcenſum producens alia erit. Ex quo intelligitur etiam ſi habeatur curua, ſuper qua corpus in medio reſiſtente aequalem habeat deſcenſum, ac ſuper cycloide in vacuo, initio deſcenſus videlicet dato; tamen hanc nondum eam habere proprietatem, vt graue ubicunque deſcenſum inchoauerit eodem tempore ad punctum infimum perueniat, etenim

nim descensus non cum descensu in cycloide congruet, nisi is ex dato puncto incipiatur.

§. 4. Idem attendenti uberius palam fiet, si inspiciat aequationes ibi datas, et modum, quo erutae fuerunt. Deprehendet enim in iis adhuc literam, quae constantis speciem prae se fert; quae vero re ipsa ac initio descensus pendet. Id ergo si aliter voluerit assumere ea apparens constans alia erit et idcirco curua quasi alium parametrum acquiret, et a priori diuersa euadet. Hoc incommodum non diu post ipse animaduerti, et praeterea Celeb. *Hermannus* in dissertatione de motibus variatis Actis Anni 1727 inserta, in qua ostendit, curuas, quae ex eodem principio, quo ipse usus sum, inueniantur, quaeque tautochronae esse videantur, hujusmodi tamen non esse, tum ob rationes a me quoque perspectas hicque expositas, tum tempus descensus ipsum inuestigauit, idque constans non esse pro variis descensus initiis reperit.

§. 5. Nolo igitur, quanquam eas ipse principio in tautochronarum numero habui, aliud judicium de iis ferri, nisi quod pro quolibet medio resistente aequatio ibi data ob constantem memoratam variabilem ponendam totam exhibeat familiam curuarum, super quibus grauia ex debito cuique puncto descensum incipientia aequali tempore ad punctum infimum perueniant, idque eodem modo, quo in vacuo super cycloide. Cum igitur cognouissem curuas has ad tautochronismum producendum non esse aptas, statim non solum ego verum etiam alii, cum quibus communicaueram in id incubuimus, vt veras tautochronas in medio quocunque resistente inueniremus. Postquam igitur rem multis modis tentassem, potitus sum tandem tautochrona, sed in vnica tantum resistentiae hypothesi juxta velocitatis quadrata, quam in hac dissertatione exponere constitui.

§. 6. Cum nuper nouam quandam detexissem methodum, quâ a priori nonsolum cycloidem, sed insuper infinitas adhuc alias inueni curuas tautochronas in vacuo, eâ quoque ad tautochronas in mediis resistentibus inueniendas vti institui; methodi vniuersalitate fretus, si quae sint tautochronae in mediis resistentibus, eas ope hujus methodi inueniri debere. Quantum autem adhuc hac in re efficere potui, prorsus mihi necesse esse visum est, vt velocitas corporis super curua quacunque in eo resistenti medio, pro quo tautochrona desideratur, descendentis vel ascendentis in puncto quocunque possit exprimi, non quidem algebraice, sed transcendenter quomodocunque. Id vero cum nonnisi in vacuo, et in medio resistentiam in ratione duplicata celeritatum faciente praestare in potestate sit, tautochronam saltem in fluidis, quia haec in ratione duplicata celeritatum resistere putantur, hic inuenire docebo.

§. 7. Volui primum problema ita instituere, vt nuper eandem quaestionem in vacuo tractaui, vt, quemadmodum ibi factum est, data curua quacunque inuenirem aliam, quae cum ea conjuncta tautochrochronismum oscillationibus inducat. Verum istam quaestionem nondum enodare licuit, cum plane dissimilis sit ejus quae ad vacuum spectat. Nam ad rem eodem modo, quo in vacuo feci, expediendam opus est, vt in duabus curuis data et quaesita duo semper puncta dari queant, in quibus corporis oscillantis celeritates sunt aequales, atque vt eorum determinatio non ab ipsa velocitate pendeat; sed quibus in punctis vna oscillatione celeritates aequales fuerunt, ibidem in aliis oscillationibus sint aequales. Id vero cum in fluido fieri nequeat, contentus hic ero eam determinasse curuam, super qua corpus descendens aequali semper tempore ad punctum infimum pertingat.

§. 8. Sit CMA curua quaesita ad axem AP verticalem relata. Hanc ejus esse oportet proprietatem, vt corpus super ea in fluido collocata descendens aequalibus temporibus ad punctum infimum A perueniat, vbicunque descensum adorsum fuerit. Fiat is ex E, perspicuum est, corpus descendendo a vi grauitatis, quatenus ejus grauitas specifica major est illa, quam habet fluidum, continuo accelerari, simul vero propter resistentiam fluidi continuo in ratione duplicata celeritatum retardari, donec tandem in A retineat certam celeritatem, quam ponam in vacuo acquiri posse lapsu ex altitudine b. Vt corpus ex A hac celeritate rursus in E vsque ascendere possit, oportet grauitatis vim, quae ante promouebat, aduersam; resistentiae vero vim, quae ante aduersa erat, nunc secundam et promouentem pone- Fig. 1.

nere, quo fiet, vt hic aſcenſus prorſus ſimilis ſit deſcenſui. Quia magis juuat aſcenſum conſiderare, hoc praemittere oportuit.

§. 9. Aſcendere ergo ponatur corpus ex A velocitate altitudinis b, ita vt acceleretur in ratione duplicata celeritatum, perueniet id rurſus ad E. Sit hoc corpus cylinder altitudinis a ſecundum axis directionem motus; etſi haec figura minus idonea ſit ad oſcillandum, tamen, quia calculus fit ſimplicior, facileque ad alias figuras transferri poteſt, hanc figuram retinere volui. Sit porro grauitas ſpecifica corporis ad eam fluidi vt m ad n. Peruenerit corpus hoc modo aſcendens ad M, vbi ejus celeritas ſit tanta quanta ex altitudine v in vacuo generatur. Dicatur arcus percurſus AM, s, et abſciſſa AP, x. Momento perueniant omnia in ſitum proximum corpus nempe in m. Erit celeritas corporis in m genitae ex altitudine $v+dv$ aequalis atque $Mm=ds$ et $Pp=dx$.

§. 10. Quia corpus in fluido verſatur, non toto ſuo pondere deſcendere conatur, ſed exceſſu ſui ipſius ponderis ſuper pondus aequalis voluminis fluidi. Vis ergo corpus ſollicitans eſt ad verum ejus pondus vt $m-n$ ad m. Si igitur vis grauitatis dicatur g, erit vis haec ſollicitans $=(m-n)g:m$. Aſcendente corpore per elementum Mm, ſi vis grauitatis ipſa g ageret foret $dv=-dx$, ſi nimirum corpus in vacuo aſcenderet. Quia autem vis ſollicitans eſt ad vim grauitatis vt $m-n$ ad m, erit effectus illius ad hujus effectum $-dx$ vt $m-n$ ad m. Quamobrem agen-

agente vi hac ſollicitante, erit $dv = -(m-n)dx : m$ ſignum hic negatiuum obtinet, quia vis grauitatis contraria ponitur motui corporis. Haec igitur haberetur aequatio $dv = -(m-n)dx : m$, ex qua motus corporis determinari deberet, niſi acceleratio, quae reſiſtentiae fluidi aequalis eſt, accederet.

§. 11. Videamus nunc, quanta ſit reſiſtentia fluidi in cylindrum velocitate alt. v motum baſin ſuam obuertentem. Vis haec aequalis eſt vi, quam fluidum eadem celeritate motum in cylindrum quieſcentem exereret; haec vero vis aequatur ponderi cylindri fluidi altitudinis v, et baſis aequalis ei, quam habet ille cylinder oſcillans. Eſt itaque pondus ejus cylindri fluidi ad pondus hujus vt nv ad ma. Vis igitur haec reſiſtentiae ſe habet ad vim grauitatis quoque vt nv ad ma. Corpore autem aſcendente per Mm, ſi grauitas accelераret, et ſecundum directionem Mm ageret, foret $dv = ds$. Vis ergo reſiſtentiae pro ea ratione effectum edens et accelerans corpus motum, faciet vt ſit $dv = nvds : ma$; ſi autem retardaret, foret $dv = -nvds : ma$.

§. 12. Si igitur ſola vis grauitatis ageret retardando motum corporis, tum eſſet per §. 10. $dv = -(m-n)dx : m$, ſin vero ſola vis accelerans aequalis vi reſiſtentiae ageret, tum eſſet per §. 11. $dv = nvds : ma$. Ex quibus colligitur, ſi vtraque ſimul agat, tum eſſe $dv = nvds : ma - (m-n)dx : m$, ſeu $madv + (m-n)adx - nvds = 0$. Ex qua aequatione motus corporis determinari debet. Quia autem in hac aequatione v vnicam habet dimenſionem, ea integrari poteſt. Reducatur ad hanc formam $dv - \frac{nvds}{ma} = \frac{-(m-n)dx}{m}$. Multiplicetur ea per $c^{\frac{-ns}{ma}}$; denotat vero c numerum, cujus logarithmus hyperbolicus eſt 1, habebitur $c^{\frac{-ns}{ma}} dv - \frac{nc^{\frac{-ns}{ma}} vds}{ma} = \frac{-(m-n)c^{\frac{-ns}{ma}} dx}{m}$. Cujus integralis eſt ſequens $c^{\frac{-ns}{ma}} v = C - \frac{(m-n)}{m} \int c^{\frac{-ns}{ma}} dx$.

§. 13. Ponatur $\frac{m-n}{m} \int c^{\frac{-ns}{ma}} dx = t$, cum ejus integrale ex curua cognita poſſit haberi, vel ſaltem conſtrui. Ita autem, ſi fieri poſſet, integrari ponitur, vt ejus integrale fiat $= 0$, ſi ponatur $x = 0$, quo t determinatum valorem adipiscatur. Habemus ergo ſequentem aequationem $c^{\frac{-ns}{ma}} v = C - t$. Conſtans haec C ita debet accipi, vt, poſito $x = 0$, fiat $v = b$, talis enim ponitur eſſe celeritas corporis in puncto A, ſed poſito $x = 0$, erit et $s = 0$ et $t = 0$, vnde quia $c^0 = 1$, oritur $C = b$. Quamobrem inuenitur ſequens ad inſtitutum noſtrum prorſus accommodata aequatio $v = c^{\frac{ns}{ma}}(b-t)$. Et hinc quoque intelligitur, vbi velocitas euaneſcat, ſeu quousque corpus in curua ſit aſcenſurum, ibi nimirum vbi eſt $v = 0$, ſeu $t = b$. Celeritas vero ipſa corporis in M erit vt $\sqrt{v}$ ſeu vt $c^{\frac{ns}{2ma}} \sqrt{(b-t)}$.

§. 14. Cum jam habeatur celeritas corporis M, erit tempusculum per arculum Mm, quod eſt vt $\frac{ds}{\sqrt{v}}$, ſeu lo-

loco v superiore valore substituto vt $\frac{ds}{c^{\frac{ns}{2ma}}\sqrt{(b-t)}}$. Id quod exprimit elementum temporis. Hujus ergo integrale ita debet esse comparatum, vt, ea adjecta constante, quae facit tempus $=0$ si ponatur x vel t vel $s=0$, vt inquam, si fiat $t=b$, quo in casu integrum obtinetur tempus ascensus, tum b quae a quantitate arcus descripti pendet prorsus ex computo abeat. Hoc vt fiat jam alibi demonstraui oportere, vt tota expressio elementi temporis nullam habeat dimensionem. Quaeritur ergo qualis s functio ipsius t esse debeat? Quia ad s exprimendum b in computum ingredi non potest, sed solum t, perspicuum est fore $\frac{ds}{c^{\frac{ns}{2ma}}}=\frac{dt\sqrt{e}}{\sqrt{t}}$ et sic elementum temporis erit $\frac{dt\sqrt{e}}{\sqrt{(bt-tt)}}$. Ergo longitudo penduli isochroni in vacuo est $2e$.

§. 15. Ex determinatione curuae, vt fiat tautochrona, haec orta est aequatio $ds:c^{\frac{ns}{2ma}}=dt\sqrt{e}:\sqrt{t}$ ex qua natura curuae determinari debet. Aequatio ea integrata dat hanc $C-\frac{2ma}{n}c^{\frac{-ns}{2ma}}=2\sqrt{et}$; vt, facto $t=0$, fiat $s=0$, necesse est, vt sit $C=\frac{2ma}{n}$; Propterea haec inuenitur aequatio pro curua quaesita, $\frac{ma}{n}(1-c^{\frac{-ns}{2ma}})=\sqrt{et}$, et sumendis quadratis haec $\frac{mmaa}{nn}(1-c^{\frac{-ns}{2ma}})^2=et$. Quae denuo differentiata dat

$\frac{ma}{n}(1-c^{\frac{-ns}{2ma}})c^{\frac{-ns}{2ma}}ds = edt$ seu $mac^{\frac{-ns}{2ma}}ds - mac^{\frac{-ns}{ma}}ds = nedt$. Est vero $t = \frac{m-n}{m}\int c^{\frac{-ns}{ma}}dx$, ergo $dt = \frac{m-n}{m}c^{\frac{-ns}{ma}}dx$. Quocirca ejecto t, habebitur aequatio inter s et x, haec $mmac^{\frac{-ns}{2ma}}ds - mmac^{\frac{-ns}{ma}}ds = (m-n)nec^{\frac{-ns}{ma}}dx$. Quae multiplicata per $c^{\frac{ns}{ma}}$ abit in hanc $mmac^{\frac{ns}{2ma}}ds - mmads = (m-n)nedx$.

§. 16. Aequatio differentialis inuenta est iterum integrabilis; integrata vero dat, $\frac{2m^3aa}{n}c^{\frac{ns}{2ma}} - mmas - \frac{2m^3aa}{n} = (m-n)nex$, postquam debita constans $\frac{2m^3aa}{n}$ ablata est. Quae magis accommodatur hoc modo $c^{\frac{ns}{2ma}} = \frac{ns}{2ma} + 1 + \frac{(m-n)nnex}{2m^3aa} = \frac{m^2aas + 2m^3aa + (m-n)n^2ex}{2m^3aa}$ Haec quidem aequatio sufficeret ad curuam construendam; sed commodior euadet liberata ab exponentialibus. Hanc ob rem sumantur logarithmi, eritque $\frac{ns}{2ma} = l(m^2nas + 2m^3aa + (m-n)n^2ex) - l2m^3aa$. Hinc differentiando acquiritur $\frac{nds}{2ma} = \frac{m^2nads + (m-n)n^2edx}{m^2nas + 2m^3aa + (m-n)n^2ex}$ et ex hac ordinando $m^2n^2asds + (m-n)n^3exds = 2(m-n)mn^2aedx$. Quae diuisa per nn praebet sequentem aequationem finalem pro curua quaesita, $m^2asds + (m-n)nexds = 2(m-n)maedx$.

§. 17. Si itaque curua AME eam habuerit proprietatem, vt sit $m^2asds + (m-n)nexds = 2(m-n)maedx$

ea

ea erit tautochrona hoc ſenſu, vt corpus cylindricum altitudinis a ſuper ea deſcendens eodem ſemper tempore ad punctum infimum A perueniat, vbicunque deſcenſum inceperit. Si loco cylindri placuerit globum adhibere ejusdem grauitatis ſpecificae et diametri a, oportebit loco a in aequatione ſcribere $\frac{4}{3}a$, habebiturque $4m^2asds + 3(m-n)nexds = 8(m-n)maedx$, pro motu globi, cujus diameter eſt a. Si longitudo penduli iſochroni in vacuo oſcillanti dicatur f, erit $e = \frac{1}{2}f$, et hinc reſultabit aequatio $8m^2asds + 3(m-n)nfxds = 8(m-n)mafdx$ Hanc aequationem jam ad quemuis caſum ſpecialem accommodare licet.

§. 18. Ponamus denſitatem fluidi euaneſcere, quo motus corporis fiat in vacuo; erit. $n = 0$. Hoc igitur poſito aequationis terminus ſecundus $3(m-n)nfxds$ euaneſcit, et tunc pro tautochrona in vacuo prodibit aequatio $8m^2asds = 8(m-n)mafdx$. Quae, cum ſit $n = 0$, diuiſa per $8m^2a$ reducitur ad $sds = fdx$. Haec vero integrata eſt $ss = 2fx$, aequatio ad cycloidem, cujus circuli genitoris diameter eſt $\frac{1}{2}f$. Id quod prorſus congruit cum iis, quae de tautochroniſmo cycloidis demonſtrata ſunt. Si ergo aequatio inuenta tautochronae in fluido ad vacuum reducitur, litera a diametrum globi oſcillantis denotans exit ex aequatione; et tautochrona in vacuo proinde a magnitudine et figura corporis oſcillantis non pendet. Sed in fluido ad tautochronam determinandam et magnitudine et figura et grauitate ſpecifica corporis oſcillantis opus eſt.

§. 19. Curua, quam inuenimus, tautochrona inseruit descensui corporis, sed ex ea tautochrona, quae ad ascensum spectat in eodem fluido, inueniri poterit. Ponatur enim corpus in curua AME ascendere celeritate initiali, vt ante, ex altitudine h genita; habebit id et vim grauitatis, et resistentiam fluidi contrarias. Quamobrem, cum supra pro descensu haec inuenta sit aequatio, $madv + (m-n)adx - nvds = 0$, vbi vis resistentiae, vti rem ibi consideraui, erat accelerans; hoc in casu corporis ascendentis signum $-$ praefixum termino $nvds$, qui vim resistentiae fluidi exponit, mutari debet in $+$. Quo facto habebitur aequatio $madv + (m-n)adx + nvds = 0$. Ex qua ascensus ejusdem corporis, quod ante descendere positum est, determinabitur.

§. 20. Perspicuum est hanc aequationem ex superiore ad descensum spectante deriuari posse, modo in illa fiat s negatiuum. Quocirca, ad tautochronam ascensui inseruientem inueniendam non est necessarium, vt eodem, quo pro descensu, progrediar modo, sed tantum in aequatione pro tautochrona descensus inuenta loco s poni poterit $-s$. Hoc enim ea transformabitur in tautochronam ad ascensum accommodatam. Si ergo corpus ascendens fuerit globus diametri a, ejus grauitas specifica ad eam fluidi vt m ad n, habebitur pro tautochrona sequens aequatio $8m^2asds - 3(m-n)nbxds = 8(m-n)mabdx$. Vbi loco f posui b, ne tempora ascensus et descensus aequalia esse debere videantur.

§. 21.

§. 21. Cum igitur curuam et descendente corpore et ascendente tautochronam inuenerim; eae si in punctis infimis jungantur, repraesentabunt tautochronam ascensui et descensui simul inseruientem. Sit AM tautochrona pro descensu, altera AN pro ascensu; manifestum est, si corpus semper in curua AM descensum incipiat, et vltra punctum in curua AN ascendat, tum oscillationes has absolutum iri aequalibus temporibus, vbicunque initia descensus in AM assumantur. Si igitur AP fuerit x et AM s, erit $8m^2asds+3(m-n)nfxds=8(m-n)mafdx$, pro altera curua AN vero, si dicatur AQ$=u$, et AN$=t$, erit $8m^2atdt-3(m-n)nbudt=8(m-n)mabdu$. Tempus vero oscillationis vnius aequale est duabus dimidiis oscillationibus duorum pendulorum in vacuo, quorum alterius longitudo est f, alterius b, seu vni integrae oscillationi penduli cujus long. $=\frac{f+2\sqrt{fb}+b}{4}$.

§. 22. Si fuerit $f=b$, erunt duae curuae AM, AN partes ejusdem curuae continuae: Id quod ex eo intelligi potest, quod tum, si loco x ponatur u et loco s, quia in altera curua arcus fiant negatiui, $-t$, aequatio illa ad descensum pertinens mutetur in hanc ascensui inseruientem. Curua ergo MA ab altera parte continuatur in curua AN, et tota curua MAN hanc habet proprietatem vt globus diametri a, et grauitatis specificae m super ea in fluido grauitatis specificae n constituta motum aequalibus semper temporibus oscillationis absoluat. Descensus vero fieri debent in curua MA, et ascensus in AN, nisi forte eae curuae hanc insuper habeant proprietatem,

tem, vt et, si descensus in NA et ascensus in AM fierent, oscillationes totae omnes vt ante essent tautochronae.

§. 23. Aequatio exponentialis §. 16. in eo solum differt ab ea, quam §. 21. dedimus, quod ibi sit a id quod hic est $\frac{4}{3}a$, et c, quod hic $\frac{1}{2}f$. Si ergo in ea aequatione ponatur $\frac{4}{3}a$ loco a, et $\frac{1}{2}f$ loco e, habebitur $64m^3aac^{\frac{3ns}{8ma}}-64m^3aa-24m^2nas=9(m-n)n^2fx$ quae aequatio conuenit cum eâ quae descensui §. 21. inseruire inuenta est, $8m^2asds+3(m-n)nfxds=8(m-n)mafdx$. At alteri aequationi ad ascensum pertinenti $8m^2atdt-3(m-n)nbudt=8(m-n)mabdu$, respondet haec $64m^3aac^{\frac{-3nt}{8ma}}-64m^3aa+24m^2nat=9(m-n)n^2bu$. Hae aequationes exponentiales sufficiunt ad curuas construendas, quarum coordinatae sint x et s; atque u et t, ex quibus deinceps ipsae curuae tautochronae construi poterunt.

§. 24. Cum c sit numerus cujus logarithmus hyperbolicus est 1, erit $c^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}etc.$ Hanc ob rationem est $c^{\frac{3ns}{8ma}}$ seu dicto $\frac{3n}{8m}=k$, $c^{\frac{ks}{a}}=1+\frac{ks}{a.1}+\frac{k^2ss}{a.^2 1.2}+\frac{k^3s^3}{a.^3 1.2.3}+\frac{k^4s^4}{a.^4 1.2.3.4}etc$, adeoque $64m^3a^2c^{\frac{ks}{a}}=64m^3a^2+\frac{64m^3aks}{1}+\frac{64.m^3k^2ss}{1.2}+\frac{64.m^3k^3s^3}{a.1.2.3}+\frac{64.m^3k^4s^4}{a.^2 1.2.3.4}etc.$ Aequatio igitur superior exponentia-

lis,

lis, quae ob $\frac{3n}{8m}=k$ et inde $3n=8km$, mutatur in $64m^3aac^{\frac{ks}{a}}-64m^3aa-64km^3as=64(1-\frac{8}{3}k)k^2m^3\int x$, seu in $a^2c^{\frac{ks}{a}}-aa-kas=(1-\frac{8}{3}k)k^2\int x$, reducetur ad sequentem ex terminorum infinito numero constantem $\frac{k^2ss}{1.2}+\frac{k^3s^3}{a\,1.2.3}+\frac{k^4s^4}{a^2\,1.2.3.4}-etc=(1-\frac{8}{3}k)k^2\int x$, quae diuisa per kk dat $\frac{ss}{1.2}+\frac{ks^3}{a\,1.2.3}+\frac{k^2s^4}{a^2\,1.2.3.4}-etc=(1-\frac{8}{3}k)\int x$ similiter pro ascensu erit $\frac{tt}{1.2}-\frac{kt^3}{a.1.2.3}+\frac{k^2t^4}{a^2\,1.2.3.4}-etc=(1-\frac{8}{3}k)bu$.

§. 25. Ex his aequationibus colligitur, curuam vtramque et descensus et ascensus abire in cycloides, si $k:a$ fuerit infinite paruum; est vero $k=\frac{3n}{8m}$; Ergo eae curuae erunt cycloides si $3n:8ma$ fuerit quantitas euanescens. Id duplici modo euenire potest; Primo si $n:m=0$, id est, si fluidi densitas nulla sit, quo casu motus fit in vacuo. Alter est casus, si $a=\infty$ seu si globus oscillans fuerit infinite magnus ratione videlicet arcuum descriptorum s. Id ergo si acciderit, tautochrona quoque erit cyclois. Porro et id inde concluditur, quo major minorue sit fractio $3n:8ma$ seu tantum $n:ma$ eo magis minusue tautochronas a cycloide discrepare. Ex quo, quanto magis minusue in quouis fluido datus globus secundum cycloidem oscillans a tautochronismo aberret, perspici poterit.

§. 26. Perpendam nunc, qualem tautochronae inuentae figuram habere debeant, et primum ea,

Fig. 3. quae ad descensum pertinet. Sit AMB talis curua super axe AP vt dictis abscissis AP, x, applicatae PM exprimant s. Habebitur pro hac curua haec aequatio, $8m^2 asds + 3(m-n)nsxds = 8(m-n)masdx$, vel haec $64m^3 aac^{\frac{3ns}{8ma}} - 64m^3 aa - 24m^2 nas = 9(m-n)n^2 sx$. Ex hac aequatione apparet hanc curuam nusquam habere punctum flexus contrarii, sed vniformi tractu, vt parabolam, in infinitum progredi. Curua autem inde formata, cujus arcus sunt respondentibus applicatis PM aequales, ibi habebit punctum reuersionis vbi $ds = dx$. Hoc vero erit ibi, vbi est $8m^2 as + 3(m-n)nsx = 8(m-n)mas$. Quae cum exponentiali aequatione conjuncta dat $64m^3 aac^{\frac{3ns}{8ma}} - 64m^3 aa = 24(m-n)mnas$. Hinc elicitur punctum flexus contrarii esse in eo loco, vbi $s = \frac{8ma}{3n} l \frac{8m^2 a + 3(m-n)nf}{8mma} = \frac{8ma}{3n} l(1 + \frac{3(m-n)nf}{8mma})$.

§. 27. Cum sit $8m^2 as + 3(m-n)nsx = 8(m-n)mas$ erit $x = \frac{8ma}{3n} - \frac{8m^2 as}{3(m-n)nf}$. Sed inuentum est $s = \frac{8ma}{3n} l(1 + \frac{3(m-n)nf}{8m^2 a})$. Quamobrem punctum reuersionis erit ad altitudinem x ab imo puncto A, estque $x = \frac{8ma}{3n} - \frac{64m^3 aa}{9(m-n)n^2 f} l(1 + \frac{3(m-n)nf}{8mma})$. Conuertam logarithmum in seriem, vt facilius de loco puncti reversionis judicare liceat. Est vero $l(1 + \frac{3(m-n)nf}{8mma}) = \frac{3(m-n)nf}{8mma} - \frac{9(m-n)^2 n^2 ff}{2.64m^4 aa} + \frac{27(m-n)^3 n^3 f^3}{3.512m^6 a^3} - \frac{81(m-n)^4 n^4 f^4}{4.4096m^8 a^4}$ etc, ergo $\frac{64m^3 aa}{9(m-n)n^2 f}$ $l(1 +$

$l\left(1+\frac{3(m-n)nf}{8m^2a}\right)=\frac{8ma}{3n}-\frac{(m-n)f}{2m}+\frac{3(m-n)^2nff}{3.8m^3a}-\frac{9(m-n)^3n^2f^3}{4.64m^5aa}+\frac{27(m-n)^4n^3f^4}{5.512m^7a^3}$ etc. Consequenter habebitur $x=\frac{(m-n)f}{2m}-\frac{3(m-n)^2nff}{3.8m^3a}+\frac{9(m-n)^3n^2f^3}{4.64m^5aa}-\frac{27(m-n)^4n^3f^4}{5.512m^7a^3}$ etc. Quia haec series eam habet proprietatem, vt ex logarithmis notum est, vt fumma ejus minor fit termino primo, manifeftum eft quo minor fit fractio $\frac{nf}{ma}$, eo magis eam conuergere, et proinde eo effe punctum reuerfionis altius fitum.

§. 28. Sit pro afcenfu curua AN, in qua, dicta AQ$=u$ fit QN$=t$, erit $8mmadt-3(m-n)nbudt=8(m-n)mabdu$, feu $64m^3aac^{-\frac{3nt}{8ma}}-64m^3aa+24mmnat=9(m-n)nbu$. Neque vero haec curua habet punctum flexus contrarii, fed quoque in infinitum vniformiter protenditur, non vero vt prior, quemadmodum parabola, fed fere vt hyperbola. Multo enim magis ab axe diuergit quam illa. Si ex hac tautochrona afcenfui inferviens conftruenda fit, oportet defcribere curuam ad eundem axem, cujus arcus fint applicatis QN aequales. Hujus tautochronae punctum reuerfionis habebitur, fi capiatur $u=\frac{(m-n)b}{2m}+\frac{3(m-n)^2nfb}{3.8m^3a}+\frac{9(m-n)^3n^2b^3}{4.64m^5aa}$ etc, femper ergo eft altius fitum, quam in curua pro defcenfu, et funt prorfus cafus, vbi in infinitum excurrit, aut nullibi exiftit, id quod euenit fi $3(m-n)nf$ eft aequale vel majus quam $8mma$. Fig. 4.

 §. 29.

Fig. 1. §. 29. Progredior nunc ad ipſius curuae conſtructionem et quaero aequationem inter coordinatas orthogonales. Sit AME tautochrona deſcenſui inſeruiens. Sit AP$=x$ PM$=y$ et arcus AM$=s$. Hujus curuae natura exprimitur ex §. 24. hac aequatione $8mmasds+3(m-n)nfxds=8(m-n)mafdx$. Ponatur ds conſtans, et differentietur aequatio, habebitur $8mmads^2+3(m-n)nfdxds=8(m-n)mafddx$. Fiat $ds=pdx$, erit $dy=dx\surd(pp-1)$; verum $dds=0=pddx+dxdp$, quare eſt $ddx=-dxdp:p$. Quibus in aequatione ſubſtitutis ea abibit in $8m^2appdx+3(m-n)nfpdx+8(m-n)mafdp:p=0$. Ex qua obtinetur $dx=\frac{-8(m-n)mafdp}{8m^2ap^3+3(m-n)nfpp}$. Quocirca ad curuam conſtruendam, accepta variabili tertia p, ſumatur $x=8(m-n)maf\int\frac{-dp}{8m^2ap^3+3(m-n)nfpp}$. Deinde quia $dy=dx\surd(pp-1)$ capiatur $y=8(m-n)maf\int\frac{-dp\surd(pp-1)}{8m^2ap^3+3(m-n)nfpp}$. Atque hoc modo curua quaeſita erit conſtructa.

§. 30. Simili modo vt curua pro aſcenſu conſtruatur, hoc tantum opus eſt, vt in illa conſtructione ponatur $-a$ loco $+a$. Hoc enim modo, vt ex aequationibus generalibus celeritatem corporum in medio reſiſtente motorum exprimentibus videre licet, aequatio deſcenſui inſeruiens transmutatur in eam, quae ad aſcenſum pertinet. Porro radius oſculi curuae in puncto M erit $=\frac{(m-n)fdy}{mc^{\frac{3ns}{8ma}}ds}$. Vnde patet radium oſculi in puncto infimo A eſſe $=\frac{m-n}{m}f$,

Cui

Cui in eo puncto longitudo penduli aequalis accipi debet. Denique ex constructione colligere licet, qualem figuram nostra curua habeat. Sit AB tautochrona descensus, quae continua erit cum AC curua ascensus. Fig. 5. Vltra B et C continuatur in D et E, ita vt arcus BD, ED similes et aequales sint arcui BAC. Atque hoc modo in infinitum producitur.

§. 31. Perpendamus nunc qualis corporis seu globi, vt positum est, super curua tautochrona inuenta sit motus. Consideremus oscillationem vnam, quâ globus in puncto infimo habeat velocitatem ex altitudine b acquisitam. Dicatur, vt ante, altitudo genitrix velocitatis globi in puncto quocunque curuae descensus v. Erit ex §. 13. $v = c^{\frac{ns}{ma}}(b-t)$ vbi est $t = \frac{m-n}{m}\int c^{\frac{-ns}{ma}} dx$. Hic vero a altitudinem cylindri oscillantis designat, vt ergo globus introducatur ponatur $\frac{4}{5}a$ loco a, prout §. 17. factum est et erit $v = c^{\frac{5ns}{4ma}}(b-t)$, et $t = \frac{m-n}{m}\int c^{\frac{-5ns}{4ma}} dx$. Cum his aequationibus ea quae naturam curuae exprimit est conjungenda, quae est haec $64m^3aac^{\frac{3ns}{8ma}} - 64n^3aa - 24m^2nas = 9(m-n)n^2sx$; seu hujus differentialis, vt habeatur dx, $24m^2nac^{\frac{3ns}{8ma}}ds - 24m^2nads = 9(m-n)n^2sdx$, siue $8m^2ac^{\frac{3ns}{8ma}}ds - 8m^2ads = 3(m-)nsdx$.

§. 32. Est igitur ex posteriore aequatione $\frac{m-n}{m}dx = \frac{8ma}{3ns}c^{\frac{3ns}{8ma}}ds - \frac{8ma}{3ns}ds$. Vnde erit $\frac{m-n}{m}c^{\frac{-5ns}{4ma}}dx =$

$\frac{8ma}{3nf}\cdot c^{\frac{-3ns}{8ma}}ds-\frac{8ma}{3nf}c^{\frac{-3ns}{4ma}}ds$. Quae integrata dat $t=C-\frac{64m^2aa}{9nnf}c^{\frac{-3ns}{8ma}}+\frac{32m^2aa}{9nnf}c^{\frac{-3ns}{4ma}}$. Constans C adiecta ita debet determinari, vt posito $s=0$, fiat et $t=0$, vt §. 13. requirebatur, est igitur $C=\frac{32m^2aa}{9nnf}$. Quamobrem cum ea expressio euadat quadratum erit $t=\frac{32m^2aa}{9nnf}(1-c^{\frac{-3ns}{8ma}})^2=\frac{32m^2aa}{9n^2fc^{\frac{3ns}{4ma}}}(c^{\frac{3ns}{8ma}}-1)^2$. Sed ex aequatione exponentiali pro curua habetur $c^{\frac{3ns}{8ma}}-1=\frac{24m^2nas+9(m-n)n^2fx}{64m^3aa}$. Itaque erit quoque $t=\frac{(8m^2as+3(m-n)nfx)^2}{128m^4aafc^{\frac{3ns}{4ma}}}$. Ex his reperitur $v=c^{\frac{3ns}{4ma}}(b-\frac{32m^2aa}{9n^2fc^{\frac{3ns}{4ma}}}(c^{\frac{3ns}{8ma}}-1)^2)=bc^{\frac{3ns}{4ma}}-\frac{32m^2aa}{9n^2f}(c^{\frac{3ns}{8ma}}-1)^2$. Vel etiam hoc modo $v=bc^{\frac{3ns}{4ma}}-\frac{(8m^2as+3(m-n)nfx)^2}{128m^4aaf}$.

§. 33. Expressio haec celeritatis dabit locum in curua descensus, quo velocitatem globus habet maximam; etenim ea non incidit in punctum infimum. Id vero punctum erit ibi, vbi $dv=0$. Quare cum inuenta sit $v=bc^{\frac{3ns}{4ma}}-\frac{32m^2a^2}{9n^2f}(c^{\frac{3ns}{8ma}}-1)^2$, erit $dv=\frac{3nb}{4ma}c^{\frac{3ns}{4ma}}ds-\frac{8ma}{3nf}(c^{\frac{3ns}{8ma}}-1)c^{\frac{3ns}{8ma}}ds$. Ergo erit $dv=0$; si si $\frac{3nb}{4ma}.c^{\frac{3ns}{8ma}} = \frac{8ma}{3nf}.c^{\frac{3ns}{8ma}} - \frac{8ma}{3nf}$, seu si $c^{\frac{3ns}{8ma}} = \frac{32m^2a^2}{32m^2a^2-9n^2bf}$.

Vnde deducitur $s = \frac{8ma}{3n} l \frac{32m^2a^2}{32m^2a^2-9n^2bf}$ seu $s = \frac{-8ma}{3n} l(1-\frac{9n^2bf}{32m^2a^2})$. Ex quo colligitur arcum s eo esse majorem quo factum bf majus fuerit, quam a^2, ceteris paribus. Porro ex velocitate finali, quae est vt $\sqrt{b}$, inuenitur totus arcus descensus faciendo $v=0$. Quo in casu erit $c^{\frac{3ns}{8ma}}\sqrt{b} = \frac{4ma}{3n}(c^{\frac{3ns}{8ma}}-1)\sqrt{\frac{2}{f}}$ seu $3nc^{\frac{3ns}{8ma}}\sqrt{\frac{1}{2}bf} = 4mac^{\frac{3ns}{8ma}} - 4ma$, vnde $c^{\frac{3ns}{8ma}} = \frac{4ma}{4ma-3n\sqrt{\frac{1}{2}bf}}$. Totus igitur arcus descensus erit $= -\frac{8ma}{3n}l(1-\frac{3n\sqrt{\frac{1}{2}bf}}{4ma})$.

§. 34. Deinceps, si corpus celeritate descensu acquisita in altera parte ejusdem curuae ascendat, (inseruit enim ea pars ascensui) inuenitur totus arcus descensus $= \frac{8ma}{3n}l(1+\frac{3n\sqrt{\frac{1}{2}bf}}{4ma})$. Si hi logarithmi in series resoluantur habebitur arcus descensus $= 2\sqrt{\frac{1}{2}bf} + \frac{3n(\frac{1}{2}bf)}{2\cdot 2ma} + \frac{9nn(\frac{1}{2}bf)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 8m^2aa} + \frac{27n^3(\frac{1}{2}bf)^2}{4\cdot 32m^3a^3}$ *etc.* Simili modo erit arcus ascensus $= 2\sqrt{\frac{1}{2}bf} - \frac{3n(\frac{1}{2}bf)}{2\cdot 2ma} + \frac{9n^2(\frac{1}{2}bf)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 8m^2a^2} - \frac{27n^3(\frac{1}{2}bf)^2}{4\cdot 32m^3a^3}$ *etc.* Ex quibus perspicuum est arcum ascensus esse minorem arcu descensus. Si $\frac{nbf}{ma}$ valde fue-

fuerit paruum, harum ferierum duos terminos initiales tantum affumere fufficit, et tum differentia inter arcum defcenfus et afcenfus erit $\frac{3nbf}{4ma}$. Cum eorum fumma fit $2\sqrt{2bf}$. Sunt ergo differentiae q, p, in ratione duplicata fummarum.

§. 35. Haec eft igitur tautochrona in medio, quod mobili refiftit in ratione duplicata velocitatum. Pro aliis vero medii refiftentis hypothefibus, quibus refiftentia alii cuidam celeritatis dignitati aut functioni proportionalis ponitur, hac methodo tautochronae inueniri non poffunt; non quidem vitio methodi, quafi ea vniuerfalis non effet, fed defectu analyfis; quod in aliis hypothefibus velocitas non poteft exprimi. Perfuafus autem fum hanc folam refiftentiae hypothefin fecundum quadrata celeritatum in rerum natura locum habere. Quanquam enim ex experimentis conftat, fluida aliam praeter hanc exercere refiftentiam a tenacitate eorum ortam, quae velocitati proportionalis effe nonnullis vifa eft, tamen *Neutonus in Princip. Phil. Edit. nouisfima pag.* 274 potius exiftimat eam prorfus non a velocitate pendere, verum eam effe vniformem feu in ratione momentorum temporum. Qua fit vt vires viuae amiffae fint, vt fpatia percurfa, id quod aliis rationibus ex natura hujus refiftentiae deductis praetermiffis ex eo intelligi poteft, quod mobile, fi refiftentiae velocitatibus effent proportionales nunquam ad quietem perueniret, quod tamen tandem accidere experimenta confirmant; fi vero infuper refiftentia adfit, fecundum quam mobile amittit de

vi

vi viua in ratione ſpatiorum deſcriptorum, tautochronam exhibere in promtu eſt; eaque facile ex inuentâ hac formari poteſt. Ponatur enim tantummodo in aequatione noſtra tautochronae inuenta loco x haec quantitas $x + gs$, vbi litera g, ex quantitate hujus reſiſtentiae a tenacitate vel frictione orta determinari debet. Quo facto habebitur tautochrona quaeſita.

PROBLEMA ASTRONOMICUM

INUENIENDI ALTITUDINEM POLI VNA CUM DECLINATIONE STELLAE EJUSDEMQUE CULMINATIONE EX TRIBUS ALTITUDINIBUS STELLAE ET DUOBUS TEMPORUM INTERUALLIS BREUI CALCULO SOLUTUM.

Auctore

Daniele Bernoulli Joh. Fil.

Lemma. Sint tres arcus circulares contigui IP, PQ, QR, dico fore $\pm \frac{IZ}{IV} = \frac{LN \times QX - LM \times RY}{LN \times PX - LM \times PY}$ vbi IZ ſignificat tangentem arcus IP; LN differentiam coſinuum pro arcubus IP et IR; LM differentiam coſinuum pro arcubus IP et IQ, QX et RY ſunt ſinus verſi arcuum PQ et PR; et PX, PY ſunt eorundem arcuum ſinus: denique IV eſt ſi- Menſ. Nov. 1729. Tab. VIII. Fig. 1.

 nus

nus totus. Demonſtrationem quiuis ſibi facile formabit via analytica, ſi ſyntheticam non obuiam habet.

Problema. Datis tribus altitudinibus ſtellae fixae et duobus temporum interuallis, inuenire ejusdem declinationem, eleuationem poli, punctumque temporis quo ſtella meridianum tranſit.

Fig. 2. *Solutio.* Sit ABCD horizon; COIA meridianus; ORQPI parallelus a ſtella deſcriptus, fueritque ſtella obſeruata in punctis R, Q, P; ducantur RN, QM, PL ad IO perpendiculares, et ex punctis I, L, M, N, O, demittantur in horizontem verticales IE, LF, MG, NH, et OU, quae ſcilicet repraeſentant ſinus altitudinum punctorum I, P, Q, R, O, quia lineae PL, QM, RN, ſunt parallelae horizonti, adeoque ab eodem aequidiſtantes: Denique ducantur OW, NT, MS et Lα parallelae ipſi CA. Sit nunc, conſiderando circulum ORQPI vt ipſum aequatorem, ſunt enim in vtroque circulo omnia ſimilia:

Sinus totus - - - -	$=1$
tangens arcus IP - - -	$=z$
ſinus verſus arcus horarii PQ - -	$=a$
ſinus verſus arcus horarii PR -	$=b$
ſinus arcus horarii PQ - -	$=\alpha$
ſinus arcus horarii PR - -	$=\beta$,

habebitur per praecedens lemma talis aequatio $\pm z = \frac{LN \times a - LM \times b}{LN \times \alpha - LM \times \beta}$, ponantur tum in numeratore tum in denominatore loco LN et LM earundem pro-

por-

portionales LT et LS (quae ſunt differentiae ſinuum inter primam et tertiam ſtellae altitudinem, atque inter ſecundam et tertiam, quasque proin vt datas vocabo, m et n) et ſic habetur $\pm z = \frac{\beta a - nb}{m\alpha - n\beta}$ quod eſt deſideratum problematis vltimo loco nominatum. Cognita tangente arcus IP, innoteſcunt reliqui arcus lineaeque ad illos pertinentes. Hinc

ponam IL - - - $= h$

LN$=$IN$-$IL - - $= g$

ergo ob ſimilitudinem triangulorum NLT et LTα, fit

Iα - - - $= \frac{mh}{g}$;

Huic ſi addamus αE, ſeu ſinum tertiae ſtellae altitudinis, quem ponam $= f$, erit ſinus maximae ſtellae altitudinis meridionalis, ſeu IE$= \frac{mh}{g} + f$, porro eſt IW$= \frac{2m}{g}$; ergo IE$-$IW$=$OU, ſeu ſinus minimae ſtellae altitudinis meridionalis OU$= f + \frac{(h-z)}{g} m$: vel ſi dicatur UL$= l$, erit IE$= (f - \frac{lm}{g}) + \frac{m}{g}$, et OU$= (f - \frac{lm}{g}) - \frac{m}{g}$ Hinc igitur innoteſcit declinatio ſtellae et eleuatio poli. Q. E. F.

Nunc vero regulam ita erutam contraham, vt eo manifeſtior fiat atque concinnior.

Regula. Sit ſinus totus $= 1$, erit differentia ſinuum primae et tertiae ſtellae altitudinis $= m$ erit differentia ſinuum primae et ſecundae ſtellae altitudinis $= n$ ſinus verſus arcus horarii inter ſecundam et tertiam obſeruationem $= a$, ſinus ejus arcus $= \alpha$, ſinus verſus arcus horarii inter primam et tertiam obſeruationem $= b$, ſinus ejusdem arcus $= \beta$, erit tangens arcus horarii inter tertiam obſeruationem et ſtellae culminationem, vel $+z=\frac{ma-nb}{m\alpha-n\beta}$. Ponatur deinde coſinus arcus horarii inter tertiam obſeruationem et ſtellae culminationem $=l$, ſinus tertiae ſtellae altitudinis $=f$, differentia coſinuum pro arcu horario inter tertiam obſeruationem et culminationem, et arcu horario inter primam obſeruationem et culminationem $=g$, erit ſinus majoris altitudinis meridionalis $(f-\frac{lm}{g})+\frac{m}{g}$, et ſinus minoris altitudinis meridionalis $(f-\frac{lm}{g})-\frac{m}{g}$. Et hinc altitudo poli.

Scholium. Si tangens z ſit negatiua, eſt etiam arcus reſpondens negatiue ſumendus. De ſinibus verſis obſeruetur, illos (ſi eorum tabulae deſint) haberi auferendo coſinum a ſinu toto, eorumque logarithmos obtineri, ſumendo duplum logarithmi ſinus arcus dimidii, addendoque log. 2.

Habet iſtud problema hanc proprietatem, quod declinatio ſtellae et eleuatio poli inuerti poſſint, ita vt v. gr. eleuatio poli 20°. et declinatio ſtellae 30°. eadem producat phaenomena, atque eleuatio poli 30°. et declinatio ſtellae 20°. Igitur obſeruator cautus ſit in ſtabilienda eleuatione poli, ſtellamque ſeligat talem, ne facile illius declinationem cum eleuatione poli confundat.

Vtilitas problematis in eo conſiſtit, quod ſine vllis praecognitis ſingula determinentur facile, vt et in eo, quod refractionum incommoda fere tota auferri poſſint, ſiquidem tres obſeruationes in ſtella inſtitui poſſunt tales vt minima ſtellae altitudo ſit altrv 80°, adeoque a refractionibus fere libera.

AD-

ADDITAMENTUM.

Quoniam in demonſtrando lemmate noſtro facile eſt in prolixos et ſuperfluos ſe immittere calculos, neque demonſtratio breuis et ſynthetica cuiuis ſtatim apparet, monitus fui, ad ſubleuandam aliis demonſtrationis operam, vt meam apponerem; id igitur faciam, poſtquam meminero de ſequentibus propoſitionibus, quae in elementis Geometriae demonſtrari ſolent.

I. Chordam arcus $A+B$ haberi multiplicando chordam arcus A, per chordam complementi ad duos rectos arcus B, vt et chordam arcus B, per chordam complementi ad duos rectos arcus A, ſummamque productorum diuidendo per diametrum.

II. Sinum verſum alicujus arcus haberi, diuidendo quadratum chordae ejusdem arcus per diametrum.

III. Tangentem alicujus arcus, cujus chorda ponitur A pro radio R, eſſe $=\frac{AR\sqrt{(4RR-AA)}}{2RR-AA}$.

IV. Productum chordae alicujus arcus in chordam complementi ad duos rectos, eſſe aequale producto ſinus illius arcus in diametrum.

Hisce in memoriam reuocatis, ductisque (in fig. 1.) rectis PI, PQ, PR, et QI, erit (*per art. I.*) ponendo vbique IV pro radio, $QI=[PQ\sqrt{4IV^2-PI^2}+PI\sqrt{4IV^2-PQ^2}]:2IV$, vnde habetur (*per art. II.*) $LM=IM-IL=[2IV^2.PQ^2-PQ^2.PI^2+PQ.PI\sqrt{(4IV^2-PQ^2)(4IV^2-PI^2)}]:4IV^3$. Eodem modo obtinetur quoque $LN=[2IV^2.PR^2-PR^2.PI^2+PR^2.PI^2.\sqrt{(4IV^2-PR^2)(4IV^2-PI^2)}]:4IV^3$, ergo erit

$\frac{LM}{LN} = \frac{2IV^2.PQ^2 - PQ^2.PI^2 + PQ.PI.\sqrt{(4IV^2 - PQ^2).(4IV^2 - PI^2)}}{2IV^2.PR^2 - PR^2.PI^2 + PR.PI.\sqrt{(4IV^2 - PR^2).(4IV^2 - PI^2)}}$ multiplicentur numerator et denominator per IV posteaque diuidantur per $2IV^2 - PI^2$ et ponatur (*vi art. III.*) $\pm ZI$ loco $[IV.PI.\sqrt{(4IV^2 - PI^2)}]:[2IV^2 - PI^2]$; sicque erit $\frac{LM}{LN} = \frac{IV.PQ^2 \pm PQ.ZI\sqrt{(4IV^2 - PQ^2)}}{IV.PR^2 \pm PR.ZI\sqrt{(4IV^2 - PR^2)}}$ est vero (*per art. II.*) $PQ^2 = 2IV \times QX$, et $PR^2 = 2IV.RY$, nec non (*per art. IV.*) $PQ\sqrt{(4IV^2 - PQ^2.)} = 2IV \times PX$ atque $PR\sqrt{(4IV^2 - PR^2)} = 2IV.PY$. hisce ergo valoribus in posteriori aequatione substitutis fit. $\frac{LM}{LN} = \frac{IV.QX \pm PX.ZI.}{IV.RY \pm PY.ZI}$ vnde denique deducitur $\frac{\pm ZI}{IV} = \frac{LN.QX - LM.RY.}{LN.PX - LM.PY.}$. Q. E. D.

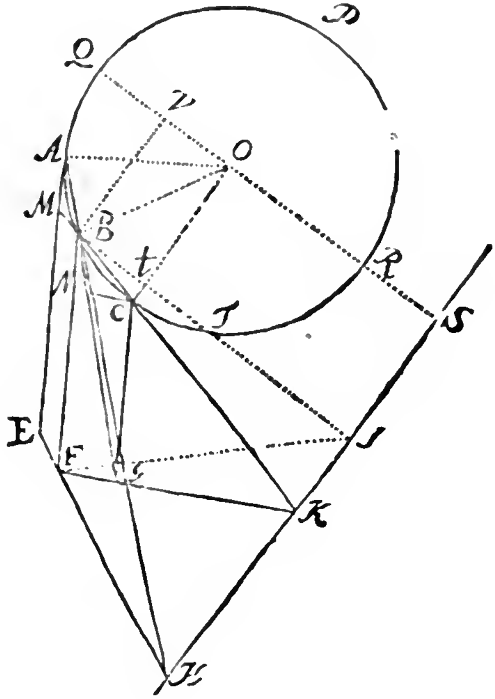
PROBLEMA

EX OBSERUATIS TRIBUS ALTITUDINIBUS ALICUJUS STELLAE IMMUTABILEM HABENTIS DECLINATIONEM, ET INTERUALLIS TEMPORIS INTER PRIMAM ET SECUNDAM OBSERUATIONEM, ET INTER SECUNDAM ET TERTIAM, INUENIRE ALTITUDINEM POLI ET DECLINATIONEM STELLAE.

Auctore Jac. Hermanno.

I.

Mens. Nou. 1729. Sint in adjecta figura ACP parallelus stellae, et communis sectio ejus plani et plani horizontis, recta HIS. Puncta A, B, et C designent loca stellae quando ejus altitudines captae fuerunt,



runt, demisfisque ex his punctis perpendicularibus AE, BF, et CG, ad planum horizontis, exponent illae finus altitudinum ftellae obferuatarum, atque adeo (hyp.) datae funt. Anguli AOB, et BOC quoque (hyp.) dati funt, refert enim angulus AOB tempus per arcum BA, et angulus COB tempus per arcum CB, in gradibus aequatoris expreffum, quare vocando finum femisfis anguli AOB$=m$, et finum femisfis BOC$=n$, ad finum totum $=1$, item cofinum declinationis ftellae feu OQ$=x$, inuenietur fubtenfa arcus AB$=2mx$, et fubtenfa arcus Bc$=2nx$. Dicantur praeterea finus altitudinis mediae feu BF

BF=a, AM=AE−BF=b, et BN=BF−CG=c, et producantur chordae AB et BC vsque ad occursus H et K sectionis planorum horizontis et paralleli HS, et triangula similia MAB, FBH, praebebunt AM(b) : AB($2mx$)=BF(a) : BH($\frac{2amx}{b}$). Nec non triangula similia NBC et FBK, analogiam NB(c), BC($2nx$)::FB. (a) BK($\frac{2anx}{c}$).

II. His omnibus jam positis, in triangulo rectilineo HBK, ex data ratione laterum BH($\frac{2amx}{b}$) et BK($\frac{2anx}{c}$), quae est, vt cm ad bn, et angulo intercepto, HBK cujus mensura est semissis arcus AC, inuenientur anguli BHK, BKH, vel BKI, et KBI posita BI normali ad HK, faciendo analogiam, $cm+bn : cm-bn =$ *tang. ang.* 2 rect.$-\frac{1}{4}$AOC: tangent. anguli cujusdam x. Erit enim BKH=2 rect.$-\frac{1}{4}$AOC $+x$, atque adeo datus, sit sinus ejus $=p$.

III. Porro in triangulo rectangulo BKI, habetur sinus tot. (1.) sinus ang. BKI (p.)::BK($\frac{2anx}{c}$). BI($\frac{2anpx}{c}$). Ductaque IF, erit angulus BIF mensura inclinationis paralleli ACP ad horizontem, seu eleuationis aequatoris cujus sinus dicatur $=y$. In triangulo vero BFI ad F rectangulo sit BI ($\frac{2anpx}{c}$). BF. (a)::sin tot. (1). sin. ang. BIF(y). Adeoque ductis extremis et mediis habetur aequatio $2npxy=c$. Ex hac aequatione judicaui antea problema indeterminatum esse ideo, quod nullae conditiones superessent, ad quas non respexerim, et quarum ope alterutra indeterminata exterminari possit ex inuenta aequa-

aequatione, ſed inueſtigando ex praecedentibus altitudines ſtellae culminantis, ſententiam mutare coactus ſum.

IV. Nam inuento (§. II.) angulo BKI ejus complementum angulus KBI datus eſt, atque adeo arcus CT, cujus ſemisſis illius menſura eſt; hanc ob rem dabitur quoque arcus BCT; atqui demiſſa ex centro circuli normali OX in ſubtenſam BT, ipſa BX vel XT aut ipſis aequalis OV, ductis nempe BV parallela OX, et per centrum O recta QR aquidiſtante ipſi BI. Itaque ſi in diametro alius circuli, cujus radius $=1$, capiatur à centro interuallum analogum ipſi OV aequale ſinui ſemisſis anguli BOT, atque in illa diametro partes analogae ipſis QV et RV dicantur r et s, quae vtique datae ſunt, inuenientur in ſchemate $QV=rx$, et $RV=sx$, adeoque $QS(=BI+QV)=\frac{2anpx+crx}{c}$, et $RS(=BI-VR)=\frac{2anpx-csx}{c}$.

Eſt vero vt $BI(\frac{2anpx}{c}).BF(a)::QS(\frac{2anpx+crx}{c})$. ſin. alt. ſtell. in $Q(\frac{2anp+cr}{2np})$, et $BI(\frac{2anpx}{c})$. $BF(a)::RS(\frac{2anpx-csx}{c})$. Sin alt. ſtell. in $R(\frac{2anp-cs}{2np})$. Ex quibus conſtat, quod altitudines meridianae ſtellae noſtrae maxima in Q, et minima in R datae ſint. Semiſſis vero exceſſus altitudinis maximae ſupra minimam dat eleuationem aequatoris, ejusque complementum *Eleuationem Poli*, et exceſſus maximae altitudinis ſtellae ſupra eleuationem aequatoris, *Declinationem Stellae*, quae erant inuenienda.

SOLUTIO PROBLEMATIS ASTRONOMICI EX DATIS TRIBUS STELLAE FIXAE ALTITUDINIBUS ET TEMPORUM DIFFERENTIIS INUENIRE ELEUATIONEM POLI ET DECLINATIONEM STELLAE.

Auct. Leonh. Eulero.

Tab. IX. Fig. 1.

Lemma. In triangulo ſphaerico quocunque ABC eſt coſ: anguli $A = \frac{cos: BC - cos. AB. cos: AC}{sAB. sAC}$, poſito radio vel ſinu toto 1. Liquet hoc ex iis, quae *Clar. Profeſſor Maier* in ſuis Trigonometricis tradidit.

Coroll: Ex his fluit eſſe coſ: $BC = cos: AB. cos: AC + cos: A. sAB. sAC$.

Theorema. In omni triangulo ſphaerico ABC, eſt coſ: $BC = \frac{cos: (AB + AC) - cos: (AB - AC)}{2} + \frac{cos: A. cos: (AB - AC) - cos: A. cos: (AB + AC)}{2}$. Poſito ſinu toto 1.

Demonſtratio. Factum duorum coſinuum aequatur ſemiſsi coſinus ſummae cum ſemiſſi coſinus differentiae arcuum vel angulorum. Atque factum duorum ſinuum aequale eſt ſemiſſi coſinus differentiae, demta ſemiſſi coſinus ſummae arcuum vel angulorum. Vt ex iisdem citatis vel apparebit, vel facile colligetur. Erit igitur coſ: AB. coſ: $AC = \frac{cos: (AB + AC) + cos: (AB - AC)}{2}$, et $sAB. sAC = \frac{cos: (AB - AC) - cos: (AB + AC)}{2}$. His ad aequationem in lemmatis corollario accommodatis prodibit coſ: $BC = \frac{cos: (AB + AC) + cos: (AB - AC)}{2} + \frac{cos: A. cos: (AB - AC) - cos: A. cos: (AB + AC)}{2}$. Q. E. D.

PRO-

PROBLEMA.

Datis ſtellae fixae in tribus locis ABC ſucceſſiue obſeruatae altitudinibus ſiue earum complementis ZA, ZB, ZC, temporibusque inter obſeruationes praeterlapſis, vel angulis ad polum P, APB, BPC, inuenire eleuationem poli ſeu ejus complementum PZ, et declinationem ſtellae ſeu ejus complementum AP vel BP vel CP. Fig. 2.

Solutio. Dicantur ſinus altitudinis primae vel coſ. AZ, a; Coſinus BZ, b et coſ. CZ, c. Atque ſAPB, P; ejusque coſinus, p: ſAPC, Q, ejusque coſinus, q. Sit autem ſZPA$=$Z ejusque coſinus $=z$. Tum compendii cauſa ſit coſ: ZPB$=r$ et coſ. ZPC$=s$. Ponatur porro coſ: (PZ$+$AP)$=x$, et coſ: (PZ$-$AP)$=y$. Habebitur in triangulo ſphaerico ZPA, coſ: AZ vel $a=\frac{x+y+zy-zx}{2}$ $=\frac{(1-z)x+(1+z)y}{2}$. Deinde in triangulo ZBP eſt $b=\frac{x+y+ry-rx}{2}=\frac{(1-r)x+(1+r)y}{2}$. Et ſimiliter in triangulo ZPC erit $c=\frac{(1-s)x+(1+s)y}{2}$. Ex quibus tribus aequationibus tres incognitas x, y et z determinari oportet. Aequationes I et II dabunt $y=\frac{a(1-r)-b(1-z)}{z-r}$. Secunda vero et tertia dant $y=\frac{b(1-s)-c(1-r)}{r-s}$. Vnde colligitur haec aequatio $a(1-r)(r-s)-b(1-z)(r-s)$ $=b(1-s)(z-r)-c(1-r)(z-r)$. Quae abit in hanc, $a(1-r)(r-s)+c(1-r)(z-r)=b(1-r)(z-s)$, atque diuiſa per $1-r$ dat $a(r-s)+c(z-r)=b(z-s)$. Sed ex conjunctione ſinuum ſequitur eſſe $r=pz-$PZ et $s=qz-$QZ. Vnde habebitur $az(p-q)-a$Z(P$-$Q)

$+cz(1-p)+cPZ=bz(1-q)+bQZ$. Ex qua conficitur haec $\frac{Z}{z}=\frac{a(p-q)-b(1-q)+c(1-p)}{aP-aQ+bQ-cP}=\frac{a(p-q)-b(1-q)+c(1-p)}{P(a-c)-Q(a-b)}$. Eſt autem $\frac{Z}{z}$ tangens anguli ZPA; dicatur ea T, ſitque etiam $1-p=\pi$ et $1-q=\varkappa$, denotabunt π et $\varkappa$, ſinus verſos angulorum APB, APC. Eruitur igitur haec aequatio $T=\frac{a(\varkappa-\pi)-b\varkappa+c\pi}{P(a-c)-Q(a-b)}=\frac{\varkappa(a-b)-\pi(a-c)}{P(a-c)-Q(a-b)}$. Ex qua determinatur angulus ZPA, ex eoque reliqua. Eſt autem $y=\frac{a(1-r)-b(1-z)}{z-r}$ et $x=\frac{b(1+z)-a(1+r)}{z-r}$ vt ex praecedentibus apparet. Dato vero angulo ZPA, dabitur et ZPB et proinde r. Erit autem $\frac{y+x}{2}=a-\frac{z(a-b)}{z-r}$ et $\frac{y-x}{2}=\frac{a-b}{z-r}$. Hinc facile inueniuntur y et x, coſinus ſummae et differentiae arcuum quaeſitorum. Q. E. T.

Exemplum hic appono, quod antea ex altitudine poli 54°, 43′ aſſumta computaueram, vt inueſtigarem iidemne hac methodo eruantur numeri. Eſt altitudo prima 71°, 15′, ſecunda 68°, 34′, et tertia 63°, 54′. Tempus inter I et II obſeruationem ſeu angulus APB eſt 7°, 52′. Tempus inter primam et tertiam ſeu ang: APC eſt 20°, 36′. Erit ergo $a=9469502$, $b=9308279$, $c=8979213$. Ergo $a-c=490289$, $a-b=161223$, porro $P=1368683$ et $\pi=94107$, $Q=3518416$, $\varkappa=639404$. Erit $\varkappa(a-b)-\pi(a-c)=5692700$ et $P(a-c)-Q(a-b)=10380060$. Vnde inuenitur $T=5484423$ = tang: 28°, 45′. Eſt ergo angulus ZPA=28°, 44′, et ZPB=36°, 37′. Habetur itaque coſ: ZPA$=z=8767267$ et coſ: ZPB$=r=8026440$. Ergo $z-r=0740727$. Cum vero ſit

$a-b$

$a-b=162223$. Erit $\frac{a-b}{z-r}=2176264=\frac{y-x}{2}$. Deinde est $\frac{z(a-b)}{z-r}=1907988$. Hoc ab $a=9469502$ ablato restat $\frac{y+x}{2}=7561514$. Hinc inuenitur $y=9737778$, et $x=5385250$. Est ergo summa arcuum AP+ZP=57°, 25′, et differentia arcuum AP–ZP vel ZP–AP=13°, 9′. Ex his pro AP et ZP inueniuntur hi duo valores 35°, 17′ et 22°, 8′. Et pro eleuatione poli et declinatione stellae consequenter hi duo qui sunt illorum conplementa 54°, 43′ atque 67°, 52′. Quis autem horum sit pro declinatione aut eleuatione poli ex problemate non determinatur. Id tamen certum est alterum eleuationem poli, alterum declinationem stellae praebere.

Verum etiam hinc stellae tempus culminationis cognoscitur: distat enim a tempore primae obseruationis angulo ZPA, quia PZ est arcus meridiani. Inuentus vero est ang. ZPA=28°, 45′, qui ad tempus reductus dat 1 hor. 55′, hocque tempore vel addendo vel subtrahendo a momento obseruationis primae, prout circumstantiae requirunt, inuenitur tempus culminationis, si ipse sol in obseruationibus hisce adhibeatur, inuenietur verum meridiei tempus.

PROBLEMA
SPHAERICO-ASTRONOMICUM.
Auth. F. C. *Mayero.*

Tab. IX. Fig. 3. Datis alicujus ſtellae tribus altitudinibus, Aa, Bb et Cc, itemque angulis aPb, aPc et bPc ex tempore obſeruatarum altitudinum cognitis, inuenire altitudinem aequatoris, PZ et complementum declinationis ſtellae aP($=b$P$=c$P) adeoque et altitudinem poli cum ipſa declinatione.

Sit ſinus altitudinis Aa, ſiue coſinus arcus $aZ=a$
- - - Bb, - - - $bZ=b$
- - - Cc, - - - $cZ=c$

Sinus anguli aP$b=m$ ejusque coſinus $=n$
- - aP$c=f$ - - $=g$
- - aPZ$=x$ - - $=y$
Sinus lateris PZ$=v$ - - $=z$
- - aP$=p$ - - $=q$

Per notam regulam habetur porro

Coſinus anguli ZP$b=\frac{ny-mx}{r}$
- - ZP$c=\frac{gy-fx}{r}$

Cum in triangulis aPZ, bPZ et cPZ omnes anguli ad P, (per praecedentia) vna cum triangulorum lateribus notationem debitam habeant, poterunt angulorum expreſſiones ſiue notationes per regulam meam aliae formari et ſic aequationes inſtitui, vti mox ſequitur.

In

In triangulo aPZ eſt

1 - - $y = r\frac{ra-qz}{pv}$, et inde

2 - - $rrra - rpvy = rrqz$.

In triangulo bPZ eſt

3 - - $\frac{ny-mx}{r} = r\frac{rb-qz}{pv}$ ex qua fit

4 - - $rrrb - pv(ny-mx) = rrqz$.

In triangulo cPZ eſt

5 - - $\frac{gy-fx}{r} = r\frac{rc-qz}{pv}$ porroque

6 - - $rrrc - pv(gy-fx) = rrqz$.

Ex aequationibus 2 et 4ta fit

7 - - $rrra - rpvy = rrrb - pv(ny-mx)$, inde oritur

8 - - $\frac{r^3(a-b)}{ry+ny-mx} = pv$

Ex 2 et 6 emergit

9 - - $rrra - rpvy = rrrc - pv(gy-fx)$ exinde fit

10 - - $\frac{r^3(a-c)}{ry+gy-fx} = pv$.

Ex hac et 8 fit

11 - - $\frac{a-b}{ry-ny+mx} = \frac{a-c}{ry+gy+fx}$ quae reducatur vt tandem fiat

12 - - $\frac{rx}{y} = \frac{(a-b)(r-g)-(a-c)(r-n)}{(a-b)f-(a-c)m}r$.

Hac regula tangens anguli aPZ inuenitur, quo dato dantur et anguli bPZ et cPZ. Poteſt autem regula breuior fieri hoc medio: formetur arcuum aZ et bZ ſemiſumma et ſemidifferentia, illius ſinus ſit $=$A, hujus ſinus $=$B ita habetur $\frac{2AB}{r} = a-b$. Formetur porro ſemiſumma et ſemidifferentia ex arcubus aZ cZ ponaturque illius ſinus $=$C et hujus $=$D, vt ſit $\frac{2CD}{r} = a-c$. Ponatur tandem ſemitangens

gens $aPc = \alpha$ et ſemitangens anguli $aPb = \beta$, vt ſit $(r-g) = \frac{\alpha g}{r}$ et $(r-n) = \frac{\beta m}{r}$. quare

13 - - $\frac{rx}{y}\left\{\begin{array}{l} = \frac{AB\alpha g - CD\beta m}{ABf - CDm} \\ = \frac{CD\beta m - AB\alpha g}{CDm - ABf} \end{array}\right\}$

Poſtquam anguli aPZ, bPZ et cPZ innotuerunt, ad inuentionem reliquorum quaeſitorum tribus altitudinibus non opus eſt amplius, ſufficiunt duae, reductum enim eſt problema ad aliud, quod non niſi duo triangula ſibi mutuo inſerta aſſumit ex: gr: aPZ et bPZ in quibus dantur latera aZ et bZ, atque anguli ad P, ex quibus reperiuntur reliqua.

Dedi ſolutionem problematis alibi, igitur ea nunc ſuperſedeo, tantumque quod reſultat afferam rententis ſymbolis ſupra aſſumtis; opus vero eſt praeterea paucis aliis, ſcilicet ponatur anguli aPZ coſinus $= S$, et coſinus anguli $bPZ = ſ$ ita habetur:

14 - - $qz = \frac{Sb - ſa}{S - ſ}r$ et

15 - - $pv = \frac{a-b}{S-ſ}rr$ inde fit

16 - - $\frac{qz - pv}{r} = \frac{(r+S)b - (r+ſ)a}{S - ſ} =$ coſinui ſummae quaeſitorum.

17 - - $\frac{qz + pv}{r} = \frac{(r-ſ)a - (r-S)b}{S - ſ} =$ coſinui differentiae quaeſitorum.

Quibus datis quaeſita ipſa data ſunt quoque, S. E. I.

Duae hae regulae, quibus ſumma et differentia quaeſitorum inuenitur, breues, et calculo aptae ſunt; licet enim ſinus verſi $r-S$, $r+ſ$ &c. &c. in tabulis ſinuum non inueniuntur, poſſunt tamen quam facillime formari notis regulis. Praeterea, ſi angulo-

rum

rum aPZ et bPZ conſtituantur ſemiſumma et ſemidifferentia, et illius ſinus dicatur M, hujus vero N, erit $S-ſ=\frac{2MN}{r}$, adeoque regulae contrahuntur hoc modo:

18 - - $\frac{qz-pv}{r}=\frac{(r+s)b-(r+ſ)a}{2MN}$.

19 - - $\frac{qz+pv}{r}=\frac{(r-s)a-(r-s)b}{2MN}$.

Habet idem problema aliam ſolutionem. Sicut enim in priore ſolutione tres primordiales aequationes (prima, tertia et quinta) in alias fuerunt reductae, quibus incognitae qz et pv exeſſe coactae ſunt, vt ſolae x et y remanſerint, quarum valores tum facile determinabantur: Ita viciſſim in altera hac ſolutione aequationes primordiales eo modo tractantur, vt x et y eliminentur, ſolaeque pv et qz reſtent. Non opus eſt vt calculum apponam, ejus enim primordia, vt dixi, in prima ſolutione jam extant, reductiones autem ad qz et pv conſuetis reducendi artificiis peraguntur. Dabo tamen vltimas aequationes, has ſc: $qz=r\frac{anf-amg+rcm-rbf}{nf-mg+rm-rf}$ vel quia $\frac{nf-mg}{r}$ ſinus eſt anguli bPc, quem breuius $=b$ ponere licet erit $qz=r\frac{ab+cm-bf}{b+m-f}$ item $pv=\sqrt{}[rr(ra-qz)^2-2rn(ra-qz)(rb-qz)+rr(rb-qz)^2]:m$ vel $pv=\sqrt{}[rr(ra-qz)^2-2rg(ra-qz)(rc-qz)+rr(rc-qz)^2]:f$. Quibus expreſſionibus vti ante ſumma et differentia quaeſitorum, at quam difficillima et prolixiſſima opera, inueniuntur: prior ergo ſolutio longe praeferenda eſt.

Tertia Solutio.

Haec in eo confiftit vt triangula fphaerica in planum projiciantur, et fic reliqua per trigonometriam planam efficiantur.

Fig. 4. Sphaera vt patet inuerfa jacet et polo P incumbit. PB, PC, PD, latitudinis, ZB autem et ZC, ZD altitudinum complementa funt.

Axis fphaerae eft AP, ex puncto autem A fit projectio. Ducatur itaque ex puncto A per punctum Z linea quae plano fubjecto occurrat in E, ducatur praeterea PE. Haec ergo erit tangens anguli EAP (fiue dimidiae altitudinis aequatoris), et AE ejusdem anguli fecans eft. Sit hujus anguli finus $=v$, cofinus $=z$ adeoque tangens $\frac{rv}{z}=\alpha$ et fecans $=\frac{rr}{z}=\beta$.

Ducantur porro ex A per B, C et D lineae quae plano occurrant in punctis F, G, T, hae lineae omnes funt aequales, ficuti et lineae PF, PG et PT, propter aequales arcus PB, PC, PD. Sunt autem illae fecantes, hae vero tangentes angulorum FAP, GAP, TAP, qui anguli omnes aequales funt inter fe, et praeterea complemento latitudinis. Sit hujus anguli finus $=p$, cofinus $=q$, adeoque tangens $=\frac{rp}{q}=\delta$ et fecans $=\frac{rr}{q}=\varepsilon$.

Per naturam projectionis hujus fiunt anguli EPT, TPG, GPF aequales angulis ZPD, DPC et DPB, quorum primus incognitus eft, reliqui per obferuationem dati. Sit igitur finus primi $=x$ cofinus $=y$. Sinus fecundi $=m$ et cofinus $=n$. Sinus tertii $=f$

et

et cosinus $= g$. Inde porro habetur cosinus anguli EPG$=\frac{ny-mx}{r}$ et cosinus anguli EPF$=\frac{gy-fx}{r}$.

In triangulis TAE, GAE et FAE anguli ad A dati sunt, subtendunt enim complementa altitudinum ZB, ZC et ZD, quibus igitur semissibus aequantur. Sit anguli TAE cosinus $= a$, anguli GAE cosinus $= b$ et anguli FAE$= c$.

Quoniam latera ET, EG et EF, tam ad triangula in plano (EPT, FPG, EPF) quam ad triangula projectoria TAE, GAE et FAE pertinent, poterunt illa bis determinari et sic aequationes formari uti sequitur:

1 - - $\overline{\mathrm{ET}}^2 = \frac{2a\varepsilon\beta}{r} - \varepsilon\varepsilon - \beta\beta = \frac{2y\alpha\delta}{r} - \alpha\alpha - \delta\delta$

2 - - $\overline{\mathrm{EG}}^2 = \frac{2b\varepsilon\beta}{r} - \varepsilon\varepsilon - \beta\beta = \frac{2(ny-mx)\alpha\delta}{rr} - \alpha\alpha - \delta\delta$

3 - - $\overline{\mathrm{EF}}^2 = \frac{2c\varepsilon\beta}{r} - \varepsilon\varepsilon - \beta\beta = \frac{2(gy-fx)\alpha\delta}{rr} - \alpha\alpha - \delta\delta$

auferatur secunda a prima et fiet

4 - - $r(a-b)\varepsilon\beta = (ry - ny + mx)\alpha\delta$

et tertia a prima

5 - - $r(a-c)\varepsilon\beta = (ry - gy + fx)\alpha\delta$

ex quarta et quinta fit

6 - - $\frac{ry-ny+mx}{a-b} = \frac{ry-gy+fx}{a-c}$

quae debite reducta reddit tandem

7 - - $\frac{rx}{y} = \frac{(a-b)(r-g)-(a-c)(r-n)}{(a-b)f-(a-c)m}$.

Hac regula innotescit tangens anguli EPT, in simulque anguli EPG, EPF. Ponatur cosinus anguli EPT$=S$, cosinus autem anguli EPG fit $=s$ ille antea fuerat $=r$, hic vero $=\frac{ny-mx}{r}$. Ponatur etiam cosinus anguli EPF$=Q$ qui antea fuit $=\frac{gy-fx}{r}$.

Notandum est esse $\varepsilon\varepsilon-\delta\delta=\beta\beta-\alpha\alpha=rr$, quadratum enim secantis minutum quadrato tangentis relinquit quadratum radii.

In prima aequatione auferatur vtrinque $\alpha\alpha+\delta\delta$, deinde pro α, β, δ, et ε substituantur valores supra assignati, vt facta reductione debita, prodeat

8 - - $qz=\frac{arr-Spv}{r}$ et

9 - - $pv=r\frac{ar-qz}{S}$

secunda aequatio tractata vt prima dat

10 - - $qz=\frac{brr-spv}{r}$ et

11 - - $pv=\frac{br-qz}{s}r$.

Tertia denique aequatio reddit

12 - - $qz=\frac{crr-Qpv}{r}$

13 - - $pv=\frac{cr-qz}{Q}$

ex octaua et decima fit

$$\left.\begin{array}{l} 14 \text{ - - } pv=rr\frac{a-b}{S-s} \\ \text{item ex 9 et 11.} \\ 15 \text{ - - } qz=\frac{Sb-sa}{S-s}r \end{array}\right\} \text{Q. E. I.}$$

De

De hisce regulis notetur,

1. quod similes sint regulis in prima solutione inventis, licet ibi aliae vt videtur quantitates et dentur et quaerantur.

2. Quod, post inuentum angulum EPT, reliquae regulae non nisi duabus determinentur altitudinibus. Sic regulas pro pv et qz inueniendas non nisi a et b item S et s ingrediuntur, desunt c et Q. Hinc est, quod eaedem regulae aliis praeterea modis possint exprimi. Si enim comparentur aequationes, 8 et 12, 9 et 13, item 10 et 12, 11 et 13, aliae prodibunt expressiones aequiualentes.

NB. Similitudo harum et primo inuentarum regularum in omnibus aliis problematibus secundum has methodos solutis obtinet. Quae proprietas notatu dignissima est.

Intelligitur autem ita: Arcus in superficie sphaerica descripti ipsi sunt mensurae angulorum ad A, ab quibus subtenduntur, nam hoc casu semicirculus 90° tantum constat gradibus, vti ex elementis patet. Sic dispalescit regulas has et primas easdem esse debere necessario.

SOLUTIONES
QUORUNDAM PROBLEMATUM ASTRONOMICORUM.

Aut. Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Menf. Dec. 1729. Tab. X.

Trigonometria ſphaerica ancillatur et ſubſeruit Aſtronomiae, ſed ita tamen ſubſeruit, vt ſaepe officia debeant extorqueri. Factum quidem iamdiu eſt, vt in ſingulis Triangulis ſphaericis ſoluendis nihil amplius requirere poſſit aut neceſſitas aut commoditas: verum, ſi non ex vnico, ſed ex aliquot inter ſe connexis eiusmodi Triangulis pendeat quaeſitum, tum plerumque omnia nodis ita inter ſe contortis laborant, vt, ſi vel maxime detexeris callem, quo adiri quaeſitum poſſit, accuſes tamen moleſtiam in obeunda via ſaepe non exiguam. Conſulitur his incommodis triplici potiſſimum modo: *Vno*, quo, ſphaericis lateribus et angulis vnice conſideratis, in promtu ſunt artificia, quibus Sinus, Coſinus, Tangentes, ſummae vel differentiae arcuum, dignoſci ex inſpectis Algebraicis Formulis poſſunt, licet mutato et diffuſo habitu incedant; in quo genere eximia ſunt, quae Cl. *Maierus Commentariis Anni* 1727 inſeruit. *Altero*, quo ipſa Sphaera, pro natura Problematis, varie diſſecta, ex principiis Geometriae rationes eruuntur, quibus ad propoſitum deueniri queat; quor-

quorſum pertinet elegans Solutio Problematis cuiusdam Aſtronomici, à Cel. *Hermanno* huic Tomo inſerta. *Tertio*, quo ex legibus Proiectionum Sphaerica mutantur in plana triangula; cuius elegantiſſimum eſt exemplum Solutio *Neperiana* trianguli Sphaerici, ex datis tribus lateribus, *Mirifici Logarithmorum Canonis Deſcriptioni*, praemiſſa, pag. 50. Merentur hi modi, vt, ad Aſtronomici calculi commoda, indies magis magisque perficiantur.

§. 2. Primo quidem vtilitate non caret, ſi ad manus ſit Formula Algebraica, qua, ex datis tribus trianguli Sphaerici lateribus, angulorum aliquis definitur: cum tale triangulum per ordinariam reſolutionem in duo triangula rectangula ſolui non poſſit. Obtinetur talis Formula facillime ſequenti modo. Sit in triangulo ABC demiſſus ex vertice arcus perpendicularis in AB, atque ponantur ipſius AB ſinus S. Coſinus C; AC ſinus s coſinus c; CB ſinus p, coſinus q; BAC ſinus m, coſinus n, ſinus totus $=1$, quod in ſequentibus vbique faciam. Erit igitur in triangulo rectangulo ACD, haec analogia $1 :$ Coſ. A $(n) =$ tang. AC $(\frac{s}{c})$: tang. AD$=\frac{ns}{c}$, vnde erit ſinus AD$=\frac{ns}{\sqrt{(c^2+n^2s^2)}}$; et coſinus AD$=\frac{c}{\sqrt{(c^2+n^2s^2)}}$; hinc per §. 5. *Trigonometr. Maieri Tomo II. horum Commentar.* DB Coſinus $= \frac{Cc+nSs}{\sqrt{(c^2+n^2s^2)}}$. In eodem triangulo ACD erit etiam $\frac{c}{\sqrt{(c^2+n^2s^2)}} : c = 1 :$ Coſ. CD$=\sqrt{(c^2+n^2s^2)}$; tandem in triangulo CDB habebitur $\frac{Cc+nSs}{\sqrt{(c^2+n^2s^2)}} : q = 1 :$ Coſ. CD; Fig. 1.

=

$=\frac{q\sqrt{(c^2+n^2s^2)}}{Cc+nSs}=\sqrt{(c^2+n^2s^2)}$, ex qua aequatione fit $q=Cc+nSs$, vel $n=\frac{q-Cc}{Ss}$, quae Formula eadem eſt cum illa, quam dedit Cl. *Maierus* §. 18. ſuae Diſſertat.

Fig. II. §. 3. Sit angulus quicunque ACD, huius dimidium ACE, erit ob triangula ſimilia ACE, ADB, $1 : AE = 2AE : AB$, hinc $AE = \sqrt{\frac{1}{2}AB}$, et vocato Coſinu BC, C, erit ſinus anguli dimidii $=\sqrt{(\frac{1-C}{2})}$. Vnde poſito angulo quocunque A, cuius Coſinus ſit C, et ipſius $\frac{1}{2}$A ſinus M, Coſinus N, erit $M=\sqrt{(\frac{1-C}{2})}$ vel $2M^2=1-C$. Eodem modo facile deducitur haec aequatio $2N^2=1+C$. In praeced. §. 2. inuentus eſt Coſinus $A=\frac{q-Cc}{Ss}$, erit itaque (ſin. $\frac{1}{2}A)^2=\frac{Cc+Ss-q}{2Ss}$; vocetur Coſ. $(AB-AC)=k$, erit $Cc+Ss=k$, per §. 5. *Diſſert. Maierianae*, hinc (ſin. $\frac{1}{2}A)^2=\frac{k-q}{Ss}$; porro ſit ſinus $\frac{1}{2}(BC+AB-AC)=\alpha$, et ſin. $\frac{1}{2}(BC+AC-AB)=\beta$, erit per §. 9. *Diſſert. cit.* $k-q=2\alpha\beta$, hinc (ſin. $\frac{1}{2}A)^2=\frac{\alpha\beta}{Ss}$, vel log. ſin $\frac{1}{2}A=\frac{l\alpha+l\beta-lS-ls}{2}$, quae eſt regula, quam pro ſolutione horum triangulorum dedit *A. Vlacq. in Tabb. Sinuum* cap. V. prop. 6.

