COMPENDIO
MATHEMATICO.
TOMO III.

COMPENDIO
MATHEMATICO,

EN QUE SE CONTIENEN TODAS las materias mas principales de las Ciencias, que tratan de la Cantidad.

QUE COMPUSO

EL DOCTOR THOMAS VICENTE TOSCA, PRESBITERO DE LA Congregacion del Oratorio de San Felipe Neri de Valencia.

TERCERA IMPRESSION.

CORREGIDA, Y ENMENDADA DE MUCHOS yerros de Impressión, y Laminas, como lo verà el curioso.

TOMO III.

Que comprehende { TRIGONOMETRIA. SECCIONES CONICAS. MAQUINARIA.

CON PRIVILEGIO.

En Valencia: En la Imprenta de Joseph Garcia. Año 1757.

Se hallarà en Valencia en la Libreria de Manuel Cavero Cortès, Calle de Campaneros; y en Madrid en la de Don Angel Corradi, Calle de las Carretas.

APROBACION DEL SEÑOR DOCTOR MIGUEL SANCHEZ,
Presbitero de la Congregacion del Oratorio de San Felipe Neri, y Examinador Sinodal de este Arzobispado de Valencia.

DE comission del Señor Don Francisco Fernandez Maquilòn, Doctor en ambos Derechos; y por el Ilustrissimo, y Reverendissimo Señor Don Fray Antonio Folch de Cardona, por la gracia de Dios, y de la Santa Sede Apostolica, Arzobispo de Valencia, del Consejo de su Magestad, &c. Oficial, y Vicario General, he visto el tercero Tomo del Curso, ò Compendio Mathematico, que ha compuesto el R. P. Doctor Thomàs Vicente Tosca, Presbitero de nuestra Congregacion del Oratorio, y no he hallado en èl sentencia, ni palabra alguna que desdiga de la pureza de nuestra Santa Fè, y buenas costumbres; y siendo las materias que contiene de tanta utilidad para el bien publico, juzgo se puede, y conviene dar al Autor la licencia que solicita, (salvo semper, &c.) En la Real Casa de la Congregacion del Oratorio de Valencia à 22. de Julio de 1710.

Doct. Miguel Sanchez.

Imprimatur.
Doct. Maquilòn, Vic. Gen.

Imprimatur.
D. Thomàs Melgarejo, y Gamboa.

IN-

INDICE

DE LOS TRATADOS, LIBROS, y Capitulos, que en este Tomo tercero se contienen.

TRATADO VII.

DE LA TRIGONOMETRIA.

Cap.

TRA-

TRATADO VIII.

DE LAS TRES SECCIONES CONICAS, Elipse, Parabola, è Hiperbola.

TRATADO IX.

DE LA MAQUINARIA.

TRA-

FEE DE ERRATAS DEL TERCER TOMO.

PAg. 57. lin. 18. mſmos, lee miſmos. Pag. 189. lin. 26. hſta, lee haſta. Pag. 285. lin. 12. es, lee el. Pag. 341. lin. 13. OG, lee FG.

Certifico, como el tercer tomo del Compendio Mathematico, que compuſo el Dr. Don Thomàs Vicente Toſca, de la Congregacion del Oratorio de San Felipe Neri de Valencia, eſtà conforme con el antiguo impreſſo, que ſirve de original, ſi ſe tienen preſentes eſtas erratas. Madrid, y Agoſto 29. de 1757.

Dr. Don Manuel Gonzalez Ollero,
Correct. general por S. Mageſtad.

SE-

SERIE DE LOS TRATADOS.

TRATADO VII.

DE LA

TRIGONOMETRIA.

TRigonometria, ſegun la etimologia de ſu nombre, es lo miſmo, que *Medida de Triangulos*; y conſiderada ſegun toda eſta extenſion, comprehende todos los Theoremas, y Problemas, que demueſtran, y enſeñan el modo de medir los lados, y areas de los triangulos; pero en el tratado preſente, ſolo entendemos por *Trigonometria una ciencia que enſeña el modo de reſolver los triangulos.*

La *reſolucion de los triangulos*, conſiſte en una artificioſa inquiſicion de los lados, y angulos ignorados, deducida de los que ſe ſuponen conocidos; y porque la *Trigonometria* enſeña eſta reſolucion; ſe llama *Ciencia Analytica*, ò *Reſolutiva.*

Dos eſpecies hay de triangulos, unos *planos*, y *rectilineos*; otros *esfericos*, y *curvilineos*. Los triangulos *planos*, y *rectilineos*, ſon los que ſe forman con lineas rectas ſobre una ſuperficie plana. Los *esfericos*, y *curvilineos*, ſon los que en la ſuperficie de la esfera ſe forman con tres arcos de circulos maximos.

Conque la Trigonometria es en dos maneras, *plana*, ò *rectilinea*, y *esferica*, ò *curvilinea*. La primera enſeña la reſolucion de los triangulos planos; y la ſegunda, la de los esfericos.

La utilidad, y neceſsidad de la Trigonometria, es bien notoria, pues apenas ſe hallarà parte alguna en la Mathematica, que no neceſsite de ella, aſsi para facilitar ſus operaciones, como para aumentar ſus Problemas. Hallaſe ya en nueſtros tiempos en gran manera facil ſu exercicio: conſiſte èſte, como he dicho, en reſolver los triangulos, infiriendo por regla de tres el conocimiento de los angulos, y lados ignorados, de la noticia de los que ſe ſuponen dados, y conocidos, para lo qual ſe requiere neceſſariamente ſaber la proporcion que en qualquiera circulo tienen las cuerdas entre sì, y con el radio: porque como dixe en la *Geometri Element.* en el *corol.* de la *propoſ.* 1. del *libr.* 8. los arcos, y cuerdas de diferentes circulos tienen entre sì la miſma razon que los radios: conque ſabida en qualquiera circulo la razon que tienen las cuerdas con el radio, ſe inferirà en todos los demàs por regla de tres la magnitud de ſus cuerdas del conocimiento de otras, y por conſiguiente ſe conoceràn los arcos, y angulos que les correſponden; y porque los lados de qualquier triangulo, ſon cuerdas del circulo, que ſe le puede circunſcrivir por la *propoſ.* 5. del *lib.* 4. de Euclides, ſe ſabrà por dicha regla de tres qualquiera lado, y angulo, ſabida la proporcion que tienen las cuerdas entre sì, y con el radio.

Eſta proporcion ſe halla en las Tablas llamadas *Canon Trigonometrico*, inſtituidas para eſte fin, de las quales ſe valieron los Mathematicos, aunque con la fatiga de la multiplicacion, y particion de numeros muy crecidos, haſta el año 1614. en que Don Juan Nepero, Cavallero Eſcocès, Varon de Merchiſton, hallò el artificio noble de unos numeros, llamados *Logarithmos*, que ſubſtituidos en el canon trigonometrico, en lugar de los antiguos, han facilitado en tanto grado las operaciones, que ſe reſuelven en menos de una hora mas triangulos, que por el canon antiguo se resolvian en muchas, con lo que han conseguido las ciencias Mathematicas, la dicha que expressa el Obispo Caramuel, en la forma siguiente.

Metitur Terram, Mare, Ventos, Astra Mathesis,
Antiqua immenso tempore; nostra, brevi.

Este es en breve el exercicio, y progresso de la Trigonmetria, que con la brevedad, y claridad possible explico en este tratado.

LIBRO I.

DE LOS SENOS, TANGENTES, y Secantes; y del Canon Trigonometrico.

DEFINICIONES.

1 *Medida de qualquier angulo rectilineo, es el arco de circulo descrito del punto en que concurren las lineas, y comprehendido entre ellas.* Suponese qualquiera circulo dividido en 360. grados, cada grado en 60. minutos, cada minuto en 60. segundos, cada segundo en 60. tercios, y assi infinitamente: y por exemplo, si el arco CB (*fig.*1.) es de 42. grados, y 24. minutos, diremos, que el angulo CAB, es de 42. grad. y 24. minut. y assi de los demàs.

2 *Complemento de un angulo agudo, ù de un arco menor que el quadrante, es lo que le falta para igualarse con el quadrante, ò con el semicirculo. Complemento de un angulo obtuso, ò de un arco mayor que el quadrante, es lo que le falta para igualarse con el semicirculo.* Y assi el complemento del angulo agudo CAB, ù del arco CB, hasta el quadrante, es el arco CF; ò an-

angulo CAF, y hasta el semicirculo es el arco CD, ò angulo CAD; y el complemento del angulo obtuso DAC, ò arco DC, es el angulo CAB, ò el arco CB.

3 *Cuerda, ò subtensa de un arco, es la recta que junta las extremidades del arco*: como CG, es cuerda del arco CBG, porque junta sus extremidades; y como tambien junte las del arco CDG, es tambien cuerda de dicho arco.

4 *Seno recto, ò seno primero de un arco, ò angulo, es la perpendicular, que caè de la extremidad del arco, sobre el diametro, que passa por la otra extremidad*: como el seno recto, ò primero del angulo CAB, ù del arco CB, es la perpendicular CE, que cae de la extremidad C del arco sobre el diametro DB, que passa por el otro extremo B.

De que se infiere, que el seno recto, ò primero de un arco, es la mitad de la cuerda del arco duplo, porque (3. 3. Eucl.) CE es la mitad de CG, cuerda del arco CBG, duplo de CB. Tambien se infiere, que assi como CG es juntamente cuerda del arco CBG, y del arco CDG, assi tambien CE es juntamente seno recto, ò primero del arco CB, mitad de CBG, y del arco CFD, mitad de CDG: conque el seno recto de un arco, ò angulo, es juntamente seno recto, ò primero del complemento de dicho arco, ò angulo al semicirculo.

Adviertase, que siempre que se halle absolutamente este nombre seno, se ha de entender el seno recto, ò primero.

5 *Seno segundo, ò seno del complemento de un arco, ò angulo es el seno recto, ò primero del complemento de dicho arco, ò angulo*: como CI, que es seno recto, ò primero del arco FC, es seno segundo, ù del complemento, respecto del arco CB, y se llama *seno del complemento de CB*, por ser seno primero del arco FC, que es complemento de BC, hasta el quadrante. El seno segundo de un angulo obtuso, ò arco mayor que el quadrante, es el mismo seno recto, ò primero del arco en que excede al quadrante; y assi el arco DFC, cuyo seno primero es CE, tendrà por seno segundo la IC, que es seno recto del arco FC, en que DFC excede al quadrante DF.

6 *Seno todo, ò total, es el seno recto del quadrante, ò arco de 90. grad. el qual es el mismo radio.* Y assi el radio FA es seno

to-

total, por ser seno del quadrante FB. El seno total, es el mayor de todos los senos rectos, porque los arcos mayores que el quadrante, tienen su seno recto menor, que el radio, como consta de lo dicho arriba.

7 *Seno verso, ò sagita, es la porcion del diametro, comprehendida entre el seno recto de un arco, y el mismo arco.* Y assi EB es el seno verso del arco CB: assimismo ED, es el seno verso del arco CFD. De que se colige, que el seno verso de un arco menor que el quadrante, ù de un angulo agudo, es lo que sobra del radio, si de èste se quita el seno segundo: como si del radio AB se quita IC, ò AE su igual, el residuo EB es el seno verso del arco CB; pero el seno verso del angulo obtuso DAC, ù del arco CD, es igual à la suma del radio DA, con AE, seno segundo de dicho arco.

8. *Tangente, generalmente es qualquiera linea, que toca al circulo en un punto, y es perpendicular à la extremidad del radio.* (16. 3. *Euclid.*)

9 *Tangente especial de un arco, es la recta que toca al circulo en la extremidad de aquel arco, y se termina en el concurso de otra recta, tirada del centro por la otra extremidad del mismo arco*: como la recta BH, es tangente del arco CB, y èsta se llama *tangente primera*, à diferencia de la tangente segunda. *Tangente segunda* de un arco menor que el quadrante, es la tangente primera del complemento del dicho arco al quadrante; y assi la recta FL es la tangente segunda del arco CB, porque es tangente primera del arco FC, complemento del arco BC, hasta el quadrante BF.

10 *Secante de un arco, es la recta, que saliendo del centro del circulo, passa por la extremidad de dicho arco, hasta encontrar con la tangente. Secante primera de un arco, es la que se termina en su tangente primera. Y secante segunda, la que se termina en la tangente segunda del mismo arco*: y assi AH, es la secante primera del arco BC, porque se termina en BH, tangente primera de dicho arco; y AL es secante segunda, por terminarse en FL, tangente segunda del mismo arco.

Adviertase, que los angulos obtusos, y arcos mayores que el quadrante, no tienen otras tangentes, ni secantes, que las de sus complementos al semicirculo; y assi, la tangente primera del arco DFC, es HB; y su tangente se-

segunda es FL : y assimismo, la secante primera de dicho arco, es AH; y la secante segunda, es AL.

CAPITULO I.

DE LOS FUNDAMENTOS, Y COMPOSICION DEL CANON de los Senos.

EL Canon Trigonometrico se compone de los senos, tangentes, y secantes de todos los arcos del quadrante, desde el arco de un minuto, hasta el de 90. grados. Expressanse en las partes del radio, que proporcionalmente tocan à cada uno; porque como el radio, ò seno total sea el principal, se supone dividido en 10000000. ò mas partes; y se busca quantas de estas partes tocan à cada seno, tangente, y secante, con las quales se ordenan las tablas. Esta cantidad de los senos, se halla con las proposiciones siguientes.

PROP. I. Problema.

Conocida la cuerda de un arco, hallar la cuerda del arco restante, hasta el semicirculo. (*fig.* 2.)

SEa conocida la cuerda AB; esto es, sepase quantas partes tiene del diametro CA; y se busca quantas de las dichas partes le caben à la cuerda BC. *Operacion.* Quadrese CA, multiplicando su numero por sì mismo. Quadrese assimismo AB: restese el quadrado de AB, del quadrado de CA, y el residuo serà el quadrado de BC; y su raiz quadrada serà la cuerda BC.

Demonstracion. El angulo B en el semicirculo es recto: (31.3.Eucl.) luego (47.1.) el quadrado de AC, es igual à los quadrados de AB, BC: luego, restando el quadrado de AB, del quadrado de AC, el residuo serà el quadrado de BC, cuya raiz es el lado BC.

PROP.

PROP. II. Problema.

Dado el ſeno primero de un arco, hallar el ſeno ſegundo, ù del complemento del miſmo arco. (*fig.* 3.)

DAdo CB, ſeno primero del arco AB, ſe buſca FB, ſeno ſegundo del miſmo arco, ù del complemento BE.

Operacion. Reſteſe el quadrado de CB, del quadrado del radio DB, y el reſiduo ſerà el quadrado de DC, ù de FB ſu igual; y ſu raiz quadrada ſerà el ſeno FB. Demueſtraſe como la antecedente, por ſer recto el angulo C.

PROP. III. Problema.

Dado el ſeno de un arco, hallar el ſeno del arco duplo, y del ſubduplo. (*fig.* 4.)

COnocida la recta CF, ſeno recto del arco CG, ſe buſca DE, ſeno recto del arco DC, duplo de CG.

Operacion. Buſqueſe por la antecedente el ſeno ſegundo del arco CG, que es BF; y hagaſe una regla de tres: como el radio BC, al ſeno ſegundo BF, aſsi toda la cuerda CD, que es el ſeno CF duplicado, à la recta DE, que es el ſeno del arco DGC, que ſe deſea.

Demonſtr. Los triangulos BFC, EDC, ſon proporcionales, por tener los angulos E, F, rectos, y el angulo C comun: luego ſerà BC con BF, como CD con DE.

Conocido DE, ſeno del arco DGC, ſe conocerà el ſeno CF del arco CG, mitad de DGC; porque conocido el ſeno DE, ſe ſabe (2) el ſeno ſegundo BE; y reſtando èſte del radio BC, ſe conoce la EC; y ſiendo (47.1.) los quadrados de DE, y EC iguales al quadrado de DC, ſi ſe ſuman dichos quadrados, y de la ſuma ſe ſaca la raiz quadrada, ſe ſabrà la cuerda DC, cuya mitad ſerà el ſeno FC.

COROLARIO.

EL ſeno de la mitad de un arco, es medio proporcional entre el ſemiradio, y el ſeno verſo de todo el arco; eſto es, CF, ſeno del arco CG, mitad de CGD, es medio proporcional entre la mitad del

del radio BC, y EC, ſeno verſo de todo el arco CGD. La razon es, porque ſiendo proporcionales los triangulos BTC, DEC, ſerà el radio BC à CD, como CF à EC: y ſiendo BC à CD, como la mitad de BC à la mitad de CD, ſerà la mitad del radio BC à la mitad de CD, eſto es, à CF, como CF à CE.

PROP. IV. Problema.

Dados los ſenos de dos arcos, hallar el ſeno del agregado de dichos arcos. (fig. 5.)

SUponenſe conocidos BG, ſeno del arco AB; y CI, ſeno del arco BC: y ſe buſca el ſeno CD, que lo es del arco CA, compueſto de los dos AB, y BC. Tireſe la IH, paralela à BG; y la EI, paralela à FA. *Operacion.* Halleſe (2.) la FI, ſeno ſegundo del arco CB, y hagaſe una regla de tres: como el radio FB al ſeno ſegundo FI, aſsi el ſeno BG al quarto termino, y ſaldrà la recta IH. Hecho eſto, buſqueſe (2.) FG, ſeno ſegundo del arco BA, y ſe formarà otra regla de tres: como el radio FB al ſeno ſegundo FG, aſsi CI, ſeno primero de CB, à la linea CE: ſumeſe CE con IH, ò ED ſu igual, y ſerà la ſuma toda la recta CD, ſeno del arco AC.

Demonſtr. Los triangulos FOD, FHI, FGB, ſon equiangulos, por ſer rectangulos, y tener el angulo F comun. Tambien los triangulos FOD, COI, ſon equiangulos, por ſer rectangulos en D, y en I, y tener los angulos en O verticales iguales: (15. 1.) aſsimiſmo ſon equiangulos EIC, OIC: (8.6. Eucl.) luego los triangulos EIC, FHI, FGB, ſon equiangulos: luego (4. 6. Eucl.) ſerà FB radio, à FI ſeno ſegundo de CB, como BG, ſeno primero de BA, à IH, ò ED ſu igual: y aſsimiſmo como FB radio, à FG, ſeno ſegundo de BA: aſsi CI, ſeno primero de CB, à CE, que añadida à ED, hace todo el ſeno CD, que ſe buſcava.

PROP. V. Problema.

Dados los ſenos de dos arcos, hallar el ſeno de la diferencia de los miſmos arcos. (fig. 5.)

SEan conocidos BG, ſeno del arco AB; y CD, ſeno del arco AC; y ſe buſca el ſeno CI del arco CB, que es la di-

diferencia de los arcos AC, AB. *Operacion.* Hallese (2) FG, seno segundo del arco AB; y FD, seno segundo del arco AC, y hagase esta regla de tres: como FG, seno segundo del arco AB, à BG, seno primero del mismo arco, assi FD, seno segundo del arco AC, à DO: restese DO de DC, seno del arco AC, y el residuo serà la linea OC. Hagase aora otra regla de tres: como el radio FB, à FG, seno segundo del arco AB, assi OC, à CI, seno primero del arco CB, que se buscava. Consta de lo dicho en la prop. anteced.

PROP. VI. Theorema.

Los senos de los arcos muy pequeños, tienen entre sì sensiblemente la misma razon que los arcos.

SUpongamos dos arcos, el uno de un minuto, y el otro de un tercio de minuto. Digo, que por ser tan pequeños, tienen sensiblemente sus senos la misma razon que dichos arcos; esto es, que assi como el arco de un minuto es triplo del arco que vale un tercio de minuto, assi el seno de aquel serà, aunque no en todo rigor, pero sensiblemente, triplo del seno de èste. La razon es, porque al principio del quàdrante la circunferencia del circulo es perpendicular al diametro; y siendo tambien los senos perpendiculares al diametro, y tan poco distantes del arco por su pequeñèz, coinciden sensiblemente con la particula de arco, de quien son senos: luego sensiblemente tendràn la misma razon que los arcos.

PROP. VII. Theorema.

La cuerda de 60. grados es igual al radio.

LA razon es clara, porque todo el circulo consta de 360. grados, cuya sexta parte son 60. grados, y por consiguiente, la cuerda de 60. grados, es el lado del exagono; èste es igual al radio: (*corolar. de la prop.* 14. *lib.* 3. *de la Geom. Pract.*) luego la cuerda de 60. grados es igual al radio.

Estas proposiciones son bastantes para fabricar la tabla de los senos,

senos, como verèmos en la propos. siguiente: à mas de ellas hay otras que sirven para disminuir el trabajo; pero como las tablas estèn ya fabricadas, bastan las sobredichas para que se entienda el fundamento en que consisten, que es unicamente lo que se pretende.

PROP. VIII. Problema.

Fabricar por las reglas sobredichas la Tabla de los senos.

1 SUpongase el seno total, ò el radio dividido en un cierto numero de partes, que sea crecido, como en 10000000. este (7.) es igual à la cuerda de 60. grados: luego su mitad es el seno de 30. grados.

2 Sabido el seno de 30. grad. se sabrà (3.) el seno de la mitad de dicho arco, que es de 15. grad. y sabido èste, se sacarà el de 7. grad. 30. min. que es el de su mitad: luego el de 3. grad. 45. min. y assi consecutivamente se iràn hallando los senos de los arcos subduplos, hasta llegar al seno del arco de 52. seg. 44. ter. 3. quart. 45. quint.

3 Hecho esto, se buscarà el seno de un minuto en esta forma; porque el ultimo seno que se ha hallado de 25. seg. 44. ter. &c. es muy pequeño, como tambien el seno de un minuto, tendràn entre sì (6.) la misma razon que sus arcos. Reduzgase pues el arco de 52. seg. 44. ter. 3. quar. 45. quint. à quintos, que es la ultima especie, y seràn 11390625. quintos. Reduzgase tambien à quintos un minuto, y seràn 12960000. quintos; y se harà una regla de tres: como 11390625. à 12960000. assi el seno que se hallò de los 52. seg. 44. ter. 3. quar. 45. quin. al seno de un minuto, y se tendrà este seno.

4 Hallado el seno de un minuto, y los arriba dichos, se hallaràn todos los intermedios que faltan hasta 30. grados, porque hallado el seno de un minuto, se hallarà (3.) el de dos minutos; y assimismo, hallado el seno de 2. min. se hallarà el de 4. minutos: luego el de 8. min. 16. min. &c. y de los arcos duplos, como se siguen hasta el seno de 17. grad. 4. min.

5 Los demàs intermedios. se hallaràn por la *propos.* 4. con este orden: Dado el seno de 1. min. y el seno de 2. min. se

se hallarà el seno de 3. min. Dado el seno de 4. min. y el seno de 1. min. se hallarà el seno de 5. y assi de los demàs, hasta que se hayan hallado todos, hasta llegar al de 30. grados.

6. Hecho esto, se hallarà el seno de 45. grados, ù del medio quadrante en esta forma: Dupliquese el quadrado del radio DA, (*fig.* 1.) y este duplo serà el quadrado de DF, (47.1.) que es la cuerda de 90. grados: saquese la raiz quadrada del mismo duplo, y se sabrà la DF, cuya mitad serà la DK, seno de los 45. grados; y prosiguiendo con el mismo artificio, que antes se dixo num. 4. y 5. se sacaràn los senos de todos los arcos que hay entre 30. y 45. grados.

7 Ultimamente, los senos de los demàs arcos hasta 90. grados, se hallaràn por la *propos.* 2. por ser los senos segundos, ù de los complementos al quadrante, de los que se han hallado.

CAPITULO II.

DE LOS FUNDAMENTOS, Y COMPOSICION DEL CANON de las Tangentes, y Secantes.

PROP. IX. Theorema.

Como el seno segundo AE (fig. 1.) del arco BC, al seno primero EC del mismo arco, assi el radio AB, à la Tangente BH.

D*emonstracion.* En el triangulo ABH, es el seno EC paralelo à la tangente BH: luego (2.6.Eucl.) serà AE à EC, como AB à BH.

De aqui se colige, que para hallar todas las tangentes, se formarà una regla de tres: como el seno segundo de un arco, al seno primero del mismo arco, assi el radio à la tangente del mismo.

PROP.

PROP. X. Theorema.

El radio es medio proporcional entre el ſeno ſegundo de un arco, y la Secante primera del miſmo arco; y entre el ſeno primero, y Secante ſegunda; y entre la tangente primera, y ſegunda del miſmo arco. (fig. 1.)

DEmonſtr. Por ſer EC paralela à BH, ſerà (2. 6.) como el ſeno ſegundo IC, ò ſu igual AE, al radio AB; aſsi el radio AC, à la ſecante AH. De la miſma ſuerte el ſeno primero EC, ò AI, ſu igual, es al radio AF, como el radio AC, à la ſecante AL. Aſsimiſmo es la tangente primera BH, al radio BA, como el radio AF, à la tangente ſegunda FL: luego el radio es medio proporcional entre los terminos arriba dichos.

Coligeſe de aqui, que ſabido el ſeno primero, y ſegundo de un arco, ſe ſabràn las ſecantes primera, y ſegunda del miſmo arco, formando una regla de tres: como el ſeno ſegundo del radio, aſsi el radio à la ſecante primera de dicho arco; y tambien, como el ſeno primero de un arco al radio, aſsi el radio à la ſecante ſegunda. Y con eſto, y lo dicho en la prop. paſſada, ſe formaràn las tablas de las tangentes, y ſecantes.

LIBRO II.

DE LOS LOGARITHMOS.

LA reſolucion de los triangulos, que es el unico fin de la Trigonometria, ſe executa por la regla de tres, tomando del Canon Trigonometrico los ſenos, ò tangentes de los terminos conocidos, y multiplicando el ſegundo por el tercero, y partiendo el producto por el primero. Eſtas operaciones no pueden dexar de ſer muy canſadas, por exercitarſe en numeros tan crecidos: con todo eſſo uſaron de ellas los Mathematicos, haſta que hallados los

Lo-

Logarithmos por D. Juan Nepero, y perficionados por Enrique Brixio, y Adriano Ulac, se introduxeron en el canon trigonometrico, en lugar de los numeros sobredichos, con lo que se facilitaron en gran manera las operaciones: porque sola la suma de los Logarithmos, hace lo que en los otros numeros hacia la multiplicacion; y la resta, lo que la particion: lo qual, no solo evita la prolixidad, si que assegura mas el acierto. La naturaleza, propiedades, fabrica, y uso de los Logarithmos, serà la materia de este libro.

DEFINICION UNICA.

Logarithmos son unos numeros artificiales, que proceden en progressión Arithmetica, substituidos, y correspondientes à otros, que proceden en progression Geometrica.

Explicacion. Sea la serie A, compuesta de numeros geometricamente proporcionales, que procedan en qualquiera proporcion: à su lado haya otra serie de otros tantos numeros arithmeticamente proporcionales; esto es, que se excedan en igual excesso qualquiera que sea, como en la serie B, que se exceden en la unidad; ò en la serie C, que se exceden en 2. ò en la D en 3. &c. Los numeros de qualquiera de las progressiones B, C, D, &c. son logarithmos de los que componen la serie geometrica A, cada uno de su correspondiente: como el 6. de la serie B, es logarithmo del 32. y assimismo el 12. de la serie C, y el 16. de la D, son tambien logarithmos del 32. y assi de los demàs.

De aqui se colige poderse escoger para logarithmos qualquiera progression arithmetica; como tambien para numeros geometricos se puede elegir qualquiera serie geometrica, pero no con igual conveniencia, como se verà despues.

A.	B.	C.	D.
1	1	2	1
2	2	4	4
4	3	6	7
8	4	8	10
16	5	10	13
32	6	12	16
64	7	14	19

CA-

CAPITULO I.

DE LA NATURALEZA, Y PROPIEDADES DE LOS Logarithmos.

LA naturaleza, y propiedades de los logarithmos, se funda en las propiedades de las progressiones arithmetica, y geometrica, como se verà en las proposiciones siguientes.

PROP. I. Theorema.

En qualquiera progression Arithmetica, la suma del primero, y ultimo termino, es igual à la suma de otros qualesquiera dos terminos igualmente distantes de los extremos; y es dupla del termino medio.

EXplicase en la siguiente progression arithmetica.

4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

La suma de 4. y 20. que son los extremos, es 24. Digo, que tambien la suma de 6. y 18. la de 8. y 16. la de 10. y 14. y el duplo de 12. termino medio, ha de ser 24. como queda demonstrado en la Arithm. Infer. *lib.* 5. *prop.* 2. *y* 3.

COROLARIOS.

1 *DE lo dicho se colige, que las sumas de qualesquiera dos terminos, igualmente distantes de los extremos, son iguales entre sì; y al duplo del termino que està en medio; porque siendo todas iguales à la suma de los extremos, lo han de ser tambien entre sì.*

2 *En quatro cantidades arithmeticamente proporcionales, aunque no sean continuas, la suma de la primera, y quarta, es igual à la suma de la segunda, y tercera; conque si de la suma de la segunda, y tercera se quita la primera, el residuo serà la cantidad quarta.* Exemplo. *Sean las quatro cantidades arithmeticamente proporcionales* 4. 6. :: 18. 20. *la suma de* 6. *y* 18. *es* 24. *como tambien la suma de* 4. *y* 20. *y si de* 24. *se quita el* 4. *quedan* 20. *que es el quarto termino. Consta de lo dicho.*

En

3 *En tres cantidades arithmeticamente proporcionales, la suma de la primera, y tercera, es igual al duplo de la segunda: conque si del duplo de la segunda se quita la primera, restarà la tercera, como tambien se colige de lo dicho.*

PROP. II. Theorema.

En qualquiera progression Geometrica, el producto del primero, y ultimo termino, es igual al producto de qualesquiera otros dos terminos igualmente distantes de los extremos, y al producto del termino medio por sì mismo.

EXplicase en la siguiente progression geometrica.
3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768.
El producto de 3. por 768. que son los extremos, es 2304. Digo, que tambien el producto de 6. por 384. y el de 12. por 192. &c. serà 2304. y el mismo saldrà multiplicando 48. que es el termino que està en medio, por sì mismo. Queda demonstrado en la Arithm. Infer. *lib.* 5. *prop.* 21. *y* 22.

COROLARIOS.

1 *DE lo dicho se infiere, que los productos de los terminos igualmente distantes de los extremos, son iguales entre sì, como tambien al producto del termino medio por sì mismo, por ser todos iguales al producto de los extremos.*

2 *En quatro cantidades geometricamente proporcionales, el producto de la primera, y quarta, es igual al producto de la segunda, y tercera; y por consiguiente, si el producto de la segunda, y tercera se parte por la primera, el quociente serà la cantidad quarta. Consta de lo dicho, y se demonstrò en la Arithm. Infer. lib. 4. prop. 2. y 4.*

3 *En tres cantidades geometricamente proporcionales, el producto de la primera, y tercera, es igual al producto de la segunda por si misma: conque si este producto se parte por la primera, saldrà en el quociente la cantidad tercera. Consta tambien de lo dicho, y se demonstrò en la Arithm. Infer. lib. 4. prop. 3. y 4.*

PROP.

PROP. III. Theorema.

En quatro numeros geometricamente proporcionales, la ſuma de los Logarithmos correſpondientes à los medios, es igual à la ſuma de los Logarithmos correſpondientes à los extremos.

A.	B. ::	C.	D.
4.	6. ::	8.	12.
2.	3.	4.	5.
E.	F.	G.	H.

LOs quatro numeros A. B. C. D. ſean geometricamente proporcionales, ſea, ò no ſea ſu proporcion continua: y ſean E. F. G. H. los logarithmos correſpondientes à los ſobredichos numeros. Digo, que la ſuma de F. y G. que ſon logarithmos de los medios, es igual à la ſuma de E. y H. que lo ſon de los extremos.

Demonſtr. Los logarithmos ſon unos numeros arithmeticamente proporcionales ſubſtituidos, y correſpondientes à los geometricos; pero en los numeros arithmeticamente proporcionales, la ſuma de los medios es igual à la de los extremos: (*Corolar.* 2. *prop.* 1.) luego lo miſmo ſerà en los ſobredichos logarithmos.

COROLARIO.

DE lo dicho ſe ſigue, que ſi de la ſuma de los logarithmos medios F, *y* G, *ſe quita el primero* E, *el reſiduo ſerà el logarithmo* H, *del quarto termino.*

PROP. IV. Theorema.

En tres numeros geometricamente proporcionales, el duplo del logarithmo correſpondiente al medio, es igual à la ſuma de los logarithmos correſpondientes à los extremos.

DEmonſtr. Los logarithmos ſon numeros arithmeticamente proporcionales, ſubſtituidos por los geometricamente proporcionales: pero (*corolar.* 3. *prop.* 1.) en los numeros arithmeticamente proporcionales, el duplo

del

del medio es igual à la ſuma de los extremos: luego tambien en los logarithmos ſobredichos.

COROLARIO.

EN tres numeros geometricamente proporcionales, ſi del duplo del logarithmo del medio ſe quita el logarithmo del primero, el reſiduo ſerà el logarithmo del quarto.

PROP. V. Theorema.

Si multiplicandoſe dos numeros, produxeren otro numero, la ſuma de los logarithmos de los numeros multiplicados, ſerà igual à la ſuma del logarithmo del producto, y del logarithmo de la unidad.

EXplicacion. Los dos numeros A, y B, multiplicandoſe entre sì, producen al numero C. Digo, que la ſuma de los logarithmos de A, y B, es igual à la ſuma del logarithmo de C, y del logarithmo de la unidad. Añadaſe antes la unidad D.

D.	A.	B.	C.
1.	4.	6.	24.

Demonſtr. Como ſe dixo en la *Arith. Infer. lib.* 1. *cap.* 6. el producto C incluye tantas veces al numero B, quantas el numero A incluye la unidad D: luego ſon proporcionales D à A, como B à C: luego los logarithmos de A, y B ſumados, ſon iguales à la ſuma de los logarithmos de los extremos, eſto es, al logarithmo de la unidad D, y al de C juntos.

COROLARIO.

DE lo dicho ſe infiere, que ſi en una ſerie de logarithmos, el logarithmo de la unidad fuere zero, la ſuma de los logarithmos correſpondientes à los numeros multiplicados, ſerà igual al logarithmo del producto; y por conſiguiente, la ſuma ſola equivaldrà à la multiplicacion de los numeros geometricos. La razon es, porque, como hemos demonſtrado, la ſuma de los logarithmos de los numeros multiplicados es igual al logarithmo del producto, y al de la unidad: luego ſiendo eſte logarithmo zero, ſerà dicha ſuma igual al logarithmo del producto. Lo que no ſucederà ſiendo numero el logarithmo de la unidad, porque ſerà meneſter reſtarle de la ſuma de los logarithmos de los multiplicados, para tener el loga-

rithmo del producto. Por la misma razon la resta sola de estos logarithmos, equivaldrà à la particion.

PROP. VI. Theorema.

Si un numero se multiplica por sì mismo, el duplo de su logarithmo serà igual à la suma del logarithmo del producto, ò quadrado, y del logarithmo de la unidad.

EXplicacion. El numero S, multiplicandole por sì mismo, produce á su quadrado M. Digo, que el logarithmo de S, duplicado, serà igual à la suma del logarithmo de M, y del logarithmo de la unidad. Añadase antes la unidad N.

N.	S.	M.
1.	4.	16.

Demonstr. Segun lo dicho en la *Arith. Infer. lib.* 1. *cap.* 6. el producto M incluye al numero S tantas veces, quantas el numero S incluye la unidad: luego son proporcionales N à S, como S à M: luego (4.) el duplo del logarithmo de S, es igual à la suma de los logarithmos de N. y M.

COROLARIO.

D*E lo dicho se infiere, que si en una serie de logarithmos, el logarithmo de la unidad fuere el zero, el logarithmo de la raiz duplicado, serà el logarithmo del quadrado; y la mitad de este logarithmo, serà el logarithmo de la raiz, por la razon dicha en el corol. de la propos. passada: lo que no podrà ser, siendo numero el logarithmo de la unidad; porque para tener el logarithmo del quadrado, se havrà de restar el logarithmo de la unidad, del duplo del logarithmo de la raiz: como para hallar el logarithmo de la raiz, se havrà de añadir al logarithmo del quadrado, el logarithmo de la unidad; y la mitad de esta suma serà el logarithmo de la raiz.*

PROP. VII. Theorema.

El Logarithmo de la raiz triplicado, es igual al Logarithmo del cubo, y al duplo Logarithmo de la unidad.

EXplicacion. Sea la raiz S, y su cubo sea Q. Digo, que el logarithmo de S, triplicado, es igual al logarithmo del cubo Q, y al logarithmo de la unidad duplicado. Sea

N.	S.	M.	Q.
1.	4.	16.	64.

M

M el quadrado de S; y añadase antes la unidad N.

Demonstr. La raiz S, multiplicando al quadrado M, produce al cubo Q: luego (5.) la suma de los logarithmos de S, y M, es igual à la suma de los logarithmos de N, y Q. Y siendo (6.) el logarithmo de M, con el logarithmo de N, igual à dos veces el logarithmo de S, seràn el logarithmo de S, juntamente con el de M, y el de la unidad N, iguales à tres logarithmos de S: luego tres logarithmos de S, son iguales à los logarithmos de S, y M, y à un logarithmo de la unidad N; pero los logarithmos de S, y M, son iguales à los logarithmos de N, y Q: luego tres logarithmos de S son iguales à los logarithmos de N, y Q, mas un logarithmo de N: luego el triplo del logarithmo de la raiz S, es igual al logarithmo del cubo Q, y à dos logarithmos de la unidad N.

COROLARIOS.

1 *SI en una serie de logarithmos, el de la unidad fuere zero, el logarithmo del cubo es justamente el triplo del logarithmo de la raiz; y el tercio de el logarithmo del cubo, serà el logarithmo de la raiz: lo que no podrà ser, si el logarithmo de la unidad fuere numero, como consta de lo dicho.*

2 *El quadruplo del logarithmo de la raiz, juntamente con el triplo del logarithmo de la unidad, serà el logarithmo del quadrado-quadrado, ò quarta potestad; y assi consiguientemente de las demàs potestades infinitamente: y si el logarithmo de la unidad fuere zero, solo el quadruplo logarithmo de la raiz serà el del quadrado-quadrado; y el quintuplo del logarithmo de la raiz serà el de la quinta potestad; y assi de las demàs.*

PROP. VIII. Theorema.

Explicanse las especies de Logarithmos.

LOs logarithmos pueden ser *directos*, ò *retrogrados*. *Directos*, son los que siguen el mismo tenor, y orden de los terminos geometricos à quien corresponden; esto es, que crecen, y se aumentan quando crecen los terminos de la progressión geometrica. *Retrogrados*, son los que no guardan el orden de los terminos geometricos, si que quando èstos se aumentan, los logarithmos se disminuyen; y al contrario: conque si à una progression geometrica, cuyos terminos se van aumentando, le corresponde otra progression arithmetica, que tambien se va aumentando, los terminos de esta progression seràn logarithmos directos; pero si esta progression arithmetica fuere decrecente, de suerte, que sus terminos se vayan disminuyendo, quando los de la geometrica se van aumentando, sus terminos seràn logarithmos retrogrados.

PROP. IX. Theorema.

Determinase qual de estas dos especies de Logarithmos sea la mejor.

DIgo ser indubitable, que los logarithmos directos son mejores, y mas apreciables que los retrogrados: porque es cierto, que la serie de los terminos geometricos puede aumentarse infinitamente; y haviendo de ir acompañando la serie de los logarithmos à la de los geometricos, siendo èstos retrogrados, havràn de irse disminuyendo, y decreciendo infinitamente: de que se sigue llegarà à disminuirse de suerte, que sus terminos seràn menos que nada, ò menos que el zero, y se havràn de expressar con este señal —, que significa *menos*, como dixe en el tratado de la Algebra, donde les dimos el nombre de *numeros falsos*, ò *negativos*.

De aqui se sigue, que aunque estos logarithmos tengan las mismas propiedades que se han demonstrado en las proposiciones passadas; pero son mas dificultosas, y expuestas à error las operaciones que con ellos se exercitan: porque no dexa de causar dificultad, singularmente à los poco exercitados en la logistica de la Algebra, el sumar, y restar los terminos que llevan los signos +, y —, donde es facil equivocar la suma con la resta: por lo que juzgan comunmente los Autores, no ser conveniente usar de estos logarithmos retrogrados, ni aplicarles al canon trigonometrico. Llegò à reconocer este inconveniente Don Juan Nepero despues de haver trabajado sus Tablas con logarithmos retrogrados, el qual por hallarse ya en edad cansada, no se pudo aplicar à trabajarles de nuevo: lo que executaron despues Enrique Brixio, y Adriano Ulac, con acceptacion comun de los Mathematicos.

PROP. X. Theorema.

De las progressiones Geometricas, la mejor para el intento presente, es la que empieza por la unidad, y continùa sus terminos en proporcion decupla; y de las progressiones Arithmeticas, la que empieza por el zero, y sus terminos se exceden en la unidad, y algunos zeros.

HAviendo determinado en la proposicion passada què progressiones sean mejores para este intento, en quanto à la especie, conviene determinar aora las mas proporcionadas en quanto al individuo. Digo pues lo primero, que de infinitas progressiones geometricas, que se pueden elegir para el caso presente, la mejor es la que tiene por primer termino la unidad; y de las arithmeticas, la que empieza por el zero. La razon es, porque como consta del corolar. de la *propos.* 5. en solas estas progressiones equivale la suma sola à la multiplicacion, y la resta sola à la particion, por la razon alli dicha: luego con estos logarithmos seràn mas faciles, y breves las operaciones.

Digo lo segundo, que de las infinitas progressiones geometricas, que empiezan de la unidad, es mejor la que procede en proporcion decupla de sus terminos, como 1. 10. 100. &c. y de las infinitas arithmeticas, que proceden del zero, la mejor de todas para el intento es aquella, cuyos terminos se van excediendo en la unidad, y algunos zeros: la razon es la mayor sencillèz, y claridad que consigo llevan estas progressiones. Añadense à la Arithmetica los zeros, para que proporcionalmente se puedan hallar los logarithmos correspondientes à los terminos intermedios de la progression geometrica.

Ex-

Explicome en las dos progressiones arithmetica, y geometrica siguientes.

Progress. Geometr.	Terminos.	Progress. Arithm.
1	1	0.00000000
10	2	1.00000000
100	3	2.00000000
1000	4	3.00000000
10000	5	4.00000000
100000	6	5.00000000
1000000	7	6.00000000
10000000	8	7.00000000
100000000	9	8.00000000
1000000000	10	9.00000000
10000000000	11	10.00000000

Dispuesta la progression geometrica en decupla proporcion, como se vè, se pone à su lado la progression arithmetica natural, desde el primer termino, que es el zero, en los numeros que vàn separados de las otras cifras con un punto; y se añaden à cada uno ocho zeros, conque el excesso de cada termino à su inmediato es cien millones. Formase esta progression con tanto excesso entre sus terminos; porque como 0.000.&c. sea logarithmo de 1. primer termino de la progression geometrica; y 1.000.&c. sea logarithmo del segundo termino, que es 10. y entre 1. y 10. falten ocho terminos, à quienes tambien se les ha de señalar proporcionalmente su logarithmo en las tablas, es menester que la diferencia del logarithmo 0. 000. &c. y el logarithmo 1. 000. &c. sea muy grande, para que sin error sensible se puedan hallar los ocho logarithmos intermedios, como se verà despues en la fabrica de estos numeros.

La sobredicha cifra, que està distinguida de las demàs con un punto, se llama *caracteristica*, por ser el caracter, ò señal que denota quantas cifras tiene el numero geometrico correspondiente à dicho logarithmo; porque siempre tiene dicho numero una cifra mas de lo que expressa

la

la caracteristica de su logarithmo. La razon es, porque todos los logarithmos que hay entre el primero, y segundo de la tabla precedente, tienen la caracteristica zero; y los terminos absolutos sus correspondientes, son los numeros que hay entre 1. y 10. que constan de una sola cifra. Assimismo los logarithmos que hay entre el segundo, y tercero, tienen la caracteristica 1. y los terminos absolutos à que corresponden, son los contenidos entre 10. y 100. que constan de dos cifras, y assi de los demàs. Sea pues regla general, que *tantas cifras hay en un numero absoluto, quantas unidades hay en la caracteristica de su logarithmo, y mas una.*

CAPITULO II.

DE LA FABRICA DE LOS LOGARITHMOS.

Con las reglas que se contienen en las proposiciones siguientes, se fabrìca la tabla logarithmica de los numeros absolutos; y como para esto se haya hecho eleccion de las dos progressiones, una geometrica, que empezando de la unidad, procede en proporcion decupla; y otra arithmetica, que empezando del zero, se exceden sus terminos en la unidad con igual numero de zeros, explicarè las reglas contrahidas à esta especie de logarithmos, que son los admitidos; y de ellas se podrà colegir facilmente, como se deva proceder en los de otras especies.

PROP. XI. Problema.

Dado el Logarithmo del primer termino, y el del segundo de una progression Geometrica, hallar los Logarithmos de los demàs terminos de dicha progression.

En qualquiera especie de logarithmos, dado el del primero, y el del segundo termino, se hallaràn los demàs en esta forma. Restese el menor del mayor, y se tendrà

su

ſu diferencia, ſupueſto que ſean directos : añadaſe èſta al ſegundo logarithmo, y ſe tendrà el tercero: añadaſe la miſma diferencia al tercero, y ſe tendrà el quarto; y aſsi infinitamente. La razon es, por proceder todos con diferencias, ò exceſſos iguales.

De aqui ſe colige, que en nueſtros logarithmos, por ſer el primero todo zeros, no es meneſter reſtarle del ſegundo; y aſsi, el miſmo logarithmo ſegundo, es el exceſſo en que todos ſe vàn excediendo: dupliqueſe pues el logarithmo del 10. que es el termino ſegundo, y ſe tendrà el logarithmo del termino ſiguiente, que es 100. ſumenſe el del 10. y el del 100. y ſe tendrà el de 1000. ſumenſe el de 10. y el de 1000. y ſe tendrà el de 10000. y aſsi infinitamente.

PROP. XII. Problema.

En qualquiera ſerie de numeros geometricamente proporcionales, dados los Logarithmos del primero, y ultimo terminos, hallar los Logarithmos de los intermedios.

EN qualquiera eſpecie de logarithmos, conocido el primero, y el ultimo, y el numero de ſus terminos, ſe ſabràn los logarithmos intermedios de eſte modo: Reſteſe el menor del mayor, eſto es, ſupueſto que ſon directos, reſteſe el primero del ultimo: partaſe el reſiduo por el numero de los terminos, menos uno; y el quociente ſerà la diferencia de qualquiera à ſu inmediato, que añadida al primero, darà el logarithmo ſegundo; y añadida à èſte, darà el tercero, &c. Queda demonſtrado en la *propoſ.* 8. *lib.* 5. de la *Arithm. Infer.* De aqui ſe ſigue, que en nueſtros logarithmos, por ſer el primero todo zeros, no es meneſter reſtarle del ultimo, ſi que baſtarà partir el ultimo termino por el numero de los terminos menos uno, y el quociente ſerà el logarithmo ſegundo, que juntamente es el exceſſo en que todos proceden: luego duplicandole ſe tendrà el tercero; y ſumando ſegundo, y tercero, ſe tendrà el quarto, &c. como por exemplo en las progreſſiones de la *propoſ.* 10. dado el logarithmo de 1. y el de

10-

1000000000. que es 10. 00000000. se piden los intermedios: el numero de los terminos es 11. y quitando 1. es 10. parto pues el logarithmo 10. 00000000. por 10. y el quociente 1. 00000000. serà el logarithmo del termino segundo, que duplicado dà el tercero; y el segundo, y tercero sumados, dàn el quarto; y assi de los demàs.

PROP. XIII. Problema.

Dados los Logarithmos de dos, ò mas numeros, hallar el Logarithmo del producto de dichos numeros; y assimismo, hallar el Logarithmo del quociente de la particion del uno por el otro.

SUmense los logarithmos de los numeros dados, y la suma serà el logarithmo del producto de dichos numeros. Consta del *corolar.* de la *propos.* 5. *Exemplo.* Sumense los logarithmos de los numeros 10. y 100. que estàn en la tabla de la *propos.* 10. y la suma serà el logarithmo de 1000. que es el producto de 10. por 100. Assimismo, restese el logarithmo de 10. del logarithmo de 1000. y el residuo serà el logarithmo de 100. por la razon sobredicha.

PROP. XIV. Problema.

Hallar los Logarithmos de las potestades, y raices numericas.

MUltiplicando un numero por sì mismo, nace su quadrado: multiplicando el quadrado por el numero mismo sale el cubo: multiplicando el cubo por el mismo numero, sale el quadrado-quadrado; y assi infinitamente: luego, porque la suma de estos logarithmos equivale à la multiplicacion, si se suma dos veces el logarithmo de un numero, saldrà el logarithmo de su quadrado; y si se suma tres veces, saldrà el logarithmo de su cubo; y si quatro veces, saldrà el de su quadrado-quadrado; y assi de los demàs: luego al contrario, si el logarithmo del quadrado se parte por 2. ò se le resta la mitad, saldrà el logarithmo de la raiz quadrada de aquel nu-

numero; y si el logarithmo del cubo se parte por 3. esto es, se toma su tercio, se sabrà el logarithmo de la raiz cubica; y assi en las demàs potestades, y raices.

PROP. XV. Problema.

Dados los Logarithmos de dos numeros, hallar el Logarithmo del medio proporcional entre dichos numeros.

BUscase, por exemplo, el logarithmo del medio proporcional entre el tercero, y quinto termino de la tabla antecedente, *propos.* 10. *Operacion.* Sumense los logarithmos del tercero, y quinto terminos, y la mitad de la suma serà el logarithmo del numero, que es medio proporcional entre los sobredichos.

Demonstr. El medio proporcional entre dos numeros se halla, multiplicando dichos numeros, y sacando la raiz quadrada del producto, como dixe en la *Arithm. Super. lib.* 3. *prop.* 1. luego, porque en estos logarithmos la suma equivale à la multiplicacion, la suma de los logarithmos de los numeros dados, serà el logarithmo de su producto, y (14) su mitad serà el logarithmo de la raiz quadrada de dicho producto; y por consiguiente, del medio proporcional que se pretende. *De que se colige, que el medio arithmetico entre los logarithmos de dos numeros, es logarithmo del medio geometrico que hay entre dichos numeros.*

PROP. XVI. Problema.

Dados los Logarithmos de todos los terminos de una progression geometrica, hallar los Logarithmos de los numeros comprehendidos entre cada termino de dicha progression, y su inmediato.

MUcho devemos à Enrique Brixio, y à Adriano Ulac, por havernos dexado trabajadas las tablas logarithmicas, pues sin la fatiga de su fabrica, nos facilitaron las operaciones trigonometricas: suponiendo pues que nadie ha de gastar inutilmente el tiempo en trabajarlas de nuevo, explicarè con brevedad en la *propos.* siguiente te la methodo que obſervaron en ſu conſtruccion, para lo qual ſolo nos falta ſaber el modo de hallar los logarithmos de los numeros que hay entre uno, y otro termino de la progreſsion geometrica, de los quales ſe neceſſita para innumerables operaciones; de ſuerte, qua ſin ellos ſerìa caſi inutil la tabla logarithmica, como luego veremos: y porque con la miſma methodo, con que ſe halla uno de eſtos logarithmos, ſe pueden hallar los demàs, baſtarà explicarla en uno de ellos, y ſea por exemplo el del numero 9.

Operacion. Lo primero, porque el 9. ſe halla entre los dos primeros terminos de la progreſsion geometrica, que ſon 1. y 10. y el artificio para hallar ſu logarithmo, conſiſte en inquirir ſucceſsivamente diferentes medios geometricos, y otros tantos arithmeticos; para que las operaciones ſalgan bien exactas, y no ſea ſenſible lo que ſe pierde en la extraccion de raices regularmente irracionales, ſe añadiràn à los dichos terminos 1. y 10. tantos zeros à lo menos, quantos lleva el logarithmo del numero 10. en la tabla precedente, los quales ſerviràn ſolamente para la extraccion de los medios proporcionales, y ſe borraràn deſpues de acabada la operacion: en la formula ſiguiente ſolo ſe añaden ſiete, por ſer èſtos los baſtantes para la explicacion.

2. Entre la unidad A, y el 10. B, aumentados con ſus zeros, hallеſe el medio geometrico proporcional C: y porque aqui ſe buſca el num. 9. con tantas cifras como tiene la unidad; eſto es, 9. 0000000. ò otro el proximo menor, que por eſte camino ſe le puede hallar, ſiendo el num. C, menor que el que

	Proporcional.	Logarithm.
A	1. 0000000	0. 00000000
C	3. 6122777	0. 50000000
B	10. 0000000	1. 00000000
B	10. 0000000	1. 00000000
D	5. 6234132	0. 75000000
C	3. 1622777	0. 50000000
B	10. 0000000	1. 00000000
E	7. 4989421	0. 87500000
D	5. 6234132	0. 75000000
B	10. 0000000	1. 00000000
F	8. 6596432	0. 93750000
E	7. 4989421	0. 87500000

	Proporcion.	Logarithm.
$\overline{B}$	10.0000000	1.00000000
G	9.3057204	0.96875000
F	8.6596432	0.93750000
$\overline{G}$	9.3057204	0.96875000
H	8.9768713	0.95312500
F	8.6596432	0.93750000
$\overline{G}$	9.3057204	0.96875000
I	9.1398170	0.96093750
H	8.9768713	0.95312500
$\overline{I}$	9.1398170	0.96093750
K	9.0579777	0.95703125
H	8.9768713	0.95312500
$\overline{K}$	9.0579777	0.95703125
L	9.0173333	0.95507812
H	8.9768713	0.95312500
$\overline{L}$	9.0173333	0.95507812
M	8.9970796	0.95410156
H	8.9768713	0.95312500
$\overline{L}$	9.0173333	0.95507812
N	9.0072008	0.95458984
M	8.9970796	0.95410156
$\overline{N}$	9.0072008	0.95458984
O	9.0021388	0.95434570
M	8.9970796	0.95410156
$\overline{O}$	9.0021388	0.95434570
P	8.9996088	0.95422363
M	8.9970796	0.95410156
$\overline{O}$	9.0021388	0.95434570
Q	9.0008737	0.95428467
P	8.9996088	0.95422363
$\overline{Q}$	9.0008737	0.95428467
R	9.0002412	0.95425415
P	8.9996088	0.95422363
$\overline{R}$	9.0002412	0.95425415
S	8.9999250	0.95423889
P	8.9996088	0.95422363

que se busca, es cierto, que entre el numero C, y el numero B, estarà el que se desea. Busquese pues entre B, y C, el medio proporcional D; y porque tambien es menor que 9.0000000. entre el mismo B, y D, se hallarà el medio proporcional E, que aunque se va acercando al nu. 9.0000000. pero aun es mucho menor que èl. Busquese pues otro medio entre B, y E, y serà F, que aun es menor que 9. 0000000. por lo qual se hallarà otro medio proporcional entre B, y F, que serà G; el qual es ya mayor que el 9. 0000000. por lo qual entre G, y el proximo menor F, se hallarà otro medio proporcional H, que es menor que 9. 0000000. y assi entre H, y G, que es el proximo mayor, se buscarà otro medio preporcional I, que es mayor que 9. 0000000. pero no con tanto excesso como lo era el numero G, por lo qual entre I, y H, proximo menor, se hallarà el me-

medio proporcional K; y de esta suerte se irà continuando la operacion, buscando siempre un medio geometricaméte proporcional entre el medio proximo mayor, y el proximo menor de los que se van hallando, hasta encontrar con el numero 9. 00000000. ò otro tan proximo, que casi no se diferencie de èl. Viene pues à salir despues de haver hallado 25. medios geometricos el numero 9. 0000000. como se ve en la formula de las operaciones.

	Proporcion.	Logarithm.
R	9.0002412	0.95425415
T	9.0000831	0.95424652
S	8.9999250	0.95423889
T	9.0000831	0.95424652
V	9.0000041	0.95424271
S	8.9999250	0.95423889
V	9.0000041	0.95424271
X	8.9999650	0.95424080
S	8.9999250	0.95423889
V	9.0000041	0.95424271
Y	8.9999845	0.95424217
X	8.9999650	0.95424080
V	9.0000041	0.95424271
Z	8.9999943	0.95424223
Y	8.9999845	0.95424217
V	9.0000041	0.95424271
&	8.9999992	0.95424247
Z	8.9999943	0.95424223
V	9.0000041	0.95424271
AA	9.0000016	0.95424259
&	8.9999992	0.95424247
AA	9.0000016	0.95424259
BB	9.0000004	0.95424253
&	8.9999992	0.95424247
BB	9.0000004	0.95424253
CC	8.9999998	0.95424250
&	8.9999992	0.95424247
BB	9.0000004	0.95424253
DD	9.0000000	0.95424251
CC	8.9999998	0.95424250

3 Hecho esto, bolviendo al principio de la formula, entre el logarithmo de A, y el logarithmo de B, se hallarà (15.) el medio arithmetico C, que es el logarithmo del medio geometrico C: luego se irà continuando la operacion, buscando siempre los medios Arithmeticos, ò Logarithmicos, correspondientes à los medios Geometricos, siguiendo el mismo orden con que èstos se fueron hallando; y en la ultima operacion se hallarà el logarithmo correspondiente al numero 9. 0000000.

0000000.que es 0. 95424251.y quitandole al dicho numero los zeros que se le añadieron, quedarà el numero 9. y su logarithmo 0. 95424251.

De la misma suerte que se ha hallado el logarithmo del numero 9. se pueden hallar los logarithmos de todos los numeros intermedios que hay entre los que componen la progressión geometrica, arriba puesta; pero solo serà menester esta operacion prolixa para hallar los logarithmos de los numeros primos, que son aquellos à quien no mide otro numero, si sola la unidad; porque para los numeros compuestos, que nacen de la multiplicacion de otros, se hallaràn los logarithmos por la *prop.* 13. como luego veremos.

PROP. XVII. Problema.

Formar la Tabla Logarithmica.

DE lo dicho en las proposiciones antecedentes se colige el modo de formar la tabla logarithmica de todos los numeros, empezando de la unidad àzia el infinito, que es el siguiente.

1 Determinada la progressión geometrica, que segun la *prop.* 10. es la que empieza de la unidad, y sus terminos proceden en proporcion decupla, se determina juntamente la progressión arithmetica, que empezando del zero, sigue el orden natural de los numeros que se exceden en la unidad; pero añadida à cada uno igual cantidad de zeros, como se dixo en la prop. citada: y los numeros de esta progressión son logarithmos de los terminos de la progressión geometrica, como se ve en la tabla que puse en la *prop.* 10. sobredicha.

2 Pero porque necessitamos tambien de todos los numeros contenidos entre uno, y otro termino de la porgressión geometrica, es forzoso hallarles sus logarithmos: y lo primero con la misma regla de la propos. passada, conque se hallò el logarithmo del numero 9. se hallaràn los logarithmos de los numeros primos, como son 2. 3. 5. 7. 11. 13.17.19.23.&c. si bien haviendose hallado el logarithmo del numero 9. con solo tomar su mitad, se tendrà (14.) el

del

del numero 3. que es su raiz quadrada. Haviendo pues hallado el logarithmo del 2. duplicandole, triplicandole, quadruplicandole, &c. se tendràn los logarithmos de sus potestades 4. 8. 16. 32. 64. &c. Assimismo duplicando, triplicando, &c. el logarithmo del 3. se tendràn los de sus potestades 9. 27. 81. &c. Y de la misma suerte con el logarithmo del numero 5. se tendràn los de 5. 25. 125. &c.

3 Hallados los logarithmos de los numeros *primos*, se sabràn facilmente los de los *compuestos*; porque como èstos procedan de la multiplicacion de otros numeros, si se suman los logarithmos de los numeros producentes, se hallarà el logarithmo del numero producto. (13.) Y assi, porque el 6. procede de la multiplicacion de 2. por 3. sumando los logarithmos del 2. y del 3. se tendrà el logarithmo de 6. Assimismo la suma de los logarithmos de 2. y de 4. serà el del numero 8. y assi de los demàs.

Con esto quedarà formada la tabla logarithmica, con los logarithmos de todos los numeros desde la unidad àzia el infinito. La que pongo à lo ultimo de este libro despues de la tabla trigonometrica, solo llega hasta 10000. pero mas adelante se darà regla para hallar los logarithmos de qualesquiera numeros mayores que 10000. que es el ultimo de dicha tabla.

PROP. XVIII. Problema.

Aplicacion de los logarithmos al Canon Trigonometrico.

LOs logarithmos se han aplicado al canon trigonometrico, substituyendo en lugar de los numeros geometricos que le componen, los logarithmos sus correspondientes: lo que ha facilitado en gran manera las operaciones trigonometricas. Pero se ha de advertir, que los numeros geometricos que hay en el canon, se entienden aumentados con algunas cifras, que se añadieron para mayor exaccion, segun lo que dixe en la *prop.* 16. los quales despues se quitaron; y por esta causa se hallarà, que los logarithmos substituidos en su lugar, son mayores de lo que devian ser, si se atienden los numeros geometricos, segun en el canon se expressan.

Exem-

Exemplo. El primer numero geometrico en el canon de los ſenos es 2909. que es el ſeno de un minuto ; y ſu logarithmo alli miſmo es 6. 4637261. ſiendo aſsi, que en la tabla logarithmica à 2909. le correſponde el logarithmo 3. 4637437. La razon de eſto es, porque en el canon de los ſenos el numero geometrico 2909. ſe ha de entender tiene mas tres cifras, ſegun la regla general que ſe diò à lo ultimo de la *propoſ.* 10. Y ſegun otra que daremos mas adelante, al logarithmo del ſeno de un minuto 6. 4637261. le correſponde el numero geometrico 2908882. que quitadas las tres ultimas cifras, es 2908. pero por ſer tan crecidas las que ſe han quitado, ſe pone en el canon 2909.

Aunque en el canon trigonometrico he omitido los numeros abſolutos, por ſer baſtantes para las operaciones ſus logarithmos, he querido advertir lo ſobredicho, para que quien quiſiere cotejarles con los logarithmos de la tabla logarithmica, no tropiece con la dificultad que hemos dicho.

CAPITULO III.

DEL VSO DEL CANON TRIGONOMETRICO, Y TABLA Logarithmica.

DOs tablas ſe hallan al fin de eſte libro : la primera, es el *canon trigonometrico* : la ſegunda es, la *tabla logarithmica*, que contiene todos los numeros, deſde la unidad, haſta 10000. con los logarithmos que les correſponden : la inteligencia, y uſo de entrambas, explican las propoſiciones ſiguientes.

PROP. XIX. Theorema.

Explicaſe la diſpoſicion del Canon Trigonometrico.

LA tabla 1. ò canon trigonometrico contiene todos los grados, ò minutos haſta el quadrante : ſu diſpoſicion

cion es la ſiguiente. En cada plana ſe hallan dos ordenes, y en cada uno tres colunas, de las quales, la primera à la izquierda del que lee, contiene los minutos del grado que eſtà arriba en la frente de aquel orden; la ſegunda coluna lleva los ſenos logarithmicos, correſpondientes à dicho grado, y minutos; y la tercera, ſus tangentes logarithmicas; y lo miſmo en el ſegundo orden: ſolo que en eſte, la primera coluna lleva los minutos con orden opueſto, porque en la del orden primero deſcienden, y en la del ſegundo ſuben, para que de eſta ſuerte el grado, y minutos del ſegundo orden, ſea complemento al quadrante de los del primero, y al contrario; y ſe hallen en la miſma plana los ſenos primeros, y ſegundos de un miſmo arco, y aſsimiſmo las tangentes.

Ponenſe en el canon trigonometrico ſolamente los arcos haſta el quadrante, porque los arcos mayores que el quadrante, tienen los miſmos ſenos, y tangentes que ſus complementos al ſemicirculo, como en otra parte queda dicho, los quales ſon neceſſariamente menores que el quadrante. Ponenſe ſolamente los ſenos, y tangentes logarithmicas, eſto es, los logarithmos correſpondientes à los ſenos, y tangentes, omitiendo ſus propios numeros geometricos, porque creo, que nadie querrà valerſe de ellos, pudiendo executar con mas prontitud, y deſcanſo las miſmas operaciones con los logarithmos, que con los ſobredichos numeros geometricos. Se han omitido tambien los logarithmos de las ſecantes, aſsi por hacerſe ſin ellas con igual facilidad los calculos de los triangulos, como por poderſe hallar facilmente ſus logarithmos, como deſpues veremos. Quan facil ſea el manejo de eſtas tablas, ſe ve en las propoſiciones ſiguientes.

PROP. XX. Problema.

Dados los arcos, ò angulos haſta los minutos, hallar ſus ſenos, y tangentes logarithmicas en el Canon Trigonometrico.

BUſqueſe arriba en la frente de la tabla el numero de los grados; y hallado èſte, buſquenſe en la primer coluna à la izquierda de aquel orden, los minutos que acompañan à dichos grados, y al lado de èstos, siguiendo la linea transversal, se hallarà su seno primero, y tangente primera; y en el orden siguiente, su seno segundo, y tangente segunda: pero es menester advertir, que por ser pequeña la plana, se han dividido los 60. minutos de cada grado en dos mitades; y consiguientemente la una mitad con sus senos, y tangentes està en la una plana; y la otra mitad en la siguiente: conque si el numero de los minutos que se busca, no se hallare en aquella plana, se passarà à la inmediata antecedente, ò subsiguiente, que lleva en su frente el mismo numero de grados; y en su primera coluna se hallaràn los minutos, como se ve en los exemplos siguientes.

Exemplo 1. Sea dado el arco, ò angulo de 27. grados, y 24. min. Pidese su seno 1. y tangente 1. y su seno 2. y tangente 2. *Operacion.* Busquese en la frente de la tabla el 27. que es el numero de los grados; y en la primer coluna de aquel orden busquense los 24. min. y se hallarà enfrente de èstos ser el seno primero 9.6629464. y la tangente primera 9.7146237. y siguiendo la misma linea transversal, se hallarà en el segundo orden de la misma plana, ser el seno 2. de dichos grados, y minutos 9.9483227. y la tangente segunda 10.2853763.

Exemplo 2. Sea dado el arco, ò angulo de 27. grados, 36. minutos. Pidese su seno 1. y tangente 1. y su seno 2. y tangente 2. *Operacion.* Hallese el 27. en la frente de la tabla; y en su mismo orden, en la primer coluna à la izquierda, hallense los 36. minutos, y à su lado se hallarà el seno primero 9.6658586. y la tangente primera 9.7183251. y siguiendo la misma linea transversal en el otro orden de la misma plana, se halla su seno segundo 9.9475335. y su tangente segunda 10.2816749.

Exemplo 3. Sea dado el arco, ò angulo de 152. grados, y 36. minutos. Pidense sus senos 1. y 2. y tangentes 1. y 2. *Operacion.* Por ser dicho arco mayor que el quadrante, restese de 180. grados, y el residuo serà 27. grados, y 24. minutos: hagase lo mismo que en los exemplos passados, y se ſe hallaràn ſus ſenos, y tangentes, que ſon las miſmas del exemplo 1. y aſsi en los demàs.

PROP. XXI. Problema.

Hallar los Senos, y Tangentes Logarithmicas de los arcos que conſtan de grados, minutos, y ſegundos.

EN las tablas eſtàn los ſenos, y tangentes de los minutos de cada grado, pero no eſtàn los de los ſegundos; y aunque pocas veces ſe neceſsita de tanta preciſion., pero ſi ſe ofreciere ſe obrarà como en los exemplos ſiguientes.

Exemplo. Pideſe el ſeno 1. de un arco de 27. grad. 24. min. 35. ſegundos. *Operacion.* Halleſe por la antecedente el ſeno 1. logarithmico de 27. grad. 24. min. que ſerà 9.6629464. Tomeſe aora de las tablas el ſeno inmediato ſiguiente, que es 9. 6631900. Reſteſe el menor del mayor, y ſerà la diferencia 2436. Digaſe aora por regla de tres: ſi 60. ſegundos, que ſon los que componen un minuto, dan 2436. què daràn 35. ſegundos? y ſe hallaràn dar 1421. Añadaſe eſte quociente al primer logarithmo 9. 6629464. por ſer menor que el ſegundo; y la ſuma 9. 6630885. ſerà el ſeno logarithmico del arco dado 27. grad. 24. min. 35. ſeg. De la miſma ſuerte ſe obrarà en las tangentes logarithmicas.

PROP. XXII. Problema.

Dado el Seno, ò la Tangente de un arco, ò angulo, hallar el angulo, ò arco.

DAdo el ſeno logarithmico, ò tangente logarithmica de un arco, ſe hallarà el arco en la forma que ſe ve en los exemplos ſiguientes.

Exemplo. Sea dado el logarithmo 9. 6028482. que lo es de un ſeno 1. Pideſe la cantidad del arco, ò angulo de quien es ſeno 1. Buſqueſe en las tablas del canon el ſobredicho logarithmo en la coluna de los ſenos; y porque no ſe halla exactamente, tomeſe ſu proximo menor, que es 9. 6027278. y à ſu lado à la izquierda ſe hallan 37. min. y arriba 23. grad. Digo pues, que el logarithmo

C 2 da-

dado es del ſeno 1. de un arco, ò angulo de 23. grad. 37. min. pero porque un miſmo ſeno de un arco menor que el quadrante, es tambien ſeno de ſu complemento al ſemicirculo, puede tambien ſer el ſobredicho logarithmo del ſeno 1. del arco de 156. grad. 23. min. Conque ſabiendo que el arco que ſe buſca es menor que el quadrante, ſe dirà ſer ſeno primero de 23. gr. 37. min. y ſabiendo que es mayor que el quadrante, ſe dirà ſer ſeno 1. del arco de 156. gr. 23. min.

Exemplo 2. Sea dado el miſmo logarithmo como ſeno 2. de un arco. Buſqueſe, como antes, en la coluna de los ſenos; y haviendo hallado ſu proximo menor 9.6027278. ſe proſeguirà, ſiguiendo la linea tranſverſal al otro orden de la miſma plana, y en ſu primera coluna ſe encontraràn 23. min. y en la frente de eſte miſmo orden 66. grados. Digo pues, que el logarithmo dado es del ſeno 2. de 66. grad. 23. min. y tambien de 113. grad. 37. min. conque ſabiendo ſi el arco es menor, ò mayor que el quadrante, ſe elegiràn, ò los grados primeros, ò los ſegundos. De la miſma ſuerte ſe obrarà en las tangentes.

Adviertaſe, que quando ſe toma el logarithmo proximamente menor, tambien el arco que le correſponde es proximo, pero no el verdadero, porque en el ſeno 1. *y tangente* 1. *el arco menor que el quadrante, ſale algo menor de lo juſto; y el mayor, que el quadrante algo mayor: y al contrario en el ſeno* 2. *y tangente* 2. *porque en el arco menor que el quadrante, ſale mayor de lo juſto; y en el mayor que el quadrante, menor: y aunque ſuele deſpreciarſe la diferencia, por no poder llegar à minuto; pero quando ſe quiera la total preciſion, ſe obrarà como en la propoſicion ſiguiente.*

PROP. XXIII. Problema.

Dado el Logarithmo del Seno, ò Tangente de un Arco, determinar el arco haſta los ſegundos.

SEa dado el miſmo logarithmo 9.6028482. como ſeno 1. de un angulo; y obrando como en la propoſ. paſſada, hallo que ſu proximo menor en las tablas es 9.6027278. à quien correſponde el angulo agudo 23. grad. 37. min. y

el

el obtuſo 156. gr. 23. min. Para mayor exaccion ſe hallaràn los ſegundos de dicho arco en eſta forma: Tomo el logarithmo proximo mayor, que es 9. 6030166. y reſtando el menor del mayor, hallo ſer la diferencia 2888. Reſto tambien el menor 9. 6027278. del logarithmo dado 9. 6028482. y es la diferencia 1204. Y formo eſta regla de tres: Si la diferencia 2888. es de 60. ſegund. luego la diferencia 1204. darà 25. ſegundos; èſtos ſe añadiràn al angulo agudo, y ſaldrà de 23. gr. 37. min. 25. ſeg. Y reſtados del obtuſo, quedarà de 156. gr. 22. min. 35. ſeg. De la miſma ſuerte ſe obrarà en la tangente primera; pero en el ſeno 2. y tangente 2. deſpues de hecha la regla de tres, ſe obrarà al contrario, reſtando los ſegundos hallados, del angulo agudo, y añadiendoles al obtuſo, lo que requiere cuidado para no errar la operacion.

En el canon trigonometrico no ſe han pueſto las ſecantes logarithmicas, por no neceſsitar de ellas la methodo que hemos de ſeguir, y tambien por poderſe hallar facilmente por la regla que daremos mas adelante.

En las propoſiciones ſiguientes ſe explica el uſo de la tabla logarithmica, que eſtà deſpues del canon trigonometrico.

PROP. XXIV. Problema.

Dado un numero de los que eſtàn en la Tabla, hallar el Logarithmo; y al contrario.

1 SEa dado el numero 618. Pideſe ſu logarithmo. *Operacion.* Buſqueſe dicho numero en la tabla, y à ſu lado ſe hallarà ſu logarithmo 2. 7909885.

2 Sea dado el logarithmo 2. 7909885. Pideſe el numero de quien es logarithmo. Buſqueſe dicho logarithmo entre los logarithmos de la tabla, y à ſu lado à la izquierda ſe encontrarà el numero 618.

3 Quando el logarithmo dado no ſe hallare preciſamente en la tabla, ſe tomarà el que ſe hallare mas proximo al que ſe buſca, y el numero que le correſponde à la izquierda ſe puede tomar por el verdadero, por diferenciarſe de èſte en menos que la unidad.

Exem-

Exemplo. Sea dado el logarithmo 3.6252981. el qual no se halla precisamente en la tabla; pero se ve alli, que el logarithmo del numero 4219. es menor, y el del numero 4220. es mayor: porque el logarithmo dado està mas proximo al mayor, que al menor, se tomarà el numero 4220. por el verdadero; si no se quiere atender al mas proximo, bastarà tomar siempre el proximo menor: y si se quisiere mayor precision, se procederà del modo que se explica en la *prop.* 27.

PROP. XXV. Problema.

Hallar el Logarithmo de qualquier quebrado.

Dos casos se pueden ofrecer: el primero, quando el quebrado es impropio por ser el numerador mayor que el denominador; el segundo, quando es propio por ser el numerador menor que el denominador.

Caso 1. Sea dado el quebrado impropio $\frac{29}{17}$. Pidese su logarithmo. *Operacion.* Restese el logarithmo del denominador, del logarithmo del numerador, y el residuo serà el logarithmo que se pide. El logarithmo del denominador 17. es 1.2304489. el del numerador 29. es 1.4623980. restando el primero del segundo, es el residuo 0.2319491. logarithmo del quebrado propuesto.

Caso 2. Quando el quebrado es propio, se restarà el logarithmo del numerador, del logarithmo del denominador; y el residuo con este señal —, serà el logarithmo del quebrado, que necessariamente ha de ser defectivo, ò negativo. *Exemplo.* Sea el quebrado $\frac{17}{29}$. Restado el logarithmo de 17. del de 29. como antes, es el residuo 0.2319491. y poniendole antes el signo —, serà — 0.2319491. logarithmo del sobredicho quebrado.

Demonstr. Primeramente, que este logarithmo haya de ser numero falso, ò defectivo, es constante, porque qual-

quie-

quiera quebrado propio, es menor que la unidad: luego el logarithmo del quebrado ha de ser menor que el logarithmo de la unidad: luego siendo la unidad zero, (10.) serà el logarithmo del quebrado menos que el zero: luego es numero defectivo, ò negativo. Lo segundo, que la diferencia de los logarithmos del numerador, y denominador, sea el logarithmo de qualquier quebrado, sea propio, ò impropio, se prueba; porque qualquier quebrado es lo mismo que el quociente que proviene de la particion del numerador por el denominador, como consta de la Arithmetica; y como en estos logarithmos la resta equivalga à la particion, de suerte, que el residuo de la resta de los logarithmos, es logarithmo del quociente de la particion hecha en los numeros correspondientes, se sigue ha de ser logarithmo de qualquiera quebrado el residuo que proviene restando entre sì los logarithmos del numerador, y denominador.

PROP. XXVI. Problema.

Hallar el Logarithmo de un entero, y quebrado.

Modo 1. Reduzgase el entero al quebrado que le acompaña, haciendo de todo un quebrado impropio, y usando de la regla del caso 1. de la propos. antecedente, se sabrà su logarithmo. *Exemplo.* Pidese el logarithmo de 34. y dos quintos: reducido todo à quintos, es el quebrado 172. quintos: el logarithmo de el numerador 172. es 2.2355284. el del denominador 5. es 0. 6989700. el residuo 1.5365584. es el logarithmo del entero, y quebrado propuestos.

Porque sucederà muchas veces, que hecha la multiplicacion del entero por el denominador del quebrado, saldrà un producto mayor que el ultimo de la tabla, serà conveniente usar del siguiente modo, aunque no es tan exacto como el antecedente.

Modo 2. Tomese el logarithmo del numero entero 34. en el exemplo antecedente, que es 1. 5314789. y luego el del siguiente numero 35. que es 1. 5440680. restese el menor del mayor, y serà su diferencia 125891. y formanmando regla de tres, se dirà: Si el denominador 5. dà al denominador 2. què daràn 125891. y serà el quarto termino 50356. que añadido al logarithmo del numero entero, la suma 1. 5365145. serà el logarithmo de 34. y dos quintos.

PROP. XXVII. Problema.

Dado un Logarithmo, hallar el entero, y quebrado.

SEa dado el logarithmo 2. 521197. el qual no se halla precisamente en la tabla. Pidese el entero, y quebrado de quien es logarithmo. *Operacion.* Tomese su proximo menor, que es 2. 521138. y à su lado se hallarà el numero entero que se busca 332. Busquese tambien su proximo mayor, que es 2. 522444. La diferencia entre el mayor, y menor, es 1306. la diferencia entre el menor, y medio, es 59. y porque al quebrado que se busca se le puede dar qualquiera denominador, escojase arbitrariamente, y sea 100. y digase por regla de tres: Si la diferencia entre el mayor, y menor 1306. dà 59. diferencia entre el menor, y medio, què darà el denominador 100. y el quarto termino 4. serà el numerador del quebrado, cuyo denominador serà el 100. que se escogiò; conque el logarithmo dado lo es de 332. y 4. centessimas con poca diferencia.

PROP. XXVIII. Problema.

Dado un Logarithmo negativo, hallar el quebrado de quien lo es.

COnsta de la *proposicion* 25. que el logarithmo de un quebrado propio, es negativo, ò defectivo. Dado pues este logarithmo, se hallarà el quebrado à quien corresponde, en la forma siguiente: Sumese el logarithmo defectivo con el logarithmo de otro qualquier numero de la tabla, advirtiendo, que por ser negativo se suma restandole del otro, como se dixo en la Algebra: busquese en la tabla entre los logarithmos la suma sobredicha,

y

y tomando el numero que le corresponde à la siniestra, se pondrà como numerador del quebrado, que tendrà por denominador al numero, cuyo logarithmo se escogiò; y este quebrado serà el correspondiente al logarithmo defectivo.

Exemplo. Sea dado el logarithmo defectivo ——— 0. 2319491. y se pide el quebrado de quien es logarithmo. Sumese con el logarithmo de 1000, que es 3.0000000. restandole de èste por la razon sobredicha, y serà el residuo 2.7680509. al qual en la tabla corresponde proximamente el numero 587. Digo pues, que 587. milesimas, es el quebrado correspondiente al logarithmo defectivo sobredicho.

PROP. XXIX. Problema.

Dado un numero mayor que el ultimo de la tabla, hallar su Logarithmo.

1 SI el numero dado es compuesto, busquense los dos numeros, que multiplicados entre sì, le producen. Hallense los logarithmos de estos numeros en la tabla, y sumados, serà la suma el logarithmo del numero dado.

Exemplo. Pidese el logarithmo del numero 78936. mayor que el ultimo de la tabla; y porque el numero sobredicho nace de la multiplicacion de 253. por 312. busquense en la tabla los logarithmos de estos dos ultimos numeros; y la suma de ellos serà 4. 8972751. logarithmo dèl numero propuesto. Consta del corolario de la *proposicion* 5.

Pero porque si se diesse un numero primo no se podria hallar su logarithmo con la sobredicha regla, añado la siguiente, que es general para todos. Sea dado el mismo numero 78936. Separense con un punto las quatro primeras cifras de la izquierda; y las otras ponganse sobre una raya, como numerador de un quebrado, cuyo denominador serà la unidad, con tantos zeros como hay letras en el numerador; conque en el exemplo propuesto serà $7893\frac{6}{10}$. Busquese aora (26) el logarithmo de este en-

entero, y quebrado, y ferà 3. 8972751. Añadanfele à la caracteriftica tantas unidades como hay zeros en el denominador del fobredicho quebrado, que en efte cafo es uno; y ferà el logarithmo 4.8972751. el del numero dado, como antes. La razon fe puede colegir de lo dicho en las propoficiones paffadas.

PROP. XXX. Problema.

Dado un Logarithmo mayor que el ultimo de la tabla, hallar el numero de quien es Logarithmo.

SEa dado el logarithmo 4. 8972751. que no fe halla en la tabla: pidefe fu numero. *Operacion.* Hagafe cuenta que la caracteriftica no es mas que 3. y que el logarithmo fea 3. 8972751. bufcole en la tabla, y hallo que fu proximo menor es 3. 8972421. que es logarithmo de 7893. efcrivo efte numero à parte, y tomo el logarithmo proximo mayor 3. 8972971. La diferencia del mayor, y menor es 550. la diferencia entre el menor, y medio es 330. añadole à èfte tantos zeros, como es la diferencia de las caracterifticas 4. y 3. y ferà 3300. parto 3300. por 550. y fale el quociente 6. y por lo dicho en la *propof.* 27. ferà

3.8972751. logarithmo de $7893 \frac{6}{10}$. y tomandole como

entero, ferà 78936. numero del logarithmo dado 4. 8972751.

PROP. XXXI. Problema.

Hallar el complemento Logarithmico.

EL complemento logarithmico, es *la diferencia que hay de qualquier logarithmo al radio.* Ufamos del complemento logarithmico frequentemente en las refoluciones de los triangulos por lo mucho que facilita las operaciones. Hallafe con gran facilidad fin efcrivir el logarithmo, ni el radio, tomando la diferencia que hay de cada letra del logarithmo hafta 9. empezando por la caracteriftica; folo en en la ultima de mano derecha se toma la diferencia hasta 10. como se vè en el exemplo siguiente.

Sea dado el logarithmo 6. 571. &c. pidese su complemento al radio. Sin escrivir el radio, digase: De 6. à 9. vàn 3. de 5. à 9. vàn 4. de 1. à 9. vàn 8. &c. y en la ultima letra, de 8. à 10. vàn 2. y serà el complemento logarithmico 3. 4288. &c.

Logarit.	6. 5711458.
Compl. Log.	3. 4288542.

Si el logarithmo, como sucede en las tangentes de los 45. grados arriba, fuere mayor que el radio, se tomarà el complemento al duplo radio 20. 0000000. de la misma suerte, no haciendo caso de la primera unidad, que està à la izquierda en la caracteristica, como si no estuviesse.

Sea la tangente logarithmica 10. 359. &c. su complemento al duplo radio se tomarà, diciendo: De zero à 9. vàn 9. de 3. à 9. vàn 6. &c. y en la ultima, de 1. à 10. vàn 9. y es el complemento logarithmico al duplo radio 9. 6400269.

Logarit.	10. 3599731.
Compl. Log.	9. 6400269.

CAPITULO IV.

APLICACION DE LOS LOGARITHMOS A DIFERENTES operaciones.

PROP. XXXII. Problema.

Dados tres numeros, hallar el quarto proporcional.

Operacion. Sumense los logarithmos del segundo, y tercero terminos; y de la suma restese el logarithmo del primero; y el residuo serà el logarithmo del quarto proporcional.

Exemplo. Si 12. dan 36. què daràn 25. Busquense en la tabla logarithmica los logarithmos de los tres numeros

da-

dados. Sumense los logarithmos del segundo, y tercero: y de la suma 2. 95. &c. restese el logarithmo del primero; y el residuo 1. 8750. &c. serà el logarithmo del quarto proporcional que se busca, que hallado en la tabla, se verà ser 75. Consta del corolario de la *prop.* 3.

		Logarithm.
Si	12.	1.0791812.
dan	36.	1.5563025.
què	25.	1.3979400.
		2.9542425.
		1.0791812.
	75.	1.8750613.

Si la regla de tres fuere inversa, se sumaràn los logarithmos del primero, y segundo terminos; y de la suma se restarà el logarithmo del tercero, y el residuo serà el del quarto que se busca.

PROP. XXXIII. Problema.

Executar lo sobredicho mas facilmente, tomando el complemento logarithmico.

SEan dados los numeros 12. 36. 25. y se busca el quarto proporcional. En lugar del logarithmo del primer termino, tomese su complemento al radio, (31.) y la suma de los tres, menos el radio, serà el logarithmo del quarto, que es 75. El radio se quita de la suma, omitiendo la primera unidad à la izquierda. Si el complemento logarithmico se huviesse tomado al duplo radio, se quitaria el 2. que viene à la izquierda.

12.	C.L.	8.9208188.
36.		1.5563025.
25.		1.3979400.
75.		1.8750613.

Demonstr. Como vimos en la prop. anteced. el quarto proporcional se halla, restando de la suma de los logarithmos del segundo, y tercero terminos, el logarithmo del primero. Este logarithmo primero, junto con su complemento hasta el radio, hace justamente el radio: luego si de la suma del segundo, y tercero, se dexa de restar el logarithmo primero, y à mas de esto, se le añade el complemento hasta el radio, la suma de los tres logarithmos excede al logarithmo que se busca en todo un radio entero: luego si de esta suma se resta el radio, quedarà el lo-

ga-

garithmo que se desea. Y como el radio se componga solamente de la unidad, y zeros, bastarà quitar la unidad en la forma dicha, para que quede quitado el radio: y por la misma razon, quando se tomò el complemento al duplo radio, se quitan 2. à la izquierda. *Este modo de obrar hace facilissimas las operaciones, y usaremos de èl en adelante, notando con las letras C, L, el complemento logarithmico.*

PROP. XXXIV. Problema.

Dados dos numeros, hallar el tercero proporcional.

Operacion. Dupliquese el logarithmo del numero segundo: y del duplo restese el logarithmo del numero primero; y el residuo serà el logarithmo del tercer numero que se busca. O mas facilmente: tomese el complemento logarithmico del numero primero, y el duplo del logarithmo del segundo: sumense entrambas partidas, y la suma, menos el radio, serà el logarithmo del tercero.

Exemplo. Sean dados los numeros 12. y 18. Pidese el tercero proporcional. Tomese el comp. logar. del primero; dupliquese el logarithmo de 18. y serà 2.510. &c. sumense entrambas partidas, y serà la suma 11.4313638. y quitado el radio, serà 1.431. &c. logarithmo de 27. tercero proporcional que se desea. Consta del corol. de la *prop.* 4.

12.	C.L.	8.9208188.
18.	Log.dupl.	2.5105450.
27.		1.4313638.

PROP. XXXV. Problema.

Entre dos numeros dados, hallar qualesquiera medios proporcionales.

Operacion. Busquense en la tabla los logarithmos de los numeros dados: restese el un logarithmo de el otro: y si se pide un medio proporcional, dividase dicha diferencia en dos partes iguales: y si se piden dos, dividase la misma diferencia en tres partes: y si tres, en quatro; y assi

assi de los demàs, dividiendole siempre en una parte mas que los medios que se piden. Añadida esta parte de diferencia al logarithmo menor, darà el logarithmo del primer medio que se pide: añadida dos veces, darà el del segundo; y assi de los demàs.

Exemplo. Sean dados los numeros 4. y 32. entre los quales se buscan dos medios proporcionales. El logarithmo de 4. es 0. 6020600. el de 32. es 1. 5051500. su diferencia partida por 3. es 0. 3010300. que añadida al logarithmo del 4. hace 0.9030900. que lo es del 8. medio primero que se busca: y añadido otra vez el mismo tercio 0. 30. &c. al logarithmo 0. 9030. &c. da el logarithmo 1. 2041200. que lo es de 16. segundo medio que se pretende.

Demonstr. Los logarithmos de numeros geometricamente proporcionales se exceden con excessos iguales, como consta de su mismo artificio: luego siendo tres los terminos proporcionales que hay despues del 4. hasta el 32. inclusivamente, la diferencia del logarithmo del 32. al del 4. incluirà tres veces la diferencia, ò excesso en que cada logarithmo excede à su inmediato: luego si la diferencia del logarithmo del 32. al de 4. se divide en tres partes, qualquiera de ellas serà el excesso de cada logarithmo à su inmediato: y por consiguiente, añadiendole continuamente à los logarithmos, se sabràn èstos, y los numeros sus correspondientes.

PROP. XXXVI. Problema.

Hallar qualquiera raiz numerica de un numero dado.

PArtase el logarithmo del numero dado por el exponente de la raiz que se pide, y el quociente serà el logarithmo de la raiz. *Exemplo.* Pidese la raiz quadrada del numero 324. Busquese su logarithmo en la tabla, y es 2. 5105450. y porque el exponente de la raiz quadrada es 2. partase dicho logarithmo por 2. y el quociente 1. 2552725. serà el logarithmo de la raiz. Busquese pues en la tabla, y à su lado se hallarà el numero 18. raiz quadrada de 324. Assimismo, sea dado el numero 5832. Pidese su raiz cubica: su logarithmo es 3. 7658175. y porque el exponente de la raiz cubica es 3. partase dicho lo-

logarithmo por 3. y el quociente 1. 2552725. serà el logarithmo de la raiz cubica que se busca; busquese en la tabla, y à su lado se hallarà 18. raiz cubica de 5832. Consta de la *prop.* 14.

PROP. XXXVII. Problema.

Hallar las Secantes Logarithmicas.

EN la *propos.* 10. del *lib.* 1. se demonstrò, que el radio es medio proporcional entre el seno segundo de un arco, y su secante primera; y entre el seno primero, y la secante segunda: luego (34.) si del logarithmo duplicado del radio se resta el logarithmo del seno segundo, el residuo serà el logarithmo de la secante primera: y si del mismo duplo se resta el logarithmo del seno primero, el residuo serà la secante segunda. *Exemplo.* Pidese la secante primera de el arco de 35. grad. 8. min. El logarithmo de su seno 2. es 9126.&c. restado del duplo radio 20.00 &c. el residuo 10.08.&c. es el logarithmo de la secante primera del arco propuesto. Asimismo, si de 20.00,&c. se resta el seno primero del mismo arco, que es 9.7600311. el residuo 10.2399689. serà la secante segunda.

20.0000000.
9.9126551.
10.0873449.

Esta operacion se abrevia aun mas, usando del complemento logarithmico. Tomese pues el complemento logarithmico del seno segundo sobredicho, y añadasele la unidad à la caracteristica, y se tendrà el logarithmo 10.0873449. que lo es de la tangente primera. Asimismo, tomando el complemento logarithmico del seno 1. arriba propuesto 9.760,&c. y añadida la unidad à la caracteristica, serà 10.2399689. el logarithmo de la secante segunda.

PROP. XXXVIII. Problema.

Hallar los Logarithmos de los senos versos, ò sagitas.

EN el corolario de la *propos.* 3. *lib.* 1. se demonstrò, que el seno de la mitad de un arco es medio proporcional entre el semiradio, y el seno verso de todo el arco: luego si se quiere hallar el seno verso de un arco, se havrà de hacer una regla de tres, diciendo: como la mitad del radio

radio al ſeno de la mitad del arco dado ; aſsi eſte miſm
ſeno al ſeno verſo del miſmo arco : luego obrando co
logarithmos , (34) ſi ſe duplica el logarithmo del ſeno d
la mitad del arco dado, y de eſte duplo ſe reſta el logarith
mo del ſemiradio , el reſiduo ſerà el logarithmo del ſen
verſo del arco dado.

Exemplo. Pideſe el logarithmo del ſeno verſo del arco de 50. grados. Halleſe el logarithmo del ſeno de 25. grados, que ſon la mitad de 50. Dupliqueſe , eſcriviendole dos veces, y ſumandole : reſteſe de eſta ſuma el logarithmo de la mitad del radio, que por la razon que luego dirè es 9. 6989700. y el reſiduo 9. 5529266. ſerà el logarithmo del ſeno verſo del arco de 50. grados.

9.6259483.
9.6259483.
19.2518966.
9.6989700.
9.5529266.

La razon , porque el logarithmo del ſemiradio es 9. 6989.&c. es, porque ſu logarithmo es el que en las tablas logarithmicas correſponde al número 5000. ſolo que la caracteriſtica ha de ſer 9. por haverſe ſupueſto quando ſe fabricaron los logarithmos, ſer el radio en numeros abſolutos 10000000000. y el ſemiradio 5000000000. con que conſtando èſte de 10. letras, la caracteriſtica de ſu logarithmo, ha de ſer 9. ſegun lo dicho à lo ultimo de la *propoſ.* 10.

Eſta operacion ſe harà mas brevemente uſando de el complemento logarithmico del ſemiradio , el qual complemento es igual al ſeno primero del numero 2. Eſcrivaſe pues en primer lugar el logarithmo del numero 2. como ſe ve : eſcrivaſe deſpues dos veces el logarithmo del ſeno de 25. grad. ſumenſe las tres partidas ; y la ſuma , quitada la unidad primera de la caracteriſtica, ſerà 9. 552. &c. logarithmo del ſeno verſo de 50. grados.

Logar. de 2.	0.3010299.
Logar. de 25	9.6259483.
Logar. de 25.	9.6259483.
Logar. del ſen. verſ.	9.5529265.

CA-

CANON
TRIGONOMETRICO
CON LOS SENOS, Y
Tangentes Logarithmicas,
ſuponiendo ſer el Radio
10000000.