Fig. I.

§. 4. Tranſeo nunc ad Problemata Aſtronomica, quorum primum ſit ſequens: *Inuenire locum, quem Sol obtinere debet, ita vt eius motus in longitudinem ſit aequalis motui Aſcenſionis rectae.* Ponatur in hunc finem EDA Aequator, CBA Ecliptica, H Solſtitium aeſtiuum. Deinde ſit locus aliquis Solis B, et alius C, erit eo tempore motus in longitudinem

Fig. III.

BC,

BC, et ductis ex polo aequatoris P quadrantibus PD, PE, erit DE conueniens motus Afcenfionis rectae; debent ergo arcus BC et DE inter fe aequari. Vocatis obliquitatis Eclipticae Cofinu c, BC aut DE tangente a, AB tangente x, erit in triangulo rectangulo ABD $1 : c = x :$ tang. AD $= cx$, vnde tangens fummae AE $= \frac{a+cx}{1-acx}$ per §. 6. *Differt. cit.* Ex eadem ratione tangens AC eft $= \frac{a+x}{1-ax}$; et in triangulo CEA eft rurfus $1 : c = \frac{a+x}{1-ax} :$ tang. AE $= \frac{ac+cx}{1-ax}$, vnde fit $\frac{a+cx}{1-acx} = \frac{ac+cx}{1-ax}$, qua aequatione ad eandem denominationem redacta, et diuifa per $1-c$, fit $x = \pm \frac{\sqrt{4c+\overline{1+c}^2 a^2} - \overline{1+c}.a}{2c}$. Itaque fi defideretur locus aliquis B talis, vt affumto motu in longitudinem dato, cuius tangens fit a, conueniens motus Afcenfionis rectae motui priori in longitudinem fit aequalis, fumendus erit pro x valor modo inuentus. Si vero motus in longitudinem affumatur inftantaneus, fiet BC arculus infinite paruus, cuius proinde tangens a euanefcet; vnde formula inuenta degenerat in hanc: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{c}}$, aut vocata cotangente ipfius AB, quae erit tangens ipfius HB diftantiae Solis à Solftitio, $= t$, erit $c = t^2$, vnde concluditur, quod tangens diftantiae Solis à Solftitio, fit media proportionalis inter radium et cofinum obliquitatis Eclipticae; quae eft eadem regula quam inuenit *Dom. Parent* ope Calculi Differentialis in *Comment. Acad. Scient. Parifinae* 1704, *pag.* 187. *Edit. Amftelod.* Itaque pro obliquitate Eclipticae hodie fere recepta 23° 29′ inuenitur $lt = 9.9812263$, cui

 pro

pro AB quatuor ſequentes reſpondent arcus 46° 14′ 17″, 133° 45′ 43″, 226° 14′ 17″, 313° 45′ 43″. Qui coincidunt cum locis Eclipticae ſequentibus ♉ ♏ 16° 14′ 17″, nec non ♌ ♒ 13° 45′ 43″. Non vero poterunt per hanc regulam corrigi Tabulae Aſcenſionum rectarum, prout l. c. dicitur; atque abſoluenda eſt Trigonometria Sphaerica ab ea labe, quod interdum palpando tantum perficiat negotia ſua. Quod ſi enim occurrunt Tabulae quae inuentis his longitudinibus Solis non congruunt, illae, ſi iuxta regulas Trigonometriae Sphaericae probe ſint calculatae, non aliter errant, niſi quod aliam obliquitatem Eclipticae quam 23° 29′ ſupponant, quod ſi vitium eſt, vitium certe eſt Hypotheſeos Aſtronomicae, non vero methodi Trigonometricae, quae non minus principiis Geometricis innititur quam calculus Algebraicus. Vt vero generalis ſolutio huius Problematis per Logarithmos abſolui poſſit, erit ex §. 3. vocato Coſinu dimidiae obliquitatis Eclipticae n, $1+c=2n^2$, vnde fit $cx=\sqrt{(c+a^2n^4)}-an^2$; ponatur porro $c=a^2n^4m^2$, erit $m^2=\frac{c}{a^2n^4}$, et habebitur $\sqrt{mm+1}-1=\frac{cx}{an^2}$. Sit m, quae per Logarithmos inueniri poteſt, tangens anguli cuiusdam, quem voco M; erit huius anguli ſecans $=\sqrt{mm+1}$, itaque ſecans $M-1=\frac{cx}{an^2}$. Sit praeterea huius anguli cogniti M coſinus $=p$, erit ſecans $M=\frac{1}{p}$, et $1-p=\frac{pcx}{an^2}$;

po-

ponatur denique ſinus $\frac{1}{2}M = q$, erit $1 - p = 2q^2$, vnde oritur $x = \frac{2ax^2q^2}{cp}$ ex qua aequatione x per ſolos Log-mos inueniri poterit.

§. 5. *Datis duabus altitudinibus ſtellae cuiuslibet, vna cum Azimuthis, quae illis altitudinibus conueniunt, inuenire eleuationem Aequatoris.* Sit Meridianus PZG, Aequator DEF, Horizon GEH, parallelus ſtellae CBA, complementa altitudinum BZ, AZ, Azimutha BZP et AZP; ponantur Sinus et Coſinus BZ s, c; AZ S, C; PZ x, y; et quia BZP et AZP anguli erunt vtplurimum obtuſi, ſint Coſinus illius $= -m$, huius $= -n$. Ergo per §. 2. erit Coſ. BP$= cy - msx$, nec non Coſ AP$= Cy - nSx$, vnde ob BP$=$AP, fit $cy - Cy = msx - nSx$, aut vero $\frac{c - C}{ms - nS} = \frac{x}{y} =$ tang. PZ. Quae formula vt ad Log-mos reduci poſſit, ponatur $s = \frac{qS}{m}$, erit $q = \frac{ms}{S}$; ſit q Coſinus anguli cuiusdam, quem voco M; hoc vero ſemper fieri poterit; nam ob S:$s = m:q$, et S$>s$ erit $q < m$, atque ob $m < 1$, etiam $q < 1$. Vocetur deinde ſin. $\frac{1}{2}$(AZ+BZ)$=$A, et ſin. $\frac{1}{2}$(AZ−BZ)$= a$, erit $c - C = 2Aa$, hinc fit tang. PZ$= \frac{2Aa}{q - nS}$; ponatur denique Coſ. $\frac{1}{2}$(AZP+M)$=$B, Coſ. $\frac{1}{2}$(AZP−M)$= b$, erit $q - n = 2Bb$, quare tang. PZ$= \frac{Aa}{BbS}$. Fig. IIII.

§. 6. *Datis duabus altitudinibus Solis, aut ſtellae cuiuscunque, vna cum earum temporibus, vel diſtantiis à meridiano, inuenire altitudinem meridianam, et eleuationem Poli.* Sint ſinus et coſinus BZ s, c; AZ S, C; PZ x, y; BP$=$AP t, u; BPZ m, n; Fig. IIII.

APZ p, q; erit $c = uy + ntx$; nec non $C = uy + qtx$; fit ergo ex combinatione harum aequationum $c - ntx = C - qtx$, vnde $\frac{c - C}{n - q} = tx$; qui valor fubrogatus in vtrauis praecedentium aequationum dat $uy = \frac{Cn - cq}{n - q}$. Ergo erit Cof. (PB+PZ) $= uy - tx = \frac{\overline{1+n}.C - \overline{1+q}.c}{n - q}$; et Cof. (PB−PZ) qui fimul eft finus altitudinis meridianae $= uy + tx = \frac{\overline{1-q}.c - \overline{1-n}.C}{n - q}$. Poterit ergo ex his inueniri fumma et differentia arcuum incognitorum PZ et PB, quibus datis arcus ipfi non latebunt. Ex praecedentibus autem facile erit hanc operationem per logarithmos abfoluere, cuicunque placebit hoc Problema ad vfum transferre.

§. 7. Continetur fub hac generali Solutione etiam Solutio illius Problematis Aftronomici, quod à *Jacobo Bernoulli* in Differtatione aliqua Bafileae 1687 habita exponitur. Nempe, *Obferuatur alicubi hora fexta poft meridiem altitudo Solis fupra Horizontem* 12°; *elapfa autem poft momentum obferuationis hora vna cum* 12 *minutis, occidit Sol; quaeritur fub qua Latitudine inftituta fit obferuatio, et quo die?* Fiunt enim, retinendo denominationes Problematis generalis, s, c, finus et cofinus 78°; $S = 1$, $C = 0$; $m = 1$, $n = 0$; p finus 108°, q cofinus 108°, hinc pro q fcribendum $-q$; quibus fubftitutis fit Cof.
Fig. V. (PB+PZ) $= -\frac{\overline{1-q}.c}{q}$, quod indicat fummam hanc facere angulum obtufum. Cof. (PB−PZ) $= \frac{\overline{1+q}.c}{q}$. Ponatur finus $\frac{1}{2}$ZPA $= \alpha$, cofinus $= \beta$, erit $1 - q = 2\beta^2$, $1 + q = 2\alpha^2$, hinc exiftit Cof. (PB+PZ) $=$

$=-\frac{2\beta^2 c}{q}$, Cof.(PB−PZ)$=\frac{2\alpha^2 c}{q}$. Itaque Problema per folos Log-mos facile refoluetur.

§. 8. Sequenti Problemati foluendo inferuiet hoc Lemma: Sit Semicirculus AGJK, atque in eo duo anguli, maior ADI, minor ADG; illius fint Sinus rectus CI, Cofinus CD, finus verfus AC; huius autem finus rectus BG, Cofinus BD, finus verfus AB. Differentiae horum duorum angulorum finus rectus erit FI, finus verfus FG. Ob fimilia triangula GBD, ECD, habebitur BD:DG(1)$=$CD:DE$=\frac{CD}{BD}$, hinc GE$=1-$DE$=\frac{BD-CD}{BD}=\frac{BC}{BD}$. Erit etiam in Triangulo FEI finus E(BD):FI$=$ finus FIE(GB):FE$=\frac{FI\times GB}{BD}$, vnde erit finus verfus differentiae GF$=$GE$-$FE$=\frac{BC-FI\times GB}{DB}$. Fig. VI.

§. 9. Problema ipfum vero hoc eft: *Datis tribus altitudinibus ftellae cuiuscunque, vna cum differentiis temporum inter obferuationem primam et fecundam, fecundam et tertiam, inuenire Eleuationem Poli, et Declinationem ftellae.* Sit Meridiani planum RAO, Horizontis RST, Paralleli in quo ftellae mouetur AHO, erunt datarum altitudinem finus FK, GL, HM, et differentiae temporum datae, anguli FEG, GEH; finus altitudinis meridianae AI. Ponantur itaque AI$=x$, FK$=a$, GL$=b$, HM$=c$; anguli FEG finus rectus $=g$ verfus $=l$; anguli FEH finus rectus $=k$, verfus $=n$; praeterea fint finus verfi AEF$=u$, AEG$=y$, AEH$=z$ Ex folutione Problematis §. 6. elicitur $x=\frac{ay-lu}{y-u}$; nec non $x=\frac{bz-cy}{z-y}$, Fig. VII.

aut

aut etiam $x = \frac{az-cu}{z-u}$. Ex his aequationibus deducitur (A) $y = \frac{\overline{a-b}\,z + \overline{b-c}.u}{a-c}$. Per Lemma praemiſſum habebitur $l = \frac{y-u-g\sqrt{2u-uu}}{1-u}$, et $n = \frac{z-u-k\sqrt{2u-uu}}{1-u}$; ex illa fit $y = g\sqrt{2u-uu} - ul + l + u$, ex hac vero $z = k\sqrt{2u-uu} + u + n - nu$, qui valor ſubſtitutus in aequatione (A) efficit $y = \frac{\overline{a-b}.(k\sqrt{2u-uu}+n-nu)}{a-c} + u$; aequentur itaque hi duo valores inuenti ipſius y, fiet exinde $\frac{\sqrt{2u-uu}}{1-u} = \frac{\overline{a-b}.n - \overline{a-c}.l}{\overline{a-c}.g - \overline{a-b}.k}$. Eſt vero quantitas prior tangens anguli AEF; hinc tangens AEF huic valori dato aequatur. Hoc igitur pacto cognitus erit angulus AEF, et huius ope reliqui AEG, AEH, ergo dabuntur u, y, z, et harum auxilio ſinus altitudinis meridianae x. Reducetur vero etiam Problema hoc ad §. 6. quo traditur modus inueniendi altitudinem Poli ex datis duabus altitudinibus et earum temporibus; quare per illud reliquum huius poterit ſolui. Ex praecedentibus vero Operatio Logarithmica haud difficulter adornabitur.

CLAS-

CLASSIS SECUNDA,
CONTINENS
PHYSICA.

DE
LUCE BOREALI
AUTORE
F. C. *Mayero.*

1.

Anno 1726 menſe Octobri obtuli Academiae obſeruationes meas de luce boreali, vna cum explicatione phaenomenorum huius lucis. Ab eo tempore non tantum noua obſeruaui phaenomena, ſed et nouas theoriae meae feci acceſſiones. Par eſt vt haec quoque Academiae ſiſtam eiusque iudicio exponam. Menſe Oct. 1728. Tab. XI.

2. Apparuit nuper, ſc. poſt mediam noctem quae diem 16 Sept. huius anni anteceſſit, lux pulcherrima: haec vnica comprehendit omnia iſta phaenomena noua quae ſeorſim ante annotaui. Hanc igitur quia inſtar eſt omnium ſolam recenſebo.

3. Aër tum fuit defoecatiſſimus atque tranquillus adeo vt Neuae fluuii ſuperficies ſtellarum imagines incorrupta fere forma reflecteret, quod

ante nunquam vidi. Animaduerti tamen summa adhibita attentione aërem ex Sud-Ost quam lenissime fluentem.

4. Ab initio arcus aderat lucidus, satis bene terminatus, 30° circiter altus: Vertex ejus boream exacte non tenebat, declinabat enim ad occidentem sensibiliter valde: Margo interior niger aut fuscus non erat sicut alias, sed aeque ac reliqua lucidus: crura horizontem non attingebant, desinebant in vapores obscuros, qui horizontem 10° fere gradus alti cingebant: Interius spacium, chasma dictum aut vorago, nigerrimum non erat vti alioquin, sed pallida luce diluebatur: Trabes siue virgae intra voraginem nullo ordine visae sunt oriri, quae ab initio vltra arcum non extendebantur:

5. Posthaec trabes vltra arcum prosilire ceperunt, ortum in voragine vt ante habentes: oriebatur intra voraginem arculus non diu duraturus in quo trabium radices terminabantur: Motus trabium mirus erat, quae enim in occidentali arcus parte extabant, versus occidentem ferebantur, ad orientem ferebantur quae in orientali arcus parte sitae erant; boreales autem trabes stabant immobiles; Ex hoc phaenomeno intellexi lucem moueri ex Nord-West versus verticem meum, id quod et sequentibus phaenomenis confirmatum est.

6. Arcus quo subinde altior eo quoque deformis magis euadebat: Motus hic ascendens ab initio lentus, postea subinde celerior fiebat: Altitudinem 40 graduum (mea leui aestimatione) postquam su-

ſuperauit, in partes abire, hoc eſt in nubeculas lucidas albore viam lacteam imitantes diuidi coepit: Hae nubeculae mouebantur verſus verticem, euaneſcebant mox, moxque redibant ſed non exacte ſub priore forma et loco: (agitabantur enim nimis). Tota tandem hemiſphaerii noſtri pars borealis eiusmodi nubeculis conſita videbatur: Ex paruis virgis ſiue trabibus compoſitae erant interdum: Interdum maiores trabes traiiciebant tres pluresue nubeculas, trabium vero partes in nubecularum interſtitia cadentes non poterant videri, vt hoc pacto trabes ruptae ſiue non continuae fuerint.

7. Trabes quo erant occidentaliores eo obliquius horizonti inſiſtebant, atque hoc pacto non ad verticem tendebant, ſed ad aliud punctum quod *a* vertice verſus occaſum aliquot gradibus diſtitit: Hoc punctum, quod verticem vicarium vocare lubet, ab ipſis trabibus eleganter notabatur; cöeuntes enim ibi interdum figuram formabant ſimilimam nimbis queis Deorum aut Sanctorum capita ornare ſolent.

8. Haerebat aliquantisper circa horizontem in occaſu nubecula ſubfuſca et tumida, poſtea ſenſim ad verticem aſcendebat, motu ſubinde celeriori quo ſe propior fiebat vertici: Quo propior fiebat eo ruborem acquirebat ſaturiorem, donec tandem vertici proxima exquiſitiſſime rutilaret: Trabes eam traiicientes rubro tingebat colore: euaneſcebat mox, et mox redibat: Tandem vero verticem praetergreſſa penitus euanuit.

 9. Hae

9. Hae sunt *obseruationes nouae* quas enarrare pollicitus sum. *Primum* quod *ex illis deduco*, monitum est, obseruationum, quas Anno 1726 dedi, nonnullas corrigi debere, sunt enim ibi phaenomena allegata, de quibus dixi ea *constanter* sic se habere, cum dicere debuissem *quam plurimum* sic se habere: Ex. gr: §. 4. nro. 12 dixi, *omnes virgae recta ad verticem tendunt*: (id tum aliter non obseruaui) nunc dicendum est, *vt plurimum* ad verticem tendunt, interdum vero ad verticem vicarium. (§. 7.) Dixi; l. c. nro. 3. *altissima arcus pars boream ad sensum* semper *exacte tenet*. Debebam dicere vt plurimum. Nro. 9. dixi: *chasma* semper *est tenebricosum*, nunc dico, vt plurimum. Hae sunt fere correctiones omnes quas primae meae obseruationes postulant.

10. *Altera conclusio* haec est: Suprema äeris superficies a centro terrae non vbique aequaliter distat, sed mox hic intumescit mox alibi subsidet. Sequitur id ex theoria mea de luce boreali, statuo enim trabes esse lucem reflexam a superiori quadam superficie lucidis nubeculis imminente. (vide I. Tom. Comment. pag. 356, 361, 362.). Cogitetur planum aliquod transiens per oculum spectatoris, per trabem et per punctum radians, planum hoc secabit superficiem reflectentem ad angulos rectos. (id ex opticis constat) Si superficies reflectens a centro terrae aequaliter vbique distat, plana eiusmodi, quotquot finguntur, omnes per verticem transeunt spe-

ſpectatoris, propter regulam ante allegatam: Si vero ſuperficies reflectens aequaliter a centro terrae non diſtat, neceſſe eſt etiam ob regulam allegatam vt plana talia non amplius in vertice ſed alibi cöeant, nimirum in vertice vicario: ibi nimirum vbi trabes cöeunt; exiſtunt enim trabes in hiſce planis. (nolo haec ſcrupuloſius demonſtrare ne nimius ſim). Inuerto igitur poſteriorem propoſitionem et dico, quia vertex vicarius obſeruatus eſt (§. 7.) igitur ſuprema reflectens ſuperficies, et proinde aëris quoque extrema ſuperficies a centro terrae, aequaliter non diſtant vbique et ſemper.

11. Eadem vero poſitio aliunde conſtat quoque: Certum eſt, quod ſi aër non niſi grauitatis actione ad terram cogeretur, ſuperficies eius extima a centro terrae ſemper et vbique diſtaret aequaliter. Atque hunc caſum ſolum conſideraui in primo meo de luce boreali ſcripto: (vid. l. c. pag. 358.). At nullum eſt dubium quin äer noſter, praeter grauitatem, Solis etiam, Lunae, Martis et Veneris attractiones ſentiat: Solis et Lunae actiones aquarum in oceano ſuperficiem hic attollunt deprimunt alibi, quidni ergo et äer, qui aqua longe fluidior eſt, eodem modo deprimeretur et attolleretur?

12. Aëre ſic conſtituto, Aſtronomos moneo, vt de *refractionibus azimutalibus* poſthac magis ſint ſolliciti, nullas enim plerique agnoſcunt; nullae quidem darentur ſi ſuperficies äeris ſemper a centro terrae aequaliter diſtaret, aut ſi non niſi in vertice obſeruatoris intumeſceret ſubſideretue, ſed

rem multo aliter ſe habere ex duobus praecedentibus articulis aperte conſtat. Suſpicor aeque magnas poſſe interdum eſſe, refractiones azimutales, ac ſunt altitudinum refractiones: De altitudinum refractionibus iudico verſus *diuerſas plagas* etiam diuerſas eſſe poſſe eodem tempore, ob äeris ſuperficiem verſus diuerſas plagas diuerſe a centro terrae remotam. Paucis haec et obiter tangere volui.

13. *Tertium* quod adductae obſeruationes praeſtant, eſt, quod theoriam meam de luce boreali firmius ſtabiliant. Dixi in meo primo ſcripto duas lucis borealis ſpecies eſſe, easque reipſa non differre, ſed ſolo nubecularum lucidarum ſitu effici duplicem apparentiam, et quomodo efficiatur, explicaui ibidem §. 19. iam ſi quis attendat ad phaenomena in §. 6. huius ſcripti recenſita, aperte videbit, quod vna ſpecies in alteram tranſiuerit, ſolo motu materiae lucidae, quo ad verticem tendebat, quod quidem explicationi ad amuſſim congruit. Porro, trabes non niſi lucem reflexam eſſe aperte conſtat ex eodem articulo, in quo ſub finem trabes allegantnr in fruſta ſectae. Qui enim hoc modo discerpi poſſet ignis actu exiſtens? Caeterum per haſce obſeruationes confirmatur quod in primo ſcripto de vento notaui, nempe ſuperioris et inferioris regionum ventos, in contrarias ſpirare plagas, conferantur §. 3. et §. 5.

14. *Quarta concluſio* eſt, quod interdum duo lucidae materiae ſtrata exiſtant, quorum vnum alteri imminet, ita vt nubeculae lucidae ſuperioris

ſtra-

ſtrati reflectant lucem inferioris ſtrati ſub forma trabium. Sic in praeſenti caſu lux quae in chasmate fuit, infra eam ſtetit, ex qua arcus componebatur, arcus enim reflectebat trabes in chasmate ortas v. §. 4. et 5. Nubeculae item lucidae §. 6. allegatae et paruas et magnas reflectebant trabes; imo et nubecula rubra §. 8. idem praeſtitit.

15. Quid *rubra nubecula* § 8. allegata ſit, dicere non poſſum. Aquea ſolummodo certe non fuit, admixta debuit eſſe materia vere non apparenter, rubicunda. Teſtis ſimul eſt varias in aëre vagari materias quas non facile adeſſe ſuſpicamur. Mihi hanc ſolam videre contigit; ab aliis tamen habeo ſaepius tales apparere nubes, tum temporis quum lux borealis exiſtit.

16. Articulo 37mo ſcripti mei primi regulam dedi qua *materiae lucidae altitudo* computari poteſt. Manifeſtum autem eſt eam ſupponere äeris ſuperficiem a centro terrae aequidiſtantem, quem quidem caſum ſolum in iſto ſcripto conſideraui; Igitur inutilis ſemper eſt regula quoties trabes ab horizonte normaliter non aſcendunt, nec ad verticem tendunt. Crebro tamen caſus hic obtinet, et tum regula prodeſſe poteſt; oſtendam itaque paucis, quomodo eam inuenerim.

Problema.

17. Datis per obſeruationes altitudine lucis borealis maxima, eiusdem amplitudine horizontali, et latitudine loci quo ſpectator eſt, inuenire materiae lucidae diſtantiam a terra.

Ex-

Explicatio Figurae I.

Fig. 1. *Circulus interior* GLS *globum terrae, ſimulque meridianum ſpectatoris* S *refert.*

Circulus exterior EIK *ſuperficiem atmoſphaerae eam deſignat in qua materia lucida ſuſpenſa haeret.*

Linea PCL *eſt axis mundi, qui normaliter tranſit per centrum plani circuli paralleli* FEDKF, *cuius diameter eſt* EK. *In hoc parallelo materia lucida exiſtere concipitur.*

Linea MR *eſt linea meridionalis in plano horizontali ducta, quod planum horizontale ſemidiametro terrae* SC *normaliter incumbere et indefinite extendi concipiendum eſt.*

Linea FD *eſt locus vbi planum horizontis et planum circuli paralleli ſe interſecant. Pars ergo huius circuli* FED *ſupra horizontem eleuata arcum lucis borealis format.*

Triangulum SFD *in plano horizontis deſcriptum eſt; duo eius crura* SF *et* SD *ſunt aequalia, angulus ad* S *metitur amplitudinem crurum lucis borealis.* F *et* D *ſunt loca vbi crura arcus borealis horizonti inſiſtunt.*

In triangulo ESN *angulus ad* S *eſt altitudo maxima arcus borealis; angulus vero ad* N *eſt altitudo aequatoris, ergo angulus ad* E *datus eſt quoque.*

Lineae EC, FC, DC *ſunt aequales omnes, ſunt enim ſemidiametri atmoſphaerae.*

Hisce

Hisce explicatis, quantitatibus calculum constituentibus notas tribuere oportet; ſit ergo

Sinus totus $= r$
Latitudinis loci coſinus $= q$
Altitudinis arcus ESN ſinus $= m$
Dimidiae amplitudinis (FSN $=$ DSN) coſinus $= g$
Anguli SEN ſinus $= b$
Semidiameter terrae SC $= a$
Semidiameter atmosphaerae CD $= x$.
Diſtantia ſpectatoris S ab vertice arcus E $= y$.

In triangulo CSE *eſt latus* ES $= y$, EC $= x$, SC $= a$, *et coſinus anguli ad S eſt* $= m$ (*ob rectum angulum* CSN *accedentem ad* ESN) *habetur ergo per triangulorum naturam.* Fig. 2.

1 - - $m = r \frac{aa + yy - xx}{2ay}$
ex qua ſit

2 - - $xx = \frac{raa + ryy + 2amy}{r}$

In triangulo SEN *eſt* SE $= y$, *ſinus anguli ad* E *eſt* $= b$ *ſinus anguli ad* S *eſt* $= m$, *et ſinus anguli ad* N *eſt* $= q$, *habetur inde* Fig. 3.

3 - - $q : y = b :$ SN $= \frac{by}{q}$

In triangulo rectangulo SNF *ſiue* SND *habetur* SN $= \frac{by}{q}$, *anguli ad* S *coſinus* $= g$, *ſit ergo* Fig. 5.

4 - - $g : \frac{by}{q} = r :$ SF $= \frac{rby}{gq}$

In triangulo rectangulo FSC *habetur* SF $= \frac{rby}{gq}$, SC $= a$, *et* FC $= x$, *inde per pythagoricum prouenit.* Fig. 4.

5 - - $xx = \frac{rrbbyy + ggqqaa}{ggqq}$.

Ex hac quinta et praecedente ſecunda fit

6 - - $raaggqq + rggqqyy + 2amggqqy = rrrbbyy + rggqqaa$

7 - - $rggqqyy + 2amggqqy = rrrbbyy$

8 - - $rggqqy - rrrbby = -2amggqq$

9 - - $y = \frac{-2amggqq}{r(ggqq-rrbb)} = \frac{2amggqq}{r(rrbb-ggqq)}$. Q. E. I.

18. Nullas idoneas hactenus licuit obſeruationes inſtituere, quibus regulam illuſtrarem, igitur futuro tempori nos committamus. Reſtat vt moneam, duo eſſe *errata* in §. 37. ſcripti mei prioris de luce boreali; (v. Tom. I. Comment. pag. 365.) Dixi q eſſe ſinum eleuationis poli; *coſinum* debueram dicere. Deinde g poſui = ſinui dimidiae amplitudinis, cum g potius *coſinum* notet.

DE SINIBUS CEREBRI

AUCTORE

Jo. Georg. Du vernoi.

§. 1.

Menſe Dec. 1728. Tab. XII.

Operam toties perdidi, in Sinuum cerebri qui anteriores *Galeno* lib. 8. de vſu partium, Aliis ſuperiores, item laterales vocantur, ex aliorum deſcriptionibus figurisue addiſcenda natura; At nedum eorundem faciem ſtructuramue integram unquam ſatis, vt optatarem, intelligere valui, quia in praefatis descriptionibus iconibusue, vnica solummodo sinuum facies in conspectum venire, altera in totum deficere visa est. *Julius Caesar Arantius Bononiensis* id primum animaduertisse videtur cap. I. et III. Obseruat. Anatom. his verbis: *Praeter iam perspectos in cerebri substantia sinus, quos ventriculos appellare consueuimus, duos insignes alios sinus, aut cauitates in penitioribus cerebri partibus reconditas, atque alte delitescentes reperio, qui a superiorum sinuum, aut ventriculorum magnitudine non admodum, recedunt, membraneaque cerebri quadam solidiore substantia, velut priores, circumscribuntur. Resident hi sub duobus illis ventriculis anterioribus, atque hinc inde, quasi in subiecto nauigii alicuius abdito cubiculo, latent, ad anterioraque, versus frontem protenduntur, tertioque, vel communi sinui vt dicemus, quemadmodum et duo superiores, continui euadunt, atque in illum velut cerebri centrum concurrunt.*

Horum ventriculorum basi, quae intro ad medium respicit, candida insurgens supereminet, et quasi adnascitur substantia, quae ab inferiori superficie, velut additamentum extollitur, psalloidique corpori, seu testudini est continua, ac per longitudinem in anteriora, versus frontem protenditur, inaequalique, ac flexuosa figura praedita est, quae Hippocampi, *hoc est marini equuli effigiem refert, vel potius bombicini vermis candidi, spinalis medullae initium hinc inde amplexantis, formam indicant, de cuius vsu alibi dicemus: huius particula caput referens tertio vocato ventriculo proxima est, reflexum vero corpus in caudam abiens ad anteriora pro-*

tenditur; quocirca ad superiorum differentiam Hippocampi, vel Bombycini vermis ventriculos appellare libuit.

§. II. Quoniam hac in descriptione nouorum ventriculorum seu sinuum mentio facta est, dudum laboraui, vt verum sensum Auctoris caperem, quidnam per duos insignes alios sinus intelligat. Equidem, vulgaris opinio est, Sinus illico apparere resectis sensim ac sensim particulis cerebri incumbentibus, donec spatium appareat in quo corpus striatum, medulla oblongata et plexus choroideus continentur. Id vero, vti recte annotat *Arantius*, idaeam sinuum imperfectam et mutilam suppeditat. Namque reuera praeter modo indicatum spatium, alia dantur spatia, quae in profundum demersa ac minus oculis obuia sunt: Quare haud improbabile est, ea fere hactenus neglecta fuisse: Nam si *sinum bombycinum* oculi vidissent, miror quomodo res notatu dignissima praefato sinui inclusa, quae ab *Arantio* detecta et titulo *Hippocampi* vel *Bombycini* vermis descripta est, vsque adeo obscure exposita sit. Nonsolum eius figuram nullam adhuc videre potui; Verum etiam, de eiusdem structura et vera sede vix quicquam effatu dignum apud Auctores reperio, quumque mole sua quae pollicem aequat, tum etiam structurae elegantia valde conspicua pars existat ac denique psalloidi corpori continuata sit, perspicuum est, nullam aut mediocrem notionem eius fuisse post *Arantii* tempora, nisi sub titulo vago crurum aut brachiorum *Fornicis*.

§. III. His motus rationibus, sequentem *Hippocampi* descriptionem, adjecta simul figura, exhibere

bere operae pretium visum est. Vt is in conspectum veniat, primo sinus vulgo notus aperiendus est, qui inter duos apices hemisphaerii AA. in eiusdem latere interno falcem respiciente superficietenus excauatus est, quemque tota massa corticalis medullarisque vndiquaque superius inferiusque vsque ad rimam sinus, vel vsque ad concursum seu coniunctionem vtriusque hemisphaerii ambit. Huius rimae limbo BBB. tertius paries horizontalis titulo septi seu speculi lucidi, vel si mauis, tympani appositus est; estque tenuissima lamina medullaris, duos fere digitos lata, ante vtrumque sinum affixa. Tametsi vt simplex diaphragma cum *Galeno* a multis consideretur, quia ambae praefatae laminae sese proxime tangunt ac momento fere dissiliunt, re vera tamen duplex, ac hiatu intermedio in quo aquam vidimus, distinctus ac diuisus paries est. Vtriusque laminae substantia tenuissima est ac diaphana, immisso in alterutrum sinum aëre, instar veli aut vesicae sese expandens ac tumorem efficiens, sicuti in cerebris admodum idoneis diu contemplari procliue fuit. An via in tertium ventriculum, ea non obstante lamina, pateat nec ne, id internoscere haud potui; Verum rem obseruaui aliam haud incuriosam, scilicet interior superficies praefatae laminae, perexiguis ac visum pene effugientibus granulis aut papillulis exasperata visa est.

§. IV. Jam remota ea lamina, pars magna sinus vulgo noti, id est spatium *ab*, helicem auriculae humanae aemulans, in quo corpus ſtriatum, pars medullae oblongatae et plexus choroeideus continentur, apparet. Sed ab huius, ceu ſatis obuiae cauitatis deſcriptione conſulto abſtinemus ac verſus duo alia ſpatia inſignia oculos conuertimus. Ac primo, vbi Fornix ſinusque praecedens terminari videntur, lit. *b*, ductum geminum obſerua in diuerſas plagas haemisphaerii tendentem, quorum alter *c* lobum auriculae ſimulans, in poſteriori apice haemisphaerii recta excurrit, eaque cauitas eſt, quam *Thomas Bartholinus* in Anatome quintum renouata pag. 491. digitali ſimilem obſeruat. In hacce cauitate nullae conſpicuae ſunt protuberantiae. Alter ductus, ad ventriculum nouum ſeu bombycinum ducit, ac veluti cauitatem conchae ſimulat. Is, ſtatim a principio *d* curuus et arcui ſimilis, ſuper inferiorem hemisphaerii limbum, circa baſin medullae oblongatae, ſinum ſemisphaericum deſcribit, qui ex anguſto ſenſim latior ampliorque factus, poſtquam ad latus internum medullae oblongatae peruenit, in ſaccum oualem reliqua ſinus cauitate triplo maiorem terminatur *e*. In hoc ſacco *particulam* obſerua, qua in toto cerebro propter albedinem occaecantem fabricaeue elegantiam, pulchrior haud datur, puta Vermem bombycinum ſeu caput Hippocampi *Arantii* C, extra praefati ſacci planum, ad altitudinem 5 fere linearum et latitudinem xi. linearum protuberans, in cuius exteriore ſuperficie, ſpiralium circum volutionum exſculpta ſunt veſtigia *ff*. Ad haec, quum tereti et ouali figura, vsque ad duorum fere pollicum longitudinem, gaudeat, eo toto to itinere ad vermis bombycini craſſioris effigiem non nihil accedit, vel ad effigiem cornu arietini, ad quam adhuc propius accedere mihi viſus eſt. Namque idem corpus, poſtquam è ſacco, cui incluſum eſt, ſeſe in ductum anguſtiorem demittit, valde gracileſcens, ſpiralium circum volutionum impreſſiones amittit quidem, ac in modum arcus incuruatur, *g.* formaque inteſtinali, ſuo tandem extremo, (quod ſub vocabulo cruris ſeu brachii Fornicis vulgo notum eſt) vna cum oppoſiti lateris brachio, Fornicis corpus immediate producit *h.*

Explicatio Figurae.

A. A. Duo apices haemisphaerii, cum intermedio ſinu *a. b.*

B. B. B. Limbus medullaris ſinum ambiens.

a. b. Sinus vulgo notus helicem auriculae humanae aemulans.

c. Sinus, lobum auriculae ſimulans, in poſteriori apice haemisphaerii,

d.e. Sinus bombicini vermis ſeu hippocampi *Arantii.*

C. Hippocampus ſeu vermis bombycinus *Arantii.*

ff. Spirales circumuolutiones vermis bombicini.

g. Curuatura et pars gracilior vermis bombycini.

h. Fornicis pars.

THE-

THEOREMA
DE
MOTU CURUILINEO CORPORUM, QUAE RESISTENTIAM PATIUNTUR VELOCITATIS SUAE QUADRATO PROPORTIONALEM UNA CUM SOLUTIONE PROBLEMATIS IN ACT: LIPS: M: NOU: 1728 PROPOSITI.

Auctore

Daniele Bernoulli Joh. Fil.

§. 1.

Mense Jan. 1729. Tab. XIII.

Quandoquidem plurimis experimentis extra dubium pofitum fuit, corpora in fluidis non admodum lente mota refiftentiam plerumque pati quadrato velocitatis fuae vbique proportionalem; vtilia erunt in hoc argumento illa potiffimum theoremata, quae huic hypothefi funt fpecialia: ad hanc claffem quoque pertinet theorema mox indicandum, quia fimile in nulla alia refiftentiae cum velocitate comparatae pofitione exhiberi poffe mihi perfuadeo.

Fig. 1.

§. 2. *Theorema.* Sit curua qualiscunque $aACc$, fuper qua corpus moueri ponatur ita vt vbique refiftentiam offendat quadrato velocitatis fuae proportionalem. Incipiat primo defcendere grauitate fua in A, perueniatque priusquam retrogrediatur, in C; dein defcendere incipiat idem corpus in a afcenfuque fuo ſuo maximo perueniat in c, ducantur verticales Ab et Cd atque horizontales ab et cd, ſintque elementa Aa et Cc infinite parua. Dico fore ſemper ſpatium percurſum AC proportionale logarithmo rationis Ab ad Cd..

Demonſtratio. Deſcendat primo corpus ex A, perueneritque in punctum F, moxque poſt tempuſculum infinite paruum dt in E, ducantur horizontalis FG, et verticalis GE; ponatur velocitas in puncto F$=v$, in E$=v+dv$; exprimatur actio grauitatis corpus fluido ſubmerſum animans per g, numerusque ille qui multiplicatus per quadratum velocitatis dat reſiſtentiam fluidi indicetur per n. Sic erit vis accelerans in puncto F$=g\frac{EG}{FE}-nvv$, quae multiplicata per tempuſculum dt dat incrementum velocitatis dv; hinc igitur habetur aequatio

I. $[\frac{g\times EG}{FE}-nvv]dt=dv.$

quae poſito $\frac{FE}{v}$ pro dt abit in hanc aequationem

II. $g\times EG-nvv.\ FE=vdv.$

Jam vero fingamus corpus idem deſcendere incepiſſe ex puncto a, rurſusque perueniſſe in punctum F moxque in E; dicatur retentis caeteris poſitionibus velocitas eius in F$=p$, et in E$=p+dp$: ita obtinebitur loco ſecundae aequationis haec altera

III. $gEG-npp\times FE=pdp$

ſubtrahantur termini aequationis tertiae a terminis aequationis ſecundae; ſic erit facta ab vtraque parte diuiſione per $pp-vv$

IV. $n.FE=\frac{-pdp+vdv}{pp-vv}.$

 Cui

Cui poſtremae aequationi id commode accidit, quod integrari poſſit; vt vero debita conſtans addi poſſit, conſideranda eſt velocitas corporis ex a delapſi in puncto A; ſit ergo illa velocitas $=a$, ita vt exiſtente puncto F in A ſit $p=a$ et $v=o$, dicaturque numerus, cuius logarithmus eſt vnitas $=c$; atque ita aequatio quarta, ſi integretur, dat

V. $pp=vv+c^{-2n.AF}aa$

verum cum corpus ex A delapſum peruenit in C ſit $v=o$ et $AF=AC$; tunc igitur habetur $pp=c^{-2n.AC}aa$ vel

VI. $2n.AC=\log.\frac{aa}{pp}$,

vbi iam per p intelligitur velocitas corporis ex a delapſi in puncto C.

Porro patet, reſiſtentiam nullam eſſe in deſcenſu per aA pariter ac in aſcenſu per Cc, quia velocitas vtrobique eſt infinite parua: erit igitur in hoc caſu de quo dicimus $\frac{aa}{pp}=\frac{bA}{Cd}$; vnde vi ſextae aequationis

VII. $AC=\frac{1}{2}n\log.\frac{Ab}{Cd}$

adeoque ſpatium percurſum AC vbique proportionem habet logarithmi rationis, quae eſt inter Ab et Cd. Q. E. D.

§. 3. *Coroll.* 1. Si medium reſiſtens eſt infinite rarum id eſt, ſi corpus mouetur in vacuo, oſtendunt praedictae aequationes, eſſe Cd ſemper $=$Ab, quod notiſſimum eſt principium mechanicum.

§. 4. *Coroll.* Quia ex comparatione aequationis II. cum III. euanuit litera g, ſequitur actionem grauitatis haud immutare calculum, et indicat aequatio VII. arcum AC conſtantis manere magnitudinis,

ſi

ſi grauitates ſpecificae corporis et medii reſiſtentis conſtantem ſeruent rationem, quamuis tempora mutentur, quibus arcus iſti AC deſcribuntur.

§. 5. *Scholium.* Si numeri et menſurae abſolutae deſiderantur (quod in calculo experimentorum requiritur) attendendum eſt ad figuram corporis, rationemque grauitatum ſpecificarum inter corpus et medium reſiſtens: ponamus corpus eſſe ſphaericum eiusque diametrum continere tot milleſimas partes vnius pedis quot continentur vnitates in m, et eſſe grauitatem ſpecificam globi in vacuo ad grauitatem ſpecificam medii reſiſtentis in vacuo, vt 1 ad b erit $n = \frac{375b}{m}$ (conſ. Comment. Tom. II. pag. 324. et pag. 326.

Caeterum poteſt theorema iſtud generalius reddi et extendi ad media, quae partim in duplicata ratione velocitatum, partim in ratione momentorum temporis (quam hypotheſin *Newtonus* in vltima editione *Princ. Phil.* ſecutus eſt) reſiſtunt, quod alibi oſtendam. Jam vero quaedam problemata attingam, quae ex theoremate noſtro facile ducuntur.

§. 6. *Problema I.* Determinare velocitatem corporis grauitate ſua in curua quacunque moti et vbique reſiſtentiam patientis velocitatis ſuae quadrato proportionalem.

Solutionem admittit hoc problema duplicem, quarum quaelibet vſum ſuum habere poteſt particularem: igitur e re noſtra erit vtramque apponere, quamuis altera iam diu ſit nota.

Solutio I. Sit curua propofita aFC, quaeraturque velocitas in F, confiderando punctum F, vt fixum, initium autem motus vt variabile ; fit initium primo in A, poftea autem in a; ponatur $FA=s$; $Aa=ds$; $Ab=dy$; velocitas, quam habet corpus in F ex puncto A delapfum, $=v$; velocitas quam idem corpus in eodem puncto F fed ex puncto a delapfum habet $=v+dv$. His pofitis degenerabit aequatio quinta theorematis noftri in hanc aliam, pofito fcilicet $(v+dv)^2$ vel $vv+2vdv$ pro $pp(\alpha)$ $2vdv=c^{-2ns}aa$. Eft autem aa aequale quadrato velocitatis corporis ex a in A delapfi, et quia refiftentia ibi nulla eft, fequitur effe aa proportionale ipfi Ab feu dy, ponam igitur $aa=gdy$; intelligendo rurfus per g actionem grauitatis corporis fluido fubmerfi: hinc erit (β) $vv=g\int c^{-2ns}dy$. Q. E. I.

Solutio 2. Confideretur nunc initium motus A vt fixum, fed punctum F, pro quo velocitas quaeritur, vt variabile: fit vt ante $AF=s$, velocitas in $E=v+dv$; erit vis accelerans in puncto $F=(\frac{gdy}{ds}-nvv)$; ergo $vdv=gdy-nvvds$; ponatur $vv=c^{-2ns}z$, et erit $-nc^{-2ns}zds+c^{-2ns}dz=gdy-nc^{-2ns}zds$; vel $z=g\int c^{2ns}dy$; hinc (γ) $vv=gc^{-2ns}\int c^{2ns}dy$. Q. E. I.

§. 7. *Coroll.* Non difficile eft oftendere identitatem inter aequationes (β) et (γ), vt vt diuerfam habeant formam: Recordandum vero eft in conftructione quantitatum $\int c^{-2ns}dy$ et $\int c^{2ns}dy$ litteras s et y diuerfas a diuerfis partibus habere fignificationes.

§. 8.

§. 8. *Problema* 2. Data curua OAB inuenire alteram BCP, commune habentem initium cum priori et talem, vt, vbicunque deſcendere incipiat in curua OAB, veluti in puncto A, et moueri pergat donec tota velocitas exhauſta fuerit puta vsque in punctum C, ſint ſemper arcus in vtraque curua deſcripti nempe BA et BC aequales. Fig. 2.

Solutio. Ducatur BN verticalis, deſcendat corpus ex A totoque ſuo aſcenſu perueniat in C dein cogitemus deſcendere ex puncto priori infinitè propinquo a, ſicque attingere punctum c; agantur aM, AL, CH et cI horizontales, atque Ab et Cd verticales, dicatur BA$=s$, A$a=ds$, BL$=x$, LM$=dx$, BC$=s$, C$c=ds$, BH$=y$, HI$=dy$; erit per VII. aequationem in paragrapho ſecundo expoſitam $4ns=\log:\frac{dx}{dy}$, vel $c^{4ns}=\frac{dx}{dy}$, vel $dy=c^{-4ns}dx$. Q. E. I.

§. 9. *Coroll:* I. Sit curua OAB recta verticalis, ita vt ſit $x=s$; igitur erit $dy=c^{-4ns}ds$, vel integrando $y=\frac{1-c^{-4ns}}{4n}$. Si HC dicatur $=z$, erit aequatio inter coordinatas BH (y) et HC (z) talis $dz=\frac{\sqrt{(8ny-16nnyy)}}{1-4ny}dy$: ponatur $1-4ny=\sqrt{1-rr}$, et erit $4ndz=\frac{rrdr}{1-rr}=-dr+\frac{\frac{1}{2}dr}{1-r}+\frac{\frac{1}{2}dr}{1+r}$. Ergo $z=\frac{-2r+\log(1+r)-\log(1-r)}{8n}$, ita vt curua deſiderata hoc in caſu per logarithmos conſtrui poſſit. Verum Pater meus, cui haec aliquando perſcripſi, obſeruauit, hanc curuam ipſam eſſe tractoriam *Hugenii*; id quod ſtatim apparet ex duabus ſuperioribus aequationibus $dy=c^{-4ns}ds$ et $y=\frac{1-c^{-4ns}}{4n}$; hinc enim deduci-

 tur

tur $\frac{dy}{1-4ny}=ds$. Igitur ſi in linea verticali indeſinite
Fig. 3. longa OB abſcindatur $BQ=\frac{1}{4n}$, et ex Q erigatur horizontalis QR indefinite longa, corpusque in B poſitum ita trahatur mediante filo longitudinis BQ, vt altera extremitas Q deſcribat rectam QR, deſcribet corpus curuam BP, conditioni problematis ſatisfacientem.

§. 10. *Coroll.* 2. Facillimum eſt infinitis mo-
Fig. 2. dis efficere vt ambae curuae OAB et BCP vna eademque aequatione exprimantur. Ad hoc nimirum requiritur, vt functio quaedam aſſumatur pro s talis vt diuiſa per c^{4ns} idem exhibeat quod oritur ſi in functione fuiſſet littera S negatiue ſumta, huicque functioni ponendum eſt elementum dx aequale talis functio eſt $c^{2ns}sds$, vel $c^{2ns}s^3ds$ vel generaliter $c^{2ns}sds$, intelligendo per functionem imparem ipſius s. Ergo curua quaeſita haec erit $dx=c^{2ns}sds$. Caſus particularis eſt, qui hac aequatione continetur $dx=c^{2ns}sds$, vel $x=\frac{1}{2n}c^{2ns}s-\frac{1}{4nn}c^{2ns}+\frac{1}{4nn}$. Qui pariter ac reliqui omnes geometricam admittunt conſtructionem.

Atque hoc eſt problema illud haud inelegans, quod Geometris ſoluendum *Anonymus* quidam propoſuit in act. Lipſ. m. 9br. 1728.

§. 11. *Coroll.* 3. Si curua BCP ſocia ſit
Fig. 2. curuae datae OAB et quaeratur curua tertia ſocia cum BCP, erit poſito dz pro elemento abſciſſae in linea verticali BO ſumtae, $dz=c^{-4ns}dy=c^{-8ns}dx$ et ſic quarta quintaque atque omnes reliquae vna eadem-

demque opera inueniri possunt. Sequitur exinde si in fig. 3. secetur bifariam BQ in q, et ope fili longitudinis Bq alia formetur tractoria Bp, cuius assymtotos qr sit ad BO perpendicularis, erit tractoria Bp socia tractoriae BP; sic vt ambae curuae sint inter se similes. Si porro longitudo fili sit $= \frac{1}{12n}$ et dein $= \frac{1}{16n}$ et sic deinceps, continuo alia formabitur tractoria, quae cum sua praecedente iuncta, problemati satisfaciet: sic igitur si retrogrado ordine procedamus apparet, etiam rectam BO esse vt tractoriam considerandam, formatam nempe filo longitudinis $\frac{1}{on}$ seu infinitae. Caeterum vsus quem theorema §. 2. expositum in physicis rebus habere potest, non est spernendus; namque illius ope multa calculo perfacili absoluuntur circa oscillationes pendulorum, quae alia methodo laborem vix superabilem postulant. De his vero proxima occasione vberius dicam.

SO-

SOLUTIO PROBLEMATIS
DE
VI CENTRIFUGA CORPORIS SPHAERICI IN VORTICE SPHAERICO GYRANTIS.

Auct. G. B. *Bulffingero.*

§. 1.

Menf. Febr. 1729. Tab. XIV.

Dedit huic argumento occafionem Amicus, cui forte vifum erat, fi fphaera componatur ex duobus hemisphaeriis inaequaliter grauibus, fic tamen, vt integra fphaera aequet pondus fphaerae fluidae fibi volumine aequalis, eam in vortice fluido ita gyraturam, vt eandem a centro vorticis diftantiam conftanter teneat, conuerfo erga centrum hemisphaerio leuiore. Erat vortex, de quo agebatur, eiusmodi, vt celeritates directe refponderent diftantiis. Id mihi fuspicionem mouit, vim fphaerae heterogeneae centrifugam maiorem fore, quoniam vires partiales materiae ex hemisphaerio leuiore in grauius translatae ob maiorem rotationis in maiori diftantia celeritatem, maiores fiunt in hoc materiae fitu, quam in priori. Addidi autem eo tempore, fi celeritates rotationum fint vbique aequales, videri mihi, quod aequales futurae fint vires fphaerae heterogeneae memoratae, et alterius homogeneae. *Primum* recte fe habet: fed in *fecundo* falfus fui, praecipitata an-

ante examen ſententia. Cognoui ſtatim, re ad calculum reducta, eam ſecus ſe habere; nec celeritates gyrationum in diuerſis diſtantiis easdem ſupponi debere, ſed vires centrifugas potius, ſi duae ſphaerae, heterogenea et homogenea, eandem virium centrifugarum ſummam debeant exhibere.

§. 2. Dabo hic eius Problematis, in ſuos quaſi caſus diuiſi, ſolutionem non nihil generalem; quoniam ſinguli caſus ſuos prae alteris vſus habent. Maneo autem intra *vortices ſphaericos*, hoc eſt, eos, quorum vires centrifugae omnes ab eodem communi centro recedunt; atque in ſola *corporis ſphaerici* conſideratione. Vtraque haec reſtrictio *coeleſtibus* accommodatur corporibus, et, ſi qui ſunt, *verticibus*. De Cylindrico vortice, et experimentis eo pertinentibus, curioſis plane et egregiis, dixit iam ante complures annos Salmonus, Academiae Scientiarum Pariſinae Socius. Vide Hiſtor. et Memorias Acad. Pariſ. ad A. 1714, 1715, et 1716.

PROBLEMA.

§. 3. *Sit vortex ſphaericus, et celeritates rotationum proportionales dignitati cuicunque (n) diſtantiarum a Centro, quaeritur vis centrifuga globi heterogenei e duobus ſegmentis ſphaericis ita compoſiti, vt grauitas totius globi aequet grauitatem ſphaerae aequalis, et fluido homogeneae.*

SOLUTIO.

1. *Duplex* poteſt eſſe *ſenſus* Problematis. *Vel* requiritur *aggregatum virium centrifugarum omnium*, ſine attentione ad certam directionem, ſecundum quam globus ſibi cohaerens actu ipſo fugeret, datis ſub circumſtantiis. *Vel* quaeritur vis centrifuga *in directione*, quae centrum vorticis et globi tranſit, et in qua ſphaera noſtra fugeret aut peteret vorticis centrum mota. Prior caſus magis pertinet ad globum *fluidum*, vbi partes inter ſeſe non cohaerent: Poſterior ad *ſolidum*, in quo poſitae ex vtraque diametri parte materiae ob cohaeſionem ſuam limitant vires centrifugas primitiuas.

2. *Duplex* etiam eſſe poteſt *ſegmentorum* ratio. Vel ſegmenta ſphaerica terminantur *plana baſi*, qualis ſupponitur ſuperius, cum de hemisphaeriis inaequaliter denſis agitur; et qualem praecipue ſupponi conuenit, cum de ſphaeris agitur ſolidis. Vel ſegmenta illa terminantur *baſi ſphaerica*; qualem concipere decet, ſi ſphaera fuerit fluida, contentis ſcil. in eadem cruſta ſphaerica duobus fluidis inaequaliter denſis.

§. 4. Velim autem notari, nihil hic aliud inquiri, quam *vis centrifugae magnitudinem*, pro ſitu aliquo momentaneo, quo hemisphaerium, vel ſegmentum alterutrum, (hoc loco denſius) occupat maximam a vorticis centro diſtantiam. De *Phyſicis* concluſionibus, circa ipſum motum ſphaerae centrifugum aut centripetum, circa inclinationem ſegmenmentorum, aut rotationem ipſius ſphaerae hic nihil dici. Sit igitur fig 1. O centrum vorticis; GLPQMH Sectio ſphaerae maxima; diſtantia centrorum vorticis et ſphaerae, hoc eſt $OT = c$. $OL = m$. $LT = TM = r$. $LX = x$. $Xx = dx$. $x\delta = y$. $\delta f = dy$. $MV = v$. $Vv = dv$. $VR = z$. $Rr = dz$. Ratio radii ad peripheriam circuli $= 1 : \Phi$. Denſitas ſphaerae fluido homogeneae $= a$. Segmenti exterioris $HMQ = a + f$. Segmenti interioris $= a - g$. Dico,

Quoniam vires centrifugae generaliter ſunt in ratione compoſita ex directa maſſarum ſimplici, et duplicata celeritatum, itemque inuerſa diſtantiarum: Hoc eſt, poſita $Vi = V$, Maſſa $= M$, celeritate $= C$, et Diſtantia $= D$, quoniam generaliter $V = \frac{M \times C^2}{D}$. Erit in noſtro caſu, propter $C = D^n$, $V = M \times D^{2n-1}$. Vnde ſequens oritur computus.

I. De ſegmentis Baſi plana terminatis.

Caſus primus.

§. 5. Pro vi ſegmenti GLP inueniendi. Rotetur xSf circa centrum X, vt elementum Sf deſcribat zonulam circularem $= pydy$. Quoniam denſitas illius eſt $= a - g$, erit Maſſa huius zonulae $= (a - g)\, pydy$. Et propter diſtantiam eius a centro Vorticis Fig. 1.

$O = OS = (\overline{OX}^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ erit Vis centrifuga zonulae

 =

$=(a-g)pydy(\overline{OX}^2+y^2)^{\frac{2n-1}{2}}$. Consequenter integrando, Vis centrifuga totius circuli radio XS descripti $=p\frac{(a-g)}{2n+1}(\overline{OX}^2+y^2)^{\frac{2n+1}{2}}+$ Const. Euanescente autem y euanescit Vis centrifuga: igitur constans $=-p\frac{a-g}{2n+1}\overline{OX}^{2n+1}$ vnde Vis totius circuli, radio XS, vel XG($=y$) descripti $=p\frac{a-g}{2n+1}[(\overline{Ox}^2+y^2)^{\frac{2n+1}{2}}-\overline{Ox}^{2n+1}]$ Hactenus autem, cum de solo circulo radii XS, vel XG ageretur, assumi OX pro constante debuit. Fiat nunc LX variabile $=x$, adeoque $OX=m+x$, erit $\overline{OX}^2=m^2+2mx+x^2$ et $y^2=2rx-x^2$, adeoque Vis Circuli praedicti $=p\frac{a-g}{2n+1}[(m^2+2mx+2rx)^{\frac{2n+1}{2}}-(m+x)^{2n+1}]$. Haec vis ducta in altitudinem $Xx=dx$, dabit vim Cylindruli elementaris $GPpg=$ $=p\frac{a-g}{2n+1}dx[(m^2+2mx+2rx)^{\frac{2n+1}{2}}-(m+x)^{2n+1}]$. Adeoque Vis segmenti sphaerici $GLP=p(a-g)$ $[\frac{(m^2+2mx+2rx)^{\frac{2n+3}{2}}-m^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(m+r)}-\frac{(m+x)^{2n+2}-m^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}]$.

§. 6. Pro vi centrifuga segmenti HMQ inuenienda, nihil aliud requiritur, quam vt homologae eadem ratione tractentur lineae et superficies. Vnde in denominationibus superioribus efficitur vis centrifuga segmenti $HMQ=p(a+f)\times$ $[\frac{-(q^2-2qv+2rv)^{\frac{2n+3}{2}}+q^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(q-r)}+\frac{(q-v)^{2n+2}-q^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}]$.

Ca-

Casus secundus.

§. 7. In Segmento GLP pro inuenienda vi globi secundum directionem OLM, notandum est, quod vis singulorum punctorum vt S, limitetur per oppositam in Y. Dicendum igitur: vti OS ad OX, ita vis primitiua ad vim limitatam puncti S. Igitur Vis Zonulae circularis antehac inuenta, ducenda est in $\frac{OX}{OS}$, vt fiat $=(a-g)pydy(\overline{OX}^2+y^2)^{\frac{2n-1}{2}}\frac{OX}{OS}$ $=(a-g)pydy(\overline{OX}^2+y^2)^{n-1}OX$, et integrando Vis circuli radio XS, (vel $XG=y$) descripti, addita statim constante $=p\frac{a-g}{2n}[(\overline{OX}^2+y^2)^n-\overline{OX}^{2n+1}]$. Fiat nunc OX variabile $=m+x$, substituatur valor ipsius $y^2=2rx-xx$, et ducantur omnia in altitudinem $Xx=dx$: erit Vis Cylindruli elementaris GPpg $=p(a-g)\frac{(m+x)(mm+2mx+2rx)^n-(m+x)^{2n+1}}{2n}dx$, et integrando cum addita constante, Vis Segmenti Sphaerici $GLP=p(a-g)$, ductum in quantitates seqq. $\frac{(m+x)(mm+2mx+2rx)^{n+1}-m^{2n+3}}{2.\,2n.(n+1)(m+r)}-$ $-\frac{(mm+2mx+2rx)^{n+2}-m^{2n+4}}{4.\,2n(n+1)(n+2)(m+r)^2}-\frac{(m+x)^{2n+2}-m^{2n+2}}{2n.(2n+2)}$.

§. 8. Similiter prodit vis centrifuga segmenti sphaerici $HMQ=p(a+f)$ ductum in quantitates sequentes $-\frac{(q-v)(qq-2qv+2rv)^{n+1}-q^{2n+3}}{2.\,2n.(n+1)(q-r)}+\frac{(qq-2qv+2rv)^{n+2}-q^{2n+r}}{4.\,2n(n+1)(n+2)(q-r)^2}$ $+\frac{(q-v)^{2n+2}-q^{2n+2}}{2n(2n+2)}$.

 II. De

II. De ſegmentis Baſi ſphaerica terminatis.

Caſus Primus.

Fig. 2. §. 9. In Segmento GLP fingatur ſemicirculo Radii OG deſcribi ſphaeram circa centrum vorticis O: Tranſibit ſuperficies eius per ſphaeram LGHMQPL; et repraeſentabit arcus GSP ſectionem ſuperficiei ſphaericae, quae vtrique ſphaerae communis eſt. Haec ſuperficies eſt aequalis ſuperficiei Cylindricae, cuius Diameter baſeos eſt OG, et altitudo XY: Hoc eſt, facto ex circumferentia baſeos in XY. Propter $OG = (\overline{OX}^2 + \overline{XG}^2)^{\frac{1}{2}} = (m^2 + 2mx + x^2)^{\frac{1}{2}}$ et $XY = OG - OX = (m^2 + 2mx + x^2)^{\frac{1}{2}} - (m + x)$. Erit ſuperficies praedicta $= p(m^2 + 2mx + 2rx) - p(m + x)(m^2 + 2mx + 2rx)^{\frac{1}{2}}$. Haec ducta in denſitatem $(= a - g)$ et in dignitatem diſtantiae $= \overline{OG}^{2n-1} = (m^2 + 2mx + 2rx)^{\frac{2n-1}{2}}$ dabit Vim centrifugam totius ſuperficiei praedictae $= p(a-g)(m^2 + 2mx + 2rx)^{\frac{2n+1}{2}} - p(a-g)(m+x)(m^2 + 2mx + 2rx)^n$. Ducatur illa in altitudinem Yy (= differentiali ipſius OG) hoc eſt, in $d.\ OG = (m+r)dx(m^2 + 2mx + 2rx)^{-\frac{1}{2}}$, erit Vis ſolidi elementaris ſphaerici $GPpg = p(a-g)(m+r)dx[(m^2 + 2mx + 2rx)^n - (m+x)(m^2 + 2mx + 2rx)^{\frac{2n-1}{2}}]$, et integrando, addita conſtante, Vis totius Segmenti ſphae-

ſphaerici GLPSG $= p(a-g)$, ductum in terminos ſeqq.

$$\frac{(m^2+2mx+2rx)^{n+1}-m^{2n+2}}{2\cdot(n+1)}-\frac{(m+x)(m^2+2mx+2rx)^{\frac{2n+1}{2}}-m^{2n+2}}{2n+1}$$
$$+\frac{(m^2+2mx+2rx)^{\frac{2n+3}{2}}-m^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(m+r)}.$$

§. 10. Eadem methodo prodit vis totius ſegmenti ſphaerici HMQWH $= p(a+f)$, ductum in terminos ſequentes $\frac{(q^2-2qv+2rv)^{n+1}-q^{2n+2}}{2(n+1)}$

$$-\frac{(q-v)(q^2-2qv+2rv)^{\frac{2n+1}{2}}-q^{2n+2}}{2n+1}-\frac{(q^2-2qv+2rv)^{\frac{2n+3}{2}}-q^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(q-r)}.$$

Caſus Secundus.

§. 11. Pro Vi Segmenti GLP. Diſtantia Arcus GSYP eadem eſt a centro vorticis, ſed modificatio virium diuerſa. Itaque vt habeas vim puncti S, maſſa eius non eſt ducenda in $\overline{OS}^{2n-1}$ ſed in $OZ \times \overline{OS}^{2n-2}$ ſit OS $= b$, quoniam conſtans eſt in Arcu GSP, et YZ $= t$, adeoque Zz $= dt$. Annulus ſphaericae ſuperficiei ab elemento Sſ circa Zz rotato deſcriptae, erit $= pbdt$. Igitur Maſſa eius $= (a-g)pbdt$, et Vis centrifuga huius annuli $= (a-g)pbdt . OZ . OS^{2n-2} = (a-g)pb^{2n-1}(b-t)dt$, et integrando, Vis centrifuga totius ſuperficiei ſphaericae, ab arcu YS circa YZ rotato, genitae $= p(a-g)(b^{2n}t-\frac{1}{2}b^{2n-1}t^2)$. Si iam YZ $=$ YX $= b-m-x$, et YS $=$ YG, erit Vis totius ſuperficiei ſphaericae, per Arcum GSYP repraeſentatae, $= p(a-g)\frac{1}{2}b^{2n-1}(b^2-m^2-2mx-x^2)$ $= p(a-g)\frac{1}{2}b^{2n-1}\overline{GX}^2$. Fiat nunc OS variabilis, vel

vel $h^2 = \overline{OX}^2 + \overline{XG}^2 = m^2 + 2mx + xx + y^2 = m^2 + 2mx + 2rx$ et ducatur vis inuenta in altitudinem Yy: erit Vis Elementi folidi $GgpP = p(a-g)\frac{1}{2}(m+r)(2rx-xx)(m^2+2mx+2rx)^{(n-1)}dx$. Quare integrando, addita conftante, Vis folidi fphaerici $GLPYG = p(a-g)\frac{1}{2}(m+r)$, ductum in terminos fequentes $\frac{rx(m^2+2mx+2rx)^n}{n(m+r)} - \frac{r(m^2+2mx+2rx)^{n+1} - rm^{2n+2}}{2.n.(n+1)(m+r)^2}$

$- \frac{xx(m^2+2mx+2rx)^n}{2.n(m+r)} + \frac{x(m^2+2mx+2rx)^{n+1}}{2.n.(n+1)(m+r)^2}$

$- \frac{(m^2+2mx+2rx)^{n+2} - m^{2n+4}}{2.2.n.(n+1)(n+2)(m+r)^3}$.

§. 12. Pro Vi Segmenti HMQ, fi eandem fequaris methodum, prodit Vis folidi fphaerici $HMQWH = p(a+f)\frac{1}{2}(q-r)$, ductum in terminos feqq. $\frac{rv(q^2-2qv+2rv)^n}{n(q-r)} + \frac{r(q^2-2qv+2rv)^{n+1} - rq^{2n+2}}{2.n(n+1)(q-r)^2}$

$- \frac{vv(q^2-2qv+2rv)^n}{2.n(q-r)} - \frac{v(q^2-2qv+2rv)^{n+1}}{2.n.(n+1)(q-r)^2}$

$- \frac{(q^2-2qv+2rv)^{n+2} - q^{2n+4}}{2.2.n(n+1)(n+2)(q-r)^3}$. Quae cum vires exhibeant fegmentorum GLP, et HMQ, patet fola valorum x et v fubftitutione in partibus diametri facta, inueniri vim centrifugam fphaerae heterogeneae e duobus Segmentis ita compofitae, vt grauitas eius aequet grauitatem fphaerae homogeneae. Q. E. I.

Euo-

Euolutiones quorundam Caſuum ſpecialium.

§. 13. Si ſphaera ſit homogenea, adeoque $f=g=o$, fiatque $m+r=c$, erit in caſu primo, poſita $n=1$. Vis centrifuga $=p(\frac{2}{3}acr^3+\frac{2ar^5}{15c})$, et ſi $n=o$, erit vis ſphaerae $=p.\frac{2}{3c}ar^3$. Sed in caſu ſecundo erit, poſita $n=1$, vis centrifuga $=p.\frac{2}{3}acr^3$ et pro $n=o$ inducet formula in Logarithmos. Vis autem ſphaerae in centrum grauitatis collectae, facta $n=1$, erit $=p\frac{2}{3}acr^3$, et pro $n=o$, fiet $=p.\frac{2}{3c}ar^3$.

Si ſphaera concipiatur diuiſa in duo hemiſphaeria §. 1. ſic, vt $f=g$, dabit caſus primus §. 5 et 6, poſita $n=1$, vim ſphaerae centrifugam $=p(\frac{2}{3}acr^3+\frac{2cr^5}{15c}+\frac{2}{15}fc^4+\frac{1}{3}fc^2r^2+\frac{1}{2}fr^4-\frac{2f}{15c}(c^2+r^2)^{\frac{5}{2}})$ et pro $n=o$, vim $=p(\frac{2ar^3}{3c}+\frac{2}{3}fc^2+fr^2-\frac{2f}{3c}(c^2+r^2)^{\frac{3}{2}})$. Caſus autem ſecundus §. 7 et 8. dabit, poſito $n=1$, vim $=p(\frac{2}{3}acr^3+\frac{1}{4}fr^4)$, et, ſi $n=o$, inuoluet Logarithmos. Vis autem ſphaerae huius in centrum grauitatis collectae, poſito $n=1$, erit $=p(\frac{2}{3}acr^3+\frac{1}{3}fr^4)$, et poſito $n=o$, erit $=p(\frac{2ar^3}{3c}+\frac{16a^2r^2}{9f})$. Si fuerit $x=\frac{3}{2}r$, et $v=\frac{1}{2}r$ in §. 5. 6. 7. et 8. erit $g=\frac{5}{27}f$, vt ſphaerae compoſitae et homogeneae ſit eadem grauitas. Fiat $n=1$, erit §. 5. et 6. vis centrifuga $=p(\frac{2}{3}acr^3+\frac{2}{15c}ar^5+\frac{32f}{405c}(c^2+cr+r^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{32}{405}fc^4+\frac{15}{81}frc^3+\frac{28}{81}fc^2r^2+\frac{26}{81}fcr^3+\frac{49}{162}fr^4+\frac{22fr^5}{405c})$ ſaluo

 er-

errore calculi. Sed §. 7. et 8. erit Vis $=p(\frac{2}{3}acr^3 + \frac{1}{12}fr^4)$. Eademque erit Vis ſphaerae in centrum
Fig. 3. grauitatis collectae. Sit enim E centrum grauitatis ſegmenti GLP, erit LE$=\frac{8rx-3xx}{12r-4x}=\frac{7}{8}r$. Sit F centrum grauitatis ſegmenti alterius HMQ, erit MF $=\frac{8rv-3vv}{12r-4v}=\frac{13}{40}r$, et EF$=\frac{4}{5}r$. Sit nunc D centrum grauitatis commune inueniendum: dico, ſicut pondus in F ſuſpenſum $=\frac{5}{48}r^3(a+f)$ ad pondus ſuſpenſum in E$=\frac{27}{48}r^3l(a-\frac{5}{27}f)$ ita diſtantia ED ad diſtantiam DF. Ex quo fit ED$=\frac{1}{8}r\frac{a+f}{a}$, et LD$=LE+$ED $=r(1+\frac{f}{8a})$; Vnde tandem diſtantia centri grauitatis ſphaerae a centro vorticis $=$OD$=c+\frac{f}{8a}$: et vis centrifuga $=\frac{2}{3}ar^3p(c+\frac{fr}{8a}=p(\frac{2}{3}acr^3+\frac{1}{n}fr^4)$ vti prius obtinuimus pro §. 7. et 8.

Corollaria.

§. 14. Patet ex dictis: Non poſſe pro ſphaera vel homogenea, vel heterogenea indifferenter ſubſtitui eius centrum grauitatis. In ſolo caſu ſecundo, et hypotheſi ipſius $n=1$, id ſemper ſuccedit: in primo nunquam. Intelligitur hoc ex illo: illud praeter exempla iam allata ex generali ratiocinio. Sint T et U duo puncta quaecunque globi heterogenei, quorum denſitates exponantur per T et U. Sit
Fig. 4. eorum commune centrum grauitatis K. Demittantur in lineam OLM perpendicula Tt, Kk, Uu: erit ex natura centri grauitatis U : T$=$TK : KU$=tk : ku$. Vnde U. $uk=$T. tk. Cumque vires centrifugae in ca-

casu §. 7. et 8. pro $n=1$, sint in ratione massarum U, T, K, et distantiarum Ou, Ot, Ok, habebitur:

$$T.\,Ot = T.\,Ok + T.\,kt$$
$$U.\,Ou = U.\,Ok - U.\,uk = U.\,Ok - T.\,kt.$$ Vnde
$$T.\,Ot + U.\,Ou = (T+U)\,Ok = K.\,Ok.$$

Patet porro, quod salua manente grauitate ipsius sphaerae, et modo compositionis, diuersa sit vis centrifugae differentia a vi sphaerae homogeneae pro diuersa globi a centro vorticis distantia, quia c ingreditur formulam vis centrifugae: quod etiam diuersa sit in eadem distantia pro differentia grauitatis in vtroque hemisphaerio, quoniam f ingreditur in eandem formulam: quod denique magis magisque diuersa sit, prout segmenta sphaeram componentia sint magis inaequalia volumine et densitate. Facile inueniri potest punctum in quod colligi deberet tota sphaere massa, vt eadem prodeat quantitas vis centrifugae, quae in heterogenea obtinet. Posset id vocari centrum virium centralium. Denique etiam illud oculis patet, pro diuersa vorticis lege nunc maiorem esse vim sphaerae compositae, nunc minorem, quam est in homogenea.

Scholium.

§. 15. Nemini non obuium erit, plurima per hasce formulas Problemata non difficulter resolui, prout vnam vel alteram ex literis formulam componentibus pro incognita assumseris. Sola n, quae leges vorticis exponit, difficultates complectitur,

tur, ſi pro incognita ſumi, et ex formulis praemiſſis debeat inueſtigari.

Caeterum et illud facile intelligitur, componi ſphaeram ex pluribus quam duobus ſegmentis poſſe; nec requiri, vt ſphaerae compoſitae grauitas aequet grauitatem alterius fluido homogeneae: Inueniri potius hac methodo vim ſphaerae compoſitae centrifugam, quaecunque demum denſitas, numerusque et ordo ſegmentorum fingatur.

DE LIENE.

AUCTORE
Jo. Georg. Du vernoi.

§. 1.

M. Octobr. 1729.

A phaenomenis circa Lienem obſeruatis, ac ante omnia, a ſitu eiusdem naturali initium faciam.

1. Inſignis in Hypochondrio ſiniſtro cauitas ſeu ſpatium amplum vacuum exſtat, cuius portio ad ſedem ventriculi et Lienis deſtinata, reliquum vero ſpatii vacuum et liberum eſt, ſic vt manum in eo circumuertere et circumagitare procliue ſit. Deinde, idem ſpatium, intuitu coſtarum et Diaphragmatis, eleuatione et concidentia earundem, inſtar Thoracis maius minusue effici poteſt. Tales proinde circumſtantiae ſuspicionem mouent, corpus Lienis in

in viuo et ſano homine, totum praeſatum ſpatium aliquando forte replere, alio autem tempore non replere, Lienisque adeo ſitum ſeu conditionem qualis in demortuis cernitur, fallacem eſſe. Caeterum, Lienis ea figura eſt, vt in modum linguae parum incuruatae et conglobatae ſuper ventriculi extremitatem ſiniſtram oblique verſus dorſum, iuxta ductum coſtarum ſeſe accommodet.

2. Quemadmodum vteri fundo Placenta foetus, ſic Lien ſuperficiei ventriculi adhaereſcit; imo auferre ventriculum haud licet, quin cum eo ſimul lien extrahatur vna cum omento, cuius folium pluribus digitationibus ſeu appendicibus veluti tendineis, limbo lienis accretum ſaepe obſeruaui, vnde Sinus inter omentum et lienem enaſcitur, cuius vſum ignoro.

3. Inter Lienis et ventriculi Neruos, inter neruos et vaſa ſplenica, idque in limine lienis, commercium ſingulare et admirabilis ſocietas intercedit. Neruei enim funiculi corpus lienis nequaquam ſubeunt, ſed in praefato limine ab vna extremitate ad aliam protenſi ſubſiſtunt, a quibus propagines partim ad Lienem partim ad ventriculum omentumque contendunt. Eadem quoque vaſorum ſanguineorum lex obtinet. Deinde a neruorum ſingulari complicatione, laquei annulares ſeu circulares efformantur quam plurimi, quibus vaſa ſplenica incluſa ac incarcerata detinentur.

4. Transfuſionem ſanguinis inter praefata viſceri dari, eamque ſi non perpetuo, certis tamen temporibus locum habere ex eo perſpicuum eſt, quoni-

am in limine vbi nexus est lienis cum ventriculo; canales breuissimi cum arteriosi tum venosi, ex vno ad alterum reciproce tendunt.

5. Proportio venae et arteriae splenicae ad aliarum partium vasa multo maior visa est; Idque fortassis, moram seu collectionem sanguinis certis temporibus denotat.

6. Venosae radices ramificationesque intra corpus lienis conspicuae, nouam ac extraordinariam a caeteris diuersam legem oculis obiiciunt. Nam quod Bruta attinet ex. gr. in Equo, Elephantoque, venae tunicis carent proprie sic dictis, suntque foramina figuram canalis adumbrantia, ad modum canalis perpuncta super chartam expressi. Verum in Liene humano aduertendum est, etsi venosae ramificationes tunicis veris et imperforatis constare videantur, eas tamen reuera perforatas esse plurimaque in iis foraminula cribrum aemulantia facile internoscere fas est, prouti *Hygmorus* recte annotauit. Atque duplex solummodo exemplum praefatae conformationis in corpore humano, idque in duabus partibus magna inter se analogia gaudentibus hactenus reperire valui, vnum in Mentula, alterum in Liene.

7. Omnes Lienes quotquot in cadaueribus optimis examinaui, instar spongiae, molles, tumidi, distenti, liuidique oblati sunt.

8. Facto vulnere, ac inter digitos compresso Liene, molem et volumen eius reduci ac diminui perspicio, perque foramen vulneris sanguinem pleno flumine exire.

9 Re-

9. Receſſus omnes Lienis vero ſanguine tinctos infectosque, antequam vlla vaſa laeſa vulnerata eſſent, inuenio.

10. Poſt crebram agitationem intinctionemque ſolam in aqua tepida, ſanguis cito eluitur, ac ſine alia praeparatione, Lienis fabrica ſimplicior oculis ſiſtitur.

11. Aqua, Aer et quoduis liquidum, omnes receſſus celeriter peruadit, corpusque lienis inflatur.

12. Fabricam denique Lienis interiorem, vel ſubſtantiam diligentiſſime perluſtranti, ea rara, ſpongioſa filamentorumque varie inter textorum et aeuernoſorum congeries viſa eſt.

§. 2. E prolatis Phaenomenis, vtpote certis et euidentibus, notiones 1. de vera ſtructura Lienis, 2. de actione, 3. de eiusdem vſu formare; vel minimum, notionum hactenus receptarum veritatem aut falſitatem internoſcere procliue erit.

Quoad primum; in tota fabrica Lienis nihil quod eius notitiam perarduam, difficilem, impoſſibilemve efficit, perſpicere valeo; quumque in toto eius contextu ſimplicior, rara, poroſa, filamentoſaque ſubſtantia quae in toto liene dominatum obtinet, quae in aliis viſceribus haud obuia eſt, quaeque in ſolis corporibus ſpongioſis reperiri ſolet, in conſpectum venit; quumque vaſorum conformatio caeteraque phaenomena allegata huicce id eae minime aduerſentur, rationi conſonum eſt in data ſtructura euidenti conquieſcere, donec contrarium demonſtretur. Caeterae enim particulae ſolitariae,

mi-

minutioresque, vtpote accessoriae et ad functionem principalem haud primario concurrentes, quales sunt puncta seu corpuscula candicantia a *Malpighio*, *Tauvryo*, *Meryo* aut Aliis obseruata, ea siue adsint siue non adsint, ad rei fundamentum seu contra generalem structuram nihil conferre valent.

§. 3. Quia tamen scire interest, an Glandulae seu corpuscula praefata reuera adsint nec ne? Item an Lien ex fibrarum ac cellularum congerie iuxta *Hygmorum*, *Malpighium* constet; ac denique quid de modo allegatis fibris vere statuendum sit; dico 1. quod recte monente *Rhuyschio* ne vmbra aut vestigium glandularum tam in Humano quam in Animantium mihi oblatorum in specie Elephanti Liene appareat. 2. Eiusdem laudati Auctoris contra fibras Lienis assertioni, quoad Lienis substantiam propriam, quoque adstipulor. Fibrarum equidem imago et species quaedam cernitur, sed falsa et illusoria, quia veros Ductus cauos esse certis experimentis constat, cuius erroris causa est, quod hi diuerso aliorum ductuum in aliis visceribus more, haud glomeris aut plexus aut ordinaria forma comparent, sed tenuium filamentorum nudorum et simplicium naturam referunt. 3. Quod poros et intercapedines attinet, in toto Lienis contextu, seu in Humano seu in supra memoratorum Animantium liene, cauernulas sanguinem continentes inuicemque communicantes, quas immisso flatu extendere et dilatare fas est, clare perspicio.

§. 4.

§. 4. Fabricam Lienis ſimplicem, perſpicuam inque aliis viſceribus haud obuiam, me hic exhibente, Alii vice verſa difficultates, obſtacula, caliginemque perpetuo incuſant, inde ad ideas remotiores, in ſpecie ad motum ſanguinis ſplenici ad Hepar tendentis reſpicientes, Lieni communem ſtructuram conceſſam eſſe, qualis eſt ſtructura Parenchymatum ſeu viſcerum ſecernentium pronuntiant; Eaque hodie recepta eſt opinio de Structura Lienis, quamquam valde incerta et ad legem Parenchymatum, iudice ſaltem oculo, parum accommodata, tumque poſtremo cum vaſorum conformatione, ſanguinis in eo exundatione, cum ſitu pendulo aliisque phaenomenis male concordans. Porro, quod de motu ſanguinis ſplenici allegatur, cernimus ſanguinem quoque aliarum partium ab Hepate recipi, ſanguinem nimirum omenti, ventriculi, meſenterii, inteſtinorumque, de quarum partium ſtructura earumque refluo ſanguine, ſi conſequentia ſupra memorata vera eſſet, idem quod de Lienis ſtructura indicium proferendum eſſet, quod tamen euidenter falſum eſt. Pone vero, ſolum ramum ſplenicum ad Hepar tendere, caetera vaſa venoſa Abdominis in venam Cauam terminari, ſanguinemque Lienis (excluſo omni aliarum venarum ſanguine) ad Hepar transmitti, tum forſan de quodam negotio aut commercio inter Hepar et Lienem, ſuſpicio haud iniuſta formaretur; Sed eo in caſu diſtincta prouti quidem mihi videtur Rami Splenici indoles conſpicua eſſet, quod tamen nequaquam obſeruatur.