Min.	0 Grad.		Min.	89. Grad.	
	Seno.	Tangente.		Seno.	Tangente.
0	0	0	60	10.0000000	Infinita.
1	6.4637261	6.4637261	59	9.9999999	13.5362739
2	6.7647561	6.7647562	58	9.9999999	13.2352438
3	6.9408473	6.9408475	57	9.9999998	13.0591525
4	7.0657860	7.0657863	56	9.9999997	12.9342137
5	7.1626960	7.1626964	55	9.9999995	12.8373036
6	7.2418771	7.2418778	54	9.9999993	12.7581222
7	7.3088239	7.3088248	53	9.9999991	12.6911752
8	7.3668157	7.3668169	52	9.9999988	12.6331831
9	7.4176681	7.4179696	51	9.9999985	12.5820304
10	7.4637255	7.4637273	50	9.9999982	12.5362727
11	7.5051181	7.5051203	49	9.9999978	12.4948797
12	7.5429065	7.5429091	48	9.9999974	12.4570909
13	7.5776684	7.5776715	47	9.9999969	12.4223285
14	7.6098530	7.6098566	46	9.9999964	12.3901434
15	7.6398160	7.6398201	45	9.9999959	12.3601799
16	7.6678445	7.6678492	44	9.9999953	12.3321508
17	7.6941733	7.6941786	43	9.9999947	12.3058214
18	7.7189966	7.7190026	42	9.9999940	12.2809974
19	7.7424775	7.7424841	41	9.9999934	12.2575159
20	7.7647537	7.7647610	40	9.9999927	12.2352390
21	7.7859427	7.7859508	39	9.9999919	12.2140492
22	7.8061458	7.8061547	38	9.9999911	12.1938453
23	7.8254507	7.8254604	37	9.9999903	12.1745396
24	7.8439338	7.8439444	36	9.9999894	12.1560556
25	7.8616623	7.8616738	35	9.9999885	12.1383262
26	7.8786953	7.8787077	34	9.9999876	12.1212923
27	7.8950854	7.8950988	33	9.9999866	12.1049012
28	7.9108793	7.9108938	32	9.9999856	12.0891062
29	7.9261190	7.9261344	31	9.9999845	12.0738656
30	7.9408419	7.9408584	30	9.9999835	12.0591416

Min.	0 Grad.		Min.	89 Grad.	
	Seno.	Tangente.		Seno.	Tangente.
30	7.9408419	7.9408584	30	9.9999835	12.0591416
31	7.9550819	7.9550996	29	9.9999823	12.0449004
32	7.9688698	7.9688886	28	9.9999812	12.0311114
33	7.9822334	7.9822534	27	9.9999800	12.0177466
34	7.9951980	7.9952192	26	9.9999788	12.0047808
35	8.0077867	8.0078092	25	9.9999775	11.9921908
36	8.0200207	8.0200445	24	9.9999762	11.9799555
37	8.0319195	8.0319446	23	9.9999748	11.9680554
38	8.0435009	8.0435274	22	9.9999735	11.9564726
39	8.0547814	8.0548094	21	9.9999721	11.9451906
40	8.0657763	8.0658057	20	9.9999706	11.9341943
41	8.0764997	8.0765306	19	9.9999691	11.9234694
42	8.0869646	8.0869970	18	9.9999676	11.9130030
43	8.0971832	8.0972172	17	9.9999660	11.9027828
44	8.1071669	8.1072025	16	9.9999644	11.8927975
45	8.1169262	8.1169634	15	9.9999628	11.8830366
46	8.1264710	8.1265099	14	9.9999611	11.8734901
47	8.1358104	8.1358510	13	9.9999594	11.8641490
48	8.1449532	8.1449956	12	9.9999577	11.8550044
49	8.1539075	8.1539516	11	9.9999559	11.8460484
50	8.1626808	8.1627267	10	9.9999541	11.8372733
51	8.1712804	8.1713282	9	9.9999522	11.8286718
52	8.1797129	8.1797626	8	9.9999503	11.8202374
53	8.1879848	8.1880364	7	9.9999484	11.8119636
54	8.1961020	8.1961556	6	9.9999464	11.8038444
55	8.2040703	8.2041259	5	9.9999444	11.7958741
56	8.2118949	8.2119526	4	9.9999424	11.7880474
57	8.2195811	8.2196408	3	9.9999403	11.7803592
58	8.2271335	8.2271953	2	9.9999382	11.7728047
59	8.2345568	8.2346208	1	9.9999360	11.7653792
60	8.2418553	8.2419215	0	9.9999338	11.7580785

Min.	1. Grad. Seno.	1. Grad. Tangente.	Min.	88. Grad. Seno.	88. Grad. Tangente.
0	8.2418553	8.2419215	60	9.9999338	11.7580785
1	8.2490332	8.2491015	59	9.9999316	11.7508985
2	8.2560943	8.2561649	58	9.9999294	11.7438351
3	8.2630424	8.2631153	57	9.9999271	11.736884
4	8.2698810	8.2699563	56	9.9999247	11.730043
5	8.2766136	8.2766912	55	9.9999224	11.723308
6	8.2832434	8.2833234	54	9.9999200	11.716676
7	8.2897734	8.2898559	53	9.9999175	11.710144
8	8.2962067	8.2962917	52	9.9999150	11.703708
9	8.3025460	8.3026335	51	9.9999125	11.697366
10	8.3087941	8.3088842	50	9.9999100	11.6911158
11	8.3149536	8.3150462	49	9.9999074	11.6849538
12	8.3210269	8.3211221	48	9.9999047	11.6788779
13	8.3270163	8.3271143	47	9.9999021	11.6728857
14	8.3329243	8.333024	46	9.9998994	11.6669751
15	8.3387529	8.3388563	45	9.9998966	11.6611437
16	8.3445043	8.3446105	44	9.9998939	11.6553895
17	8.3501805	8.3502895	43	9.9998911	11.6497105
18	8.3557835	8.3558953	42	9.9998882	11.6441047
19	8.3613150	8.3614297	41	9.9998853	11.6385703
20	8.3667769	8.3668945	40	9.9998824	11.6331055
21	8.3721710	8.3722915	39	9.9998794	11.6277085
22	8.3774988	8.3776223	38	9.9998764	11.6223777
23	8.3827620	8.3828886	37	9.9998734	11.6171114
24	8.3879622	8.3880918	36	9.9998703	11.6119082
25	8.3931008	8.3932336	35	9.9998672	11.6067664
26	8.3981793	8.3983152	34	9.9998641	11.6016848
27	8.4031990	8.4033381	33	9.9998609	11.5966619
28	8.4081614	8.4083037	32	9.9998577	11.5916963
29	8.4130676	8.4132132	31	9.9998544	11.5867868
30	8.4179190	8.4180679	30	9.9998512	11.5819321

Min.	1. Grad. Seno.	1. Grad. Tangente.	Min.	88. Grad. Seno.	88. Grad. Tangente.
30	8.4179190	8.4180679	30	9.9998512	11.5819321
31	8.4227168	8.4228690	29	9.9998478	11.577131
32	8.4274621	8.4276176	28	9.9998445	11.572382
33	8.4321561	8.4323150	27	9.9998411	11.567685
34	8.4367999	8.4369622	26	9.9998376	11.563037
35	8.4413944	8.4415603	25	9.9998342	11.558439
36	8.4559409	8.4461103	24	9.9998306	11.553889
37	8.4504402	8.4506131	23	9.9998271	11.549386
38	8.4548934	8.4550699	22	9.9998235	11.544930
39	8.4593013	8.4594814	21	9.9998199	11.540518
40	8.4636649	8.4638486	20	9.9998162	11.536151
41	8.4679850	8.4681725	19	9.9998125	11.531827
42	8.4722626	8.4724538	18	9.9998088	11.527546
43	8.4764984	8.4766933	17	9.9998050	11.523306
44	8.4806932	8.4808920	16	9.9998012	11.519108
45	8.4848479	8.4850505	15	9.9997974	11.514949
46	8.4889632	8.4891696	14	9.9997935	11.510830
47	8.4930398	8.4932502	13	9.9997896	11.506749
48	8.4970784	8.4972928	12	9.9997856	11.502707
49	8.5010798	8.5012982	11	9.9997817	11.498701
50	8.5050447	8.5052671	10	9.9997776	11.494732
51	8.5089736	8.5092001	9	9.9997736	11.490799
52	8.5128673	8.5130978	8	9.9997695	11.486902
53	8.5167264	8.5169610	7	9.9997653	11.483038
54	8.5205514	8.5207902	6	9.9997612	11.479209
55	8.5243430	8.5245860	5	9.9997570	11.475414
56	8.5281017	8.5283490	4	9.9997527	11.471651
57	8.5318281	8.5320797	3	9.9997484	11.467920
58	8.5355228	8.5357787	2	9.9997441	11.464221
59	8.5391863	8.5394466	1	9.9997398	11.460553
60	8.5428192	8.5430838	0	9.9997354	11.436916

Min.	2. Grad. Seno.	2. Grad. Tangente.	Min.	87. Grad. Seno.	87. Grad. Tangente.
0	8.5428192	8.5430838	60	9.9997354	11.4569162
1	8.5464218	8.5466909	59	9.9997309	11.4533091
2	8.5499948	8.5502683	58	9.9997265	11.4497317
3	8.5535386	8.5538166	57	9.9997220	11.4461834
4	8.5570536	8.5573362	56	9.9997174	11.4426638
5	8.5605404	8.5608276	55	9.9997128	11.4391724
6	8.5639994	8.5642912	54	9.9997082	11.4357088
7	8.5674310	8.5677275	53	9.9997036	11.4322725
8	8.5708357	8.5711368	52	9.9996989	11.4288632
9	8.5742139	8.5745197	51	9.9996942	11.4254803
10	8.5775660	8.5778766	50	9.9996894	11.4221234
11	8.5808923	8.5812077	49	9.9996846	11.4187923
12	8.5841933	8.5845136	48	9.9996798	11.4154864
13	8.5874694	8.5877945	47	9.9996749	11.4122055
14	8.5907209	8.5910509	46	9.9996700	11.4089491
15	8.5939483	8.5942832	45	9.9996650	11.4057168
16	8.5971517	8.5974917	44	9.9996601	11.4025083
17	8.6003317	8.6006767	43	9.9996550	11.3993233
18	8.6034886	8.6038386	42	9.9996500	11.3961614
19	8.6066226	8.6069777	41	9.9996449	11.3930223
20	8.6097341	8.6100943	40	9.9996398	11.3899057
21	8.6128235	8.6131889	39	9.9996346	11.3868111
22	8.6158910	8.6162616	38	9.9996294	11.3837384
23	8.6189366	8.6193127	37	9.9996242	11.3806873
24	8.6219616	8.6223427	36	9.9996189	11.3776573
25	8.6249653	8.6253518	35	9.9996136	11.3746482
26	8.6279484	8.6283402	34	9.9996082	11.3716598
27	8.6309111	8.6313083	33	9.9996028	11.3686917
28	8.6338537	8.6342563	32	9.9995974	11.3657437
29	8.6367764	8.6371845	31	9.9995919	11.3628155
30	8.6396796	8.6400931	30	9.9995865	11.3599059

Min.	2. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	87. Grad. Seno.	Tangente.
30	8.6396796	8.6400931	30	9.9995865	11.3599069
31	8.6425634	8.6429825	29	9.9995809	11.3570175
32	8.6454282	8.6458528	28	9.9995753	11.3541472
33	8.6482742	8.6487044	27	9.9995697	11.3512956
34	8.6511016	8.6515375	26	9.9995641	11.3484625
35	8.6539107	8.6543522	25	9.9995584	11.3456478
36	8.6567017	8.8571490	24	9.9995527	11.3428510
37	8.6594748	8.6599279	23	9.9995469	11.3400721
38	8.6622303	8.6626891	22	9.9995411	11.3373109
39	8.6649684	8.8654331	21	9.9995353	11.3375669
40	8.6676893	8.6681598	20	9.9995295	11.3318402
41	8.6703932	8.6708697	19	9.9995236	11.3291303
42	8.6730804	8.6735628	18	9.9995176	11.3264372
43	8.6757510	8.6762393	17	9.9995116	11.3237607
44	8.6784052	8.6788996	16	9.9995056	11.3211004
45	8.6810433	8.6815437	15	9.9994996	11.3184563
46	8.6836654	8.6841719	14	9.9994935	11.3158281
47	8.6862718	8.6867844	13	9.9994874	11.3132156
48	8.6888625	8.6893813	12	9.9994812	11.3106187
49	8.6914379	8.6919629	11	9.9994750	11.3080371
50	8.6939980	8.6945292	10	9.9994688	11.3054708
51	8.6965431	8.6970806	9	9.9994625	11.3029194
52	8.6990734	8.6996173	8	9.9994562	11.3003828
53	8.7015889	8.7021390	7	9.9994498	11.2978610
54	8.7040899	8.7046465	6	9.9994435	11.2953535
55	8.7065766	8.7071395	5	9.9994370	11.2928605
56	8.7090490	8.7096185	4	9.9994306	11.2903815
67	8.7115075	8.7120834	3	9.9994241	11.2879166
58	8.7139520	8.7145345	2	9.9994176	11.2854655
59	8.7163829	8.7169719	1	9.9994110	11.2830281
60	8.7188002	8.7193958	0	9.9994044	11.2806042

Min.	3. Grad. Seno.	3. Grad. Tangente.	Min.	87. Grad. Seno.	87. Grad. Tangente.
0	8.7188002	8.7193958	60	9.9994044	11.2806042
1	8.7212040	8.7218063	59	9.9993978	11.2781937
2	8.7235946	8.7242035	58	9.9993911	11.2757965
3	8.7259721	8.7265877	57	9.9993844	11.2734123
4	8.7283366	8.7289589	56	9.9993776	11.2710411
5	8.7306882	8.7313174	55	9.9993708	11.2686826
6	8.7330272	8.7336631	54	9.9993640	11.2663369
7	8.7353535	8.7359964	53	9.9993572	11.2640036
8	8.7376675	8.7383172	52	9.9993503	11.2616828
9	8.7399691	8.7406258	51	9.9993433	11.2593742
10	8.7422586	8.7429222	50	9.9993364	11.2570778
11	8.7445360	8.7452067	49	9.9993293	11.2547933
12	8.7468015	8.7474792	48	9.9993223	11.2525208
13	8.7490553	8.7497400	47	9.9993152	11.2502600
14	8.7512973	8.7519892	46	9.9993081	11.2480108
15	8.7535278	8.7542269	45	9.9993009	11.2457731
16	8.7557469	8.7564531	44	9.9992938	11.2435469
17	8.7579546	8.7586681	43	9.9992865	11.2413319
18	8.7601512	8.7608719	42	9.9992793	11.2391281
19	8.7623366	8.7630647	41	9.9992720	11.2369353
20	8.7645111	8.7652465	40	9.9992646	11.2347535
21	8.7666747	8.7674175	39	9.9992572	11.2325825
22	8.7688275	8.7695777	38	9.9992498	11.2304223
23	8.7709697	8.7717274	37	9.9992424	11.2282726
24	8.7731014	8.7738665	36	9.9992349	11.2261335
25	8.7752226	8.7759952	35	9.9992274	11.2240048
26	8.7773334	8.7781136	34	9.9992198	11.2218864
27	8.7794340	8.7802218	33	9.9992122	11.2197782
28	8.7815244	8.7823199	32	9.9992046	11.2176801
29	8.7836048	8.7844079	31	9.9991969	11.2155921
30	8.7856753	8.7864861	30	9.9991892	11.2135139

Min.	3. Grad. Seno.	3. Grad. Tangente.	Min.	86. Grad. Seno.	86. Grad. Tangente.
30	8.7856753	8.7864861	30	9.9991892	11.2135139
31	8.7877359	8.7885544	29	9.9991815	11.2114456
32	8.7897867	8.7906130	28	9.9991737	11.2093870
33	8.7918278	8.7926620	27	9.9991659	11.2073380
34	8.7938594	8.7947014	26	9.9991580	11.2052986
35	8.7958814	8.7967313	25	9.9991501	11.2032687
36	8.7978941	8.7987519	24	9.9991422	11.2012481
37	8.7998974	8.8007632	23	9.9991342	11.1992368
38	8.8018915	8.8027653	22	9.9991262	11.1972347
39	8.8038764	8.8047583	21	9.9991182	11.1952417
40	8.8058523	8.8067422	20	9.9991101	11.1932578
41	8.8078192	8.8087172	19	9.9991020	11.1912828
42	8.8097772	8.8106834	18	9.9990938	11.1893166
43	8.8117264	8.8126407	17	9.9990856	11.1873593
44	8.8136668	8.8145894	16	9.9990774	11.1854106
45	8.8155985	8.8165294	15	9.9990601	11.1834706
46	8.8175217	8.8184608	14	9.9990608	11.1815392
47	8.8194363	8.8203838	13	9.9990525	11.1796162
48	8.8213425	8.8222984	12	9.9990441	11.1777016
49	8.8232404	8.8242046	11	9.9990357	11.1757954
50	8.8251299	8.8261026	10	9.9990273	11.1738974
51	8.8270112	8.8279924	9	9.9990188	11.1720076
52	8.8288844	8.8298741	8	9.9990103	11.1701259
53	8.8307495	8.8317478	7	9.9990017	11.1682522
54	8.8326066	8.8336134	6	9.9989931	11.1663866
55	8.8344557	8.8354712	5	9.9989845	11.1645288
56	8.8362969	8.8373211	4	9.9989758	11.1626789
57	8.8381304	8.8391633	3	9.9989671	11.1608367
58	8.8499561	8.8409977	2	9.9989584	11.1590023
59	8.8417741	8.8428245	1	9.9989496	11.1571755
60	8.8435845	8.8446437	0	9.9989408	11.1553563

Min.	4. Grad. Seno.	4. Grad. Tangente.	Min.	85. Grad. Seno.	85. Grad. Tangente.
0	8.8435845	8.8446437	60	9.9989408	11.1553563
1	8.8453874	8.8464554	59	9.9989319	11.1535446
2	8.8471827	8.8482597	58	9.9989230	11.1517403
3	8.8489707	8.8500566	57	9.9989141	11.1499434
4	8.8507512	8.8518461	56	9.9989052	11.1481539
5	8.8525245	8.8536283	55	9.9988962	11.1463717
6	8.8542905	8.8554034	54	9.9988871	11.1445966
7	8.8560493	8.8571713	53	9.9988780	11.1428287
8	8.8578010	8.8589321	52	9.9988689	11.1410679
9	8.8595457	8.8606859	51	9.9988598	11.1393141
10	8.8612833	8.8624327	50	9.9988506	11.1375673
11	8.8630139	8.8641725	49	9.9988414	11.1358275
12	8.8647376	8.8659055	48	9.9988321	11.1340945
13	8.8664545	8.8676317	47	9.9988228	11.1323683
14	8.8681646	8.8693511	46	9.9988135	11.1306489
15	8.8698680	8.8710638	45	9.9988041	11.1289362
16	8.8715646	8.8727699	44	9.9987947	11.1272301
17	8.8732546	8.8744694	43	9.9987853	11.1255306
18	8.8749381	8.8761623	42	9.9987758	11.1238377
19	8.8766150	8.8778487	41	9.9987663	11.1221513
20	8.8782854	8.8795286	40	9.9987567	11.1204714
21	8.8799493	8.8812022	39	9.9987471	11.1187978
22	8.8816069	8.8828694	38	9.9987375	11.1171306
23	8.8832581	8.8845303	37	9.9987278	11.1154697
24	8.8849031	8.8861880	36	9.9987181	11.1138150
25	8.8865418	8.8878334	35	9.9987084	11.1121666
26	8.8881743	8.8894757	34	9.9986986	11.1105243
27	8.8898007	8.8911119	33	9.9986888	11.1088881
28	8.8914209	8.8927420	32	9.9986790	11.1072580
29	8.8930351	8.8943660	31	9.9986691	11.1056340
30	8.8946433	8.8959842	30	9.9986591	11.1040158

Min.	4. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	85. Grad. Seno.	Tangente.
30	8.8946433	8.8959842	30	9.9986591	11.1040158
31	8.8962455	8.8975963	29	9.9986492	11.1024037
32	8.8978418	8.8992026	28	9.9986392	11.1007974
33	8.8994322	8.9008030	27	9.9986292	11.0991970
34	8.9010168	8.9023977	26	9.9986191	11.0976023
35	8.9025955	8.9039866	25	9.9986090	11.0960134
36	8.9041685	8.9055697	24	9.9985988	11.0844303
37	8.9057358	8.9071472	23	9.9985886	11.0928528
38	8.9072975	8.9087190	22	9.9985784	11.0912810
39	8.9088535	8.9102853	21	9.9985682	11.0897147
40	8.9104039	8.9118460	20	9.9985579	11.0881540
41	8.9119487	8.9134012	19	9.9985475	11.0865988
42	8.9134881	8.9149509	18	9.9985372	11.0850491
43	8.9150219	8.9164952	17	9.9985268	11.0835048
44	8.9165504	8.9180340	16	9.9985163	11.0819660
45	8.9180734	8.9195675	15	9.9985058	11.0804325
46	8.9195911	8.9210957	14	9.9984953	11.0789043
47	8.9211034	8.9226186	13	9.9984848	11.0773814
48	8.9226105	8.9241363	12	9.9984742	11.0758637
49	8.9241123	8.9256487	11	9.9984636	11.0743513
50	8.9256089	8.9271560	10	9.9984529	11.0728440
51	8.9271003	8.9286581	9	9.9984422	11.0713419
52	8.9285866	8.9301552	8	9.9984315	11.0698448
53	8.9300678	8.9316471	7	9.9984107	11.0683529
54	8.9315439	8.9331340	6	9.9984099	11.0668660
55	8.9330150	8.9346160	5	9.9983990	11.0653840
56	8.9344811	8.9360929	4	9.9983881	11.0639071
57	8.9359422	8.9375650	3	9.9983772	11.0624350
58	8.9373983	8.9390321	2	9.9983663	11.0609679
59	8.9388496	8.9404944	1	9.9983553	11.0595056
60	8.9402960	8.9419518	0	9.9983442	11.0580482

Min.	5. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	84. Grad. Seno.	Tangente.
0	8.9402960	8.9419518	60	9.9983442	11.058048
1	8.9417376	8.9434044	59	9.9983332	11.056595
2	8.9431743	8.9448523	58	9.9983220	11.055147
3	8.9446063	8.9462954	57	9.9983109	11.0537046
4	8.9460335	8.9477338	56	9.9982997	11.0522662
5	8.9474561	8.9491676	55	9.9982885	11.0508324
6	8.9488739	8.9505967	54	9.9982772	11.0494033
7	8.9502871	8.9520211	53	9.9982660	11.0479789
8	8.9516957	8.9534410	52	9.9982546	11.0465590
9	8.9530996	8.9548564	51	9.9982433	11.0451436
10	8.9544991	8.9562672	50	9.9982318	11.0437328
11	8.9558940	8.9576735	49	9.9982204	11.0423265
12	8.9572843	8.9590754	48	9.9982089	11.0409246
13	8.9586703	8.9604728	47	9.9981974	11.0395272
14	8.9600517	8.9618659	46	9.9981859	11.0381341
15	8.9614288	8.9632545	45	9.9981743	11.0367455
16	8.9628014	8.9646388	44	9.9981626	11.0353612
17	8.9641697	8.9660188	43	9.9981510	11.0339812
18	8.9655337	8.9673944	42	9.9981393	11.0326056
19	8.9668934	8.9687658	41	9.9981275	11.0312342
20	8.9682487	8.9701330	40	9.9981158	11.0298670
21	8.9695999	8.9714959	39	9.9981040	11.0285041
22	8.9709468	8.9728547	38	9.9980921	11.0271453
23	8.9722895	8.9742092	37	9.9980802	11.0257908
24	8.9736280	8.9755597	36	9.9980683	11.0244403
25	8.9749624	8.9769060	35	9.9980563	11.0230940
26	8.9762926	8.9782483	34	9.9980443	11.0217517
27	8.9776188	8.9795865	33	9.9980323	11.0204135
28	8.9789408	8.9809206	32	9.9980202	11.0190794
29	8.9802589	8.9822507	31	9.9980081	11.0177493
30	8.9815729	8.9835769	30	9.9979960	11.0164231

Min.	5. Grad. Seno.	5. Grad. Tangente.	Min.	84. Grad. Seno.	84. Grad. Tangente.
30	8.9815729	8.9835769	30	9.9979960	11.0164231
31	8.9828829	8.9848991	29	9.9979838	11.0151009
32	8.9841889	8.9862173	28	9.9979716	11.0137827
33	8.9854910	8.9875317	27	9.9979593	11.0124683
34	8.9867891	8.9888421	26	9.9979470	11.0111579
35	8.9880834	8.9901487	25	9.9979347	11.0098513
36	8.9893737	8.9914514	24	9.9979223	11.0085486
37	8.9906602	8.9927503	23	9.9979099	11.0072497
38	8.9919429	8.9940454	22	9.9978975	11.0059546
39	8.9932217	8.9953367	21	9.9978850	11.0046633
40	8.9944968	8.9966243	20	9.9978725	11.0033757
41	8.9957681	8.9979081	19	9.9978599	11.0020918
42	8.9970356	8.9991883	18	9.9978473	11.0008117
43	8.9982994	9.0004647	17	9.9978347	10.9995353
44	8.9995595	9.0017375	16	9.9978220	10.9982625
45	9.0008160	9.0030066	15	9.9978093	10.9969934
46	9.0020687	9.0042721	14	9.9977966	10.9957279
47	9.0033179	9.0055340	13	9.9977838	10.9944660
48	9.0045634	9.0067924	12	9.9977710	10.9932076
49	9.0058053	9.0080471	11	9.9977582	10.9919529
50	9.0070436	9.0092984	10	9.9977453	10.9907016
51	9.0082784	9.0105461	9	9.9977323	10.9894539
52	9.0095096	9.0117903	8	9.9977194	10.9882097
53	9.0107374	9.0130310	7	9.9977064	10.9869690
54	9.0119616	9.0142682	6	9.9976933	10.9857318
55	9.0131823	9.0155021	5	9.9976803	10.9844979
56	9.0143996	9.0167325	4	9.9976672	10.9832675
57	9.0156135	9.0179594	3	9.9976540	10.9820406
58	9.0168239	9.0191831	2	9.9976408	10.9808169
59	9.0180309	9.0204033	1	9.9976276	10.9795967
60	9.0192346	9.0216202	0	9.9976143	10.9783798

Min.	6. Grad.		Min.	83. Grad.	
	Seno.	Tangente.		Seno.	Tangente.
0	9.0192346	9.0216202	60	9.9976143	10.9783798
1	9.0204348	9.0228338	59	9.9976011	10.9771662
2	9.0216318	9.0240441	58	9.9975877	10.9759559
3	9.0228254	9.0252510	57	9.9975743	10.9747490
4	9.0240157	9.0264548	56	9.9975609	10.9735452
5	9.0252027	9.0276552	55	9.9975475	10.9723448
6	9.0263865	9.0288524	54	9.9975340	10.9711476
7	9.0275669	9.0300464	53	9.9975205	10.9699536
8	9.0287442	9.0312373	52	9.9975069	10.9687627
9	9.0299182	9.0324249	51	9.9974933	10.9675751
10	9.0310890	9.0336093	50	9.9974797	10.9663907
11	9.0322567	9.0347906	49	9.9974660	10.9652094
12	9.0334212	9.0359688	48	9.9974523	10.9640312
13	9.0345825	9.0371439	47	9.9974386	10.9628561
14	9.0357405	9.0383159	46	9.9974248	10.9616841
15	9.0368958	9.0394848	45	9.9974110	10.9605152
16	9.0380477	9.0406506	44	9.9973971	10.9593494
17	9.0391966	9.0418134	43	9.9973833	10.9581866
18	9.0403424	9.0429731	42	9.9973693	10.9570269
19	9.0414852	9.0441299	41	9.9973554	10.9558701
20	9.0426249	9.0452836	40	9.9973414	10.9547164
21	9.0437617	9.0464343	39	9.9973273	10.9535657
22	9.0448954	9.0475821	38	9.9973132	10.9524179
23	9.0460261	9.0487270	37	9.9972991	10.9512730
24	9.0471538	9.0498689	36	9.9972850	10.9501311
25	9.0482786	9.0510078	35	9.9972708	10.9489922
26	9.0494005	9.0521439	34	9.9972566	10.9478561
27	9.0505194	9.0532771	33	9.9972423	10.9467229
28	9.0516354	9.0544074	32	9.9972280	10.9455926
29	9.0527485	9.0555349	31	9.9972137	10.9444651
30	9.0538588	9.0566595	30	9.9971993	10.9433405

Min.	6. Grad. Seno.	6. Grad. Tangente.	Min.	83. Grad. Seno.	83. Grad. Tangente.
30	9.0538588	9.0566595	30	9.9971993	10.9433405
31	9.0549661	9.0577813	29	9.9971849	10.9422187
32	9.0560706	9.0589002	28	9.9971704	10.9410998
33	9.0571723	9.0600164	27	9.9971559	10.9399836
34	9.0582711	9.0611297	26	9.9971414	10.9388703
35	9.0593672	9.0622403	25	9.9971268	10.9377595
36	9.0604604	9.0633482	24	9.9971122	10.9366518
37	9.0615509	9.0644533	23	9.9970976	10.9355467
38	9.0626386	9.0655556	22	9.9970829	10.9344444
39	9.0637235	9.0666553	21	9.9970682	10.9333447
40	9.0648057	9.0677522	20	9.9970535	10.9322478
41	9.0658852	9.0688465	19	9.9970387	10.9311535
42	9.0669619	9.0699381	18	9.9970239	10.9300619
43	9.0680360	9.0710270	17	9.9970090	10.9289730
44	9.0691074	9.0721133	16	9.9969941	10.9278867
45	9.0701761	9.0731969	15	9.9969792	10.9268031
46	9.0712421	9.0742779	14	9.9969642	10.9257221
47	9.0723055	9.0753563	13	9.9969492	10.9246437
48	9.0733663	9.0764321	12	9.9969342	10.9235679
49	9.0744244	9.0775053	11	9.9969191	10.9224947
50	9.0754799	9.0785760	10	9.9969040	10.9214240
51	9.0765329	9.0796441	9	9.9968888	10.9203559
52	9.0775832	9.0807096	8	9.9968736	10.9192904
53	9.0786310	9.0817726	7	9.9968584	10.9182274
54	9.0796762	9.0828331	6	9.9968431	10.9171669
55	9.0807189	9.0838911	5	9.9968278	10.9161089
56	9.0817590	9.0849466	4	9.9968125	10.9150534
57	9.0827966	9.0859996	3	9.9967817	10.9140004
58	9.0838317	9.0870501	2	9.9967815	10.9129499
59	9.0848643	9.0880981	1	9.9967662	10.9119019
60	9.0858945	9.0891438	0	9.9967507	10.9108562

Min.	7. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	82. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.0858945	9.0891438	60	9.9967507	10.9108562
1	9.0869221	9,0901869	59	9.9967352	10.9098131
2	9.0879473	9.0912277	58	9.9967196	10.9087723
3	9.0889700	9.0922660	57	9.9967040	10.9077340
4	9.0899903	9.0933020	56	9.9966884	10.9066980
5	9.0910082	9.0943355	55	9.9966727	10.9056645
6	9.0920237	9.0953669	54	9.9966570	10.9046333
7	9.0930367	9.0963955	53	9.9966412	10.9036045
8	9.0940474	9.0974219	52	9.9966254	10.9025781
9	9.0950556	9.0984460	51	9.9966096	10.9015540
10	9.0960615	9.0994678	50	9.9965937	10.9005322
11	9.0970651	9.1004872	49	9.9965778	10.8995128
12	9.0980662	9.1015044	48	9.9965619	10.8984956
13	9.0990651	9.1025192	47	9.9965459	10.8974808
14	9.1000616	9.1035317	46	9.9965299	10.8964683
15	9.1010558	9.1045420	45	9.9965138	10.8954580
16	9.1020477	9.1055500	44	9.9964977	10,8944500
17	9.1030373	9.1065557	43	9.9964816	10.8934443
18	9.1040246	9.1075591	42	9.9964655	10.8924409
19	9.1050096	9.1085604	41	9.9964493	10.8914396
20	9.1059924	9.1095594	40	9.9964330	10.8904406
21	9.1069729	9.1105562	39	9.9964167	10.8894438
22	9.1079512	9.1115508	38	9.9964004	10.8884492
23	9.1089272	9.1125431	37	9.9963841	10.8874569
24	9.1099010	6.1135333	36	9.9963677	10.8894667
25	9.1108726	9.1145213	35	9.9963513	10.8854787
26	9.1118420	9.1155072	34	9.9963348	10.8844928
27	9.1128092	9.1164909	33	9.9963183	10.8835091
28	9.1137742	9.1174724	32	9.9963018	10.8825276
29	9.1147370	9.1184518	31	9.9962852	10.8815482
30	9.1156977	9.1194291	30	9.9962686	10.8805709

Min.	7. Grad. Seno.	7. Grad. Tangente.	Min.	82. Grad. Seno.	82. Grad. Tangente.
30	9.1156977	9.1194291	30	9.9962686	10.8805709
31	9.1166562	9.1204043	29	9.9962519	10.8795957
32	9.1176125	9.1213773	28	9.9962352	10.8786227
33	9.1185667	9.1223482	27	9.9962185	10.8776518
34	9.1195188	9.1233171	26	9.9962017	10.8766829
35	9.1204688	9.1242839	25	9.9961849	10.8757161
36	9.1214167	9.1252486	24	9.9961681	10.8747514
37	9.1223624	9.1262112	23	9.9961512	10.8737888
38	9.1233061	9.1271718	22	9.9961343	10.8728282
39	9.1242477	9.1281303	21	9.9961174	10.8718697
40	9.1251872	9.1290868	20	9.9961004	10.8709132
41	9.1261246	9.1300413	19	9.9960834	10.8699587
42	9.1270600	9.1309937	18	9.9960663	10.8690063
43	9.1279934	9.1319442	17	9.9960492	10.8680558
44	9.1289247	9.1328926	16	9.9960321	10.8671074
45	9.1298539	9.1338391	15	9.9960149	10.8661609
46	9.1307812	9.1347835	14	9.9959977	10.8652165
47	9.1317064	9.1357260	13	9.9959804	10.8642740
48	9.1326297	9.1366665	12	9.9959631	10.8633335
49	9.1335509	9.1376051	11	9.9959458	10.8623949
50	9.1344702	9.1385417	10	9.9959284	10.8614583
51	9.1353875	9.1394764	9	9.9959111	10.8605236
52	9.1363028	9.1404092	8	9.9958936	10.8595908
53	9.1372161	9.1413400	7	9.9958761	10.8586600
54	9.1381275	9.1422689	6	9.9958586	10.8577311
55	9.1390370	9.1431959	5	9.9958411	10.8568041
56	9.1399445	9.1441210	4	9.9958235	10.8558790
57	9.1408501	9.1450442	3	9.9958059	10.8549558
58	9.1417537	9.1459655	2	9.9957882	10.8540345
59	9.1426555	9.1468850	1	9.9957705	10.8531150
60	9.1435553	9.1478025	0	9.9957528	10.8521975

Min.	8. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	81. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.1435553	9.1478025	60	9.9957528	10.8521975
1	9.1444532	9.1487182	59	9.9957350	10.8512818
2	9.1453493	9.1496321	58	9.9957172	10.8503679
3	9.1462435	9.1505441	57	9.9956993	10.8494559
4	9.1471358	9.1514543	56	9.9956815	10.8485457
5	9.1480262	9.1523627	55	9.9956635	10.8476373
6	9.1489148	9.1532692	54	9.9956456	10.8467308
7	9.1498015	9.1541739	53	9.9956276	10.8458261
8	9.1506864	9.1550769	52	9.9956095	10.8449231
9	9.1515694	9.1559780	51	9.9955915	10.8440220
10	9.1524507	9.1568773	50	9.9955734	10.8431227
11	9.1533301	9.1577748	49	9.9955552	10.8422252
12	9.1542076	9.1586706	48	9.9955370	10.8413294
13	9.1550834	9.1595646	47	9.9955188	10.8404354
14	9.1559574	9.1604569	46	9.9955005	10.8395431
15	9.1568296	9.1613473	45	9.9954822	10.8386527
16	9.1577000	9.1622361	44	9.9954639	10.8377639
17	9.1585686	9.1631231	43	9.9954455	10.8368769
18	9.1594354	9.1640083	42	9.9954272	10.8359917
19	9.1603005	9.1648919	41	9.9954087	10.8351081
20	9.1611639	9.1657737	40	9.9953902	10.8342263
21	9.1620254	9.1666538	39	9.9953717	10.8333462
22	9.1628853	9.1675322	38	9.9953531	10.8324678
23	9.1637434	9.1684089	37	9.9953345	10.8315911
24	9.2645998	9.1692839	36	9.9953159	10.8307161
25	9.1654544	9.1701572	35	9.9952972	10.8298428
26	9.1663074	9.1710289	34	9.9952785	10.8289711
27	9.1671586	9.1718989	33	9.9952597	10.8281011
28	9.1680081	9.1727672	32	9.9952409	10.8272328
29	9.1688559	9.1736338	31	9.9952221	10.8263662
30	9.1697021	9.1744988	30	9.9952032	10.8255012

Min.	8. Grad. Seno.	8. Grad. Tangente.	Min.	81. Grad. Seno.	81. Grad. Tangente.
30	9.1697011	9.1744988	30	9.9952033	10.8255012
31	9.1705465	9.1753622	29	9.9951844	10.8246378
32	9.1713893	9.1762239	28	9.9951654	10.8237761
33	9.1722305	9.1770840	27	9.9951464	10.8229160
34	9.1730699	9.1779425	26	9.9951274	10.8220575
35	9.1739077	9.1787993	25	9.9951084	10.8212007
36	9.1747439	9.1796546	24	9.9950893	10.8203454
37	9.1755784	9.1805082	23	9.9950702	10.8194918
38	9.1764112	9.1813602	22	9.9950510	10.8186398
39	9.1772425	9.1822106	21	9.9950318	10.8177894
40	9.1780721	9.1830595	20	9.9950126	10.8169405
41	9.1789001	9.1839068	19	9.9949933	10.8160932
42	9.1797265	9.1847525	18	9.9949740	10.8152475
43	9.1805512	9.1855966	17	9.9949546	10.8144034
44	9.1813744	9.1864392	16	9.9949352	10.8135608
45	9.1821960	9.1872802	15	9.9949158	10.8127198
46	9.1830160	9.1881196	14	9.9948964	10.8118804
47	9.1838344	9.1889575	13	9.9948769	10.8110425
48	9.1846512	9.1897939	12	9.9948573	10.8102061
49	9.1854665	9.1906287	11	9.9948377	10.8093713
50	9.1862802	9.1914621	10	9.9948181	10.8085379
51	9.1870923	9.1922939	9	9.9947985	10.8077061
52	9.1879029	9.1931241	8	9.9947788	10.8068759
53	9.1887120	9.1939529	7	9.9947591	10.8060471
54	9.1895195	9.1947802	6	9.9947393	10.8052198
55	9.1903254	9.1956059	5	9.9947195	10.8043941
56	9.1911299	9.1964302	4	9.9946997	10.8035698
57	9.1919328	9.1972530	3	9.9946798	10.8027470
58	9.1927342	9.1980743	2	9.9946599	10.8019257
59	9.1935341	9.1988941	1	9.9946399	10.8011059
60	9.1943324	9.1997125	0	9.9946199	10.8002875

Min.	9. Grad. Seno.	9. Grad. Tangente.	Min.	80. Grad. Seno.	80. Grad. Tangente.
0	9.1943324	9.1997125	60	9.9946199	10.8002875
1	9.1951293	9.2005294	59	9.9945999	10.7994706
2	9.1959247	9.2013449	58	9.9945798	10.7986551
3	9.1967186	9.2021588	57	9.9945597	10.7978411
4	9.1975110	9.2029714	56	9.9945399	10.7970286
5	9.1983019	9.2037825	55	9.9945194	10.7962175
6	9.1990913	9.2045922	54	9.9944992	10.7954078
7	9.1998793	9.2054004	53	9.9944389	10.7945996
8	9.2006658	9.2062072	52	9.9944587	10.7937928
9	9.2014509	9.2070126	51	9.9944383	10.7929874
10	9.2022345	9.2078165	50	9.9944180	10.7921835
11	9.2030167	9.2086191	49	9.9943975	10.7913809
12	9.2037974	9.2094203	48	9.9943771	10.7905797
13	9.2045766	9.2102200	47	9.9943566	10.7897800
14	9.2053545	9.2110184	46	9.9943361	10.7889816
15	9.2061309	9.2118153	45	9.9943156	10.7881847
16	9.2069059	9.2126109	44	9.9942950	10.7873891
17	9.2076795	9.2134051	43	9.9942743	10.7865949
18	9.2084516	9.2141980	42	9.9942537	10.7858020
19	9.2092224	9.2149894	41	9.9942330	10.7850106
20	9.2099917	9.2157795	40	9.9942122	10.7842205
21	9.2107597	9.2165683	39	9.9941914	10.7834317
22	9.2115263	9.2173556	38	9.9941706	10.7826444
23	9.2122914	9.2181417	37	9.9941498	10.7818583
24	9.2130552	9.2189264	36	9.9941289	10.7810736
25	9.2138176	9.2197097	35	9.9941079	10.7802903
26	9.2145787	9.2204917	34	9.9940870	10.7795083
27	9.2153384	9.2212724	33	9.9940659	10.7787276
28	9.2160967	9.2220518	32	9.9940449	10.7779482
29	9.2168536	9.2228298	31	9.9940238	10.7771702
30	9.2176092	9.2236065	30	9.9940027	10.7763935

Min.	9. Grad. Seno.	9. Grad. Tangente.	Min.	80. Grad. Seno.	80. Grad. Tangente.
30	9.2176092	9.2236065	30	9.9940027	10.7763935
31	9.2183635	9.2243819	29	9.9939815	10.7756181
32	9.2191164	9.2251561	28	9.9939603	10.7748439
33	9.2198680	9.2259289	27	9.9939391	10.7740711
34	9.2206182	9.2267004	26	9.9939178	10.7732996
35	9.2213671	9.2274706	25	9.9938965	10.7725294
36	9.2221147	9.2282395	24	9.9938752	10.7717605
37	9.2228609	9.2290071	23	9.9938538	10.7709929
38	9.2236059	9.2297735	22	9.9938324	10.7702265
39	9.2243495	9.2305386	21	9.9938109	10.7694614
40	9.2250918	9.2313024	20	9.9937894	10.7686976
41	9.2258328	9.2320650	19	9.9937679	10.7679350
42	9.2265725	9.2328262	18	9.9937463	10.7671738
43	9.2273110	9.2335863	17	9.9937247	10.7664137
44	9.2280481	9.2343451	16	9.9937030	10.7656549
45	9.2287839	9.2351026	15	9.9936813	10.7648974
46	9.2295185	9.2358589	14	9.9936596	10.7641411
47	9.2302518	9.2366139	13	9.9936378	10.7633861
48	9.2309838	9.2373678	12	9.9936160	10.7626322
49	9.2317145	9.2381203	11	9.9935942	10.7618797
50	9.2324440	9.2388717	10	9.9935723	10.7611283
51	9.2331722	9.2396218	9	9.9935504	10.7603782
52	9.2338992	9.2403708	8	9.9935285	10.7596292
53	9.2346249	9.2411185	7	9.9935065	10.7588815
54	9.2353494	9.2418650	6	9.9934844	10.7581350
55	9.2360726	9.2426103	5	9.9934624	10.7573897
56	9.2367946	9.2433543	4	9.9934403	10.7566457
57	9.2375153	9.2440972	3	9.9934181	10.7559028
58	9.2382349	9.2448389	2	9.9933959	10.7551611
59	9.2389532	9.2455794	1	9.9933737	10.7544206
60	9.2396702	9.2463188	0	9.9933515	10.7536812

Min.	10. Grad. Seno.	10. Grad. Tangente.	Min.	79. Grad. Seno.	79. Grad. Tangente.
0	9.2396702	9.2463188	60	9.9933515	10.7536812
1	9.2403861	9.2470569	59	9.9933292	10.7529431
2	9.2411007	9.2477939	58	9.9933068	10.7522061
3	9.2418141	9.2485297	57	9.9932845	10.7514703
4	9.2425264	9.2492643	56	9.9932621	10.7507357
5	9.2432374	9.2499978	55	9.9932396	10.7500022
6	9.2439472	9.2507301	54	9.9932171	10.7492699
7	9.2446558	9.2514612	53	9.9931946	10.7485388
8	9.2453632	9.2521912	52	9.9931720	10.7478088
9	9.2460695	9.2529200	51	9.9931494	10.7440800
10	9.2467746	9.2536477	50	9.9931268	10.7463523
11	9.2474784	9.2543743	49	9.9931041	10.7456257
12	9.2481811	9.2550997	48	9.9930814	10.7449003
13	9.2488827	9.2558240	47	9.9930587	10.7441760
14	9.2495830	9.2565472	46	9.9930359	10.7434528
15	9.2502822	9.2572691	45	9.9930131	10.7427308
16	9.2509803	9.2579901	44	9.9929902	10.7420099
17	9.2516772	9.2587099	43	9.9929673	10.7412901
18	9.2523729	9.2594285	42	9.9929444	10.7405715
19	9.2530675	9.2601461	41	9.9929214	10.7398539
20	9.2537609	9.2608625	40	9.9928984	10.7391375
21	9.2544532	9.2615779	39	9.9928753	10.7384221
22	9.2551444	9.2622921	38	9.9928522	10.7377079
23	9.2558344	9.2630053	37	9.9928291	10.7369947
24	9.2565233	9.2637173	36	9.9928059	10.7362827
25	9.2572110	9.2644283	35	9.9927827	10.7355717
26	9.2578977	9.2651382	34	9.9927595	10.7348618
27	9.2585832	9.2658470	33	9.9927362	10.7341530
28	9.2592676	9.2665547	32	9.9927129	10.7334453
29	9.2599509	9.2672613	31	9.9926895	10.7327387
30	9.2606330	9.2679669	30	9.9926661	10.7320331

Min.	10. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	79. Grad. Seno.	Tangente.
30	9.2606330	9.2679669	30	9.9926661	10.7320331
31	9.2613141	9.2686714	29	9.9926427	10.7313286
32	9.2619941	9.2693749	28	9.9926192	10.7306251
33	9.2626729	9.2700772	27	9.9925957	10.7299228
34	9.2633507	9.2707786	26	9.9925722	10.7292214
35	9.2640274	9.2714788	25	9.9925486	10.7285212
36	9.2647030	9.2721780	24	9.9925250	10.7278220
37	9.2653775	9.2728762	23	9.9925013	10.7271238
38	9.2660509	9.2735733	22	9.9924776	10.7264267
39	9.2667232	9.2742694	21	9.9924539	10.7257306
40	9.2673945	9.2749644	20	9.9924301	10.7250356
41	9.2680647	9.2756584	19	9.9924063	10.7243416
42	9.2687338	9.2763514	18	9.9923824	10.7236486
43	9.2694019	9.2770434	17	9.9923585	10.7229566
44	9.2700689	9.2777343	16	9.9923346	10.7222657
45	9.2707348	9.2784242	15	9.9923106	10.7215758
46	9.2713997	9.2791131	14	9.9922866	10.7208869
47	9.2720635	9.2798009	13	9.9922626	10.7201991
48	9.2727263	9.2804878	12	9.9922385	10.7195122
49	9.2733880	9.2811736	11	9.9922144	10.7188264
50	9.2740487	9.2818585	10	9.9921902	10.7181415
51	9.2747083	9.2825423	9	9.9921660	10.7174577
52	9.2753669	9.2832251	8	9.9921418	10.7167749
53	9.2760245	9.2839070	7	9.9921175	10.7160930
54	9.2766811	9.2845878	6	9.9920932	10.7154122
55	9.2773366	9.2852677	5	9.9920689	10.7147323
56	9.2779911	9.2859466	4	9.9920445	10.7140534
57	9.2786445	9.2866245	3	9.9920201	10.7133755
58	9.2792970	9.2873014	2	9.9919956	10.7126986
59	9.2799484	9.2879773	1	9.9919711	10.7120227
60	9.2805988	9.2886523	0	9.9919466	10.7113477

Min.	11. Grad. Seno.	11. Grad. Tangente.	Min.	78. Grad. Seno.	78. Grad. Tangente.
0	9.2805988	9.2886523	60	9.9919466	10.7113477
1	9.2812483	9.2893263	59	9.9919220	10.7106737
2	9.2818967	9.2899993	58	9.9918974	10.7100007
3	9.2825441	9.2906713	57	9.9918727	10.7093287
4	9.2831905	9.2913424	56	9.9918480	10.7086576
5	9.2838359	9.2920126	55	9.9918233	10.7079874
6	9.2844803	9.2926817	54	9.9917986	10.7073183
7	9.2851237	9.2933500	53	9.9917737	10.7066500
8	9.2857661	9.2940172	52	9.9917489	10.7059828
9	9.2864076	9.2946836	51	9.9917240	10.7053164
10	9.2870480	9.2953489	50	9.9916991	10.7046511
11	9.2876875	9.2960134	49	9.9916741	10.7039866
12	9.2883260	9.2966769	48	9.9916492	10.7033231
13	9.2889636	9.2973395	47	9.9916241	10.7026605
14	9.2896001	9.2980011	46	9.9915990	10.7019989
15	9.2902357	9.2986618	45	9.9915739	10.7013382
16	9.2908704	9.2993216	44	9.9915488	10.7006784
17	9.2915040	9.2999804	43	9.9915236	10.7000196
18	9.2921367	9.3006383	42	9.9914984	10.6993617
19	9.2927685	9.3012954	41	9.9914731	10.6987046
20	9.2933993	9.3019514	40	9.9914478	10.6980486
21	9.2940291	9.3026066	39	9.9914225	10.6973934
22	9.2946580	9.3032609	38	9.9913971	10.6967391
23	9.2952859	9.3039143	37	9.9913717	10.6960857
24	9.2959129	6.3045667	36	9.9913462	10.6954333
25	9.2965390	9.3052183	35	9.9913207	10.6947817
26	9.2971641	9.3058689	34	9.9912952	10.6941311
27	9.2977883	9.3065187	33	9.9912696	10.6934813
28	9.2984116	9.3071674	32	9.9912440	10.6928325
29	9.2990339	9.3078155	31	9.9912184	10.6921845
30	9.2996553	9.3084626	30	9.9911927	10.6915374

Min.	11. Grad. Seno.	11. Grad. Tangente.	Min.	78. Grad. Seno.	78. Grad. Tangente.
30	9.2996553	9.3084626	30	9.9911927	10.6915374
31	9.3002758	9.3091088	29	9.9911670	10.6908912
32	9.3008953	9.3097541	28	9.9911412	10.6902459
33	9.3015140	9.3103985	27	9.9911154	10.6896015
34	9.3021317	9.3110421	26	9.9910896	10.6889579
35	9.3027485	9.3116848	25	9.9910637	10.6883152
36	9.3033644	9.3123266	24	9.9910738	10.6876734
37	9.3039794	9.3129675	23	9.9910119	10.6870325
38	9.3045934	9.3136076	22	9.9909859	10.6863924
39	9.3052066	9.3142468	21	9.9909598	10.6857532
40	9.3058189	9.3148851	20	9.9909338	10.6851149
41	9.3064303	9.3155226	19	9.9909077	10.6844774
42	9.3070407	9.3161592	18	9.9908815	10.6838408
43	9.3076503	9.3167950	17	9.9908553	10.6832050
44	9.3082590	9.3174299	16	9.9908291	10.6825701
45	9.3088668	9.3180640	15	9.9908029	10.6819360
46	9.3094737	9.3186972	14	9.9907766	10.6813028
47	9.3100798	9.3193295	13	9.9907502	10.6806705
48	9.3106849	9.3199611	12	9.9907239	10.6800389
49	9.3112892	9.3205918	11	9.9906974	10.6794082
50	9.3118926	9.3212216	10	9.9906710	10.6787784
51	9.3124951	9.3218506	9	9.9906445	10.6781494
52	9.3130968	9.3224788	8	9.9906180	10.6775212
53	9.3136976	9.3231061	7	9.9905914	10.6768939
54	9.3142975	9.3237327	6	9.9905648	10.6762673
55	9.3148965	9.3243584	5	9.9905382	10.6756416
56	9.3154947	9.3249832	4	9.9905115	10.6750168
57	9.3160921	9.3256073	3	9.9904848	10.6743927
58	9.3166885	9.3262305	2	9.9904580	10.6737695
59	9.3172841	9.3268529	1	9.9904312	10.6731471
60	9.3178789	9.3274745	0	9.9904044	10.6725255

Min.	12. Grad. Seno.	12. Grad. Tangente.	Min.	77. Grad. Seno.	77. Grad. Tangente.
0	9.3178789	9.3274745	60	9.9904044	10.6725255
1	9.3184728	9.3280953	59	9.9903775	10.6719047
2	9.3190659	9.3287153	58	9.9903506	10.6712847
3	9.3196581	9.3293345	57	9.9903237	10.6706655
4	9.3202495	9.3299528	56	9.9902967	10.6700472
5	9.3208400	9.3305704	55	9.9902697	10.6694296
6	9.3214297	9.3311872	54	9.9902426	10.6688128
7	9.3220186	9.3318031	53	9.9902155	10.6681969
8	9.3226066	9.3324183	52	9.9901883	10.6675817
9	9.3231938	9.3330327	51	9.9901612	10.6669673
10	9.3237802	9.3336463	50	9.9901339	10.6663537
11	9.3243657	9.3342591	49	9.9901067	10.6657409
12	9.3249505	9.3348711	48	9.9900794	10.6651289
13	9.3255444	9.3354823	47	9.9900521	10.6645177
14	9.3261174	9.3360927	46	9.9900247	10.6639073
15	9.3266997	9.3367024	45	9.9899973	10.6632976
16	9.3272811	9.3373113	44	9.9899698	10.6626887
17	9.3278617	9.3379194	43	9.9899423	10.6620806
18	9.3284416	9.3385167	42	9.9899148	10.6614733
19	9.3290206	9.3391333	41	9.9898873	10.6608667
20	9.3295988	9.3397391	40	9.9898597	10.6602609
21	9.3301761	9.3403441	39	9.9898320	10.6596559
22	9.3307527	9.3409484	38	9.9898043	10.6590516
23	9.3313285	9.3415519	37	9.9897766	10.6584481
24	9.3319035	9.3421546	36	9.9897489	10.6578454
25	9.3324777	9.3427566	35	9.9897211	10.6772434
26	9.3330511	9.3433578	34	9.9896932	10.6566422
27	9.3336237	9.3439583	33	9.9896654	10.6560417
28	9.3341955	9.3445580	32	9.9866374	10.6554420
29	9.3347665	9.3451570	31	9.9896095	10.6548430
30	9.3353368	9.3457552	30	9.9895815	10.6542448

Min.	12. Grad. Seno.	12. Grad. Tangente.	Min.	77. Grad. Seno.	77. Grad. Tangente.
30	9.3353368	9.3457552	30	9.9895815	10.6542448
31	9.3359062	9.3463527	29	9.9895535	10.6536473
32	9.3364749	9.3469494	28	9.9895254	10.6530506
33	9.3370428	9.3475454	27	9.9894973	10.6524546
34	9.3376099	9.3481407	26	9.9894692	10.6518593
35	9.3381762	9.3487352	25	9.9894410	10.6512648
36	9.3387418	9.3493290	24	9.9894128	10.6506710
37	9.3393065	9.3499220	23	9.9893845	10.6500780
38	9.3398706	9.3505143	22	9.9893562	10.6494857
39	9.3404338	9.3511059	21	9.9893279	10.6488941
40	9.3409963	9.3516968	20	9.9892995	10.6483032
41	9.3415580	9.3522869	19	9.9892711	10.6477131
42	9.3421190	9.3528763	18	9.9892427	10.6471237
43	9.3426792	9.3534650	17	9.9892142	10.6465350
44	9.3432346	9.3540530	16	9.9891856	10.6459470
45	9.3437973	9.3546402	15	9.9891571	10.6453598
46	9.3443552	9.3552267	14	9.9891285	10.6447733
47	9.3449124	9.3558126	13	9.9890998	10.6441874
48	9.3454688	9.3563977	12	9.9890711	10.6436023
49	9.3460245	9.3569821	11	9.9890424	10.6430179
50	9.3465794	9.3575658	10	9.9890137	10.6424342
51	9.3471336	9.3581487	9	9.9889849	10.6418513
52	9.3476870	9.3587310	8	9.9889560	10.6412690
53	9.3482397	9.3593126	7	9.9889271	10.6406874
54	9.3487917	9.3698935	6	9.9808982	10.6401065
55	9.3493429	9.3604736	5	9.9888693	10.6395264
56	9.3498934	9.3610531	4	9.9888404	10.6389469
57	9.3504422	9.3616319	3	9.9888113	10.6383681
58	9.3509922	9.3622100	2	9.9887822	10.6377900
59	9.3515405	9.3627874	1	9.9887531	10.6372126
60	9.3520880	9.3663641	0	9.9887239	10.6366359

Min.	13. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	76. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.3520880	9.3633641	60	9.9887239	10.6366359
1	9.3526349	9.3639401	59	9.9886947	10.6360599
2	9.3531810	9.3645155	58	9.9886655	10.6354845
3	9.3537264	9.3650901	57	9.9886363	10.6349099
4	9.3542710	9.3656641	56	9.9886070	10.6343329
5	9.3548150	9.3662374	55	9.9885776	10.6337626
6	9.3553582	9.3668100	54	9.9885482	10.6331900
7	9.3559007	9.3673819	53	9.9885188	10.6326181
8	9.3564426	9.3679532	52	9.9884894	10.6320468
9	9.3569836	9.3685238	51	9.9884599	10.6314762
10	9.3575240	9.3690537	50	9.9884303	10.6309063
11	9.3580637	9.3696629	49	9.9884008	10.6303371
12	9.3586027	9.3702315	48	9.9883712	10.6297685
13	9.3591409	9.3707994	47	9.9883415	10.6292006
14	9.3596785	9.3713664	46	9.9883118	10.6286333
15	9.3602154	9.3719333	45	9.9882821	10.6280667
16	9.3607515	9.3724992	44	9.9882523	10.6275008
17	9.3612870	9.3730645	43	9.9882225	10.6269355
18	9.3618217	9.3736291	42	9.9881927	10.6263709
19	9.3623558	9.3741930	41	9.9881628	10.6258070
20	9.3628892	9.3747563	40	9.9881329	10.6252437
21	9.3634219	9.3753190	39	9.9881029	10.6246810
22	9.3639539	9.3758810	38	9.9880729	10.6241190
23	9.3644852	9.3764423	37	9.9880429	10.6235577
24	9.3650158	9.3770030	36	9.9880128	10.6229970
25	9.3655458	9.3775631	35	9.9879827	10.6224369
26	9.3660750	9.3781225	34	9.9879525	10.6218775
27	9.3666036	9.3786813	33	9.9879223	10.6213187
28	9.3671315	9.3792394	32	9.9878921	10.6207606
29	9.3676587	9.3797969	31	9.9878618	10.6202031
30	9.3681853	9.3803537	30	9.9878315	10.6196463

Min.	13. Grad Seno.	13. Grad Tangente.	Min.	76. Grad. Seno.	76. Grad. Tangente.
30	9.3681853	9.3803537	30	9.9878315	10.6196463
31	9.3687111	9.3809100	29	9.9878012	10.6190900
32	9.3692363	9.3814655	28	9.9877708	10.6185345
33	9.3697608	9.3820205	27	9.9877404	10.6179795
34	9.3702847	9.3825748	26	9.9877099	10.6174252
35	9.3708079	9.3831285	25	9.9876794	10.6168715
36	9.3713304	9.3836816	24	9.9876488	10.6163184
37	9.3718523	9.3842340	23	9.9876183	10.6157660
38	9.3723735	9.3847858	22	9.9875876	10.6152142
39	9.3728940	9.3853370	21	9.9875570	10.6146630
40	9.3734139	9.3858876	20	9.9875263	10.6141124
41	9.3739331	9.3864376	19	9.9874955	10.6135624
42	9.3744517	9.3869869	18	9.9874648	10.6130131
43	9.3749696	9.3875356	17	9.9874339	10.6124644
44	9.3754868	9.3880837	16	9.9874031	10.6119163
45	9.3760034	9.3886312	15	9.9873722	10.6113688
46	9.3765194	9.3891781	14	9.9873413	10.6108219
47	9.3770347	9.3897244	13	9.9873103	10.6102756
48	9.3775493	9.3902700	12	9.9872793	10.6097300
49	9.3780633	9.3908151	11	9.9872482	10.6091849
50	9.3785767	9.3913595	10	9.9872171	10.6086405
51	9.3790894	9.3919034	9	9.9871860	10.6080966
52	9.3796015	9.3924466	8	9.9871549	10.6075534
53	9.3801129	9.3929893	7	9.9871236	10.6070107
54	9.3806237	9.3935313	6	9.9870924	10.6064687
55	9.3811339	9.3940727	5	9.9870611	10.6059273
56	9.3816434	9.3946136	4	9.9870298	10.6053864
57	9.3821523	9.3951538	3	9.9869984	10.6048462
58	9.3826605	9.3956935	2	9.9869670	10.6043065
59	9.3831682	9.3962326	1	9.9869356	10.6037674
60	9.3836752	9.3967711	0	9.9869041	10.6032289

Min.	14. Grad. Seno.	14. Grad. Tangente.	Min.	75. Grad. Seno.	75. Grad. Tangente.
0	9.3836752	9.3967711	60	9.9869041	10.6032289
1	9.3841815	9.3973089	59	9.9868726	10.6026911
2	9.3846873	9.3978463	58	9.9868410	10.6021537
3	9.3851924	9.3983830	57	9.9868094	10.6016170
4	9.3856969	9.3989191	56	9.9867778	10.6010809
5	9.3862008	9.3994547	55	9.9867461	10.6005453
6	9.3867040	9.3999896	54	9.9867144	10.6000104
7	9.3872067	9.4005240	53	9.9866827	10.5994760
8	9.3877087	9.4010578	52	9.9866509	10.5989422
9	9.3882101	9.4015910	51	9.9866191	10.5984090
10	9.3887109	9.4021237	50	9.9865872	10.5978763
11	9.3892111	9.4026558	49	9.9865553	10.5973442
12	9.3897106	9.4031873	48	9.9865233	10.5968127
13	9.3902096	9.4037182	47	9.9864913	10.5962818
14	9.3907079	9.4042486	46	9.9864593	10.5957514
15	9.3912057	9.4047784	45	9.9864273	10.5952216
16	9.3917028	9.4053076	44	9.9863952	10.5946924
17	9.3921993	9.4058363	43	9.9863630	10.5941637
18	9.3926952	9.4063644	42	9.9863308	10.5936356
19	9.3931905	9.4068919	41	9.9862986	10.5931081
20	9.3936852	9.4074189	40	9.9862663	10.5925811
21	9.3941794	9.4079453	39	9.9862340	10.5920547
22	9.3946729	9.4084712	38	9.9862017	10.5915288
23	9.3951658	9.4089965	37	9.9861693	10.5910035
24	9.3956581	9.4095212	36	9.9861369	10.5904788
25	9.3961499	9.4100454	35	9.9861045	10.5899546
26	9.3966410	9.4105690	34	9.9860720	10.5894310
27	9.3971315	9.4110921	33	9.9860394	10.5889079
28	9.3976215	9.4116146	32	9.9860069	10.5883854
29	9.3981109	9.4121366	31	9.9859742	10.5878634
30	9.3985996	9.4126581	30	9.9859416	10.5873419

Min.	14. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	75. Grad. Seno.	Tangente.
30	9.3985996	9.4126581	30	9.9859416	10.5873419
31	9.3990878	9.4131789	29	9.9859089	10.5868211
32	9.3995754	9.4136993	28	9.9858762	10.5863007
33	9.4000625	9.4142191	27	9.9858434	10.5857809
34	9.4005489	9.4147383	26	9.9858106	10.5852617
35	9.4010348	9.4152570	25	9.9857777	10.5847430
36	9.4015201	9.4157752	24	9.9857449	10.5842248
37	9.4020048	9.4162928	23	9.9857119	10.5837072
38	9.4024889	9.4168099	22	9.9856790	10.5831901
39	9.4029734	9.4173265	21	9.9856460	10.5826735
40	9.4034554	9.4178425	20	9.9856129	10.5821575
41	9.4039378	9.4183580	19	9.9855798	10.5816420
42	9.4044196	9.4188729	18	9.9855467	10.5811271
43	9.4049009	9.4193874	17	9.9855135	10.5806126
44	9.4053816	9.4199013	16	9.9854803	10.5800987
45	9.4058617	9.4204146	15	9.9854471	10.5795854
46	9.4063413	9.4209275	14	9.9854138	10.5790725
47	9.4068203	9.4214398	13	9.9853805	10.5785602
48	9.4072987	9.4219515	12	9.9853471	10.5780485
49	9.4077766	9.4224628	11	9.9853138	10.5775372
50	9.4082536	9.4229735	10	9.9852803	10.5770265
51	9.4087306	9.4234838	9	9.9852468	10.5765162
52	9.4092068	9.4239935	8	9.9852133	10.5760065
53	9.4096824	9.4245026	7	9.9851798	10.5754974
54	9.4101575	9.4250113	6	9.9851462	10.5749887
55	9.4106320	9.4255194	5	9.9851125	10.5744806
56	9.4111059	9.4260271	4	9.9850789	10.5739729
57	9.4115793	9.4265342	3	9.9850452	10.5734658
58	9.4120722	9.4270408	2	9.9850114	10.5729592
59	9.4125245	9.4275469	1	9.9849776	10.5724531
60	9.4129962	9.4280525	0	9.9849438	10.5719475

Min.	15. Grad. Seno.	15. Grad. Tangente.	Min.	74. Grad. Seno.	74. Grad. Tangente.
0	9.4129962	9.4280525	60	9.9849438	10.571947[illegible]
1	9.4134674	9.4285575	59	9.9849099	10.571442[illegible]
2	9.4139381	9.4290621	58	9.9848760	10.570957[illegible]
3	9.4144082	9.4295661	57	9.9848420	10.570433[illegible]
4	9.4148778	9.4300697	56	9.9848081	10.569930[illegible]
5	9.4153468	9.4305727	55	9.9847740	10.569427[illegible]
6	9.4158152	9.4310753	54	9.9847400	10.568924[illegible]
7	9.4162832	9.4315773	53	9.9847059	10.5684227
8	9.4167506	9.4320789	52	9.9846717	10.5679211
9	9.4172174	9.4325799	51	9.9846375	10.5674201
10	9.4176837	9.4330804	50	9.9846033	10.5669196
11	9.4181495	9.4335805	49	9.9845690	10.5664195
12	9.4186148	9.4340800	48	9.9845347	10.5659200
13	9.4190795	9.4345791	47	9.9845004	10.5654209
14	9.4195436	9.4350776	46	9.9844660	10.5649224
15	9.4200073	9.4355757	45	9.9844316	10.5644243
16	9.4204704	9.4360733	44	9.9843971	10.5639267
17	9.4209330	9.4365704	43	9.9843626	10.5633296
18	9.4213950	9.4370670	42	9.9843281	10.5629330
19	9.4218566	9.4375631	41	9.9842935	10.5624369
20	9.4223176	9.4380587	40	9.9842589	10.5619415
21	9.4227780	9.4385538	39	9.9842242	10.5614462
22	9.4232380	9.4390485	38	9.9841895	10.5609515
23	9.4236974	9.4395426	37	9.9841548	10.5604574
24	9.4241563	9.4400363	36	9.9841200	10.5599637
25	9.4246147	9.4405295	35	9.9840852	10.5594705
26	9.4250726	9.4410222	34	9.9840503	10.5589778
27	9.4255299	9.4415145	33	9.9840154	10.5584855
28	9.4259867	9.4420062	32	9.9839805	10.5579938
29	9.4264430	9.4424975	31	9.9839455	10.5575025
30	9.4268988	9.4429883	30	9.9839105	10.5570117

Min.	15. Grad. Seno.	15. Grad. Tangente.	Min.	74. Grad. Seno.	74. Grad. Tangente.
30	9.4268988	9.4429883	30	9.9839105	10.5570117
31	9.4273541	9.4434786	29	9.9838755	10.5565214
32	9.4278989	9.4439685	28	9.9838404	10.5560315
33	9.4282631	9.4444579	27	9.9838052	10.5555421
34	9.4287169	9.4449468	26	9.9837701	10.5550532
35	9.4291701	9.4454352	25	9.9837348	10.5545648
36	9.4296228	9.4459232	24	9.9836996	10.5540768
37	9.4300750	9.4464107	23	9.9836643	10.5535893
38	9.4305267	9.4473978	22	9.9836290	10.5531022
39	9.4309779	9.4473843	21	9.9835936	10.5526157
40	9.4314286	9.4478704	20	9.9835582	10.5421296
41	9.4318788	9.4483561	19	9.9835227	10.5516239
42	9.4323285	9.4488413	18	9.9834872	10.5511587
43	9.4327777	9.4493260	17	9.9834517	10.5506740
44	9.4332264	9.4498102	16	9.9835161	10.5501898
45	9.4336746	9.4502940	15	9.9833805	10.5497060
46	9.4341223	9.4507774	14	9.9833449	10.5492226
47	9.4345694	9.4512602	13	9.9833092	10.5487398
48	9.4350161	9.4517427	12	9.9832735	10.5482573
49	9.4354623	9.4522246	11	9.9832377	10.5477754
50	9.4359080	9.4527061	10	9.9832019	10.5472939
51	9.4363532	9.4531872	9	9.9831661	10.5468128
52	9.4367980	9.4536678	8	9.9831302	10.5463322
53	9.4372422	9.4541479	7	9.9830942	10.5458521
54	9.4376589	9.4546276	6	9.9830583	10.5453724
55	9.4381292	9.4551069	5	9.9830223	10.5448931
56	9.4385719	9.4555857	4	9.9829862	10.5444143
57	9.4390142	9.4560641	3	9.9829501	10.5439359
58	9.4394560	9.4565420	2	9.9829140	10.5434580
59	9.4398673	9.4570194	1	9.9828778	10.5429806
60	9.4403381	9.4574964	0	9.9828416	10.5425036

Min.	16.Grad. Seno.	16.Grad. Tangente.	Min.	73.Grad. Seno.	73.Grad. Tangente.
0	9.4403381	9.4574964	60	9.9828416	10.543509
1	9.4407784	9.4579730	59	9.9828054	10.542027
2	9.4412182	9.4584491	58	9.9827691	10.541559
3	9.4416576	9.4589248	57	9.9827328	10.541075
4	9.4420965	9.4594001	56	9.9826964	10.540599
5	9.4425349	9.4598749	55	9.9826600	10.540125
6	9.4429728	9.4603492	54	9.9826136	10.539650
7	9.4434103	9.4608232	53	9.9825871	10.539176
8	9.4438472	9.4612967	52	9.9825506	10.538703
9	9.4442837	9.4617697	51	9.9825140	10.538230
10	9.4447197	9.4612423	50	9.9824774	10.5377577
11	9.4451553	9.4627145	49	9.9824408	10.5372855
12	9.4455904	9.4631863	48	9.9824041	10.5368137
13	9.4460250	9.4636576	47	9.9823674	10.5363424
14	9.4464591	9.4641285	46	9.9823306	10.5358715
15	9.4468927	9.4645990	45	9.9822938	10.5354010
16	9.4473259	9.4650690	44	9.9822569	10.5349310
17	9.4477586	9.4655386	43	9.9822201	10.5344614
18	9.4481909	9.4660078	42	9.9821831	10.5339922
19	9.4486227	9.4664765	41	9.9821462	10.5335235
20	9.4490540	9.4669448	40	9.9821092	10.5330552
21	9.4494849	9.4674127	39	9.9820721	10.5325873
22	9.4499153	9.4678802	38	5.9820351	10.5321198
23	9.4503452	9.4683473	37	9.9819979	10.5316527
24	9.4507747	9.4688139	36	9.9819608	10.5311861
25	9.4512037	9.4692801	35	9.9819236	10.5307199
26	9.4516322	9.4697459	34	9.9818863	10.5302541
27	9.4520603	9.4702112	33	9.9818490	10.5297888
28	9.4524876	9.4706762	32	9.9818117	10.5293238
29	9.4529151	9.4711407	31	9.9817744	10.5288593
30	9.4533418	9.4716048	30	9.9817370	10.5283952

Min.	16. Grad. Seno.	16. Grad. Tangente.	Min.	73. Grad. Seno.	73. Grad. Tangente.
30	9.4533418	9.4716048	30	9.9817370	10.5283952
31	9.4537681	9.4720685	29	9.9816995	10.5279315
32	9.4541939	9.4725318	28	9.9816620	10.5274682
33	9.4546192	9.4729947	27	9.9816245	10.5270053
34	9.4550441	9.4734571	26	9.9815870	10.5265428
35	9.4554686	9.4739192	25	9.9815494	10.5260808
36	9.4558926	9.4743808	24	9.9815117	10.5256192
37	9.4563161	9.4748421	23	9.9814740	10.5251579
38	9.4567392	9.4753029	22	9.9814363	10.5246971
39	9.4571618	9.4757633	21	9.9813986	10.5242367
40	9.4575840	9.4762233	20	9.9813608	10.5237767
41	9.4580058	9.4766829	19	9.9813229	10.5233171
42	9.4584271	9.4771421	18	9.9812850	10.5228579
43	9.4588480	9.4776009	17	9.9812471	10.5223991
44	9.4592684	9.4780592	16	9.9812091	10.5219408
45	9.4596884	9.4785172	15	9.9811711	10.5214828
46	9.4601079	9.4789748	14	9.9811331	10.5210252
47	9.4605270	9.4794319	13	9.9810950	10.5205681
48	9.4609456	9.4798887	12	9.9810569	10.5201113
49	9.4613638	9.4803451	11	9.9810187	10.5196549
50	9.4617816	9.4808011	10	9.9809805	10.5191989
51	9.4621989	9.4812566	9	9.9809423	10.5187434
52	9.4626158	9.4817118	8	9.9809040	10.5182882
53	9.4630323	9.4821666	7	9.9808657	10.5178334
54	9.4634483	9.4826210	6	9.9808273	10.5173790
55	9.4638639	9.4830750	5	9.9807889	10.5169250
56	9.4642790	9.4835286	4	9.9807505	10.5164714
57	9.4646938	9.4839818	3	9.9807120	10.5160182
58	9.4651081	9.4844346	2	9.9806735	10.5155654
59	9.4655219	9.4848870	1	9.9806349	10.5151130
60	9.4659353	9.4853390	0	9.9805963	10.5146610

Min.	17. Grad. Seno.	17. Grad. Tangente.	Min.	72. Grad. Seno.	72. Grad. Tangente.
0	9.4659353	9.4853390	60	9.9805963	10.514661
1	9.4663483	9.4857907	59	9.9805577	10.514209
2	9.4667606	9.4862419	58	9.9805190	10.5137581
3	9.4671730	9.4866928	57	9.9804803	10.5133072
4	9.4675848	9.4871433	56	9.9804415	10.5128567
5	9.4679960	9.4875933	55	9.9804027	10.5124067
6	9.4684069	9.4880430	54	9.9803639	10.5119570
7	9.4688173	9.4884924	53	9.9803250	10.5115076
8	9.4692273	9.4889413	52	9.9802860	10.5110587
9	9.4696369	9.4893898	51	9.9802471	10.3106102
10	9.4700461	9.4898380	50	9.9802081	10.5101620
11	9.4704548	9.4902858	49	9.9801690	10.5097142
12	9.4708631	9.4907332	48	9.9801299	10.5092668
13	9.4712710	9.4911802	47	9.9800908	10.5088198
14	9.4716785	9.4916269	46	9.9800516	10.5083731
15	9.4720856	9.4920731	45	9.9800124	10.5079269
16	9.4724912	9.4925190	44	9.9799735	10.5074810
17	9.4728985	9.4929646	43	9.9799339	10.5070354
18	9.4733043	9.4934097	42	9.9798946	10.5065903
19	9.4737097	9.4938545	41	9.9798552	10.5061455
20	9.4741146	9.4942988	40	9.9798158	10.5057012
21	9.4745192	9.4947429	39	9.9797764	10.5052571
22	9.4749234	9.4951865	38	9.9797369	10.5048135
23	9.4753271	9.4956298	37	9.9796973	10.5043702
24	9.4757304	9.4960727	36	9.9796578	10.5039273
25	9.4761334	9.4965152	35	9.9796182	10.5034848
26	9.4765359	9.4969574	34	9.9795785	10.5030426
27	9.4769380	9.4973991	33	9.9795388	10.5026009
28	9.4773396	9.4978406	32	9.9794991	10.5021594
29	9.4777409	9.4982816	31	9.9794593	10.5017184
30	9.4781418	9.4987223	30	9.9794195	10.5012777

Min.	17. Grad Seno.	17. Grad Tangente.	Min.	72. Grad. Seno.	72. Grad. Tangente.
30	9.4781418	9.4987223	30	9.9794195	10.5012777
31	9.4785423	9.4991626	29	9.9793796	10.5008374
32	9.4789423	9.4996026	28	9.9793398	10.5003974
33	9.4793420	9.5000422	27	9.9792998	10.4999578
34	9.4797412	9.5004814	26	9.9792599	10.4995186
35	9.4801401	9.5009203	25	9.9792198	10.4990797
36	9.4805385	9.5013588	24	9.9791798	10.4986412
37	9.4809366	9.5017969	23	9.9791397	10.4982031
38	9.4813342	9.5022347	22	9.9790996	10.4977653
39	9.4817315	9.5026721	21	9.9790594	10.4973279
40	9.4821283	9.5031092	20	9.9790192	10.4968908
41	9.4825248	9.5035459	19	9.9789789	10.4964541
42	9.4829208	9.5039822	18	9.9789386	10.4960178
43	9.4833165	9.5044182	17	9.9788983	10.4955818
44	9.4837117	9.5048538	16	9.9788579	10.4951462
45	9.4841066	9.5052891	15	9.9788175	10.4947109
46	9.4845010	9.5057240	14	9.9787770	10.4942760
47	9.4848951	9.5061586	13	9.9787365	10.4938414
48	9.4852888	9.5065928	12	9.9786960	10.4934072
49	9.4856820	9.5070267	11	9.9786554	10.4929733
50	9.4860749	9.5074602	10	9.9786148	10.4925398
51	9.4864674	9.5078633	9	9.9785741	10.4921067
52	9.4868595	9.5083261	8	9.9785334	10.4916739
53	9.4872512	9.5087586	7	9.9784927	10.4912414
54	9.4876426	9.5091907	6	9.9784519	10.4908093
55	9.4880335	9.3096224	5	9.9784111	10.4903776
56	9.4884240	9.5100539	4	9.9783702	10.4899461
57	9.4888142	9.5104849	3	9.9783293	10.4895151
58	9.4892040	9.5109156	2	9.9782883	10.4890844
59	9.4895934	9.5113460	1	9.9782474	10.4886540
60	9.4899824	9.5117760	0	9.9782063	10.4882240

Min.	18. Grad. Seno.	18. Grad. Tangente.	Min.	71. Grad. Seno.	71. Grad. Tangente.
0	9.4899824	9.5117760	60	9.9782063	10.4882240
1	9.4907710	9.5122057	59	9.9781653	10.4877943
2	9.4907592	9.5126351	58	9.9781241	10.4873649
3	9.4911471	9.5130641	57	9.9780830	10.4869359
4	9.4915345	9.5134927	56	9.9780418	10.4865073
5	9.4919216	9.5139210	55	9.9780006	10.4860790
6	9.4923083	9.5143490	54	9.9779593	10.4856510
7	9.4926946	9.5147766	53	9.9779180	10.4852234
8	9.4930806	9.5152039	52	9.9778766	10.4847961
9	9.4934661	9.5156309	51	9.9778353	10.4843691
10	9.4938513	9.5160575	50	9.9777938	10.4839425
11	9.4942361	9.5164838	49	9.9777523	10.4835162
12	9.4946205	9.5169097	48	9.9777108	10.4830903
13	9.4950046	9.5173353	47	9.9776693	10.4826647
14	9.4953883	9.5177606	46	9.9776277	10.4822394
15	9.4957716	9.5181855	45	9.9775860	10.4818145
16	9.4961545	9.5186101	44	9.9775444	10.4813899
17	9.4965370	9.5190344	43	9.9775026	10.4809656
18	9.4969192	9.5194583	42	9.9774609	10.4805417
19	9.4973010	9.5198819	41	9.9774191	10.4801181
20	9.4976824	9.5203052	40	9.9773772	10.4796948
21	9.4980635	9.5207282	39	9.9773354	10.4792718
22	9.4984442	9.5211508	38	9.9772934	10.4788492
23	9.4988245	9.5215730	37	9.9772515	10.4784270
24	9.4992045	9.5219950	36	9.9772095	10.4780050
25	9.4995840	9.5224166	35	9.9771674	10.4775834
26	9.4999633	9.5228379	34	9.9771253	10.4771621
27	9.5003421	9.5232589	33	9.9770832	10.5767411
28	9.5007206	9.5236795	32	9.9770410	10.4763205
29	9.5010987	9.5240999	31	9.9769988	10.4759001
30	9.5014764	9.5245199	30	9.9769566	10.4754801

Min.	18. Grad. Seno.	18. Grad. Tangente.	Min.	71. Grad. Seno.	71. Grad. Tangente.
30	9.5014764	9.5245199	30	9.9769566	10.4754801
31	9.5018538	9.5249395	29	9.9769143	10.4750605
32	9.5022308	9.5253589	28	9.9768720	10.4746411
33	9.5026075	9.5257779	27	9.9768296	10.4742221
34	9.5029838	9.5261966	26	9.9767872	10.4738034
35	9.5033597	9.5266150	25	9.9767447	10.4733850
36	9.5037353	9.5270331	24	9.9767021	10.4729669
37	9.5041105	9.5274508	23	9.9766597	10.4725492
38	9.5044853	9.5278682	22	9.9766171	10.4721318
39	9.5048598	9.5282853	21	9.9765745	10.4717147
40	9.5052339	9.5287021	20	9.9765318	10.4712979
41	9.5056077	9.5291186	19	9.9764891	10.4708814
42	9.5059811	9.5295347	18	9.9764464	10.4704653
43	9.5063542	9.5299505	17	9.9764036	10.4700495
44	9.5067268	9.5303661	16	9.9763608	10.4696339
45	9.5070992	9.5307813	15	9.9763179	10.4692187
46	9.5074712	9.5311961	14	9.9762750	10.4688039
47	9.5078428	9.5316107	13	9.9762321	10.4683893
48	9.5082141	9.5320250	12	9.9761891	10.4679750
49	9.5085850	9.5324389	11	9.9761461	10.4675611
50	9.5089556	9.5328526	10	9.9761030	10.4671474
51	9.5093258	9.5332959	9	9.9760599	10.4667341
52	9.5096956	9.5336789	8	9.9760167	10.4663211
53	9.5100651	9.5340916	7	9.9759736	10.4659084
54	9.5104343	9.5345040	6	9.9759303	10.4654960
55	9.5108031	9.5349161	5	9.9758870	10.4650839
56	9.5111716	9.5353278	4	9.9758437	10.4646722
57	9.5115397	9.5357393	3	9.9758004	10.4642607
58	9.5119074	9.5361505	2	9.9757570	10.4638495
59	9.5122749	9.5365613	1	9.9757135	10.4634387
60	9.5126419	9.5369719	0	9.9756701	10.4630281

Min.	19. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	70. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.5126419	9.5369719	60	9.9756201	10.4630281
1	9.5130086	9.5373821	59	9.9756265	10.4626179
2	9.5133750	9.5377920	58	9.9755830	10.4622080
3	9.5137410	9.5382017	57	9.9755394	10.4617983
4	9.5141067	9.5386110	56	9.9754957	10.4613890
5	9.5144721	9.5390200	55	9.9754521	10.4609800
6	9.5148371	9.5394287	54	9.9754083	10.4605713
7	9.5152017	9.5398371	53	9.9753646	10.4601629
8	9.5155660	9.5402453	52	9.9753208	10.4597547
9	9.5159300	9.5406531	51	9.9752769	10.4593469
10	9.5162936	9.5410606	50	9.9752330	10.4589394
11	9.5166569	9.5414678	49	9.9751891	10.4585322
12	9.5170198	9.5418747	48	9.9751451	10.4581253
13	9.5173824	9.5422813	47	9.9751011	10.4577187
14	9.5177447	9.5426877	46	9.9750570	10.4573123
15	9.5181066	9.5430937	45	9.9750129	10.4569063
16	9.5184682	9.5434994	44	9.9749688	10.4565006
17	9.5188295	9.5439048	43	9.9749246	10.4560952
18	9.5191904	9.5443100	42	9.9748804	10.4556900
19	9.5195510	9.5447148	41	9.9748361	10.4552852
20	9.5199112	9.5451193	40	9.9647918	10.4548807
21	9.5202711	9.5455236	39	9.9747475	10.4544764
22	9.5206307	9.5459276	38	9.9746031	10.4540724
23	9.5209899	9.5463312	37	9.9746587	10.4536688
24	9.5213488	9.5467346	36	9.9746142	10.4532654
25	9.5217074	9.5471377	35	9.9745697	10.4528623
26	9.5220656	9.5475405	34	9.9745252	10.4524595
27	9.5224235	9.5479430	33	9.9744806	10.4520570
28	9.5227811	9.5483452	32	9.9744359	10.4516548
29	9.5231383	9.5487471	31	9.9743913	10.4512529
30	9.5234953	9.5491487	30	9.9743466	10.4508513

Min.	19. Grad. Seno.	19. Grad. Tangente.	Min.	70. Grad. Seno.	70. Grad. Tangente.
30	9.5234963	9.5491487	30	9.9743466	10.4598513
31	9.5238518	9.5495500	29	9.9743018	10.4594500
32	9.5242081	9.5499511	28	9.9742570	10.4500489
33	9.5245640	9.5503519	27	9.9742122	10.4496481
34	9.5249196	9.5507523	26	9.9741673	10.4492477
35	9.5252749	9.5511525	25	9.9741224	10.4488475
36	9.5256298	9.5515524	24	9.9740774	10.4484476
37	9.5259844	9.5519521	23	9.9740324	10.4480479
38	9.5263387	9.5523514	22	9.9739873	10.4476486
39	9.5266927	9.5527504	21	9.9739422	10.4472496
40	9.5270463	9.5531492	20	9.9738971	10.4468508
41	9.5273997	9.5535477	19	9.9738519	10.4464523
42	9.5277526	9.5536459	18	9.9738067	10.4460541
43	9.5281053	9.5543438	17	9.9737615	10.4456562
44	9.5284577	9.5547415	16	9.9737162	10.4452585
45	9.5288097	9.5551388	15	9.9736709	10.4448612
46	9.5291614	9.5555359	14	9.9736255	10.4444641
47	9.5295128	9.5559327	13	9.9735801	10.4440673
48	9.5298638	9.5563292	12	9.9735346	10.4436708
49	9.5302146	9.5567255	11	9.9734891	10.4432745
50	9.5305650	9.5571214	10	9.9734435	10.4428786
51	9.5309151	9.5575171	9	9.9733980	10.4424829
52	9.5312649	9.5579125	8	9.9733523	10.4420875
53	9.5316143	9.5583077	7	9.9733067	10.4416923
54	9.5319635	9.5587025	6	9.9732610	10.4412975
55	9.5323123	9.5590971	5	9.9732152	10.4409029
56	9.5326608	9.5594914	4	9.9731694	10.4405086
57	9.5330090	9.5598854	3	9.9731236	10.4401146
58	9.5333569	9.5602792	2	9.9730777	10.4397208
59	9.5337044	9.5606727	1	9.9730718	10.4393273
60	9.5340517	9.5610659	0	9.9729858	10.4389341

Min.	20. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	69. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.5340517	9.5610658	60	9.9729858	10.438934
1	9.5343986	9.5614588	59	9.9729398	10.43854
2	9.5347452	9.5618515	58	9.9728938	10.438148
3	9.5350915	9.5622439	57	9.9728477	10.437756
4	9.5354375	9.5626360	56	9.9728016	10.437364
5	9.5357832	9.5630278	55	9.9727554	10.436972
6	9.5361286	9.5634194	54	9.9727092	10.436580
7	9.5364737	9.5638107	53	9.9726629	10.436189
8	9.5368184	9.5642018	52	9.9726166	10.435798
9	9.5371628	9.5645925	51	9.9725703	10.435407
10	9.5375069	9.5649831	50	9.9725239	10.435016
11	9.5378508	9.5653733	49	9.9724775	10.434626
12	9.5381943	9.5657633	48	9.9724310	10.434236
13	9.5385375	9.5661530	47	9.9723845	10.4338470
14	9.5388804	9.5665424	46	9.9723380	10.4334576
15	9.5392230	9.5669316	45	9.9722914	10.433068
16	9.5395653	9.5673205	44	9.9722448	10.4326795
17	9.5399073	9.5677091	43	9.9721981	10.4322909
18	9.5402489	9.5680975	42	9.9721514	10.4319025
19	9.5405903	9.5684856	41	9.9721047	10.4315144
20	9.5409314	9.5688735	40	9.9720579	10.4311265
21	9.5412721	9.5692611	39	9.9720110	10.4307389
22	9.5416126	9.5696484	38	9.9719642	10.4303516
23	9.5419527	9.5700355	37	9.9719172	10.4299645
24	9.5422926	9.5704223	36	9.9718703	10.4295777
25	9.5426321	9.5708088	35	9.9718233	10.4291912
26	9.5429713	9.5711951	34	9.9717762	10.4288049
27	9.5433103	9.5715811	33	9.9717291	10.4284189
28	9.5436489	9.5717669	32	9.9716820	10.4280331
29	9.5439873	9.5723524	31	9.9716348	10.4276476
30	9.5443253	9.5727377	30	9.9715876	10.4272623

Min.	20. Grad. Seno.	20. Grad. Tangente.	Min.	69. Grad. Seno.	69. Grad. Tangente.
30	9.5443253	9.5727377	30	9.9715876	10.4272623
31	9.5446630	9.5731227	29	9.9715404	10.4268773
32	9.5450005	9.5735074	28	9.9714931	10.4264926
33	9.5453376	9.5738919	27	9.9714457	10.4261081
34	9.5456745	9.5742761	26	9.9713988	10.4257239
35	9.5460110	9.5746601	25	9.9713509	10.4253399
36	9.5463472	9.5750438	24	9.9713035	10.4249562
37	9.5466832	9.5754272	23	9.9712560	10.4245728
38	9.5470189	9.5758104	22	9.9712084	10.4241896
39	9.5473542	9.5761934	21	9.9711608	10.4238066
40	9.5476893	9.5765761	20	9.9711132	10.4234239
41	9.5480240	9.5769585	19	9.9710655	10.4230415
42	9.5483585	9.5773407	18	9.9710178	10.4226593
43	9.5486927	9.5777226	17	9.9709701	10.4222774
44	9.5490266	9.5781043	16	9.9709223	10.4218957
45	9.5493602	9.5784858	15	9.9708744	10.4215142
46	9.5496935	9.5788669	14	9.9708265	10.4211331
47	9.5500265	9.5792479	13	9.9707786	10.4207521
48	9.5503592	9.5796286	12	9.9707306	10.4203714
49	9.5506916	9.5800090	11	9.9706826	10.4199910
50	9.5510237	9.5803892	10	9.9706346	10.4196108
51	9.5513556	9.5803691	9	9.9705865	10.4192309
52	9.5516871	9.5811488	8	9.9705383	10.4188512
53	9.5520184	9.5815282	7	9.9704902	10.4184718
54	9.5523494	9.5819074	6	9.9704419	10.4180926
55	9.5526801	9.5822864	5	9.9703937	10.4177136
56	9.5530105	9.5826651	4	9.9703454	10.4173349
57	9.5533406	9.5830435	3	9.9702970	10.4169565
58	9.5536704	9.5834217	2	9.9702486	10.4165783
59	9.5539999	9.5837997	1	9.9702002	10.4162003
60	9.5543292	9.5841774	0	9.9701517	10.4158226

Min.	21. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	68. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.5543292	9.5841774	60	9.9701517	10.4158222
1	9.5546581	9.5845549	59	9.9701032	10.4154445
2	9.5549868	9.5849321	58	9.9700547	10.4150675
3	9.5553152	9.5853091	57	9.9700061	10.4146909
4	9.5556433	9.5856859	56	9.9699574	10.4143141
5	9.5559711	9.5860624	55	9.9699087	10.4139376
6	9.5562987	9.5864386	54	9.9698600	10.4135614
7	9.5566259	9.5868147	53	9.9698112	10.4131853
8	9.5569529	9.5871904	52	9.9697624	10.4128096
9	9.5572796	9.5875660	51	9.9697136	10.4124340
10	9.5576060	9.5879413	50	9.9696647	10.4120587
11	9.5579321	9.5883163	49	9.9696158	10.4116837
12	9.5582579	9.5886912	48	9.9695668	10.4113088
13	9.5585835	9.5890657	47	9.9695177	10.4109343
14	9.5589088	9.5894401	46	9.9694687	10.4105599
15	9.5592338	9.5898142	45	9.9694196	10.4101858
16	9.5595585	9.5901881	44	9.9693704	10.4098119
17	9.5598829	9.5905617	43	9.9693212	10.4094383
18	9.5602071	9.5909351	42	9.9693720	10.4090649
19	9.5605310	9.5913082	41	9.9692227	10.4086918
20	9.5608546	9.5916812	40	9.9691734	10.4083188
21	9.5611779	9.5920539	39	9.9691240	10.4079461
22	9.5615010	9.5924263	38	9.9690746	10.4075737
23	9.5618237	9.5927685	37	9.9690252	10.4072015
24	9.5621462	9.5931705	36	9.9689757	10.4068295
25	9.5624685	9.5935422	35	9.9689262	10.4064577
26	9.5627904	9.5939138	34	9.9688766	10.4060861
27	9.5631121	9.5942851	33	9.9688270	10.4057149
28	9.5634335	9.5946561	32	9.9687773	10.4053439
29	9.5637546	9.5950269	31	9.9687276	10.4049731
30	9.5640754	9.5953975	30	9.9686779	10.4046025

Min.	21. Grad Seno.	Tangente.	Min.	68. Grad. Seno.	Tangente.
30	9.5640754	9.5953975	30	9.9686779	10.4046025
31	9.5643960	9.5957679	29	9.9686281	10.4042321
32	9.5647163	9.5961380	28	9.9685783	10.4038620
33	9.5650363	9.5965079	27	9.9685284	10.4034921
34	9.5653561	9.5968776	26	9.9684785	10.4031224
35	9.5656756	9.5972470	25	9.9684286	10.4027530
36	9.5659948	9.5976162	24	9.9683786	10.4023838
37	9.5663137	9.5979852	23	9.9683285	10.4020148
38	9.5666324	9.5983540	22	9.9682784	10.4016160
39	9.5669508	9.5987225	21	9.9682283	10.4012775
40	9.5672689	9.5990908	20	9.9681781	10.4009092
41	9.5675868	9.5994588	19	9.9681279	10.4005411
42	9.5679044	9.5998267	18	9.9680777	10.4001733
43	9.5682217	9.6001943	17	9.9680274	10.3998057
44	9.5685387	9.6005617	16	9.9679771	10.3994383
45	9.5688555	9.6009289	15	9.9679267	10.3990711
46	9.5691721	9.6012958	14	9.9678763	10.3987042
47	9.5694883	9.6016625	13	9.9678258	10.3983375
48	9.5698043	9.6020290	12	9.9677753	10.3979710
49	9.5701200	9.6023953	11	9.9677247	10.3976047
50	9.5704355	9.6027613	10	9.9676741	10.3972387
51	9.5707506	9.6031271	9	9.9676235	10.3968729
52	9.5710656	9.6034927	8	9.9675728	10.3965073
53	9.5713802	9.6038581	7	9.9675221	10.3961419
54	9.5716946	9.6042233	6	9.9674713	10.3957767
55	9.5720087	9.6045882	5	9.9674205	10.3954118
56	9.5723226	9.6049529	4	9.9673697	10.3950471
57	9.5726362	9.6053174	3	9.9673188	10.4946826
58	9.5729495	9.6056817	2	9.9672679	10.3943183
59	9.5732626	9.6060457	1	9.9672169	10.3939543
60	9.5735754	9.6064096	0	9.9671659	10.3935904

Min.	22. Grad. Seno.	22. Grad. Tangente.	Min.	67. Grad. Seno.	67. Grad. Tangente.
0	9.5735754	9.6064096	60	9.9671659	10.3935904
1	9.5738880	9.6067732	59	9.9671148	10.3930268
2	9.5742003	9.6071366	58	9.9670637	10.3928634
3	9.5745123	9.6074997	57	9.9670125	10.3925003
4	9.5748240	9.6078627	56	9.9669614	10.3921373
5	9.5751356	9.6082254	55	9.9669101	10.3917746
6	9.5754468	9.6085880	54	9.9668588	10.3914120
7	9.5757578	9.6089503	53	9.9668075	10.3910497
8	9.5760685	9.6093124	52	9.9667562	10.3906876
9	9.5763790	9.6096742	51	9.9667048	10.3903258
10	9.5766892	9.6100359	50	9.9666533	10.3899641
11	9.5769991	9.6103973	49	9.9666018	10.3896027
12	9.5773088	9.6107586	48	9.9665503	10.3892414
13	9.5776183	9.6111196	47	9.9664987	10.3888804
14	9.5779275	9.6114804	46	9.9664471	10.3885196
15	9.5782364	9.6118409	45	9.9663954	10.3881591
16	9.5785450	9.6122013	44	9.9663437	10.3877987
17	9.5788535	9.6125615	43	9.9662920	10.3874385
18	9.5791616	9.6129214	42	9.9662402	10.3870786
19	9.5794695	9.6132812	41	9.9661884	10.3867188
20	9.5797772	9.6136407	40	9.9661365	10.3863593
21	9.5800845	9.6140000	39	9.9660846	10.3860000
22	9.5803917	9.6143591	38	9.9660326	10.3856409
23	9.5806986	9.6147180	37	9.9659806	10.3852820
24	9.5810052	9.6150766	36	9.9659285	10.3849234
25	9.5813116	9.6154351	35	9.9658764	10.3845649
26	9.5816177	9.6157934	34	9.9658243	10.3842066
27	9.5819236	9.6161514	33	9.9657721	10.3838486
28	9.5822292	9.6165093	32	9.9657199	10.3834907
29	9.5825345	9.6168669	31	9.9656677	10.3831331
30	9.5828397	9.6172243	30	9.9656153	10.3827757

Min.	22. Grad. Seno.	22. Grad. Tangente.	Min.	67. Grad. Seno.	67. Grad. Tangente.
30	9.5828397	9.6172243	30	9.9656153	10.3827757
31	9.5831445	9.6175815	29	9.9655630	10.3824185
32	9.5834491	9.6179385	28	9.9655106	10.3820615
33	9.5837535	9.6182953	27	9.9654582	10.3817047
34	9.5840576	9.6186519	26	9.9654057	10.3813481
35	9.5843615	9.6190083	25	9.9653531	10.3809917
36	9.5846651	9.6193645	24	9.9654006	10.3806355
37	9.5849685	9.6197205	23	9.9652480	10.3802795
38	9.5852716	9.6200762	22	9.9651952	10.3799238
39	9.5855745	9.0204318	21	9.9651426	10.3795682
40	9.5858771	9.6207872	20	9.9650899	10.3792128
41	9.5861795	9.6211423	19	9.9650371	10.3788577
42	9.5864816	9.6214973	18	9.9649845	10.3785027
43	9.5867835	9.6218520	17	9.9649314	10.3781480
44	9.5870851	9.6222066	16	9.9648785	10.3777934
45	9.5873865	9.6225609	15	9.9648256	10.3774391
46	9.5876876	9.6229150	14	9.9647726	10.3770850
47	9.5879885	9.6232690	13	9.9647195	10.3767310
48	9.5882892	9.6236227	12	9.9646665	10.3763773
49	9.5885896	9.6239763	11	9.9646133	10.3760237
50	9.5888897	9.6243296	10	9.9645602	10.3756704
51	9.5891897	9.6246827	9	9.9645069	10.3753173
52	9.5894893	9.6250356	8	9.9644537	10.3749644
53	9.5897888	9.6253884	7	9.9644004	10.3746116
54	9.5900880	9.6257409	6	9.9643470	10.3742591
55	9.5903869	9.6260932	5	9.9642937	10.3739068
56	9.5906856	9.6264454	4	9.9642402	10.3735546
57	9.5909841	9.6267973	3	9.9641868	10.3732027
58	9.5912823	9.6271491	2	9.9641332	10.3728509
59	9.5915803	9.6275006	1	9.9640797	10.3724994
60	9.5918780	9.6278519	0	9.9640261	10.3721481

Min.	23. Grad.		Min.	66. Grad.	
	Seno.	Tangente.		Seno.	Tangente.
0	9.5918780	9.6278519	60	9.9640261	10.3721481
1	9.5921755	9.6282031	59	9.9639724	10.3717969
2	9.5924728	9.6285540	58	9.9639187	10.3714460
3	9.5927698	9.6289048	57	9.9638650	10.3710952
4	9.5930666	9.6292553	56	9.9638112	10.3707447
5	9.5933631	9.6296057	55	9.9637574	10.3703943
6	9.5936594	9.6299558	54	9.9637036	10.3700442
7	9.5939555	9.6303058	53	9.9636496	10.3696942
8	9.5942513	9.6306556	52	9.9635957	10.3693444
9	9.5945469	9.6310052	51	9.9635417	10.3689948
10	9.5948422	9.6313545	50	9.9634877	10.3686455
11	9.5951373	9.6317037	49	9.9634336	10.3682965
12	9.5954322	9.6320527	48	9.9633795	10.3679473
13	9.5957268	9.6324015	47	9.9633253	10.3675985
14	9.5960212	9.6327501	46	9.9632711	10.3672499
15	9.5963154	9.6330985	45	9.9632168	10.3669015
16	9.5966093	9.6334468	44	9.9631625	10.3665532
17	9.5969030	9.6337948	43	9.9631082	10.3662052
18	9.5971965	9.6341426	42	9.9630538	10.3658574
19	9.5974897	9.6344903	41	9.9629994	10.3655097
20	9.5977827	9.6348378	40	9.9629449	10.3651622
21	9.5980754	9.6351850	39	9.9628900	10.3648150
22	9.5983679	9.6355321	38	9.9628358	10.3644679
23	9.5986602	9.6358790	37	9.9627812	10.3641210
24	9.5989523	9.6362257	36	9.9627266	10.3637743
25	9.5992441	9.6365722	35	9.9626719	10.3634278
26	9.5995357	9.6369185	34	9.9626172	10.3630815
27	9.5998271	9.6372646	33	9.9625624	10.3627354
28	9.6001181	9.6376106	32	9.9625076	10.3623894
29	9.6004090	9.6379563	31	9.9624527	10.3620437
30	9.6006997	9.6383019	30	9.9623978	10.3616981

Min.	23. Grad. Seno.	23. Grad. Tangente.	Min.	66. Grad. Seno.	66. Grad. Tangente.
30	9.6006997	9.6383019	30	9.9623678	10.3616981
31	9.6009901	9.6386473	29	9.9623428	10.3613527
32	9.6012803	9.6389925	28	9.9622878	10.3610075
33	9.6015703	9.6393375	27	9.9622328	10.3606625
34	9.6018600	9.6396823	26	9.9621777	10.3603177
35	9.6021495	9.6400269	25	9.9621226	10.3599731
36	9.6024388	9.6403714	24	9.9620674	10.3596286
37	9.6027278	9.6407159	23	9.9620122	10.3592844
38	9.6030166	9.6410597	22	9.9619569	10.3589403
39	9.6033052	9.6411036	21	9.9619016	10.3585964
40	9.6035936	9.6417473	20	9.9618463	10.3582527
41	9.6038817	9.6420908	19	9.9617909	10.3579092
42	9.6041696	9.6424342	18	9.9617355	10.3575658
43	9.6044573	9.6427773	17	9.9616800	10.3572228
44	9.6047448	9.6431203	16	9.9616245	10.3568797
45	9.6050320	9.6434631	15	9.9615689	10.3565369
46	9.6053190	9.6438057	14	9.9615133	10.3561943
47	9.6056057	9.6441481	13	9.9614576	10.3558519
48	9.6058923	9.6444903	12	9.9614020	10.3555097
49	9.6061786	9.6448324	11	9.9613463	10.3551676
50	9.6064647	9.6451743	10	9.9612904	10.3548257
51	9.6067506	9.6455160	9	9.9612346	10.3544840
52	9.6070362	9.6458575	8	9.9611787	10.3541425
53	9.6073216	9.6461688	7	9.9611228	10.3538012
54	9.6076068	9.6465400	6	9.9610668	10.3534600
55	9.6078918	9.6468810	5	9.9610108	10.3531190
56	9.6081765	9.6472217	4	9.9609548	10.3527785
57	9.6084711	9.6475624	3	9.9608987	10.3524376
58	9.6087454	9.6479028	2	9.9608426	10.3520972
59	9.6090294	9.6482431	1	9.9607864	10.3517569
60	9.6093133	9.6485831	0	9.9607302	10.3514160

Min.	24. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	65. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.6095133	9.6485831	60	9.9607302	10.351416
1	9.6095969	9.6489230	59	9.9606739	10.351077
2	9.6098803	9.6492628	58	9.9606176	10.350737
3	9.6101635	9.6496023	57	9.9605612	10.3503977
4	9.6104465	9.6499417	56	9.9605048	10.3500583
5	9.6107293	9.6502809	55	9.9604484	10.3497191
6	9.6110118	9.6506199	54	9.9603919	10.3493801
7	9.6112941	9.6509587	53	9.9603354	10.3490413
8	9.6115762	9.6512974	52	9.9602788	10.3487026
9	9.6118580	9.6516359	51	9.9602222	10.3483641
10	9.6121397	9.6519742	50	9.9601655	10.3480258
11	9.6124211	9.6523123	49	9.9601088	10.3476877
12	9.6127023	9.6526503	48	9.9600520	10.3473497
13	9.6129833	9.6529881	47	9.9599952	10.3470119
14	9.6132641	9.6533257	46	9.9599384	10.3466743
15	9.6135446	9.6536631	45	9.9598815	10.3463369
16	9.6138250	9.6540004	44	9.9598246	10.3459996
17	9.6141051	9.6543375	43	9.9597676	10.3456625
18	9.6143850	9.6549744	42	9.9597106	10.3453256
19	9.6146647	9.6550112	41	9.9596535	10.3449888
20	9.6149441	9.6553477	40	9.9595964	10.3446523
21	9.6152234	9.6556841	39	9.9595393	10.3443159
22	9.6155024	9.6560204	38	9.9594821	10.3439796
23	9.6157812	9.6563564	37	9.9594248	10.3436436
24	9.6160598	9.6566923	36	9.9593675	10.3433077
25	9.6163382	9.6570280	35	9.9593102	10.3429720
26	9.6166164	9.6573636	34	9.9592528	10.3426364
27	9.6168944	9.6576989	33	9.9591954	10.3423011
28	9.6171721	9.6580341	32	9.9591380	10.3419659
29	9.6174496	9.6583692	31	9.9590805	10.3416308
30	9.6177270	9.6587041	30	9.9590229	10.3412960

Min.	24. Grad. Seno.	24. Grad. Tangente.	Min.	65. Grad. Seno.	65. Grad. Tangente.
30	9.6177270	9.6587041	30	9.9590229	10.3412960
31	9.6180041	9.6590387	29	9.9589653	10.3409613
32	9.6182809	9.6593733	28	9.9589077	10.3406267
33	9.6185576	9.6597076	27	9.9588500	10.3402924
34	9.6188341	9.6600418	26	9.9587923	10.3399582
35	9.6191103	9.6603758	25	9.9587345	10.3396242
36	9.6193864	9.6607097	24	9.9586767	10.3392903
37	9.6196622	9.6610434	23	9.9586188	10.3389566
38	9.6199378	9.6613769	22	9.9585609	10.3386231
39	9.6202132	9.6617103	21	9.9585030	10.3382897
40	9.6204884	9.6620434	20	9.9584450	10.3379566
41	9.6207634	9.6623765	19	9.9583869	10.3376235
42	9.6210382	9.6627093	18	9.9583288	10.3372907
43	9.6213127	9.6630420	17	9.9582707	10.3369580
44	9.6215871	9.6633745	16	9.9582125	10.3366255
45	9.6218612	9.6637069	15	9.9581543	10.3362931
46	9.6221351	9.6640391	14	9.9580961	10.3359609
47	9.6224088	9.6643711	13	9.9580378	10.3356289
48	9.6226824	9.6647030	12	9.9579794	10.3352970
49	9.6229557	9.6650346	11	9.9579210	10.3349654
50	9.6232287	9.6653662	10	9.9578626	10.3346338
51	9.6235016	9.6656975	9	9.9578041	10.3343025
52	9.6237743	9.6660288	8	9.9577456	10.3339712
53	9.6240467	9.6663598	7	9.9576870	10.3336402
54	9.6243190	9.6666907	6	9.9576284	10.3333093
55	9.6245911	9.6670214	5	9.9575697	10.3329786
56	9.6248629	9.6673519	4	9.9575110	10.3326481
57	9.6251346	9.6676823	3	9.9574522	10.3323177
58	9.6254060	9.6680126	2	9.9573934	10.3319874
56	9.6256772	9.6683426	1	9.9573346	10.3316574
60	9.6259483	9.6686725	0	9.9572757	10.3313275

Min.	25. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	64. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.6259483	9.6686725	60	9.9572757	10.331327
1	9.6262191	9.6690023	59	9.9572168	10.330997
2	9.6264897	9.6693319	58	9.9571578	10.330668
3	9.6267601	9.6696613	57	9.9570988	10.330338
4	9.6270303	9.9699906	56	9.9570397	10.330009
5	9.6273003	9.6703197	55	9.9569806	10.329680
6	9.6275701	9.6706486	54	9.9569215	10.329351
7	9.6278397	9.6709774	53	9.9568623	10.3290226
8	9.6281090	9.6713060	52	9.9568030	10.3286940
9	9.6283782	9.6716345	51	9.9567437	10.3283655
10	9.6286472	9.6719628	50	9.9566844	10.3280372
11	9.6289160	9.6722910	49	9.9566250	10.3277090
12	9.6291845	9.6726190	48	9.9565656	10.3273180
13	9.6294529	9.6729868	47	9.9565061	10.3270532
14	9.6297211	9.6732745	46	9.9564466	10.3267255
15	9.6299890	9.6736020	45	9.9563870	10.3263980
16	9.6302568	9.6739294	44	9.9563274	10.3260706
17	9.6305243	9.6742566	43	9.9562678	10.3257434
18	9.6307917	9.6745836	42	9.9562081	10.3254164
19	9.6310589	9.6749105	41	9.9561483	10.3250895
20	9.6313258	9.6752372	40	9.9560886	10.3247628
21	9.6315926	9.6755638	39	9.9560287	10.3244362
22	9.6318591	9.6758907	38	9.9559689	10.3241097
23	9.6321255	9.6762165	37	9.9559089	10.3237835
24	9.6323916	9.6765426	36	9.9558490	10.3234574
25	9.6326576	9.6768686	35	9.9557890	10.3231314
26	9.6329233	9.6771944	34	9.9557289	10.3228056
27	9.6331889	9.6775201	33	9.9556688	10.3224799
28	9.6334542	9.6778456	32	9.9556087	10.3221544
29	9.6337194	9.6781709	31	9.9555485	10.3218291
30	9.6339844	9.6784961	30	9.9554882	10.3215039

Min.	25. Grad Seno.	25. Grad Tangente.	Min.	64. Grad. Seno.	64. Grad. Tangente.
30	9.6339844	9.6784961	30	9.9554882	10.3215039
31	9.6342491	9.9788211	29	9.9554280	10.3211789
32	9.6345137	9.9791460	28	9.9553676	10.3208540
33	9.6347780	9.9794708	27	9.9553073	10.3205292
34	9.6350422	9.6797953	26	9.9552469	10.3202047
35	9.6353062	9.6801198	25	9.9551864	10.3198303
36	9.6355699	9.6804440	24	9.9551259	10.3195560
37	9.6358335	9.6807682	23	9.9550653	10.3192318
38	9.6360969	9.6810921	22	9.9550047	10.3189079
39	9.6363601	9.6814160	21	9.9549441	10.3185840
40	9.6366231	9.6817396	20	9.9548834	10.3182604
41	9.6368859	9.6820632	19	9.9548227	10.3179368
42	9.6371484	9.6823865	18	9.9547619	10.3176135
43	9.6374108	9.6827098	17	9.9547011	10.3172902
44	9.6376731	9.6830328	16	9.9546402	10.3169672
45	9.6379351	9.6833557	15	9.9545793	10.3166443
46	9.6381969	9.6836785	14	9.9545184	10.3163215
47	9.6384585	9.6840011	13	9.9544574	10.3159989
48	9.6387199	9.6843236	12	9.9543963	10.3156764
49	9.6389812	9.6846459	11	9.9543352	10.3153541
50	9.6392422	9.6849681	10	9.9542741	10.3150319
51	9.6395030	9.6852601	9	9.9542129	10.3147099
52	9.6397637	9.6856120	8	9.9541517	10.3143880
53	9.6400241	9.6859338	7	9.9540904	10.3140662
54	9.6402844	9.6862553	6	9.9540291	10.3137447
55	9.6405445	9.6865768	5	9.9539677	10.3134232
56	9.6408044	9.6868981	4	9.9539063	10.3131019
57	9.6410640	9.6872192	3	9.9538448	10.3127808
58	9.6413235	9.6875402	2	9.9537833	10.3124598
59	9.6415828	9.6878611	1	9.9537218	10.3121389
60	9.6418420	9.6881818	0	9.9536602	10.3118182

Min.	26. Grad. Seno.	26. Grad. Tangente.	Min.	63. Grad. Seno.	63. Grad. Tangente.
0	9.6418420	9.6881818	60	9.9536602	10.3118182
1	9.6421009	9.6885023	59	9.9535985	10.3114977
2	9.6423596	9.6888227	58	9.9535369	10.3111773
3	9.6426182	9.6891430	57	9.9534751	10.3108570
4	9.6428765	9.6894631	56	9.9534134	10.3105369
5	9.6431347	9.6897831	55	9.9533515	10.3102169
6	9.6433926	9.6901030	54	9.9532897	10.3098970
7	9.6436504	9.6904226	53	9.9532278	10.3095774
8	9.6439080	9.6907422	52	9.9531658	10.3092578
9	9.6441654	9.6910616	51	9.9531038	10.3089384
10	9.6444226	9.6913809	50	9.9530418	10.3086191
11	9.6446769	9.6917000	49	9.9529797	10.3083000
12	9.6449365	9.6920189	48	9.9529175	10.3079811
13	9.6451931	9.6923378	47	9.9528553	10.3076622
14	9.6454496	9.6926565	46	9.9527931	10.3073435
15	9.6457058	9.6929750	45	9.9527308	10.3070250
16	9.6459619	9.6932934	44	9.9526685	10.3067066
17	9.6462178	9.6936117	43	9.9526061	10.3063883
18	9.6464735	9.6939298	42	9.9525437	10.3060702
19	9.6467290	9.6942478	41	9.9524813	10.3057522
20	9.6469844	9.6945656	40	9.9524188	10.3054344
21	9.6472395	9.6948833	39	9.9523563	10.3051167
22	9.6474945	9.6952009	38	9.9522936	10.3047991
23	9.6477492	9.6955183	37	9.9522310	10.3044817
24	9.6480038	9.6958355	36	9.9521683	10.3041645
25	9.6482582	9.6961527	35	9.9521055	10.3038473
26	9.6485124	9.6964697	34	9.9520428	10.3037303
27	9.6487665	9.6967865	33	9.9519799	10.3032135
28	9.6490203	9.6971032	32	9.9519171	10.3028968
29	9.6492740	9.6974198	31	9.9518541	10.3025802
30	9.6495274	9.6977363	30	9.9517912	10.3022637

Min.	26. Grad. Seno.	26. Grad. Tangente.	Min.	63. Grad. Seno.	63. Grad. Tangente.
30	9.6495274	9.6977363	30	9.9517912	10.3022637
31	9.6497807	9.6980526	29	9.9517282	10.3019474
32	9.6500338	9.6983687	28	9.9516651	10.3016313
33	9.6502868	9.6986847	27	9.9516020	10.3013153
34	9.6505395	9.6990006	26	9.9515389	10.3009994
35	9.6507920	9.6993164	25	9.9514757	10.3006836
36	9.6510444	9.6996320	24	9.9514124	10.3003680
37	9.6512966	9.6999474	23	9.9513492	10.3000526
38	9.6515486	9.7002628	22	9.9512858	10.2997372
39	9.6518004	9.7005780	21	9.9512224	10.2994220
40	9.6520521	9.7008930	20	9.9511590	10.2991070
41	9.6523035	9.7012080	19	9.9510959	10.2987920
42	9.6525548	9.7015227	18	9.9510320	10.2984773
43	9.6528059	9.7018374	17	9.9509985	10.2981626
44	9.6530568	9.7021519	16	9.9509049	10.2978481
45	9.6533075	9.7024603	15	9.9508412	10.2975337
46	9.6535581	9.7027805	14	9.9507775	10.2972195
47	9.6538084	9.7030946	13	9.9507138	10.2965914
48	9.6540586	9.7034086	12	9.9506500	10.2965914
49	9.6543086	9.7037225	11	9.9505861	10.2962775
50	9.6545584	9.7040362	10	9.9505223	10.2959638
51	9.6548081	9.7043497	9	9.9504583	10.2956503
52	9.6550575	9.7046632	8	9.9503944	10.2953368
53	9.6553068	9.7049565	7	9.9503303	10.2950235
54	9.6555559	9.7052897	6	9.9502663	10.2947103
55	9.6558048	9.7056027	5	9.9502022	10.2943973
56	9.6560536	9.7059156	4	9.9501380	10.2940844
57	9.6563021	9.7062284	3	9.9500738	10.2937716
58	9.6565505	9.7063410	2	9.9500095	10.2934590
59	9.6567987	9.7068535	1	9.9499458	10.2931465
60	9.6570468	9.7071659	0	9.9498809	10.2928341

Min.	27. Grad. Seno.	27. Grad. Tangente.	Min.	62. Grad. Seno.	62. Grad. Tangente.
0	9.6570468	9.7071659	60	9.9498809	10.29283
1	9.6572946	9.7074781	59	9.9498165	10.29251
2	9.6575423	9.7077902	58	9.9497521	10.29220
3	9.6577898	9.7081022	57	9.9496876	10.29189
4	9.6580371	9.7084141	56	9.9496230	10.29158
5	9.6582842	9.7087258	55	9.9495585	10.29127
6	9.6585312	9.7090374	54	9.9494938	10.290962
7	9.6587780	9.7093488	53	9.9494292	10.290651
8	9.6590246	9.7096601	52	9.9493645	10.290339
9	9.6592710	9.7099713	51	9.9492997	10.290028
10	9.6595173	9.7102824	50	9.9492349	10.2897176
11	9.6597634	9.7105933	49	9.9491700	10.2894067
12	9.6600093	9.7109041	48	9.9491051	10.2890959
13	9.6602550	9.7112148	47	9.9490402	10.2887852
14	9.6605005	9.7115254	46	9.9489752	10.2884746
15	9.6607459	9.7118358	45	9.9489101	10.2881642
16	9.9609911	9.7121461	44	9.9488450	10.2878539
17	9.6612361	9.7124562	43	9.9487799	10.2875438
18	9.6614810	9.7127662	42	9.9487147	10.2872338
19	9.6617257	9.7130761	41	9.9486495	10.2869239
20	9.6619701	9.7133859	40	9.9485842	10.2866141
21	9.6622145	9.7136956	39	9.9485189	10.2863044
22	9.6624586	9.7140651	38	9.9484535	10.2859949
23	9.6627026	9.7143145	37	9.9483881	10.2856855
24	9.6629464	9.7146237	36	9.9483227	10.2853763
25	9.6631900	9.7149329	35	9.9482572	10.2850671
26	9.6634335	9.7152419	34	9.9481916	10.2847581
27	9.6636768	9.7155508	33	9.9481260	10.2844492
28	9.6639199	9.7158595	32	9.9480604	10.2841405
29	9.6641628	9.7161682	31	9.9479947	10.2838318
30	9.6644056	9.7164767	30	9.9479289	10.2835233