Malo credere, tales venarum et ſanguinis directiones minus denotare arcanam partium functionem, quam in legibus generalibus Circulationis rationem habere &c.

§. 5. Intuitu expoſitae Lienis fabricae, Ideam concepi nouam de eius actione, quam tamen minime caueo ac pro coniectura ſolummodo haberi cupio. Lienem conſidero non vt viſcus, ſed vt partem inſtrumentalem, ad exundationes fluidorum in eo fluentium, intumeſcentiasque ſuscipiendas deſtinatam, ſine alia occulta et a ſubtiliore mechanismo pendente functione, qualem ſic dicta *Parenchymata* corporis humani exercent. Partem inſtrumentalem eam vocamus, cuius operatio aperte et ſenſibiliter mechanica eſt, vti valuulae reſpectu cordis et venarum, Palpebrae reſpectu viſus, Auris externa reſpectu auditus, Epiploon reſpectu inteſtinorum, Capſulae forſan atrabilariae reſpectu renum, corpus Spongioſum reſpectu vrethrae &c. Id mihi perſuadeo 1. ex generali Corporum ſpongioſorum proprietate quae a fluido intro ſtagnante retentoque, cellulis ſeu cauernulis eorum diſtentis inflatisque nulloque extus incumbente corpore compreſſis, mox in tumorem attolluntur; è contra, ceſſante fluidi ſtagnatione, in priorem ſtatum reſtituuntur. 2. E facilitate poſt mortem, quoties aër vel quoduis liquidum intra lienem penetrat, molem lienis augendi. 3. Conſtat quoque è 7. 8. et 9. experimento, omnes cauernulas lienis ſanguine vtplurimum diſtentas infectasque eſſe. Denique 4. ad Sedem Lienis reſpicio, in in eo ſpatio amplo, quod inter coſtas ſpurias, Diaphragma et Ventriculum vacuum eſt, quod vt inutile, nequaquam conſiderare licet. Lubenter hic teſtimonia Medicorum adderem, de motu Lienis in vivis hominibus tam oculo quam auditu percepto, item ſigna inflati Lienis vti ſunt coſtarum ſpuriarum ſiniſtri lateris protuberantia verſus dorſum progrediens, aeſtus, pulſatio, tumor et grauitas hypochondrii ſiniſtri, contactus tumidi lienis &c. Sed ſupra allegata Phaenomena Anatomica hac vice nobis ſufficiunt. Ex hiſce concludo probabiliter, Lienem in viuo Homine inſtar Follis inflationibus obnoxium eſſe, molemque eius interdum naturaliter augeri interdum diminui, corpusque Lienis ſpatium hypochondrii vacuum (vid. 1. phaenom.) aliquando replere, alio vero tempore non replere, etſi in ſanitatis ſtatu earum mutationum nullam ſenſationem percipiamus. Quamobrem, duplicem inflationem ſeu intumescentiam Lienis ſtatuere procliue eſt, vnam violentam et praeternaturalem, alteram naturalem, benignam neceſſariamque, quam veram actionem Lienis appello.

§. 6. In eo difficultas ſola nunc verſatur, vt Agens ſeu id quod ſanguinis in Liene motum ſiſtere, eius exundationem excitare intumeſcentiamque adeo Lienis producere poteſt, aſſequamur: Alias enim intumeſcentia Lienis fieri haut poteſt, etſi venarum tunicae perforatae ſint, quia cum hac tum cellulae niſui ſanguinis ſeſe opponere valent. Illud vero Agens num forte ventriculus dicendus eſt?

DE SOLIDORUM RESISTENTIA SPECIMEN

G. B. *Bulffingeri.*

§. 1.

MM. Aug. et Dec. 1729. Tabb. XV. et XVI.

De solidorum resistentia commentati sunt Viri omnino egregii. *Galilaeus*, vt magno erat ingenio, nobile argumentum primus et feliciter aggressus est. Legitime e principiis suis intulit, quiquid edixit. *Hypothesin*, qua vsus est, corpora vt perfecte rigida considerans, successores facto naturae non omnino congruere obseruarunt. Inter eos *Leibnitius* peculiari schediasmate conatus est euincere, quam natura Legem in resistentia solidorum sequatur, admonitus discrimine hypotheseos Galilaeanae, et experimentorum, a *Paulo Wurzio*, et *Mariotto* factorum. Ipse *Mariottus*, si quisquam alius, bene de hoc argumento meritus est: dum et physicas considerationes primus illi distincte intulit, et experimentis compluribus rem perdiscere tentauit. *Varignonio* debet haec tractatio, quod aliae complures: persecutus est haec problemata generali solutione, eademque auxit corollariis, vniuersalitate aut elegantia commendabilibus. *Jac. Bernoullio* obuiam facta est eadem haec meditatio, cum de figura laminae elasticae solicitum gerebat animum. Vidimus et *Parentium* saepius in hoc negotio versatum, Virum, cuius longe infra meritum fa-

fama eſt. Is alibi geometram, phyſicum alibi, et aliquando oeconomum egit in hoc argumento.

§. 2. *Nobis* id curae eſt, vt factis repetita vice experimentis, tandem aliquando appareat, num dicta Virorum naturae congruant? aut quousque aberrent? Id vt conſilio magis, quam caſu, fiat, praemitti vtique conſiderationes abſtractae debent, ſed paucae illae, nec difficiles, nec omnes nouae.

§. 3. Principio illa *Mariotti* laus eſt, quod *duo corporum* reſiſtentium *genera* diſtinxit liquido. Sunt, quae ſolida dici, et rigida debent, exemplo lapidum, vitri et lignorum: Sunt, quae ſolida quidem, ſed flexilia, cuius modi ſunt laminae metallicae tenuiores, corium, papyrus, et ſimilia. Differunt haec corpora reſiſtentiarum legibus et ſeorſim ſingula examinari poſtulant.

§. 4. *Secunda* vbique innotuit *diſtinctio*, quae *modum* reſpicit, quo ſolida ſimul et rigida adhibentur corpora. Trabes poſthac appellabo, cum de his agitur corporibus. Ea autem vel vna ſui extremitate muro infiguntur: vel duabus innituntur, non fixae, vel vtraque extremitate muro infixae firmantur. *Primum* hic examinamus caſum.

§. 5. Is in *duas* diuiditur *partes*. Quando vis trabem ruptura directionem trabis longitudini parallelam ſeruat, dicemus trabem *directe euelli*: quando vis in directione ad trabis longitudinem perpendiculari agit, vocabimus id, trabem *transuerſe abrumpere*. Nomenclator eſt *Leibnitius*. In Actis Erud. 1684. pag. 320. Directiones obliquas ſpeciatim

 me-

memorare hominis otiosi foret: quomodo illae ex prioribus fluant, nemini ignotum est. Itaque, nisi in experimentis aliquid singulare prodeat, non vtique illis immorari operae pretium est.

Fig. 1. §. 6. Sit igitur potentia Q, quae trabem debeat *directe euellere*, quaeritur, vt trabem disrumpat, quanta ea requiratur? Id obuium est, seu extendi fibras ligneas posse, seu non extendi, fingas, rem eandem fore. Tensiles enim fibrae eodem omnes modo afficiuntur in hoc casu. Fac itaque, vniuersam trabis propositae massam componi fibris rupturae resistentibus. Equidem caussa non est, cur in calculo verearis eam resistentiam in fibris aequalibus et aequaliter tensis aequalem ponere. Igitur omnis in eo res vertitur, vt multitudo fibrarum ducatur in vim resistendi supremam: Huic scil. facto aequari potentia Q debet.

Fig. 2. §. 7. Exprimat Area ABCDA, basin trabis muro resectam. Sit altitudo $BD=a$, abscissa $BH=x$, elementum eius $Hb=dx$. Applicata $EF=y$. Sit porro vis fibrae singularis ligneae exposita per lineam $BG=b$. Erit multitudo fibrarum in elemento $EefF=EF.\times Hb=ydx$, et earundem resistentia maxima $=bydx$. Ex eo prodit firmitas totius spatii $eEBFf=\int bydx$. Et consequenter firmitas totius trabis $ABCDA=Q=\int bydx$, si post factam integrationem altitudo $BH(=x)$ migret in $BD(=a)$.

Fig. 3. §. 8. Sunt ordinarie trabes parallelepipeda, et Areae ABCDA parallelogramma. Itaque applicatae EF constantes. Sit igitur $y=c$. Erit $Q=$

$Q = \int bydx = \int bcdx = bcx +$ const. $= bca$. Cuius quidem formulae hic vſus eſt, vt datis, quod fieri poteſt, per experimenta valoribus literarum Q, c, et a, inueniatur $b (= \frac{Q}{ca})$ pro firmitate fibrae ligneae, quales totam complere aream finguntur. Itaque ſi fibram datae craſſitiei velis cognoſcere: Sit area fibrae transuerſim ſectae $= k\alpha$, erit vis eam ruptura $= \frac{Q \cdot k\alpha}{ca}$.

§. 9. Supponitur autem in hoc calculo, texturam trabis internam ſatis eſſe ſimilarem, vt negligi differentia ſitus fibrarum poſſit. Si enim fibras interſtitiis a ſe inuicem irregulariter ſeiunctas eſſe velis, certum eſt, valores prodire alios atque alios; prout id multitudini fibrarum detrahit, vtpote quae ſola hic in computum venit, cum in ſequenti caſu etiam diuerſitas poſitionis plurimum conferat. Licebit tamen vulgari methodo inſiſtere, et fibras vniformiter per trabem diſtributas fingere, quoniam nec detegere verum, quo iacent, ordinem, nec ad praxin, ſi vel maxime innoteſceret, cum inſigni diſcrimine applicare poſſumus.

§. 10. Sit iam porro potentia P, quae trabem debeat *transuerſim abrumpere*. Galilaeus rigidum corpus conſiderans, rumpi ſimul omnes fibras, adeoque et omnes tota ſua vi reſiſtere, intulit. Inde ſequitur rumpi illas ſuper baſi ADC, et reſiſtentias fibrarum habere momentum tanto fortius, quanto longius a baſi rupturae abſunt. Igitur momentum reſiſtendi, quod elementum EfF potentiae P opponit, eſt aequale facto reſiſtentiae abſolutae $(= bcdx)$ Fig. 4.

in

in diſtantiam DH [$=(a-x)$]. Vnde fit momentum huius elementi $=bc(a-x)dx$, et momentum totius ſpatii EFBE$=\int bc(a-x)dx=bcax-\frac{1}{2}bcxx$: Et momentum trabis totius, poſita $x=a$, exit $=\frac{1}{2}bca^2$. Eſt vero id momentum aequale momento ponderis P, quod applicatur in diſtantia DR, et expoſita distantia hac per g, aequatur Pg. Vnde formula Galilaei P$=\frac{bca^2}{2g}$, et propter Q$=bca$, eſt tandem P$=\frac{Qa}{2g}$, vel facto $g=a$, eſt P$=\frac{1}{2}$Q.

§. 11. Cum experimenta diſcordarent propoſitionibus, coeperunt hypotheſin Eruditi mutare. *Primus*, quod ſciam, *Mariottus* tendi fibras, adeoque ſuperiores reſiſtere fortius animaduertit. *Leibnitius* illi hoc tribuit, quod P fecerit $\frac{1}{4}$Q. Id in prima editione factum oportet, namque in ſecunda ait, cadere P inter $\frac{1}{3}$Q et $\frac{1}{4}$Q. Ipſe *Leibnitius* veram ſibi videtur et naturae congruam dediſſe Problematis ſolutionem, faciens P$=\frac{1}{3}$Q, vſus hypotheſi, quam alibi confirmatam dicit, quod *extenſiones ſint viribus tendentibus proportionales*. Equidem ex illa facile conſequitur, quod Vir magnus infert. Eſt enim reſiſtentia fibrae cuiusque abſoluta proportionalis diſtantiae eius a baſi fractionis ADC hoc eſt, vti diſtantia AB($=a$) ad reſiſtentiam ſummam BG($=b$) ita D H, diſtantia fibrae propoſitae ($=a-x$) ad reſiſtentiam huius fibrae abſolutam. Vnde, quia numerus fibrarum elementi EefF$=cdx$, fit reſiſtentia earum abſoluta $=\frac{b(a-x)cdx}{a}$, et momentum huius reſififtentiae fuper bafin fractionis $= \frac{b(a-x)^2 c dx}{a}$. Vnde momentum totius fpatii finiti EFBE $= \int \frac{bc}{a}(a-x)^2 dx$ $= \frac{bc}{3a}(a-x)^3 + \frac{1}{3}bca^2$, et momentum refiftentiae pro tota trabe $= \frac{1}{3}bca^2 = P.g.$ Vnde $P = \frac{Qa}{3g}$, et facto $g = a$, prodit $P = \frac{1}{3}Q$, quae *Leibnitii* definitio eft.

§. 12. Ita *propius* ad naturam acceffimus in noua hac hypothefi: fed *abfumus* tamen a plena fimilitudine. Extenduntur fibrae in puncto D, comprimuntur quoque. Nefcio, qui factum fit, vt *Mariotto* maculam inurat, *Jac. Bernoullius*, (*) quafi compreffionem neglexerit, foli extenfioni intentus, cum tamen id *Mariotto debeamus*, quod *compreffionis primam* ipfe *mentionem* fecerit; idemque fit Autor propofitionis, quam et *Bernoullius* approbat, quod eaedem conclufiones prodeant, fiue folam extenfionem fibrarum inde a B ad D, fiue extenfionem a B, ad punctum aliquod C, et a C ad D, compreffionem fupponas. (**) Nondum dico de propofitione ipfa fententiam. Fig. 5.

§. 13. Maneamus in hypothefi extenfionis fibrarum omnium, et repetamus hic folutionem *Varignonii* generalem, fed liberatam a fuperfluis. Exponat ABC fectionem trabis, fit BD $= a$. BH $= x$. H$b = dx$. EF $= y$. Repraefentet curua GKD refiftentiam cuiusque fibrae tenfae abfolutam, fic, vt,

(*) Memor. Acad. Par. 1705. p. m. 231. (**) vid. du Mouv. des Eaux. p. m. 361. feqq.

HK$(-v)$ exprimat reſiſtentiam fibrae Hb in momento ruptionis. Erit

Numerus fibrarum elementi EefF$=ydx$.

Reſiſtentia earum abſoluta $=vydx$. et

Momentum eius ſuper baſin ADC$=(a-x)vydx$.

Vnde Reſiſtentia totalis ſpatii EPF$=\int(a-x)vydx$.

Quae formula dat reſiſtentiam totius ABC, ſi poſt integrationem completam fiat $x=a$. Hactenus gradior *cum Varignonio*: neſcio autem, cur ille praeter morem ſuum (ſolutiones enim facillimas ſolebat et breuiſſimas reddere) in deuia ſe coniecit. Iam enim praeſto eſt aequatio, quam ille per ambages reperit.(*) Aequalia eſſe debent momenta, reſiſtentiae vnum, et potentiae frangentis alterum. Itaque habetur $\int(a-x)vydx=P\times g$, hoc eſt $=$ potentiae ductae in diſtantiam applicationis. Vnde fit $P=\frac{\int(a-x)vydx}{g}$: et, quoniam $Q=\int bydx$, erit $P:Q=\frac{\int(a-x)vydx}{g}:\int bydx$, faciendo $x=a$ poſt integrationem.

Tab. XVI. Fig. 5. §. 14. Pro applicatione formulae ſit ABC, parallelogrammum, adeoque $y=c$, et definiatur ſcala reſiſtentiarum GKD. Sit ea primo pro Galileana hypotheſi recta GL, adeoque HK$=v=b$, erit peracta ſummatione $P=\frac{bc}{g}\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{a}{2g}\times Q$. Sit deinde recta GD, pro *Leibnitio*, vt fiat HK$=v=b(a-x):a$ erit poſt integrationem $P=\frac{bc}{g}\cdot\frac{1}{3}a^2=\frac{a}{3g}\times Q$. Sit GKD parabola externa, vt fiat $v=\frac{b(-x)^2}{a^2}$ erit

P=

(*) Memor. Acad. Scient. 1702. p. m. 89. ſq.

$P = \frac{bc}{g} \frac{1}{4} a^2 = \frac{a}{4g} \times Q$. Sit GMD parabola interna, et $v = \frac{b(a-x)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ fit $P = \frac{bc}{g} . \frac{2}{5} a^2 = \frac{2}{5} \frac{a}{g} \times Q$. Sit denique resistentia vt dignitas quaecunque extensionis, hoc est $v = \frac{b(a-x)^m}{a^m}$, fiet hoc casu $P = \frac{bc}{g} . \frac{a^2}{m+2} = \frac{a}{(m+2)g} . Q$.

§. 15. Equidem in hac enumeratione patet, si ceteris paribus plures inuicem trabes comparentur, sequi earum resistentias rationem solidi ca^2, hoc est compositam ex simplici latitudinis et duplicata altitudinis. Idemque in omni alia resistentiae per extensionem facta determinatione locum habere sic intelligitur. Sit loco dignitatis functio quaecunque; adeoque b ad v, sicut functio lineae BD(=A) ad functionem similem lineae HD(=X) siue $v = \frac{bX}{A}$, patebit in formula $\int (a-x) vydx = \int \frac{(a-x)bXcdx}{A'}$, ob dimensiones literae a in functionibus X et A similes, et sese destruentes, semper in numeratore duas literae a dimensiones superare, quando post integrationem x aequatur a. Eandem conclusionem *Parentius* alia methodo directe inuenerat, qua tensionum leges non sine artificio euitauerat. (*)

§. 16. Fateor hic, quod saepe alias testatus sum, videri mihi, quod *resistentiae* fibrarum *maiores* sint, *quam pro extensionis ratione.* Nescio, annon ambigui aliquid in hypothesin §. 11. irrepserit. Dicitur, extensiones esse viribus tendentibus propor-

 tio-

(*) v. Memor. Acad. Scient. Paris. 1708. p. 20. et Histor. eiusd. anni p. 142.

tionales; Resistentias esse aequales momento tensionis certum est. Sed cur ipsa extensio debet esse proportionalis vi tendenti? An fieri non potest, vt maior sit renisus fibrae, quam pro extensione actuali? Equidem id ex structura definiendum esset, si structuram penitius cognosceremus; quoniam id fieri non potest, experimentis rem tentare oportet; eademque colligere in hypothesin, quoad fieri poterit, simplicem et verae proximam.

§. 17. Simplicissimae sunt hypotheses, quae curuam resistentiarum assumunt generis parabolici, sic, vt $v = \frac{b(a-x)^m}{a^m}$. Examinaui primo, quid prodeat, si m fiat $= \frac{3}{2}$, hoc est: $P = \frac{2}{7}Q$. Monet enim *Mariottus* in experimentis P fuisse maius quam $\frac{1}{4}Q$ et $< \frac{1}{3}Q$, hoc est $> \frac{2}{8}Q$ et $< \frac{2}{6}Q$, supponendo $g = a$. Cum vero haec hypothesis exigeretur ad experimentum *Mariotti* p. 358. sq. propositum, prodiit ex assumta $m = \frac{3}{2}$, pondus $Q = 7 \times 47$ libr. $= 329$ libr., cum in experimento ipso esset 330. libr.

§. 18. Fecit hic successus, vt directe inquirendum exponentis m valorem statuerim. Est vero $P = \frac{bc}{g} \cdot \frac{a^2}{m+2}$ et $Q = bca$, hoc est $P = \frac{a}{(m+2)g} \cdot Q$ vnde fit $m = \frac{aQ}{gP} - 2$. Iam in facto *Mariotti* l. c. fuit distantia ponderis P, siue $g = 47$ lin. ipsum $P = 6$ libr. et Altitudo $a = 3$ lin. Pondus autem $Q = 330$. quare $m = \frac{aQ}{gP} - 2 = \frac{3 \times 330}{6 \times 47} - 2 = \frac{71}{47} = 1\frac{24}{47}$, hoc est, proxime $= 1\frac{1}{2}$.

§. 19. Quod autem in ligno tentauimus, idem de vitro quoque ad aliud *Mariotti* experimentum (*) peregimus. Monet ille, cum per *Galilaei* leges expectaretur ruptura Cylindruli vitrei a pondere Q 30 libr., frustratum se effectu, donec librae omnino 50 adhiberentur. Apud *Galilaeum* est $P = \frac{1}{2}Q$, in nostra de ligno hypothesi $P = \frac{2}{7}Q$. Itaque fit $\frac{2}{7} : \frac{1}{2} = 30$ ad pondus experimenti, quod exit $= 52\frac{1}{2}$ libr. commodius vtique, quam si P facias $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}Q$, adeoque pondus Q librarum 45 vel 60, sed tamen experimento minus conformiter. Igitur inuersa ratione praestat inquirere in valorem ipsius m, ex aequatione $\frac{30}{2} = \frac{50}{m+2}$ hoc est: $50 : 30 = \frac{1}{2} : \frac{1}{m+2} (= \frac{3}{10})$ vnde fit $m = \frac{4}{3}$, et $v = \frac{b(a-x)^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}$, quod, nisi fallor, naturae vitri non male conuenit. Conferrem ligni et vitri resistentias ad se inuicem, si posterioris Cylindri dimensionem annotasset Vir egregius.

§. 20. Sunt experimenta quoque fidibus instituta a *Jac. Bernoullio*. Ille chordam 3 pedes longam extendit pondere librarum 2, 4, 6, 8, viditque crescere longitudinem lineis 9, 17, 23, 27. (**) Si extensiones viribus proportionales essent, aucta longitudo fuisset lineis, 9, 18, 27, 36, quod longe differt a priori ratione. Sed si nostram examines rationem, faciendo, vt resistentiae sint ad extensiones in ratione subduplicata Cubi extensionis,

(*) v. d. du Mouv. des Eaux p. m. 360. (**) Memor. Acad. Scient. Paris. 1705. p. m. 235.

proxime ad rationem experimentorum accedes. Sit enim $v = b(a-x)^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{3}{2}}$ et ponatur $b = a = 1$. et $a-x = z$, sic vt $v = z^{\frac{3}{2}}$ exhibeat v resistentiam vi trahenti aqualem §. 16. et z proportionem extensionis. Substituendo igitur in locum v valores 2, 4, 6, 8, vt fiat $8 = z^{\frac{3}{2}}$, $6 = z^{\frac{3}{2}}$ etc. exibunt pro z numeri proportionales, 15, 25, 23, 40, quorum proxime eadem est ratio cum superioribus, 9, 17, 23, 27. Ex aduerso, si feceris $v = z^{\frac{4}{3}}$ numeri sequentur parum commodi.

§. 21. Plura hactenus experimenta huc pertinentia, ad manum non sunt, erunt autem suo tempore: atque tum licebit inquirere plenius in eam legem, quam tensiones habent ad resistentias. Plures nimirum vtriusque termini requiruntur. Interim illud facile patet, ob formulam $P = \frac{aQ}{g(m+2)}$ datis quatuor literis inueniri quintam; supponendo semper curuam resistentiarum esse sub formula $v = b(a-x)^m : a^m$, quod vtique necessarium non est, sed in praxi commodum foret, et, si recte speramus, a valore iusto non multum abludet.

§. 22. Ista de hypothesi, quae *solam* spectat fibrarum *extensionem*. Sequitur *altera* consideratio, qua extensioni *compressio* additur: Non enim extendi solum fibras in A contingit, sed comprimi etiam oppositas in D. Primus, quod publice constet, *Mariottus* hoc argumentum examinauit, in secunda de motu Aquarum editione. Secuti sunt non multo to poſt *Jac. Bernoulli*, et *Parentius*. Quaeritur autem, quanta ad rumpendam trabem vis requiratur, cum extendi illa ſuperius et inferius comprimi poteſt. Abeunt in diuerſa Viri eximii. *Alteri* hanc vim aequant illi, quae requiritur, cum nulla ſit compreſſio: *Alter* minorem facit in ratione altitudinis fibrarum tenſarum ad altitudinem totius trabis. *Mihi*, ſi quid iudico, inter vtramque aeſtimationem placet eſſe medio.

§. 23. *Mariottus* vult, trabem ABCD, ſic affici ab actione ponderis P, vt, diuiſa altitudine AD in duas partes aequales AI et ID, fibrae ſuperiores inter A et I poſitae extendantur, et comprimantur inferiores ab I ad D. Vult porro, reſiſtentiam, quam compreſſioni ſuae opponunt fibrae ligneae, ceteris paribus, eſſe aequalem et ſimilem illi reſiſtentiae, qua extenſioni renituntur. Atque hinc demum infert: dimidium ponderis $P(=L)$ agere in fibras AI extendendo illas, et dimidium eiusdem ponderis $P(=M)$ comprimere fibras ID. Praeterea ad fibras AI tendendas requiri ex § XI. pondus $L=\frac{Q.IA}{3.IF}$: Itaque pondus $P=L+M$ eſſe $=\frac{2.Q.IA}{3.IF}$ $=\frac{Q.AD}{3.IF}$, quod idem eſt, cum pondere eius caſus, vbi nullam fieri compreſſionem, ſed omnes ab A ad D fibras extendi diximus §. XI. Igitur ſi rationem ſic ineas, alter in alterum caſus reſoluitur. Fig. 6.

§. 24. Equidem hic nemini non in mentem veniet: gratis vtique et contra oculorum fidem fingi limitem extenſionis et compreſſionis in medio altitudinis AD. Si tamen cetera bene habeant, nihil Fig. 7.

haec

haec animaduerſio morari concluſionem poterit. Sit punctum I in quacunque altitudinis AD parte poſitum: Dederis *Mariotto*, quod poſtulat, compreſſionis eandem eſſe, quae extenſionis, rationem; dederis, quod tacite inuoluit, punctum I eſſe fulcrum extenſionis aeque ac compreſſionis; Perfecta res erit ex voto Viri. Nimirum, ponderis P pars vna S, quae extenſionem praeſtat fibrarum IA ſuper fulcro I, erit $\frac{Q.IA}{3.IF}$, et altera T, quae comprimit ID ſuper fulcro I, erit $=\frac{Q.ID}{3.IF}$: itaque ipſum $P=S+T=\frac{Q.(IA+ID)}{3.IF}=\frac{Q.AD}{3.IF}$, plane vt intenditur.

§. 25. Compreſſionem quidem aliis regi legibus, vulgo credimus. Id tamen non accidit hic omnino incommode. Si enim maior quam pro ipſa compreſſione reſiſtentia eſt fibrae preſſae, pondus T prodit $<\frac{Q.ID}{3.IF}$, non praeter experientiam, qua $P<\frac{Q.AD}{3.IF}$. Etſi igitur vtriusque caſus §. XI. XXIII. aequiualentia non ſubſiſtat, niſi eadem extenſionis et compreſſionis ratio fuerit: non tamen haec aeſtimandi methodus multum ab experimentis abludet.

Fig. 8. §. 26. An punctum I commode pro fulcro haberi poſſit: dubia magis ratio eſt. Equidem fibra lignea in I nullam videtur vim pati, adeoque nec fulcri locum ſubire: nihil tamen hactenus abſurdi ſequitur, ſi ex puncto illo tanquam fulcro computes momenta extenſionis et compreſſionis. Id ita intelligitur. Sit punctum O eiusmodi, vt ſumma reſiſtentiarum tenſionis abſolutarum collecta in centrum O aequipolleat momento ſuo ſummae reſiſten-

ſtentiarum reſpectiuarum ſuper fulcro I: prodibit vectis OIF, cui in O reſiſtentia, et in F pondus S applicantur circa hypomochlium I. Eritque completo parallelogrammo IOHF, et producta HI in K, niſus fulcri I ſecundum lineam IK, et proportionalis lineae IH, ſi reſiſtentiae abſolutae ſint vt OH, et pondus S vt linea HF. Similiter ſit Y centrum reſiſtentiarum compreſſionis, erit niſus fulcri I in linea IG, et eidem proportionalis, ſi ſumma reſiſtentiarum abſolutarum omnium exponatur per YG, et pondus T per lineam IY. Ex quo patet, punctum I ob niſum IN extenſioni aduerſantem, et niſum IF compreſſioni oppoſitum, nec extendi debere nec comprimi, etſi fulcrum ſit tenſionis aeque ac compreſſionis. Certum tamen eſt, illud deorſum vrgeri pro ratione lineae OY.

§. 27. Id obiter animaduertas: 1. Reſiſtentiam quidem fibrarum tenſarum in directione HO eandem eſſe, quae compreſſarum in directione YG ſed 2. momentum compreſſionis vniuerſum longe minus eſſe momento fibrarum tenſarum, et quidem 3 in ratione lineae YI ad IO, hoc eſt ID ad A, ſi eaedem compreſſionis et extenſionis leges fuerint; ſin 4. fibrarum preſſarum reniſus in maiori ratione creſcant, quam reſiſtentiae extenſarum, fore illa quidem in ratione YI ad IO, ſed YI:IO<ID:IA, quod iam ante diximus.

§. 28. Breuiorem videtur *viam* iniiſſe *Vir inſignis*, cuius hoc eſt ratiocinium. Fulciatur trabs in puncto A, vt extendi ſolum ſuperiores fibrae

debeant, nihil comprimantur inferiores. Extendentur ab actione ponderis P fibrae per $\triangle BAF$. Eo facto, fulciatur in F, nec extendi amplius, sed comprimi patiatur: comprimentur ab eadem actione fibrae in $\triangle AFG$. Jam, si sine fulcris trabem sibi reliquisses, statim ab initio in situm FG peruenisset ab actione eadem ponderis P. Igitur vis eadem est, quae fibras $\triangle BSF$ extendit, et fibras $\triangle ASF$ comprimit, cum ea, quae vel extendit fibras $\triangle ABF$, vel
Fig. 9. comprimit fibras $\triangle AFG$. *Atque iterum*: Cum fibra H super fulcro A extenditur ad HK, et super fulcro F comprimitur per KI, perinde est; ac si tensa esset solum per $HI = HK - KI$. Sic et fibra N extensa super fulcro A per NM, et compressa super fulcro F per ML exhibet fibram compressam solum per $NL = ML - NM$. Sed omnes HI et NL efficiunt $\triangle\triangle BSF$ et ASG, non secus atque omnes lineae HK, faciunt $\triangle ABF$, et omnes KI triangulum AFG.

§. 29. Acute id vero, si quicquam aliud. *Vnum* desidero pro mea tarditate. Cum *fulcri* tantus in momentum resistentiae influxus est: vnde constat, id momenti, quod in singulis casibus simplicibus a distantia fulcrorum A, vel F oritur, compensari exacte per vtriusque casus combinationem, sine fulcris factam? Certum est, situm trabis eundem prodire per suppositiones Viri duas sibi succedentes, qui per compositam exit: sed an ideo *momentum resistentiae* idem prodit *remotis*, quae posuit, *fulcris*. Non esse hanc de nihilo solicitudinem, patebit plenius, si eandem ad ratiocinium applices secundum. Di-

ci-

citur: Cum fibra H super fulcro A extenditur ad HK, et super fulcro F comprimitur per KI perinde est, ac si tensa esset solum per HI=HK−KI. Recte id profecto, si praeter spatium extensionis nihil spectaueris. Non licet autem similiter inferre: Momentum fibrae H, super fulcro A extensae, per HK, si demas momentum fibrae KI super fulcro F compressae, aequiualet resistentiae fibrae HI(=HK−KI) extensae sine fulcro. Quodsi igitur recte Vir magnus intulit, *suppleri* ratiocinium dilucidatione noua et potest et debet.

§. 30. Tractemus negotium *sine omni artificio*. Si nullam trabs compressionem patitur, erit A fulcrum extensionis fibrarum in △BAF: eritque nisus, quo fulcrum A vrgetur in directione lineae AK, et proportionalis lineae AK=AH, si pondus P exponitur per AO distantiam centri tensionis §. 26. et resistentia fibrarum absoluta per OH. Tolle fulcrum, et patere, vt compressionem admittat lignum: vtique hic ipse nisus comprimet fibram in A, cumque ea cedere non possit, quin et proxima nonnihil concedat: comprimentur fibrae contiguae omnes, donec resistentia earundem coniuncta aequet nisum, qui fulcro incumbit. Fingamus id accidere, cum pars fibrarum △ASG inclusa sic comprimitur, vt sectio trabis sit FSG. Hic vtique nec A fulcrum erit fibrarum tensarum, nec S. Singulae potius fibrae inter S et A, vel S et G positae fulcri, sed partialis rationem habent, vnaquaeque pro suae compressionis modulo. Fig. 10.

§. 31.

§. 31. Hic vero ſtatim patebit, quoniam minus eſt momentum fibrarum inter S et B tenſarum, quatenus referuntur ad fulcra prope S poſita, quam ad ipſum A: Minus eſſe momentum reſiſtentiae vniuerſae in hoc caſu, quam in priori, quo nulla fiebat compreſſio. Ex aduerſo, quoniam maius eſt tenſionis momentum, quatenus illa refertur ad fulcra prope A poſita, quam ad fulcrum S: igitur momentum totale maius fore, quam ſi ſola ſpectaretur extenſio fibrarum trianguli BSF relata ad fulcrum S. Quodſi igitur omnes hae inaequales ſuſtentationes mutuo compenſentur, fingi poteſt punctum inter S et A poſitum, quod pro fulcro haberi poſſit.

§. 32. Equidem, ſi cognitae eſſent leges compreſſionis et reſiſtentiarum eius: poſſet huius puncti diſtantia ab S vel A definiri: S autem per experimenta capi. Quoniam id non licet: fingi punctum hoc poteſt, v. g. in Z, et inſtrui computus, vt deinde collatis experientiae concluſionibus innoteſcat, quam prope abſimus a veritate.

Fig. 11. §. 33. Sit $AB=a$, $BF=b$, $BS=c$, cognoſcendo c per experimenta. Sit porro $BP=x$, et $BZ=p$, diſtantia hactenus incognita, ſed in momento rupturae conſtans. Erit vis fibrae PM abſoluta (poſita lege Marioti §. 11.) proportionalis ipſi PM. Adeoque $BS:BF=PS:PM$, hoc eſt $c:b=c-x:\frac{(c-x)b}{c}$: et vis totius elementi $PpmM=dx\frac{bc-bx}{c}$, quae ducta in diſtantiam a fulcro Z, hoc eſt in $PZ=p-x$, dat reſiſtentiam reſpectiuam $=\frac{pbc-pbx}{c}$ dx

$dx + \frac{bx^2 - bcx}{c} dx$. Vnde vis totius ſpatii BPMF$= pbx - \frac{pbx^2}{2c} + \frac{bx^3}{3c} - \frac{bx^2}{2}$, et faciendo $x = c$, ſumma totius reſiſtentiae trabis $\frac{1}{2}pbc - \frac{1}{6}bc^2 =$ Pg ex §. 11. vnde fit $p = \frac{6Pg + bc^2}{3bc} = \frac{2Pg}{bc} + \frac{1}{3}c$, et ſi $p = a = c$, vti §. XI. erit Pg$= \frac{1}{3}ba^2$.

§. 34. Sit exempli gratia $c = a - q$ et $p = a - \frac{1}{2}q$ et $q = \frac{1}{10}$ adeoque $c = \frac{9}{10}a$ et $p = \frac{19}{20}a$, fiet Pg$= \frac{7}{24}ba^2$ quod proxime accedit ad id, quod ſupra inuenimus, §. 11. vbi Pg$= \frac{2}{7}ba^2$ hoc eſt $= \frac{14}{49}ba^2$. Cumque conſtet, in experimentis Pg cadere inter $\frac{1}{3}ba^2$ et $\frac{1}{4}ba^2$: poſſunt facile limites aſſignari, inter quos conſiſtere debet q, ſi facias A$z = zs$, quod aut proxime verum erit, aut eiusmodi ſaltem, vt errorem gignere ſenſibilem non poſſit. Si enim feceris $c = \frac{m}{n}a$, prodibit $c = a$, et $p = a$ pro formula Pg$= \frac{1}{3}ba^2$: et $c = \frac{1582}{2000}a$, ſiue $\frac{16}{20}a = \frac{4}{5}a$, $p = \frac{n+m}{2n}a = \frac{9}{10}a$ pro aequatione Pg$= \frac{1}{4}ba^2$. Non poteſt igitur AS maius eſſe, quam $\frac{1}{5}a$, niſi aut methodus noſtra, aut aliquod e ſuppoſitis, feſellerit.

§. 35. Quomodo haec ad experimenta exigi debeant, quidue per illa eruatur, fortaſſis alias dicendi locus erit, cum tandem aliquando patientia noſtra, aut flagitandi importunitas, expugnauerit opificum tarditatem. Suffecerit interea temporis oſtendiſſe, in quo hypotheſes hactenus adhibitae aut deficiant, aut videantur deficere.

DE TRACHEIS PLANTARUM EX MELONE OBSERUATIO

G. B. *Bulffingeri.*

M. Sept. 1729.

Cum nudius tertius (d. 3. Sept. 1729.) *Melonem* plantam tribus maturis fructibus commendabilem in hortulo meo ex terra extraherem, excitauit figura radicum exterior cupiditatem inquirendi in ſtructuram eius. Ea autem oculis ſubiecta *Trachearum forma* adeo placuit, vt eandem per integram perſequi plantam operae pretium iudicauerim. Non enim vbique videas explicite, quae hic diſtincte patent.

Phaenomena

haec ſunt: 1. ſecta transuerſim radix praeter corticem, etc. plurima obtutui foramina obiicit, maiora aut minora, prout radicis fortior portio fuerit. Patent illa nudo oculo facillime. 2. Colliguntur autem in faſciculos quaſi circa axem radicis. Eorum tres vidi in minoribus radicum ſurculis, in maioribus quatuor, eſtque materia in qua conſpiciuntur diuerſa ab ambiente, et durior. 3. Plerique horum faſciculorum denuo in ſuas,et plerumque tres, partes diuiſae ſunt, ſenſibiliter, ſuntque intercapedines repletae materia eadem, qua ambitus. 4. Si plures ſucceſſiue orbiculos examines (ſeu nudo oculo, ſeu armato) foraminum idem ordo eſt, et et numerus. 5. Cum frusta duos, tres, quinque, octo pollices longa et tortuosa abscinderem, licuit et aerem et humores trans illa sugere. 6. Perinde etiam fuit, seu a radice seu caule frusta illa abscinderem; quin imo 7. cum eiusmodi frusta partem radicis et trunci complecterentur, transiit aer, siue per eam extremitatem, quae radix erat, siue per alteram insufflaretur. Iuuat autem fluido immergere extremitatem frusti, vt egredientes ex fluido bullulae transitum aeris ostendant. 8. In trunco seu caule plantae duodecim distinguere fasciculos eiusmodi constanter licet, foraminibus suis insignes; 9. Vacua esse foramina ad sensum patet, maxime si orbiculi inter lumen et oculum ponantur medii. 10. Numerus et ordo et magnitudo foraminum in singulis fasciculis non nihil differre visus est: sed in eodem fasciculo, quem in pluribus orbiculis sibi succedentibus examinaui, differentiam sensibilem nullam vidi. 11. Idem fuit fasciculorum numerus, siue propius ad radicem secaretur caulis, siue remotius. 12. Quin imo idem numerus in ramis; 13. Idem in surculo tendente ad fructum, 14. et idem plerumque numerus cellularum in ipso fructu, saltem vbi perfectus apparuit; namque in aliis decem aliquando aut vndecim numeraui. 15. In pedunculis fructuum plures conspiciuntur quam duodecim, sed ramificationes sunt illorum duodecim, qui ex surculo veniunt, vti videre est, si nudentur vestimento suo fibrae hac ad vsque originem pedunculi. Contra vero 16. in pedunculis foliorum tales fasciculi

culi non nisi nouem apparent, quinque omnino fortiores, ex parte conuexa pedunculi, duo mediocres, et duo tenuissimi in vicinia eius crenae, quae obseruatur in latere folii ad surculum conuerso. 17. Habent illa originem ex nouem fasciculis caulis sibi subiectis; tres enim in parte caulis, qua folium non respicit, sine bifurcatione aut diuisione ad folium tendente, eunt vlterius, et 18. ad nouum folium formandum pergunt, sic, vt folia semper ab alternis generentur fasciculis. 19. Vbi pedunculus in folium expanditur, tres fasciculi medii formant tres costas folii maiores, singuli singulas: sed duae laterales costae formantur reliquis tribus minoribus fasciculis, in quibus tamen aliquando duo tantum, aliquando tres distincti apparent. 20. In singulas costarum ramificationes abit fasciculi praedicti aliqua pars, quousque rem licuit persequi. 21. Illud notabile est, fasciculos eiusmodi continuatos tam in caule, quam in pedunculis foliorum, fibrae alicuius ligneae subalbidae speciem referre: et 22. si diutius continuetur, vt v. g. in ramis tenuioribus, vel in pedunculis foliorum, fieri, vt foramina eorum non amplius sint conspicua, ne quidem optimis si vtare microscopiis. 23. Cum alicubi prope folii insertionem caulis et folium computruerit, distincte licuit fibras hasce, seu fasciculos extrahere, duodecim ex caule, ex folio nouem, diuersae, vt supra diximus, crassitiei. Habebant illae foramina sua satis conspicua. 24. Foramen in medio caulis obuium in radice, et foliis non conspicitur. 25. Circa surculorum

rum origines, etsi mihi nondum satis fecerim, vidi hoc tamen. Esse eo loco, cui interior folii ortus respondet, diaphragma medium caulem occupans, viridiusculum, in quod fibrae caulis facta sui bifurcatione inserantur lateraliter. 26. Tum vero ex eo latere, vbi surculus est, egressae illae formant quasi membranam, qua surculi exortus integitur; 27. Ea autem membrana denuo in duodecim fasciculos colligitur, atque sic, vt ante diximus, pergunt deinceps fasciculi, quorum aliquando 28. Decem tantum, aut vndecim numerantur, donec sese diuidant, qui casu aliquo nimis propinque quasi cohaeserant.

Conclusiones.

Patet autem ex dictis, decidi posthac *de tracheis plantarum* quaestionem.

1. Si trachea est canaliculus continuus, aere solo plenus, et lateribus fortioribus compositus: Sunt vtique trachearum fasciculi, quos hactenus descripsimus. Canales enim vacuos probant phaenomena 4-10. Neque obest 2. in plantis compluribus non posse foramina vel microscopiis detegi; nam propter phaen. 22. credibile est, vel minora esse, vel dum resecantur orbiculi foramina succo obstrui ex fibris contiguis expresso. 3. Videmus, per vniuersam plantae substantiam tracheas istas protendi, magna vniformitate. 4. Includi vero fibris, quas vulgo ligneas vocamus, et ex earundem contextu quasi formari. 5. An ipsae hae fibrae praeter cauitates

hasce aere plenas, ſuccum ferant in aliis minoribus cauitatibus: non facile dixerim; ſunt ad ſenſum multo reliquis fibris ſicciores, et quales apparere debent, quae praeter ſui nutritium non habent ſuccum alium; 6. Reuehere illas ſuccum a plantarum nutritione reducem, coniectura eſt Viri docti apud *Wolſium* T. II. Phyſ. p. 626. Id poſt obſeruationes noſtras non eſt veroſimile. Originem enim coniectationi dedit ſine dubio, quod foramina noſtra non apparerent. 7. An ſitus harum trachearum inter fibrarum viridium et vtriculorum ordines patrocinetur explicationi receptae de eleuatione ſucci nutritii per actionem ſyſtalticam trachearum, in id non inquiram. 8. Foramen in medio caule credo tribui poſſe expanſioni fibrarum viridium, et vtriculorum, qua etiam fit, vt faſciculi in radice collecti diſcerpantur, et e quatuor tripartitis ſiant duodecim. 9. Debemus autem teneritudini plantae et trachearum amplitudini, vt ſine artificio illas detegere et perſequi poſſimus. Ita enim ſe ſponte nobis obtulit, quod difficiliori methodo inquirendum ſibi propoſuit *Chriſt. Wolſius* T. II. Phyſ. p. 639. 10. Intelligimus quoque, quid lignea pars ad nutritionem conferat, ſi in fibris ligneis, non alibi, tracheae ſunt, et cur inſitiones non ſuccedant, niſi ſurculus partem ligneam intret. v. Hiſt. de l' Acad. 1711. p. 56. Namque in ligneis tracheae collocantur fibris, vt igitur cum illis communicent tracheae ſurculi inſerendi, neceſſum eſt, vt eas fibras intrent. Quicquid autem ſit de reliquis nutritionis plan-

plantarum momentis, maneamus II. hac vice in eo, quod ad veritatem *existentiae trachearum* pertinet. Scilicet haec certa et sufficiens obseruationis nostrae vtilitas est, quod posthac *dubium* cessare possit Virorum Magnorum, quod more suo iucunde extulit *illustris Fontenellius*, vbi suam de plantarum nutritione expositionem hisce verbis concludit:

„Si on entroit dans vn plus grand detail, on" y mettroit aussi plus de conjectures, et plus d'in" certitude. On iroit jusqu'aux vtricules, aux in" sertions, *et aux Trachées*, parties des plantes, que" de grands Auteurs, à la verité, ont voulu établir," et *qui pourroient exister, mais qu'il faut avouër,*" *qu'on ne voit gueres avec les meilleurs microscopes,*" *qu'autant qu'on a envie de les voir.* v. Hist. de" l'Acad. 1711. p. 65." Edit. Bat.

DE VENTRICULO ET INTESTINIS.

AUCTORE *Jo. Georg. Du vernoi.*

Artic. I.

DE VENTRICULO.

§. I. Mense Jun. 1729.

In Ventriculo, pulcerrimum opus olim a Se visum fuisse testatur Celeb. *Rhuysch*, hisce verbis; „In Stomacho inuerso nonsolum innumeri oc-" currunt pori visibiles. - - Verum etiam ante " quam stomachus in os inferius exeat, alia Phaeno-"

„mena mihi patefacta sunt, sc. innumerae et minu-„tissimae cellulosae intercapedines quadrangulares, „diuersae magnitudinis, quae analogiam habent cum „istis quae reperiuntur in stomacho vitulino, et „quidem ea parte quae belgice audit *de Kraag*, „sunt tamen longe maiores quam in stomacho hu-„mano. vid. Thes. anatom. 2. As. III. N. 14.

§. 2. Post *Rhuyschium*, ante 4 fere annos, eius Rei mentionem factam fuisse a Viro Cel. *Jo. Dominic: Santorini* animaduerto, qui in praeclaro Obs. anat. Libro, cap. IX. art. 6. mentem suam ita explicat. *Minutissimas, inquit, cellulosas intercapedines quadrangulares, quas praeclariss. Rhuysch in stomachi fundo animaduertit, diligentissime perquisitas, nunquam tamen detegere vel nostris vel alienis oculis valuimus, quas non idcirco diligentiss. Virum vidisse negabimus, quum fortasse nec vbique nec cuique id ipsum saepe varia natura demonstret.* De hocce itaque elegantissimo Naturae opere in cauo ventriculi, *Rhuyschiano scil.* inuento, Obseruationes quasdam rariores, ex vtraque Anatome depromptas modo sum prolaturus.

§. 3. Prima occasio oblata est, in quodam viro *Veneno* extincto, ex quo figura quoque gemini ductus thoracici desumpta fuit, quam in I. Tom. Commentar. Petropolit. videre licet. Postquam Veneni gratia, sollicite stomachum explorassem, multisque lotionibus quasi dealbassem, ecce! in nonnullis locis, Reticulatum opus, minutissimorum filamentorum niueo colore splendentium, mire sese implicantium, ac inter capedines cineritii coloris efformantium, nu-

nudo oculo obſeruare mihi viſus ſum. Id cum admirabili fibrarum contextu in foliis et corticibus quarumdam plantarum conſpicuo, vel cum dorſi manus lineolis fere analogiam habet.

2. In Iuuenis viri ſtomacho, ope microſcopii, quasdam ſimilium cellularum areas obſeruaui, nec non in duobus aliis, in quibus magna ventriculi diſtenſio conſpicua erat. In aliis tamen cadaueribus idem ſucceſſus defuit.

3. Ne autem cauſſae alicui praeternaturali, forte veneno vel imaginationi hocce phaenomenon tribuatur, perpendendum eſt ſimilem nos detexiſſe in ſtomacho *Elephanti* texturam, ſed longe conſpectiorem euidentioremque, ſuper totam ventriculi ſuperficiem extenſam, quemadmodum inter huius Animalis praeparata No. 16. in Ventriculi Elephantini extremitate dextra, in Muſaeo Imperiali id conſpicere datur.

§. 4. Huius itaque admirandae texturae facies in citatis exemplis ſic luculenter nobis oblata eſt. Congeries erat ſubtiliſſimorum, inſtar telae aranearum, viſum pene effugientium filamentorum, niueo colore ſplendentium, ac denique retis in modum facta inuicem implicatione ſummam cauitatis ventriculi ſuperficiem lambentium. Hiſce, frequentiſſimae interiacebant anguſtisſimae intercapedines, ſeu alueoli aut ſpatiola profunditate ad viſum carentia, cinericii coloris, quibus Cel. *Rhuyſch.* nomen intercapedinum quadrangularium affinxit. Mihi omnes haud quadrangulares apparuere, verum irregulares plurimae, quaedam rotundae. Diſtenta et diducta tunica praefata, eae haud minus apparebant. Magnitudo inſtar minimi grani ſabuli. Numerus ineffabilis.

§. 5. Determinare aut diuinare naturam et qualitatem iſtius opificii, et cuinam vſui a natura illud comparatum ſit, haud procliue eſt. An contextus vaſculoſus? quemadmodum prima fronte ſuſpicatus ſum. Sed Scrutator Vaſorum Solertiſſimus *Rhuyſchius* id pro tali non agnoſcit. Notum autem eſt, quanta *Rhuyſchii* ſagacitas fuerit ac induſtria, in eruendis vaſculis minimis ad ſtuporem et inuidiam vsque. 2. Obſeruare minima vaſcula in ſuperficie ventriculi interiore quae cruſta vocatur, contra morem eſt minimorum vaſculorum, quae nusquam nude apparent, verum artis iniectoriae beneficio demum ſub oculos cadunt. An denique corpus reticulare? analogum linguae aut cutis corpori reticulato Id ſane disquiſitione dignum eſt.

§. 6. Subiit aliquando cogitatio forte contextum nerueum eſſe ventriculo proprium, a quo ſenſatio ventriculi immediate oritur. Equidem haud diſſimulandum eſt, Neruorum ad ventriculum aliasque partes tendentium exteriorem magis habitum innotuiſſe hactenus quam vltimos fines, vltima capillamenta modificationesque eorundem in fabrica ſeu contextu nerueae tunicae praefatarum partium in qua omnes nerui congregantur, eorumque neruorum, cum in ventriculo, tum in plurimis aliis partibus, ſingulares ac ſpecificas diſpoſitiones minus perſpectas eſſe. Namque vnum ac idem generale et com-

commune ſtructurae genus in plerisque neruearum tunicarum deſcriptionibus exponitur. Nullum aut perexiguum diſcrimen in earundem conformatione, quoad inceſſum contextumue neruorum annotatum video. Verum ſimplex tela membranacea vaſis ſanguineis picta propter ſentiendi facultatem neruea appellatur, etſi in ea nerui nequaquam appareant. Idcirco ſapienter Ceb. *Rhuyſchius*. *Notaui inquit iamdudum extrema vaſorum ſanguiſerorum ſingulis fere plagis corporis quam maxime differre in ſtructura qua conſtant. Verum etiam didici deinde id ipſum quoque in neruorum obtinere extremis*. Id Naturae profecto valde conſentaneum eſſe arbitratus ſum; ſed quoad *Papillarum* hypotheſin, ea admodum problematica mihi viſa eſt, ſi ad interiores aeque ac exteriores partes corporis Humani extenditur, quoniam vbi ſenſationes partium ac impreſſiones corporum Agentium adeo diſcrepantes ſunt, ibi extremorum neruorum fabricam ſub formis ac ſpeciebus diſtinctis ac ſingularibus animo concipere neceſſe eſt, donec experientia rerum magiſtra contrarium edoceat, id quod in ventriculo futurum vix praeſumo, propter papillarum ſolidam craſſam ac rudem indolem, quae loca amat pilis, pinguedine, corpore reticulato aſpera tendineaque, vti ſunt Lingua et Cutis; tum etiam propter memoratum contextum in ventriculo detectum, quem vt Organum immediatum conſidero ſenſationum ac effectuum admirandorum, quos in Homine ſeu ſano ſeu aegroto peragi videmus.

Artic. 2.
DE INTESTINIS.

§. 7. In verſo inteſtino vaſisque ſanguiferis probe diſtentis, aufer tunicam nerueam, ſeu proſpice, vt caetera loco haud moueantur: Sic obſeruabis iuga ſeu valuulas inteſtinales conſtanter apparere, ſicuti ante detractam nerueam tunicam: Viceuerſa eandem planam reddi rugis euaneſcentibus. Hocce Experimento didici, 1. Sedem veram valuularum inteſtinalium in tunica nerueа aut villoſa perperam ſtatui. 2. Tunicam nerueam praefatas Valuulas haud efficere, ſed ſolummodo inueſtire, iisque vt veſtimentum ſeſe accommodare, vnde eius longitudo oritur. 3. Intelligitur quoque ratio ſeu cauſſa, cur annotante *Rhuyſchio* Valuulae ſaepe concidant ac interdum obliterentur Homine aegrotante.

Pinguedo duobus in locis intra inteſtini tunicas incluſa obſeruatur: Namque 1. ſub tunica extima, quae lamellarum meſenterii productio ac continuatio eſt, prouti Tom. I. Commentar. Petrop. indicaui, ſtratum apparet celluloſo-adipoſum, tenue, in modum telae complanatum, cuius ſimiliter originem a meſenterio eiusque ſepto intermedio c.l. repetii, quod poſtquam ad inteſtinioram pertingit, eo nequaquam ſubſiſtit, ſed inter extimam et muſcularem tunicam ſerpendo, ſpeciem tunicae nouae efformat: Hanc ab Inuentore *Rhuyſchio* tunicam appellabimus celluloſam *Rhuyſchii*, quae ad praeſens modo inſtitutum haud proprie pertinet, niſi qua-

quatenus ea connexionem fortaſſis obtinet cum alio ſtrato pinguedinis, ad formationem valuularum inteſtinalium proxime inſeruiente;

§. 9. Iſta pinguedo, a praecedente ita diſtat vt inter eas duo alia inuolucra, vnum carneum ſeu musculare, alterum vaſculoſum ex capacibus amplisque vaſis ſanguiuehis arcuatis conſtans, locum occupent, ſuper quae vaſa praefata pinguedo eminet ac vna cum ipſis iuga ſupra memorata efformat, quibus neruea tunica poſtremo agglutinata ac telae inſtar impoſita eſt: Tres itaque diuerſi generis partes ad fabricam valuularum neceſſariae ſunt. 1. Vaſa maiora arcuata ſeu fornicata. 2. Adeps ſeu pinguedo. 3. Tunica neruea. Quare vbi vaſa arcuata deficiunt, in interſtitio ſcilicet duarum valuularum, ibi neque pinguedo neque neruea tunica tumorem ſeu iugum excitant, ſed complanatam ſuperficiem exhibent. Rurſus, quando vaſa nimis compreſſa aut vacua ſunt defectusque pinguedinis adeſt, neceſſe eſt eo in caſu deprimi iuga, ſicuti conſideranti patet. Poſtremo obſeruaui in nonnullis cadaueribus, ab alia cauſa deletas fuiſſe Valuulas, quando nimirum Aër cellulas adipoſas ita inflat et expandit, vt tumore exinde enato cauitas inteſtini fere occludatur. Sed de hocce Tumorum inteſtinalium genere alias.

EXPERIMENTA
CORAM SOCIETATE INSTITUTA IN CONFIRMATIONEM THEORIAE PRESSIONUM QUAS LATERA CANALIS AB AQUA TRANSFLUENTE SUSTINENT.

A
Daniele Bernoulli Joh. Fil.

Tab. XVII. Quaenam ſit preſſio aquarum in vaſe ſtagnantium a remotiſſimis temporibus fuit omnibus notum. Nemo autem, quantum ſcio, preſſionem aquarum per canales fluentium adhuc recte definiuit: fuerunt nonnulli, qui huius argumenti veluti in tranſitu mentionem facientes putarunt, latera canalium ab aquis ſiue ſtagnantibus ſiue transfluentibus perinde premi, ſi modo eadem vtrobique fuerit aquarum altitudo: ſed falſi ſunt. Interim argumentum mihi viſum fuit digniſſimum, quod omni attentione examinaretur. Inde enim pendet vera aeſtimatio quantitatis aquae, quae per tubulos riuis lateraliter implantatos, erogatur, qua de re *Frontinus* egit et poſt eum multi alii: pendet etiam requiſita aquaeductuum firmitas, multarumque quaeſtionum ad motum fluidorum in corpore animali pertinentium ſolutio et quae huiusmodi deſideratorum ſunt alia. Mox autem animaduerti, problema noſtrum ſolui prius non poſſe quam motus aquarum recte definitus fuerit, et ita quidem definitus vt ſingulis momentis a quiete ſeu motus ini-

initio vsque ad datum terminum maximas accelerationes innotescant: quae ratio est, quod ad tempora nostra vsque latuerit ista, quam fluida per canales mota exerceant, pressio; neque illam ego detecturus fuissem, nisi prius in theoriam generalem *de motu aquarum per canales quoscunque fluentium* incidissem, quam videre est in *Comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. II. pag.* 111. Ope istius theoriae Staticam fluidorum motorum adornaui integram, cuius specimina quaedam hic apponam ceu exempla experimentis coram societate confirmata: Neque enim angusti limites huiusmodi Dissertationibus Academicis praescripti id aliter permittunt atque propterea malui omnia, quae in res aquarias feci meditata, in vnum congerere tractatum.

Finge igitur fistulam cylindricam castello amplitudinis veluti infinitae et aquae plenae horizontaliter implantatam, eiusque orificium externum digito obturatum puto: ita vides singulas fistulae partes secundum regulas ordinarias toti aquae altitudini conuenientes pressum iri. At vero cum remoto digito aquae per fistulam effluere incipiunt, mox diminuetur aquae pressio, imo tandem tota euanescet: neque tamen mutatio ista in instanti fiet, praesertim si longior fuerit fistula: dum demum tota euanescet, cum aqua omnem quam acquirere potest velocitatem habuerit; Id vero fit post tempus, si accurate loqui velimus, infinitum, quamuis tam celeriter acceleretur aquae motus, vt dicto citius tantum non totus, qui oriri poteſt, adſit, niſi aquae-ductus caſtello praelongus inſertus fuerit.

Si vero aquae non pleno orificio per fiſtulam erumpant, aquarum preſſio non omnis tolletur, etiamſi aquae tota ſua velocitate per fiſtulam transfluant.

Non attendemus ad illas preſſionum mutationes, quae fiunt a fluxus initio, donec aquarum transfluxus cenſeri poſſit aequabilis: dicemus ſaltem de vltima illa preſſione quae effluxui aequabili conueniat: impedimentorum autem, quae effluxum aquarum per fiſtulam caſu retardare poſſunt, veluti adhaeſionis aquae ad latera tubi, contractionis venae effluentis a *Newtono* obſeruatae (quae pariter caſualis eſt totaque vitari poteſt) aliorumque ſimilium nullam rationem habebimus.

Fuerint iam amplitudines fiſtulae eiusque orificii aquas emittentis vt m ad n; altitudo aquae in caſtello ſupra fiſtulam $=a$: intelligantur aquae pleno orificio totaque ſua velocitate, quae dictae altitudini a conueniat, effluere; preſſio autem aquae obturato orificio ceu proportionalis altitudini aquae indicetur per a: dico preſſionem aquae per fiſtulam transfluentis fore aequaelem $\frac{mm-nn}{mm}a$, atque proinde nullam ſi fuerit $m=n$, id eſt, ſi fiſtula tota fuerit aperta.

Vt iſtam fluidorum motorum Staticam experimentis confirmarem, vſus ſum arca lignea, cuius latitudo erat vnius pedis longitudo trium pedum, alti-

altitudo quatuordecim pollicum: hanc aqua impleui eiusque parti infimae fiſtulam accurate cylindricam ex ferro fabricatam infixi horizontaliter: Ita autem factus erat tubus iſte ferreus. Longitudinem nempe habuit AB 4 poll. 2 lin. Angl. diametrum BC 7. lin. in medio tubus foraminulo *m* erat perforatus ibidemque tubulus DE pariter ferreus ſex lineas longus ac ſesquilineam in diametro habens afferruminatus erat, ita vt foraminulum *m* in medio baſis foueret. Huic poſtmodum tubulo impoſui tubum vitreum aequabilis amplitudinis vt apparet in figura tertia, quae modum totius experimenti indicat. Porro tria opercula confieri curaui tubo ferreo adaptata, foramine diuerſae magnitudinis pertuſa: tale operculum repraeſentatur figura ſecunda. Fig. 1.

Hiſce omnibus coniunctis cum in modum quem oſtendit figura tertia factoque ne aqua per alias rimas quam aperturam in BG effflueret, obturaui orificium in BC, tumque obſeruaui in tubo vitreo verticulariter poſito, punctum *n* ad quod aquae aſcendebant, idque filo ſericeo circumuoluto notaui: prius autem exploraueram virtutem capillarem iſtius tubi vitrei hancque inueneram quinque linearum, ita vt tubo aquae verticaliter immiſſo differentia inter vtramque ſuperficiem aquae eſſet quinque linearum: propterea punctum *n* ſupra ſuperficiem EF eleuatum fuit totidem lineis, hincque in calculo quaeuis altitudo D*n*, Dg quinque lineis diminuta cenſenda eſt. In ſingulis experimentis arca aquis ita plena conſer- Fig. 2. Fig. 3.

 ua-

uata fuit vt altitudo AF effet 9 poll. 7 lin. altitudo autem D*n* 10 poll. His omnibus ita ad experimentum praeparatis, tunc aperto orificio in BC aquis effluxus concedebatur et protinus defcendit aqua in tubo vitreo, veluti ex *u* in *g*, quem locum *g* rurfus alio notauimus filo fericeo, antea tubo circumuoluto. Et fic denique talia cepimus experimenta.

Experimentum 1. Cum diameter foraminis in operculo BC effet $2\frac{1}{5}$ lin. fuit defcenfus *ng* tantillo maior vna linea, ita vt nulla differentia inter theoriam et fucceffum experimenti obferuari poterit.

Experimentum 2. Affumto alio operculo in quo diameter foraminis erat $3\frac{2}{5}$ lin. aut paululum maior defcenfus *ng* obferuatus fuit fex linearum cum duabus tertiis plane rurfus vt theoria indicat.

Experimentum 3. Adhibito tertio operculo, in quo diameter foraminis erat quinque linearum aut aliquantulum minor: defcenfum *ng* obferuauimus 28. linearum. Vi theoriae debebat effe circiter 29 linearum nec enim foramen omnino quinque lineas in diametro habere vifum fuit. Differentia paruula tribuenda eft impedimentis, quae aqua in transfluxu per fiftulam patitur, maioribus quam in praecedentibus experimentis ob auctum motum intra fiftulam.

Experimentum 4. Denique nullo appofito operculo aquas pleno orificio effluere fiuimus, tuncque omnis fere aqua è tubo vitreo egreffa fuit: pars tamen aliqua remanfit, quam deprehendimus octo lineas altam. Earum autem quinque tribuendae funt ſunt virtuti tubi capillaris: tres reliquae debentur impedimentis, quae aqua in transfluxu à D vsque ad B offendit.

Sic igitur experimenta ad amuſſim cum theoria conueniunt. Inde autem non difficile eſt praeuidere, fieri poſſe vt latera fiſtulae nonſolum non premantur verſus exteriora, ſed et vt verſus axem fiſtulae introrſum comprimantur: Id autem edoctus ſum hoc alio experimento.

Experimentum 5. Loco tubi cylindrici AB adhibui conicum, cuius orificium externum erat maius orificio interno, ſimulque vſus ſum tubo vitreo incuruato, qualem oſtendit figura 4. Et cum ante fluxum, aqua haeſit in tubo vitreo in *n*, deſcendit in eodem tubo aqua vsque in g, cum aquae effluerent per tubum conicum; fuitque punctum g infra D: indicio compreſſum fuiſſe durante fluxu tubum conicum. Sic his autem caſibus impedimenta motus ſunt inſignia, quae faciunt vt velocitates aquae in orificio externo admodum minores ſint, quam quae reſpondent altitudini aquae: hancque ob rationem altitudo puncti D ſupra g tanta non fuit quanta alias futura fuiſſet: fuit tamen aliqua. Fig. 4.

Similem effectum alio obtinui modo, ſed admodum notabiliorem; experimentum hoc alterum ſubſequente anno coram Academicis inſtitui; praeſente Sereniſſimo Portugaliae Principe *Emanuele*.

Experimentum 6. In figura 5. repraeſentat ACFB cylindrum, in cuius fundo implantatus erat tubus conicus DGHE; hicque ad latus habuit paruulum Fig. 5.

lum tubulum in *l*, qui reciperet extremitatem tubi vitrei incuruati *lmn*: altitudo CA erat 3 poll. 10 lin. E*l* 4 lin. *l*H 2 poll. $9\frac{1}{2}$ lin. amplitudo tubi conici in *l* erat ad amplitudinem orificii GH vt 10 ad 16: altitudo *ln* erat 5 poll. 6. lin. eiusque orificium *n* erat aquae in vasculo M ſubmerſum.

Appoſito digito orificio GH impletoque vaſe ſtillabunt aquae per tubum vitreum *lmn* in vas M: remoto autem digito et effluentibus iam aquis per GH, motu reciproco aqua ſponte ex vasculo M aſcendit per tubum *nml* et vna cum reliquis aquis effluxit per GH, donec totum vaſculum M euacuatum eſſet. Affundebantur autem ſuperius continue aquae vt vas plenum ſeruaretur. Si digito pars orificii GH obtegebatur, facile erat efficere vt pro lubitu aquae in tubo vitreo *lmn* ſurſum deorſumve mouerentur. Notabile viſum fuit iſtud experimentum, quod vaſculum M multo humilius quam orificium GH poſitum erat.

Inde apparet ratio, cur fumus per caminum aſcendens nonſolum non exeat per aperturas, quas facere ſolent in lateribus camini, ſed et aërem magno cum impetu poſt ſe trahat: Notandum autem eſt latera tubi DGHE comprimi interiora verſus, etiamſi cylindricus fuerit iſte tubus et caminum tubum eſſe inuerſum fumumque idem quod fluidum ſua natura altum petens.

Praeter ea, quae ad hanc fluidorum motorum ſtaticam pertinent, alia ſunt quae aliam theoriam poſtulant: Vbique autem motus aquarum prius recte eſt

eſt definiendus, quam ſententia ferri tuto poſſit de earundem preſſione: quod vt exemplo alio illuſtretur, conſiderabimus cylindrum verticaliter poſitum amplitudinis quaſi infinitae, qui in medio habeat diaphragma horizontale, in parte inferiore autem fundum pariter horizontalem: fuerint tum diaphragma tum fundus foraminibus pertuſa ſiue aequalibus ſiue inaequalibus. Si cylindrus iſte aquis plenus ſit orificiumque inferius obturetur perſpicuum eſt ſingulas cylindri partes premi ſecundum regulas ordinarias: Sed ſtatim atque effluere incipiunt aquae etiamſi foramina infinite parua cenſeantur ratione amplitudinis cylindri, aliam ſentient preſſionem partes cylindri, quae infra diaphragma ſitae ſunt: ſaepe etiam partes diaphragmati proximae introrſum prementur; quae vero ſupra diaphragmata poſitae ſunt, ſuam preſſionem conſeruant.

Ita quoque ſi in A aliud operculum ſingatur, alia erit preſſio in latera tubi AC et alia quoque velocitas aquae in BC effluentis. Haec vtcunque compoſita videantur, non ſunt tamen ſupra theoriam noſtram, ope cuius facile eſt et preſſionem et velocitatem definire: experimenta autem huius quoque rei accepi plurima, quae ſemper theoriam animo conceptam confirmarunt: Quia vero coram ſocietate inſtituta non fuerunt, eorum recenſioni hic non immorabor. Fig. 3.

ANAMORPHOSEOS POLYEDRICAE CONSTRUCTIONIS METHODUS VERA ATQUE CERTA, NOTATIS FALSARUM MANUDUCTIONUM PASSIM PROPOSITARUM ANOMALIIS OPTICIS.

Joh. Georg. Leutmann.

§. 1.

Tab. XIIX. et XIX. Exhibui Ao. 1726 in Feſto CATHARINAE, Imperatricis noſtrae Potentiſſ. Protectricis Academ. Clementiſſ. piae memoriae, Onomaſtico Sacro, Anamorphoſin Polyedricam, qua Nutrici Indulgentiſſimae gratulabatur Academia obſeruantiſſima ſuamque deuotionem humillimam votis declarabat.

§. 2. Hanc in praeſenti Diſſertatione recenſere, et quae ad ſtructuram tam externam quam internam notatu digna videbuntur explicare conſtitui. Simulque indicabo erroneas Methodos, quibus nobilis huius inuenti difficilis redditur elaboratio et plane impoſſibilis. Methodum deinde veram atque genuinam, et enchireſes conſtructionis additurus.

§. 3. Huius Anamorphoſeos machinae atque ſtructurae facies externa exhibebat aſſerculum 28 $\frac{1}{2}$ dig. decimal. pedis Rutenici longum, latum 7 dig. ſpiſſum 1 $\frac{1}{4}$ digit.

§. 4.

§. 4. In anteriori afferculi extremitate, erectum eft fulcrum ad angulos rectos, et 3 $\frac{1}{2}$ digitos ab hoc diftat adhuc alterum tale priori fimile. Suftentant haec tubum ex bractea ferrea ftanno obducta confectum 10 $\frac{1}{2}$ digit. longum, cuius diameter amplitudinis 18 lin. aequat. Horizontalis eft eius fitus, et cum planitie afferculi parallelus, diftat ab ea 6 $\frac{1}{2}$ digit.

§. 5. Tubi anteriori orificio infertum eft operculum in centro foraminulo 1 $\frac{1}{2}$ lineas in diametro amplo perforatum. Pofterius tubi extremum recipit capfulam vitro polyedrico inftructam.

§. 6. In altero afferculi extremo erecta eft tabula alba perpendicularis, planitiei polyedri è diametro oppofita, ita vt axin ex centro polyedri per centrum tabulae tranfire concipiatur.

§. 7. In medio tabulae picta eft imago Imperatricis, viuis coloribus, fparfis circa illam variis floribus, vario fitu, flagrantibusque coloribus vifum delectantibus. Tabula 12 dig. decimal. Rutenicos et alta et lata erat, Effigies in medio pofita campum replebat 4 digit. in diametro aequantem.

§. 8. In fuperioribus tabulae angulis confpiciebantur duo clypei, ceruleo colore tincti, et ornamentis pictis fepti, infcriptionem et dedicationem exhibentes;

In vno clypeo conſpiciebatur dedicatio:

PALLADI RUSSICAE
CATHARINAE SAPIENTI
POTENTISSIMAE CLEMENTISSIMAE,
IMPERATRICI
PIAE FELICI AUGUSTAE.

In altero extabat gratulatio:

ONOMASTICUM
SOLENNITER, VTINAM SAEPIUS,
CELEBRANTI,
MATRI INDULGENTISSIMAE
ANAMORPHOSI POLYEDRICA
GRATULATUR
ACADEMIA St. PETROPOLITANA.

§. 9. In inferiore tabulae parte expreſſa erat charta quaſi volans et vento agitata, quae ſequentem continebat applicationem Anamorphoſeos:

EX FLORIBUS NOMEN ADMIRABILE.

Tota machina lacca rubra et auro diſtincta erat conſpicua.

§. 9. Haec omnia eleganter adornata, vividis coloribus delectabant viſum intuentium, et nudo oculo tabulam contemplantium.

§. 10. Si vero per tubum polyedro inſtructum hanc tabulam intuereris tunc omnis pictura euaneſcebat, ita vt et imago Imperatricis centrum tabulae occupans, et centro vitri directe oppoſita, viſum ſubterfugeret, et apparebat tabula alba nihil niſi nomen Auguſtae CATHARINA IMPERATRIX inſcriptum ſiſtens, caeteris cunctis inconſpicuis.

§. 11.

§. 11. Verſatilis erat tabula et axi perpendiculari praedita, quae verſa aliam et ſimilem fere exhibebat figuram niſi quod loco effigiei, Aquila biceps, Inſigne Magnae Ruſſiae, eſſet picta, floribus cincta etc. Clypei ad angulos ſuperiores poſiti continebat ſequentem inſcriptionem:

Vni inſcriptum erat:

FORTUNAE RUSSIAE
IMPERANTE
CATHARINA SAPIENTE,
FLORENTI,
ET
CONSTANTER DURATURAE,

Alteri:

FESTO SACRI NOMINIS DIE
VOTO
PER
ANAMORPHOSIN CONSPICUO
APPLAUDIT
ACADEMIA St. PETROPOLITANA
ANNO MDCCXXVI.

Chartae volanti inferius pictae inſcriptum erat:
FLORENS CONSPECTUS IMPERII RUTENICI.
Per Polyedrum vero viſa prodibat tabula alba, in qua VIVAT erat expreſſum, caeteris cunctis iterum ſeſe occultantibus.

§. 12. Haec ad formam externam machinae exprimendam faciebant, internam artificialem nunc etiam explicabo.

§. 13. Polyedri ſemidiameter erat 1 dig. $7\frac{2}{3}$ lin. Eius craſſities 7 linearum. Eleuatum latus continebat 54 plana inclinata, quorum nouem ad centrum ſita, et cuſpidem vitri centralem conſtituentia, ſtellam egregie radiantem repraeſentabant, reliquis planitiebus inferius ſeptam. Alterum latus erat planum.

§. 14. Tubus, in fulcris latis, ex aſſerculo factis, firmatus, per laminas ferreas traiectus eſt, fulcris inſitas, duabus affixas cochleis, ſcil. ſuperius et inferius, ad ductum diametri foraminum tubum recipientium. Reliquo ambitu laminarum non affixo, ne coëunte a ſicciditate ligno, aut ab aere humido dilatato, ſitus tubi vitietur id quod figurae repraeſentandae maxime nocet, totumque artificium plane perdit.

§. 15. Eandem cautionem adhibui in firmanda tabula picta, eamque et ſuperius et inferius in medio aſſerculi, hanc ſuſtentantis, affixi, et ſic contractio et dilatatio aſſerculi ſitum eius vitiare non poteſt.

§. 16. Diſtabat vitri latus planum a tabula picta 14 dig. decimal. et contemplationi ſiſtebat circuli campum cuius diameter erat 10 dig. 5 lin. areolas 54 in ſe continentem, planorum vitri inclinatorum figuras in plano proiectas repraeſentantes, et planitiebus vitri propter radios dilatatos, maiores, et propter decliuem eorum ſitum alteratas.

§. 17. Literae per polyedrum apparentes ex caulibus atque foliis florum pictorum ſeſe componebant, ita vt particulae eorum nonnullae literas formarent reliquis eorum partibus areolas non ingredientibus, inconſpicuis manentibus, ſicut et cuncti radii picturae, qui areolas non tangunt, ad viſum peruenire non poterant. Hinc in medio tabulae ma-

magnum tale ſpatium remanebat inconſpicuum, quod ad effigiem recipiendam erat deſtinatum.

§. 18. Haec ſunt ea quae ad internam machinae conſtructionem intelligendam faciunt.

§. 19. Arbitrabantur nonnulli, elaborari quidem poſſe eiusmodi anamorphoſin literas repraeſentantem, ſed impoſſibile fere eſſe effigiem tali deformatione et reſtitutione depingere, quae ſimilitudinem perſonae alicuius exprimeret. Ideoque vt et in eo artem vindicarem, opus aggreſſus ſum et illud feliciter praeſtiti.

§. 20. Nempe Ao. 1729 Effigiem noui Imperatoris PETRI II. nunc piae memoriae, anamorphotice depinxi et egregie ad viuum expreſſi, in tabula aenea, eamque in publica ſolennitate Academica exhibui, atque oratione de hac elaboratione habita explicaui.

§. 21. Conſpicitur oculo nudo in medio tabulae aquila biceps coronata, inſigne Imperii Rutenici, ſceptrum et globum Imperialem tenens. In medio inferiore tabulae pictum eſt vas quaſi caelatum et egregie decoratum, in expanſione medii ventris ad vtrumque latus duo ſimulacra ſemi-expreſſa habens pro ornamentis. Ex hoc vaſe prodit Laurus, cuius rami ſe diffundunt circa aquilam, et partes picturae, effigiem conſtituentes, tanquam fructus ex ramis habent dependentes. Circa Laurum inſignia Regnorum Rutenico Imperio ſubiectorum collocata ſunt Aſtracanenſis, Caſanenſis, Siberici etc. Infra vas chartae volanti inſcriptum cernitur. VIVAT PETRUS II. IMPERATOR. §. 22.

§. 22. Per polyedrum vero inſpicienti apparet in tabula alba effigies Imperatoris PETRI II, pie memoriae, apprime ad viuum expreſſa, faſcia caerulea Ordinis St. Andreae ab humeris eius dependente, caeterum trabeati et Lauro in capite cincti. Ad dextram menſa in qua corona et ſceptrum collocata conſpiciebatur. Reliquis picturis, Lauro, vaſe, et inſignibus Regnorum vna cum Aquila, plane inconſpicuis. Et hac ratione praeſtiti quod multi impoſſibile iudicabant.

§. 23. Quod itaque ad Anamorphoſeos huius elaborationem attinet, totum proceſſum hic apponendum duxi, quanquam illum in tractatu aliquo Optico germanice a me edito accurate et fideliter propoſui vid. Leutmann Anmerckungen vom Glaß-ſchleiffen, Wittenberg 1719.

§. 24. Recenſebo tamen prius adinata nonnulla, ab omnibus fere Opticis pro poſſibilibus, et in praxi ad Anomorphoſin elaborandam idoneis propoſita, et in publicis eorum ſcriptis reperiunda. Hos vt inanes conatus ſucceſſu vtique deſtitutos indicabo.

§. 25. Quotquot itaque deformationis, per vitrum polyedricum reſtituendae, methodum tradiderunt, et mihi noti ſunt, vnanimiter fere contendunt, ſitum atque figuras planitierum vitri, quarum

---

Ad §. 25. vid. Joh. Chriſtoph. Sturm Matheſ. Juv. part. II. p. 202 ff.
Leonh. Chriſt. Sturm Matheſ. part. IV. p. 152.
Joh. Mich. Conradi, Optices p. 99.
Pater Schottus et alii qui mihi nunc ad manus non ſunt.

rum areolas in tabula proiectas, exhibet lampadis lux, foramini tubi polyedrum continentis praeposita, esse primo in tabula stylo circumscribendas atque signandas accuratissime, deinde colligendas et componendas in charta aliqua, vt tota figura areolarum, seu totum systema, sistat vitri polyedrici delineationem atque imaginem in charta plana expressam.

§. 26. Sed impossibile atque inane hoc est praeceptum, et conatus plane irritus. Situs enim decliuis planitierum vitri aliam pingit figuram, quam exhibitura essent plana, si ponerentur planitiei tabulae parallela, id quod contemplatio Geometrica et Optica facile docebit, experientia confirmante.

§. 27. Commisso iam vno errore, fieri non potest, quin plures sequantur. Iubet proinde erronea haec methodus, imagines aut verba deformanda, figurae huic in charta consignatae inscribere, deinde chartam dissecare ad ductum linearum areolas circumscribentium, et tandem frustula illa dissectae figurae acreolis in tabula notatis imponere, et agglutinare, tunc rem esse confectam, et imaginem seu literas deformatas restitutas, vt compositae prodeant, et integrae ad desideratam Anamorphosin producendam.

§. 28. Facilis et iucunda imo et breuis haec esset via, in re tam intricata difficili atque alias laboriosissima ad optatum finem obtinendum, si modo euentus desideratus responderet labori huic non adeo magno et iucundo.

§. 29. At ex antea dictis haec institutio facile tanquam frustranea deprehenditur. Non enim lux lampadis fines lucidarum areolarum exacte determinat, vt excisae cum planitiebus vitri concordent. Et quod maximum, si ex tabula secundum magnitudinem angulorum et laterum singulae magno cum labore in chartam transferantur areolae, non tamen cohaerebit figura, sed hiatus conspicuuntur areolas ab inuicem disiungentes, quia eleuata vitri figura, et ab illa proiectae areolae, si in plano repraesentantur, maius spatium occulpant, et dilatantur quae antea erant coniunctim eleuatae, acuminatae et conuexae cohaerebant. Hinc labor anxie institutus irritum dat successum. Id quod propria experientia magna cum indignatione didici atque expertus sum.

§. 30. Quandoquidem vero nonnulli Optices magistri cognouerunt, quod areolae in tabula omnino maiores producantur planitiebus vitri polyedrici, adhuc breuiori methodo, ex eorum scil. sententia, et aptiori rem aggrediendam tradiderunt: Iubent enim, vt longitudo vnius areolae in tabula proiectae, vt et latitudo eius exacte mensuretur, longitudo pro radio circuli in charta ducendi assumatur, quo ducto tot ei areolae aequales inscribantur, quot primus ambitus et series planitierum polyedri in se comprehendit. Hunc deinde laborem ad alteram

Ad §. 30. vid. Jean Franc. Niceron de la perspectiue curiose, et ex eo Christ. Gottlieb Hertels vollständige Anweisung zum Glasschleiffen. p. 125 ff.

ram feriem areolarum effe applicandum, et fic productam putant, totam figuram polyedri areolas in tabula ampliatas referentem. Huic deinde infcribi deformandam imaginem poffe, et diffectas eius atque excifas tandem areolas tabulaeque agglutinatas anamorphofin putant effe repraefentaturas.

§. 31. At, iisdem cum antecedenti haec manuductio laborat falfis praefuppofitis. Aggreffum enim hac ratione opus, fpe fua fruftratum reddit artificem, mentemque falfis hypothefibus confundit, vt nifi ad principia Optices atque Geometriae confugiat, errorisque fundamentum quaerat ex eisque errorem cognofcat, laffetur atque a coepto opere deterreatur.

§. 32. Compofitae enim hac ratione areolae et ad magnitudinem primae quaefitae atque inuentae delineatae, non replebunt totum circulum, fed magnum relinquent hiatum in figura, ex caufis §. 29 adductis. Aut fi circulus prius in partes aequales, polyedri planitiebus numero refpondentes, lineis fuerit diuifus, vt fingulae per longitudinem areolarum tranfeant, eademque iis cum proiectis in tabula detur latitudo, tunc nulla areolarum cohaerebit cum vicinis, fed diftabunt inuicem, ineptae hac ratione ad infcriptionem imaginis. Huius rei caufam fuppeditabit confideratio in Geometria et Optica fundata.

§. 33. Nullam itaque aliam mihi cognitam habeo methodum, praeter eam quam in citato libello meo Optico fideliter tradidi, ſaepiusque certam expertus ſum, cuius momenta hic ſincere exponam:

1. Quaeratur quantam diſtantiam polyedrum a tabula alba ferat, vt areolae prodeant ad proportionatum ſitum, non nimis inuicem diſtantes, neque admodum inter ſe propinquae.

   Fiet id ope lampidis foramini operculi tubi praepoſitae, quemadmodum Optici vulgo id recte docent. Tubus ille ſit ductilis, vt vera proportio et tubi, et diſtantiae tabulam inter et vitrum, et ſitus areolarum commodus innoteſcat.

2. Circumſcribantur areolae in tabula lucidae plumpo ſcriptorio, ſitusque lampadis ſedulo conſeruetur idem, qualis in prima delineatione erat datus. Quanquam enim fines areolarum lucidarum hoc modo exacte determinari nequeant, propter penumbram, locus tamen deſignabitur in quem cadunt.

   Si vero alicui animus eſt accurate eas conſignandi, poterit is hoc exactiſſime praeſtare, ſi tenue lineale nigum, vel ei ſimile ex charta duriuscula confectum, ad fines areolae, in loco maxime tenebricoſo, ex lampadis radio lucido, confuſe indicatas, de die in loco luminoſo ad tabulam ope cerae applicet, deinde per polyedrum, admoto ad foramen operculi oculo, obſeruet ſitum linealis, illud tam diu mouendo, vsque dum in eum locauerit ſitum, vt fines

nes areolae in vno latere exacte tangat, et ſpatium areolae nec intret, neque lineale plane diſpareat, ſed areolae fines tantum ſtringat et terminet. Idque ad cuncta areolae latera continuetur, et lineae ducantur, tunc circumſcripta erit areola lineis. Hinc radii, ex ſitu inclinato planitiei vitri prodeuntes, et in tabulam perpendiculariter erectam incidentes, terminabunt ſpatium quod veram figuram areolarum lucidarum indicabit. Simulque innoteſcet, quantum differant planities vitri polyedrici a figura areolarum in tabula expreſſarum, et ex eo indicari poterit de antea commemoratarum methodorum impoſſibilitate.

3. Conſignatis areolis eligatur earum inferior in tabula, quae per polyedrum viſa, apparebit ſuperior, et in ea, aut alia commoda, fiat initium delineationis iconis deformandae. Huius imaginis ductus atque lineae, ſi vnam areolam tranſiuerunt, connectantur cum alia areola, quae ope baculi tenuioris et acuminati vt et denigrati erit inueſtiganda, perſpiciendo per tubum, vbi ſimul areolae limites innoteſcunt, atque locus inuenitur picturae conueniens.

4. Abſoluta tota deformatione rudi, correctio typi inſtituatur ad prototypum, transſpiciendo ſemper per foramen tubi, tonec cuncta recte cohaereant et figuram prototypi exprimant.

Dico hoc modo rite deformatam fore imaginem in tabula et restitui per polyedrum eius formam.

5. Tandem in tabula decorationes, ita vt cum deformata imagine coalescant, illam quasi absorbeant, aliam figuram metiendo et ante oculos ponendo nudos, quam per polyedrum contemplata prodit. Caueat tamen artifex ne aliquid de exornationibus areolas consignatas et limitibus circumscriptas intret, sed maneant illae in interstitiis areolarum. Et si contingat vt aliqua areolarum ab imagine vacua remaneat, huic ne aliquid de ornamentis inscribatur sedulo inuigilet.

§. 34. Si polyedrum acuminatum est, spatium aliquod vacuum in medio tabulae remanebit, dispositioni magistri artis relictum, quicquid enim in eo pingitur, visui per polyedrum se subducit et disparet.

Si vero centrum polyedri occupat planum, tunc et planum illud centrale in tabula areolam efficit, quae per polyedrum in oculos incurrit, et praeter interstitia areolarum nihil remanebit inconspicuum. Caetera vsus atque praxis docebit.

§. 35. Tandem sciendum: vitrum polyedricum depressioris formae inidoneum esse ad deformationem, quia longiorem requirit distantiam inter vitrum et tabulam, propinquior enim areolas aut confundit aut interstitia admodum angusta producit; lon-

longius autem remotum a tabula polyedrum, obſcuram repraeſentat figuram, quae exinde nullam gratiam ſibi conciliare poteſt. Sed et acutioris formae vitrum, et ex eo ſpiſſius, minores dat areolas, deformationi minus aptas. Ideo media proportio inter vtramque erit tenenda, atque ad hoc opus adhibenda.

§. 36. Haec vera eſt methodus Anamorphoſin polyedricam conſtruendi, cui vnusquisque rem tentaturus fidere, tutoque inſiſtere exoptatumque finem ſperare poterit.

§. 37. Quod vero maxima cum difficultate coniunctae ſint, et elaboratio melioris notae polyedri et applicatio eiusdem ad deformationem concinnam, hoc puto deterruiſſe plurimos ſcientia Mathematica peritiſſimos viros, meditationi potius indulgentes, quam operationi manuariae, et vitris opticis elaborandis idoneos atque peritos, quo minus rem ipſam aggreſſi fuerint expediendam. Et hoc ipſum in cauſſa eſſe arbitror, quod tam erroneae prodierint inſtructiones, quandoquidem natae ſint illae magis ex ſpeculatione, quam praxi, hinc omnibus impedimentis vix vllo modo potuit proſpici, et fere impoſſibile fuit ea euitare.

§. 38. Vltimo loco indicandum puto: Vitra ab ordinariis vitrorum caelatoribus ad hoc opus perficiendum eſſe inidonea, requiritur enim in illis perfecta planities, non caua aut conuexa, quales inducere neceſſe habent iſti operatores, quia vitrotrorum planities ad marginem orbis plumbei, a rota maiori agitati perpendiculariter, deterunt et poliunt, Mathematicus vero certis a me in tractatu optico § 23 citato descriptis opus habet instrumentis, quorum ope etiam efficitur, vt planitiebus dictis ad eandem angulum inducatur decliuitas, et latera se inuicem tangentia, vt et anguli prodeant puri, et ne minimum quidem a planitie decedentes. Si haec requisita non habuerit polyedrum, ineptum erit ad polyedricam deformationem.

CONFIRMATIO DILATATIONIS ATQUE CONTRACTIONIS METALLORUM ATQUE VITRORUM MOMENTANEAE PER EXPERIMENTA ET INSTRUMENTA NOUITER INUENTA.

Auctore
Joh. Georg. Leutmann.

§. 1.

Tabb. XX. et XXI. Celebris inter Physicos agitatur controuersia, vtrum vitrorum dilatatio atque contractio momentanea fieri possit.

§. 2. Multi hoc negant, plurimi affirmant, neutri experimentis, rem extra dubium ponentibus, litemque dirimentibus, satis instructi, nisi quae Florentini eruditi exhibuerunt.

§. 3.

§. 3. Affirmatiuam tenentes sequenti maxime nituntur experimento.

§. 4. Si phiala angustiore tubulo instructa et liquore aliquo corolato e. g. aqua ad dimidiam tubuli partem repleta in aquam feruentem immergitur vsque ad tubulum, tunc liquor coloratus ad momentum regreditur, et deinde iterum assurgit, atque a calore dilatatus ascendit.

§. 5. In frigidam et glacie mixtam si demittatur phiala, saltu quasi concepto assurgit liquor ad momentum, et deinde statim descendit a frigore contractus.

§. 6. Ex his naturae contrariis phaenomenis concludunt, dilatationem vitrorum eorumque contractionem probari.

§. 7. Afferunt enim, quod per calidam aquam non aliter fieri possit, quam vt liquor dilatetur atque ascendat. Et per frigidam necessario descensus eidem inducatur vt coeat, quandoquidem eundem contrahat frigus.

§. 8. Quia vero duo haec experimenta contrarium monstrant motum, concludunt, ex eo id fieri, quod calida aqua vitrum prius dilatet, vt amplius spatium acquirat, in quod se recipiat liquor atque subsidat, et deinde a calore expansus iterum assurgat.

§. 9. Frigida vero aqua, quia vitrum eiusque sphaerulam contrahat efficiat, vt liquor, priusquam a frigore contrahatur, per coarctatum vitrum impellatur vt ad momentum aſſurgat, et poſtea ſtatim, a frigore contractus regrediatur atque deſcendat.

§. 10. Non aliam itaque dari poſſe rationem autumant effectus huius legibus naturae contrarii quam contractionem et dilatationem phialae ſphaerulaeque eius vitreae.

§. 11. Contractionem momentaneam negantes alias cauſſas ſaltus liquoris quaerunt, eamque non ex mutatione inſtrumenti, ſeu contractione et dilatatione phialae vitreae deducendam volunt, ſed in liquore quaerendam putant, et ita cauſſam ſaltus liquoris non in vaſe continente, ſed liquido contento latitare exiſtimant.

§. 12. Non vero in dubium vocatur contractio et dilatatio vitrorum imo et metallorum ſucceſſiua, quam Florentini Eruditi experimentis factis extra „dubium poſuerunt; ſed quaeritur vtrum tam mo„mentanea contractio et dilatatio fieri poſſit in „corporibus adeo duris atque firma compage gau„dentibus.

§. 13. Hanc itaque controuerſiam conſiderandam mihi ſumſi et experimentis per idonea inſtrumenta hunc in finem excogitata veritatem indagandam atque ante oculos ponendam opere pretium duxi.

Fig. 1. §. 14. Experimentum in phiala vitrea hoc modo adornaui: Phiala ſeu ſphaerula duobus tubulis vitreis inſtructa erat, globi capacitas diametrum vnius digiti Anglicani pedis decimalis aequabat tubu-

buli ita erant formati vt alteruter 1 digito longior alteri existeret Fig. 1. Fig. 1

§. 15. Binos tubulos adhibui, vt eo promtius sphaerulam implere et de certitudine repletionis omnimodae certior esse possem. Quandoquidem repletio globi, ope ignis instituta, et difficulter succedit, et bullulam aeream nonnunquam in sphaerula relinquet. Duobus vero tubulis eisque inaequalis longitudinis sugendo vnum alterum breuiorem in aquam immittendo cito et tuto operationem perfeci.

§. 16. Repletum aqua instrumentum in aquam feruentem immisi et descensum momentaneum obseruaui, et quidem eo ipso in momento quo phiala feruentem aquam intraret, quem insequabatur ascensus liquoris. Exemptam phialam in aquam glacie permixtam immersi, et saltum seu ascensum momentaneum vidi, quo peracto, aqua in phiala sensim, pro more descendebat.

§. 17. Non fieri posse, coniiciendum omnino esset, quod tam momentanea dilatatio et contractio vitri, ex materia satis compacta ac dura constantis, oriri possit, cum alias contractio atque dilatatio corporum duriorum vt plurimum successiue peragatur, tractu temporis demum perceptibilis.

§. 18. Quapropter experimentum hoc tentaui in phiala orichalcea, cuius bini tubuli canaliculis vitreis, prioribus similibus, erant instructi eisque inserti et lacca sigillatoria firmati. Experimen-

Ee 2 tum

tum hoc inſtrumento feci et cum priori vitreo, eundem ſaltum fieri expertus ſum.

§. 19. Adhibui poſtea tertiam phialam ex bractea ferrea ſtanno obducta paratam, et ſaltus liquoris vt antea accidebat.

§. 20. Iam vero rationes ſatis probabiles dantur, quibus euinci poſſe videtur aliam ſubeſſe poſſe cauſſam ſaltus liquoris quam contractionem atque dilatationem materiae.

§. 21. Si enim eiusmodi dilatatio et contractio in his praedictis inſtrumentis locum haberet, accideret haec in craſſitiae eorundem materiae, illa extenderetur et contraheretur in longum, latum et profundum. Et ſic extenſio ambitum externum ampliorem internum ſpatium arctius vt fieret, efficeret. Contractio vero contrarium daret effectum

§. 22. Concipiatur linea aliqua in medio craſſitiei materiae, vt ab iſta in dilatatione extenderetur craſſities materiae vaſis ad externum ambitum, altera dimidia pars craſſitiei ad internam cauitatem intumeſceret, tunc ea amplitudinem cauam coarctaret. Contrarium vero eueniret in contractione vitri, tunc enim interna cauitas ampliaretur et externus ambitus coiret et minueretur.

§. 23. Si lineam iſtam extenſionis concipere vellemus in ſuperficie ambitus interni, ſcil. quod ſphaerulae expanſio ab intra ad extra fieret, tunc ſequens experimentum contrarum probare videtur.

§. 24. Nimirum in aliis corporibus cauis, eiusmodi alterationem patientibus, contrarium conſpiſpicitur, e. g. fruſtum ligni foramine pertuſum, tum a ſicco aere contrahitur, externum ambitum contractiorem et cauitatem ampliorem accipit; ab humido vero aere dilatatum, contrario modo ſe res habet, intumeſcit enim lignum ab extra et foramen etiam coarctatur.

§. 25. Videmus hoc ſi per foramen ligni alicuius, etiam durioris, vitreus vel metallicus embolus vel Cylindrus intrudatur exicato ligno excidit, humectato arctius iterum tenetur. Idem in operculis metallicis, quibus eburneae capſulae clauduntur, obſeruamus.

§. 26. Deinde calorem hunc feruentis aquae inſufficientem iudicare quis poſſet ad dilatationem phialarum maxime metallicarum. Si enim cochlea quaedam ferrea mas, vna cum foemina, in aqua feruente coquitur et ita calefit, vt eius tactum manus ferre nequeat, tunc adhuc mas per foeminam traiici poteſt; Si vero incandeſcunt prunis impoſitae, tunc mas craſſior redditur vt per foeminam coarctatam transmitti nequeat.

§. 27. Cochlea itaque mas et foemina per coctionem in aqua calefacta non intumeſcunt, inde coniicere quis poſſet, metalla hoc modo non dilatari, hinc multo minus phiala metallica ab aqua feruente in momento expandi poteſt.

§. 28. Videri itaque, rationem huius phaenomeni, ſaltus ſcil. liquoris in phialis, non in vaſe continente, ſed in materia contenta eſſe quaerendam cui accidentia a calore et frigore inducta,

 tan-

tanquam in ſubſtantia apta inhaerere et ſic liquorem, dilatationi et contractioni ſubitaneae magis quam metalla rigida aptum efficere et alterare poſſe.

§. 29. Non potui quin aliquam machinam inuenirem qua mediante experimentum certum inſtitui poſſet, vtrum metalla in aqua feruente dilatentur nec ne, et contrarium fieret in frigida, et quidem vtrum mutationes iſtae in momento accidant an vero ſucceſſiue et poſt aliquam moram. Inſtrumentum itaque tale adornaui.

Fig. 2. § 30. Fiat trabs ferrrea A, in vtroque extremo ad angulos rectos incuruata, et brachiis BB, quaſi inſtructa, trabe 1 pedem et brachiis 3 dig. longis.

Ad brachium vtrumque inſtrumenti adferruminatae ſint decem trochleae metallicae CC minoris diametri e. g. $\frac{1}{2}$ dig. circa communem axem chalibeum L mobiles.

Super has trochleas tendatur chorda ſeu filum metallicum tenue, candefaciendo prius emollitum et obſequioſum redditum *aaa*. Vno extremo *d* firmetur ad cochleam aliquam marem D cuius vnum extremum quadrangulare ſit et hamulo praeditum, illudque in foramine quadrangulari brachii alterutrius B mobile, ope cochleae foeminae, ſuperius applicatae ad E.

Tandem circumuoluatur filum illud orichalceum ſeu metallicum trochleae F aliquantulum latae, quae axem G, per ferream trabem tranſeuntem et longius prominentem, habeat.

Vltimo loco filum *aaa* elaſtro H, ad longitudinem brachii firmato, alligatur et ope cochleae E adducatur et tendatur vsque ad elaſtri H inclinationem.

Ad axem prominentem G applicetur index K longus vnum pedem, in anteriore parte trabis, ſuper linea, in longitudinem ducta, contractionem et dilatationem chordae, ſi quae accidat, declinatione ſua indicaturus.

Ne vero ob nimiam longitudinem et ex illa dependente grauitate fluctuet atque vacillet index K ſed ſitum erectum conſtanter retineat, et ſuper linea ducta maneat, adaptaui ad latera parallelepipedi anteriora duas pinnulas *zz* in quibus ope cochleae perpetuae *y*, dirigi poteſt fulcrum quoddam *x*, ſuper plano parallelepipedi anteriori verſatile; In medio fulcri lateris ſuperioris inciſae crenae inſertum eſt elaſtrum rotundum ſ. Elaſtrum ipſum ad *r* firmatum ſit, et in *m* incuruatum ad angulum rectum, quae incuruata ſurſum pars pertranſeat crenam indicis K.

Indici ad inferius extremum addatur contrapondium *p*, quo mediante ſuperior eius pars longior erecta tenetur, ne propria grauitate ruat. Ope vero cochleae perpetuae *y* dirigitur elaſtrum S, et per illud index K, vt apex eius ſuper linea, indici ſubiecta accurate ſitum ſuum conſeruet.

Quando itaque per trochleam F mouetur index, tunc cedere poteſt in alterutrum latus leue elaſtrum S quandoquidem chorda vel contracta vel dilatata trochleam F mouet ad cuius axem applicatus eſt index, et hac ratione mutatio chordae poteſt obſeruari.

§. 31.

§. 31. Dico igitur ope huius machinae in aquam feruentem immiſſae palam fieri, vtrum filum metallicum dilatetur ſeu elongetur. Et in aquam frigidiſſimam immerſa machina docebit, vtrum contractio fili ſeu abbreuiatio accidat. Dilatata enim chorda ſemper adducitur eadem atque tenditur ab elaſtro H, et quando chorda contrahitur, elaſtrum cedit. Ex vtroque trochlea F cui circumuolutum eſt filum circumducitur, et indicem applicatum K mouet vel ad dextram vel ad ſiniſtram. Haec mea erat intentio de hac machina.

§. 32. Experimenta hac machina inſtituta hoc modo ceſſerunt: Immerſo inſtrumento in aquam frigidiſſimam, nulla mutatio indicis percipiebatur, quanquam per horam ibi reliquiſſem inſtrumentum. Deinde ſtatim in feruidiſſimam impoſui inſtrumentum, ſed et ibi nulla plane mutatio indicis obſeruari poterat, diutius etiam in ea manente inſtrumento.

§. 33. Conſtantia haec inſtrumenti faciebat, vt de eius ſufficientia ambigerem, quia mutationem ſucceſſiuam non monſtrabat, quam tamen neceſſario contractioni et dilatationi ſucceſſiuae, de qua nullum dubium habebam inſecuturam fuiſſe ſciebam, quanquam momentanea, de qua controuerſia, incerta maneret.

§. 34. Aliud e vitro inſtrumentum ad hoc phaenomenon inquirendum et cauſſam ſaltus liquioris in phiala indaguandam exhibitum eſt a Clariſſ. Dno. *Bülfingero* Colleg. honoratiſſ. quod et e cupro conficiendum curaui, ſcil.

§. 35.

§. 35. E lamina cuprea elaboratum eſt hemisphaerium intus cauum Fig. 3. M, ex cuius fundo A prodibat tubulus B aſſurgens in C. Deinde ex margine ſuperiore hemisphaerii caui D exſurgebat alius tubulus E, deorſum inflexus et iterum aſcendens ad altitudinem prioris tubi. Vtrique tubulo cupreo inſerebantur tubuli vitrei F et G et inſtrumentum erat confectum. Fig. 3.

§. 36. Repleto hoc inſtrumento aqua frigida (quod commode fieri poterat immittendo orificium tubuli GE in aquam, et alterum tubulum BC ore ſugendo) ſequentia obſeruata ſunt phaenomena.

§. 37. Totam machinam immiſi in aquam feruentem vsque fere ad tubulos, et deſcendit liquor aeque ac in prioribus phialis more ſolito, deinde iterum aſcendit.

2. Deinde frigidae glaciali impoſui machinulam, et aſcendit, ſed poſt ſaltum iterum coiuit.

3. Vlterius immiſi inſtrumentum in aquam feruentem vsque ad labra cauitatis *g*, et deſcendit liquor in canaliculis, poſtea iterum aſcendit.

4. Refrigeratam machinam in feruentem iterum immiſi, ita tamen vt labrum *g* non transgrederetur aqua, et cauitatem ſuperiorem M, aqua gelida glacie mixta repleui, et tamen deſcendit liquor ante dilatationem, glacie quanquam in cauitate nondum reſoluta.

5. Aquae frigidae impoſui machinam, et in eo momento feruentem in M, infudi, ſimulque fruſtum ferri candentis in feruentem aquam inieci ad con-

confortandum et conseruandum feruorem, tunc liquor saltum non fecit deorsum, sed sursum et quidem ab initio celeriter, deinde sensim, ita vt prior a posteriore distingi poterat.

6 In tubulis, machinula externo aeri relicta a frigidae aquae in M infusione saltus nullus sursum percipiebatur, sed descensus celer quem lentus excipiebat vt vix sentiretur. A calidae infusione vero primo ascensus non adeo sensibilis momentaneus tamen deinde ascensus sequebatur.

§. 38. Haec sunt phaenomena quae in illa machinula apparebant, saepius iteratis experimentis.

§. 39. Experimentum itaque 5 et 6 fauent hypothesi mutationem momentaneam afferenti, sed non satis clare eam exprimere videntur quanquam mihi satisfaciant.

§. 40. Quia vero mutatio citatior in hoc 5 et 6 experimento ex eo deducere aliquis posset, ac si in 5to calor vehemens ascensum citatiorem caussasset, et liquor ab initio celeriter expansus, postea lentius ascendisset. Et in 6to experimento idem cum aqua frigida factum esset. Et quae sunt alia a nonnullis non facti saltus contrarii veram caussam inficias euntibus proferi possent.

§. 41. De alia machina mecum meditatus sum, quae dilatationem et contractionem momentaneam vitrorum et metallorum proderet, vt de ea certi esse possemus et sequentem confeci.

Fig. 4. §. 42. Annulum itaque cupreum A $2\frac{1}{2}$ dig. latum et in diametro 4 dig. habentem confeci. Fig. 4.

Ei

Ei laminam B erectam et ſatis craſſam atque inflexilem ita adaptaui, vt tribus cochleis chalibeis ad annulum ſuper commiſſura eſſet firmata.

Habebat lamina B figuram linealis cum crure C angulum rectum formante, $1\frac{1}{4}$ dig. latum, 15 dig. longum erat lineale vsque ad angulum externum. Crus vero ab angulo ad $2\frac{1}{2}$ dig. ſe extendebat.

Deinde feci catenam D, eius formae, qualem horologia portatilia helici eorundem circumuoluendam habent, et quidem talem cuius quiuis articulus intermedius gibbum prominentem *a* habebat.

Hac catena cingebatur annulus A in cuius medio latitudinis peripheriae tot crenae erant inciſae *b*, quod gibbi *a* in catena D prominebant, qui in crenas immittebantur. Ita enim catena neque ſurſum neque deorſum deflectere poterat ſed arcte claudebat annulum.

Vnum catenae extremum *c* vnco recuruato *d* inſtructum inſerebatur in annuli ſuperficiem, et alterum extremum e vnco cochlea praedito adduci poterat, qui per extremum indicis *f* totam longitudinem linealis occupantis tranſibat.

Index $1\frac{1}{2}$ dig. ab inferiori extremo, C linealis B ſitum habebat, mobilis erat circa axem *g*, et huic extremo indicis inſertus erat vncus *e*, vt ope cochleae maris *h* adduci et remitti poſſet deflexa a linea media *l* per elaſtri *k* impulſum longior pars indicis, quae ſuper illa linea *l* conſeruanda erat.

In externa ſuperficie linealis linea ducta *l* indicabat ſitum indicis vel mutatum vel conſtantem.

 §. 43.

§. 43. Haec machina in olla aqua feruente repleta et super prunis posita vt semper ebulliat apta videbatur indicare, vtrum annulo cupreo A contingat mutatio momentanea, an post defluxum horae successiua. Item frigidae immersa vtrum ex contractione declinet index vel in momento, vel post aliquod tempus.

§. 44. Experimentum itaque institutum est in aqua feruente atque super prunis continuo bulliente, at neque momentanea dilatatio annuli cuprei, neque successiua percipiebatur, et quanquam per horas duas et vltra in hac continua efferuescentia permaneret instrumentum, tamen index situm suum ne ad momentum mutauit. In frigida etiam ne minima quidem contractio obseruabatur.

§. 45. Hac ratione et hoc instrumentum hypothesi contractionis et dilatationis metallorum aut vitri neque fauebat, neque controuersiam dirimebat, in tantum, quod exinde probari possit, saltum liquoris ex eo prouenire. Imo quia etiam post diuturniorem coctionem nullam mutationem indicaret, suspectum hoc mihi valde reddebatur.

§. 46. Quandoquidem itaque prima machina tanquam valde composita fallax videbatur, ac si ex frictione frequentiore absorberetur contractio et dilatatio in filo orichalceo facta. Altera Bülffingeriana etiam certam diremtionem litis non satis clare euinceret quanquam eam indicaret. Tertia quoque haberet, quod contradicentibus iustam occasionem suppeditare posset de impedimentis non

fa-

factae mutationis cogitandi, quandoquidem firmis experimentis destituantur.

§. 47. Hinc de tali machina mihi erat cogitandum quae et simplicissima omnem contractionem remoueret, et effectu ipso rem adeo subtilem atque sensus subterfugientem clare ac distincte proderet.

§. 48. Ad acusticam itaque meditationes meas direxi periculum facturus, vtrum ex sono aliquid mutationis momentaneae percipi possit in chordis metallicis. Instrumenta quidem musica e. g. clauicordia mutatum tonum produnt, quando aer mutatur; sed suspecta mihi erant quia lignea, nota vero est et contractio et dilatatio lignorum.

§. 49. Et sic quartam machinam adornaui et simplicissimam et optimam, quandoquidem expectationi meae egregie respondebat.

§. 50. Ex ferro confeci trabem 2 pedes longum Fig 5., latum et crassum 1 dig. recuruatis vtrisque extremis ad 3 digitos, eaque corpore seu scapo latiora feci vt 2 dig. aequarent, et cum scapo duos angulos rectos facerent. Fig. 5.

Ab vno extremo annexa duo fila orichalcea tendebantur vsque ad alterum, vbi ope duarum cochlearum et adduci et remitti poterant. Quae deinde ad monotonium extendi.

§. 51. Alterum adhuc tale instrumentum priori plane simile feci, et ad monotonium chordis prioribus in instrumento consonis aeque perductis, vnum instrumentum ad fornacem in hypocausto calefacto repoſui, alterum per 12 horas frigidiſſimo aeri tempore hyemali expoſui, et obſeruaui vtrum vtraque inſtrumenta monotonium et conſonantium ſint conſeruatura nec ne.

§. 52. Experimenta itaque feci ſequentia:

1. Cognoui quod tonus chordarum illius inſtrumenti quod in frigore collocatum erat grauior factus fuerat, quam iſtius quod poſt fornacem in calore permanſerat, et vnum ab altero vltra vnam clauem muſicam differret, ita vt ſi illius chordae quod in frigore haeſerat *c* ſonarent, alterius in calore detenti *d* audirentur, cum tamen vtrumque ante ſeparationem tonum *d* ederent.

2. Inſtrumenta commutaui et quod in frigore fuerat in calore reliqui, et quod in calore ſteterat, frigori expoſui, tunc eodem modo *frigus tonum remiſſiorem*, *calor acutiorem* reddidit. Et haec experimenta ſaepius iterata eundem ſemper effectum habuerunt.

3. Inſtrumentum quod in frigore fuerat et tonum remiſſiorem nactum erat, ad alterum inſtrumentum poſt fornacem repoſui et poſt 12 horarum ſpatium vtrumque erat conſonum, tonusque in frigore depreſſus vires iterum receperat et exaltatus in calore priori ſe conformauit.

4. Tale quid etiam obſeruabatur quando vtraque inſtrumenta vel frigori vel calori ſimul committebantur, tunc vtriusque tonus vel grauior vel acutior reddebatur.

5. Por-

5. Porro expertus fum, quod chorda vnius inftrumenti, quando eam intra duo frufta glaciei leniter madefacerem, *altiorem* tonum acquireret quam altera ficca.

Aqua tepida cum linteolo madefacto diutius fricata chorda, tonum etiam affumebat *altiorem*.

Abfterfis linteolo chordis, tamen acutior tonus manebat, vsque dum per fe ad priftinam ficcitatem et ftatum redientes, iterum concordarent cum chordis fociis et vnifonae omnes redderentur.

Calida aqua eodem modo affricta ad vnam chordam, tonum depreffit, qui grauior permanfit quam diu mador calidus manebat, deinde refrigerata chorda, priftinum tonum altiorem recepit.

6. Intra rimam ligni calidiffimi et ficci demulfa chorda tonum *depreffiorem* recepit.

7. Intra rimam calidam cocti in aqua ligni et exinde madidam chorda tonum *grauiorem* nancifcebatur.

8. Intra rimam ligni, in aqua frigida diutius macerati, fricta chorda tonum *acutiorem* fiftebat.

9. Intra rimam ligni ficci et frigidi terendo tonus chordae acutior reddebatur.

10. In aquam feruentem immiffo toto inftrumento extra aquam manentibus chordis tonus *acutior* fiebat.

11. In aquam feruentem immerfis folum chordis, ita vt corpus inftrumenti extra aquam in

fic-ſicco maneret, chordae tonum *in momento grauiorem* acquirebant.

12. Vna cum inſtrumento immerſae chordae in aquam feruidam, retinebant chordae tonum *acutiorem.*

13. In aquam frigidiſſimam immiſſo inſtrumento, extra aquam manentibus chordis, tonum *remiſſiorem* dabant chordae.

14. In aqua frigidiſſima immerſis ſolum chordis, ita vt corpus ferreum, ante poſt fornacem detentum, aquam non tangeret, chordae *altiorem* tonum in momentum acquirebant.

15. In aquam frigidam immiſſis ſolum chordis inſtrumenti antea in frigore eſſeruati tonum fere retinebant eundem.

16. In aquam frigidam totum immerſum inſtrumentum vna cum chordis, quod antea in frigore fuerat tonum acquirebat *acutiorem* ſed tantum ad ſemitonium.

17. In aquam frigidiſſimam immerſum totum inſtrumentum, antea poſt fornacem repoſitum, tonum acquirebat acutiorem.

§. 53. Conſtat itaque per haec experimenta, quod metalla in momentanea immerſione in aquam calidam dilatentur quia tonus acutior reddebatur per experim. 10, 11, 12, dilatato enim inſtrumento chordae magis tenduntur. In aquam vero frigidam demiſſa metalla contrahantur per experim. 13, 14,

15,

15, 16, id quod tonus grauior indicabat; contractio enim instrumenti chordas remittit vnde grauius sonant.

§. 54. Quod vero chordarum tonus in frigore detenti instrumenti grauior fiebat exper. 1, 4, ex eo est, quia instrumentum ferreum contrahitur per frigus; chordarum vero iamiam intentarum contractio ab intensione impeditur. Contrarium euenit reposito instrumento in calore, experimentum 2, 4.

§. 55. Hoc vltimum instrumentum docuit quod priores machinae et propter frictiones et propter exiguitatem dilatationis et contractionis, visui imperceptibilem, sensus partim eluserint, partim, vt in tertia machina, vtraequae partes et cupreus annulus, et catena ferrea vna mutationem susceperint ideoque indicem non mouerint.

§. 56. Sonus autem in quarto instrumento solum sufficiens fuerit mutationem indicandi, litemque dirimendi, et certos nos reddendi, quod omnino et dilatatio et contractio *momentanea* fiat in metallis aeque ac vitris, et quod saltus liquoris in phiolis vitreis et metallicis ab illis mutationibus certo dependeat.

DE ACTIONE MUSCULORUM AB IPSORUM DIRECTIONE PENDENTE, SPECIMEN,

AUTORE

Iosia Weitbrecht.

§. 1.

Mense Jul. 1729. Tab. XXII.

Doctrina de Musculis, si, quae generalia sunt, spectaueris, Anatomicorum industria plurimum est exculta. De Numero fere omnes conspirant, nisi quod accuratissimus quisque subtilissimas faciat diuisiones in fibrarum fasciculos plurimos, quos alii pro vnico tantum musculo accipiunt. Huiusmodi fata, vt exempla allegem, iam *Vesalii et Columbi* tempore *Musculi pollicis*, qui hodie *Thenaris*, *Antithenaris* et *Hypothenaris* nomine venditantur, passi sunt. Figura musculorum ac magnitudo ad staturae corporis rationem est exacta; hinc propter subiectorum diuersitatem necessario inter se differunt. Manet tamen semper aliqua illorum similitudo, quae vero in nonnullis ita variari videtur, vt illorum descriptionem semper et vbique congruentem non liceat proponere, nisi longa ac non interrupta cadauerum serie, sedulo collatis obseruationibus, de constantia aliqua conuicti fuerimus.

§. 2.

§. 2. De *directione* autem musculorum, et inde dependente *actione* inter Autores nondum plane conuenit, nec etiam ita specialiter actum aut disquisitum est. Pauci Vesalii vestigia ingredientes patientia simili, qualis in hoc opere requiritur, ad musculorum progressum attenderunt: plurimi, compendia sectantes de origine ac fine nuda verba faciunt. Inde factum est partim, vt alii eosdem musculos ad alia membra mouenda referant: alii partim eidem musculo eidem ossi inserto diuersam actionem tribuant.

§. 3. Duo igitur sunt, quae ad Myologiam vlterius excolendam forte non inutilia indicabunt Anatomici; alterum, vt, si quae sunt principiorum atque insertionum *differentiae*, quaenam constantes magis aut rariores sint, et in quonam variationes illorum potissimum consistant, innotescat; alterum, vt *actiones* musculorum ex ipsorum *directione* accuratius determinentur. Scopi huius duplicis periculum in artuum superiorum Musculis extremis factum hoc specimine exhibere tentabo ita, vt vtrumque Thema pro re nata commisceam. Cum vero ad determinandas actiones mechanicis quibusdam atque osteologicis propositionibus opus sit: praemittere illas Lemmatum titulo, e re fore confido:

§. 4. Musculi sunt instrumenta motus, annexi partibus vicinis extremitate duplici plerumque opposita, quarum altera pro origine aut principio, altera pro fine aut insertione considerari solet: pars autem fini connexa ſemper mobilis eſt. Vbicunque igitur eſt membrum motui exercendo deſtinatum: ibi etiam inſerti ſunt musculi, ex quorum actione reali, per abbreuiationem quoquo modo factam ſe exerente, ſuppoſita, motus membri ſufficienter poteſt explicari: inſertio autem in membrum plane immobile facta neceſſario pro origine muſculi haberi debet.

§. 5. Si musculus connexus eſt principio ac fine duobus membris, quorum alterum magis, alterum minus mobile exiſtit: principium quaerendum eſt in membro minus mobili, finis contra. Dum enim membrum vtrumque mobile ſupponitur, Muſculus quidem agens vtrumque illud aequali vi ad ſe attrahit: cum vero id, quod eſt magis mobile, eidem vi facilius cedat atque illud, quod eſt minus mobile; igitur reactione membri minus mobilis, atque actione muſculi ex illa plaga mutuo ſeſe deſtruentibus, reliqua vis musculi omnis in mobiliori membro mouendo conſumitur.

Fig. 1. §. 6. Si corpus A pellit corpus B ſecundum directionem AB, cum vi, quae eſt vt linea AB: idem producitur effectus, ac ſi idem corpus B traheretur a corpore C = corpori A, ſecundum directionem BC, directioni AB contrariam, cum vi, quae eſt, vt linea BC = lineae AB: in vtroque enim caſu corpus B fertur verſus plagam corporis C. Et corpus A in corpus B directe dicitur agere, ſi linea per vtriusque centrum grauitatis ducta coincidit cum linea directionis. Intelligatur igitur membrum mo-

mouendum per corpus B, musculus mouens per corpus C, ſequitur, actionem musculi conſiſtere in in attractione membri mouendi verſus ſuam plagam.

§. 7. *Directio* motus dependet partim ab *articulatione* oſſium inter ſe: partim a *progreſſu atque inflexione* tendinum, in quibus videlicet omnes fibrae musculares concurrunt. Articulatio autem vel *ſimplex* eſt vel *compoſita*. *Simplex*, ſi caput epiphyſeos vnicum excipitur fouea vnica; idque vel profunde vel ſuperficiarie; vocantur hi modi Enarthroſis atque Arthrodia: *Compoſita*, ſi duo capita vel plura iuxta ſe poſita excipiuntur duabus vel tribus foueis ſimiliter poſitis; et vocatur Ginglymus, ſiue Cardo. Species *prima* admittit motus omnes in gyrum; *ſecunda* duos in plagas contrarias.

§. 8. Poſthabita quaeſtione de motu manifeſto atque obſcuro; hae duae ſpecies articulationibus indiuiduis omnibus hactenus ſatisfecerunt, aut ſaltim omnes articulos ad illas referre Autores conati ſunt. Fateor autem occurrere mihi aliquam, de qua, cui potiſſimum ſpeciei adſcriberem, hactenus haeſitauerim. Eſt haec, articulatio internodii primi pollicis cum oſſe quinto carpi. Equidem haud ignoro, eſſe alios, (*a*) qui pro Enarthroſeos aut Arthrodiae ſpecie habeant; alios, (*b*) qui pro Ginglymo quidem, ſed dubitanter. Haec ipſa tamen Autorum diſcrepantia opinionem meam ex praegreſſis ſectionibus conceptam confirmauit, dum *tertiam* adhuc *ſpeciem* adducendam putauerim, quae

 eſt,

(*a*) R. Columbus Anat. L. I. C. 26. (*b*) Andr. Veſalius An. L. I. C. 27.

eſt, ſi in eodem capite aut in eadem fouea enarthroſis enarthroſin, aut (ſi quis articulationem tantum
Fig. 2. ſuperficiariam eſſe contenderit) arthrodia arthrodiam ad angulos rectos ſecat, et motum in plagas quatuor admittit. Habet enim *quintum os carpi* in latere exteriore atque interiore duas prominentiolas *a*, *b*, vt cum interiecta media ſuperficie *c* ſpeciem cauitatis ſeu ſinus oblongi forment: anterius *d* vero et poſterius *e* ad marginem oſſis inter dictas prominentiolas, decliuitates exſculptae ſunt, quae quia profundius, quam interiecta media ſuperficies poſitae ſunt, cum illa ipſa ſpeciem capitis efficiunt; ita, vt dicta media ſuperficies tam ad ſinum, quam ad caput efficiendum, indifferenter ſe habeat. Similiter, *inter-*
Fig. 3. *nodium pollicis* interius *a* atque exterius *b* decliue eſt, et cum protuberante media ſuperficie ſua *c* oblongum caput efficit, quod praedicto ſinui oſſis carpi reſpondet, ipſique immittitur: contra vero anterius *d*, ac poſterius *e* (magis tamen anterius, vt recte *Veſalius* (*e*) monet) extuberat; et quia hae protuberantiae altius, quam ſuperficies media poſitae ſunt, cum hac ipſa ſinum componunt; ita, vt in hoc quoque oſſe dicta ſuperficies media, pari modo, tam ad caput, quam ad ſinum efficiendum indifferenter ſe habeat. Quatenus igitur hoc primum pollicis internodium oblongo capite ſuo in cauitatem oſſis carpi inſinuatur; eatenus a latere interno verſus externum mouetur, et contra: quatenus autem internodii cauitas ſeu ſinus recipit caput oſſis car-

(*e*) l. c. item eiusd. L. 1. C. 25. F. 1. 2. A.

carpi; eatenus a parte anteriore verſus poſteriorem, et viciſſim dirigitur. Qua in re hanc concedendam iuſtitiam eſſe Veſalio arbitror, cuius in hoc loco diligentia omnium fuit accuratiſſima, vt primum illum fuiſſe fateamur, qui hanc ſententiam (*d*) ſtabiliuerit.

§. 9. Musculus agit vel *directe*, vel *inflexe*, vel *oblique*. Actionem *directam* voco, ſi cum membro mouendo in *directum* iacet, et dum membrum ad ſe trahit, haec linea directionis cum linea, quae centra magnitudinis oſſis et totius musculi iungit, in *eiusdem* plani ſectione permanet; cuius Gaſtrocnemii cum ſociis *Exemplum* exhibent. *Inflexa* eſt actio, ſi *tendinis extremum* tantum cum membro mouendo in directum iacet; *neque* illae duae lineae in *eiusdem* plani ſectione permanent: quae eſt, ſi muſculi tendo deflectit a prima directionis via, ope trochleae, quam transcurrit. Hanc ſpeciem *Borellus* (*e*) fuſius explicat. *Obliquam* actionem dico, ſi muſculus cum membro mouendo plane *non* in *directum* iacet, ſed in contactu angulum obliquum facit, atque illum quidem conſtantem, vt muſculus radii rotundus. His praemiſſis, quae ſequuntur, occaſione data ſuperſtruemus.

§. 10. In Extenſore digitorum communi nonnullae deprehenduntur differentiae ab Autoribus varie hinc inde deſcriptae: ſunt tamen aliqua notatu digna, quae aut noſtris temporibus obliuioni plane tradita iacent, aut a pauciſſimis ſubobſcure

(*d*) l. c. (*e*) De motu animal. P. I. prop. 76.

re innui videntur; Videlicet inter tendines *a* exten-
Fig. 4. foris Auricularis, Annularis et Medii ordinarios interiacent adhuc duo alii *tendines minores* *b*, *c*, (*f*) quorum quisque prope infertionem in phalangam digitorum primam in duo cornicula *d*, magis plana quam tertia diuiditur, ita, vt alter tendo *b* (*g*) fimul in phalangam primam Auricularis et Annularis, alter *c* vero in eandem phalangam annularis et medii inferatur. Facit haec connexio non folum, vt reliquos tendines in extendendo adiuuent, aut illorum laeforum vices fuftineant; fed etiam, vt tam digitos ipfos, quam hos eosdem tendines maiores contineant, ne aut illi nimium diftendantur, aut hi a fua directione nimis deflectant. Siquidem et hoc eodem fine tendines medii et indicis per *membranam* aliquam (*h*) albedine fua et tenacitate fatis confpicuam *e* (quam hactenus nunquam deeffe deprehendi), pollicem circiter ab articulatione phalangae primae cum offe metacarpi, colligantur.

§. 11. Ceterum *Infertio* tendinum *Extenforis* communis in internodia ipfa admirabilis eft. Poftquam enim inter duo tubercula cartilaginea offium metacarpi tanquam fuper trochleam diriguntur; initio phalangae primae in *tres* partes dirimuntur;
Fig. 5. quarum quae *media* *a*, *b*, et craffiffima eft, fuper gibbum huius phalangae progreffa, articulationem fe-

(*f*) Hos omnes in Euftachio Tab. XXVIII. delineatos obferuat quidem Lancifius; fed ibi cum tendinibus maioribus quafi in vnum coalefcunt, quod a natura abhorret.

(*g*) Vid. Vefal. L. II. C. 43. de Mufculo 18.

(*h*) Loco huius membranae falfo Euftachius Tab. XXIX. tendines interftitios fingit.

ſecundam ſuperſcandit in *c* atque in principium internodii ſecundi recta inſeritur. Reliquae autem duae *d* ad internodii latera vtrinque deflectentes cum tendinibus lumbricalium atque interoſſeorum longis *e* concurrunt, atque intra ſuos limites interſtitium triangulare *f* Membrana obtectum formant: poſtquam deinde articulationem *g* ambierunt, verſus gibbum phalangae mediae denuo reflectentes *h*, ac ſeſe decuſſantes *i*, internodio tertio oblique inſeruntur *k*; quo fit, ut non ſolum venuſtati conſulatur, ſed etiam phalanga tertia ex vtroque latere ſimiliter tracta, iuxta directionem ex motu compoſito reſultantem extendatur. Haec autem Membrana interſtitio illo triangulari comprehensa revera tendo latus ſive aponevroſis *l* musculorum interoſſeorum eſt, id quod tam ortus, quam progreſſus fibrarum tendinearum oſtendit, quippe quae in termino fibrarum carnearum exſurgentes tamquam radii ex centro quaquaverſum ſe diffundunt, atque extremitate ſua tendinibus extenſoris affiguntur atque implicantur.

§. 12. Credo obuiam eſſe mihi eundum lectori, ne obiiciat, me in eo errare, quod ſtantibus his tendinum progreſſionibus et coniunctionibus actiones muſculorum confundam: qua propter paulo fuſius hac de re mentem meam explicabo. Cum digiti manuum *tres* potiſſimum motus diverſos patiantur, *flexionem*, *tenſionem*, et *inclinationem* ad latera: tribus his finibus ſuis quoque musculis ſatisfacere natura studuit. De flexione duarum extremarum phalangarum, vtpote manifesta satis, nulla umquam oborta est quaestio; neque extensio per extensorem communem facta ullis implicita est difficultatibus. An vero extensio per dictum hunc musculum solum fiat, et quinam Musculi primam phalangam flectant aut ad latera inclinent? disquiritur. Vulgo *Lumbricales* pro *flexoribus* internodii primi, *Interossei* pro *inclinantibus* venditantur. Sed Columbus primus annotavit, *Lumbricales in teretem et nerveum tendinem desinere, et per internos digitos iuxta eorum longitudinem delatos adhaerescere tendinibus musculi extensoris, et in tertium articulum suis finibus immitti*; et hinc *extensioni* potius inservire conclusit. Porro I. Duglasius de *Interosseis* tradidit, ipsos formare *tendines duos, quorum alter mox superiori et laterali parti primi internodii inseratur; alterum vero valde ampliari, ita vt maximam iuncturae partem tegat, deinde, vbi ad secundum internodium appropinquauerit, iuxta longitudinem huius ossis excurrere, ibique in parte superiore articuli extremi, postquam prius cum socio alterius lateris se coniunxerit, finiri*: hinc *cum tendines longi agant, ultimum articulum extendi, atque sic eos supplere vicem Extensoris magni, qui hic deficeret.*

§. 13. Positis his sententiis combinatis Lumbricales fiunt Extensores, et Interossei partim Inclinatores sunt, partim Extensores. Tam vera autem sunt, quae Columbus proposuit, vt verius esse

esse nihil possit. Neque, quod Duglasio regeramus, multum habemus. In hoc solo falli mihi videtur, quod *primo* tendinem longum in supplementum Extensoris *deficientis* datum esse putet, quod tam ex Columbo §. 12. quam ex nostris observationibus aliter esse §. 11. innuimus; *deinde*, quod duplicem tendinem tribuat musculis omnibus, cum tamen id de aliquibus tantum verum esse sectiones repetitae testentur. Quinam autem tales sint, antequam determinemus, de numero atque insertione illorum erit dispiciendum. Quapropter, cum, vt *historiam Interosseorum* hic intexamus, omnes Anatomici *sex* illorum hactenus memoriae prodiderint, Cl. Heisterus autem in *Compend. Anatom. Not.* 74. ex Stockhusianis observationibus senarium *tribus* augeat: neutra sententia damnata, quid cultro meo multoties studiose huc directo occurrerit, simpliciter narrabo.

§. 14. Verum quidem est, in vola manus plerumque sex distinctos musculos interosseos (quos internos dicemus) apparere, si ita nude et sine vlteriori praeparatione aspiciuntur: verum, si paulo profundius illi investigantur, deprehendes: Esse I^mo. *Interosseum primum internum*, qui alio fasciculorum numero a condylo ossis metacarpi indicis, alio autem a condylo ossis metacarpi Medii oriatur, atque in vola magis, in dorso minus conspicuus tendine duplici *longo* et *lato* in indicis latus *externum* (nam latera digitorum *interna* vocabo illa quae pollicem respiciunt) inseratur. Esse II^{do} *Interosseum secundum internum*, qui a latere ossis metacarpi Medii digiti ortus solam *aponevrosin*, seu tendinem *latum* ex latere huius ipsius digiti interno formet. Esse III^{tio} *Interosseum primum externum*, qui *partim* ex adverso tendinis radiaei externi et latere ossis metacarpi Medii interno, *partim* obliquo, applanato ac longiusculo tendine ex dorso huius ipsius ossis metacarpi ortus, totum interstitium compleat, atque paullo inferius, quam antecedens inseratur. Et quamvis interdum hi duo musculi difficulter a se invicem separentur, semper tamen distincta *duplicis* tendinis lati insertio adest. Esse IV^{to} *Interosseum tertium internum fictitium*, qui non possit separari ab *Interosseo secundo externo*, qui solus in dorso conspicuus, a lateribus ossium metacarpi Medii et Annularis exortus, interstitium horum ossium repleat, atque similiter, uti Interosseus primus internus *duplici* tendine, *longo* atque *aponeurosi*, in Medii digiti latere externo affigatur. Esse V^{to} *Interosseum quartum internum verum*, qui *sola aponeurosi* in latus annularis digiti *internum* tendat, postquam ortum suum ex superiore capitulo, et tota facie cava ossis metacarpi ad dictum digitum pertinentis duxerat. Esse VI^{to} *Interosseum quintum internum* similiter *fictitium*. Esse VII^{mo} *Interosseum tertium externum* cum Antecedente unum atque eundem, qui tam interstitium ossium metacarpi, Annularem atque Auricularem sustinentium, quam dorsum manus repleat, *lataque* apo-

aponevrosi ac *tendine longo* gaudeat ad annularem pertinente. Esse VIII^{vo} *Interosseum sextum internum verum*, qui ex tubere octavi ossis carpi ortus, ac secundum faciem cavam ossis metacarpi, quod Auricularem sustinet, delatus *sola aponevrosi* in latus *internum* Minimi digiti inseratur. Quibus praemissis, quid inde sequatur, videamus.

§. 15. Ante omnia apparet, *origines* musculorum Interosseorum, quales nos hic sistimus, cum descriptionibus *Duglasianis* vehementer *concordare.* Sunt autem illorum solummodo *septem*; *externi tres*, *interni quatuor*, ita, vt ex superinductis Stockhusianis ille solus, qui ordine suo *secundus* recensetur, et lateri Medii interno affigi praetenditur, ex rationibus §. 14. N. III. allegatis admitti posse videatur. Horum septem autem non sunt nisi *tres*, nimirum *Internus primus*, *Externus secundus*, atque *Externus tertius*, qui *duplici* tendine simul gaudent; reliqui enim *quatuor* in *solam aponevrosin* terminantur: atque *illi* quidem omnes ex latere digitorum *externo*, *hi* vero ex *interno* positi sunt. Namque in hac re mirificum natura ordinem servavit, vt *cuivis* digito ex quovis latere *duos* quidem tendines *longum* atque *latum*, sive aponevrosin adiecerit: cum vero Lumbricales quatuor musculi omnes ex latere *interno* positi in hoc idem quoque latus suos tendines *longos* implantandos impertiant, ex latere autem *externo* deficiant; factum est, vt ex hoc *solo* quoque *externo* latere musculi Interossei tendine *duplici* in Lumbricacalium locum ſurrogarentur, interne autem *ſola aponevroſis* ad ipſos pertineret. Sunt igitur *Lumbricales Inclinatores* vel *Adductores*, cum *ſoli* agant, vt Veſalius ſuo loco indicavit; ſunt *illi* autem et *Extenſores* phalangae digitorum extimae ex uno latere, quoties ex altero *ſimul* cum illis agunt *Interoſſei* tendine *longo* praediti, quos iam ſupra allegavimus, nimirum Internus primus, Externique ſecundus ac tertius: qui autem ſimul vi aponevroſeos pralangam digitorum Indicis, Medii, atque Annularis primam, et conſequenter totos hos digitos a pollice *declinant*, aut (uti Anatomici loqui amant) *abducunt*, cui motui Auricularis exequendo Abductor eius proprius ſatisfacit. Contra *Interoſſei* in *ſolam aponevroſin* terminati, quales ſunt *Externus primus* cum *Interno ſecundo*, *Internique tertius et quartus*, *ſoli* agentes, *inclinant* phalangam digitorum Medii, Annularis atque Auricularis primam, et conſequenter totos hos digitos verſus pollicem; in inclinando autem Indice Abductor eius vulgo ita dictus ſimile officium praeſtat. Quum vero et Lumbricales et Interoſſei *omnes ex utroque latere ſimul* agunt, atque ab allegatis duobus muſculis, Abductore Indicis atque Abductore Auricularis adiuvantur: ipſorum actio in *flexione* phalangae primae, et *extenſione* extimae potiſſimum conſiſtit, quos *duos* motus ſimul fieri poſſe experientia confirmat; ceſſat autem illorum *poſterior* tum demum, cum muſculus Profundus Antagoniſtarum ſuorum vim ſuperaverit.

§. 16.

§. 16. Nisi natura in construendis ac locandis musculis *extendendo pollici* dicatis simplicior esset et constantior, quam autorum in describendis illis confusio: sine dubio ab illorum examine abstineres. Neque hic multum novi adduci posse arbitreris, cum ex veterum sedulis laboribus in memoriam revocare suffecerit, quae a neotericis neglecta sunt; ita enim apparebit, talem eorum descriptionem dari posse, quae cum subiectis omnibus mire conveniat. Quapropter exponere liceat, quid deprehendere quaerentibus nobis contingerit. *Duo* sunt proprie *Musculi* pollicis, quibus *extensoris* munus tribuitur; *unus inferior* ex ulnae medio exortus, atque ab Extensore digitorum communi, interdum vero (quod Vesalius praetendit) ab Extensore indicis proprio, solutu difficilis secundum longitudinem cubiti progreditur, deinde fossulam suam propriam radio insculptam iuxta tendines radiaei externi transcurrens versus pollicem inflectitur et mediae extimaque eius phalangae *tendine simplici* affigitur. Erigit hic musculus, seu *extendit*, non quidem pollicem integrum, sed eiusdem phalangam extimam, et si fortius agat, etiam mediam, primum vero internodium immotum relinquit: quapropter abductionis actio a Columbo (*i*) ipsi falso attribuitur.

§. 17. Musculus *alter*, quam vere *Extensor pollicis* dici mereatur, dispiciamus. Pollex cum Carpi officulo quinto iungitur per articulationis spe-

(i) L. V. C. 34. de Musculo quarto.

ciem tertiam, quam (§. 8.) fuſius deſcripſimus, etquae motus *quatuor* admittit; quos eo clarius intelliges, cum totum poſtbrachiale, et primum pollicis internodium, ſuper brachiale in arcu circuli iuxta ſe poſita eſſe finxeris. Erit enim tunc *primus* motus, ſi primum pollicis internodium, in hoc arcu movetur, atque ad poſtbrachiale propius *apprimitur*; *ſecundus*, ſi ab illo *declinatur* ſeu abducitur; *tertius* erit, ſi hoc pollicis internodium in linea quaſi radii circuli movetur, hoc eſt verſus volam *inclinatur*, qui motus ſe potiſſimum exerit, ſi concavam reddere manum velis, aut digitorum apices coniungere; *quartus*, ſi pollex *reclinatur* in ſenſu antecedenti *oppoſito*, et fortiter *extenditur*. Iam hic, de quo nobis ſermo eſt muſculus, ſupra antecedentem (§. 16.) poſitus ex media ulnae parte et ligamento cubiti ortum ſuum ducit, atque in *tres* tendines diſtinctos dividitur, qui omnes obliquo ductu tendinibus radiaei externi inſtrati verſus pollicem diriguntur, eique movendo inſerviunt. Horum trium tendinum *infimus*, internodio pollicis primo adhaereſcens usque ad initium medii deſcendit, atque in latere illius *poſteriore* inſeritur: hinc et internodium medium ſine dubio erigit ſeu *extendit*; et ſi fortius agat, primum quoque: quoad hanc portionem igitur hic muſculus dici *Extenſor* poteſt, dum motum illorum, quos recenſuimus, quartum exercet. Portio *ſuprema* tendinem educit, nonnumquam ſubtilem, nonnumquam craſſiorem, atque in pollicis latus

latus *interius*, non autem, vt nonnulli memoriae prodiderunt, in carpi quintum os inseritur, ibique origini tendineae musculi Thenaris implicatur. Portionis *mediae* et principalis tendo crassissimus inseritur in *latus internum* pollicis immediate infra declivitatem (§. 8.) interiorem *e* primi eius internodii. Hanc portionem igitur non extendere pollicem, sed *abducere* a reliquis digitis, ex tendinis sui *directione* et *fine* patet. Dum enim a linea sua *recta deflexit*, qua super ligamentum cubiti currebat, ac super crenam in hunc finem radio insculptam tamquam super trochleam incurvatus denuo versus pollicem dirigitur: illam *actionem* exercet, quam (§. 9.) *inflexam* vocavimus. Cum vero via recta in latus *interius* pollicis, non vero posterius terminatur: versus illam quoque plagam hoc internodium inclinat, et motum exercet illorum, quos supra allegavimus, secundum; quem motum iam Vesalius si recte eius mentem assequi valeam, (k) indigitare conatus fuit. Quapropter, annon hic musculus, quoad portionem suam maximam Abductor potius, quam Extensor vocandus sit, illorum, penes quos est, iudicio lubens relinquo. Fig. 6.

§. 18. Flexorem internodii pollicis extimi in pluribus cadaveribus invenio *bicipitem*. Dum enim caput *principale* ordinarium originem suam ex superiore cubiti sede trahat, atque in progressu ligamento, quod radium cum vlna continet, ac radio ipsi adnascatur: corpus *alterum* teres et gra-

(k) L. II. C. 43. in fine de Musculo vigesimo secundo.

cile principium ex ipso flexore digitorum sublimi ducit, a quo facile potest separari; postquam vero a sublimi deflexit, tendines utriusque in *unum* plane coalescunt, vt nulla diuisionis nota appareat, qui suo loco ab autoribus satis descripto implantatur.

§. 19. Palmarem longum nonnumquam deficere, multi autores notarunt: mihi idem aliquando observare contigit in cadavere feminino, praesente tamen aponeurosi in vola. Si musculus ipse cum aponeurosi adest, modus, quo limites ligamenti annularis transgreditur, varius indicatur. Quibusdam simpliciter transcendit, aut supra illud ambulat; eius sententiae fuisse videtur B. Eustachius in Tabularum suarum vigesima prima paranda. Sed aliis in locis mens alia se prodit: nam Tab. XXVIII. XXX. tendo palmaris gracilis ligamentum plane perforat aut transfodit; quem modum tamen nimis affectatum deprehendere mihi hactenus numquam licuit. Cohaerere hunc tendinem cum aponeurosi, et quidem in confinio ligamenti annularis, verum est; sed non adeo conspicue se res prodit: quin potius in duas partes mihi visus est dirimi; quarum una de ligamento nihil participat, sed sub membrana musculorum communi abscondita illud simpliciter transgreditur atque in aponeurosin ordinariam terminatur; altera vero partim in ligamentum ita implantatur, ut fibrae minutatim sibi intextae, se invicem decussent, partim (quod et Eu-

Euſtachius Tab. XXXII. vidit) cum principio Thenaris ſe confundit. An vero circa confinia digitorum deſinat aponeuroſis, ſiue an usque ad extremitates illorum pertingat? disputatur. Numquam mihi tam felici eſſe contigit, vt tam longe illam proſequi potuiſſem: ſed illam mox a ligamento diſcedentem plerumque in tres partes dirimi, veluti radii circuli tamquam e centro productas, ad tres digitos, Indicem, Medium et Annularem directas; ac fibris ſuis perpetuo ſe diminuentibus, partim cum vaginis tendinum Extenſorum, partim cum ligamento aliquo transverſo (l) prope radices digitorum, eadem ratione ac cum ligamento annulari, confundi ſemper mihi viſum fuit.

§. 20. Non meum eſt nunc examinare: an hic muſculus creatus ſit, vt depilis fiat cutis? an? vt ſenſu acutiore ſit vola praedita; an? vt cutis manus in apprehendendis obiectis firmetur: haec enim omnia partim ab aliis refutata ſunt, partim ſua infirmitate labaſcunt. Sunt uſus alii, qui maiorem veritatis ſpeciem prae ſe ferunt. Conſtringere manum, ſeu cauam illam reddere poſſe, et corrugare hunc muſculum negat in Anatomia ſua rationali Tauryus; ſed credibile tantum eſſe, vt metacarpum verſus originem ſuam trahat, arbitratur. Verum primo, nihilominus in manu conſtringenda eundem adiutorem eſſe crediderim: partim, quia, dum abbreviatur, aliquam pinguedinis

Ii 2. portio-

(l) Huius ligamenti meminit Duglaſius, optime autem delineauit totam aponeuroſeos diviſionem una cum ligamento Caſſerius de Org. Sens. T. I. f. 2. B. C.)

portionem, quae aponeurosi illius implicita est, et cauitatem impedit, secum abducit; partim, quia aponeuroseos fibrae, quae diuergebant prius semper minorem inter se angulum constituunt, atque ita partes illas, quibus extremitate sua iunguntur, arctius et propius contrahunt; quemadmodum duo termini arcus, si chorda tenditur, propius ad se invicem accedunt. Quid, si deinde eo etiam inseruiat? vt ligamentum annulare sursum trahat, quo facto flexores digitorum magis firmantur, et ossicula carpi, queis ligamentum vtrinque adhaeret, erga se inclinantur, modo ligamentum mobile statuere liceat, quod ob propriam elasticitatem, ac debilem ossium carpi inter se cohaesionem nemo facile negauerit. Nihil definio: opta Lector, aut, qui praestas, Sector, ipse; et experire.

Explicatio Tabulae.

Fig. 1. per se patet.

Fig. 2. exhibet os carpi quintum manus dexterae, ex illa superficie, qua articulatio fit cum primo pollicis internodio, conspiciendum.

lit. a. prominentiola ad marginem interna.
b. prominentiola externa.
c. media superficiei pars.
d. decliuitas anterior.
e. decliuitas posterior.

Fig. 3.

Fig. 3. exhibet ſuperficiem primi pollicis internodii, qua oſſis antecedentis ſuperficiem tangit.

a. decliuitas interior.

b. decliuitas exterior.

c. ſuperficies media.

d. prominentia anterior altior.

e. prominentia poſterior.

Fig. 4. Siſtit manum integram, in cuius dorſo tendines Extenſoris magni ac tendines interſtitii; illorumque inter ſe coniunctiones videri poſſunt.

a, a, a. tendines maiores ad tres digitos progredientes.

b. tendo interſtitius inter Auricularem et Annularem.

c. tendo interſtitius inter Annularem et Medium.

d. diuiſio tendinum in duo cornicula.

e. Membrana, alba, tenax, tendines ad indicem et Medium pertinentes continens.

f. ligamentum annulare exterius diſciſſum.

Fig. 5. exhibet digitum Medium, atque inſertiones tendinum extenſoris communis, interoſſeorum, ac Lumbricalis.

a. b. Tendinis pars media, in

c. articulationem ſecundam ſuperſcandens.

d. portio ſecunda et tertia lateralis.

e. tendo lumbricalis longus.
f. interſtitium triangulare, membrana aponevrotica tectum.
g. ambitus tendinis lateralis ad articulationem ſecundam.
h. illius reflexio, verſus dorſum,
i. decuſſatio, et
k. inſertio.
l. duplex muſculus interoſſeus, in latere digiti medii interno, cuius tendines aponeuroſin latam formant.

Fig. 6. exhibet inſertionem lateralem Portionis tendineae mediae Muſculi vulgo extenſoris dicti in phalangam pollicis primam, quae cum carpo articulatur.

a. capitulum inferius, quo cum phalanga media iungitur.
b. latus interius, ſeu a digitis auerſum.
c. protuberantia anterior, ſiue in dorſo conſpicua.
d. tendinis Extenſoris portio media.
e. eius inſertio infra decliuitatem lateralem interiorem.

LIGAMENTI CLAUICULARUM COMMUNIS DESCRIPTIO,

AUTORE

Iosia Weitbrecht.

CLauiculas cum ſterno cohaerere, ita quidem, vt non omnis ipſi motus denegari poſſit, vno omnes ore Anatomici affirmant. Hinc et cartilaginem mobilem non ſolum interiectam habent, ſed et tam ſternum quam clauiculae in ipſius iuncturae ſuperficie cartilaginoſae ſunt, ſuoque muco obliniuntur, ne ex nimis forti frictione quidquam damni oriretur. An vero clauiculae alio quodam vinculo cum ſterno firmius coniungantur? ſiue an inter ſe ſint copulatae? de hoc vero altum eſt vbique ſilentium. Blanditus igitur ſum mihimet ego ipſe diu, et facile ab aliis aſſenſum obtinui, quaſi hoc ligamentum, cuius nunc deſcriptionem dabo, plane nouum eſſet, niſi tandem in Iohannis Riolani Enchiridion Anatomicum incidiſſem, in cuius Libro ſexto Oſteologiam nouam ex recentibus cadaueribus depromere molitus Autor Capite decimo tertio de Clauiculis memoriae tradidit: ,,quod inter ſe iunctae ſint ac reuinctae, *interuentu robuſti ligamenti* ,,. Haec vero admonitio cum a poſteris ſcriptoribus neglecta fuerit; inuentum in ſe quidem non plane nouum Tab.XXIII uum, ſed obliuione ſepultum reſuſcitabo, atque eorum, quae vel nudo verbulo Riolanus indicauit, vberiorem explanationem ſiſtam.

Situm eſt igitur hoc ligamentum inter duas clauicularum extremitates, quae ſterno applantantur, ſubter ſterni huius ſuperficiem interiorem, cauum pectoris reſpicientem, ita quidem, vt ex vno latere ab hac ipsa ſuperficie, ex altero vero a terminis musculorum parium ſternohyoidis ac ſternothyroidis obtegatur. Termini Ligamenti ſunt vtrinque protuberantia ſeu angulus acutior capituli claviculae, quo cum oſſe pectoris articulatur, ſurſum ac retro ſpectans, quemadmodum ab A. Veſalio in Hum. Corp. Fabr. L. I. C. XXII. f. 2. Lit. D. eleganter exprimitur: a quorum vno ad alterum transverſim ſub ſterni ſummitate ſurcata ſubducitur. Ligamenti figura nec plana, nec rotunda dici poteſt, ſed pro ſubiectorum diuerſitate variat; interdum duplex eſſe ac interſpersa pinguedine diſtingui videtur.

Cui detegere Ligamentum, et ſimul eius uſum volupe fuerit, facile id praeſtabit, ſi remotis integumentis communibus primo clauiculas in ipsa iunctura cum ſterno ſolvat, et quidem cautela ſumma, ne cultellus vltra iuncturam adigatur, quia alias ligamentum ipſum vna diſcinditur (quam rationem ſubeſſe putem, quare a tam paucis notatum fuerit): deinde cartilagines coſtarum pro more ſcindat, ac ſternum deorſum reflectat. Tunc enim ligamentum tamquam chordam tenſam, validamlidamque, ab vna clauicula ad alteram productam deprehendet: quo edocemur, clauiculas non solum inter se coniungi, sed et in sua articulatione cum sterno eo fortius detineri atque apprimi, ne illarum motu nimis lubrico, aut actione musculorum in ipsas implantatorum vehementiore luxationibus frequentioribus sint obnoxiae.

Poterit etiam in situ suo conspici, externe, si membranulae et vascula, quae in curvatura supremi ossis sterni, inter clauicularum capitula oberrant, diligenter separaueris: interne autem si in conspectum producere velis, solutis musculis supra nominatis in insertione sua, portio sterni ac clauicularum vtrinque abscissa, ex corpore auferri, dictique musculi postmodum vsque ad originem suam remoueri debent.

Ut imaginationi illorum, quibus aut cadauera aut sceleta ad manus non sunt, succurramus; luculentius rem omnem ante oculos ponit sequens

TABULA,

cuius

Fig. 1. exhibet resectam sterni, clauicularum ac musculorum allegatorum portionem, quatenus a latere externo omnia conspiciuntur. notatur autem

a. Musculus sterno-hyoides ab osse hyoide solutus.

b. Musculus sterno thyroides antecedenti subiectus.

d. Mufculus coraco hyoides.
e. Venula fternohyoidem interiacens, quae interdum fimplex, hic duplex eft.
f. membranula glandulam Thyroidem tegens.
g. abfciffae claviculae.
h. abfciffum fternum.
i. Capitula claviculariun iuncta cum fterno.
k. Ligamentum clavicularum.
l. venula abfciffa, fanguinem fundens.

Fig. 2. monftrat dictae portionis fterni et clavicularum faciem interiorem pectus refpicientem cum accumbente ligamento.
a. abfciffum fternum.
b. abfciffa clavicula dextra.
c. abfciffa clavicula finiftra.
d. Clavicularum capitula.
e. Ligamentum clavicularum in hoc fubiecto duplex vifum.

OBSERVATIONES ANATOMICAE

AUTORE

Jofia Weitbrecht.

I.

Tab. XXIV.

Mufculus in pectore extraordinarius.

SI apud naturae Scrutatores gratiam merentur illi, qui in variationes partium corporis humani diligenter inquirunt; vel, qui in parvis magnam fedulitatem locantes ac operam, duo effe oftendunt, quae ab aliis, quorum aut oculi

oculi non tam lyncei, aut cultellus non tam acutus, pro vno fimplici habita funt: fpero, me veniam faltim effe promeriturum, fi musculorum par integrum, infolitum alias, et magnitudinis non contemnendae producam, quod e cadauere militis cuiusdam tale deprompfi:

Immediate fub thoracis integumentis ex offe fummo fterni duo mufculi oriebantur aponeurofi communi breui, quorum alter paulum ad dextram, alter fimiliter ad finiftram flexus, fuper cartilagines coftarum et origines mufculi pectoralis maioris decurrebat, relicto fterno propemodum intacto et nudo. Corpus huius paris mufculorum tres digitos latum et digitum craffum poftquam peruenerat ad coftae quintae verae cartilaginem, denuo degenerabat in aponeurofin, quae fibras tendineas, quae a ferrato maiore antico proueniunt, decusfans, et principium mufculi abdominis recti transgreffa tandem in infcriptione huius prima maximam partem obliterabatur. Si de actione interroger: autumo, contrahendo fefe Rectum abdominis propius ad pectus attrahere, atque ita in refpirationis negotio fuos ufus exercere.

Ceterum et fitus, et progreffus et infertiones facile partes meas tuentur, fi quis me perperam vidiffe mihi obiecerit. Neque fufpicionis metum me incurrere putem, quafi homini affingere ftuderem, quae quibusdam tantummodo animalibus propria effe conftat. Equidem non ignoro, Vefalium omnem mouere lapidem contra Galenum, ne quis musculum fere similem, quem in sua C. H. Fabrica L. II. C. XXV. quintum thoracis descripsit, et Tab. V. delineauit, vtpote a simiis transsumtum ad hominem pertinere crederet: praesenti tamen exemplo rei saltim possibilitas euincitur. Siquidem et alibi musculos tales extraordinarios nonnunquam dari, sectionibus expertus sum. Inter musculos enim abdominis descendentem et ascendentem occurrit aliquando mihi alius quidam musculus, calami scriptorii crassitie: qui ortus ex apice cartilaginoso costae vndecimae excurrit intra Descendentem iuxta huius fibras, et Adscendentem. Non autem pro fibra descendentis separata haberi debebat: neque enim in membrana huius communi involutus erat, et fine etiam gaudebat plane peculiari, vtpote in aponeurosin ascendentis insertus. Nec pertinebat ad ascendentem, nam huius fibras decussabat. Erat igitur musculus plane peculiaris et insolitus; quem quidem facile reticuissem, nisi argumenti conditio mentionem eius facere iussisset.

Musculus abdominis extraordinarius.

Vtut vero talia organa leuis momenti esse videantur: non tamen, meo quidem iudicio, plane sunt negligenda. Gaudent enim suis vasis et ad motus edendos aeque apta sunt ac cetera. Si corpus motum in aliud impingit, a directione pristina deflectit. Si filum diuersis locis diuersimode tenditur, flexurae oriuntur diuersae. Non dubium igitur est, quin et in corpore humano praesentibus istiusmodi organis insolitis, motus aliqui con-

consequantur, qui gigni non potuissent, si organa ista abfuissent. Cum vero homo, ut homo, etiam sine his instrumentis raro occurrentibus perfectissimum animal esse iudicetur: quare illa, cum adsint, non aeque miramur, ac si in hominem pede aut digito supernumerario ditatum incidimus? Scilicet huius incommoda aut commoda in oculos statim incurrunt: ista autem despicimus, quia ignoramus.

II.

Tuba Fallopiana vtraque in extremitate fimbriata coalita.

Res omni attentione dignissima oblata mihi est in vtero feminae alicuius a me dissectae. Erat vterus ea magnitudine, qua esse solet in virginibus, tubaeque ambae apertae quidem ad ingressum vteri, ita vt ex hoc in illas cum specillo facile possem transire, ac flatum iniicere: sed in tubarum extremo nulla dabatur apertura, nullus aditus. Fimbriarum enim ne vestigium quidem aderat, sed loco illarum bulbus aliquis *pyriformis*, materia subalbida fluida turgens, in cuius medio fibra plana neruea, cicatriculae aemula apparebat, quae sub ligamentuli specie vsque ad ouarii inuolucra protendebatur.

Dices: eadem a Regnero de Graaf iam olim notata. Equidem non negauerim, illustrem hunc Prosectorem in libro suo de Organis mulicbribus non modo similem Tubam delineasse Tab XIX. f. 3. sed et monuisse „Tubas, quamvis secundum ordinariam naturae dispositionem in extremitate sua notabilem ſemper coarctationem habeant; praeter naturam tamen aliquando claudi.,, Verum enim vero cum non meminerit Autor, an id in vtraque tuba ita deprehenderit? an in virgine? an ſtatus iſte praeternaturalis ſterilitatem inducat? an vero conceptio nihilominus fieri poſſit? an a principio vitae talis ſtructura ſuam originem ducat? ſiue, an tractu temporis ita degenerare tubae poſſint? facile perſpicimus, multa nobis relicta eſſe problemata, quae vtcunque ſoluta multum negotii faceſſant in exemplo noſtro. Erat enim haec femina maritata, viginti quatuor annos nata, quae filium pepererat, quem vidi ipſe, octo iam annos natum, vna cum auia ex matre, matris et filiae cadauer a me petentem. Dic igitur, tubas ab incunabulis clauſas ſterilitatem inducere: quare haec noſtra femina peperit? Dic, concepiſſe tubis clauſis: quomodo ouulum ingredi tubam potuit? Dic, coaluiſſe tubas poſt partum: quomodo id noſti? quomodo adeo euaneſcere in vtroque latere fimbriae poſſunt, tamquam numquam adfuiſſent? Si quidem ex ouario ad tubas alia daretur via praeter illarum orificium: vnico greſſu omnes ſuperarentur difficultates. Sed fictiones intellectum quidem adiuuant, rei veritatem non demonſtrant. Praeſtat igitur, ignorationem fateri, quam ſpeculationibus indulgere.

Non diſcedere ab hoc cadauere poſſum, quin et reliquas addam obſeruationes, non tam raritate aut vſu, quam potius, quod in vno eodemque cor-

corpore factae, commendabiles. Arteriae umbilicales tres pollices ante, quam ad umbilicum accesserant, in vnum truncum coaluere. Ren finister ex vna pelui duos vreteres produxit, qui duos pollices ab egressu iungebantur. Obseruatum est id Ruyschio aliisque multoties; sed pelues duae inter se non communicantes, quales ren dexter exhibebat, cum duobus vreteribus vsque ad vesicam deductis, oppido raro occurrunt. Ex Ileo latam manum ab insertione eius in Coecum, immediate supra vterum oriebatur processus seu intestinulum aliquod coecum, diametro pollicem longitudine duos pollices aequans, capacitatis vbique aequalis: in fine duo erant tubercula itidem caua, quasi duo cornua, alterum supra vteri fundum alterum infra ipsum vergens, ita vt illum tamquam digiti complecterentur. Non haberi poterat hic processus pro aliqua ilei dilatatione, saccum formante, siquidem suis propriis ligamentulis ac fibris motricibus erat praeditus, sine quibus extra dubium, excrementa, si qua diuerticulum ibi quaesiuissent, delitescentia expelli non potuissent. Totus processus magis dilucide conspicuus est in Tabula, cuius

Arteriae umbilicales in vnum truncum coalitae

Vreteres duo cum pelui duplici

Fig. 1. exhibet portionem Intestini Ilei, cum processu insolito in suo situ.

Fig. 2. exhibet portionem eandem, sed processum sursum reflexum.

a. Ileum ab intestinis crassis abscissum.

b. Ileum abscissum ex altera parte.

c. Mesenterium separatum.

d.

d. Processus extraordinarius.
e. locus vbi ex illo oritur.
f. duo tubercula.
g. curuatura, cui vterus adiacuit.
h. ligamentula, ac fibrae circulares eodem modo ac in aliis intestinis conspicuae.

III.

Obliquus vteri situs

Vterum loco suo moueri, et vtrinque ad latera inclinari posse, multum ac vehementer disputat Henr. a Deuenter in Nouo Lumine de arte Obstetric. Hinc erroris arguit obstetricantes, qui interdum secundinas non in fundo vteri sed ad latera adhaerere et sibi et aliis persuadent: cum tamen haec loci mutatio non a secundinis ipsis, sed potius a reflexo situ vteri ipsius proueniat. Plurimum fauet sententiae huic Deuentrianae positio vteri, qualem his diebus in quadam femina detexi. Erat vterus constitutionis naturalis, qualis in non praegnantibus esse solet. Non iacebat autem in medio inter vesicam vrinariam et intestinum rectum, sed ad latus dextrum deflectebat, ita vt ligamentum, quod latum dicitur, hoc ipsum intestinum superscanderet, et tamquam velamen obtegeret: ex peruerso situ necessario sequebatur, vt ala sinistra multo longior ac latior cum annexis esset, quam dextera. Haec extensio ac positio num a statu grauiditatis antecedaneo vel iam inde ab ovulo ortum suum duxerit? nunc non inquiro: ceterum tamen dubium non est, quin vterus hic postliminio impraegnatus in eodem situ inclinato permanmanſurus, atque ita parturienti plurima incommoda objecturus fuiſſet. Non erravero igitur, ſi argumentis illis ſatis firmis, queis obliquum vteri ſitum in grauidis adſtruere anniſus eſt à Deuenter, hoc addidero, quod et nonnunquam in antecedaneam diſtorſionem matricis nondum foecondatae ac ligamentorum inaequalem explicationem illius culpa redundare poſſit.

IV.

Abſceſſus in principio aortae.

Sartor aliquis, ſaniſſimus habitus, inclinando corpus, vt ferramentum ad laeuigandas fimbriarum inaequalitates capeſſeret, ſubito concidit examinis. Repentinae mortis cauſſa vt ſciretur, ſectioni traditum eſt cadauer. Sub cranio violentiam quaeſiviſſes mecum: Sed intra thoracis penetralia malum omne delituit. Ecce enim, remoto ſterno ex pericardio vehementer turgido aqua ordinaria cum impetu proſilit. Putabam, omnem pericardii cavitatem illa repletam fore: igitur ſpongia exhaurire tentabam. Sed mea me feſellit opinio. Lympha enim pauca ſupernatabat grumis ſanguineis recentibus octo uncias pendentibus. Stupefactus ad tam inſolitum phoenomenon, in profuſionis causſam inquirere adgredior. Inflo igitur primo venam cauam, et ecce per foraminulum in aortae principio aer omnis redit. Duo mihi curioſa videbantur: primo quod laeſio in tam robuſtis tunicis ſedem haberet; deinde, quomodo aer ex caua in aortam poſſet tranſire, cum nullam mutationem pulmones paterentur. Cor igitur exſcindo cum vaſis adhaerentibus ſumma cura, et apertis cavitatibus inuenio corroſas, et tamquam a muribus exeſas tunicas aortae immediate ſupra valuulas ſemilunares, et membranam adipoſam, quae vaſorum e corde egredientium principia cingere ſolet, in regione ſternum reſpiciente perforatam.

Cauſſa huius abſceſſus ſine dubio aut pus, aut alia quaedam materia acris eſſe debuit, quae primum intra tunicas aortae proprias ſtagnauit illasquam tam introrsum quam extrorſum exedit. Tunicis vero ſolutis membrana exterior vi cordis ſuſtinendae impar fibrarum ſuarum rupturam ſenſim perpeſſa omnimodam, ſanguini tandem neceſſario locum conceſſit, quo dilaberetur. Si autem membrana haec exterior prius rupta fuiſſet: non modo a materia rodente in pericardium effusa, cor quod cetera ſanum apparet, corruptionem contraxiſſet: nec etiam aortae tunicae tam longe ac late abſumtae atque exeſae viſae eſſent.

Valuula foraminis oualis non penitus clausa.

Alterius phoenomeni ratio ſimiliter ſtatim ſe prodidit. Scilicet foramen ouale ad limbum valuulae aperturam reliquerat, qualem Morgagnus in Aduerſ. IV. f. 4. delineat, ita, vt ouum ouo ſimilius eſſe non poſſit, atque ejus pictura meae obſeruationi; ſi poſitionem ſolam excipias: dum noſter hic ſinus propius ad valuulam accederet, et magis ad latus quam inferiora verſus applantaretur.

An-

ANNOTATIONES
ET
EXPERIMENTA QUAEDAM RARIORA ET CURIOSA AD REM SCLOPETARIAM PERTINENTIA.

Ioh. Georg. Leutmann.

§. 1.