Min.	27. Grad. Seno.	27. Grad. Tangente.	Min.	62. Grad. Seno.	62. Grad. Tangente.
30	9.6644056	9.7164767	30	9.9479289	10.2835233
31	9.6646482	9.7167851	29	9.9478631	10.2832149
32	9.6648906	9.7170933	28	9.9477673	10.2829067
33	9.6651329	9.7174014	27	9.9477314	10.2825986
34	9.6653749	9.7177094	26	9.9476655	10.2822906
35	9.6656168	9.7180173	25	9.9475995	10.2819827
36	9.6658586	9.7183251	24	9.9475335	10.2816749
37	9.6611001	9.7186327	23	9.9474674	10.2813673
38	9.6663415	9.7189402	22	9.9474013	10.2810598
39	9.6665828	9.7192476	21	9.9473352	10.2807524
40	9.6668238	9.7195549	20	9.9472689	10.2804451
41	9.6670647	9.7198620	19	9.9472027	10.2801380
42	9.6673054	9.7201690	18	9.9471364	10.2798310
43	9.6675439	9.7204759	17	9.9470700	10.2795241
44	9.6677863	9.7207827	16	9.9470036	10.2792173
45	9.6680265	9.7210893	15	9.9469372	10.2789107
46	9.6682665	9.7213958	14	9.9468707	10.2786042
47	9.6685064	9.7217022	13	9.9468042	10.2782978
48	9.6687461	9.7220085	12	9.9467376	10.2779915
49	9.6689856	9.7223147	11	9.9466710	10.2776853
50	9.6692250	9.7226207	10	9.9466043	10.2773793
51	9.6694642	9.7229266	9	9.9465376	10.2770734
52	9.6697032	9.7232324	8	9.9464708	10.2767676
53	9.6699420	9.7235381	7	9.9464040	10.2764619
54	9.6701807	9.7238436	6	9.9463371	10.2761564
55	9.6704192	9.7341490	5	9.9462702	10.2758510
56	9.6706576	9.7244543	4	9.9462032	10.2755457
57	9.6708958	9.7247595	3	9.9461362	10.2752405
58	9.6711338	9.7250646	2	9.9460692	10.2749354
59	9.6713716	9.7253695	1	9.9460021	10.2746305
60	9.6716093	9.7256744	0	9.9459349	10.2743256

Min.	28. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	61. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.6716093	9.7156744	60	9.9459349	10.274325
1	9.6718468	9.7259791	59	9.9458677	10.274020
2	9.6720841	9.7262837	58	9.9458005	10.273716
3	9.6723213	9.7265881	57	9.9457332	10.273411
4	9.6725583	9.7268925	56	9.9456659	10.273107
5	9.6727952	9.7271967	55	9.9455985	10.272803
6	9.6730319	9.7275008	54	9.9455310	10.272499
7	9.6732684	9.7278048	53	9.9454636	10.272194
8	9.6735017	9.7281087	52	9.9453960	10.2718912
9	9.6737409	9.7284124	51	9.9453285	10.2715870
10	9.6739769	9.7287161	50	9.9452609	10.2712839
11	9.6742128	9.7290196	49	9.9451932	10.2709804
12	9.6744485	9.7293230	48	9.9451155	10.2706770
13	9.6746840	9.7296263	47	9.9450577	10.2703737
14	9.6749194	9.7299295	46	9.9449899	10.2700705
15	9.6751346	9.7302325	45	9.9449220	10.2697675
16	9.6753896	9.7305354	44	9.9448541	10.2694646
17	9.6756245	9.7308383	43	9.9447862	10.2691617
18	9.6758592	9.7311410	42	9.9447182	10.2688590
19	9.6760937	9.7314436	41	9.9446501	10.2685564
20	9.6763281	9.7317460	40	9.9445821	10.2682540
21	9.6765623	9.7320484	39	9.9445139	10.2679516
22	9.6767963	9.7323506	38	9.9444457	10.2676494
23	9.6770302	9.7326527	37	9.9443775	10.2673473
24	9.6772640	9.7329547	36	9.9443092	10.2670453
25	9.6774975	9.7332566	35	9.9442409	10.2667434
26	9.6777309	9.7325584	34	9.9441725	10.2664416
27	9.6779642	9.7338601	33	9.9441041	10.2661399
28	9.6781972	9.7341616	32	9.9440356	10.2658384
29	9.6784301	9.7344631	31	9.9439671	10.2655369
30	9.6786629	9.7347644	30	9.9438985	10.2652356

Min.	28. Grad. Seno.	28. Grad. Tangente.	Min.	61. Grad. Seno.	61. Grad. Tangente.
30	9.6786629	9.7347644	30	9.9438985	10.2652356
31	9.6788955	9.7350656	29	9.9438299	10.2649344
32	9.6791279	9.7353667	28	9.9437612	10.2646333
33	9.6793602	9.7356677	27	9.9436925	10.2643323
34	9.6795923	9.7359685	26	9.9436238	10.2640315
35	9.6798243	9.7362693	25	9.9435549	10.2637307
36	9.6800560	9.7365699	24	9.9434861	10.2634301
37	9.6802877	9.7368705	23	9.9434172	10.2631295
38	9.6805191	9.7371709	22	9.9433482	10.2628291
39	9.6807504	9.7374712	21	9.9432792	10.2625288
40	9.6809816	9.7377714	20	9.9432102	10.2622286
41	9.6812126	9.7380715	19	9.9431411	10.2619285
42	9.6814434	9.7383714	18	9.9430720	10.2616286
43	9.6816741	9.7386713	17	9.9430028	10.2613287
44	9.6819046	9.7389710	16	9.9429335	10.2610290
45	9.6821349	9.7392707	15	9.9428643	10.2607293
46	9.6823651	9.7395702	14	9.9427949	10.2604298
47	9.6825952	9.7398696	13	9.9427255	10.2601304
48	9.6828250	9.7401689	12	9.9426561	10.2598311
49	9.6830548	9.7404681	11	9.9425866	10.2595319
50	9.6832843	9.7407672	10	9.9425171	10.2592328
51	9.6835137	9.7410662	9	9.9424476	10.2589338
52	9.6837430	9.7413650	8	9.9423779	10.2586450
53	9.6839720	9.7416638	7	9.9423083	10.2583362
54	9.6842010	9.7419624	6	9.9422386	10.2580376
55	9.6844297	9.7422609	5	9.9421688	10.2577391
56	9.6846583	9.7425594	4	9.9420990	10.2574406
57	9.6848868	9.7428577	3	9.9420291	10.2571423
58	9.6851151	9.7431559	2	9.9419592	10.2568441
56	9.6853432	9.7434540	1	9.9418893	10.2565460
60	9.6855712	9.7437520	0	9.9418193	10.2562480

Min.	29. Grad. Seno.	29. Grad. Tangente.	Min.	60. Grad. Seno.	60. Grad. Tangente.
0	9.6855712	9.7437520	60	9.9418193	10.256248
1	9.6857891	9.7440499	59	9.9417492	10.2559501
2	9.6860267	9.7443476	58	9.9416791	10.2556524
3	9.6862542	9.7446453	57	9.9416090	10.2553547
4	9.6864816	9.7449428	56	9.9415388	10.2550572
5	9.6867088	9.7452403	55	9.9414685	10.2547597
6	9.6869359	9.7455376	54	9.9413982	10.2544624
7	9.6871628	9.7458349	53	9.9413279	10.2541651
8	9.6873895	9.7461320	52	9.9412575	10.2538680
9	9.6876161	9.7464290	51	9.9411871	10.2535710
10	9.6878425	9.7467259	50	9.9411166	10.2532741
11	9.6880688	9.7470227	49	9.9410461	10.2529773
12	9.6882949	9.7473194	48	9.9409755	10.2526806
13	9.6885209	9.7476160	47	9.9409048	10.2523840
14	9.6887467	9.7479125	46	9.9408342	10.2520875
15	9.6889723	9.7482089	45	9.9407634	10.2517911
16	9.6891978	9.7485052	44	9.9406927	10.2514948
17	9.6894232	9.7488013	43	9.9406219	10.2511987
18	9.6896484	9.7490974	42	9.9405510	10.2509026
19	9.6898734	9.7493934	41	9.9404801	10.2506066
20	9.6900983	9.7496892	40	9.9404091	10.2503108
21	9.6903231	9.7499850	39	9.9403381	10.2500150
22	9.690547[illegible]	9.7502806	38	9.9402670	10.2497194
23	9.6907721	9.7505762	37	9.9401959	10.2494238
24	9.6909964	9.7508716	36	9.9401248	10.2491284
25	9.6912205	9.7511669	35	9.9400535	10.2488331
26	9.6914445	9.7514622	34	9.9399823	10.2485378
27	9.6916683	9.7517573	33	9.9399110	10.2482427
28	9.6918919	9.7520523	32	9.9398396	10.2479477
29	9.6921155	9.7523472	31	9.9397682	10.2476528
30	9.6923388	9.7526420	30	9.9396968	10.2473580

Min.	29. Grad. Seno.	29. Grad. Tangente.	Min.	60. Grad. Seno.	60. Grad. Tangente.
30	9.6923388	9.7526420	30	9.9396968	10.2473580
31	9.6925620	9.7529368	29	9.9396243	10.2470632
32	9.6927851	9.7532314	28	9.9395537	10.2467686
33	9.6930080	9.7535259	27	9.9394821	10.2464741
34	9.6932308	9.7538203	26	9.9394105	10.2461797
35	9.6934534	9.7541146	25	9.9393388	10.2458854
36	9.6936758	9.7544088	24	9.9392671	10.2455912
37	9.6938981	9.7547029	23	9.9391953	10.2452971
38	9.6941203	9.7549969	22	9.9391234	10.2450031
39	9.6943423	9.7552908	21	9.9390515	10.2447092
40	9.6945642	9.7555846	20	9.9389796	10.2444154
41	9.6947859	9.7558783	19	9.9389076	10.2441217
42	9.6950074	9.7561718	18	9.9388356	10.2438282
43	9.6952288	9.7564653	17	9.9387635	10.2435347
44	9.6954501	9.7567587	16	9.9386914	10.2432413
45	9.6956712	9.7570520	15	9.9386192	10.2429480
46	9.6958922	9.7573452	14	9.9385470	10.2426548
47	9.6961130	9.7576383	13	9.9384747	10.2423617
48	9.6963336	9.7579313	12	9.9384024	10.2420687
49	9.6965541	9.7582242	11	9.9383300	10.2417758
50	9.6967745	9.7585170	10	9.9382576	10.2414830
51	9.6969947	9.7588096	9	9.9381851	10.2411904
52	9.6972148	9.7591022	8	9.9381126	10.2408978
53	9.6974347	9.7593947	7	9.9380400	10.2406053
54	9.6976545	9.7596871	6	9.9379674	10.2403129
55	9.6978741	9.7599794	5	9.9378947	10.2400206
56	9.6980936	9.7602716	4	9.9378220	10.2397284
57	9.6983129	9.7605637	3	9.9377492	10.2394363
58	9.6985321	9.7608557	2	9.9376764	10.2391443
59	9.6987511	9.7611476	1	9.9376035	10.2388524
60	9.6989700	9.7614394	0	9.9375306	10.2385606

Min.	30. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	59. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.6989700	9.7614194	60	9.9375306	10.2385606
1	9.6991887	9.7617311	59	9.9374577	10.2382689
2	9.6994073	9.7620227	58	9.9373847	10.2379773
3	9.6996258	9.7623142	57	9.9373116	10.2376858
4	9.6998441	9.7626056	56	9.9372385	10.2373944
5	9.7000622	9.7628969	55	9.9371653	10.2371031
6	9.7002802	9.7631881	54	9.9370921	10.2368119
7	9.7004981	9.7634792	53	9.9370189	10.2365208
8	9.7007158	9.7637702	52	9.9369456	10.2362298
9	9.7009334	9.7640612	51	9.9368722	10.2359388
10	9.7017508	9.7643520	50	9.9367988	10.2356480
11	9.7013681	9.7646427	49	9.9367254	10.2353573
12	9.7015852	9.7649334	48	9.9366519	10.2350666
13	9.7018022	9.7652239	47	9.9365783	10.2347761
14	9.7020190	9.7655143	46	9.9365047	10.2344857
15	9.7022357	9.7658047	45	9.9364311	10.2341953
16	9.7024523	9.7660949	44	9.9363574	10.2339051
17	9.7026687	9.7663851	43	9.9363836	10.2336149
18	9.7028849	9.7666751	42	9.9362098	10.2333249
19	9.7031011	9.7669051	41	9.9361360	10.2330349
20	9.7033170	9.7672550	40	9.9360921	10.2327450
21	9.7035329	9.7675448	39	9.9359881	10.2324552
22	9.7034486	9.7678344	38	9.9359141	10.2321656
23	9.7039641	9.7681240	37	9.9358401	10.2318760
24	9.7041795	9.7684135	36	9.9357660	10.2315865
25	9.7043947	9.7687029	35	9.9356918	10.2312971
26	9.7046099	9.7689922	34	9.9356177	10.2310078
27	9.7048248	9.7692814	33	9.9355434	10.2307186
28	9.7050397	9.7695705	32	9.9354691	10.2304295
29	9.7052543	9.7698596	31	9.9353948	10.2301404
30	9.7054689	9.7701485	30	9.9353204	10.2298515

Min.	30. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	59. Grad. Seno.	Tangente.
30	9.7054689	9.7701485	30	9.9353204	10.2298515
31	9.7056833	9.7704373	29	9.9352459	10.2295627
32	9.7058975	9.7707261	28	9.9351715	10.2292739
33	9.7061116	9.7710147	27	9.9350969	10.2289853
34	9.7063256	9.7713033	26	9.9350223	10.2286967
35	9.7065394	9.7715917	25	9.9349477	10.2284083
36	9.7067531	9.7718801	24	9.9348730	10.2081199
37	9.7069667	9.7721684	23	9.9347983	10.2278316
38	9.7071801	9.7724566	22	9.9347235	10.2275434
39	9.7073933	9.7727447	21	9.9346486	10.2272553
40	9.7076064	9.7730327	20	9.9345738	10.2269673
41	9.7078194	9.7733206	19	9.9344988	10.2266794
42	9.7080323	9.7736084	18	9.9344238	10.2263916
43	9.7082450	9.7738961	17	9.9343488	10.2261039
44	9.7084575	9.7741838	16	9.9342737	10.2258162
45	9.7086699	9.7744713	15	9.9541986	10.2255287
46	9.7088822	9.7747588	14	9.9341234	10.2252412
47	9.7090943	9.7750462	13	9.9340482	10.2249538
48	9.7093063	9.7753334	12	9.9339729	10.2246666
49	9.7095182	9.7756206	11	9.9338976	10.2243794
50	9.7097299	9.7759077	10	9.9338222	10.2240923
51	9.7099415	9.7761947	9	9.9337467	10.2238053
52	9.7101529	9.7764816	8	9.9336713	10.2235484
53	9.7103642	9.7767685	7	9.9335957	10.2232315
54	9.7105753	9.7770552	6	9.9335201	10.2229448
55	9.7107863	9.7773418	5	9.9334445	10.2226582
56	9.7109972	9.7776284	4	9.9333688	10.2223716
57	9.7112080	9.7779149	3	9.9332931	10.2220851
58	9.7114186	9.7782012	2	9.9332173	10.2217988
59	9.7116290	9.7784875	1	9.9331415	10.2215125
60	9.7118393	9.7787737	0	9.9330656	10.2212262

Min.	31. Grad. Seno.	31. Grad. Tangente.	Min.	58. Grad. Seno.	58. Grad. Tangente.
0	9.7118393	9.7787737	60	9.9330656	10.2212263
1	9.7120495	9.7790599	59	9.9329897	10.2209401
2	9.7122596	9.7793439	58	9.9326137	10.2206541
3	9.7124695	9.7796318	57	9.9328379	10.2203682
4	9.7126792	9.7799177	56	9.9327616	10.2200823
5	9.7128889	9.7802034	55	9.9326854	10.2197966
6	9.7130983	9.7804891	54	9.9326092	10.2195109
7	9.7133077	9.7807747	53	9.9325330	10.2192253
8	9.7135169	9.7810602	52	9.9324567	10.2189398
9	9.7137260	9.7813456	51	9.9323804	10.2186544
10	9.7139349	9.7816309	50	9.9323040	10.2183691
11	9.7141437	9.7819162	49	9.9322276	10.2180838
12	9.7143524	9.7822013	48	9.9321511	10.2177987
13	9.7145609	9.7824864	47	9.9320746	10.2175136
14	9.7147693	9.7827713	46	9.9319980	10.2172287
15	9.7149776	9.7830562	45	9.9319213	10.2169438
16	9.7151857	9.7833410	44	9.9318847	10.2166590
17	9.7153937	9.7836258	43	9.9317679	10.2163742
18	9.7156015	9.7839104	42	9.9316911	10.2160896
19	9.7158092	9.7841949	41	9.9314143	10.2158051
20	9.7160168	9.7844794	40	9.9315374	10.2155206
21	9.7162243	9.7847638	39	9.9314605	10.2152362
22	9.7164316	9.7850481	38	9.9313835	10.2149519
23	9.7166387	9.7853323	37	9.9313063	10.2146677
24	9.7168458	9.7856164	36	9.9312294	10.2143836
25	9.7170526	9.7859004	35	9.9311522	10.2140996
26	9.7172594	9.7861844	34	9.9310750	10.2138156
27	9.7174660	9.7864682	33	9.9309978	10.2135318
28	9.7176725	9.7867520	32	9.9309205	10.2132480
29	9.7178789	9.7870357	31	9.9308432	10.2129645
30	9.7180851	9.7873193	30	9.9307658	10.2126807

Min.	31. Grad. Seno.	31. Grad. Tangente.	Min.	58. Grad. Seno.	58. Grad. Tangente.
30	9.7180851	9.7873193	30	9.9307658	10.2126807
31	9.7182912	9.7876028	29	9.9306883	10.2123972
32	9.7184971	9.7878863	28	9.9306109	10.2121137
33	9.7187030	9.7881696	27	9.9305333	10.2118304
34	9.7189086	9.7884529	26	9.9304557	10.2115471
35	9.7191142	9.7887361	25	9.9303781	10.2112639
36	9.7193196	9.7890192	24	9.9303004	10.2109808
37	9.7195249	9.7893023	23	9.9302226	10.2106977
38	9.7197300	9.7895852	22	9.9301448	10.2104148
39	9.7199350	9.7898681	21	9.9300670	10.2101319
40	9.7201399	9.7901508	20	9.9299891	10.2098492
41	9.7203447	9.7904335	19	9.9299112	10.2095665
42	9.7205493	9.7907161	18	9.9298332	10.2092839
43	9.7207538	9.7909987	17	9.9297551	10.2090013
44	9.7209581	9.7912811	16	9.9296770	10.2087189
45	9.7211623	9.7915635	15	9.9295989	10.2084365
46	9.7213664	9.7918458	14	9.9295207	10.2081542
47	9.7215704	9.7921280	13	9.9294424	10.2078720
48	9.7217742	9.7924101	12	9.9293641	10.2075899
49	9.7219779	9.7926921	11	9.9292857	10.2073079
50	9.7221814	9.7929741	10	9.9292073	10.2070259
51	9.7223848	9.7932560	9	9.9291289	10.2067440
52	9.7225881	9.7935378	8	9.9290504	10.2064622
53	9.7227913	9.7938195	7	9.9289718	10.2061805
54	9.7229943	9.7941011	6	9.9288932	10.2058989
55	9.7231972	9.7943827	5	9.9288145	10.2056173
56	9.7234000	9.7946641	4	9.9287358	10.2053359
57	9.7236026	9.7949455	3	9.9286571	10.2050545
58	9.7238051	9.7952268	2	9.9285783	10.2047732
59	9.7240075	9.7955081	1	9.9284994	10.2044919
60	9.7242097	9.7957892	0	9.9284205	10.2042108

Min.	32. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	57. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.7242097	9.7957892	60	9.9284205	10.204210
1	9.7244118	9.7960703	59	9.9283415	10.203929
2	9.7246138	9.7963513	58	9.9282625	10.203648
3	9.7248156	9.7966322	57	9.9281834	10.203367
4	9.7250174	9.7969130	56	9.9281043	10.203087
5	9.7252189	9.7971938	55	9.9280251	10.202806
6	9.7254204	9.7974745	54	9.9279459	10.2025255
7	9.7256217	9.7977551	53	9.9278666	10.2022449
8	9.7258229	9.7980356	52	9.9277873	10.2019644
9	9.7260240	9.7983160	51	9.9277079	10.2016840
10	9.7262249	9.7985964	50	9.9276285	10.2014036
11	9.7264257	9.7988767	49	9.9275490	10.2011233
12	9.7266264	9.7991569	48	9.9274695	10.2008431
13	9.7268269	9.7994370	47	9.9273899	10.2005630
14	9.7270273	9.7997170	46	9.9273103	10.2002830
15	9.7272276	9.7999970	45	9.9272306	10.2000030
16	9.7274278	9.8002769	44	9.9271509	10.1997231
17	9.7276278	9.8005567	43	9.9270711	10.1994433
18	9.7278277	9.8008365	42	9.9269913	10.1991635
19	9.7280275	9.8011161	41	9.9269114	10.1988839
20	9.7282271	9.8013957	40	9.9268314	10.1986043
21	9.7284267	9.8016752	39	9.9267514	10.1983248
22	9.7286260	9.8019546	38	9.9266714	10.1980454
23	9.7288253	9.8022340	37	9.9265913	10.1979660
24	9.7290244	9.8025133	36	9.9265112	10.1974867
25	9.7292234	9.8027925	35	9.9264310	10.1972075
26	9.7294223	9.8030716	34	9.9263507	10.1969284
27	9.7296211	9.8033506	33	9.9262704	10.1966494
28	9.7298197	9.8036296	32	9.9261901	10.1963704
29	9.7300182	9.8039085	31	9.9261096	10.1960915
30	9.7302164	9.8041873	30	9.9260292	10.1958127

Min.	32. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	57. Grad. Seno.	Tangente.
30	9.7302165	9.8041873	30	9.9260292	10.1958127
31	9.7304148	9.8044661	29	9.9259487	10.1955339
32	9.7306129	9.8047447	28	9.9258681	10.1952553
33	9.7308109	9.8050233	27	9.9257875	10.1949767
34	9.7310087	9.8053019	26	9.9257069	10.1946981
35	9.7312064	9.8055803	25	9.9256261	10.1944197
36	9.7314040	9.8058587	24	9.9255454	10.1941413
37	9.7316015	9.8061370	23	9.9254646	10.1938630
38	9.7317989	9.8064152	22	9.9253837	10.1935848
39	9.7319961	9.8066933	21	9.9253028	10.1933067
40	9.7321932	9.8069714	20	9.9252218	10.1930286
41	9.7323902	9.8072494	19	9.9251408	10.2927509
42	9.7325870	9.8075273	18	9.9250597	10.1924727
43	9.7327637	9.8078052	17	9.9249786	10.1921948
44	9.7329803	9.8080829	16	9.9248974	10.1919171
45	9.7331768	9.8083606	15	9.9248161	10.1916394
46	9.7333731	9.8086383	14	9.9247349	10.1913617
47	9.7335693	9.8089158	13	9.9246535	10.1910842
48	9.7337654	9.8091933	12	9.9245721	10.1908067
49	9.7339614	9.8094707	11	9.9244907	10.1905293
50	9.7341572	9.8097480	10	9.9244092	10.1902520
51	9.7343529	9.8100253	9	9.9243277	10.1899747
52	9.7345485	9.8103025	8	9.9242461	10.1896975
53	9.7347440	9.8105796	7	9.9241644	10.1894204
54	9.7349393	9.8108566	6	9.9240827	10.1891434
55	9.7351345	9.8111336	5	9.9240010	10.1888664
56	9.7353296	9.8114105	4	9.9239191	10.1885895
57	9.7355246	9.8116873	3	9.9238373	10.1883127
58	9.7357195	9.8119641	2	9.9237554	10.1880359
56	9.7359142	9.8122408	1	9.9236734	10.1877592
60	9.7361088	9.8125174	0	9.9235914	10.1874826

Min.	33. Grad. Seno.	33. Grad. Tangente.	Min.	65. Grad. Seno.	65. Grad. Tangente.
0	9.7361088	9.8125174	60	9.9235914	10.1874826
1	9.7363032	9.8127939	59	9.9235093	10.1872061
2	9.7364976	9.8130704	58	9.9234272	10.1869296
3	9.7366918	9.8133468	57	9.9233450	10.1866532
4	9.7368859	9.8136231	56	9.9232628	10.1863769
5	9.7370799	9.8138993	55	9.9231805	10.1861007
6	9.7372737	9.8141755	54	9.9230982	10.1858245
7	9.7374675	9.8144516	53	9.9230158	10.1855484
8	9.7376611	9.8147277	52	9.9229334	10.1852723
9	9.7378546	9.8150036	51	9.9228509	10.1849964
10	9.7380479	9.8152795	50	9.9227684	10.1847205
11	9.7382412	9.8155554	49	9.9226858	10.1844446
12	9.7284343	9.8158311	48	9.9226032	10.1841689
13	9.7386273	9.8161068	47	9.9225205	10.1838932
14	9.7388201	9.8163824	46	9.9224377	10.1836176
15	9.7390129	9.8166580	45	9.9223549	10.1833420
16	9.7392055	9.8169335	44	9.9222721	10.1830665
17	9.7393980	9.8172089	43	9.9221891	10.1827911
18	9.7395904	9.8174842	42	9.9221062	10.1825158
19	9.7397827	9.8177595	41	9.9220232	10.1822405
20	9.7399748	9.8180347	40	9.9219401	10.1819653
21	9.7401668	9.8183098	39	9.9218570	10.1816902
22	9.7403587	9.8185849	38	9.9217738	10.1814151
23	9.7405505	9.8188599	37	9.9216906	10.1811401
24	9.7407421	9.8191348	36	9.9216073	10.1808652
25	9.7409337	9.8194096	35	9.9215240	10.1805904
26	9.7411251	9.8196844	34	9.9214406	10.1803156
27	9.7413164	9.8199592	33	9.9213572	10.1800408
28	9.7415075	9.8202338	32	9.9212737	10.1797662
29	9.7416986	9.8205084	31	9.9211902	10.1794916
30	9.7418895	9.8207829	30	9.9211066	10.1792171

Min.	33. Grad. Seno.	33. Grad. Tangente.	Min.	56. Grad. Seno.	56. Grad. Tangente.
30	9.7418895	9.8207829	30	9.9211066	10.1792171
31	9.7420803	9.8210574	29	9.9210229	10.1789426
32	9.7422710	9.8213318	28	9.9209393	10.1786683
33	9.7424616	9.8216060	27	9.9208555	10.1783940
34	9.7426520	9.8218803	26	9.9207717	10.1781197
35	9.7428423	9.8221545	25	9.9206878	10.1778455
36	9.7430325	9.8224286	24	9.9206039	10.1775714
37	9.7432226	9.8227026	23	9.9205200	10.1772974
38	9.7434126	9.8229766	22	9.9204360	10.1770234
39	9.7436024	9.8232505	21	9.9203519	10.1767495
40	9.7437921	9.8235244	20	9.9202678	10.1764756
41	9.7439817	9.8237981	19	9.9201836	10.1762019
42	9.7441712	9.8240719	18	9.9200994	10.1759281
43	9.7443606	9.8243455	17	9.9200151	10.1756545
44	9.7445498	9.8246191	16	9.9199308	10.1753809
45	9.7447390	9.8248926	15	9.9198464	10.1751074
46	9.7449280	9.8251660	14	9.9197619	10.1748340
47	9.7451169	9.8254394	13	9.9196775	10.1745606
48	9.7453056	9.8257127	12	9.9195929	10.1742873
49	9.7454943	9.8259860	11	9.9195083	10.1740140
50	9.7456828	9.8262592	10	9.9194237	10.1737408
51	9.7458712	9.8265323	9	9.9193390	10.1734677
52	9.7460595	9.8268053	8	9.9192542	10.1731947
53	9.7462477	9.8270783	7	9.9191694	10.1729217
54	9.7464358	9.8273513	6	9.9190845	10.1726487
55	9.7466237	9.8276241	5	9.9189996	10.1723759
56	9.7468115	9.8278969	4	9.9189146	10.1721031
57	9.7469992	9.8281696	3	9.9188296	10.1718304
58	9.7471868	9.8284423	2	9.9187445	10.1715577
59	9.7473743	9.8287149	1	9.9186594	10.1712851
60	9.7475617	9.8289874	0	9.9185742	10.1710126

Min.	34. Grad. Seno.	34. Grad. Tangente.	Min.	55. Grad. Seno.	55. Grad. Tangente.
0	9.7475617	9.8289874	60	9.9185742	10.171012
1	9.7477489	9.8292599	59	9.9184890	10.170740
2	9.7479360	9.8295323	58	9.9184037	10.170467
3	9.7481230	9.8298047	57	9.9183183	10.1701953
4	9.7483099	9.8300769	56	9.9182329	10.1699231
5	9.7484967	9.8303492	55	9.9181475	10.1696508
6	9.7486833	9.8306213	54	9.9180620	10.1693787
7	9.7488698	9.8308934	53	9.9179764	10.1691066
8	9.7490562	9.8311654	52	9.9178908	10.1688346
9	9.7492425	9.8314374	51	9.9178051	10.1685626
10	9.7494287	9.8317093	50	9.9177194	10.1682907
11	9.7496148	9.8319811	49	9.9176336	10.1680189
12	9.7498007	9.8322529	48	9.9175478	10.1677471
13	9.7499866	9.8325246	47	9.9174619	10.1674754
14	9.7501723	9.8327963	46	9.9173760	10.1672037
15	9.7503579	9.8330679	45	9.9172900	10.1669321
16	9.7505434	9.8333394	44	9.9172040	10.1666606
17	9.7507287	9.8336109	43	9.9171179	10.1663891
18	9.7509140	9.8338823	42	9.9170317	10.1661177
19	9.7510991	9.8341536	41	9.9169455	10.1658464
20	9.7512842	9.8344249	40	9.9168593	10.1655751
21	9.7514691	9.8346961	39	9.9167730	10.1653039
22	9.7516538	9.8349673	38	9.9166866	10.1650327
23	9.7518385	9.8352384	37	9.9166002	10.1647616
24	9.7520231	9.8355094	36	9.9165137	10.1644906
25	9.7522075	9.8357804	35	9.9164272	10.1642196
26	9.7523919	9.8360513	34	9.9163406	10.1639487
27	9.7525761	9.8363221	33	9.9162539	10.1636779
28	9.7527602	9.8365929	32	9.9161673	10.1634071
29	9.7529442	9.8368636	31	9.9160805	10.1631364
30	9.7531280	9.8371343	30	9.9159937	10.1628657

Min.	34. Grad.		Min.	55. Grad.	
	Seno.	Tangente.		Seno.	Tangente.
30	9.7531280	9.8371343	30	9.9159937	10.1628657
31	9.7533118	9.8374049	29	9.9159069	10.1625951
32	9.7534954	9.8376755	28	9.9158200	10.1623245
33	9.7536790	9.8379460	27	9.9157330	10.1620540
34	9.7538624	9.8382164	26	9.9156460	10.1617836
35	9.7540457	9.8384867	25	9.9155589	10.1615133
36	9.7542288	9.8387571	24	9.9154718	10.1612429
37	9.7544119	9.8390273	23	9.9153846	10.1609727
38	9.7545949	9.8392975	22	9.9152974	10.1607025
39	9.7547777	9.8395676	21	9.9152101	10.1604324
40	9.7549604	9.8398377	20	9.9151228	10.1601623
41	9.7551431	9.8401077	19	9.9150354	10.1598923
42	9.7553256	9.8403776	18	9.9149479	10.1596224
43	9.7555080	9.8406475	17	9.9148604	10.1593525
44	9.7556902	9.8409174	16	9.9147729	10.1590826
45	9.7558724	9.8411871	15	9.9146852	10.1588129
46	9.7560544	9.8414569	14	9.9145976	10.1585431
47	9.7562364	9.8417265	13	9.9145099	10.1582735
48	9.7564182	9.8419961	12	9.9144221	10.1580039
49	9.7565999	9.8422657	11	9.9143342	10.1577343
50	9.7567815	9.8425351	10	9.9142464	10.1574649
51	9.7569630	9.8428046	9	9.9141584	10.1571954
52	9.7571444	9.8430739	8	9.9140704	10.1569261
53	9.7573256	9.8433432	7	9.9139824	10.1566568
54	9.7575068	9.8436125	6	9.9138943	10.1563875
55	9.7576878	9.8438817	5	9.9138061	10.1561183
56	9.7578687	9.8441508	4	9.9137179	10.1558492
57	9.7580495	9.8444199	3	9.9136296	10.1555801
58	9.7582302	9.8446889	2	9.9135413	10.1553111
59	9.7584108	9.8449579	1	9.9134530	10.1550421
60	9.7585913	9.8452268	0	9.9133645	10.1547732

Min.	35. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	54. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.7585913	9.8452268	60	9.9133645	10.154773
1	9.7587717	9.8454956	59	9.9132760	10.1545044
2	9.7586519	9.8457644	58	9.9131875	10.1542356
3	9.7591321	9.8460332	57	9.9130989	10.1539668
4	9.7593121	9.8463018	56	9.9130102	10.153698
5	9.7594930	9.8465705	55	9.9129215	10.153429
6	9.7596718	9.8468390	54	9.9128328	10.1531610
7	9.7598515	9.8471075	53	9.9127440	10.152892
8	9.7600311	9.8473760	52	9.9126551	10.152624
9	9.7602106	9.8476444	51	9.9125662	10.152355
10	9.7603899	9.8479127	50	9.9124772	10.152087
11	9.7605692	9.8481810	49	9.9123882	10.1518190
12	9.7607483	9.8484492	48	9.9122991	10.1515508
13	9.7609274	9.8487174	47	9.9122099	10.151282
14	9.7611063	9.8489855	46	9.9121207	10.151014
15	9.7612851	9.8492536	45	9.9120315	10.150746
16	9.7614638	9.8495216	44	9.9119422	10.1504784
17	9.7616424	9.8497896	43	9.9118528	10.1502104
18	9.7618208	9.8500575	42	9.9117634	10.149942
19	9.7619992	9.8503253	41	9.9116739	10.1496747
20	9.7621775	9.8505931	40	9.9115844	10.1494069
21	9.7623556	9.8508608	39	9.9114948	10.1491392
22	9.7625337	9.8511285	38	9.9114051	10.148871
23	9.7627116	9.8513961	37	9.9113155	10.1486039
24	9.7628894	9.8516637	36	9.9112257	10.148336
25	9.7630671	9.8519312	35	9.9111359	10.1480688
26	9.7632447	9.8521987	34	9.9110460	10.147801
27	9.7634222	9.8524661	33	9.9109561	10.147533
28	9.7535996	9.8527335	32	9.9108661	10.147266
29	9.7637769	9.8530008	31	9.9107761	10.146999
30	9.7639540	9.8532680	30	9.9106860	10.146732

Min.	35. Grad. Seno.	35. Grad. Tangente.	Min.	54. Grad. Seno.	54. Grad. Tangente.
30	9.7639540	9.8532680	30	9.9106860	10.1467320
31	9.7641311	9.8535352	29	9.9105959	10.1464648
32	9.7643080	9.8538023	28	9.9105057	10.1461977
33	9.7644849	9.8540694	27	9.9104155	10.1459306
34	9.7646616	9.8543365	26	9.9103251	10.1456635
35	9.7648382	9.8546034	25	9.9102348	10.1453966
36	9.7650147	9.8548704	24	9.9101444	10.1451296
37	9.7651911	9.8551372	23	9.9100539	10.1448628
38	9.7653674	9.8554041	22	9.9099634	10.1445959
39	9.7655436	9.8556708	21	9.9098728	10.1443292
40	9.7657197	9.8559376	20	9.9097821	10.1440624
41	9.7658957	9.8562042	19	9.9096915	10.1437958
42	9.7660715	9.8564708	18	9.9096007	10.1435292
43	9.7662473	9.8567374	17	9.9095099	10.1432628
44	9.7664229	9.8570039	16	9.9094190	10.1429961
45	9.7665985	9.8572704	15	9.9093281	10.1427296
46	9.7667739	9.8575368	14	9.9092371	10.1424632
47	9.7669492	9.8578031	13	9.9091461	10.1421969
48	9.7671244	9.8580694	12	9.9090550	10.1419306
49	9.7672996	9.8583357	11	9.9089639	10.1416643
50	9.7674746	9.8586019	10	9.9088727	10.1413981
51	9.7676494	9.8588680	9	9.9087814	10.1411320
52	9.7678242	9.8591341	8	9.9086901	10.1408659
53	9.7679989	9.8594002	7	9.9085988	10.1405998
54	9.7681735	9.8596661	6	9.9085073	10.1403339
55	9.7683480	9.8599321	5	9.9084159	10.1400679
56	9.7685223	9.8601980	4	9.9083243	10.1398020
57	9.7686966	9.8604638	3	9.9082327	10.1365362
58	9.7688707	9.8607296	2	9.9081411	10.1392704
59	9.7690448	9.8609954	1	9.9080494	10.1390046
60	9.7692187	9.8612610	0	9.9079576	10.1387390

Min.	36.Grad. Seno.	36.Grad. Tangente.	Min.	53. Grad. Seno.	53. Grad. Tangente.
0	9.7692187	9.8612610	60	9.9079576	10.138739
1	9.7693925	9.8615267	59	9.9078658	10.138473
2	9.7695662	9.8617923	58	9.9077740	10.138207
3	9.7697398	9.8620578	57	9.9076820	10.13794
4	9.7699134	9.8623233	56	9.9075901	10.137676
5	9.7700868	9.8625887	55	9.9074980	10.137411
6	9.7702601	9.8628541	54	9.9074059	10.1371459
7	9.7704332	9.8631195	53	9.9073138	10.1368805
8	9.7706063	9.8633848	52	9.9072216	10.1366152
9	9.7707793	9.8636500	51	9.9071293	10.1363500
10	9.7709522	9.8639152	50	9.9070370	10.1360848
11	9.7711249	9.8641803	49	9.9069446	10.1358197
12	9.7712976	9.8644454	48	9.9068522	10.1355546
13	9.7714402	9.8647105	47	9.9067597	10.1352895
14	9.7716926	9.8649755	46	9.9066671	10.1350245
15	9.7718150	9.8652404	45	9.9065745	10.1347596
16	9.7719872	9.8655053	44	9.9064819	10.1344947
17	9.7721593	9.8657702	43	9.9063892	10.1342298
18	9.7723314	9.8660350	42	9.9062964	10.1339650
19	9.7725033	9.8662997	41	9.9062036	10.1337003
20	9.7726751	9.8665644	40	9.9061107	10.1334356
21	9.7728468	9.8668291	39	9.9060177	10.1331709
22	9.7730185	9.8670937	38	9.9059247	10.1329063
23	9.7731900	9.8673583	37	9.9058317	10.1326417
24	9.7733614	9.8676228	36	9.9057386	10.1323772
25	9.7735327	9.8678873	35	9.9056454	10.1321127
26	9.7737039	9.8681517	34	9.9055522	10.1318483
27	9.7738749	9.8684160	33	9.9054589	10.1315840
28	9.7740459	9.8686804	32	9.9053656	10.1313196
29	9.7742168	9.8689446	31	9.9052722	10.1310554
30	9.7743876	9.8692089	30	9.9051787	10.1307911

Min.	36. Grad.		Min.	53. Grad.	
	Seno.	Tangente.		Seno.	Tangente.
30	9.7744876	9.8692089	30	9.9051787	10.1307911
31	9.7745583	9.8694731	29	9.9050852	10.1305269
32	9.7747288	9.8697372	28	9.9049916	10.1302628
33	9.7748993	9.8700013	27	9.9048980	10.1299987
34	9.7750697	9.8702653	26	9.9048043	10.1297347
35	9.7752399	9.8705293	25	9.9047106	10.1294707
36	9.7754101	9.8707933	24	9.9046168	10.1292067
37	9.7755801	9.8710572	23	9.9045230	10.1289428
38	9.7757501	9.8713210	22	9.9044291	10.1286790
39	9.7759199	9.8715848	21	9.9043351	10.1284152
40	9.7760897	9.8718486	20	9.9042411	10.1281514
41	9.7762593	9.8721123	19	9.9041470	10.1278877
42	9.7764289	9.8723760	18	9.9040529	10.1276240
43	9.7765983	9.8726396	17	9.9039587	10.1273604
44	9.7767676	9.8729032	16	9.9038644	10.1270968
45	9.7769369	9.8731668	15	9.9037701	10.1268332
46	9.7771060	9.8734302	14	9.9036757	10.1265698
47	9.7772750	9.8736937	13	9.9035813	10.1263063
48	9.7774439	9.8739571	12	9.9034868	10.1260429
49	9.7776128	9.8742204	11	9.9033923	10.1257796
50	9.7777815	9.8744838	10	9.9032977	10.1255162
51	9.7779501	9.8747470	9	9.9032031	10.1252530
52	9.7781186	9.8750102	8	9.9031084	10.1249898
53	9.7782870	9.8752734	7	9.9030136	10.1247266
54	9.7784553	9.8755365	6	9.9029188	10.1244635
55	9.7786235	9.8757996	5	9.9028239	10.1242004
56	9.7787916	9.8760627	4	9.9027286	10.1239373
57	9.7789596	9.8763257	3	9.9026339	10.1236743
58	9.7791275	9.8765886	2	9.9027389	10.1234114
56	9.7792953	9.8768514	1	9.9024438	10.1231485
60	9.7794630	9.8771144	0	9.9023486	10.1228856

Min.	37. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	52. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.7794630	9.8771144	60	9.9023486	10.1228856
1	9.7796306	9.8773772	59	9.9022534	10.1226228
2	9.7797981	9.8776400	58	9.9021581	10.1223600
3	9.7799655	9.8779027	57	9.9020628	10.1220973
4	9.7801328	9.8781654	56	9.9019674	10.1218346
5	9.7803000	9.8784281	55	9.9018719	10.1215719
6	9.7804671	9.8786907	54	9.9017764	10.1213093
7	9.7806341	9.8789533	53	9.9016808	10.1210467
8	9.7808010	9.8792158	52	9.9015852	10.1207842
9	9.7809677	9.8794782	51	9.9014895	10.1205218
10	9.7811344	9.8797407	50	9.9013938	10.1202593
11	9.7813010	9.8800031	49	9.9012980	10.1199969
12	9.7814675	9.8802654	48	9.9012021	10.1197346
13	9.7816339	9.8805277	47	9.9011062	10.1194723
14	9.7818002	9.8807900	46	9.9010102	10.1192100
15	9.7819664	9.8810522	45	9.9009142	10.1189478
16	9.7821324	9.8813144	44	9.9008181	10.1186856
17	9.7822984	9.8815765	43	9.9007219	10.1184235
18	9.7824643	9.8818386	42	9.9006257	10.1181614
19	9.7826301	9.8821007	41	9.9005294	10.1178993
20	9.7827958	9.8823627	40	9.9004331	10.1176373
21	9.7829614	9.8826246	39	9.9003367	10.1173754
22	9.7831268	9.8828866	38	9.9002403	10.1171134
23	9.7832922	9.8831484	37	9.9001438	10.1168516
24	9.7834575	9.8834103	36	9.9000472	10.1165897
25	9.7836227	9.8836721	35	9.8999506	10.1163279
26	9.7837878	9.8839338	34	9.8998539	10.1160662
27	9.7839528	9.8841956	33	9.8997572	10.1158044
28	9.7841177	9.8844572	32	9.8996604	10.1155428
29	9.7842824	9.8847189	31	9.8995636	10.1152811
30	9.7844471	9.8849805	30	9.8994667	10.1150195

Min.	37. Grad. Seno.	37. Grad. Tangente.	Min.	52. Grad. Seno.	52. Grad. Tangente.
30	9.7844471	9.8849805	30	9.8994667	10.1150195
31	9.7846117	9.8852420	29	9.8993697	10.1147580
32	9.7847762	9.8855035	28	9.8992727	10.1144965
33	9.7849406	9.8857650	27	9.8991756	10.1142350
34	9.7851049	9.8860264	26	9.8990784	10.1139736
35	9.7852691	9.8862878	25	9.8989812	10.1137122
36	9.7854332	9.8865492	24	9.8988840	10.1134508
37	9.7855972	9.8868105	23	9.8987867	10.1131895
38	9.7857611	9.8870718	22	9.8986893	10.1129282
39	9.7859249	9.8873330	21	9.8985919	10.1126670
40	9.7860886	9.8875942	20	9.8984944	10.1124058
41	9.7862522	9.8878554	19	9.8983968	10.1121446
42	9.7864157	9.8881165	18	9.8982992	10.1118835
43	9.7865791	9.8883775	17	9.8982015	10.1116225
44	9.7867424	9.8886386	16	9.8981038	10.1113614
45	9.7869056	9.8888996	15	9.8980060	10.1111004
46	9.7870687	9.8891605	14	9.8979082	10.1108395
47	9.7872317	9.8894214	13	9.8978103	10.1105786
48	9.7873946	9.8896823	12	9.8977123	10.1103177
49	9.7875574	9.8899432	11	9.8976143	10.1100568
50	9.7877202	9.8902040	10	9.8975162	10.1097960
51	9.7878828	9.8904647	9	9.8974181	10.1095353
52	9.7880453	9.8907254	8	9.8973199	10.1092746
53	9.7882077	9.8909861	7	9.8972216	10.1090139
54	9.7883701	9.8912468	6	9.8971233	10.1087532
55	9.7885323	9.8915074	5	9.8970249	10.1084926
56	9.7886944	9.8917679	4	9.8969265	10.1082321
57	9.7888565	9.8920285	3	9.8968280	10.1079715
58	9.7890184	9.8922890	2	9.8967294	10.1077110
59	9.7891802	9.8925494	1	9.8966308	10.1074506
60	9.7893420	9.8928098	0	9.8965321	10.1071902

Min.	38. Grad.		Min.	51. Grad.	
	Seno.	Tangente.		Seno.	Tangente.
0	9.7893420	9.8928098	60	9.8965321	10.107190
1	9.7895036	9.8930702	59	9.8964334	10.106929
2	9.7896652	9.8933306	58	9.8963346	10.106669
3	9.7898266	9.8935906	57	9.8962358	10.1064091
4	9.7899880	9.8938511	56	9.8961369	10.106148
5	9.7901493	9.8941114	55	9.8960379	10.105888
6	9.7903104	9.8943715	54	9.8959389	10.105628
7	9.7904715	9.8946317	53	9.8958398	10.105368
8	9.7906325	9.8948918	52	9.8957406	10.1051082
9	9.7907935	9.8951519	51	9.8956414	10.1048481
10	9.7909541	9.8954119	50	9.8955422	10.1045881
11	9.7911148	9.8956719	49	9.8954429	10.1043281
12	9.7912754	9.8959319	48	9.8953435	10.1040681
13	9.7914359	9.8961918	47	9.8952440	10.1038082
14	9.7915963	9.8964517	46	9.8951445	10.1035483
15	9.7917566	9.8967116	45	9.8950450	10.1032884
16	9.7919168	9.8969714	44	9.8949453	10.1030286
17	9.7920769	9.8972312	43	9.8948457	10.1027688
18	9.7922369	9.8974910	42	9.8947459	10.1025090
19	9.7923968	9.8977507	41	9.8946461	10.1022493
20	9.7925566	9.8980104	40	9.8945463	10.1019896
21	9.7927163	9.8982700	39	9.8944463	10.1017300
22	9.7928760	9.8985296	38	9.8943464	10.1014704
23	9.7930355	9.8987892	37	9.8942463	10.1012108
24	9.7931949	9.8990487	36	9.8941462	10.1009513
25	9.7933543	9.8993082	35	9.8940461	10.1006918
26	9.7935135	9.8995677	34	9.8939458	10.1004323
27	9.7926727	9.8998271	33	9.8938456	10.1001729
28	9.7938317	9.9000865	32	9.8937452	10.0999135
29	9.7939907	9.9003459	31	9.8936448	10.0996541
30	9.7941496	9.9006052	30	9.8935444	10.0993948

Min.	38. Grad. Seno.	38. Grad. Tangente.	Min.	51. Grad. Seno.	51. Grad. Tangente.
30	9.7941496	9.9006052	30	9.8935444	10.0993948
31	9.7943083	9.9008645	29	9.8934439	10.0991355
32	9.7944670	9.9011237	28	9.8933433	10.0988763
33	9.7946256	9.9013830	27	9.8932426	10.0986170
34	9.7947841	9.9016422	26	9.8931419	10.0983578
35	9.7949425	9.9019013	25	9.8930412	10.0980987
36	9.7951008	9.9021604	24	9.8929404	10.0978396
37	9.7952590	9.9024195	23	9.8928395	10.0975805
38	9.7954171	9.9026786	22	9.8927385	10.0973214
39	9.7955751	9.9029376	21	9.8926375	10.0970624
40	9.7957330	9.9031966	20	9.8925365	10.0968034
41	9.7958909	9.9034555	19	9.8924354	10.0965445
42	9.7960486	9.9037144	18	9.8923342	10.0962856
43	9.7962062	9.9039733	17	9.8922329	10.0960267
44	9.7963638	9.9042321	16	9.8921316	10.0957679
45	9.7965212	9.9044910	15	9.8920303	10.0955090
46	9.7966786	9.9047497	14	9.8919289	10.0952503
47	9.7968359	9.9050085	13	9.8918274	10.0949915
48	9.7969930	9.9052672	12	9.8917258	10.0947328
49	9.7971501	9.9055259	11	9.8916242	10.0944741
50	9.7973071	9.9057845	10	9.8915226	10.0942155
51	9.7974649	9.9060431	9	9.8914208	10.0939569
52	9.7976208	9.9063017	8	9.8913191	10.0936983
53	9.7977775	9.9065603	7	9.8912172	10.0934397
54	9.7979341	9.9068188	6	9.8911153	10.0931812
55	9.7980906	9.9070773	5	9.8910133	10.0929227
56	9.7982470	9.9073357	4	9.8909113	10.0926643
57	9.7984034	9.9075941	3	9.8908092	10.0924059
58	9.7985596	9.9078525	2	9.8907071	10.0921475
59	9.7987158	9.9081109	1	9.8906049	10.0918891
60	9.7988718	9.9083692	0	9.8905026	10.0916308

Min.	39. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	50. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.7988718	9.9083692	60	9.8905026	10.0916308
1	9.7990278	9.9086275	59	9.8904003	10.0913725
2	9.7991836	9.9088858	58	9.8902979	10.0911142
3	9.7893394	9.9091440	57	9.8901954	10.0908560
4	9.7994915	9.9094022	56	9.8900929	10.0905978
5	9.7996503	9.9096603	55	9.8899903	10.0903397
6	9.7998062	9.9099185	54	9.8898877	10.0900815
7	9.7999616	9.9101766	53	9.8897850	10.0898234
8	9.8001169	9.9104347	52	9.8896822	10.0895653
9	9.8002721	9.9106927	51	9.8895794	10.0893073
10	9.8004272	9.9109507	50	9.8894765	10.0890493
11	9.8005823	9.9112087	49	9.8893736	10.0887913
12	9.8007372	9.9114666	48	9.8892706	10.0885334
13	9.8008921	9.9117245	47	9.8891675	10.0882755
14	9.8010468	9.9119824	46	9.8890644	10.0880176
15	9.8012015	9.9122403	45	9.8889612	10.0877597
16	9.8013561	9.9124981	44	9.8888580	10.0875019
17	9.8015106	9.9127559	43	9.8887547	10.0872441
18	9.8016649	9.9130137	42	9.8886513	10.0869863
19	9.8018192	9.9132714	41	9.8885479	10.0867286
20	9.8019735	9.9135291	40	9.8884444	10.0864709
21	9.8021276	9.9137868	39	9.8883408	10.0862132
22	9.8022816	9.9140444	38	9.8882372	10.0859556
23	9.8024355	9.9143020	37	9.8881335	10.0856980
24	9.8025894	9.9145596	36	9.8880298	10.0854404
25	9.8027431	9.9148171	35	9.8879260	10.0851829
26	9.8028968	9.9150747	34	9.8878221	10.0849253
27	9.8030504	9.9153322	33	9.8877182	10.0846678
28	9.8032038	9.9155896	32	9.8876142	10.0844104
29	9.8033572	9.9158471	31	9.8875102	10.0841529
30	9.8035105	9.9161045	30	9.8874061	10.0838955

Min.	39. Grad. Seno.	39. Grad. Tangente.	Min.	50. Grad. Seno.	50. Grad. Tangente.
30	9.8035105	9.9161045	30	9.8874061	10.0838955
31	9.8036637	9.9163618	29	9.8873019	10.0836382
32	9.8038168	9.9166192	28	9.8871977	10.0833808
33	9.8039699	9.9168765	27	9.8870934	10.0831235
34	9.8041228	9.9171338	26	9.8869890	10.0828662
35	9.8042757	9.9173911	25	9.8868846	10.0826089
36	9.8044284	9.9176483	24	9.8867801	10.0823517
37	9.8045811	9.9179055	23	9.8866756	10.0820945
38	9.8047336	9.9181627	22	9.8865710	10.0818373
39	9.8048861	9.9184198	21	9.8864663	10.0815802
40	9.8050385	9.9186769	20	9.8863616	10.0813231
41	9.8051908	9.9189340	19	9.8862568	10.0810660
42	9.8053430	9.9191911	18	9.8861519	10.0808089
43	9.8054951	9.9194481	17	9.8860470	10.0805519
44	9.8056472	9.9197051	16	9.8859420	10.0802949
45	9.8057991	9.9199621	15	9.8858370	10.0800379
46	9.8059510	9.9202191	14	9.8857319	10.0797809
47	9.8061027	9.9204760	13	9.8856267	10.0795240
48	9.8062544	9.9207329	12	9.8855215	10.0792671
49	9.8064060	9.9209898	11	9.8854162	10.0790102
50	9.8065575	9.9212466	10	9.8853109	10.0787534
51	9.8067089	9.9215034	9	9.8852055	10.0784966
52	9.8068602	9.9217602	8	9.8851000	10.0782398
53	9.8070114	9.9220170	7	9.8849945	10.0779830
54	9.8071626	9.9222737	6	9.8848889	10.0777263
55	9.8073136	9.9225304	5	9.8847832	10.0774696
56	9.8074646	9.9227871	4	9.8846775	10.0772129
57	9.8076154	9.9230437	3	9.8845717	10.0769563
58	9.8077662	9.9233004	2	9.8844659	10.0766996
59	9.8079169	9.9235570	1	9.8843599	10.0764430
60	9.8080675	9.9238135	0	9.8842540	10.0761865

Min.	40. Grad. Seno.	40. Grad. Tangente.	Min.	49. Grad. Seno.	49. Grad. Tangente.
0	9.8080675	9.9238135	60	9.8842540	10.07618[illegible]
1	9.8082180	9.9240701	59	9.8841479	10.07592[illegible]
2	9.8083684	9.9243266	58	9.8840418	10.07567[illegible]
3	9.8085188	9.9245831	57	9.8839357	10.07541[illegible]
4	9.8086690	9.9248396	56	9.8838294	10.075160[illegible]
5	9.8088192	9.9250960	55	9.8837237	10.074904[illegible]
6	9.8089692	9.9253524	54	9.8836168	10.074647[illegible]
7	9.8091192	9.9256088	53	9.8835104	10.0743912
8	9.8092691	9.9258652	52	9.8834039	10.0741348
9	9.8094189	9.9261215	51	9.8832974	10.0738785
10	9.8095686	9.9263778	50	9.8831908	10.0736222
11	9.8097182	9.9266341	49	9.8830841	10.0733659
12	9.8098678	9.9268904	48	9.8829774	10.0731096
13	9.8100172	9.9271466	47	9.8828706	10.0728534
14	9.8101666	9.9274008	46	9.8827638	10.0725972
15	9.8103159	9.9276590	45	9.8826568	10.0723410
16	9.8104650	9.9279152	44	9.8825499	10.0720848
17	9.8106141	9.9281713	43	9.8824428	10.0718287
18	9.8107631	9.9284274	42	9.8823357	10.0715726
19	9.8109121	9.9286835	41	9.8822285	10.0713165
20	9.8110609	9.9289396	40	9.8821213	10.0710604
21	9.8112096	9.9291956	39	9.8820140	10.0708044
22	9.8113583	9.9294516	38	9.8819067	10.0705484
23	9.8115069	9.9297076	37	9.8817992	10.0702924
24	9.8116554	9.9299636	36	9.8816918	10.0700364
25	9.8118038	9.9302195	35	9.8815842	10.0697805
26	9.8119521	9.9304755	34	9.8814766	10.0695245
27	9.8121003	9.9307314	33	9.8813689	10.0692686
28	9.8122484	9.9309872	32	9.8812612	10.0690128
29	9.8123965	9.9312431	31	9.8811534	10.0687569
30	9.8125444	9.9314989	30	9.8810455	10.0685011

Min.	40. Grad. Seno.	40. Grad. Tangente.	Min.	49. Grad. Seno.	49. Grad. Tangente.
30	9.8125444	9.9314989	30	9.8810455	10.0685011
31	9.8126923	9.9317547	29	9.8809376	10.0682453
32	9.8128401	9.9320105	28	9.8808296	10.0679895
33	9.8129878	9.9322662	27	9.8807215	10.0677338
34	9.8131354	9.9325220	26	9.8806134	10.0674780
35	9.8132829	9.9327777	25	9.8805052	10.0672223
36	9.8134303	9.9330334	24	9.8803970	10.0669666
37	9.8135777	9.9532890	23	9.8802887	10.0667110
38	9.8137250	9.9335446	22	9.8801803	10.0664554
39	9.8138721	9.9338003	21	9.8800719	10.0661997
40	9.8140192	9.9340559	20	9.8799634	10.0659441
41	9.8141661	9.9343114	19	9.8798548	10.0656886
42	9.8143131	9.9345670	18	9.8797462	10.0654330
43	9.8144600	9.9348225	17	9.8796375	10.0651775
44	9.8146067	9.9350780	16	9.8795187	10.0649320
45	9.8147534	9.9353335	15	9.8794199	10.0646665
46	9.8148999	9.9355889	14	9.8793110	10.0644111
47	9.8150464	9.9358444	13	9.8792021	10.0641556
48	9.8151928	9.9360998	12	9.8790930	10.0639002
49	9.8153391	9.9363552	11	9.8789840	10.0636448
50	9.8154854	9.9366105	10	9.8788748	10.0633895
51	9.8156315	9.9368659	9	9.8787656	10.0631341
52	9 8157776	9.9371212	8	9.8786563	10.0628788
53	9.8159235	9.9373765	7	9.8785470	10.0626235
54	9.8160694	9.9376318	6	9.8784376	10.0623682
55	9.8162152	9.9378871	5	9.8783281	10.0621129
56	9.8163609	9.8381423	4	9.8782186	10.0618577
57	9.8165066	9.9383975	3	9.8781090	10.0616025
58	9.8166521	9.9386527	2	9.8779994	10.0613873
56	9.8167975	9.9389079	1	9.8778896	10.0610921
60	9.8169429	9.9391631	0	9.8777799	10.0608369

Min.	41. Grad. Seno.	41. Grad. Tangente.	Min.	48. Grad. Seno.	48. Grad. Tangente.
0	9.8169429	9.9391631	60	9.8777799	10.0608369
1	9.8170882	9.9394182	59	9.8776700	10.0605818
2	9.8172334	9.9396733	58	9.8775601	10.0603267
3	9.8173785	9.9399284	57	9.8774501	10.0600716
4	9.8175235	9.9401835	56	9.8773401	10.0598165
5	9.8176685	9.9404385	55	9.8772300	10.0595615
6	9.8178133	9.9406936	54	9.8771198	10.0593064
7	9.8179581	9.9409486	53	9.8770096	10.0590514
8	9.8181028	9.9412036	52	9.8768993	10.0587964
9	9.8182474	9.9414585	51	9.8767889	10.0585415
10	9.8183919	9.9417135	50	9.8766785	10.0582865
11	9.8185364	9.9419684	49	9.8765680	10.0580316
12	9.8186407	9.9422233	48	9.8764574	10.0577767
13	9.8188250	9.9424782	47	9.8763468	10.0575218
14	9.8189692	9.9427331	46	9.8762361	10.0572669
15	9.8191133	9.9429879	45	9.8761253	10.0570121
16	9.8192573	9.9432428	44	9.8760145	10.0567572
17	9.8194012	9.9434976	43	9.8759036	10.0565024
18	9.8195450	9.9437524	42	9.8757927	10.0562476
19	9.8196888	9.9440072	41	9.8756816	10.0559928
20	9.8198325	9.9442619	40	9.8755706	10.0557381
21	9.8199761	9.9445166	39	9.8754594	10.0554834
22	9.8201196	9.9447714	38	9.8753482	10.0552286
23	9.8202630	9.9450261	37	9.8752369	10.0549739
24	9.8204063	9.9452807	36	9.8751256	10.0547163
25	9.8205496	9.9455354	35	9.8750142	10.0544646
26	9.8206927	9.9457900	34	9.8749027	10.0542100
27	9.8208358	9.9460447	33	9.8747912	10.0539553
28	9.8209788	9.9462993	32	9.8746795	10.0537007
29	9.8211217	9.9465539	31	9.8745679	10.0534461
30	9.8212646	9.9468084	30	9.8744561	10.0531916

Min.	41. Grad. Seno.	41. Grad. Tangente.	Min.	48. Grad. Seno.	48. Grad. Tangente.
30	9.8212649	9.9468384	30	9.8744561	10.0531916
31	9.8214073	9.9470630	29	9.8743443	10.0529370
32	9.8215500	9.9473175	28	9.8742325	10.0526825
33	9.8216926	9.9475720	27	9.8741205	10.0524280
34	9.8218351	9.9478265	26	9.8740085	10.0521735
35	9.8219775	9.9480810	25	9.8738965	10.0519190
36	9.8221198	9.9483355	24	9.8737844	10.0516645
37	9.8222621	9.9485899	23	9.8736722	10.0514101
38	9.8224042	9.9488443	22	9.8735599	10.0511557
39	9.8225463	9.9490987	21	9.8734476	10.0509013
40	9.8226883	9.9493531	20	9.8733352	10.0506469
41	9.8228302	9.9496075	19	9.8732227	10.0503925
42	9.8229721	9.9498619	18	9.8731102	10.0501381
43	9.8231138	9.9501162	17	9.8729976	10.0498838
44	9.8232555	9.9503705	16	9.8728849	10.0496265
45	9.8233971	9.9506248	15	9.8727722	10.0493752
46	9.8235386	9.9508791	14	9.8726594	10.0491209
47	9.8236800	9.9511334	13	9.8725466	10.0488666
48	9.8238213	9.9513876	12	9.8724337	10.0486124
49	9.8239626	9.9516419	11	9.8723207	10.0483581
50	9.8241037	9.9518961	10	9.8722076	10.0481039
51	9.8142448	9.9521503	9	9.8720945	10.0478497
52	9.8243858	9.9524045	8	9.8719813	10.0475955
53	9.8245267	9.9526587	7	9.8718681	10.0473413
54	9.8246676	9.9529128	6	9.8717548	10.0470872
55	9.8248083	9.9531670	5	9.8716414	10.0468330
56	9.8249490	9.9534211	4	9.8715279	10.0465789
57	9.8250896	9.9536752	3	9.8714144	10.0463248
58	9.8252301	9.9539293	2	9.8713008	10.0460707
59	9.8253705	9.9541834	1	9.8711872	10.0458166
60	9.8255109	9.9544374	0	9.8710735	10.0455626

Min.	42. Grad. Seno.	42. Grad. Tangente.	Min.	47. Grad. Seno.	47. Grad. Tangente.
0	9.8255109	9.9544374	60	9.8710735	10.0455626
1	9.8256512	9.9546915	59	9.8709597	10.0453085
2	9.8257913	9.9549455	58	9.8708458	10.0450545
3	9.8259314	9.9551995	57	9.8707319	10.0448005
4	9.8260715	9.9554535	56	9.8706179	10.0445465
5	9.8262114	9.9557075	55	9.8705039	10.0442925
6	9.8263512	9.9559615	54	9.8703898	10.0440385
7	9.8265910	9.9562154	53	9.8702756	10.0437846
8	9.8266307	9.9564694	52	9.8701613	10.0435306
9	9.8267703	9.9567233	51	9.8700470	10.0432767
10	9.8269098	9.9569772	50	9.8699326	10.0430228
11	9.8270493	9.9572311	49	9.8698182	10.0427689
12	9.8271887	9.9574850	48	9.8697037	10.0425150
13	9.8273279	9.9577389	47	9.8695891	10.0422611
14	9.8274671	9.9579927	46	9.8694744	10.0420073
15	9.8276063	9.9582465	45	9.8693597	10.0417535
16	9.8277453	9.9585004	44	9.8692449	10.0414996
17	9.8278843	9.9587542	43	9.8691301	10.0412458
18	9.8280231	9.9590080	42	9.8690152	10.0409920
19	9.8281619	9.9592618	41	9.8689002	10.0407385
20	9.8283006	9.9595155	40	9.8687851	10.0404845
21	9.8284393	9.9597693	39	9.8686700	10.0402307
22	9.8285778	9.9600230	38	9.8686548	10.0399770
23	9.8287163	9.9602767	37	9.8684396	10.0397233
24	9.8288547	9.9605305	36	9.8683242	10.0394695
25	9.8289930	9.9607842	35	9.8682088	10.0391258
26	9.8291312	9.9610378	34	9.8680934	10.0389622
27	9.8292694	9.9612915	33	9.8679779	10.0387085
28	9.8294075	9.9615452	32	9.8678623	10.0384548
29	9.8295454	9.9617988	31	9.8677466	10.0382012
30	9.8296833	9.9620525	30	9.8676309	10.0379475

Min.	42. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	47. Grad. Seno.	Tangente.
30	9.8296833	9.9620525	30	9.8676309	10.0379475
31	9.8298212	9.9623061	29	9.8675151	10.0376939
32	9.8299589	9.9625597	28	9.8673992	10.0374403
33	9.8300966	9.9628133	27	9.8672833	10.0371867
34	9.8302342	9.9630669	26	9.8671673	10.0369331
35	9.8303717	9.9633204	25	9.8670512	10.0366796
36	9.8305091	9.9635740	24	9.8669351	10.0364260
37	9.8306464	9.9638275	23	9.8668189	10.0361725
38	9.8307837	9.9640811	22	9.8667026	10.0359189
39	9.8309209	9.9643346	21	9.8665863	10.0356654
40	9.8310580	9.9645881	20	9.8664699	10.0354119
41	9.8311950	9.9648416	19	9.8663534	10.0351584
42	9.8313320	9.9650951	18	9.8662369	10.0349049
43	9.8314688	9.9653486	17	9.8661203	10.0346514
44	9.8316056	9.9656020	16	9.8660036	10.0343980
45	9.8317423	9.9658555	15	9.8658868	10.0341445
46	9.8318789	9.9661089	14	9.8657700	10.0338911
47	9.8310155	9.9663623	13	9.8656531	10.0336377
48	9.8321519	9.9666157	12	9.8655362	10.0333843
49	9.8322883	9.9668692	11	9.8654192	10.0331308
50	9.8324246	9.9671225	10	9.8653021	10.0328775
51	9.8325609	9.9673759	9	9.8651849	10.0326241
52	9.8326970	9.9676293	8	9.8650677	10.0323707
53	9.8328331	9.9678827	7	9.8649504	10.0321173
54	9.8329691	9.9681360	6	9.8648331	10.0318640
55	9.8331050	9.9683893	5	9.8647156	10.0316107
56	9.8332408	9.9686427	4	9.8645981	10.0313573
57	9.8333766	9.9688960	3	9.8644806	10.0311040
58	9.8335122	9.9691493	2	9.8643629	10.0308507
59	9.8336478	9.9694026	1	9.8642452	10.0305974
60	9.8337833	9.9696559	0	9.8641275	10.0303441

Min.	43. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	46. Grad. Seno.	Tangente.
0	9.8337833	9.9696559	60	9.8641275	10.0303441
1	9.8339198	9.9699091	59	9.8640096	10.0300909
2	9.8340541	9.9701624	58	9.8638917	10.0298376
3	9.8341894	9.9704157	57	9.8637737	10.0295843
4	9.8343246	9.9706689	56	9.8636557	10.0293311
5	9.8344597	9.9709221	55	9.8635376	10.0290779
6	9.8345948	9.9711754	54	9.8634194	10.0288246
7	9.8347297	9.9714286	53	9.8633011	10.0285714
8	9.8348646	9.9716818	52	9.8631828	10.0283182
9	9.8349994	9.9719350	51	9.8630644	10.0280650
10	9.8351341	9.9721882	50	9.8629460	10.0278118
11	9.8352688	9.9724413	49	9.8628274	10.0275587
12	9.8354033	9.9726945	48	9.8627088	10.0273055
13	9.8355378	9.9729477	47	9.8625902	10.0270523
14	9.8356722	9.9732008	46	9.8624714	10.0267992
15	9.8358066	9.9734539	45	9.8623526	10.0265461
16	9.8359408	9.9737071	44	9.8622338	10.0262929
17	9.8360750	9.9739602	43	9.8621148	10.0260398
18	9.8362091	9.9742133	42	9.8619958	10.0257867
19	9.8363431	9.9744664	41	9.8618767	10.0255336
20	9.8364771	9.9747195	40	9.8617576	10.0252805
21	9.8366109	9.9749726	39	9.8616383	10.0250274
22	9.8367447	9.9752257	38	9.8615190	10.0247743
23	9.8368784	9.9754787	37	9.8613997	10.0245213
24	9.8370121	9.9757318	36	9.8612803	10.0242682
25	9.8371456	9.9759849	35	9.8611608	10.0240151
26	9.8372791	9.9762379	34	9.8610412	10.0237621
27	9.8374125	9.9764909	33	9.8609215	10.0235091
28	9.8375458	9.9767440	32	9.8608018	10.0232560
29	9.8376790	9.9769970	31	9.8606821	10.0230030
30	9.8378122	9.9772500	30	9.8605622	10.0227500

Min.	43. Grad. Seno.	Tangente.	Min.	46. Grad. Seno.	Tangente.
30	9.8378122	9.9772500	30	9.8605622	10.0227500
31	9.8379453	9.9775030	29	9.8604423	10.0224970
32	9.8380783	9.9777560	28	9.8603223	10.0222440
33	9.8382112	9.9780090	27	9.8602022	10.0219910
34	9.8383441	9.9782620	26	9.8600821	10.0217380
35	9.8384769	9.9785149	25	9.8599619	10.0214851
36	9.8386096	9.9787679	24	9.8598416	10.0212321
37	9.8387422	9.9790209	23	9.8597213	10.0209791
38	9.8388747	9.9792738	22	9.8596009	10.0207262
39	9.8390072	9.9795268	21	9.8594804	10.0204732
40	9.8391369	9.9797797	20	9.8593599	10.0202203
41	9.8392719	9.9800326	19	9.8592393	10.0199674
42	9.8394041	9.9802856	18	9.8591186	10.0197144
43	9.8395363	9.9805385	17	9.8589978	10.0194615
44	9.8396684	9.9807914	16	9.8588770	10.0192086
45	9.8398004	9.9810443	15	9.8587561	10.0189557
46	9.8399323	9.9812972	14	9.8586351	10.0187028
47	9.8400642	9.9815501	13	9.8585141	10.0184499
48	9.8401959	9.9818030	12	9.8583929	10.0181970
49	9.8403276	9.9820559	11	9.8582718	10.0179441
50	9.8404593	9.9823087	10	9.8581505	10.0176913
51	9.8405908	9.9825616	9	9.8580292	10.0174384
52	9.8407223	9.9828145	8	9.8579078	10.0171855
53	9.8408537	9.9830673	7	9.8577863	10.0169327
54	9.8409850	9.9833202	6	9.8576648	10.0166798
55	9.8411162	9.9835730	5	9.8575432	10.0164270
56	9.8412474	9.9838259	4	9.8574215	10.0161741
57	9.8413785	9.9840787	3	9.8572998	10.0159213
58	9.8415095	9.9843315	2	9.8571779	10.0156685
59	9.8416404	9.9845844	1	9.8570561	10.0154156
60	9.8417713	9.9848372	0	9.8569341	10.0151628

Min.	44. Grad. Seno.	44. Grad. Tangente.	Min.	45. Grad. Seno.	45. Grad. Tangente.
0	9.8417713	9.9848372	60	9.8569341	10.0151628
1	9.8419021	9.9850900	59	9.8568121	10.0149100
2	9.8420328	9.9853428	58	9.8566900	10.0146572
3	9.8421634	9.9855956	57	9.8565678	10.0144044
4	9.8422939	9.9858484	56	9.8564455	10.0141516
5	9.8424244	9.9861012	55	9.8563232	10.0138988
6	9.8425548	9.9863540	54	9.8562008	10.0136460
7	9.8426851	9.9866068	53	9.8560784	10.0133932
8	9.8428154	9.9868596	52	9.8559558	10.0131404
9	9.8429456	9.9871123	51	9.8558332	10.0128877
10	9.8430757	9.9873651	50	9.8557106	10.0126349
11	9.8432057	9.9876179	49	9.8555878	10.0123821
12	9.8433356	9.9878706	48	9.8554650	10.0121294
13	9.8434655	9.9881234	47	9.8553421	10.0118766
14	9.8435953	9.9883761	46	9.8552192	10.0116239
15	9.8437250	9.9886289	45	9.8550961	10.0113711
16	9.8438547	9.9888816	44	9.8549730	10.0111184
17	9.8439842	9.9891344	43	9.8548499	10.0108656
18	9.8441137	9.9893871	42	9.8547266	10.0106129
19	9.8442432	9.9896399	41	9.8546033	10.0103601
20	9.8443725	9.9898926	40	9.8544799	10.0101014
21	9.8445018	9.9901453	39	9.8543564	10.0098547
22	9.8446310	9.9903981	38	9.8542329	10.0096019
23	9.8447601	9.9906508	37	9.8541093	10.0093492
24	9.8548891	9.9909035	36	9.8539856	10.0090965
25	9.8450181	9.9911562	35	9.8538619	10.0088438
26	9.8451470	9.9914089	34	9.8537381	10.0085911
27	9.8452758	9.9916616	33	9.8536142	10.0083384
28	9.8454045	9.9919143	32	9.8534902	10.0080857
29	9.8455332	9.9921670	31	9.8533662	10.0078330
30	9.8456618	9.9924197	30	9.8532421	10.0075803

Min.	44. Grad. Seno.	44. Grad. Tangente.	Min.	45. Grad. Seno.	45. Grad. Tangente.
30	9.8456618	9.9924197	30	9.8532421	10.0075803
31	9.8457903	9.9926724	29	9.8531179	10.0073276
32	9.8459188	9.9929251	28	9.8529936	10.0070749
33	9.8460471	9.9931778	27	9.8528693	10.0068222
34	9.8461754	9.9934305	26	9.8527449	10.0065695
35	9.8463036	9.9936832	25	9.8526204	10.0063168
36	9.8464318	9.9939359	24	9.8524959	10.0060641
37	9.8465599	9.9941886	23	9.8523713	10.0058114
38	9.8466879	9.9944413	22	9.8522466	10.0055587
39	9.8468158	9.9946940	21	9.8521218	10.0053060
40	9.8469436	9.9949466	20	9.8519970	10.0050534
41	9.8470714	9.9951993	19	9.8518721	10.0048007
42	9.8471991	9.9954520	18	9.8517471	10.0045480
43	9.8473267	9.9957047	17	9.8516220	10.0042953
44	9.8474543	9.9959573	16	9.8514969	10.0040427
45	9.8475817	9.9962100	15	9.8513717	10.0037900
46	9.8477091	9.9964627	14	9.8512465	10.0035373
47	9.8478365	9.9967154	13	9.8511211	10.0032846
48	9.8479637	9.9969680	12	9.8509957	10.0030320
49	9.8480909	9.9972207	11	9.8508702	10.0027793
50	9.8482180	9.9974734	10	9.8507446	10.0025266
51	9.8483450	9.9977260	9	9.8506190	10.0022740
52	9.8484720	9.9979787	8	9.8504933	10.0020213
53	9.8485989	9.9982314	7	9.8503675	10.0017686
54	9.8487257	9.9984840	6	9.8502417	10.0015160
55	9.8488524	9.9987367	5	9.8501157	10.0012633
56	9.8489791	9.9989893	4	9.8499897	10.0010107
57	9.8491057	9.9992420	3	9.8498637	10.0007580
58	9.8492322	9.9994947	2	9.8497375	10.0005053
56	9.8493586	9.9997473	1	9.8496113	10.0002527
60	9.8494850	10.0000000	0	9.8494850	10.0000000

TABLA
DE LOS
LOGARITHMOS
correſpondientes à los numeros deſde 1. haſta 10000.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	0.0000000	34	1.5314789	67	1.8260748
2	0.3010300	35	1.5440680	68	1.8325089
3	0.4771212	36	1.5563025	69	1.8388491
4	0.6020600	37	1.5682017	70	1.8450980
5	0.6989700	38	1.5797836	71	1.8512583
6	0.7781512	39	1.5910646	72	1.8573325
7	0.8450980	40	1.6020600	73	1.8633229
8	0.9030900	41	1.6127839	74	1.8692317
9	0.9542425	42	1.6232493	75	1.8750613
10	1.0000000	43	1.6334685	76	1.8808136
11	1.0413927	44	1.6434527	77	1.8864907
12	1.0791812	45	1.6532125	78	1.8920946
13	1.1139433	46	1.6627578	79	1.8976271
14	1.1461280	47	1.6720979	80	1.9030900
15	1.1760913	48	1.6812412	81	1.9084850
16	1.2041200	49	1.6901961	82	1.9138138
17	1.2304489	50	1.6989700	83	1.9190781
18	1.2552725	51	1.7075702	84	1.9242793
19	1.2787536	52	1.7160033	85	1.9294189
20	1.3010300	53	1.7242759	86	1.9344984
21	1.3222193	54	1.7323938	87	1.9395192
22	1.3424227	55	1.7403627	88	1.9444827
23	1.3617278	56	1.7481880	89	1.9493900
24	1.3802112	57	1.7558748	90	1.9542425
25	1.3979400	58	1.7634280	91	1.9590414
26	1.4149733	59	1.7708520	92	1.9637878
27	1.4313638	60	1.7781512	93	1.9684829
28	1.4471580	61	1.7853298	94	1.9731278
29	1.4623980	62	1.7923917	95	1.9777236
30	1.4771212	63	1.7993405	96	1.9822712
31	1.4913617	64	1.8061800	97	1.9867717
32	1.5051500	65	1.8129133	98	1.9912261
33	1.5185139	66	1.8195439	99	1.9956352
34	1.5314789	67	1.8260748	100	2.0000000

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
101	2.0043214	134	2.1271046	167	2.2227165
102	2.0086002	135	2.1303338	168	2.2253093
103	2.0128372	136	2.1335389	169	2.2278867
104	2.0170333	137	2.1367206	170	2.2304489
105	2.0211893	138	2.1398791	171	2.2329961
106	2.0253059	139	2.1430148	172	2.2355284
107	2.0293838	140	2.1461280	173	2.2380461
108	2.0334238	141	2.1492191	174	2.2405492
109	2.0374265	142	2.1522883	175	2.2430380
110	2.0413927	143	2.1553360	176	2.2455127
111	2.0453230	144	2.1583625	177	2.2479733
112	2.0492180	145	2.1613680	178	2.2504200
113	2.0530784	146	2.1643528	179	2.2528530
114	2.0569049	147	2.1673173	180	2.2552725
115	2.0606978	148	2.1702617	181	2.2576786
116	2.0644580	149	2.1731863	182	2.2600714
117	2.0681859	150	2.1760913	183	2.2624511
118	2.0718820	151	2.1789769	184	2.2648178
119	2.0755470	152	2.1818436	185	2.2671717
120	2.0591812	153	2.1846914	186	2.2695129
121	2.0827854	154	2.1875207	187	2.2718416
122	2.0893598	155	2.1903317	188	2.2741578
123	2.0899051	156	2.1931246	189	2.2764618
124	2.0934217	157	2.1958996	190	2.2787536
125	1.0969100	158	2.1986571	191	2.2810334
126	2.1003705	159	2.2013971	192	2.2833012
127	2.1038037	160	2.2041200	193	2.2855573
128	2.1072100	161	2.2068259	194	2.2878017
129	2.1105897	162	2.2095150	195	2.2900346
130	2.1139433	163	2.2121876	196	2.2922661
131	2.1172713	164	2.2148438	197	2.2944662
132	2.1205739	165	2.2174839	198	2.2966652
133	2.1238516	166	2.2201081	199	2.2988531
134	2.1271048	167	2.2227165	200	2.3010300

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
201	2.3031961	234	2.3692159	267	2.4265113
202	2.3053514	235	2.3710679	268	2.4281348
203	2.3074960	236	2.3719120	269	2.4297523
204	2.3096302	237	2.3747483	270	2.4313638
205	2.3117539	238	2.3765769	271	2.4329693
206	2.3138672	239	2.3783979	272	2.4345689
207	2.3159703	240	2.3803112	273	2.4361626
207	2.3180633	241	2.3820170	274	2.4377506
209	2.3201463	242	2.3838154	275	2.4393327
210	2.3222193	243	2.3856063	276	2.4409091
211	2.3242824	244	2.3873898	277	2.4424798
212	2.3263359	245	2.3891661	278	2.4440448
213	2.3283796	246	2.3909331	279	2.4456042
214	2.3304138	247	2.3926969	280	2.4471580
215	2.3324385	248	2.3944517	281	2.4487063
216	2.3344537	249	2.3961993	282	2.4502491
217	2.3364597	250	2.3979400	283	2.4517864
218	2.3384565	251	2.3996737	284	2.4533183
219	2.3404441	252	2.4014005	285	2.4548449
220	2.3424227	253	2.4031205	286	2.4563660
221	2.3443923	254	2.4048337	287	2.4578819
222	2.3463530	255	2.4065402	288	2.4593925
223	2.3483049	256	2.4082400	289	2.4608978
224	2.3502480	257	2.4099331	290	2.4523980
225	2.3521825	258	2.4116197	291	2.4638930
226	2.3541084	259	2.4132998	292	2.4653828
227	2.3560259	260	2.4149733	293	2.4668676
228	2.3579348	261	2.4166405	294	2.4683473
229	2.3598355	262	2.4183013	295	2.4698220
230	2.3617278	263	2.4199557	296	2.4712917
231	2.3636120	264	2.4216039	297	2.4727564
232	2.3654880	265	2.4232459	298	2.4742163
233	2.3673559	266	2.4248816	299	2.4756712
234	2.3692159	267	2.4265113	300	2.4771212

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
301	2.4785665	334	2.5237465	367	2.5646661
302	2.4800069	335	2.5250448	368	2.5658478
303	2.4814426	336	2.5263393	369	2.5670264
304	2.4828736	337	2.5276299	370	2.5682017
305	2.4842998	338	2.5289167	371	2.5693739
306	2.4857214	339	2.5301997	372	2.5705429
307	2.4871384	340	2.5314789	373	2.5717088
308	2.4885507	341	2.5327544	374	2.5728716
309	2.4899585	342	2.5340261	375	2.5740313
310	2.4913617	343	2.5352941	376	2.5751878
311	2.4927604	344	2.5365584	377	.5763413
312	2,4941546	345	2.5378191	378	2.5774918
313	2.4955443	346	2.5390761	379	2.5786392
314	2.4969296	347	2.5403295	380	2.5797836
315	2.4983105	348	2:5415792	381	2.5809230
316	2.4996871	349	2.5428254	382	2.5820634
317	2.5010593	350	2.5440680	383	2.5831988
318	2.5024271	351	2.5453071	384	2.5843312
319	2.5037907	352	2.5465427	385	2.5854607
320	2.5051500	353	2.5477747	386	2.5865873
321	2.5065050	354	2.5490033	387	2.5877110
322	2.5078559	355	2.5502283	388	2.5888317
323	2.5092025	356	2.5514500	389	2.5899496
324	2.5105450	357	2.5526682	390	2.5910646
325	2.5118834	358	2.5538830	391	2.5921768
326	2.5132176	359	2,5550944	392	2.5932861
327	2.5145477	360	2.5563025	393	2.5943925
328	2.5158738	361	2.5575072	394	2.5954962
329	2.5171959	362	2.5587086	395	2.5965971
330	2.5185139	363	2.5599066	396	1.5976952
331	2.5198280	364	2.5611014	397	2.5987905
332	2.5211381	365	2.5622929	398	2.5998831
333	2.5224442	366	2.5634811	399	2.6009729
334	2.5237465	367	2.5646661	400	2.6020600

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
401	2.6031444	434	2.6374897	467	2.6693169
402	2.6042260	435	2.6384893	468	2.6702458
403	2.6053050	436	2.6394865	469	2.6711728
404	2.6063814	437	2.6404814	470	2.6730979
405	2.6074550	438	2.6414741	471	2.6730209
406	2.6085260	439	2.6424645	472	2.6739420
407	2.6095944	440	2.6434527	473	2.6748611
408	2.6106602	441	2.6444386	474	2.6757783
409	2.6117233	442	2.6454223	475	2.6766936
410	2.6127839	443	2.6464073	476	2.6776069
411	2.6138418	444	2.6473830	477	2.6785184
412	2.6148972	445	2.6483600	478	2.6794279
413	2.6159500	446	2.6493349	479	2.6803355
414	2.6170003	447	2.6503075	480	2.6812412
415	2.6180481	448	2.6512780	481	2.6821451
416	2.6190933	449	2.6522463	482	2.6830470
417	2.6201360	450	2.6532125	483	2.6839471
418	2.6211763	451	2.6541765	484	2.6848454
419	2.6222140	452	2.6551384	485	2.6857417
420	2.6232493	453	2.6560982	486	2.6866363
421	2.6242821	454	2.6570558	487	2.6875290
422	2.6253124	455	2.6580114	488	2.6884198
423	2.6263404	456	2.6589648	489	2.6893089
424	2.6273659	457	2.6599162	490	2.6901961
425	2.6283889	458	2.6608655	491	2.6910815
426	2.6294096	459	2.6618127	492	2.6919651
427	2.6304279	460	2.6627578	493	2.6928469
428	2.6314438	461	2.6637009	494	2.6937269
429	2.6324573	462	2.6646420	495	2.6946052
430	2.6334685	463	2.6655810	496	2.6954817
431	2.6344773	464	2.6665180	497	2.6963564
432	2.6354837	465	2.6674529	498	2.6973293
433	2.6364879	466	2.6683859	499	2.6981005
434	2.6374897	467	2.6693169	500	2.6989700

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
501	2.6998377	534	2.7275413	567	2.7535831
502	2.7007037	535	2.7283538	568	2.7543483
503	2.7015680	536	2.7291648	569	2.7551123
504	2.7024305	537	2.7299743	570	2.7558748
505	2.7032914	538	2.7307823	571	2.7566361
506	2.7041505	539	2.7315888	572	2.7573960
507	2.7050080	540	2.7323938	573	2.7581546
508	2.7058637	541	2.7331973	574	2.7589119
509	2.7067178	542	2.7339993	575	2.7596678
510	2.7075702	543	2.7347998	576	2.7604225
511	2.7084209	544	2.7355989	577	2.7611758
512	2.7092700	545	2.7363965	578	2.7619278
513	2.7101174	546	2.7371926	579	2.7626786
514	2.7109631	547	2.7379873	580	2.7634280
515	2.7118072	548	2.7387806	581	2.7641761
516	2.7126497	549	2.7395723	582	2.7649230
517	2.7134905	550	2.7403927	583	2.7656685
518	2.7143298	551	2.7411516	584	2.7664128
519	2.7151674	552	2.7419391	585	2.7671559
520	2.7160033	553	2.7427251	586	2.7678976
521	2.7168377	554	2.7435098	587	2.7686381
522	2.7176705	555	2.7442930	588	2.7693773
523	2.7185017	556	2.7450748	589	2.7701153
524	2.7193313	557	2.7458552	590	2.7708520
525	2.7201593	558	2.7466342	591	2.7715875
526	2.7209857	559	2.7474118	592	2.7723217
527	2.7218106	560	2.7481880	593	2.7730547
528	2.7226339	561	2.7489629	594	2.7737864
529	2.7234557	562	2.7497363	595	2.7745170
530	2.7242759	563	2.7505084	596	2.7752463
531	2.7250945	564	2.7512791	597	2.7759743
532	2.7259116	565	2.7520484	598	2.7767012
533	2.7267272	566	2.7528164	599	2.7774268
534	2.7275413	567	1.7535831	600	2.7781512

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
601	2.7788745	634	2.8020893	667	2.8241258
602	2.7795965	635	2.8027737	668	2.8247765
603	2.7803173	636	2.8034571	669	2.8254261
604	2.7810369	637	2.8041394	670	2.8260748
605	2.7817554	638	2.8048207	671	2.8267225
606	2.7824726	639	2.8055009	672	2.8273693
607	2.7831887	640	2.8061800	673	2.8280151
608	2.7839036	641	2.8068580	674	2.8286599
609	2.7846173	642	2.8075350	675	2.8293038
610	2.7853298	643	2.8082110	676	2.8299467
611	2.7860412	644	2.8088859	677	2.8305887
612	2.7867514	645	2.8095597	678	2.8312297
613	2.7874605	646	2.8102325	679	2.8318698
614	2.7881684	647	2.8109043	680	2.8325089
615	2.7888751	648	2.8115750	681	2.8331471
616	2.7895807	649	2.8122447	682	2.8337844
617	2.7902852	650	2.8129134	683	2.8344207
618	2.7909885	651	2.8135810	684	2.8350561
619	2.7916906	652	2.8142476	685	2.8356906
620	2.7923917	653	2.8149132	686	2.8363241
621	2.7930916	654	2.8155777	687	2.8369587
622	2.7937904	655	2.8162413	688	2.8375884
623	2.7944880	656	2.8169038	689	2.8382192
624	2.7951846	657	2.8175654	690	2.8388491
625	2.7958800	658	2.8182259	691	2.8394780
626	2.7965744	659	2.8188854	692	2.8401061
627	2.7972675	660	2.8195439	693	2.8407332
628	2.7979596	661	2.8202015	694	2.8413595
629	2.7986506	662	2.8208580	695	2.8419848
630	2.7993405	663	2.8215135	696	2.8426092
631	2.8000294	664	2.8221681	697	2.8432328
632	2.8007171	665	2.8228216	698	2.8438554
633	2.8014037	666	2.8234742	699	2.8444772
634	2.8020893	667	2.8241258	700	2.8450980

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
701	2.8457180	734	2.8656961	767	2.8847954
702	2.8463371	735	2.8662873	768	2.8853912
703	2.8469553	736	2.8668778	769	2.8859263
704	2.8475727	737	2.8674675	770	2.8864907
705	2.8481891	738	2.8680564	771	2.8870544
706	2.8488047	739	2.8686444	772	2.8876173
707	2.8494194	740	2.8692317	773	2.8881795
708	2.8500333	741	2.8698182	774	2.8887410
709	2.8506462	742	2.8704039	775	2.8893017
710	2.8512513	743	2.8709888	776	2.8898617
711	2.8518696	744	2.8715729	777	2.8904210
712	2.8524800	745	2.8721563	778	2.8909796
713	2.8530895	746	2.8727388	779	2.8915375
714	2.8536982	747	2.8733206	780	2.8920946
715	2.8543060	748	2.8739016	781	2.8926510
716	2.8549130	749	2.8744818	782	2.8932067
717	2.8555191	750	2.8750613	783	2.8937618
718	2.8561244	751	2.8756399	784	2.8943161
719	2.8567289	752	2.8762178	785	2.8948696
720	2.8573325	753	2.8767950	786	2.8954225
721	2.8579353	754	2.8773713	787	2.8959747
722	2.8585372	755	2.8779469	788	2.8965262
723	2.8591383	756	2.8785218	789	2.8970770
724	2.8597386	757	2.8790959	790	2.8976271
725	2.8603380	758	2.8796692	791	2.8981765
726	2.8609366	759	2.8802418	792	2.8987252
727	2.8615344	760	2.8808136	793	2.8992732
728	2.8621314	761	2.8813847	794	2.8998205
729	2.8627275	762	2.8819550	795	2.9003671
730	2.8633229	763	2.8825245	796	2.9009131
731	2.8639174	764	2.8830934	797	2.9014583
732	2.8645111	765	2.8836614	798	2.9020029
733	2.8651040	766	2.8842288	799	2.9025468
734	2.8656961	767	2.8847954	800	2.9030900

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
801	2.9036325	834	2.9211660	867	2.9380191
802	2.9041744	835	2.9216865	868	2.9385197
803	2.9047155	836	2.9222063	869	2.9390198
804	2.9052560	837	2.9227254	870	2.9395192
805	2.9057959	838	2.9232440	871	2.9400181
806	2.9063350	839	2.9237620	872	2.9405165
807	2.9068735	840	2.9242793	873	2.9410142
808	2.9074114	841	2.9247960	874	2.9415114
809	2.9079485	842	2.9253121	875	2.9420080
810	2.9084850	843	2.9258276	876	2.9425041
811	2.9090208	844	2.9263424	871	2.9429966
812	2.9095560	845	2.9268567	878	2.9434945
813	2.9100905	846	2.9273704	879	2.9439889
814	2.9106244	847	2.9278834	880	2.9444827
815	2.9111576	848	2.9283958	881	2.9449759
816	2.9116901	849	2.9289077	882	2.9454686
817	2.9122220	850	2.9294189	883	2.9459607
818	2.9127533	851	2.9299296	884	2.9464523
819	2.9132839	852	2.9304396	885	2.9469433
820	2.9138138	853	2.9309490	886	2.9474337
821	2.9143431	854	2.9314579	887	2.9479236
822	2.9148718	855	2.9319661	888	2.9484130
823	2.9153998	856	2.9324738	889	2.9489018
824	2.9159272	857	2.9329808	890	2.9493900
825	2.9164539	858	2.9334873	891	2.9498777
826	2.9169800	859	2.9339932	892	2.9503648
827	2.9175055	860	2.9344984	893	2.9508514
828	2.9180303	861	2.9350031	894	2.9513375
829	2.9185545	862	2.9355073	895	2.9518230
830	2.9190781	863	2.9360108	896	2.9523080
831	2.9196010	864	2.9365137	897	2.9527924
832	2.9201233	865	2.9370161	898	2.9532763
833	2.9206450	866	2.9375179	899	2.9537597
834	2.9211660	867	2.9380191	900	2.9542425

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
901	2.9547248	934	2.9703469	967	2.9854265
902	2.9552065	935	2.9708116	968	2.9858754
903	2.9556877	936	2.9712758	969	2.9863238
904	2.9561684	937	2.9717396	970	2.9867717
905	2.9566486	938	2.9722028	971	2.9872192
906	2.9571282	939	2.9726656	972	2.9876663
907	2.9576073	940	2.9731278	973	2.9881128
908	2.9580858	941	2.9735896	974	2.9885589
909	2.9585639	942	2.9740509	975	2.9890046
910	2.9590414	943	2.9745117	976	2.9894498
911	2.9595184	944	2.9749720	977	2.9898946
912	2.9599948	945	2.9754318	978	2.9903388
913	2.9604708	946	2.9758911	979	2.9907827
914	2.9609462	947	2.9763500	980	2.9912261
915	2.9614211	948	2.9768083	981	2.9916690
916	2.9618955	949	2.9772662	982	2.9921115
917	2.9623693	950	2.9777236	983	2.9925535
918	2.9628427	951	2.9781805	984	2.9929951
919	2.9633155	952	2.9786369	985	2.9934362
920	2.9637878	953	2.9790929	986	2.9938769
921	2.9642596	954	2.9795484	987	2.9943171
922	2.9647309	955	2.9800034	988	2.9947569
923	2.9652017	956	2.9804579	989	2.9951963
924	2.9656720	957	2.9809119	990	2.9956352
925	1.9661417	958	2.9813655	991	2.9960736
926	2.9666110	959	2.9818186	992	2.9965117
927	2.9670792	960	2.9822712	993	2.9969492
928	2.9675480	961	2.9827234	994	2.9973864
929	2.9680157	962	2.9831751	995	2.9978231
930	2.9684829	963	2.9836263	996	2.9982593
931	2.9686497	964	2.9840770	997	2.9986951
932	2.9694159	965	2.9845273	998	2.9991305
933	2.9698816	966	2.9849771	999	2.9995655
934	2.9703469	967	2.9854265	1000	3.0000000

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1001	3.0004341	1034	3.0145205	1067	3.0281644
1002	3.0008677	1035	3.0149403	1068	3.0285712
1003	3.0013009	1036	3.0153597	1069	3.0289777
1004	3.0017327	1037	3.0157787	1070	3.0293838
1005	3.0021661	1038	3.0161973	1071	3.0297895
1006	3.0025980	1039	3.0166155	1072	3.0301948
1007	3.0030295	1040	3.0170333	1073	3.0305997
1008	3.0034605	1041	3.0174507	1074	3.0310043
1009	3.0038912	1042	3.0178677	1075	3.0314085
1010	3.0043214	1043	3.0182843	1076	3.0318123
1011	3.0047511	1044	3.0187005	1077	3.0322157
1012	3.0051805	1045	3.0191163	1078	3.0326188
1013	3.0056094	1046	3.0195317	1079	3.0330214
1014	3.0060379	1047	3.0199467	1080	3.0334237
1015	3.0064660	1148	3.0203613	1081	3.0338257
1016	3.0068937	1049	3.0207755	1082	3.0342273
1017	3.0073209	1050	3.0211893	1083	3.0346284
1018	3.0077478	1051	3.0216027	1084	3.0350293
1019	3.0081742	1052	3.0220157	1085	3.0354297
1020	3.0086002	1053	3.0224284	1086	3.0358298
1021	3.0090257	1054	3.0228406	1087	3.0362295
1022	3.0094509	1055	3.0232424	1088	3.0366289
1023	3.0098756	1056	3.0236639	1089	3.0370279
1024	3.0102999	1057	3.0240750	1090	3.0374265
1025	3.0107239	1058	3.0244857	1091	3.0378247
1026	3.0111474	1059	3.0248960	1092	3.0382226
1027	3.0115704	1060	3.0253059	1093	3.0386201
1028	3.0119931	1061	3.0257154	1094	3.0390173
1029	3.0124154	1062	3.0261245	1095	3.0394141
1030	3.0128372	1063	3.0265333	1096	3.0398105
1031	3.0132587	1064	3.0269416	1097	3.0402066
1032	3.0136797	1065	3.0273496	1098	3.0406023
1033	3.0141003	1066	3.0277572	1099	3.0409977
1034	3.0145205	1067	3.0281644	1100	3.0413927

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1101	3.0417873	1134	3.0546130	1167	3.0670708
1102	3.0421816	1135	3.0549958	1168	3.0674428
1103	3.0425755	1136	3.0553783	1169	3.0678145
1104	3.0429691	1137	3.0557604	1170	3.0681859
1105	3.0433623	1138	3.0561423	1171	3.0685569
1106	3.0437551	1139	3.0565237	1172	3.0689276
1107	3.0441476	1140	3.0569048	1173	3.0692980
1108	3.0445398	1141	3.0572856	1174	3.0696681
1109	3.0449315	1142	3.0576661	1175	3.0700370
1110	3.0453230	1143	3.0580462	1176	3.0704073
1111	3.0457140	1144	3.0584260	1177	3.0707765
1112	3.0461048	1145	3.0588055	1178	3.0711453
1113	3.0464952	1146	3.0591846	1179	3.0715138
1114	3.0468852	1147	3.0595634	1180	3.0718820
1115	3.0472749	1148	3.0599419	1181	3.0722499
1116	3.0476642	1149	3.0603200	1182	3. 026175
1117	3.0480532	1150	3.0606978	1183	3.0729847
1118	3.0484418	1151	3.0610753	1184	3.0733517
1119	3.0488301	1152	3.0614525	1185	3.0737183
1120	3.0492180	1153	3.0618293	1186	3.0740847
1121	3.0496056	1154	3.0622058	1187	3.0744507
1122	3.0499928	1155	3.0625820	1188	3.0748164
1123	3.0503797	1156	3.0629578	1189	3.0751818
1124	3.0507663	1157	3.0633334	1190	3.0755470
1125	3.0511525	1158	3.0637085	1191	3.0759118
1126	3.0515384	1159	3.0640834	1192	3.0762762
1127	3.0519239	1160	3.0644580	1193	3.0766404
1128	3.0523091	1161	3.0648322	1194	3.0770043
1129	3.0526939	1162	3.0652061	1195	3.0773679
1130	3.0530784	1163	3.0655797	1196	3.0777312
1131	3.0534626	1164	3.0659530	1197	3.0780941
1132	3.0538464	1165	3.0663259	1198	3.0784568
1133	3.0542299	1166	3.0666985	1199	3.0788192
1134	3.0546130	1167	3.0670708	1200	3.0791812

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1201	3.0795430	1234	3.0913151	1267	3.1027766
1202	3.0799045	1235	3.0916669	1268	3.1031192
1203	3.0802656	1236	3.0920185	1269	3.1034616
1204	3.0806265	1237	3.0923697	1270	3.1038037
1205	3.0809870	1238	3.0927206	1271	3.1041455
1206	3.0813473	1239	3.0930713	1272	3.1044871
1207	3.0817073	1240	3.0934217	1273	3.1048284
1208	3.0820669	1241	3.0937718	1274	3.1051694
1209	3.0824263	1242	3.0941216	1275	3.1055102
1210	3.0827854	1243	3.0944711	1276	3.1058507
1211	3.0831441	1244	3.0948204	1277	3.1061909
1212	3.0835026	1245	3.0951693	1278	3.1065308
1213	3.0838608	1246	3.0955180	1279	3.1068705
1214	3.0842187	1247	3.0958664	1280	3.1072100
1215	3.0845763	1248	3.0962146	1281	3.1075491
1216	3.0849336	1249	3.0965624	1282	3.1078880
1217	3.0852906	1250	3.0969100	1283	3.1082266
1218	3.0856473	1251	3.0972573	1284	3.1085650
1219	3.0860037	1252	3.0976043	1285	3.1089031
1220	3.0863598	1253	3.0979511	1286	3.1092410
1221	3.0867156	1254	3.0982975	1287	3.1095785
1222	3.0870712	1255	3.0986437	1288	3.1099159
1223	3.0874264	1256	3.0989896	1289	3.1102529
1224	3.0877814	1257	3.0993353	1290	3.1105897
1225	3.0881361	1258	3.0996806	1291	3.1109262
1226	3.0884905	1259	3.1000257	1292	3.1112625
1227	3.0888446	1260	3.1003705	1293	3.1115985
1228	3.0891984	1261	3.1007151	1294	3.1119343
1229	3.0895519	1262	3.1010593	1295	3.1122698
1230	3.0899051	1263	3.1014033	1296	3.1126050
1231	3.0902580	1264	3.1017471	1297	3.1129400
1232	3.0906107	1265	3.1020905	1298	3.1132747
1233	3.0909631	1266	3.1024337	1299	3.1136091
1234	3.0913151	1267	3.1027766	1300	3.1139433

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1301	3.1142773	1334	3.1251558	1367	3.1357685
1302	3.1146110	1335	3.1254813	1368	3.1360861
1303	3.1149444	1336	3.1258064	1369	3.1364034
1304	3.1152776	1337	3.1261314	1370	3.1367206
1305	3.1156105	1338	3.1264561	1371	3.1370374
1306	3.1159432	1339	3.1263806	1372	3.1373541
1307	3.1162756	1340	3.1271048	1373	3.1376705
1308	3.1166077	1341	3.1274288	1374	3.1379867
1309	3.1169396	1342	3.1277525	1375	3.1383027
1310	3.1172713	1343	3.1280760	1376	3.1386184
1311	3.1176027	1344	3.1283993	1377	3.1389339
1312	3.1179338	1345	3.1287223	1378	3.1392492
1313	3.1182647	1346	3.1290450	1379	3.1395643
1314	3.1185954	1347	3.1293676	1380	3.1398791
1315	3.1189257	1348	3.1296899	1381	3.1401937
1316	3.1192559	1349	3.1300119	1382	3.1405080
1317	3.1195858	1350	3.1303338	1383	3.1408222
1318	3.1199154	1351	3.1306553	1384	3.1411361
1319	3.1202448	1352	3.1309767	1385	3.1414498
1320	3.1205739	1353	3.1312978	1386	3.1417632
1321	3.1209028	1354	3.1316187	1387	3.1420765
1322	3.1212314	1355	3.1319393	1388	3.1423895
1323	3.1215598	1356	3.1322597	1389	3.1427022
1324	3.1218880	1357	3.1325798	1390	3.1420148
1325	3.1222159	1358	3.1328998	1391	3.1433271
1326	.1225435	1359	3.1332195	1392	3.1436392
1327	3.1228709	1360	3.1335380	1393	3.1439511
1328	3.1231981	1361	3.1338581	1394	3.1442628
1329	3.1235250	1362	3.1341771	1395	3.1445742
1330	3.1238516	1363	3.1344958	1396	3.1448854
1331	3.1241780	1364	3.1348144	1397	3.1451964
1332	3.1245042	1365	3.1351326	1398	3.1455072
1333	3.1248301	1366	3.1354507	1399	3.1458177
1334	3.1251558	1367	3.1357685	1400	3.1461280

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1401	3.1464381	1434	3.1565491	1467	3.1664301
1402	3.1467480	1435	3.1568519	1468	3.1667260
1403	3.1470577	1436	3.1571544	1469	3.1670218
1404	3.1473671	1437	3.1574568	1470	3.1673173
1405	3.1476763	1438	3.1577589	1471	3.1676127
1406	3.1479853	1439	3.1580608	1472	3.1679078
1407	3.1482941	1440	3.1583625	1473	3.1682027
1408	3.1486026	1441	3.1586640	1474	3.1684975
1409	3.1489110	1442	3.1589653	1475	3.1687920
1410	3.1492191	1443	3.1592663	1476	3.1690863
1411	3.1491270	1444	3.1595672	1477	3.1693805
1412	3.1498347	1445	3.1598678	1478	3.1696744
1413	3.1501422	1446	3.1601683	1479	3.1699682
1414	3.1504494	1447	3.1604685	1480	3.1702617
1415	3.1507564	1448	3.1607686	1481	3.1705550
1416	3.1510632	1449	3.1610684	1482	3.1708482
1417	3.1513698	1450	3.1613680	1483	3.1711411
1418	3.1516762	1451	3.1616674	1484	3.1714339
1419	3.1519824	1452	3.1619666	1485	3.1717264
1420	3.1522883	1453	3.1622656	1486	3.1720188
1421	3.1525941	1454	3.1625644	1487	3.1723110
1422	3.1528996	1455	3.1628630	1488	3.1726029
1423	3.1532049	1456	3.1631614	1489	3.1728947
1424	3.1535100	1457	3.1634595	1490	3.1731863
1425	3.1538149	1458	3.1637575	1491	3.1734776
1426	3.1541195	1459	3.1640553	1492	3.1737688
1427	3.1544240	1460	3.1643528	1493	3.1740598
1428	3.1547282	1461	3.1646502	1494	3.1743506
1429	3.1550322	1462	3.1649474	1495	3.1746412
1430	3.1553360	1463	3.1652443	1496	3.1749316
1431	3.1556396	1464	3.1655411	1497	3.1752218
1432	3.1559430	1465	3.1658476	1498	3.1755118
1433	3.1562462	1466	3.1661340	1499	3.1758016
1434	3.1565491	1467	3.1664301	1500	3.1760913

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1501	3.1763807	1534	3.1858253	1567	3.1950690
1502	3.1766699	1535	3.1861084	1568	3.1953460
1503	3.1769590	1536	3.1863912	1569	3.1956229
1504	3.1772478	1537	3.1866739	1570	3.1958996
1505	3.1775365	1538	3.1869563	1571	3.1961762
1506	3.1778250	1539	3.1872386	1572	3.1964525
1507	3.1781132	1540	3.1875207	1573	3.1967287
1508	3.1784013	1541	3.1878026	1574	3.1970047
1509	3.1786892	1542	3.1880844	1575	3.1972806
1510	3.1789769	1543	3.1883659	1576	3.1975562
1511	3.1792645	1544	3.1886473	1577	3.1978317
1512	3.1795518	1545	3.1889285	1578	3.1981070
1513	3.1798389	1546	3.1892095	1579	3.1983821
1514	3.1801259	1547	3.1894903	1580	3.1986571
1515	3.1804126	1548	3.1897709	1581	3.1989319
1516	3.1806992	1549	3.1900514	1582	3.1992065
1517	3.1809856	1550	3.1903317	1583	3.1994809
1518	3.1812718	1551	3.1906118	1584	3.1997552
1519	3.1815578	1552	3.1908917	1585	3.2000293
1520	3.1818436	1553	3.1911714	1586	3.2003032
1521	3.1821292	1554	3.1914510	1587	3.2005769
1522	3.1824146	1555	3.1917304	1588	3.2008505
1523	3.1826999	1556	3.1920096	1589	3.2011239
1524	3.1829850	1557	3.1922886	1590	3.2013971
1525	3.1832698	1558	3.1925674	1591	3.2016702
1526	3.1835545	1559	3.1928461	1592	3.2019431
1527	3.1838390	1560	3.1931246	1593	3.2022158
1528	3.1841233	1561	3.1934029	1594	3.2024883
1529	3.1844075	1562	3.1936810	1595	3.2027607
1530	3.1846914	1563	3.1939590	1596	3.2030329
1531	3.1849752	1564	3.1942367	1597	3.2033049
1532	3.1852588	1565	3.1945143	1598	3.2035768
1533	3.1855421	1566	3.1947917	1599	3.2038485
1534	3.1858253	1567	3.1950690	1600	3.2041200

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1601	3.2043913	1634	3.2132521	1667	3.2219356
1602	3.2046625	1635	3.2135178	1668	3.2221960
1603	3.2049335	1636	3.2137833	1669	3.2224563
1604	3.2052044	1637	3.2140487	1670	3.2227165
1605	3.2054750	1638	3.2143139	1671	3.2229794
1606	3.2057455	1639	3.2145789	1672	3.2232363
1607	3.2060159	1640	3.2148438	1673	3.2234956
1608	3.2062860	1641	3.2151086	1674	3.2237555
1609	3.2065560	1642	3.2153732	1675	3.2240148
1610	3.2068259	1643	3.2156376	1676	3.2242740
1611	3.2070955	1644	3.2159018	1677	3.2245331
1612	3.2073650	1645	3.2161659	1678	3.2247920
1613	3.2076344	1646	3.2164298	1679	3.2250507
1614	3.2079035	1647	3.2166936	1680	3.2253093
1615	3.2081725	1648	3.2169572	1681	3.2255677
1616	3.2084414	1649	3.2172206	1682	3.2258260
1617	3.2087100	1650	3.2174839	1683	3.2260841
1618	3.2089785	1651	3.2177471	1684	3.2263421
1619	3.2092468	1652	3.2180100	1685	3.2265999
1620	3.2095150	1653	3.2182728	1686	3.2268576
1621	3.2097830	1654	3.2185355	1687	3.2271151
1622	3.2100508	1655	3.2187980	1688	3.2273724
1623	3.2103185	1656	3.2190603	1689	3.2276296
1624	3.2105860	1657	3.2193225	1690	3.2278867
1625	3.2108534	1658	3.2195845	1691	3.2281436
1626	3.2111205	1659	3.2198464	1692	3.2284004
1627	3.2113876	1660	3.2201081	1693	3.2286570
1628	3.2116544	1661	3.2203696	1694	3.2289134
1629	3.2119211	1662	3.2206310	1695	3.2291697
1630	3.2121876	1663	3.2208922	1696	3.2294258
1631	3.2124540	1664	3.2211533	1697	3.2296818
1632	3.2127201	1665	3.2214142	1698	3.2299377
1633	3.2129862	1666	3.2216750	1699	3.2301934
1634	3.2132521	1667	3.2219356	1700	3.2304489

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1901	3.2789821	1934	3.2864565	1967	3.2938044
1902	3.2792105	1935	3.2866810	1968	3.2940251
1903	3.2794388	1936	3.2869054	1969	3.2942457
1904	3.2796669	1937	3.2871296	1970	3.2944662
1905	3.2798950	1938	3.2873538	1971	3.2946866
1906	3.2801229	1939	3.2875778	1972	3.2949069
1907	3.2803507	1940	3.2878017	1973	3.2951271
1908	3.280578[illegible]	1941	3.2880255	1974	3.2953471
1909	3.2808059	1942	3.288249[illegible]	1975	3.2955671
1910	3.2810334	1943	3.2884728	1976	3.2957869
1911	3.2812607	1944	3.2886963	1977	3.2960067
1912	3.281487[illegible]	1945	3.2889196	1978	3.2962263
1913	3.281715[illegible]	1946	3.2891428	1979	3.2964458
1914	3.2819419	1947	3.2893659	1980	3.2966652
1915	3.282168[illegible]	1948	3.2895889	1981	3.2968845
1916	3.282395[illegible]	1949	3.2898118	1982	3.2971036
1917	3.282622[illegible]	1950	3.2900346	1983	3.2973227
1918	3.282848[illegible]	1951	3.2902573	1984	3.2975417
1919	3.283075[illegible]	1952	3.2904798	1985	3.2977605
1920	3.2833012	1953	5.2907022	1986	3.2979792
1921	3.2835274	1954	3.2909246	1987	3.2981979
1922	3.2837534	1955	3.2911468	1988	3.2984164
1923	3.2839793	1956	3.2913688	1989	3.2986348
1924	3.2842051	1957	3.2915908	1990	3.2988531
1925	3.2844307	1958	3.2918127	1991	3.2990713
1926	3.2846563	1959	3.2920344	1992	3.2992893
1927	3.2848817	1960	3.2922561	1993	3.2995073
1928	3.2851070	1961	3.2924776	1994	3.2997251
1929	3.2853322	1962	3.2926990	1995	3.2999429
1930	3.2855573	1963	3.2929203	1996	3.3001605
1931	3.2857823	1964	3.2931415	1997	3.3003781
1932	3.2860071	1965	3.2933626	1998	3.3005955
1933	3.2862318	1966	3.2935835	1999	3.3008128
1934	3.2864565	1967	3.2938044	2000	3.3010300

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
2001	3.3012471	2034	3.3083509	2067	3.3153405
2002	3.3014641	2035	3.3085644	2068	3.3155505
2003	3.3011809	2036	3.3087778	2069	3.3157605
2004	3.3018977	2037	3.3089910	2070	3.3159703
2005	3.3021144	2038	3.3092042	2071	3.3161801
2006	3.3023309	2039	3.3094172	2072	3.3163897
2007	3.3025474	2040	3.3096302	2073	3.3165993
2008	3.3027637	2041	3.3098430	2074	3.3168087
2009	3.3029799	2042	3.3100557	2075	3.3170181
2010	3.3031961	2043	3.3102684	2076	3.3172273
2011	3.3034121	2044	3.3104809	2077	3.3174365
2012	3.3036280	2045	3.3106933	2078	3.3176455
2013	3.3038438	2046	3.3109056	2079	3.3178545
2014	3.3040595	2047	3.3111178	2080	3.3180633
2015	3.3042751	2048	3.3113299	2081	3.3182721
2016	3.3044905	2049	3.3115420	2082	3.3184807
2017	3.3047059	2050	3.3117539	2083	3.3186893
2018	3.3049212	2051	3.3119657	2084	3.3188977
2019	3.3051363	2052	3.3121774	2085	3.3191061
2020	3.3053514	2053	3.3123889	2086	3.3193143
2021	3.3055663	2054	3.3126004	2087	3.3195224
2022	3.3057812	2055	3.3128118	2088	3.3197305
2023	3.3059959	2056	3.3130231	2089	3.3199384
2024	3.3062105	2057	3.3132343	2090	3.3201463
2025	3.3064250	2058	3.3134454	2091	3.3203540
2026	3.3066394	2059	3.3136563	2092	3.3205617
2027	3.3068537	2060	3.3138672	2093	3.3207692
2028	3.3070679	2061	3.3140780	2094	3.3209767
2029	3.3072820	2062	3.3142887	2095	3.3211840
2030	3.3074960	2063	3.3144992	2096	3.3213913
2031	3.3077099	2064	3.3147097	2097	3.3215984
2032	3.3079237	2065	3.3149200	2098	3.3218055
2033	3.3081374	2066	3.3151303	2099	3.3220124
2034	3.3083509	2067	3.3153405	2100	3.3222193

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
2101	3.3224260	2134	3.3291944	2167	3.3358589
2102	3.3226327	2135	3.3293979	2168	3.3360593
2103	3.3228393	2136	3.3296012	2169	3.3362596
2104	3.3230457	2137	3.3298045	2170	3.3364597
2105	3.3232521	2138	3.3300077	2171	3.3366598
2106	3.3234584	2139	3.3302108	2172	3.3368598
2107	3.3236645	2140	3.3304138	2173	3.3370597
2108	3.3238706	2141	3.3306167	2174	3.3372595
2109	3.3240766	2142	3.3308195	2175	3.3374593
2110	3.3242825	2143	3.3310222	2176	3.3376589
2111	3.3244882	2144	3.3312248	2177	3.3378584
2112	3.3246939	2145	3.3314273	2178	3.3380579
2113	3.3248995	2146	3.3316297	2179	3.3382572
2114	3.3251050	2147	3.3318320	2180	3.3384565
2115	3.3253104	2148	3.3320343	2181	3.3386557
2116	3.3255157	2149	3.3322364	2182	3.3388547
2117	3.3257209	2150	3.3324385	2183	3.3390537
2118	3.3259260	2151	3.3326404	2184	3.3392526
2119	3.3261310	2152	3.3328423	2185	3.3394514
2120	3.3263359	2153	3.3330440	2186	3.3396501
2121	3.3265407	2154	3.3332457	2187	3.3398488
2122	3.3267454	2155	3.3334473	2188	3.3400473
2123	3.3269500	2156	3.3336488	2189	3.3402458
2124	3.3271545	2157	3.3338501	2190	3.3404441
2125	3.3273589	2158	3.3340514	2191	3.3406424
2126	3.3275633	2159	3.3342526	2192	3.3408405
2127	3.3277675	2160	3.3344537	2193	3.3410386
2128	3.3279716	2161	3.3346548	2194	3.3412366
2129	3.3281757	2162	3.3348557	2195	3.3414345
2130	3.3283796	2163	3.3350565	2196	3.3416323
2131	3.3285834	2164	3.3352572	2197	3.3418301
2132	3.3287872	2165	3.3354579	2198	3.3402277
2133	3.3289909	2166	3.3356585	2199	3.3422252
2134	3.3291944	2167	3.3358589	2200	3.3424227

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
2201	3.3426200	2234	3.3490832	2267	3.3554515
2202	3.3428173	2235	3.3492775	2268	3.3556430
2203	3.3430145	2236	3.3494718	2269	3.3558345
2204	3.3432116	2237	3.3496660	2270	3.3560259
2205	3.3434086	2238	3.3498601	2271	3.3562171
2206	3.3436055	2239	3.3500541	2272	3.3564083
2207	3.3438023	2240	3.3502480	2273	3.3565994
2208	3.3439991	2241	3.3504419	2274	3.3567905
2209	3.3441957	2242	3.3506356	2275	3.3569814
2210	3.3443923	2243	3.3508293	2276	3.3571723
2211	3.3445887	2244	3.3510228	2277	3.3573630
2212	3.3447851	2245	3.3512163	2278	3.3575537
2213	3.3449814	2246	3.3514098	2279	3.3577443
2214	3.3451776	2247	3.3516031	2280	3.3579348
2215	3.3453737	2248	3.3517963	2281	3.3581253
2216	3.3455698	2249	3.3519895	2282	3.3583156
2217	3.3457657	2250	3.3521825	2283	3.3585059
2218	3.3459615	2251	3.3523755	2284	3.3586961
2219	3.3461573	2252	3.3525684	2285	3.3588862
2220	3.3463530	2253	3.3527612	2286	3.3590762
2221	3.3465486	2254	3.3529539	2287	3.3592662
2222	3.3467441	2255	3.3531465	2288	3.3594560
2223	3.3469395	2256	3.3533391	2289	3.3596458
2224	3.3471348	2257	3.3535316	2290	3.3598355
2225	3.3473300	2258	3.3537239	2291	3.3600251
2226	3.3475252	2259	3.3539162	2292	3.3602146
2227	3.3477202	2260	3.3541084	2293	3.3604041
2228	3.3479152	2261	3.3543006	2294	3.3605934
2229	3.3481101	2262	3.3544926	2295	3.3607827
2230	3.3483049	2263	3.3546846	2296	3.3609719
2231	3.3484996	2264	3.3548764	2297	3.3611610
2232	3.3486942	2265	3.3550682	2298	3.3613500
2233	3.3488887	2266	3.3552599	2299	3.3615390
2234	3.3490832	2267	3.3554515	2300	3.3617278

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
2101	3.3224260	2134	3.3291944	2167	3.3358589
2102	3.3226327	2135	3.3293979	2168	3.3360593
2103	3.3228393	2136	3.3296012	2169	3.3362596
2104	3.3230457	2137	3.3298045	2170	3.3364597
2105	3.3232521	2138	3.3300077	2171	3.3366598
2106	3.3234584	2139	3.3302108	2172	3.3368598
2107	3.3236645	2140	3.3304138	2173	3.3370597
2108	3.3238706	2141	3.3306167	2174	3.3372595
2109	3.3240766	2142	3.3308195	2175	3.3374593
2110	3.3242825	2143	3.3310222	2176	3.3376589
2111	3.3244882	2144	3.3312248	2177	3.3378584
2112	3.3246939	2145	3.3314273	2178	3.3380579
2113	3.3248995	2146	3.3316297	2179	3.3382572
2114	3.3251050	2147	3.3318320	2180	3.3384565
2115	3.3253104	2148	3.3320343	2181	3.3386557
2116	3.3255157	2149	3.3322364	2182	3.3388547
2117	3.3257209	2150	3.3324385	2183	3.3390537
2118	3.3259260	2151	3.3326404	2184	3.3392526
2119	3.3261310	2152	3.3328423	2185	3.3394514
2120	3.3263359	2153	3.3330440	2186	3.3396501
2121	3.3265407	2154	3.3332457	2187	3.3398488
2122	3.3267454	2155	3.3334473	2188	3.3400473
2123	3.3269500	2156	3.3336488	2189	3.3402458
2124	3.3271545	2157	3.3338501	2190	3.3404441
2125	3.3273589	2158	3.3340514	2191	3.3406424
2126	3.3275633	2159	3.3342526	2192	3.3408405
2127	3.3277675	2160	3.3344537	2193	3.3410386
2128	3.3279716	2161	3.3346548	2194	3.3412366
2129	3.3281757	2162	3.3348557	2195	3.3414345
2130	3.3283796	2163	3.3350565	2196	3.3416323
2131	3.3285834	2164	3.3352572	2197	3.3418301
2132	3.3287872	2165	3.3354579	2198	3.3402277
2133	3.3289909	2166	3.3356585	2199	3.3422252
2134	3.3291944	2167	3.3358589	2200	3.3424227

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
2201	3.3426200	2234	3.3490832	2267	3.3554515
2202	3.3428173	2235	3.3492775	2268	3.3556430
2203	3.3430145	2236	3.3494718	2269	3.3558345
2204	3.3432116	2237	3.3496660	2270	3.3560259
2205	3.3434086	2238	3.3498601	2271	3.3562171
2206	3.3436055	2239	3.3500541	2272	3.3564083
2207	3.3438023	2240	3.3502480	2273	3.3565994
2208	3.3439991	2241	3.3504419	2274	3.3567905
2209	3.3441957	2242	3.3506356	2275	3.3569814
2210	3.3443923	2243	3.3508293	2276	3.3571723
2211	3.3445887	2244	3.3510228	2277	3.3573630
2212	3.3447851	2245	3.3512163	2278	3.3575537
2213	3.3449814	2246	3.3514098	2279	3.3577443
2214	3.3451776	2247	3.3516031	2280	3.3579348
2215	3.3453737	2248	3.3517963	2281	3.3581253
2216	3.3455698	2249	3.3519895	2282	3.3583156
2217	3.3457657	2250	3.3521825	2283	3.3585059
2218	3.3459615	2251	3.3523755	2284	3.3586961
2219	3.3461573	2252	3.3525684	2285	3.3588862
2220	3.3463530	2253	3.3527612	2286	3.3590762
2221	3.3465486	2254	3.3529539	2287	3.3592662
2222	3.3467441	2255	3.3531465	2288	3.3594560
2223	3.3469395	2256	3.3533391	2289	3.3596458
2224	3.3471348	2257	3.3535316	2290	3.3598355
2225	3.3473300	2258	3.3537239	2291	3.3600251
2226	3.3475252	2259	3.3539162	2292	3.3602146
2227	3.3477202	2260	3.3541084	2293	3.3604041
2228	3.3479152	2261	3.3543006	2294	3.3605934
2229	3.3481101	2262	3.3544926	2295	3.3607827
2230	3.3483049	2263	3.3546846	2296	3.3609719
2231	3.3484996	2264	3.3548764	2297	3.3611610
2232	3.3486942	2265	3.3550682	2298	3.3613500
2233	3.3488887	2266	3.3552599	2299	3.3615390
2234	3.3490832	2267	3.3554515	2300	3.3617278

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
2501	3.3681137	2534	3.4038066	2567	3.4094259
2502	3.3982873	2535	3.4039780	2568	3.4095950
2503	3.3984608	2536	3.4041492	2569	3.4097641
2504	3.3986343	2537	3.4043205	2570	3.4099331
2505	3.3988077	2538	3.4044916	2571	3.4101021
2506	3.3989811	2539	3.4046627	2572	3.4102710
2507	3.3991543	2540	3.4048337	2573	3.4104398
2508	3.3993275	2541	3.4050047	2574	3.4106085
2509	3.3995007	2542	3.4051755	2575	3.4107772
2510	3.3996737	2543	3.4053464	2576	3.4109459
2511	3.3998467	2544	3.4055171	2577	3.4111144
2512	3.4000196	2545	3.4056878	2578	3.4112829
2513	3.4001925	2546	3.4058584	2579	3.4114513
2514	3.4003653	2547	3.4060289	2580	3.4116197
2515	3.4005380	2548	3.4061994	2581	3.4117880
2516	3.4007106	2549	3.4063698	2582	3.4119562
2517	3.4008832	2550	3.4065402	2583	3.4121244
2518	3.4010557	2551	3.4067105	2584	3.4122925
2519	3.4012282	2552	3.4068807	2585	3.4124605
2520	3.4014005	2553	5.4070508	2586	3.4126285
2521	3.4015728	2554	3.4072209	2587	3.4127964
2522	3.4017451	2555	3.4073909	2588	3.4129643
2523	3.4019173	2556	3.4075608	2589	3.4131320
2524	3.4020893	2557	3.4077307	2590	3.4132998
2525	3.4022614	2558	3.4079005	2591	3.4134674
2526	3.4024333	2559	3.4080703	2592	3.4136350
2527	3.4026052	2560	3.4082400	2593	3.4138025
2528	3.4027771	2561	3.4084096	2594	3.4139700
2529	3.4029488	2562	3.4085791	2595	3.4141374
2530	3.4031205	2563	3.4087486	2596	3.4143047
2531	3.4032921	2564	3.4089180	2597	3.4144719
2532	3.4034637	2565	3.4090874	2598	3.4146391
2533	3.4036352	2566	3.4092567	2599	3.4148063
2534	3.4038066	2567	3.4098259	2600	3.4149733

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
2601	3.4151404	2634	3.4206158	2667	3.4260230
2602	3.4153073	2635	3.4207806	2668	3.4261858
2603	3.4154742	2636	3.4209454	2669	3.4263486
2604	3.4156410	2637	3.4211101	2670	3.4265113
2605	3.4158077	2638	3.4212748	2671	3.4266739
2606	3.4159744	2639	3.4214394	2672	3.4267365
2607	3.4161410	2640	3.4216036	2673	3.4269990
2608	3.4163076	2641	3.4217684	2674	3.4271614
2609	3.4164741	2642	3.4219328	2675	3.4273238
2610	3.4166405	2643	3.4220972	2676	3.4274861
2611	3.4168069	2644	3.4222614	2677	3.4276484
2612	3.4169732	2645	3.4224257	2678	3.4278106
2613	3.4171394	2646	3.4225898	2679	3.4279727
2614	3.4173056	2647	3.4227539	2680	3.4281348
2615	3.4174717	2648	3.4229180	2681	3.4282968
2616	3.4176377	2649	3.4230820	2682	3.4284588
2617	3.4178037	2650	3.4232459	2683	3.4286207
2618	3.4179696	2651	3.4234097	2684	3.4287825
2619	3.4181355	2652	3.4235735	2685	3.4289443
2620	3.4183013	2653	3.4237372	2686	3.4291060
2621	3.4184670	2654	3.4239009	2687	3.4292677
2622	3.4186327	2655	3.4240645	2688	3.4294293
2623	3.4187983	2656	3.4242281	2689	3.4295908
2624	3.4189638	2657	3.4243916	2690	3.4297523
2625	3.4191293	2658	3.4245550	2691	3.4299137
2626	3.4192947	2659	3.4247183	2692	3.4300751
2627	3.4194601	2660	3.4248816	2693	3.4302364
2628	3.4196254	2661	3.4250449	2694	3.4303976
2629	3.4197906	2662	3.4252080	2695	3.4305588
2630	3.4199557	2663	3.4253712	2696	3.4307199
2631	3.4201208	2664	3.4255342	2697	3.4308809
2632	3.4202859	2665	3.4256972	2698	3.4310419
2633	3.4204509	2666	3.4258601	2699	3.4312029
2634	3.4206158	2667	3.4260230	2700	3.4313638

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
2701	3.4315246	2734	3.4367985	2767	3.4420092
2702	3.4316853	2735	3.4369573	2768	3.4421661
2703	3.4318460	2736	3.4371161	2769	3.4423229
2704	3.4320067	2737	3.4372748	2770	3.4424798
2705	3.4321673	2738	3.4374334	2771	3.4426365
2706	3.4323278	2739	3.4375920	2772	3.4427932
2707	3.4324882	2740	3.4377506	2773	3.4429499
2708	3.4326487	2741	3.4379090	2774	3.4431065
2709	3.4328090	2742	3.4380674	2775	3.4432630
2710	3.4329693	2743	3.4382258	2776	3.4434195
2711	3.4331295	2744	3.4383841	2777	3.4435759
2712	3.4332897	2745	3.4385423	2778	3.4437322
2713	3.4334497	2746	3.4387005	2779	3.4438885
2714	3.4336098	2747	3.4388587	2780	3.4440448
2715	3.4337698	2748	3.4390165	2781	3.4442010
2716	3.4339298	2749	3.4391747	2782	3.4443571
2717	3.4340896	2750	3.4393327	2783	3.4445132
2718	3.4342494	2751	3.4394906	2784	3.4446692
2719	3.4344092	2752	3.4396484	2785	3.4448252
2720	3.4345689	2753	3.4398062	2786	3.4449811
2721	3.4347285	2754	3.4399639	2787	3.4451370
2722	3.4348881	2755	3.4401216	2788	3.4452928
2723	3.4350476	2756	3.4402792	2789	3.4454485
2724	3.4352071	2757	3.4404368	2790	3.4456042
2725	3.4353665	2758	3.4405943	2791	3.4457598
2726	3.4355258	2759	3.4407517	2792	3.4459154
2727	3.4356851	2760	3.4404091	2793	3.4460709
2728	3.4358444	2761	3.4410664	2794	3.4462264
2729	3.4360035	2762	3.4412237	2795	3.4463818
2730	3.4361626	2763	3.4413809	2796	3.4465372
2731	3.4363217	2764	3.4415380	2797	3.4466925
2732	3.4364807	2765	3.4416951	2798	3.4468477
2733	3.4366396	2766	3.4418522	2799	3.4470029
2734	3.4367985	2767	3.4420092	2800	3.4471580

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
2801	3.4473131	2834	3.4523998	2867	3.4574277
2802	3.4474681	2835	3.4525531	2868	3.4575791
2803	3.4476231	2836	3.4527062	2869	3.4577305
2804	3.4477780	2837	3.4528593	2870	3.4578819
2805	3.4479329	2838	3.4530124	2871	3.4580332
2806	3.4480877	2839	3.4531654	2872	3.4581844
2807	3.4482424	2840	3.4533183	2873	3.4583356
2808	3.4483971	2841	3.4534712	2874	3.4584867
2809	3.4485517	2842	3.4536241	2875	3.4586378
2810	3.4487063	2843	3.4537769	2876	3.4587889
2811	3.4488608	2844	3.4539296	2877	3.4589399
2812	3.4490153	2845	3.4540823	2878	3.4590908
2813	3.4491697	2846	3.4542349	2879	3.4592417
2814	3.4493241	2847	3.4543875	2880	3.4593925
2815	3.4494784	2848	3.4545400	2881	3.4595433
2816	3.4496326	2849	3.4546924	2882	3.4596940
2817	3.4497868	2850	3.4548449	2883	3.4598446
2818	3.4499410	2851	3.4549972	2884	3.4599953
2819	3.4500951	2852	3.4551495	2885	3.4601458
2820	3.4502491	2853	3.4553018	2886	3.4602963
2821	3.4504031	2854	3.4554540	2887	3.4604468
2822	3.4505570	2855	3.4556061	2888	3.4605972
2823	3.4507109	2856	3.4557582	2889	3.4607475
2824	3.4508647	2857	3.4559102	2890	3.4608978
2825	3.4510184	2858	3.4560622	2891	3.4610481
2826	3.4511721	2859	3.4562142	2892	3.4611983
2827	3.4513258	2860	3.4563660	2893	3.4613484
2828	3.4514794	2861	3.4565179	2894	3.4614985
2829	3.4516329	2862	3.4566696	2895	3.4616486
2830	3.4517864	2863	3.4568213	2896	3.4617986
2831	3.4519399	2864	3.4569730	2897	3.4619485
2832	3.4520932	2865	3.4571246	2898	3.4620984
2833	3.4522466	2866	3.4572762	2899	3.4622482
2834	3.4523998	2867	3.4574277	2900	3.4623980

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
2901	3.4625477	2934	3.4674601	2967	3.4723175
2902	3.4626974	2935	3.4676081	2968	3.4724639
2903	3.4628470	2936	3.4677560	2969	3.4729102
2904	3.4629966	2637	3.4679039	2970	3.4727564
2905	3.4631461	2938	3.4680518	2971	3.4729027
2906	3.4632956	2939	3.4681996	2972	3.4730488
2907	3.4634450	2940	3.4683473	2973	3.4731949
2908	3.4635944	2941	3.4684950	2974	3.4733410
2909	3.4637437	2942	3.4686427	2975	3.4734870
2910	3.4638930	2943	3.4687903	2976	3.4736329
2911	3.4640422	2944	3.4699378	2977	3.4737788
2912	3.4641914	2945	3.4690853	2978	3.4739247
2913	3.4643405	2946	3.4692327	2979	3.4740705
2914	3.4644895	2947	3.4693801	2980	3.4742163
2915	3.4646386	2948	3.4695275	2981	3.4743620
2916	3.4647875	2949	3.4696748	2982	3.4745076
2917	3.4649364	2950	3.4698220	2983	3.4746533
2918	3.4650853	2951	3.4699692	2984	3.4747988
2919	3.4652341	2952	3.4701163	2985	3.4749443
2920	3.4653828	2953	3.4702634	2986	3.4750898
2921	3.4655316	2954	3.4704105	2987	3.4752352
2922	3.4656802	2955	3.4705575	2988	3.4753806
2923	3.4658288	2956	3.4707044	2989	3.4755259
2924	3.4659774	2957	3.4708513	2990	3.4756712
2925	3.4661259	2958	3.4709982	2991	3.4758164
2926	3.4662743	2959	3.4711450	2992	3.4759616
2927	3.4664227	2960	3.4712917	2993	3.4761067
2928	3.4665711	2961	3.4714384	2994	3.4762518
2929	3.4667194	2962	3.4715851	2995	3.4763968
2930	3.4668676	2963	3.4717317	2996	3.4765418
2931	3.4670158	2964	3.4718782	2997	3.4766867
2932	3.4671640	2965	3.4720247	2998	3.4768316
2933	3.4673121	2966	3.4721711	2999	3.4769765
2934	3.4674601	2967	3.4723175	3000	3.4771212

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
3001	3.4772660	3034	3.4820156	3067	3.4867138
3002	3.4774107	3035	3.4821587	3068	3.4868554
3003	3.4775553	3036	3.4823018	3069	3.4869969
3004	3.4776999	3037	3.4824448	3070	3.4871384
3005	3.4778445	3038	3.4825878	3071	3.4872798
3006	3.4779890	3039	3.4827307	3072	3.4874212
3007	3.4781334	3040	3.4828736	3073	3.4875626
3008	3.4782778	3041	3.4830164	3074	3.4877039
3009	3.4784222	3042	3.4831592	3075	3.4878451
3010	3.4785665	3043	3.4833019	3076	3.4879863
3011	3.4787108	3044	3.4834446	3077	3.4881275
3012	3.4788550	3045	3.4835873	3078	3.4882686
3013	3.4789991	3046	3.4837299	3079	3.4884097
3014	3.4791432	3047	3.4838725	3080	3.4885507
3015	3.4792873	3048	3.4840150	3081	3.4886917
3016	3.4794313	3049	3.4841574	3082	3.4888326
3017	3.4795753	3050	3.4842998	3083	3.4889735
3018	3.4797192	3051	3.4844422	3084	3.4891144
3019	3.4798631	3052	3.4845845	3085	3.4892552
3020	3.4800069	3053	3.4847268	3086	3.4893959
3021	3.4801507	3054	3.4848690	3087	3.4895366
3022	3.4802945	3055	3.4850112	3088	3.4896773
3023	3.4804381	3056	3.4851533	3089	3.4898179
3024	3.4805818	3057	3.4852954	3090	3.4899585
3025	3.4807254	3058	3.4854375	3091	3.4900990
3026	3.4808689	3059	3.4855795	3092	3.4902395
3027	3.4810124	3060	3.4857214	3093	3.4903799
3028	3.4811559	3061	3.4858633	3094	3.4905203
3029	3.4812993	3062	3.4860052	3095	3.4906607
3030	3.4814426	3063	3.4861470	3096	3.4908009
3031	3.4815859	3064	3.4862888	3097	3.4909412
3032	3.4819292	3665	3.4865305	3098	3.4910814
3033	3.4818714	3066	3.4865721	3099	3.4912216
3034	3.4820156	3067	3.4867138	3100	3.4913617

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
3101	3.4915018	3134	3.4960990	3167	3.5006481
3102	3.4916418	3135	3.4962375	3168	3.5007852
3103	3.4917818	3136	3.4963761	3169	3.5009222
3104	3.4919217	3137	3.4965145	3170	3.5010593
3105	3.4920616	3138	3.4966529	3171	3.5011962
3106	3.4922014	3139	3.4967913	3172	3.5013332
3107	3.4923413	3140	3.4969296	3173	3.5014701
3108	3.4924810	3141	3.4970679	3174	3.5016069
3109	3.4926207	3142	3.4972062	3175	3.5017437
3110	3.4927604	3143	3.4973444	3176	3.5018805
3111	3.4929000	3144	3.4974825	3177	3.5020172
3112	3.4930396	3145	3.4976206	3178	3.5021539
3113	3.4931791	3146	3.4977587	3179	3.5022905
3114	3.4933186	3147	3.4978967	3180	3.5024271
3115	3.4934580	3148	3.4980347	3181	3.5025637
3116	3.4935974	3149	3.4981727	3182	3.5027002
3117	3.4937368	3150	3.4983106	3183	3.5028366
3118	3.4938761	3151	3.4984484	3184	3.5029731
3119	3.4940136	3152	3.4985862	3185	3.5031094
3120	3.4941546	3153	3.4987240	3186	3.5032458
3121	3.4942938	3154	3.4988617	3187	3.5033821
3122	3.4944329	3155	3.4989994	3188	3.5035183
3123	3.4945720	3156	3.4991370	3189	3.5036545
3124	3.4947110	3157	3.4992746	3190	3.5037907
3125	3.4948500	3158	3.4994121	3191	3.5039268
3126	3.4949890	3159	3.4995496	3192	3.5040629
3127	3.4951279	3160	3.4996871	3193	3.5041989
3128	3.4952667	3161	3.4998245	3194	3.5043349
3129	3.4954056	3162	3.4999619	3195	3.5044709
3130	3.4955443	3163	3.5000992	3196	3.5046068
3131	3.4956831	3164	3.5002365	3197	3.5047426
3132	3.4958218	3165	3.5003737	3198	3.5048785
3133	3.4956604	3166	3.5005109	3199	3.5050142
3134	3.4960990	3167	3.5006481	3200	3.5051500

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
3201	3.5052857	3234	3.5097400	3267	3.5141491
3202	3.5054213	3235	3.5098743	3268	3.5142820
3203	3.5055569	3236	3.5100085	3269	3.5144149
3204	3.5056925	3237	3.5101427	3270	3.5145478
3205	3.5058280	3238	3.5102768	3271	3.5146805
3206	3.5059635	3239	3.5104109	3272	3.5148133
3207	3.5060990	3240	3.5105450	3273	3.5149460
3208	3.5062344	3241	3.5106790	3274	3.5150787
3209	3.5063697	3242	3.5108130	3275	3.5152113
3210	3.5065050	3243	3.5109469	3276	3.5153439
3211	3.5066403	3244	3.5110808	3277	3.5154764
3212	3.5067755	3245	3.5112147	3278	3.5156089
3213	3.5069107	3246	3.5113485	3279	3.5157414
3214	3.5070459	3247	3.5114823	3280	3.5158738
3215	3.5071810	3248	3.5116160	3281	3.5160062
3216	3.5073160	3249	3.5117497	3282	3.5161386
3217	3.5074511	3250	3.5118834	3283	3.5162709
3218	3.5075860	3251	3.5120170	3284	3.5164031
3219	3.5077210	3252	3.5121505	3285	3.5165354
3220	3.5078559	3253	3.5122841	3286	3.5166676
3221	3.5079907	3254	3.5124175	3287	3.5167997
3222	3.5081255	3255	3.5125510	3288	3.5169318
3223	3.5082603	3256	3.5126844	3289	3.5170639
3224	3.5083950	3257	3.5128178	3290	3.5171959
3225	3.5085297	3258	3.5129511	3291	3.5173279
3226	3.5086644	3259	3.5130844	3292	3.5174598
3227	3.5087990	3260	3.5132176	3293	3.5175917
3228	3.5089335	3261	3.5133508	3294	3.5177236
3229	3.5090680	3262	3.5134840	3295	3.5178554
3230	3.5092025	3263	3.5136171	3296	3.5176872
3231	3.5093370	3264	3.5137501	3297	3.5181189
3232	3.5094713	3265	3.5138832	3298	3.5182506
3233	3.5096057	3266	3.5140162	3299	3.5183823
3234	3.5097400	3267	3.5141491	3300	3.5285139

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
3301	3.5186455	3334	3.5229656	3367	3.5272431
3302	3.5187771	3335	3.5230958	3368	3.5273721
3303	3.5189086	3336	3.5232260	3369	3.5275010
3304	3.5190400	3337	3.5233562	3370	3.5276299
3305	3.5191715	3338	3.5234863	3371	3.5277588
3306	3.5193028	3339	3.5236164	3372	3.5278876
3307	3.5194342	3330	3.5237465	3373	3.5280163
3308	3.5195655	3331	3.5238765	3374	3.5281451
3309	3.5196968	3332	3.5240064	3375	3.5282738
3310	3.5198280	3333	3.5241364	3376	3.5284024
3311	3.5199592	3334	3.5242663	3377	3.5285311
3312	3.5200903	3335	3.5243961	3378	3.5286596
3313	3.5202214	3336	3.5245259	3379	3.5287882
3314	3.5203525	3337	3.5246557	3380	3.5289167
3315	3.5204835	3338	3.5247854	3381	3.5290452
3316	3.5206145	3349	3.5249151	3382	3.5291736
3317	3.5207455	3350	3.5250448	3383	3.5293020
3318	3.5208764	3351	3.5251744	3384	3.3294303
3319	3.5210073	3352	3.5253040	3385	3.5295587
3320	3.5211381	3353	3.5254335	3386	3.5296869
3321	3.5212689	3354	3.5255631	3387	3.5298152
3322	3.5213996	3355	3.5256925	3388	3.5299434
3323	3.5215303	3356	3.5258219	3389	3.5300716
3324	3.5216610	3357	3.5259514	3390	3.5301997
3325	3.5217916	3358	3.5260807	3391	3.5303278
3326	3.5219222	3359	3.5262100	3392	3.5304558
3327	3.5220528	3360	3.5263393	3393	3.5305839
3328	3.5221833	3361	3.5264685	3394	3.5307118
3329	3.5223138	3362	3.5265977	3395	3.5308398
3330	3.5224442	3363	3.5267269	3396	3.5309677
3331	3.5225746	3364	3.5268560	3397	3.5310955
3332	3.5227050	3365	3.5269851	3398	3.5312234
3333	3.5228353	3366	3.5271141	3399	3.5313512
3334	3.5229656	3367	3.5272431	3400	3.5314789

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
3401	3.5316066	3434	3.5358003	3467	3.5399538
3402	3.5317343	3435	3.5359267	3468	3.5400791
3403	3.5318619	3436	3.5360532	3469	3.5402043
3404	3.5319895	3437	3.5361795	3470	3.5403295
3405	3.5321171	3438	3.5363059	3471	3.5404546
3406	3.5322446	3439	3.5364322	3472	3.5405797
3407	3.5323721	3440	3.5365584	3473	3.5407048
3408	3.5324996	3441	3.5366847	3474	3.5408298
3409	3.5326270	3442	3.5368109	3475	3.5409548
3410	3.5327544	3443	3.5369370	3476	3.5410798
3411	3.5328817	3444	3.5370631	3477	3.5412047
3412	3.5330090	3445	3.5371892	3478	3.5413296
3413	3.5331363	3446	3.5373153	3479	3.5414544
3414	3.5332635	3447	3.5374413	3480	3.5415792
3415	3.5333907	3448	3.5375672	3481	3.5417040
3416	3.5335179	3449	3.5376932	3482	3.5418288
3417	3.5336450	3450	3.5378191	3483	3.5419535
3418	3.5337721	3451	3.5379450	3484	3.5420781
3419	3.5338991	3452	3.5380708	3485	3.5422028
3420	3.5340261	3453	3.5381966	3486	3.5423274
3421	3.5341531	3454	3.5383223	3487	3.5424519
3422	3.5342800	3455	3.5384481	3488	3.5425765
3423	3.5344069	3456	3.5385737	3489	3.5427010
3424	3.5345338	3457	3.5386994	3490	3.5428254
3425	3.5346606	3458	3.5388250	3491	3.5429498
3426	3.5347874	3459	3.5389506	3492	3.5430742
3427	3.5349141	3460	3.5390761	3493	3.5431986
3428	3.5350408	3461	3.5392016	3494	3.5433229
3429	3.5351675	3462	3.5393271	3495	3.5434472
3430	3.5352941	3463	3.5394525	3496	3.5435714
3431	3.5354207	3464	3.5395779	3497	3.5436956
3432	3.5355473	3465	3.5397032	3498	3.5438198
3433	3.5356738	3466	3.5398286	3499	3.5439439
3434	3.5358003	3467	3.5399538	3500	3.5440680

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
3501	3.5441921	3534	3.5482665	3567	3.5523031
3502	3.5443161	3535	3.5483894	3568	3.5524248
3503	3.5444401	3536	3.5485123	3569	3.5525465
3504	3.5445641	3537	3.5486351	3570	3.5526682
3505	3.5446880	3538	3.5487578	3571	3.5527898
3506	3.5448119	3539	3.5488806	3572	3.3329114
3507	3.5449358	3540	3.5490033	3573	3.5530330
3508	3.5450596	3541	3.5491259	3574	3.5531545
3509	3.5451834	3542	3.5492486	3575	3.5532760
3510	3.5453071	3543	3.5493712	3576	3.5533975
3511	3.5454308	3544	3.5494937	3577	3.5535189
3512	3.5455545	3545	3.5496162	3578	3.5536403
3513	3.5456781	3546	3.5497387	3579	3.5537617
3514	3.5458018	3547	3.5498612	3580	3.5538830
3515	3.5459253	3548	3.5499836	3581	3.5540043
3516	3.5460489	3549	3.5501060	3582	3.5541256
3517	3.5461724	3550	3.5502283	3583	3.5542468
3518	3.5462958	3551	3.5503507	3584	3.5543680
3519	3.5464193	3552	3.5504730	3585	3.5544892
3520	3.5465427	3553	5.5505952	3586	3.5546103
3521	3.5466660	3554	3.5507174	3587	3.5547314
3522	3.5467894	3555	3.5508396	3588	3.5548524
3523	3.5469126	3556	3.5509618	3589	3.5549735
3524	3.5470359	3557	3.5510839	3590	3.5550944
3525	3.5471591	3558	3.5512059	3591	3.5552154
3526	3.5472823	3559	3.5513280	3592	3.5553363
3527	3.5474055	3560	3.5514500	3593	3.5554572
3528	3.5475286	3561	3.5515720	3594	3.5555781
3529	3.5476517	3562	3.5516939	3595	3.5556989
3530	3.5477747	3563	3.5518158	3596	3.5558197
3531	3.5478977	3564	3.5519377	3597	3.5559404
3532	3.5480207	3565	3.5520595	3598	3.5560612
3533	3.5481436	3566	3.5521813	3599	3.5561818
3534	3.5482665	3567	3.5523031	3600	3.5563025

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
3601	3.5564231	3634	3.5603849	3667	3.5643109
3602	3.5565437	3635	3.5605044	3668	3.5644293
3603	3.5566643	3636	3.5606239	3669	3.5645477
3604	3.5567848	3637	3.5607433	3670	3.5646661
3605	3.5569053	3638	3.5608627	3671	3.5647844
3606	3.5570257	3639	3.5609820	3672	3.5649027
3607	3.5571461	3640	3.5611014	3673	3.5650209
3608	3.5572665	3641	3.5612207	3674	3.5651392
3609	3.5573869	3642	3.5613399	3675	3.5652573
3610	3.5575072	3643	3.5614592	3676	3.5653755
3611	3.5576275	3644	3.5615784	3677	3.5654936
3612	3.5577477	3645	3.5616975	3678	3.5656117
3613	3.5578680	3646	3.5618167	3679	3.5657298
3614	3.5579881	3647	3.5619358	3680	3.5658478
3615	3.5581083	3648	3.5620548	3681	3.5659658
3616	3.5582284	3649	3.5621739	3682	3.5660838
3617	3.5583485	3650	3.5622929	3683	3.5662017
3618	3.5584686	3651	3.5614118	3684	3.5663196
3619	3.5585886	3652	3.5625308	3685	3.5664375
3620	3.5587086	3653	3.5626497	3686	3.5665553
3621	3.5588285	3654	3.5627685	3687	3.5666731
3622	3.5589484	3655	3.5628874	3688	3.5667909
3623	3.5590683	3656	3.5630062	3689	3.5669087
3624	3.5591882	3657	3.5631250	3690	3.5670264
3625	3.5593080	3658	3.5632437	3691	3.5671440
3626	3.5594278	3659	3.5633624	3692	3.5672617
3627	3.5595476	3660	3.5634811	3693	3.5673793
3628	3.5596673	3661	3.5635997	3694	3.5674969
3629	3.5597870	3662	3.5637183	3695	3.5676144
3630	3.5599066	3663	3.5638369	3696	3.5677320
3631	3.5600262	3664	3.5639555	3697	3.5678494
3632	3.5601458	3665	3.5640740	3698	3.5679669
3633	3.5602654	3666	3.5641925	3699	3.5680843
3634	3.5603849	3667	3.5643109	3700	3.5682017

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
3701	3.5683191	3734	3.5721743	3767	3.5759956
3702	3.5684364	3735	3.5722906	3768	3.5761109
3703	3.5685537	3736	3.5724069	3769	3.5762261
3704	3.5686710	3737	3.5725231	3770	3.5763413
3705	3.5687882	3738	3.5726393	3771	3.5764565
3706	3.5689054	3739	3.5727555	3772	3.5765717
3707	3.5690226	3740	3.5728716	3773	3.5766868
3708	3.5691397	3741	3.5729877	3774	3.5768019
3709	3.5692568	3742	3.5731038	3775	3.5769169
3710	3.5693739	3743	3.5732198	3776	3.5770320
3711	3.5694910	3744	3.5733358	3777	3.5771470
3712	3.5696080	3745	3.5734518	3778	3.5772620
3713	3.5697249	3746	3.5735678	3779	3.5773769
3714	3.5698419	3747	3.5736837	3780	3.5774918
3715	3.5699588	3748	3.5737996	3781	3.5776067
3716	3.5700757	3749	3.5739154	3782	3.5777215
3717	3.5701926	3750	3.5740313	3783	3.5778363
3718	3.5703094	3751	3.5741471	3784	3.5779511
3719	3.5704262	3752	3.5742628	3785	3.5780659
3720	3.5705429	3753	5.5743786	3786	3.5781806
3721	3.5706597	3754	3.5744943	3787	3.5782953
3722	3.5707764	3755	3.5746099	3788	3.5784100
3723	3.5708930	3756	3.5747256	3789	3.5785246
3724	3.5710097	3757	3.5748412	3790	3.5786392
3725	3.5711263	3758	3.5749568	3791	3.5787538
3726	3.5712428	3759	3.5750723	3792	3.5788683
3727	3.5713594	3760	3.5751878	3793	3.5789828
3728	3.5714759	3761	3.5753033	3794	3.5790973
3729	3.5715924	3762	3.5754188	3795	3.5792118
3730	3.5717088	3763	3.5755342	3796	3.5793262
3731	3.5718252	3764	3.5756496	3797	3.5794406
3732	3.5719416	3765	3.5757650	3798	3.5795550
3733	3.5720580	3766	3.5758803	3799	3.5796693
3734	3.5721743	3767	3.5759956	3800	3.5797836

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
3801	3.5798979	3834	3.5836521	3867	3.5873742
3802	3.5800121	3835	3.5837654	3868	3.5874865
3803	3.5801263	3836	3.5838786	3869	3.5875987
3804	3.5802405	3837	3.5839918	3870	3.5877110
3805	3.5803547	3838	3.5841050	3871	3.5878232
3806	3.5804688	3839	3.5842181	3872	3.5879353
3807	3.5805829	3840	3.5843312	3873	3.5880475
3808	3.5806969	3841	3.5844443	3874	3.5881596
3809	3.5808110	3842	3.5845574	3875	3.5882717
3810	3.5809250	3843	3.5846704	3876	3.5883838
3811	3.5810389	3844	3.5847834	3877	3.5884958
3812	3.5811529	3845	3.5848963	3878	3.5886078
3813	3.5812668	3846	3.5850093	3879	3.5887198
3814	3.5813807	3847	3.5851222	3880	3.5888317
3815	3.5814945	3848	3.5852351	3881	3.5889436
3816	3.5816084	3849	3.5853479	3882	3.5890555
3817	3.5817222	3850	3.5854607	3883	3.5891674
3818	3.5818459	3851	3.5855735	3884	3.5892792
3819	3.5819497	3852	3.5856863	3885	3.5893910
3820	3.5820634	3853	3.5857990	3886	3.5895028
3821	3.5821770	3854	3.5859117	3887	3.5896145
3822	3.5822907	3855	3.5860244	3888	3.5896262
3823	3.5824043	3856	3.5861370	3889	3.5898379
3824	3.5825179	3857	3.5862496	3890	3.5899490
3825	3.5826314	3858	3.5863622	3891	3.5900612
3826	3.5827450	3859	3.5864748	3892	3.5901728
3827	3.5828585	3860	3.5865873	3893	3.5902844
3828	3.5829719	3861	3.5866998	3894	3.5903959
3829	3.5830854	3862	3.5868123	3895	3.5905075
3830	3.5831988	3863	3.5869247	3896	3.5906189
3831	3.5833122	3864	3.5870371	3897	3.5907304
3832	3.5834255	3865	3.5871495	3898	3.5908418
3833	3.5835388	3866	3.5872618	3899	3.5909532
3834	3.5836521	3867	3.5873742	3900	3.5910646

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
3901	3.5911759	3934	3.5948344	3967	3.5984622
3902	3.5912873	3935	3.5949447	3968	3.5985717
3903	3.5913985	3936	3.5950551	3969	3.5986811
3904	3.5915098	3937	3.5951654	3970	3.5987905
3905	3.5916210	3938	3.5952757	3971	3.5988999
3906	3.5917322	3939	3.5953860	3972	3.5990092
3907	3.5918434	3940	3.5954962	3973	3.5991186
3908	3.5919546	3941	3.5956064	3974	3.5992279
3909	3.5920657	3942	3.5957166	3975	3.5993371
3910	3.5921768	3943	3.5958268	3976	3.5994464
3911	3.5922878	3944	3.5959369	3977	3.5995556
3912	3.5923988	3945	3.5960470	3978	3.5996648
3913	3.5925098	3946	3.5961571	3979	3.5997739
3914	3.5926208	3947	3.5962671	3980	3.5998831
3915	3.5927318	3948	3.5963771	3981	3.5999922
3916	3.5928427	3949	3.5964871	3982	3.6001013
3917	3.5929536	3950	3.5965971	3983	3.6002103
3918	3.5930644	3951	3.5967070	3984	3.6003193
3919	3.5931753	3952	3.5968169	3985	3.6004283
3920	3.5932861	3953	3.5969268	3986	3.6005373
3921	3.5933968	3954	3.5970367	3987	3.6006462
3922	3.5935076	3955	3.5971465	3988	3.6007551
3923	3.5936183	3956	3.5972563	3989	3.6008640
3924	3.5937290	3957	3.5973660	3990	3.6009729
3925	3.5938397	3958	3.5974758	3991	3.6010817
3926	3.5939503	3959	3.5975855	3992	3.6011905
3927	3.5940609	3960	3.5976952	3993	3.6012993
3928	3.5941715	3961	3.5978048	3994	3.6014080
3929	3.5942820	3962	3.5979145	3995	3.6015168
3930	3.5943925	3963	3.5980341	3996	3.6016255
3931	3.5945030	3964	3.5981336	3997	3.6017341
3932	3.5946135	3965	3.5982432	3998	3.6018428
3933	3.5947239	3966	3.5983527	3999	3.6019504
3934	3.5948344	3967	3.5984622	4000	3.6020600

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
4001	3.6021685	4034	3.6057359	4067	3.6092742
4002	3.6022771	4035	3.6058435	4068	3.6093809
4003	3.6023856	4036	3.6059512	4069	3.6094877
4004	3.6024941	4037	3.6060587	4070	3.6095944
4005	3.6026025	4038	3.6061603	4071	3.6097011
4006	3.6027109	4039	3.6062738	4072	3.6098078
4007	3.6028193	4040	3.6063814	4073	3.6099144
4008	3.6029277	4041	3.6064888	4074	3.6100210
4009	3.6030361	4042	3.6065963	4075	3.6101276
4010	3.6031444	4043	3.6067037	4076	3.6102342
4011	3.6032527	4044	3.6068111	4077	3.6103407
4012	3.6033609	4045	3.6069185	4078	3.6104472
4013	3.6034692	4046	3.6070259	4079	3.6105537
4014	3.6034774	4047	3.6071332	4080	3.6106602
4015	3.6036855	4048	3.6072405	4081	3.6107666
4016	3.6037937	4049	3.6073478	4082	3.6108730
4017	3.6039018	4050	3.6074550	4083	3.6109794
4018	3.6040099	4051	3.6075622	4084	3.6110857
4019	3.6041180	4052	3.6076694	4085	3.6111921
4020	3.6042261	4053	3.6077766	4086	3.6112984
4021	3.6043341	4054	3.6078837	4087	3.6114046
4022	3.6044421	4055	3.6079909	4088	3.6115109
4023	3.6045500	4056	3.6080979	4089	3.6116171
4024	3.6046580	4057	3.6082050	4090	3.6117233
4025	3.6047656	4058	3.6083120	4091	3.6118295
4026	3.6048738	4059	3.6084190	4092	3.6119356
4027	3.6049816	4060	3.6085260	4093	3.6120417
4028	3.6050895	4061	3.6086330	4094	3.6121478
4029	3.6051973	4062	3.6087399	4095	3.6122539
4030	3.6053050	4063	3.6088468	4096	3.6123599
4031	3.6054128	4064	3.6089537	4097	3.6124660
4032	3.6055205	4065	3.6090605	4098	3.6125720
4033	3.6056282	4066	3.6091674	4099	3.6126779
4034	3.6057359	4067	3.6092742	4100	3.6127839

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
4101	3.6128898	4134	3.6163705	4167	3.6198235
4102	3.6129957	4135	3.6164755	4168	3.6199277
4103	3.6131015	4136	3.6165805	4169	3.6200319
4104	3.6132073	4137	3.6166855	4170	3.6201360
4105	3.6133132	4138	3.6167905	4171	3.6202402
4106	3.6134189	4139	3.6168954	4172	3.6203443
4107	3.6135247	4140	3.6170003	4173	3.6204484
4108	3.6136304	4141	3.6171052	4174	3.6205524
4109	3.6137361	4142	3.6172101	4175	3.6206565
4110	3.6138418	4143	3.6173149	4176	3.6207603
4111	3.6139475	4144	3.6174197	4177	3.6208645
4112	3.6140531	4145	3.6175245	4178	3.6209684
4113	3.6141587	4146	3.6176293	4179	3.6210724
4114	3.6142643	4147	3.6177340	4180	3.6211763
4115	3.6143698	4148	3.6178387	4181	3.6212802
4116	3.6144754	4149	3.6179434	4182	3.6213840
4117	3.6145809	4150	3.6180481	4183	3.6214879
4118	3.6146863	4151	3.6181527	4184	3.6215917
4119	3.6147918	4152	3.6182573	4185	3.6216955
4120	3.6148972	4153	3.6183619	4186	3.6217992
4121	3.6150026	4154	3.6184665	4187	3.6219030
4122	3.6151080	4155	3.6185710	4188	3.6220067
4123	3.6152133	4156	3.6186755	4189	3.6221104
4124	3.6153187	4157	3.6187800	4190	3.6222140
4125	3.6154240	4158	3.6188845	4191	3.6223177
4126	3.6155292	4159	3.6189889	4192	3.6224213
4127	3.6156345	4160	3.6190933	4193	3.6225249
4128	3.6157397	4161	3.6191977	4194	3.6226284
4129	3.6158449	4162	3.6193021	4195	3.6227320
4130	3.6159501	1463	3.6194064	4196	3.6228355
4131	3.6160552	4164	3.6195107	4197	3.6229390
4132	3.6161603	4165	3.6196150	4198	3.6230424
4133	3.6162654	4166	3.6197193	4199	3.6231459
4134	3.6163705	4167	3.6198235	4200	3.6232493

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
4201	3.6233527	4234	3.6267509	4267	3.6301226
4202	3.6234560	4235	3.6268534	4268	3.6302244
4203	3.6235594	4236	3.6269559	4269	3.6303262
4204	3.6236627	4237	3.6270585	4270	3.6304279
4205	3.6237660	4238	3.6271610	4271	3.6305296
4206	3.6238693	4239	3.6272634	4272	3.6306312
4207	3.6239725	4240	3.6273659	4273	3.6307329
4208	3.6240757	4241	3.6274683	4274	3.6308345
4209	3.6241789	4242	3.6275707	4275	3.6309361
4210	3.6242821	4243	3.6276730	4276	3.6310377
4211	3.6243852	4244	3.6277754	4277	3.6311392
4212	3.6244884	4245	3.6278777	4278	3.6312408
4213	3.6245915	4246	3.6279800	4279	3.6313423
4214	3.6246945	4247	3.6280823	4280	3.6314438
4215	3.6247976	4248	3.6281845	4281	3.6315452
4216	3.6249006	4249	3.6202867	4282	3.6316467
4217	3.6250036	4250	3.6283889	4283	3.6317481
4218	3.6251066	4251	3.6284911	4284	3.6318495
4219	3.6252095	4252	3.6285933	4285	3.6319508
4220	3.6253124	4253	3.6286954	4286	3.6320522
4221	3.6254153	4254	3.6287975	4287	3.6321535
4222	3.6255182	4255	3.6288996	4288	3.6322548
4223	3.6256211	4256	3.6290016	4289	3.6323560
4224	3.6257239	4257	3.6291036	4290	3.6324573
4225	3.6258267	4258	3.6292057	4291	3.6325585
4226	3.6259295	4259	3.6293076	4292	3.6326597
4227	3.6260322	4260	3.6294096	4293	3.6327609
4228	3.6261350	4261	3.6295115	4294	3.6328620
4229	3.6262377	4262	3.6296134	4295	3.6329632
4230	3.6263404	4263	3.6297153	4296	3.6330643
4231	3.6264430	4264	3.6298172	4297	3.6331653
4232	3.6265457	4265	3.6299190	4298	3.6332664
4233	3.6266483	4266	3.6300208	4299	3.6333674
4234	3.6267509	4267	3.6301226	4300	3.6334685

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
4301	3.6335694	4334	3.6368889	4367	3.6401832
4302	3.6336704	4335	3.6369891	4368	3.6402826
4303	3.6337713	4336	3.6370893	4369	3.6403820
4304	3.6338723	4337	3.6371894	4370	3.6404814
4305	3.6339732	4338	3.6372895	4371	3.6405808
4306	3.6340740	4339	3.6373896	4372	3.6406802
4307	3.6341749	4340	3.6374897	4373	3.6407795
4308	3.6342757	4341	3.6375898	4374	3.6408788
4309	3.6343765	4342	3.6376898	4375	3.6409781
4310	3.6344773	4343	3.6377898	4376	3.6410773
4311	3.6345780	4344	3.6378898	4377	3.6411765
4312	3.6346788	4345	3.6379898	4378	3.6412758
4313	3.6347795	4346	3.6380897	4379	3.6413749
4314	3.6348801	4347	3.6381896	4380	3.6414741
4315	3.6349808	4348	3.6382895	4381	3.6415733
4316	3.6350814	4349	3.6383894	4382	3.6416724
4317	3.6351820	4350	3.6384893	4383	3.6417715
4318	3.6352826	4351	3.6385891	4384	3.6418705
4319	3.6353832	4352	3.6386889	4385	3.6419696
4320	3.6354837	4353	3.6387887	4386	3.6420686
4321	3.6355843	4354	3.6388884	4387	3.6421676
4322	3.6356848	4355	3.6389882	4388	3.6422666
4323	3.6357852	4356	3.6390879	4389	3.6423656
4324	3.6358857	4357	3.6391876	4390	3.6424645
4325	3.6359861	4358	3.6392872	4391	3.6425634
4326	3.6360865	4359	3.6393869	4392	3.6426623
4327	3.6361869	4360	3.6394865	4393	3.6427612
4328	3.6362872	4361	3.6395861	4394	3.6428601
4329	3.6363876	4362	3.6396857	4395	3.6429589
4330	3.6364879	4363	3.6397852	4396	3.6430577
4331	3.6365882	4364	3.6398847	4397	3.6431565
4332	3.6366884	4365	3.6399842	4398	3.6432552
4333	3.6367887	4366	3.6400837	4399	3.6433540
4334	3.6368889	4367	3.6401832	4400	3.6434527

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
4401	3.6435514	4434	3.6467957	4467	3.6500160
4402	3.6436500	4435	3.6468936	4468	3.6501132
4403	3.6437487	4436	3.6469915	4469	3.6502104
4404	3.6438473	4437	3.6470894	4470	3.6503075
4405	3.6439459	4438	3.6471873	4471	3.6504047
4406	3.6440445	4439	3.6472851	4472	3.6505018
4407	3.6441430	4440	3.6473830	4473	3.6505989
4408	3.6442416	4441	3.6474808	4474	3.6506960
4409	3.6443401	4442	3.6475785	4475	3.6507930
4410	3.6444386	4443	3.6476763	4476	3.6508901
4411	3.6445371	4444	3.6477740	4477	3.6509871
4412	3.6446355	4445	3.6478718	4478	3.6510841
4413	3.6447339	4446	3.6479695	4479	3.6511811
4414	3.6448323	4447	3.6480671	4480	3.6512780
4415	3.6449307	4448	3.6481648	4481	3.6513749
4416	3.6450291	4449	3.6482624	4482	3.6514719
4417	3.6451274	4450	3.6483600	4483	3.6515687
4418	3.6452257	4451	3.6484576	4484	3.6516656
4419	3.6453240	4452	3.6485552	4485	3.6517624
4420	3.6454223	4453	3.6486527	4486	3.6518593
4421	3.6455205	4454	3.6487502	4487	3.6519561
4422	3.6456187	4455	3.6488477	4488	3.6520528
4423	3.6457169	4456	3.6489452	4489	3.6521496
4424	3.6458151	4457	3.6490426	4490	3.6522463
4425	3.6459133	4458	3.6491401	4491	3.6523430
4426	3.6460114	4459	3.6492375	4492	3.6524397
4427	3.6461095	4460	3.6493349	4493	3.6525364
4428	3.6462076	4461	3.6494322	4494	3.6526331
4429	3.6463057	4462	3.6495296	4495	3.6527297
4430	3.6464037	4463	3.6496269	4496	3.6528263
4431	3.6465017	4464	3.6497242	4497	3.6529229
4432	3.6465997	4465	3.6498215	4498	3.6530195
4433	3.6466977	4466	3.6499187	4499	3.6531160
4434	3.6467957	4467	3.6500160	4500	3.6532125

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
4501	3.6533090	4534	3.6564815	4567	3.6596310
4502	3.6534055	4535	3.6565773	4568	3.6597261
4503	3.6535019	4536	3.6566730	4569	3.6598212
4504	3.6535984	4537	3.6567688	4570	3.6599162
4505	3.6536948	4538	3.6568645	4571	3.6600112
4506	3.6537912	4539	3.6569602	4572	3.6601062
4507	3.6538876	4540	3.6570559	4573	3.6602012
4508	3.6539839	4541	3.6571515	4574	3.6602962
4509	3.6540802	4542	3.6572471	4575	3.6603911
4510	3.6541765	4543	3.6573427	4576	3.6604860
4511	3.6542728	4544	3.6574383	4577	3.6605809
4512	3.6543691	4545	3.6575339	4578	3.6606758
4513	3.6544653	4546	3.6576294	4579	3.6607706
4514	3.6545616	4547	3.6577250	4580	3.6608655
4515	3.6546578	4548	3.6578205	4581	3.6609603
4516	3.6547539	4549	3.6579159	4582	3.6610551
4517	3.6548501	4550	3.6580114	4583	3.6611499
4518	3.6549462	4551	3.6581068	4584	3.6612446
4519	3.6550423	4552	3.6582023	4585	3.6613393
4520	3.6551384	4553	3.6582976	4586	3.6614340
4521	3.6552345	4554	3.6583930	4587	3.6615287
4522	3.6553306	4555	3.6584884	4588	3.6616234
4523	3.6554266	4556	3.6585837	4589	3.6617181
4524	3.6555226	4557	3.6586790	4590	3.6618127
4525	3.6556186	4558	3.6487743	4591	3.6619073
4526	3.6557145	4559	3.6588696	4592	3.6620019
4527	3.6558105	4560	3.6589648	4593	3.6620964
4528	3.6559064	4561	3.6590601	4594	3.6621910
4529	3.6560023	4562	3.6591553	4595	3.6622855
4530	3.6560982	4563	3.6592505	4596	3.6623800
4531	3.6561941	4564	3.6593456	4597	3.6624745
4532	3.6562899	4565	3.6594408	4598	3.6625690
4533	3.6563857	4566	3.6595359	4599	3.6626634
4534	3.6564815	4567	3.6596310	4600	3.6627578

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
4601	3.6628522	4634	3.6659560	4667	3.6690378
4602	3.6629466	4635	3.6660497	4668	3.6691308
4603	3.6630410	4636	3.6661434	4669	3.6692239
4604	3.6631353	4637	3.6662371	4670	3.6693169
4605	3.6632296	4638	3.6663307	4671	3.6694099
4606	3.6633239	4639	3.6664244	4672	3.6695028
4607	3.6634182	4640	3.6665180	4673	3.6695958
4608	3.6635125	4641	3.6666116	4674	3.6696887
4609	3.6636067	4642	3.6667051	4675	3.6697816
4610	3.6637009	4643	3.6667987	4676	3.6698745
4611	3.6637951	4644	3.6668922	4677	3.6699674
4612	3.6638893	4645	3.6669857	4678	3.6700602
4613	3.6639835	4646	3.6670792	4679	3.6701530
4614	3.6640776	4647	3.6671727	4680	3.6702459
4615	3.6641717	4648	3.6672661	4681	3.6703386
4616	3.6642658	4649	3.6673595	4682	3.6704314
4617	3.6643599	4650	3.6674530	4683	3.6705242
4618	3.6644539	4651	3.6675463	4684	3.6706169
4619	3.6645480	4652	3.6676397	4685	3.6707096
4620	3.6646420	4653	3.6677331	4686	3.6708023
4621	3.6647360	4654	3.6678264	4687	3.6708950
4622	3.6648299	4655	3.6679197	4688	3.6709876
4623	3.6649239	4656	3.6680130	4689	3.6710802
4624	3.6650178	4657	3.6681062	4690	3.6711728
4625	3.6651117	4658	3.6681995	4691	3.6712654
4626	3.6652056	4659	3.6682927	4692	3.6713580
4627	3.6652995	4660	3.6683859	4693	3.6714506
4628	3.6653933	4661	3.6684791	4694	3.6715431
4629	3.6654872	4662	3.6985723	4695	3.6716356
4630	3.6655810	4663	3.6986654	4696	3.6717281
4631	3.6656748	4664	3.6687585	4697	3.6718206
4632	3.6657685	4665	3.6688516	4698	3.6719130
4633	3.6658623	4666	3.6689447	4699	3.6720054
4634	3.6659560	4667	3.6690378	4709	3.6720979

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
4701	3.6721903	4734	3.6752283	4767	3.6782452
4702	3.6722826	4735	3.6753200	4768	3.6783362
4703	3.6723750	4736	3.6754117	4769	3.6784273
4704	3.6724673	4737	3.6755051	4770	3.6785184
4705	3.6725596	4738	3.6755951	4771	3.6786094
4706	3.6726519	4739	3.6756867	4772	3.6787004
4707	3.6727442	4740	3.6757782	4773	3.6787914
4708	3.6728365	4741	3.6758700	4774	3.6788824
4709	3.6729287	4742	3.6759615	4775	3.6789734
4710	3.6730209	4743	3.6760531	4776	3.6790643
4711	3.6731131	4744	3.6761447	4777	3.6791552
4712	3.6732053	4745	3.6762362	4778	3.6792461
4713	3.6732974	4746	3.6763277	4779	3.6793370
4714	3.6733896	4747	3.6764192	4780	3.6794279
4715	3.6734817	4748	3.6765107	4781	3.6795187
4716	3.6735738	4749	3.6766021	4782	3.6796096
4717	3.6736659	4750	3.6766936	4783	3.6797004
4718	3.6737579	4751	3.6767850	4784	3.6797912
4719	3.6738500	4752	3.6768764	4785	3.6798819
4720	3.6739420	4753	3.6769678	4786	3.6799727
4721	3.6740340	4754	3.6770592	4787	3.6800634
4722	3.6741260	4755	3.6771505	4788	3.6801541
4723	3.6742179	4756	3.6772418	4789	3.6802448
4724	3.6743099	4757	3.6773332	4790	3.6803355
4725	3.6744018	4758	3.6774244	4791	3.6804262
4726	3.6744937	4759	3.6775157	4792	3.6805168
4727	3.6745856	4760	3.6776069	4793	3.6806074
4728	3.6746775	4761	3.6776982	4794	3.6806980
4729	3.6747693	4762	3.6777894	4795	3.6807886
4730	3.6748611	4763	3.6778806	4796	3.6808792
4731	3.6749529	4764	3.6779718	4797	3.6809697
4732	3.6750447	4765	3.6780629	4798	3.6810602
4733	3.6751365	4766	3.6781540	4799	3.6811507
4734	3.6752283	4767	3.6782452	4800	3.6812412

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
4801	3.6813317	4834	3.6843066	4867	3.6872613
4802	3.6814222	4835	3.6843965	4868	3.6873506
4803	3.6815126	4836	3.6844863	4869	3.6874398
4804	3.6816030	4837	3.6845761	4870	3.6875290
4805	3.6816934	4838	3.6846659	4871	3.6876181
4806	3.6817838	4839	3.6847556	4872	3.6877073
4807	3.6818741	4840	3.6848454	4873	3.6877964
4808	3.6819645	4841	3.6849351	4874	3.6878855
4809	3.6820548	4842	3.6850248	4875	3.6879746
4810	3.6821451	4843	3.6851145	4876	3.6880637
4811	3.6822354	4844	3.6852041	4877	3.6881328
4812	3.6823256	4845	3.6852938	4878	3.6881518
4813	3.6824159	4846	3.6853834	4879	3.6883308
4814	3.6825061	4847	3.6854730	4880	3.6884198
4815	3.6825963	4848	3.6855626	4881	3.6885088
4816	3.6826865	4849	3.6856522	4882	3.6885978
4817	3.6827766	4850	3.6857417	4883	3.6886867
4818	3.6828668	4851	3.6858313	4884	3.6887756
4819	3.6826569	4852	3.6859208	4885	3.6888646
4820	3.6830470	4853	3.6860103	4886	3.6889535
4821	3.6831371	4854	3.6860998	4887	3.6890423
4822	3.6832272	4855	3.6861892	4888	3.6891312
4823	3.6833163	4856	3.6862787	4889	3.6892200
4824	3.6834073	4857	3.6863681	4890	3.6893089
4825	3.6834973	4858	3.6864575	4891	3.6893977
4826	3.6835873	4859	3.6865469	4892	3.6894864
4827	3.6836773	4860	3.6866363	4893	3.6895752
4828	3.6837673	4861	3.6867256	4894	3.6896640
4829	3.6838572	4862	3.6868149	4895	3.6897527
4830	3.6839471	4863	3.6865043	4896	3.6898414
4831	3.6840370	4864	3.6869636	4897	3.6899301
4832	3.6841269	4865	3.6870828	4898	3.6900188
4833	3.6842168	4866	3.6871721	4899	3.6901074
4834	3.6843066	4867	3.6872613	4900	3.6901961

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
4901	3.6902847	4934	3.6931991	4967	3.6960942
4902	3.6903733	4935	3.6932872	4968	3.6961816
4903	3.6904619	4936	3.6933752	4969	3.6962690
4904	3.6905504	4937	3.6934631	4970	3.6963564
4905	3.6906390	4938	3.6935511	4971	3.6964438
4906	3.6907275	4939	3.6936390	4972	3.6965311
4907	3.6908161	4940	3.6937269	4973	3.6966185
4908	3.6909046	4941	3.6938148	4974	3.6967058
4909	3.6909930	4942	3.6939127	4975	3.6967931
4910	3.6910815	4943	3.6939906	4976	3.6968804
4911	3.6911699	4944	3.6940785	4977	3.6969676
4912	3.6912584	4945	3.6941663	4978	3.6970549
4913	3.6913468	4946	3.6942541	4979	3.6971421
4914	3.6914352	4947	3.6943419	4980	3.6972293
4915	3.6915235	4948	3.6944297	4981	3.6973165
4916	3.6916119	4949	3.6945174	4982	3.6974037
4917	3.6917002	4950	3.6946052	4983	3.6974909
4918	3.6917885	4951	3.6946929	4984	3.6975780
4919	3.6918768	4952	3.6947806	4985	3.6976652
4920	3.6919651	4953	3.6948683	4986	3.6977523
4921	3.6920534	4954	3.6949560	4987	3.6978394
4922	3.6921416	4955	3.6950437	4988	3.6979264
4923	3.6922298	4956	3.6951313	4989	3.6980135
4924	3.6923180	4957	3.6952189	4990	3.6981005
4925	3.6924062	4958	3.6953065	4991	3.6981876
4926	3.6924944	4959	3.6953941	4992	3.6982746
5927	3.6925826	4960	3.6954817	4993	3.6983616
4928	3.6926707	4961	3.6955692	4994	3.6984485
4929	3.6927588	4962	3.6956568	4995	3.6985355
4930	3.6928469	4963	3.6957443	4996	3.6986224
4931	3.6929350	4964	3.6958318	4997	3.6987093
4932	3.6930231	4965	3.6959193	4998	3.6987963
4933	3.6931111	4966	3.6960067	4999	3.6988831
4934	3.6931991	4967	3.6960942	5000	3.6989700

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
5001	3.6990569	5034	3.7019132	5067	3.7047509
5002	3.6991437	5035	3.7019995	5068	3.7048366
5003	3.6992305	5036	3.7020857	5069	3.7049223
5004	3.6993173	5037	3.7021719	5070	3.7050080
5005	3.6994041	5038	3.7022582	5071	3.7050936
5006	3.6994908	5039	3.7023444	5072	3.7051792
5007	3.6995776	5040	3.7024305	5073	3.7052649
5008	3.6996643	5041	3.7025167	5074	3.7053505
5009	3.6997511	5042	3.7026028	5075	3.7054360
5010	3.6998377	5043	3.7026890	5076	3.7055216
5011	3.6999244	5044	3.7027751	5077	3.7056072
5012	3.7000111	5045	3.7028612	5078	3.7056927
5013	3.7000977	5046	3.7029473	5079	3.7057782
5014	3.7001843	5047	3.7030333	5080	3.7058637
5015	3.7002709	5048	3.7031193	5081	3.7059492
5016	3.7003575	5049	3.7032054	5082	3.7060348
5017	3.7004441	5050	3.7032914	5083	3.7061202
5018	3.7005307	5051	3.7033774	5084	3.7062055
5019	3.7006172	5052	3.7034633	5085	3.7062910
5020	3.7007037	5053	3.7035493	5086	3.7063764
5021	3.7007902	5054	3.7036352	5087	3.7064617
5022	3.7008767	5055	3.7037212	5088	3.7065471
5023	3.7009632	5056	3.7038071	5089	3.7066324
5024	3.7010496	5057	3.7038929	5090	3.7067178
5025	3.7011361	5058	3.7039788	5091	3.7068031
5026	3.7012225	5059	3.7040647	5092	3.7068884
5027	3.7013089	5060	3.7041505	5093	3.7069737
5028	3.7013953	5061	3.7042363	5094	3.7070589
5029	3.7014816	5062	3.7043221	5095	3.7071442
5030	3.7015680	5063	3.7044079	5096	3.7072294
5031	3.7016543	5064	3.7044937	5097	3.7073146
5032	3.7017406	5065	3.7045794	5098	3.7073998
5033	3.7018269	5066	3.7046652	5099	3.7074850
5034	3.7019132	5067	3.7047509	5100	3.7075702

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
5101	3.7076553	5134	3.7104559	5167	3.7132385
5102	3.7077405	5135	3.7105404	5168	3.7133225
5103	3.7078256	5136	3.7106250	5169	3.7134065
5104	3.7079107	5137	3.7107096	5170	3.7134905
5105	3.7079957	5138	3.7107941	5171	3.7135745
5106	3.7080808	5139	3.7108786	5172	3.7136585
5107	3.7081659	5140	3.7109631	5173	3.7137425
5108	3.7082509	5141	3.7110476	5174	3.7138264
5109	3.7083359	5142	3.7111321	5175	3.7139104
5110	3.7084209	5143	3.7112165	5176	3.7139943
5111	3.7085059	5144	3.7113010	5177	3.7140782
5112	3.7085908	5145	3.7113854	5178	3.7141620
5113	3.7086758	5146	3.7114698	5179	3.7142459
5114	3.7087607	5147	3.7115542	5180	3.7143298
5115	3.7088456	5148	3.7116385	5181	3.7144136
5116	3.7089305	5149	3.7117229	5182	3.7144974
5117	3.7090154	5150	3.7118072	5183	3.7145812
5118	3.7091003	5151	3.7118915	5184	3.7146650
5119	3.7091851	5152	3.7119759	5185	3.7147488
5120	3.7092700	5153	3.7110601	5186	3.7148325
5121	3.7093548	5154	3.7121444	5187	3.7149162
5122	3.7094396	5155	3.7122287	5188	3.7150000
5123	3.7095244	5156	3.7123129	5189	3.7150837
5124	3.7096091	5157	3.7123971	5190	3.7151674
5125	3.7096939	5158	3.7124813	5191	3.7152510
5126	3.7097786	5159	3.7125655	5192	3.7153347
5127	3.7098633	5160	3.7126497	5193	3.7154183
5128	3.7099480	5161	3.7127339	5194	3.7155019
5129	3.7100327	5162	3.7128180	5195	3.7155856
5130	3.7101174	5163	3.7129021	5196	3.7156691
5131	3.7102020	5164	3.7129802	5197	3.7157527
5132	3.7102866	5165	3.7130703	5198	3.7158363
5133	3.7103713	5166	3.7131544	5199	3.7159198
5134	3.7104559	5167	3.7132385	5200	3.7160033

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
5201	3.7160869	5234	3.7188337	5267	3.7215633
5202	3.7161703	5235	3.7189167	5268	3.7216458
5203	3.7162538	5236	3.7189966	5269	3.7217282
5204	3.7163373	5237	3.7190826	5270	3.7218106
5205	3.7164207	5238	3.7191655	5271	3.7218930
5206	3.7165042	5239	3.7192484	5272	3.7219754
5207	3.7165876	5240	3.7193313	5273	3.7220578
5208	3.7166710	5241	3.7194142	5274	3.7221401
5209	3.7167544	5242	3.7194970	5275	3.7222225
5210	3.7168377	5243	3.7195799	5276	3.7223048
5211	3.7169211	5244	3.7196627	5277	3.7223871
5212	3.7170044	5245	3.7197455	5278	3.7224694
5213	3.7170877	5246	3.7198283	5279	3.7225517
5214	3.7171710	5247	3.7199111	5280	3.7226339
5215	3.7172543	5248	3.7199938	5281	3.7227162
5216	3.7173376	5249	3.7200766	5282	3.7227984
5217	3.7174208	5250	3.7201593	5283	3.7228806
5218	3.7175041	5251	3.7202420	5284	3.7229628
5219	3.7175873	5252	3.7203247	5285	3.7230450
5220	3.7176705	5253	3.7204074	5286	3.7231272
5221	3.7177537	5254	3.7204901	5287	3.7232093
5222	3.7178369	5255	3.7205727	5288	3.7232914
5223	3.7179200	5256	3.7206554	5289	3.7233736
5224	3.7180032	5257	3.7207380	5290	3.7234557
5225	3.7180863	5258	3.7208206	5291	3.7235378
5226	3.7181694	5259	3.7209032	5292	3.7236198
5227	3.7182525	5260	3.7209857	5293	3.7237019
5228	3.7183356	5261	3.7210683	5294	3.7237839
5229	3.7184186	5262	3.7211508	5295	3.7238660
5230	3.7185017	5263	3.7212334	5296	3.7239480
5231	3.7185847	5264	3.7213159	5297	3.7240300
5232	3.7186677	5265	3.7213984	5298	3.7241120
5233	3.7187507	5266	3.7214809	5299	3.7241939
5234	3.7188337	5267	3.7215633	5300	3.7242759

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
5301	3.7243578	5334	3.7270530	5367	3.7297316
5302	3.7244397	5335	3.7271344	5368	3.7298125
5303	3.7245216	5336	3.7272158	5369	3.7298934
5304	3.7246035	5337	3.7272972	5370	3.7299743
5305	3.7246854	5338	3.7273786	5371	3.7300551
5306	3.7247672	5339	3.7274599	5372	3.7301360
5307	3.7248491	5340	3.7275413	5373	3.7302168
5308	3.7249309	5341	3.7276226	5374	3.7302977
5309	3.7250127	5342	3.7277039	5375	3.7303785
5310	3.7250945	5343	3.7277852	5376	3.7304593
5311	3.7251763	5344	3.7278664	5377	3.7305400
5312	3.7252581	5345	3.7279477	5378	3.7306208
5313	3.7253398	5346	3.7280290	5379	3.7307015
5314	3.7254215	5347	3.7281102	5380	3.7307823
5315	3.7255033	5348	3.7281914	5381	3.7308630
5316	3.7255850	5349	3.7282726	5382	3.7309437
5317	3.7256667	5350	3.7283538	5383	3.7310244
5318	3.7257483	5351	3.7284349	5384	3.7311051
5319	3.7258300	5352	3.7285161	5385	3.7311857
5320	3.7259116	5353	3.7285972	5386	3.7312663
5321	3.7259933	5354	3.7286784	5387	3.7313470
5322	3.7260749	5355	3.7287595	5388	3.7314276
5323	3.7261565	5356	3.7288406	5389	3.7315082
5324	3.7262380	5357	3.7289216	5390	3.7315888
5325	3.7263196	5358	3.7290027	5391	3.7316693
5326	3.7264012	5359	3.7290838	5392	3.7317499
5327	3.7264827	5360	3.7291648	5393	3.7318304
5328	3.7265642	5361	3.7292458	5394	3.7319109
5329	3.7266457	5362	3.7293268	5395	3.7319914
5330	3.7267272	5363	3.7294078	5396	3.7320719
5331	3.7268087	5364	3.7294888	5397	3.7321524
5332	3.7268901	5365	3.7295697	5398	3.7322329
5333	3.7269716	5366	3.7296507	5399	3.7323133
5334	3.7270530	5367	3.7297316	5400	3.7323938

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
5401	3.7324742	5434	3.7351196	5467	3.7377491
5402	3.7325546	5435	3.7351995	5468	3.7378285
5403	3.7326350	5436	3.7352794	5469	3.7379079
5404	3.7327153	5437	3.7353593	5470	3.7379873
5405	3.7327957	5438	3.7354392	5471	3.7380667
5406	3.7328760	5439	3.7355191	5472	3.7381461
5407	3.7329564	5440	3.7355989	5473	3.7382254
5408	3.7330367	5441	3.7356787	5474	3.7383048
5409	3.7331170	5442	3.7357585	5475	3.7383841
5410	3.7331973	5443	3.7358383	5476	3.7384634
5411	3.7332775	5444	3.7359181	5477	3.7385427
5412	3.7333578	5445	3.7359979	5478	3.7386220
5413	3.7334380	5446	3.7360776	5479	3.7387013
5414	3.7335182	5447	3.7361574	5480	3.7387806
5415	3.7335985	5448	3.7362371	5481	3.7388598
5416	3.7336787	5449	3.7363168	5482	3.7389390
5417	3.7337588	5450	3.7363965	5483	3.7390182
5418	3.7338390	5451	3.7364762	5484	3.7390974
5419	3.7339191	5452	3.7365558	5485	3.7391766
5420	3.7339993	5453	3.7366355	5486	3.7392558
5421	3.7340794	5454	3.7367151	5487	3.7393350
5422	3.7341595	5455	3.7367948	5488	3.7394141
5423	3.7342396	5456	3.7368744	5489	3.7394932
5424	3.7343197	5457	3.7369540	5490	3.7395723
5425	3.7343997	5458	3.7370335	5491	3.7396514
5426	3.7344798	5459	3.7371131	5492	3.7397305
5427	3.7345598	5460	3.7371926	5493	3.7398096
5428	3.7346398	5461	3.7372722	5494	3.7398886
5429	3.7347198	5462	3.7373517	5495	3.7399677
5430	3.7347998	5463	3.7374312	5496	3.7400467
5431	3.7348798	5464	3.7375107	5497	3.7401257
5432	3.7349598	5465	3.7375902	5498	3.7402047
5433	3.7350397	5466	3.7376696	5499	3.7403837
5434	3.7351196	5467	3.7377491	5500	3.7403627

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
5501	3.7404416	5534	3.7430392	5567	3.7456212
5502	3.7405206	5535	3.7431176	5568	3.7456992
5503	3.7405995	5536	3.7431961	5569	3.7457772
5504	3.7406784	5537	3.7432745	5570	3.7458552
5505	3.7407573	5538	3.7433530	5571	3.7459332
5506	3.7408362	5539	3.7434314	5572	3.7460111
5507	3.7409151	5540	3.7435098	5573	3.7460890
5508	3.7409939	5541	3.7435881	5574	3.7461670
5509	3.7410728	5542	3.7436665	5575	3.7462449
5510	3.7411516	5543	3.7437449	5576	3.7463228
5511	3.7412304	5544	3.7438232	5577	3.7464006
5512	3.7413092	5545	3.7439015	5578	3.7464785
5513	3.7413880	5546	3.7439799	5579	3.7465564
5514	3.7414668	5547	3.7440582	5580	3.7466342
5515	3.7415455	5548	3.7441365	5581	3.7467120
5516	3.7416243	5549	3.7442147	5582	3.7467898
5517	3.7417030	5550	3.7442930	5583	3.7468676
5518	3.7417817	5551	3.7443712	5584	3.7469454
5519	3.7418604	5552	3.7444495	5585	3.7470232
5520	3.7419391	5553	3.7445277	5586	3.7471009
5521	3.7420177	5554	3.7446059	5587	3.7471787
5522	3.7420964	5555	3.7446841	5588	3.7472564
5523	3.7421750	5556	3.7447622	5589	3.7473341
5524	3.7422537	5557	3.7448404	5590	3.7474118
5525	3.7423323	5558	3.7449185	5591	3.7474895
5526	3.7424109	5559	3.7449967	5592	3.7475672
5527	3.7424895	5560	3.7450748	5593	3.7476448
5528	3.7425680	5561	3.7451529	5594	3.7477225
5529	3.7426466	5562	3.7452310	5595	3.7478001
5530	3.7427251	5563	3.7453091	5596	3.7478777
5531	3.7428037	5564	3.7453871	5597	3.7479553
5532	3.7428822	5565	3.7454652	5598	3.7480329
5533	3.7429607	5566	3.7455432	5599	3.7481105
5534	3.7430392	5567	3.7456212	5600	3.7481880

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
5601	3.7482656	5634	3.7508168	5667	3.7533532
5602	3.7483431	5635	3.7508939	5668	3.7534298
5603	3.7484206	5636	3.7509710	5669	3.7535065
5604	3.7484981	5637	3.7510480	5670	3.7535831
5605	3.7485756	5638	3.7511251	5671	3.7536596
5606	3.7486531	5639	3.7512021	5672	3.7537362
5607	3.7487306	5640	3.7512791	5673	3.7538128
5608	3.7488080	5641	3.7513561	5674	3.7538893
5609	3.7488854	5642	3.7514331	5675	3.7539659
5610	3.7489629	5643	3.7515100	5676	3.7540424
5611	3.7490403	5644	3.7515870	5677	3.7541189
5612	3.7491177	5645	3.7516639	5678	3.7541954
5613	3.7491950	5646	3.7517409	5679	3.7542719
5614	3.7492724	5647	3.7518178	5680	3.7543483
5615	3.7493497	5648	3.7518947	5681	3.7544248
5616	3.7494271	5649	3.7519716	5682	3.7545012
5617	3.7495044	5650	3.7520484	5683	3.7545777
5618	3.7495817	5651	3.7521253	5684	3.7546541
5619	3.7496590	5652	3.7522022	5685	3.7547305
5620	3.7497363	5653	3.7522790	5686	3.7548069
5621	3.7498136	5654	3.7523558	5687	3.7548832
5622	3.7498908	5655	3.7524326	5688	3.7549596
5623	3.7499681	5656	3.7525094	5689	3.7550359
5624	3.7500453	5657	3.7525862	5690	3.7551123
5625	3.7501225	5658	3.7526629	5691	3.7551886
5626	3.7501997	5659	3.7527397	5692	3.7552646
5627	3.7502769	5660	3.7528164	5693	3.7553412
5628	3.7503541	5661	3.7528932	5694	3.7554175
5629	3.7504312	5662	3.7529699	5695	3.7554937
5630	3.7505084	5663	3.7530466	5696	3.7555700
5631	3.7505855	5664	3.7531232	5697	3.7556462
5632	3.7506626	5665	3.7531999	5698	3.7557224
5633	3.7507398	5666	3.7532766	5699	3.7557987
5634	3.7508168	5667	3.7533532	5700	3.7558749

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
5701	3.7559510	5734	3.7584577	5767	3.7609500
5702	3.7560272	5735	3.7585334	5768	3.7610253
5703	3.7561034	5736	3.7586091	5769	3.7611005
5704	3.7561795	5737	3.7586848	5770	3.7611758
5705	3.7562556	5738	3.7587605	5771	3.7612511
5706	3.7563318	5739	3.7588362	5772	3.7613263
5707	3.7564079	5740	3.7589119	5773	3.7614016
5708	3.7564840	5741	3.7589875	5774	3.7614768
5709	3.7565600	5742	3.7590622	5775	3.7615520
5710	3.7566361	5743	3.7591[illegible]88	5776	3.7616272
5711	3.7567122	5744	3.7592144	5777	3.7617024
5712	3.7567882	5745	3.7592900	5778	3.7617775
5713	3.7568642	5746	3.7593656	5779	3.7618527
5714	3.7569402	5747	3.7594412	5780	3.7619278
5715	3.7570162	5748	3.7595168	5781	3.7620030
5716	3.7570922	5749	3.7595923	5782	3.7620781
5717	3.7571682	5750	3.7596678	5783	3.7621532
5718	3.7572441	5751	3.7597434	5784	3.7622283
5719	3.7573201	5752	3.7598189	5785	3.7623034
5720	3.7573960	5753	5.7598944	5786	3.7623784
5721	3.7574719	5754	3.7599699	5787	3.7624535
5722	3.7575479	5755	3.7600453	5788	3.7625285
5723	3.7576237	5756	3.7601208	5789	3.7626035
5724	3.7576996	5757	3.7601962	5790	3.7626786
5725	3.7577755	5758	3.7602717	5791	3.7627536
5726	3.7578513	5759	3.7603471	5792	3.7628286
5727	3.7579272	5760	3.7604225	5793	3.7629035
5728	3.7580030	5761	3.7604979	5794	3.7629785
5729	3.7580788	5762	3.7605733	5795	3.7630534
5730	3.7581546	5763	3.7606486	5796	3.7631284
5731	3.7582304	5764	3.7607240	5797	3.7632033
5732	3.7583062	5765	3.7607993	5798	3.7632782
5733	3.7583819	5766	3.7608746	5799	3.7633531
5734	3.7584577	5767	3.7609500	5800	3.7634280

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
5801	3.7635029	5834	3.7659664	5867	3.7684161
5802	3.7635777	5835	3.7660409	5868	3.7684901
5803	3.7636526	5836	3.7661153	5869	3.7685641
5804	3.7637274	5837	3.7661897	5870	3.7686381
5805	3.7638022	5838	3.7662641	5871	3.7687121
5806	3.7638770	5839	3.7663385	5872	3.7687860
5807	3.7639518	5840	3.7664128	5873	3.7688600
5808	3.7640266	5841	3.7664872	5874	3.7689339
5809	3.7641014	3842	3.7665616	5875	3.7690079
5810	3.7641761	5843	3.7666359	5876	3.7690818
5811	3.7642509	5844	3.7667102	5877	3.7691557
5812	3.7643256	5845	3.7667845	5878	3.7692296
5813	3.7644003	5846	3.7668588	5879	3.7693035
5814	3.7644750	5847	3.7669331	5880	3.7693773
5815	3.7645497	5848	3.7670074	5881	3.7694512
5816	3.7646244	5849	3.7670816	5882	3.7695250
5817	3.7646991	5850	3.7671559	5883	3.7695988
5818	3.7647737	5851	3.7672301	5884	3.7696727
5819	3.7648484	5852	3.7673043	5885	3.7697465
5820	3.7649230	5853	3.7673785	5886	3.7698203
5821	3.7649976	5854	3.7674527	5887	3.7698940
5822	3.7650722	5855	3.7675269	5888	3.7699678
5823	3.7651468	5856	3.7676011	5889	3.7700416
5824	3.7652214	5857	3.7676752	5890	3.7701153
5825	3.7652959	5858	3.7677494	5891	3.7701890
5826	3.7653705	5859	3.7678235	5892	3.7702627
5827	3.7654450	5860	3.7678976	5893	3.7703364
5828	3.7655195	5861	3.7679717	5894	3.7704101
5829	3.7655941	5862	3.7680458	5895	3.7704838
5830	3.7656686	5863	3.7681199	5896	3.7705575
5831	3.7657430	5864	3.7681940	5897	3.7706311
5832	3.7658175	5865	3.7682680	5898	3.7707048
5833	3.7658920	5866	3.7683421	5899	3.7707784
5834	3.7659664	5867	3.7684161	5900	3.7708520

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
5901	3.7709256	5934	3.7733475	5967	3.7757560
5902	3.7709992	5935	3.7734207	5968	3.7758288
5903	3.7710728	5936	3.7734939	5969	3.7759016
5904	3.7711463	5937	3.7735670	5970	3.7759743
5905	3.7712199	5938	3.7736402	5971	3.7760471
5906	3.7712934	5939	3.7737133	5972	3.7761198
5907	3.7713670	5940	3.7737864	5973	3.7761925
5908	3.7714405	5941	3.7738596	5974	3.7762652
5909	3.7715140	5942	3.7739326	5975	3.7763379
5910	3.7715875	5943	3.7740057	5976	3.7764106
5911	3.7716610	5944	3.7740788	5977	3.7764833
5912	3.7717344	5945	3.7741519	5978	3.7765559
5913	3.7718079	5946	3.7742249	5979	3.7766286
5914	3.7718813	5947	3.7742979	5980	3.7767012
5915	3.7719547	5948	3.7743710	5981	3.7767738
5916	3.7720282	5949	3.7744440	5982	3.7768464
5917	3.7721016	5950	3.7745170	5983	3.7769190
5918	3.7721750	5951	3.7745899	5984	3.7769916
5919	3.7722483	5952	3.7746629	5985	3.7770642
5920	3.7723217	5953	3.7747359	5986	3.7771367
5921	3.7723951	5954	3.7748088	5987	3.7772093
5922	3.7724684	5955	3.7748818	5988	3.7772818
5923	3.7725417	5956	3.7749547	5989	3.7773543
5924	3.7726150	5957	3.7750276	5990	3.7774268
5925	3.7726884	5958	3.7751005	5991	3.7774993
5926	3.7727616	5959	3.7751734	5992	3.7775718
5927	3.7728349	5960	3.7752463	5993	3.7776443
5928	3.7729082	5961	3.7753191	5994	3.7777167
5929	3.7729814	5962	3.7753920	5995	3.7777892
5930	3.7730547	5963	3.7754648	5996	3.7778616
5931	3.7731279	5964	3.7755376	5997	3.7779340
5932	3.7732011	5965	3.7756104	5998	3.7780065
5933	3.7732743	5966	3.7756832	5999	3.7780789
5934	3.7733475	5967	3.7757560	6000	3.7781512

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6001	3.7782236	6034	3.7806053	6067	3.7829740
6002	3.7782960	6035	3.7806773	6068	3.7830456
6003	3.7783683	6036	3.7807492	6069	3.7831171
6004	3.7784407	6037	3.7808212	6070	3.7831887
6005	3.7785130	6038	3.7808931	6071	3.7832602
6006	3.7785853	6039	3.7809650	6072	3.7833318
6007	3.7786576	6040	3.7810369	6073	3.7834033
6008	3.7787299	6041	3.7811088	6074	3.7834748
6009	3.7788022	6042	3.7811807	6075	3.7835463
6010	3.7788745	6043	3.7812526	6076	3.7836178
6011	3.7789467	6044	3.7813245	6077	3.7836892
6012	3.7790190	6045	3.7813963	6078	3.7837607
6013	3.7790912	6046	3.7814681	6079	3.7838321
6014	3.7791634	6047	3.7815400	6080	3.7839036
6015	3.7792356	6048	3.7816118	6081	3.7839750
6016	3.7793078	6049	3.7816836	6082	3.7840464
6017	3.7793800	6050	3.7817554	6083	3.7841178
6018	3.7794522	6051	3.7818272	6084	3.7841892
6019	3.7795243	6052	3.7818989	6085	3.7842606
6020	3.7795965	6053	3.7819707	6086	3.7843319
6021	3.7796686	6054	3.7820424	6087	3.7844033
6022	3.7797408	6055	3.7821141	6088	3.7844746
6023	3.7798129	6056	3.7821859	6089	3.7845460
6024	3.7798850	6057	3.7822576	6090	3.7846173
6025	3.7799571	6058	3.7823293	6091	3.7846886
6026	3.7800291	6059	3.7824010	6092	3.7847599
6027	3.7801012	6060	3.7824726	6093	3.7848312
6028	3.7801732	6061	3.7825443	6094	3.7849024
6029	3.7802453	6062	3.7826159	6095	3.7849737
6030	3.7803173	6063	3.7826876	6096	3.7850450
6031	3.7803893	6064	3.7827592	6097	3.7851162
6032	3.7804613	6065	3.7828308	6098	3.7851874
6033	3.7805333	6066	3.7829024	6099	3.7852586
6034	3.7806053	6067	3.7829740	6100	3.7853298

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6101	3.7854010	6134	3.7877438	6167	3.7900739
6102	3.7854722	6135	3.7878146	6168	3.7901444
6103	3.7855434	6136	3.7878853	6169	3.7902148
6104	3.7856145	6137	3.7879561	6170	3.7902852
6105	3.7856857	6138	3.7880369	6171	3.7903555
6106	3.7857568	6139	3.7880976	6172	3.7904259
6107	3.7858279	6140	3.7881684	6173	3.7904963
6108	3.7858990	6241	3.7882391	6174	3.7905666
6109	3.7859701	6142	3.7883098	6175	3.7906370
6110	3.7860412	6143	3.7883805	6176	3.7907073
6111	3.7861123	6144	3.7884512	6177	3.7907776
6112	3.7861833	6145	3.7885219	6178	3.7908479
6113	3.7862544	6146	3.7885926	6179	3.7909182
6114	3.7863254	6147	3.7886632	6180	3.7909885
6115	3.7863965	6148	3.7887339	6181	3.7910587
6116	3.7864675	6149	3.7888045	6182	3.7911290
6117	3.7865385	6150	3.7888751	6183	3.7911992
6118	3.7866095	6151	3.7889457	6184	3.7912695
6119	3.7866805	6152	3.7890163	6185	3.7913397
6120	3.7867514	6153	3.7890869	6186	3.7914099
6121	3.7868224	6154	3.7891575	6187	3.7914801
6122	3.7868933	6155	3.7892281	6188	3.7915503
6123	3.7869643	6156	3.7892986	6189	3.7916205
6124	3.7870352	6157	3.7893691	6190	3.7916906
6125	3.7871061	6158	3.7894397	6191	3.7917608
6126	3.7871770	6159	3.7895102	6192	3.7918309
6127	3.7872479	6160	3.7895807	6193	3.7919011
6128	3.7873188	6161	3.7896512	6194	3.7919712
6129	3.7873896	6162	3.7897217	6195	3.7920413
6130	3.7874605	6163	3.7897922	6196	3.7921114
6131	3.7875313	6164	3.7898626	6197	3.7921815
6132	3.7876021	6165	3.7899331	6198	3.7922516
6133	3.7876730	6166	3.7900035	6199	3.7923216
6134	3.7877438	6167	3.7900739	6200	3.7923917

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6201	3.7924617	6234	3.7947668	6267	3.7970597
6202	3.7925318	6235	3.7948365	6268	3.7971290
6203	3.7926018	6236	3.7949061	6269	3.7971983
6204	3.7926718	6237	3.7949757	6270	3.7972675
6205	3.7927418	6238	3.7950454	6271	3.7973368
6206	3.7928118	6239	3.7951150	6272	3.7974060
6207	3.7928817	6240	3.7951846	6273	3.7974753
6208	3.7929517	6241	3.7952542	6274	3.7975445
6209	3.7930217	6242	3.7953238	6275	3.7976137
6210	3.7930916	6243	3.7953933	6276	3.7976829
6211	3.7931615	6244	3.7954629	6277	3.7977521
6212	3.7932314	6245	3.7955324	6278	3.7978213
6213	3.7933014	6246	3.7956020	6279	3.7978905
6214	3.7933712	6247	3.7956715	6280	3.7979596
6215	3.7934411	6248	3.7957410	6281	3.7980288
6216	3.7935110	6249	3.7958105	6282	3.7980979
6217	3.7935809	6250	3.7958800	6283	3.7981671
6218	3.7936507	6251	3.7959495	6284	3.7982362
6219	3.7937206	6252	3.7960190	6285	3.7983053
6220	3.7937904	6253	3.7960884	6286	3.7983744
6221	3.7938602	6254	3.7961579	6287	3.7984435
6222	3.7939300	6255	3.7962273	6288	3.7985125
6223	3.7939998	6256	3.7962967	6289	3.7985816
6224	3.7940696	6257	3.7963662	6290	3.7986506
6225	3.7941394	6258	3.7964356	6291	3.7987197
6226	3.7942091	9259	3.7965050	6292	3.7987887
6227	3.7942789	6260	3.7965743	6293	3.7988577
6228	3.7943486	6261	3.7966437	6294	3.7989267
6229	3.7944183	6262	3.7967131	6295	3.7989957
6230	3.7944880	6263	3.7967824	6296	3.7990647
6231	3.7945578	6264	3.7968517	6297	3.7991337
6232	3.7946274	6265	3.7969211	6298	3.7992027
6233	3.7946971	6266	3.7969904	6299	3.7992716
6234	3.7947668	6267	3.7970597	6300	3.7993405

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6301	3.7994095	6334	3.8016781	6367	3.8039348
6302	3.7994784	6335	3.8017466	6368	3.8040031
6303	3.7995473	6336	3.8018152	6369	3.8040712
6304	3.7996162	6337	3.8018837	6370	3.8041394
6305	3.7996851	6338	3.8019522	6371	3.8042076
6306	3.7997540	6339	3.8020208	6372	3.8042758
6307	3.7998228	6340	3.8020893	6373	3.8043439
6308	3.7998917	6341	3.8021578	6374	3.8044121
6309	3.7999605	6342	3.8022262	6375	3.8044802
6310	3.8000294	6343	3.8022947	6376	3.8045483
6311	3.8000982	6344	3.8023632	6377	3.8046164
6312	3.8001670	6345	3.8024316	6378	3.8046845
6313	3.8002358	6346	3.8025001	6379	3.8047526
6314	3.8003046	6347	3.8025685	6380	3.8048207
6315	3.8003734	6348	3.8026369	6381	3.8048887
6316	3.8004421	6349	3.8027053	6382	3.8049568
6317	3.8005109	6350	3.8027737	6383	3.8050248
6318	3.8005796	6351	3.8028421	6384	3.8050929
6319	3.8006484	6352	3.8029105	6385	3.8051609
6320	3.8007171	6353	3.8029789	6386	3.8052289
6321	3.8007858	6354	3.8030472	6387	3.8052969
6322	3.8008545	6355	3.8031156	6388	3.8053649
6323	3.8009232	6356	3.8031839	6389	3.8054329
6324	3.8009919	6357	3.8032522	6390	3.8055009
6325	3.8010605	6358	3.8033205	6391	3.8055688
6326	3.8011292	6359	3.8033888	6392	3.8056768
6327	3.8011978	6360	3.8034571	6393	3.8057047
6328	3.8012665	6361	3.8035254	6394	3.8057726
6329	3.8013351	6362	3.8035937	6395	3.8058405
6330	3.8014037	6363	3.8036619	6396	3.8059085
6331	3.8014723	6364	3.8037302	6397	3.8059763
6332	3.8015409	6365	3.8037984	6398	3.8060442
6333	3.8016095	6366	3.8038666	6399	3.8061121
6334	3.8016781	6367	3.8039348	6400	3.8061800

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6401	3.8062478	6434	3.8084811	6467	3.8107029
6402	3.8063157	6435	3.8085485	6468	3.8107700
6403	3.8063835	6436	3.8086160	6469	3.8108371
6404	3.8064513	6437	3.8086875	6470	3.8109043
6405	3.8065191	6438	3.8087510	6471	3.8109714
6406	3.8065869	6439	3.8088184	6472	3.8110385
6407	3.8066547	6440	3.8088859	6473	3.8111056
6408	3.8067225	6441	3.8089533	6474	3.8111727
6409	3.8067903	6442	3.8090207	6475	3.8112398
6410	3.8068580	6443	3.8090881	6476	3.8113068
6411	3.8069258	6444	3.8091555	6477	3.8113739
6412	3.8069935	6445	3.8092229	6478	3.8114409
6413	3.8070612	6446	3.8092903	6479	3.8115080
6414	3.8071290	6447	3.8093577	6480	3.8115750
6415	3.8071967	6448	3.8094250	6481	3.8116420
6416	3.8072644	6449	3.8094924	6482	3.8117090
6417	3.8073320	6450	3.8095597	6483	3.8117760
6418	3.8073997	6451	3.8096270	6484	3.8118430
6419	3.8074674	6452	3.8096944	6485	3.8119100
6420	3.8075350	6453	3.8097617	6486	3.8119769
6421	3.8076027	6454	3.8098290	6487	3.8120439
6422	3.8076703	6455	3.8098962	6488	3.8121108
6423	3.8077379	6456	3.8099635	6489	3.8121778
6424	3.8078055	6457	3.8100308	6490	3.8122447
6425	3.8078731	6458	3.8100980	6491	3.8123116
6426	3.8079407	6459	3.8101653	6492	3.8123785
6427	3.8080083	6460	3.8102325	6493	3.8124454
6428	3.8080759	6461	3.8102997	6494	3.8125123
6429	3.8081434	6462	3.8103670	6495	3.8125792
6430	3.8082110	6463	3.8104342	6496	3.8126460
6431	3.8082785	6464	3.8105013	6497	3.8127129
6432	3.8083460	6465	3.8105685	6498	3.8127797
6433	3.8084136	6466	3.8106357	6499	3.8128465
6434	3.8084811	6467	3.8107029	6500	3.8129134

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6501	3.8129802	6534	3.8151791	6567	3.8173670
6502	3.8130470	6535	3.8152456	6568	3.8174331
6503	3.8131138	6536	3.8153120	6569	3.8174993
6504	3.8131805	6537	3.8153785	6570	3.8175654
6505	3.8132473	6538	3.8154449	6571	3.8176315
6506	3.8133141	6539	3.8155113	6572	3.8176976
6507	3.8133808	6540	3.8155777	6573	3.8177636
6508	3.8134475	6541	3.8156441	6574	3.8178297
6509	3.8135143	6542	3.8157105	6575	3.8178958
6510	3.8135810	6543	3.8157769	6576	3.8179618
6511	3.8136477	6544	3.8158433	6577	3.8180278
6512	3.8137144	6545	3.8159096	6578	3.8180939
6513	3.8137811	6546	3.8159760	6579	3.8181599
6514	3.8138478	6547	3.8160423	6580	3.8182259
6515	3.8139144	6548	3.8161087	6581	3.8182919
6516	3.8139811	6549	3.8161750	6582	3.8183579
6517	3.8140477	6550	3.8162413	6583	3.8184239
6518	3.8141144	6551	3.8163076	6584	3.8184898
6519	3.8141810	6552	3.8163739	6585	3.8185558
6520	3.8142476	6553	3.8164402	6586	3.8186217
6521	3.8143142	6554	3.8165064	6587	3.8186877
6522	3.8143808	6555	3.8165727	6588	3.8187536
6523	3.8144474	6556	3.8166389	6589	3.8188195
6524	3.8145140	6557	3.8167052	6590	3.8188854
6525	3.8145805	6558	3.8167714	6591	3.8189513
6526	3.8146471	6559	3.8168376	6592	3.8190172
6527	3.8147136	6560	3.8169038	6593	3.8190831
6528	3.8147801	6561	3.8169700	6594	3.8191489
6529	3.8148467	6562	3.8170362	6595	3.8192148
6530	3.8149132	6563	3.8171024	6596	3.8192806
6531	3.8149797	6564	3.8171686	6597	3.8193465
6532	3.8150462	6565	3.8172347	6598	3.8194123
6533	3.8151127	6566	3.8173009	6599	3.8194781
6534	3.8151791	6567	3.8173670	6600	3.8195439