IN antecedentibus Tom. III. scil. Commentariorum, modum tradidi, quomodo sclopetis cochleati sulci recte possint incidi. Nunc quaedam exponam ad intimiorem cognitionem rationum spectantia, accuratioris propulsionis globuli ex sclopetis eiiciendi, quae hactenus partim ignota partim pro secretis fuerunt habita. Tab. XXV. et XXVI.

§. 2. Certum est, lineam quam globulus, ex sclopeto proiectus, describit, non esse rectam. Linea quidem directionis, quam tubus globulo in explosione imprimit, rectam intendit progressionem, sed duplum hic impedimentum obseruatur, quo minus id fieri possit:

§. 3. Quo longius enim progreditur globulus, eo magis decrescit vis impellens. Deinde grauitas globuli semper deorsum tendit, et nisi vi propelleretur, statim post exitum ex tubo decideret. Impulsus itaque virtutis mouentis, vehemens quidem, paulatim tamen semper remittens, et grauitas globuli propria, motum recipiens, deorsum vero natura tendens, contrario nisu agunt, de Praxitele et Lyſippo, non vt de aequalibus loquitur, ſed vt de ſtatuariis, qui ante ſe fuerint. Ergo poſt Alexandrum hunc Calliſtratum poni patiar, ſi cui ita videbitur, aequalem Alciphroni rhetori, cuius item aetas nos latet, dicendi ratio perſimilis eſt. Quam vero obſcurus hic Calliſtratus fuerit, qui de ſtatuis, qui, teſte Athenaeo, de ſcortis et de Athenis ſcripſit (puto enim eundem auctorem hos libros edidiſſe) ex eo intelligo, quod Harpocration, quoties eius περὶ Ἀθηνῶν librum citat, citat autem tribus in locis, toties dubius animi haeret, Meneclen eum nominet, an Calliſtratum. Quae cum ita ſint, nihil eius in auctoritate eſt ſitum, vt Praxitelen illo, quo dixi, tempore fuiſſe, Plinio non concedamus.

Et Venerem vero Cnidiam Praxiteles extremis Philippi aut ſub primis auſpiciis Alexandri feciſſe videtur. Quod quomodo indagauerim, videte. Solus eſt Clemens Alexandrinus, (1) qui memoriae proditum reliquit, Cnidiam, ad Cratinae, quam ſecum habuerit Praxiteles, formam eſſe factam. Auctorem citat Poſidippum de Cnidiis rebus. At ceteri fere conſentiunt, Phrynen Theſpiacam in marmore ductam eſſe a Praxitele. In iis eſt Arnobius. (2) *Phryne*, inquit, *ſicuti illi referunt, qui negotia Theſpiaca ſcriptitarunt, cum in acumine ipſo eſſet pulcritudinis venuſtatis et floris, exemplar fuiſſe perhibetur cunctarum, quae in opinione ſunt, Venerum, ſiue per vrbes Graias, ſiue quo iſte fluxit*

(1) In protreptico ad gentes p. 35. (2) Aduerſus gentes l. VI. p.

xit amor talium cupiditasque ſignorum. De Cnidia Venere nominatim Athenaeus, (3) quam, vt dixi, Phrynae adimit Clemens, cum ceteras Veneres ad eius formam ſculptas fuiſſe concedit. At Cratina aliqua, tanta fama pulcritudinis, non a Deipnoſophiſtis, non ab Alciphrone, non alio in ſcriptore celebratur: in Phrynes venuſtate atque illecebris tota inſaniuit Graecia. Huius pulcritudinem foeminae iudicium nobilitauit ad aetatem eius cognoſcendam. Nam cum Euthias Phrynen adoleſcentulam haberet, Hyperides orator Myrrhinam, illa ab Euthiae conſuetudine diſceſſit ad Hyperidem, Myrrhina ad Euthiam. Euthias, vt amicae perfidiam vlcisceretur, dicam ἀσεβείας ei ſcripſit, in qua de Eleuſiniis ſacris neſcio quid inerat, Hyperides defendit. (4) Cum autem iudices eam damnaturi viderentur, incertum an Hyperides accedens ad ream dilacerata veſte corpus ſpecioſiſſimum ad miſericordiam mouendam nudauerit, an ipsa perculsa periculo ſciſſa veſte nudoque pectore ad pedes ſeſe proiiciens iudices perculerit: diuerſi enim ſunt et graues vtrimque teſtes. Iſthuc tamquam de forma eius mulieris iudicium mox Athenis et tota Graecia percrebuit: eo motus Praxiteles Phrynen potiſſimum ſelegit, cui Venerem ſuam vellet ſimilem. Huius tempus iudicii e Plutarcho mihi videor

(3) p. 591. Πραξιτέλης δ' ὁ ἀγαλματοποιὸς ἐρῶν αὐτῆς, τὴν Κνιδίαν Ἀφροδίτην ἀπ' αὐτῆς ἐπλάσατο. (4) Alciphron l. 1. ep. 30. 31. et quos ibi Stephanus Bergler, V. C. amicus meus produxit teſtes.

§. 11. Grauior horum globulorum apex praecedit ſemper, caua parte conica, tanquam leuiore, ſubſequente, id quod theoria motus docet, et praxi confirmatur. Si enim eiusmodi globulus murum, ex lapidibus durioribus exſtructum, ferit, tunc autopſia veritatem probat, dum in dilatato globo circulus cognoſcitur â baſi coni reſiduus.

§. 12 Vehementia vero ictus ex eo apparet, quod globulus, ad lapidem alliſus in tenuem laminam plumbeam dilatatus conſpiciatur, ac ſi mallei ictu diductus eſſet.

§. 13. Meliorem adhuc effectum hi globuli exhibent, ſi maiores adhibeantur ipſa cauitate ſclopeti cochleatis ſulcis inſtructi. Orificium ſcil. ſclopeti oleo, axungia porcina mixto, intus inungitur, imponitur globulus in orificium, ita vt cauitas conica introreſpiciat et mallei plumbei Fig. 3 A ictibus iteratis impellatur, tunc globus ſulcis imprimitur, ſuper abundantia vero ramenta plumbea, ad ſuperficiem orificii haerentia, abſcinduntur. Poſtea bacillo ligneo Fig. 4. B digitos tantum 5 longo, et, ſi placet, in vtroque extremo annulis orichalceis *a a* munito, vlterius ope mallei plumbei A propellitur, tandem per baculum ordinarium, onerationi ſclopetorum dicatum, intruditur vsque ad pulueris pyrii obduraculum ſeu ſpiſſamentum, tunc leui negotio cedit globulus baculo, modo recte ſe habeat et omnis labis expers ſit tubulus ſclopeti.

Fig. 3.
Fig. 4.

§. 14.

14. Obduraculum seu spissamentum, pulueri pyrio imponendum, optimum adhibetur, quod ope cylindri chalybei caui, Fig. 5 B, aperturam sclopeti aequantis, acie praediti, et sensim ad figuram conicam assurgentis patentiorem, ex pileo exscinditur, per ictum mallei ferrei, quorum deinde duo combinantur glutine, Fig. 6 D, vt cylindrum referant, aeque vere altum ac latum, ne tenuiores ad latus deflectendo aerem transmittant. Hoc tubum sclopeti arcte claudit, et virtus elastica pulueris pyrii coerceatur optime, ne ad circumferentiam globuli erumpat, sed omnem nisum ad propellendum globum intendat. Fig. 5. Fig. 6.

§. 15. Globulus vero cauitate conica praeditus leui negotio hunc in modum formatur: Modulo in quo globuli plumbei funduntur incidatur foramen (*a*) Fig. 7 a infundibulo (*b*) e diametro oppositum. In hoc foramen ponitur ferreus conus *d*, collum *f* in basi habens foramini moduli conforme. Huic cono superinfunditur plumbum liquidum, et sic confectus erit globulus *b*, fig. 2. cauitate conica praeditus. Fig. 7. Fig. 2.

§. 16. Quoniam hic de globulis sermo fuit, obseruationem merentur et illi globuli, qui explosi et feram ferientes in quatuor se explicant et dissiliunt partes, vulnusque maxime amplum infligunt ita vt aper vel vrsus iis ictus statim animam cum vnda sanguinis effundat.

§. 17. Conficiuntur illi si ad modulum conficiatur tenuis ex bractea chalybea orbiculus Fig. 8. Fig. 8

ad

ad amplitudinem cauitatis moduli limatus *a*, cui ad angulos rectos decussatim adferruminatus est alter eiusdem magnitudinis et formae orbiculus *b* inferius adaptatur et firmatur pedunculus *c*, orbiculari huic cruci firmiter adhaerens, qui foramini, inferius modulo incisi, imponitur vt orbiculi à modulo includantur. Super has lamellas infunditur plumbum. Globuli deinde formati *d* collum *g* abscinditur non admodum curtim et lamellae extrahuntur postquam cultello globuli fissurae a lamellis factae aliquantulum diductae fuerint, tunc globus decussatim diuisus in quatuor quadrantes et ad collum cohaeren-
Fig. 8. tes erit confectus Fig. 8.

§. 18. Hoc globulo ita oneratur sclopetum, vt collum sursum ad orificium respiciat, fissurae vero spissamento pulueris pyrii incumbant. Tunc explosi et obiectum ferientis globuli quadrantes se explicant ingens, atque amplum vulnus animanti infligunt, mortem subitaneam inducens ex profluuio sanguinis largiori, cum prostratione virium momentanea.

§. 19. Hoc genus globulorum non excauatur conice inferius, ne aer irruens explicet coniunctos quadrantes, antequam obiectum feriant, sed per aerem transiens globulus integer maneat, vsque dum tangat obiectum et tunc demum ab ictu dissiliat. Attamen hi globuli inuolucro linteo sebo illito circumuoluti ad tubos cochleatos atque sclopeta manuaria adhiberi possunt.

§. 20.

§. 20. Paucis etiam noti ſunt globuli concatenati ſeu per filum orichalceum connexi, breuiter itaque parandi modum indicabo. Fig. 9. Circumuoluitur filum *a* orichalceum, craſſiusculum et igniendo bene emollitum et obſequiosum redditum, cylindro *b*, vt altitudinem fere dimidii pollicis exaequet. Eximatur cylindrus circumgyrando et extrema fili *c* et *e* recuruentur, et iterum candefiat paululum conuolutum filum orichalceum *a*. Deinde vnum extremum *c* recuruatum in modulum formando globulo deſtinatum imponatur et fundatur globulus tunc globulus filo firmiter adhaerebit; Ad alterum extremum fili *e* etiam fundatur globulus. Tandem duo iſti globuli filum flectendo ita diſponantur vt ſupra vnum globulum *f* conuolutum filum *a* ſitum ſit, cui inſiſtat alter globulus *d* et concatenati globuli erunt recte parati. Fig. 8.

§. 21. Exploſi hi globuli combinati magnam vim exerunt. Aut enim corpora diſſecant, per filum proiectione explicatum et extenſum; aut globulus, corpus feriens, efficit, vt à filo illud dilaceretur, eique magnum vulnus infligatur.

§. 22. Praeterea conſiderationem meretur cochlea mas, qua cum orificium poſterius clauditur tubi ſclopetorum (die Schwantz-Schraube). Haec ſi ad figuram parabolicam excauetur, â pauco puluere pyrio magna vis conciliatur ſclopetis Fig. 10. Fig. 10.

§. 23. Cum enim parabola hanc habeat indolem, vt omnes radii, ex foco parabolae prouenientes, tendant ad latera parabolae, et iuxta leges geometricas ab iis reflectantur modo parallelo. Ex eo fit, vt tota vis pulueris, in foco accensi, in globum dirigatur, eumque vnita virtute eiaculet.

§. 24. Accedit et hoc, quod non facile disrumpi soleat tubus sclopeti, hoc modo efformata cochlea clausus, quia pulueris expansio non agit in latera tubi, sed recta globum propellit, cum in aliis sclopetis accensi pulueris radii vage ad latera tubi allidant, et ad angulum incidentiae iterum ad latera tubi repercutiantur, vnde magnam vim virtutis expultricis ex multis repercussionibus amittunt et elanguescunt. Ad lit. C vnius tantum radii *a* repercussiones iuxta regulas Geometricas delineauimus, quorum tamen innumeri mente sunt concipiendi, inde per multas repercussiones virtus pulueris debilitatur. Tubus vero magnam vim patitur, et disruptioni valdé est obnoxius.

§. 25. Ex iis considerationibus inuenta sunt in Saxonia Mortaria, camera parabolica praedita, quae ad stupendam distantiam proiiciunt pilas ferreas, Granata dictas. De quibus fortasse alia occasione agam.

§. 26. Nec minus foramina, accensioni pulueris dicata, ita sunt adornanda, vt figuram conicam nanciscantur, sic vt basis coni caui intus
Fig. 11. versus cauitatem tubi spectet Fig. 11. Id quod hoc modo obtinetur.

§. 27.

§. 27. Fiat in tubo *A* foramen *a*, vſque ad cauitatem tubi, amplitudinem pennae anſerinae exaebuans, incidatur ei cochlea foemina. Paretur ad eam cochlea mas ex orechalco. Cochlea illa mas *d*, in medio axeos, foramine exiguo perforetur. Hoc ex ea parte, qua intus ſpectat, conice amplietur. Poſtea cochleae foeminae tubi, in margine exteriore, incidantur rimae *a* ad modum ſtellae. Cochlea mas *d* imponatur in hanc ſuam foeminam *a* vt aliquantum promineat, et mallei ictibus diducatur, pars prominens, vt ſe inſinuet in rimas ſtellae. Tandem ad planitiem tubi exteriorem lima abradatur ſuperfluum, et exterius aliquantulum excauetur foramen, vt eo facilius ignem concipiat puluis pyrius, et res recte erit peracta.

§. 28. Tandem ſingulare problema explicabo: Scil. conficere ſclopetum cochleatis ſulcis non praeditum, quod tamen globulum gyrando circa ſuum axem proiicit. ac ſi cochleatum eſſet, cum tamen perſpiciendo per tubum nullo modo cognoſci poterit, vnde gyralem directionem concipiat globulus. Tale ſclopetum omnia praeſtat quae a cochleato tubo expectari poſſunt. Fig. 12.

§, 29. Fiat itaque lima *A* Fig. 12 rotunditate elliptica ſeu ouali praedita ex duabus partibus *c* et *e*, vt per mediam longitudinem diſſecta quaſi appareat. In medio longitudinis *b b* craſſiuſcula. Aptetur ſuperius et firmetur ad ſcapum quadratum *a* cochlea *b* traiecta.

Haec lima indatur ſcapo ſuo quadrato *a* in virgae chalybeae extremi foramen quadratum, quae virga pertinet ad machinam pro tubis cochleatis parandis adornata et descripta extat Tom. III. Commentariorum §. 17. pag. 163. et ibi etiam firmetur clauo vel cochlea traiecta.

§. 30. Deinde lima immittatur in tubum sclopeti, et ope cochlearum *f k* et *g l* distendatur vt crura *e* et *c* latera tubi tangant, et exercitata machina libere sed tamen arcte per tubum transeat.

§. 31. Versetur machina donec lima tubum non amplius radit. Tunc vlterius diuaricentur crura limae, per cochleas *f k* et *g l*, et iterum exercitata machina operetur, vt profundius se insinuet lima in tubi latera. Hoc toties repetatur, donec orificium sclopeti aliquantulum ouale accuratius intuenti appareat.

§. 32. Tandem cylindrus quidam ferreus longus 4 vel 5 digitos immittatur in tubum ad 3 vel 4 digitos et circumfundatur plumbum liquefactum, postquam tubus intus a fumo lampadis suppositae fuligine bene erit obductus. Hic cylindrus plumbeus post extractionem oleo illiniatur, et loco limae in virga chalybea firmetur, et bis vel ter per tubum transmittatur. Postea puluere smiridis conspergatur addito oleo, et postquam occupauerit locum limae machina iterum exerceatur, idque tam diu iteretur donec tubus et satis splenditus et sine rimulis per limam factis erit conspicuus. Cylindrus plumbeus vero, post multas exercitationes machinae, laxior factus, de nouo erit refundendus,

dus, vt ſemper arcte pertranſeat tubum. Et ſic res erit peracta.

§. 33. Gyrum enim lima excauat in tubo oualem, perſpicienti plane imperceptibilem, per quem globulus propellitur gyrando, eique eundem motum gyralem imprimit ac dirigit.

§. 34. Quando itaque onerandum eſt tale ſclopetum tunc globulus oblongus et aliquantulum maior cauitate tubi, malleo plumbeo crebrioribus ictibus adigatur vt intret, ſuperfluum plumbum ad orificium ſclopeti haerens abſcindatur, et reliqua obſeruentur quae §. 13 ſunt propoſita, tunc globus eodem modo ac in ſclopetis cochleatis gyrando proiicitur, cum tamen cochlea in tranſpiciendo tubo nullo modo appareat.

§. 35. Quod ad veram menſuram pulueris pyrii pro oneratione ſclopetorum attinet ſequentia habe; Edidit ante plures annos Italus quidam *Nicol. Spadoni* librum in lingua Italica cui titulus *Venatio cum ſclopeto, nunc valde rarum.* In eo de onerandis ſclopetis ſequentia proponit: Oneratio ſclopeti requirit vt $\frac{2}{3}$ ponderis pulueris pyrii aſſumantur ad grauitatem globi plumbei.

Ad globulos plumbi comminuti (Schrot) asſerit generaliter, quod ad ordinariam onerationem 1 Libr pulueris pyrii ſufficiant 4 Libr plumbi. Si vero fortior ictus expetatur, tunc ad 1 Libr. pulueris aſſumi poſſunt 3 Libr. plumbi.

Item ad ordinariam onerationem ſclopeti adhibeatur altitudo pulueris 2 diametrorum amplitudinis ſclopeti. Tantum ille, Conſuetudo eſt vt ad globum ſclopeti maiorem adhibeant tantum pulueris quantum modulus globi ter recipere poteſt; ſi minor fuerit globulus quatuor modulos dant.

§. 30. *Mihi* mos eſt ſequentem in modum explorare quantitatem pulueris adhibendam; Onerationem ſclopeti adorno cum quantitate pulueris quam iudico conuenientem et explodo ſclopetum. Si placide et ſine reactione ſeu repulsu ſclopeti ſolutio procedit, addo aliquid pulueris, et iterum in exoneratione obſeruo vtrum retropellatur ſclopetum etc. Idque tam diu repeto, puluerem ſemper augendo, donec reactionem percipio, tunc de puluere pauculum detraho, et illa vltimo inuenta quantitas dat veram menſuram pulueris ſclopeto proportionalem.

§. 37. Ad plumbum comminutum vtor eo modulo quem ad puluerem adhibui, modo modulus diametrum externae circumferentiae aequalem habeat orificio ſclopeti vt immiſſus ad illud quadret, et craſſities moduli ſit inſtar bracteae ferreae communis.

De

DE OCYMOPHYLLO NOVO PLANTARUM GENERE

Aut. Joh. Christ. Bauxbaum.

Ocymophyllum ob foliorum cum foliis Ocymi similitudinem appellamus plantam palustrem paucis memoratam Botanicis, et cuius accuratus character hactenus plane fuit incognitus. Hanc itaque in ciuitatem recipere, genuinas ipsi notas assignare et suo loco inserere iuuat. Tab. XXVII.

Descripsit primo Boccone in Museo Plantarum rariorum, cui audit: Glaux maior palustris, flore herbaceo. Sequenti vero describit modo: in locis palustribus oritur planta quaedam repens, caulibus palmam circiter altis, nonnihil rubentibus, rotundis, Beccabungae similibus, quorum medium percurrit neruulus luteus, qui caule rupto integer manet, cuiusmodi etiam obseruatur in Beccabunga et Morsu gallinae. Folia ex singulis geniculis exeunt coniugata, pediculo satis longo insidentia, substantia Myrtacea, verum molliora et tenera, Beccabungae valde similia, primo exortu rotunda, postea paulum elongata. Ex iisdem persaepe caulis geniculis exeunt ramuli eodem ordine. Inter folia et caulem in vtraque parte ordinate cernitur flos paruus, qui antequam aperitur, vna cum seminis inuolucro claui capitulum exprimit quadrilalateri, postea explicatus quatuor folia herbacea ostendit coloris pallidi, in stellae formam disposita. Radix alba est, tenuis et fibrosa. Tota planta omni odore caret; saporem autem habet herbaceum, fatuum, cum pauca adstrictione. Floret mense Iulio et Augusto semen maturat coloris rufescentis, minutum, rotundum in quatuor capsulis distinctis, quae inuolucrum integrum efficiunt, contentum.

De hac Bocconis descriptione notandum primo quod folia minime Beccabungae similia sed potius Ocymo. Secundo quod Flos iste in quatuor foliola herbacea expansus non sit flos, sed calycis segmenta in stellae formam disposita; flores enim fert exiguos stamineos, luteos, apicibus paruis, rotundis, pariter luteis instructos, fructui insidentes et calyce tetraphyllo circumdatos.

Est itaque Ocymophyllum plantae genus, flore apetalo stamineo, embryoni insidente, qui deinde abit in fructum oblongum, quadrangularem, in quatuor loculamenta divisum, seminibus foetum exiguis, subrotundis. Adde folia Ocymi et locum natalem in palustribus.

Pertinet ad herbas flore stamineo, fructui contiguo, seminibus vasculo inclusis in Raj. Meth. em. et auct. in Tournefortii vero ad Classis XV. sectionem 1. de herbis flore stamineo, cuius calycis posterior pars abit in fructum. Vide Fig.

DE

DE PLANTIS SUBMARINIS OBSERVATIONES.

Aut.
I. C. Buxbaum.

Plantae ſubmarinae paucae fuerunt antiquioribus notae Botanicis, quarum numerum valde auxerunt Raius, Plukenetius aliique, qui his obſeruationes ſuas communicarunt. Diſtinxit quidem in aliquot has claſſes modo laudatus Raius, ſed ſi accuratius inſpicias ipſum inuenies confuſum, nullos veros terminos conſtituentem inter Fucos et Algas et Muſcos marinos, quae illi promiscue nunc ſub hoc nunc ſub illo nomine proponuntur. Tab. XXVIII.

Meliorem plantarum ſubmarinarum in genera certa diuiſionem debemus Tournefortio, qui tamen in eo reprehendendus, quod ſub Fucorum et Corallinarum nomine plantas inter ſe parum conuenientes comprehendat.

Quo autem plantae marinae accuratius inter ſe diſtinguantur et confuſio euitetur, adhuc aliquot ipſorum genera, praeter ea a Tournefortio facta, introducenda ſunt, et vt errores hactenus in hac re commiſſi corrigantur, ſequenti procedendum modo.

Sub Fucis relinquantur ſpecies a Tournefortio recenſitae, quae cum Fuco vulgari conueniunt, abſcin-

Multa alia in mentem venerunt aduersus superiores sententias, quae fiducia meae opinionis, quam nunc expositurus sum, consulto praetermisi. Aio igitur, Varagos Ruthenicorum scriptorum, fuisse ex Scandinauia Daniaque homines nobiles, socios in bellis et stipendiarios milites Russorum, regum satellites, limitum custodes, rebus etiam ciuilibus et magistratibus admotos: ab iis deinde in vniuersum omnes Suedos, Gothlandos, Noruagos, Danos dictos fuisse Varagos. Et primum quidem Russici annales quamquam ab Rurico exordiuntur, tamen tenuem memoriam admiscent, eum ex superiorum Russiae regum, qui et ipsi Varagi fuerint, prosapia exstitisse, pulsos autem a Gostomislo fuisse hos ex eo sanguine reges. Iam vetustae Suedorum et Noruagorum sagae non ita penitus sunt explodendae, vt, cum Gardarikiae et Holmgardiae, hoc est, Russiae reges ante Ruricum nominant, quamquam multa etiam ex vano hauriunt, earum memoria rerum fide digna sit nulla. Alii loco atque tempori haec edisserere magis conueniet: nunc ex Annalibus Francicis Bertinianis (8) locum apponam cum primis insignem. Ita anonymus ad A. C. 839. Teophilus Imperator CPlitanus *misit cum eis* (cum legatis ad Ludouicum Pium Imp.) *quosdam, qui se, id est, gentem suam, Rhos vocari dicebant: quos rex illorum Chacanus vocabulo, ad se amicitiae, sicut asserebant, caussa direxerat*, (sine gubio secundo Borysthene nauibus) *pe-*

(8) Apud Duchesnium t. III. p. 195. b.

petens per memoratam epistolam, quatenus benignitate Imperatoris, redeundi facultatem atque auxilium per imperium suum totum habere possent: quoniam itinera, per quae ad eum CPlin *venerant, inter barbaras et nimiae feritatis gentes immanissimas habuerant, quibus eos, ne forte periculum inciderent, redire noluit: quorum aduentus caussam Imperator* (Ludouicus) *diligentius inuestigans, comperit, eos gentis esse Sueonum, exploratores potius regni illius* (CPlitani) *nostrique, quam amicitiae petitores ratus, penes se eousque retinendos iudicauit, quoad veraciter inueniri possit, vtrum fideliter eo nec ne peruenerint: idque Theophilo per memoratos legatos suos atque epistolam intimare non distulit et quod eos illius amore libenter susceperit, ac, si fideles inuenirentur et facultas absque illorum periculo in patriam remeandi daretur, cum auxilio remittendos: sin alias, vna cum missis nostris ad eius praesentiam dirigendos, vt, quid de talibus fieri deberet, ipse decernendo efficeret.* Habes gentem Rossicam ante Ruricum, cuius nominis multo quam annales Russici edunt, antiquioris, auctores Graecos alio loco producam: habes regem tanta maiestate, vt خاقان *Chakan*, seu *Imperator* et Αὐτοκράτωρ iam tum diceretur: vides hos legatos Rossicos ab stirpe fuisse Sueonas.

Inde autem ab Rurico, omnia nomina Varagorum in Russicis annalibus conseruata, nullius alterius sermonis magis sunt, quam Suionici, Noruagici, Danici: neque vero obscure et parce, vt me

 quis

Peculiares huius generis species profert Ingria nostra, quae enim a Tournefortio et alii recensentur terrae adnascuntur basi acetabuli, nostrae vero pediculo nunc longiori nunc breuiori insident, in reliquis tamen aliis respondent.

Operae pretium erit has describere et bonis ornare figuris. Occurrit itaque primo

Fungoides nigrum vernum, pediculo donatum, quod in foliis putridis deiectis Aprili mense prouenit, colore nigro-spendente, pediculo semunciam longo, satis rigido, cui insidet acetabulum instar paruae ollae, cuius orae parum contractae intro flectuntur. Vide figuram 1.

Fig. 1.

2. *Fungoides fuscum, pediculo longiori donatum.* Huius pediculus biuncialis fere, ex albo fuscus et striatus, fert acetabulum instar patellae expassum, oris nonnunquam laceris. Occurrit in lignis deiectis autumno. Vid. fig. 2.

Fig. 2.

3. *Fungoides fuscum, pediculo breuiori donatum*, quod cum praecedente conuenit, nisi quod color ad album vergat, et pediculus sit breuior; hinc pro varietate haberi potest. Vid. fig. 3.

Fig. 3.

4. *Fungoides vernum, purpureum, pediculo albo donatum.* Hoc colore superbit elegantissimo, et magnitudine mirum variat. Pediculus tumidus est et crassior, albicans; orae interdum eleganter sunt serratae. In syluis nostris Martio et Aprili mensibus. Vid. fig. 4.

Fig. 4.

His

5. *Fungoides purpureum, pediculo ramoso.* Huius pediculus in aliquot diuiditur ramos ex cinereo albicantes, qui ferunt acetabula parua, intus coccinea, exterius fusca, pisi magnitudine. In syluis mense Octobri. Vid. fig. 5. Fig. 5.

His accenseri potest alia species exigua, valde tenera, in foliis Alni putridis nascens, quam, quia nunc ad manus non est, delineare non potui.

Et quia paucae adhuc Fungoidum prostant figurae, addimus hic duas species sine pediculo, nondum descriptas. Prima est *Fungoides fuscum maius*; secunda vero *Fungoides lutescens ollam referens*, quae in Ingriae syluis gramineis post pluuias autumnales reperiuntur. Vid. fig. 6. & 7.

CLASSIS TERTIA,

CONTINENS

HISTORICA.

ELEMENTA
BRAHMANICA, TANGVTANA, MVNGALICA.
T. S. B.

SVperiori tomo Commentariorum Academiae tabulas decem ſcripturae Brahmanicae, Tanguтanae et Mungalicae dedimus: nunc tabulas reliquas octo ex eodem libro Sinicae typographiae cum interpretatione noſtra ſubiungimus. In tabula vndecima et duodecima et parte quadam tertiae et decimae tabulae exſtant deſinentia conſonantibus *r* et *l* et vocali *u*. Parte altera tabulae XIII. et in tabulis XIV. XV. ſequentisque maiori parte, ſyllabae binae vocalibus ſolis terminatae, in quibus ſunt ſex litterae, quas indagare nulla arte potui. Tandem variae excipiunt ſyllabae, et extrema pagina Brahmanicae exſtant voces ingentibus ductibus inter ſe deuinctae. Tangutanae et Mungalicae Brahmanicis ſubiiciuntur. In his extremis Brahmanicis, mihi videor videre ſimiles il-

Tab. XXX. XXXVII. El. Tab. XI.-XVIII.

illarum, de quibus Apuleius in Metamorphoseon libro vndecimo: (1.) Aegyptium sacerdotem de opertis adyti protulisse quosdam libros *litteris ignorabilibus praenotatos, nodosis et in modum rotae tortuosis capreolatimque condensis apicibus, a curiositate profanorum lectione munita.* Aut quae Nonnus Panopolitanus in Dionysiacis (2) vocauit Χαράγματα λοξὰ καὶ ἀγκύλα κύκλα. Tangutanae syllabae Brahmanicis spatii caussa κιονηδὸν appositae sunt, quae alioquin ratio illo in genere scripturae non obtinet. Hoc modo autem litteris Tangutani in incantationibus vtuntur. Calmucci eam scripturam vocant *Tarni.* Mungalica χαμαιφόρεως scribi satis constat. Hoc Maeandricum genus Brahmanes in peninsula Indica, *Kia-kanakku* vocant. Plures litterarum illarum tortuosae formae in libro Sinico exstabant, sed operae pretium non visum est fore, vt omnes euulgarentur.

Cum has litteras Brahmanicas, ad R. V. Beniaminem Schultzium transmisissem, ab eodem hoc responsum Madrasta A. 1731. 19. Nov. tuli: *Aduocaui aliquot Brahmanes extraneos et peregrinos, illisque ostendi figuras et litteras, quas de lingua Brahmanica misisti: vnus ex illis characteres ferme omnes legebat, sed circa aliquot eorum paullulum haesitabat.* Itaque de his litteris Brahmanicis earumque diuersitate, quae res in Europa adhuc perquam obscurae sunt, quantum satis esse videbitur, dicam. Brahma-

(1.) p. 430. (2.) l. IV. p. 126.

manes gens eſt Indica, (quales apud Romanos fuere, Fabia, Cornelia, Claudia,) quae et diuinam originem a *Brama*, ſupremo deo ſibi attribuit et ſummam nobilitatem, et ſacrorum, auſpiciorum docendique alios quod verum rectumque ſit, praerogatiuam. Puta te audire Patritios Romanos, qui iſta omnia propemodum ſibi vindicarunt. Sunt igitur Brahmanes diuerſi a Gymnoſophiſtis. Gymnoſophiſtae ex quibuscumque aliis gentibus et familiis eſſe poſſunt: Brahman vt quis ſit, neceſſe eſt vt naſcatur Brahman. Hi, cum per vniuerſam Indiam diſperſi ſunt, vbi de rebus diuinis caeremoniisque tractant, pro diuerſitate locorum, aut peculiaribus linguis vtuntur, aut populari quidem aliqua, litteris tamen diuerſis, quas vocant ſanctas. Litterae ſacrae inter ſe vehementer diſcrepant. Dicam primum de illis, quarum cum his editis eſt congruentia. *Dewanágaram* tamquam mater omnis ſacrae ſcripturae editur, qua legem a deo in Caſchia promulgatam praedicant. Caſchia mons et vrbs काशा *Kaſcha*, quae et भनारेसे *Banàres* haud procul a Gange fluuio, vbi Academia eſt Indorum. Eas ego, vt ex India accepi, hic communicandas duxi. *Balabandu* ſeu Balabandeca paullo vaſtior ſcriptura eſt, ductibus litterarum pinguioribus. Hac veluti ſancta Brahmanes in Marathis vtuntur. Lingua eorundem Brahmanum a populari Maratharum non abhorret: quae autem

Tab. XXXVIII. I.

Tab. XXXVIII. II.

 pro-

profana ſunt, aliis, vt poſtea dicam, litteris ſcribuntur. Scribunt et ipſi in foliis palmae Indicae: attamen chartam habent Sinicae non diſſimilem, craſſiorem vero et rudiorem magisque atram. Eiusmodi libellum quoque poſſideo. Septentrionales Indi palmarum folia ad ſcribendum non adhibent: charta vtuntur a bombycina veterum non abſimili. Populi ad Indum litteras ſuas आकार:नागरी: *Akàr* Tab. XXXVIII. III. *Nágari* ſeu *litteras Nagariſas* appellant, a ſuperioribus non multum diuerſas. Eas ab Indo quodam ſuarum rerum intelligentiſſimo non perſunctorie cognoui. Balebandecas et has, de quibus modo dixi, vide in Tabula. Figurae quatuor, quae harum initio ponuntur, principii ſignum ſunt. Prima vocatur उँ: *Vrà* altera एकांगु: *ekángu*, reliquae duae lineae धु: धु: लिका: *Dhu dhu lika* i. e. *duae lineae perpendiculares*. Quae ſequuntur, ſic legi debent: *Shri ghanáe-ſſá innama. Sanctus Ghanéſſa inuentor beneficus*. Ferunt, mulierem quandam cum domi relicta ſola balneo vti vellet, hunc ex cera formaſſe, animaque corpori inſpirata, cuſtodem eum appoſuiſſe foribus: rediiſſe tum maxime maritum illius *Mahandée* ab longinqua mercatura, prohibitumque aditu, huic tamquam pudicitiae vxoris inſidiatori amputaſſe caput, deinde, de, re cognita, anguineum pro humano repoſuiſſe, filiumque eum adoptaſſe. Hunc litterarum auctorem Indi in omnium librorum principio illa formula commendant. Litterae vero ſecundum certas claſſes diſpoſitae ſic ſunt, vt canendo diſci queant. Explicabo ſingularum pronunciationem ſecundum os Teutonicum.

Pröemium.

1 *o*, Reuera vocalis noſtra quarta, vide 18^m.
2 *na*, *n*, vide 40^m.
3 *ma*, *m*, vide 44^m.
4 *ſſi*, *ſſ*, vide 49^m. et 51^m.
5 *dhau*, *d* auditur ſeparatim et *h* etiam fortiter protruditur: *au* quaſi in *n* deſinit, quod *n* tenerrime ſubauditur. Vide 39^m

Vocales.

6 *a* breue
7 *a* longum
8 *i* breue, lingua ad dexteram inclinata.
9 *i* longum, lingua ad ſiniſtram mota.
10 *u* breue, recta ex ore protruditur.
11 *u* longum, quaſi duplex, ſono in altum prolato.
12 *ri* breue
13 *ri* longum
14 *li* breue
15 *li* longum
16 *e* vocalis noſtra ſecunda.
17 *ai* vt vtraque vocalis diſerte exaudiatur.

18 *o* eadem, quae prima fuit.

19 *au* vtraque auditur vocalis.

20 *ang* *g* non auditur, ſed *n* effertur, vt in Gallicis vocibus: ſaepe etiam pronunciatur vt *ah*, *h* vehementer protruſo.

Conſonantes.

21 *gha*, *gh* conſonans eſt cum vocali longa: ſi fulcrum dexterum demas, fiet breuis.

22 *ka*, vt *Caph* Hebraeorum, Arabum *Keph*.

23 *ka*, vt *Kuph* Hebraeorum, Arabum *Kaph*.

24 *gha*, *gh*, *g* obſcurum in interiori gutture formatur, vt غ Arabicum, ſed ſine narium miniſterio.

25 *dgja*, *d* vix a ne vix quidem ſubauditur, *gj* fere vt Arabicum ج, modo fortius proferatur.

26 *nia*, Raro occurrit: *i* et *n* inter pronunciandum in vnam vocalem confuſae ſunt: *i* ita cohaeret cum *n* vt vix ſentiatur.

27 *tgja*, concordat cum 24^a. tantum fortius adhuc effertur.

28 *tſcha*, *tſch*

29 *dhea*, *dh*, lingua, quando ad palatum *d* formauit, inde ſeſe protrudit, vt quaſi *h* adiiciat.

30 *dgja* differt a 24^a. quod lingua interiori palatus regioni appellitur, ſono obſcuriori.

31 *nia* plane eadem cum 25^a.

32 *tba* *t* formatur ſtrenue in palato proxime dentes, quaſi duplex *d* et *b*.

33 *tſcba* *t* formatur fortiter.

34 *dba* *d* formatur lingua quaſi apoplectica, vt ſaliua ad palatum opem ferat, *b* admodum auditur: ceterum quaſi aliquod *n* praemittitur, quod in primis ſentitur, quoties vocalis praecedit e. g. *ba-ndba*, legitur plane *ban-dba.*

35 *dbgja*, ita fere vt praecedens, tantummodo quod ج Arabicum clare auditur.

36 *nrba*, eſt *r*, ſed cui apoplectica lingua praefigitur quoddam quaſi *n*.

37 *ta*, *t*

38 *tba*, hic *b* magis auditur, quam t.

39 *dba*, eadem quae 33^a. et figura et ſono, carminis cauſſa hic repetita.

40 *da* *d* eadem quae 5^a. vbi tamquam in pröemio *dbau* dicebatur.

41 *na*, *n*, eadem, quae in pröemio, 2^a

42 *pa* *p*

43 *p'ba*, *p'b* non eſt Φ, ſed vtraque littera per ſe clare pronunciatur.

44 *ba*, *b*, formatur labiis quaſi per vim diremtis, vt *bb*.

45 *bbam*, *b* et *b* ſolitarie efferuntur: *am* pro *a* ex conſuetudine tantum dicitur.

46 *ma*, *m*, eadem quae 3^a.

47 *ja* *j*

48 *ra* r
49 *la*, *l* vide 53^{m}.
50 *wa*, *w*, ſed ſaepe vt *m* pronunciatur, ſono medio inter vtramque litteram.
51 *ſſang*, *ſſ*, eadem quae 4^{a}. *s*, fortiter ex ore eliſum, non tamen vt z, ſed vt duplex *s*: *n*, in fine litterae, *g* quoddam tenerrime ſubaudiendum habet, ſono ſuſpenſo.
52 *K'cho*, *k'ch*, *k* auditur et *ch* Germanico mollius, neque tamen *ſch*, vide 54^{m}.
53 *ſſa*, *ſſ*, eadem quae 5^{a}. et 49^{a}. carminis cauſſa repetita.
54 *ha*, *hh* duplex Germanico ore prolatum, ح Arabicum.
55 *lang*, *l*, eadem quae 47^{a}.
56 *k'cha*, *k'ch*, eadem quae 50^{a}. loco *K'cho* dicebatur.

Vocales adiiciuntur per apices in hunc modum

Tab. XXXVIII. III. 1 *pa* breue. 2 *pa* longum. 3 *pi* breue. 4 *pi* longum. 5 *pu* breue. 6 *puu* longum. 7 *pe* breue. 8 *pei* ſ. *pe* longum. 9 *po* breue. 10 *po* long. 11 *pang*. 12 *p*.

Littera prima cum vltima figura conuenit: pro diuerſo poſitu, modo *pa* breue pronunciatur, modo, vt in fine vocis, *p*, vbi vero etiam *a* leniſſime ſubauditur. Idem fit ceteris vocalibus breuibus in fine vocis. Quando *r* cum alia conſonante coniungunt, ſolent pedi conſonantis adiicere lineolam in hunc modum:

13 *pra* breue. 14 *pra* long. 15 *pri* breue. 16 *prie* long. 17 *pr*[illegible] breue. etc.

Extremum ſignum, quod in alphabeto et alias finale eſt, vocant *dbu dbu*  *mindà, dbu dbu lika: duos circulos et duas lineas perpendiculares.* Duos illos circulos Calmucci *Dokſchin tſchek* vocant.

Ex his igitur velim quisque pronunciationem, quam ſuperioribus tabulis ſubieci, accuratius et certius ſibi informet. Si autem hae tres formæ comparentur cum litteris ex Sinico libello a nobis editis, per ſe apparebit, quae illarum congruentia ſit. Ad modum harum maiorum alias accepi ex Calmucis *Songar*, non niſi in apicum elegantia diſcrepantes, ſubiunctis minoris formae litteris, quales vulgo *curſiuas* apellamus. Bordon legatus Calmucorum *Torgoit*, qui ſub imperio Ruſſico degunt, cum domi meae me inuiſeret, et agnoſcebat Brahmanicas et a ſuis  *Enedkek* dici aſſeuerabat. Eodem nomine has litteras a Calmuccis *Sorgar* prope Tibetum ad Irtim fluuium appellari, ex illorum legatis poſtea cognoui. Ceterum, vt dixi, minores litteras τῶν ταχυγράφων me ex Calmuccia accepiſſe, ita eas quibus Dellienſes et Multanienſes vtuntur, *Sonbar* beneuole me docuit. Mercatores iis maxime rationaria ſua et epiſtolas ſcribunt. Neque per vocales vel aliquantum mutantur, neque omnium eadem forma eſt, cum vt in Latinis et Germanicis fit, pro ſuo quisque ingenio eas pingit. Haud melius cum maioribus comparari poſſunt, quam ſi dicamus, eandem eſſe diuerſitatis rationem, quae inter Ebraicas et Germanorum Iudaeorum litteras eſt. Indi has

आषरा: यकरी: *Akar thákari, Litteras curſiuas*

vocant. De iis forte alias plura. Confecto hoc ſpatio, exempli cauſſa, carmen Indicum apponam:

धोहरा: गमुणु:

Dhóbara gamòn (1)

जिनी: नाहे: दाराद्: सुली: येचे:

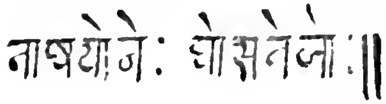
Gjeni	*nábendaràdu*	*sſúlli*	*itſche*
Qui homo	non ſcribit,	opus (eſt vt)	palo

तेनेष:॥ सेदारधाहो: राद्धु: कदुरा:

tenechè	*sſedergbabo*	*ráddu*	*kadúr*
transfigatur :	Deus	abominatur (eum qui)	bonam

na-

(1) *Dhobara* eſt carmen, quod duo, tres, plures ſibi accinunt.



naghanen *dósdojo*
neſcit amicitiam (colere)

Perſequar nunc ceteras Indicas ſcripturas ab his diuerſas, ortas tamen ab vna ſtirpe, de qua re, alias dicendi maior erit opportunitas. *Kirendam*, *Granthum*, *Graendica*, ita enim diuerſis modis appellatur, a quibusdam pro Brahmanica editur. Et eſt Brahmanum eorum, qui in Tamulis agunt, ſancta ſcriptura. Lingua diuersa eſt a Tamulica, corrupta Sanſcrutamicae et Dewa-nagricae dialectus: litterae Tamulicis non ita diſſimiles. At cum Tamuli XXXI. litteris vtuntur, in *Grantham* ſunt numero L. Alphabetum Grantham in foliis palmaae Indicae ſedecim longiſſimis Trangambaria ab amicis accepi, quorum munere etiam libellum Graendicum, qui de *Vuiſchtnu*, cognomine *Ramen* agit, et encomium *Pullejas* idoli continet, poſſideo.

Tamulicam ſcripturam (vulgo *Malabaricam*) Bartholemaei Ziegenbalgii viri beatiſſimi opera, grammatica in primis edita, ad cognitionem patefactam accepimus, quocum ceteri Miſſionarii Euangelici Sereniſſimi Regis Daniae patrocinio vſi, cum vniuerſam Scripturam Sanctam tum alios libros elegantiſſimis typis Trangambariae euulgarunt, vbi nunc maxime Lexicon Tamulicum excuditur.

Ab his differunt litterae *Samſcrutam*. Athanaſius Kircher in China illuſtrata (2) *Hanſcret*, Thomas Hyde in ludis orientalibus, *Sanſcroot*, Andreas Muller in Alphabetis vniuerſi, *Hanſcriticam* vocarunt. Iidem pro hisce, meras litteras *Balabandu* nobis dederunt. Sunt vero *Samſcrutam* ab iis haud leuiter diſcrepantes, minutae, capreolatim contortae et cincinnatae. *Varugorum* ſeu *Telugorum* illa ſcriptura ſacra eſt: lingua Anglis *Gentou* dicta, eadem fere, quae *Dewa-nagrica*. *Telugi* ſeu *Varugi* charactere prope eodem in communi vita ſcriptisque profanis vtuntur. Has litteras propediem illuſtratas nanciſcemur a R. Beniamine Schulzio Madraſtenſi Miſſionario, qui S. Scripturae verſionem, typis ex aere fuſis, parat mihique etiam in his, quae diximus, pleraque beneuolentiſſime communicauit. Ab his litteris *Canaricae* et *Ceylanenſes* non multum ſunt diuerſae.

Aliae iterum ſunt *Marathicae* et *Gutſariticae*. *Marathicas* dico profanas populi Indici, ex quo nunc rex Tangjurenſis eſt: lingua eadem, quae Balabandica. *Guzaratica* lingua proxime congruit cum lingua *Moura*, tamquam dialectus: litterae Marathicis congruunt. At *Moura* ſeu Maurorum in India lingua, etiam *Tulucca* dicta, Perſicas voces admiſtas habet, Perſicisque litteris vtitur. Litte-

(2) p. 162.

terae Marathicae, Guzaraticae et Siamicae propiores ſunt Tangutanis ſeu Tibeticis. De omnium illarum litterarum cognatione atque origine, praeſtat ſilere, quam pauca dicere. Erit alias tempus et locus, vbi non ſine grata amicorum, qui me ſubleuarunt, recordatione, quae ſentiam, explicare liberius poſſim. Haec praefanda duxi, quod ex ignoratione illarum rerum multa confuſe et incommode dicuntur, per quae nos quoque in errores varios ſuperiori tomo ſeductos fuiſſe, beneuolus lector facile ſentiet.

Tab. XXXIX.

De Tangutanis pauca hic commemorabo. *Tangut* populi nomen eſſe comperi: *Tibet* regionis, in qua degit. In ſyllabis hanc rationem ſequuntur, vt aliquas litteras elidant tamquam mutas, alias transponant, vt a Bordone legato Calmuccio intellexi: voces vero omnes monoſyllabas eſſe oportet, vt in ſermonis genio Tangutani quam proxime accedant ad Sinenſes. Quae autem ratio in his obſeruetur, nondum potui indagare. Dixi ſuperiori tomo, litteras Tangutanorum minores ſeu *Schar*, nondum eſſe explicatas. Nactus deinde ſyllabarium Tangutanum integrum, intermiſtis his litteris, comparando has cum maioribus, quae eſſent, facile inueni. Quare mihi recte videbar facturus, ſi eas hoc loco reponerem. De Mungalicis litteris quaedam commodius proximo in tomo Commentariorum dicam.

NVMI DVO
PTOLEMAEI LAGIDAE EXPLICATI
T. S. B.

Numus aeneus in museo meo. Caput Iouis laureatum. =Aquila vnguibus tenens fulmen: scutum fulmine insignitum: ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ.

Numus aeneus in museo Delisliano. Caput Iouis laureatum =Aquila, fulmen, scutum: ΠΤΟΛΕΜ... *et inter pedes A. ad pectus siglum.*

Tab. XXXIX. I. II.

QVod Iupiter in his numis signatus est, quod aquila cum aegide Iouis, id stirpi Ptolemaeorum celebrandae inseruiit. Nam Ptolemaeus Lagi filius cum in solida laude fundatam populi de se existimationem habuit, tum arte quoque fotam non neglexit. Sic sunt hominum iudicia, vt in summis virtutibus meritisque alimenta fulgoris externa requirant, nec simul nasci et perfici in vno homine excellentem virtutem gloriamque existiment, sed traduci a maioribus et communicari. Quamquam haec qualia essent, videbat Ptolemaeus, tamen non vanitate ementiendae stirpis, sed decora sua etiam per populi errorem muniendi prudentia, facile est passus, vt docti homines, qui cum eo assidue erant, genus suum diuinis originibus insererent. Idque iure suo, quod apud lasciuientem populum obscuritatem generis obiici sibi intelligeret.

ret. Cum notae inſcitiae grammaticum interrogaret, quis Pelei fuiſſet pater, ille dicturum ſe reſpondit, ſi prior ipſe rex diceret, qui fuiſſet ſuus. Indignantibus ceteris qui cum eo erant, regem tali dicto impune irrideri, Ptolemaeus moderati animi inſigne exemplum edidit, ipſe ſeſe reprehendens. Si non regium eſt, inquiebat, aliorum falſe dicta pati, ne hoc quidem regis fuit, in alios iacere. (1) Contra ea docti homines matrem Ptolemaei Arſinöen ex regum Macedonum ſtirpe editam cognouerant: idcirco ad Herculem et Bacchum et Iouem τὴν γενεαλογιαν proſecuti ſunt. De Hercule quidem Theocritus in encomio Ptolemaei Philadelphi, cum Alexandro Ptolemaeum Lagi comparans: (2)

> Αμφοῖν γὰρ πρόγονός σφιν ὁ καρτερὸς Ηρακλείδας,
> Αμφότεροι δ᾽ἀριθμεῦνται ἐς ἔσχατον Ηρακλῆα.

> *Vtrisque enim proauus eſt fortis Heraclides,*
> *Ambo igitur recenſentur vsque ad Herculem extremum.*

Fortem Heraclidem, communem vtriusque πρόγονον, Alexandrum regem Macedoniae dicit, ſextum ab Alexandro et Ptolemaeo parentem.

Hoc autem Ptolemaeus Lagi filius gratanter accipiens, in numis ſignauit Iouem et aquilam cum aegi-

(1) Plutarchus de ira cohibenda p. 458. (2) Idyl. IZ. v. 26

aegide. Vt deinde aquila in nepotum numis, ob hanc diuini generis opinionem, mansit, ita Ptolemaeus Euergetes in monumento Adulitano illa fama vt maxime est gloriatus. Necesse est, vt totum monumenti principium huc ponam, quia in eo eruditissimi viri non vno modo lapsi sunt.

ΒΑΣΙΛΕΥΣ ΜΕΓΑΣ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ ΥΙΟΣ ΒΑΣΙΛΕΩΣ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΚΑΙ ΒΑΣΙΛΙΣΣΗΣ ΑΡΣΙΝΟΗΣ ΘΕΩΝ ΑΔΕΛΦΩΝ ΤΩΝ ΒΑΣΙΛΕΩΣ ΠΤΟ-ΛΕΜΑΙΟΥ ΚΑΙ ΒΑΣΙΛΙΣΣΗΣ ΒΕΡΕ-ΝΙΚΗΣ ΘΕΩΝ ΣΩΤΗΡΩΝ ΑΠΟΓΟ-ΝΟΣ ΤΑ ΜΕΝ ΑΠΟ ΠΑΤΡΟΣ ΗΡΑ-ΚΛΕΩΣ ΤΟΥ ΔΙΟΣ ΤΑ ΔΕ ΑΠΟ ΜΗ-ΤΡΟΣ ΔΙΟΝΥΣΟΥ ΤΟΥ ΔΙΟΣ

Βασιλεὺς μέγας Πτολεμαῖος, ὑιὸς βασιλέως Πτολεμάιυ καὶ βασιλισσης Αρσινόης Θεῶν Ἀδελφῶν τῶν βασιλέως Πτολεμάιυ καὶ βασιλίσσης Βερενικης Θεῶν Σωτήρων ἀπόγονος, τὰ μὲν ἀπὸ πατρὸς Ηρακλέως τȣ̃ Διὸς, τὰ δὲ ἀπὸ μητρὸς Διονύσȣ Διός.

Rex magnus Ptolemaeus, filius regis Ptolemaei et reginae Arsinoes Deorum Fratrum, Deorum autem Seruatorum, regis Ptolemaei et reginae Berenicae nepos, prognatus patre Hercule, Iouis filio et matre (Deianira) *quae Baccho Iouis filio genita fuit.*

Nos

Nos partem hanc ex apographo codicis Vaticani edimus, quod accuratissima et linearum et litterarum imitatione nostra caussa fecit vir summus Iosephus Simonius Assemanus. Leo Allatius et Iacobus Sponius ΑΠΟ ΠΑΤΡΟΣ omiserunt, Bernardus Montefalco in Cosma Indicopleuste restituit. (3) Vniuersi autem ediderunt ΤΩΝ ΒΑΣΙΛΕΩΝ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΚΑΙ ΒΑΣΙΛΙΣΣΗΣ ΒΕΡΕΝΙΚΗΣ. Quaerit vir excellenti doctrina Edmundus Chishull, (4) quid hic βασιλέων sibi velit, meoque iudicio argute respondit: *Iure adoptiuo et legitimo diuae Arsinoes filium se tulit Euergetes: vnde praelatus est iste minus solens verborum ordo* ΥΙΟΣ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΚΑΙ ΑΡΣΙΝΟΗΣ *pro alio longe vsitatiore* ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΚΑΙ ΑΡΣΙΝΟΗΣ ΥΙΟΣ. *Iterum, vt vno eodemque iure, hoc est, naturae ipsius, non adoptionis lege, tum Berenices, tum Soteris nepotem se innueret, admissa est insolita locutio* ΤΩΝ ΒΑΣΙΛΕΩΝ κ.τ.λ. In primo non diffiteor, caussam mihi placere: in altero autem neque rationem aliquam video, neque sane ad sensum medelam, neque cur a Ms. lectione viri doctissimi discesserint, in quo manifeste est ΤΩΝ ΒΑΣΙΛΕΩΣ (5) satis mirari possum. Igitur illud ΤΩΝ cum ΘΕΩΝ ΣΩΤΗΡΩΝ cohaeret. Quod quidem durum adhuc est, (eo enim tandem factum opinor, vt docti viri aliquid mutarint) nequaquam vero ita durum, vti alterum,

(3) p. 141. (4) In Antiquitatibus Asiaticis Christianam aeram antecedentibus p. 84. (5) In Ms. C semper scribitur, quod nos mutauimus, quia satis constat, Ptolemaei Euergetis aeuo Σ tantummodo in monumentis exstitisse.

rum, et ad mentem Chishulli multo magis accommodatum. Quae sequuntur, Leo Allatius incommode conuertit: *paternum genus ab Hercule, maternum ab Dionyso Iouis filio deducens.* In eundem fere modum Edmundus Chishull. Bernardus autem Montefalco: *ex patre quidem Hercule Iouis filio, ex matre autem Baccho item Iouis filio oriundus*, quod ambigue positum veram sententiam potest continere. Nam Allatius, tamquam Euergetes glorietur, Philadelphum patrem ad Herculem genus referre, eiusdem vero sororem et coniugem, ad Bacchum. Aut neuter fuit ab Hercule, aut ambo a Dionyso. Sensit hoc praestantissimus Chishull et confitetur se sentire, itaque vt desperato in morbo aliquid audet amplius: *Qui matrem natura, Arsinoen*, inquit, *superius silebat, hic genus per eam ductum non silet Euergetes: sed palam facit, eam genitam a Lysimacho, Lysimachum generis sui auctorem perbibuisse Bacchum.* Primum mihi et insolitum et plenum mysteriis videtur, matris Arsinoae ex qua natus fuerat, ipso nomine Euergetem ita erubuisse, vt Berenices, a qua adoptatus fuerat, filium sese diceret, tamen genere alterius, quam vt ignominiosum nomen abdicauerat, sese deinde iactasse. Veluti si quid aut a patre aut a Berenice nouerca metueret, qui iam diu sui iuris esset. Et si id maxime voluisset dicere Euergetes, iis tamen verbis dicere non potuit. Ita enim dixisset fere, *κατὰ τὸν πατέρα μὲν εἰς Ηρακλέα ἀνάγων τὸ γένος, κατὰ δὲ τὴν μητέρα εἰς Διόνυσον*, vt vitarum scriptores, scho-

scholiastae, mythologi solent: aut sicuti Plutarchus in Alexandro: τῷ γένει πρὸς πατρὸς μὲν ἦν Ηρακλείδης, ἀπὸ Καράνε, πρὸς δὲ μητρὸς Αἰακίδης, ἀπὸ Νεοπτολέμε. Ista πρὸς πατρὸς, πρὸς μητρὸς apud Plutarchum significant, quod Philippi patris et Olympiadis matris genus deductum in vltimam maiorum stirpem attinet: haec autem ἀπὸ Καράνε, ἀπὸ Νεοπτολέμε, a quo primo parente ius necessitudinis cum Heraclidis aut cum Aeacidis repetatur. Sic in Thalete Diogenes Laertius: ἐυγενέστατοι τῶν ἀπὸ Κάδμε καὶ Αγήνορος, *nobilissimi eorum, qui a Cadmo et Agenore ad eam vsque aetatem geniti sunt natorum nati.* Ammonius περὶ διαφόρων λέξεων eum in modum loquitur: βασιλεύς ἐςιν ὁ πατρόθεν ἢ ἀπὸ γένες τὴν ἀρχὴν παραλαβὼν, *rex est, qui seu a patre seu a maiorum stirpe principatum accepit.* Diuersitatem harum dictionum Diogenes in Platone, de patre eius loquens, sic est complexus: Φασὶν ἀνάγειν εἰς Κόδρον, ὅιτινες ἀπὸ Ποσειδῶνος ἱςορεῦνται, *patrem eius ad Codrum genus referre dicunt, qui genealogiam Platonis, Thrasyllo teste, vsque a Neptuno recenjent.* Itaque in monumento Adulitano ἀπὸ πατρὸς, ἀπὸ μητρὸς, non Euergetis parentes, Philadelphum et Arsinöen respicit, sed maiores Herculem et Deianiram, vt supra explicui.

Summa stirpis gloria a Ioue, in quo consistere maluit Euergetes, quam ad minora nomina excedere Cum Iouem ostentare vellet ἀρχηγέτην, ἐν ὅσῳ μάλα θυμὸς, Herculemne an Bacchum po-

neret : vtrumque tandem posuit. Originem ab Hercule in Ptolemaei Epiphanis numo Salaminio, quem Ioannes Valens produxit, signari puto claua. Clarissimus antiquarius hanc monetarii notam esse putat : malim, quod dixi, Herculis. Nam etiam alium numum ad manus habeo, e Buxbau-
Fig. III. mianis, qui nunc in Museo Delisliano sunt, cum aquila et claua. Caput est Iouis diademate cinctum: nauis inscribitur ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΒΑΣΙΛ . . . . Iouis in hoc numo nostroque tanta conuenientia lineamentorum, vt ambo videantur ex eadem officina prodiisse. Dionysum autem a Ptolemaeis summo in honore fuisse habitum, multa sunt indicio, quae quidem ab Ioanne Valente iam studiose obseruata praetermitto.

Satyrus Peripateticus, qui Ptolemaeo Philopatore rege, τοὺς δήμους τῶν Ἀλεξανδρέων scripsit, genealogiam Ptolemaei Soteris inde vsque ab Hercule et Dionyso persecutus est, quam ex eo Theophilus Antiochenus conseruauit. (6) Διονύσου καὶ Ἀλθέας τῆς Θεςίου γεγενῆσθαι Δηιάνειραν. τῆς δὲ καὶ Ἡρακλέους τοῦ Διὸς Ὕλλον. τοῦ δὲ, Κλεόδημον. τοῦ δὲ Ἀριςόμαχον. τοῦ δὲ Τήμενον. τοῦ δὲ Κεῖσον. τοῦ δὲ Μάρωνα. τοῦ δὲ Θέςιον. τοῦ δὲ Ἀκοόν. τοῦ δὲ Ἀριςομίδαν. τοῦ δὲ Καρανόν. τοῦ δὲ Κοινόν. τοῦ δὲ Τυρίμμαν. τοῦ δὲ Περδίκκαν. τοῦ δὲ Φίλιππον. τοῦ δὲ Ἀέροπον. τοῦ δὲ Ἀλκέταν. τοῦ δὲ Ἀμύνταν. τοῦ δὲ Βόκρον. τοῦ δὲ Μελέαγρον. τοῦ δὲ Ἀρσινόην. τῆς δὲ

(6) Ad Autolycum p. 98. ed. Vuolfianae.

δὲ καὶ Λάγου Πτολεμαῖον τὸν καὶ Σωτῆρα. Herculis nepos, Claeodaeus est Tzetzi ad Lycophronem. (7) Et quamquam Pausanias alicubi (8) eum Κλεόδαμον citat, tamen idem alibi (9) Κλεόδεον dixit, quod proxime abest a Κλεοδαῖος quo, nomine eum non modo Tzetzes ille, aut Suidas, sed, quod maioris fieri debet, Herodotus appellat. Apud Aelianum et scholiastam Pindari (10) Κλεάδας est et Κλεόδατος apud Dexippum. (1) Apud Apollodorum Κλεόλαος corruptum ex Κλεόδαος seu Κλεοδαῖος. Nescio autem quid Sylburgio in mentem venerit ad Pausaniam vt scriberet, illum Cleodaeum apud Eusebium Αριδαῖον vocari. Locus est in praeparatione Euangelica (2) quem respexit, e decimo Platonis de republica, (3) vbi Αριδαῖος, tyrannus est in aliqua Pamphiliae vrbe, qui patrem senem occidit. In posteris Cleodaei sic satis inter se consentiunt Graeci, neque enim dissensionum quasuis minutias exigere nostrum hic est, nisi quod Aristomachum Tzetzes perperam omittit, quem praeter Satyrum Pausanias (4) atque Hyginus (5) habent. Temenus iterum magnum nomen, quod cum fratre Cresphonto Heraclidas in Peloponesum reduxit. Inde iam Τημενεῖοι eius posteri apud Lycophronem, (6) Herodoto (7) ἀπόγονοι τοῦ Τημένου, et passim Temenidae. (8) At a Temeno vsque quidam genus isthuc aliter recensuerunt apud De-

Q q 3

(7) ad v. 804. (8) p. 127. (9) p. 246. (10) In Isthmionica E. Z. (1) In Excerptis Eusebianis p. 57. (2) p. 669. (3) p. 471. ed. Henr. Petri. (4) p. 127. (5) p. 184. ed. Munck. (6) v. 804. (7) l. c. (8) Vid. Tertullianus de anima c. 30.

Dexippum, donec ad Caranum perueniunt. Nihil hoc magnopere ad nos. Deinde Dexippus Αρ-γαῖον filium Tyrimnae, patrem Philippi edit. Sed facile apparet, in Dexippo Perdiccam, Argaeum in Satyro excidiſſe, ſi Herodoti Vraniae (9) auſcultemus. Herodotus deinde ad Amyntam vsque regem cum Satyro conuenit. Quod reſtat in Satyro, corruptelam videtur paſſum. Ex Herodoto Satyro Dexippoque inter ſe collatis hanc γενεαλο-γίας formam eſſe oportere ſentio:

Amyntas rex

Alexander rex

I. *Perdiccas rex* — II. *Amyntas priuatus*

Perdiccas rex: *Archelus rex*; *Archelus rex*: *Orestes rex*

Amyntas priuatus: I. *Arrhidaeus priuatus*, II. *Bocrus priuatus*

Arrhidaeus priuatus: *Amyntas rex*

Bocrus priuatus: *Meleager priuatus*

Amyntas rex: I. *Alexander rex*, II. *Perdiccas rex*, III. *Philippus rex*

Meleager priuatus: *Arſinoe=Lagus*

Philippus rex: *Alexander M. rex*

Arſinoe=Lagus: *Ptolemaeus rex*

Et

(9) l. VIII. c. 139. Sic etiam Graeca Excerpta Euſebiana p. 367.

Et nisi hoc mihi concedatur, neque Alexandri M. aequalis esse potuit Ptolemaeus, neque Philippus rex potuit corrumpere Arsinöen, antequam Lago nuberet, si Philippo adolescente Arsinoe fuisset propemodum anus. Ita enim Satyri stemma postulat. Ex his denique intelligi poterit Lycophron Chalcidensis cum de Thesprotio et Chaladraco leone seu de Alexandro M. vaticinantem Cassandram inducit atque in Ptolemaeo Lagi desinit iis verbis:

> ὧ δὴ, μεθ' ἕκτην γένναν αὐθαίμων ἐμὸς
> εἷς τις παλαιστὴς, συμβαλὼν ἀλκὴν δορὸς,
> πόντου τε καὶ γῆς εἰς διαλλαγὰς μολὼν,
> πρέσβυστος ἐν φίλοισιν ὑμνηθήσεται,
> σκύλων ἀπαρχὰς τὰς δορικτήτους λαβών.

Hi versus in tenebricosissimo poeta, neque a vetustis criticis, neque a superiorum aetatum sagacissimis ingeniis ante Maturinum Veyssiere Lacrosium, virum omni doctrina consummatum, sunt intellecti. Et Ptolemaei quidem ipsum quasi nomen insertum est, vt tanto sit plus mirandum, eruditos viros scripturae errorem in ἐμὸς non deprehendisse. Id enim solum obstitit, quo minus Ptolemaeus nosceretur, quod Cassandra videretur gentilem eum suum vocare. Lacrosius emendat ὁμοῦ. Malo: αὐθαίμων ἐὸς, qua voce et Homerus et poetae alii vehementer delectantur, quamquam in Lycophrone eam nondum inueni. Sic autem conuerto Latine: *Quo-*

Quocum, (Alexandro M.) *eius, inde vsque a sexta generatione consanguineus*
Palaestes (Luctator, Ptolemaeus) *vnus aliquis, consociato robore hastae,*
Marique terraque foederibus pacis conciliatis,
Vetustissimus inter amicos (Alexandri) *celebrabitur,*
Spoliorum primitias bello partas consecutus.

Sic igitur Ptolemaeum Lagi filium Lycophron Philadelphi regis cliens admiscuit, vt P. Virgilius Augustum Caesarem et Marcellum. Μεθ' ἕκτην γενεὰν Alexandrum Amyntae tangit. Solent enim Graeci ἐν γενεαλογίαις vtrumque extremum in toto genere sic complecti, vt apud Herodotum (10) τοῦ δὲ Ἀλεξάνδρου ἕβδομος γενέτωρ Περδίκκης ἐστὶ. *Alexandri huius,* (qui Xerxis temporibus fuit) *septimus genitor Perdiccas est.* Scilicet, vt ipse recenset: *Perdiccas, Argaeus, Philippus, Aeropas, Alcetas, Amyntas, Alexander.* Poterat dicere Lycophron μετὰ πέμπτην, quoniam ab Amynta Alexandri regis filio consociatio sanguinis procedit. Sed Amyntam transiliit, vt in rege potius consisteret, quam in priuato. Iam sexta generatio non procedet vtrimque, nisi errore sublato in Satyro, sic vt nos ex Dexippo restituimus.

In Ioue deo auctore generis substitere, ne diuinas stirpes obfuscarent. Ceteri in Graecia et Ale-

(10) l. VIII. c. 137.

Alcmenen Herculis matrem γενεαλογῦσιν et Deianiram, ita vt Iapetus et Inachus denique prodeant. Iapetus fine dubio Noae patriarchae filius. Inachus, a quo, vt Ocellus Lucanus (1) obferuauit, Graeca fere hiftoria initium in fabulis capit, quod eo auctore infignem mutationem Graecia fubiit: πολλάκις γὰρ καὶ γέγονε καὶ ἔςαι βάρβαρος ἡ Ἑλλάς. Praeter Iouem et Herculem, Marte patre gloriati funt Ptolemaei reges. Nam Deianirae mater Theftii filia fuit, Theftius, vt apud Apollodorum, Martis et Demonices filius. Ergo Ptolemaeus Euergetes in monumento Adulitano, cum Martem nominaffet: Ο ΜΕ ΚΑΙ ΕΓΕΝΝΗΣΕΝ.

Aquilam in numis noftris ad Iouem auctorem ftirpis retulimus, quia aegida pedibus tenet. Alioqui haud ignoro, in huius natiuitate Ptolemaei aquilam prodigio fuiffe. Eam rem vero fcutum in numis fignatum indicat. Sunt enim qui tradant, Arfinöen a Philippo rege vitiatam, Lago deinde datam in matrimonium. Quare, vt Paufanias fcripfit, (2) Macedones Πτολεμαῖον Φιλίππε παῖδα εἶναι, λόγω δὲ Λάγε ἐνόμιζον. Cum autem Arfinoe filium Eordaeae in Mygdonia peperiffet, partum in aeneo clupeo feu fcuto expofuit. Inferitur huic loco, aquilam alis expanfis ab ardore folis imbriumque moleftiis infantem defendiffe et coturnicibus dilaceratis, earum nutriuiffe fanguine. Credo ego, Arfi-

(1) p. 530. (2) p. 14. 15. confer Athenaeum p. 557.

Arsinöen, fallendi caussa Lagi, culpam corruptae pudicitiae ad Iouem relaturam, certos homines subornasse, qui Lagum hac fama percellerent, vt tolli infantem pateretur. Sed ab clupeo illo καὶ παρὰ τὸν πόλεμον, seu vt Athenienses Cypriique dicebant, πτόλεμον, Πτολεμαῖος appellatus est, vnde Lycophron Παλαιστὴν dixit, vti Theocritus Αἰχμητάν. Philippum quoque dictum scribit auctor semibarbarus, (1) qui ex Alexandrinis fastis sua transtulit, sed hic quid de Ptolaemaeis diceret, prae infantia aeque non vidit, ac Theocriti scholiasta, qui Lagum quoque Ptolemaeum dictum contendit, aut L. Ampelius. Hic Ampelius nobis in memoriam reuocat, Ptolemaeum apud Oxydracas Alexandrum obiecto clupeo defendisse. Nihil vero hoc ad huius numi clupeum. Fabula illa quidem est a Clitarcho et Timagene conficta. (2) Fulmen autem in clupeo non aegis est, sed ornamentum, vt solebat in fortium virorum armis.

Altero in numo A. sub pedibus aquilae, Alexandriam demonstrat, qua in vrbe signatus est. Ita antiquarii ΠΗ Πηλέσιον, ΑΒ. Αβυδόν, ΠΑ. Πάφον ΚΙ. Κίττιον ΗΡ. Ηρακλεόπολιν, ΣΑ. Σαλαμῖνα, ΔΙ Διόπολιν ΜΕ. et Ioannes Valens et Nicolaus Haymus Μέμφιν interpretati sunt. Decet Alexandriam elegantia numorum: in interiori Aegypto cusos vidi complures, sed insigni deformitate, quos nihilominus ab antiquariis neglectos ad hunc diem fuisse doleo.

(1) p. 78. ed. Scal. (2) Vide Q. Curtium l. IX. 5.

DE VENERE CNIDIA
IN CRYPTA CONCHYLIATA HORTI IMPERATORII AD AVLAM AESTIVAM ET IN DVOBVS NVMIS CNIDIIS.
T. S. B.

IN crypta conchyliata horti Imperatorii ad Aulam Aestiuam aedicula est tum signis aliis exornata, tum Venere, opere antiquo. Roma transuectam esse ante annos admodum viginti, multi inter nos recordantur. Ferunt deinde, Romae aliquem, qui fundamenta nouarum aedium iacturus erat, inter fodiendum reperisse sub humo: multa alia huic sermoni interseri audiui, quae, cum auctoritatem praestare non possum, consulto praetereo. Venus nuda prostat, superiori corpore leniter inclinato, vt, quae pudori suo obiecta dextera et reducto sinu consulit: sinistram dexterae papillae obiicit: ore hilari, vt subridere videatur. Vtroque bracchio mutilata cum esset, inde a scapulis spithama vna, artificio non ineleganti, sed minime ad reliquum corpus conferendo restituta fuit Romae.

Cnidia est meo iudicio, traducta in exemplum ex Praxitelis opere. Nam, quae de forma Veneris Cnidiae comperi, ea huic signo conueniunt. Primum, vt Luciani Ερωτες (1) Venerem apud Cnidios spectarunt, σεσηρότι γέλωτι μικρὸν ὑπομειδιῶσαν, ita haec *semibiante labello*

facit delicias libidinesque.

Quae is ipse Lucianus de auersae Veneris forma commemorauit, eadem in hac statua eximie spectantur. Vultum autem Veneris Cnidiae in
Tab. XXXIX. Fig. 4. numo argenteo Cnidiorum, quem é museo Imperatorio produxi, huic statuae sic congruere video, vt nihil possit magis. Et is vero ob admirabilem artificii elegantiam iis temporibus inserendus est; quae haud ita longe a Praxitelis aetate distent. Cum a Cnidiis cusus est, qui Venerem suam summum ciuitatis decus esse indicarunt, vultus vtique ad Praxiteleum deae signum expressus eorum in numo fuisse videtur. Vbi autem tanta Venerei oris hoc in numo atque in statua cryptae Imperatoriae congruentia est et similitudo, ad postremum mecum conclusi, fore vt mihi de reliquo corpore ad Praxitelei formam simulacri sculpto concedatur. Vna in re, sane perexigua, ambigere quis potest, quod vnionem in aure gerit numi Cnidii Venus, Veneris statua non gerit. Nempe Praxiteles, vt Venerem suam solius corporis excellentia commendaret, omnem adscititium ornatum praetermisit: aurem fecit, quanta potuit tantilla in parte esse elegantia: stulta posteritatis adulatio, veluti quam ar-

(1) p. 880.

artis eius poeniteret, perforatae auriculae marmoris, magni pretii, vt puto, vnionem inseruit. Hinc vnio in numo: in signo artifex plus sapuit, qui Praxiteleam manum imitatus est potius, quam populi lenitatem. Nihil temere suspicor: ista superstitiosorum hominum consuetudo fuit. Aelium Lampridium (2) testem habeo, Alexandrum Seuerum Imp. cum legatus vniones duos Augustae per ipsum obtulisset magni ponderis, primum quidem iussisse vendi, vbi autem emptorem ob pretii magnitudinem non inueniret, inauribus Veneris dicasse. Alterum numum Cnidium ex aere, qui Veneris περονητὴν haberet, ex Asia a Buxbaumio aduectum vidi. Numi ea ruditas, qualis post Antoninorum tempora in numis Graecis fere spectatur: attamen vel sic similitudo aliqua oris est et ad primum numum et ad statuam. Tab. XXXIX. Fig. 5.

Venus Cnidia tanta in fama et admiratione fuit, vt opera ante omnia, non dicam Praxitelis, is enim Pario e marmore finxit deam, sed omnium toto terrarum orbe statuariorum poneretur. Multi eam vt viderent, Cnidum nauigarunt: (3) multa in eam epigrammata honoris causa sunt facta, quorum bonam copiam Luciano auctore et Platone poeta et Eueno, aliisque, neque ingenio tamen magno, neque argumenti varietate commendandam anonymus in Antiquitatibus CPlitanis (4)

(2) p. 1005. (3) Plinius l. XXXVI. c. 5. confer Constantinum Porphyrogennetam in Thematibus l. 1. c. 14. (4) In Bandurii Imperio Orientali t. 1. p. 141.

produxit, ne quid nunc Anthologiam commemorem. Praxitelen, Philippo Amyntae et Alexandro M. regibus floruiſſe reperio, aliquanto maiorem Lyſippo, cui aeneis in ſignis ita concedebat, vt in marmoreis eſſet ſummus. Ob eam cauſſam Plinius (5) illum Olympiade CIV. in quam initia Philippi incidunt, hunc Olympiade CX.V. ipſo in exitu Alexandri collocauit. At cum Harmodium et Ariſtogitonem tyrannicidas a Praxitele in aere fuſos ſcribit, ea autem ſigna a Xerxe in Perſiam fuiſſe transportata, ab Alexandro populo Athenienſi reſtituta, ſummam rerum et temporum confuſionem admiſcuit. Nam ab expeditione Xerxis ad Olympiadem CIV. anni centum et viginti intercedunt, vt illorum ſignorum auctor Praxiteles eſſe non potuerit. Pauſanias (6) vtique Antenorem ſigna Harmodii et Ariſtogitonis, quae Xerxes rapuit, feciſſe ſcribit. Hanc Praxitelis et Lyſippi aetatem, quam ex Plinio edidi, ceteri fere confirmant. At Calliſtratus in ſtatuis, ſcrupulum alicui iniicere poteſt. Cum enim illius Εκφρασις Scopae, Praxitelis et Lyſippi ſtatuarum exſtet, eam autem Ioannes Meurſius et Godofridus Olearius, quos honoris cauſſa nomino, Calliſtrato oratori tribuunt, quem Demoſthenes ſectatus eſt, non abſurdo ratiocinio colligitur, ſuperiorem Philippo rege Praxitelem fuiſſe et Calliſtrato ipso. Sed quod iſti quidem tanta veri fiducia aſſeruere, id nos videlicet negamus, Calliſtratum oratorem ἐκφράσεις il-

(5) l. XXXIV. 8. (6) p. 20.

illas edidiſſe. Sentio neceſſitatem mihi imponi, vt, quod dixi, contra ſummorum virorum auctoritatem muniam. Plutarchus ad Soſiam ſuum in vita Demoſthenis, Gellius item et Libanius narrant, Calliſtratum oratorem cum Oropiam cauſſam acturus eſſet, tantam illius iudicii exſpectationem Athenis concitaſſe propter et teſtatam eloquentiae gloriam et illuſtrem in re publica auctoritatem, vt ciues omnes, die dicta, maximis ſtudiis àd audiendum eum concurrerent: eodem paedagogos Demoſthenem puerum adduxiſſe, qui, cum tantos clamores eius in oratione excitari, illum populi conſenſum in ornando deducendopue Calliſtrato cerneret, repente animo ad eius aemulationem laudis exarſerit. Communem habent auctorem et Plutarchus et A. Gellius, Hermippum. Exſtat Plutarchi nomine altera Demoſthenis vita, quam ab alio quocumque profectam crediderim magis, quam a Plutarcho. Olearius Plutarcho relinquit, ſed adoleſcenti. Qui autem Plutarcho poſtea exciderunt, quae ſcripſerat adoleſcens, cum praeſertim incredibilis rerum memoria in eo fuit etiam ſene? qui illi adeo Hegeſiae Magneſii in mentem non venit, cum plenius omnia et copioſius tradere videretur, quam Hermippus. Nempe Hegeſia auctore alter ille de Demoſthenis vita, quisquis is eſt, quod Plutarchum fugit, commemorat, Calliſtratum Empedi fuiſſe filium, Aphidneum, equitum magiſterio functum, tanta eloquentiae laude, vt eum Demoſthenes vnice ſectaretur, donec vrbe pulſus Calliſtra-

tus

tus in Thraciam abiit exulatum: ex eo enim tempore Demosthenem Isaeo se tradidisse, quatuor autem annis post, actionem suscepisse contra tutores, Timocrate archonte, Olympiadis CIV. 1. cum, vt testatur Dionysius Halicarnassensis, septemdecim annorum esset Demosthenes. Quod Callistratum oratorem Empedi filium prodidit, in eo turpiter errat. Is enim Empedi filius multo ante fuit et bello Peloponesiaco in Sicilia equitatui Atheniensium praefectus, fortiter pugnans cecidit. (7) Qui in Sicilia occubuerat, is postea, quomodo mihi persuadeo, neque in Oropia caussa versatus est, neque in Thraciam abiit exulatum. Tam turpis hallucinatio siue Hegesiae, siue alterius scriptoris, in exilio quoque Callistrati fecit, vt circumspiciam, si quid offensionis sit admistum. Cum vero Aristoteles Leodamantis in Callistratum actionem producit talem, vt in δημαγωγὸν et oratorem conueniat, puto in hoc altero fidem adhibere me posse Hegesiae. Iam videte, quae ex his aduersus Olearium consequantur. Si quatuor annis ante Timocratem archontem solum vertit Callistratus, vt paullo ante dixi, exilium eius in Olympiadis CII. excitu poni debet. Si ante exilium Callistrati iam omni laude artis floruit Lysippus, annos circiter triginta natus aut amplius, qualem aetatem eximia ars requirebat, fuerit sane Philippo rege defuncto haud multo minor annis septuaginta: quae aetas non ita apta est statuario, a quo solo Alexander duci in aere voluit.

(7) Pausanias p. 561.

luit. Ergo cum Lyſippum aetate et ingenio maxime florentem, Alexandro tum ſuperſtite tum vita defuncto, prodi reperimus, ineamus aliam viam, ſi qua Calliſtratus Ἐκφραστὴς et Calliſtratus orator, vnus et idem tum multo ante Demoſthenem in foro regnare, tum poſt Olympiadem CXIV. ſtatuas Praxitelis et Lyſippi commendare potuerit. Reuocemus eum plebiſcito domum e Thracia: largiamur eidem annos vitae, quantum in hominis naturam cadit: nondum quod cupit Olearius conſequitur. Nam Calliſtratus, qui Athenis tanta in admiratione fuit, qui tam multum potuit in re publica, ante Olympiadem CII. non ſane admodum minor annis quadraginta fuit, ita difficile, et tam multi vſus, temporis, laboris res fuit Athenis, inter demagogos principatum tenere. Fuerit igitur ad Olympiadem CXIV. nonaginta fere annos natus, cum Lyſippum laudaret. Nec tamen quidquam ſenile iſtis in ſtatuis Calliſtrati deprehenditur, econtrario aetatis iuuenilis viriditas, flos ipſe atque luxuria. Poſtremo cognoſcite mecum apud Ariſtotelem fragmentum orationis Meſſeniacae, in quo Calliſtratus Atticae eloquentiae lacertos mouet, cum hae ſtatuae non oratorem Attici naſi ſapiunt, ſed ſophiſtam inferiorum temporum et paene infra claſſem. Non mirabimur adhuc, hunc ſcriptorem Demoſtheni ſummam in eloquentiae laude concedere, neque hunc locum expungemus, vt Olearius fecit, ſed potius hunc Ἐκφραστὴν Demoſthene minorem fuiſſe, vel ex hoc loco redarguemus. Praeterea de Praxitele et Lyſippo, non vt de aequalibus loquitur, ſed vt de ſtatuariis, qui ante ſe fuerint. Ergo poſt Alexandrum hunc Calliſtratum poni patiar, ſi cui ita videbitur, aequalem Alciphroni rhetori, cuius item aetas nos latet, dicendi ratio perſimilis eſt. Quam vero obſcurus hic Calliſtratus fuerit, qui de ſtatuis, qui, teſte Athenaeo, de ſcortis et de Athenis ſcripſit (puto enim eundem auctorem hos libros edidiſſe) ex eo intelligo, quod Harpocration, quoties eius περὶ Ἀθηνῶν librum citat, citat autem tribus in locis, toties dubius animi haeret, Meneclen eum nominet, an Calliſtratum. Quae cum ita ſint, nihil eius in auctoritate eſt ſitum, vt Praxitelen illo, quo dixi, tempore fuiſſe, Plinio non concedamus.