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6601	3.8196097	6634	3.8217755	6667	3.8239305
6602	3.8196755	6635	3.8218409	6668	3.8239956
6603	3.8197413	6636	3.8219064	6669	3.8240607
6604	3.8198071	6637	3.8219718	6670	3.8241258
6605	3.8198728	6638	3.8220372	6671	3.8241909
6606	3.8199386	6639	3.8221027	6672	3.8242560
6607	3.8200043	6640	3.8221681	6673	3.8243211
6608	3.8200700	6641	3.8222335	6674	3.8243862
6609	3.8201358	6642	3.8222989	6675	3.8244513
6610	3.8201015	6643	3.8223643	6676	3.8245163
6611	3.8202672	6644	3.8224296	6677	3.8245814
6612	3.8203328	6645	3.8224950	6678	3.8246464
6613	3.8203985	6646	3.8225603	6679	3.8247114
6614	3.8204642	6647	3.8226257	6680	3.8247765
6615	3.8205298	6648	3.8226910	6681	3.8248415
6616	3.8205955	6649	3.8227563	6682	3.8249065
6617	3.8206611	6650	3.8228216	6683	3.8249715
6618	3.8207268	6651	3.8228869	6684	3.8250364
6619	3.8207924	6652	3.8229522	6685	3.8251014
6620	3.8208580	6653	3.8230175	6686	3.8251664
6621	3.8209236	6654	3.8230828	6687	3.8252313
6622	3.8209892	6655	3.8231481	6688	3.8252963
6623	3.8210548	6656	3.8232133	6689	3.8253612
6624	3.8211203	6657	3.8232786	6690	3.8254261
6625	3.8211859	6658	3.8233438	6691	3.8254910
6626	3.8212514	6659	3.8234090	6692	3.8255559
6627	3.8213170	6660	3.8234742	6693	3.8256208
6628	3.8213825	6661	3.8235394	6694	3.8256857
6629	3.8214480	6662	3.8236046	6695	3.8257506
6630	3.8215135	6663	3.8236698	6696	3.8258154
6631	3.8215790	6664	3.8237350	6697	3.8258803
6632	3.8216445	6665	3.8238002	6698	3.8259451
6633	3.8217100	6666	3.8238653	6699	3.8260100
6634	3.8217755	6667	3.8239305	6700	3.8260748

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6701	3.8261396	6734	3.8282731	6767	3.8303962
6702	3.8262044	6735	3.8283376	6768	3.8304603
6703	3.8262692	6736	3.8284021	6769	3.8305245
6704	3.8263340	6737	3.8284665	6770	3.8305887
6705	3.8263988	6738	3.8285310	6771	3.8306528
6706	3.8264635	6739	3.8285955	6772	3.8307169
6707	3.8265283	6740	3.8286599	6773	3.8307811
6708	3.8265931	6741	3.8287243	6774	3.8308452
6709	3.8266578	6742	3.8287887	6775	3.8309093
6710	3.8267225	6743	3.8288532	6776	3.8309734
6711	3.8267872	6744	3.8289176	6777	3.8310375
6712	3.8268519	6745	3.8289820	6778	3.8311016
6713	3.8269166	6746	3.8290463	6779	3.8311656
6714	3.8269813	6747	3.8291107	6780	3.8312297
6715	3.8270460	6748	3.8291751	6781	3.8312937
6716	3.8271107	6749	3.8292394	6782	3.8313578
6717	3.8271753	6750	3.8293038	6783	3.8314218
6718	3.8272400	6751	3.8293681	6784	3.8314858
6719	3.8273046	6752	3.8294324	6785	3.8315499
6720	3.8273693	6753	5.8294967	6786	3.8316139
6721	3.8274339	6754	3.8295611	6787	3.8316778
6722	3.8274985	6755	3.8296254	6788	3.8317418
6723	3.8275631	6756	3.8296896	6789	3.8318058
6724	3.8276277	6757	3.8297539	6790	3.8318698
6725	3.8276923	6758	3.8298182	6791	3.8319337
6726	3.8277569	6759	3.8298824	6792	3.8319977
6727	3.8278214	6760	3.8299467	6793	3.8320616
6728	3.8278860	6761	3.8300109	6794	3.8321255
6729	3.8279505	6762	3.8300752	6795	3.8321895
6730	3.8280151	6763	3.8301394	6796	3.8322534
6731	3.8280796	6764	3.8302036	6797	3.8323173
6732	3.8281441	6765	3.8302678	6798	3.8323812
6733	3.8282086	6766	3.8303320	6799	3.8324450
6734	3.8282731	6767	3.8303962	6800	3.8325089

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6801	3.8325728	6834	3.8346750	6867	3.8367670
6802	3.8326366	6835	3.8347385	6868	3.8368303
6803	3.8327005	6836	3.8348021	6869	3.8368935
6804	3.8327643	6837	3.8348656	6870	3.8369567
6805	3.8328281	6838	3.8349291	6871	3.8370199
6806	3.8328919	6839	3.8349926	6872	3.8370832
6807	3.8329558	6840	3.8350561	6873	3.8371463
6808	3.8330195	6841	3.8351196	6874	3.8372095
6809	3.8330833	6842	3.8351831	6875	3.8372727
6810	3.8331471	6843	3.8352465	6876	3.8373359
6811	3.8332109	6844	3.8353100	6877	3.8373990
6812	3.8332746	6845	3.8353735	6878	3.8374622
6813	3.8333384	6846	3.8354369	6879	3.8375253
6814	3.8334021	6847	3.8355003	6880	3.8375884
6815	3.8334659	6848	3.8355638	6881	3.8376516
6816	3.8335296	6849	3.8356272	6882	3.8377147
6817	3.8335933	6850	3.8356906	6883	3.8377778
6818	3.8336570	6851	3.8357540	6884	3.8378409
6819	3.8337207	6852	3.8358174	6885	3.8379039
6820	3.8337844	6853	3.8358807	6886	3.8379670
6821	3.8338480	6854	3.8359441	6887	3.8380301
6822	3.8339117	6855	3.8360075	6888	3.8380931
6823	3.8339754	6856	3.8360708	6889	3.8381562
6824	3.8340390	6857	3.8361341	6890	3.8382192
6825	3.8341027	6858	3.8361975	6891	3.8382822
6826	3.8341663	6859	3.8362608	6892	3.8383453
6827	3.8342299	6860	3.8363241	6893	3.8384083
6828	3.8342935	6861	3.8363874	6894	3.8384713
6829	3.8343571	6862	3.8364507	6895	3.8385343
6830	3.8344207	6863	3.8365140	6896	3.8385973
6831	3.8344843	6864	3.8365773	6897	3.8386602
6832	3.8345479	6865	3.8366405	6898	3.8387232
6833	3.8346114	6866	3.8367038	6899	3.8387861
6834	3.8346750	6867	3.8367670	6900	3.8388491

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
6901	3.8389120	6934	3.8409838	6967	3.8430458
6902	3.8389750	6935	3.8410465	6968	3.8431081
6903	3.8390379	6936	3.8411091	6969	3.8431705
6904	3.8391008	6937	3.8411717	6970	3.8432328
6905	3.8391637	6938	3.8412343	6971	3.8432951
6906	3.8392266	6939	3.8412969	6972	3.8433574
6907	3.8392895	6940	3.8413595	6973	3.8434197
6908	3.8393523	6941	3.8414220	6974	3.8434819
6909	3.8394152	6942	3.8414846	6975	3.8435442
6910	3.8394780	6943	3.8415472	6976	3.8436065
6911	3.8395409	6944	3.8416097	6977	3.8436687
6912	3.8396037	6945	3.8416722	6978	3.8437310
6913	3.8396666	6946	3.8417348	6979	3.8437932
6914	3.8397294	6947	3.8417973	6980	3.8438554
6915	3.8397922	6948	3.8418598	6981	3.8439176
6916	3.8398550	6949	3.8419223	6982	3.8439798
6917	3.8399178	6950	3.8419848	6983	3.8440420
6918	3.8399806	6951	3.8420473	6984	3.8441041
6919	3.8400433	6952	3.8421098	6985	3.8441664
6920	3.8401061	6953	5.8421722	6986	3.8442286
6921	3.8401688	6954	3.8422347	6987	3.8442907
6922	3.8402316	6955	3.8422971	6988	3.8443529
6923	3.8402943	6956	3.8423596	6989	3.8444150
6924	3.8403571	6957	3.8424220	6990	3.8444772
6925	3.8404198	6958	3.8424844	6991	3.8445393
6926	3.8404825	6959	3.8425468	6992	3.8446014
6927	3.8405452	6960	3.8426092	6993	3.8446635
6928	3.8406079	6961	3.8426716	6994	3.8447256
6929	3.8406706	6962	3.8427340	6995	3.8447877
6930	3.8407332	6963	3.8427964	6996	3.8448498
6931	3.8407959	6964	3.8428588	6997	3.8449119
6932	3.8408586	6965	3.8429211	6998	3.8449739
6933	3.8409212	6966	3.8429835	6699	3.8450360
6934	3.8409838	6967	3.8430458	7000	3.8450980

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
7001	3.8451601	7034	3.8472024	7067	3.8492351
7002	3.8452221	7035	3.8472641	7068	3.8492965
7003	3.8452841	7036	3.8473258	7069	3.8493580
7004	3.8453461	7037	3.8473876	7070	3.8494194
7005	3.8454081	7038	3.8474493	7071	3.8494808
7006	3.8454701	7039	3.8475110	7072	3.8495423
7007	3.8455321	7040	3.8475727	7073	3.8496037
7008	3.8455941	7041	3.8476343	7074	3.8496651
7009	3.8456561	7042	3.8476960	7075	3.8497264
7010	3.8457180	7043	3.8477577	7076	3.8497878
7011	3.8457800	7044	3.8478193	7077	3.8494492
7012	3.8458419	7045	3.8478810	7078	3.8499106
7013	3.8459038	7046	3.8479426	7079	3.8499719
7014	3.8459658	7047	3.8480043	7080	3.8500333
7015	3.8460277	7048	3.8480659	7081	3.8500946
7016	3.8460896	7049	3.8481275	7082	3.8501559
7017	3.8461515	7050	3.8481891	7083	3.8502172
7018	3.8462134	7051	3.8482507	7084	3.8502786
7019	3.8462752	7052	3.8483123	7085	3.8503399
7020	3.8463371	7053	3.8483739	7086	3.8504011
7021	3.8463990	7054	3.8484355	7087	3.8504624
7022	3.8464608	7055	3.8484970	7088	3.8505237
7023	3.8465227	7056	3.8485586	7089	3.8505850
7024	3.8465845	7057	3.8486201	7090	3.8506462
7025	3.8466463	7058	3.8486817	7091	3.8507075
7026	3.8467081	7059	3.8487432	7092	3.8507687
7027	3.8467700	7060	3.8488047	7093	3.8508300
7028	3.8468318	7061	3.8488662	7094	3.8508912
7029	3.8468935	7062	3.8489277	7095	3.8509524
7030	3.8469553	7063	3.8489892	7096	3.8510136
7031	3.8470171	7064	3.8490207	7097	3.8510748
7032	3.8470789	7065	3.8491122	7098	3.8511360
7033	3.8471406	7066	3.8491736	7099	3.8511972
7034	3.8472024	7067	3.8492351	7100	3.8512583

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
7101	3.8513195	7134	3.8533331	7167	3.8553374
7102	3.8513807	7135	3.8533940	7168	3.8553980
7103	3.8514418	7136	3.8534548	7169	3.8554586
7104	3.8515030	7137	3.8535157	7170	3.8555192
7105	3.8515641	7138	3.8535765	7171	3.8555797
7106	3.8516252	7139	3.8536374	7172	3.8556403
7107	3.8516863	7140	3.8536982	7173	3.8557008
7108	3.8517474	7141	3.8537590	7174	3.8557614
7109	3.8518085	7142	3.8538198	7175	3.8558219
7110	3.8518696	7143	3.8538806	7176	3.8558824
7111	3.8519307	7144	3.8539414	7177	3.8559429
7112	3.8519917	7145	3.8540022	7178	3.8560035
7113	3.8520528	7146	3.8540630	7179	3.8560640
7114	3.8521139	7147	3.8541238	7180	3.8561244
7115	3.8521749	7148	3.8541845	7181	3.8561849
7116	3.8522359	7149	3.8542453	7182	3.8562454
7117	3.8522970	7150	3.8543060	7183	3.8563059
7118	3.8523580	7151	3.8543668	7184	3.8563663
7119	3.8524190	7152	3.8544275	7185	3.8564298
7120	3.8524800	7153	3.8544882	7186	3.8564872
7121	3.8525410	7154	3.8545489	7187	3.8565476
7122	3.8526020	7155	3.8546096	7188	3.8566081
7123	3.8526629	7156	3.8546703	7189	3.8566685
7124	3.8527239	7157	3.8547310	7190	3.8567289
7125	3.8527849	7158	3.8547917	7191	3.8567893
7126	3.8528458	7159	3.8548524	7192	3.8568497
7127	3.8529068	7160	3.8549130	7193	3.8569101
7128	3.8529677	7161	3.8549737	7194	3.8569704
7129	3.8530286	7162	3.8550343	7195	3.8570308
7130	3.8530895	7163	3.8550949	7196	3.8570912
7131	3.8531504	7164	3.8551556	7197	3.8571515
7132	3.8532113	7165	3.8552162	7198	3.8572118
7133	3.8532722	7166	3.8552768	7199	3.8572722
7134	3.8533331	7167	3.8553374	7200	3.8573325

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
7201	3.8573928	7234	3.8593785	7267	3.8613552
7202	3.8574531	7235	3.8594385	7268	3.8614149
7203	3.8575134	7236	3.8594986	7269	3.8614747
7204	3.8575737	7237	3.8595586	7270	3.8615344
7205	3.8576340	7238	3.8596186	7271	3.8615941
7206	3.8576943	7239	3.8596786	7272	3.8616539
7207	3.8577545	7240	3.8597386	7273	3.8617136
7208	3.8578148	7241	3.8597985	7274	3.8617733
7209	3.8578750	7242	3.8598585	7275	3.8618330
7210	3.8579353	7243	3.8599185	7276	3.8618927
7211	3.8579955	7244	3.8599784	7277	3.8619524
7212	3.8580557	7245	3.8600384	7278	3.8620120
7213	3.8581159	7246	3.8600983	7279	3.8620717
7214	3.8581761	7247	3.8601583	7280	3.8621314
7215	3.8582363	7248	3.8602182	7281	3.8621910
7216	3.8582965	7249	3.8602781	7282	3.8622507
7217	3.8583567	7250	3.8603380	7283	3.8623103
7218	3.8584169	7251	3.8603979	7284	3.8623699
7219	3.8584770	7252	3.8604578	7285	3.8624296
7220	3.8585372	7253	3.8605177	7286	2.8624892
7221	3.8585973	7254	3.8605776	7287	3.8625488
7222	3.8586575	7255	3.8606374	7288	3.8626084
7223	3.8587176	7256	3.8606973	7289	3.8626679
7224	3.8587777	7257	3.8607571	7290	3.8627275
7225	3.8588378	7258	3.8608170	7291	3.8627871
7226	3.8588980	7259	3.8608768	7292	3.8628467
7227	3.8589581	7260	3.8609366	7293	3.8629062
7228	3.8590181	7261	3.8609964	7294	3.8629658
7229	3.8590782	7262	3.8610562	7295	3.8630253
7230	3.8591383	7263	3.8611160	7296	3.8630848
7231	3.8591984	7264	3.8611758	7297	3.8631443
7232	3.8592584	7265	3.8612356	7298	3.8632039
7233	3.8593185	7266	3.8612954	7299	3.8632634
7234	3.8593785	7267	3.8613552	7300	3.8633229

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
7301	3.8633823	7334	3.8653409	7367	3.8672907
7302	3.8634418	7335	3.8654001	7368	3.8673496
7303	3.8635013	7336	3.8654591	7369	3.8674086
7304	3.8635608	7337	3.8655175	7370	3.8674675
7305	3.8636202	7338	3.8655777	7371	3.8675264
7306	3.8636797	7339	3.8656569	7372	3.8675853
7307	3.8637391	7340	3.8656961	7373	3.8676442
7308	3.8637985	7341	3.8657552	7374	3.8677031
7309	3.8638580	7342	3.8658144	7375	3.8677620
7310	3.8639174	7343	3.8658735	7376	3.8678209
7311	3.8639768	7344	3.8659327	7377	3.8678798
7312	3.8640362	7345	3.8659918	7378	3.8679386
7313	3.8640956	7346	3.8660509	7379	3.8679975
7314	3.8641550	7347	3.8661100	7380	3.8680564
7315	3.8642143	7348	3.8661691	7381	3.8681152
7316	3.8642737	7349	3.8662282	7382	3.8681740
7317	3.8643331	7350	3.8662873	7383	3.8682329
7318	3.8643924	7351	3.8663464	7384	3.8682917
7319	3.8644517	7352	3.8664055	7385	3.8683505
7320	3.8645111	7353	3.8664646	7386	3.8684093
7321	3.8645704	7354	3.8665236	7387	3.8684681
7322	3.8646297	7355	3.8665827	7388	3.8685269
7323	3.8646890	7356	3.8666417	7389	3.8685857
7324	3.8647483	7357	3.8667008	7390	3.8686444
7325	3.8648076	7358	3.8667598	7391	3.8687032
7326	3.8648669	7359	3.8668188	7392	3.8687620
7327	3.8649262	7360	3.8668778	7393	3.8688207
7328	3.8649855	7361	3.8669368	7394	3.8688794
7329	3.8650447	7362	3.8669958	7395	3.8689382
7330	3.8651040	7363	3.8670548	7396	3.8689969
7331	3.8651632	7364	3.8671138	7397	3.8690556
7332	3.8652225	7365	3.8671728	7398	3.8691143
7333	3.8652817	7366	3.8672317	7399	3.8691730
7334	3.8653409	7367	3.8672907	7400	3.8692317

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
7401	3.8692904	7434	3.8712226	7467	3.8731461
7402	3.8693491	7435	3.8712810	7468	3.8732043
7403	3.8694077	7436	3.8713394	7469	3.8732624
7404	3.8694664	7437	3.8713978	7470	3.8733206
7405	3.8695251	7438	3.8714562	7471	3.8733787
7406	3.8695837	7439	3.8715146	7472	3.8734369
7407	3.8696423	7440	3.8715729	7473	3.8734950
7408	3.8697010	7441	3.8716313	7474	3.8735531
7409	3.8697596	7442	3.8716897	7475	3.8736112
7410	3.8698182	7443	3.8717480	7476	3.8736693
7411	3.8698768	7444	3.8718064	7477	3.8737274
7412	3.8699354	7445	3.8718647	7478	3.8737855
7413	3.8699940	7446	3.8919230	7479	3.8738435
7414	3.8700526	7447	3.8719814	7480	3.8739016
7415	3.8701111	7448	3.8720397	7481	3.8739597
7416	3.8701697	7449	3.8720980	7482	3.8740177
7417	3.8702283	7450	3.8721563	7483	3.8740757
7418	3.8702868	7451	3.8722146	7484	3.8741338
7419	3.8703454	7452	3.8722728	7485	3.8741918
7420	3.8704039	7453	3.8723311	7486	3.8742498
7421	3.8704624	7454	3.8723894	7487	3.8743078
7422	3.8705209	7455	3.8724476	7488	3.8743658
7423	3.8705795	7456	3.8725059	7489	3.8744238
7424	3.8706380	7457	3.8725641	7490	3.8744818
7425	3.8706965	7458	3.8726224	7491	3.8745398
7426	3.8707549	7459	3.8726806	7492	3.8745978
7427	3.8708134	7460	3.8727388	7493	3.8746557
7428	3.8708719	7461	3.8727970	7494	3.8747137
7429	3.8709304	7462	3.8728552	7495	3.8747716
7430	3.8709888	7463	3.8729134	7496	3.8748296
7431	3.8710473	7464	3.8729716	7497	3.8748875
7432	3.8711057	7465	3.8730298	7498	3.8749454
7433	3.8711641	7466	3.8730880	7499	3.8750034
7434	3.8712226	7467	3.8731461	7500	3.8750613

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
7501	3.8751192	7534	3.8770256	7567	3.8789237
7502	3.8751771	7535	3.8770833	7568	3.8789811
7503	3.8752349	7536	3.8771409	7569	3.8790385
7504	3.8752928	7537	3.8771985	7570	3.8790959
7505	3.8753507	7538	3.8772561	7571	3.8791532
7506	3.8754086	7539	3.8773137	7572	3.8792106
7507	3.8754664	7540	3.8773713	7573	3.8792680
7508	3.8755243	7541	3.8774289	7574	3.8793253
7509	3.8755821	7542	3.8774865	7575	3.8793826
7510	3.8756399	7543	3.8775441	7576	3.8794400
7511	3.8756978	7544	3.8776017	7577	3.8794973
7512	3.8757556	7545	3.8776592	7578	3.8795546
7513	3.8758134	7546	3.8777168	7579	3.8796119
7514	3.8758712	7547	3.8777743	7580	3.8796692
7515	3.8759290	7548	3.8778319	7581	3.8797265
7516	3.8759868	7549	3.8778894	7582	3.8797838
7517	3.8760445	7550	3.8779469	7583	3.8798411
7518	3.8761023	7551	3.8780045	7584	3.8798983
7519	3.8761601	7552	3.8780620	7585	3.8799556
7520	3.8762178	7553	3.8781195	7586	3.8800128
7521	3.8762756	7554	3.8781770	7587	3.8800701
7522	3.8763333	7555	3.8782345	7588	3.8801273
7523	3.8763911	7556	3.8782919	7589	3.8801846
7524	3.8764488	7557	3.8783493	7590	3.8802418
7525	3.8765065	7558	3.8784069	7591	3.8802990
7526	3.8765642	7559	3.8784643	7592	3.8803562
7527	3.8766219	7560	3.8785218	7593	3.8804134
7528	3.8766796	7561	3.8785792	7594	3.8804706
7529	3.8767373	7562	3.8786367	7595	3.8805278
7530	3.8767950	7563	3.8786941	7596	3.8805850
7531	3.8768526	7564	3.8787515	7597	3.8806421
7532	3.8769103	7565	3.8788089	7598	3.8806993
7533	3.8769680	7566	3.8788663	7599	3.8807564
7534	3.8770256	7567	3.8789237	7600	3.8808136

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
7601	3.8808707	7634	3.8827522	7667	3.8846255
7602	3.8809279	7635	3.8828090	7668	3.8846821
7603	3.8809850	7636	3.8828659	7669	3.8847387
7604	3.8810421	7637	3.8829228	7670	3.8847954
7605	3.8810992	7638	3.8829797	7671	3.8848520
7606	3.8811563	7639	3.8830365	7672	3.8849086
7607	3.8812134	7640	3.8830934	7673	3.8849652
7608	3.8812705	7641	3.8831502	7674	3.8850218
7609	3.8813276	7642	3.8832070	7675	3.8850784
7610	3.8813847	7643	3.8832639	7676	3.8851350
7611	3.8814417	7644	3.8833207	7677	3.8851915
7612	3.8614988	7645	3.8833775	7678	3.8852481
7613	3.8815558	7646	3.8834343	7679	3.8853047
7614	3.8816129	7647	3.8834911	7680	3.8853612
7615	3.8816699	7648	3.8835479	7681	3.8854178
7616	3.8817269	7649	3.8836047	7682	3.8854743
7617	3.8817840	7650	3.8836614	7683	3.8855308
7618	3.8818410	7651	3.8837182	7684	3.8855874
7619	3.8818980	7652	3.8837750	7685	3.8856239
7620	3.8819550	7653	3.8838317	7686	3.8857004
7621	3.8820120	7654	3.8838885	7687	3.8857569
7622	3.8820689	7655	3.8839452	7688	3.8858134
7623	3.8821259	7656	3.8840019	7689	3.8858699
7624	3.8821829	7657	3.8840586	7690	3.8859263
7625	3.8822398	7658	3.8841154	7691	3.8859828
7626	3.8822968	7659	3.8841721	7692	3.8860393
7627	3.8823537	7660	3.8842288	7693	3.8860957
7628	3.8824107	7661	3.8842855	7694	3.8861522
7629	3.8824676	7662	3.8843421	7695	3.8862086
7630	3.8825245	7663	3.8843988	7696	3.8862651
7631	3.8825815	7664	3.8844555	7697	3.8863215
7632	3.8826384	7665	3.8845122	7698	3.8863779
7633	3.8826953	7666	3.8845688	7699	3.8864343
7634	3.8827522	7667	3.8846255	7700	3.8864907

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
7701	3.8865471	7734	3.8884042	7767	3.8902533
7702	3.8866035	7735	3.8884603	7768	3.8903092
7703	3.8866599	7736	3.8885165	7769	3.8903651
7704	3.8867163	7737	3.8885726	7770	3.8904210
7705	3.8867726	7738	3.8886287	7771	3.8904769
7706	3.8868290	7739	3.8886848	7772	3.8905328
7707	3.8868854	7740	3.8887410	7773	3.8905887
7708	3.8869417	7741	3.8887971	7774	3.8906445
7709	3.8869980	7742	3.8888532	7775	3.8907004
7710	3.8870544	7743	3.8889093	7776	3.8907562
7711	3.8871107	7744	3.8889653	7777	3.8908121
7712	3.8871670	7745	3.8890214	7778	3.8908679
7713	3.8872233	7746	3.8890775	7779	3.8909238
7714	3.8872796	7747	3.8891335	7780	3.8909796
7715	3.8873359	7748	3.8891896	7781	3.8910354
7716	3.8873922	7749	3.8892457	7782	3.8910912
7717	3.8874485	7750	3.8893017	7783	3.8911470
7718	3.8875048	7751	3.8893577	7784	3.8912028
7719	3.8875610	7752	3.8894138	7785	3.8912586
7720	3.8876173	7753	3.8894698	7786	3.8913144
7721	3.8876735	7754	3.8895258	7787	3.8913702
7722	3.8877298	7755	3.8895818	7788	3.8914259
7723	3.8877860	7756	3.8896378	7789	3.8914817
7724	3.8878423	7757	3.8896938	7790	3.8915375
7725	3.8878985	7758	3.8897498	7791	3.8915932
7726	3.8879547	7759	3.8898057	7792	3.8916489
7727	3.8880109	7760	3.8898617	7793	3.8917047
7728	3.8880671	7761	3.8899177	7794	3.8917604
7729	3.8881233	7762	3.8899736	7795	3.8918161
7730	3.8881795	7763	3.8900296	7796	3.8918718
7731	3.8882357	7764	3.8900855	7797	3.8919275
7732	3.8882918	7765	3.8901415	7798	3.8919832
7733	3.8883480	7766	3.8901974	7799	3.8920389
7734	3.8884042	7767	3.8902533	7800	3.8920946

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
7801	3.8921503	7834	3.8939836	7867	3.8958092
7802	3.8922059	7835	3.8940390	7868	3.8958644
7803	3.8922616	7836	3.8940944	7869	3.8959195
7804	3.8923173	7837	3.8941498	7870	3.8959747
7805	3.8923729	7838	3.8942053	7871	3.8960299
7806	3.8924285	7839	3.8942607	7872	3.8960851
7807	3.8924842	7840	3.8943161	7873	3.8961403
7808	3.8925398	7841	3.8943715	7874	3.8961954
7809	3.8925954	7842	3.8944268	7875	3.8962506
7810	3.8926510	7843	3.8944822	7876	3.8963057
7811	3.8927066	7844	3.8945376	7877	3.8963608
7812	3.8927622	7845	3.8945929	7878	3.8964160
7813	3.8928178	7846	3.8946483	7879	3.8964711
7814	3.8928734	7847	3.8947036	7880	3.8965262
7815	3.8929290	7848	3.8947590	7881	3.8965813
7816	3.8929845	7849	3.8948143	7882	3.8966364
7817	3.8930401	7850	3.8948696	7883	3.8966915
7818	3.8930957	7851	3.8949250	7884	3.8967466
7819	3.8931512	7852	3.8949803	7885	3.8968017
7820	3.8932067	7853	3.8950356	7886	3.8968568
7821	3.8932623	7854	3.8950909	7887	3.8969118
7822	3.8933178	7855	3.8951462	7888	3.8969669
7823	3.8933733	7856	3.8952015	7889	3.8970219
7824	3.8934288	7857	3.8952567	7890	3.8970770
7825	3.8934843	7858	3.8953120	7891	3.8971320
7826	3.8935398	7859	3.8953673	7892	3.8971871
7827	3.8935953	7860	3.8954225	7893	3.8972421
7828	3.8936508	7861	3.8954778	7894	3.8972971
7829	3.8937063	7862	3.8955330	7895	3.8973521
7830	3.8937618	7863	3.8955883	7896	3.8974071
7831	3.8938172	7864	3.8956435	7897	3.8974621
7832	3.8938727	7865	3.8956987	7898	3.8975171
7833	3.8939281	7866	3.8957539	7899	3.8975721
7834	3.8939836	7867	3.8958092	7900	3.8976721

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
7901	3.8976821	7934	3.8994922	7967	3.9012948
7902	3.8977370	7935	3.8995469	7968	3.9013493
7903	3.8977920	7936	3.8996017	7969	3.9014038
7904	3.8978469	7937	3.8996564	7970	3.9014583
7905	3.8979019	7938	3.8997111	7971	3.9015128
7906	3.8979568	7939	3.8997658	7972	3.9015673
7907	3.8980117	7940	3.8998205	7973	3.9016218
7908	3.8980667	7941	3.8998752	7974	3.9016762
7909	3.8981216	7942	3.8999299	7975	3.9017307
7910	3.8981765	7943	3.8999846	7976	3.9017851
7911	3.8982314	7944	3.9000392	7977	3.9018396
7912	3.8982863	7945	3.9000939	7978	3.9018940
7913	3.8983412	7946	3.9001486	7979	3.9019485
7914	3.8983960	7947	3.9002032	7980	3.9020029
7915	3.8984509	7948	3.9002579	7981	3.9020573
7916	3.8985058	7949	3.9003125	7982	3.9021117
7917	3.8985606	7950	3.9003671	7983	3.9021661
7918	3.8986155	7951	3.9004218	7984	3.9022205
7919	3.8986703	7952	3.9004764	7985	3.9022749
7920	3.8987252	7953	5.9005310	7986	3.9023293
7921	3.8987800	7954	3.9005856	7987	3.9023837
7922	3.8988348	7955	3.9006502	7988	3.9024381
7923	3.8988897	7956	3.9006948	7989	3.9024924
7924	3.8989445	7957	3.9007494	7990	3.9025468
7925	3.8989993	7958	3.9008039	7991	3.9026011
7926	3.8990541	7959	3.9008585	7992	3.9026555
7927	3.8991089	7960	3.9009131	7993	3.9027098
7928	3.8991636	7961	3.9009676	7994	3.9027641
7929	3.8992184	7962	3.9010222	7995	3.9028185
7930	3.8992732	7963	3.9010767	7996	3.9028728
7931	3.8993279	7964	3.9011313	7997	3.9029271
7932	3.8993827	7965	3.9011858	7998	3.9029814
7933	3.8994375	7966	3.9012403	7699	3.9030357
7934	3.8994922	7967	3.9012948	8000	3.9030900

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
8001	3.9031443	8034	3.9049318	8067	3.9067121
8002	3.9031985	8035	3.9049859	8068	3.9067659
8003	3.9032528	8036	3.9050399	8069	3.9068197
8004	3.9033071	8037	3.9050940	8070	3.9068735
8005	3.9033613	8038	3.9051480	8071	3.9069273
8006	3.9034156	8039	3.9052020	8072	3.9069812
8007	3.9034698	8040	3.9052560	8073	3.9070350
8008	3.9035241	8041	3.9053101	8074	3.9070887
8009	3.9035783	8042	3.9053641	8075	3.9071425
8010	3.9036325	8043	3.9054181	8076	3.9071963
8011	3.9036867	8044	3.9054721	8077	3.9072501
8012	3.9037409	8045	3.9055260	8078	3.9073038
8013	3.9037951	8046	3.9055800	8079	3.9073576
8014	3.9038493	8047	3.9056340	8080	3.9074114
8015	3.9039035	8048	3.9056880	8081	3.9074651
8016	3.9039577	8049	3.9057419	8082	3.9075188
8017	3.9040119	8050	3.9057959	8083	3.9075726
8018	3.9040661	8051	3.9058498	8084	3.9076263
8019	3.9041202	8052	3.9059038	8085	3.9076800
8020	3.9041744	8053	3.9059577	8086	3.9077337
8021	3.9042285	8054	3.9060116	8087	3.9077874
8022	3.9042827	8055	3.9060655	8088	3.9078411
8023	3.9043368	8056	3.9061195	8089	3.9078948
8024	3.9043909	8057	3.9061734	8090	3.9079485
8025	3.9044450	8058	3.9062273	8091	3.9080022
8026	3.9044992	8059	3.9062812	8092	3.9080559
8027	3.9045533	8060	3.9063350	8093	3.9081095
8028	3.9046074	8061	3.9063889	8094	3.9081632
8029	3.9046615	8062	3.9064428	8095	3.9082169
8030	3.9047155	8063	3.9064967	8096	3.9082705
8031	3.9047696	8064	3.9065595	8097	3.9083241
8032	3.9048237	8065	3.9066044	8098	3.9083778
8033	3.9048778	8066	3.9066582	8099	3.9084314
8034	3.9049318	8067	3.9067121	8100	3.9084850

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
8101	3.9085386	8134	3.9103042	8167	3.9120625
8102	3.9085922	8135	3.9103575	8168	3.9121157
8103	3.9086458	8136	3.9104110	8169	3.9121689
8104	3.9086994	8137	3.9104643	8170	3.9122220
8105	3.9087530	8138	3.9105177	8171	3.9122752
8106	3.9088066	8139	3.9105710	8172	3.9123233
8107	3.9088602	8140	3.9106244	8173	3.9123815
8108	3.9089137	8141	3.9106777	8174	3.9124346
8109	3.9089673	8142	3.9107311	8175	3.9124878
8110	3.9090208	8143	3.9107844	8176	3.9125409
8111	3.9090744	8144	3.9108378	8177	3.9125940
8112	3.9091279	8145	3.9108911	8178	3.9126471
8113	3.9091815	8146	3.9109444	8179	3.9127002
8114	3.9092350	8147	3.9109977	8180	3.9127533
8115	3.9092885	8148	3.9110510	8181	3.9128064
8116	3.9093420	8149	3.9111043	8182	3.9128595
8117	3.9093955	8150	3.9111576	8183	3.9129125
8118	3.9094490	8151	3.9112109	8184	3.9129656
8119	3.9095025	8152	3.9112642	8185	3.9130187
8120	3.9095560	8153	3.9113174	8186	3.9130717
8121	3.9096095	8154	3.9113707	8187	3.9131298
8122	3.9096630	8155	3.9114240	8188	3.9131778
8123	3.9097164	8156	3.9114772	8189	3.9132309
8124	3.9097699	8157	3.9115305	8190	3.9132839
8125	3.9098234	8158	3.9115837	8191	3.9133369
8126	3.9098768	8159	3.9116369	8192	3.9133899
8127	3.9099302	8160	3.9116902	8193	3.9134429
8128	3.9099837	8161	3.9117434	8194	3.9134959
8129	3.9100371	8162	3.9117966	8195	3.9135489
8130	3.9100905	8163	3.9118498	8196	3.9136019
8131	3.9101440	8164	3.9119030	8197	3.9136549
8132	3.9101974	8165	3.9119562	8198	3.9137079
8133	3.9102508	8166	3.9120094	8199	3.9137609
8134	3.9103042	8167	3.9120625	8200	3.9138138

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
8201	3.9138668	8234	3.9156109	8267	3.9173479
8202	3.9139198	8235	3.9156636	8268	3.9174005
8203	3.9139727	8236	3.9157163	8269	3.9174530
8204	3.9140256	8237	3.9157691	8270	3.9175055
8205	3.9140786	8238	3.9158218	8271	3.9175580
8206	3.9141315	8239	3.9158745	8272	3.9176105
8207	3.9141844	8240	3.9159272	8273	3.9176630
8208	3.9142373	8241	3.9159799	8274	3.9177155
8209	3.9142902	8242	3.9160326	8275	3.9177680
8210	3.9143432	8243	3.9160853	8276	3.9178205
8211	3.9143960	8244	3.9161380	8277	3.9178729
8212	3.9144489	8245	3.9161907	8278	3.9179254
8213	3.9145018	8246	3.9162433	8279	3.9179779
8214	3.9145547	8247	3.9162960	8280	3.9180303
8215	3.9146076	8248	3.9163487	8281	3.9180828
8216	3.9146604	8249	3.9164013	8282	3.9181352
8217	3.9147133	8250	3.9164539	8283	3.9181877
8218	3.9147661	8251	3.9165066	8284	3.9182401
8219	3.9148190	8252	3.9165592	8285	3.9182925
8220	3.9148718	8253	3.9166118	8286	3.9183449
8221	3.9149246	8254	3.9166645	8287	3.9183973
8222	3.9149775	8255	3.9167171	8288	3.9184497
8223	3.9150303	8256	3.9167697	8289	3.9185021
8224	3.9150831	8257	3.9168223	8290	3.9185545
8225	3.9151359	8258	3.9168749	8291	3.9186069
8226	3.9151887	8259	3.9169275	8292	3.9186593
8227	3.9152415	8260	3.9169800	8293	3.9187117
8228	3.9152943	8261	3.9170326	8294	3.9187640
8229	3.9153471	8262	3.9170852	8295	3.9188164
8230	3.9153998	8263	3.9171377	8296	3.9188687
8231	3.9154526	8264	3.9171903	8297	3.9189211
8232	3.9155054	8265	3.9172428	8298	3.9189734
8233	3.9155581	8266	3.9172954	8299	3.9190258
8234	3.9156109	8267	3.9173479	8300	3.9190781

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
8301	3.9191304	8334	3.9208535	8367	3.9225698
8302	3.9191827	8335	3.9209056	8368	3.9226217
8303	3.9192350	8336	3.9209577	8369	3.9226736
8304	3.9192873	8337	3.9210098	8370	3.9227255
8305	3.9193396	8338	3.9210619	8371	3.9227773
8306	3.9193919	8339	3.9211140	8372	3.9228292
8307	3.9194442	8340	3.9211661	8373	3.9228811
8308	3.9194965	8341	3.9212181	8374	3.9229330
8309	3.9195488	8342	3.9212702	8375	3.9229848
8310	3.9196010	8343	3.9213222	8376	3.9230367
8311	3.9196533	8344	3.9213743	8377	3.9230885
8312	3.9197055	8345	3.9214263	8378	3.9231404
8313	3.9197578	8346	3.9214784	8379	3.9231922
8314	3.9198100	8347	3.9215304	8380	3.9232440
8315	3.9198623	8348	3.9215824	8381	3.9232958
8316	3.9199145	8349	3.9216345	8382	3.9233477
8317	3.9199667	8350	3.9216865	8383	3.9233995
8318	3.9200189	8351	3.9217385	8384	3.9234513
8319	3.9200711	8352	3.9217905	8385	3.9235031
8320	3.9201233	8353	3.9218425	8386	3.9235549
8321	3.9201755	8354	3.9218945	8387	3.9236066
8322	3.9202277	8355	3.9219465	8388	3.9236584
8323	3.9202799	8356	3.9219984	8389	3.9237102
8324	3.9203321	8357	3.9220504	8390	3.9237620
8325	3.9203842	8358	3.9221024	8391	3.9238137
8326	3.9204364	8359	3.9221543	8392	3.9238655
8327	3.9204886	8360	3.9222063	8393	3.9239172
8328	3.9205407	8361	3.9222582	8394	3.9239690
8329	3.9205929	8362	3.9223102	8395	3.9240207
8330	3.9206450	8363	3.9223621	8396	3.9240724
8331	3.9206971	8364	3.9224140	8397	3.9241242
8332	3.9207493	8365	3.9224659	8398	3.9241759
8333	3.9208014	8366	3.9225179	8399	3.9242276
8334	3.9208535	8367	3.9225698	8400	3.9242793

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
8401	3.9243310	8434	3.9260336	8467	3.9277296
8402	3.9243827	8435	3.9260851	8468	3.9277808
8403	3.9244344	8436	3.9261366	8469	3.9278321
8404	3.9244860	8437	3.9261880	8470	3.9278834
8405	3.9245377	8438	3.9262395	8471	3.9279347
8406	3.9245894	8439	3.9262910	8472	3.9279859
8407	3.9246410	8440	3.9263424	8473	3.9280372
8408	3.9246927	8441	3.9263939	8474	3.9280885
8409	3.9247444	8442	3.9264453	8475	3.9281397
8410	3.9247960	8443	3.9264968	8476	3.9281909
8411	3.9248476	8444	3.9265482	8477	3.9282422
8412	3.9248993	8445	3.9265997	8478	3.9282934
8413	3.9249509	8446	3.9266511	8479	3.9283446
8414	3.9250025	8447	3.9267025	8480	3.9283959
8415	3.9250541	8448	3.9267539	8481	3.9284471
8416	3.9251057	8449	3.9268053	8482	3.9284983
8417	3.9251573	8450	3.9268567	8483	3.9285495
8418	3.9252089	8451	3.9269081	8484	3.9286007
8419	3.9252605	8452	3.9269595	8485	3.9286518
8420	3.9253121	8453	3.9270109	8486	3.9287030
8421	3.9253637	8454	3.9270622	8487	3.9287542
8422	3.9254152	8455	3.9271136	8488	3.9288540
8423	3.9254668	8456	3.9271650	8489	3.9288565
8424	3.9255184	8457	3.9272163	8490	3.9289077
8425	3.9255699	8458	3.9272677	8491	3.9289588
8426	3.9256215	8459	3.9273190	8492	3.9290100
8427	3.9256730	8460	3.9273704	8493	3.9290611
8428	3.9257245	8461	3.9274217	8494	3.9291123
8429	3.9257761	8462	3.9274730	8495	3.9291634
8430	3.9258276	8463	3.9275243	8496	3.9292145
8431	3.9258791	8464	3.9275757	8497	3.9292656
8432	3.9259306	8465	3.9276270	8498	3.9293167
8433	3.9259821	8466	3.9276783	8499	3.9293678
8434	3.9260336	8467	3.9277296	8500	3.9294189

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
8501	3.9294700	8534	3.9311526	8567	3.9328288
8502	3.9295211	8535	3.9312035	8568	3.9328794
8503	3.9295722	8536	3.9312544	8569	3.9329301
8504	3.9296232	8537	3.9313053	8570	3.9329808
8505	3.9296743	8538	3.9313561	8571	3.9330315
8506	3.9297254	8539	3.9314070	8572	3.9330822
8507	3.9297764	8540	3.9314579	8573	3.9331328
8508	3.9298275	8541	3.9315087	8574	3.9331835
8509	3.9298785	8542	3.9315596	8575	3.9332342
8510	3.9299296	8543	3.9316104	8576	3.9332848
8511	3.9299806	8544	3.9316612	8577	3.9333354
8512	3.9300316	8545	3.9317121	8578	3.9333860
8513	3.9300826	8546	3.9317629	8579	3.9334367
8514	3.9301336	8547	3.9318137	8580	3.9334873
8515	3.9301846	8548	3.9318645	8581	3.9335379
8516	3.9302356	8549	3.9319153	8582	3.9335885
8517	3.9302866	8550	3.9319661	8583	3.9336391
8518	3.9303376	8551	3.9320169	8584	3.9336897
8519	3.9303886	8552	3.9320677	8585	3.9337403
8520	3.9304396	8553	3.9321185	8586	3.9337909
8521	3.9304906	8554	3.9321692	8587	3.9338415
8522	3.9305415	8555	3.9322200	8588	3.9338920
8523	3.9305925	8556	3.9322708	8589	3.9339426
8524	3.9306434	8557	3.9323215	8590	3.9339932
8525	3.9306944	8558	3.9323723	8591	3.9340437
8526	3.9307453	8559	3.9324230	8592	3.9340943
8527	3.9307963	8560	3.9324738	8593	3.9341448
8528	3.9308472	8561	3.9325245	8594	3.9341953
8529	3.9308981	8562	3.9325752	8595	3.9342459
8530	3.9309490	8563	3.9326259	8596	3.9342964
8531	3.9309999	8564	3.9326766	8597	3.9343469
8532	3.9310508	8565	3.9327274	8598	3.9343974
8533	3.9311017	8566	3.9327781	8599	3.9344479
8534	3.9311526	8567	3.9328288	8600	3.9344984

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
8601	3.9345489	8634	3.9362120	8667	3.9378688
8602	3.9345994	8635	3.9362623	8668	3.9379189
8603	3.9346499	8636	3.9363126	8669	3.9379690
8604	3.9347004	8637	3.9363629	8670	3.9380191
8605	3.9347509	8638	3.9364132	8671	3.9380692
8606	3.9348013	8639	3.9364635	8672	3.9381193
8607	3.9348518	8640	3.9365137	8673	3.9381693
8608	3.9349022	8641	3.9365640	8674	3.9382194
8609	3.9349527	8642	3.9366143	8675	3.9382695
8610	3.9350031	8643	3.9366645	8676	3.9383195
8611	3.9350536	8644	3.9367147	8677	3.9383696
8612	3.9351040	8645	3.9367650	8678	3.9384196
8613	3.9351544	8646	3.9368152	8679	3.9384697
8614	3.9552049	8647	3.9368654	8680	3.9385197
8615	3.9352553	8648	3.9369157	8681	3.9385697
8616	3.9353057	8649	3.9369659	8682	3.9386198
8617	3.9353561	8650	3.9370161	8683	3.9386698
8618	3.9354065	8651	3.9370663	8684	3.9387198
8619	3.9354569	8652	3.9371165	8685	3.9387698
8620	3.9355073	8653	3.9371667	8686	3.9388198
8621	3.9355576	8654	3.9372169	8687	3.9388698
8622	3.9356080	8655	3.9372671	8688	3.9389198
8623	3.0356584	8656	3.9373172	8689	3.9389698
8624	3.9357087	8657	3.9373674	8690	3.9390198
8625	3.9357591	8658	3.9374176	8691	3.9390697
8626	3.9358094	8659	3.9374677	8692	3.9391197
8627	3.9358598	8660	3.9375179	8693	3.9391697
8628	3.9359101	8661	3.9375680	8694	3.9392196
8629	3.9356605	8662	3.9376182	8695	3.9392696
8630	3.9360108	8663	3.9376683	8696	3.9393195
8631	3.9360611	8664	3.9377184	8697	3.9393695
8632	3.9361114	8665	3.9377686	8698	3.9394194
8633	3.9361617	8666	3.9378187	8699	3.9394693
8634	3.9362120	8667	3.9378688	8700	3.9395192

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
8701	3.9395692	8734	3.9412132	8767	3.9428510
8702	3.9396191	8735	3.9412629	8768	3.9429005
8703	3.9396690	8736	3.9413126	8769	3.9429501
8704	3.9397189	8737	3.9413623	8770	3.9429996
8705	3.9397688	8738	3.9414120	8771	3.9430491
8706	3.9398187	8739	3.9414617	8772	3.9430986
8707	3.9398685	8740	3.9415114	8773	3.9431481
8708	3.9399184	8741	3.9415611	8774	3.9431976
8709	3.9399683	8742	3.9416108	8775	3.9432471
8710	3.9400182	8743	3.9416605	8776	3.9432966
8711	3.9400680	8744	3.9417101	8777	3.9433461
8712	3.9401179	8745	3.9417598	8778	3.9433956
8713	3.9401677	8746	3.9418095	8779	3.9434450
8714	3.9402176	8747	3.9418591	8780	3.9434945
8715	3.9402674	8748	3.9419088	8781	3.9435440
8716	3.9403172	8749	3.9419580	8782	3.9435934
8717	3.9403670	8750	3.9420081	8783	3.9436429
8718	3.9404169	8751	3.9420577	8784	3.9436923
8719	3.9404667	8752	3.9421073	8785	3.9437418
8720	3.9405165	8753	3.9421569	8786	3.9437912
8721	3.9405663	8754	3.9422065	8787	3.9438406
8722	3.9406161	8755	3.9422561	8788	3.9438900
8723	3.9406659	8756	3.9423058	8789	3.9436395
8724	3.9407157	8757	3.9423553	8790	3.9439889
8725	3.9407654	8758	3.9424049	8791	3.9440383
8726	3.9408152	8759	3.9424545	8792	3.9440877
8727	3.9408650	8760	3.9425041	8793	3.9441371
8728	3.9409147	8761	3.9425537	8794	3.9441865
8729	3.9409645	8762	3.9426032	8795	3.9442358
8730	3.9410142	8763	3.9426528	8796	3.9442852
8731	3.9410640	8764	3.9427024	8797	3.9443346
8732	3.9411137	8765	3.9427518	8798	3.9443840
8733	3.9411635	8766	3.9428015	8799	3.9444333
8734	3.9412132	8767	3.9428510	8800	3.9444827

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
8801	3.9445320	8834	3.9461574	8867	3.9477767
8802	3.9445814	8835	3.9462065	8868	3.9478257
8803	3.9446307	8836	3.9462557	8869	3.9478746
8804	3.9446800	8837	3.9463048	8870	3.9479236
8805	3.9447294	8838	3.9463540	8871	3.9479726
8806	3.9447787	8839	3.9464031	8872	3.9480215
8807	3.9448280	8840	3.9464523	8873	3.9480705
8808	3.9448773	8841	3.9465014	8874	3.9481194
8809	3.9449266	8842	3.9465505	8875	3.9481684
8810	3.9449759	8843	3.9465996	8876	3.9482173
8811	3.9450252	8844	3.9466487	8877	3.9482662
8812	3.9450745	8845	3.9466978	8878	3.9483151
8813	3.9451238	8846	3.9467469	8879	3.9483640
8814	3.9451730	8847	3.9467960	8880	3.9484130
8815	3.9452223	8848	3.9468451	8881	3.9484619
8816	3.9452716	8849	3.9468942	8882	3.9485108
8817	3.9453208	8850	3.9469433	8883	3.9485597
8818	3.9453701	8851	3.9469923	8884	3.9486085
8819	3.9454193	8852	3.9470414	8885	3.9486574
8820	3.9454686	8853	3.9470905	8886	3.9487063
8821	3.9455178	8854	3.9471395	8887	3.9487552
8822	3.9455670	8855	3.9471886	8888	3.9488040
8823	3.9456163	8856	3.9472376	8889	3.9488529
8824	3.9456655	8857	3.9472866	8890	3.9489018
8825	3.9457147	8858	3.9473357	8891	3.9489506
8826	3.9457639	8859	3.9473847	8892	3.9489994
8827	3.9458131	8860	3.9474337	8893	3.9490483
8828	3.9458623	8861	3.9474827	8894	3.9490971
8829	3.9459115	8862	3.9475317	8895	3.9491459
8830	3.9459607	8863	3.9475807	8896	3.9491948
8831	3.9460099	8864	3.9476297	8897	3.9492436
8832	3.9460591	8865	3.9476787	8898	3.9492924
8833	3.9461082	8866	3.9477277	8899	3.9493412
8834	3.9461574	8867	3.9477767	8900	3.9493900

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
8901	3.9494388	8934	3.9510459	8967	3.9526472
8902	3.9494876	8935	3.9510946	8968	3.9526956
8903	3.9495364	8936	3.9511432	8969	3.9527440
8904	3.9495852	8937	3.9511918	8970	3.9527924
8905	3.9496339	8938	3.9512404	8971	3.9528409
8906	3.9496827	8939	3.9512889	8972	3.9528893
8907	3.9497315	8940	3.9513375	8973	3.9529377
8908	3.9497802	8941	3.9513861	8974	3.9529861
8909	3.9498290	8942	3.9514347	8975	5.9530345
8910	3.9498777	8943	3.9514832	8976	3.9530828
8911	3.9499264	8944	3.9515318	8977	3.9531312
8912	3.9499752	8945	3.9515803	8978	3.9531796
8913	3.9500239	8946	3.9516289	8979	3.9532280
8914	3.9500726	8947	3.9516774	8980	3.9532763
8915	3.9501213	8948	3.9517260	8981	3.9533247
8916	3.9501701	8949	3.9517745	8982	3.9533730
8917	3.9502188	8950	3.9518230	8983	3.9534214
8918	3.9502675	8951	3.9518716	8984	3.9534697
8919	3.9503162	8952	3.9519201	8985	3.9535181
8920	3.9503649	8953	5.9519686	8986	3.9535664
8921	3.9504135	8954	3.9520171	8987	3.9536147
8922	3.9504622	8955	3.9520656	8988	3.9536631
8923	3.9505109	8956	3.9521141	8989	3.9537114
8924	3.9505596	8957	3.9521626	8990	3.9537597
8925	3.9506082	8958	3.9522111	8991	3.9538080
8926	3.9506569	8959	3.9522595	8992	3.9538563
8927	3.9507055	8960	3.9523080	8993	3.9539046
8928	3.9507542	8961	3.9523565	8994	3.9539529
8929	3.9508028	8962	3.9524049	8995	3.9540012
8930	3.9508515	8963	3.9524534	8996	3.9540494
8931	3.9509001	8964	3.9525018	8997	3.9540977
8932	3.9509487	8965	3.9525503	8998	3.9541460
8933	3.9509973	8966	3.9525987	8699	3.9541943
8934	3.9510459	8967	3.9526472	9000	3.9542425

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9001	3.9542908	9034	3.9558801	9067	3.9574636
9002	3.9543390	9035	3.9559282	9068	3.9575115
9003	3.9543872	9036	3.9559762	9069	3.9575594
9004	3.9544355	9037	3.9560243	9070	3.9576073
9005	3.9544837	9038	3.9560723	9071	3.9576552
9006	3.9545319	9039	3.9561204	9072	3.9577030
9007	3.9545802	9040	3.9561684	9073	3.9577509
9008	3.9546284	9041	3.9562165	9074	3.9577988
9009	3.9546766	9042	3.9562645	9075	3.9578466
9010	3.9547248	9043	3.9563125	9076	3.9578945
9011	3.9547730	9044	3.9563606	9077	3.9579423
9012	3.9548212	9045	3.9564086	9078	3.9579902
9013	3.9548694	9046	3.9564566	9079	3.9580380
9014	3.9549176	9047	3.9565046	9080	3.9580858
9015	3.9549657	9048	3.9565526	9081	3.9581337
9016	3.9550139	9049	3.9566006	9082	3.9581815
9017	3.9550621	9050	3.9566486	9083	3.9582293
9018	3.9551102	9051	3.9566966	9084	3.9582771
9019	3.9551584	9052	3.9567445	9085	3.9583249
9020	3.9552065	9053	3.9567925	9086	3.9583727
9021	3.9552547	9054	3.9568405	9087	3.9584205
9022	3.9553028	9055	3.9568885	9088	3.9584683
9023	3.9553510	9056	3.9569364	9089	3.9585161
9024	3.9553991	9057	3.9569844	9090	3.9585639
9025	3.9554472	9058	3.9570323	9091	3.9586117
9026	3.9554953	9059	3.9570803	9092	3.9586594
9027	3.9555434	9060	3.9571282	9093	3.9587072
9028	3.9555915	9061	3.9571761	9094	3.9587549
9029	3.9556397	9062	3.9572241	9095	3.9588027
9030	3.9556877	9063	3.9572720	9096	3.9588505
9031	3.9558358	9064	3.9573199	9097	3.9588982
9032	3.9557839	9065	3.9573678	9098	3.9589459
9033	3.9558320	9066	3.9574157	9099	3.9589937
9034	3.9558801	9067	3.9574136	9100	3.9590414

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9101	3.9590891	9134	3.9606610	9167	3.9622272
9102	3.9591368	9135	3.9607085	9168	3.9622746
9103	3.9591845	9136	3.9607561	9169	3.9623220
9104	3.9592322	9137	3.9608036	9170	3.9623693
9105	3.9592799	9138	3.9608511	9171	3.9624167
9106	3.9593276	9139	3.9608987	9172	3.9624640
9107	3.9593753	9140	3.9609462	9173	3.9625114
9108	3.9594230	9141	3.9609937	9174	3.9625587
9109	3.9594707	9142	3.9610412	9175	3.9626061
9110	3.9595184	9143	3.9610887	9176	3.9626534
9111	3.9595660	9144	3.9611362	9177	3.9627007
9112	3.9596137	9145	3.9611837	9178	3.9627480
9113	3.9596614	9146	3.9612312	9179	3.9627954
9114	3.9597090	9147	3.9612787	9180	3.9628427
9115	3.9597567	9148	3.9613261	9181	3.9628900
9116	3.9598043	9149	3.9613736	9182	3.9629373
9117	3.9598519	9150	3.9614211	9183	3.9629846
9118	3.9598996	9151	3.9614685	9184	3.9630319
9119	3.9599472	9152	3.9615160	9185	3.9630792
9120	3.9599948	9153	3.9615635	9186	3.9631264
9121	3.9600424	9154	3.9616109	9187	3.9631737
9122	3.9600901	9155	3.9616583	9188	3.9632210
9123	3.9601377	9156	3.9617058	9189	3.9632682
9124	3.9601853	9157	3.9617532	9190	3.9633155
9125	3.9602329	9158	3.9618006	9191	3.9633628
9126	3.9602805	9159	3.9618480	9192	3.9634100
9127	3.9603280	9160	3.9618955	9193	3.9634573
9128	3.9603756	9161	3.9619429	9194	3.9635047
9129	3.9604232	9162	3.9619903	9195	3.9635517
9130	3.9604708	9163	3.9620377	9196	3.9635990
9131	3.9605183	9164	3.9620851	9197	3.9636462
9132	3.9605659	9165	3.9621325	9198	3.9636934
9133	3.9606134	9166	3.9621798	9199	3.9637406
9134	3.9606610	9167	3.9622272	9200	3.9637878

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9201	3.9638350	9234	3.9653899	9267	3.9669392
9202	3.9638822	9235	3.9654369	9268	3.9669860
9203	3.9639294	9236	3.9654839	9269	3.9670329
9204	3.9639766	9237	3.9655309	9270	3.9670797
9205	3.9640238	9238	3.9655779	9271	3.9671266
9206	3.9640710	9239	3.9656250	9272	3.9671734
9207	3.9641181	9240	3.9656720	9273	3.9672202
9208	3.9641653	9241	3.9657190	9274	3.9672671
9209	3.9642125	9242	3.9657660	9275	3.9673139
9210	3.9642596	9243	3.9658129	9276	3.9673607
9211	3.9643068	9244	3.9658599	9277	3.9674075
9212	3.9643539	9245	3.9659069	9278	3.9674544
9213	3.9644011	9246	3.9659539	9279	3.9675012
9214	3.9644482	9247	3.9660008	9280	3.9675480
9215	3.9644953	9248	3.9660478	9281	3.9675948
9216	3.9645425	9249	3.9660948	9282	3.9676416
9217	3.9645896	9250	3.9661417	9283	3.9676883
9218	3.9646367	9251	3.9661887	9284	3.9677351
9219	3.9646838	9252	3.9662356	9285	3.9677819
9220	3.9647309	9253	3.9662826	9286	3.9678287
9221	3.9647780	9254	3.9663295	9287	3.9678754
9222	3.9648251	9255	3.9663764	9288	3.9679222
9223	3.9648722	9256	3.9664233	9289	3.9679690
9224	3.9649193	9257	3.9664703	9290	3.9680157
9225	3.9649664	9258	3.9665172	9291	3.9680625
9226	3.9650134	9259	3.9665641	9292	3.9681092
9227	3.9650605	9260	3.9666110	9293	3.9681559
9228	3.9651076	9261	3.9666579	9294	3.9682027
9229	3.9651546	9262	3.9667048	9295	3.9682494
9230	3.9652017	9263	3.9667517	9296	3.9682961
9231	3.9652487	9264	3.9667985	9297	3.9683428
9232	3.9652958	9265	3.9668454	9298	3.9683895
9233	3.9653428	9266	3.9668923	9299	3.9684362
9234	3.9653898	9267	3.9669392	9300	3.9684809

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9301	3.9685296	9334	3.9700678	9367	3.9716005
9302	3.9685763	9335	3.9701143	9368	3.9716469
9303	3.9686230	9336	3.9701608	9369	3.9716932
9304	3.9686697	9337	3.9702074	9370	3.9717396
9305	3.9687164	9338	3.9702539	9371	3.9717859
9306	3.9687630	9339	3.9703004	9372	3.9718323
9307	3.9688097	9340	3.9703469	9373	3.9718786
9308	3.9688564	9341	3.9703934	9374	3.9719249
9309	3.9689030	9342	3.9704399	9375	3.9719713
9310	3.9689497	9343	3.9704863	9376	3.9720176
9311	3.9689963	9344	3.9705328	9377	3.9720639
9312	3.9690430	9345	3.9705793	9378	3.9721102
9313	3.9690896	9346	3.9706258	9379	3.9721565
9314	3.9691362	9347	3.9706722	9380	3.9722028
9315	3.9691829	9348	3.9707187	9381	3.9722491
9316	3.9692295	9349	3.9707652	9382	3.9722954
9317	3.9692761	9350	3.9708116	9383	3.9723417
9318	3.9693227	9351	3.9708581	9384	3.9723880
9319	3.9693693	9352	3.9709045	9385	3.9724343
9320	3.9694159	9353	3.9709509	9386	3.9724805
9321	3.9694625	9354	3.9709973	9387	3.9725268
9322	3.9695091	9355	3.9710438	9388	3.9725731
9323	3.9695557	9356	3.9710902	9389	3.9726193
9324	3.9696023	9357	3.9711366	9390	3.9726656
9325	3.9696488	9358	3.9711830	9391	3.9727118
9326	3.9696954	9359	3.9712294	9392	3.9727581
9327	3.9697420	9360	3.9712758	9393	3.9728043
9328	3.9697885	9361	3.9713222	9394	3.9728506
9329	3.9698351	9362	3.9713686	9395	3.9728968
9330	3.9698816	9363	3.9714150	9396	3.9729430
9331	3.9699282	9364	3.9714614	9397	3.9729892
9332	3.9699747	9365	3.9715078	9398	3.9730354
9333	3.9700213	9366	3.9715542	9399	3.9730816
9334	3.9700678	9367	3.9716005	9400	3.9731279

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9401	3.9731741	9434	3.9746959	9467	3.9762124
9402	3.9732262	9435	3.9747419	9468	3.9762582
9403	3.9732664	9436	3.9747879	9469	3.9763041
9404	3.9733126	9437	3.9748340	9470	3.9763500
9405	3.9733588	9438	3.9748800	9471	3.9763958
9406	3.9734050	9439	3.9749260	9472	3.9764417
9407	3.9734511	9440	3.9749720	9473	3.9764875
9408	3.9734973	9441	3.9750180	9474	3.9765334
9409	3.9735435	9442	3.9750640	9475	3.9765792
9410	3.9735896	9443	3.9751100	9476	3.9766251
9411	3.9736358	9444	3.9751560	9477	3.9766709
9412	3.9736819	9445	3.9752020	9478	3.9767167
9413	3.9737281	9446	3.9752479	9479	3.9767625
9414	3.9737742	9447	3.9752939	9480	3.9768083
9415	3.9738203	9448	3.9753399	9481	3.9768541
9416	3.9738664	9449	3.9753858	9482	3.9769000
9417	3.9739126	9450	3.9754318	9483	3.9769457
9418	3.9739587	9451	3.9754778	9484	3.9769915
9419	3.9740048	9452	3.9755237	9485	3.9770373
9420	3.9740509	9453	3.9755697	9486	3.9770831
9421	3.9740970	9454	3.9756156	9487	3.9771289
9422	3.9741431	9455	3.9756615	9488	3.9771747
9423	3.9741892	9456	3.9757075	9489	3.9772204
9424	3.9742353	9457	3.9757534	9490	3.9772662
9425	3.9742814	9458	3.9757993	9491	3.9773120
9426	3.9743274	9459	3.9758452	9492	3.9773577
9427	3.9743735	9460	3.9758911	9493	3.9774035
9428	3.9744196	9461	3.9759370	9494	3.9774492
9429	3.9744656	9462	3.9759829	9495	3.9774950
9430	3.9745117	9463	3.9760288	9496	3.9775407
9431	3.9745577	9464	3.9760747	9497	3.9775864
9432	3.9746038	9465	3.9761206	9498	3.9776322
9433	3.9746498	9466	3.9761665	9499	3.9776776
9434	3.9746959	9467	3.9762124	9500	3.9777236

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9501	3.9777693	9534	3.9792751	9567	3.9807757
9502	3.9778150	9535	3.9793207	9568	3.9808212
9503	3.9778607	9536	3.9793662	9569	3.9808665
9504	3.9779064	9537	3.9794118	9570	3.9809119
9505	3.9779521	9538	3.9794573	9571	3.9809573
9506	3.9779978	9539	3.9795028	9572	3.9810027
9507	3.9780435	9540	3.9795484	9573	3.9810480
9508	3.9780892	9541	3.9795939	9574	3.9810934
9509	3.9781348	9542	3.9796394	9575	3.9811388
9510	3.9781805	9543	3.9796849	9576	3.9811841
9511	3.9782262	9544	3.9797304	9577	3.9812295
9512	3.9782718	9545	3.9797759	9578	3.9812748
9513	3.9783175	9546	3.9798214	9579	3.9813202
9514	3.9783631	9547	3.9798669	9580	3.9813655
9515	3.9784088	9548	3.9799124	9581	3.9814108
9516	3.9784544	9549	3.9799579	9582	3.9814562
9517	3.9785001	9550	3.9800034	9583	3.9815015
9518	3.9785457	9551	3.9800488	9584	3.9815468
9519	3.9785913	9552	3.9800943	9585	3.9815921
9520	3.9786369	9553	3.9801398	9586	3.9816374
9521	3.9786826	9554	3.9801852	9587	3.9816827
9522	3.9787282	9555	3.9802307	9588	3.9817280
9523	3.9787738	9556	3.9802761	9589	3.9817733
9524	3.9788194	9557	3.9803216	9590	3.9818186
9525	3.9788650	9558	3.9803670	9591	3.9818639
9526	3.9789106	9559	3.9804225	9592	3.9819092
9527	3.9789562	9560	3.9804579	9593	3.9819544
9528	3.9790017	9561	3.9805033	9594	3.9819997
9529	3.9790473	9562	3.9805487	9595	3.9820450
9530	3.9790929	9563	3.9805941	9596	3.9820902
9531	3.9791385	9564	3.9806396	9597	3.9821355
9532	3.9791840	9565	3.9806850	9598	3.9821807
9533	3.9792296	9566	3.9807304	9599	3.9822260
9534	3.9792751	9567	3.9807758	9600	3.9822712

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9601	3.9823165	9634	3.9838066	9667	3.9852917
9602	3.9823617	9635	3.9838517	9668	3.9853366
9603	3.9824069	9636	3.9838968	9669	3.9853816
9604	3.9824521	9637	3.9839418	9670	3.9854265
9605	3.9824974	9638	3.9839869	9671	3.9854714
9606	3.9825426	9639	3.9840320	9672	3.9855163
9607	3.9825878	9640	3.9840770	9673	3.9855612
9608	3.9826330	9641	3.9841221	9674	3.9856061
9609	3.9826782	9642	3.9841671	8675	3.9856510
9610	3.9827234	9643	3.9842122	9676	3.9856958
9611	3.9827686	9644	3.9842572	9677	3.9857407
9612	3.9828138	9645	3.9843022	9678	3.9857856
9613	3.9828589	9646	3.9843472	9679	3.9858305
9614	3.9829041	9647	3.9843923	9680	3.9858753
9615	3.9829493	9648	3.9844373	9681	3.9859202
9616	3.9829944	9649	3.9844823	9682	3.9859651
9617	3.9830396	9650	3.9845273	9683	3.9860099
9618	3.9830848	9651	3.9845723	9684	3.9860548
9619	3.9831299	9652	3.9846173	9685	3.9860996
9620	3.9831751	9653	3.9846623	9686	3.9861445
9621	3.9832202	9654	3.9847073	9687	3.9861893
9622	3.9832653	9655	3.9847523	9688	3.9862341
9623	3.9833105	9656	3.9847972	9689	3.9862789
9624	3.9833556	9657	3.9848422	9690	3.9863238
9625	3.9834007	9658	3.9848872	9691	3.9863686
9626	3.9834458	9659	3.9849322	9692	3.9864134
9627	3.9834910	9660	3.9849771	9693	3.9864582
9628	3.9835361	9661	3.9850221	9694	3.9865030
9629	3.9835812	9662	3.9850670	9695	3.9865478
9630	3.9836263	9663	3.9851120	9696	3.9865926
9631	3.9836714	9664	3.9851569	9697	3.9866374
9632	3.9837165	9665	3.9852018	9698	3.9866822
9633	3.9837616	9666	3.9852468	9699	3.9867269
9634	3.9838066	9667	3.9852917	9700	3.9867717

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9701	3.9868105	9734	3.9882913	9767	3.9897612
9702	3.9868613	9735	3.9883360	9768	3.9898056
9703	3.9869060	9736	3.9883806	9769	3.9898501
9704	3.9869508	9737	3.9884252	9770	3.9898946
9705	3.9869955	9738	3.9884698	9771	3.9899390
9706	3.9870403	9739	3.9885144	9772	3.9899835
9707	3.9870850	9740	3.9885590	9773	3.9900279
9708	3.9871298	9741	3.9886035	9774	3.9900723
9709	3.9871745	9742	3.9886481	9775	3.9901168
9710	3.9872192	9743	3.9886927	9776	3.9901612
9711	3.9872640	9744	3.9887373	9777	3.9902056
9712	3.9873087	9745	3.9887818	9778	3.9902500
9713	3.9873534	9746	3.9888264	9779	3.9902944
9714	3.9873981	9747	3.9888710	9780	3.9903389
9715	3.9874428	9748	3.9889155	9781	3.9903833
9716	3.9874875	9749	3.9889601	9782	3.9904277
9717	3.9875322	9750	3.9890046	9783	3.9904721
9718	3.9875769	9751	3.9890492	9784	3.9905164
9719	3.9876216	9752	3.9890937	9785	3.9905608
9720	3.9876662	9753	3.9891382	9786	3.9906052
9721	3.9877109	9754	3.9891828	9787	3.9906496
9722	3.9877556	9755	3.9892273	9788	3.9906940
9723	3.9878003	9756	3.9892718	9789	3.9907383
9724	3.9878449	9757	3.9893163	9790	3.9907827
9725	3.9878896	9758	3.9893608	9791	3.9908270
9726	3.9879343	9759	3.9894053	9792	3.9908714
9727	3.9879789	9760	3.9894498	9793	3.9909158
9728	3.9880236	9761	3.9894943	9794	3.9909601
9729	3.9880682	9762	3.9895388	9795	3.9900044
9730	3.9881128	9763	3.9895833	9796	3.9910488
9731	3.9881575	9764	3.9896278	9797	3.9910931
9732	3.9882021	9765	3.9896722	9798	3.9911374
9733	3.9882467	9766	3.9897167	9799	3.9911818
9734	3.9882913	9767	3.9897612	9800	3.9912261

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9801	3.9912704	9834	3.9927302	9867	3.9941851
9802	3.9913147	9835	3.9927744	9868	3.9942291
9803	3.9913590	9836	3.9928185	9869	3.9942731
9804	3.9914033	9837	3.9928627	9870	3.9943172
9805	3.9914476	9838	3.9929068	9871	3.9943612
9806	3.9914919	9839	3.9929510	9872	3.9944051
9807	3.9915362	9840	3.9929951	9873	3.9944491
9808	3.9915805	9841	3.9930392	9874	3.9944931
9809	3.9916247	9842	3.9930834	9875	3.9945371
9810	3.9916690	9843	3.9931275	9876	3.9945811
9811	3.9917133	9844	3.9931716	9877	3.9946251
9812	3.9917575	9845	3.9932157	9878	3.9946690
9813	3.9918018	9846	3.9932598	9879	3.9947130
9814	3.9918461	9847	3.9933039	9880	3.9947569
9815	3.9918903	9848	3.9933480	9881	3.9948009
9816	3.9919345	9849	3.9933921	9882	3.9948448
9817	3.9919788	9850	3.9934362	9883	3.9948888
9818	3.9920230	9851	3.9934803	9884	3.9949327
9819	3.9920673	9852	3.9935244	9885	3.9949767
9820	3.9921115	9853	3.9935585	9886	3.9950206
9821	3.9921557	9854	3.9936126	9887	3.9950645
9822	3.9921999	9855	3.9936566	9888	3.9951085
9823	3.9922441	9856	3.9937007	9889	3.9951524
9824	3.9922884	9857	3.9937448	9890	3.9951963
9825	3.9923326	9858	3.9937888	9891	3.9952402
9826	3.9923768	9859	3.9938329	9892	3.9952841
9827	3.9924210	9860	3.9938769	9893	3.9953280
9828	3.9924651	9861	3.9939210	9894	3.9953719
9829	3.9925093	9862	3.9939650	9895	3.9954158
9830	3.9925535	9863	3.9940090	9896	3.9954597
9831	3.9925977	9864	3.9940531	9897	3.9955036
9832	3.9926419	9865	3.9940971	9898	3.9955474
9833	3.9926860	9866	3.9941411	9899	3.9955913
9834	3.9927302	9867	3.9941851	9900	3.9956352

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9901	3.9956791	9934	3.9971241	9967	3.9985644
9902	3.9957229	9935	3.9971679	9968	3.9986080
9903	3.9957668	9936	3.9972116	9969	3.9986516
9904	3.9958106	9937	3.9972553	9970	3.9986951
9905	3.9958545	9938	3.9972990	9971	3.9987387
9906	3.9958983	9939	3.9973427	9972	3.9987823
9907	3.9959422	9940	3.9973864	9973	3.9988258
9908	3.9959860	9941	3.9974301	9974	3.9988694
9909	3.9960298	9942	3.9974737	9975	3.9989129
9910	3.9960736	9943	3.9975154	9976	3.9989564
9911	3.9961175	9944	3.9975611	9977	3.9990000
9912	3.9961613	9945	3.9976048	9978	3.9990435
9913	3.9962051	9946	3.9976484	9979	3.9990870
9914	3.9962489	9947	3.9976921	9980	3.9991305
9915	3.9962927	9948	3.9977358	9981	3.9991740
9916	3.9963365	9949	3.9977794	9982	3.9992176
9917	3.9963803	9950	3.9978231	9983	3.9992611
9918	3.9964241	9951	3.9978667	9984	3.9993046
9919	3.9964679	9952	3.9979104	9985	3.9993381
9920	3.9965117	9953	5.9979540	9986	3.9993916
9921	3.9965554	9954	3.9979976	9987	3.9994350
9922	3.9965992	9955	3.9980413	9988	3.9994785
9923	3.9966430	9956	3.9980849	9989	3.9995220
9924	3.9966867	9957	3.9981285	9990	3.9995655
9925	3.9967305	9958	3.9981721	9991	3.9996089
9926	3.9967743	9959	3.9982157	9992	3.9996524
9927	3.9968180	9960	3.9982593	9993	3.9996959
9928	3.9968618	9961	3.9983029	9994	3.9997393
9929	3.9969055	9962	3.9983465	9995	3.9997828
9930	3.9969492	9963	3.9983901	9996	3.999826a
9931	3.9969930	9964	3.9984337	9997	3.9998697
9932	3.9970367	9965	3.9984773	9998	3.9999131
9933	3.9970804	9966	3.9985209	9999	3.9999566
9934	3.9971241	9967	3.9985644	10000	4.0000000

LIBRO III.

DE LA TRIGONOMETRIA Rectilinea.

DEFINICIONES.

1 EN los triangulos rectangulos, tanto rectilineos, como esfericos, el lado opuesto al angulo recto, se llama *hipotenusa*; los otros se quedan con el nombre general de *lados*.

2 En qualquiera triangulo, el angulo que hace frente à un lado, se llama *angulo opuesto à aquel lado*, y èste se llama *lado opuesto al angulo*.

3 *Angulo adyacente, ò contermino à un lado*, es el que se forma sobre aquel lado; y assimismo, *lado adyacente, ò contermino à un angulo*, es el que juntamente con otro lado forma aquel angulo. Las especies de los triangulos rectilineos, y sus definiciones, quedan explicadas en el *lib.* 1. de la Geometria Elementar.

CAPITULO I.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA la resolucion de los triangulos rectilineos rectangulos.

PROP. I. Theorema.

En qualquiera triangulo rectilineo, los lados son proporcionales con los senos de los angulos opuestos. (fig.6.)

SEa qualquier triangulo rectilineo ABC. Digo, que assi se ha el lado AB con el lado BC, como el seno del angulo ACB, con el ſeno del angulo BAC. Circunſcrivaſe à dicho triangulo un circulo; y dividiendo por medio los lados AB, BC, en D, y E, tirenſe del centro las lineas FD, FE, las quales (3.3. Eucl.) ſeràn perpendiculares à los lados AB, BC, y dividiràn por medio los angulos AFB, BFC: tirenſe tambien las lineas FB, FA, FC; y ſerà (20.3. Eucl.) el angulo AFD, hecho en el centro, igual al angulo ACB, hecho en la periferia; y el angulo BFE, igual al angulo BAC.

Demonſtr. Aſsi ſe ha el lado AB, al lado BC, como AD, mitad de AB, à BE, mitad de BC; (15.5. Eucl.) y ſiendo AD (*defin.* 4. *lib.* 1.) ſeno del angulo AFD, ù de ACB ſu igual; (20. 3. Eucl.) y BE, ſeno del angulo BFE, ù de BAC ſu igual, ſerà el lado AB, con el lado BC, como el ſeno del angulo ACB, con el ſeno del angulo BAC.

Lo miſmo ſe convence, aunque el triangulo ſea obtuſangulo; y para que ſe vea con mas claridad, ſea en la *fig.* 7. el triangulo obtuſangulo BAC. Circunſcrivaſele el circulo: dividaſe el lado BC por medio en D; y tireſe del centro la GD, que (3. 3. Eucl.) ſerà perpendicular à BC; y la BD, ſerà ſeno del angulo BGD.

Demonſtr. El angulo BGC, formado en el centro, es duplo, aſsi del angulo F, como del angulo BGD: luego el angulo F, y el BGD ſon iguales; y ſiendo BD ſeno del angulo BGD, tambien lo ſerà del angulo F: luego, ſegun lo dicho en la *defin.* 4. del *lib.* 1. la miſma BD ſerà tambien ſeno del angulo, que es complemento del angulo F, al ſemicirculo; ſiendo pues (22.3. Eucl.) el angulo obtuſo A, complemento del angulo F, al ſemicirculo, ſerà BD ſeno del angulo A: luego la miſma razon tendrà el lado BC, al lado BA, que BD, ſeno del angulo A, à BN, ſeno del angulo C, como conſta de la demonſtracion antecedente. *Eſte theorema es general para todos los triangulos rectilineos, y el fundamento de las operaciones trigonometricas.*

PROP.

PROP. II. Theorema.

En los triangulos rectangulos la misma razon tiene la hipotenusa con qualquiera lado, que el radio al seno del angulo opuesto à dicho lado. (*fig.*8.)

SEa el triangulo ABC rectangulo en C. Digo, que la hipotenusa BA, tiene con el lado AC, la misma razon que el radio BD à la DE, seno del angulo B opuesto al lado AC.

Demonstr. Por ser los angulos C, y E rectos, seràn las AC, DE paralelas: luego (2. 6.) los triangulos BAC, BDE son semejantes, y sus lados son proporcionales, como la hipotenusa BA, al lado AC; assi el radio BD, à DE seno del angulo B. Lo mismo se demonstrarà con el lado BC, haciendo con èl otra construccion semejante.

PROP. III. Theorema.

En los triangulos rectangulos, assi se ha el lado contermino à un angulo con el lado opuesto à dicho angulo, como el radio con la tangente de dicho angulo. (*fig.*8.)

SEa el triangulo ABC. Digo, que el lado BC, que es contermino al angulo B, assi se ha con el lado CA, opuesto al mismo angulo, como el radio BG à la GF, tangente del mismo angulo B.

Demonstr. Los triangulos BAC, BFG, (2.6.Eucl.) son semejantes: luego sus lados son proporcionales, como BC à CA, assi BG à GF.

Por la misma razon son proporcionales el lado BC *à la hipotenusa* BA, *como el radio* BG *à la secante* BF.

CAPITULO II.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS RECTILINEOS RECTANGULOS.

1 EN qualquiera triangulo se hallan seis cosas, es à saber, tres lados, y tres angulos; y de estas seis se han de presuponer conocidas tres, para que se

pueda resolver el triangulo. En los triangulos rectilineos, aunque se supongan conocidos los tres angulos, no se puede passar al conocimiento de los lados, sino es que uno de èstos se suponga conocido, porque siendo los angulos los mismos, pueden ser mayores, ò menores los lados: conque para llegar à la resolucion, serà menester tener conocidos, ò dos lados, y un angulo; ò dos angulos, y un lado; ò los tres lados.

2 En el triangulo rectangulo, como el angulo recto siempre sea conocido, solo se necessita del conocimiento de un otro angulo, y de un lado, ù de dos lados.

3 Para mayor claridad las cosas dadas, ò que se suponen conocidas en un triangulo, se notaràn con una raya pequeña; y las que se buscan, con un zero.

4 Sea regla general, siempre que la hipotenusa entra en la proporcion, se resuelve el triangulo en virtud del theorema 2. y siempre que entran en dicha proporcion dos lados, se resuelve por el theorema 3.

5 En las reglas de tres, para resolver los triangulos, pondremos en lugar del logarithmo del primer termino su complemento logarithmico, (31. *lib.* 2.) y le señalaremos con las iniciales C, L: conque quando el primer termino fuere el radio, no hay para que escrivirle, por ser el complemento del radio al mismo radio todo zeros; si bien en los exemplos que se pondràn en adelante, le escriviremos para mayor expression de la practica.

6 En consequencia de esto, como la resolucion de los triangulos consista en hallar un quarto proporcional à los tres terminos dados, ò conocidos, observarèmos en las resoluciones la regla dada en la *propos.* 33. *lib.* 2. segun la qual, la suma de los tres logarithmos menos el radio, da el quarto logarithmo que se busca. Quitase el radio, quitando, ò omitiendo la unidad primera que se havia de escrivir à la izquierda de la caracteristica: y si el termino primero fuere tangente mayor que la de 45. grados, porque en ella se toma el complemento al duplo radio, se havrà de quitar èste de la suma, omitiendo el 2. que se havia de escrivir à la izquierda de la caracteristica. Tengase esto muy en la memoria.

Las

Las proposiciones siguientes contienen la practica de resolver los triangulos, en las quales guardarèmos este orden, que las primeras serviràn para hallar los angulos; y las otras, para hallar los lados.

PROP. IV. Problema.

En el triangulo rectangulo, dados los lados, hallar los angulos. (*fig.* 9.)

EN el triangulo ABC, se suponen conocidos los lados AB, y CB, de suerte, que AB es de 1230. pies; y CB de 720. pies. Pidese el angulo A.

Proporcion, prop. 3.	*Logarithmos.*
Como AB 1230. *pies,*	C.L. 6.9100949.
à CB 720. *pies;*	2.8573325.
assi el radio,	10.0000000.
à la tangente del ang. A. 30. *gr.* 20. *min.*	9.7674274.

Hallado el angulo A, queda conocido el angulo C, que es su complemento à 90. grados.

PROP. V. Problema.

En el triangulo rectangulo, dada la hipotenusa, y un lado, hallar los angulos. (*fig.* 9.)

EN el mismo triangulo ABC, dada la hipotenusa AC, 1425. pies, y el lado AB 1230. pies, se pide el angulo C.

Proporcion, propos. 2.	*Logarithmos.*
Como la hipot. AC 1425. *pies,*	C.L. 6.8461851.
al radio;	10.0000000.
assi AB 1230. *pies,*	3.0899051.
al seno del angulo C 59. *gr.* 40. *min.*	9.9360902.

Hallado el angulo C, se sabe el angulo A, su complemento à 90. gr.

PROP. VI. Problema.

En el triangulo rectangulo, dados los angulos, y un lado, hallar el otro lado. (*fig.* 10.)

SEa el angulo A 30. gr. 20. min. y el lado AB 1230. pies. Pidese el lado BC.

Pro-

Proporcion.	*Logarithmos.*
Como el radio,	C.L. 0.0000000.
à la tang. del ang. A conter. 30. gr. 20. m.	9.7674274.
assi el lado AB 1230. pies,	3.0899051.
al lado BC 720. pies.	2.8573325.

PROP. VII. Problema.

En el triangulo rectangulo, dados los angulos, y la hipotenusa, hallar los lados. (fig. 10.)

EN el triangulo ABC es el angulo A 30. gr. 20. min. y la hipotenusa AC 1425. pies. Pidese el lado BC.

Proporcion.	*Logarithmos.*
Como el radio,	0.0000000.
à la hipotenusa AC 1425. pies;	3.1538149.
assi el seno del ang. 30. 20. min.	9.7033170.
al lado opuesto BC 720. pies.	2.8571319.

De la misma manera se hallarà el otro lado AB, valiendose de su angulo opuesto C.

PROP. VIII. Problema.

En el triangulo rectangulo, dada la hipotenusa, y un lado, hallar el otro lado. (fig. 10.)

EN el mismo triangulo ABC, sea dada la hipotenusa AC 1425. pies; el lado AB 1230. pies. Pidese el otro lado CB.

Modo 1. Hallense (5.) los angulos A, y C; y hallados estos, busquese el lado CB, que se hallarà por la *propos.* 6. ò por la 7.

Modo 2. Sumese la hipotenusa 1425. y el lado dado 1230. y serà la suma 2655. Hallese el logarithmo de esta suma, que es 3.4240645. Restese el lado dado 1230. de la hipotenusa 1425. y es la diferencia 195. cuyo logarithmo es 2.2900346. Sumense estos dos logarithmos, y la mitad de la suma, que es 2.8570495. serà el logarith-

mo

mo del lado BC 720. que ſe deſea. El fundamento de eſta operacion, ſe verà mas adelante.

Hipotenuſa AC	1425.	
lado AB	1230.	
ſuma	2655. L.	3.4240645.
diferencia	195. L.	2.2900346.
ſuma		5.7140991.
ſemiſuma		2.8570495. BC 720.

PROP. IX. Problema.

En el triangulo rectangulo, dados los angulos, y un lado, hallar la hipotenuſa. (*fig.* 11.)

EN el triangulo ABC, ſe ſupone dado el lado BC 720. pies, y el angulo A 30. gr. 20. min. Pideſe la hypotenuſa AC.

Proporcion.	*Logarithmos.*
Como el ſeno del ang. A 30.*gr.* 20.*min.*	C.L. 0.2966830.
al lado BC *ſu opueſto* 720. *pies;*	2.8573325.
aſsi el radio	10.0000000.
à la hipotenuſa 1425.	3.1540155.

PROP. X. Problema.

En el triangulo rectangulo, dados los lados, hallar la hipotenuſa. (*fig.* 11.)

BUſquenſe primeramente los angulos; (4.) y hallados èſtos, buſqueſe la hipotenuſa, por la propoſ. antecedente.

CA-

CAPITULO III.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION de los triangulos rectilineos obliquangulos.

PROP. XI. Theorema.

En qualquiera triangulo rectilineo, la ſuma de dos lados, à la diferencia de los miſmos, tiene la miſma razon que la tangente de la ſemiſuma de los angulos opueſtos, à la tangente de la ſemidiferencia de los miſmos. (*fig.* 12.)

EXplicacion. Digo, que en el triangulo ABC, la ſuma de los lados AB, AC, tiene la miſma razon con la diferencia de los miſmos, que la tangente de la ſemiſuma de los angulos B, y C, opueſtos à dichos lados, tiene con la tangente de la ſemidiferencia de los miſmos angulos.

Continueſe la linea BA, haſta D, de ſuerte, que AD ſea igual à AC: corteſe DR igual à AB: con eſto ſerà toda la DB, ſuma de los lados BA, AC; y RA ſerà la diferencia de los miſmos lados. Tireſe la linea DC; y porque AD, AC ſon iguales, la perpendicular AE, dividirà por medio, tanto la baſa DC, como al angulo DAC. (*corolar.* 3. *de la* 5. *lib.*1.Eucl.) Y porque el angulo DAC es externo, reſpecto del triangulo ABC, ſerà (32.1. Eucl.) igual à la ſuma de los angulos B, y C: conque el angulo EAC, ſerà la ſemiſuma de los miſmos angulos. Tirenſe las rectas RL, AH, paralelas à BC, y ſerà (27.1.Eucl.) el angulo DAH igual al angulo B; y HAC, igual al alterno ACB. Y ſiendo BA igual à RD, ſerà (2.6.Eucl.) CH igual à LD; y por conſiguiente EH, EL, quedaràn iguales, como tambien los angulos EAL, EAH, y los LAD, HAC: y el angulo LAH, ſerà la diferencia de los angulos DAH, HAC, ù de B, y C ſus iguales: luego EAH, ſerà la ſemidiferencia de los miſmos angulos B, y C; y haciendo un circulo con el radio AE, ſerà EC tangente de la ſemiſuma EAC; y EH tangente de la ſemidiferencia EAH. Demueſtro pues, que BD, ſuma de los lados BA, AC, tiene con RA, diferencia de los miſmos, la la razon misma que EC, tangente de la semisuma de los angulos B, y C, con EH, tangente de la semidiferencia de los mismos.

Demonstr. Por ser LR, AH, BC paralelas, seràn proporcionales (2.6.Eucl.) como DB à RA, assi DC à LH; y siendo toda DC à toda LH, como EC, mitad de DC à EH, mitad de LH, serà DB, suma de los lados, à RA, diferencia de los mismos, como EC, tangente de la semisuma de los angulos B, y C, à EH, tangente de la semidiferencia de los mismos.

COROLARIO.

EN este Theorema se funda la resolucion de qualquiera triangulo, dados dos de sus lados, y el angulo comprehendido entre ellos; porque sumando los lados AB, AC, se sabe su suma; y restando AB de AC, se sabe su diferencia. Tambien restando el angulo A de 180. grad. el residuo es la suma de los angulos B, y C, y su mitad es la semisuma, con lo qual se dispondrà la proporcion demonstrada: como la suma de los lados, à la diferencia de los msmos; assi la tangente de la semisuma, al termino quarto, que serà la tangente de la semidiferencia de dichos angulos: esta semidiferencia ya conocida, si se añade à la semisuma de los angulos, se sabrà el angulo mayor; y restandola de la misma semisuma, se sabrà el menor.

PROP. XII. Theorema.

En qualquier triangulo, el lado mayor se ha con la suma de los otros lados, como la diferencia de estos à la diferencia de los segmentos hechos en el lado mayor con la perpendicular tirada del vertice à dicho lado.

(*fig.* 13.)

E*Xplicacion.* Sea el triangulo ABC, cuyo lado mayor, ò basa sea AC: cayga de la cuspide B la perpendicular BE, y con la distancia BC descrivase un circulo del centro B, y continuesse el lado AB hasta G. Hecho esto, porque BG, y BC son iguales, serà ABG suma de los lados AB, BC; y porque la perpendicular BE divide la cuerda DC en E en dos partes iguales, (3.3.Eucl.) serà DA la diferencia de los

seg-

segmentos CE, EA; y porque BC, y BH son iguales, serà HA la diferencia de los lados CB, BA. Digo pues, que assi se ha AC lado mayor, à GA suma de los otros lados, como HA diferencia de los mismos lados, à DA diferencia de los segmentos de la basa.

Demonstracion. El rectangulo hecho de AG, AH, es igual al rectangulo hecho de AC, AD: (36.3. Eucl.) luego si dichas lineas se disponen de esta suerte: AC, AG, AH, AD, serà verdadero decir, que el rectangulo de las extremas AC, AD, es igual al rectangulo de las medias AG, AH, por la razon sobredicha: luego (16.6. Eucl.) seràn proporcionales.

Como AC, basa, ò lado mayor,
à AG, suma de los otros lados;
assi HA, diferencia de los mismos lados,
à DA, diferencia de los segmentos de la basa.

COROLARIO.

EN este Theorema se funda la resolucion de qualquiera triangulo, quando se dàn sus tres lados sin conocerse ningun angulo; porque tirando la perpendicular BE, queda dividido en dos triangulos rectangulos; y como se dèn conocidos los tres lados del triangulo ABC, se sabe el lado mayor AC; y sumando los otros AB, y BC, se sabe su suma AG; y restando BC de BA, se sabe AH su diferencia; y por regla de tres, con los terminos AC, AG, AH, se sabe el quarto proporcional AD, que restandole de AC, se sabe DC; y por consiguiente, su mitad EC: luego en el triangulo rectangulo BEC se sabe el lado EC, y la hipotenusa BC: luego (5.) se hallarà el angulo EBC, diciendo: como la hipotenusa BC, al radio, assi el lado EC al seno del angulo EBC: sabido èste, se sabe el angulo C, su complemento à 90. grad. De la misma suerte se resolverà el triangulo AEB, y se hallarà el angulo A, y quedarà resuelto el triangulo ABC.

Estos Theoremas son absolutamente bastantes para demonstrar la resolucion de qualesquiera triangulos rectilineos obliquangulos; y assi por la brevedad omito otros, que à mas de ser cansados, solo sirven para demonstrar otras practicas de resolver, que para mayor abundancia se pondràn en su lugar.

CA-

CAPITULO IV.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS rectilineos obliquangulos.

PROP. XIII. Problema.

En el triangulo obliquangulo, dados dos lados, y uno de los angulos opuestos, hallar los otros angulos, sabiendose si el que se busca es agudo, ò obtuso. (*fig.* 14.)

EN el triangulo ABC, conocidos los lados BA, AC, aquel de 400. pies, y èste de 300. y el angulo B opuesto al lado AC de 54. grad. 30. min. se buscan los angulos C, y A; y primeramente el angulo C opuesto al lado AB, suponiendo sea dicho angulo agudo.

Proporcion, prop. 1.		*Logarithmos.*
Como el lado AC opuesto à B,	400.	C.L. 7.3979400.
al seno del angulo B;	54.gr.30.min.	9.9106860.
assi el lado AB,	300.	2.4771212.
al seno del ang. C.	37.gr.38.min.	9.7857472.

Hallado el angulo C, se sabe el angulo A; porque sumando el angulo C hallado, con el angulo B dado, lo que và de esta suma hasta los 180. grados es el angulo A, que en este exemplo es 87. gr. 52. min.

Dixe al principio ser menester, se conozca si el angulo C, que se busca es agudo, ò obtuso; porque siendo un mismo seno comun para el angulo agudo, y para el obtuso, que es su complemento al semicirculo, quedaria siempre en duda el Analista, qual de los dos sea el verdadero.

PROP.

PROP. XIV. Problema.

En el triangulo obliquangulo dados los lados, y el angulo comprehendido entre ellos, hallar los demàs angulos. (fig. 15.)

EN el triangulo ABC ſe ſupone conocido el angulo A, de 30. grad. 4. min. el lado CA 590. pies; y AB 300. y ſe buſcan los angulos B, y C. *Operacion.* Halleſe el complemento del angulo conocido A à 180. grad. y ſerà 149. grad. 56. min. y tanto ſerà la ſuma de los otros angulos B, y C; y la ſemiſuma ſerà 74. gr. 58. min. Sumenſe los lados conocidos CA, AB, y ſerà la ſuma 890. pies: reſteſe el lado menor AB del mayor AC, y ſerà la diferencia 290. pies; y diſpongaſe (11.) la ſiguiente proporcion.

Como la ſuma de los lados	890.	C.L. 7.0506100.
à la diferencia de los miſmos	290.	2.4623980.
aſsi la tang. de la ſemiſuma de los angulos B, y C,	74.gr.58.m.	10.5709379.
à la tang. de la ſemidifer. de los miſmos ang. B, y C,	50.gr.30.m.	10.0839459.

Es pues la ſemidiferencia de los angulos B, y C, 50.gr. 30. min. que añadida à la ſemiſuma de los miſmos 74. gr. 58. min. da el valor del angulo B, 125. gr. 28. min. Y reſtada de la miſma ſemiſuma, da el angulo C de 24. gr. 28. min. y queda hecha la reſolucion.

PROP. XV. Problema.

En el triangulo obliquangulo, dados los tres lados, hallar qualquiera angulo. (fig. 16.)

SEa el triangulo ABC, cuyos tres lados ſe ſuponen conocidos; AC 1277. pies; AB 865. y BG 632. Pidenſe ſus angulos.

Modo 1. Supongaſe, que el lado mayor CA, es la baſa, à quien ſe tira la perpendicular BE; conque quedarà dicho

trian-

triangulo dividido en dos triangulos rectangulos. Sumense los dos lados BC, y BA, y serà la suma 1497. Restese el lado BC del lado BA, y serà la diferencia 233. y se dispondrà la proporcion siguiente, fundada en la *prop.* 12.

Como AC,	1277	C.L.	6.8638091.
à la suma de AB, y BC,	1497		3.1752218.
asi la diferencia de AB, y BC,	233		2.3673559.
à AD, diferencia de los segmen. AE, EC,	273		2.4363868.

Hecho esto, si la diferencia AD 273. se resta de AC 1277. quedarà DC 1004. cuya mitad 502. es CE, ò ED; y añadida à AD, serà el segmento EA 775.

Conque en el triangulo rectangulo ABE, tenemos ya conocida la hipotenusa AB 865. y el lado AE 775. luego por la *propos.* 5. se hallarà el angulo ABE 63. gr. 38. min. y el angulo A 26. gr. 22. min. Assimismo en el triangulo rectangulo BEC, tenemos conocida la hipotenusa BC 632. y el lado CE 502. luego por la dicha *propos.* 5. se hallarà el angulo CBE 52.gr. 35. min. y el angulo C 37. gr. 25. min. Sumense ultimamente los angulos ABE, y CBE, y la suma 116. gr. 13. min. serà el valor del angulo ABC, y queda todo conocido.

Modo 2. Sumense los tres lados, y de la semisuma restense los lados conterminos al angulo que se busca, cada uno de por sì, y guardense las diferencias halladas, y se formarà esta proporcion.

Como el producto de los lados conterminos del angulo que se busca,
al producto de las diferencias halladas:
assi el quadrado del radio,
al quadrado del seno de la mitad del angulo que se busca.

Para hallar el logarithmo del primer termino, ò producto de los lados conterminos, se han de sumar los logarithmos de dichos lados, y la suma serà el logarithmo de su producto: (*corol.* 5. *lib.* 2.) y porque en lugar de este lo-

logarithmo del producto, usamos de su complemento logarithmico (que es lo mismo que la suma de los complementos logarithmicos de cada lado) bastarà, para mayor brevedad, escrivir los dos dichos complementos en lugar del termino primero. Despues de esto se escrivirán los logarithmos de las diferencias halladas, porque ambos juntos son el logarithmo del termino segundo; esto es, del producto de las diferencias. Despues se havia de escrivir el logarithmo duplicado del radio, que (14. 2.) es el logarithmo de su quadrado; pero por haverse puesto en el primer termino los dos complementos logarithmicos, ya no es menester, por haverse añadido en cada uno de ellos una vez el logarithmo del radio. Sumense todos los dichos logarithmos sin quitar el radio de la suma, por haverse omitido ya en el tercer termino; y la mitad de la suma serà el logarithmo de la mitad del angulo que se busca. Toda esta operacion se ve en la siguiente resolucion del triangulo ABC. (*fig.* 15.)

Lado AC	1277.
Lado AB	865.
Lado BC	632.
Suma de los lados.	2774.
Semisuma de los lados.	1387.
Diferencia de la semisuma, y AB.	522.
Diferencia de la semisuma, y BC.	755.

			Logarithmos.
Lado AB.	865.	C.L.	7.0629839.
Lado BC.	632.	C.L.	7.1992829.
Difer. de AB.	522.		2.7176705.
Difer. de BC.	755.		2.8779469.
Suma.			19.8578842.
Semisuma.			9.9289421.

Esta semisuma es el logarithmo del seno de 58. grad. 6. min. y medio, mitad del angulo ABC: y su duplo 116. grad. 13. min. es el angulo ABC que se busca.

Este segundo modo de resolver es de Adriano Ulac, cuya practica es tan facil, quanto dificultosa su demonstracion;

y

y el P. Dechales en el *lib. 3. de la Trigonomet.* à lo ultimo de la *prop.* 20. dice: *Demonstrationem autem hujus praxis satis claram adhuc non inveni.* Esto no obstante, intentarè demonstrarle, añadiendo antes el lema siguiente.

LEMA.

En qualquiera triangulo son proporcionales: el rectangulo hecho de los lados, que comprehenden un angulo, al rectangulo hecho de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados; y de la semidiferencia que hay entre la basa, y la diferencia de los lados: assi el quadrado del radio, al quadrado del seno de la mitad del angulo comprehendido de dichos lados. (*fig.* 17.)

EXplicacion. Sea el triangulo BAC; y desde a, como centro., con la distancia ab, hagase un arco, que cortarà al lado ac en m, y serà am igual à ab; y por consiguiente, serà mc la diferencia de los lados ab, ac; y tomando cn, igual à cm, serà bn la diferencia que hay entre la basa bc, y nc, diferencia de los lados: cortese la bn por medio en d, y serà nd la semidiferencia que hay entre la basa, y la diferencia de los lados; y añadiendo esta semidiferencia dn à la parte menor nc, resultarà la dc semisuma de toda la basa bc, y de nc diferencia de los lados; y porque ab, am, son iguales, tirada la perpendicular ap, quedarà dividido el angulo a, y la recta bm en dos partes iguales: y haviendose descrito el arco bm, con la distancia ab, serà ab el radio, y bp seno del angulo bap, mitad del angulo a. Digo pues, que el rectangulo hecho de ba, ac, al rectangulo hecho de bd, dc, se hà como el quadrado del radio ab, al quadrado de bp, seno del angulo bap. Para mayor brevedad, y claridad usarè de las abreviaciones, poniendo R. por rectangulo, Q. por quadrado, y de los signos + y —

Demonstracion. El Q. bc ∽ Q. ba + Q. ac + 2. R. cao. (12.2.Eucl.) Y siendo am ∽ ba, se substituirà en la igualacion sobredicha (que es la primera en el mapa siguiente) el quadrado de am, en lugar del quadrado de ba; y saldrà la igualacion del numer. 2. Y siendo (7.2.Eucl.) el Q. am +

Q.

Q. ac Ω 2. R. cam + Q. mc: ſubſtituyendo los 2. R. cam + Q. mc, en la igualacion del num. 2. en lugar del Q. am + Q. ac, reſultarà la igualacion del num. 3. à mas de eſto, 2. R. cam + 2. R. cao Ω 2. R. ca, om: porque un rectang. de ca, am, y otro de ca, ao juntos, componen un rectangulo, cuya altura es ca; y ſu baſa es la linea compueſta de am, ao, que es om: luego los dos hacen un rectangulo de ca, om: luego 2. R. cam + 2. R. cao Ω 2. R. ca, om. Subſtituyendo pues en la igualacion del num. 3. los 2. R. ca, om, en lugar de los 2. R. cam + 2. R. cao, reſultarà la igualacion del num. 4. que es Q. bc Ω 2. R. ca, om + Q. mc.

Num. 1. Q. bc Ω Q. ba + Q. ac + 2. R. cao,
am Ω ba.
Num. 2. Q. bc Ω Q. am + Q. ac + 2. R. cao,
Q. am + Q.ac Ω 2.R.cam + Q. mc.
Num. 3. Q.bc Ω 2.R.cam + Q.mc + 2. R. cao,
2.R.cam + 2.R.cao Ω 2.R.ca, om.
Num. 4. Q. bc Ω 2. R. ca, om + Q. mc.

Es pues conſtante, que el Q. bc es igual à 2. R. ca, om, + Q. mc: luego el Q. bc — Q. mc, es igual à 2. R. ca, om: y ſiendo (8.2.Eucl.) el Q. de toda la bc, igual à 4. R. de cd, db (ù de cd, nd, que es lo miſmo) + al Q. nc, que tambien es lo miſmo que mc, ſerà el Q. de toda bc — Q. nc. Ω 4. R. cd, db: luego 2. R. ca, om, ſon iguales à los 4. R. cd, db: luego medio rectangulo de ca, om es igual à un rectangulo de cd, db.

Eſto probado, paſſo à demonſtrar, que el rectangulo de los lados ab, ac, al rectangulo cdb, hecho de cd, ſemiſuma de la baſa, y diferencia de los lados, y bd ſemidiferencia de la baſa, y diferencia de los lados, tiene la razon que el quadrado del radio ab, al quadrado de bp, ſeno de la mitad del angulo a.

El quadrado de ab, y el rectangulo de ab, om, por tener una miſma altura ab, ſe han (1.6.Eucl.) como ſus baſas ab, om. Aſsimiſmo el rectangulo de ab, ac, al rectangulo de ac, om, por tener la miſma altura ac, ſe hà como la baſa sa ab, à la basa om: luego la misma razon tiene el quadrado de ab, al rectangulo ab, om, que tiene el rectangulo ab, ac, al rectangulo ac, om, supuesto q̃ entrambas razones son iguales à la de ab à om: luego el quadrado ab, à la mitad del rectangulo ab, om, se ha como el rectangulo ab, ac, à la mitad del rectangulo ac, om, la qual mitad, como arriba dixe, es el rectangulo hecho de cd, db.

Siendo pues los triangulos bom, apm equiangulos, por tener los angulos o, y p rectos, y el angulo m comun, seràn proporcionales (8.6.) am, à mp, ò su igual bp, como bm à mo: luego am à bp, se ha como la mitad de bm; esto es, como bp, à la mitad de mo: luego (17.6. Euclid.) el rectangulo de am, ò ba, y de la mitad de om, es igual al quadrado de bp. Y siendo el mismo rectangulo el que se hace de ab, y de la mitad de om, que el que se hace de om, y la mitad de ab; serà el rectangulo de la mitad de ab, y de toda la om, igual al quadrado de bp: y haviendo probado, que el quadrado de ab tiene la misma razon con la mitad del rectangulo de ab, om, que hay del rectangulo de ab, ac, à la mitad del rectangulo de ac, om; tambien havrà la misma razon del quadrado de ab, al quadrado de bp, que hay del rectangulo ab, ac, à la mitad del rectangulo de ac, om; la qual mitad diximos ser igual al rectangulo cdb: luego son proporcionales.

Como el rectangulo ab, ac, de los lados que comprehenden al angulo a,
al rectangulo cdb de la suma, y semidiferencia sobredichas;
assi el quadrado del radio ab,
al quadrado de bp, seno del angulo bap, mitad del angulo bac.