Et Venerem vero Cnidiam Praxiteles extremis Philippi aut ſub primis auſpiciis Alexandri feciſſe videtur. Quod quomodo indagauerim, videte. Solus eſt Clemens Alexandrinus, (1) qui memoriae proditum reliquit, Cnidiam, ad Cratinae, quam ſecum habuerit Praxiteles, formam eſſe factam. Auctorem citat Poſidippum de Cnidiis rebus. At ceteri fere conſentiunt, Phrynen Theſpiacam in marmore ductam eſſe a Praxitele. In iis eſt Arnobius. (2) *Phryne*, inquit, *ſicuti illi referunt, qui negotia Theſpiaca ſcriptitarunt, cum in acumine ipſo eſſet pulcritudinis venuſtatis et floris, exemplar fuiſſe perhibetur cunctarum, quae in opinione ſunt, Venerum, ſiue per vrbes Graias, ſiue quo iſte fluxit*

(1) In protreptico ad gentes p. 35. (2) Aduerſus gentes l. VI. p.

xit amor talium cupiditasque ſignorum. De Cnidia Venere nominatim Athenaeus, (3) quam, vt dixi, Phrynae adimit Clemens, cum ceteras Veneres ad eius formam ſculptas fuiſſe concedit. At Cratina aliqua, tanta fama pulcritudinis, non a Deipnoſophiſtis, non ab Alciphrone, non alio in ſcriptore celebratur: in Phrynes venuſtate atque illecebris tota inſaniuit Graecia. Huius pulcritudinem foeminae iudicium nobilitauit ad aetatem eius cognoſcendam. Nam cum Euthias Phrynen adoleſcentulam haberet, Hyperides orator Myrrhinam, illa ab Euthiae conſuetudine diſceſſit ad Hyperidem, Myrrhina ad Euthiam. Euthias, vt amicae perfidiam vlcisceretur, dicam ἀσεβείας ei ſcripſit, in qua de Eleuſiniis ſacris neſcio quid inerat, Hyperides defendit. (4) Cum autem iudices eam damnaturi viderentur, incertum an Hyperides accedens ad ream dilacerata veſte corpus ſpecioſiſſimum ad miſericordiam mouendam nudauerit, an ipsa perculſa periculo ſciſſa veſte nudoque pectore ad pedes ſeſe proiiciens iudices perculerit: diuerſi enim ſunt et graues vtrimque teſtes. Iſthuc tamquam de forma eius mulieris iudicium mox Athenis et tota Graecia percrebuit: eo motus Praxiteles Phrynen potiſſimum ſelegit, cui Venerem ſuam vellet ſimilem. Huius tempus iudicii e Plutarcho mihi videor ſta-

(3) p. 591. Πραξιτέλης δ᾽ ὁ ἀγαλματοποιὸς ἐρῶν αὐτῆς, τὴν Κνιδίαν Ἀφροδίτην ἀπ᾽ αὐτῆς ἐπλάσατο. (4) Alciphron l. 1. ep. 30. 31. et quos ibi Stephanus Bergler, V. C. amicus meus produxit teſtes.

ſtatuere poſſe. Nam is in Hyperide ſcribit, (5) hunc oratorem filio expulso introduxiſſe domum Mirrhinam, cui Phrynen ſucceſſiſſe dixi. Filius autem cum patre vtique, eodem teſte, fuit, ante Byzantii obſidionem, cum Philippus rex Euboeam cum claſſe peteret. Byzantium obſeſſum Olymp. CIX. 4. vt ex Phlegontis Tralliani Ὀλυμπιάδων ἀναγραφῇ cognouimus, quatuor annis ante Philippi regis mortem. Igitur et iudicium de Phryne non niſi poſtremo Philippi tempore peractum, et poſt iſthuc iudicium celebrata iam formae fama Phryne Eleuſiniis in ſacris Venerem imitata e mari proceſſit nuda, ſicque ab Apelle picta eſt, ſic, vt forma docet ſimulacri, a Praxitele ſculpta. Igitur ante hoc tempus a Praxitele, cui propter Cupidinem marmoreum Theſpiis deinde a ſe dedicatum, copiam ſui fecit, non videtur in marmore ducta. Videtis, vt vero ſimile euadat, ſeu extremo aliquo tempore Philippi regis, ſeu ſub auſpiciis, quod equidem cenſeo, Alexandri M. ſtatuam ex officinaPro xitelis prodiiſſe.

Duas Veneres Praxiteles fecit eodem tempore, alteram velato corpore, alteram nudam. Illam Coi, quibus optio relicta fuit, praetulerunt, verecundiae matronarum ſuarum conſulentes, hanc Cnidii emerunt: vtrique ſigno Praxiteles pretium ſtatuerat idem. Famam tamen Cnidia multo eſt conſecuta celebriorem. (6) Aedes Veneris apud Cni-

(5) p. 849. (6) Luciani Amores p. 880. ſeq.

Cnidios haud longe a portu dedicata fuit. Subdiale circa aedem non lapidibus ſtratum, ſed frugiferis arboribus ſyluae in modum diſpoſitis: cypariſſi, laurus, platani interiectae, haederaeque ac vites, (vino enim abundabat Cnidus tali, quod multum nutrire et ſanguinis copiam venis ſuppeditare ferebant Graeci,) (7) vites igitur, circa vnaquamque ductae arborem, gratiſſimum oculis ad voluptatem ſpectaculum praebebant. Sub opacis ſyluis exedrae erant, in quibus conuiuari licebat et genio indulgere, ab iis tamen honeſti homines refugiebant. Aedes ipsa parua, vt dea ſpectari tota non poſſet. Foribus enim patefactis ſola Venus anterior cernebatur: aliae a tergo fores, quibus ab aedituo reſeratis, auersa patebat oculis. Sic Lucianus, vt ex eo Plinius explicari queat, qui ſubobſcure dixit: *aedicula eius tota aperitur, vt conſpici poſſit vndique.* Anticae fores plerumque erant apertae: auerſas clauſas tenebat aedituus, virili et veſtitu et nomine foemina ſacerdos, ne Venus, vt accidit aliquando, iniuriae proſtaret.

Vt autem toto orbe dicta fuit Cnidia, ita Cnidii ipſi Εὔπλοιαν dixere, teſte Pauſania. (8) Nam Venerem, quod e mari prodiiſſet, ſalutarem nauigantibus credebant prauiſſima ſuperſtitione mortales. Leander apud Muſaeum:

 Αγ-

(7) Athenaeus p. 32. (8) p. 4.

Ἀγνώσσεις, ὅτι Κύπρις ἀπόσπορός ἐςι θαλάσσης
καὶ κρατέει πόντοιο καὶ ἡμετέρων ὀδυνάων.

Neque vero credebatur, hanc tutelam solis insaniae suae victimis praestare, sed nautis quibusuis. Quare Mnesalci epigramma ad maris litus sacellum Cypriae marinae collocat, Anytas autem statuam Veneris, ὄφρα φίλον ναύτῃσι πλόον τελῇ, *vt nautis nauigationem ex voto secundaret*. Anytae epigramma etiam Antipatri versibus expressum est, qui quidem etiam plus venustatis habent. A Graecis ad Romanos similis persuasio errorum peruasit. Rutilius Numantianus in itinere suo: (9)

Pande, precor, gemino placatum Castore pontum:
Temperet aequoream dux Cytherea viam.

Quo loco, vt id dicam obiter, malim equidem

Pande, precor, gemino placato Castore, portum.

Romam enim deam veneratur, vt portum Ostiensem sibi panderet placatis Castoribus, (quibus populus Romanus cum praefecto vrbis vel consule quotquot annis ea caussa prope Ostiam sacra faciebat,) (10) inde vero vt maritimum cursum secundaret, Venerem. De Cnidia ipsa Lucianus per iocum, vt

(9) l. 1. v. 155. (10) Aethicus in Cosmographia de Tiberi.

vt assolet, ἠρέμα τῇ γῇ προσηνέχθημεν, αὐτῆς οἶμαι τῆς θεᾶς λιπαρᾷ γαλήνῃ πομποστολούσης τὸ σκάφος, *sensim in portu Cnidio appulimus, veluti, vt opinor, ipsa dea nauem deduceret iucundissimam per tranquillitatem.*

Nicomeden regem accepimus signum a Cnidiis petiisse ea conditione, vt aes alienum ciuitatis, quod erat ingens, dissolueret, Cnidios omnia maluisse perpeti, quam regi, quod cupiebat, concedere. Post id CPlin fuit traductum. Nam vbi Cedrenus de Theodosio M. dixisset, δι' ἐπιτομῆς subiiciuntur de simulacris et ornamentis vrbis: in quibus traditur, Cnidiam Venerem in Lausi palatio, id media vrbe haud procul a foro Constantini M. erat, fuisse collocatam. (1) Anselmus Bandurius(2) inde Romam, tum Florentiam esse transportatam asseuerate edidit, (3) nullo ad fidem testimonio. Haec illa Medicea Venus, quam alii vero omnes ad Praxitelei simulacri exemplum factam contenderunt. Dubitari non potest, a tam excellenti opere exempla esse ducta. Ita, quae secundum Venerem praecipua in laude fuit statua Cupidinis Thespiaci, eodem auctore Praxitele, cum a C. Caesare, illo inquam Caligula, Romam esset asportata, Menodorus Atheniensis τὸ ἔργον τοῦ Πραξιτέλους μιμούμενος alium fecit, quam Pausanias scribit, sua aetate a Thespiensibus cultam. (3) Conon Atheniensis, Lace-

(1) p. 322. ed. Paris. (2) In Orbe Orientali t. II. p. 846. (3) p. 4.

cedaemoniorum classe ad Cnidum superata, Athenis iuxta mare dedicauit Venerem. Cnidiam sane, sed non hanc Εὔπλοιαν, quae nondum exstabat. Puta alteram Cnidiorum Ακραιαν. Et mos ille veterum artificum insignia opera imitandi, numquam cuiquam statuario dedecori fuit in Graecia, vt si quam statuam ad exemplum factam dicamus, nihil tamen ex arte decerptum velimus. At Venus Medicea ne exemplum quidem Cnidiae esse potest. Videte eam in Dominici Rossi splendido opere, (4) in quo nihil ita miror, quam insignem inconstantiam, quod ipsa statua sic inscribitur

ΔΙΟΜΗΔΗΣ ΑΠΩΛΛΟΔΟΡΟΣ
ΑΘΗΝΑΙΟΣ ΕΠΟΙΕΙ

illustris vero Maffeus in commentariis veluti alium titulum edidit: (5)

ΚΛΕΟΜΕΝΗC ΑΠΟΛΛΟΔΟΡΟΥ
ΑΘΗΝΑΙΟC ΕΠΟΙΕΙ

In Apollodori nomine duae extremae litterae a Maffeo vtique bene restitutae sunt: tantae autem in nomine diuersitatis, vt hic Cleomenes esset, ibi Diomedes, cui culpam imputem video, quis enim Maffei eruditioni vmquam diffidit, quae summa fuit, at-

(4) *Raccolta di statue antiche e moderne, data in luce da Dominico de Rossi, illustrata di Paolo Alessandro Maffei in Roma* 1704. Tab. XXVII. Conf. Bernardus Montfaucon in Antiquitatibus illustratis tom. I. parte I. tab. CII. (5) p. 28.

at quid sculptorem aeris adeo fallere potuerit, non video. Quid vero tandem in hac Venere est, quod Cnidiam referat. Nam sinus reductus obiectaque manus non protinus Praxiteleum opus arguunt: sumebantur haec vel a lasciuia vel a pudore. (7) At in capite non illa est species, quae in numo, atque in hoc signo horti Imperatorii: et in pede altero nimis flexo Medicea statua nihil Cnidium habet, habet statua Petropolitana in pede vtroque ad gressum firmo. Lucianus de Cnidia: οὐκ ἂν εἴποι τις ὡς ἡδὺς ὁ γέλως μηροῦ τε καὶ κνήμης ἐπ' εὐθὺ τεταμένης, ἄχρι ποδὸς ἠκριβωμένοι ῥυθμοὶ, *dici non potest, quam gratiam habeat et femoris et tibiae in rectum protentae ad pedem vsque accurata proportio.* Potius ego Masseo adsentiar, propter Cupidines delphinis in tergo lasciuientes, Venerem eam Genetricem esse.

Venerem aliam ex aere in Museo Regis Prussiae Laurentius Begerus (8) Cnidiam contendit esse. Verum neque hanc hic numus Cnidius secum consistere patitur. Exstat quidem Venus Cnidia in numo Plautillae Augustae extenta sinistra, vt hoc in signo Berolinensi est, nihil tamen prohibet, quin Praxiteleam Venerem mamillae admouisse opinemur. Numum Ioannes Harduinus citauit, Ezechiel Spanhemius vero e gaza Regis Galliae produxit. (9) Sed si secundum hunc numum iudicare nos oporteat, putemus Praxiteleam Venerem etiam vestem tenuisse apposito vase, vt in numo est,

(7) Alciphron l. 1. epist. 39. (8) Thesauri Brandenburg. p. 268. (9) De vsu et praestantia numismatum t. II. p. 296.

quem alter numus Cnidius ab Nicolao Haymo publicatus (10) illuſtrat. Habet enim e regione Veneris Aeſculapium, vt veſtis Veneris et vaſculum illis in numis balnea ſalutaria Cnidiorum indicauerint. Ita nimirum eſt: deorum dearumue ſimulacra non tam accurate in auerſis numis ad certa ſtatuarum ſimulacra effingebant Graeci, vt in aduerſis. Iſthic enim habitum dei deaeue ſaepe pro arbitrio mutarunt, aut ad certam quandam actionem finemue quemuis alium accommodauere, vt multis ex numis compertum habemus. Itaque non temere omnes ſtatuae Veneris, in quibus tot ſtatuarii ingenium ad artem et nequitiam exercuere, pro Cnidia ſunt commendandae. Cyrillus Hieroſolymitanus (1) gentiles ſuperſtitiones recenſens: οἱ μὲν γυναικομανεῖς γυμνῆς γυναικὸς εἴδωλον προσαγαρεύοντες προσεκύνησαν διὰ φαινομένου τὸ πάθος. Illic quoque eum neſcio quam ob notam doctiſſimus editor Th. Milles de Venere Cnidia loqui cenſet. Plura exempla proferre, ſuperuacaneae operae fuerit.

Ad poſtremum, quia duos numos Cnidios ſupra protuli, dicam tribus verbis de eorum nauibus. In altero cornu copiae Cnidiorum adfluentiam a Veneris religione demonſtrat, in primo caput leonis et claua Herculem Lacedaemoniamque Cnidiorum originem. Erant enim, vt Herodotus teſtatur, (2) Λακεδαιμονίων ἄποικοι.

De

(10) Theſauri Britannici t. II. tab. XVI. (1) Catecheſi IV. p. 49. (2) l. I. c. 174.

DE VARAGIS

T. S. B.

PRincipio Ruſſi reges ex Varagis habuere. Pulſis iis, Goſtomislus Slauico ex genere principatum tenuit et inteſtinis diſſidiis infirmum et a Varagorum adflictum potentia. Illius ex conſilio Ruſſi regiam domum ab Varagis reuocarunt: Ruricum, inquam, et fratres. Inde iam Varagorum non infrequens memoria in Annalibus Ruſſicis, ſed tantum amicorum et ſociorum nominis Ruthenici, quine ſub regum Ruſſiae ſtipendiis militarint, aut palatinis officiis ſint defuncti. Quod nomen fuerint Varagi, vbi coluerint, nemo eſt, qui ſic explicuerit, vt illius in ſententia penitus acquieſcam. Sunt ex ſcriptoribus Ruthenis, quos ad manus habeo, qui, quando Ruricum a Varagis veniſſe tradunt, huic loco interſerunt, *ex Pruſſia veniſſe*. Hi quidem omnes Ioannis Baſilidis Regis temporibus fuere, aut poſtea. Quare Chronographus anonymus in ſynopſi, vt aliquid ad huius ſententiae honorem adiiceret, *ex Pruſſia*, ſcribit, *aliquem Kurfiſtra* (1) (*Churfürſt* ſeu *Electorem*) *et Magnum ducem, Ruricum nomine accitum eſſe* Scripſit igitur poſt A. C. 1612. cum Ioannes Sigis-

(1) Курфистра,

mundus Elector, Prussiae ducatum domui suae diuinxisset, credíditque, eundem in Prussia statum ante tot secula fuisse. De Prussia sane Ioanni Basilidi Regi id ipsum persuasum fuisse, Paulum Oderbornium et Petrum Petreium auctores habeo. Sed et quaedam istius Regis cum Alberto Duce acta exstant, ex quibus tota res et opinionis istius quasi lacerti magis apparent, quae autem aequo animo dissimulare possum, quando opinioni illi alia infinita fere obstant. Matthaeus Praetorius quidem eam gratanter accepit, vocem e Prutenico sermone interpretatus, tamquam si Varagi essent *Vareiis*, quasi *compulsi*. Potuisset eodem referre *Wargen* pagum agri Sambiensis veteri rerum celebritate et *Rus* fluuium proxime a Memela. Me vero, vtut patriae impense faueo, tamen ille rumor ne similitudine quidem veri suffultus, non delectat. Si quid praeterea est, quod cuiquam in Praetorio possit placere, id ipsum prolata confirmataque sententia mea, displicebit. Et Praetorius vero Prussos veteres cum Slauicarum gentium stirpibus confudit: quod eum dolo malo fecisse, vt Polonis assentaretur, demonstrare possum. Populum Prussicum duobus fere ante Ruricum seculis hac in regione, eundem fuisse, quem postea Equites Teutonici subiugarunt, hoc est, corporis eiusdem cum Lithuanis, Curonis, Lettis, diuersae autem a Slauicis gentibus stirpis, adeo possum confirmare, vt nullius hominis dissensionem pertimescam. Quare quod hac in opinio-

(2) In Orbe Gothico l. II. 2. 6.

nione plauſibile eſt maxime, cum Praetorius Ruſſos ex ſui ſanguinis populo principem repetiiſſe concludit, id me minime omnium perturbat. Sed quidam Rutheni adiiciunt amplius, (3) illum Pruſſicum principem Ruricum genus duxiſſe ab Caeſaris Auguſti germano, qui in Pruſſia fortunas ſuas collocarit. Fabula eſt, digna iſtorum temporum ingenio, quod vetuſtis monumentis intemperanter abutebatur ad coniecturas ſuas, coniecturas edebat pro certa fama. Vincentius Cadlubco episcopus Cracouienſis fundamenta iecit neceſſitudinis illius Auguſtae domus cum familia regum Polonica *Koſzysko*, quam ante Piaſtum ponit. Leſconem tertium ſcribit, C. Iulium Caeſarem tribus praeliis viciſſe, P. Craſſum apud Parthos (nam et Parthis et Getis et neſcio quibus Transparthanis rex fuit Leſco,) cum omnibus copiis deleuiſſe: Caeſarem eidem Iuliam ſororem in matrimonium elocaſſe: dotis loco fuiſſe Bauariam: contra Iuliae a Leſcone datam eſſe Sambiensem in Pruſſia prouinciam. Si quaeras, a qua coniectura Vincentii iſta profecta ſint, ipse tibi quaſi digito monſtrat. Lublino antea Iulinum nomen fuiſſe Vincentius credebat: confudit enim Iulinum Slauicam ad mare Balthicum vrbem cum Lublino, propter vocis congruentem ſonum. Nempe, vt ille credebat, a Iulia: inde iam cetera eodem trahenda erant. Stomachum haec mouere poſſunt, cum viſcerum omnium doloribus, donec illa tam cruda eiecta fuerint. Alia

(3) Confer Petreium in Chronico Moſcouitico parte II. p. 139 ſeq.

via Petrus Teutoburgicus, (4) homo non adeo vanus, Prussicis rebus Romanas admiscuit. C. Caesarem scribit, in Prussia bellum gessisse. Inductus in opinionem illam est, quod de Drusi et Germanici Caesarum expeditionibus in Glessarias insulas legerat. Nam et Erasmum Stellam Glessariae insulae fefellerunt. Exportari monstrosos hos ingenii partus oportet aliquam desertam in insulam, quia veris historiis pestem portendunt. Mirum tamen est, quam foecundae tales fuerint fabulae. Nam cum ista exstarent apud Polonos de necessitudine Augustae domus et de Romanis in Prussia expeditionibus, iam expedita erat via, simul cum Iulia, tamquam Augusti Caesaris sorore, etiam fratrem aliquem germanum deducendi ab Roma, inde Ruricum illius serum nepotem ex Prussia.

Sigismundus Herbersteinius, (5) cum videret, Varagos a Russis trans mare Balthicum poni et partem illius maris, quod inter Ingriam et Finniam situm est, *Waretzkoie more*, *Varegium mare* appellari, ab superiori sententia, quam ipse forte primus in Russia disseminauit, tandem alio diuertit animum. Prope Holsatiam *Vagriam* reperiebat, et *Vagros*, teste Adamo Bremensi, Slauonicum populum. Habebat congruentiam nominis, rem leuiculam, nisi firmioribus fulcris muniatur. Attamen Bernardus Latomus et Fridericus Chemnitius et qui eos sunt secuti hoc primum omnium posue-

(4) Historiae Prussicae p. 41. (5) Rerum Moscouiticarum p. 3. seq.

fuere tamquam certum. Et quia inuenerant Ruricum circiter A. C. 840. fuisse, ergo qui tum principes in Vagris et Obotritis floruerint, quaesiuere. Et cum Vitislai regis filii fuere duo, alter Thrasik, cuius liberi essent noti, alter Godelaibus, cuius liberi non ederentur, huic Ruricum, Trebunem et Sinaus transscripserunt. Quod praeter nomen in hac coniectura Herbersteinio placuit, Vagrios Slauonici corporis Russorum necessarios fuisse, id ipsum in controuersia poni potest. Nam his Slauicis populis permisti fuere alii, qui cognatione attingerent Prussos et Lithuanos, vt certe Veruli, forte et Vendi. Quidquid Lithuanici illorum in sermone est, vt esse apparet, ab veteri stirpe generis permansit, Slauonica admista sunt ab accolis, per quos cincti et a necessariis suis plane exclusi fuere. Si quis Vagrios his ipsis accensere velit, non satis idoneam video Adami Bremensis auctoritatem, vt nos ab adsensu retineat. Inuenio quidem apud Helmoldum, (6) Vagrios in mari Baltico piraticam exercuisse, vt, si cui libet, nauibus eos deducere possit in Russiam et vel vim eorum atque metum iniicere. At testem habeo Saxonem Grammaticum, (7) Slauonos omnes illo in litore piraticam serius instituisse et perraro adhuc Suenonis Tiuffeskegi regis temporibus, circiter A. C. 985. Quare ne satis quidem apparet, quid commercii his Vagriis cum Russis fuerit.

Mul-

(6) p. 6. ed. Bang. (7) p. 186.

Multa alia in mentem venerunt aduerſus ſuperiores ſententias, quae fiducia meae opinionis, quam nunc expoſiturus ſum, conſulto praetermiſi. Aio igitur, Varagos Ruthenicorum ſcriptorum, fuiſſe ex Scandinauia Daniaque homines nobiles, ſocios in bellis et ſtipendiarios milites Ruſſorum, regum ſatellites, limitum cuſtodes, rebus etiam ciuilibus et magiſtratibus admotos: ab iis deinde in vniuerſum omnes Suedos, Gothlandos, Noruagos, Danos dictos fuiſſe Varagos. Et primum quidem Ruſſici annales quamquam ab Rurico exordiuntur, tamen tenuem memoriam admiſcent, eum ex ſuperiorum Ruſſiae regum, qui et ipſi Varagi fuerint, proſapia exſtitiſſe, pulſos autem a Goſtomislo fuiſſe hos ex eo ſanguine reges. Iam vetuſtae Suedorum et Noruagorum ſagae non ita penitus ſunt explodendae, vt, cum Gardarikiae et Holmgardiae, hoc eſt, Ruſſiae reges ante Ruricum nominant, quamquam multa etiam ex vano hauriunt, earum memoria rerum fide digna ſit nulla. Alii loco atque tempori haec ediſſerere magis conueniet: nunc ex Annalibus Francicis Bertinianis (8) locum apponam cum primis inſignem. Ita anonymus ad A. C. 839. Teophilus Imperator CPlitanus *miſit cum eis* (cum legatis ad Ludouicum Pium Imp.) *quosdam, qui ſe, id eſt, gentem ſuam, Rhos vocari dicebant: quos rex illorum Chacanus vocabulo, ad ſe amicitiae, ſicut aſſerebant, cauſſa direxerat*, (ſine gubio ſecundo Boryſthene nauibus) *pe-*

(8) Apud Duchesnium t. III. p. 195. b.

petens per memoratam epistolam, quatenus benignitate Imperatoris, redeundi facultatem atque auxilium per imperium suum totum habere possent: quoniam itinera, per quae ad eum CPlin venerant, inter barbaras et nimiae feritatis gentes immanissimas habuerant, quibus eos, ne forte periculum inciderent, redire noluit: quorum aduentus caussam Imperator (Ludouicus) *diligentius inuestigans, comperit, eos gentis esse Sueonum, exploratores potius regni illius* (CPlitani) *nostrique, quam amicitiae petitores ratus, penes se eousque retinendos iudicauit, quoad veraciter inueniri possit, vtrum fideliter eo nec ne peruenerint: idque Theophilo per memoratos legatos suos atque epistolam intimare non distulit et quod eos illius amore libenter susceperit, ac, si fideles inuenirentur et facultas absque illorum periculo in patriam remeandi daretur, cum auxilio remittendos: sin alias, vna cum missis nostris ad eius praesentiam dirigendos, vt, quid de talibus fieri deberet, ipse decernendo efficeret.* Habes gentem Rossicam ante Ruricum, cuius nominis multo quam annales Russici edunt, antiquioris, auctores Graecos alio loco producam: habes regem tanta maiestate, vt خاقان *Chakan*, seu *Imperator* et Αυτοκράτωρ iam tum diceretur: vides hos legatos Rossicos ab stirpe fuisse Sueonas.

Inde autem ab Rurico, omnia nomina Varagorum in Russicis annalibus conseruata, nullius alterius sermonis magis sunt, quam Suionici, Noruagici, Danici: neque vero obscure et parce, vt me

 quis

quis cauillari putet. Videamus primorum ex Varagis regum nomina. Habemus primum omnium *Ruricum.* Cuius id nomen populi eſt, niſi Scandinauici aut Danici? *Ruricum* regem Daniae quintum et decimum Saxo Sialandenſis citat. (9) Is Erico regi, ſeu regis monacho, in hiſtoria Daniae *Rorik.* In ſerie Runica regum Daniae ab Olao Vormio edita, *Rorek.* In Noruagis celebris eſt *Hrorekur* ſeu *Rorekur* Haraldi Pulchricomi filius: (10) eodem tempore rex Heidemarkiae in Vplandia (1) *Hrorekur* et *Rorek* fuit. Et *Rorek*, quem Olaus S. rex Noruagiae vicit. (2) Olaus Verelius ſub finem hiſtoriae Herraudi et Boſae inter cetera veteris gentis nomina e lapidibus runicis edidit *Rorikr* et *Rurik:* In Germania quoque *Ruricus* archiepiscopus Rothomagienſis in priuilegio monaſterii S. Remigii a ſynodo Senonenſi confirmato. (3) Forte idem nomen, quod apud Germanos fuit *Rugerik* et *Rogerik.* Rurici fratri *Trewur*, *Trubar*, *Trowur* nomen fuit, vt Ruthenicae habent hiſtoriae. Saxoni Grammatico (4) in ducibus Ringonis regis Suediae contra Haraldum Hyldetand: *Ivarusque cognominatus Thruwar.* Stephanus Stephanius (5) ex veteri codice Danico: *Iver Truere.* Alterius fratris *Sineus* nomen in ſeptentrionalibus nondum reperi. Fuere autem nomina propemodum infinita: neque ſatis conſtat, an hoc a Ruſſis corruptum non fuerit. Apud Saxonem Gramma-

(9) p. 47. (10) Snorro Sturlson in Ynglingorum hiſtoria t. I. p. 96. 113. (1) ib. p. 410. 469. (2) ib. t. 1. p. 487. (3) Dacherii Spicilegium t. 1. p. 595. ſecundae edit. (4) p. 144. (5) p. 171.

maticum (6) et Ericum regem (7) eſt rex *Snio*, ab isto nomine non abhorrens.

Manſere nomina Scandinauica etiam in Rurici poſteritate et domo. Exemplo eſt filius *Igor*, vt eius nomen Ruſſi enunciant: nam Conſtantino Porphyrogennetae eſt Ιγγωρ *Ingor*, Liuthprando Ticinenſi, Sigeberto Gemblacenſi, Eggehardo Vragienſi, *Inger*. Ita Liuthprandus CPli pronunciari audiuerat. Et Ruſſi recte et Graeci, ſi ſeptemtrionales audias. In ſaxo, quod Henricus Curio in monumentis lapidum Runicorum ex Laurentii Burei ſchedis edidit: *Sigvidr et Ingvar et Iarlabangi incidi runas curarunt patri ſuo Inguar et fratri ſuo Ragnwalt.* Apud Ericum regem et Hermannum Cornerum (8) *Inguar* rex Danorum: idem Saxoni Grammatico (9) *Iuarus*. Apud Snorronem Sturlaeum (10) *Ynguar* rex Fiedrundiae: eidem (1) etiam *Iuar*, vt apud Verelium quoque ex runis. Heruorar ſaga, (2) *Iſuar Vidſarni* et *Iſuar*. In Teutonicis quoque Iuſtus Georgius Scho t telius, diligentiſſimus talium explorator inuenit *Inguer* et *manſionis tutelam* explicuit. Venit mihi hoc loco in mentem Conſtantini Porphyrogennetae auia. Leo Grammaticus (4) Ευδοκιαν την Ιγγιεριναν et Ευδοκιαν τȣ Ιγγερος vocauit. Georgius Monachus (5) τȣ

 Ιγ-

(6) p. 157. (7) p. 265. ed. Fabr. (8) p. 482. ed. Eccardi. *Inguar* Olaus Vormius in lexico Runico explicat, *fortem uirum.* (9) p. 176. (10) t. 1. p. 43. (1) p. 98. (2) p. 179. (3) de Lingua Germanica p. 1067. (4) p. 464. 471. (5) In nouis Imperatoribus p. 544.

Ιγγιερος. Simeon Logotheta (6) Ιγγηςος. Michael Glycas (7) et Zonaras (8) τȣ̃ Ιγκηρος. Leontius Byzantius, aut quisquis Basilii Macedonis vitam scripsit, seu magis panegyricum, cum de Basilii nuptiis fatur, *data est ei*, inquit, (9) *in matrimonium* ἡ θυγάτηρ τȣ̃ παρὰ πάντων ἐπ' ευγενέια καὶ φρονήσει λαλȣμένȣ τότε Ιγγερος. *filia Ingeris, qui tum ante omnes alios ob nobilitatem et prudentiam colebatur.* Cedrenus (10) qui hunc auctorem, fere sequitur, addit τȣ̃ γένȣς καταγομένȣ τῶν Μαρτινακίων, *stirpis Martinaceae.* Quam nobilis ille Inger fuerit, viderit Leontius et de Martinaceo genere Cedrenus: nomen vtique peregrinum est. Et quidquid visum sit adulatoribus, oportet stirpem eius non nobilem in Graecia fuisse, e qua stirpe Michael Imperator Eudociam, cum ob pulchritudinem et prudentiam deperiret, ducere tamen non est ausus. Malim vero Scandinauici generis fuisse Ingerem, quam alterius: nomen enim Scandinauicum est. Neque ei Scandinauicam nobilitatem adimo, vt fere nobilissimus quisque indidem solitus est petere Byzantium: Graecam non concedo. Et licet Byzantii Inger vel ex illustrissima gente vxorem duxerit Eudociae matrem, tamen vt ait Liuthprandus, (1) *Graeci in genesceos nobilitate, non, quae mater, sed quis pater fuerit, inquirebant.*

Ingoris regis Russorum, vt ad eum redeam, fi-

(6) p. 455. (7) p. 297. (8) p. 165. (9) p. 147. (10) p. 565.
(1) l. V. c. 6.

filius *Suiatoslaus*, nomen plane Slauonicum eſt, ſi ſic, vt Ruſſica monumenta habent, enuncies. At Conſtantinus Porphyrogenneta, Cedrenus, Zonaras, Ionnes Curopalata, ΣΦενδοσθλάβον *Sphendoſthlauum* ſeu *Suendoſlauum* dixerunt, quod videri poteſt hibridum eſſe, extremo Slauonico, principio Normannico *Suen*, multis in nominibus. Nam et componunt Normanni huncce in modum. Habemus in Dania *Suenottonem* regem, apud Germanos *Suendeboldum* et *Suendebordum* Lotharingiae regem, (2) et *Suenebildin* abbatem Heruordensem. (3) Σθλάβους Graeci Conſtantini Porphyrogennetae aetate et poſtea, dixere *Slauos*. Reliquum manet *Suen* et *Suendo*, cum exitu ad componendam vocem idoneo. Non nego, *Suiatoſlaum* et *Suendoſlaum* (4) Slauonice et quidem percommode dici *ſanctae gloriae virum*: ſed cum ſanctitatis nomen populo profano quantum notum fuerit, non apparet, poteſt fieri vt e Normannico ſit corruptum. Nam et *Vlodimer* nomen, vt nunc Ruſſi enunciant, quamquam Slauonicum (5) videtur eſſe et commode explicari, tamen ſimili dubitatione incertae originis inuoluitur. Slauoni olim *Vladimir* dixerunt, vnde Cedreno Βλαδιμῆρος. Dithmaro Merſeburgenſi, qui id nomen a Polonis pronunciari ipſius aetate Vladimiri audiebat, et Eggehardo Vragienſi, *Vlademir*, *Vladamir*, *Valdemar*. Snorroni Sturlaeo (6) *Valldemar*. Sic item auctori *Vilkinae ſagae*

(2) Hermannus Cornerus p. 509. 504. (3) ib. p. 449
(4) Святославь et Свѣнтославь (5) Влодимерь (6) t. 1. p. 196

a Peringskioldo editae, qui, cum Valdemarum Russiae regem Theodorici Veronensis aetati immiscet et noua praeterea nomina Prussiae aliarumque regionum eodem traducit, adeo fabulam suam prodit, vt vix nominandus sit nobis. Sicuti *Vlodimir* Slauonicum est, ita *Valdemar* et Normannicum et Teutonicum. Schottelius in Teutonicis nominibus, *syluae praefectum* explicat: quod nobis non placet. Illis enim temporibus *wal* dicebatur, *campus, in quo acies hostiles concurrunt*, vnde adhuc *wahlstadt, campi* seu *aciei locus*. Poema de amissione terrae sanctae. (7)

do man des tags
Manches stiches vnd slags
Auf den wal het gepflegen.

vbi eo die multi vulnerati sunt et caesi in (*wal*) *aciei campo.* Eodem in poemate (8)

Dy chomen taugenleich
Auf daz wal geslichen.

Hi parati ad pugnam venerunt in (*wal*) *aciei locum.* Chronicon rhythmicum ducum Brunsuicensium: (9)

Aldar de Keiser Otto bald
Behilt de wal vnde den sege

vbi

(7) p. 1528. ed. Ecc. (8) p. 1537. (9) p. 127 ed. Leibn.

vbi mox Otto Caesar obtinuit aciem et victoriam. Inde in Capitularibus Baluzii (10) *walaraupa*, *acici*, seu, *caesorum in acie spoliatio* et in legibus Aethelredi regis *wealreaf*, apud Verelium *valruf.* Inde *valhalla* septemtrionalium, de quo Ioannes Georgius Keysler diligentissime disputauit: (1) inde *valur strages*, et Odini nomen *walfader*, *aciei pater* et *waltodur.* Inde *Valpotus* quoque, vetus familia, ex qua primus magister Ordinis Teutonici. Rhythmus de S. Annone Coloniensi (2)

Ci dere burg vili dikki quamin
Di Waltpodin vane Rome,
Di dir oug er dar in lantin
Veste burge habitin
Vurmiz unti Spiri

Martinus Opitius explicat *gewaltboten, legatos, praesides*, *curatores* ac putat inde esse *walten* et *Vualtarium* in capitulo Karoli M. Malim a *wal* et *pot.* Kero monachus S. Galli: *kipoot*, *praecepit*, *kipot praeceptum.* Dicebant autem veteres omnibus in vocibus eius naturae et rationis, non tam *kebot* et *gebot* quam *kbot* et *gbot* vna syllaba, vt Heluetii etiam nunc. Est igitur *Valpot*, *aciei praefectus*: nam illa ipsa familia, cuius genealogiam Conradus Rittershusius nobis dedit, cum olim *Valpoti de Passenheim* dicerentur, nunc obliterato isto nomine, dicuntur *Marschalki*, significatione eadem conseruata in nouo

(10) t. 1. p. 136. (1) in Antiquitatibus Septemtrionalibus p. 127. &c. (2) c. 30.

uo nomine. Sic *Valmar*, *Valtmar*, *Valdemar* est *acici equus* seu *bellicosus equus*. Nam, vt Pausanias (3) obseruauit, Celtis *equum*, *mar* dici, ita hoc nomen veteri in septemtrione est notissimum. Sed *Vseuolodi* nomen eadem ex familia, quod sane Slauonicum est, Snorro Sturlonides (4) ita inflexit, vt Normannice sonaret *Visaualldur*. Ad eiusdem domus cognationem pertinuit *Oleg*: quod nomen in lapidibus Scandinauicis est *Alak*. Principes Kiouienses *Oscold* et *Dir* Varagos fuisse Russici Chronographi tradunt. *Oscold*, vt Olaus Verelius e runis *Oskael*, apud Snorronem *Askel* (5) et *Aszkell*. In *Dir* nomine haereo. Potest esse proprium vt nauium, ita hominum. In Edda Islandica (6) *Tyr*. In Verelii runicis foeminarum nominibus *Dirva*. Magis tamen inclinat animus, vt credam Russos sequiorum aetatum in altero nomine offendisse: nam *Oscoldum Diar Kiouiae* fuisse dictum opinor. Snorro de Asgardo, (7) *vrbs principem habuit nomine Odinum: ibi mos obtinuit, vt duodecim praefecti ceteris eminentiores Diar et Drottnar, hoc est, principes et domini dicti, gererent curam sacrorum et populo ius dicerent*. Et Oscoldum eiusmodi regum ante Ruricum praefectum Kiouiensem fuisse, ex rebus cum Igore et Olego gestis concludo. Est autem ديار *Diar* ea significatione plane Turcicum, videturque nomen hoc dignitatis acceptum a Cozaris, gente Turcica, quae tum inter vtrumque Tanaim et in Cherrhoneso Taurica multum poterat. Jam

(3) p. 845. (4) t. I. p. 183. (5) t. II. p. 319. ibidem p. 405. (6) Mythologia XXIII. (7) t. I. p. 2.

Iam in ducibus Varagis Ingoris et Suendoſtlaui regum *Suendeldus* et *Sundeldus* ita Scandinauicus eſt, vt me ſuppudeat illa in copia exemplum producere. Suendeldi filius aliis *Liutr* : aliis *Kiut*. Vtrum malis accipe. Olaus Verelius e lapidibus *Liutr* : in qua voce extrema littera, ſeptemtrionalium more et poni poteſt, et omitti. Fuit ſub Suendoſtlauo alter dux, ignotus Ruſſicis monumentis, Cedreno ob virtutem eximie laudatus (8) *Sphagellus*, nomen Scandinauicum, vt certe ſcio me obſeruaſſe : at memoria me deſtituit. Habemus *Rogvolod* Plocenſem ducem. Kniga Stepennaia : *Rogvolod a Varagis dominatum in Plotzko venerat*. Chronographus Ruthenus : *is erat Knias in Polotzko et* заморе *trans mare*, et *in* полесшескъ *Poletesk et Muru in Turowas ſub ditione tenuit*. De his regionibus et locis alias : nunc de nomine huius Varagi. Inſcriptio a Ioanne Peringskioldo ex petra Edenſi in vita Theodorici regis profertur : *Raghwaltr fecit exſculpi runas in memoriam Faſtvidis matris ſuae Onemi filiae, quae mortua eſt in Aidi : ſit deus animae eius adiutor : runas exſculpi fecit (Ragnwaltr, hwar a Griklanti was lisforungi) Ragnvaldus, qui in Graecia erat militum dux et anteſignanus.* Oſtendam alias, Ruſſiam a ſeptemtrionalibus dictam fuiſſe Graeciam, atque in iis lapidibus, in quibus Graeciae mentio exſtat, caute nos oportere verſari, ne ambigua voce fallamur. Eſt et apud Snorronem (9) *Ragnvaldus Iarlus*, quem Iaroslaus rex Vladimiri filius ſummo in honore habuit.

(8) p. 676. (9) t. 1, p. 516. ſeq.

buit. Is cum Aldeigoburgo vrbe, *Iarls riki*, Ingigerdis reginae dotalitium tenuit, ex quo adhuc *Careliae* nomen manere mihi videtur. A Snorrone nomen alias *Raugnwaldur* et *Roegnvald* effertur. (10) Ioannes Fridericus Peringskioldus dialecto Suedica expressit: *Ragnwald* et *Ragvald*. Notus *Rognvolodus* Eysteini filius, *Rognvaldus* Einaris, *Rognvaldus* Brusii filius et alii in Orcadensibus Comitibus apud Thormodum Torfaeum. Huius Rogvoldi Plocensis filia, *Rogveda* a Chronographo Russo vocatur, *Rozgnieda* a Stepennaiae knigae auctore. Habemus eum in modum in monumento Siltensi apud Olaum Vormium (1) *Rotvidha*. Alioqui *Ragnhilda* Erici Iutlandiae regis filia, Erici Blodoxis regis Noruagorum mater satis nota: *Ragnilta* in monumento Trygveldensi et Bildensi. (2) Apud Igorem regem in exercitu fuere Varagi, cum aduersus CPlin duceret. Legati Igoris in vrbem missi memorantur, in quibus est Карлa, quod quid aliud est, quam *Carolus*? frequens nomen ita, vt antiquum. In monumento Hobroensi: (3) *Thurir lapidem hunc posuit* (*vsti Karl gudoa*) *Carolo bono*. Est deinde Інгелдъ *Ingjeld*. *Ingialldus* Naumudaliae rex, *Ingialdus* Starkadi alumnus Daniae rex, *Ingialdus Trana*, omnes apud Snorronem. Tum Фарлофа *Farlof*. Apud Verelium *Farulf*, in monumento Froelandensi *Herluf*: in Teutonicis credo *Fardulfus* et *Ferdulfus*. Porro Рулавъ *Rulaw*, frequentissi-

(10) t. 1. p. 82. t. 1. p. 542. t. 11. p. 339. (1) p. 454. (2) Olaus Vormius in monumentis Danicis p. 112. 475. seq. (3) Olaus Vormius l. V. c. 3.

ſimum nomen, vt *Hrolf Langom ſpada*: Iarlus Noruegenſis et *Hrolf krake* rex, *Roſius Rello* in Orcadenſibus Torſaei: Saxoni Grammatico *Roluo*. Eſt in legatis Лиду *Lidu*: vt *Lyd* epiſcopus Noruegiae (5) eſt Карнъ *Carn*: vt *Karius* ille Islandus in Orcadibus. (6) Eſt Рiаръ *Riar*: vt *Hroar* ſeu *Ruar*, rex Daniae apud Thormodum Torfaeum et Gualtherum in hiſtoria Hrolſi Krakii a Torſaeo edita. Sunt denique in legatis *Truan*, *Ruald*, *Flelaw*, *Foſt*: Scandinauica omnia. Poſtquam illa a me ſcripta ſunt, multa in Peringskioldi Vplandicis ceterisque monumentis inueni, quae ad illuſtranda haec nomina pertinerent: at me iam ipſum faſtidium cepit, vt quid lectoribus meis futurum ſit iudicare queam. Vnum, ſed inſigne adiiciam nomen. Ruſſici annales ſub Iaroslao *Iacobum Varagum* celebrant. Is ſine dubio Ingegerdis reginae frater, Olai regis filius fuit. Nam de eo Snorro auctor eſt: (7) *alius etiam ex reginae thoro ei* (Olao regi Erici filio) *naſcebatur filius, ipſa feria S. Iacobi memoriae dicata: hunc, cum ſacri baptismatis ritu initiandus eſſet, Iacobum nominauit epiſcopus: quod omnino nomen auerſabantur Suiones, quod nemo vmquam Suionum regum ſic appellatus fuerat.* Suionum vero regum nemo? imo ne alterius quidem ſeu nobilis hominis ſeu plebii exemplum apud Snorronem exſtat. Neque tantummodo Iacobi, ſed omnia chriſtianae memoriae nomina, tamquam peregrina, penitus infrequentia in ſeptemtrione fuerunt.

 Hi-

(4) apud Vormium. p. 508. (5) Snorro t. II. p. 347. (6) Torfaeus in Orcadenſi hiſtoria p. 39. (7) tom. I. p. 502.

Hiſtoriographus ineditus tradit, Vladimirum Iaroslai filium ea in claſſe, in qua contra Conſtantinum Monomachum Imp. profectus eſt, magnam Varagorum multitudinem habuiſſe. Qui Varagi? nempe Cedrenus opinioni noſtrae congruenter tradit, ex Scandinauia fortes viros fuiſſe. (8) Dicitur ei Vladimirus προσεταιρισάμενος καὶ συμμαχικὸν οὐκ ὀλίγον ἀπὸ τῶν κατοικούντων ἐν ταῖς προσαρκτίαις τοῦ Ὠκεανοῦ νήσοις ἐθνῶν, *ſibi aſſociaſſe etiam auxilia non exigua ex gentibus, quae in borealibus Oceani inſulis colunt.* Notum eſt, inſulam dici Scandinauiam peruetuſto errore. Item de Vladimiro Magno Ruſſici annales, eum ſaepe in exercitu ſuo magnam Varagorum multitudinem duxiſſe. Danos eos fuiſſe, Dithmarus Merſeburgenſis Vladimiri regis aequalis tradit, (9) qui id ipſum a Polonis et Bohemis cognoſcere poterat, vt multa veriſſime cognouit. *In hac ciuitate Kitawa* (lege *Kiaua*, quae *Kiouia* eſt) *populi ignota manus*, (ingens multitudo) *quae, ſicut omnis haec prouincia* (Ruſſia) *ex fugitiuorum ſeruorum robore confluentium et maxime Danorum, Pecineis* (Pacinacis) *multum ſe infeſtantibus, hactenus reſiſtebat.* Ne quem hic offendant *ſerui fugitiui.* Homo Germanus ſui et ſeculi et populi ingenio iudicabat et praeterea incommode loquebatur. *Seruos* dicebant lingua ſua Teutoni, qui pedibus ſtipendia mererent, quantumuis nobiles genere et gloria rerum geſtarum homines, voce nequaquam, vt Latinum *ſerui* nomen eſt, ignominioſo. At fugitiuos cen-ſe-

(8) p. 758. (9) Et ex Dithmaro Eggehardus Vragienſis ad A.C. 1018.

ſebat eos, qui alio ſub rege ſtipendia mererent, quod tum in Teutonis erat inſolens, vt vel ex Dithmaro in Boleslai Poloni rebus cognoſcitur, niſi aliunde nobis conſtaret. Alii Scandinauis Danisque mores et ea vel maxime quaerendae gloriae materia, ſi quis nobilis vir apud longinquos populos lauream ſibi quaeſiuiſſet.

Ex iis quae ſupra explicui, conſtitui poteſt, quae mens incerto auctori in vita Romani Lacapeni Imp. fuerit, (10) cum ὁι Ρῶς, inquit, ὁι καὶ Δρομῖται λεγόμενοι, ὁι ἐκ γένους τῶν Φράγγων καθιϛάνται, *Ruſſi, etiam Dromitae dicti, qui e Francorum genere ſunt.* Sic etiam Symeon Logotheta. (1) De hoc loco dicam alias commodius. At genus hoc Francicum quo pertinet, niſi ad cognationem regiae domus cum Scandinauis, et ad illam multitudinem Normannorum, Suionum, Danorum, qui inter Ruſſos in dignitatibus et exercitu fuere? Nam CPlitani, ex quo Franci caput extulerunt, totam Germaniam dixere Franciam. Quare Conſtantinus Porphyrogenneta: (2) Φραγγία ἡ καὶ Σαξία. Immo, quemadmodum Eggehardus Vragienſis (3) Germaniam extra fines ſuos vsque ad Tanaim profert, ita Franciam Graeci dicebant, quidquid ad occidentem imperii Byzantii erat. Liuthprandus Ticinenſis: *reſidentibus nobis ad menſam*

 (Im-

(10) p. 262. (1) p. 465. et apud Anſelmum Bandurium in Imperio Orientali t. II. p. 33. (2) de adminiſtrando imperio p. 95. (3) p. 226. ed. Ecc.

(Imperator) *ex Francis, quo nomine tam Latinos, quam Teutonas comprehendit, ludum habuit.* Quae quidem caussa est, quamobrem adhuc apud Turcas plerique omnes Europaei افرنج *Efrengj* Franci nuncupentur. At Turcae se quoque Francos ab stirpe esse gloriantur. Non recens illa opinio est: nam auctor anonymus gestorum dei per Francos, qui belli sacri temporibus fuit: (4) *dicunt se esse de Francorum generatione et quia* (quod) *nullus homo naturaliter esse debet* (sit) *miles, nisi Franci et illi* (Turcae.) Nimirum Turcae in Pannonia aliquanto tempore egerunt vicini Francis, vt alias ex Constantino Porphyrogenneta demonstrabo: hinc, opinor, illa eorum gloriarum plena fabula. Quanto magis Francis accensendi fuerunt Suiones, ceterique septemtrionis populi, quorum sermo a Francico non abhorrebat, facinora nihilo minora fuere. Quos cum viderent inter Russos versari, mirum non est, quod et ipsos Russos nuncuparint Francos. Graecorum exemplo Hungari Russos adhuc *Franciai nepec*, *Francicum genus* appellant. (5) Quid autem Lithuanis faciemus, qui Russos *Gudas* vocant? (6) Quid? inquam, num *Gothos* dicunt? Quid contra Fennis hisce nostris et Esthonibus fieri volumus, qui Suedos haud aliter vocant, quam *Rosalain*, *Ros populum*? Nempe haec alii loco magis conueniunt. At Liuthprandus Ticinensis (7) *Russos,* *quos*

(4) p. 7. (5) Albertus Molnar in dictionario Hungarico voce *Rusfi* (6) Constantinus Czirnidus in dictionario Lithuanico voce *Russus*. (7) p. 92. 144.

quos alio nomine Nordmannos vocamus, et iterum, *gens quaedam est sub aquilonis parte constituta, quam a qualitate corporis Graeci vocant Russos, nos vero a positione loci vocamus Nordmannos, aquilonares homines.* Video Liuthprandum existimare, nullam aliam caussam fuisse, cur Russi a quibusdam dicerentur Nordmanni, quam quod sub borea colerent, vt Gregorius Malatiensis (8) ممالك الامم الشمالية *regna gentium borealium recensens, in iis etiam ponit* روس *Rus.* Attamen, si cum Nordmannico nomine memoriam hanc generis principum Russicorum, stipendiariorum Normannicorum multitudinem, cetera conferamus, videtur eadem Liuthbrando nominis istius prodendi caussa exstitisse, quae a nobis explicata est.

Iam, si Varagi e Scandinauia fuere, quae vis vocis sit consideremus. Olaus Verelius, (9) cum videret, Ioannem Magnum tradere, *Scandiam a nonnullis vocari Vergion*, et isthuc vero interpretari, *luporum insulam*, ita fatus est: *maior tamen in ea non est luporum copia, quam in ceteris Europae regionibus syluestribus: et illud etiam hic obiter notandum, in veteri lingua non semper notare lupum, sed praedonem etiam et hostem. Olai Trygvonidis saga: han var vargur i veum, hoc est, in sacris latrocinia exercuit: inde Brennevargur, Kaxnauargur, de hominibus maleficis dicitur: exercuere quondam Scandiani continuam*

(8) p. 108. (9) Notis in *Heruorar saga* p. 19.

am fere piraticam, vnde Vargi et patria eorum Vargon vel Varghem dici potuere. Et quamquam vir ornatiſſimus doctiſſimusque in eo dubitat, annon potius Ioannes Magnus vitioso Plinii MS. vſus pro *Nerigon* ediderit *Vergion* (quod mihi ſit veroſimillimum) tamen colligit ſe ipse et ad priſtinam opinionem rediens, monet: (10) *cum Moscouitae* (Ruſſos puta eum dicere plebeio errore) *mare Balticum vocent mare Varegum, teſte Herberſteinio, credere quis poterit, et Sueoniam ab eis Varegum et Vergiam appellari.* Olaus Rudbequius (1) in Atlantica et de Ruſſorum Varegis et de vocis veriuerbio item vt Verelius ſenſit. Haud ita pridem Aruidus Moller, vir ampliſſimus, cum de Varegia (8) ageret, huic ſententiae adſenſum quidem praebuit, maluit tamen hoc nominis ex Eſthonia ipsa repetere et Fennia, quae praedonum Suedicorum excurſiones ſaepe ſenſerit. Iſthic enim *Waras, furem* eſſe et *praedonem*, et *Warga-meri, praedonum mare.* Et hoc quidem ſic eſt: etiam Ruſſi *furem* Вор *Wor* dicunt. Teutonicae gentes huic vocabulo ſimilia habent, ſed magis latrocinandi ſignificatione, quae vim, quam furandi, quae fraudem continet. Apud Volfgangum Lazium veteri ſermone Teutonico, *Vuargur, latro*: Abrahamus Mylius (9) a *wurgen, necare, wurger.* Godofredus Guilielmus Leibnitius in

(10) In additamentis p. 192. (1) t. 1. p. 518. *de quo negotio inquit, cum ad Magnorum Ducum ſtirpem ex Sueonibus deducendam peruenerimus, plura in lucem daturi ſumus.* (8) in diſſertatione de Varegia (Wargön) Lundini 1731. p. 21. (9) In Archaeologo Teutone p. 171. (10) p. 145.

in Celticis,(10) *Vargi latrones Aruernis apud Sidonium, idem olim apud Germanos: piratae Normanni etiam Russis dicti sunt Varaegii. In lege Salica, Vargus est extorris, eiectus, qui hodie bannitus. Veriad Cambris etiam est latro apud Cambdenum.* Lex Salica: (1) *Si quis corpus iam sepultum effoderit, aut exspoliauerit, wargus sit, hoc est, expulsus de eodem pago.* Sic etiam in Ripuariis legibus Baluzii.(2)

Ne quis hoc loco summis viris turpitudinem nominis obiiciat. Suus cuique populo mos fuit: vetustis Scandinauis vt praedari honori esset, Graecis, vt et latrocinari. Honesta haec nomina fuere et gloriae plena. Sed quia hoc nimis est antiquum et septemtrionalia monumenta a reliquarum gentium eruditis non ita vt merita sunt, tractantur, visum est nobis rem illam paullo amplius explicandam esse, praesertim, quod vel sic per se ad historiam Ruthenicarum prouinciarum pertinet. Primum omnium satis constat, cum Scandinauiam omnem, tum Daniam, multa minora in regna priscis temporibus diuisam fuisse. In Noruagis primus Haraldus Pulchricomus, ceteris regulis deuictis, post praelium Hafursfiordense A. C. 875. monarchiae statum ad posteros stabiliuit. Victi sunt, Orcadalensis rex vnus, Trundhemiae reges quatuor, Golardenses duo, Raumdaliae borealis duo et deinceps alii: nam nomina regulorum omnium recensendo de-

(1) t. 57. §. 5. (2) tit. 85. 2.

defatigor. Haraldus ad condendam monarchiam, exemplo tam Gormi Daniae regis, quam Erici Vpfalenfis excitatus eft. (3) De Danis auctorem illorum temporum habeo S. Rembertum archiepifcopum Hamburgenfem in vita S. Anfcharii. (4) Gualdo monachus Corbeienfis: (5)

Regibus interea Danis iungentibus arma,
Priuatus fceptris Heroildus fraude paternis,
Supplex Auguftum rex expetiit Ludouicum,
Eius vti per opem regni repararet honorem.

In *Knitlinfaga*, (6) recenfitis Daniae prouinciis: *omnes hae enumeratae prouinciae magnae et populofae vnum hodie agnofcunt regem Daniae: vt olim in multa regna erant diuifae.* De regibus Suioniae Snorro Sturlaeus, quo viro omni in memoria grauior integriorque auctor, meo quidem fenfu et iudicio non exftitit, fic habet, (7) *Reges Vpfalenfium abfoluta poteftate in Suionia eminebant, cum reguli plures ibi dominarentur, ab eo videlicet tempore, quo Odinus in Suionia principatum tenebat: monarchae cum abfoluto imperio, vsque ad mortem Agni Vpfalae refidebant: atque tum primum regnum inter fratres diuifum eft: poft haec regnum principatusque inter ftirpes, pro earum gradibus diftribuebantur.* Primus Ingialdus Anundi filius, Vpfalenfis rex, aliquos eorum

(3) Snorro t. I. p. 75. 76. (4) p. 54. ed. Fabr. confer Erici regis hiftoriam Daniae p. 266. (5) p. 87. ed. Fabr. vbi pro *iungentibus arma*, vt legendem cenfeo, hoc nihili eft, *in cunctibus*. (6) p. 26. ed. Vormii. (7) t. I. p. 43. 45. 51. feq.

rum regum dolo oppressit, deinde alios quoque circumuentos sustulit, numero in vniuersum ad duodecim. Mansere tamen etiam postea quidam minores reges vsque ad Ericum, qui totius Suioniae regno potitus est. Hoc in statu reges multis inter se dissensionibus agitati, atrocia bella gesserunt, quibus indurata septemtrionalium populorum fortitudo fuit, immo, vt dicam quod est, efferata. Quare congruenter ad veritatem dixit Olaus Verelius, (8) ea fuisse illius studia aeui, *vt armorum vsum saepius, quam caussam respicerent, neque pacem possent ferre.* Illo animo cum essent, neque tamen semper occasionem cum vicinis digladiandi haberent, piraticam exercendo longinqua petierunt. Erat nauigandi opportunitas summa, non modo in littoribus maris Baltici et occidentalis, sed etiam intra vniuersam Scandinauiam in stagnis et lacubus, vt magis in salo victitarent, quam in agris. Idcirco in nauigationibus tantam artem et facultatem sibi pepererunt, vt omni illo in aeuo qui cum his populis compararentur, essent nulli. Et quamquam Haraldum Pulchricomum primum omnium mirae magnitudinis draconem nauem exaedificasse inuenio, Olaum vero Trygnonidem in primis magnas moles excitasse, tamen omni tempore satis firma et opportuna nauigia habuere, quorum formam in saxis quoque spectamus, praecipue in eo, quod Ioannes Peringskioldus (9) diligentissimus monu-

 men-

(8) in Heruorar saga p. 47. (9) In Theoderici vita p. 403. confer Otteri Halgelandensis et Wulfstani Haethensi nauigationes Saxonice et Latine editas ad calcem vitae Aelfridi regis. Ox. 1678.

mentorum patriae inuestigator nobis pictum dedit. Si nauigationis laudem et fortitudinis gloriam quaeras, quod omni in Europa litus est, quis paene angulus, vt illius gloriae non sit testis? Orcades autem, Scotia, Hibernia, Anglia, Francia, vim illam vel in primis senserunt. Magnum isthuc quidem esset opus, si quis omnes expeditiones persequi vellet.

Apud Graecos priscos latrocinari nihil erat aliud, quam militare. Pyrgopolinices more illorum veteri:

Videtur tempus esse, vt eamus ad forum,
Vt in tabellis quos consignaui hic heri
Latrones, ibus dinumerem stipendium:
Nam rex Seleucus me opere orauit maxumo,
Vt sibi latrones cogerem et conscriberem.

Aut quemadmodum Periplectomenes: *an, quia latrocinamini, arbitramini, quiduis licere facere vobis?* De praedonibus Graecis non est necesse vt quidquam interseramus. Eundem in modum apud Septentrionales fuit. Mos erat, vt alternis operam darent mercaturae et piraticae, (10) et vt

Confestim posito furore Martis
Post piratica damna, destinaret
Plenas mercibus institor carinas,

Abutar enim hoc loco Sidonii modulis. Hi piratae sese

(10) Snorro t. I. p. 263. 264. 274.

ſeſe vocabant *Wikingar*, vt ſaepe apud Snorronem (1) et nonnumquam *Cappar*. (2) In Eddae Islandicae ſecunda parte, *Kappar*, *Kiempur*, *Garpar*, vt Roeſenius conuertit, *heroum*, *athletarum*, *pugilum* mentio occurrit. Iidem apud Snorronem (3) dicti *Soekongar*, *reges maris*, nullo in terra dominio, perpetuo in mari regnantes. De iis S. Rembertus in vita S. Anſcharii. (4) Neque iſthuc quidem ſemper ſumma libertate: nonnumquam enim alienae potentiae deuincti fuere. Adamus Bremenſis: (5) *Lundonae in Sconia aurum eſt plurimum, quod raptu congeritur piratico: ipſi enim piratae, quos illi Witbingos* (puto legendum, *Vikingos*) *appellant, noſtri Aſcommannos, regi Danico tributum ſoluunt, vt liceat eis praedam exercere a barbaris*. Neque omnes vero idonei ad piraticam exercendam ſunt viſi, cum, qui praeferox et immanis erat Egil, a fratre idcirco a praedandi ſocietate reiiceretur: *eum enim ingenio eſſe tali*, indicabat, *vt apud exteras nationes haud conduceret*. (6) Vides, piratas non modo ferocitate ad vim faciendam habuiſſe opus, ſed etiam, vt occaſio ferebat, ingenio ad mercaturas. Quae enim alibi praedati fuerant, alibi vendebant. Non tantummodo naues inuadebant, ſed in litoribus excenſione facta circumiectos agros vicosque expilabant. Praedam Freio deo ferebant acceptam, *Frigi ſcod*, *Freii crumenam* appellantes, vt ex inſigni lapide demonſtrauit Olaus Verelius.

 (7)

(1) Conf. Olaum Vormium in monumentis Danicis p. 268. 292.
(2) Snorro t. 1. p. 27. 29. (3) p. 40. 41. (4) p. 57. 62. (5) p. 56
(6) Thormodus Torfaeus Hiſtoriae Noruagicae parte II. p. 153.

(7 Religiosi medius fidius homines, quorum sacra et caeremonias in insula quadam commemorauit Adamus Bremensis. (8) Praedonum in numero non tantum priuati homines nulla publica auctoritate fuere, verum etiam reges regumque liberi. Ruderi filius in historia Runica Hialmari regis Biarmlandiae et Thulemarkiae, (9) *crebro*, inquit, *in piraticas expeditiones profectus, nominis sui gloriam in tantum auxit, vt in omnibus annalibus, quibus rerum gestarum memoriae describebantur, laudari meruerit.* Narrat deinde, vt in Biarmlandiam cum quinque nauibus profectus omnia ferro atque igni vastauerit, praedasque egerit, donec Vagmarus occurrit, qui tum rex istius regionis erat. Cum defuncto aliquo rege filius succederet, mos erat, vt in solemni conuiuio compotantes maiorum suorum memoriae bene precarentur, simul vota facerent de piratica expeditione suscipienda. (10) Sin quis priuatus ad haec latrocinia sese accingeret, circa verem praeconis voce voluntarios excibat, vt Haraldus et Gudradus fratres apud Snorronem edicebant: (1) *sibi animo propositum esse, aestate iam instante, piraticas suscipere expeditiones in oceanum vel Balticum mare, prouti antea soliti fuerant.* Legebat deinde suos praefectos singulis in nauibus, qualis ille *Wikinga waurdur* in Ioannis Peringskioldi lapide fuit (2) Nec patriae finibus abstinebant: quam ob caussam Haraldus Pulchricomus rex Noruegiae edicto vetuit, *ne quis patriae fines de-*

(7) Ad *Heruorar sagu* p. 43. (8) p. 56. (9) ex edit. Georgii Hickesii in Thesauro linguarum t. II. p. 128. (10) Snorro t. I. p. 245. confer. pag. 46. 48. (1) t. I. p. 180. (2) l. c. p. 456.

depopularetur. (3) Nihilo minus Rolfo celebris pirata, cum ab (*Ausur vego*) *via ſeu expeditione orientali* rediret, Vikiam depraedatus eſt. Haraldus rex eam ob cauſam Rolfonem frequenti in concilio exulare iuſſit. Sub hoc Haraldo multi cum primis in Noruegia, qui libertatem dolebant amiſſam, piraticam inſtituere. Nonnulli tamen ad tuendos portus mercatusque ſuos, inſtructis nauibus praedones tantummodo depraedantes, tutum mare praeſtabant. Ita Thorſteinus Bele et Agantyrus poſt praelium commisſum, inito foedere contra piratas claſſem adunarunt. Apud Olaum Verelium: (4) *ineunte vere claſſem triginta navium appararunt, piraticamque in mari egerunt, et circa Suioniam* (*oc alt bit euſtra ſalt*) *et omnia circum litora orientalia: egerunt autem, piratas et latrones occidendo, colonos autem et mercatores non attingendo.* Neſcio cur Verelius *Curlandiam et Prusſiam* potisſimum explicet, cum, vt non negem, ea quoque litora defenſa fuiſſe, tamen *orientalia litora* magis haec Esthonica vocari ſoleant, in quibus ſedem totius mercaturae ſeptemtrionalis fuisſe, alio in loco demonſtrabo. Saepenumero, vbi excenſionem aliquo in litore fecerant, opportuno loco condebant caſtella, quibus defenſi, totam prouinciam excurſionibus vexare, tum etiam, vt in Orcadibus et Anglia et Francia accidit, pedem figerent totaque regione potirentur. Pleni ſunt huiusce memoria rei ſcriptores illorum temporum Saxones, Franci, Angli. Quare Thorgny-

(3) Snorro t. 1. p. 99. (4) In Heruorar ſagu p. 47.

gnyrus Iudex in comitiis Vpsalensibus ad Olaum regem, Erici regis filium, apud Snorronem (5) de Erico Emundi filio rege, Olai proauo: *quod in vigore aetatis constitutus, militaribus expeditionibus vt plurimum intentus fuerit, ac quotannis peregre profectus, Finnland, Kyrialand, Eystland et Kurland (oc vyda um austur laund) et porro per Ostrogardiam* (seu Russiam, vel potius Esthoniam interiorem) *in suam potestatem redegerit: cuius virtutis praeclara adhuc supersint monumenta, castella regiaeque arces eximii operis.* Ita Thorgnyrus ab auo suo sibi narrari recordabatur. Iam cum scriptores Russi testantur ad A. C. 859. *Czudos* (seu Esthonos et Fennos) *Slauonos et Kriuiczos Varagis tributa soluisse pro quolibet viro po bieloi vieverizy,* (6) hoc eo pertinet. Obscurum plerisque, quod genus tributi fuerit. Docuit autem me magnus vir, quod esset verissimum. Nam Russicam vocem intercidisse ostendit, conseruatam in Polonica lingua, in qua *Wiewierka* adhuc *sciurus* dicitur: esse deinde sciuros alios albos, alios nigros, denique rufos, itaque mirum non esse, cum Historiographus Russus adiecit *albos*. Idem Historiographus ad A. C. 862 scribit: *a Slauonis Varagos esse eiectos et tributum negatum, deinde per ciuiles turbas petitum a Varagis principem: Ruricum eum fuisse, qui cum fratribus Novogrodum venerit.*

Haec

(5) t. I. p. 484. (6) по бѣлои вѣвѣрице.

Haec igitur ſatis ſpecioſa videri posſunt: mihi tamen nominis illa notatio non ſatisfacit. Nam inauditum apud hos piratas nomen eſt Vargorum. *Vikingar* et *Kappar* et *Soecongar* dicti ſunt, vt ſupra declaraui. *Vargicum* nomen poeticum magis eſt. Poetae nominibus animantium ferarum delectabantur, vt, cum nauem dicerent *dyr beſtiam*, et *baru beſtur*, *fluctuum equum*, quod, cum Eddae Islandicae pars altera refert, ſimul addit, omnia equorum cognomina etiam nauibus tribui. De militibus Haraldi Pulchricomi Hornklofus canens, ait: *quam plurima habuit arma, ſyluam (varga) lupis ſtrepentem*: (7) exercitum aut caſtra naualia *ſyluam*, milites nauales *lupos* dixit. Non autem probabile eſt, veteres Ruſſos ex poetarum ſeptemtrionalium carminibus fortiſſimorum virorum non ſane frequens nomen aucupatos fuiſſe. Contra ſit ſimillimum vero, ita illos vocitaſſe, vt ſeſe ipſos appellare audiuerant. Senſit hoc iam ampliſſimus vir et ornatiſſimus, Arnuidus Moller: eo nomen Vargicum potius ab Eſthonico *Waras* acceptum putauit. Quod, ſi ita eſt, ignominiae loco impoſitum fuit: neque enim Ruſſorum moribus praedari gloriae fuit. Huius autem ignominiae quam cauſſam habuere Ruſſi? Exempla protulimus, cum Varagos infeſtos ſenſere: eius generis vnum eſt praeterea et alterum. At vt amici et ſocii in bello, vt in officiis et dignitatibus, frequentiſſime citantur: Reges item ſuos ex eodem populo repetunt Ruſſi. Et vetuſtum ſane rerum iſta-

(7) Snorro t. 1. p. 98.

istarum auctorem habemus, aequalem Varagorum aetati, et Vladimiri Monomachi, aut qui ex aequali hauserit, Theodosium abbatem, quem bibliotheca Radziuiliana Regiomonte seruat, vnde ἀπόγραφον in Imperatoriam peruenit. Quae cum ita sint, aio, milites Suionas, Normannos, Danos, cum sub signis Russicis stipendia mererent, sese ipsos ita nuncupasse: Russos, adsuetos eorum nomine, cuius sententiam non videbant, omnes septemtrionales populos, vnde isti erant profecti, similiter appellasse Varagos. Scribunt autem sic, (8) vt potius pronunciandum sit nobis, *Variagi*. Hoc nomen est, quod in Snorrone multis locis occurrit, *Vaeringiar*, quasi *defensores et protectores*, *a waeria, defendere, vel potius a warda, seruare custodire*, vt Verelius iudicauit, (9) dicas. Ioannes Peringskioldus nitide explicuit, *praetorianos milites*. Plerisque autem in locis sermo est de iis, qui in Graecia apud Imperatores CPlitanos fuere: hi igitur sunt tot celebrati monumentis Βάραγγοι *Varangi*. Vt in Graecia sese ipsi vocarunt *Varangos*, honorifico nomine: ita iidem in Russia: nam ex Russia in Graeciam venerunt. Prima Varangorum memoria in Michaelis Paphlagonis Imp. rebus apud Cedrenum post A. C. 1034. Neque tum adhuc magno in honore fuere. Historiographus Russus ad A. M. 6488. A. C. 980. *Occiso Jaropolco, Varagi* (quos paullo ante dixerat Vladimirum ex trans-

(8) Варяги. (9) In indice in Herrauds saga, voce Hirdmen.

transmarinis locis ad ius fuum defendendum adduxiffe) *nouas res moliuntur, poftulantes pro fingulis incolarum duos Griuenos, eo quod ipforum opera vrbem cepiffet: Vladimirus primum vnius menfis moram impetrat, donec cuniculos collegiffet et cum poftbac non baberet, vnde folueret, iter in Graeciam ad feruitia Graeci Imperatoris poftulantibus, id permifit et meliores ex iis per vrbes diftribuit, reliquis itineris licentiam dedit, legatis ante ad Imperatorem miffis, quibus eum monebat, vt, fi vellet rebelliones eorum cauere, illos reciperet quidem: fed per diuerfas vrbes difpergeret, redire vero nullum fineret.* Ex Vladimiri confilio Varangis accidiffe video. Nam Michael Paphlago, vt Cedrenus teftatur, (10) per Thracenfium prouinciam difperfos habuit Varangos. Idem in Conftantino Monomacho, (1) Michaelem Acoluthum in Iberiam miffum tradit, vt τὺς διεσπαρμένους ἐν τῇ Χαλδίᾳ καὶ Ἰβηρίᾳ Βαράγγυς ἀγάγῃ, *difperfos per Chaldiam et Iberiam Varangos adduceret.* Ioannes Curopalata (2) fub hoc Conftantino: ςίφος ςρατιωτικὸν, Βαράγγυς αὐτὺς ἡ κοινὴ ὀνομάζει διάλεκτος. *manus militaris: Varangos vulgus vocat.* Poft autem officiis et fide commeruerunt, vt in palatium allecti, cuftodiam corporis Imperatorii fufciperent. (3) Nicephoro Botaniatae Imp. fidiffimi fuere, cum Alexius Comnenus CPlin obfideret. Quare apud Annam Comnenam Alexii Imp. filiam (4) confiliarii regii: οἱ δέ γε ἐπὶ τῶν ὤμων τὰ ξίφη κραδαίνοντες, πάτριον παράδοσιν καὶ οἷον παρακαταθή-

(10) t. II. p. 735. (1) t. II. p. 789. p. (2) 808. (3) Scylitzes p. 864. (4) p. 62.

κην τινὰ καὶ κλῆρον τὴν εἰς τοὺς Αὐτοκράτορας πίστιν καὶ τὴν τῶν σωμάτων αὐτῶν φυλακὴν ἄλλος ἐξ ἄλλου διαδεχόμενοι, τὴν πρὸς αὐτὸν πίστιν ἀκράδαντον διατηροῦσι, καὶ οὐδὲ ψιλὸν πάντως ἀνέξονται περὶ προδοσίας λόγον. *Varangi qui super humeris secures suspendunt, a parentibus quasi depositum et haereditatem acceperunt fidem in Imperatores et custodiam corporis: fidem, quam veluti alius ab alio traditam manu accepit, incorruptam seruant, et ne quidem tenuem ferent de proditione mentionem.* Fuere deinceps Alexio Comneno Imp. vtilissimi bello Francico. (5) Codinus in officiis aulae CPlitanae (6) et ad portas sacri cubiculi excubasse tradit et in triclinio. Stationem habuere in Excubitis (6) et quoties Imperator aliquam in vrbem concederet, claues portarum illius vrbis Varangorum in manibus fuerunt. (7) Firmissima suspectorum custodia sub Varangis, vt Vecci Chartophylacis apud Georgium Pachymerem. (8) Denique thesauros quoque custodiebant, ex quibus ne Palaeologum quidem, tutorem Lascaris Imp. et magnum Ducem, efferre aliquid passi sunt, nisi ceteris tutoribus consciis et praesentibus. (9)

Hos Varangos Iacobus Gretserus ad Codinum *quasi Francos*, dici autumauit: in quo facete ad Ioannem Curopalatam Iacobus Goar, (10) *at quasi diuinat Gretserus.* Quid Goar? is vero quasi nimis incaute adsentitur Graecis: Anglos enim edidit

(5) Anna Comnena p. 115. (6) p. 65. (6) Zonaras Tomo II. p. 308. sequ. (7) Cantacuzenus in historia CPlitana l. I II. c. 13. (8) p. 257. (9) Pachymeres in Michaele Palaeologo p. 41. (10) p. 58.

dit ab ſtirpe. Francos non fuiſſe, concedo: Graeci enim a Francicorum corpore ſtipendiariorum, quos Anna Comnena Νεμίτζυς Sclauonico vocabulo nuncupauit, ſi vim vocis videas, *homines ſermonis peregrini, vt intelligi nequeant*, καὶ αὐτὸ τοῦτο, βαρβάρυς, a Francis igitur Varangos diligenter atque ſaepius diſtinxerunt auctores Graeci, vtpote qui ſuis ſub ducibus et ſignis militarent. (1) Econtrario non poſſum inficiari, exſtare magno numero Graecos, qui eos Anglis accenſeant. Ioannes Cinnamus: (2) ἔθνος δ'ἐςὶ τοῦτο Βρεταννικὸν Βασιλεῦσι Ῥωμαίων δουλεῦον ἀνέκαθεν, *gens eſt Britannica a multis temporibus Romanis ſeruiens Imperatoribus.* Sic Bryennius Caeſar, (3) ſic Nicetas Choniata, (4) ſic credo Georgius Pachymeres, (5) qui eos fere Celtas vocat. Codinus: (6) *ad menſam Imperatoris* πολυχρονίζουσι οἱ Βαράγγοι κατὰ τὴν πάτριον γλῶσσαν αὐτῶν, ἤτοι Ιγκληνιςὶ, τὰς πελέκεις αὐτῶν συγκρούντες κτύπον ἀποτελοῦνται, *multos annos precantur Varangi patrio ſermone, ſeu Anglice, ſecures ſuas concutientes ſtrepitum edunt.* Anna Comnena (7) autem cum Varangos ex Thule fuiſſe tradit, incertum reliquit, quam Thulen dicat. Nam veteres eius nomine inſulae imperitius ſunt vſi, ſicuti teſſerae addixerunt. Modo illis Scandinauia eſt integra, modo Noruagia tantum, aliis Anglia, aut Orcadum vna. Credo

 ta-

(1) Scylitzes p. 823. alii. (2) l. 1. p. 4. (3) l. 1. c. 20. (4) In Iſacio Angelo p. 267. (5) l. c. 41. 257. id. in Andronico p. 45. Ερρης ἐξ Εγκλίνων *Ericus ex Anglis.* (6) p. 90. (7) p. 62.

tamen Angliam dicere voluisse Comnenam. Gratanter hoc accepit Vilermus Malmesburiensis. (8) Et Goar quidem hanc vocem in Baronibus Anglis inuenisse sibi est visus. *Baranagium* , inquit , *seu Varnagium , procerum regni senatus et coetus, vulgo Parlamentum : a cuius nobilitate stipendiarii Graecorum Angli , vanam titulorum libidinem Graecanico more sectati , nomen sibi* Βαράγγων *in curia CPlitana finxerunt et adoptarunt.* Isti quasi barones mihi nihilo magis placent , quam Gretseri quasi Franci Goaro. Henricus Spelmannus a Saxonico *farian*, *imprecari* , *execrari*, vnde *waringe*, *maledictio*, *Varangos* vocatos autumat. Non potuit quidquam tamen de Anglis persuaderi Carolo de Fraxinis: Villhardino suo magis assensus est , Varangos ex Britannia quidem fuisse, at Danos potius, quam vel Saxonas vel Anglos : qua in opinione consentientem habuit Ordericum Vitalem. Locus est memorabilis in Alberto Aquensi (9) de Alexio Imp. *Is Turcopolos Pincenarios* (Picenacios seu Pazinacitas) *Comanitas , Bulgaros arcu doctos et sagitta*, *Danaosque* (Danos) *bipennium armatura dimicare peritissimos*, *Gallos* (Francos) *exules , exercitum simul conductitium populum diuersi generis contraxit.* Et Saxo Grammaticus (10) cum de Erici Ejiegod regis profectione CPlitana agit : *inter ceteros, qui CPlitanae vrbis stipendia merentur, Danicae vocis homines primum militiae gradum*

(8) De gestis Anglorum l. II. c. 13. (9) l. IV. p. 253. (10) p 227.

dum obtinent, eorumque custodia rex salutem suam vallare consueuit. Itaque cum ad CPlin adesset, Varangi ab Imperatore potestatem adeundi regis sui impetrarunt, quos Ericus graui oratione ad fidem et virtutem et frugalitatem colendam hortatus, magnae admirationi fuit Graecis. Equidem non nego, Danos fuisse Varangos, si mihi quis concedat, eorum in numero frequentes exstitisse et Suionas et Noruagos Gulielmus de Rubruquis, cum A. 1253. praeter Chersonis Climata nauigaret, quae custellis erant frequentibus munita, *istbic*, inquit *erant multi Gothi, quorum idioma est Teutonicum.* Hoc a nobis Snorro Sturlaeus, pro sua grauitate et fide, qua Saxonem multimodis exsuperat, hoc tot monumenta veteris aeui, ipsi denique lapides postulant, quos vel ex Bureanis schedis inspeximus, vel ex Peringskioldorum operibus. Illa autem securium Varangicarum memoria, quam supra produximus, e veteris codicis membranacei pictura, quam ad Oddonis Monachi Olaum Trygguonidem Verelius edidit, (1) aliisque monumentis Scandinauicis eximie illustrari potest. Theodoricus Monachus de Noruegorum et Danorum profectione Hierosolymitana et CPlitana: (2) *peractis igitur omnibus, quorum gratia viatores nostri aduenerant, cum honore recedunt; obsequium sibi parantibus nobilissimis regis curialibus, qui dicuntur Varingae.* Ex Snorrone vnum locum adferam, (3) cum tradit Haral-

(1) [illegible] stycke af Konung Olaf Tryggiasons saga, Vpsalae 1665. (6) c. 27. (3) t. 11. p. 55. seq.

raldum Sigurdi filium ad Iaroslaum regem Russiae adiisse, ab eo autem rege, cum Eilifo Rognualdi Iarli filio, *satellitibus suis praefectum, qui regni limites tutabantur* : inde Haraldum petiisse CPlin et a Varangis ducem esse lectum. Nolo hoc loco plura exempla producere ex Snorrone, in quibus sunt insignia, quae de Sigurdo Karlshufud et Olao Tryguonide traduntur, qui et apud Valdemarum regem et apud *Allogiam* reginam, hoc est, apud S. Olgam multum potuere. Nam haec quibusdam chronologicis difficultatibus laborant, quas alio tempore dissoluam.