DEMONSTRACION.

Del modo 2. de resolver un triangulo, dados solamente sus lados.

De la misma practica de este *modo* 2. arriba puesta, consta, que para su evidencia, solo es menester demonstrar la proporcion que alli se puso, como fundamento de toda la operacion, que es la siguiente.

Como el producto, ò rectangulo de los lados conterminos al angulo que se busca,
al producto, ò rectangulo de las diferencias que hay entre cada uno de dichos lados, y la semisuma de los tres;
assi el quadrado del radio,
al quadrado del seno de la mitad del angulo que se busca.

Demuestrase pues esta proporcion en la *fig.* 18. donde se ve el mismo triangulo ABC, que se resolviò, en el qual, descrito el circulo con el radio BC, que es el lado menor, es AH la diferencia de los lados AB, BC; y siendo AO, igual à AH, serà OC la suma de la basa, y de la diferencia de los lados; y QO serà la semisuma. Esto supuesto, porque la semisuma de los tres lados se compone de las tres mitades de los lados, si de esta semisuma se quita el lado BC, ù dos mitades de BC, quedaràn la mitad de CA, y la mitad de BA, disminuida en una mitad de BC; y porque quitandole à la mitad de AB, una mitad de BC, el residuo es una mitad de AH, ò AO, se sigue, que restando de la semisuma de los tres lados el lado BC, el residuo es la semibasa, y semidiferencia de los lados, que es lo mismo que la semisuma de la basa, y diferencia de los lados: luego la diferencia 755. hallada por esta regla, es la semisuma de la basa, y de la diferencia de los lados. De la misma suerte probarè, que la otra diferencia 522. es la semidiferencia que hay entre la basa AC, y AP, diferencia de los lados: luego el rectangulo hecho de las diferencias 755. y 522. segun dicha regla, es el rectangulo hecho de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados, y de la semidiferencia que hay entre la basa, y la diferencia de los lados.

Siendo pues por el lema antecedente proporcionales, como el rectangulo de los lados, al rectangulo de la semisuma, y semidiferencia sobredichas; assi el quadrado del radio, al quadrado del seno de la mitad del angulo, que se busca: seràn tambien proporcionales, el rectangulo de los lados conterminos, al angulo que se busca, al rectangulo de las diferencias de cada lado, y la semisuma de los tres: como el quadrado del radio, al quadrado del seno de la mitad del

del angulo que se busca, que es el unico fundamento del sobredicho *modo* 2. de resolver.

PROP. XVI. Problema.

En el triangulo obliquangulo, dados los angulos, y un lado, hallar otro qualquiera lado. (*fig.* 19.)

EN el triangulo ABC, se suponen conocidos los angulos B 50. grad. 15. min. y C 35. gr. 20. min. y el lado CA 448. pies. Pidese el lado AB.

Proporcion, prop. 1.		*Logarithmos.*
Como el seno del angulo B,	50. gr. 15. min. C.L.	0.1141630.
al lado opuesto CA;	448.	2.6512780.
assi el seno del angulo C,	35. gr. 20. min.	9.7621775.
al lado opuesto AB.	337.	2.5276185.

De la misma suerte se hallarà el lado BC, formando la proporcion en esta forma: Como el seno del angulo B, al lado opuesto CA; assi el seno del angulo A, al lado opuesto BC.

PROP. XVII. Problema.

Dados dos lados, y el angulo intermedio, hallar el tercer lado. (*fig.* 15.)

EN el triangulo obliquangulo ABC, el angulo A es de 61. gr. 16. min. el lado AC 400. pies; y el lado AB 300. Pidese el lado BC.

Operacion. Hallese primeramente el angulo B, (14.) y por la antecedente se hallarà el lado BC.

PROP. XVIII. Problema.

En el triangulo obliquangulo, dados dos lados, y uno de los angulos opuestos, hallar el otro lado. (*fig.* 14.)

EN el triangulo ABC, dados los lados BA, AC, y el angulo B, se pide el lado BC.

Operacion. Hallese primero el angulo A, (13.) y se hallarà el lado BC por la *prop.* 16. diciendo: Como el seno del angulo B, al lado opuesto AC; assi el seno del angulo A, al lado opuesto BC.

LIBRO IV.

ISAGOGICO PARA LA RESOLUcion de los triangulos esfericos, ò curvilineos.

ESta parte de Trigonometria, llamada *esferica*, ò *curvilinea*, es de grande utilidad en la Mathematica, singularmente para los tratados de Esfera, Geographia, Nautica, Horologiographia, y Astronomia: su empleo es unicamente la analisi, ò resolucion de los triangulos curvilineos esfericos, formados en la superficie de una esfera con tres arcos de circulo maximo: de que se sigue, que ni el triangulo formado en una superficie plana con tres arcos de circulo, ni el descrito en una superficie esferica con tres arcos de circulos menores, son objeto de esta Trigonometria. Para su inteligencia es menester la noticia de algunos theoremas elementares de la esfera, que demonstrarè en este libro, para que no tenga necessidad el lector de recurrir à los esfericos de Theodosio, y Menelao.

DEFINICIONES.

1 *CIrculo maximo en la esfera es aquel, cuyo plano passa por el centro de la esfera.* Y por consiguiente, el centro de este circulo es el mismo centro de la esfera; y el dia-

diametro del circulo maximo es tambien diametro de la esfera: y como el diametro sea la mayor linea recta, que se puede acomodar dentro de la esfera, el circulo que tiene esse mismo diametro, es el mayor de los que puede haver en la esfera, aunque puede tener infinitos iguales; y por esso se llama *circulo maximo*; à distincion de otros circulos, que siendo su diametro menor que el de la esfera, necessariamente han de ser menores; y tanto menores, quanto mas se apartan sus planos del centro de la esfera.

2 *Polos de un circulo maximo, son aquellos puntos puestos en la superficie de la esfera, que distan igualmente de los puntos de la periferia de dicho circulo*; y por consiguiente, todos los arcos de circulo maximo comprehendidos entre qualquiera de los polos, y la circunferencia del circulo sobredicho son iguales, y de 90. gr. como en la *fig.* 20. El circulo AECFA es *maximo*, por passar su plano por el centro G de la esfera; y los puntos B, y D son sus polos, porque los arcos BA, BE, BC, BF, como tambien DA, DE, DC, DF son quadrantes de circulos maximos, que constan de 90. grad. y por consiguiente son iguales. De que se sigue, que qualquiera circulo maximo divide la esfera en dos partes iguales, llamadas *emisferios*.

3 *Angulo esferico, es el que se forma en la superficie de la esfera con dos arcos de circulo maximo.* Este angulo es igual al de la inclinacion de los planos de los circulos sobredichos; y su medida es el arco de otro circulo maximo intercepto entre ellos, que tiene su polo en el concurso, ò punto angular. Como en la *fig.* 20. BAE es un angulo esferico formado de los arcos BA, EA, que lo son de los circulos maximos ABCD, AECF, cuyos planos tienen por seccion comun la linea, ò diametro AC. Del mismo centro G salgan dos perpendiculares à la misma AC, cada una en el plano de su circulo, esto es, GB en el plano del circulo ABCD, y GE en el plano del circulo AECF, y serà el angulo esferico BAE, igual al angulo rectilineo BGE, y de tantos grados quantos tiene el arco BE, cuyo polo es el punto A, ò C del concurso de dichos circulos.

4 Los senos, tangentes, y secantes de los angulos esfe-

fericos, ſon las miſmas que en los rectilineos; ſolo que los ſenos eſtàn incluidos dentro de la esfera; y aſsi, qualquiera radio, como EG, es el ſeno total, ù del quadrante AE: y la recta HI, perpendicular al radio GE, es el ſeno recto del arco IE; y aſsi de los demàs.

CAPITULO I.

DE LAS PROPIEDADES DE LOS CIRCULOS MAXIMOS, y angulos esfericos.

PROP. I. Theorema.

Dos circulos maximos ſe cortan en dos partes iguales. (*fig.* 20.)

LOs dos circulos maximos ABCD, AECF, ſe cortan en los puntos A, y C. Digo, que ABC, CDA, como tambien AEC, CFA, ſon ſemicirculos.

Demonſtr. Por eſtar el centro G en el plano de los dos circulos ſobredichos, (*defin.* 1.) neceſſariamente eſtà en la comun ſeccion AC de ſus planos: luego G es centro comun de entrambos circulos: luego la recta AGC, que paſſa por el centro, ſerà diametro; y ABC, AEC, &c. ſemicirculos.

PROP. II. Theorema.

Los circulos maximos que ſe cortan, hacen los dos angulos vecinos, ò rectos, ò iguales à dos rectos. (*fig.* 20.)

LOs circulos ABCD, AECF, ſe cortan en A, y forman los angulos vecinos BAE, EAD. Digo, que eſtos dos angulos, ò ſon rectos, ò juntos, ſon tanto como dos rectos.

Demonſtr. Los ſobredichos angulos ſon iguales (*defin.* 3.) à los angulos rectilineos BGE, EGD; pero eſtos, (13.1. Eucl.) ò ſon rectos, ò tanto como dos rectos: luego tambien los angulos BAE, EAD.

CO-

COROLARIO.

DE aqui se sigue, que todos los angulos que forman los circulos maximos en uno de los puntos en que se cortan, son tanto como quatro rectos.

PROP. III. Theorema.

Los angulos esfericos, verticalmente opuestos, son iguales. (fig. 20.)

LOs angulos BAE, FAD, son verticalmente opuestos. Digo, que son iguales. *Demonstr.* El angulo BAE, es igual al angulo rectilineo BGE; y el angulo FAD, al angulo FGD; pero èstos (15. 1. Eucl.) son iguales: luego tambien aquellos.

PROP. IV. Theorema.

Los angulos opuestos, que distan entre sì todo un semicirculo, son iguales. (fig. 20.)

LOs angulos BAE, BCE, distan entre sì todo el semicirculo ABC. Digo, que son iguales, porque entrambos lo son al mismo angulo rectilineo BGE, y por consiguiente lo han de ser entre sì.

PROP. V. Theorema.

El angulo que forman dos circulos maximos, es igual à la distancia de sus polos; y al contrario. (fig. 21.)

SEan los circulos maximos LSM, LQM, cuyos polos son los puntos P, y O, y el angulo esferico que forman es SLQ, cuya medida es el arco SQ. Digo, que este arco es igual al arco OP, que es la distancia de sus polos.

Demonstr. El quadrante OQ, comprehendido entre O, polo del circulo LQM, y su circunferencia, es igual al quadrante PS, comprehendido entre P, polo del circulo LSM, y su circunferencia: luego, quitando el arco OS, que es comun à entrambos, quedarà el arco SQ, igual à PO, distancia de los polos.

PROP.

PROP. VI. Theorema.

El circulo maximo, que passa por los polos de otro circulo maximo, tiene en èste sus polos, y hace con èl angulos rectos; y al contrario. (*fig.* 21.)

SEa el circulo LQMV, cuyo polo es O, por el qual passa el circulo VOQ, aunque en la figura se representa con linea recta. Digo, que el polo del circulo VOQ, necessariamente està en el circulo LQMV; y que los angulos que se forman en las intersecciones V, y Q, son rectos. Dividase el semicirculo VLQ, por medio en L, y descrivase por L el circulo maximo LOM.

Demonstr. El arco OL, comprehendido entre el polo O, y la circunferencia del circulo VLQM, es quadrante; (*defin.* 2.) y siendo por construccion LU, LQ, quadrantes iguales, serà L polo del circulo UOQ, el qual punto L, està en la circunferencia ULQ. Tambien siendo L polo del circulo VOQ, y O, polo del VLQ, serà LO la distancia de sus polos; y siendo èsta igual al angulo LVO, (5.) que forman dichos circulos, la qual distancia es quadrante, serà el angulo LVO, recto: lo mismo dirè de LQO, QMO, MVO.

Al contrario, si los angulos en V, y Q, son rectos, la distancia LO de sus polos serà de 90. gr. luego el circulo VOQ, passarà por el punto O, que es polo del circulo VLQ; y èste passarà por el punto L, polo de VOQ.

COROLARIOS.

1. *DE lo dicho se infiere, que solo aquel arco de circulo maximo puede ser perpendicular à un otro circulo que passa por los polos de èste, porque siendo perpendicular el uno al otro, han de tener en sì mutuamente sus polos: luego el que no passa por los polos, no puede ser perpendicular.*

2 *Si por un punto distinto del polo de un circulo, se descriven diferentes circulos maximos, solo aquel serà perpendicular à dicho circulo, que passarà por su polo.*

3 *El perpendiculo que desciende à un arco, de un punto que no es polo de dicho arco, ò es mayor, ò menor que quadrante, como*

se

se vè en la fig. 21. donde el perpendiculo PV, que baxa del punto P, distinto del polo O, es menor que el quadrante OV; y el perpendiculo PQ, es mayor que el quadrante OQ.

CAPITULO II.

DE LAS PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS esfericos en comun.

TRiangulo esferico, como ya dixe, es el que en la superficie de la esfera forman tres arcos de circulo maximo: sus especies tienen la misma denominacion que los triangulos planos rectilineos; esto es, el que tiene un angulo recto, se llama *rectangulo*; el que un angulo obtuso, *obtusangulo*; y el que tiene los tres angulos agudos, se llama *acutangulo*. Asimismo, si tiene tres lados iguales, se llama *equilatero*; si dos iguales, *isoceles*; si los tres son desiguales, *escaleno*; y el que no siendo rectangulo tuviere à lo menos un lado que sea quadrante, se llama *quadrantal*.

PROP. VII. Theorema.

Qualquiera lado de un triangulo esferico, es menor que el semicirculo. (fig. 22.)

SEa el triangulo esferico ABC. Digo, que qualquier lado suyo es menor que el semicirculo.

Demonstr. Continuense AB, AC, hasta que concurran en D, y seràn (1.) los arcos ABD, ACD semicirculos: luego tanto AB, como AC, son menores que el semicirculo. Lo mismo se demonstrarà de BC.

PROP. VIII. Theorema.

Qualesquiera dos lados de un triangulo esferico son mayores que el otro. (fig. 22.)

DEmuestrase como la *prop.* 20. del *lib.* 1. de la *Geom. Elem.* porque la distancia mas breve que hay en la su-

ſuperficie de la esfera del punto A, al punto C, es el arco AC de circulo maximo: luego otra qualquiera ABC, es mayor: luego eſtos dos lados juntos ſon mayores que AC.

PROP. IX. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico, los tres lados juntos ſon menores que un circulo entero. (fig. 22.)

DIgo, que en el triangulo ABC, los tres lados juntos ſon menores que un circulo entero: continuenſe los lados AB, AC, haſta que concurran en D.

Demonſtr. Por la antecedente en el triangulo BDC, los dos lados BD, CD juntos, ſon mayores que BC: luego ABD, ACD, ſon mayores que AB, AC, BC; y ſiendo ABD, ACD ſemicirculos, ſeràn los dos ſemicirculos mayores que los tres lados ſobredichos: luego eſtos ſon menores que un circulo entero.

PROP. X. Theorema.

Si dos triangulos esfericos tienen entre sì los tres lados uno por uno iguales, ò tienen dos lados iguales, y el angulo comprehendido en los dichos lados tambien igual, los triangulos ſeràn totalmente iguales.

DEmueſtraſe como las *propoſiciones* 4. *y* 8. del *lib.* 1. de la *Geom. Elem.* y aſsi, no es meneſter repetir la demonſtracion.

PROP. XI. Theorema.

Los triangulos esfericos, cuyos tres angulos del uno fueren de por sì iguales à los tres del otro, tendràn tambien los lados mutuamente iguales. (fig. 23.)

EN èſtas, y otras propoſiciones ſemejantes, ſe ſuponen formados los triangulos en una miſma, ò igual esfera. Supongamos pues, que los triangulos ABC, DEF, tienen entre sì los angulos iguales; eſto es, B igual à E; A igual à D; y C à F. Digo, que tambien los lados del uno ſon iguales à los del otro.

De-

Demonstr. Por ser el angulo D igual al angulo A, sobrepuesto à èste, se ajustarà con èl; y por consiguiente el lado DE caerà sobre AB; y el lado DF, sobre AC: esto supuesto, ò entrambos lados DE, DF, se ajustan sobre los AB, AC, de suerte, que el punto E cayga sobre B, y el punto F, sobre C; y en este caso tambien la basa EF se ajustaria sobre BC, y quedava probada la igualdad de los tres lados del uno, à los tres del otro que se pretende, ò alguno de los dichos lados se ajusta en la forma dicha, ò ninguno de ellos.

1 Supongamos, que el lado DE es mas corto que AB; y assi, que el punto E cayga sobre H, ajustandose DF sobre AC, tirese el arco HC. Los triangulos HAC, EDF, por tener los lados AH, AC iguales à los lados DE, DF; y el angulo comprehendido A, igual à D, (10.) son del todo iguales: luego el angulo ACH, es igual al angulo F: luego tambien serà igual al angulo ACB, que se supone igual à F, la parte al todo que es impossible: luego el punto E no puede venir sobre H, ni sobre otro punto entre A, y B.

2 Supongase, que el lado DE sea mayor que AB, y que el punto E cayga sobre I, cayendo el punto F sobre C: tirese el arco IC; segun esta suposicion, los triangulos IAC, EDF, tienen los lados AI, AC, iguales à los DE, DF; y el angulo A, igual à D: luego son totalmente iguales, y el angulo ACI serà igual al angulo F; y siendo por suposicion ACB igual à F, serà ACI igual al angulo ACB, el todo à la parte que es impossible: luego tambien lo es, que el lado DE sea mayor que AB.

3 Supongamos, que los dos lados DE, DF sean mas cortos que AB, y AC; y assi, que hecha la superposicion, venga el punto E en H, y F en L: tirese el lado HL: en este caso el triangulo HAL seria tambien totalmente igual al triangulo EDF, por tener los lados AH, AL, iguales à los DE, DF; y el angulo A, igual à D: luego el angulo AHL es igual à E, y ALH, à F; y por consiguiente AHL es igual à B, y ALH à ACB, lo que es impossible, porque para esso era menester fuessen los lados HL, BC paralelos, lo que no puede ser por ser arcos de circulos maximos, que necesses-

cessariamente (1.) se cortan: luego los lados DE, DF no pueden ser mas cortos que los AB, AC. Lo mismo se demonstraria, si se dixesse, que eran mas largos: luego ni entrambos, ni ninguno de ellos pueden ser mayores, ni menores: luego los tres del un triangulo se ajustan à los tres del otro: luego son iguales.

PROP. XII. Theorema.

Si dos triangulos esfericos tienen dos angulos del uno iguales à dos del otro; y el lado adyacente à essos angulos tambien igual, los triangulos serà totalmente iguales. (fig. 23.)

LOs triangulos ABC, DEF tienen los angulos B, y E; C, y F iguales, como tambien los lados BC, EF adyacentes à dichos angulos. Digo, que son totalmente iguales.

Demonstr. Si EF se pone sobre BC se ajustaràn por ser iguales; y por ser iguales los angulos F, y C, el lado FD, caerà sobre CA; y por la misma razon ED caerà sobre BA: luego el punto D caerà sobre A, y todo el un triangulo se ajustarà sobre el otro: luego son totalmente iguales.

PROP. XIII. Theorema.

En el triangulo esferico Isoceles, los angulos sobre la basa son iguales, como tambien los que alargados los lados, se forman debaxo de ella; y si los angulos sobre la basa son iguales, el triangulo es Isoceles.

ESta proposicion se demuestra como la 5. y 6. del *lib.* 1. de la *Geomet. Element.* y assi no es menester repetir la demonstracion; infierese de aqui, que el triangulo equilatero es equiangulo.

PROP. XIV. Theorema.

En el triangulo esferico al mayor angulo, se le opone mayor lado; y al mayor lado, mayor angulo. (fig. 23.)

EN el triangulo esferico HIL, el angulo HLI es mayor que el angulo I. Digo, que el lado IH, opuesto à dicho

cho mayor angulo, es mayor que el lado LH, opuesto al angulo menor I. Hagase el angulo ILK igual al angulo I.

Demonstr. Por ser los angulos ILK, y I, iguales, serà el triangulo LKI Isóceles, (13.) y los lados IK, KL iguales; y añadiendo à entrambos el mismo KH, seràn los lados LK, KH, iguales à IH; pero LK, KH, son mayores que HL: luego IH es mayor que HL. Tambien, supuesto que IH sea mayor que HL, digo, que el angulo ILH es mayor que I, porque ni puede ser igual, ni menor; porque si fuesse igual, los lados IH, HL serian (13.) iguales, contra lo supuesto: si fuesse dicho angulo ILH, menor que I, seria el lado IH menor que HL, segun lo demonstrado, lo que es tambien contra lo supuesto: luego ILH es mayor que el angulo I.

PROP. XV. Theorema.

Si dos triangulos esfericos tuvieren los dos lados del uno iguales à dos del otro, pero el angulo comprehendido de estos lados fuere mayor en el uno que en el otro, el que tuviere mayor angulo, tendrà mayor basa; y al contrario, el que tuviere mayor basa, tendrà mayor el angulo sobredicho.

Esta proposicion se demuestra como las 24. y 25. del *lib.* 1. de la Geometr. Elementar; y assi no repito la demonstracion.

PROP. XVI. Theorema.

En el triangulo esferico BAC (fig. 22.) si los dos lados AB, BC juntos son iguales al semicirculo; prolongada la basa AC hasta D, el angulo externo BCD, serà igual al angulo A interno, y opuesto; y los dos BCA, y A, seràn tanto como dos rectos; y al contrario.

Demonstr. El arco ABD (1.) es semicirculo: luego siendo por suposicion AB, BC iguales al semicirculo, seràn iguales al arco ABD; y quitando el arco AB, que es comun, quedaràn BC, y BD iguales: luego (8.) los angulos BCD, y D son iguales; pero el angulo D es igual al angulo A: (4.) luego el angulo externo BCD, es igual al an-

angulo A; y ſiendo (2.) BCA, y BCD, iguales à dos rectos, tambien BCA, y A ſeràn iguales à dos rectos.

Y al contrario, ſi el angulo BCD fuere igual al angulo A; y por conſiguiente los angulos BCA, y A fueren tanto como dos rectos, ſeràn los angulos BCD, y D iguales; y por conſiguiente (13.) los lados BD, BC ſeràn iguales; y los AB, BC juntos, ſeràn tanto como un ſemicirculo.

Digo tambien, que ſi los lados AB, BC, fueren mas que un ſemicirculo, el angulo externo BCD, ſerà menos que el angulo A; y los angulos ſobre la baſa BCA, y A, mayores que dos rectos; y al contrario.

Demonſtr. Por ſer AB, BC mas que ſemicirculo, ſeràn mayores que ABD; y quitando el comun AB, quedarà BC, mayor que BD: (14.) luego el angulo D, opueſto al mayor lado, ſerà mayor que él angulo BCD; y ſiendo el angulo A, igual à D, ſerà el angulo BCD menor que el angulo A; y ſiendo BCA, y BCD iguales à dos rectos, ſeràn BCA, y A mayores que dos rectos.

Y al contrario, ſi BCD es menor que el angulo A, ò los angulos BCA, y A fueren mas que dos rectos, ſerà el angulo BCD menor que D; y por conſiguiente el lado BC mayor que BD; y como ABD ſea ſemicirculo, los dos AB, BC, ſeràn mas que ſemicirculo.

Vltimamente, ſi los lados AB, BC, ſon menos que un ſemicirculo, el angulo externo BCD ſerà mayor que el angulo A; y los angulos BCA, y A, ſobre la baſa, ſeràn menos que un ſemicirculo: y al contrario.

Demonſtr. Siendo AB, BC menos que ſemicirculo, ſeràn menos que el arco ABD: luego BC ſerà menor que BD; y el angulo BCD ſerà mayor que D, y por conſiguiente mayor que A: y como BCD, con BCA, haga dos rectos, el angulo A, con BCA, ſeràn menos que dos rectos.

Y al contrario, ſiendo el externo BCD mayor que el interno A, y por conſiguiente A, y BCA menos que dos rectos, ſerà el angulo BCD mayor que el angulo D: luego el arco BD, mayor que BC: luego AB, BC, ſeràn menores que el ſemicirculo ABD.

PROP.

PROP. XVII. Theorema.

Dos triangulos esfericos pueden tener dos angulos iguales el uno al otro, cada uno à ſu correſpondiente; y un lado opueſto à dichos angulos iguales, tambien igual, y ſer los triangulos deſiguales. (fig.24.)

SEa el triangulo OPQ, cuyos dos lados OP, OQ, ſean iguales al ſemicirculo; y por conſiguiente, ſea el angulo externo OQR, (16.) igual al angulo P interno, y opueſto. Tireſe el lado OR.

Demonſtr. Los triangulos ORP, ORQ, ſon deſiguales, por ſer èſte parte de aquel; pero eſtos triangulos tienen los angulos P, y OQR iguales; y el angulo R comun; y tambien el lado OR, opueſto à los dichos angulos iguales P, y OQR: luego los triangulos esfericos pueden tener mutuamente dos angulos iguales, y un lado opueſto à los angulos correſpondientes igual, y ſer deſiguales.

COROLARIO.

DE aqui ſe colige, que en los triangulos esfericos, dados dos angulos, y un lado opueſto, puede haver ambiguedad en la reſolucion: porque ſi en el caſo ſobredicho ſe ſiguiere la proporcion, que deſpues diremos; es à ſaber: Como el ſeno del angulo OQR, *ò* P, *al ſeno del angulo* R; *aſsi el ſeno del lado* OR, *al ſeno quarto, ſerà eſte ſeno, aſsi del lado* OQ, *como de* OP, *complemento ſuyo al ſemicirculo, por ſer el ſeno de qualquier arco, ſeno tambien de ſu complemento al ſemicirculo, como ſe dixo en la defin.4.lib.* 1. *Eſta ambiguedad ſe quitarà ſabiendo antes de què eſpecie ſea el lado opueſto al angulo* R, *ſi ha de ſer mayor, ò menor que el quadrante, como conſta de la propoſicion ſiguiente.*

PROP.

PROP. XVIII. Theorema.

Si dos triangulos esfericos tuvieren dos angulos del uno iguales à dos del otro, y un lado opuesto à uno de dichos angulos igual al lado correspondiente en el otro, y el otro lado opuesto al otro angulo de los iguales, fuere en entrambos de una misma especie, pero no quadrante, los triangulos seràn del todo iguales. (*fig.* 25.)

LOs triangulos ABC, DEF, tienen los angulos B, y E iguales, como tambien C, y F; y el lado AC, igual à DF; y los AB, DE, son de una misma especie, pero no quadrantes. Digo, que los triangulos son del todo iguales; y si no lo son, sea BC mayor que EF: cortese pues GC, igual à EF, y tirese AG.

Demonstr. Los triangulos AGC, DEF, tienen los lados CA, CG, iguales à DF, FE; y los angulos C, y F, tambien iguales: luego (10.) son totalmente iguales: luego el angulo AGC, es igual à E; y siendo E, y B iguales, serà AGC igual à B: luego (16.) AB, y AG, ò DE su igual, son tanto como un semicirculo; y como se suponga no ser quadrantes, si AB es mayor que quadrante, DE serà menor; y si AB fuere menor, DE serà mayor, contra lo supuesto, por suponerse ser de una misma especie: luego BC es igual à EF, y todo el un triangulo al otro.

PROP. XIX. Theorema.

Si dos triangulos esfericos tienen entre sì un angulo igual, y los dos lados, que comprehenden un otro angulo, fueren tambien iguales à los dos que le comprehenden en el otro triangulo, seràn totalmente iguales; con tal, que el tercer angulo sea en entrambos de una misma especie; pero no recto. (*fig.* 26.)

EN los triangulos ABC, DEF, los angulos B, y E, se suponen iguales; y los lados BC, EF; CA, FD, tambien iguales; y los angulo A, y D, de una misma especie, pero no rectos. Digo, que todo lo demàs es igual. Y si se dixere re que AB, es mayor que DE, cortese BG, igual à DE, y tirese el arco CG.

Demonstr. Los triangulos GBC, DEF, tienen los dos lados GB, BC, iguales à los dos DE, EF, y el angulo B, igual à E: luego (10.) son del todo iguales: luego los lados CG, DF, son iguales; pero DF, y AC, se suponian iguales: luego CG, y CA seràn iguales: luego (13.) los angulos A, y CGA son iguales; y siendo CGA, y CGB iguales à dos rectos, serà el angulo CGB, ò D su igual, y el angulo A iguales à dos rectos; y como se suponga no ser rectos, si A es mas que recto, D lo serà menos; y al contrario: luego no serian de una misma especie, contra lo supuesto.

COROLARIO.

De aqui se colige, que dados precisamente dos lados, y el angulo opuesto à uno de dichos lados en el triangulo esferico, no se puede llegar à su resolucion, por haver ambiguedad, si que serà menester saber de què especie sea el tercer angulo.

PROP. XX. Theorema.

En los triangulos esfericos Isoceles, si los lados son quadrantes, los angulos sobre la basa son rectos; si son mayores que quadrantes, obtusos; y si menores, agudos; y al contrario. (fig. 27.)

Sea el triangulo isosceles IHL. Digo lo primero, que si los lados HI, HL, son quadrantes, los angulos I, L, son rectos; porque siendo quadrantes, son entrambos juntos iguales à un semicirculo: luego (16.) los angulos I, L, son tanto como dos rectos; y siendo iguales, es forzoso sean angulos rectos: al contrario, si los angulos I, L son rectos, los lados HI, HL (6.) passan por el polo de la basa IL, que es arco de circulo maximo: luego HI, HL, son quadrantes.

Digo lo segundo, que si los lados HI, HL, son mayores que el quadrante, los angulos I, L, son obtusos, porque en esta suposicion seràn (16.) los angulos I, L, mayores que dos rectos; y como sean iguales, es forzoso sean obtusos;

al contrario, siendo obtusos, son entrambos juntos mayores que dos rectos: luego el externo HLM, serà menor que I: luego (16.) los lados HI, HL, juntos son mas que un semirculo; y como sean iguales, serà cada uno mayor que un quadrante.

Digo lo tercero, que si los lados HI, HL, son menores que el quadrante, los angulos I, L, seràn agudos, porque dichos lados juntos seràn menos que un semicirculo: luego (16.) el angulo externo HLM, serà mayor que I; y los dos I, L, juntos, seràn menos que dos rectos; y por ser iguales entrambos, seràn agudos; y al contrario, si dichos angulos son agudos, los dos juntos seràn menos que dos rectos: luego (16.) los lados HI, HL, juntos, son menos que un semicirculo; y siendo iguales, serà qualquiera de ellos menor que el quadrante.

PROP. XXI. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico, sus tres angulos son mas que dos rectos, y menos que seis. (*fig.* 28.)

DIgo lo primero, que en qualquiera triangulo esferico ABC, sus tres angulos juntos, son mas que dos angulos rectos. Prolongado el lado BC, queda formado el angulo externo ACD, el qual es mayor, ò menor, ò igual al angulo interno, y opuesto B, segun lo demonstrado en la *propos.* 16. y en estas tres suposiciones demonstrarè la propuesta.

1 Sea el angulo ACD, igual al angulo B. *Demonst.* Por ser dicho angulo igual al angulo *B*, son (16.) los angulos *B*, y *ACB*, iguales à dos rectos: luego los tres *A*, *B*, *C*, son mas que dos rectos.

2 Sea el angulo *ACD*, menor que *B*: luego si à entrambos se añade el angulo *ACB*, seràn *ACB*, y *B*, mayores que *ACB*, y *ACD*; y siendo èstos iguales à dos rectos, seràn *ACB*, y *B*, mayores que dos rectos: luego los tres *ACB*, *B*, y *A*, seràn con mas razon mayores que dos rectos.

3 Sea *ACD*, mayor que el angulo *B*. Digo, que en esta

ta ſupoſicion tambien ſon los tres angulos internos mas que dos rectos. Hagaſe el angulo ECD igual al angulo B, y continueſe BA haſta que concurra con CE. Eſto ſupueſto, por ſer el angulo externo ECD, igual al interno B, los lados EB, EC, (16.) ſeràn iguales à un ſemicirculo: luego EC, EA ſeràn menos que un ſemicirculo: luego (16.) el angulo externo FAE, y por conſiguiente ſu vertical opueſto BAC, ſerà mayor que ACE; y añadiendo à entrambos el angulo ACB, ſeràn el angulo BAC, y el ACB mayores que ACE, y ACB; y añadiendo à los BAC, y ACB el angulo B; y à los ACE, y ACB el angulo ECD, que por conſtruccion ſon iguales, ſeràn los tres BAC, ACB, y B, mayores que los tres ACB, ACE, y ECD; y ſiendo eſtos tres tanto como dos rectos, ſeràn los otros tres mayores que dos rectos.

Digo lo ſegundo, que en qualquier triangulo esferico ABC, (*fig.* 29.) ſus tres angulos ſon menos que ſeis rectos: prolonguenſe los tres lados, como ſe ve en la figura. *Demonſtr.* Los dos angulos DAC, CAB, ſon tanto como dos rectos; (2.) y aſsimiſmo los otros dos BCA, BCF, como tambien EBA, ABC: luego los tres angulos internos, con los tres externos, hacen ſeis rectos: luego los tres internos ſolos ſon menos que ſeis rectos.

COROLARIO.

De lo dicho ſe colige, que en qualquier triangulo esferico el angulo externo es menor que los dos internos, y opueſtos, porque el externo con el interno, que eſtà à ſu lado, hace ſolamente dos rectos; y los dos internos, y opueſtos, con el interno ſobredicho, hacen mas que dos rectos: luego el externo es menor que los dos internos opueſtos.

PROP. XXII. Theorema.

Un triangulo esferico puede conſtar de tres angulos rectos; de dos rectos, y un obtuſo; de dos obtuſos, y un recto; y de tres obtuſos. (*fig.* 30.)

En el triangulo EAD, los tres angulos E, A, D, ſon rectos; y en eſte caſo los tres lados ſon quadrantes. En el triangulo EAS, los angulos E, y S son rectos, y el angulo EAS obtuso, por ser mayor que el recto EAD; y en este caso los lados AE, AS son quadrantes, y ES mayor que quadrante. En el triangulo MAN, los angulos M, y N son obtusos, y el MAN recto. En el triangulo MAO, los tres son obtusos; y en estos dos ultimos casos puede haver variedad en los lados. Consta bastantemente de lo dicho.

PROP. XXIII. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico, si se continuan los lados, se forma otro triangulo, cuya basa, y angulo opuesto à la basa son los mismos del primero, pero las demàs partes del segundo son complemento de las del primero al semicirculo. (*fig.* 22.)

EN el triangulo ABC continuense los lados AB, AC hasta que concurran en D. Digo, que se forma un otro triangulo BDC, cuya basa BC es la misma del primero; y el angulo D opuesto à la dicha basa, es igual al angulo A, opuesto à la misma, como consta de la *prop.* 4. Digo tambien, que el angulo CBD es complemento del angulo CBA al semicirculo, por ser entrambos iguales à dos rectos; (2.) y por la misma razon es el angulo BCD complemento del angulo BCA al semicirculo: assimismo el lado BD es complemento de AB al semicirculo ABD, (1.) como tambien CD es complemento de AC.

PROP. XXIV. Theorema.

Dado qualquiera triangulo, en los polos de sus arcos se forma otro segundo, que sus dos lados son iguales à los dos angulos del primero, cada uno al suyo; y el tercer lado es complemento del tercer angulo al semicirculo; y lo mismo es de los angulos del segundo con los lados del primero. (*fig.* 31.)

LOs puntos Y, O, son polos del lado AB; y Z, M, del lado AC; y el punto R es polo del lado BC, quedando su correspondiente à la otra parte de la esfera: y tirados los arcos YRO, ZRM, quedan formados de los polos sobrebredichos quatro triangulos, que son YRZ, RZO, YRM, MRO, y otros tantos à la otra parte de la esfera. Digo pues, que en el triangulo YRZ, los lados YR, RZ, son iguales à los angulos ABC, ACB, y el lado YZ es complemento al semicirculo del angulo BAC.

Demonstr. Los quadrantes YQ, RP son iguales: luego quitando RQ, que es comun, quedarà YR igual à QP, valor, y medida del angulo ABC. Assimismo los quadrantes ZS, RN son iguales: luego quitado RS comun, quedarà ZR igual à SN, medida del angulo ACB. Tambien los quadrantes YX, ZI son iguales: luego añadiendo à entrambos XZ comun, serà YZ, igual à XI, medida del angulo externo XAI, complemento del angulo BAC al semicirculo: luego es constante la propuesta en el triangulo YRZ.

Lo mismo se verifica en el triangulo ZRO, porque ZR es igual, como queda probado, à SN, medida del angulo ACB; y quitando OI de los quadrantes ZI,OH, queda OZ igual à IH, medida del angulo BAC; y RO es complemento al semicirculo de RY, ù de QP su igual, medida del angulo ABC. Consta pues lo sobredicho en este triangulo.

Tambien se demonstrarà lo mismo en el triangulo YRM, esto es, que YR es igual à QP, medida del angulo ABC; y YM igual à HI, medida del angulo BAC; y RM, complemento al semicirculo de RZ, ù de NS su igual, que es medida del angulo ACB: luego generalmente siempre se halla un segundo triangulo, que sus dos lados son iguales à qualesquiera dos angulos del primero; y el tercer lado del segundo es complemento al semicirculo del tercer angulo del primero. Lo que sucede en el triangulo MRO, se verà en la prop. siguiente.

COROLARIO.

De aqui se colige, que dado para resolver qualquiera triangulo esferico, nos podrèmos valer para la resolucion de un otro triangulo equipolente, suponiendo ser qualesquiera dos de sus lados iguales à dos angulos del primero; y que el otro sea el complemento del tercer angulo al semicirculo.

PROP.

PROP. XXV. Theorema.

Dado qualquiera triangulo en los polos de sus arcos, se forma otro segundo, que sus tres lados son complementos al semicirculo de los tres angulos del primero; y los tres angulos del segundo de los tres lados del primero. (fig. 31.)

DIgo, que en el triangulo ABC, si se toman los polos R de BC, y M de AC, y O de AB, se forma el triangulo MRO, que tiene las calidades propuestas.

Demonstr. El lado MR es complemento de RZ, que es igual à NS, medida del angulo ACB; y RO es complemento de RY, que es igual à QP, medida del angulo ABC, y MO es complemento de OZ, que como consta de la antecedente es igual à HI, medida del angulo BAC: luego los tres lados de MRO, son complementos al semicirculo de los tres angulos A, B, C.

Tambien por ser CS, AT quadrantes, quitado el comun AS, queda ST igual à AC; y siendo IS medida del angulo M, y complemento al semicirculo de ST, ù de su igual AC, serà el angulo M, complemento del lado AC al semicirculo. Por la misma razon, siendo QH medida del angulo O, y complemento de QX, ò AB su igual, es el angulo O complemento del lado AB al semicirculo. Ultimamente, si de los quadrantes ED, NC se quita el comun ND, quedan EN, y DC iguales; y assimismo, si de los quadrantes FD, PB se quita DP, quedan FP, y DB iguales: luego EN, y FP juntos son iguales al lado BC. Siendo pues NP complemento de los EN, FP al semicirculo, serà NP complemento del lado BC; y siendo dicho NP medida del angulo R, serà este angulo complemento al semicirculo del sobredicho lado BC: luego los tres angulos del triangulo RMO son complementos de los tres lados de ABC al semicirculo.

COROLARIO.

DE *aqui se infiere, que dado para resolver un triangulo esferico, nos podrèmos valer de un otro triangulo equipolente,* *mu-*

mudando solamente los lados del dado en angulo, ò sus angulos en lados.

CAPITULO III.

DE LAS PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS esfericos rectangulos.

PROP. XXVI. Theorema.

En el triangulo rectangulo, si se alarga uno de sus lados hasta el polo del otro lado, se forma otro triangulo que tiene un lado comun con el primero; y las demàs partes, ò iguales con las del primero, ò que son complemento suyo al semicirculo, ò al quadrante. (fig. 32.)

SEa el triangulo LMN, rectangulo en M; continuese el lado ML, hasta O, polo del otro lado MN, y tirese el lado ON. Digo, que el triangulo OLN, que se ha formado, tiene todos sus lados, y angulos, ò iguales con los del triangulo LMN, ò que son complementos de dichos lados, y angulos al semicirculo, ò al quadrante.

Demonstr. 1. La basa LN, es comun à entrambos triangulos. 2. El lado ON, es quadrante, y por consiguiente igual al angulo M, que es recto. 3. El angulo O, es igual al lado MN, por ser èste medida del angulo formado en O, que es polo de MN. 4. El angulo OLN, es complemento del angulo MLN, al semicirculo. (2.) 5. El lado LO, es complemento del lado ML, al quadrante. 6. El angulo ONM, es recto: (6.) luego el angulo ONL, es complemento à 90. grados del angulo LNM: luego las sèis partes del triangulo LON, corresponden à las del otro triangulo, en la forma dicha.

COROLARIO.

DE *aqui se colige, haver las mismas correspondencias en el triangulo quadrantal, ò que siendo obliquangulo, tiene un lado igual al quadrante, como* OLN, *que en el triangulo rectangulo; porque si el lado* OL, *que no es quadrante, se alarga hasta que lo sea, y se tira la basa* MN, *se hallarà todo lo sobredicho.*

PROP.

PROP. XXVII. Theorema.

En el triangulo rectangulo, los lados que comprehenden el angulo recto son de la misma especie que los angulos opuestos. (fig. 33.)

SEan los tres triangulos OMN, LMN, PMN, rectangulos en M. Digo, que en el triangulo OMN, el lado OM, opuesto al angulo ONM, que se supone recto, es quadrante, y en el triangulo LMN, el lado LM, es menor que quadrante, por oponerse al angulo LNM, menor que recto; y en el triangulo PMN, el lado PM es mayor que quadrante, por oponerse al angulo PNM, mayor que recto.

Demonstr. En el triangulo OMN, por ser el angulo ONM recto, el lado ON tendrà su polo en MN; y MN en ON; (6.) y tambien por ser el angulo M recto, el lado OM tendrà su polo en MN; y MN en OM: luego el polo del arco MN, està en los arcos ON, y OM: luego es el punto O comun à entrambos: luego (*defin.* 2.) los arcos ON, y OM son quadrantes; y siendo el angulo O recto, su medida, que es el arco MN, tambien serà quadrante. De aqui se sigue, que en el triangulo LMN, el arco LM opuesto al angulo agudo LNM, es menos que el quadrante OM; y en el triangulo PMN, el lado PM opuesto al angulo obtuso PNM, es mayor que el quadrante OM.

COROLARIO.

DE aqui se colige, que en el triangulo esferico rectangulo, conocidos los angulos, se sabe de què especie sean los lados; y al contrario, conocidos èstos, se sabe la especie de aquellos: conque cessa toda la ambiguedad, que podia ocurrir en quanto à los lados. La proposicion siguiente, sirve para quitar la ambiguedad, en quanto à la hipotenusa.

PROP.

PROP. XXVIII. Theorema.

El triangulo esferico rectangulo, tiene las propiedades siguientes.

1 *SI los dos lados que comprehenden el angulo recto, son quadrantes, ò à lo menos uno de ellos, la hipotenusa es quadrante.* En el triangulo MON, (*fig.* 32.) rectangulo en O, sean los lados OM, ON, quadrantes. Digo, que la hipotenusa MN, es quadrante; porque siendo dichos lados quadrantes, el punto O de su concurso, es polo de la hipotenusa MN; y èsta es medida del angulo O; (*defin.* 3.) luego siendo èste recto, serà la hipotenusà quadrante. Sea tambien el triangulo LON, rectangulo en O, cuyo lado ON, es quadrante. Digo, que la hipotenusa LN, es quadrante; porque como se ha demonstrado, MN, es tambien quadrante: luego el punto N, es polo del arco OLM: luego (*def.* 2.) NL es quadrante.

2 *Si en el triangulo hay dos angulos rectos, la hipotenusa es quadrante.* Porque haviendo dos angulos rectos, hay en cada uno de ellos un lado de los que los forman, opuesto à angulo recto: luego (27.) serà quadrante; y como la hipotenusa sea uno de los sobredichos lados, se sigue ha de ser quadrante.

3 *Si los dos lados que forman el angulo recto, son de una misma especie, y no fueren quadrantes, la hipotenusa serà menor que el quadrante.* Sea en la *fig.* 23. el triangulo HAL, rectangulo en A, y los lados AH, AL, sean entrambos menores que los quadrantes AB, AC. Digo, que la hipotenusa HL, es menor que quadrante; porque necessariamente es menor que BC, que (*num.* 1.) es quadrante. Por la misma razon, si los lados que forman el angulo recto A, son entrambos mayores que quadrante, como lo son AI, AG, en el triangulo IAG, la hipotenusa IG, es menor que quadrante, por ser menor que BC.

4 *Si los angulos formados sobre la hipotenusa son de una misma especie, pero no rectos, la hipotenusa serà menor que quadrante.* Digo, que en el triangulo AHL, (*fig.* 23.) por ser los angulos H, L, entrambos agudos, la hipotenusa HL, es menor

que

que quadrante; porque siendo agudos los lados AH, AL, (27.) son menores que quadrantes: luego (*num.* 3.) la hipotenusa es menor que quadrante. Lo mismo se demuestra siendo ambos obtusos, como I, G, en el triangulo IAG, porque en esta suposicion, los lados son mayores que quadrante: luego la hipotenusa IG, (*num.* 3.) es menor que quadrante.

5 *Si los angulos sobre la hipotenusa fueren de diferente especie, sin ser ninguno de ellos recto, la hipotenusa serà mayor que quadrante, y lo mismo serà, si los lados fueren de diferente especie, y ninguno quadrante.* (*fig.* 21.) El triangulo LTX, rectangulo en X, tiene sobre la hipotenusa LT, los angulos L, y T, de diferente especie; esto es, L agudo, y T obtuso. Digo, que la hipotenusa LT, es mayor que quadrante, por ser necessariamente mayor que LS, que (*num.* 1.) es quadrante. Digo tambien, que por ser el lado XL, mayor que quadrante, y XT menor, la hipotenusa LT, es mayor que quadrante: porque (27.) el angulo L, opuesto al lado XT, es agudo, y el angulo T, opuesto à LX, es obtuso: luego por la razon dicha, la hipotenusa LT, es mayor que quadrante.

PROP. XXIX. Theorema.

En qualquiera triangulo rectangulo, los dos angulos son mas que 90. grad. Y qualquiera angulo obliquo es mayor que la diferencia del otro à los 90. grados.

(*fig.* 21.)

EN el triangulo MTX, rectangulo en X, sus tres angulos, son mas que dos rectos: (21.) luego quitado el recto X, seràn los otros mas que un recto. Tambien el angulo T, con su complemento à 90. gr, hace un recto: luego siendo T, y M, mas que un recto, serà M, mas que el complemento, ò diferencia de T à los 90. grados. Sea tambien el triangulo LTX, rectangulo en X. Digo, que tambien se verifica lo mismo. En quanto à lo primero, no hay duda, por ser el angulo LTX obtuso. Para demonstrar lo segundo, continuados los lados, formese el triangulo MTX.

En

En èste pues se ha demonstrado, que el angulo M es mayor que el complemento de MTX à 90. grados: pero la diferencia de MTX à los 90. grados, y la diferencia de LTX à los 90. grados, es la misma: luego porque L, y M son iguales, (4.) serà el angulo L mayor que la diferencia de LTX à los 90. grados.

Siempre que se quiera examinar, si un triangulo està bien dado, ò bien resuelto, tenganse presentes las proposiciones 21. 22. 27. 28. *y* 29.

CAPITULO IV.

DE LAS PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS esfericos obliquangulos.

PAra resolver los triangulos esfericos obliquangulos, se usa muchas veces del *perpendiculo*, el qual no es otra cosa, que *un arco de circulo maximo, que en un triangulo desciende de uno de sus angulos perpendicularmente sobre el lado opuesto.*

PROP. XXX. Theorema.

En qualquiera triangulo obliquangulo, si los angulos sobre la basa son de una misma especie, la perpendicular del angulo vertical à la basa cae dentro del triangulo, y es de la misma especie que los dichos angulos; pero si estos angulos sobre la basa son de diferente especie, la perpendicular sobredicha cae fuera del triangulo, y es de la misma especie que el angulo externo. (*fig.* 31.)

E*Xplicacion.* 1. En el triangulo YRZ, cuyos angulos Y, Z, son de una misma especie, entrambos agudos, digo, que la perpendicular RV cae dentro del triangulo, y es menor que el quadrante.

Demonstr. En el triangulo YVR rectangulo en V, la perpendicular RV es uno de los lados que forman el angulo recto: luego (27.) serà de la misma especie que el angugulo opuesto Y; esto es, serà menor que el quadrante: luego en el triangulo RVZ rectangulo en V, siendo la perpendicular RU menor que quadrante, se opondrà al angulo Z agudo, (27.) y no al externo obtuso RZF: luego dicha perpendicular cae dentro del triangulo.

2 En el triangulo MRO, cuyos angulos M, y O son obtusos, y por consiguiente de la misma especie, la perpendicular RG, por oponerse al angulo obtuso M, es (27.) mayor que quadrante: luego en el triangulo RGO, el angulo O, opuesto à dicha perpendicular, necessariamente ha de ser obtuso: luego cae dentro del triangulo entre los angulos M, y O.

3 En el triangulo RMY, cuyos angulos sobre la basa son de diferente especie; esto es, RMY agudo, y RYM obtuso; la perpendicular RU se opone al angulo RMY agudo: luego (27.) es menor que el quadrante: luego còmo por ser menor que quadrante no se pueda oponer al angulo obtuso RYM, que es el interno, se opondrà al angulo RYU agudo, que es el externo: luego cae fuera del triangulo.

PROP. XXXI. Theorema.

Si de un punto que no sea polo de la basa, baxan à ella dos arcos iguales, estos arcos distaràn igualmente del perpendiculo, y haràn con èl, angulos iguales; y al contrario. (*fig.* 34.)

DEl punto R, que no es polo de la basa YUZ, baxan à ella los dos arcos RY, RZ iguales. Digo, que los arcos VY, VZ, que son las distancias del perpendiculo, son iguales, como tambien los angulos VRY, VRZ.

Demonstr. Los triangulos RUY, RVZ tienen los lados RY, RZ iguales, y el lado RV comun, y los angulos en V rectos iguales, y los Y, Z de una misma especie agudos: luego (19.) son totalmente iguales: luego los arcos VY, UZ son iguales; como tambien los angulos VRY, VRZ. Y al contrario, si las distancias VY, VZ son iguales, tambien

bien lo seràn los arcos RY, RZ: porque en este caso los triangulos YVR, ZVR, tienen los lados UY, VZ iguales, y VR comun; y los angulos en U rectos iguales: luego (10.) son del todo iguales; y por consiguiente, los lados RY, RZ son iguales, y tambien los angulos VRY, URZ. Lo mismo se convence en el triangulo HRT.

COROLARIO.

De aqui se colige, que en el triangulo esferico obliquangulo que fuere isoceles, ò que tuviere los angulos sobre su basa iguales, sus lados distaràn igualmente del perpendiculo, y haràn con èl angulos iguales.

PROP. XXXII. Theorema.

Si de un punto que no sea polo de la basa, baxan à ella dos arcos desiguales, el mayor arco dista mas del perpendiculo, y hace con èl mayor angulo que el menor, si los angulos sobre la basa fueren agudos; pero si fueren obtusos, el menor arco distarà del perpendiculo mas que el mayor, y harà con èl mayor angulo. (fig. 34.)

DEl punto R, que no es polo de la basa YVS, baxan à ella los arcos RY, RS; y èste es mayor que aquèl: y los angulos Y, y S sobre la basa son agudos. Digo, que VS es mayor que VY; y el angulo VRS, es mayor que VRY.

Demonstr. Si VS no es mayor que VY, serà igual, ò menor. 1. No es igual, porque, como consta de la proposicion passada, serian RS, RY iguales, contra lo supuesto. 2. No es VS menor que VY; porque siendo YVS un mismo arco de circulo, y los angulos en V rectos, si se dobla el triangulo por la RV, el arco VS caerà sobre VPM: conque el punto S caerà sobre algun punto de la periferia VM; y no pudiendo caer en Y, como queda dicho, caerà, ò sobre Y, ò mas abaxo. No puede caer sobre Y, porque si esso es possible, cayga sobre O, y serà RO igual à RS. En el triangulo pues YOR, el angulo O es obtuso; porque siendo RV menor que quadrante, (*corolar.* 3. *prop.* 6.) el angulo UOR (27.) es agudo, como tambien Y: luego YOR

es

es obtuſo : luego (14.) el lado YR opueſto al mayor angulo, ſerà mayor que el lado OR opueſto al menor; eſto es, ſerà mayor que RS, contra lo ſupueſto : luego RS no puede caer mas arriba que RY : luego caerà debaxo como en RP : luego ſerà VP igual à VS, y el angulo VRP igual à VRS; ſiendo pues VP mayor que VY, ſerà VS mayor que VY; y ſiendo el angulo VRP mayor que URY, tambien lo ſerà el angulo VRS.

Digo tambien, que ſi del punto R, que no es polo de la baſa MGT, deſcienden los arcos RT mayor, y RM menor, formando los angulos M, y T obtuſos, el arco MG es mayor que GT, y el angulo MRG es mayor que GRT. Infierefe de lo dicho, porque ſi de los ſemicirculos iguales SVM, VMG, quitamos el arco comun VM, quedaràn VS, MG iguales: y aſsimiſmo, ſi de los ſemicirculos YVT, VSG, quitamos el comun VT, quedaràn YV, GT iguales: luego ſiendo VS mayor que YV, ſerà MG mayor que GT. Amàs de eſto, el angulo MRG es (3.) igual à ſu vertical opueſto VRS, y GRT à YRV: luego ſiendo VRS mayor que YRV, ſerà MRG mayor que GRT.

COROLARIO.

DE aqui ſe colige, que en el triangulo obliquangulo, cuyos angulos ſobre la baſa ſon deſiguales, y entrambos agudos, echado el perpendiculo, el mayor ſegmento de la baſa, y por conſiguiente el mayor angulo vertical es contermino al mayor lado del triangulo: y al contrario, ſi los angulos ſobre la baſa fueren obtuſos; porque el punto de quien deſcienden los lados, y el perpendiculo, no es polo de la baſa; porque ſi lo fueſſe, ſerian entrambos lados quadrantes.

PROP. XXXIII. Theorema.

En el triangulo obliquangulo, que tiene dos angulos agudos, el lado opueſto al menor angulo es menor que el quadrante; y en el que tiene dos angulos obtuſos, el lado opueſto al mayor angulo es mayor que el quadrante. (fig. 34.)

SEa el triangulo obliquangulo YRS, cuyos angulos Y, S, ſon agudos, y el angulo S, menor que Y. Digo, que el la-

lado YR, opuesto al angulo menor S, es menor que el quadrante.

Demonstr. Porque el angulo Y, es mayor que el angulo S, serà (14.) el lado RS, opuesto à Y, mayor que RY, opuesto à S: luego por la antecedente, el perpendiculo RV, formarà el angulo vertical VRY, menor que el angulo VRS; y siendo el angulo YRS, (2.) menor que dos rectos, serà el angulo YRV, menor que un recto: y porque en el triangulo YVR, rectangulo en V, son los angulos VYR, VRY agudos; y por consiguiente de la misma especie es (28.) la hipotenusa YR, menor que quadrante: luego el lado YR, opuesto al angulo menor S, es menor que quadrante.

Con esto queda tambien probado, que en el triangulo MRT, cuyos angulos M, y T, son obtusos, el lado mayor RT, opuesto al angulo mayor M, es mayor que quadrante, por ser complemento al semicirculo del arco YR; y siendo este menor que quadrante, serà RT, mayor que quadrante.

PROP. XXXIV. Theorema.

En el triangulo esferico acutangulo, cada lado de por sì es menor que el quadrante. (fig. 31.)

SEa el triangulo ABC, cuyos tres angulos sean agudos. Digo, que cada lado es menor que el quadrante.

Demonstr. Porque los angulos B, y C, sobre la basa son agudos, el perpendiculo AD, (30.) cae dentro del triangulo: luego en el triangulo rectangulo DAC, por ser los angulos CAD, DCA, de la misma especie agudos, serà (28.) la hipotenusa AC, menor que el quadrante: luego el lado AC, es menor que el quadrante: lo mismo se demonstrarà del lado AB. Y tirando el perpendiculo del angulo C al lado AB, se convencerà de la misma suerte, que el lado CB, es menor que el quadrante: luego qualquiera lado es menor que el quadrante.

PROP.

PROP. XXXV. Theorema.

Los triangulos obliquangulos que tienen ſus tres lados mayores que el quadrante; ò el uno de ellos quadrante, y los demas mayores que el quadrante, tienen ſus angulos obtuſos. (*fig* 35.)

PAra mayor claridad, demonſtrarè el Teorema en diferentes caſos que pueden ocurrir.

Caſo 1. Si el triangulo es equilatero, y ſus tres lados mayores que el quadrante. Digo, que ſus tres angulos ſon obtuſos; porque ſiendo equilatero, por qualquier parte que ſe conſidere, ſerà iſoceles: luego (20.) ſus angulos ſeràn de la miſma eſpecie que ſus lados; y ſiendo èſtos mayores que el quadrante, ſeràn los angulos obtuſos.

Caſo 2. Sea el triangulo GHI, iſoceles, (*fig.* 35.) y ſus tres lados mayores que el quadrante. Digo, que ſus tres angulos ſon obtuſos. Que los angulos G, I, ſobre la baſa lo ſean, conſta de la *propoſ.* 20. Para demonſtrar que tambien lo es el angulo H, cortenſe GL, GN, iguales al quadrante, y tireſe el arco LNM, haſta que concurra con el lado IH, alargado en M.

Demonſtr. Por ſer GL, GN quadrantes, ſerà G polo del arco NL; y en el iſoceles NGL, los angulos N, y L (20.) ſeràn rectos; y el arco NL, que es medida del angulo obtuſo G, ſerà mayor que quadrante; y ſuponiendoſe tambien HI, mayor que quadrante, ſeràn los arcos NM, HN, menores que quadrante; y por conſiguiente, ambos juntos ſeràn menores que el ſemicirculo: luego (16.) el angulo recto N, es mayor que ſu interno opueſto NHM: luego el reſiduo NHI, es obtuſo.

Caſo 3. Sea el triangulo eſcaleno OPQ, y el lado PQ ſea mayor que PO: corteſe pues PR, igual à PO; y por conſiguiente, ſiendo, como ſe ſupone, PO, mayor que quadrante, tambien lo ſerà PR: luego por el caſo 2. el angulo POR ſerà obtuſo, y mucho mas lo ſerà POQ. De OP, OQ, mayores que quadrante, cortenſe OS, OT, iguales al quadrante; y tirando el arco STV, haſta encontrar al arco QP, alargado en V, ſeràn (20.) los angulos T, y S,

rec-

rectos; y TS, medida del angulo obtuso POQ, serà mayor que quadrante, como tambien lo es por suposicion PQ: luego los arcos PV, TV, son menores que quadrante; y por consiguiente, los dos juntos son menos que un semicirculo: luego (16.) el angulo externo T, que es recto, serà mayor que su interno, y opuesto TPV: luego su complemento TPQ, al semicirculo es obtuso.

Caso 4. Sea el triangulo isoceles XVY, cuyos dos lados XU, XY, son iguales entre sì, y mayores que el quadrante; y el VY, sea quadrante. Digo, que todos sus angulos son obtusos. Que lo sean los angulos V, Y, sobre la basa, consta de la *propos*.20. Para probar, que tambien lo es el angulo VXY, cortese VZ, igual al quadrante, y tirese el arco YZ, &c. hasta que concurra con YX alargado, y serà V polo del circulo YZ, &; y los angulos en Z, seràn rectos; y el arco ZY, medida del angulo obtuso V, serà mayor que quadrante; y por consiguiente, los arcos X, &, Z, &, menores que quadrante, y entrambos juntos menos que un semicirculo: luego (16.) el angulo externo Z, que es recto, serà mayor que el interno opuesto ZX, &: luego èste serà agudo, y por consiguiente el residuo ZXY, serà obtuso.

Caso 5. En el triangulo ABC, son entrambos lados AB, AC, mayores que el quadrante, pero desiguales, porque AC es mayor que AB; y BC sea quadrante. Digo, que los tres angulos de este triangulo son obtusos. Cortese BD igual al quadrante; y desde B, como polo, descrivase el arco CDE, hasta que concurra con CA, alargado en E. Cortese tambien AF igual à AB, y tirese el arco BF, y (20.) el angulo ABF serà obtuso: luego mucho mas lo serà ABC. Tambien el angulo D es recto, y CD, medida del obtuso ABC, es mayor que quadrante, como tambien AC: luego los arcos residuos AE, DE, son menores que quadrante, y juntos son menos que un semicirculo: luego (16.) el angulo externo D, que es recto, es mayor que el interno opuesto DAE: luego èste es agudo: luego su complemento à dos rectos BAC, es obtuso. Tambien se probarà ser obtuso el angulo ACB, porque siendo B polo de DC, serà el angulo BCD recto: luego BCF serà obtuso: luego los tres son obtusos.

LIBRO V.

DE LA RESOLUCION DE LOS Triangulos esfericos rectangulos.

EN los triangulos esfericos rectangulos, el lado opuesto al angulo recto, se llama *hipotenusa*. De los lados que comprehenden el angulo recto, el uno se llama *perpendiculo*, y el otro *basa*. El mismo que es basa, es tambien en otra suposicion perpendiculo, porque siendo estos dos lados, que forman el angulo recto, perpendiculares el uno al otro, si consideramos qualquiera de los dos como basa, el otro serà perpendiculo: consideramosle como basa, quando le comparamos con el angulo contermino que forma con la hipotenusa; y como perpendiculo, quando le referimos à su angulo opuesto.

CAPITULO I.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION de los triangulos esfericos rectangulos.

TOda la resolucion de los triangulos esfericos rectangulos, se funda en la analogia, y proporcion de sus partes, la qual se demuestra en solos dos Theoremas, que son los siguientes.

PROP.

PROP. I. Theorema.

En los triangulos rectangulos, que tienen un mismo angulo agudo sobre la basa; los senos de las hipotenusas son proporcionales à los senos de los perpendiculos.
(*fig.*36.)

SEa ABDCA una octava parte de la esfera, cuyo centro es C: los arcos AB, AD, DB son quadrantes, que hacen unos con otros angulos rectos: conque A es el polo de DB; B es polo de AD; y D es polo de AB. Salga del punto D otro quadrante DE, y quedarà formado el triangulo esferico DEB. Baxe tambien desde A otro quadrante AFG, que cortando à DFE en F, y à DGB en G, formarà otro triangulo esferico DFG; y porque los angulos EBD, FGD son rectos, los dichos triangulos seràn rectangulos, y tienen el angulo EDB comun. La linea pues EL, perpendicular à la comun seccion, y radio CB, y que desciende del punto E, es el seno del arco EB, y es juntamente perpendicular al plano CBD. Assimismo la linea FI, perpendicular à la comun seccion, ò radio CG, es seno del arco FG: y en el plano DEC, el radio EC es seno todo, ò seno del quadrante ED; y la linea FH, perpendicular à la comun seccion CD, es seno del arco FD.

Esto supuesto, digo, que los senos de las hipotenusas DE, DF, son proporcionales con los senos de los arcos EB, FG, que son los perpendiculos; esto es, assi se ha CE, seno de la hipotenusa DE, con HF, seno de la hipotenusa DF, como EL, seno del perpendiculo EB, con FI, seno del perpendiculo FG.

Demonstr. Por ser las lineas EL, FI perpendiculares al mismo plano CBD, han de ser forzosamente paralelas; (6. 11. Eucl.) y assimismo las lineas EC, FH, por estàr en el mismo plano CED, y ser ambas perpendiculares à la misma linea CD, son entre sì paralelas: (29. 1. Eucl.) luego (10. 11. Eucl.) los angulos CEL, HFI, que constan de lineas paralelas, son iguales; y siendo rectos los angulos ELC, FIH, y por consiguiente iguales, seràn tambien los angulos ECL, FHI iguales; y los dichos triangulos rectilineos seràn equiangulos: luego (4. 6. Eucl.) seràn sus lados proporcionales.

Como CE, *seno de la hipotenusa, ò arco* ED,
à EL, *seno del perpendiculo, ò arco*. EB;
assi HF, *seno de la hipotenusa, ò arco* FD,
à FI, *seno del perpendiculo, ò arco* FG.

Y alternando, invirtiendo, &c.

PROP. II. Theorema.

En los mismas triangulos rectangulos, los senos de las basas son proporcionales con las tangentes de los perpendiculos. (*fig.* 36.)

EXplicacion. Sea la linea MB perpendicular al radio CB, y tirada la secante CM, serà MB tangente del perpendiculo EB. Assimismo sea KG perpendicular al radio CG, y tirada la secante CK, serà KG tangente del perpendiculo FG. Tambien por ser BC perpendicular à CD, es seno de la basa DB; y tirada GN tambien perpendicular à CD, es seno de la basa GD. Digo pues, que son proporcionales CB, seno de la basa DB, à BM, tangente del perpendiculo EB; como NG, seno de la basa DG, à GK, tangente del perpendiculo FG.

Demonstr. Por estàr EL, MB en un mismo plano, y ser perpendiculares à CB, seràn entre sì paralelas. (29.1.Euc.) Y assimismo, por ser FI, KG perpendiculares à CG, son tambien entre sì paralelas: luego (6. 11.) MB, KG son paralelas. Tambien por ser BC, y GN perpendiculares à CD, son entre sì paralelas: y siendo los angulos NGK, CBM rectos iguales, y paralelos, seràn los planos NGK, CBM paralelos; y cortando el plano DEC los planos sobredichos, las comunes secciones CM, NK seràn paralelas, y los angulos MCB, KNG paralelos, è iguales, como tambien los angulos M, y K: (16.11. Eucl.) luego los triangulos CBM, NGK son equiangulos; y (4.6. Eucl.) sus lados homologos seràn proporcionales.

Co-

Como CB *seno de la basa* BD,
à BM *tangente del perpendiculo* EB;
assi NG *seno de la basa* GD,
à GK *tangente del perpendiculo* FG.
Y alternando, invirtiendo, &c.

CAPITULO II.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS ESFERICOS rectangulos.

DE los dos Theoremas que se han demonstrado en el capitulo passado, se infiere la resolucion de los triangulos esfericos rectangulos; pero antes de entrar en ella, serà conveniente hacer reflexion sobre las observaciones siguientes.

OBSERVACIONES.

1 SI uno de los lados que comprehenden el angulo recto, es quadrante, el angulo opuesto à dicho lado es recto; si es menor que quadrante, es agudo; y si mayor, obtuso; y al contrario. *Prop.* 27. *lib.* 4.

2 Si los lados que forman el angulo recto, ò à lo menos uno de ellos, es quadrante, la hipotenusa tambien serà quadrante: si entrambos son mayores, ò entrambos menores que el quadrante, la hipotenusa serà menor que el quadrante; pero si uno de dichos lados es mayor, y el otro menor que el quadrante, la hipotenusa serà mayor que el quadrante; y al contrario. *Prop.* 28. *lib.* 4.

3 Si uno de los angulos adyacentes à la hipotenusa fuere recto, la hipotenusa serà quadrante: si ambos fueren agudos, ò obtusos, la hipotenusa serà menor que el quadrante; y si uno fuere agudo, y el otro obtuso, serà la hipotenusa mayor que el quadrante; y al contrario. *Infierese de las antecedentes observaciones.*

4 Los tres angulos de qualquiera triangulo esferico son mayores que dos rectos, y menores que seis. *Proposicion* 21. *lib.* 4.

5 Siem-

5 Siempre que en la proporcion entrare la hipotenusa, ò como conocida, ò como buscada, se funda la resolucion en el Theorema 1. por ser la proporcion de seno à seno; pero quando la hipotenusa no entrare en la proporcion, si otro lado, se fundarà la analisi en el Theorema 2. por ser entonces la proporcion de seno à tangente, ù de tangente à seno.

6 Conviene advertir, que en cada resolucion se forman dos triangulos con un angulo comun, como en la *fig.* 36. Los dos triangulos son DEB, DFG, que tienen el angulo comun D; en los quales se ve claramente, que el uno, que es DEB, siempre tiene la hipotenusa, y basa quadrantes, como lo son DE, DB, y à este llamamos *triangulo principal*; y al otro *triangulo proporcional*.

7 En todas las resoluciones dispondrèmos los terminos de la proporcion, de la misma suerte que en los triangulos rectilineos, esto es, en lugar del logarithmo primero, tomarèmos su complemento logarithmico; y la suma de los tres, menos el radio, serà el logarithmo del quarto termino que se busca. Quando el primer termino fuere tangente mayor que el radio, esto es, fuere tangente de arco mayor que 45. grados, se tomarà su complemento al duplo radio, el qual duplo se quitarà de la suma para tener el logarithmo del quarto termino, que se busca. Quitase el radio, omitiendo, ò quitando una unidad à la izquierda de la suma; y restase el duplo radio, quitando 2. de alli mismo, como en otra parte queda dicho.

PROP. III. Problema.

Dado un angulo obliquo, y el lado contermino à dicho angulo, hallar el otro angulo. (fig. 38.)

EN el triangulo DFG rectangulo en G, dado el angulo F 72. gr. 25. min. y el lado contermino FG 37. gr. 21. min. se busca el angulo D.

Pro-

Proporcion. Prop. 1.	*Logarithmos.*
Como el radio	C.L. 0.0000000.
al seno del angulo F 72. *gr.* 25. *min.*	9.9792198.
assi el seno segundo del lado FG 37.*gr.* 21.*m.*	9.9003367.
al seno segundo del angulo D 40. *gr.* 44.*m.*	9.8795565.

Demonstr. Supongase en la *fig.* 37. el mismo triangulo DFG descrito en la superficie de la esfera VDBT; y desde D, como polo, descrivase el arco REB; y desde F, el arco RQP; y continuese el arco GF, y serà GQT. De que se sigue, que QP es medida del angulo QFP; conque tambien lo serà de su vertical opuesto DFG; y porquè GA es quadrante, por ser A polo de DGB, serà FA complemento del lado GF, como tambien por la misma razon serà AE complemento del arco EB, medida del angulo D; conque AE es complemento del angulo D. Esto supuesto, en los triangulos FQP, FAE, son proporcionales. (1.)

Como el seno del quadrante FQ, *que es el radio,*
al seno de QP, *que lo es del angulo* F;
assi el seno 1. *de* FA, *que lo es segundo de* FG,
al seno de AE, *que lo es* 2. *de* EB, *ù del angulo* D.

PROP. IV. Problema.

Dado un lado, y el angulo opuesto à dicho lado, hallar el otro angulo. (*fig.* 39.)

P*Ara esta resolucion es menester conocer antes, si el angulo que se busca ha de ser agudo, ò obtuso, lo qual se conocerà por la observacion* 1. *y* 3. *conociendo si la hipotenusa, ò el otro lado es mayor, ò menor que el quadrante. Porque siendo este lado mayor que el quadrante, el angulo que se busca serà obtuso; y siendo menor, serà agudo.* (27.4.) *Tambien si el lado dado es mayor, ò menor que el quadrante, y la hipotenusa fuere menor que el quadrante, el otro lado serà de la misma especie que el lado dado; pero si la hipotenusa fuere mayor que el quadrante, el sobredicho lado serà de especie opuesta al lado dado, como se dixo en las observaciones antecedentes.*

En

En el triangulo DFG, rectangulo en G, dado el lado FG, 23.gr. 17.min. y el angulo opuesto D, 32.gr. 54.min. se busca el angulo F, el qual se supone ha de ser agudo.

Proporcion. Prop. 1.		*Logarithmos.*
Como el seno 2. de FG	23.g.17.m.	C. L. 0.0368918.
al radio;	90.g.	10.0000000.
asi el seno 2. del ang. D	32.g.54.m.	9.9240827.
al seno 1. del ang. F	66.g. 4.m.	9.9609745.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos FQP, FAE, son proporcionales (1.) el seno 1. de FA, que es seno 2. de GF, al seno del quadrante FQ, que es el radio; como el seno 1. de AE, que es segundo de EB, ù del angulo D, al seno 1. de QP, ù del angulo AFE, ù de DFG su igual.

PROP. V. Problema.

Dada la hipotenusa, y un lado, hallar el angulo opuesto à este lado. (*fig.* 40.)

EN el triangulo DFG, rectangulo en G, dada la hipotenusa DF, 50.gr. 20.min. y el lado GF, 30.gr. 25.m. se busca el angulo D, opuesto al lado FG.

Proporcion. Prop. 1.		*Logarithmos.*
Como el seno de la hipot. DF	50.g. 20.m.	C. L. 0.1136384.
al radio;	90.g.	10.0000000.
asi el seno del lado FG	30.g.25.m.	9.7043947.
al seno del angulo D	41.g. 8.m.	9.8180331.

Demonstr. (*fig.* 37.) La medida del angulo D es EB; y (1.) son proporcionales el seno de la hipotenusa DF, al seno de la hipotenusa DE, que es el radio, por ser DE quadrante; como el seno del perpendiculo FG, al seno del perpendiculo EB, que es seno del angulo D, por ser EB su medida.

PROP.

PROP. VI. Problema.

Dados los lados, hallar qualquiera angulo obliquo.
(*fig.* 41.)

EN el triangulo DFG, rectangulo en G, dado el lado DG, 59. gr. 22. min. y el lado FG, 33. gr. 44. min. se busca el angulo D, opuesto al lado FG.

Proporcion. Prop. 2.		*Logarithmos.*
Como el seno del lado conter. DG	59.g.22.m.	C.L. 0.0652765.
al radio;	90.	10.0000000.
assi la tang. del lado opuesto GF	33.g.44.m.	9.8246191.
à la tangente del angulo D	37.g.49.m.	9.8898956.

Demonstr. En los triangulos DFG, DEB, (*fig.* 36.) son proporcionales (2.) el seno del lado contermino DG, al seno del arco DB, que es el radio; como la tangente GK, del lado FG, à la tangente BM del arco BE, que siendo èste medida del angulo D, serà BM tangente del mismo angulo D. De la misma suerte se hallarà el angulo F.

PROP. VII. Problema.

Dada la hipotenusa, y un lado, hallar el angulo intermedio.
(*fig.* 42.)

EN el triangulo DFG, rectangulo en G, dada la hipotenusa DF, 50.gr.20.min. y el lado FG, 30. gr. 25. min. se busca el angulo F intermedio.

Proporcion. Prop. 2.		*Logarithmos.*
Como la tang. de la hipot. DF	50.g.20.m.	C.L. 9.9186769.
à la tangente del lado FG;	30.g.25.m.	9.7687029.
assi el radio	90.	10.0000000.
al seno 2. *del angulo* F	60.g.52.m.	9.6873798.

Aqui se ve, que la suma de los tres, menos el duplo radio, es el logarithmo que se busca.

De-

Demonstr. En la *fig.*37. es DFG el triangulo propuesto, y hecha la descripcion que se dixo en la *prop.* 3. es QP, medida del angulo QFP; y por consiguiente, de su igual DFG; conque QR, es el complemento del angulo DFG; y porque GA, FQ, son quadrantes iguales, quitado el arco FA comun, quedaràn GF, AQ iguales; y assimismo, por ser tambien quadrantes DE, FP, si se quita FE comun, son DF, EP iguales. En los triangulos pues RPE, RQA, son (2.) proporcionales las tangentes de los perpendiculos, con los senos de las basas, la tangente del perpendiculo EP, ù DF su igual, à la tangente del perpendiculo AQ, ò GF su igual: assi el seno de la basa RP, que es el radio, al seno de la basa RQ, que es seno segundo de QP, ù del angulo DFG, cuya medida es QP.

PROP. VIII. Problema.

Dada la Hipotenusa, y un angulo obliquo, hallar el otro angulo. (*fig.* 43.)

EN el triangulo DFG, rectangulo en G, dada la hipotenusa DF 63. gr. 45. min. y el angulo F 61. gr. 35. min. se busca el angulo D.

Proporcion, Prop. 2.		*Logarithmos.*
Como el radio.	90.	C.L. 0.0000000.
al seno 2. de la hipot. DF	63.g.45.m.	9.6457058.
assi la tang. del angulo F	61.g.35.m.	10.2667434.
à la tang. 2. del ang. D	50.g.44.m.	9.9124492.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos FQP, FAE, son proporcionales, (2.) como el seno de la basa FP, que por ser quadrantes es el radio, al seno de FE, que es seno 2. de la hipotenusa DF: assi la tangente del arco QP, ù del angulo F, cuya medida es QP, à la tangente del arco AE, que es tangente 2. del angulo D, por ser AE complemento de EB, medida del angulo D.

PROP.

PROP. IX. Problema.

Dada la hipotenusa, y un angulo obliquo, hallar el lado opuesto à este angulo. (*fig.* 44.)

EN el triangulo DFG, dada la hipotenusa DF 52. gr. 33. min. y el angulo D 40. gr. 58. min. se busca el lado opuesto FG.

Proporcion. Prop. I.		*Logarithmos.*
Como el radio	90. gr.	C.L. 0.0000000.
al seno del angulo D	40. gr. 58. m.	9.8166521.
asi el seno de la hipoten. DF	52. gr. 33. m.	9.8997572.
al seno del lado opuesto FG	31. gr. 22. m.	9.7164093.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos DEB, DFG son proporcionales (1.) el seno de la hipotenusa DE, que es el radio, al seno del perpendiculo EB, que lo es del angulo D, por ser ED su medida: asi el seno de la hipotenusa DF, al seno del lado FG.

PROP. X. Problema.

Dada la hipotenusa, y un lado, hallar el otro lado. (*fig.* 40.)

EN el triangulo DFG dada la hipotenusa DF 50. gr. 20. min. y el lado FG 30. gr. 25. min. se busca el lado DG.

Proporcion. Prop. I.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el seno 2. de FG	30.	25.	C.L. 0.0643082.
al radio	90.		10.0000000.
asi el seno 2. de la hipot. DF	50.	20.	9.8050385.
al seno 2. del lado DG	42.	15.	9.8693467.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos AGB, y AFE, son proporcionales (1.) el seno de la hipotenusa AF, que es seno 2. de FG, al seno de la hipotenusa AG, que es el radio: asi el seno del perpendiculo FE, que lo es segundo de la hipot. DF, al seno del perpendiculo GB, que es seno 2. del lado DG.

PROP.

PROP. XI. Problema.

Dados los angulos, hallar qualquiera lado. (*fig.* 45.)

DAdos los angulos D, 45. gr. 30. m. y F, 60. gr. 18. m. en el triangulo DFG, se busca el lado FG.

Proporcion. Prop. 1.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el seno 1. *del ang.* F *conterm.*	60.	18.	C.L. 0.0611644.
al seno 2. *del ang.* D *opuesto;*	45.	30.	9.8456618.
assi el radio	90.		10.0000000.
al seno 2. *del lado* FG	36.	12.	9.9068262.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos FQP, FAE, son proporcionales (1.) el seno 1. de QP, ù del angulo F, al seno 1. de AE, que lo es segundo de EB, ù del angulo D: assi el seno del quadrante FQ, que es el radio, al seno 1. de FA, que lo es segundo del lado FG.

PROP. XII. Problema.

Dado un lado, y un angulo contermino, hallar el otro lado. (*fig.* 46.)

EN el triangulo DFG, es dado el lado DG 67. gr. 51. m. y el angulo contermino D 28. gr. 22. m. y se busca el lado FG opuesto al angulo dado D.

Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el radio	90.		C.L. 0.0000000.
al seno del lado DG	67.	51.	9.9667048.
assi la tang. del angulo D	28.	22.	9.7323506.
à la tan. del lado opuesto FG	26.	34.	9.69905554.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos DEB, DFG son proporcionales (2.) como el seno de DB, que es el radio, al seno del lado DG: assi la tangente de EB, ù del angulo D, à la tangente del lado FG.

PROP.

PROP. XIII. Problema.

Dado un lado, y un angulo opuesto, hallar el otro lado. (*fig.* 39.)

PAra esta resolucion, es menester saber, si el lado que se busca es mayor, ò menor que el quadrante; lo que se inferirà, sabiendo si la hipotenusa es mayor, ò menor que el quadrante, ò si el otro angulo obliquo es agudo, ò obtuso, segun las observaciones arriba puestas. En el triangulo DFG, dado el lado FG, 23. gr. 17. m. y el angulo opuesto D, 32. gr. 54. m. se busca el lado DG.

Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como la tangente del angulo D	32.	54.	C.L. 0.1891434.
à la tang. del lado opuesto FG	23.	17.	9.6337948.
assi el radio	90.		10.0000000.
al seno del lado DG	41.	42	9.8229382.

Demonstr. (*fig.* 36.) En los triangulos DEB, DFG son proporcionales (2.) la tangente de EB, ù del angulo D, à la tangente del lado FG; como el seno del quadrante DB, ò el radio, al seno del lado DG.

PROP. XIV. Problema.

Dada la hipotenusa, y un angulo obliquo, hallar un lado contermino à este angulo. (*fig.* 43.)

EN el triangulo DFG se da la hipotenusa DF 63. gr. 45. m. y el angulo F 61. gr. 35. m. y se busca el lado FG contermino al angulo dado.

Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el radio	90		C.L. 0.0000000.
al seno 2. *del angulo* F	61.	35.	9.6774975.
assi la tangente de la hipot. DF	63.	45.	10.3070250.
à la tang. del lado FG.	43.	59.	9.9845225.

De-

Demonstr. Por ser (*fig.* 37.) DE, EF quadrantes, segun la descripcion hecha en la *prop.* 3. si les quitamos el arco FE comun, quedaràn DF, EP iguales: assimismo, si à los quadrantes GA, FQ les quitamos el arco FA comun, quedaràn GF, AQ iguales. Esto supuesto, en los triangulos RPE, RQA son (2.) proporcionales, el seno de la basa RP, que es el radio, al seno del arco RQ, que lo es segundo del arço QP, ù del angulo F, su medida; assi la tangente del arco EP, ù de la hipotenusa DF, su igual, à la tangente AQ, ù de su igual FG.

PROP. XV. Problema.

Dados los angulos, hallar la hipotenusa. (*fig.* 45.)

EN el triangulo DFG se suponen conocidos los angulos F 60. gr. 18. m. y D 45. gr. 30. m. y se busca la hipotenusa DF.

Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*		*Logarithmos.*
Como la tang. 1. *del angulo* F	60.	18.	C. L.	9.7561718.
à la tang. 2. *del angulo* D	45.	30.		9.9924197.
assi el radio	90.			10.0000000.
al seno 2. *de la hipot.* DF	55.	54.		9.7485915.

Demonstr. En los triangulos FQP, FAE (*fig.* 37.) son proporcionales (2.) como la tangente 1. del arco QP, ù del angulo F, à la tangente 1. del arco AE, que es segunda del arco EB, ù del angulo D: assi el seno del quadrante FP, que es el radio, al seno primero de FE, que lo es segundo de la hipotenusa DF.

PROP. XVI. Problema.

Dados dos lados, hallar la hipotenusa. (*fig.* 41.)

EN el triangulo DFG dado el lado DG 59. gr. 32. m. y el lado FG 33. gr. 44. min. se busca la hipotenusa DF.

Pro-

Proporcion. Prop. 1.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el radio	90.		C. L. 0.0000000.
al ſeno 2. del lado FG	33.	44.	9.9199308.
aſsi el ſeno 2. del lado DG	59.	22.	9.7071801.
al ſeno 2. de la hipot. DF	64.	56.	9.6271109.

Demonſtr. (*fig.* 17.) En los triangulos AGB, AFE, ſon proporcionales (1.) el ſeno de la hipotenuſa AG, que es el radio, al ſeno 1. de AF, que es ſeno 2. de FG: como el ſeno 1. de GB, que lo es ſegundo de DG, al ſeno 1. de FE, que lo es ſegundo en la hipotenuſa DF.

PROP. XVII. Problema.

Dado un lado, y el angulo opueſto à eſſe lado, hallar la hipotenuſa. (*fig.* 39.)

P*Pra eſta reſolucien es meneſter ſaber, ſi la hipotenuſa, ò el otro lado es mayor, ò menor que el quadrante; ò ſi el otro angulo obliquo es agudo, ò obtuſo, lo que ſe ſabrà por las obſervaciones pueſtas al principio de eſte Capitulo.* En el triangulo DFG, dado el lado FG, 23. gr. 17. m. y el angulo opueſto D, 32. gr. 54. m. ſe buſca la hipotenuſa DF, que ſuponemos, ha de ſer menor que el quadrante.

Proporcion. Prop. 1.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el ſeno del angulo D	32.	54.	C. L. 0.2650607.
al ſeno del lado FG	23.	17.	9.5969029.
aſsi el radio	90.		10.0000000.
al ſeno de la hipot. DF	46.	42.	9.8619636.

Demonſtr. (*fig.* 37.) En los triangulos DEB, DFG, ſon proporcionales (1.) como el ſeno de EB, ù del angulo D, al ſeno de FG: aſsi el ſeno del quadrante DE, que es el radio, al ſeno de la hipotenuſa DF.

PROP. XVIII. Problema.

Dado un lado, y el angulo adyacente à dicho lado, hallar la hipotenuſa. (*fig.* 46.)

EN el triangulo DFG, ſe dà el lado DG, 67. gr. 51. m. y el angulo adyacente D, 28. gr. 22. m. y ſe pide la hipotenuſa DF. *Pro-*

Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el radio	90.		C. L. 0.0000000.
al seno 2. del angulo D	28.	22.	9.9444457.
assi la tang. 2. del lado DG	67.	51	9.6096742.
à la tang. 2. de la hipot. DF	70.	18.	9.5541199.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos AGB, AFE, son proporcionales (2.) como el seno del quadrante AB, que es el radio, al seno 1. de AE, que lo es segundo de EB, ù del angulo D; assi la tangente 1. de BG, que lo es segunda de DG, à la tangente 1. de EF, que lo es segunda de la hipotenusa FD.

PROP. XIX. Problema.

Modo de resolver los triangulos quadrantales.

T*Riangulos quadrantales*, como en otra parte dixe, son aquellos que tienen un lado quadrante de 90. grados, y no son rectangulos. El modo de resolver estos triangulos, es, mudar los lados en angulos, y los angulos en lados, con que queda formado otro triangulo, que es rectangulo, el qual resuelto, queda resuelto el primero; y como dicho segundo triangulo sea rectangulo, se resolverà por aquel problema de los sobredichos, à quien perteneciere.

La razon de esto es, porque como demonstrè en la *prop.* 25. del lib. antecedente, en los polos de qualquiera triangulo esferico, se forma otro, cuyos angulos son complemento de los lados del primero al semicirculo; y los lados, de los angulos: luego teniendo el triangulo quadrantal un lado de 90. grados, el triangulo formado en sus polos tendrà un angulo recto; y por consiguiente serà rectangulo: y como los complementos al semicirculo tengan los mismos senos, y tangentes que los arcos de quien son complementos, bastarà convertir los lados en angulos, y los angulos en lados: y aunque esto es bien claro, para mayor facilidad propongo el exemplo siguiente.

Sea dado el triangulo AEB, (*fig.* 47.) en quien se suponen

nen conocidos el lado EB, 55.gr. 54.min. el lado BA, 53.gr. 48.m. y el lado, ò basa EA sea quadrante 90. gr. Pidese el angulo A, opuesto al lado mayor EB. *Operacion.* Convierto los lados en angulos, y supongo que dados los tres angulos busco el lado mayor; y procediendo por la *propos.* 11. dispongo la proporcion en la forma siguiente, usando del nombre de *lados*, donde alli deciamos *angulos*; y del nombre de *angulos*, donde alli deciamos *lados*.

Proporcion.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el seno 1. *de BA lado cont.*	53.	48.	C.L.0.0931478.
al seno 2. *de BE lado opuesto;*	55.	54.	9.7486833.
assi el radio,	90.	0.	10.0000000.
al seno 2. *del angulo A.*	46.	0.	9.8418311.

LIBRO VI.

DE LA RESOLUCION DE los triangulos esfericos obliquangulos.

LA mayor parte de los triangulos esfericos obliquangulos se resuelve, reduciendo el triangulo dado à dos triangulos rectangulos, lo que se hace tirando de su vertice el *perpendiculo* à la basa, el qual no es otra cosa que un arco de circulo maximo, que desciende del vertice perpendicularmente sobre la basa del triangulo. Demonstrarè en los dos primeros capitulos de este libro los Theoremas principales en que se funda la resolucion de dichos triangulos, que se explicarà despues en el tercero.

CAPITULO I.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION de los triangulos esfericos obliquangulos, quando se dan conocidos dos angulos, y un lado; ò dos lados, y un angulo.

PROP. I. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico, los senos de los lados son proporcionales con los senos de los angulos opuestos. (*fig.* 31.)

SEa el triangulo ABC. Digo, que el seno de el lado AB, al seno de el angulo opuesto C, tiene la misma razon que el seno de el lado AC, al seno del angulo opuesto B: cayga desde A, el perpendiculo AD, y continuense los lados BAQ, BCP, CAS, CBN, hasta el quadrante.

Demonstr. Los triangulos rectangulos CSN, CAD, tienen el angulo C comun, como tambien los triangulos rectangulos BQP, BAD, tienen el angulo B comun: luego (1. *lib.* 5. *Trigon,*) los senos de las hipotenusas, seràn proporcionales con los senos de los perpendiculos, como se sigue.

En los triangulos CSN, CAD.

Como el seno total, ù del quadrante CS, ò BQ su igual,
al seno de SN, ù del angulo C, à quien mide;
assi el seno del lado CA,
al seno del perpendiculo AD.

En los triangulos BQP, BAD.

Como el seno total, ù del quadrante BQ, ò CS su igual,
al seno de QP, ù del angulo B, à quien mide:
assi el seno del lado BA,
al seno del perpendiculo AD.

Y como (16. 6. Eucl.) en los proporcionales el rectangulo de los medios sea igual al de los extremos; y el rectangulo de los extremos sea el mismo en las dos propor-

cio-

ciones sobredichas, por ser los extremos los mismos, seràn los dos rectangulos de los medios iguales entre sì: luego el rectangulo de los senos de SN, CA, es igual al rectangulo de los senos QP, BA: luego (14. 6. Eucl.) sus lados son reciprocamente proporcionales, como el seno de SN, al seno de QP.; assi el seno de BA, al seno de CA; y alternando, como el seno de SN, que lo es del angulo C, al seno de BA, lado opuesto; assi el seno de QP, que lo es del angulo B, al seno de AC, lado opuesto.

PROP. II. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico, si de uno de sus angulos cae el perpendiculo à la basa, harà con los lados dos angulos verticales, cuyos senos primeros seràn proporcionales con los senos segundos de los angulos sobre la basa. (*fig.* 31.)

EN el triangulo ABC, sea el perpendiculo AD, que forma los angulos verticales BAD, DAC, cuyas medidas son los arcos HG, GI; y los arcos QP, SN son las medidas de los angulos ABC, ACB sobre la basa; y sus complementos son los arcos PO, NM. Tambien si de los quadrantes iguales HO, GF, se quita el arco comun GO, quedarà OF igual à HG, medida del angulo vertical BAD, y assimismo, si de los quadrantes IM, GE se quita el arco comun GM, quedarà ME igual à IG medida del otro angulo vertical DAC. Esto supuesto,

Demonstr. Los triangulos ENM, FPO, tienen los angulos E, y F iguales, (4. *lib.* 4. *Trigon.*) y los angulos N, y P rectos: luego (1. 5. *Trigon.*) seràn proporcionales los senos de las hipotenusas con los senos de los perpendiculos.

Como el seno de EM, ò GI su igual, ù del angnlo CAD,
al seno de MN, que es segundo de NS, ù del angulo ACB;
assi el seno de FO, ò GH su igual, ù del angulo BAD,
al seno de OP, que lo es segundo de PQ, ù del angulo ABC.

PROP. III. Theorema.

En qualquiera triangulo son proporcionales los senos segundos de los angulos verticales, que forma el perpendiculo, con las tangentes segundas de los lados. (fig. 31.)

EN el mismo triangulo ABC, es FI, complemento de IG, medida del angulo vertical CAD; y IC, es complemento de CA: assimismo es EH, complemento de HG, medida del angulo vertical BAD; y HB, es complemento del lado BA. Esto supuesto,

Demonstr. Los triangulos FIG, EHB, tienen los angulos E, y F, iguales; y los angulos H, I, rectos: luego (2.5. *Trig.*) son los senos de sus basas proporcionales con las tangentes de los perpendiculos.

Como el seno 1. de FI, que lo es segundo de IG, ù del angulo CAD,
à la tangente 1. de IC, que lo es segunda de CA;
assi el seno 1. de EH, que lo es segundo de HG, ù del angulo BAD,
à la tangente 1. de HB, que lo es segunda de BA.

PROP. IV. Theorema.

Los senos segundos de los lados son proporcionales con los senos segundos de los segmentos, que hace el perpendiculo en la basa. (fig. 31.)

EN el mismo triangulo ABC, los segmentos que el perpendiculo AD hace en la basa, son BD, y CD, los quales siempre se han de contar desde cada angulo sobre la basa hasta el perpendiculo, aunque este cayga fuera del triangulo. Tambien el arco EB, es complemento del segmento BD; y el arco HB, del lado BA; y assimismo FC, es complemento del segmento CD; y el arco IC, del lado CA.

Demonstr. Los triangulos EBH, FCI, tienen los angulos

los I, H, rectos, y los angulos F, y E iguales: (4.4. *Trigon.*) luego (1. 5. *Trigon.*) los senos de las hipotenusas son proporcionales con los senos de los perpendiculos.

Como el seno 1. de EB, que lo es segundo del segmento BD,
al seno 1. de BH, que lo es segundo del lado BA;
assi el seno 1. de FC, que lo es segundo del segmento CD,
al seno 1. de CI, que lo es segundo del lado CA.

PROP. V. Theorema.

Los senos primeros de dichos segmentos de la basa, son proporcionales con las tangentes segundas de los angulos sobre la basa conterminos à los segmentos. (*fig.* 31.)

EN el mismo triangulo ABC, si de los quadrantes iguales BP, DF, se quita el segmento comun DP, queda EP, igual al segmento BD; y si de los quadrantes CN, DE, se quita el segmento comun DN, queda el arco EN, igual al segmento DC. A mas de esto, el arco PO, es complemento del arco QP, medida del angulo B; y MN, es complemento de NS, medida del angulo C, lo qual supuesto,

Demonstr. En los triangulos ENM, FPO, los angulos N, y P, son rectos; y E, F, iguales: luego (2.5. *Trigon.*) los senos de las basas son proporcionales con las tangentes de los perpendiculos; y será

Como el seno 1. de FP, ù del segmento BD, su igual,
à la tangente 1. de PO, que lo es segunda de QP, ù del angulo B;
assi el seno 1. de EN, ù del segmento DC, su igual,
à la tangente 1. de NM, que lo es segunda del arco AB, ù del angulo C.

PROP. VI. Theorema.

Las tangentes de los angulos verticales son proporcionales con las tangentes de los segmentos de la basa. (*fig.* 31.)

EN el mismo triangulo ABC. Digo, que son proporcionales la tangente del angulo BAD, à la tangente del seg-

ſegmento BD ; como la tangente del angulo CAD, à la tangente del ſegmento DC.

Demonſtr. Los triangulos HAG, BAD ſon rectangulos en G, y D, y tienen el angulo BAD comun; y aſsimiſmo los triangulos GAI, DAC ſon rectangulos en G, y D, y tienen el angulo GAI comun: luego (1.5. *Trigon.*) la tangente de GH à la tangente de DB tiene la razon miſma que el ſeno de AG, al ſeno de AD: la tangente de GI à la tangente de DC tiene tambien la miſma razon que el ſeno de AG al ſeno de AD: luego la miſma razon tiene la tangente de HG à la tangente de BD, que la tangente de GI à la tangente de DC: luego

Como la tangente de HG, ù del angulo BAD,
à la tangente de BD, ſegmento de la baſa;
aſsi la tangente de GI, ù del angulo DAC,
à la tangente de DC ſegmento de la baſa.

CAPITULO II.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION de los triangulos esfericos obliquangulos, en que ſe dan conocidos ſus tres lados, ò ſus tres angulos.

PROP. VII. Theorema.

En qualeſquiera dos arcos, aſsi ſe ha el ſeno total, al ſeno de la ſemiſuma de dichos arcos; como el ſeno de la ſemidiferencia de los miſmos arcos à la ſemidiferencia de ſus ſenos verſos. (*fig.*48.)

E*Xplicacion.* Sean los dos arcos AB, BC; y todo el arco ABC ſerà ſu ſuma: tireſe la cuerda AC, y del centro L ſalga el radio LN perpendicular à AC; y quedaràn aſsi la cuerda AC, como el arco ANC divididos en dos partes iguales en F, y N; (3.3. Eucl.) conque AN ſerà la ſemiſuma de los arcos *AB*, *BC*; y *AF*, el ſeno de dicha ſe-

semisuma: tomese el arco *BG*, igual à *BA*, y serà *CG*, la diferencia de los arcos *AB*, *BC*; ò *BG*, *BC*; y tirando la cuerda *AG*, quedarà èsta dividida en dos partes iguales en *D*, por el radio *LB*, que le es perpendicular por ser los arcos *AB*, *BG*, iguales, conque serà *DB*, seno verso del arco *AB*; y tirada *CE* perpendicular al radio *LB*, serà *EB*, seno verso del arco *BC*; y *ED*, ò *CM* su paralela, è igual, serà la diferencia de los senos versos *DB*, *EB*: dividase por medio en *H* la recta *CG*; que es cuerda de la diferencia *CG*; y serà *CH*, seno de la semidiferencia, ò mitad del arco *CG*, y juntese la linea *FH*. Digo pues, que assi se ha *LA*, radio à *AF*, seno de la semisuma de los arcos *AB*, BC, como CH, seno de la semidiferencia de los mismos, à CI, que es semidiferencia de sus senos versos.

Demonstr. En los triangulos CFH, CAG, assi se ha CF à CA, como CH à CG; porque assi como CF es mitad de CA, assi CH es mitad de CG: luego (2.6.Eucl.) FH, AG son paralelas: luego (27.1.Eucl.) los angulos M, I, son rectos iguales, como tambien son iguales los angulos CHI, CGM: luego los triangulos CIH, CMG, son equiangulos: luego (4.6. Eucl.) assi como CH, es mitad de CG, es CI mitad de CM; es pues CI, semidiferencia de los senos versos. Esto supuesto, los triangulos AFL, CIH, son equiangulos, porque los angulos F, I, son rectos; y el angulo ALN, es de tantos grados como el arco AN, por formarse en el centro L; y el angulo AGC, por formarse en la circunferencia, es de tantos grados como la mitad del arco AC, que es tambien AN: (20.3.Eucl.) luego el angulo ALF, es igual al angulo AGC; y siendo èste, como dixe, igual al angulo IHC, es tambien el angulo ALF, igual al IHC: luego los triangulos AFL, CIH, son equiangulos: luego (4.6.Eucl.) son sus lados proporcionales.

Como AL radio,
à AF, seno de la semisuma de los arcos *AB*, *BC*;
assi CH, seno de la semidiferencia CT de dichos arcos,
à CI, semidiferencia de los senos versos DB, EB de los mismos.

CO-

COROLARIOS.

1 *EN qualquiera triangulo inscrito en el circulo, son las mitades de sus lados medios proporcionales entre el radio, y la mitad del perpendiculo: como en el triangulo ACG; assi se ha el radio AL à AF, ò FC, mitad del lado AC: como CH, mitad del lado CG, à CI, mitad del perpendiculo CM. Consta de lo demonstrado.*

2 *Assi se ha el quadrado del radio, al rectangulo hecho del seno recto de la semisuma de dos arcos, y del seno recto de la semidiferencia de los mismos; como el diametro à la diferencia de los senos versos de los mismos arcos.*

Demonstr. Siendo, como queda demonstrado, el radio al seno de la semisuma de dos arcos, como el seno de la semidiferencia de los mismos arcos, à la semidiferencia de sus senos versos: serà (16.6. Eucl.) el rectangulo hecho del radio, y de la semidiferencia de los senos versos, que son los extremos, igual al rectangulo hecho de la semisuma, y semidiferencia de los arcos, que son los medios; y porque el quadrado del radio, al rectangulo, cuya altura es el radio, y su basa la semidiferencia de los senos versos, se ha como el radio à dicha semidiferencia, ò como todo el diametro à toda la dicha diferencia, serà el quadrado del radio al rectangulo hecho de los senos de la suma, y semidiferencia de los arcos, como el diametro à la diferencia de los senos versos de los mismos arcos.

PROP. VIII. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico son proporcionales.
El rectangulo hecho de los senos de los lados,
al quadrado del radio;
como la diferencia de los senos versos de la basa, y diferencia de los lados,
al seno verso del angulo vertical. (*fig.* 49.)

E*Xplicacion, y preparacion.* La mayor dificultad de estos Theoremas consiste en la disposicion de las figuras, que no pueden bastantemente expressar sus terminos por caer unas lineas en la superficie de la esfera, y otras dentro.

tro. Para mayor claridad, las que se han de considerar dentro, vàn notadas con puntos; y las que en la superficie, con lineas seguidas.

Sea pues el triangulo esferico ACB, cuya basa supongo ser CB, y su angulo vertical A. Desde B, como Polo, con la distancia BC, descrivase el circulo DCY, y seràn assi BD, como BY, iguales à BC; y desde A, como Polo, con la distancia AC, descrivase el circulo menor ECM, paralelo al maximo NGO, y serà AM igual al lado AC; y por consiguiente serà BM, diferencia de los lados AC, AB; y la MR perpendicular al radio XB, serà el seno recto de dicha diferencia, y su seno verso serà RB. Tirese el diametro DY, del circulo DCY; y porque el plano de este circulo es perpendicular al plano ANY, serà su exe BX perpendicular al plano de DCY; y pór consiguiente (*defin.* 3. *lib.*11. Eucl.) serà CL perpendicular al radio XB, y seno recto de la basa CB; y LB, seno verso de la misma basa: conque LR, serà la diferencia de los senos versos LB, RB; y tirada BV, perpendicular al radio AX, serà seno recto del lado AB; y MI, tambien perpendicular à AX, serà seno recto del lado AM, ù de AC su igual; y continuando el arco *AC*, hasta perficionar todo el quadrante AG, se considerarà la GP, perpendicular al diametro NO, y serà seno recto del arco GO; esto es, del angulo vertical *CAB*, à quien mide; y por consiguiente serà PO, seno verso del mismo arco GO, y de dicho angulo vertical *CAB*: y porque el plano, assi del circulo paralelo *ECM*, como del otro circulo *DCY*, son perpendiculares al plano del circulo maximo ANY, serà su comun seccion CZ (19. 11. Eucl.) perpendicular à dicho plano; y por consiguiente al diametro EM; conque ZM, en este diametro es seno verso del mismo angulo *CAB*, como lo es el seno verso PO, en el diametro NO, quedando semejantemente cortadas NO, EM en P, y Z, por el paralelismo de los planos *NGO*, *ECM*.

Demonstr. Por ser VB, IT paralelas, los triangulos VXB, IXT, son semejantes; (2.6. Eucl.) y tambien lo son por la misma razon ZMK, ZTL. Assimismo, los triangulos XIT,

ZLT,

ZLT, porque tienen el angulo T comun; y los angulos L, I, rectos, son equiangulos: luego (4.6.Euc.) son semejantes: luego (21.6.Euc.) los quatro triangulos VXB, IXT, ZTL, ZMK, son semejantes: luego sus lados son proporcionales. Comparando pues los triangulos ZMK, y VXB, serà como MK à MZ; assi BV à BX; y porque las cuerdas, y senos de un mismo angulo en circulos diferentes tienen una misma razon con el radio, serà el seno verso MZ, al seno verso OP, como el radio MI, al radio OX, son pues proporcionales.

MK à MZ, como BV à BX.
MZ à OP, como MI à OX.

Y porque (32.6.Euc.) los rectangulos hechos de lados proporcionales, son tambien entre si proporcionales, serà

El rectangulo hecho de MK, MZ,
al rectangulo hecho de MZ, OP;
como el rectangulo hecho de BV, MI,
al rectangulo hecho de BX, OX.

Y como los rectangulos hechos de MK, MZ, y de MZ, OP, tengan una misma altura MZ; tendràn entre sì la misma razon que sus basas MK, OP: luego el rectangulo hecho de MK, MZ, al hecho de MZ, OP, serà como MK à OP; y haviendo la misma proporcion entre el rectangulo hecho de MK, MZ, y el hecho de MZ, OP, que hay entre el rectangulo hecho de BV, MI, y el hecho de BX, OX, serà el rectangulo de BV, MI, al rectangulo de BX, OX, como MK, à OP; pero el rectangulo de BX, OX, es quadrado hecho de los radios iguales: luego serà

Como el rectangulo hecho de BV, MI, senos de los lados AB, y AM, ò AC,
al quadrado del radio OX;
assi MK, diferencia de los senos versos de la basa CB, y de BM, diferencia de los lados,
à OP, seno verso del angulo vertical CAB.

PROP.

PROP. IX. Theorema.

En qual quiera triangulo esferico son proporcionales:
Como el rectangulo hecho de los senos de los lados, que comprehenden el angulo,
al quadrado del radio;
assi el rectangulo hecho del seno de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados, y del seno de la semidiferencia que hay entre la basa, y la diferencia de los lados,
al quadrado del seno de la mitad del angulo vertical. (*fig.* 50.)

EXplicacion, y preparacion. Sea el triangulo ABC; y tomando como antes BD, BY iguales à la basa BC, y cortando AM igual al lado AC, serà BM diferencia de los lados AC, AB; y siendo BD igual à la basa BC, serà el arco DBM suma de la basa, y de la diferencia de los lados; y dividiendo al arco DBM por medio en E, serà DE la semisuma de la basa, y de la diferencia de los lados; y el seno recto de dicha semisuma serà DQ: y siendo BY igual à la basa BC, serà MY diferencia de la basa, y de la diferencia BM de los lados; y MZ serà seno recto de la semidiferencia.

Considerese aora el plano del semicirculo NGO, perpendicular al plano del semicirculo NEO, y el arco GO serà la medida del angulo vertical CAB, y la perpendicular GP serà su seno recto, y PO su seno verso, y la recta GO es cuerda del arco GO; y por consiguiente, su mitad SO serà el seno recto de la mitad de dicho arco GO, y de la mitad del angulo vertical CAB; y tirada SF perpendicular al radio XO, serà FO mitad de PO, assi como SO es mitad de GO. (2.6.Euc.) Esto supuesto, digo, que *el rectangulo hecho de BV, MT, senos de los lados AB, AM, al quadrado del radio, es como el rectangulo hecho de MQ, MZ, senos, el uno de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados; y el otro, seno de la semidiferencia que hay entre la basa, y la diferencia de los lados, al quadrado de SO, seno del semiangulo vertical CAB.*

Demonstr. La misma razon hay de MK à OP, que de MH à OF, que son sus mitades; y siendo el rectangulo hecho

cho de MH, OX, al hecho de OF, OX, por tener una misma altura OX, como la basa MH, à la basa OF, (16. Eucl.) tendràn estos rectangulos la razon que hay de MK à OP: y teniendo (por la antec.) el rectangulo hecho de BV, MT, y el hecho de BX, OX, la misma razon de MK à OP, seràn los quatro rectangulos proporcionales, como se sigue.

Como el rectangulo de BV, MT,
al rectangulo, ò quadrado de BX, OX;
assi el rectangulo de MH, OX,
al rectangulo hecho de OF, OX.

A mas de esto, porque MQ, MZ, senos, aquel de la semisuma, y èste de la semidiferencia de los lados, son (7.) medios proporcionales entre el radio OX, y MH, semidiferencia de los senos versos de los mismos arcos, serà (16.6. Eucl.) el rectangulo hecho de MQ, MZ, igual al rectangulo hecho de MH, OX. Tambien en el triangulo XSO, por ser el angulo XSO recto, (3.3. Eucl.) aunque la figura no le represente recto, es OS, media proporcional entre OF, OX; (8.6. Eucl.) y por consiguiente, el quadrado de OS, es igual al rectangulo hecho de OF, OX: luego si en la proporcion antecedente, en lugar de los rectangulos de MH, OX, y de OF, OX, se subtituyen el rectangulo de MT, MZ, y el quadrado de OS, seràn tambien proporcionales.

Como el rectangulo de BV, MT, hecho de los senos de los lados AB, AM, *al quadrado del radio BX*; *assi el rectangulo hecho de MT, MZ*; de los quales, MT, es seno de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados; y MZ, es seno de la semidiferencia que hay entre la basa, y la diferencia de los lados; *al quadrado de OS*, seno de la mitad del angulo vertical CAB.

PROP.

PROP. X. Theorema.

En qualquiera triangulo esferico son proporcionales:
Como el rectangulo hecho de los senos de los lados, que comprehenden el angulo vertical,
al quadrado del radio;
assi el rectangulo hecho de los senos da las diferencias, que hay entre los dichos lados, y la semisuma de los tres,
al quadrado del seno del semiangulo vertical. (*fig.* 51.)

EXplicacion, y preparacion. Sea el triangulo ABC, y sean BA, BC sus lados, y AC su basa. Digo, que si se suman sus tres lados, y de la mitad de esta suma se restan de por sì los lados BA, BC, para sacar sus diferencias de dicha semisuma, serà el *rectangulo hecho de los senos de los lados BA, BC, al quadrado del radio, como el rectangulo hecho de los senos de las diferencias halladas entre los lados BA, BC, y la semisuma de los tres lados, al quadrado del seno del semiangulo vertical ABD.* Haganse los arcos BD, BE, iguales al lado BC; y serà AD la diferencia de los dichos lados: tomese AF, igual à la basa AC, y añadase FH, igual al arco AD; y cortese FI, igual al lado BC; y ultimamente, dividase el arco FD, por medio en G.

Demonstr. El arco AH, se compone del arco AF, igual à la basa AC, y del arco FH, igual à AD, diferencia de los lados: conque dicho arco AH, es la suma de la basa, y de la diferencia de los lados; y por consiguiente AG, mitad de AH, serà la semisuma de la basa, y diferencia de los lados. Tambien el arco BAFI, se compone del arco BA, que es un lado del triangulo; del arco AF, que es igual à la basa AC; y del arco FI, igual al lado BC: luego dicho arco BAFI, es la suma de los tres lados: luego su mitad BG, ò GI, es la semisuma de los tres lados del triangulo: luego AG, (que diximos ser la semisuma de la basa, y diferencia de los lados) es tambien la diferencia del lado AB, de la semisuma BG de los tres. Assimismo GD, que es semidiferencia de la basa AF, y diferencia AD de los lados, es juntamente la diferencia de el lado BC, ò BD, de la semi-

ſemiſuma BG de los tres lados. Eſto ſupueſto,

Siendo por la propoſicion anteced. el rectangulo hecho de los ſenos de los lados BA, BC, que comprehenden el angulo B, al quadrado del radio, como el rectangulo hecho de los ſenos, el uno de la ſemiſuma de la baſa, y diferencia de los lados; y el otro de la ſemidiferencia de la baſa, y diferencia de los lados, al quadrado del ſeno de la mitad del angulo vertical ABC, ſeràn tambien proporcionales los ſiguientes.

Como el rectangulo hecho de los ſenos de los lados BA, BC, que incluyen el angulo B,
al quadrado del radio;
aſsi el rectangulo hecho de los ſenos de las diferencias, que hay entre los lados BA, BC, y la ſemiſuma de los tres lados.
al quadrado del ſeno de la mitad del angulo vertical B.

CAPITULO III.

EN QUE SE RESUELVEN LOS TRIANGULOS ESFERICOS obliquangulos.

PAra proceder con mayor claridad, advierto, que las partes que ſe conſideran en qualquier triangulo ſon ſeis; es à ſaber, tres angulos, y tres lados: entre cada dos lados hay un angulo, y entre cada dos angulos hay un lado: por lo qual aquellas partes del triangulo, que entre ſi contienen otra, ſe llamaràn *Alternas*; y las contenidas, *Intermedias*: y aſsi dos lados ſon partes alternas, porque tienen intermedio un angulo; y aſsimiſmo dos angulos ſon tambien partes alternas, porque tienen intermedio un lado. Eſto ſupueſto, todos los problemas obliquangulos ſe reducen à tres eſpecies: en la primera ſe dan conocidas tres partes alternas: en la ſegunda dos alternas, y una intermedia: en la tercera dos alternas, y una opueſta.

§. I.

§. I.

Resolucion de los triangulos esfericos obliquangulos, en que se dan tres partes alternas.

PROP. XI. Problema.

Dados los tres lados de un triangulo esferico, hallar qualquier angulo.

ESte problema, à quien muchos Autores llaman, *admirable*, se puede resolver de diferentes maneras: contentome con poner aqui la methodo de Adriano Ulac, que es la mas facil, remitiendo al Lector curioso al Padre Dechales, que en el *lib.* 6. de la *Trigonometria*, *prop*, 8. propone, y demuestra ocho modos diferentes de resolverle.

Sea pues dado el triangulo ABC, en el qual se dan sus tres lados: el lado AB es 55. gr. 30. min. el lado AC es 54. gr. 19. min. y el lado BC es 40. gr. 10. min. y se busca el angulo A.

Operacion. Sumense los tres lados: de la mitad de esta suma restese de por sì cada lado de los que comprehenden el angulo que se busca, y guardense las diferencias, ò residuos. Tomense los complementos logarithmicos de los senos de los sobredichos lados que comprehenden el angulo: tomense tambien los logarithmos de los senos de las dos diferencias halladas: sumense todos, y la mitad de la suma serà el logarithmo del seno de la mitad del angulo que se busca, como se ve executado en la disposicion siguiente. Advierto, que de la suma de los logarithmos no se quita el radio, como en otras ocasiones, por la razon que luego diremos.

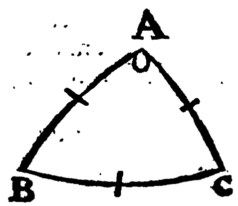
Lado BC	40.	10.m.	
Lado AB	55.	30.m.	C.L.0.0840063.
Lado AC	54.	19.m.	C.L.0.0903085.
Suma de los 3. lad.	149.	59.m.	

Semi-

Semisuma.	74.	59. m. $\frac{1}{2}$	
Difer. de AB	19.	29. m. $\frac{1}{2}$	9.5233168.
Difer. de AC	20.	40. m. $\frac{1}{2}$	9.5478566.

Snma de los logarithmos.			19.2454882.
Semisuma: seno de	24.	48. m. 13. s.	9.6227441.
angulo A.	49.	36. m. 26. s.	

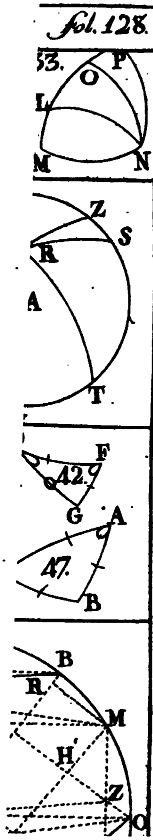
El angulo de 24. gr. 49. m. y 13. segundos, es la mitad del angulo A, que se busca: conque su duplo 49. gr. 36. m. y 26. segundos, es el angulo A.

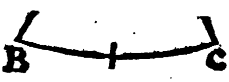


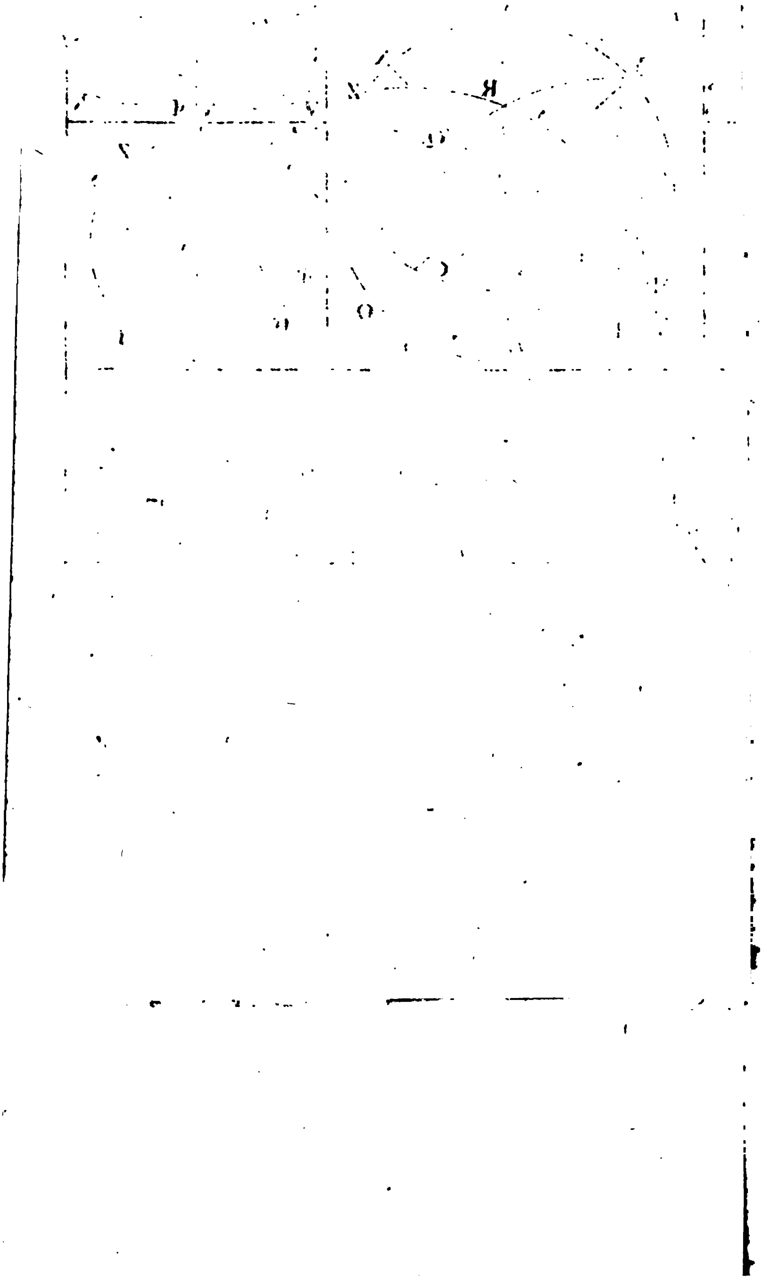
Demonstr. Por la *propos.* 10. son proporcionales: como el rectangulo hecho de los senos de los lados AB, AC, que comprehenden el angulo A, al quadrado del radio, assi el rectangulo hecho de los senos de las diferencias de dichos lados à la semisuma de los tres, al quadrado del seno del semiangulo vertical: el rectangulo de los senos de los lados AB, AC, se hace sumando los logarithmos de dichos lados; y el rectangulo de las sobredichas diferencias, se forma sumando sus logarithmos, como consta del Corol. de la *prop.* 5. del *lib.* 2. y el quadrado del radio, se halla duplicando su logarithmo (*Corol. de la prop.* 6. *lib.* 2.) Será pues la disposicion de los proporcionales sobredichos la siguiente.

Como el rectang. de los senos de	AB 55. 30. m.	9.9159958.
	AC 54. 19. m.	9.9096915.
Al quad. del radio		2.0000000.

Assi


fol. 128.
53.
P
O
L
M
N
Z
S
R
A
T
F
42.
G
A
47.
B
B
R
M
H
Z
O


B
C



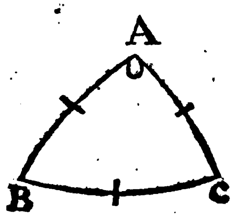
Aſsi el rectangul. de los ſenos de	Dif.AB 19.29.m.$\frac{1}{2}$	9.5233168.
	Dif.AC 20.40.m.$\frac{1}{2}$	9.5478566.
Al quadr. del ſeno del ſemiang. A	24.49.m.$\frac{1}{2}$	19.2454882.

Luego ſi ſe ſuman los Logarithmos tercero, quarto, y quinto; y de la ſuma ſe reſta la ſuma de los Logarithmos primero, y ſegundo, el reſiduo ſerà el Logarithmo del quadrado del ſeno de la mitad del angulo A: (32.*lib*.2.) luego ſi en lugar de los Logarithmos primero, y ſegundo, ſe toman ſus complementos Logarithmicos, la ſuma del 1. 2. 3. 4. 5. menos el duplo radio (por haverſe tomado dos complementos al radio) darà el Logarithmo del ſexto termino: luego no hay para que eſcrivir el tercero termino, que es el duplo radio; y por conſiguiente, baſtarà ſumar los complementos Logarithmicos de los lados con los Logarithmos de las diferencias; y la ſuma ſerà el Logarithmo de el quadrado del ſeno de la mitad del angulo A, que ſe buſca: luego la mitad de la ſuma, ſerà el Logarithmo de la raiz; eſto es, del ſeno de la mitad de dicho angulo, que es toda nueſtra practica.

PROP. XII. Problema.

En el triangulo esferico, dados los tres angulos, hallar qualquier lado.

EN el miſmo triangulo ABC, ſuponganſe conocidos ſus tres angulos, y ſe buſca el lado BC.



Operacion. Tomese el complemento al semicirculo de qualquiera de los angulos conterminos al lado BC, que se busca; como por exemplo, tomese el complemento del angulo C; y haciendo cuenta que el angulo A, es lado; y el angulo B, otro lado; y el complemento sobredicho del angulo C, otro lado: hagase la misma operacion de la prop. passada, y quedarà hecha la resolucion.

Demonstracion. Por la *prop. 24. lib. 4.* en los polos de los arcos del triangulo ABC, se forma otro triangulo, cuyos dos lados son iguales à los angulos A, y B; y el tercer lado es igual al complemento del angulo C, al semicirculo; y los dos angulos de este segundo, son iguales à los lados AC, BC; y el tercer angulo es complemento de AB, al semicirculo: luego resolviendo por la antecedente este segundo triangulo, se sabrà el valor del lado BC.

§. II.

Resolucion de los triangulos esfericos obliquangulos, en que se dan dos partes alternas con una intermedia.

CAsi todos los problemas que se siguen, usan en sus resoluciones del perpendiculo, con el qual queda dividido el triangulo obliquangulo en dos triangulos rectangulos; y consiguientemente necessitan de dos operaciones, de las quales, la primera, sirve para hallar el segmento de la basa, ù del angulo vertical que corta el perpendiculo; y la segunda, concluye la operacion, hallando el lado, ò angulo que se busca; y para proceder con acierto, serà conveniente en algunos casos atender à las reglas siguientes, tocantes al conocimiento de los angulos, y disposicion del perpendiculo, conque se quitarà la perplexidad que puede ofrecerse algunas veces.

REGLAS

Para determinar el conocimiento de los angulos. (*fig.* 53.)

1 SI los lados AB, AC, fueren quadrantes, el angulo vertical A, serà de la misma afeccion, que la basa BC;

BC; eſto es, ſi BC es quadrante, ſerà el angulo A recto; ſi BC es mayor que quadrante, ſerà obtuſo; y ſi menor, agudo. La razon es, porque en eſte caſo la baſa BC es medida del angulo A.

2 Si los lados AB, AC no ſiendo quadrantes, fueren de una miſma afeccion; eſto es, ò los dos mayores, ò los dos menores que un quadrante, y la baſa no fuere menor que el quadrante, el angulo vertical A ſerà obtuſo.

Demonſtr. Supongamos, que AB, AC (*fig.* 53.) ſon mayores que el quadrante, y la baſa BC no ſea menor que quadrante: luego (35.4.) los tres angulos ſon obtuſos: luego A es obtuſo. Supongamos aora, que los lados AB, AC ſon menores que quadrante: luego continuandoſe haſta que concurran en D, ſeràn BD, CD mayores que quadrante; y como BC no ſea menor que quadrante, ſeràn los tres angulos del triangulo BDC obtuſos: luego D es obtuſo; y por conſiguiente A, que es igual à D, tambien ſerà obtuſo.

3 Si los lados de un triangulo fueren de diferente afeccion; eſto es, el uno mayor, y el otro menor que el quadrante, y la baſa no fuere mayor que quadrante, el angulo vertical ſerà agudo.

Demonſtr. Supongamos, que el triangulo EFG ſea rectangulo en F, y que ſus lados FG, FE ſean el uno mayor, y el otro menor que quadrante: luego (28. 4. *Caſo* 5.) la baſa, ò hipotenuſa EG ſerà mayor que quadrante, y mucho mas ſi el angulo F fuere obtuſo; luego para que no ſea mayor que quadrante ſe havrà de acortar, como por exemplo haſta H, de que neceſſariamente reſulta el HFG, menor que recto.

4 Si los lados fueren de una miſma eſpecie, y la baſa menor que el quadrante, el angulo vertical puede ſer recto: lo qual ſe averiguarà deſte modo. Multipliquenſe entre sì los ſenos ſegundos de los lados, y el producto partaſe por el ſeno total, ò radio; y ſi lo que ſaliere fuere igual al ſeno ſegundo de la baſa, ſerà el angulo vertical recto. La razon es, porque en el triangulo rectangulo aſsi ſe ha el ſeno total, ò radio al ſeno ſegundo de AB; como el ſeno ſegundo de BC, al ſeno ſegundo de AC, como conſta de

de lo demonstrado en la *prop.*10. y otras: luego si por la regla de tres sobredicha sale este seno segundo, serà el angulo vertical recto, y el triangulo serà rectangulo; pero de otra suerte podrà ser agudo, ò obtuso.

Con estas mismas reglas se podrà conocer en caso de duda, de què especie sea qualquiera de los demàs angulos, suponiendo ser basa del triangulo, el lado opuesto al angulo que se examina.

REGLAS
Para el perpendiculo.

1 EN qualquiera triangulo, como por exemplo BAC, (fig. de la prop. siguiente) el perpendiculo AD siempre ha de caer de la extremidad de un lado conocido AB, sobre el otro BC: de tal suerte, que ambos lados AB, BC, incluyan el angulo B conocido, para que assi haya en el triangulo ADB, à mas del angulo recto D, dos cosas conocidas, es à saber, el lado AB, y el angulo B.

Notese, que en algunos problemas se hallarà poderse echar el perpendiculo con las condiciones sobredichas, de dos maneras; y de qualquiera que use el Analista obrarà bien; menos en dos, en que no tendrà esse arbitrio; y en èstas advertiremos en su lugar, de què lado se haya de tirar el perpendiculo.

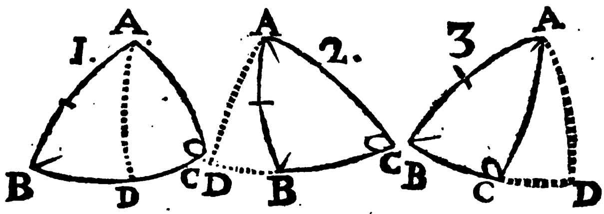
2 Si los angulos B, y C fueren de una misma especie, el perpendiculo cae dentro del triangulo; pero si fueren de diferente especie, cae fuera: queda demonstrado en la *prop.* 30. *lib.* 4. de suerte, que si el angulo C fuere agudo, y B obtuso, el perpendiculo caerà fuera mas allà de B; y si B fuere el agudo, y C el obtuso, caerà fuera mas allà del angulo C. La especie de los angulos se averigua por las reglas antecedentes.

Para proceder con claridad en los problemas siguientes, notarè siempre el triangulo con las tres letras A, B, C, en esta forma, que la A siempre se pondrà en el angulo de quien se ha de echar el perpendiculo: la B en el angulo dado adyacente al lado conocido; y la C al tercer angulo; y ultimamente en el punto en que el perpendiculo corta la basa con angulos rectos, se pondrà siempre la letra D. Tambien para mayor claridad en cada problema se delineaneará el triangulo en tres formas, segun las tres maneras en que puede caer el perpendiculo, ò dentro, ò fuera à la una parte, ò fuera à la otra.

PROP. XIII. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y el lado intermedio, hallar el otro angulo.

EN el triangulo obliquangulo ABC, se suponen conocidos los angulos BAC 102.gr.8.min.y B 40.gr.12.m.y el lado intermedio AB 36.gr.0.min.y se busca el angulo ACB.



Operacion. 1. En el triangulo BAD, dada la hipotenusa AB, y el angulo B, se busca el angulo BAD por la *propos.*8. *lib.*5.

Como el seno todo	90.	0.m.	C.L.	0.0000000.
al seno 2.del lado AB:	36.	0.m.		9.9079576.
*assi la tang.del ang.*B	40.	12.m.		9.9268904.
*à la tang.2.del ang.*BAD	55.	38.m.		9.8348480.

ESte angulo hallado BAD, se resta del angulo dado BAC en el triangulo 1. para saber el angulo DAC, por caer el perpendiculo dentro del triangulo: pero en el triangulo 2. el angulo BAD se suma con BAC, para saber el angulo DAC, por caer el perpendiculo fuera à la parte del angulo B: y en el triangulo 3. el angulo dado BAC se resta del hallado BAD, para tener el angulo CAD, por caer el perpendiculo fuera à la parte de C, como se ve claro en la figura. Sea pues

Regla general. 1. Quando el perpendiculo cae dentro del

del triangulo, el angulo hallado se resta siempre del angulo vertical conocido, como en el triangulo 1.

2 Quando el perpendiculo cae fuera del triangulo, si el otro angulo dado B, fuere obtuso, como en el triangulo 2. se sumarà el angulo hallado BAD con el angulo vertical dado BAC; pero si dicho angulo dado B fuere agudo, se restarà el angulo vertical dado BAC, del angulo hallado BAD, como en el triangulo 3. Y obrando de esta suerte, se sabrà en qualquier caso de los referidos, el angulo DAC, de quien se necessita para la segunda operacion, que concluye la resolucion del triangulo; y esto mismo se observarà en los segmentos de la basa.

Siendo pues en el triangulo 1. el angulo hallado BAD 55. gr. 38. m. y el angulo vertical dado BAC 102. gr. 8. m. restando aquel de este, queda el angulo DAC 46. gr. 30. m. con lo qual se passarà à la segunda operacion.

Opercaion 2. En el triangulo BAC (2.) son proporcionales.

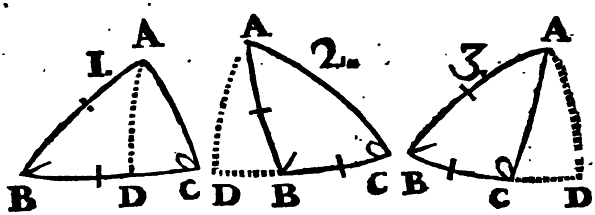
Como el seno 1. *del ang.* BAD	55.	38.	C.L. 0.0833134.
al seno 1. *del ang.* CAD;	46.	30.	9.8605622.
assi el seno 2. *del ang.* B,	40.	12.	9.8829774.
al seno 2. *del ang.* ACD.	47.	51.	9.8268530.

Adviertase, que el angulo ACB, y el angulo ACD en el triangulo 1. y 2. es un mismo angulo; pero en el tercero es diferente: y assi, haviendose hallado el angulo ACD, se ha de tomar su complemento à 180. grad. para tener el ACB que se busca.

PROP. XIV. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos lados, y el angulo intermedio, hallar qualquiera angulo.

EN este caso el perpendiculo necessariamente deve caer del lado opuesto al angulo que se busca, tirandole de aquel angulo, que ni se busca, ni se supone conocido. Sea pues el triangulo 1. ABC, en el qual se suponen conocicidos los lados *BA*,36.gr. o. m. y *BC*,44.gr. 12.m.y el angulo *B*,40.gr. 12.m. y ſe pide el angulo *C*.



Operacion 1. En el triangulo rectangulo *ABD*, dadà la hipotenuſa *AB*, y el angulo *B*, hallese (14.*lib*. 5.) el ſegmento *BD*.

Como el radio	90.	o.m.	C.L. 0.0000000.
al ſeno 2. *del ang*. *B*;	40.	12.m.	9.8829774.
aſsi la tang. de AB	36.	o.m.	9.8612610.
à la tang. de BD.	29.	2.m.	9.7442384.

Hallado el ſegmento BD, queda conocido en qualquiera de los tres triangulos el arco, ò ſegmento CD: en el 1. reſtando *BD* de *BC*: en el 2. ſumando *BD*, con *BC*: y en el 3. reſtando *BC* de *BD*. Reſtando pues en el triangulo 1. *BD*, 29. 2.m. de *BC*, 44. 12.m. es *CD*, 15. 10. m. con lo que ſe paſſa à la ſegunda operacion.

Operacion 2. En el triangulo *BAC*; (5.) ſon proporcionales.

Como el ſeno de BD	29.	2.m.	C.L. 0.3139733.
al ſeno de DC;	15.	10.m.	9.4176837.
aſsi la tang. 2. *de ABC*	40.	12.m.	10.0731096.
à la tang. 2. *de ACD*.	57.	28.m.	9.8047666.

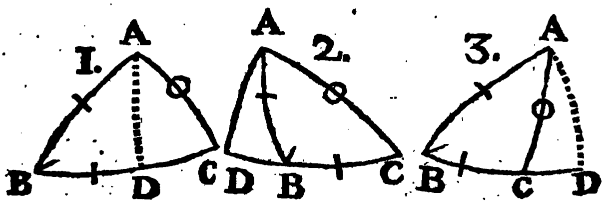
Adviertaſe, que el angulo *ACD*, y el *ACB*, en los triangulos 1. y 2. es uno miſmo; pero en el tercero es meneſter tomar el complemento à 180.gr. del *ACD* hallado, para tener el *ACB*, que ſe buſca.

PROP.

PROP. XV. Problema.

Dados dos lados, y el angulo intermedio, hallar el otro lado.

EN el triangulo 1. *ABC*, es el lado *AB*, 36. gr. o.m. y *BC*, 44. gr. 12. m. y el angulo *B*, 40. gr. 12. m. y se pide el lado *AC*.



Operacion 1. En el triangulo rectangulo ABD, para hallar el segmento BD, son proporcionales como en la proposicion antecedente.

Como el radio	90.	o.m.	CL.o.0000000.
al seno 2. del ang. B;	40.	12.m.	9.8829774.
assi la tang. de AB	36.	o.m.	9,8612610.
à la tang. de BD.	29.	2.m.	9.7442384.

Hallado el segmento BD, queda sabido CD, como en la prop. passada, que serà 15. gr. 10. m.

Operacion 2. En el triangulo *BAC*, (4.) son proporcionales.

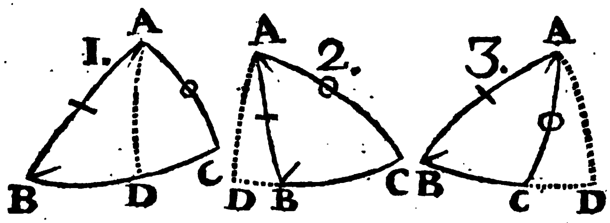
Como el seno 2. de BD	29.	2.m.	C.L.0.0583209.
al seno 2. de CD;	15.	10.m.	9.9846033.
assi el seno 2. de AB	36.	o.m.	9.9079576.
al seno 2. de AC.	26.	45.m.	9.9508818.

PROP. XVI. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y el lado intermedio, hallar qualquiera de los lados opuestos.

ADvierto, que en este caso, el perpendiculo necessariamente ha de caer de aquel angulo dado, que es ad-

adyacente al lado que se busca. Sea pues el triangulo *ABC*, en quien sean dados el angulo *A*, 102.gr. 8.m. y el angulo *B*, 40.gr. 12.m. y el lado intermedio *AB*, 36.gr. 0.m. y se busca el lado *AC*.



Operacion 1. En el triangulo rectangulo ABD, hallese como en la *prop.* 13. el angulo BAD.

Como el radio	90.	0.m.	C.L.0.0000000.
al seno 2. *de AB*;	36.	0.m.	9.9079576.
assi la tang. del ang. B	40.	12.m.	9.9268904.
à la tang. 2. *del ang.* BAD.	55.	38.m.	9.8348480.

Hallado el angulo BAD, se sabe como en la *propos.* 13. el angulo CAD, que en el triangulo 1. se halla ser 46. gr. 30. m.

Operacion 2. En el triangulo BAC, son (3.) proporcionales.

Como el seno 2. *del ang.* BAD	55.	38.m.	C.L.0.2483462.
al seno 2. *del ang.* CAD;	46.	30.m.	9.8378122.
assi la tang. 2. *de AB*	36.	0.m.	10.1387390.
à la tang. 2. *de AC.*	30.	47.m.	10.2248974.

§. III.

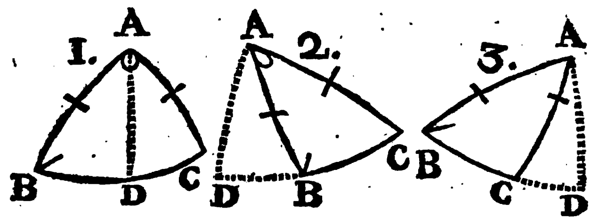
Resolucion de los triangulos esfericos obliquangulos, en que se dan dos partes alternas, y una opuesta.

PROP.

PROP. XVII. Problema.

Dados dos lados, y un angulo opuesto, hallar el angulo intermedio.

EN el triangulo *ABC*, dados los lados *AB*, 36. gr. o. m. y *AC*, 30.g. 47.m. y el angulo *B*, 40.gr. 12.m. se pide el angulo comprehendido *BAC*. En este caso cae el perpendiculo del mismo angulo que se busca.



Operacion 1. En el triangulo rectangulo BAD, hallese el angulo BAD (8.) en la siguiente analogia.

Como el radio	90.	o.m.	C.L.0.0000000.
al seno 2. *de AB*;	36.	o.m.	9.9079576.
assi la tang. del ang. B	40.	12.m.	9.9268904.
*à la tang.*2. *del ang.* BAD.	55.	38.m.	9.8348480.

Operacion 2. En el triangulo ABC, son proporcionales. (3.)

Como la tang. 2. *de AB*	36.	o.m.	C.L. 9.8612610.
à la tang. 2. *de AC*;	30.	47.m.	10.2249538.
assi el seno 2. *del ang.* BAD	55.	38.m.	9.7516538.
al seno 2. *del ang.* CAD.	46.	30.m.	9.8378686.

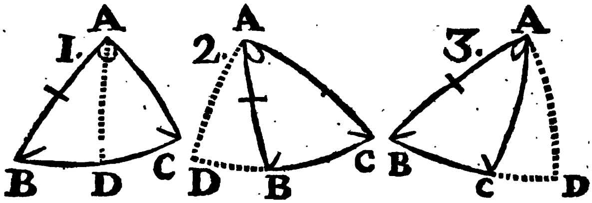
Sumense en el triangulo 1. los angulos BAD, CAD, hallados, por caer el perpendiculo dentro, y la suma 102. gr. 8.m. serà el angulo BAC, que se pide. En los triangulos 2. y 3. por caer el perpendiculo fuera, la diferencia de dichos angulos hallados, serà el BAC, que se busca.

PROP.

PROP. XVIII. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo dados dos angulos, y un lado opuesto, hallar el otro angulo

EN el triangulo ABC se suponen conocidos el angulo B 40. gr. 12. m. y el angulo C 47. gr. 51. m. y el lado AB 36.gr. o.m. y se pide el angulo A.



Adviertase lo 1. que se ha de saber si el angulo que se busca es agudo, ò obtuso; ò qual sea la especie del lado AC opuesto al angulo dado B. Lo 2. que en este caso cae el perpendiculo del mismo angulo que se busca.

Operacion 1. En el triangulo rectangulo BAD, hallese (8.) el angulo BAD, como se sigue.

Como el radio	90.	o.m.	C.L.o.0000000.
al seno 2. *de* AB;	36.	o.m.	9.9079576.
assi la tang. del ang. B	40.	12.m.	9.9268904.
*à la tang.*2. *del ang.*BAD.	55.	38.m.	9.8348480.

Operacion 2. En el triangulo ABC (2.) son proporcionales.

Como el seno 2. *del ang.* B	40.	12.m.	C.L.o.1170226.
al seno 2. *del ang.* C;	47.	51.m.	9.8267703.
assi el seno 1. *del ang.* BAD	55.	38.m.	9.9166866.
al seno 1. *del ang.* CAD.	46.	29.m.	9.8604795.

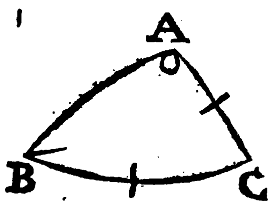
Si el perpendiculo cae dentro del triangulo, sumense los angulos BAD, CAD, y la suma serà el angulo BAC, que se busca; pero si el perpendiculo cae fuera, se restarà el an-

angulo menor del mayor, y la diferencia hallada serà el angulo que se pide; y assi en el triangulo 1. por caer el perpendiculo dentro, se suman los dos angulos hallados, y es el angulo BAC 102. gr. 7. m.

PROP. XIX. Problema.

Dados dos lados, y un angulo opuesto, hallar el otro angulo opuesto.

EN *este caso es menester saber si el angulo que se busca es agudo, ò obtuso.* Sea pues el triangulo ABC, en quien se dan el lado BC 44. gr. 12. m. y AC 29. gr. 10. m. y el angulo B 40. gr. 12. m. Pidese el angulo A, que suponemos haya de ser obtuso.



Operacion. Por la *propos.* 1. en qualquier triangulo son proporcionales los senos de los lados con los senos de los angulos opuestos: luego en el triangulo dado son proporcionales.

Como el seno de AC	29.	10.m. C.L.	0.3121575.
al seno del ang. B;	40.	12.m.	9.8098678.
assi el seno de BC	44.	12.m.	9.8433356.
al seno del ang. A.	112.	35.m.	9.9653609.

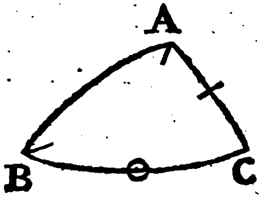
PROP. XX. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y un lado opuesto, hallar el otro lado opuesto.

EN *este caso es menester saber si el lado que se busca es menor, ò mayor que el quadrante.* Sea pues el triangulo ABC, en el qual dados los angulos B, 40. gr. 12. m. y A,

112.

112.gr. 35.m.yel lado AC 29. gr. 10.m.se pide el lado BC, que suponemos haya de ser menor que el quadrante.



Operacion. En el dicho triangulo son (1.) proporcionales.

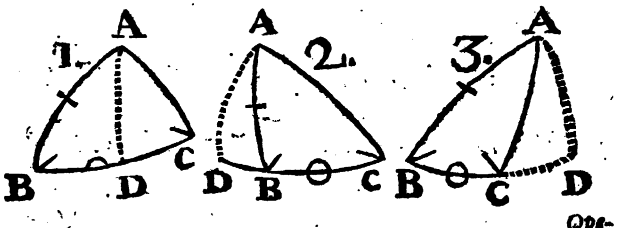
Como el seno del ang. B	40.	12.m.	C.L.	0.1901322.
al seno de AC	29.	10.m.		9.6878425.
assi el seno del ang. A	112.	35.m.		9.9653532.
al seno de BC	44.	12.m.		9.8433279.

PROP. XXI. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y un lado opuesto, hallar el lado intermedio entre los angulos dados.

EN este caso cae el perpendiculo sobre el lado que se busca; y es menester saber si este lado es mayor, ò menor que el quadrante; ò si el lado opuesto al otro angulo dado es mayor, ò menor que el quadrante.

Sea pues el triangulo ABC, en quien son conocidos los angulos B,40.gr. 12. m.y C,47. gr.51.m. y el lado AB, 36. gr. 0. m. Pidese el lado BC, que suponemos ha de ser menor que el quadrante.



Ope-

Operacion 1. En el triangulo rectangulo ABD hallese como en la 15. el segmento BD, con la siguiente analogia.

Como el radio	90.	0.m.	C.L.	0.0000000.
al seno 2. del ang. B;	40.	12.m.		9.8829774.
assi la tang. de AB	36.	0.m.		9.8612610.
à la tang. de BD.	29.	2.m.		9.7442384.

Hallado el segmento BD, busquese el segmento CD. *Operacion* 2. En el triangulo ABC son proporcionales. (5.)

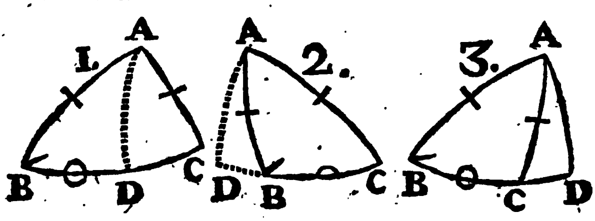
Como la tang. 2. del ang. B	40.	12.m.	C.L.	9.9268904.
à la tang. 2. del ang. C;	47.	51.m.		9.9567233.
assi el seno de BD	29.	2.m.		9.6860267.
al seno de CD.	21.	47.m.		9.5696404.

Hallados los segmentos BD, CD, la suma de ellos 50. gr. 49.m. es el lado BC, que se desea en el triangulo 1. En el 2. y 3. se hallarà el mismo lado restando el segmento menor del mayor, por caer en èstos el perpendiculo fuera del triangulo.

PROP. XXII. Problema.

En el triangulo esferico obliquangulo, dados los lados, y un angulo opuesto à uno de essos lados, hallar el tercer lado.

EN *este caso el perpendiculo cae sobre el lado que se busca.* Sea el triangulo ABC, en quien se dan los lados AB 36. gr. 0.m. AC 29.gr. 10.m. y el angulo B 40.gr. 12.m. y se pide el lado BC.



Ope-

Operacion 1. En el triangulo rectangulo ABD, son (14. *lib.* 5.) proporcionales los siguientes, con que se halla el segmento BD.

Como el radio	90.	o.m.	C.L. 0.0000000.
al seno 2. del ang. B;	40.	12.m.	9.8829774.
Assi la tang. de AB	36.	o.m.	9.8612610.
à la tang. de BD.	29.	2.m.	9.7442384.

Operacion 2. Busquese el segmento CD, en el triangulo ABC, en el qual son proporcionales (4.) los siguientes.

Como el seno 2. de AB	36.	o.m.	C.L. 0.0920424.
al seno 2. de AC;	29.	10.m.	9.9411166.
Assi el seno 2. de BD	29.	2.m.	9.9416791.
al seno 2. de CD.	19.	19.m.	9.9748381.

Sumense los dos segmentos BD, CD, hallados, y la suma serà en el triangulo 1.48.gr. 21.m. Pero en los triangulos 2. y 3. se restarà el menor del mayor para saber el lado BC, por caer el perpendiculo fuera en entrambos triangulos.

APEN-

APENDICE.

¶ PARA QUE EL ANALISTA pueda con mayor facilidad resolver qualquiera triangulo, assi rectilineo, como curvilineo, he resumido aqui sus resoluciones, con los terminos proporcionales dispuestos por su orden, para que sirviendose de ellas como de pauta, consiga con poco trabajo su designio. Observarè en cada especie el mismo orden que guardè en los Problemas; poniendo en primer lugar las resoluciones que sirven para hallar los angulos; y en segundo, las que sirven para hallar los lados.

§. I.

RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS RECTILINEOS rectangulos.

1 DAdos los lados, hallar qualquier angulo.
Como qualquiera lado,
al otro lado;
assi el radio,
à la tangente del angulo opuesto al segundo lado.

Da-

2 Dada la hipotenusa, y un lado, hallar los angulos.

Como la hipotenusa,
al radio;
assi el lado dado,
al seno del angulo opuesto à dicho lado.

3 Dados los angulos, y un lado, hallar el otro lado.

Como el radio,
al lado dado;
assi la tangente del angulo agudo adyacente à dicho lado,
al otro lado que se busca.

4 Dados los angulos, y la hipotenusa, hallar qualquier lado.

Como el radio,
à la hipotenusa;
assi el seno del angulo opuesto al lado que se busca,
al lado que se busca.

5 Dada la hipotenusa, y un lado, hallar el otro lado.

Hallense primeramente (num.2.) *los angulos, y hallados estos, se hallarà por el num. 3. ò 4. el lado que se pretende.*

6 Dados los angulos, y un lado, hallar la hipotenusa.

Como el seno del angulo opuesto al lado dado,
al lado dado;
assi el radio,
à la hipotenusa.

7 Dados los lados, hallar la hipotenusa.

Hallense primeramente (num.1.) *los angulos, y luego se hallarà* (num.6.) *la hipotenusa.*

§. II.

Resolucion de los triangulos rectilineos obliquangulos.

1 EN el triangulo obliquangulo, dados dos lados, y un angulo opuesto, hallar qualquiera de los otros angulos, *sabiendo si es agudo, ò obtuso.*

Como el lado opuesto al angulo dado,
al seno del mismo angulo;

assi el otro lado,

al seno del angulo opuesto à este lado.

2 En el triangulo obliquangulo, dados dos lados, y el angulo intermedio, hallar los demàs angulos.

Como la suma de los lados dados,

à la diferencia de los mismos;

assi la tang. de la semisuma de los angulos que se buscan,

à la tang. de la semidiferencia de los mismos.

Añadase esta semidiferencia à la semisuma de los angulos que se buscan, y se tendrà el angulo mayor. Restese dicha semidiferencia de la misma semisuma, y se sabrà el angulo menor.

3 En el triangulo obliquangulo, dados los tres lados, hallar qualquier angulo.

Modo 1. Tomese el lado mayor como basa, y tirandole una perpendicular del angulo vertical, quedarà dividido el triangulo dado en dos triangulos rectangulos, y se dispondrà la proporcion siguiente.

Como la basa,

à la suma de los otros lados;

assi la diferencia de los mismos lados,

à la diferencia de los segmentos de la basa.

Restese de la basa esta diferencia hallada, y tomese la mitad del residuo. Si la misma diferencia hallada se añade à este mismo residuo, se sabrà el segmento mayor; y si se resta, se sabrà el segmento menor. Hecho esto en los dos triangulos rectangulos, dada la hipotenusa, y un lado, se hallaràn los angulos por el *num.* 2. del §. 1. Y el angulo vertical del triangulo dado, se sabrà sumando los angulos verticales parciales que se huvieren hallado.

Modo 2. Sumense los tres lados, y tomese la mitad de la suma. Restense de esta semisuma los lados conterminos al angulo que se busca, cada uno de por sì, y se sabràn sus diferencias. Tomense los complementos Logarithmicos de dichos lados conterminos, y escrivanse uno debaxo del otro. Tomense los Logarithmos de las dos diferencias halladas. Sumense estas quatro partidas, sin quitar el radio; y tomese la mitad de la suma, y èsta serà el Logarithmo del se-

ſeno de la mitad del angulo que ſe buſca. Dupliqueſe eſte angulo hallado, y ſe ſabrà todo el angulo.

4 En el triangulo obliquangulo, dados dos angulos, y un lado, hallar qualquiera de los otros lados.

Como el ſeno del angulo opueſto al lado conocido,
al lado conocido;
aſsi el ſeno del angulo opueſto al lado que ſe buſca,
al lado que ſe buſca.

5 En el triangulo obliquangulo, dados dos lados, y el angulo intermedio, hallar el tercer lado.

Hallenſe (num. 2.) *los demàs angulos, y deſpues por el num.* 4. *ſe hallarà el tercer lado.*

6 En el triangulo obliquangulo, dados dos lados, y uno de los angulos opueſtos, hallar el otro lado.

Halleſe primeramente por el num. 1. *el angulo opueſto al lado que ſe buſca: y por el num.* 4. *ſe hallarà el lado que ſe deſea.*

§. III.

Reſolucion de los triangulos rectilinieos rectangulos.

1 EN el triangulo esferico rectangulo, dado un angulo obliquo, y el lado contermino à dicho angulo, hallar el otro angulo.

Como el radio,
al ſeno del angulo obliquo dado;
aſsi el ſeno 2. *del lado dado,*
al ſeno 2. *del angulo que ſe buſca.*

2 En el triangulo esferico obliquangulo, dado un lado, y el angulo obliquo opueſto à dicho lado, hallar el otro angulo.

Sepaſe primero, ſi el angulo que ſe buſca es agudo, ò obtuſo; ò ſi la hipotenuſa, ò el otro lado es mayor, ò menor que el quadrante: porque ſiendo eſte lado mayor que el quadrante, el angulo que ſe buſca ſerà obtuſo; y ſiendo menor, ſerà agudo. Tambien ſi el lado dado es mayor, ò menor que el quadrante, y la hipotenuſa fuere menor que el quadrante, el otro lado ſerà de la miſma eſpecie que *el lado dado; pero si la hipotenusa fuere mayor que el quadrante, el lado sobredicho será de especie opuesta al lado dado: La proporcion es la siguiente.*

Como el seno 2. del lado dado,
al radio;
assi el seno 2. del angulo dado,
al seno del angulo que se busca.

3 En el triangulo esferico rectangulo, dada la hipotenusa, y un lado, hallar el angulo opuesto à este lado.

Como el seno de la hipotenusa,
al radio;
assi el seno del lado dado,
al seno del angulo que se busca.

4 En el triangulo esferico obliquangulo; dados los lados, hallar qualquiera angulo obliquo.

Como el seno del lado contermino al angulo que se busca,
al radio;
assi la tangente del lado opuesto al angulo que se busca,
à la tangente del angulo que se desea.

5 En el triangulo esferico rectangulo, dada la hipotenusa, y un lado, hallar el angulo intermedio.

Como la tangente de la hipotenusa,
à la tangente del lado dado;
assi el radio,
al seno 2. del angulo que se busca.

6 En el triangulo esferico rectangulo, dada la hipotenusa, y un angulo obliquo, hallar el otro angulo.

Como el radio,
al seno 2. de la hipotenusa;
assi la tangente del angulo obliquo dado,
à la tangente 2. del angulo que se busca.

7 En el triangulo esferico rectangulo, dada la hipotenusa, y un angulo obliquo, hallar el lado opuesto à este angulo.

Como el radio,
al seno del angulo obliquo dado;
assi el seno de la hipotenusa,
al seno del lado que se busca.

En

8 En el triangulo esferico rectangulo, dada la hipotenusa, y un lado, hallar el otro lado.

Como el seno 2. del lado dado,
al radio;
assi el seno 2. de la hipotenusa,
al seno 2. del lado que se busca.

9 En el triangulo esferico rectangulo, dados los angulos, hallar qualquier lado.

Como el seno 1. del angulo contermino,
al seno 2. del otro angulo obliquo;
assi el radio,
al seno 2. del lado que se busca.

10 En el triangulo esferico rectangulo, dado un lado, y un angulo contermino à dicho lado, hallar el otro lado.

Como el radio,
al seno del lado dado;
assi la tangente del angulo obliquo dado,
à la tangente del lado opuesto que se busca.

11 En el triangulo esferico rectangulo, dado un lado, y el angulo obliquo su opuesto, hallar el otro lado.

Sepase primero, si el lado que se busca es mayor, ò menor que el quadrante; ò si la hipotenusa es mayor, ò menor que el quadrante; porque siendo menor, serà el lado que se busca de la misma especie que el lado; y siendo mayor, serà de la especie opuesta; ò sepase si el otro angulo obliquo es agudo, ò obtuso, porque el lado que se busca serà de la misma especie que el dicho angulo.

Como la tangente del angulo obliquo dado,
à la tangente del lado dado;
assi el radio,
al seno del lado que se busca.

12 En el triangulo esferico rectangulo, dada la hipotenusa, y un angulo obliquo, hallar el lado contermino à este angulo.

Como el radio,
al seno 2. del angulo obliquo dado;
assi la tangente de la hipotenusa,
à la tangente del lado que se busca.

13. En el triangulo esferico rectangulo, dados los angulos, hallar la hipotenusa.

Como la tangente 1. de uno de los angulos dados,
à la tangente 2. del otro angulo dado;
assi el radio,
al seno 2. de la hipotenusa.

14 En el triangulo esferico rectangulo, dados dos lados, hallar la hipotenusa.

Como el radio,
al seno 2. de uno de los lados dados;
assi el seno 2. del otro lado,
al seno 2. de la hipotenusa.

15 En el triangulo esferico rectangulo, dado un lado, y el angulo obliquo opuesto à este lado, hallar la hipotenusa.

Primeramente se ha de saber si la hipotenusa, ò el otro lado, es mayor, ò menor que el quadrante; ò si el otro angulo obliquo es agudo, ò obtuso, segun lo advertido en el num. 11.

Como el seno del angulo dado,
al seno del lado dado;
assi el radio,
al seno de la hipotenusa.

16 En el triangulo esferico rectangulo, dado un lado, y el angulo obliquo adyacente à dicho lado, hallar la hipotenusa.

Como el radio,
al seno 2. del angulo dado;
assi la tangente 2. del lado dado,
à la tangente 2. de la hipotenusa.

17 Resolver qualquiera triangulo quadrantal.

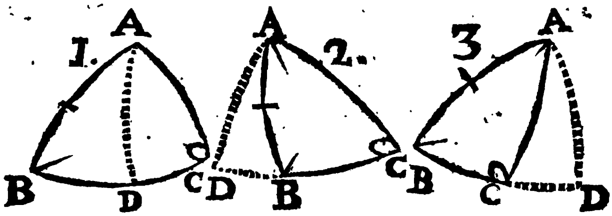
Triangulo quadrantal, es aquel que no siendo rectangulo, tiene un lado quadrante, ù de 90. gr. Resuelvese mudando primero los angulos en lados, y los lados en angulos, conque se viene à formar un otro triangulo equipolente al primero, que tiene un angulo recto: siendo pues este segundo triangulo rectangulo, se resolverà con aquella analogia de las sobredichas, que, segun los terminos dados, y el que se busca, le perteneciere.

§. IV.

§. IV.

Resolucion de los triangulos esfericos obliquangulos.

1 EN el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y el lado intermedio, hallar el tercer angulo.



1 *Como el radio,*	
al seno 2. del lado	AB;
assi la tangente de	ABC,
à la tangente 2. de	BAD.

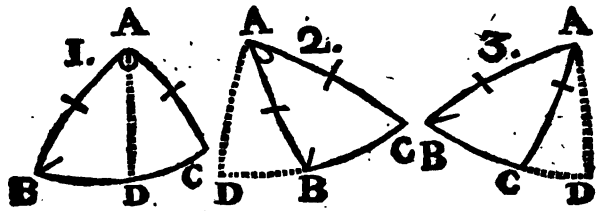
Hallado BAD, se hallarà CAD.

2 *Como el seno de*	BAD,
al seno de	CAD;
assi el seno 2. de	ABC,
al seno 2. de	ACD.

Adviertase, que el angulo ACD, y el angulo ACB en el triangulo 1. y 2. son uno mismo; pero en el 3. es diferente; y assi en èste, el angulo hallado ACD, se restarà de 180. gr. para saber el ACB, que es el que se desea.

2 En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos lados, y un angulo opuesto, hallar el angulo intermedio.

Co-



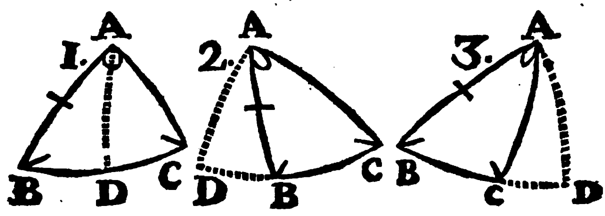
1 *Como el radio,*
al seno 2. de AB;
assi la tangente de ABC,
à la tang. 2. de BAD.

2 *Como la tang. 2. de* AB,
à la tang. 2. de AC;
assi el seno 2. de BAD,
al seno 2. de CAD.

Sumense en el triangulo 1. los angulos hallados BAD, CAD, por caer el perpendiculo dentro del triangulo, y se sabrà el angulo BAD, que se pretende. En los triangulos 2. y 3. por caer el perpendiculo fuera, la diferencia de los angulos hallados, serà el angulo BAC que se busca.

3. En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y un lado opuesto, hallar el tercer angulo.

Adviertase, que es menester saber si el angulo que se busca es agudo, ò obtuso; ò qual sea la especie del lado opuesto al otro angulo dado. Adviertase tambien, que en este caso el perpendiculo cae del mismo angulo que se busca.



1 *Co-*

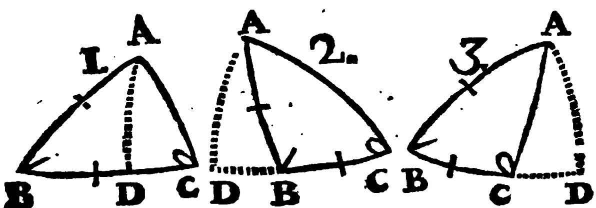
1. *Como el radio,*
al seno 2. de AB;
assi la tangente de ABC,
à la tang. 2. de BAD.

2. *Como el seno 2. de* ABC,
al seno 2. de BCA;
assi el seno 1. de BAD,
al seno 1. de CAD.

Adviertase, que en el triangulo 1.por caer el perpendiculo dentro, se suman los dos angulos BAD, DAC,para tener el angulo BAC, que se busca; pero en los demàs por caer el perpendiculo fuera,se resta el angulo mayor del menor; y el residuo es el angulo BAC.

4 En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos lados, y el angulo intermedio, hallar qualquiera angulo.

En este caso, el perpendiculo necessariamente ha de caer del lado opuesto al angulo que se busca, tirandole de aquel angulo, que ni se busca, ni se supone conocido.



1. *Como el radio,*
al seno 2. del ang. ABC;
assi la tang. de AB,
à la tang. de BD.

Hallado el segmento BD, queda conocido CD.

2. *Como el seno de* BD,
al seno de CD;
assi la tang. 2. de ABC,
à la tang. 2. de ACD.

Adviertase, que en los triangulos 1. y 2. el angulo ACD,

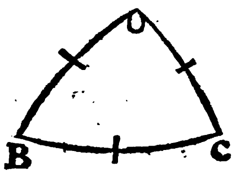
ACD, y el ACB, ſon uno miſmo; pero en el tercero es meneſter reſtar el ACD de 180. gr. para tener el ACB que ſe buſca.

5 En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos lados, y un angulo opueſto à uno de dichos lados, hallar el otro angulo opueſto al otro lado.

Sepaſe primero ſi es agudo, ò obtuſo.
Como el ſeno del lado opueſto al angulo dado,
al ſeno del angulo dado;
aſsi el ſeno del otro lado,
al ſeno del angulo que ſe buſca.

6 En el triangulo esferico, dados los tres lados, hallar qualquier angulo.

En el triangulo ABC ſe dan ſus tres lados, AB, 55. gr. 30.m. AC, 54.gr. 19.m. y BC, 40.gr.10.m. Pideſe el angulo A.



Operacion. Sumenſe los tres lados: tomeſe la mitad de la ſuma: reſtenſe de eſta ſemiſuma los lados AB,AC, que comprehenden el angulo A, que ſe buſca, cada uno de por si, y guardenſe las diferencias halladas. Tomenſe los complementos logarithmicos de los ſenos de los dichos lados AB, AC: tomenſe tambien los Logarithmos de los ſenos de las diferencias halladas: ſumenſe todos ſin quitar el radio de la ſuma; y la mitad de eſta ſuma ſerà el logarithmo de la mitad del angulo A, que ſe buſca, como ſe ve en la diſpoſicion ſiguiente.

Lado BC	40.	10.m.		
Lado AB	55.	30.m.	C.L.	0.0840063.
Lado AC	54.	19.m.	C.L.	0.0903085.

Suma

Suma de los tres lad.	149.	59.m.		
Semisuma.	74.	59.m.$\frac{1}{2}$		
Difer. de AB	19.	29.m.$\frac{1}{2}$	L.	9.5233168.
Difer. de AC	20.	40.m.$\frac{1}{2}$	L.	9.5478566.
Suma de los logarithmos.				19.2454882.
Semisuma: seno	24.	48.m. 13.s.		9.6227441.
angulo A.	49.	36.m. 26.s.		

7 En el triangulo esferico, dados los tres angulos, hallar qualquier lado.

En el mismo triangulo ABC se suponen conocidos los tres angulos, y se busca el lado BC.

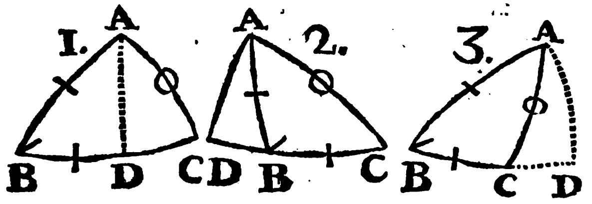
Operacion. Tomese el complemento al semicirculo de qualquiera de los angulos conterminos al lado BC que se busca: como por exemplo, tomese el complemento del angulo C; y haciendo cuenta que el angulo A es lado, y el angulo B otro lado, y el complemento sobredicho del angulo C otro lado, hagase la operacion antecedente, y quedarà hecha la resolucion.

8 En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y un lado opuesto, hallar el otro lado opuesto.

Sepase primero, si el lado que se busca es menor, ò mayor que el quadrante.

Como el seno del angulo opuesto al lado dado,
al seno de dicho lado;
assi el seno del otro angulo dado,
al seno del lado que se busca.

9 En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos lados, y el angulo intermedio, hallar el otro lado.



Como

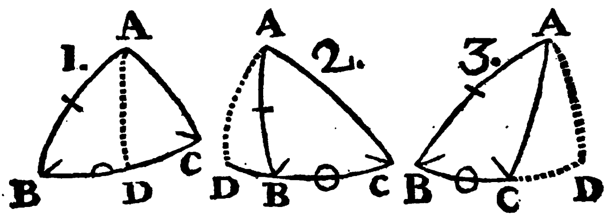
1. *Como el radio,*	
al seno 2. del ang.	ABC;
assi la tangente de	AB,
à la taugente de	BD.

Hallado BD, queda conocido DC.

2. *Como el seno 2. de*	BD,
al seno 2. de	DC;
assi el seno 2. de	AB,
al seno 2. de	AC.

10 En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y un lado opuesto, hallar el lado intermedio entre dichos angulos dados.

En este caso cae el perpendiculo sobre el lado que se busca; y es menester saber si este lado es mayor, ò menor que el quadrante; ò si el lado opuesto al otro angulo dado, es mayor, ò menor que el quadrante.



1. *Como el radio,*	
al seno 2. del angulo	ABC;
assi la tangente de	AB,
à la tangente de	BD.

2. *Como la tang. 2. de*	ABC,
à la tang. 2. de	ACB;
assi el seno de	BD,
al seno de	CD.

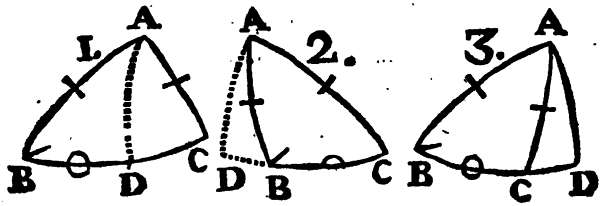
Si el perpendiculo cae dentro del triangulo, como sucede en el 1. sumando los dos segmentos BD, DC, se sabe el lado BC, que se busca; pero cayendo fuera, como en los

trian-

triangulos 2. y 3. ſe reſtarà el ſegmento menor del mayor, para ſaber el lado CD.

11. En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos lados, y un angulo opueſto à uno de ellos, hallar el tercer lado.

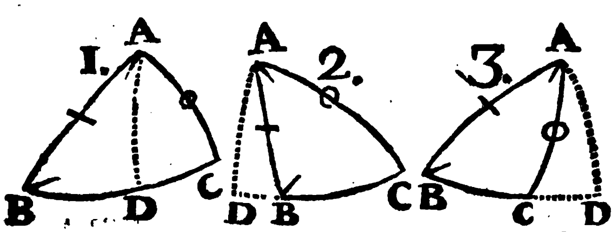
En eſte caſo el perpendiculo cae ſobre el lado que ſe buſca.



1. *Como el radio*	
al ſeno 2. de	ABC;
aſsi la tangente de	AB,
à la tangente de	BD.
2. *Como el ſeno 2. de*	AB,
al ſeno 2. de	AC;
aſsi el ſeno 2. de	BD,
al ſeno 2. de	CD.

En el triangulo 1. la ſuma de los dos ſegmentos BD, CD, da el lado BC, que ſe buſca, por caer el perpendiculo dentro; pero en los triangulos 2. y 3. la diferencia de dichos arcos ſerà el lado BC, por caer el perpendiculo fuera.

12. En el triangulo esferico obliquangulo, dados dos angulos, y el lado intermedio, hallar qualquiera de los lados opueſtos.



Como

1. *Como el radio,*
al seno 2. de AB;
assi la tangente de ABC,
à la tang. 2. de BAD.

Hallado el angulo BAD, queda conocido DAC.

2. *Como el seno 2. de* BAD,
al seno 2. de CAD;
assi la tangente 2. de AB,
à la tangente 2. de AC.

TRATADO VIII.

DE LAS TRES SECCIONES CONICAS, ELIPSE, PARABOLA, è Hiperbola.

SECCIONES conicas son, las que resultan de varios cortes hechos en una piramide conica; y segun la variedad de èstos, son aquellas diferentes. Tratarè àqui de las mas principales, llamadas, *Elipse*, *Parabola*, è *Hiperbola*, cuyas maravillosas propiedades fueron digno empleo de los Antiguos Geometras, singularmente de Apolonio Pergeo, que dexò impressa su memoria inmortal en los libros, que trabajò de este assumpto. Reducirè este Tratado à la explicacion de las principales propiedades de dichas secciones, por lo mucho que conducen à la Catoptrica, Dioptrica, y Perspectiva; al Arte Tormentaria, ò Artilleria; à la Gnomonica, y aun para la Astronomia; pues no hay duda se explican mejor los movimientos de los Planetas, valiendose de hipotheses elipticas:

cas: procurarè la brevedad, omitiendo lo que fuere menos necessario para el intento. Quien deseàre mayor extension, podrà ver al P. Gregorio de *S. Vincentio* en su obra maravillosa de *Quadratura circuli*; y al Padre Milliet en su Curso Mathematico.

DEFINICIONES COMUNES.

1 *Piramide conica, es la que tiene por basa un circulo.* Resulta del movimiento de una linea recta, que desde un punto, puesto como en el ayre sobre el circulo, corre con la otra extremidad su periferia. Como si la linea AB, (*fig.* 1.) desde el punto fixo A, corre toda la periferia BEC, engendra el solido ABEC, que es la piramide conica.

2 *Superficie conica, es la que descrive la sobredicha recta AB, corriendo la periferia del circulo.*

3 *Vertice de la piramide conica, es el punto fixo A.*

4 *Exe de la piramide conica, es la recta AD, tirada del vertice A, al centro D, del circulo que le sirve de basa.*

5 *Basa de la piramide conica, es el circulo BEC, cuya periferia corre la linea que produce dicha piramide.*

6 *Piramide conica recta, es aquella, cuyo exe es perpendicular à la basa*, como en M.

7 *Piramide conica escalena, es aquella, cuyo exe no es perpendicular à la basa*, como en N.

8 *Piramides conicas opuestas, son las que siendo semejantes, tienen un mismo vertice, y un mismo exe*, como en la *figur.* 2. Las dos piramides FIG son opuestas, porque tienen un mismo vertice I, y la misma recta CC, es exe de entrambas. Resultan del movimiento de la recta FF, que estando inmobile el punto I, la una extremidad F, corre la periferia del circulo inferior, y la otra anda la periferia del superior: conque necessariamente resultan las dos piramides opuestas, y semejantes.

9 *Secciones conicas, son las que se hacen en una piramide conica con un plano,* à quien llamarèmos *Plano secante*; y porque este puede cortar la piramide de diferentes maneras, resultan varias especies de secciones conicas.

10

10 Quando el *plano secante* passa cortando la piramide conica desde el vertice por su exe, la seccion es triangulo, como ABC, (*fig.1.*) y este se llama *triangulo por el exe.*

11 *Disposicion subcontraria de dos triangulos se halla quando siendo semejantes, tienen un mismo angulo vertical; pero sus basas, en aquella disposicion, ni se ajustan, ni son paralelas.* Como son en la *fig.3.* ABC, y ADE, que tienen el mismo angulo vertical A; y siendo equiangulos, sus basas BC, DE, no son paralelas.

12 *Secciones conicas subcontrarias, son aquellas, con que la piramide conica se corta con un plano perpendicular al triangulo por el exe, de tal suerte, que resulta àzia el vertice de la piramide un triangulo con disposicion subcontraria al triangulo por el exe.*

13 Quando el *plano secante* es paralelo à la basa de la piramide conica, la seccion es siempre *circulo.* Tambien lo es en un otro caso, sin ser paralela à la basa, y es quando en la piramide conica escalena, la seccion es subcontraria, como se probarà en su lugar.

14 Quando el *plano secante* no es paralelo à la basa, y corta entrambos lados de la piramide, ù del triangulo por el exe sin formar seccion subcontraria, la seccion se llamarà *elipse.*

15 Quando el *plano secante* es paralelo al uno de los dos lados del triangulo por el exe, ò à un lado de la piramide conica, que es lo mismo, la seccion se llama *parabola.*

16 Quando el *plano secante* corta las dos piramides conicas opuestas, las dos secciones conicas opuestas, que se forman, se llaman *hiperbolas*, las quales siempre son iguales, y semejentes.

Todo esto lo he dicho para que se entre en este tratado formando algun concepto de estas secciones, porque despues se demonstrarà en sus Theoremas particulares.

17 *Basa de una seccion conica, es la recta que representa la comun seccion del plano secante con la basa de la piramide, y cierra por baxo la seccion conica.*

18 *Linea conica, es la curva que circuye qualquiera seccion conica*; ò es la comun seccion del plano secante, y de la su-

perficie de la piramide conica, quando no es cortada por su exe. Llamase *linea eliptica*, quando representa la circunferencia de una elipse; *linea parabolica*, quando representa la circunferencia de la parabola; y *linea hiperbolica*, quando representa la periferia de la hiperbola.

LIBRO I.

DE LA ELIPSE.

DEFINICIONES.

1 E*Lipse, es una figura curvilinea prolongada, que procede de la seccion obliqua, que no es subcontraria, hecha en una piramide conica con un plano, que corta sus dos lados, como* BADC. (*fig.*4.) Tiene dos exes, uno mayor, y otro menor.

2 *Exe mayor de la elipse, es la linea recta, que passando à lo largo de la una parte de la elipse à la otra, mide, y representa su longitud, como* BD *en la elipse* 1. *fig*.4.

3 *Exe menor de la elipse, es la linea recta, que passando por lo ancho de ella de la una parte à la otra, mide su amplitud, como* AC *en la elipse* 1. Estos dos exes se parten el uno al otro perpendicularmente en dos partes iguales: y de la propia suerte divide cada uno de ellos à todas las lineas que se tiraren dentro de la elipse paralelas al otro exe; y assi el exe BD, parte igualmente, y es perpendicular al exe menor AC, y à todas sus paralelas MI, LG, &c. Y el exe AC, parte igual, y perpendicularmente al exe mayor BD, y à todas sus paralelas GP, NO, &c.

4 *Centro de la elipse, es el punto* E, *en que se cortan los dos exes.*

5 *Diametro de la elipse, es qualquier linea recta, que passando por el centro de la elipse, se termina por entrambas partes en su circun-*

cunferencia, *como* RQ, *SI*, *&c.* Donde se ve, que la elipse tiene infinitos diametros, y que dos de ellos son solamente exes, el uno de los quales es el mayor de todos los diametros; y el otro, el menor de todos, como se demonstrarà despues. Tambien todos los diametros se cortan mutuamente en dos partes iguales; pero solos aquellos son entre sì perpendiculares, que juntamente son exes, como queda dicho.

6 *Lineas ordenadamente aplicadas al diametro, son aquellas, que siendo entre sì paralelas, son divididas por el diametro en dos partes iguales, como MI, LG, &c.* assi en la elipse 1. como en la 2. (*fig.4.*) A estas lineas llamaremos *ordenadas*, ò *aplicadas*; y à sus mitades, *semiordenadas*, ò *semiaplicadas*; ò tambien *ordenadas*, ò *aplicadas*.

7 *Diametros conjugados de una elipse, son aquellos, que mutuamente dividen sus paralelas en dos partes iguales, cada uno à las del otro.* Como BD, AC son diametros conjugados, assi en la elipse 1. como en la 2. porque BD divide por medio à las MI, LG, paralelas al otro diametro AC; y èste, à las NO, GP, paralelas à BD.

8 *Exes conjugados son los diametros conjugados, que se parten perpendicularmente à sì, y à sus paralelas, como BD, AC en la elipse 1.*

9 *Tangente de la elipse, es la recta, que toca la periferia de la elipse en un solo punto sin cortarla.*

10 *Focos, polos, ò ombligos de la elipse, son dos puntos puestos en el exe mayor, en igual distancia de sus extremidades, de los quales, si se tiran dos lineas à qualquier punto de la periferia de la elipse, son entrambas juntas iguales à dicho exe mayor; ò tambien son dos puntos en el exe mayor en igual distancia de sus extremidades, que de tal suerte le dividen, que el rectangulo de sus segmentos, es igual al quadrado del semiexe menor.* Estas propiedades, con otras, se demonstraràn en su lugar.

11 *Lado recto, ò parametro de un diametro de la elipse, es una tercera proporcional à dicho diametro, y à su diametro conjugado.* Como si à los diametros BD, AC se les halla una recta tercera proporcional, èsta serà el parametro del diametro BD, y sirve de medida, ò nivel para las potencias, ò qua-

quadrados de las aplicadas à dicho diametro, como se verà despues.

12 *Figura se llama absolutamente el rectangulo hecho del parametro, y del diametro.*

PROP. I. Theorema.

En qualquiera piramide conica, la seccion paralela à la basa es circulo.

DEmonstr. Las piramides poligonas inscritas en la conica, degeneran en èsta, como demonstrè en el lema para la *prop.* 10. del *lib.* 8. de la Geom. Elem. Y assimismo los poligonos inscritos en el circulo, degeneran en el circulo, como demonstrè alli mismo en el lema 2. para la *prop.* 2. Siendo pues en las piramides poligonas la seccion paralela à la basa un poligono semejante à la basa; (lema 1. para la *propos.* 7. *lib.* 8. Geom. Elem.) tambien en la conica la seccion paralela à su basa circular, serà circulo: y esto es lo mismo, aunque la piramide sobredicha sea escalena.

LEMA.

En qualquiera figura curvilinea, si las perpendiculares tiradas de su periferia à alguna otra linea, que corre todo el curvilineo, la dividen de tal suerte, que los quadrados de dichas perpendiculares son iguales à los rectangulos de los segmentos, el curvilineo serà circulo.

(*fig.* 5.)

SUponese, que el quadrado de MO, perpendicular à la recta GH, es igual al rectangulo GOH. Digo, que la figura curvilinea GMH es circulo. Dividase la GH por medio en I, y tirese la IM.

Demonstr. Por estàr GH dividida igualmente en I, y desigualmente en O, es (5. 2. Eucl.) el rectangulo GOH, mas el quadrado de IO, igual al quadrado de IH; pero el rectangulo mismo GOH se supone igual al quadrado de MO: luego el quadrado de MO, mas el quadrado de IO, es igual al quadrado de IH: y siendo (47. 1. Eucl.) el quadrado de IM, igual à los quadrados de IO, MO, seràn los

qua-

quadrados de IH, de IM, y de IG iguales: luego las tres lineas, IH, IM, IG son iguales; y por consiguiente, el curvilineo GMH es circulo.

PROP. II. Theorema.

En la piramide conica escalena, la seccion subcontraria es circulo. (*fig.* 6.)

SEa ABLC la piramide conica escalena; y sea ABC el triangulo plano, que passando por el exe es perpendicular à la basa de la piramide. Cortese la piramide con el plano EFG recto al plano del triangulo ABC, y serà EG la seccion comun de estos dos planos; y el triangulo AEG que forma este corte, sea semejante, y subcontrario al triangulo ABC. Digo, que la seccion conica EFG es circulo.

Preparacion. Tirese en el plano EFG la recta IF perpendicular à EG, que por consiguiente (*def.* 3. 11. Euc.) serà perpendicular al plano ABC: tirese por IF el plano HFK paralelo à la basa, y la seccion comun HK de dicho plano, y del triangulo ABC, serà paralela à la basa BC; y (1.) serà HFK circulo.

Demonstr. La recta FI, seccion comun de los planos EFG, HFK, es perpendicular al plano ABC: luego es perpendicular à HK; y siendo HFK circulo, serà IF media proporcional entre HI, IK: (*corol.* de la 13. del 6. Eucl.) luego el quadrado de FI es (17. 6. Euc.) igual al rectangulo HIK; pero el rectangulo EIG es tambien igual al rectangulo HIK, por ser semejantes los triangulos EIH, KIG, como lo convence la igualdad de los angulos verticales I; y de los angulos EHI, EGK iguales entrambos al angulo B, esto es, G por suposicion, y H por las paralelas HK, BC: luego (4.6. Eucl.) sus lados homologos son proporcionales, esto es, EI à HI, como IK à IG: luego (16. 6. Eucl.) el rectangulo EIG de las extremas es igual al rectangulo HIK de las medias: luego el quadrado IF, que es igual al rectangulo HIK, es igual al rectangulo EIG: luego (lema antec.) la figura EFG es circulo.

PROP.

PROP. III. Theorema.

Si el diametro de la seccion conica alcanza entrambos lados del triangulo que passa por el exe, y dicha seccion, ni es paralela à la basa, ni subcontraria; no serà circulo, si elipse. (fig. 7.)

EL diametro DF de la seccion DEF corta entrambos lados del triangulo ABC, que passa por el exe; y ni es paralela à la basa BC, ni subcontraria. Digo, que la seccion DEF no es circulo.

Demonstr. Si DEF fuere circulo, DF tendria postura subcontraria, contra lo supuesto: luego dicha seccion no puede ser circulo. Para demonstrar el antecedente se ha de suponer, que si el plano DEF se continuara, cortaria à la basa BC, ò su plano continuado en NGH, la qual seccion serìa perpendicular à BC, por ser el plano DEF perpendicular al plano ABC. Hagase pues EI paralela à NG: tirese LIM paralela à BC, y serà EI perpendicular à LIM; y el plano que passare por IE, y LIM, serà paralelo à la basa BC; y (1.) serà circulo: luego IE es (*corol.* 13. 6. Eucl.) media proporcional entre LI, IM: y como DEF se suponga ser circulo, tambien la IE serà media proporcional entre DI, IF: luego los rectangulos DIF, LIM seràn iguales entre sì, por ser entrambos iguales al quadrado de IE: luego (16. 6. Euc.) serà LI à DI, como IF à IM; y siendo los angulos verticales I iguales, seràn los triangulos LID, FIM equiangulos; y la seccion subcontraria, contra lo supuesto: luego esta seccion no es circulo; y por consiguiente (*def.* 1.) serà elipse, cuyas propiedades mas insignes se demuestran en las proposiciones siguientes.

PROP. IV. Theorema.

La recta DF (fig. 7.) corta por medio en I à la recta EK.

DEmonstr. La recta LM se supone paralela à la BC; y assimismo KE se hizo en la prop. anteced. paralela à HN: luego el angulo LIE es igual (10. 11. Eucl.) al angugulo BGN; pero el angulo BGN, se supone recto por la razon dicha en la propos. passada: luego LIE, tambien es recto; y siendo (1.) la seccion LEM circulo, y su diametro LM, es forzoso (3.3.Euc.) que este diametro corte à la perpendicular EIK, por medio en I; y siendo el punto I, como se ha supuesto, comun à las tres rectas LM, EK, DF, la DF, cortarà à la EK, por medio en I.

COROLARIOS.

1 *Siguese de aqui, que la recta DE, cortarà por medio à todas las paralelas à EK, que se tiraren dentro de la elipse; y al contrario.* 2. *Se infiere, que la recta DF, es el exe mayor de la elipse; y que la EK, y todas sus paralelas son las ordenadamente aplicadas à dicho exe DF.*

PROP. V. Theorema.

Si en la elipse DEFN, se tira otra qualquiera linea RT paralela à EN, serà el rectangulo DMF, al rectangulo DHF, como el quadrado de EM, al quadrado de RH.

(fig. 8.)

Preparacion. Tirese por el punto H la recta SHQ paralela à OP; y passe por las rectas SQ, TR un plano, que (15.11.Eucl.) serà paralelo à OEP, y à la basa CGA; y su seccion SRQ, serà circulo. (1.)

Demonstr. Por ser las rectas OP, SQ paralelas, en los triangulos DMP, DHQ, la razon de DM à DH, es (2.6. Eucl.) la misma que de PM à QH; y en los triangulos OMF, SHF, la razon de MF à HF, es la misma que de MO à HS. Siendo pues (23. 6. Eucl.) la razon del rectangulo DMF, al rectangulo DHF, compuesta de la razon de DM à DH, y de MF à HF, serà la razon del rectangulo DMF, al rectangulo DHF, compuesta de la razon de PM à QH, y de MO à HS; pero la razon del rectangulo PMO, al rectangulo QHS, se compone tambien de las razones de PM à QH, y de MO à HS: luego el rectangulo DMF, al rectangulo DHF, es como el rectangulo PMO, al rectangulo QHS, esto es, (por ser PEO, QRS, circulos) como el rec-

rectangulo EMN, al rectangulo RHT sus iguales (35. 3. Eucl.) estos rectangulos EMN, RHT, son quadrados, por estàr divididas las rectas EN, RT por medio en M, y H: (4.) luego el rectangulo DMF, al rectangulo DHF, es como el quadrado de EM, al quadrado de RH.

Esta es la propiedad essencial, y primaria de la elipse, que los quadrados de las aplicadas al exe, tienen entre sì la misma razon que los rectangulos de los segmentos del exe; lo qual conviene tambien à los demàs diametros, como lo demuestra el P. Dechales, lib.2. Sec. Con. prop. 31. pero basta haverlo demonstrado en las aplicadas al exe para lo que en adelante hemos de tratar. Y aunque es verdad que esta propiedad en parte conviene tambien al circulo, pero no de la misma suerte que à la elipse; porque en el circulo, aunque los rectangulos HOG, HNG (fig. 5.) de los segmentos del diametro, tienen entre sì la misma razon que los quadrados de las aplicadas MO, LN, pero por ser èstas medias proporcionales entre dichos segmentos, son los rectangulos de èstos iguales à los quadrados de aquellas; lo que no sucede en la elipse, exceptando el casò en que los diametros conjugados sean iguales, como en su lugar verèmos.

COROLARIOS.

1 DE *aqui se infiere, que la elipse tiene dos exes, uno mayor, y otro menor; porque si fuessen iguales, los rectangulos hechos de los segmentos del exe, serian iguales à los quadrados de las ordenadas, assi como lo seràn los rectangulos de los segmentos de entrambos exes; y por consiguiente, no se distinguiria la elipse del circulo.*

2 *Las aplicadas al exe, que distan igualmente del centro de la elipse, son iguales; porque si distan igualmente del centro, seràn tambien iguales las distancias DM, FH; como tambien, añadiendo à entrambas el comun MH, seràn DH, FM iguales: luego los rectangulos DMF, DHF seràn iguales; y siendo los quadrados de ME, HR, iguales à los sobredichos rectangulos, seràn entre sì iguales: luego sus lados ME, HR, seràn iguales. De que tambien se colige, que si las aplicadas son iguales, distan igualmente del centro.*

PROP.

PROP. VI. Theorema.

El exe menor CD, (fig. 9.) divide tambien por medio à todas sus aplicadas.

DEmonstr. Cortense EG, EH iguales; y tirense las perpendiculares HI, GF; èstas (*corolar.* 2. *antec.*) son iguales, y paralelas: luego la FI, que las junta, serà paralela, è igual à GH: (33. 1. Eucl.) luego la perpendicular ED, que parte por medio la GH, dividirà tambien por medio la FI en K; y assi las demàs aplicadas al diametro CD.

PROP. VII. Theorema.

Las aplicadas en el circulo del exe, ò diametro mayor de la elipse, à las aplicadas en la elipse à su exe, ò diametro mayor, tienen entre sì la razon misma del exe, ò diametro mayor al menor; y assimismo las aplicadas al exe, ò diametro menor en la elipse, tienen con las aplicadas al circulo de su exe menor, la razon misma del diametro mayor al menor.

(*fig.* 10.)

EXplicacion. Sea la elipse AGH; y el circulo de su exe mayor AH, serà AVH; y el de su diametro menor GI, serà DGE; y las semiordenadas en el circulo mayor, seràn FP, CS, OT; y las semiordenadas en la elipse FL, CI, ON. Digo lo primero, que FP, à FL, es como CS, semiexe, ò semidiametro mayor de la elipse, à CI, semiexe, ò semidiametro menor; y assi en todas las demàs.

Demonstr. El rectangulo AFH, al rectangulo ACH, es (5.) como el quadrado de FL, al quadrado de CI; pero el rectangulo AFH, es (*corol.* de la 13. 6. Eucl.) igual al quadrado de FP; y el rectangulo ACH, es igual al quadrado de CS: luego el quadrado de FP, al quadrado de CS, es como el quadrado de FL, al quadrado de CI; y alternando, el quadrado de FP, al quadrado de FL, es como el quadrado de CS, al quadrado de CI; y como (20. 6. Eucl.) los quadrados tengan entre sì la razon duplicada de sus lados, la razon duplicada de la de FP, à FL, serà la misma que la duplicada de CS, à CI: luego la misma razon hay de FP, à FL,

que

que de CS semiexe, ò semidiametro mayor, à CI semiexe, ò semidiametro menor; y assi en las demàs semiordenadas.

Con semejante demonstracion se convence la segunda parte de la propuesta: esto es, que tiradas las semiordenadas ZXY, y las demàs, es ZY à ZX, como CA, semidiametro mayor, à CD, semidiametro menor.

PROP. VIII. Theorema.

El circulo del exe mayor tiene con la elipse la misma razon que tiene el diametro mayor con el menor; y essa misma razon tiene la elipse con el circulo del exe menor. (*fig.* 10.)

Demuestrase facilmente por la methodo, que llaman de *indivisibles*, ò segun el Padre Andres Taquet, *de ethereogeneos*. Considerense tiradas todas las ordenadas possibles, paralelas à la VS, y quedarà formada con ellas toda la area de la elipse, y del circulo mayor; y como todas estas ordenadas sean cortadas por la elipse en la razon misma de CS à CI, se sigue, que todas las del circulo mayor juntas, à todas las de la elipse, esto es, la area del circulo mayor, à la de la elipse, tendrà la razon de CS, semidiametro mayor, à CI, semidiametro menor. Assimismo, si se consideran todas las possibles dentro de la elipse paralelas à AH, se infiere tienen todas las de la elipse à las del circulo menor la razon de AC, semidiametro mayor, à DC, semidiametro menor: luego el circulo mayor à la elipse, y èsta al circulo menor, tienen la razon del semidiametro mayor al semidiametro menor.

COROLARIO.

El circulo del exe mayor, la elipse, y el circulo del exe menor son continuos proporcionales, por tener la razon misma del exe mayor al menor.

PROP.

PROP. IX. Theorema.

El circulo cuyo radio es medio proporcional entre el ſemiexe mayor; y el ſemiexe menor de la elipſe, es igual à la elipſe. (*fig.* 10.)

SEa la B media proporcional entre el ſemiexe mayor CH, y el menor CI. Digo, que el circulo hecho de B, como radio, ſerà igual à la elipſe.

Demonſtr. El circulo mayor ASHV, al circulo hecho del radio B, tiene (2. 12. Eucl.) razon duplicada del radio CS al radio B; y ſiendo la razon de CS à CI, duplicada de la de CS à B, por ſer proporcionales CS, B, CI, el circulo mayor ASHV, al circulo hecho de B, ſerà como CS à CI; pero el miſmo circulo mayor à la elipſe es tambien (8.) como CS à CI: luego el circulo hecho del radio B, y la elipſe ſon iguales.

COROLARIOS.

1 *DE aqui ſe colige el modo de hacer un circulo igual à una elipſe, pues ſolo con hallar una media proporcional entre ſus ſemiexes mayor, y menor, el circulo que ſe hiciere con dicha media como radio, ſerà igual à la elipſe.*

2 *El rectangulo circunſcrito à la elipſe, y el quadrado circunſcrito al circulo hecho de la media proporcional B, ſon iguales; porque el lado de eſte quadrado, ò el diametro del circulo ſobredicho es medio proporcional entre los lados de aquel rectangulo, ò exes de la elipſe, à quien ſon iguales.*

3 *Las elipſes ſon entre sì como los rectangulos de ſus exes. Las que tienen los exes reciprocos ſon iguales. Las ſemejantes, eſto es, las que tienen los exes proporcionales, tienen la razon duplicada de ſus exes homologos. Las que tienen un exe igual, tienen la razon que los otros exes: y las que conſtan de exes deſiguales, tienen la razon compueſta de ſus exes.*

PROP. X. Problema.

Explicanſe dos modos de deſcrivir la elipſe, dados ſus dos exes.

EN eſta propoſicion explico dos modos de delinear la elipſe, fundados en ſu propiedad primaria, que ſe de-

demonstrò en la *prop.* 5. Mas adelante se daràn otros, fundados en otra propiedad suya.

Modo 1. (*fig.* 11.) Dados el exe mayor AB, y el semiexe menor CG, se pide se descriva la elipse.

Operacion. Del centro C descrivase el semicirculo AKB: dividase AC en qualesquiera partes iguales, ò desiguales, como L, D: tirense LM, DE paralelas à CK: dividanse èstas en N, y F, semejantemente que lo està la CK en G; esto es, sea DF à DE, como CG à CK; y asimismo LN à LM, como CG à CK. Digo, que los puntos A, N, F, G, estàn en la periferia de la elipse; y por consiguiente, si por ellos se tira una linea curva ANFG, &c. quedarà descrita la elipse. Quanto mas fueren estos puntos hallados, serà mas perfecta la descripcion.

Demonstr. El quadrado de DE es igual al rectangulo ADB, (17.6. Euc.) y el quadrado de CK es igual al rectangulo ACB; y siendo por la construccion DF à DE, como CG à CK, serà (22.6. Eucl.) el quadrado de DF al quadrado de DE, como el quadrado de CG al quadrado de CK; y alternando, el quadrado de DF al de CG, es como el quadrado de DE al de CK: luego el quadrado de DF, al quadrado de CG, serà como el rectangulo ADB, al rectangulo ACB: luego (5.) el punto F està en la periferia de la elipse. Lo mismo se probarà del punto N, y de todos los demàs: luego ANFG, &c. es elipse.

Modo 2. (*fig.* 12.) Sea dado el exe mayor AB, y el menor CD: pidese se descriva la elipse.

Operacion. Tomese con el compas la diferencia del semiexe mayor al menor; y puesto el un pie en qualquiera punto G del exe mayor, señalese con el otro en el exe menor el punto F: tirese la FGH igual al semiexe mayor. Digo, que el punto H està en la periferia de la elipse. Hagase lo mismo sobre diferentes puntos de la AB, y se tendràn muchos puntos de la periferia de la elipse; y guiando por ellos una linea, quedarà hecha su descripcion.

Para la demonstracion descrivase el semicirculo ALB; y por el punto H tirese la IHK perpendicular à AB; y juntese la EL.

De-

Demonstr. Las lineas FH, EI son iguales, por serlo entrambas al semiexe mayor EA, las quales juntan las paralelelas HI, FE: luego ellas son paralelas: luego (2. 6. Eucl.) en el triangulo EIK, assi se ha EI, igual al semiexe mayor, con GH, igual al semiexe menor, como KI, semiaplicada al circulo, con KH, semiaplicada à la elipse: luego (7.) el punto H està en la periferia de la elipse; y assi en los demàs.

Para mayor facilidad de la practica se suele cortar una regla de madera, como MN, igual al semiexe mayor de la elipse: y alli mismo se nota el semiexe menor OM; y ajustando el cabo N sobre la CE, y el punto O sobre la AE, de suerte, que corriendo N por la CE, jamàs se aparte O de la AE, la extremidad M irà descriviendo la elipse: à este modo se han discurrido algunos otros instrumentos para su descripcion.

PROP. XI. Problema.

Hallar el parametro del exe de la elipse. (*fig.* 13.)

PIdese el parametro, ò lado recto del exe AB de la elipse.

Operacion. Hagase como AB, al exe conjugado CD; assi CD à AE. Digo, que AE serà el parametro del exe AB; esto es, que AE serà la medida de los quadrados de las aplicadas al exe AB.

Antes de demonstrar esta regla quiero advertir, que los antiguos Geometras hallaron en las secciones conicas esta linea llamada *Parametro*, para tener en ella una medida fixa, y determinada, por donde pudiessen nivelar, y medir con mayor facilidad las potencias, ò quadrados de las lineas aplicadas à los diametros de dichas secciones, cosa que era muy conducente para averiguar sus propiedades. El modo con que por el parametro se miden los quadrados de las aplicadas, consiste, en que el quadrado de qualquiera aplicada, como por exemplo el de FG, es igual al rectangulo hecho de la sagita FA, y de la linea FI, que es el rectangulo FH; y assi en las demàs aplicadas:

y

y porque estos rectangulos en la elipse siempre son menores que el rectangulo hecho de la sagita, y parametro, por tener siempre por lado una linea, como FI, menor que el parametro, como se colige de la operacion sobredicha; por esta causa esta seccion conica se llama *elipse*, que es lo mismo que *deficiente*: à diferencia de la *parabola*, en que los quadrados de las aplicadas son iguales à los rectangulos sobredichos del parametro, y sagita; y de la hiperbola, en que los mismos quadrados son mayores que dichos rectangulos.

Esto supuesto, para probar que la recta hallada AE es el parametro del exe AB, hagase AE paralela al exe CD. Tirese la BE, y tambien las semiaplicadas que se quisieren, como FG, que extendida, cortarà la BE en I; y perficionese el paralelogramo AS: y ultimamente tirese la IH paralela à AB. Demuestro pues, que el quadrado de FG es igual al rectangulo hecho de AF, FI, que es FH.

Demonstr. Por ser FG, MD semiaplicadas al exe AB, es (5.) el quadrado de FG al quadrado de MD, como el rectangulo AFB al rectangulo AMB, ò quadrado de AM: luego (23. 6. Eucl.) tienen la razon compuesta de sus lados, esto es, de AF à AM, y de FB à AM; pero el rectangulo AFI, esto es, FH, tiene tambien la misma razon compuesta de la de AF à AM; y de la de FI à ML, que (2. 6. Eucl.) es la misma que la de FB à AM, ò MB: luego el rectangulo FH, al rectangulo AML, tiene la misma razon que el quadrado de FG, al quadrado de MD; y alternando, el rectangulo FH, al quadrado de FG, tiene la misma razon, que el rectangulo AML, al quadrado de MD; pero el quadrado de MD es igual al rectangulo AML, como luego probarè: luego el rectangulo FH es igual al quadrado de FG.

Que el quadrado de MD sea igual al rectangulo AML, es claro; porque AB, CD, AE son por construccion proporcionales: luego el rectangulo de las extremas AB, AE, (17. 6. Eucl.) es igual al quadrado de la media CD: luego sus quartas partes son iguales. El quadrado de MD es la quarta parte del quadrado de CD doblada de MD; y el

rec-

rectangulo AML, ò LMB, es la quarta parte del rectangulo AS, por ser ML mitad de AE: (2. 6. Eucl.) luego el quadrado de MD, y el rectangulo AML, son iguales, que es lo que faltava probar.

De la misma suerte que se ha hallado el parametro de el exe mayor, se hallarà el del menor, haciendo como CD à AB: asi AB al parametro que se busca, el qual serà mayor que AB.

COROLARIOS.

1 *EL parametro AE del exe mayor, el exe menor CD, el exe mayor AB, y el parametro del exe menor, son quatro continuos proporcionales; porque por construccion es AB à CD, como CD à AE, parametro del exe mayor: luego invirtiendo, serà AE, parametro del exe mayor, à CD, como CD à AB; y siendo tambien por construccion, como CD à AB, asi AB al parametro del exe menor, seràn quatro continuos proporcionales, como AE à CD, asi CD à AB; y asi AB al parametro del exe menor: luego los dos exes de la elipse son medios proporcionales entre los dos parametros; y por consiguiente, si dados los parametros, se descriviesse la elipse, se hallarian las dos medias proporcionales.*

2 *El quadrado de qualquiera aplicada, como de FG, al rectangulo AFB, tiene la misma razon que el parametro AE, al diametro AB, porque son proporcionales AB, CD, AE: luego (corol. 20. 6. Eucl.) AB à AE, es como el quadrado de AB, al quadrado de CD; y por consiguiente, como el quadrado de AM, al quadrado de CM: luego invirtiendo, serà como AE à AB; asi el quadrado de CM, al quadrado de AM, ò rectangulo AMB; pero (5.) el quadrado de CM, al rectangulo AMB, es como el quadrado de FG, al rectangulo AFB: luego el quadrado de FG, al rectangulo AFB, es como AE à AB.*

PROP. XII. Theorema.

El quadrado del exe menor es igual al rectangulo del exe mayor, y el parametro.

LA razon consta de lo dicho, porque (11.) el exe menor es medio proporcional entre el exe mayor, y el parametro: luego su quadrado (17. 6. Eucl.) es igual al rectantangulo del exe mayor, y el parametro. A este rectangulo llaman absolutamente *Figura.*

COROLARIOS.

1 *EL quadrado del semiexe MD, (fig. 13.) es igual à la quarta parte de la figura, ò rectangulo AS, hecho del exe mayor, y el parametro: porque el quadrado de MD, es la quarta parte del quadrado del exe menor CD, el qual se ha probado ser igual al rectangulo AS.*

2 *Tambien por ser el exe mayor medio proporcional entre el exe menor, y su parametro, es su quadrado igual al rectangulo del exe menor, y su parametro; y el quadrado del semiexe mayor, igual à la quarta parte de dicho rectangulo.*

PROP. XIII. Problema.

Otro modo de descrivir la dicha elipse. (*fig.* 14.)

SEa dado el paralelogramo ABCD, cuya diagonal AC, ha de ser el exe mayor de la elipse que se ha de descrivir. *Operacion.* Tirense las paralelas que se quisieren EG, KM, NS. Hagase FH, media proporcional entre EF, FG: y assimismo LO, media proporcional entre KL, LM; y tambien hagase PS, media proporcional entre NP, y PR: y assi en quantas paralelas se quisiere. Digo, que los puntos H, O, S, estàn en la periferia de la elipse; y llevando por ellos una linea, quedarà hecha su descripcion.

Demonstr. La razon del rectangulo EFG, al rectangulo KLM, se compone de la razon de EF à KL, ù de AF à AL, que es la misma; (2.6. Eucl.) y de la razon de FG à LM, ù de CF à CL, que es la misma; pero la razon del rectangulo AFC, al rectangulo ALC, se compone de las mismas razones de AF à AL, y de FC à LC: luego assi se ha el rectangulo EFG, ò el quadrado de FH su igual, al rectangulo KLM, ò el quadrado de LO su igual, como el rectangulo AFC, al rectangulo ALC: luego (5.) los puntos H, y O, estàn en la circunferencia de la elipse; y lo mismo se convencerà de los demàs.

PROP.

PROP. XIV. Problema.

Dado el centro de la elipse, tirar los exes. (*fig.* 15.)

OPeracion. Del centro dado A, hagase un arco de circulo, que corte la elipse en dos puntos B, y C. Tirese la recta BC, y partase por medio en D: tirese por A, y D, la recta MN, y serà el exe mayor; y tirando la perpendicular KE, por el centro A, serà el exe menor.

Demonstr. La recta NM, passa por el centro del circulo, y parte por medio à la cuerda BC: luego (3.3.Euc.) es perpendicular à la BC: luego (*corol.* 2. de la 4.) NM es el exe mayor; y por consiguiente, KE es el menor.

PROP. XV. Theorema.

Todas las rectas que passan por el centro de la elipse, y se terminan en su periferia, se dividen por medio en el mismo centro. (*fig.* 16.)

SEa el exe de la elipse IS, y su centro C. Digo, que qualquiera linea, como LF, que passe por el centro C, queda dividida en C en dos partes iguales.

Preparacion. Tirese desde L, la LN perpendicular al exe: cortese CM, igual à CN, y por M, hagase la perpendicular MF, y tirese la CF.

Demonstr. Las aplicadas MF, LN (*corol.* 2. *prop.* 5.) son iguales; las CN, y CM son iguales por construccion; y los angulos M, y N, rectos iguales: luego (4.1.Euc.) estos triangulos son del todo iguales: luego los angulos LCN, MCF, son iguales; y siendo verticales, las lineas LC, CF, (15.1. Eucl.) compondràn una linea recta, y seràn iguales: luego la LF, se divide por medio en el centro C.

COROLARIOS.

1 TOdos los diametros passan por el centro de la elipse; y por consiguiente, se dividen alli en dos partes iguales.

2 *Las aplicadas à qualquiera diametro en igual distancia del centro son iguales: consta de la demonstracion misma del Theorema.*

PROP. XVI. Problema.

Dado un diametro en la elipse, hallar el diametro conjugado, las aplicadas, y el centro. (*fig.*9.)

OPeracion 1. Al diametro dado AB, hagase la paralela FI: dividanse entrambas lineas por medio en E, y K: tirese la recta CEKD, y esta será el diametro conjugado; porque si por E passare otro diametro conjugado, dividiria la FI por medio en otro punto distinto de K, lo que es impossible: luego CD es el diametro conjugado. (*defin.* 7.)

2 Tirense qualesquiera paralelas à la CD, como son GF, HI, y estas serán las aplicadas al diametro AB.

3 Para hallar el centro de la elipse, si fuere dado su diametro, bastarà dividirle por medio con un punto, y este serà el centro, como consta del *corol.* 1. de la prop. passada; pero si no fuere dado el diametro, tirense dentro de ella dos lineas paralelas como se quiera, como MN, FI, dividanse por medio en O, y K, y tirese la linea COKD: dividase CD por medio en E, y este punto serà el centro. La razon es, porque el centro està en dicha linea CD: luego es el punto E, que la divide por medio. Que el centro estè en la CD, es claro, porque no estando en ella, estaria en algun otro punto fuera de ella, como en P: luego si por el punto P, se tirare un diametro conjugado à AB, dividiria por medio las paralelas MN, FI, en O, y K; y tirando dicho diametro, passaria por OPK; conque esta recta, y la OEK, cerrarian espacio, lo que es impossible: luego el centro no puede estàr fuera de la CD: luego es el punto E.

COROLARIOS.

1 SI *el diametro divide por medio una linea, que no passa por el centro, divide assimismo por medio todas sus paralelas, y seràn sus aplicadas.*

2 *Qualquiera linea que parte igualmente dos paralelas dentro de la elipse, es diametro, y passa por el centro.*

3 *Hallado el centro, se tirarà facilmente un diametro de la*

elip-

elipse, de un punto dado en su periferia, con solo tirar una linea, que saliendo del punto dado passe por el centro.

4 *La aplicada, que passa por el centro, es el diametro conjugado; porque como GF, HI sean paralelas, como tambien GH, FI, es GI paralelogramo: luego la aplicada CD, que es paralela à las GF, HI, partiendo por medio la GH, parte tambien por medio la FI, y lo mismo à qualquiera otra paralela: luego es diametro conjugado. (def. 7.)*

PROP. XVII. Theorema.

En la elipse el exe mayor es el diametro maximo, y el exe menor es el minimo, y los diametros que se apartan igualmente de los exes son iguales, y aquel es mayor, que mas dista del exe menor. (fig. 17.)

1 SEa IS el exe mayor de la elipse. Digo, que qualquiera otro diametro es menor que IS. Del centro C, con el radio CI, hagase un circulo; èste tocarà à la elipse en el punto I, y caerà todo fuera, como consta de la misma naturaleza de la elipse: luego qualquiera otro diametro no llegarà à la periferia del circulo: luego serà menor que IS.

2 Sea MN el exe menor. Digo, que qualquiera otro diametro serà mayor que MN. Con el intervalo CN hagase un circulo, y tocarà interiormente à la elipse en N, y todo caerà dentro: luego qualquiera otro diametro excederà al exe menor MN.

3 Digo, que los semidiametros CH, CG, que distan igualmente del exe IS, son iguales. Tirese la HG, que por distar igualmente los puntos H, y G del exe IS, quedarà dividida por medio en O, y serà aplicada al exe: (*corol.* 1. 16.) luego los triangulos CGO, CHO tienen los lados OG, OH iguales, y OC comun; y los angulos en O rectos, por ser la GH aplicada al exe: luego (4. 1. Euclid.) los semidiametros CG, CH son iguales.

4 La CH, que dista del semiexe CN mas que la CK, es mayor que CK; porque si se descrive con la distancia CH un circulo, cortarà à la elipse en H, y el semidiametro CK

de la elipse no llegarà al circulo: luego el semidiametro CH es mayor que CK.

PROP. XVIII. Problema.

Dados los exes de la elipse, hallar los dos diametros conjugados iguales. (fig. 18.)

SEan dados los exes IS, PQ de la elipse: pidense los dos diametros conjugados iguales.

Operacion. Tirense IP, IQ, que seràn iguales, (4. 1. Euclid.) por ser en los triangulos IOP, IOQ los angulos en O rectos; y los lados IO, OQ; IO, OP iguales. Partanse las IP, IQ por medio en RT: por estos puntos, y el centro O, tirense las VO, LO, y èstas seràn los diametros conjugados iguales.

Demonstr. Los triangulos ROP, TOQ, tienen iguales los lados OP, OQ, y TQ, RP, y los angulos P, y Q: luego (4. 1. Euclid.) OT, OR son iguales; y assimismo lo son los angulos ROP, TOQ, que quitados de los angulos O rectos, quedan IOT, IOR iguales: luego (17.) los semidiametros ORV, OTL son iguales. Tambien por ser el angulo POI recto, el circulo descrito desde R por I, passarà por O: luego RI, RO son iguales; y los angulos ROI, RIO, (5. 1. Euclid.) tambien son iguales. Siendo pues, como se ha dicho, el angulo IOT igual à ROI, seràn iguales los alternos RIO, IOT: luego (28. 1. Eucl.) las PI, OL son paralelas; y assimismo se probarà lo son las VO, IQ: luego los semidiametros VO, OL, dividen por medio mutuamente sus paralelas: luego son conjugados, y por la razon sobredicha iguales.

COROLARIO.

EN los diametros conjugados iguales, el rectangulo hecho de los segmentos del diametro es igual al quadrado de su aplicada, como el rectangulo VRN es igual al quadrado de RI; porque (5.) el quadrado de RI, al quadrado de OL, es como el rectangulo VRN, al rectangulo VON; y alternando, el quadrado de RI, al rectangulo VRN, es como el quadrado de OL, al rectangulo VON; pero este quadrado de OL es igual (17. 6. Euclid.) al rectangulo VON: luego el *el quadrado de RI es igual al rectangulo VRN; y asi en las demàs aplicadas.*

PROP. XIX. Problema.

Explicase otro modo de descrivir la elipse. (*fig.* 19.)

DEscrivase un circulo, y tirense en èl los diametros AC, DP, que se corten perpendicularmente: tomense en el diametro AC los puntos que se quisieren E, H, &c. distantes entre sì en igual, ù desigual distancia, y tirense por ellos las rectas EF, HI, &c. paralelas al semidiametro BD. Hagase la EG igual à EF con la inclinacion arbitraria: hagase la HK paralela à la EG, è igual à HI; y asimismo la BL paralela à HK, è igual à BD, y asi en todas las restantes: y tirando la curva AGKLC por los puntos G, K, &c. quedarà descrita la una mitad de la elipse. La otra mitad se podrà hacer del mismo modo, ù haciendo la EO igual à EG, la HN igual à HK; y asi en las demàs, y quedarà concluida la elipse.

Demonstr. El quadrado de EF (17. 6. Eucl.) es igual al rectangulo AEC; y siendo EG igual à EF, serà el quadrado de EG igual al rectangulo AEC. Asimismo probarè ser el quadrado de HK igual al rectangulo de AHC; y asi en todas las demàs: luego el quadrado de EG, al quadrado de HK, es como el rectangulo AEC, al rectangulo AHC: luego (5.) los puntos G, y K estàn en la periferia de la elipse.

Aqui se hace otra vez evidente, que quando en la elipse los diametros conjugados son iguales, como lo son aqui AC, LM, los quadrados de las aplicadas son iguales à los rectangulos hechos de los segmentos del diametro, como hemos visto.

PROP. XX. Theorema.

Qualquiera diametro divide la elipse en dos partes iguales; los diametros conjugados la parten en quatro partes iguales; y los sectores verticales opuestos son iguales.

(*fig.* 20.)

DIgo lo primero, que el diametro IS divide la elipse en dos partes iguales; porque por todos los puntos ima-

imaginables de IS se pueden tirar aplicadas; y como el diametro las divida todas en partes iguales, tambien dividirà assimismo la elipse.

Digo lo segundo, que tirados qualesquiera diametros IS, PQ, los sectores POS, IOQ verticalmente opuestos son iguales; porque, como hemos probado, IPS es mitad de la elipse, y assimismo PIQ: luego son iguales: luego quitando la comun POI, quedaràn POS, IOQ iguales.

Digo lo tercero, que siendo las IS, PQ diametros conjugados, queda la elipse dividida en quatro partes iguales; porque todas las aplicadas à IO son paralelas à PQ, y divididas por medio: luego los sectores IOP, IOQ son iguales; y siendo sus verticales opuestos tambien iguales con los sobredichos, tambien lo seràn entre sì: luego queda la elipse dividida en quatro partes iguales.

PROP. XXI. Theorema.

La recta que saliendo del centro de la elipse parte por medio una subtensa, divide tambien por medio al segmento, y al sector; y las subtensas tiradas del vertice cortan segmentos iguales. (*fig.* 20.)

EL diametro IS parte por medio en E à la subtensa CD. Digo lo primero, que el segmento CID queda tambien dividido por medio; porque si se imaginan todas las paralelas possibles à la CD, todas quedaràn divididas por medio con el diametro IS, como lo està la CD: (*corol.* 1. 16.) luego todo el segmento CID queda dividido por medio.

Digo lo segundo, que el sector OCID queda dividido por medio; porque si en el triangulo COD se tiran paralelas à la CD, como lo es la HL, quedan divididas por medio por el diametro IS: luego todo el sector sobredicho, que se compone del segmento CID, y del triangulo COD, queda dividido por medio.

Digo lo tercero, que si del vertice I se tiran las subtensas IC, ID, los segmentos IC, ID son iguales; porque si de los medios segmentos iguales IEC, IED, se quitan los trian-

gu-

gulos CEI, DEI iguales, quedaràn los sobredichos segmentos iguales.

COROLARIO.

Si dado el sector IOD, se pidiere otro sector igual formado con una recta tirada del centro O à la periferia, se tirarà del punto D, la DC, aplicada al diametro IS; y tirando la OC, quedarà formado el sector IOC, igual à IOD, como consta de lo demonstrado.