Quid nunc est adeo quod quemquam in nostra Varagorum nominis notatione offendat? nisi quod *Vaeringur* Scandinauicum aliquid in sono abhorrens ab altero habere videbitur. Nempe nihil eius est. Primum Scandinauos tum quidem non *Vaeringur* sed *Varangur* sese appellasse, Graecorum illa in voce constantissima consensio, vt nobis persuadeamus, postulat. Sed illud *n* cum *g* septemtrionales inter pronunciandum saepenumero eiiciebant. Id in nomine *Ingar* et *Inguar* supra obseruauimus. In lapide, quem ad vitam Theodorici regis Peringskioldus protulit. (4) inuenio *Iggur* nomen alioqui Odini in secunda parte Eddae Snorronianae. In codice argenteo *Figgr*, *briggan* et his similia obseruata sunt Ioanni Georgio Vuachtero, (5) qui *Fingr* et *bringen* pro-

(4) p. 473. (5) Miscell. Berolin. Contin. prima p. 42.

pronunciata putat, more Graecorum. Non nego voces eas ipsas esse, quas insignis doctrinae vir indicauit: concedo auctorem huius versionis ita etiam has voces pronuntiasse, vt essent *fingr* et *bringen*: credo autem eius aetate etiam eliso *n* reuera dictum fuisse *figr* seu *figgr* et *brigen* seu *briggen*. Et ne Graecorum quidem illam legem constantem fuisse, vel Aristophanis τιὸ τίγξ demonstrare potest. Nisi *tio tigx* pronuncies, nihil ad philomelae cantum illa in voce fuit. Igitur pro *Ingur* septemtrionales etiam dixere *Iggur* et *Igur* quod mihi magis probatur, quam Ioannis Schefferi de hoc nomine opinio, *Iggur* esse *Vigur*. (6) Sic *Ingerdis* est in monumento Hallelandensi *Igerdi*. (7) Sic *Aggathir* et *Angathir*, *Iggue* et *Ingue*, quod Olaus Rudbeckius in Atlantica (8) obseruauit. Sic *Ingibiaern* in runis et *Iggibirn*, *Ingefast* et *Iggisastr*, *Ragnvald* et *Ragvald*. Hunc igitur in modum *Varangi Varaggi*, et *Varagi* dici potuere. Sed multo magis hoc licuit Ruthenico populo, qui etiamnum ab *ng*, quo ceterae gentes Slauicae vtuntur, abhorrens, multis in vocibus *g* tantummodo pronunciat.

(6) in Vpsalia p. 76. (7) apud Olaum Vormium p. 509. (8) p. 19.

OBSERVATIONES
ASTRONOMICÆ
ET
PHYSICÆ
IN RVSSIA
INSTITVTAE.

OBSERVATIO DEFECTVS LVNAE HABITA AB IO. POLENO (TVBO OPTICO OPTIMAE NOTAE, LONGO PEDES PARISIENSES SEPTEM) KAL. DECEMB. cIↄIↄCCXXXII. PATAVII.

HVnc Defectum praeceſſit hic perturbatio aeris, ac variatio eiusmodi, vt indicanda eſſe videatur. Tantillum ninxit mane: deinde ſudum apparuit coelum: duabus ante meridiem horis, coelum erat nubibus obductum: meridie vero coelum iterum ſudum: poſtea nubes aliae: duabus circiter a meridie horis vehemens auſtralis ventus, Cum aduesperaſceret, ceſſante auſtrali illo, nouus a Septentrionibus debilior, ſed frigidiſſimus ventus flare coepit; qui tota nocte algidum, praeter anni tempeſtatem, reddidit aerem.

Temp. H.	′	″	*Appar.*
8	43	50	Penumbra diluta.
8	46	0	Penumbra denſior.
8	48	56	Vmbra ad Lunae limbum.
8	49	58	Attingit Grimaldum.
8	51	40	Attingit Gaſſendum.
8	59	49	Attingit Kepplerum.
9	2	48	Tegit totum Mare Humorum.
9	6	0	Attingit Copernicum.
9	8	33	Tegit totum Copernicum.

Temp. Appar. H. ′ ″	
9 9 12	Tegit Pitatum.
9 11 26	Attingit Tychonem.
9 22 5	Tegit Platonem.
9 27 10	Attingit Plinium.
9 30 0	Tegit Eudoxum.
9 39 23	Attingit Mare Crisium.
9 46 46	Totalis Imersio.

Limborum Lunae obscuratio collata cum mediarum partium obscuratione, non prorsus eadem semper apparuit: vbi vero medium vmbrosi coni Luna attingit, tantillo minus obscura visa est: fortassis quia plures ab omni Atmosphaere parte refracti, et ad coni axem tendentes radii, confertiores tunc in Lunam impingerent.

Temp. Appar. H. ′ ″	
11 24 0	Lux pura in Lunae margine.
11 28 48	Grimaldus extra vmbram.
11 35 20	Gassendus extra vmbram.
11 35 50	Medium Mare Humorum discoopertum.
11 43 18	Copernicus emergere coepit.
11 48 10	Pitatus extra vmbram.
11 48 40	Tycho iam emersit.
11 49 40	Plato emergit totus.
12 21 47	Mare Crisium integrum apparet.
12 24 38	Finis verus: prout reputatum est.

Duratio totius Defectus Lunae H. 3. 35′. 42″.

CON-

CONTINVATA RELATIO ECLIPSIVM SATELLITVM IOVIS PETROPOLI OBSERVATARVM A I. N. DE L'ISLE.

1731. die	N. St. temp. ver. H	′	″	
Dec. 6	17	3	5	IMmerſio primi, difficulter tubo Catadioptrico obſeruata. Tempus vero duobus horologiis definitum.
1732 Ianuar. 4.	13	30	56	Immerſio Secundi tubo Newtoniano obſeruata, dubia eſt intra ſpatium aliquot ſecundorum. Iupiter non ſatis clare conſpiciebatur, paulo ſupra horizontem eleuatus. Tempus verum conſenſu duorum horologiorum conſtabat.
9	18	33	7	Immerſio Quarti, tubo Catadioptrico, Coelo non admodum ſereno. Tempus verum duobus horologiis definitum.
	20	25	0	Prouecto iam die, caeteri ſatellites ſe oculis ſubduxerant, eodem tubo tamen Quarti Satellitis Emerſio nondum obſeruata eſt.

Ad-

Febr. 22.	13	25	34	Adhuc Primus Satelles proximus immerſioni conſpiciebatur, cum nebula Iouem oculis eripiebat.
	13	26	34	Iupiter iterum apparebat quidem, ſed Satelles tubo catadioptrico amplius non conſpiciebatur, et tempus verum duobus conſtabat horologiis.
Mart. 8.	8	22	20	Immerſio tertii tubo Newtoniano, ventus obſeruationem tantiſper impediebat. Tempus verum duobus horologiis definitum.
	8	46	23	Emerſio primi tubo Catadioptrico dubia intra pauca ſecunda propter vicinitatem Satellitis a Ioue.
April. 13.	7	20	30	Statim poſt Solis occaſum cum Iupiter ſe oculis conſpiciendum praeberet tertius Satelles per tubum newtonianum non ſolum vmbram plane reliquerat. Sed etiam plenoſplendore fulgebat.
20	11	6	52	Emerſio tertii tubo Catadioptrico coelo ſereno.
27	15	13		Tertius Satelles forte plurium minutorum ſpatio

ex

					vmbra emerſus erat, quoniam tam clara luce quam coeteri fulgebat. Obſeruatio facta tubo Catadioptrico, obſtante nebula, Ioue paululum ſupra horizontem eleuato, et magno crepuſculo adhuc durante.
Maio 10	12	55	54		Emerſio primi, Coelo ſereno, tubo Catadioptrico facta. Obſeruatio certa.
26	11	14	5		Emerſio primi tubo 13 pedum, nubibus obſtantibus,
Dec. 24	18	4	30		Immerſio primi tubo 13 pedum. bona.
1733.					
Feb. 22	13	9	32		Emerſio tertii tubo Catadioptrico. Iupiter horizonti proximus non diſtincte apparebat.
Mart. 9	13	46	51		Immerſio Secundi, tubo 13 pedum.
12	14	39	23		Immerſio primi tubo catadioptrico.
19	16	34	26		Primus Satelles vmbrae Iouis ſe immergens tubo Newtoniano non amplius apparebat. Ceterum nebula obſtabat quominus diminutio eius more ſolito conſpiceretur.

	21	11	2	27	Immerſio primi dubia. Ioue horizonti vicino et a nebula aliquando tecto.
	23	12	59	46	Immerſio primi tubo Newtoniano.
Apr.	4	14	55	38	Immerſio primi tubo catadioptrico. Tempus verum vnico horologio definitum.
	6	12	9	46	Immerſio tertii tubo Newtoniano.
	13	11	19	50	Immerſio primi tubo newtoniano.
	28	10	32	34	Emerſio ſecundi tubo catadioptrico. Obſeruatio difficilis propter vicinitatem Iouis et Satellitis, luna quoque plena duobus tantum gradibus a Ioue diſtante.
Maio	5	13	6	0	Emerſio Secundi tubo catadioptrico.
	6	13	44	17	Emerſio primi eodem tubo.
	15	10	7	50	Emerſio primi tubo Newtoniano.
			8	2	Tubo 13 pedum.
	30	10	4	16	Emerſio Secundi tubo Catadioptrico.
			4	39	Tubo 13 pedum.

Emer-

Iun. 6.	12	39	35	Emerſio ſecundi tubo 13 pedum. Iupiter non procul ab horizonte remotus erat, et crepuſculum magnum.
7	10	19	7	Emerſio primi tubo newtoniano.
		19	15	Tubo 13 pedum
30	10	28	46	Emerſio primi tubo catadioptrico et crepuſculo obſtante.
1734. Mart. 10	14	56	31	Immerſio Secundi tubo 23 pedum. Ioue non admodum ſupra horizontem eleuato ſatellites haud diſtincte apparebant.
Iun. 26	11	23	33	Emerſio primi tubo catadioptrico.
		23	47	Tubo 23 pedum. Ventus oſtabat.
Iulii 2	11	0	25	Emerſio Secundi tubo Newtoniano.
		0	44	Tubo 23 pedum.
				Crepuſculum magnum.

OBSERVATIO LONGITVDINIS PENDVLI SIMPLICIS FACTA ARCHANGELOPOLI

A

LVDOVICO DE LISLE DE LA CROYERE REFERENTE IOS. NIC. DEL'ISLE

Quas frater meus in itinere ſuo Archangelopolim verſus fecerat obſeruationes Aſtronomicas, longitudinem et latitudinem praecipuorum locorum Gubernici Archangelopolitani concernentes, eae tomo III Commentariorum Academiae pro anno 1728 publice propoſitae ſunt. Aliis obſeruationibus Aſtronomicis et Phyſicis ab eo peractis tomis ſequentibus dicatis. Ceterum cum editio tomi IV Commentariorum in hunc uſque diem differretur, quo frater meus Jam dudum nouum iter Iusſu Imperatoriae Majeſtatis per totum Imperii Rusſici tractum Kamtſchatkam uſque in ſe ſuscepisſet ut ibidem ſimiles obſeruationes Aſtronomicas haberet, obſtrictum me video ejus nomine relatiotionem caeterarum obſervationum Aſtronomicarum et Phyſicarum in primoitinere factarum cum publico communicare. Initio referam obſeruationem longitudinis penduli ſimplicis, quae admodum curioſa et forſan unica eſt quae in hunc uſque diem in tantâ poli vicinitate inſtituta eſt; quae per conſequens inſeruire poterit confirmationi opinionis de augmentatione Longitudinis penduli ſimplicis polo propius admoti.

Fra-

Frater meus ante abitum suum regulam ferream cujus longitudo tres pedes cum dimidio, latitudo pollicem cum tribus partibus quartis, et crassitudo quartam pollicis partem aequabat. Aciei hujus regulae optime fabrefactae insertae erant minutae quaedam cupri particulae in quibus per ductus leuissimos longitudo dimidiae perticae Gallicae siue 3 pedum Gallicorum, nec non longitudo penduli simplicis Parisiis obseruatae, scilicet 3 ped. $8\frac{1}{2}$ lineae exaratae erant.

Ad mensuras hasce obtinendas adhibuimus pedem Gallicum, ante discessum nostrum e Gallia, cum genuino pede Regio, ad cujus normam obseruationes Parisienses institutae sunt, et qui sollicite in obseruatorio regio seruatur, comparatum.

Sphaerula aenea qua frater meus usus est habebat diametrum $14\frac{1}{2}$ lienearum et erat perfecte Sphaerica, in ejus extremitate annulus qui paululum a superficie globuli distabat affixus erat. Huic sphaerulae circulus leuissimo ductu circumscriptus erat, cujus polus in medio annuli haerebat, ex hoc circulo situs centri sphaerulae cognoscitur, inseruit que mensurando facilius distantiam hujus centri a puncto suspensionis nulla habita ratione diametri sphaerulae.

Filum quo sphaerula appensa et cum illa pendulum simplex constituit vulgo Gallice appellatur (*fil de Pite*) seu filum cannabinum, et paratur ex Aloe. At praefertur hoc filum his in obseruationibus omnibus filis fericis, quippe quae e pluribus filis tortis constant, ac proinde efficiunt ut ponduſculum iis appenſum ſaepius circumuoluatur et longitudo penduli, tempore quo oſcillationes eius obſeruantur, varietur. Quo autem facilius filum penduli produci aut contrahi poſſit, vtque longitudo ſemel determinata conſeruaretur, faciendam curauimus forcipem ex Aurichalco quae ope cochleae aperiri et claudi poteſt. Supra forcipem illam axis breuis cylindricus ex aurichalco confectus in ſitu horizontali poſitus eſt, qui circa ſe ipſum circumuolui poteſt, cuiusque axis ſuperficiei filum ab vna ſui extremitate appenſum eſt; hinc voluendo hunc axim pro lubitu filum circumductum contrahitur aut producitur, longitudineque quaeſita obtenta forceps cuius pars inferior valde acuminata eſt, clauditur, huiusque beneficio punctum ſuſpenſionis inuariatum et probe diſtinctum manet.

Tota illa machina ſuſpendendo pendulo inſeruiens ligno cuidam infixa, quod variis iterum ferreis cochleis inſtructum vt omnia eo firmius muro conclauis s. loci in quo obſeruatio illa inſtituenda eſt affingi poſſint, quae quidem conclauia ſollicite claudenda et ab agitatione aeris exterioris defendenda ſunt. Notum eſt inſuper quod magno horologio pendulo inſtructo quod minuta ſecunda monſtret opus ſit, et quod tempori ſolari medio

 ac-

accommodatum ſit, aut ad minimum cognoſcatur quantum acceleret vnius diei ſpatio ſupra motum medium, vel ab eo deficiat, id quod ſolummodo ope plurium obſeruationum accuratarum ſolis aute fixarum per plurimos dies inſtitutarum, definiri poteſt, ſiquidem exinde cognoſcitur an motus horologii oſcillatorii vniformis manſerit interuallo harum obſeruationum.

Horologium illud oſcillatorium quod adhibetur in vicinia penduli ſimplicis poſitum eſſe debet, vt eo facilius et accuratius cum illo comparari posſit. Tempus his obſeruationibus inſtituendis commodum eſt vernum et autumnale, ſiquidem his tempeſtatibus aeris temperies media eſt, vnde variatio longitudinis menſurae adhibendae euitari poteſt, namque conſtat corpora quaecumque ſolida contrahi per frigus et expandi per calorem. Menſis igitur Maius et Iunius potiſſimum ſeligendi ſunt eum in finem, ſiquidem tunc temporis coelum vt plurimum ſerenum commode inſeruire poterit horologio oſcillatorio tempori medio accommodando.

Omnes iſtae cautelae plane neceſſariae circa obſeruationes tam ſubtiles et exquiſitas, qualis eſt longitudo penduli ſimplicis, obſtiterunt quominus frater meus iſtas Kilduni aut Colae (in locis ſcilicet borealioribus quo in itinere ſuo peruenit et vbi illas facere perquam optaſſet) inſtitueret.

Haec

Haec obſeruatio ergo ſolum Archangelopoli menſe Aprili anni 1728. cum omnibus conditionibus requiſitis ab ipſo fieri potuit. Siquidem ibi inuenit domum bene clauſam, et coelum per plurimos dies ſerenum ipſi inſeruiebat vt accuratius cognoſceret quaenam intereſſet differentia inter motum horologii oſcillatorii et motum medium ſolis, et determinare valebat regularitatem motus horologii ſpatio 15 dierum, quo ſaepenumero oſcillationes penduli ſimplicis cum vibrationibus horologii comparabat.

Horologium a fratre meo in his comparationibus adhibitum pure Hugenianum eſt, et a ſuo autore in tractatu de horologio oſcillatorio deſcriptum. Talia et enim horologia bono cum ſucceſſu in Obſeruatorio Regio Pariſienſi etiam num adhibentur, et multum praeſtant horologiis conſtructionis diſparis ac recentioris, quorum vibrationes ope fuſi cuiusdam (gallice *roch et* dicti) peraguntur, quaeque minus commode obſeruationibus aſtronomicis praeſertim in itinere adhiberi poſſunt.

Poſtquam itaque frater meus durante toto menſe aprilis multas altitudines ſolis reſpondentes horis matutinis et Veſpertinis quadrante ſuo adhibito hoc horologio obſeruaſſet, et ex his altitudinibus aequalibus momentum meridiei et mediae noctis ab horologio monſtrandum, correctione neceſſaria facta pro variatione declinationis intra horas obſeruationum, certior factus eſt motum horologii oſcillatorii ſatis aequabilem fuiſſe et 15 ſecundis horariis 8 horarum ſpatio a motu medio defeciſſe.

Interea dum hae peragerentur frater meus praeparauerat pendulum ſimplex, cui longitudinem praeciſe eandem

dem quam Lutetiae Parisiorum scil. 3 pedum $8\frac{1}{2}$ linearum dederat, obseruatis quotidie iteratis vicibus quantum vibrationes penduli simplicis accelerarent vel deficerent ab horologii oscillatorii vibrationum numero determinato, quidem qui poterat maximus adhibebatur antea quam pendulum semel agitatum moueri cessaret.

Mouendo pendulum simplex curauit vt vibrationes quam minimae fierent, quod tamen non obstitit quominus per horae dimidium, aut tres quadrantes, imo per integram horam vibrationes numerare possit, antequam motus penduli finiretur: his ita dispositis experientia didicit vibrationes penduli simplicis semper superare numerum vibrationum Horologii oscillatorii, quae quantitas quandoque minor quandoque maior reperiebatur, ex parte e difficultate vibrationes tam exiguas numerandi oriunda.

En tibi obseruationes de quarum certitudine ipsi omnium maxime constabat 20. aprilis vibrationes penduli simplicis 48 minutorum primorum spatio, tribus tantum minutis secundis, supra oscillationes horologii accelerabant, id quod 8 horis, 30 minuta secunda efficit. Sed tum temporis horologium oscillatorium 8 horarum spatio deficiebat 15 minutis secundis a motu medio Solari et per consequens vibrationes penduli simplicis hoc interuallo 8 horarum accelerabant 15 minutis secundis super pendulum motui medio solis accommodatum.

25. Aprilis 24 minutis primis pendulum simplex accelerabat 2 secundis horariis. 26 aprilis autem tribus minutis secundis 52 minutorum primorum spatio.

Ex his obseruationibus diuersis proueniunt 28 minuta secunda pro spatio 8 horarum, sed tum temporis horologium oscillatorium deficiebat 15 minutis secundis cum semisse a motu medio solis, proinde pendulum a fratre adhibitum accelerasset saltem 12 secundis cum semisse spatio 8 horarum cum die vigesimo a prilis 15 minutis secundis accelerasset.

No-

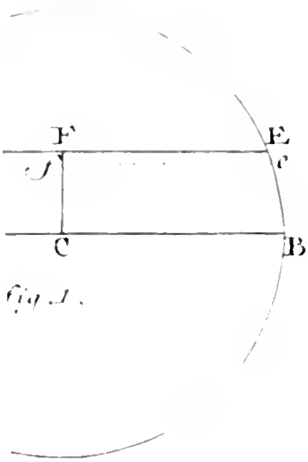
Nolo omnium obseruationum eodem mense factarum mentionem iniicere siquidem acceleratio inde deducta 8 horarum spatio non maior est 15 minutis secundis, nec minor $12\frac{1}{2}$ minutis secundis; hinc isti ex obseruationibus eliciti termini solummodo inseruire debent supputationi longitudinis penduli.

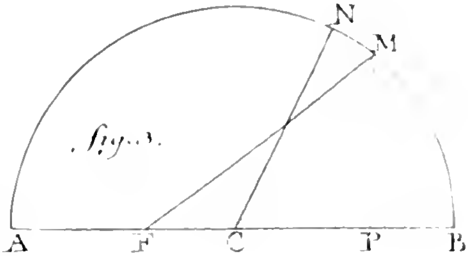
Longitudinem penduli simplicis constat esse in ratione inuersa radicum quadratarum numeri oscillationum tempore aequali peractarum. Pendulum quo frater vtebatur erat 3 pedum $8\frac{1}{2}$ linearum, vel quod idem $440.\frac{500}{1000}$ pendulum istud dabat 28815. vel $28812\frac{1}{2}$ vibrationes eo tempore, quo horologium oscillatorium motui medio solis accommodatum saltem 28800 (qui est numerus minutorum secundorum quae continentur in 8 horis) hinc longitudo penduli simplicis quae minuta secunda Archangelopoli oscillando dedisset, fuisset ad longitudinem penduli simplicis Parisiis in ratione radicum quadratarum 28800 ad 28815 vel 28800 ad $28812\frac{1}{2}$ inde supputatur longitudinem penduli simplicis Archangelopolis superare longitudinem penduli simplicis Parisini $\frac{115}{1000}$, vnius lineae per primam vel $\frac{96}{1000}$ per secundam suppositionem.

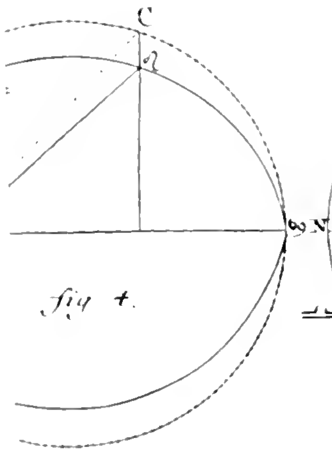
Ista Longitudo penduli simplicis supra determinata, vera esset, si diameter Sphoerulae ad hanc obseruationem vsurpatae, nullam vel prope nullam rationem haberet, ad ipsam penduli longitudinem. Cum vero diameter huius Sphoerulae, aequalis esset quatuordecim lineis cum semisse; hinc, iuxta legem ab Hughenio demonstratam, prius determinata penduli longitudo, augenda est duabus quintis partibus, tertiae proportionalis, ad distantiam puncti suspensionis a centro Sphaerae, et ad Semidiametrum ipsius Sphaerae.

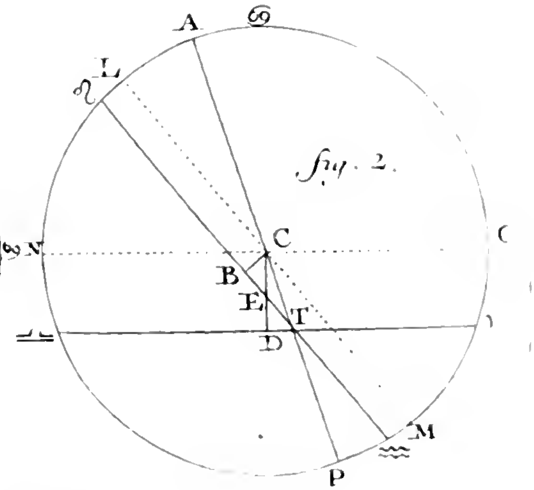
Per Antedicta autem punctum suspensionis distabat a centro Sphaerae lineis $440.\frac{500}{1000}$. et radius Sphaerae equabat lineas $7.\frac{250}{1000}$. ex his duobus numeris tertia proportionalis elicita, paulisper excedit $\frac{119}{1000}$. vnius lineae: vsurpabo ergo $\frac{120}{1000}$. pro numero rotundo; huius tertiae proportionalis, cuius duae quintae partes efficiunt 48 millesimas partes vnius lineae, quae addi debent earumdem fractarum partium numeris 115 vel 96 antea deductis, quibus longitudo penduli simplicis Archangelopoli superabat longitudinem penduli simplicis Parisiis obseruatam, vnde consequens est, veram longitudinem penduli simplicis Archangelopolitani Isochroni Pendulo ad Obseruationem vsurpato, excedere longitudinem penduli Simplicis Parisini, ad summum 163 vel ad minimum 144 millesimis partibus vnius lineae, quarum fractionum, medium sumendo prodibunt, tres vicesimae vnius lineae partes pro isto penduli Archangelopolitani supra Parisinum excessu.

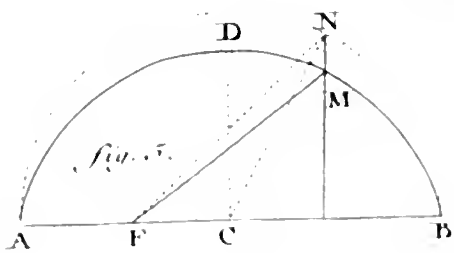
FINIS.

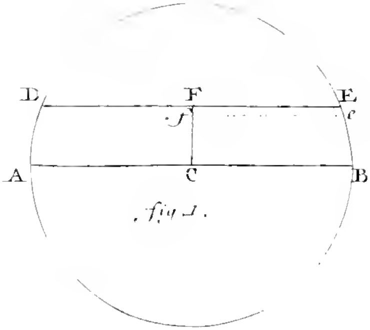

F
E
e
f
C
B
fig. 1.

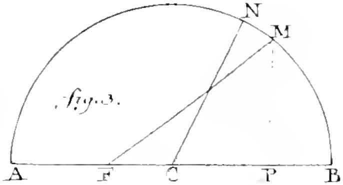

N
M
fig. 3.
A
F
C
P
B

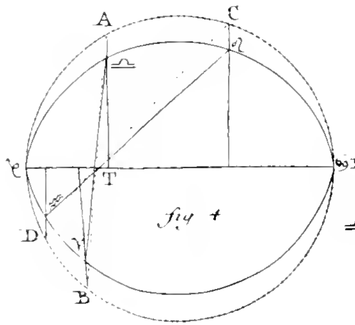

C
fig. 4.

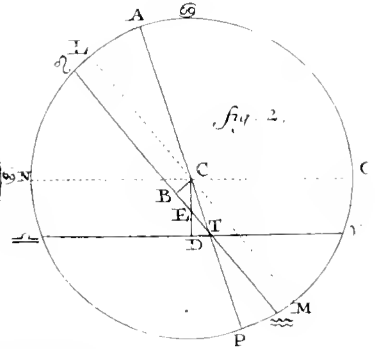

A
L
fig. 2.
C
N
B
E
T
D
M
P

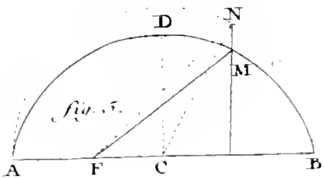

D
N
M
fig. 5.
A
F
C
B

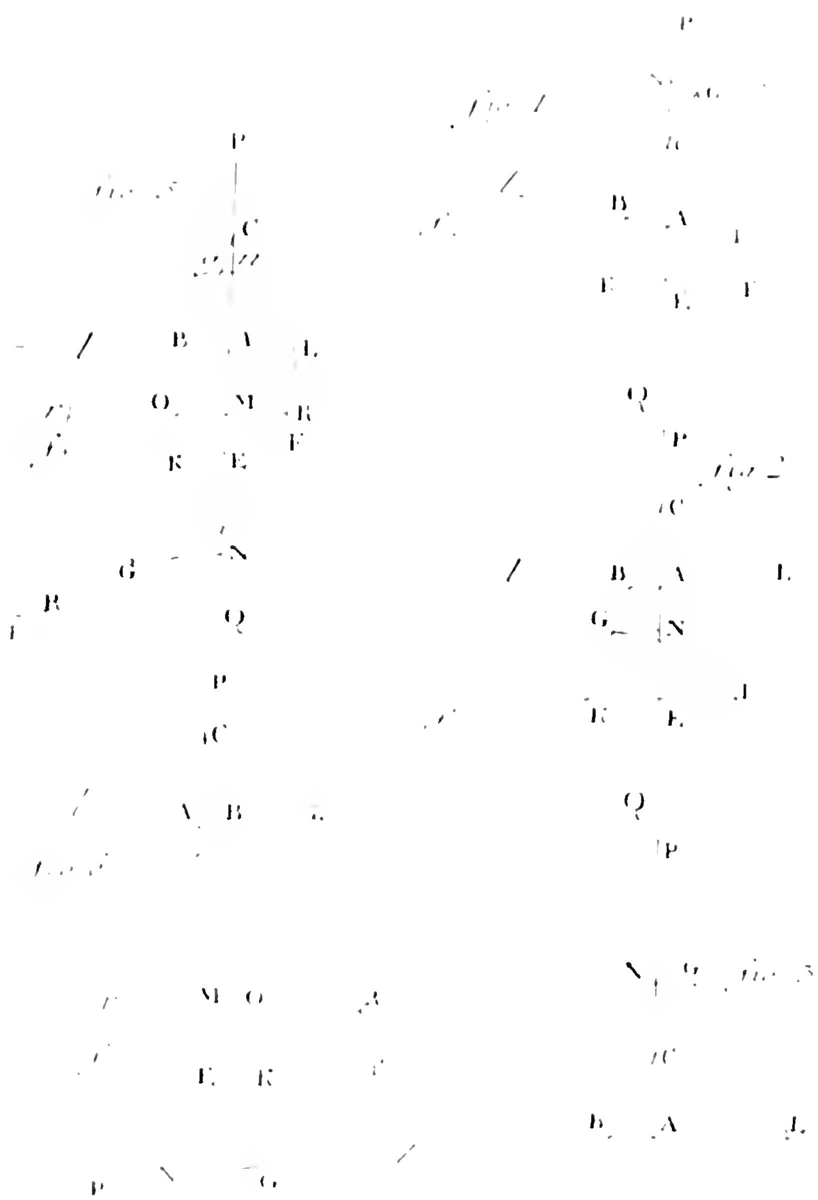

D
F
E
f
e
A
C
B
fig. 1.


N
M
fig. 3.
A
F
C
P
B


A
C
T
D
B
fig. 4


A
L
fig. 2.
N
C
B
E
T
D
M
P


D
N
M
fig. 5.
A
F
C
B



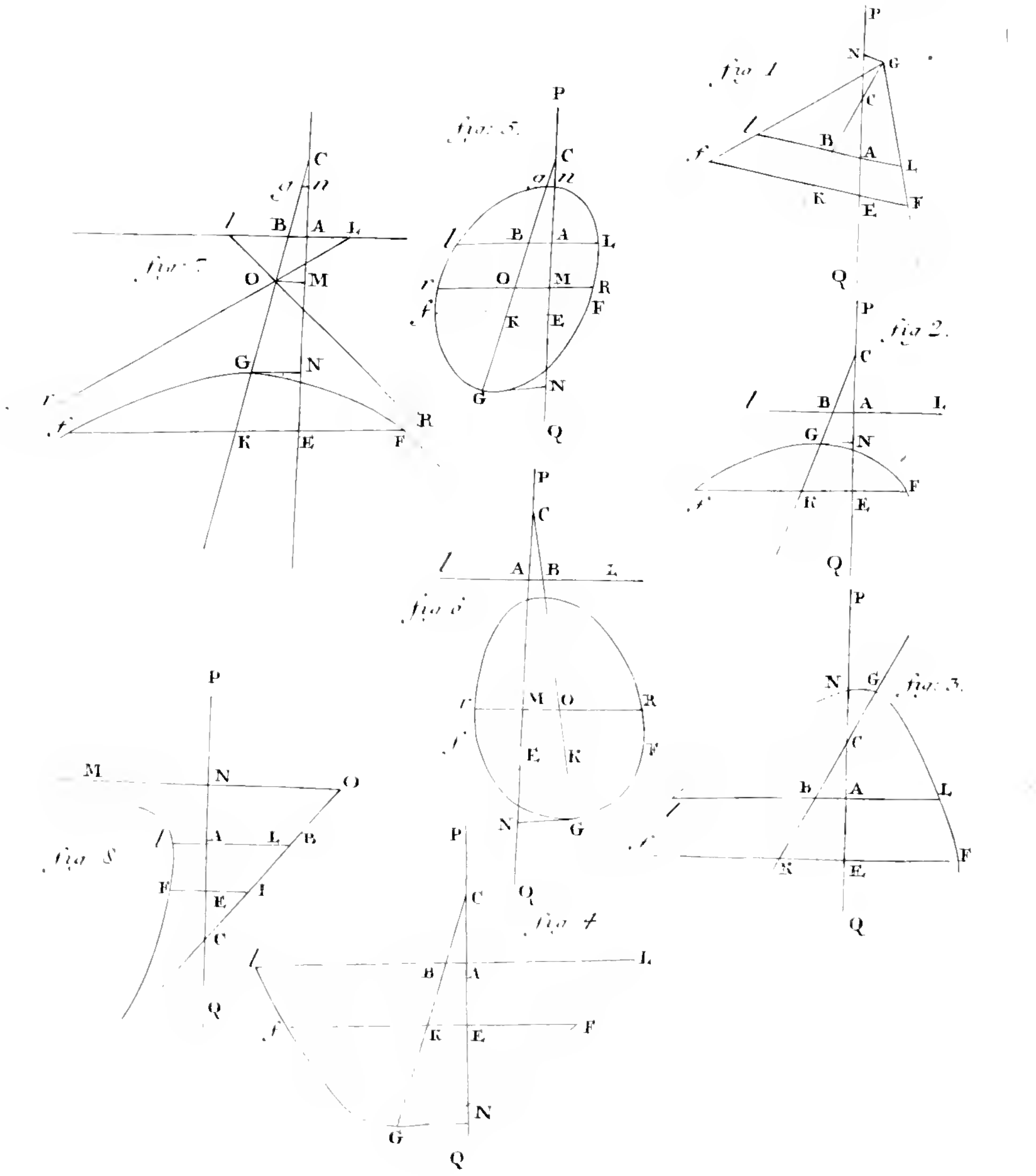


fig. 1
fig. 2.
fig. 3.
fig. 4
fig. 5.
fig. 6
fig. 7
fig. 8

Fig:2.

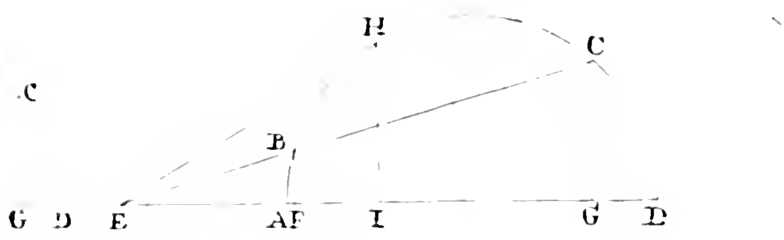


Fig:3.

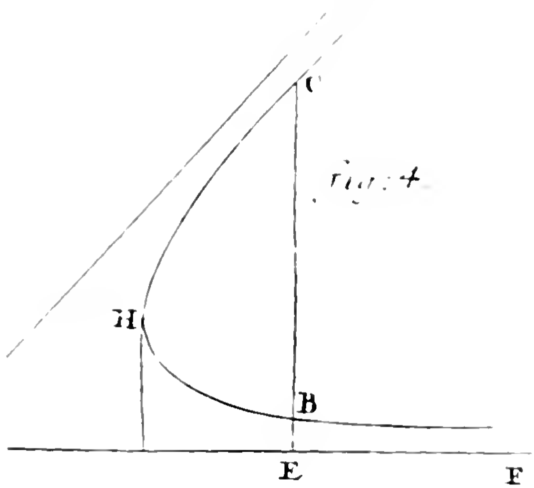


Fig:4.

Fig. 1.

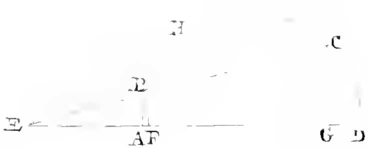


Fig. 2.

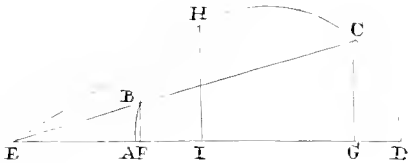


Fig. 3.

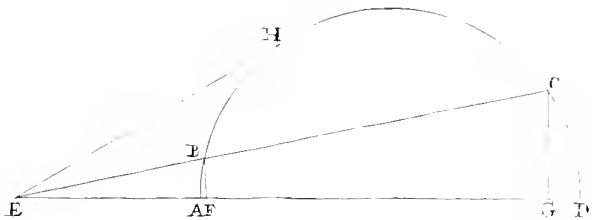
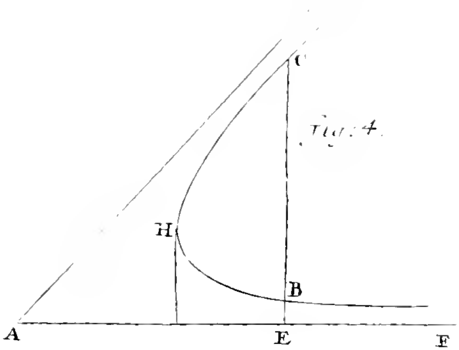


Fig. 4.



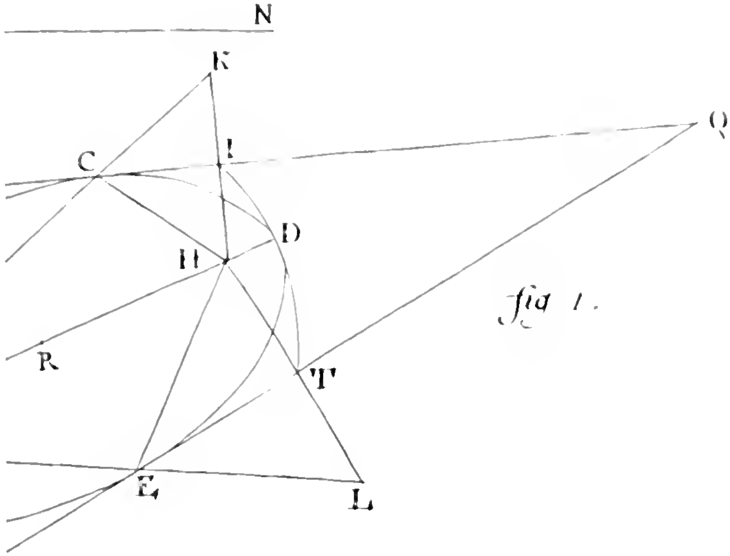


fig. 1.

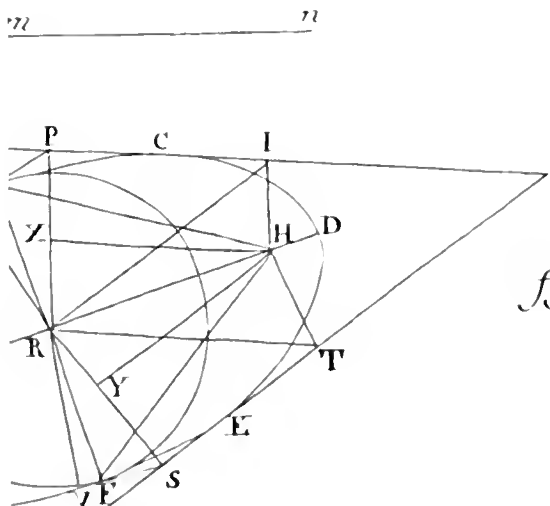


fig. 2.

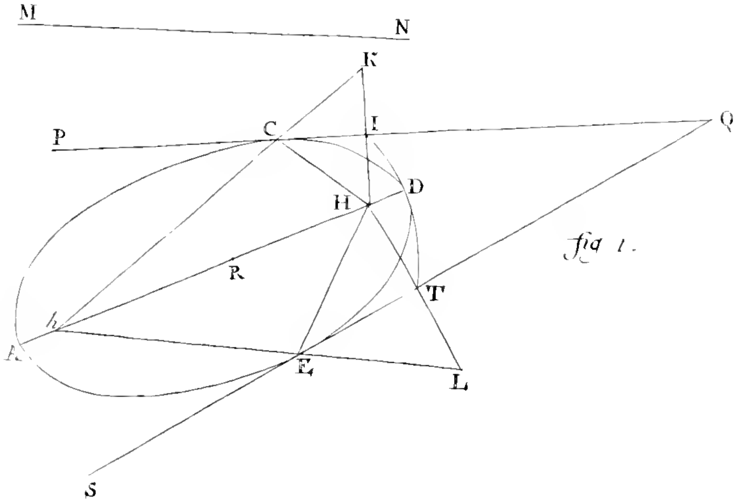


fig 1.

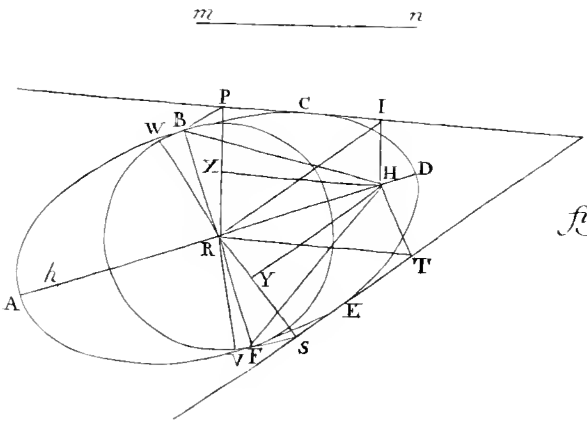
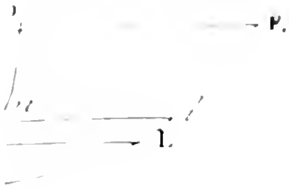
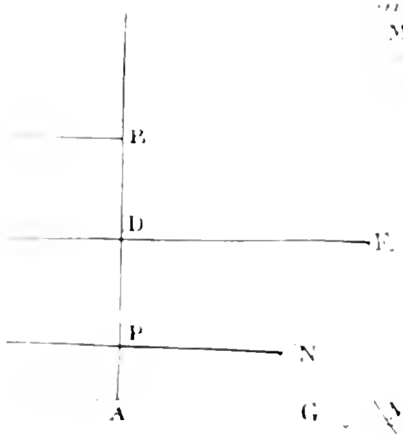


fig. 2.


P
L


C
B
D
n
N
M
P
A

fig 2


B
D
E
P
N
A

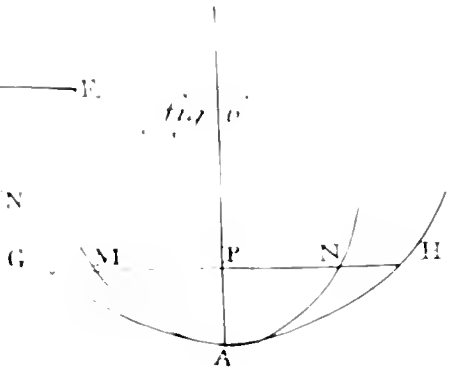
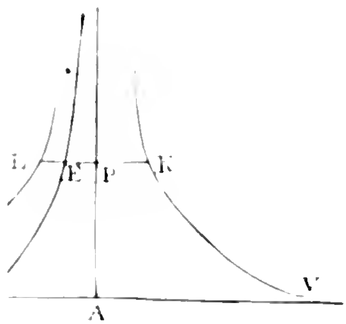
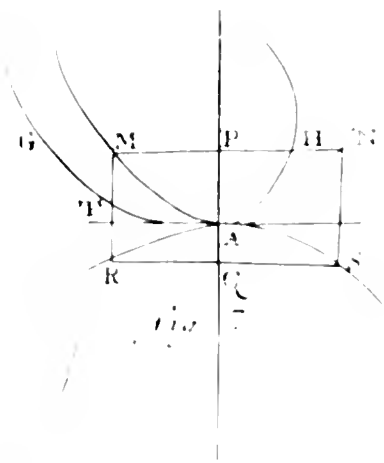


fig 6
G
M
P
N
H
A


L
E
P
K
V
A


G
M
P
H
N
T
A
R
Q
S
fig 7

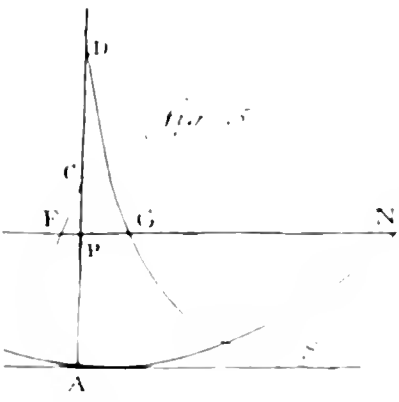

D
fig 5
C
F
G
N
P
A

fig. 1.

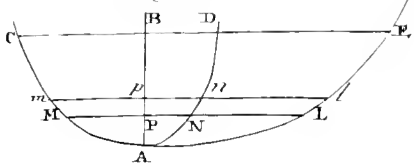
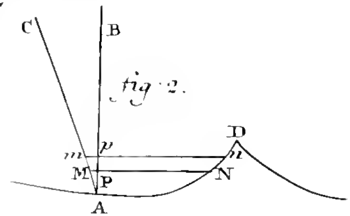


fig. 2.



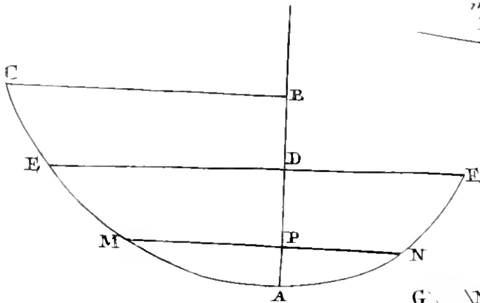


fig. 6.

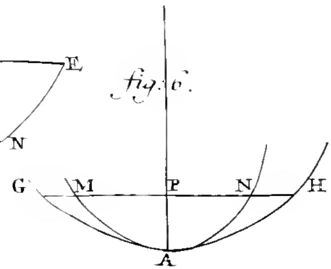


fig. 4.

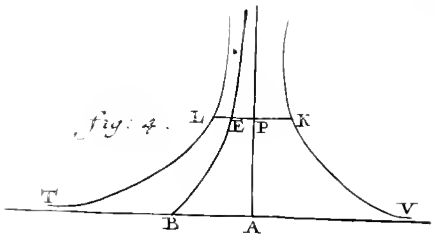


fig. 7.

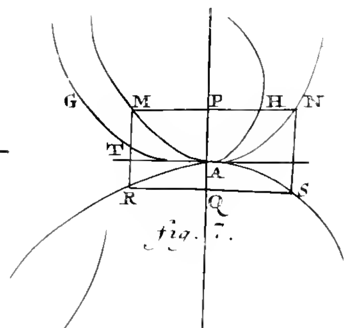


fig. 5.

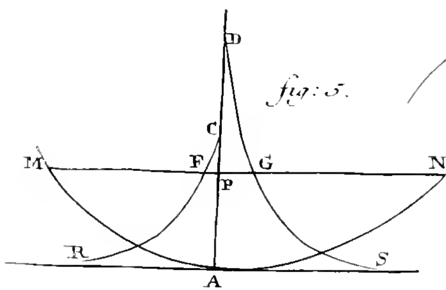


Fig. 8

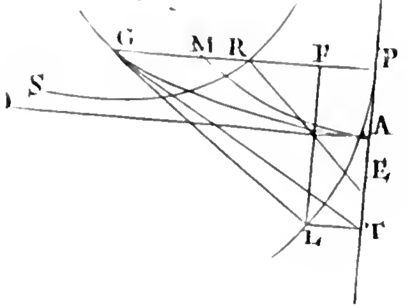


Fig. 9.

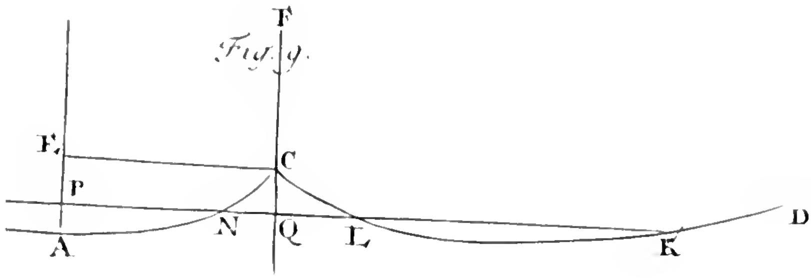


Fig. 10

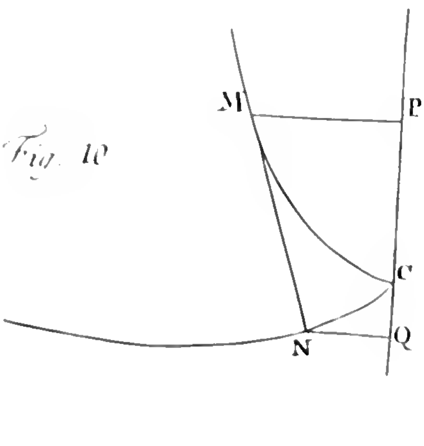


Fig 8

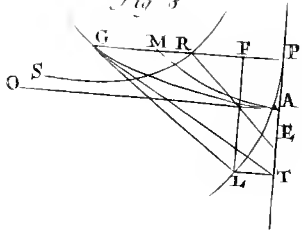


Fig 9.

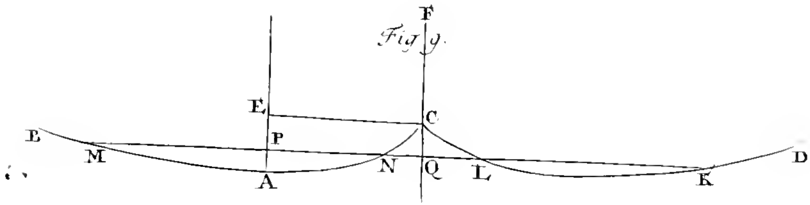
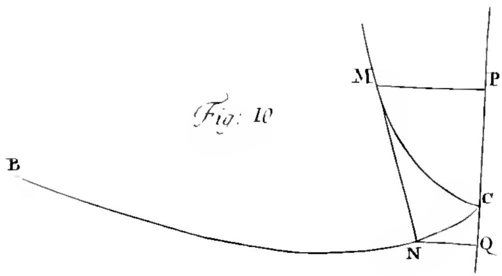
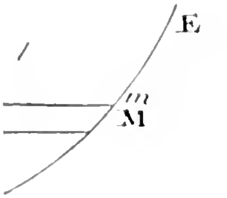


Fig: 10




E
m
M

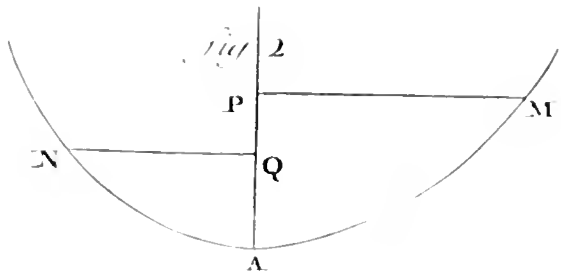
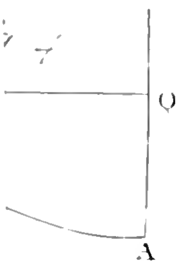


fig. 2
P
M
N
Q
A


Q
A

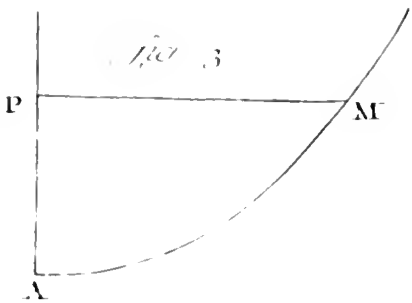
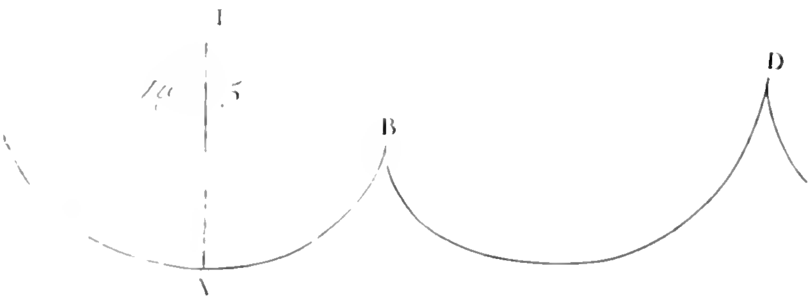


fig. 3
P
M
A


I
fig. 5
B
D

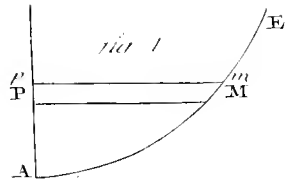


fig. 1
E
p
P
m
M
A

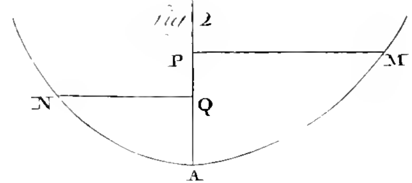


fig. 2
P
M
N
Q
A

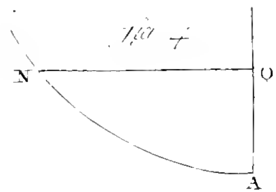


fig. 4
N
Q
A

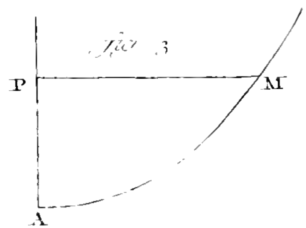


fig. 3
P
M
A

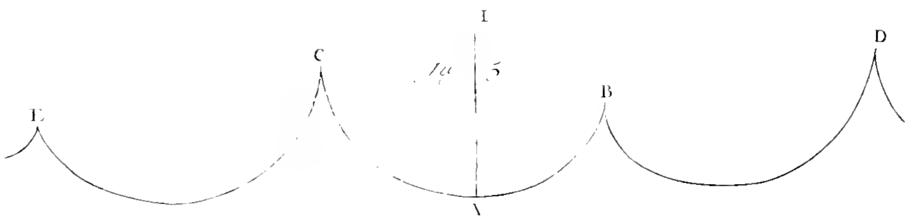
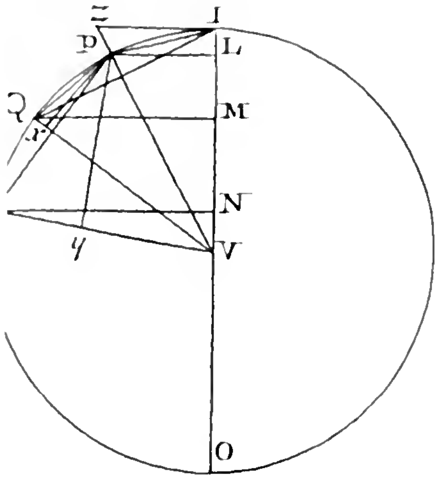
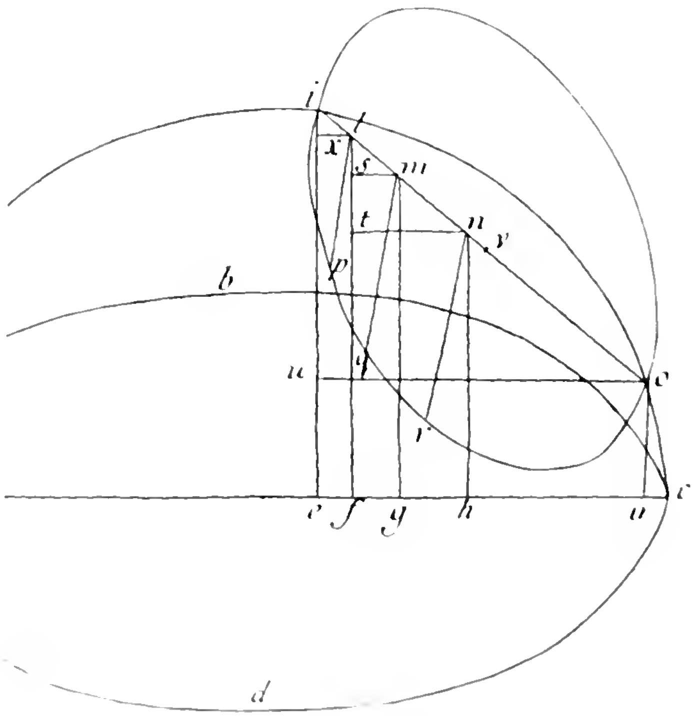


fig. 5
I
D
C
B
E
A


Z
I
P
L
Q
M
x
N
q
V
O


i
l
x
s
m
t
n
v
p
b
u
q
o
r
e
f
g
h
u
c
d

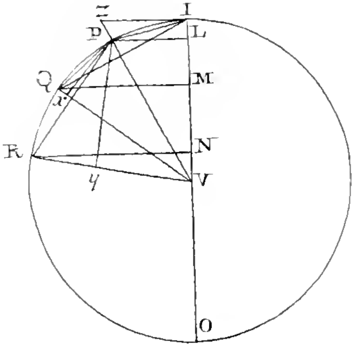


fig. 1.

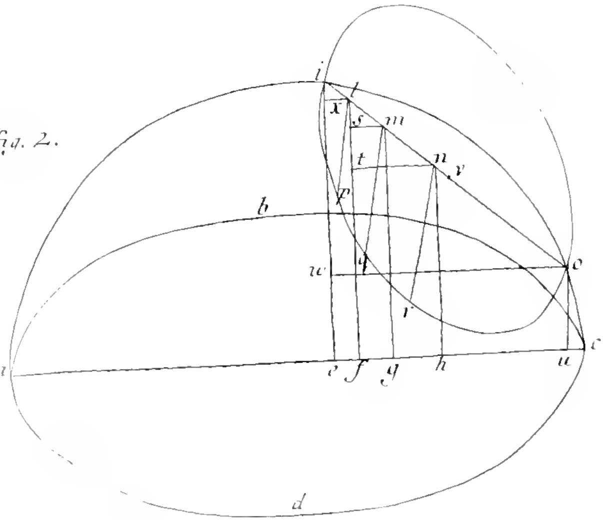
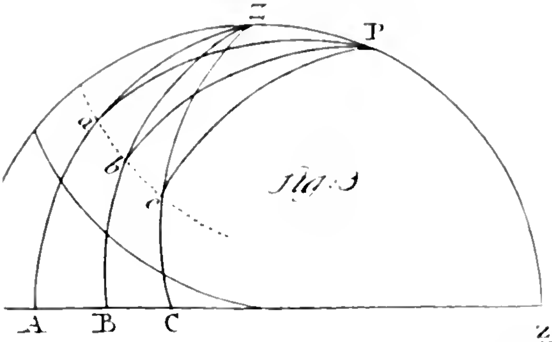
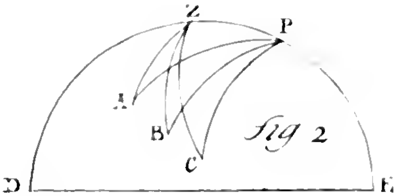
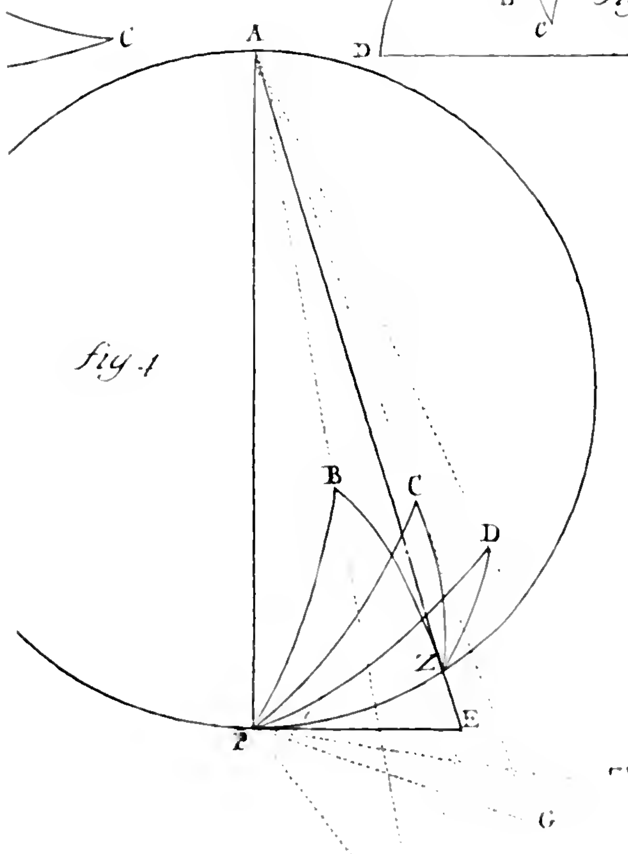
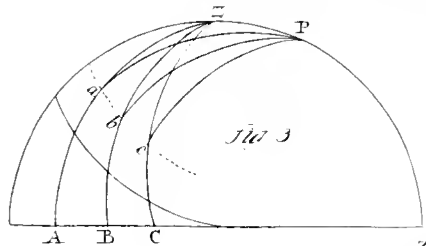


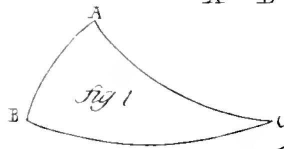
fig. 2.

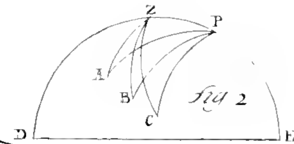

Z
P
a
b
c
fig. 3
A
B
C

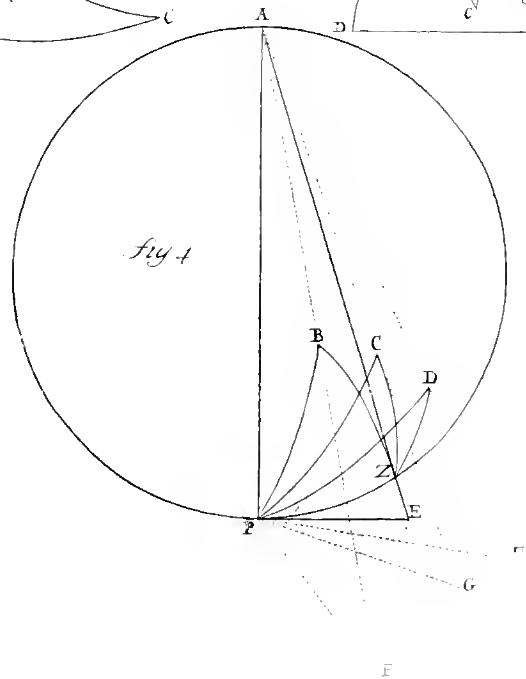

Z
P
A
B
C
fig 2
D
E


C
A
fig. 1
B
C
D
Z
E
P
G


P
a
b
c
fig 3
A
B
C


A
fig 1
B
C


Z
P
A
B
C
fig 2
D
E


A
fig 4
B
C
D
Z
E
P
G
F

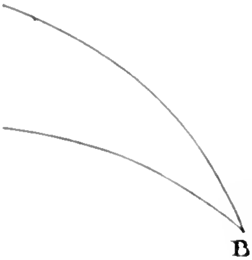


Fig 2.

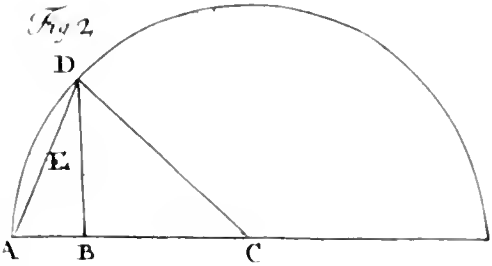


Fig: 4.

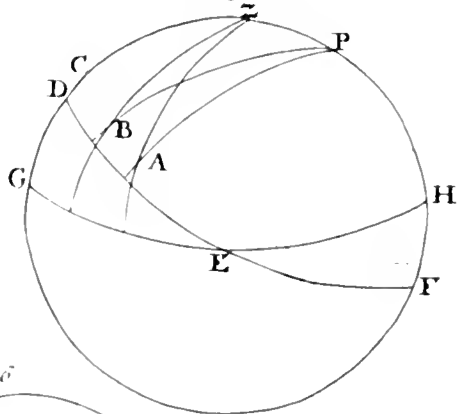


Fig 6

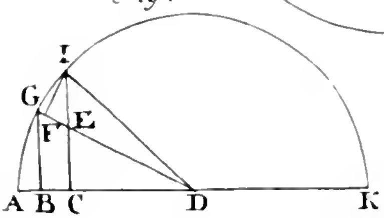


Fig: 7.

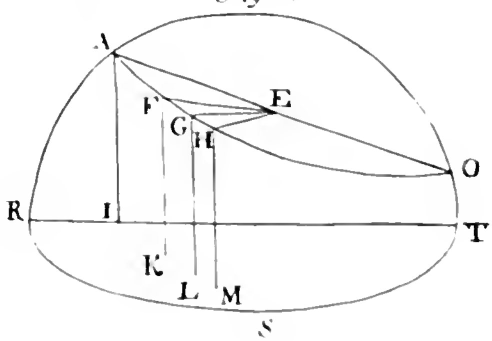


Fig 1.

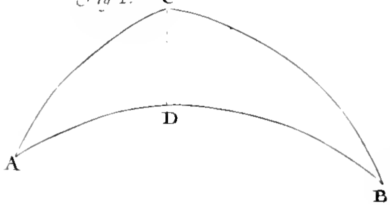


Fig 2.

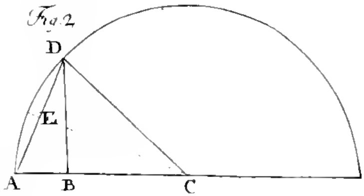


Fig 3

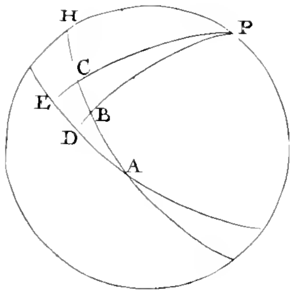


Fig 4.

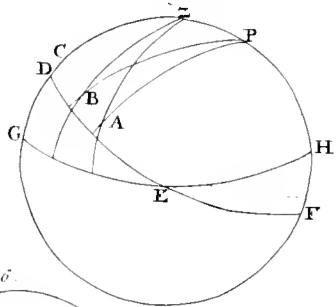


Fig 6.

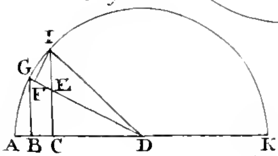


Fig 5.

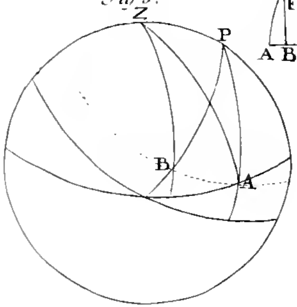
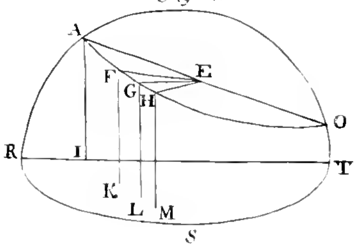
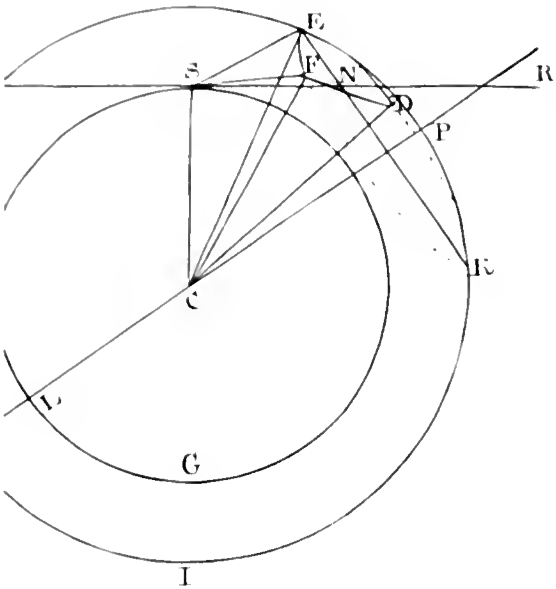


Fig 7.



1.



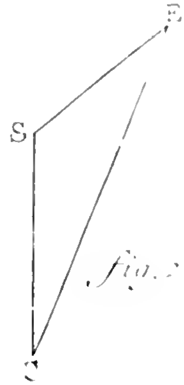


fig. 2.

5.

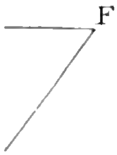


fig. 4.

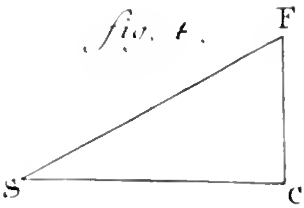


fig. 3.

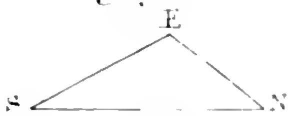
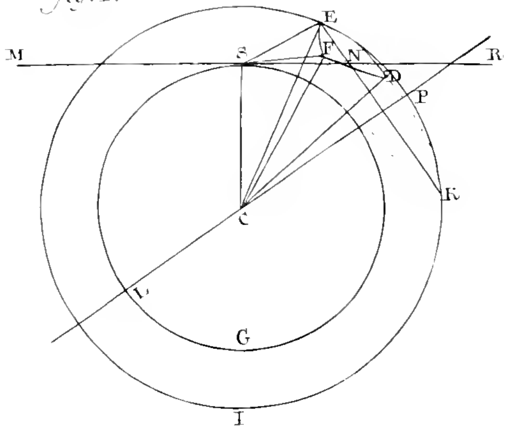


fig. 1.



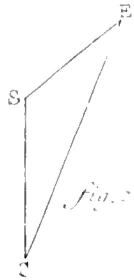


fig. 2.

fig. 5.

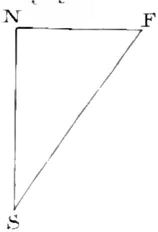


fig. 4.

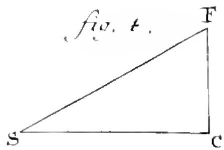
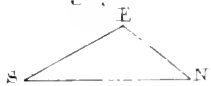
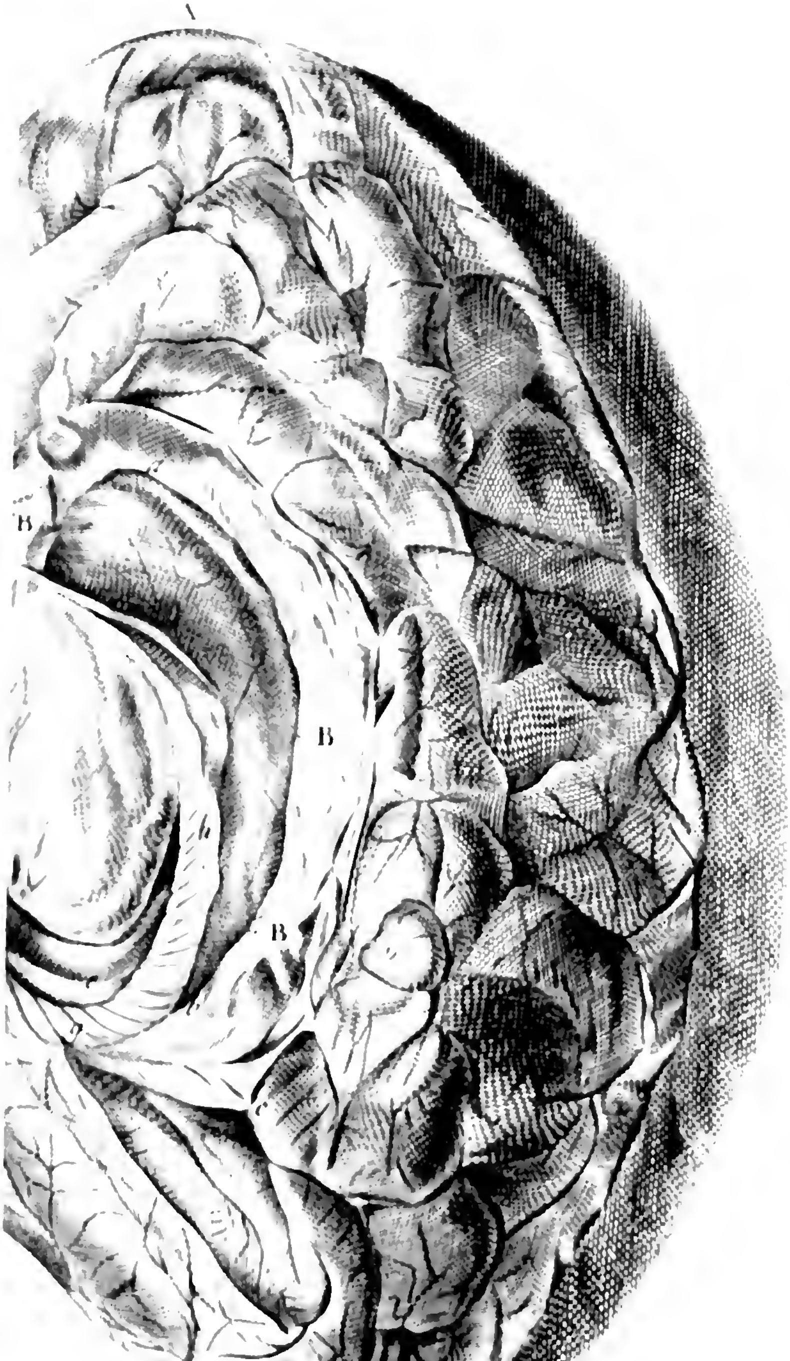
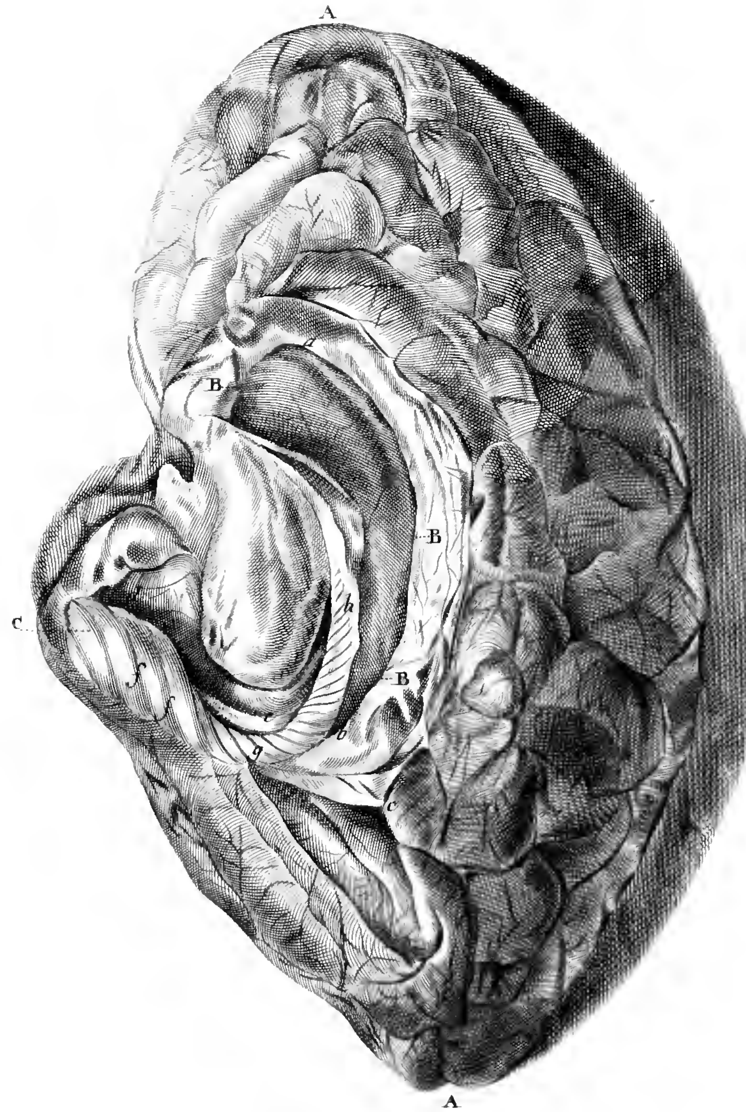


fig. 3.




A
B
B
B
A


A
a
B
B
h
C
f
f
B
e
b
g
c
A

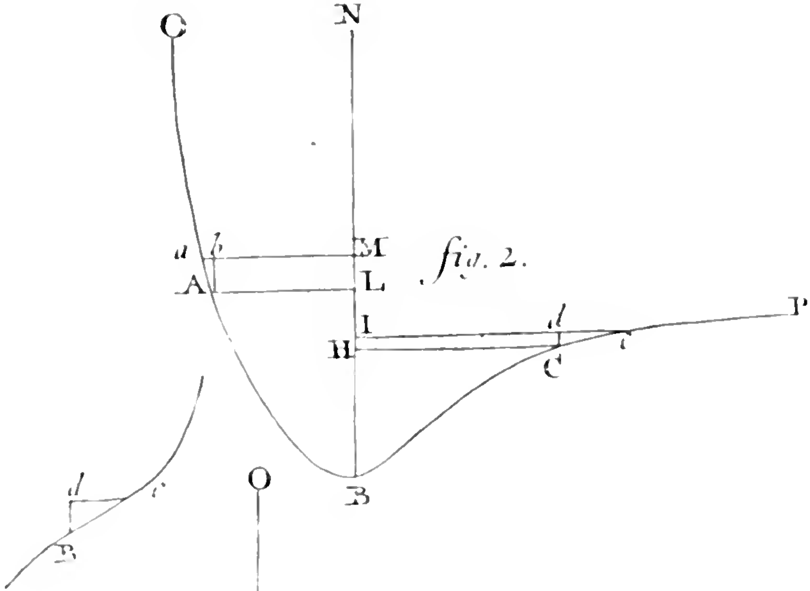


fig. 2.

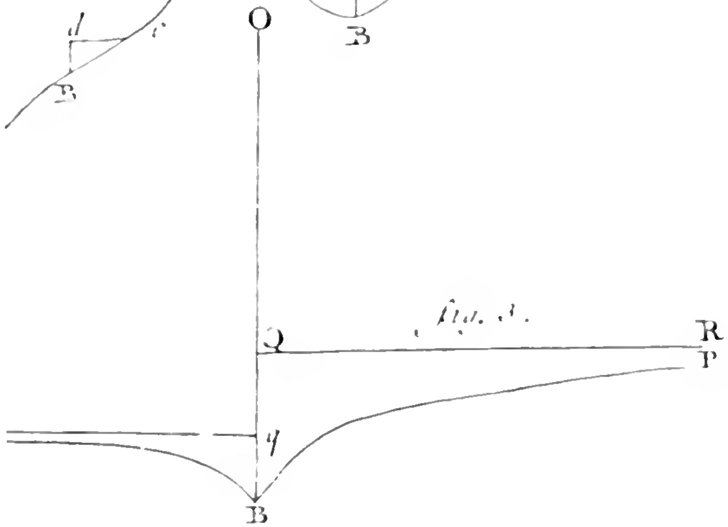


fig. 3.

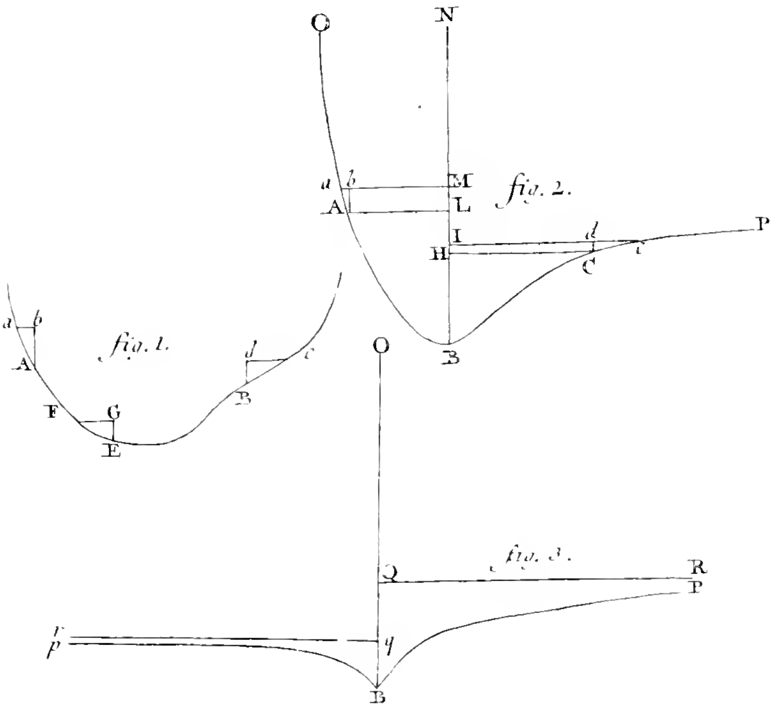
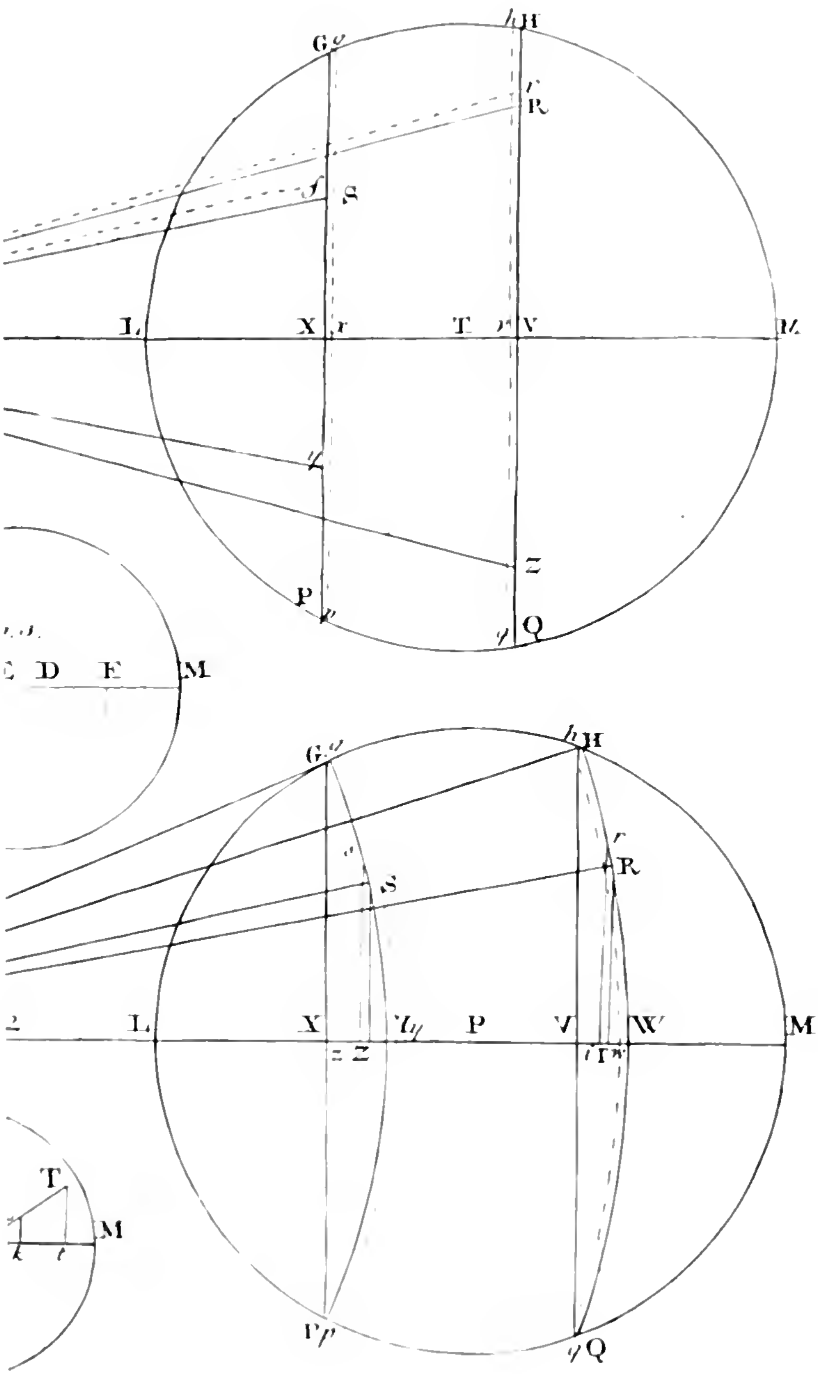


fig. 1.
a
b
A
F
G
E
d
c
B
fig. 2.
O
N
a
b
M
A
L
I
H
d
c
C
P
B
fig. 3.
O
Q
R
P
r
p
q
B


G g
h H
R
S
L
X
T
V
M
P
Z
Q
D
E
M
G g
h H
R
S
L
X
P
V
W
M
Z
T
M
P p
q Q

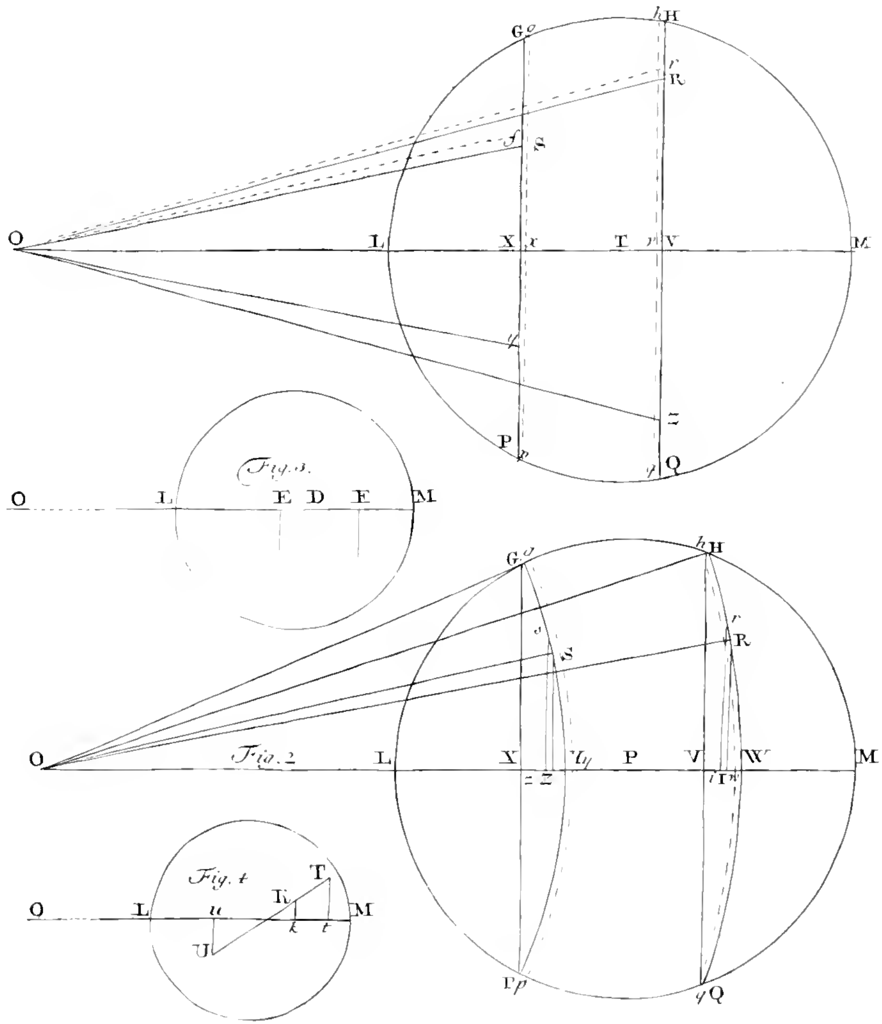
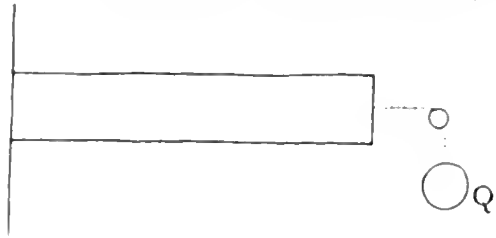


Fig. 3.
Fig. 2
Fig. 4

fig. 1.



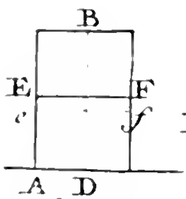
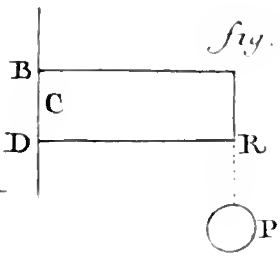


fig. 3.

fig. 4.



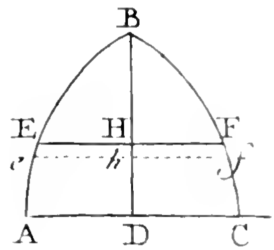
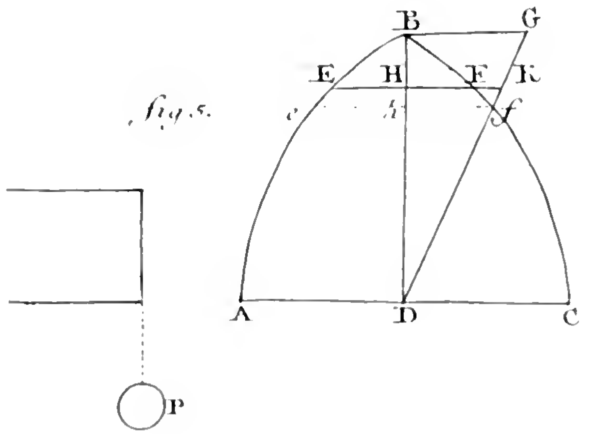


fig. 5.



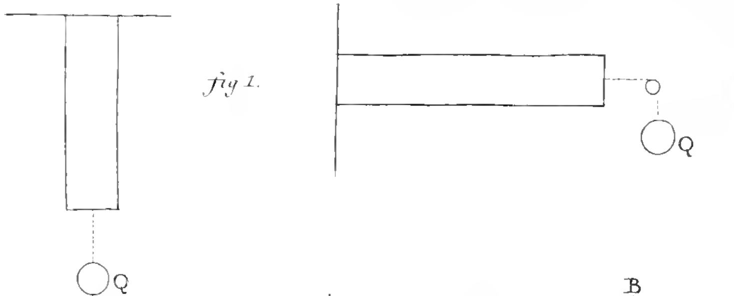


fig 1.

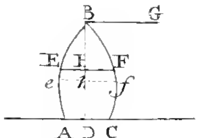


fig 2

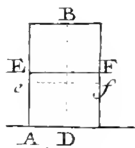


fig 3

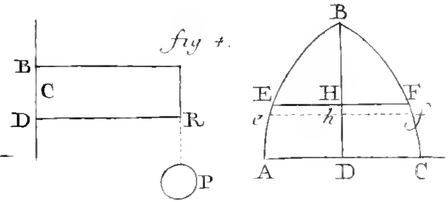


fig 4.

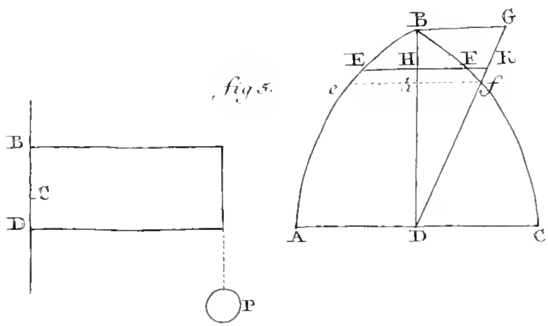


fig 5.

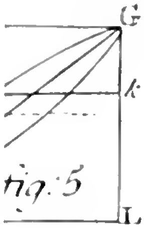


fig: 5

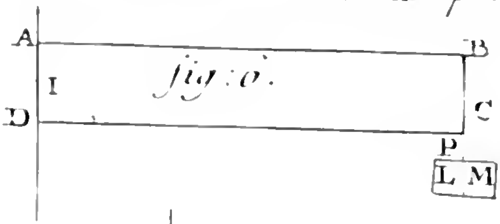


fig: 6.

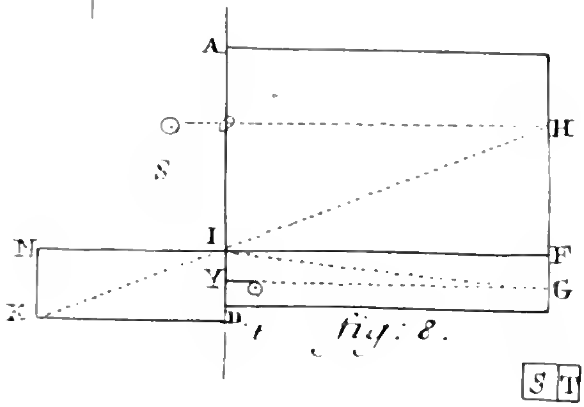
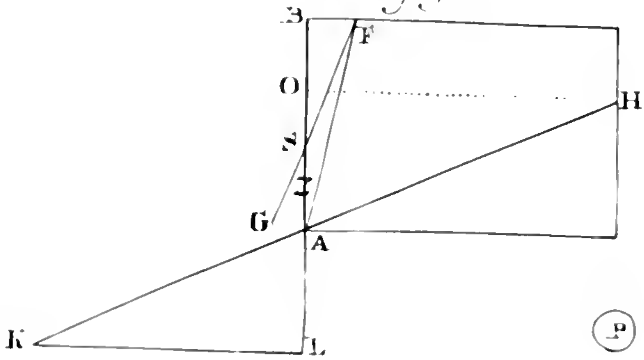


fig: 8.

fig: 10.



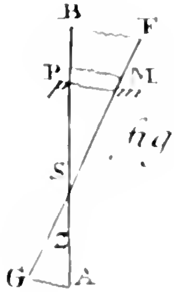


fig: 11.

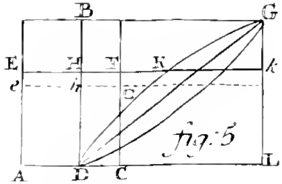


fig: 5

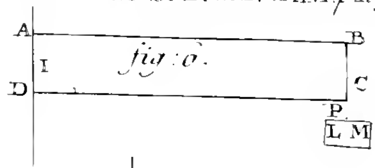


fig: 6.

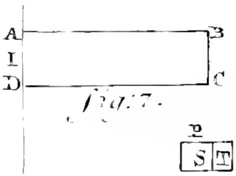


fig: 7.

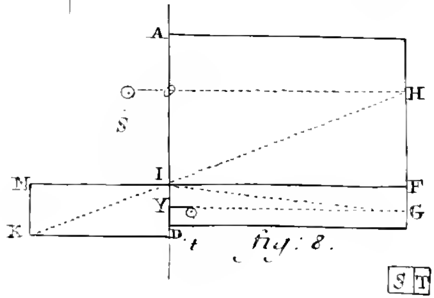


fig: 8.

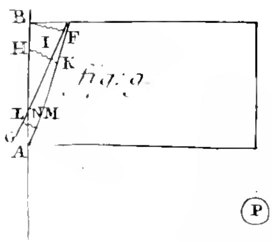


fig: 9.

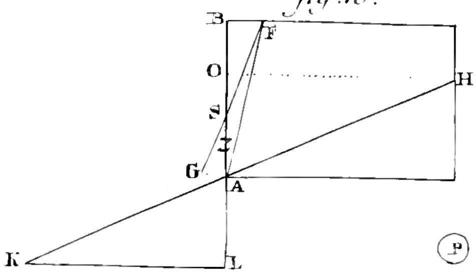


fig: 10.

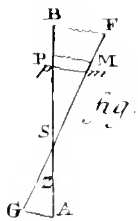


fig: 11.

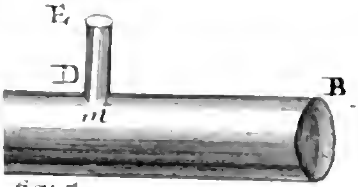


fig: 1

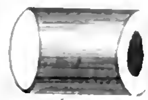


fig 2

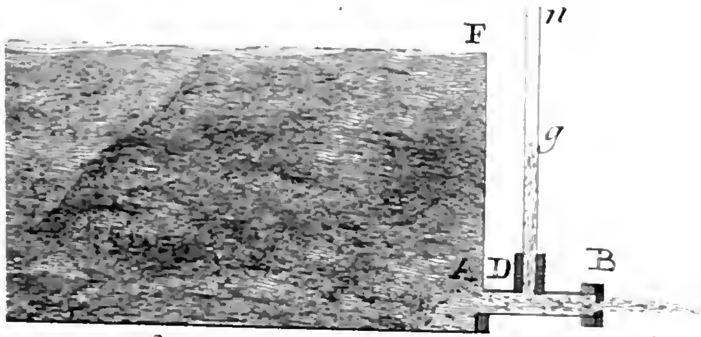


fig: 3.

fig: 5.

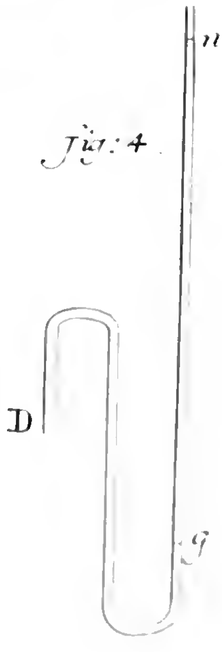


fig: 4.

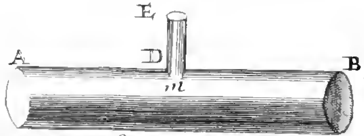


fig: 1

fig 2

fig:3.

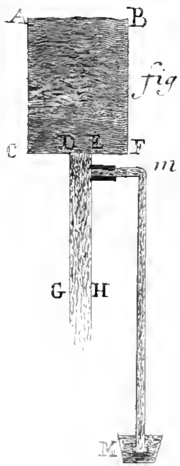


fig:5.

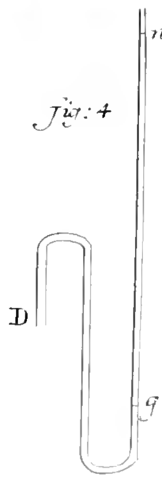
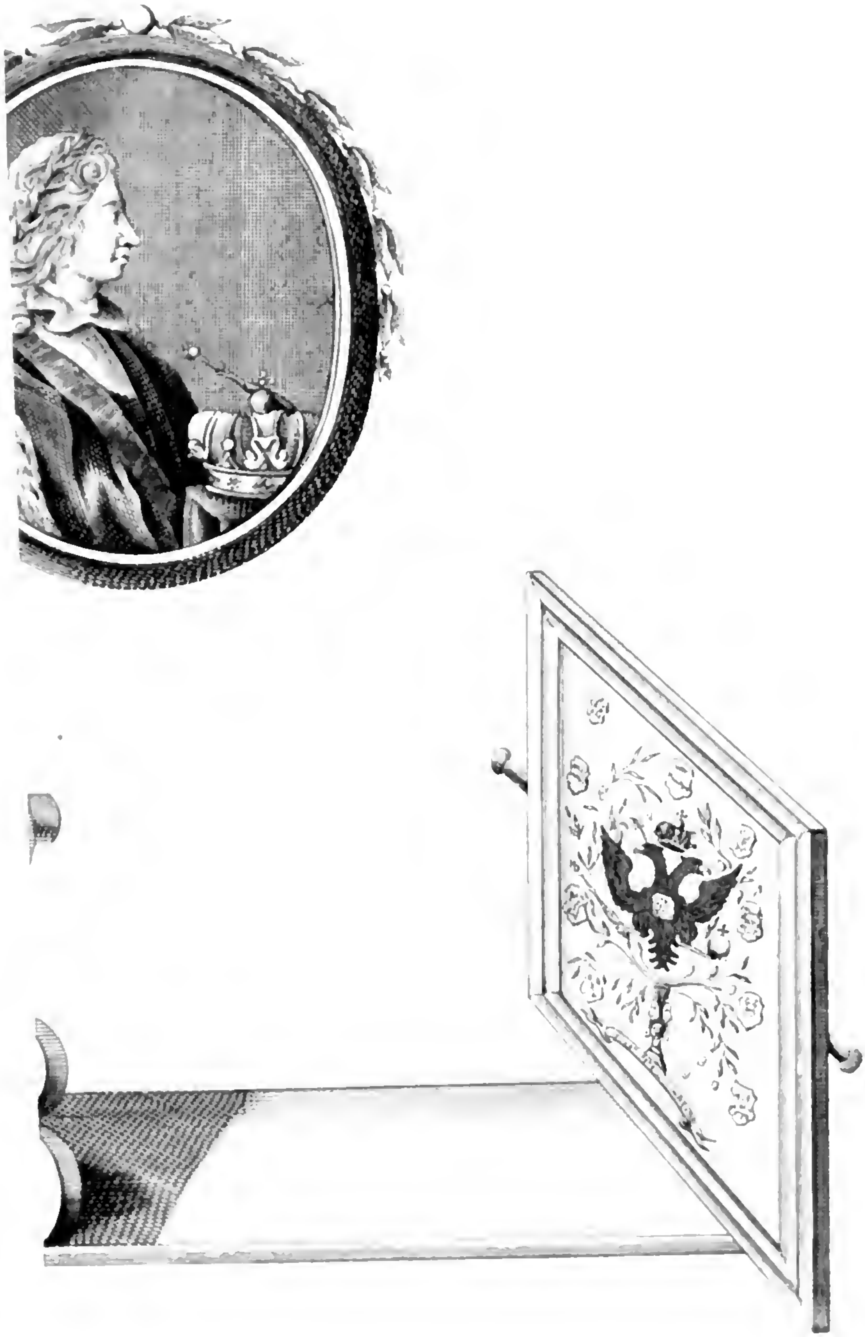


fig:4


PETRUS II IMPERATOR


VIVAT PETRUS II IMPERATOR.



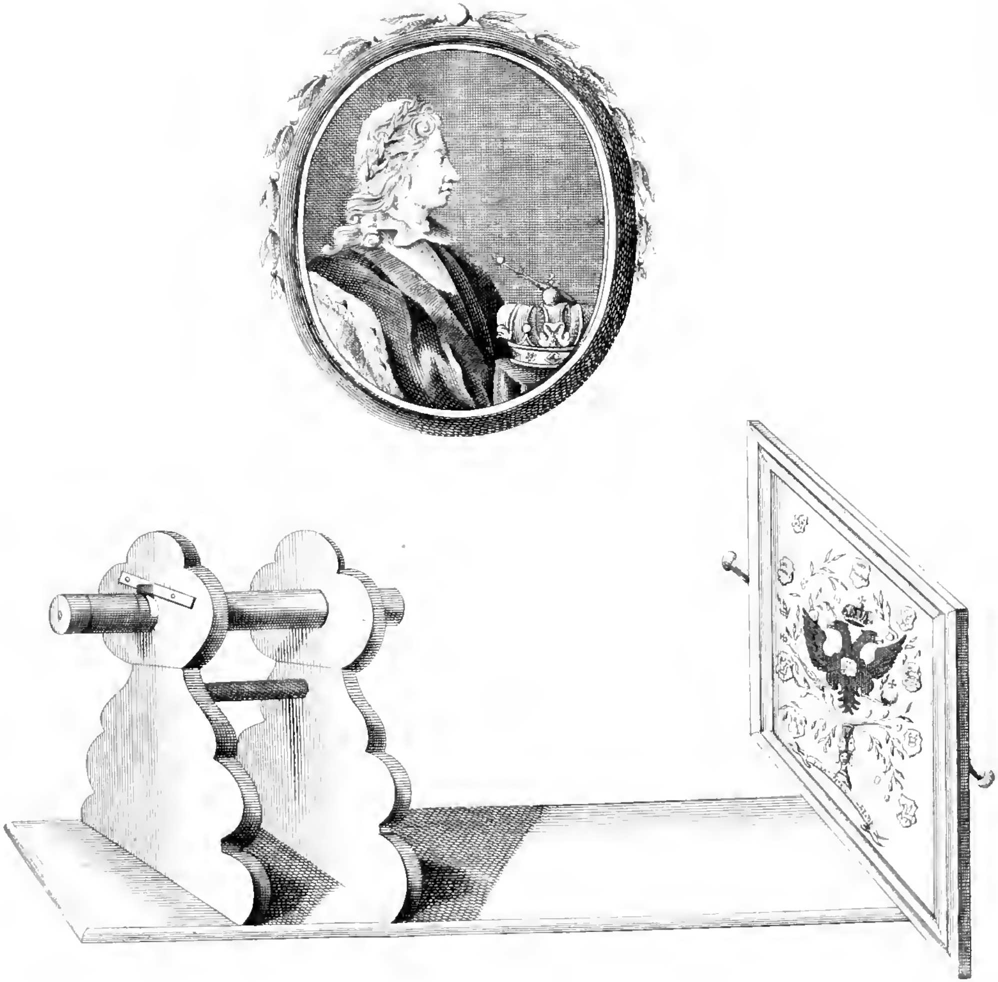


Fig: 1. &
14. pag. 218

§ 18. pag. 219.

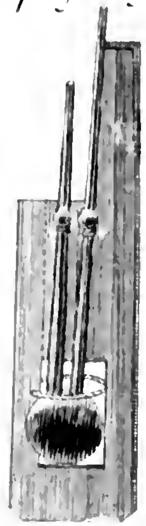


Fig: 2.
§ 30. pag. 222.

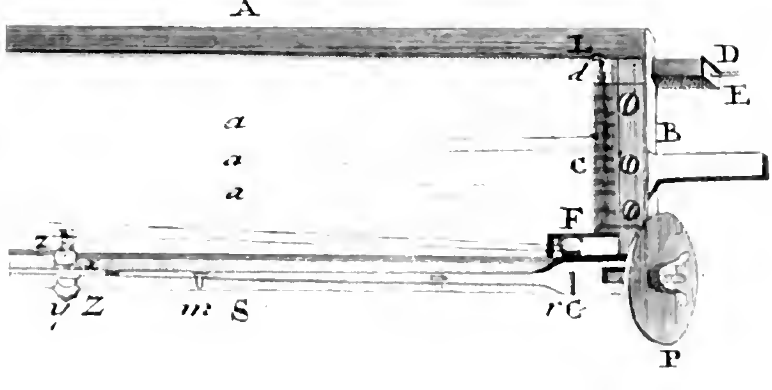


Fig. 1. α
§ 17. pag. 218

β
§ 18. pag. 219.

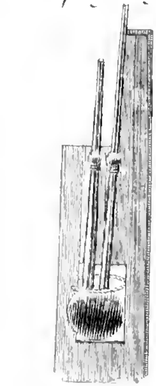
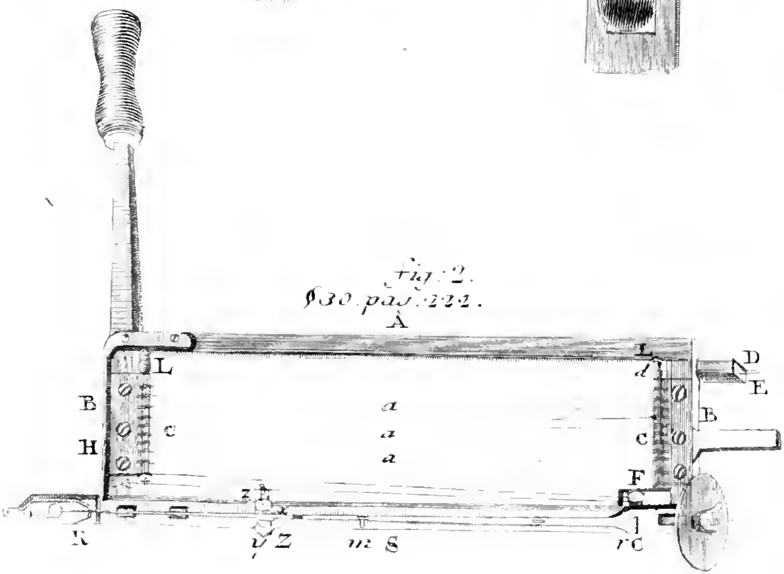


Fig. 2.
§ 30. pag. 222.



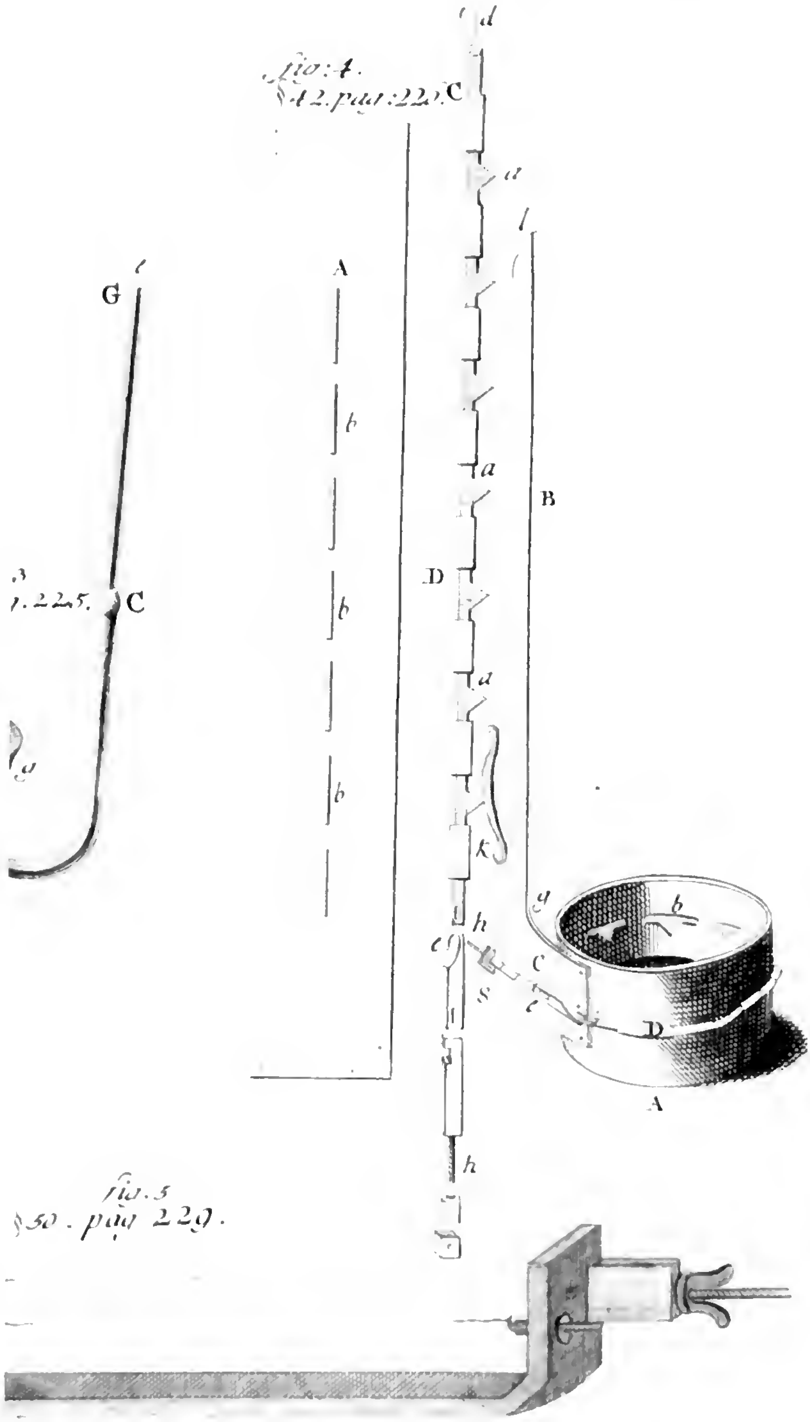


fig:4.
§42. pag:225.
fig:3
p. 225.
fig:5
§50. pag 229.
G
C
A
B
D
a
b
d
k
h
g
S
c

fig: 3
§35. pag. 225.

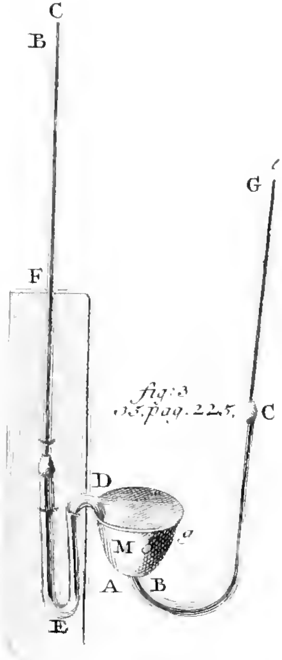


fig: 4
§42. pag: 225.

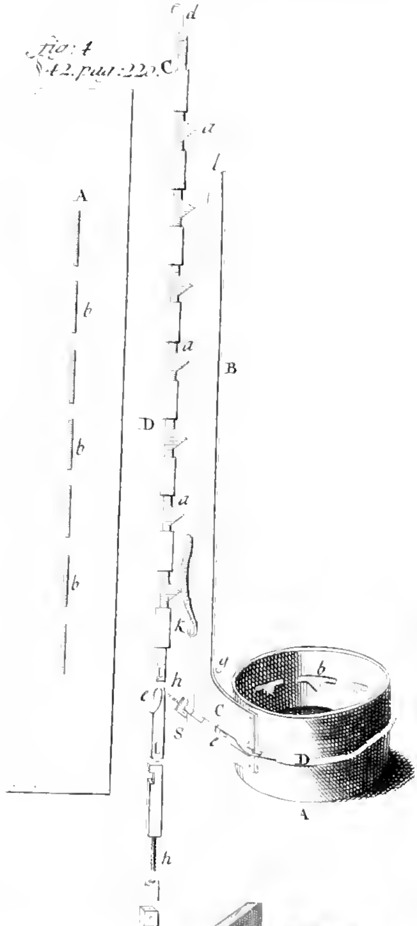


fig. 5
§50. pag. 229.

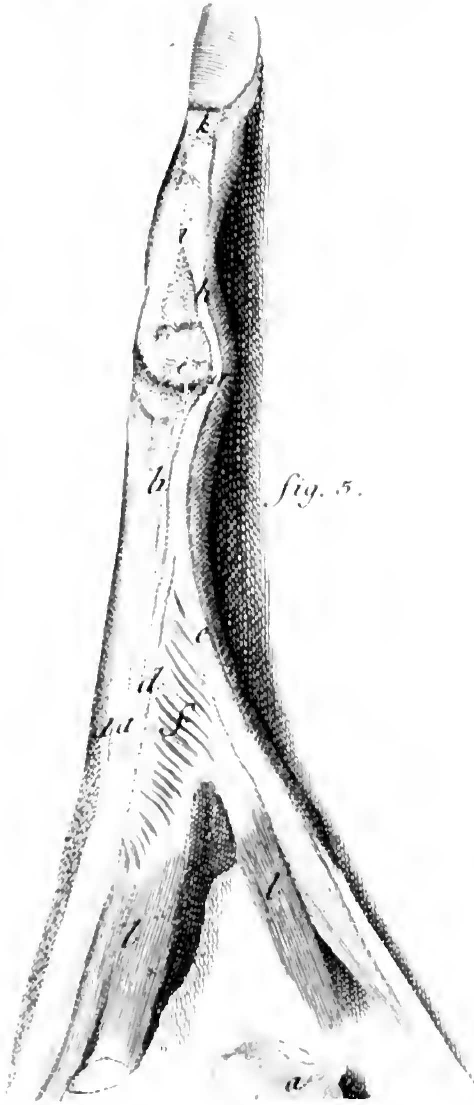


fig. 5.


C
B
A
fig. 1.
fig. 2.
fig. 3
fig. 4.
fig. 5.
fig. 6.

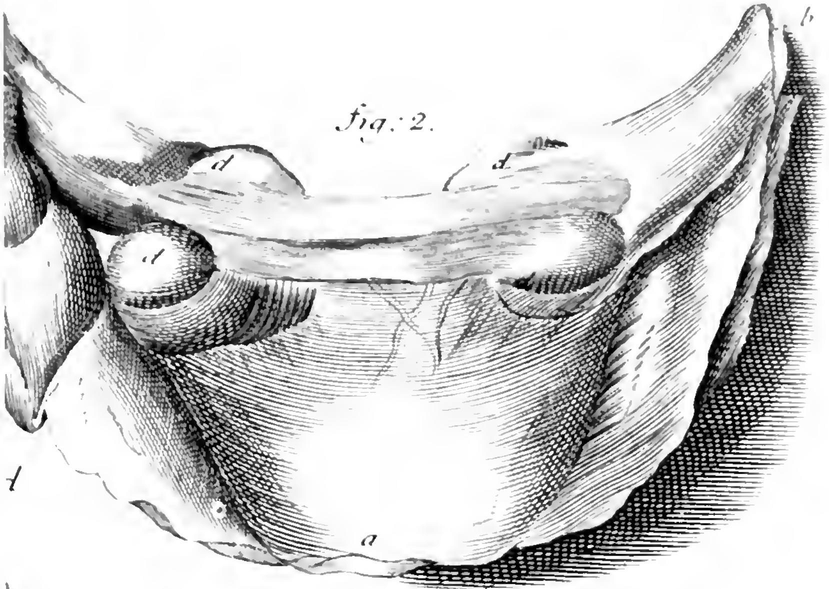
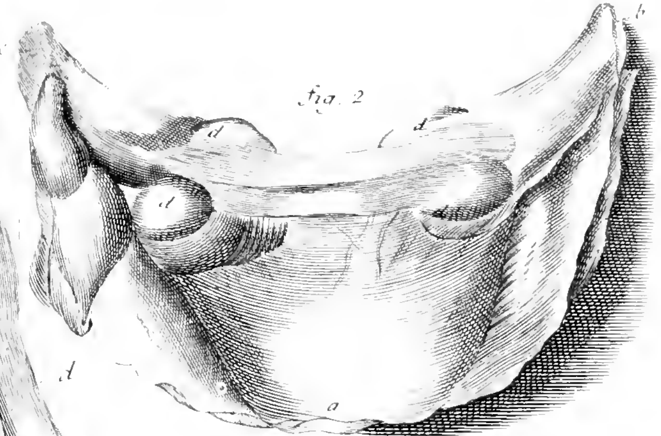


fig: 2.
b
d
d
d
d
a


a
g

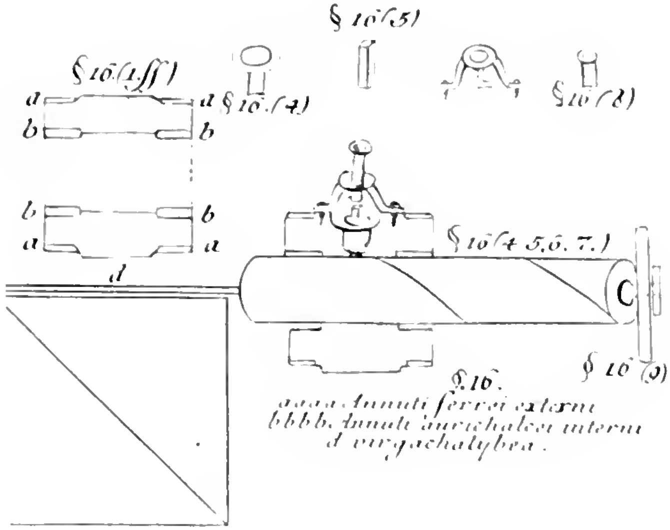
fig: 1.

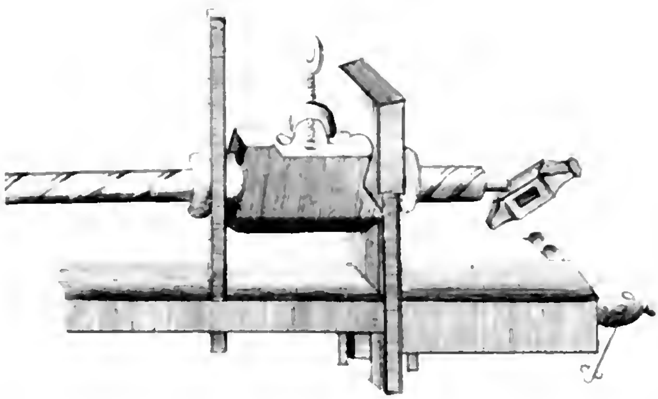



f
g

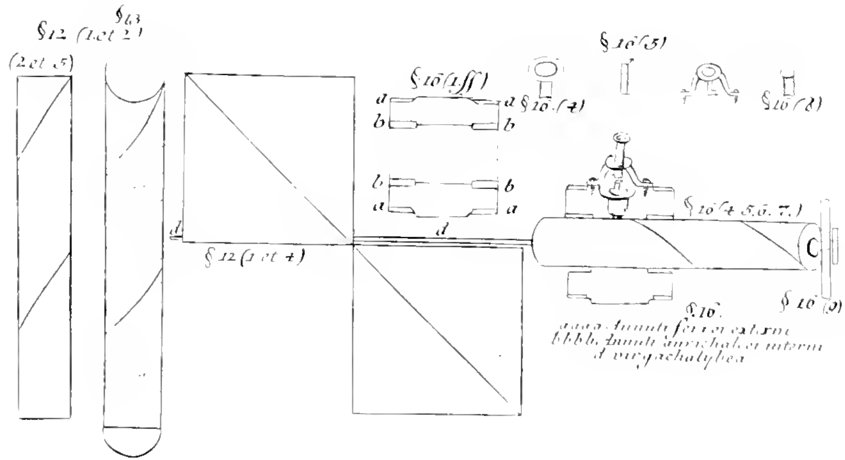

h
e

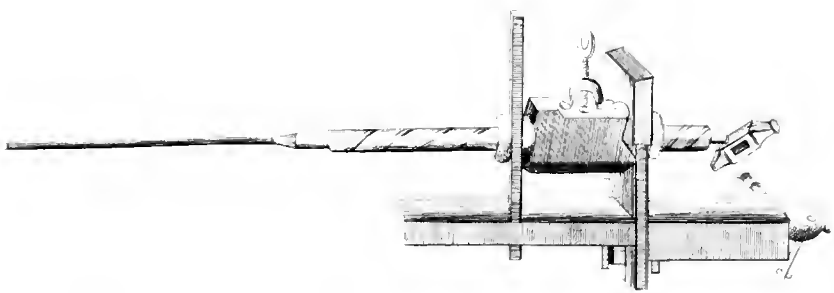

a
b
c
d
e
f
g
h





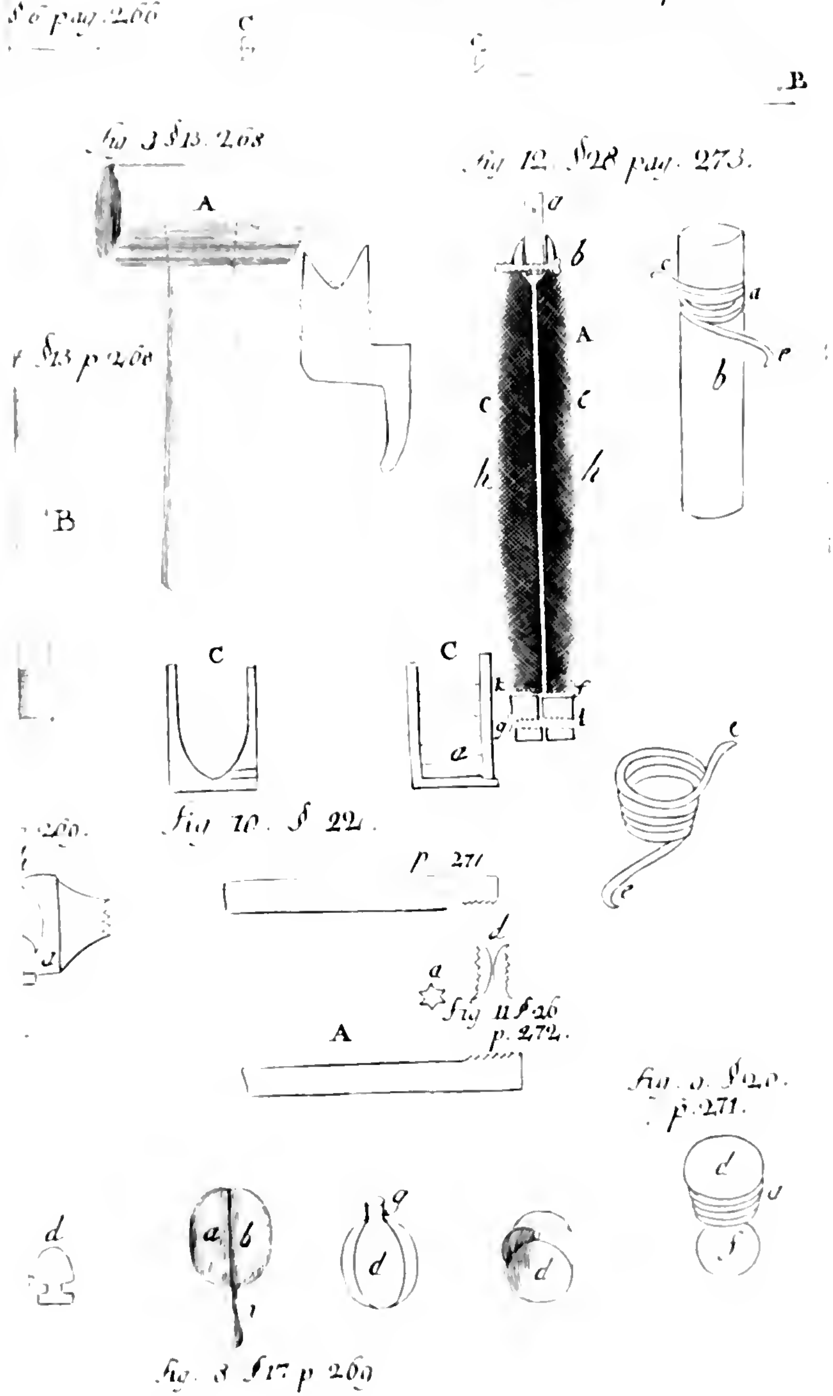
...m cochleatis





Ad Dissertationem de Sulcis sclopetorum cochleatis

Comm. Acad. Sc. Tom. IV. T. XXVI. p. 265.



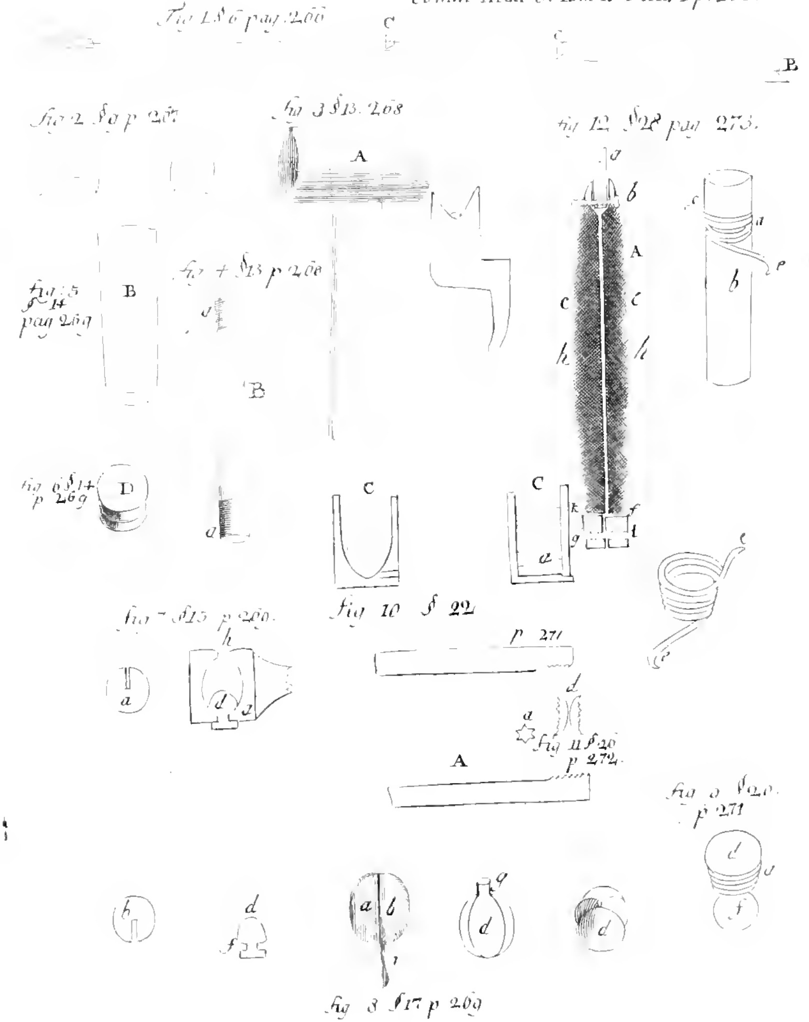


fig 2 § 9 p 267
fig 3 § 13. 268
fig 12 § 28 pag 273.
fig 4 § 13 p 268
fig 5 § 14 pag 269
fig 6 § 14 p 269
fig 7 § 15 p 269.
fig 10 § 22
p 271
fig 11 § 26 p 272.
fig 9 § 26. p 271
fig 8 § 17 p 269
A
B
C
D

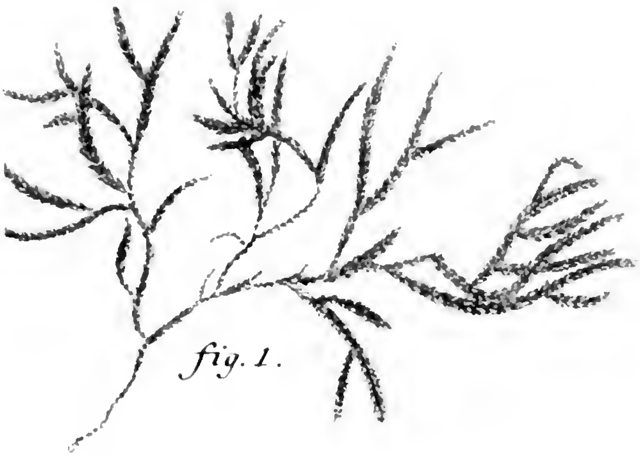


fig. 1.

fig. 2.

fig. 1.

fig. 2.

Comm. Ac. Sc. Tom. IV. T. XXIX. p. 221.

fig. 1.

fig. 2.

fig. 4.

fig. 5.

Comment. IV. ad pag: 233.

fig. 1.

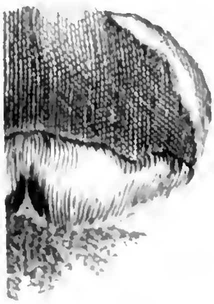


fig. 2.

fig. 1.

fig. 2.

fig. 3.

fig. 4.

fig. 5

Comment. IV. ad pag: 283.

fig. 1.

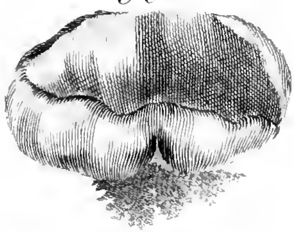
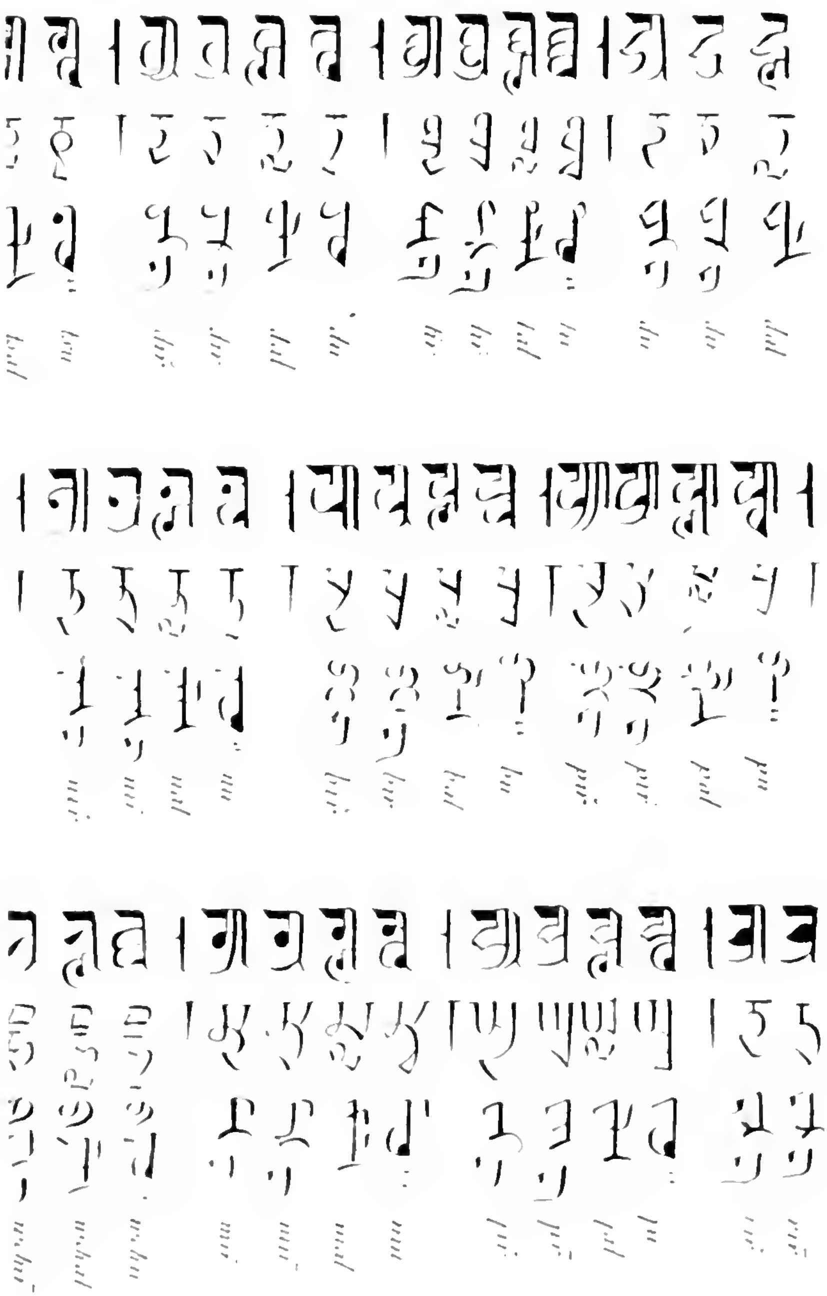
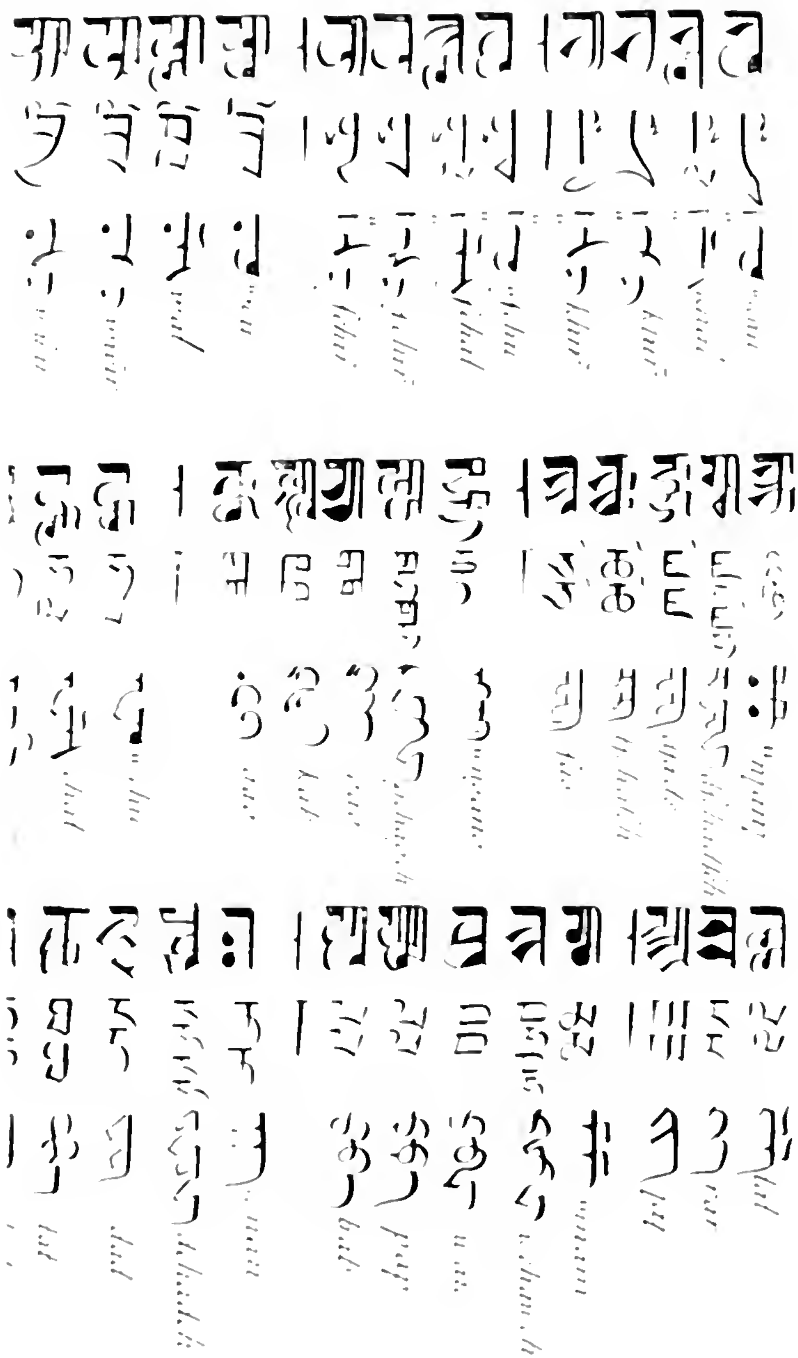


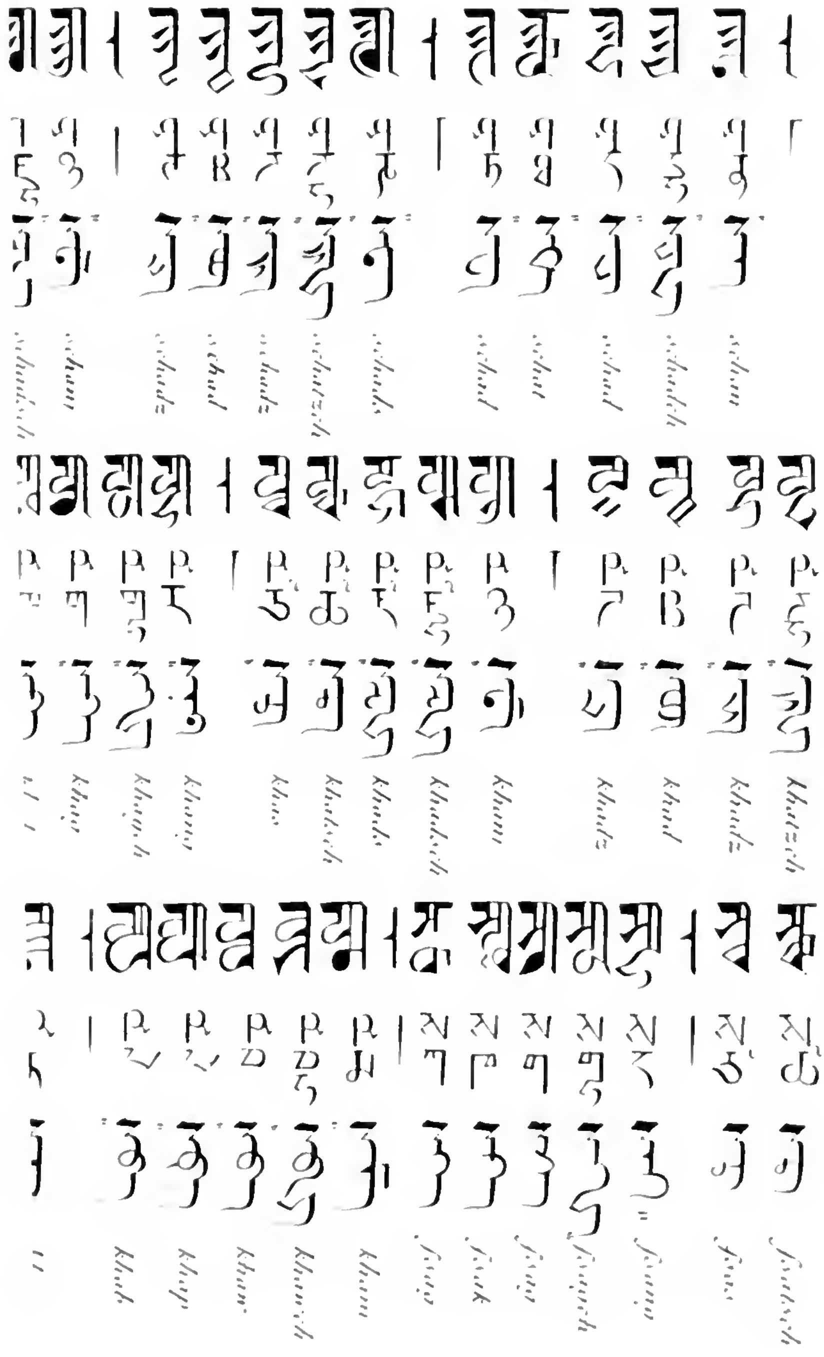
fig. 2.


Kal
ku
gir
gür
gal
gu
gthir
gchür
gchal
gchu
ngir
ngür
tschir
tschür
tschal
tschu
dsir
dsür
dsal
dsu
dschir
dschür
dschal
dschu
dzür
dzal
dzu
dir
dür
dal
du
dzir
dzür
dzal
dzu
dschir

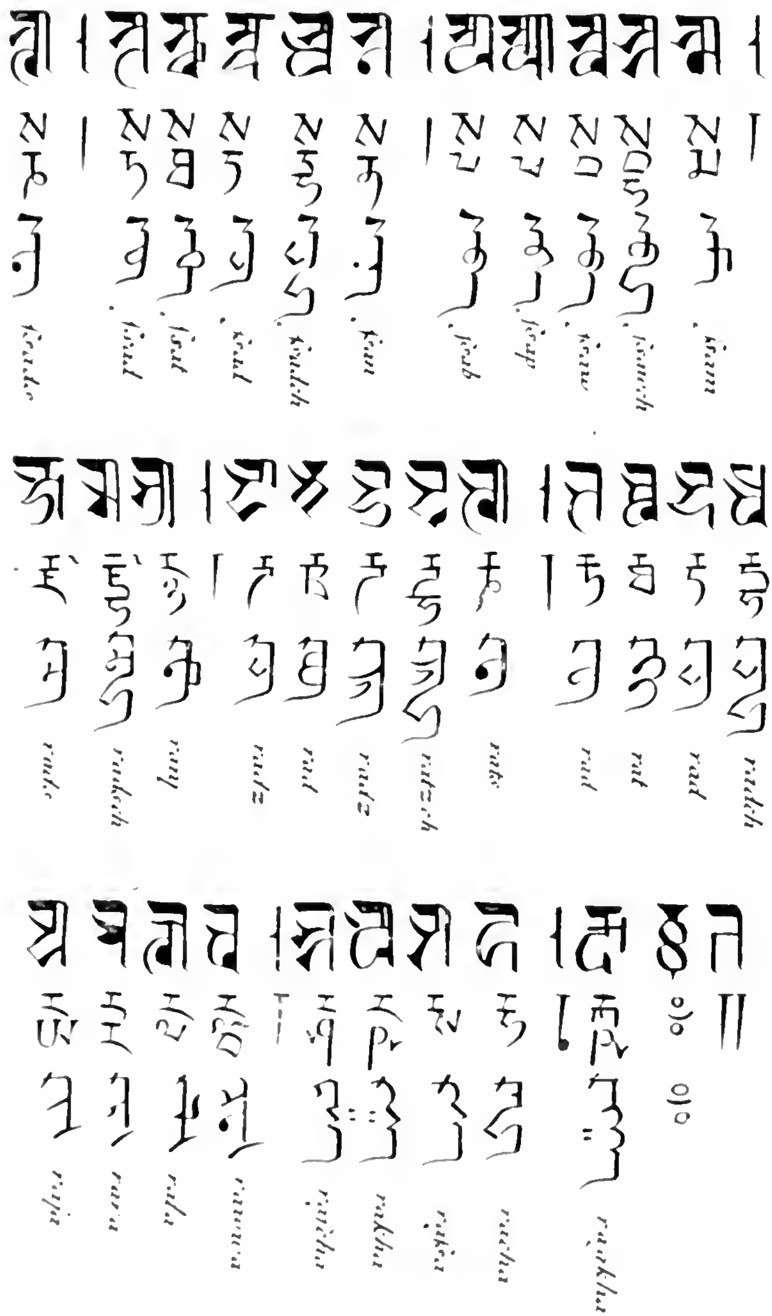

giř
giř
gad
gu
kiř
kiř
kad
ku
giř
giř
gad
gu
gchir
gchir
gchad
gchu
ngir
ngir
ngad
ngu
siř
siř
sad
su
tschiř
tschiř
tschad
tschu
dsiř
dsiř
dsad
dsu
dschiř
dschiř
dschad
dschu
ngiř
ngiř
ngad
ngu
dziř
dziř
dzad
dzu
diř
diř
dad
du
dziř
dziř
dzad
dzu
dzchiř

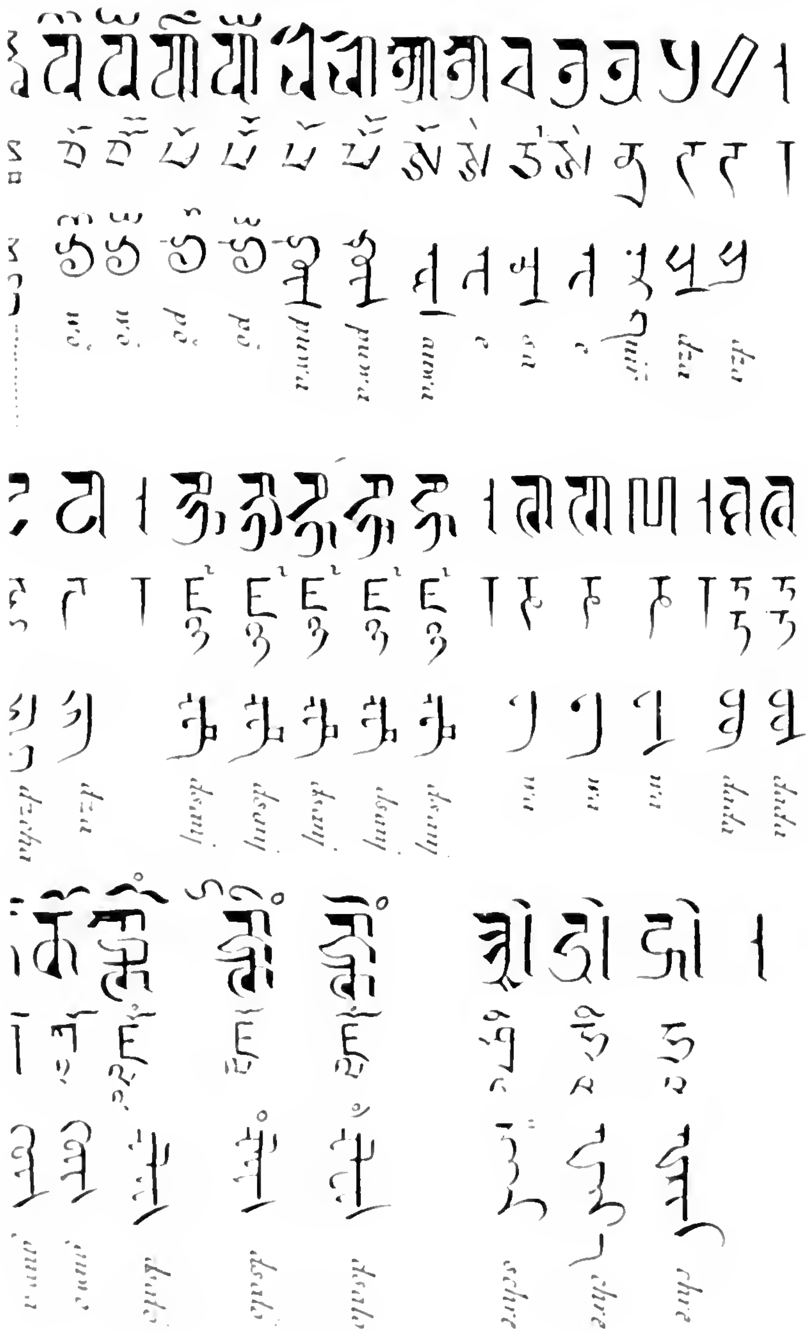




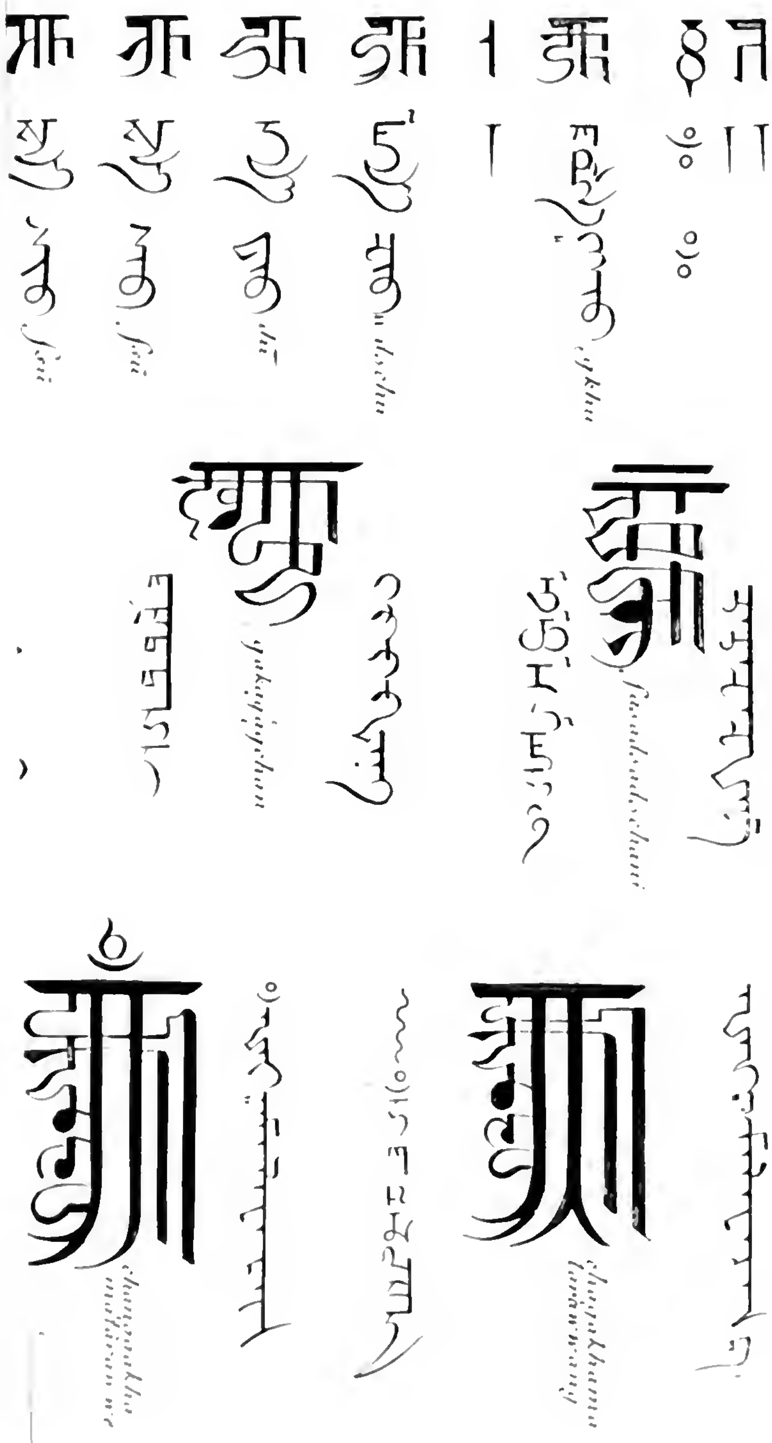

uwaw
tshaeh
khakh
tsaz
chaih
gkhaykh
ngag
ngak
ngay
ngas
ngatsch
ngads
ngadsch
tsadz
tsad
dzadz
tsatzsch
nad
nat
nad
natsch
mab
map
maw
matsch
lag
lak
lag
lagch
lang
las
latsch
lads
ladsch
lanj
ladz
lad
ladz
latzsch
lads
lad
lat
lad
latsch
lan
lab
lap
law
lawch
lam
tshag
khak


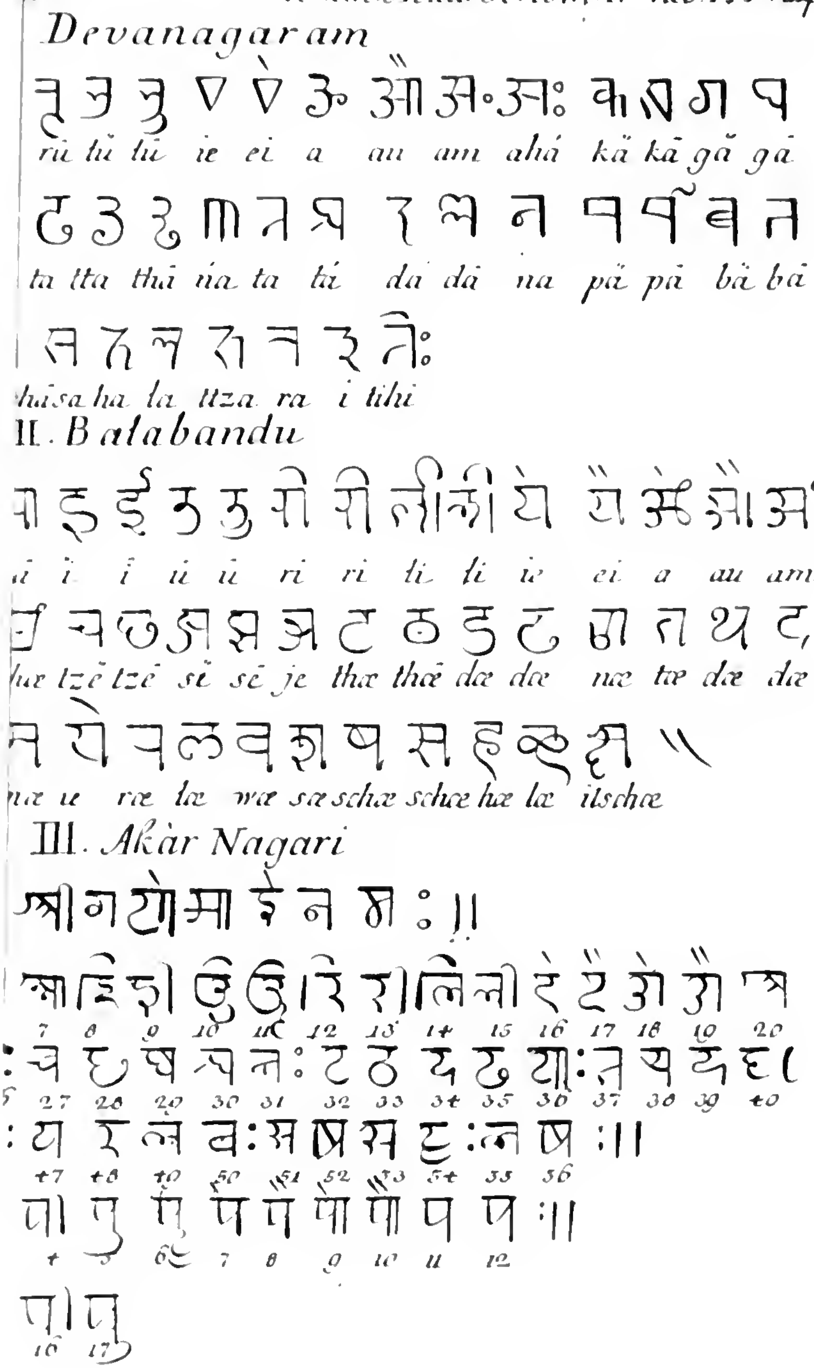
schak
schakch
schang
schas
schatsch
schad
schadsch
scham
schads
schad
schadz
schatzsch
schads
schad
schat
schad
schadch
scham
schab
schap
scham
schamch
schum
khug
khak
khag
khagch
khang
khas
khatsch
khads
khadsch
khani
khadz
khad
khadz
khatzsch
khad
khat
khad
khadch
kham
khab
khap
kham
khamch
kham
fsag
fsak
fsag
fsagch
fsang
fsas
fsatsch



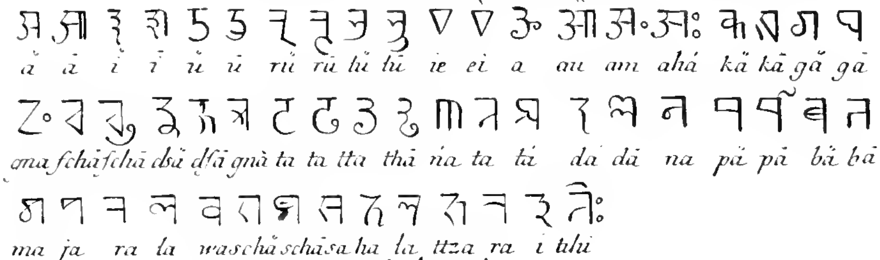



gawa
gopna
no
no
po
po
puma
puma
auma
e
su
e
pui
dza
dza
ai
au
gao
gao
gaog
dza
dzcha
dza
dsang
dsang
dsang
dsang
dsang
wa
wa
wa
dada
dada
du
papa
gassa
guwa
guwo
dsabo
dsabo
dsalo
schre
chre
chre

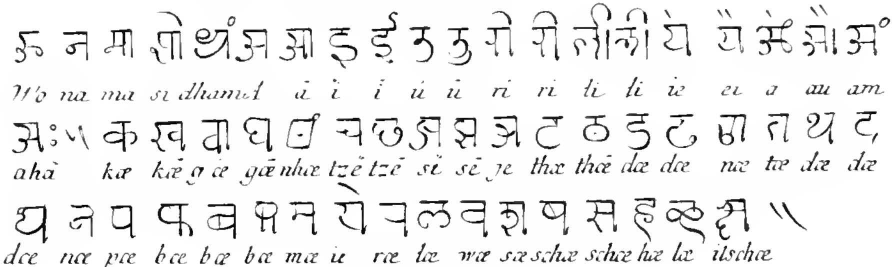



Devanagaram
rŭ lŭ lū ie ei a au am ahá kă kā gă gā
ta tta thā ńa ta tá da dā na pă pā bă bā
hisa ha la tza ra i tihi
II. Balabandu
a i ī u ū ri rī li lī ie ei a au am
hæ tzĕ tzē sĕ sē je thæ thǣ dæ dæ næ tæ dæ dæ
næ u ræ læ wæ sæ schæ schæ hæ læ itschæ
III. Akăr Nagari

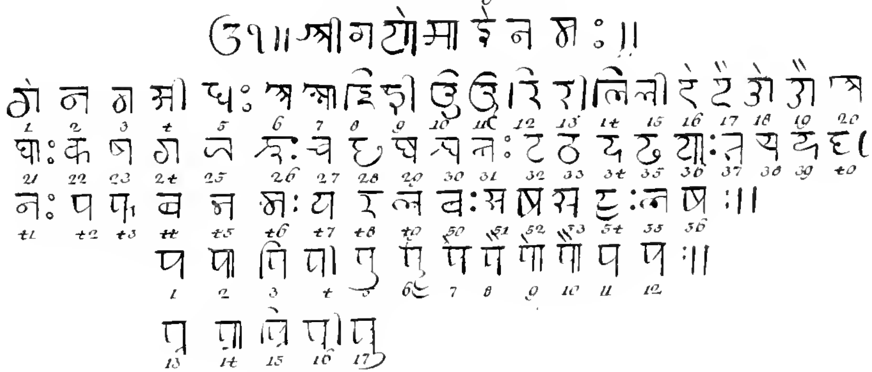
I. Devanagaram

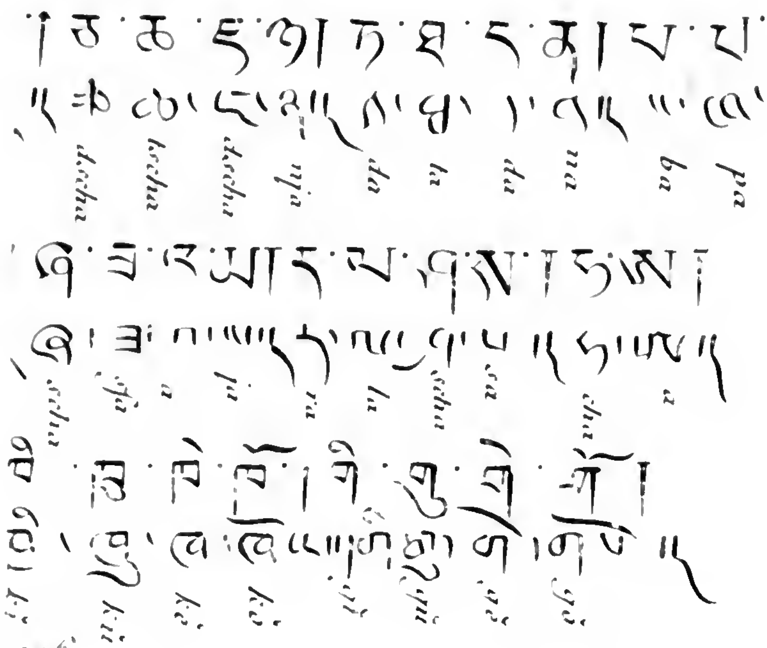


II. Balabandu



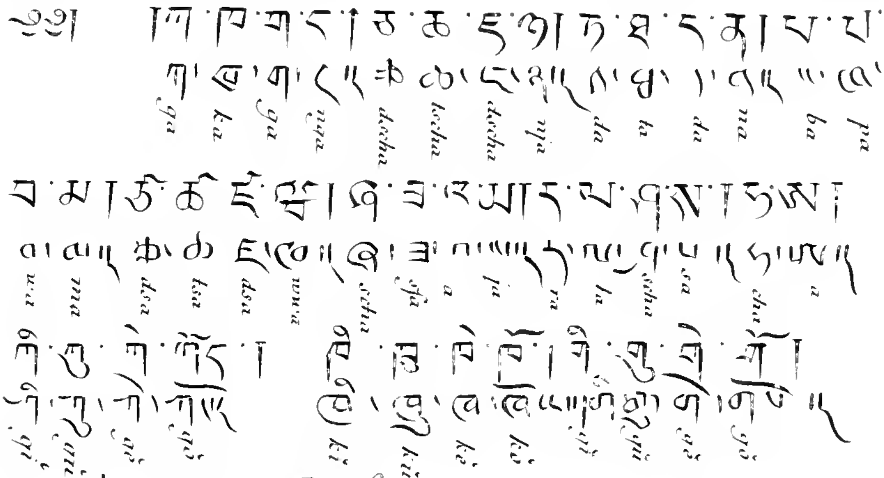
III. Akàr Nagari





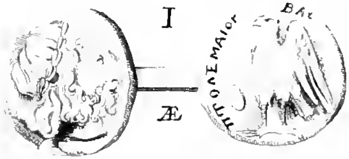
.246.

mment. Tom. IV. p. 260.



Ad Comment. Tom. IV. p. 246.

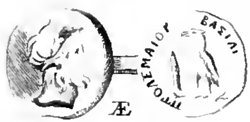
I



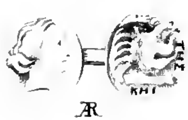
II

Ad Comment. Tom. IV. p. 260.

III



IV



V