PROP. XXII. Theorema.

Las rectas AB, DC, que juntan las paralelas AD, BC, cortan los segmentos AOB, DPC iguales. (fig. 21.)

Demonstr. Dividanse las paralelas AD, BC, por medio en E, y F; y por estos puntos tirese la recta EFH, que (*corol. 2. prop. 16.*) serà diametro; y por la anteced. los segmentos BFH, CFH, seràn iguales, y assimismo los segmentos AEH, DEH; y quitando de èstos los primeros, quedaràn los segmentos AOBFE, DPCFE iguales. Tambien por ser AE, ED iguales, como tambien sus paralelas BF, CF, y la altura FE comun, seràn los trapecios rectilineos BE, CE iguales: luego quitandoles de los segmentos iguales AOBFE, DPCFE, quedaràn los segmentos AOB, DPC iguales.

COROLARIO.

Dado el segmento AOB, y el punto D, en la periferia de la elipse, si se pide que del punto D, se tire una recta DC, que corte el segmento DPC, igual al lado AOB, se tirarà la recta AD; y del punto B, la paralela BC; y tirando la DC, quedarà formado el segmento DPC, que segun lo demonstrado, serà igual al segmento dado AOB.

PROP. XXIII. Theorema.

Las paralelas tiradas dentro de la elipse de las extremidades del diametro son iguales, y la recta que las junta es diametro. (fig. 22.)

De los puntos M, y N, del diametro MN, salen las paralelas MQ, NP. Digo, que son iguales, y que la PQ que las junta es diametro.

Pre-

Preparacion. Partanse dichas paralelas por medio en E, y F, y tirese la FE, que (*corol. 2. prop.* 16.) será diametro, y passará por el centro O.

Demonstr. Los triangulos MOE, FON, tienen los angulos FON, MOE iguales; (15.1. Eucl.) y los N, y M, tambien iguales, por ser alternos en las paralelas; (27.1. Eucl.) y los lados MO, ON son iguales: luego dichos triangulos (26.1. Eucl.) son del todo iguales: luego ME, FN son iguales: luego siendo mitades de MQ, NP, seràn estas lineas iguales. Tambien tirando las rectas PO, QO, los triangulos EOQ, POF, tendràn los angulos P, y Q iguales, por ser alternos en las paralelas. Assimismo los angulos OEQ, OFP, son iguales, por ser complementos al semicirculo de los OEM, OFN, que antes se probaron ser iguales; y siendo tambien iguales los lados EQ, FP, como antes dixe, seràn estos triangulos totalmente iguales: luego los angulos EOQ, POF, son iguales; y siendo verticales, seràn (15.1. Eucl.) las PO, OQ, una linea recta, y como passe por el centro, serà diametro.

PROP. XXIV. Problema.

De un punto dado en la periferia de la elipse, tirar la aplicada al diametro dado. (*fig.* 23.)

SEa dado el diametro AB, y en la periferia de la elipse el punto C. Pidese, que de este punto se tire la aplicada à dicho diametro.

Operacion. Tirese la recta CAD, y cortese AD, igual à CA: tirese la DE, paralela à AB, que llegue à cortar à la elipse en E: tirese la CE, y serà la aplicada que se pide.

Demonstr. En el triangulo CDE, por ser AF paralela à DE, es (2.6. Eucl.) CF à FE, como CA à AD; pero èstas son iguales: luego tambien aquellas; y por consiguiente, la CE es aplicada.

PROP.

PROP. XXV. Theorema.

Las lineas AE, BE (fig. 24.) que salen de las extremidades de la aplicada AB, y concurren en el punto E del diametro, cortan la elipse en los puntos F, y G, tales, que le recta FG, que les junta, es paralela à la aplicada AB.

ES cierto, que del punto F, se puede tirar una paralela à AB, que corte al lado EB. Pruebo pues, que dicho punto es G, comun à *EB*, y à la periferia de la elipse; porque supuesto sean *FG*, *AB* paralelas, serà (2.6. Eucl.) como *DE* à *IE*, assi *AD* à *FI*, y *DB* à *IG*: luego alternando, serà como *AD* à *DB*, assi *FI* à *IG*; pero *AD*, es igual à *DB*: (*defin.*6.) luego *FI*, es igual à *IG*: luego el punto *G* està en la periferia de la elipse: (*corol.* 1. *prop.* 4.) luego la recta que junta los puntos *F*, *G*, es paralela.

PROP. XXVI. Theorema.

Qualquier linea que sale de la extremidad del diametro, paralela à las aplicadas, es tangente. (fig. 25.)

LA recta *AC*, es paralela à las aplicadas, y sale de la extremidad del diametro *AB*. Digo, que es tangente; porque si no lo fuera, caeria dentro de la elipse, como *AD*. Siendo pues *AD*, como se supone, paralela à *EF*, quedarà dividida en dos partes iguales por el diametro: (*corolar.* 1. *prop.*4.) luego no saldrà su extremidad A, contra lo supuesto.

COROLARIOS.

1 *LAs dos tangentes AC, BG, tiradas por las extremidades del diametro, son paralelas.*

2 *Si se pidiere que de un punto dado A, se tire una tangente, se buscarà el centro, y del punto A, se tirarà por el centro el diametro AB, y una aplicada à este diametro, à quien se harà la paralela AC, y serà la tangente que se pide.*

3 *El diametro que passa por el punto del contacto, divide por medio todas las paralelas à la tangente.*

PROP.

PROP. XXVII. Theorema.

Si la recta AB, (fig. 26.) que toca à la elipse en B, concurre con el diametro en A, y del contacto B sale la aplicada BH, y la BO à la extremidad O del diametro; la recta DEI, paralela à BO, quedarà dividida en E, en los dos segmentos DE, EI iguales. (fig. 26.)

P*reparacion.* Dividase la BO, por medio en M, y tirese el diametro MS, prolongandole hasta que concurra con la aplicada BH en G: tomese la MT, igual à MS, y tirense las rectas BT, TO; OG, HK, y FN: alarguese la DI, hasta C, y tirese el diametro BSL.

Demonstr. Las rectas BO, HK (25.) son paralelas, y tambien lo es la DC, por construccion: solo es menester probar el paralelismo de la FN, con las sobredichas, y de la BT, con la SO; para lo qual, consideremse los quatro triangulos que tienen sus cuspides en M, y sus basas son BS, SO, OT, TB, de los quales los opuestos son totalmente iguales; porque en los BMS, TMO, tienen los lados TM, y MS, iguales por construccion, como tambien BM, MO, y los angulos en M, (15.1.Eucl.) son iguales: luego los triangulos sobredichos son totalmente iguales: luego el angulo MBS, es igual al angulo MOT; y siendo alternos, seràn las BSN, y TO paralelas. De la misma suerte probarè ser totalmente iguales los triangulos BMT, OMS, y que las BT, SO son paralelas. Esto supuesto,

Por ser paralelas las lineas sobredichas, serà (2.6.Eucl.) ON à NG, como TS à SG; assimismo BF à FG, como las mismas TS à SG: luego BF à FG, es como ON à NG: luego (2.6.Eucl.) BO, FN son paralelas; y como HK sea paralela à las sobredichas, serà BF à FH, como ON à NK; pero BF, FH son iguales: luego ON, y NK, son tambien iguales: luego OK, es aplicada al diametro BSL: (*corol.* 1. 16.) luego (26.) es paralela à la tangente AB. Tambien por ser EP, BO, HK paralelas, son ZE, ZP iguales; y quitadas las ZI, ZC iguales, (por ser entre si, como las MB, MO, que lo son por construccion) quedan las sagitas CP, IE

IE iguales. Tambien las EP, BO (23.) ſon iguales; y aſsimiſmo las DC, y BO: (34. 1. Eucl.) luego EP, y DC ſon iguales; y quitada la comun EC, quedaràn DE, CP iguales; y haviendoſe probado ſer EI igual à CP, ſeràn DE, EI iguales, que es lo que ſe havia de probar. Eſta propoſicion, y la ſiguiente ſe verifican tambien en el circulo, como ſe puede ver haciendo en èl ſemejantes conſtrucciones, y demonſtraciones.

PROP. XXVIII. Theorema.

Si una linea toca la elipſe, y del contacto ſale una aplicada, ſerà el mayor ſegmento del diametro, al menor ſegmento, como la ſecante al ſegmento exterior; y al contrario. (fig. 27.)

SEa MS tangente, y del contacto S ſalga la aplicada SO. Digo, que RO à ON, es como RM à NM. Junteſe la SR, y tireſe por N la PQ paralela à SR; y por la prop. antec. ſeràn PN, NQ iguales.

Demonſtr. Los triangulos SOR, NOQ ſon equiangulos, por tener iguales los angulos O; y los R, y N alternos en las paralelas NQ, SR: luego (4.6. Eucl.) RO à ON, es como RS à QN, ò à PN ſu igual; pero en los triangulos MSR, MPN, por ſer paralelas PN, SR, es RS à NP, como RM à NM: luego RO à ON, es còmo RM à NM.

De aqui ſe colige baſtantemente la converſa, que ſi RO à ON es como RM à NM, la MS es tangente; porque ſi no lo fuere, ſeria otra la tangente, como por exemplo la SZ: luego ſeria RO à ON, como RZ à NZ: luego no ſeria RO à ON, como RM à NM, contra lo ſupueſto.

COROLARIO.

SIendo, como ſe ha demonſtrado, RO *à* ON, *como* RM *à* NM, *ſerà (16. 6. Eucl.) el rectangulo de los extremos* RO, NM, *igual al de los medios* ON, RM.

PROP.

PROP. XXIX. Theorema.

Si la tangente MS (fig. 27.) de una elipse, ò circulo concurre con el diametro prolongado en M, el rectangulo MCO, serà igual al quadrado del semidiametro CN.

DEmonstr. (28.) RM à NM, es como RO à ON: luego componiendo, serà RM + NM à NM, como RO + ON à ON; esto es, como RN à ON: luego la mitad de cada antecedente, tendrà la misma razon con su consequente; esto es, serà CM à NM, como CN à NO; y alternando, serà toda CM à toda CN, como el segmento quitado NM, al otro segmento quitado ON: luego el residuo CN al residuo CO, es como toda CM à toda CN: luego el rectangulo de los extremos, esto es, el quadrado de CN, es igual al rectangulo de los medios CM, CO.

COROLARIO.

SIguese, que CO, distancia entre la aplicada, y el centro, la CN, semidiametro, y la MC son continuas proporcionales, por ser el quadrado de la media igual al rectangulo de las extremas. Es de Apolonio Pergeo.

PROP. XXX. Theorema.

Si la tangente MS (fig. 27.) de una elipse, ò circulo concurre con el diametro en M; y del contacto sale la aplicada SO, serà el rectangulo MOC al quadrado de la aplicada SO, como el diametro NR, al parametro.

DEmonstr. El rectangulo MCO, es (3.2.Eucl.) igual al rectangulo MOC, mas al quadrado de OC: tambien el quadrado de NC (que por la antecedente es igual al rectangulo MCO) es assimismo (5.2.Eucl.) igual al rectangulo RON, mas al quadrado de OC: quitese este quadrado de OC de entrambas partes de la igualacion, y quedaràn los rectangulos MOC, RON iguales: pero el rectangulo RON al quadrado de SO, es como el diametro RN,

al

al parametro: (*corol.* 2. *prop.* 11) luego el rectangulo MOC al quadrado de SO, es como el diametro RN al parametro.

PROP. XXXI. Theorema.

En el mismo caso (fig.27.) el rectangulo RMN, hecho de la secante, y su exterior segmento, es igual al rectangulo CMO, hecho de la porcion de la secante hasta el centro, y de la porcion de la misma secante hasta la aplicada.

DEmonstr. Por el corol. de la *prop.* 29. es CM à CN, como CN à CO: y, si se quita CN de CM, y CO de CN, serà como toda la CM à toda la CN; assi lo quitado CN, à lo quitado CO: luego serà tambien toda la CM à toda la CN, como el residuo MN, al residuo ON; y componiendo CM + CN, esto es, RM, serà à CM, como NM + ON, esto es, OM à ON: y otra vez dividiendo, (quitando la CN, ò la RC su igual, de la RM) serà la RM à la RM — RC, esto es, à la CM, como la OM à la OM — ON, esto es, à MN: son pues los quatro proporcionales RM, CM :: MO, MN: luego (16. 6. Eucl.) el rectangulo de las extremas RM, MN, esto es, el rectangulo RMN, es igual al rectangulo CMO de las medias.

PROP. XXXII. Theorema.

Si una linea HBF (fig.28.) toca la elipse, ò al circulo, y concurre con el diametro en F, y del contacto sale la aplicada BG, y se tiran de las extremidades del diametro las DH, AI, paralelas à la aplicada, hsta que concurran con la tangente, el rectangulo hecho de las DH, AI, es igual à la quarta parte del rectangulo hecho del diametro DA, y el parametro AK.

DEmonstr. (31.) El rectangulo GFE es igual al rectangulo DFA: luego el quadrado GF tiene la misma razon con el uno que con el otro: y como el quadrado de GF, y el rectangulo GFE, por tener la altura GF comun, tengan la razon de GF à FE, que son las basas, tambien

el

el quadrado de GF al rectangulo DFA, ferà como GF à FE; pero el quadrado de GF al rectangulo DFA, tiene la razon compuesta de GF à DF, ù de BG à HD, que es la misma, y de GF à FA, ù de BG à IA: y como el quadrado de BG al rectangulo de IA, HD, tenga tambien la razon compuesta de BG à HD, y de BG à IA, ferà el quadrado de GF al rectangulo DFA, como el quadrado de BG al rectangulo de IA, HD; y siendo el quadrado de GF al rectangulo DFA, como GF à FE, ferà como GF à FD: assi el quadrado de BG al rectangulo de HD, IA; y como el rectangulo EGF sea al rectangulo GEF, ò al quadrado de AE su igual, (29.) por tener la misma altura GE, como GF à FE, ferà el rectangulo EGF al quadrado de AE, como el quadrado de BG al rectangulo hecho de AI, HD; y permutando, como el rectangulo EGF al quadrado de BG, assi el quadrado de AE, al rectangulo de AI, HD: y como DA à AK, assi sea el quadrado DA al rectangulo DAK; y assi el quadrado de AE, quarta parte del de DA, à la quarta parte del rectangulo DAK: luego como el quadrado de AE, à la quarta parte del rectangulo DAK; assi el mismo quadrado de AE, al rectangulo de HD, IA: luego este rectangulo es la quarta parte del rectangulo DAK.

COROLARIOS.

1 *Lo demonstrado procede tambien en qualesquiera paralelogramos, y rhombos equiangulos, que tienen la misma razon que los rectangulos, y quadrados.*

2 *Este theorema, y los antecedentes se han de entender assimismo del segundo diametro, por ser sus demonstraciones universales.*

PROP. XXXIII. Theorema.

Si sobre el diametro de la elipse se descrive un circulo, y se tira una aplicada comun al circulo, y elipse, las tangentes del circulo, y elipse, que salen de los extremos de la aplicada, concurren en un mismo punto del diametro. (fig. 29.)

SEa RQ el diametro de la elipse, sobre quien se descrive el circulo RTQ. Del punto T, salga la aplicada TL, TL, que es comun à la elipse, y al circulo: tirense las tangentes TP, LP. Digo, que concurren en el mismo punto P del diametro.

Demonstr. (corolar. de la *prop.* 29.) CS, CR, CP, tanto respecto del circulo, como de la elipse, son continuas proporcionales: luego en entrambos corresponde por tercera proporcional la misma linea CP: luego entrambas tangentes concurren en P.

PROP. XXXIV. Problema.

De un punto dado tirar una tangente à la elipse. (*fig.* 30.)

1 Pidese, que del punto T, dado en la periferia de la elipse, se tire una tangente.

Operacion. Tirese qualquiera diametro RQ; partase por medio en C: tirese la ordenada TS, y haganse CS, CR, CP, continuas proporcionales, y la linea TP, serà la tangente. (corol. de la *propos.* 29.) De otro modo: tirese el diametro TC, (*corol.* 3. de la 13.) y qualquiera aplicada LX, (24.) hagase la TP, paralela à LX, y serà tangente (26.)

2 Pidese, que del punto P, dado fuera de la elipse, se tire una tangente. *Operacion.* Tirese el diametro PQ, (*corol.* 3. de la 13.) y haganse PC, RC, SC, proporcionales; por S, tirese la ordenada ST, (16.) y la recta TP, serà la tangente. Consta de las proposiciones citadas.

PROP. XXXV. Theorema.

Si sobre el exe mayor de la elipse se descrive un circulo, y por la extremidad del exe menor se tira una tangente hasta la periferia del circulo, y de este punto se saca una aplicada, serà el rectangulo de los segmentos del exe, igual à la quarta parte de la figura. (*fig.* 31.)

Este theorema, y los siguientes pertenecen à los focos de la elipse, y demonstracion de sus propiedades. Sea PQ, el exe mayor de la elipse; y RS, su semiexe menor: tirese por S la tangente SV, hasta la periferia del circulo hecho sobre su exe PQ; y por V, tirese la aplicada

VF.

VF. Digo, que el rectangulo PFQ, es igual à la quarta parte de la figura, que como dixe en la *defin.* 12. es el rectangulo hecho del parametro, y del diametro.

Demonstr. El rectangulo PFQ, es igual al quadrado de FV, (corol. de la 13. 6. Eucl.) ù del semiexe RS, su igual; pero este quadrado es igual à la quarta parte de la figura: (*corol.* 1. de la *prop.* 12.) luego tambien lo es el rectangulo PFQ.

PROP. XXXVI. Theorema.

La recta FS (fig. 31.) tirada del sobredicho punto F à la extremidad del exe menor, es igual al semiexe mayor RP.

DEmonstr. (por la antec.) El rectangulo PFQ, es igual al quadrado de RS; y añadiendo à entrambos el quadrado de FR, serà el rectangulo PFQ, mas el quadrado de FR, igual al quadrado de RS, mas el quadrado de FR: estos dos ultimos quadrados son (47. 1. Eucl.) iguales al quadrado de FS: luego el rectangulo PFQ, mas el quadrado de FR, son iguales al quadrado de FS; pero el rectangulo PFQ, mas el quadrado de FR, es (5. 2. Eucl.) igual al quadrado de PR: luego el quadrado de PR, es igual al quadrado de FS: luego FS, y PR son iguales.

PROP. XXXVII. Problema.

Hallar los focos, ò polos de una elipse dada. (fig. 31.)

FOcos, ò polos de la elipse, son dos puntos puestos en el exe mayor en igual distancia de sus extremos, que entre otras tienen estas dos propiedades. La 1. *Que el rectangulo de los segmentos del exe hecho por qualquiera de ellos, es igual al quadrado del semiexe menor, ò à la quarta parte de la figura.* La 2. *Que la linea, que va de qualquiera de ellos à la extremidad del exe menor, es igual al semiexe mayor.* Esto supuesto, se hallaràn facilmente por qualquiera de los modos siguientes.

Modo 1. Sobre el exe mayor de la elipse PQ, hagase un semicirculo: de la extremidad del exe menor S, tirese una tan-

tangente SV, que cortarà la periferia del circulo en V: del punto V, tirese la VF perpendicular al exe, y el punto F serà el focus de la elipse; y el otro serà K, en igual distancia del centro R.

Modo 2. Tomese con el compàs el semiexe mayor RP, y puesto el un pie en S, señalense con el otro los puntos F, y K, y èstos seràn los focos. La razon es, porque con qualquiera de estas reglas se halla el punto F, tal, que el rectangulo PFQ, es igual à la quarta parte de la figura, como consta de las *proposiciones* 35. *y* 36.

PROP. XXXVIII. Theorema.

Si de los focos de la elipse se tiran lineas al punto del contacto, forman iguales angulos con la tangente. (*fig.* 32.)

SEan los focos E, F: la tangente sea GDC; y el contacto D: tirense ED, DF. Digo, que los angulos EDG, FDC son iguales.

Preparacion. Tirense las tangentes HI, KC, y juntense EC, FI, LD, EI, FC.

Demonstr. (32.) El rectangulo hecho de KC, HI, es igual à la quarta parte de la figura: luego (37.) es igual al rectangulo HEK: luego (14.6.Euc.) dichos rectangulos tendràn los lados reciprocos, como KC à KE, assi EH à HI; y como los angulos en K, y H sean rectos, seràn (6.6. Euc.) los triangulos EHI, EKC semejantes, y los angulos KEC, HIE iguales; pero los angulos HEI, HIE son iguales à un recto: luego HEI, y FEC son tambien iguales à un recto: luego el angulo residuo IEC es recto. Assimismo demonstrarè ser CFI angulo recto.

Aora he de demonstrar, que la recta LD, es perpendicular à IC. Sobre LI, LC, como diametros, descrivanse unos circulos, que se cortaràn en dos puntos; sean èstos L, y D: y suponiendo no haverse tirado aun la tangente IC, tirense las rectas ID, DC. Por ser los angulos LDC, LDI rectos, por razon de estàr en el semicirculo, las rectas ID, DC forman una linea: (14.1.Eucl.) luego coinciden con la tangente GC: luego LD, que es perpendicular à dichas lineas, es perpendicular à la tangente.

Esto supuesto, los angulos ELI, FLC, verticalmente opuestos, son iguales; el angulo EDI, es igual al angulo ELI, por insistir en un mismo arco; y el angulo FDC, es igual al angulo FLC, por la misma razon: luego los angulos EDI, FDC son iguales, que es lo que se pretende probar.

COROLARIOS.

1 *Los angulos* IEC, IFC *son rectos.* 2. *Los angulos* LDE, LDF *son iguales.* 3. *Los triangulos* FKC, IHF *son equiangulos; porque los tres angulos* IFC, HFI, KFC, *hacen dos rectos: luego quitando el recto* IFC *comun, quedan* HFI, KFC *iguales à un recto. Tambien por ser el angulo* K *recto, son* KFC, FCK *iguales à un recto: luego el angulo* HFI, *es igual al angulo* FCK: *luego los triangulos* FHI, FKC, *tienen los angulos* K, *y* H *rectos, y los angulos* HFI, FCK *iguales: luego son equiangulos.*

PROP. XXXIX. Theorema.

Si un cuerpo luminoso se pone en uno de los focos de la elipse, hace la reflexion al otro focus. (*fig.* 33.)

PAra demonstrar esta maravillosa propiedad de la elipse, fueron menester los dos Theoremas antecedentes. Sea un espejo eliptico B, B, B, &c. y en A, uno de sus focos, pongase una luz. Digo, que qualquiera rayo AB reflectirà de qualquier punto de la superficie eliptica al otro focus C. La razon es, porque como consta de la experiencia, y se demuestra en la Catoptrica, los angulos de incidencia, y reflexion son iguales: estos angulos en los cuerpos curvos se miden hasta la tangente tirada por el punto en que incide el rayo, y donde se forma dicho angulo. Siendo pues los angulos ABD, CBE (38.) iguales, el rayo de luz que sale del focus A, è incide en qualquier punto B, vendrà por reflexion al focus C; y al contrario. Assimismo, si en una pieza se forma una boveda eliptica, el que puesto cerca de uno de sus focos hablare, aunque con voz muy baxa, serà oìdo del que estuviere cerca del

otro

otro foco, de suerte, que podràn entrambos hablarse sin ser oìdos de los que huviere entre medio, por concurrir alli inumerables reflexiones de la voz.

PROP. XL. Theorema.

Si la recta AB (fig. 34.) toca à la elipse en A, y de los focos E, y G se tiran las rectas EA, GA al punto del contacto, y del centro F de la elipse sale la FC paralela à EA, linea menor de las dos sobredichas, y se juntan DC, LC, el angulo DCL serà recto. (fig. 34.)

P*Reparacion.* Alarguese la AC hasta K, y sean AC, CK iguales. Juntese GK, y tirense las tangentes DB, LI, y las rectas GI, BG.

Demonstr. Por ser iguales EF, FG, como tambien AC, CK, y EA, FC paralelas, serà tambien GK paralela à las mismas: luego el angulo EAB, y por consiguiente GAC (39.) su igual, serà igual al angulo K: luego en el triangulo AGK, los lados AG, GK son iguales; y los triangulos ACG, CGK, por tener dichos lados iguales, y el GC comun, y los AC, GK tambien iguales, tendràn los angulos en C iguales, y rectos.

Sobre la GI, como diametro, descrivase un circulo, que passarà necessariamente por los puntos L, y C, por ser los angulos GLI, GCI rectos. Asimismo, si sobre la BG, como diametro, se descrive un circulo, por ser los angulos BCG, BDG rectos, passarà por D, y C; y los angulos DCB, DGB, que insisten sobre el mismo arco DB, seràn iguales: como tambien los angulos GCL, GIL, que insisten en el mismo arco GL; y siendo (*corol.* 3. *prop.* 38.) los angulos DGB, LIG iguales, seràn los angulos GCL, DCB iguales: luego si al angulo recto BCG se le quita el angulo DCB, y en su lugar se substituye el igual GCL, el angulo que resulta DCL serà recto.

PROP. XLI. Theorema.

Si tirada la tangente DE (fig. 35.) se tira la FB del focus al punto B del contacto, y del centro H sale la HI paralela à FB hasta la tangente, serà la HI igual al semiexe mayor HC. (fig. 35.)

ESta proposicion consta de la antecedente; porque tirando de los extremos del exe AC al punto I, las rectas AI, CI, el angulo AIC serà recto: luego el semicirculo hecho del centro H de la elipse con el intervalo HC, passarà por I: (31. 3. Eucl.) luego la HI es igual al semiexe HC.

PROP. XLII. Theorema.

Si de los focos de la elipse salen dos lineas que concurren en qualquiera punto de la periferia de la elipse, entrambas juntas seràn iguales al exe mayor. (fig. 36.)

ESta es otra propiedad insigne de la elipse. De los focos A, y B salen las dos lineas AC, BC, que concurren en el mismo punto C de la periferia eliptica. Digo, que entrambas juntas son iguales al exe mayor DE.

Preparacion. Del centro F tirese la FG, paralela à AC; y por el punto C la tangente ICG.

Demonstr. Por ser FG, AC paralelas, son los angulos FGC, ACI iguales; pero ACI, y BCG son (38.) iguales: luego los angulos HGC, HCG son iguales: luego (6. 1. Eucl.) HG, HC son iguales. Esto supuesto, en el triangulo ACB, por ser la FH paralela à AC, assi como AF es la mitad de AB es (2.6. Eucl.) CH, ò HG, su igual, mitad de CB; y por la misma razon es FH mitad de AC. Siendo pues HG mitad de CB, y HF mitad de AC, serà toda la FG mitad de las lineas AC, CB juntas; pero FG (41.) es igual al semiexe mayor: luego la mitad de las AC, CB es

igual

igual al semiexe mayor: luego todas las AC, CB juntas son iguales à todo el exe mayor DE.

En esta propiedad se fundan los tres modos siguientes de descrivir la elipse.

PROP. XLIII. Problema.

Explicanse otros tres modos de descrivir la elipse.

MOdo 1. (*fig.* 37.) Sea AH el exe mayor de la elipse, y el menor IG, que perpendicularmente se cortan en O. Del punto I, con distancia igual al semiexe OA, señalense los puntos C, y E en el exe AH, y èstos seràn los focos de la elipse. (42.) Tomese un hilo igual à AH, y uno de sus cabos fixese en C, y el otro en E; conque el medio del hilo vendrà à ajustarse al punto I, y formarà el triangulo CIE: pongase en I un lapis, y vayase llevando juntamente con el hilo tirante hasta A, y hasta H, y quedarà formada la mitad de la elipse; y de la misma manera se formarà la otra mitad. Consta de la *prop.* 42. porque siempre seràn los dos segmentos del hilo juntos, iguales à AH; pero porque este modo, aunque es bueno para sobre el terreno, no lo es para sobre el papel, añado los dos siguientes, fundados en la misma propiedad de la elipse.

Modo 2. (*fig.* 38.) Sea AB el exe mayor de la elipse que se quiere descrivir: determinense (37.) los focos C,D: hagase en seguida del exe la BE igual à DB, y serà CE igual al exe AB; y del punto C, con el intervalo CE, hagase un circulo, y tirense qualesquiera radios CF, y juntense las DF, que dividiendolas por medio en G, se levantaràn las perpendiculares GI; y los puntos I formaràn la periferia de la elipse.

Demonstr. En los triangulos IGF, IGD, los lados GF, GD se han hecho iguales; y GI es comun; y los angulos en G rectos iguales: luego (4.1. Eucl.) los lados IF, ID son iguales; y añadiendo el comun CI, serà CID igual à CIF, ò à CE, igual al exe AB: luego (42.) los puntos I, I, &c. estàn en la periferia de la elipse.

Modo 3. Hecha, como antes, la CE igual al exe AB, desde C, como centro, hagase con qualquier intervalo el

ar-

arco K: tomese con el compàs lo que hay desde K hasta E; y con esta distancia, hecho centro en D, hagase el corte L; y el punto L estarà en la periferia de la elipse, y assimismo quantos se hallaren en la forma dicha. La razon es la misma que en los modos antecedentes.

LIBRO II.

DE LA PARABOLA.

DEFINICIONES.

1 P*Arabola, es una figura curvilinea, que procede de una seccion conica paralela al lado del triangulo que passa por el exe*, como en la *fig.* 1. ABC es el triangulo que passa por el exe de la piramide conica, y la seccion DFGOL, que es paralela al lado BC de dicho triangulo, es la *parabola.*

2 *Tangente de una parabola, es la linea recta que toca la periferia de la parabola en un solo punto sin cortarla*, como BK, y RH. (*fig.* 2.)

3 *Lineas ordenadamente aplicadas en la parabola, son las paralelas à la tangente*, como FE, RS, y tambien PQ, NO, &c. (*fig.* 2.) Llamanse especialmente *aplicadas* à aquel diametro que las divide igualmente.

4 *Diametro, es aquella linea recta que parte igualmente todas las paralelas sus aplicadas*, como BD, HI. (*fig.* 2.)

5 *Exe de la parabola, es aquel diametro que es perpendicular à las aplicadas*, como BD; pero HI, aunque es diametro, no es exe.

6 *Vertice de la parabola, es la extremidad del exe, como B. Vertice del diametro, es la extremidad del diametro*, como H. (*fig.* 2.)

5 *Sa-*

7 *Sagita, ò saeta se llama el segmento TB, ò LH del diametro, contenido entre el vertice, y la aplicada.*

8 *Lado recto, ò parametro de un diametro de la parabola, es una tercera proporcional à la sagita, y à la semiaplicada*: como si à la sagita TB, y à la semiordenada TS, se halla una tercera proporcional, èsta serà el parametro del diametro BD; y sirve para medir, y determinar las potencias, ò quadrados de las aplicadas, como se verà despues.

9 *Polo, focus, ò ombligo de la parabola, es un punto de su exe, que dista del vertice la quarta parte del parametro*, como V. Porque en un espejo parabolico, puesto de cara al Sol, se unen, y concurren todos los rayos en el sobredicho punto, de suerte, que alli producen fuego.

10 *Linea perpendicular à la parabola, es la recta, que cortando à la parabola en un punto, es perpendicular à la tangente que passa por dicho punto.*

11 *Parabolas que se tocan, son aquellas à quienes una misma linea recta toca en el punto en que se encuentran.* Esta definicion conviene à toda suerte de figuras curvilineas.

12 *Parabolas iguales, son las que tienen iguales los parametros de sus exes.*

13 *Parabolas paralelas, son dos parabolas iguales puestas una dentro de la otra con un mismo exe.* Estas dos parabolas, si se prolongan hasta el infinito, se vàn continuamente acercando mas, y mas la una à la otra, sin que jamàs se puedan juntar; y por esta causa se llaman propiamente, *parabolas asimptotas*; porque el nombre de *paralelas*, solo les conviene por causa de que todas las lineas rectas tiradas entre estas dos parabolas, paralelas al exe comun, son entre sì iguales.

PROP.

PROP. I. Theorema.

***En la parabola, los quadrados de las aplicadas al exe tienen entre sì la misma razon que las sagitas.* (*fig.* I.)**

SEa ABCG una piramide conica recta, y el triangulo que passa por su exe serà ABC. Tirada la DE, paralela à BC, passe la seccion parabolica DFGE por dicha *linea*, y sea perpendicular al plano del triangulo ABC; y como la basa AGC, tambien sea perpendicular al dicho triangulo, la comun seccion GE, serà perpendicular al plano del mismo triangulo; (19.11.Eucl.) y por consiguiente, la GE serà perpendicular à AC. Hagase la seccion IFK, paralela à la basa circular ACG, que (11.) serà circulo, y la FN, serà paralela à GE, (16.11.Eucl.) y perpendicular à IK, como lo es la GE à la AC; y seràn las GE, FN aplicadas al exe DE. Digo, que el quadrado de NF, al quadrado de EG, es como ND à ED.

Demonstr. Por ser FN perpendicular à IK, diametro del circulo IFK; y la GE perpendicular à AC, diametro del circulo AGC, es (13.6.Euc.) el quadrado de FN, igual al rectangulo INK; y el quadrado de GE, igual al rectangulo AEC: luego el quadrado de FN, al quadrado de GE, es como el rectangulo INK, al rectangulo AEC; y porque siendo paralelas NE, KC, como tambien NK, EC, son estas lineas NK, EC iguales, serà el rectangulo INK, al rectangulo AEC, (1.6.Euc.) como IN à AE, esto es, (2.6.Euc.) como DN à DE: luego el quadrado de FN, al quadrado de EG, es como DN à DE.

COROLARIOS.

I *ESta es la primaria, y essencial propiedad de la parabola, la qual conviene tambien à la seccion parabolica de la piramide escalena, y se convence con la misma demonstracion, como se puede ver en el P. Gregorio à Sancto Vincentio en el escolio à la prop.* I. *del lib.* 5. *porque en la piramide conica escalena, la seccion paralela à la basa tambien es circulo, como consta de la prop.* I. *lib.* I. *Y en caso, que el triangulo por el exe sea el mayor de los que*

por

por dicho exe se pueden formar en esta piramide, las aplicadas son tambien perpendiculares al exe, como demuestra Gregor. à S.Vinc. en los Prologomenos à las Sec. Conic. conque se convence de ellas sin diferencia alguna la propiedad misma con la demonstracion sobredicha; y en los demàs casos, aunque las aplicadas corten al exe, formando angulos obliquos, como sean siempre dichas aplicadas unas secciones comunes del plano parabolico con el circular paralelo à la basa, milita tambien en ellas la misma construccion, y demonstracion puesta arriba. De que se sigue, que en todo caso, si los quadrados de las aplicadas son como las sagitas, los puntos G, F, &c. estàn en la periferia de la parabola.

2 *Siguese tambien de lo dicho, que los quadrados de las aplicadas, que dividen en partes iguales al exe, ò diametro, componen una progression arithmetica; porque en este caso las sagitas, cuya proporcion llevan los quadrados de las aplicadas, proceden en progression arithmetica.*

3 *El diametro DE de la parabola, parte por medio la aplicada FL, porque siendo FILK circulo, su diametro IK, parte à la cuerda FL su perpendicular por medio, (3.3.Euc.) y assimismo à las demàs aplicadas paralelas à FL.*

4 *Siguese tambien, que si en la parabola un diametro corta à una linea recta por medio, cortarà tambien por medio todas las paralelas à la sobredicha linea; porque la misma demonstracion que en el num. 3. se ha hecho de la FL, se harà de otra qualquier linea paralela à la GO.*

PROP. II. Theorema.

En la parabola, los quadrados de las aplicadas à qualquier diametro tienen la misma razon que las sagitas. (fig. 2.)

C*Onstruccion, y demonstracion.* Tirada una recta HI, si en qualquier angulo con ella se tiran las rectas LO, MQ, &c. y se hace como la recta HL, à la recta HM, assi el quadrado de LO, al quadrado de MQ, en la forma que se dice en el Escolio siguiente, los puntos O, Q, &c. estaràn en la periferia de la parabola. (*corol.* 1. preced.) Continuense pues las OL, hasta N, y QM, hasta P, de suerte, que LN sea igual à LO, y MP à MQ. Digo, que los puntos N, y y P, tambien estàn en la periferia de la parabola; porque por construc. el quadrado de LO, al quadrado de MQ, es como HL à HM; pero el quadrado de LN, es igual al de LO; y el de MP, al de MQ, por ser dichas lineas iguales: luego el quadrado de LN, al de MP, es como HL à HM: luego los puntos N, y P, tambien estàn en la parabola; y siendo HI diametro, por dividir por medio las paralelas sobredichas, y ser distinto del exe, por cortarlas con angulos obliquos, tendràn en qualquier diametro los quadrados de las aplicadas, la misma razon entre sì, que las sagitas.

ESCOLIO.

Para hacer dos quadrados tales, que el uno al otro tenga la razon de una linea dada à otra, como por exemplo, la razon de la HL à la HM, se hallarà una media proporcional X entre las lineas dadas HL, y HM; y dada, ò escogida la LO, se hallarà una quarta proporcional MQ à las tres HL, X, y LO, y seràn las quatro proporcionales HL, X, LO, MQ; y los quadrados hechos de LO, MQ, tendràn la misma razon que las HL, HM. Demonstr. Los quadrados de HL, y X, tienen la misma razon (22.6.Euc.) *que los quadrados de LO, MQ; pero aquellos tienen la razon de HL à HM:* (*corol. de la prop.* 20. 6. *Euc.*) *luego los quadrados de LO, MQ, tienen la razon de HL à HM.*

PROP. III. Problema.

Dada una linea que corte la parabola en dos puntos, hallar el diametro. (*fig.* 3.)

SEa dada la linea AC: pidese el diametro de la parabola. *Operacion.* Tirese la EF paralela à la dada AC: dividanse entrambas por medio en D, y G: tirese por estos puntos la recta BDG, y serà el diametro que se pide.

Demonstr. Si BG no es diametro, sealo LO, que (*corol.* 4. 1.) cortarà la EF por medio en M; y suponiendose estàr dividida por medio en G, serà GE igual à ME, el todo à su parte, que es imposible: luego BG es el diametro, y no LO.

PROP.

PROP. IV. Problema.

Por un punto dado en la periferia de la parabola, tirar una aplicada al diametro dado. (fig. 4.)

PIdese, que por el punto A, dado en la periferia de la parabola, se tire una aplicada al diametro dado BD.

Operacion. Tirese de A por B la recta ABF, y hagase la BF igual à AB. Desde F, tirese la FC paralela à BD, que cortarà la parabola en C: tirese AC, y èsta serà la aplicada. La razon es, porque siendo BE, FC paralelas, es (2. 6. Eucl.) AE à EC, como AB à BF; y siendo èstas iguales, tambien lo han de ser aquellas.

COROLARIO.

DE *aqui se infiere el modo de tirar la aplicada por un punto dado en el diametro, tirando primero qualquiera aplicada del modo sobredicho, y tirando despues una paralela por el punto dado en el diametro.*

PROP. V. Problema.

Aplicar una linea dada al diametro de una parabola. (fig. 5.)

PIdese, que al diametro GI de la parabola se aplique la recta dada F.

Operacion. Tomese en el perimetro qualquiera punto L; y por la antecedente tirese la aplicada LH: hagase despues como el quadrado de LH, al quadrado de F; esto es, como LH, à la tercera proporcional de LH, y F: assi GH, à GI, y se tendrà el punto I. Tirese por I la IM paralela à LH, y èsta serà igual à F.

Demonstr. El quadrado de HL al quadrado de IM, es (1.) como GH à GI; y siendo por construccion el quadrado de HL, al quadrado de F, tambien como GH à GI, seràn IM, y F iguales.

PROP.

PROP. VI. Problema.

Hallar el parametro, ò lado recto de qualquier diametro de la parabola (*fig.* 6.)

SEa GI el diametro dado de la parabola: pidese su parametro. *Operacion.* Tirese qualquiera ordenada HL, (4.) y hallese una tercera proporcional à las GH, HL, *que* serà GN; y èsta serà el parametro que se pide, segun la *defin.* 8. otros modos se veràn en los corolarios de las *propos.* 8. y 9.

PROP. VII. Theorema.

Los quadrados de las aplicadas son iguales al rectangulo hecho del parametro, y las sagitas. (*fig.* 6.)

ESto es propio de la parabola, como en otra parte dixe, y se demuestra en la forma siguiente.

Demonstr. Tirese otra aplicada IM, paralela à HL, y (1.) serà como GH à GI; assi el quadrado de HL, al quadrado de IM: y siendo tambien como GH à GI, assi el rectangulo NGH, al rectangulo NGI, (1. 6. Eucl.) tomando la GN, por altura comun: luego el quadrado de HL, al quadrado de IM, es como el rectangulo NGH, al rectangulo NGI; y permutando, el quadrado de HL, al rectangulo NGH, es como el quadrado de IM, al rectangulo NGI; pero el rectangulo NGH es igual al quadrado de HL, por ser HL, por construccion, media proporcional entre MG, GN: luego tambien el quadrado de IM, es igual al rectangulo NGI, hecho del parametro NG, y la sagita GI.

COROLARIOS.

1 *LAs aplicadas mas proximas al vertice de la parabola son menores, porque sus sagitas son menores: luego el rectangulo del parametro, y la sagita es menor en las mas proximas al vertice, que en las mas remotas: luego el quadrado de aquellas es menor que el de èstas: luego las aplicadas mas proximas al vertice son menores.*

2 Si

2 *Si la sagita es igual al parametro, tambien lo serà la ordenada; como si la sagita GI, es igual al parametro GN, tambien lo serà la ordenada IM. La razon es, porque el quadrado de IM, es igual al rectangulo NGI; y suponiendo ser NG, GI iguales, serà quadrado: luego el quadrado de GN, serà igual al quadrado de IM; conque las tres lineas NG, GI, IM, seràn iguales.*

3 *Qualquiera linea paralela al diametro, como LK, corta à la periferia de la parabola en un punto; porque las ordenadas sobre la LH, son menores, y las de debaxo son mayores que LH: luego la LK corta à la parabola en un punto.*

PROP. VIII. Theorema.

Si de la extremidad del diametro se tira una paralela NM (fig. 7.) à las aplicadas, y el angulo NMP se parte por medio con la linea MO; y desde O se tira la aplicada OP, serà la sagita MP, igual al parametro.

D*emonstr.* Por ser NM, OP paralelas, serà el angulo NMO igual à MOP; (29. 1. Eucl.) pero el angulo OMP es igual por construccion al angulo MNO: luego (6. 1. Eucl.) PM, PO, son iguales; y (7.) PM igual al parametro, como tambien OP.

COROLARIO.

D*E aqui se colige otro modo de hallar el parametro. Tirese de la extremidad del diametro una paralela NM à las aplicadas, y partase por medio el angulo NMP, con la NO; y del punto O, tirese la aplicada OP, y la MP serà igual al parametro.*

PROP. IX. Theorema.

Si de la extremidaad del exe MN, (fig. 8.) se tira la MO, y del punto O, en que corta la parabola, se tira la aplicada OP, y la ON perpendicular à MO, serà PN igual al parametro.

D*emonstr.* Por ser MON triangulo rectangulo en O, y ser OP perpendicular à MN, es OP media proporcional entre MP, PN: (13.6.Eucl.) son pues proporcionanales MP, OP, PN: luego (*defin.* 8.) PN es igual al parametro.

COROLARIO.

Coligese de aqui otro modo de hallar el parametro. Dividase el exe MN en dos partes iguales; y haciendo centro en el punto de la division, hagase un semicirculo, que cortarà la parabola en un punto O; y tirando la perpendicular OP, serà PN el parametro, que siempre serà el mismo, aunque se tome la MN, mayor, ò menor.

PROP. X. Theorema.

Si por la extremidad del diametro se tira una linea paralela à las aplicadas, serà tangente: y al contrario, la que dentro de la parabola es paralela à la tangente, es aplicada al diametro que desciende del punto del contacto. (fig. 9.)

EN la parabola NMP, sea el diametro MO, y su aplicada NP; y sea RM paralela à NP. Digo, que es tangente; y si no lo es, supongamos corte à la parabola en algun punto, como Q: dividase la MQ por medio en S, y tirese la SO.

Demonstr. Por suponerse MQ paralela à NP, y estàr ambas partidas por medio con la recta OS, serà OS diametro, cuya aplicada serà la NP; pero esta misma NP se supone ser aplicada al diametro MO: luego serà aplicada à dos diametros, lo que es imposible; porque si esso fuesse, las paralelas à la NP, serian divididas por los dos diametros OS, OM, por medio en dos diferentes puntos: luego la MR no puede cortar la parabola: luego es tangente.

Digo tambien, que siendo la MR tangente, qualquièr paralela suya, como la NP, serà aplicada al diametro MO, que desciende del punto del contacto M; porque si no lo es, supongamos lo sea NL: luego NL serà paralela à RM; y como la NP, se suponga tambien ser paralela à la RM, seràn NP, y NL paralelas, lo que no es possible por quanto concurren en N: luego la NL no es aplicada al diametro MO, sino la NP.

CO-

COROLARIO.

QValquiera recta que estando dentro de la parabola, fuere paralela, ò à la tangente, ò à las ordenadas, queda dividida por medio con el diametro, que baxa del punto del contacto, y corta la periferia en dos puntos.

PROP. XI. Theorema.

La linea, que saliendo de la periferia de la parabola, corta en el diametro prolongado un segmento igual à la sagita, es tangente. (*fig.* 10.)

DEl punto T, de la periferia de la parabola, sale la recta TR, y la aplicada TH; y las RS, SH son iguales. Digo, que la TR toca à la parabola en el punto T; de suerte, que qualquier otro punto P, ò G, cae fuera de la parabola: de P, y G, salgan las PQ, GI paralelas à TH.

Demonstr. Por ser las lineas TH, PQ, HR, QR, (2. 6. Eucl.) proporcionales, lo son tambien (22. 6. Eucl.) sus quadrados: luego el quadrado de TH, al quadrado de PQ, es como el quadrado de HR, al quadrado de QR; como el quadrado de HS, quarta parte del quadrado de HR, à la quarta parte del quadrado de QR, que es el quadrado hecho de la mitad de QR; pero el rectangulo QSR, (5. 2. Eucl.) es menor que la quarta parte del quadrado de QR, ò que el quadrado de la mitad de QR: luego mayor razon tiene el quadrado de HS, al rectangulo QSR, que el quadrado de TH, al quadrado de PQ; pero el quadrado de HS, al rectangulo QSR, tiene la razon de HS à QS, por tener la misma altura SR: luego mayor razon tiene HS à QS, que el quadrado de TH, al quadrado PQ; pero como HS à QS, assi (1.) el quadrado de TH, al quadrado de la aplicada VQ: luego el quadrado de TH, tiene mayor razon al quadrado de VQ, que al quadrado de PQ: luego VQ, es menor que PQ: luego el punto P, de la linea RT, cae fuera de la parabola. Lo mismo demonstrarè del punto G, y de otro qualquiera distinto de T: luego la linea RP es tangente.

CO-

COROLARIOS.

1 *LA tangente toca à la parabola en un solo punto, porque todos los demàs caen fuera.*

2 *Si por S, se tirà la tangente MS, serà èsta la mitad de la ordenada TH, por ser (2. 6. Euc.) como RS à RH, assi MS à TH; y siendo RS mitad de RH, serà MS mitad de TH, y por consiguiente el quadrado de MS, es la quarta parte del quadrado de TH; y siendo el rectangulo de HS, y el parametro igual al quadrado de TH, (7.) serà el quadrado de MS, la quarta parte de dicho rectangulo. Tambien la tangente RT, està dividida por medio en M.*

PROP. XII. Theorema.

La tangente de la parabola corta en el diametro una linea igual à la sagita. (fig. 10.)

DIgo, que la tangente RT, corta la SR, igual à SH; porque si dichas lineas no son iguales, seanlo SR, SQ, y tirese la aplicada VQ: y segun esto, si se tirasse la VR, seria tangente; (11.) y por consiguiente tocaria la parabola en solo el punto V: (*corol.* 1. preced.) luego si se prosiguiesse, correria por fuera de la parabola; y por consiguiente, cortaria à la tangente RT, y dos lineas rectas se cortarian en dos puntos, y encerrarian espacio, lo que es impossible: esto mismo se sigue, si se conceden ser iguales RS, SI: luego SR, y SH son iguales.

COROLARIO.

DEl mismo punto R, no pueden salir dos tangentes à una misma parte de la parabola, porque se seguiria el sobredicho inconveniente.

PROP. XIII. Theorema.

Si de qualquier punto de la parabola se tira una paralela à la tangente, y otra à la ordenada que sale del punto del contacto, se formarà un triangulo igual al rectangulo hecho de la aplicada, y sagita. (fig. 11.)

LA RP toca la parabola en P, de donde sale la aplicada PV; y del punto Z, salen ZI, ZQ, paralelas à la tangengente, y à la aplicada. Digo, que el triangulo ZIQ, es igual al rectangulo QT, hecho de la sagita QS, y de ST, ù de la aplicada VP su igual.

Demonstr. Por ser (12.) RS, SV iguales, es RV doblada de SV: luego (41.1.Euc.) el triangulo RPV, es igual al rectangulo VT. Tambien (1.) el quadrado de PV, al quadrado de ZQ, es como VS à QS, esto es, (1.6.Euc.) como el rectangulo VT, al rectangulo QT; pero como el quadrado de PV, al quadrado de ZQ, assi es el triangulo RPV, al triangulo semejante IZQ: luego el rectangulo VT, al rectangulo QT, es como el triangulo RPV, al triangulo IZQ: y alternando, el rectangulo VT, al triangulo RPV, es como el rectangulo QT, al triangulo IZQ; y siendo el primero igual al segundo, serà el tercero igual al quarto.

PROP. XIV. Theorema.

En la parabola, qualquier linea paralela al diametro, es diametro; y parte por medio las paralelas à la tangente, que toca à la parabola en la extremidad de dicho diametro. (*fig.* 12.)

SEa la linea CM paralela al diametro BD de la parabola. Digo, que CM es diametro; esto es, que corta por medio todas las lineas paralelas à la tangente CA; como por exemplo à la paralela LF.

Demonstr. El triangulo EFG, es igual al rectangulo GH. (13.) Tambien el quadrado de LD, al quadrado de FG, (1.) es como DB à GB; esto es, como el rectangulo DH al rectangulo GH; pero como el quadrado de LD, al quadrado de FG, assi es el triangulo LED, al triangulo EFG, (22.6. Euc.) por ser figuras semejantes: luego el triangulo LED, al triangulo EFG, es como el rectangulo DH, al rectangulo GH; y siendo el segundo igual al quarto, serà el primero igual al tercero: conque el triangulo LED, es igual al rectangulo DH; y quitandole à aquel el triangulo EFG, y à èste el rectangulo GH, que son iguales, quedaràn el trapecio GFLD, y el rectangulo DK iguales; y quitando el trapecio comun GFNMD, restaràn los triangulos LNM, KNF iguales; y siendo semejantes, seràn los lados del uno iguales à los del otro: luego LN, es igual à NF; y por consiguiente CM es diametro, porque de la misma suerte se convenceria lo sobredicho de otra qualquier paralela à la tangente CA.

PROP. XV. Theorema.

En la parabola todos los diametros son paralelos al exe. (*fig.* 12.)

EN la misma construccion, digo, que qualquiera diametro, como por exemplo CM, es paralelo al exe BD; porque si no lo fuera, se podria tirar del punto C una paralela al exe BD; èsta por la antecedente serìa diametro, por ser paralela al exe, que es diametro: luego cortaria por medio la aplicada LF en otro punto distinto de N, en que la parte el diametro CM, lo que es imposible: luego tambien lo es el diametro que no sea paralelo al exe.

PROP. XVI. Theorema.

La aplicada al exe es menor que la aplicada à otro qualquier diametro, si entrambas se aplican en igual distancia del vertice. (*fig.* 13.)

SEa SQ el exe de la parabola: digo, que si en el exe se corta una sagita, y en otro qualquier diametro se corta otra igual, y por estos puntos se tiran las aplicadas, la aplicada al exe serà menor.

Preparacion. Supongamos que un diametro ha de passar por el punto R; tirese la RP aplicada al exe; hagase SQ, quadrupla de SP; y tirese la VQ paralela à RP: dividase èsta por medio en T, y juntando la RT, tirese la VS.

Demonstr. La SQ es por construccion quadrupla de SP: luego (1.) el quadrado de VQ, es quadruplo del quadrado de RP; pero el mismo quadrado de VQ es tambien quadruplo del quadrado de TQ: luego los quadrados de TQ, y RP son iguales: luego las rectas TQ, RP son iguales; y como sean paralelas, seràn (33.1.Euc.) las RT, PQ paralelas: luego (14.) la RT es diametro; y en el triangulo

VTZ,

VTZ, el lado VZ, opuesto al angulo recto T, es mayor (19.1.Eucl.) que la VT; esto es, que la TQ, ò RP.

Pruebo aora, que las sagitas RZ, SP son iguales; porque siendo SQ 4. serà ZT 2. por ser (4.6.Eucl.) SQ à ZT, como VQ à VT. Tambien siendo SQ 4. es por construccion la PQ, ò RT 3. luego quitando de la SQ 4. la PQ 3. y de la RT 3. quitando la ZT 2. quedaràn tanto la SP, como la RZ 1. luego son iguales; y como los quadrados de las aplicadas al mismo diametro sean en todo caso como las sagitas, siempre los quadrados de las aplicadas al exe en igualdad de sagitas, seràn menores que las aplicadas à los demàs diametros.

PROP. XVII. Theorema.

El parametro del exe es menor que el de los otros diametros. (*fig.* 13.)

DIgo, que el parametro del exe SQ, es menor que el de otro qualquiera diametro RT. Suponganse iguales las sagitas SP, RZ, y tiradas las aplicadas RP, VZ.

Demonstr. El quadrado de RP (7.) es igual al rectangulo hecho de la sagita PS, y el parametro del exe SQ: assimismo el quadrado de VZ, es igual al rectangulo hecho de ZR, y el parametro del diametro RT; pero el quadrado de VZ, es mayor que el quadrado de RP: (16.) luego el rectangulo de RZ, y el parametro del diametro, es mayor que el rectangulo de SP, y el parametro del exe; y siendo SP, RZ iguales, serà (1. 6. Eucl.) el parametro de RT mayor que el parametro del exe.

PROP. XVIII. Theorema.

Si dos lineas cortan la parabola, cada una en dos puntos, de tal suerte, que los de la una seccion estèn fuera de los de la otra, concurriràn en un punto fuera de la parabola. (*fig.* 14.)

LAs rectas AB, CD cortan la parabola cada una en dos puntos, los de la una fuera de los de la otra. Digo, que

que concurren en un punto fuera de la parabola. Tirense por B, y D los diametros EF, GH, que (14.) seràn paralelos; y juntese la recta BD.

Demonstr. Los angulos EBD, GDB son (27.1. Euclid.) iguales à dos rectos: luego los angulos IBD, KDB son menores que dos rectos: luego las lineas AB, CD concurren en un punto.

PROP. XIX. Problema.

Hallar el exe de una parabola. (*fig.* 15.)

HAllese (3.) qualquiera diametro AB. Tirese la CD perpendicular à AB; partase esta por medio en F, y tirando la FE paralela à AB, serà esta el exe que se busca. Consta de la *prop.* 15.

PROP. XX. Problema.

De un punto dado dentro, ò fuera de la parabola, tirar un diametro. (*fig.* 15.)

SEa dado el punto A en la periferia de la parabola, de el qual se ha de tirar un diametro.

Operacion. Tirese (3.) qualquier diametro EF, y por el punto A hagase la paralela AB, y este (14.) serà diametro; de la misma suerte se tiraria del punto G dado fuera de la parabola.

PROP. XXI. Problema.

Por un punto dado dentro, ò fuera de la parabola, tirar una tangente. (*fig.* 16.)

1 SEa dado el punto A en la periferia de la parabola, por el qual se ha de tirar una tangente. *Modo* 1. Tirese (20.) por A el diametro AC, y hagase (4.) qualquier aplicada BCD à dicho diametro: tirese de A la AE paralela à BD, y esta serà (10.) la tangente que se pide. *Modo* 2. Tirese qualquier diametro EF, y del punto A hagase la aplicada AF à dicho diametro: cortese DE igual à DF, y la recta AE serà tangente. (11.)

2. Sea

2 Sea dado el punto E fuera de la parabola, y por èl se ha de tirar una tangente. *Operacion.* Tirese por E (20.) qualquiera diametro EF; cortese FD igual à DE, y por F tirese la aplicada FA,(corol. *prop.* 4.) y la EA serà la tangente, como consta tambien de la *prop.* 11.

PROP. XXII. Problema.

Tirar una tangente, que forme con el exe un angulo determinado. (fig. 17.)

Pidese, que se tire una tangente à la parabola, que forme con el exe AB un angulo igual al angulo F.

Operacion. De qualquier punto E tirese la EG perpendicular à FG. Partase la FG por medio en H, y tirese EH: hagase el angulo DAC igual al angulo FHE: tirese la CB perpendicular à DB, y haganse AD, AB iguales. Tirese la linea DC, y esta serà la tangente; y el angulo D, serà igual al angulo F.

Demonstr. Los triangulos HEG, ACB son equiangulos por construccion: luego (4.6.Euc.) serà EG à GH, como CB à BA; y por consiguiente, EG à GF, dupla de GH, es como CB à BD, dupla de BA: luego (6.6. Euc.) los triangulos EFG, CDB son equiangulos, y los angulos D, y F iguales: y como las DA, AB sean iguales, serà (11.) la DC tangente.

Si en lugar del exe se propusiera otro diametro, se tiraria qualquiera aplicada IK, y formando el angulo G igual al angulo K, se obraria como antes.

PROP. XXIII. Theorema.

Las tangentes tiradas por las extremidades de qualquier aplicada concurren en un mismo punto del diametro. (fig. 18.)

Digo, que las tangentes AD, BD, tiradas por las extremidades de la aplicada AB, concurren en el mismo punto D del diametro DF.

Demonstr. Por ser AD tangente, corta en él diametro

la

la ED igual à EF; (12.) y assimismo la tangente BD: luego concurren en el mismo punto D.

PROP. XXIV. Theorema.

Si la linea que sale del punto en que dos tangentes concurren, divide por medio à la recta, que junta los puntos del contacto, serà diametro. (fig. 18.)

LAs dos tangentes AD, BD, concurren en el mismo punto D, y la DF divide por medio à la AB, que junta los contactos. Digo, que esta linea es diametro; porque si no lo es, supongamos lo sea GF; conque la AB serà su aplicada, por estàr dividida por medio en F; y siendo la AG tangente, como se supone, seràn GH, HF iguales: (12.) luego (11.) si se tirasse la GB, serìa tangente, y (*corol. prop.* 12.) la DB no lo serìa, contra lo supuesto: luego la DF es diametro.

PROP. XXV. Theorema.

El diametro que sale del concurso de dos tangentes, divide por medio la recta, que junta los puntos del contacto. (fig. 18.)

DEl punto D en que concurren dos tangentes, sale el diametro DF. Digo, que parte por medio en F à la recta AB, que passa por los contactos: si el punto F no la divide por medio, supongamos lo haga el punto K; y tirese la DK.

Demonstr. Si DK parte por medio la AB, serà (24.) diametro: luego (15.) es paralela al diametro DF, lo que es impossible, por concurrir entrambas lineas en el punto D: luego el punto K no divide por medio la AB; y assi de los demàs distintos de F: luego la DF la divide por medio.

PROP. XXVI. Theorema.

Si el parametro se toma en el exe prolongado, qualquier cuerda tirada por el vertice, es media proporcional entre la sagita, y la compuesta de la sagita, y parametro. (fig. 19.)

SEa la AB igual al parametro; y del vertice del exe salga qualquiera cuerda BC, y tirese la ordenada CD.

CD. Digo, que la CB, es media proporcional entre AD, y DB, esto es, que el quadrado de BC, es igual al rectangulo ADB.

Demonstr. El quadrado de BC, (47.1.Euc.) es igual à los quadrados de DB, DC: en lugar del quadrado de DC, substituyase el rectangulo DBA, que (7.) es su igual, y serà el quadrado de BC, igual al quadrado de DB, y al rectangulo DBA; pero èstos dos juntos hacen el rectangulo ADB: (3.2. Eucl.) luego el quadrado de BC, es igual al rectangulo ADB. Este Theorema puede servir para la descripcion de la parabola.

PROP. XXVII. Theorema.

Si de las extremidades de qualquier linea que corta al diametro, se tiran las aplicadas, quedarà el diametro dividido en tres continuas proporcionales; y las aplicadas seràn continuas proporcionales. (fig. 20.)

LA recta NM, corta al diametro en qualquier punto C; y por los puntos N, y M, se tiran las aplicadas NO, ML. Digo lo primero, que las lineas FO, FC, FL., son continuas proporcionales.

Demonstr. La FL à FO, tiene la misma razon que el quadrado de LM, al quadrado de NO: (1.) luego tienen entre sì razon duplicada de LM à NO, ù de CL à CO, que (4.6. Euc.) es la misma; pero esto mismo se sigue suponiendo sean FL, FC, FO proporcionales: luego lo son en realidad. Que se sig: lo sobredicho, se prueba; porque siendolo, si de toda la FL se quita FC, y de toda FC se quita FO, serà toda FL, al segmento quitado FC, como toda FC, al segmento quitado FO: luego el residuo CL, al residuo CO, serà tambien como toda FL à toda FC; y como FL à FO, tenga en esta suposicion razon duplicada de FL à FC, tendrà tambien FL à FO, razon duplicada de CL à CO: luego son proporcionales FO, FC, FL. *Esto puede servir para hallar el punto M, en que la NC, corta la parabola.*

2 Digo, que HL, GC, NO, son continuas proporcionales; porque las cantidades que tienen razon subduplica-

da

da de continuas proporcionales, ſon continuas proporcionales; pero las lineas ſobredichas tienen (1.) razon ſubduplicada de las ſagitas, que como ſe ha demonſtrado ſon proporcionales: luego ſon continuas proporcionales.

PROP. XXVIII. Problema.

Hallar el focus de una parabola. (*fig.* 21.)

Modo 1. Halleſe el parametro propio del exe de *la* parabola: (6.) tomeſe ſu quarta parte, y paſſeſe del vertice de la parabola ſobre el exe; y eſte punto ſerà el focus, ſegun la definicion 9. La razon porque eſte punto ſe llama focus, es por venir à parar en èl todos los rayos reflexos en un eſpejo parabolico pueſto al Sol, como ſe demonſtrarà en la propoſ. ſiguiente.

Modo 2. ſin hallar el parametro. Sea en la *fig.* 21. ON el exe de la parabola, y OM tangente: tireſe del punto M la aplicada MH; y la MN perpendicular à OM, que cortarà el exe en N: dividaſe ON por medio en F, y eſte punto ſerà el focus que ſe pide.

Demonſtr. Por ſer el angulo OMN recto, es MH media proporcional entre OH,HN: (13.6.Euc.) luego ſu quadrado es igual al rectangulo OHN; pero el miſmo quadrado de MH, es tambien igual al rectangulo hecho de LH, y el parametro: (7.) luego el rectangulo OHN, es igual al rectangulo de LH, y el parametro: luego tienen los lados reciprocos, (14.6.Euc.) como OH à LH, aſsi el parametro à HN; pero OH (12.) es dupla de LH: luego el parametro es duplo de HN. Tambien por eſtàr la ON partida por medio en F, y la OH partida por medio en L, (12.) la miſma razon tendrà la ON à la OF, que la quitada OH, à la quitada OL: luego el reſiduo HN, al reſiduo LF, tendrà la razon miſma que ON à OF: luego HN, es dupla de LF. Siendo pues HN la mitad del parametro, ſerà la LF la quarta parte: luego F es el *focus.*

Modo 3. Hagaſe el angulo OMF, igual al angulo MOF. Digo, que el punto F ſerà el *focus.* Tireſe la MN perpendicular à MO.

De-

Demonstr. Por ser los angulos OMF, y O iguales, son (6.1.Euc.) las FM, FO iguales: luego si desde F con la distancia FM, se hace un semicirculo, passarà por O; y siendo el angulo OMN recto, passarà tambien dicho circulo por N; (31.3.Euc.) luego la ON queda dividida por medio en F: luego F es el *focus*, por la razon arriba dicha.

COROLARIOS.

1 *SI del focus se tira una linea al punto M del contacto, serà el angulo FMO, igual al angulo O; y las FM, FO iguales.*

2. *Si del focus F se descrive un circulo con qualquier intervalo, que corte el exe prolongado, y la parabola, como en O, y M, la recta OM, serà tangente.*

3 *Si las lineas FM, FO son iguales, el punto serà el focus.*

4 *Si del focus F se tira la FI perpendicular à la tangente, quedarà èsta dividida por medio en I, por ser el triangulo OFM isoceles.* (*corol.* 2.5.1.Euc.)

PROP. XXIX. Theorema.

Todos los rayos de luz paralelos al exe de la parabola, que inciden en su concava superficie, juntan sus reflexiones en el focus. (*fig.* 22.)

ESta es la mas celebre, è insigne propiedad de la parabola, de que hablarèmos otra vez en la Catoptrica. Supongo un cuerpo opaco concavo, y parabolico, muy terso, y bruñido, para que como espejo pueda recibir, y reflecter la luz. Digo, que todos los rayos que incidieren en su superficie concava, y fueren paralelos al exe, como son sensiblemente los del Sol, arrojaràn su reflexion en el *focus*. Para la demonstracion supongo dos Theoremas catoptricos. El primero, que la luz hace siempre el angulo de la reflexion igual al angulo de la incidencia; esto es, que la linea por donde camina la luz, quando reflecte, forma con el cuerpo reflectente angulo igual al que forma alli la linea por donde incidiò. El segundo, que estos angulos en las superficies curvas, se han de considerar respecto de las tangentes.

Sea

Sea pues OH el exe de la parabola: sea ON qualquiera tangente, que toca à la parabola en M: sea un rayo incidente LM paralelo al exe OH. Digo, que este rayo harà su reflexion al *focus* F.

Demonstr. Por ser LM, HO paralelas, la NO forma con ellas iguales angulos: luego el angulo NML, es igual al angulo O; pero el angulo OMF, es tambien (corol. de la anteced.) igual al angulo O: luego los angulos NML, y OMF son iguales: luego viene la reflexion al *focus* F. Lo mismo demonstrarè de todos los demàs rayos de luz paralelos al exe: luego todos concurren, y se unen en el *focus* F; y esta es la causa de encenderse fuego en F, de que tomò el nombre de *focus*; y como èste sea un solo punto, el calor que alli producen los rayos del Sol es intensissimo, por lo qual el espejo parabolico se juzga el mas poderoso de los espejos *causticos*, como se verà en su lugar.

PROP. XXX. Theorema.

Si en el exe prolongado ON (fig. 23.) se toma la LM igual à LF, distancia del focus al vertice, y se tira la perpendicular MG, todas las paralelas al exe terminadas en la perpendicular sobredicha, y la parabola, como la GI, son iguales à la distancia entre el focus, y el punto en que cortan la parabola.

Digo, que la IG, es igual à la IF, distancia entre el *focus*, y el punto I.

Demonstr. Las LN, LO son iguales; (12.) y añadiendoles las iguales LF, LM, seràn MN, ò GI, y FO iguales; y siendo (*corol.* 1. 28.) las FO, FI iguales, seràn IG, IF iguales: asimismo probarè ser iguales PN, PF. Este Theorema puede aprovechar para la descripcion de la parabola.

PROP. XXXI. Theorema.

El diametro à quien se ha aplicado una ordenada, es mayor que otro qualquiera diametro terminado en la misma ordenada. (*fig.* 24.)

Sea NO un diametro, y su aplicada SOT: sea otro diametro RQ, terminado en la misma aplicada. Digo, que

que NO es mayor que RQ. Tirese por N, la ML paralela à la aplicada ST, y serà (10.) tangente; y por consiguiente caerà fuera de la parabola: luego la recta QR, no llegarà à dicha paralela: luego es menor que NO.

COROLARIOS.

1 *EL triangulo SNT, es el mayor de quantos se puedan inscrivir en la parabola; porque si de los puntos R, y N, se tiran las RI, NP, perpendiculares à ST, resultaràn los triangulos semejantes QRI, ONP; y siendo RQ menor que NO, tambien RI, altura de SRT, serà menor que NP, altura de SNT: luego el triangulo SNT, es mayor que SRT, por tener mayor altura, è igual basa. (1. 6. Eucl.)*

2 *El triangulo SNT es mayor que la mitad de la parabola; porque ès la mitad del paralelogramo SL, mayor que la parabola.*

PROP. XXXII. Theorema.

Qualquiera triangulo maximo inscrito en la parabola, es quadruplo del agregado de los dos triangulos maximos inscritos en los segmentos. (fig. 25.)

SEa el triangulo maximo ABC inscrito en la parabola: inscrivanse en los segmentos residuos los triangulos maximos AEB, BDC, lo qual se hace, partiendo por medio los lados AB, BC, en F, y G; y tirando por estos puntos los diametros EF, DG, que cortaràn la parabola en E, y D, como se infiere de la prop. passada. Digo, que el triangulo ABC, es quadruplo de los triangulos AEB, BDC juntos: tirese por B, la BI paralela à AH, hasta que concurra con el diametro FE, alargado en I: tirese tambien por E, la tangente EK, y la aplicada EL.

Demonstr. La tangente EK, es (10.) paralela à la ordenada AB; assimismo los diametros EF, KH, son paralelos: (15.) luego FK es paralelogramo, y las lineas EF, KB, son iguales; y siendo (12.) KB, BL, ò EI iguales, seràn EI, EF iguales: luego el triangulo IBF, tiene doblada basa, que el triangulo EBF: luego aquèl es duplo de èste; pero el triangulo AEB, tiene su basa AB, dupla de FB, basa del

trian-

triangulo EBF: luego como entrambos tengan una misma altura, serà tambien AEB, duplo de EBF: luego los triangulos IBF, AEB, son iguales; el triangulo IBF es igual à triangulo FBM: (34.1.Eucl.) luego AEB es igual à FBM; pero el triangulo ABH, es quadruplo del triangulo FBM, por ser semejantes, y tener el lado AB, duplo de FB: (19.6. Eucl.) luego el triangulo ABH, es quadruplo del triangulo AEB; assimismo se prueba ser HBC quadruplo de BDC: luego todo ABC, es quadruplo de AEB, BDC juntos.

De este mismo modo se demonstrarà, que el triangulo AEB, es quadruplo de los dos triangulos maximos hechos en los segmentos AE, EB; y assi infinitamente.

LEMA.

Si hay una serie infinita de cantidades decrescentes en razon quadrupla, el agregado de todas al primer termino es como 4. à 3. (fig. 26.)

SEa la cantidad MS, quadrupla de OS; y la OS, quadrupla de QS, y èsta quadrupla de RS; y assi infinitamente. Digo, que el agregado de todas estas cantidades infinitas tiene con la MS la razon de 4. à 3.

Demonstr. Por ser MS, quadrupla de OS, es la OS una quarta parte de MS, y la MO es 3. luego la MS à MO, es como 4. à 3. Assimismo, y por la misma razon, es OS à OQ, como 4. à 3. y QS à QR, como 4. à 3. y assi infinitamente: luego las MS, OS, QS, RS, &c. juntas, à MO, OQ, QR, juntas hasta el infinito; esto es, todos los antecedentes, à todos los infinitos consequentes, que componen la MS, son como 4. à 3.

PROP. XXXIII. Theorema.

La parabola es sesquitercia del triangulo maximo inscrito.

DEmonstr. El triangulo maximo inscrito en la parabola es (32.) quadruplo de los triangulos maximos inscriptibles en los segmentos, y estos triangulos son tambien

bien

bien quadruplos de los inscriptibles en los otros segmentos; y assi infinitamente, hasta venir à degenerar en la parabola: luego (*Lema preced.*) la parabola, que es el agregado de todos los dichos triangulos infinitos decrescentes en razon quadrupla, es sesquitercia del triangulo maximo inscrito, que es el primer termino.

COROLARIO.

LAs parabolas terminadas tienen entre sì la misma razon que los triangulos maximos inscritos.

PROP. XXXIV. Problema.

Quadrar una parabola terminada. (*fig.* 27.)

PIdese, que se haga un quadrado igual à la parabola AFBGC terminada en la recta AC.

Operacion. Prolonguese la AC, haciendo CD un tercio de AC, y juntese la BD. Este triangulo ABD, serà igual à la parabola: reduzgase este triangulo à quadrado por la *prop. 6. lib. 6. de la Geom. Pract.* y este quadrado serà igual à la parabola.

Demonstr. La parabola AFGC, al triangulo ABC, tiene la razon de 4. à 3. pero el triangulo ABD, al mismo triangulo ABC, tiene tambien la razon de la basa AD 4. à la basa AC 3. por tener entrambos una misma altura: luego la misma razon tiene el triangulo ABD, al inscrito ABC, que la parabola: luego el triangulo ABD, y la parabola son iguales; y por consiguiente, el quadrado igual al triangulo ABD, serà igual à la parabola.

COROLARIO.

DE aqui se colige, que el triangulo CBD, es igual à los dos segmentos parabolicos F, y G.

PROP.

PROP. XXXV. Theorema.

En la parabola, el triangulo mixtilineo PENM, (fig. 26.) es dupl. del segmento parabolico convexo PENP.

TIrese la ordenada PO. *Demonstr.* (33.) La semiparabola PENO, al triangulo PNO, es como 4. à 3. luego este triangulo al segmento PENP, es como 3. à 1. pero el triangulo PNO, es igual al triangulo PMN, por tener iguales basas ON, NM, (12.) y una misma cuspide P: luego el triangulo PMN, es tambien al segmento PENP, como 3. à 1. conque PMN es 3. y el segmento sobredicho es 1. luego quitando este segmento del dicho triangulo, quedarà el triangulo mixtilineo PENM 2. y el segmento serà 1. luego aquèl es duplo de èste.

PROP. XXXVI. Problema.

Dado el diametro, y parametro de la parabola, y el angulo de las aplicadas con el diametro, descrivir la parabola. (fig. 28.)

SEa dada la recta AC, para diametro de la parabola; y sea AE igual al parametro; y sea BAC el angulo que han de hacer las aplicadas con el diametro. Pidese se descriva la parabola.

Operacion. Dividase la AB, en qualesquiera partes iguales, ò desiguales en los puntos B, B, &c. Hallese la BD, tercera proporcional à las EA, AB: hagase lo mismo en todas las distancias AB; y las terceras proporcionales halladas ponganse paralelas à la AC, y los puntos D, D, &c. formaràn la periferia de la parabola.

Demonstr. De los puntos D, tirense las DC, paralelas à BA. Por la construccion, las rectas EA, AB, BD, son continuas proporcionales: luego siendo AC, igual à BD, seràn EA, AB, AC, continuas proporcionales; y el rectangulo EAC, del parametro, y la sagita, serà igual al quadrado de la aplicada CD: luego (7.) los puntos D, D, forman la parabola.

PROP.

PROP. XXXVII. Problema.

Descrivir de otro modo la parabola. (*fig.* 29.)

OPeracion. Hagase el paralelogramo ABCD, ajustado al angulo que han de formar las aplicadas con el diametro BC. Dividase èste en qualesquiera partes iguales, ò desiguales en E, E, &c. y tirense las EF, paralelas à la BA. Tirese tambien la diagonal BD, que cortarà las paralelas en los puntos G, G, &c. Hallese una media proporcional HE, entre las FE, GE, y los puntos B, H, H, &c. formaràn la parabola.

Demonstr. Porque las lineas FE, son todas iguales, un rectangulo FEG, al otro angulo FEG, serà como una GE, à la otra GE, ò (2.6.Euc.) como una BE, à otra BE; pero los quadrados de las HE, son iguales (17.6.Euc.) à los rectangulos FEG: luego un quadrado de HE, à otro quadrado de HE, es como una BE, à otra BE: luego (*corol.* 1. *prop.* 1.) los puntos B, H, H, &c. forman la parabola.

PROP. XXXVIII. Problema.

Explicase otro modo de descrivir la parabola. (*fig.* 30.)

OPeracion. Hagase el triangulo rectangulo ACB, cuyo lado AB, sea el parametro dado, ò elegido; y la BC, sea arbitraria. Dividase la CB en partes iguales, ò desiguales en los puntos D; y tirense las rectas AD: de cada punto D, haganse à esquadra las lineas DE, que cortaràn la BE, diametro de la parabola, en los puntos E. Tirense por E, paralelas à BD, y por D, paralelas à BE, que se cortaràn en los puntos F. Digo, que èstos forman la periferia de la parabola.

Demonstr. Por ser los angulos ADE, rectos, la perpendicular DB, es media proporcional entre AB, BE; (*corol.* 1. *propos.* 8. 6.Euc.) y por consiguiente, los quadrados de las DB, ù de sus iguales FE, son iguales à los rectangulos ABE; pero estos rectangulos, por tener el lado AB comun, son como las lineas BE: luego los quadrados de las FE, son co-

mo

mo las ſagitas BE, BE, &c. luego (*corol.* 1. *de la propoſ.* 1 los puntos B, F, F, &c. forman la parabola.

PROP. XXXIX. Problema.

Deſcriveſe de otra manera la parabola. (*fig.* 31.)

SEa dada, ò eſcogida la AB para parametro, que conti nuada haſta M, ſegun ſe quiſiere, ſerà BM el diametro. Deſcrivanſe diferentes ſemicirculos, que le toquen en A, y corten la BM en partes iguales, ò deſiguales en B, K, L, &c. Por el punto B, tireſe la BC, perpendicular à la AM, que tocarà al circulo menor en B; y à los demàs les cortarà en los puntos D, E, C, &c. De los puntos K, L, &c. tirenſe las KQ, LR, &c. tangentes à los ſemicirculos, y paralelas, è iguales à las BD, BE, BC; y los puntos Q, R, S, &c. formaràn la parabola.

Si ſe dieſſe determinado el angulo que han de formar las aplicadas con el diametro BM, ſe tiraria la KQ de ſuerte, que formaſſe el angulo dado; y la LR, y las demàs ſe harian paralelas à la KQ; pero ſiempre iguales à las BD, BE, &c.

Demonſtr. La BD es perpendicular al diametro AK, y por conſiguiente es (*corol.* 1. *propoſ.* 8. 6. Euc.) media proporcional entre AB, BK; y aſsimiſmo la BE, es media entre AB, BL: luego el quadrado de *BD*, es igual al rectangulo *ABK*; y el quadrado de *BE*, al rectangulo *ABL*: luego la miſma razon tiene el quadrado de *BD*, al de *BE*, que el rectangulo *ABK*, al *ABL*; pero èſtos, por tener el lado *AB* comun, tienen la razon de *BK* à *BL*: luego el quadrado de *BD*, al quadrado de *BE*, eſto es, el quadrado de *KQ*, al quadrado de *LR*, tiene la razon de *BK* à *BL*: luego (*corol.* 1. 1.) los puntos *B*, *Q*, *R*, &c. forman la parabola.

PROP. XL. Problema.

Deſcrivir la parabola al rededor de un triangulo dado. (*fig.* 32.)

PIdeſe ſe deſcriva una parabola al rededor del triangulo RNP, de ſuerte, que ſu periferia paſſe por los puntos N, R, P.

Ope-

Operacion. Dividase por medio la basa RP en Q, y tirese NQ. Saquese de qualquier punto E, la FE paralela, è igual à la QP: hallese entre EF, y EI la media proporcional EO, y el punto O, serà uno de los pertenecientes à la periferia de la parabola; de la misma suerte se hallaràn los demàs.

Demonstr. Por ser continuas proporcionales EI, EO, EF, serà el quadrado de EF, ò PQ su igual, al quadrado de EO, como QP à EI; ò (2. 6. Euc.) como NQ à NE: luego (1.) la EO, es aplicada; y el punto O, està en la periferia de la parabola.

PROP. XLI. Theorema.

Siendo el triangulo ABC (fig. 33.) inscrito en la parabola, y su basa AC, dividida por medio en D, con el diametro BD, si se tira su paralela EG, y la IGK paralela à la basa, seràn proporcionales la basa DC à la aplicada IG, como EF à FG.

D*Emonstr.* Como dixe en la propos. anteced. la DC; esto es, IK, IG, IH son proporcionales: luego si de IK, se quita la IG, y de èsta se quita la IH, serà toda IK à toda IG, como la quitada IG, à la quitada IH: luego el residuo GK, ò EC, al residuo HG, es como toda IK à toda IG; esto es, como DC à IG; pero por ser los triangulos EFC, GFH semejantes, es EC à HG, como EF à FG: luego DC à IG, es como EF à FG.

PROP. XLII. Problema.

Descrivir de otras dos maneras la parabola al rededor de un triangulo. (fig. 34.)

M*Odo* 1. Pidese que al rededor del triangulo ABC, se descriva una parabola.

Operacion. Dividase BC por medio en D, y tirese el diametro AD: dividase la basa BC en qualesquiera partes en los puntos E, por donde se tiraràn las rectas EF, paralelas al diametro AD: hagase aora como DC à DE, assi EF

à FG, y los puntos G seràn de la periferia de la parabo[la.]
Consta de la propos. anteced.

Modo 2. Dividase el diametro AD en qualesquiera pun[-]tos K, por quienes se tiraràn las rectas KF paralelas à la ba[-]sa, que cortaràn el lado del triangulo en los puntos F: por èstos se tiraràn las rectas FG, paralelas al diametro AD. Ti[-]rense tambien las lineas BK, que cortaràn à las FG en los puntos G; y por estos puntos G, se guiarà la linea curva, y quedarà descrita la parabola. Consta de la propos. misma: porque en los triangulos BDK, KFG, (2.6.Euc.) es BD, à DC, su igual à KF: como DK, ò EF, su igual à FG.

PROP. XLIII. Problema.

Continuar una parabola, ò restituirle un segmento. (fig. 34.)

1 PIdese que se continue la linea parabolica AC. *Operacion.* Tirado el diametro AD, y la aplicada DC prolongada àzia N, tirese la NG paralela al diametro, y por el punto L, en que corta al lado prolongado del triangulo, tirese la aplicada ML, al diametro alargado: de *B por M*, tirese la BMG, que cortarà la NG en G, por este punto se continuarà la linea parabolica.

2 Suponese que à la parabola ABC, (*fig.* 35.) le falta el segmento DE, que se le ha de restituir. *Operacion.* Tirese qualquier diametro BF; tirense las lineas AD, AE, que cortaràn al diametro en K, y en I: tirense tambien las DG, EH paralelas al diametro BF: dividase KI en qualesquiera partes iguales en los puntos O; y la GH, en otras tantas en los puntos S: por donde se tiraràn paralelas al diametro, que cortaràn las rectas AO en los puntos T; y por èstos se guiarà la linea, y quedarà restituido el segmento que faltava. Consta, como la operacion antecedente, de la *prop.* 41.

PROP. XLIV. Problema.

Dados tres puntos, que no estèn en linea recta, y tirada por ellos una linea para diametro, descrivir la parabola (fig. 36.)

SEan dados los puntos I, N, O, y la linea NM para diametro: pidese se forme por ellos la parabola.

Ope-

Operacion. Tirese la IO, y partase por medio en R. Tirese RP paralela à MN; y hagase como el quadrado de IR, al quadrado de NQ, assi la RP à PQ; y la parabola que passàre por N, y P, passarà tambien por los puntos I, O. (*corol.* 1. de la *prop.* 1.) De esta misma suerte, dadas las rectas IO, NM, que se cortan en M, se descrivirà la parabola, cuyo diametro sea NM.

PROP. XLV. Theorema.

En el triangulo rectangulo ABC (fig. 37.) si la hipotenusa AC se parte por medio en D, y por este punto se le tira la perpendicular DE hasta encontrar con la CE paralela à BA, digo, que el punto E pertenecerà à la periferia de la parabola, cuyo vertice es F, su focus A, y la tangente GE.

DEmonstr. Tirense las IE, FDH paralelas à BC. Por ser FD paralela à BC, assi como AC es dupla de AD, serà (2.6. Euc.) la AB dupla de AF, y la BC dupla de FD; y siendo la FH igual à BC, serà FH dupla de FD: luego FD, DH son iguales. Siendo pues los triangulos GDF, DHE equiangulos, y FD, DH iguales, seràn FG, y HE, ò FI iguales; y (4.1. Eucl.) los triangulos ADG, ADE tendràn las basas AE, AG iguales: luego (*corol.* 3. 28.) siendo F el vertice de la parabola, estarà el punto E en su periferia, y la GE serà tangente, y A serà el focus.

PROP. XLVI. Problema.

Dado el vertice, y el focus, descrivir la parabola. (fig. 38.)

SEa F el focus, y I el vertice de la parabola que se ha de descrivir.

Operacion. Haganse FI, IL iguales: tirense las LO, IM perpendiculares à LF: tirense como se quiera las rectas FMO, que cortaràn à la IM en los puntos M, y à la LO en los puntos O: por M tirense las MP perpendiculares à FO, hasta que corten en P las OP paralelas à LF, y los puntos P seràn por quienes ha de passar la periferia de la parabola.

De la misma suerte se hallaràn otros puntos.

Demonstr. Por ser FI, IL iguales, seràn (2.6. Euc.) FM, MQ iguales: luego (45.) los puntos P estàn en la periferia de la parabola.

PROP. XLVII. Problema.

Describir una parabola igual à otra dada. (*fig.* 39.)

SEa la parabola dada ABC; pidese otra igual. *Operacion.* Tomese la AD arbitraria, para que el punto D sea el vertice de la parabola que se ha de describir: tirese la BE igual, y paralela à AD, y el punto E pertenecerà à la periferia de la parabola igual à la dada: assimismo, tirando la BL igual, y paralela à AD, se tendrà el punto L, &c.

Demonstr. Tirense las aplicadas BF, EK. Por ser las AD, BE iguales, y paralelas, y assimismo BE, FK, seràn AD, FK iguales; y quitando la comun FD, quedaràn AF, DK iguales: luego la misma razon tiene BF à la sagita FA, que EK à la sagita KD: luego las parabolas son iguales.

PROP. XLVIII. Theorema.

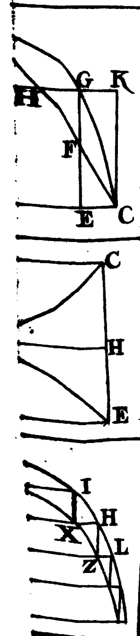
Las parabolas sobredichas, aunque se continuen infinitamente, siempre distaràn menos entre si, sin poder concurrir jamàs; y son asimptotas. (*fig.* 40.)

PReparacion. Por el vertice N de la parabola interior, tirese la MI, que serà tangente de dicha parabola interior, y aplicada de la exterior. Del punto M tirese la MQ paralela al diametro VT, que por la operacion de la prop. anteced. serà igual à VN, y por Q, tirese la aplicada OH. Assimismo, tirese la OR paralela al diametro, que serà tambien igual à VN, y por R, tirese la aplicada SL, y quedarà el diametro dividido en partes iguales en los puntos N, P, T.

Demonstr. Pruebo lo primero, que los rectangulos OQH, SRL son iguales al quadrado de MN; la VP, es dupla de VN por construccion, y (1.) el quadrado de OP al quadrado de MN, es como VP à VN; pero (5.2. Euclid.) el

qua-

Fol. 228.



R f.

quadrado de OP, es igual al rectangulo OQH, y al quadrado de QP: luego el rectangulo OQH, juntamente con el quadrado de QP, ò MN su igual, es duplo del quadrado de MN: luego el rectangulo OQH, es igual al quadrado de MN. Asimismo, el quadrado de ST es sesquialtero del quadrado de OP, por ser como la sagita TV 3. à la sagita PV 2. y es tambien igual al rectangulo SRL, juntamente con el quadrado de RT, ò OP: luego quitando el quadrado de RT, queda el rectangulo SRL, mitad del quadrado de OP: luego es igual al quadrado de MN; y asi en los demàs: luego todos los rectangulos que se hicieren, como OQH, SRL, &c. son iguales al quadrado de MN, y por consiguiente entre sì: luego (14. 6. Eucl.) tienen los lados reciprocos; esto es, OQ à SR, como RL à QH; pero RL, es mayor que QH: luego OQ, es mayor que SR; y asi infinitamente: luego aunque estas parabolas se continuen infinitamente, siempre se iràn acercando la una à la otra, y jamàs vendràn à concurrir. Se iràn siempre acercando, porque quanto mas se continuen, seràn menores los dichos segmentos de las aplicadas comprehendidos entre ellas; pero jamàs podràn concurrir, por ser siempre menor alli la amplitud de la parabola interior, que la de la exterior.

COROLARIO.

De aqui se colige, que los rectangulos OQH, HXO son iguales; y por consiguiente, tambien las lineas OQ, XH son iguales.

LIBRO III.

DE LA HIPERBOLA.

DEFINICIONES.

1 *Hiperbola, es una figura curvilinea, que procede de una seccion conica, cuyo plano corta el un lado del triangulo que paſſa por el exe, y encuentra con el otro prolongado fuera de la piramide conica.* Como en la *fig.* 1. el triangulo hecho por el exe, es ABC; y la ſeccion EDF es hiperbola, porque el plano que la forma, corta al lado AB en D, y tambien al lado CB continuado en G: lo qual concuerda con lo que dixe al principio de eſte tratado en la *def.* 16. que quando el *plano ſecante* corta las dos piramides conicas opueſtas, las dos ſecciones conicas opueſtas que ſe forman ſon *hiperbolas*. Las ſecciones hiperbolicas de entrambas piramides opueſtas ſe expreſſan en la *fig.* 2. fuera de la piramide.

2 *Tangente de la hiperbola, es la recta que toca ſu periferia en un ſolo punto ſin cortarla*, como EL, y AH. (*fig.* 2.)

3 *Diametro de la hiperbola; es la linea recta que parte por medio todas las paralelas à la tangente, terminadas dentro de la hiperbola*, las quales ſe llaman *aplicadas à aquel diametro*, ò *ordenadas*: y aſsi, la BEH, (*fig.* 2.) es diametro de la hiperbola FED, porque parte por medio todas las paralelas à la tangente LE, tiradas dentro de la hiperbola, y eſtas ſe llaman *ordenadas*, ò *aplicadas* à dicho diametro; y el miſmo nombre ſe da à ſus mitades, como HN; ò tambien *ſemiordenadas*, ò *ſemiaplicadas*.

4 *Exe de la hiperbola, es el diametro que es perpendicular à ſus aplicadas*: como en la *fig.* 2. BEH, que no ſolo divide por

me-

medio à sus aplicadas, si que es perpendicular à ellas; pero GFK, aunque es *diametro*, por partir por medio sus aplicadas, pero no es *exe*, por no ser perpendicular à ellas.

5 *Vertice de la hiperbola, es el punto E, en que el exe corta su periferia.*

6 *Hiperbolas opuestas, son las que forma un mismo plano secante, cortando las dos piramides opuestas*; y entrambas tienen por consiguiente un exe comun, y asimismo los demàs diametros: como en la *fig.* 2. ABC, DEF, son hiperbolas opuestas, porque tienen un mismo exe comun IH; y todos los demàs diametros, como OK, son tambien comunes, esto es, assi en la una, como en la otra, dividen por medio sus ordenadas; y à sagitas iguales, corresponden aplicadas iguales.

7 *Exe indeterminado de una parabola, es toda la recta IH.* Llamase *indeterminado*, porque puede continuarse infinitamente; pero *exe determinado*, es solamente el segmento BE comprehendido entre las dos hiperbolas opuestas, el qual mide la distancia que hay entre ellas; y en la *fig.* 1. es la recta DG, y sus terminos son los vertices de entrambas hiperbolas.

8 *Centro de la hiperbola, es el punto G, (fig.2.) que parte por medio al exe determinado BE*: conque el centro de la hiperbola està fuera de ella, y es comun à las dos hiperbolas opuestas.

9 *Diametro indeterminado*, es OK, porque se puede continuar infinitamente; y *diametro determinado*, es el segmento AF del indeterminado, que se termina en las periferias de las hiperbolas opuestas. Aqui se vè, que los diametros, assi determinados, como indeterminados, son infinitos; pero el exe es solo uno de ellos.

10 *Diametro segundo de la hiperbola, es una linea recta media proporcional entre el diametro determinado, y su parametro, dividida por medio en el centro de la hiperbola*: conque este diametro segundo, es comun à las dos hiperbolas opuestas.

11 *Hiperbolas conjugadas, son aquellas cuyos diametros mutuamente se cortàn.* Sean en la *fig.* 3. dos oposiciones de hiperbolas, la una ABC, DEF, y la otra GHI, KLM, cuyos diame-

metros BE, HL, se cortan en el centro S. Digo, que las dos opuestas son conjugadas con las otras dos opuestas, y los diametros BE, HL, se llaman tambien *conjugados*; porque continuados, el BE corta por medio todas las aplicadas paralelas al diametro HL, y èste à las aplicadas paralelas à BE; y por esta razon el diametro BE, se llama *recto*, respecto de las hiperbolas ABC, DEF; y *transverso*, respecto de las GHI, KLM; y al contrario, HL es *recto*, respecto de èstas; y *transverso*, respecto de aquellas: y por la misma razon BE, es *recto*, respecto de HL; y èste lo es, respecto de BE.

12 *Asimptotas, son unas lineas en el plano de la hiperbola, que salen de su centro, y quanto mas se apartan de èl, mas se acercan à la periferia de la hiperbola; pero jamàs concurriràn con ella, aunque corran infinitamente*, como en la *fig.* 3. SN, SQ, SP, SO. Estas pueden formar angulo recto en el centro, y tambien angulo agudo, ò obtuso.

13 *Parametro, ò lado recto de la hiperbola, es una linea por quien se miden, y à quien se comparan las potencias de las aplicadas al diametro.* Como (*fig.* 4.) sea BD el diametro determinado de la hiperbola ABC, y su aplicada FA, sean proporcionales BF, FA, FE: tirese la BH, paralela à FA, larga à discrecion: tirese la DE, que cortarà la BH en G; y serà BG el *parametro*, ò *lado recto*, como se demonstrarà en su lugar. Adviertase lo primero, que assi en la hiperbola, como en la parabola, y elipse, no es forzoso que el lado recto se aplique perpendicularmente al diametro, si que puede hacerse paralelo à las aplicadas. Advierto lo segundo, que cada diametro de la hiperbola tiene su parametro diferente, por ser diferentes sus potencias, y las de sus aplicadas, à quienes mide.

14 *Hiperbolas iguales, son aquellas en quienes los triangulos que forman las tangentes con las asimptotas son iguales, ò son aquellas que à sagitas iguales corresponden aplicadas iguales.*

15 *Hiperbolas semejantes, son aquellas en quienes los triangulos que forman las tangentes con las asimptotas, que hacen angulos iguales, son semejantes.*

16 *Focus de la hiperbola, es un punto puesto en el exe dentro de ella, y distante de su centro, tanto, quanta es aquella parte de la asimp-*

asimptota, que se comprehende entre el centro, y el punto en que es cortada por la tangente que sale del vertice de la hiperbola. Como en la *fig.* 3. si la distancia SR se passa de S hasta T, el punto T serà el *focus.* La propiedad essencial de los focus de las dos hiperbolas opuestas, es, que si de un punto tomado arbitrariamente en qualquiera de estas hiperbolas, se tiran dos lineas, una à cada focus, la diferencia de la mayor à la menor es siempre igual al exe determinado, que es comun à entrambas hiperbolas, ò à la distancia de sus vertices.

PROP. I. Theorema.

En la hiperbola, los quadrados de las aplicadas tienen entre sì la razon misma que los rectangulos hechos de las sagitas, y la linea compuesta de la sagita, y diametro. (*fig.* 5.)

LA piramide conica VRS, se supone cortada por su exe con el plano RVS, y juntamente con otro plano que corta la basa de la piramide por la linea NQ, perpendicular à RS, y à la superficie de la misma piramide, segun la linea curva MPQ, de tal suerte, que el diametro NM de esta seccion, prolongado concurra con el lado RV, tambien alargado en L. Assimismo, por qualquiera punto O, passe la HOI, paralela à RS, y por dicha linea el plano HPI paralelo à la basa, que con el plano QPM, harà la comun interseccion OP. Esta seccion NMQ, es hiperbola, (*def.* 1.) y LM, es su diametro determinado; y las OP, NQ, son las aplicadas al diametro. Digo pues, que el quadrado de OP, al quadrado de NQ, es como el rectangulo LOM, al rectangulo LNM.

Demonstr. Por ser el plano HPI, paralelo al plano RQS, es circulo, y las intersecciones OP, NQ, son paralelas; (16. 11. Euc.) y siendo NQ perpendicular à RS, tambien OP serà perpendicular à HI, que es paralela à RS: luego (35. 3. Euc.) el rectangulo HOI, es igual al quadrado de OP, y el rectangulo RNS, es igual al quadrado de NQ: luego el quadrado de OP, al quadrado de NQ, tiene la misma razon que el rectangulo HOI, al rectangulo RNS; pero el

rec-

rectangulo HOI, al rectangulo RNS, tiene la razon compuesta de HO à RN, ù de LO à LN; y de OI à NS, ù de MO à MN: luego el quadrado de OP, al quadrado de NQ, tiene la razon compuesta de LO à LN, y de MO à MN; pero el rectangulo LOM, al rectangulo LNM, tiene tambien la razon compuesta de LO à LN, y de MO à MN: luego el quadrado de OP, al quadrado de NQ, tiene la razon misma que el rectangulo LOM, al rectangulo LNM.

COROLARIO.

SI se tirasse una recta por los puntos Q, P, alargada, cortaria al diametro; porque como el rectangulo LOM sea menor que el rectangulo LNM, tambien el quadrado de OP, serà menor que el de NQ: luego OP es menor que NQ; y siendo estas lineas paralelas, es forzoso, que las rectas NO, QP, alargadas, vengan à concurrir.

PROP. II. Problema.

Dado el diametro determinado de la hiperbola, y una aplicada, hallar su parametro. (fig. 4.)

DIxe en la *defin.* 13. que el parametro de la hiperbola es una linea por quien se miden las potencias, ò quadrados de las aplicadas. Y Apolonio Pergeo dice, que este parametro, ò medida en la hiperbola, à diferencia del parametro de las otras secciones, es de tal calidad, que el quadrado de qualquier aplicada excede al rectangulo hecho del parametro, y sagita, en un rectangulo semejante al formado del mismo parametro, y del diametro determinado. Esto supuesto, sea dado el diametro determinado DB, y la aplicada FA, y se pide el parametro de dicho diametro.

Operacion. Hallese una tercera proporcional à la sagita BF, y à la aplicada FA, y serà la FE: juntese la DE, y tirese del vertice B la BG paralela à la aplicada, y esta recta BG, serà el parametro que sirve para el diametro dado, y sus aplicadas. Perficionense los rectangulos FI, FM.

Demonstr. Por ser tres proporcionales BF, FA, FE, es

(17.

(17. 6. Eucl.) el quadrado de FA igual al rectangulo de BF, FE, esto es, al rectangulo FH: luego dicho quadrado excede al rectangulo FG, hecho de la sagita FB, y de la recta BG, en el rectangulo KH, semejante (24. 6. Eucl.) al rectangulo BM, hecho del diametro determinado BD, y de la recta BG: luego la recta BG es el parametro, segun la inteligencia de Apolonio.

COROLARIOS.

1 *De aqui se colige la razon, porque esta seccion se llama hiperbola, à diferencia de las otras; y es, porque en la parabola, el quadrado de las aplicadas, es igual al rectangulo hecho de las sagitas, y el parametro. En la elipse, los quadrados de las aplicadas son menores que dichos rectangulos de las sagitas, y parametros; pero en la hiperbola, dichos quadrados de las aplicadas son mayores que los rectangulos referidos.*

2 *En la hiperbola, el quadrado de qualquier aplicada, como* FA, *tiene con el rectangulo* DFB *la misma razon, que el parametro* BG *con el diametro determinado* BD; *porque el rectangulo* BFE *igual, como hemos visto, al quadrado de* FA, *tiene con el rectangulo* DFB *la razon de* FE *à* FD, *por tener una misma altura* FB; (1.6. Eucl.) *pero como* FE *à* FD, *assi es* (4.6. Eucl.) BG *à* BD: *luego el quadrado de* FA *tiene con el rectangulo* DFB *la razon de* BG *à* BD.

3 *Si la recta* DGE, *que saliendo de la extremidad del diametro, passa por la extremidad del parametro, se continùa; y assimismo las aplicadas, como* LN, *se prosiguen hasta cortar la dicha recta en* O, *serà el quadrado de la aplicada* LN, *igual al rectangulo de la sagita* BL, *y de la recta* LO; *y assi en las demàs. La razon es, porque el rectangulo* DFB *al rectangulo* DLB, *tiene la misma razon que el quadrado de* FA *al quadrado de* LN; *pero el rectangulo* BFE *al rectangulo* BLO, *tiene tambien la misma razon que el rectangulo* DFB *al rectangulo* DLB; *porque la razon del rectangulo* DFB *al* DLB, *se compone de las razones de* BF *à* BL, *y de* DF *à* DL; *y la razon del rectangulo* BFE *al rectangulo* BLO, *se compone tambien de la de* BF *à* BL; *y de la de* FE *à* LO, *que* (4.6. Eucl.) *es la misma que la* DF *à* DL: *luego el quadrado de* FA *al quadrado de* LN, *tiene la misma razon que el rectangulo* BFE *al rectangulo*

BLO;

BLO; y alternando, el quadrado de FA, al rectangulo BFE, tiene la misma razon que el quadrado de LN, al rectangulo BLO; pero el quadrado de FA, es igual al rectangulo BFE, como se ha demonstrado: luego el quadrado de LN, es igual al rectangulo BLO. Y assi de las demàs aplicadas.

PROP. III. Theorema.

Si una linea ocurre à la hiperbola, de suerte, que por entrambas partes cae fuera de ella, alargada concurre con el diametro. (fig. 6.)

LA recta CDE, ocurre à la hiperbola en el punto D, de suerte, que alargada, cae fuera de la seccion por una, y otra parte: digo, que concurrirà con el diametro. Señalese en la periferia de la hiperbola qualquier punto F, y tirese la recta FD.

Demonstr. (*corol. prop.* 1.) La FD prolongada concurre con el diametro en un punto A: luego corriendo la CDE, entre el punto A, y la seccion, necessariamente cortarà al diametro.

PROP. IV. Theorema.

Si à la tangente EI, (*fig.* 7.) *se hace una paralela* ML, *dentro de la hiperbola opuesta, alargada dicha paralela, cortarà la hiperbola por ambas partes.*

DEmonstr. La recta EI (3.) concurre con el diametro: luego su paralela ML, tambien concurre con el diametro, como por exemplo en L. Tomese pues AH, igual à BL: tirese por H, la HO, paralela à EI, y tirese qualquiera recta EN; y porque IE concurre con EN, tambien su paralela HO, concurrirà con la misma EN, dentro, ò fuera de la hiperbola; y por consiguiente, en qualquier caso cortarà la periferia. Supongamos pues la corta en O: tirese de O, la aplicada OQ, y tomando la LR, igual à HQ, tirese la aplicada RP, que cortarà à la MLP, en P. Digo, que este punto P, està en la periferia de la hiperbola: la razon es, porque los triangulos OHQ, RLP, son totalmente iguales,

por

por tener los lados HQ, RL, iguales; y todos los angulos tambien iguales, por el paralelismo de los lados RP, OQ, y LP, OH: (26.1.Eucl.) luego las OQ, RP, son iguales; y estando el punto O, en la periferia de su hiperbola, lo estarà tambien el punto P, en la periferia de la hiperbola MBP. (*defin.* 6.)

COROLARIO.

Qualquiera paralela à la tangente, como OC, corta la hiperbola en dos puntos, y al diametro en un punto.

PROP. V. Theorema.

En las hiperbolas opuestas, las aplicadas, que distan igualmente del vertice, son iguales. (*fig.* 8.)

Aunque esto se colige bastantemente de la naturaleza misma de estas hiperbolas; pues siendo secciones hechas en piramides conicas iguales, y semejantes, lo han de ser tambien las hiperbolas, y por consiguiente, sus aplicadas en igual distancia del vertice han de ser iguales; pero lo quiero demonstrar para mayor evidencia.

Sean pues las dos hiperbolas opuestas SON, QPT. Tomense las distancias del vertice, ò sagitas OM, PR, iguales. Digo, que las aplicadas RQ, MN, son iguales.

Demonstr. Por ser PR, OM, iguales, y la OP comun, serà el rectangulo ORP, igual al rectangulo PMO; pero (1.) el quadrado de RQ, al quadrado de MN, tiene la razon misma que el rectangulo ORP, al rectangulo PMO: luego siendo estos rectangulos iguales, tambien lo seràn dichos quadrados: luego sus lados RQ, y MN, son iguales.

COROLARIO.

De aqui se colige, que las hiperbolas opuestas, terminadas en igual distancia de sus vertices, son ignales.

PROP. VI. Theorema.

La linea recta, que passando por el centro de las hiperbolas opuestas, ocurre à la una, encuentra tambien con la otra. (*fig.* 8.)

Digo, que la recta CQ, que passando por el centro C, de las hiperbolas opuestas, encuentra con la una

en

en el punto Q, prolongada, encuentra tambien con la otra. Tirese del punto Q, la aplicada QR; y tomando la OM, igual à PR, tirese la aplicada MN, y juntese la CN.

Demonstr. Los triangulos QRC, NMC, tienen los lados CR, CM, iguales, por haverse añadido à los semidiametros iguales CP, CO, las PR, OM, iguales; y las RQ, MN, son (5.) iguales; y los angulos R, y M, son tambien iguales, por ser las QR, MN, paralelas: luego (4.1. Eucl.) son del todo iguales: luego el angulo QCR, es igual al angulo MCN; y siendo verticales opuestos, serà (15. 1.) QCN una linea recta: luego la QC alargada, coincide con la CN; y por consiguiente encuentra con la hiperbola en el punto N, que es el que en la periferia termina la aplicada MN.

COROLARIOS.

1 *SI por el punto C, que divide al diametro determinado por medio, se tira una recta, que encuentra con las hiperbolas opuestas en Q, y N, las ordenadas tiradas por dichos puntos, como QR, NM, son iguales, y cortan las sagitas OM, PR iguales.*

2 *Todas las rectas, que passando por el punto C, ocurren à las hiperbolas opuestas, quedan divididas en C, en dos partes iguales, como se infiere de lo dicho: y por esta causa se llama el punto C, centro de las hiperbolas; y todas las rectas que passan por C, y cortan las hiperbolas, son sus diametros; y sus mitades, semidiametros.*

PROP. VII. Theorema.

Qualquier linea, que passando por el vertice de la hiperbola, es paralela à las aplicadas à un mismo diametro, es tangente. (*fig.* 9.)

LA recta LI, tirada por el vertice I de la hiperbola, es paralela à la ordenada NQ. Digo, que la LI cae toda fuera de la hiperbola; porque si cayesse dentro, como IM, dividiendola por medio en R, seria aplicada al diametro HRO; y èste, dividiendo por medio la MI, tambien dividirà por medio su paralela NQ en O, (*def.* 3.) lo que es impossible, por suponerse ya dividida por medio en P; luego dicha linea cae fuera de la seccion: luego es tangente.

te. Lo miſmo ſe convence de otra qualquier paralela à las aplicadas à otro diametro, que paſſe por el punto en que dicho diametro corta à la hiperbola.

PROP. VIII. Theorema.

Si el diametro determinado BA, *de la hiperbola*, (*fig.* 10.) *ſe divide en* E, *de tal ſuerte, que* BE *à* BA, *ſea como* BD *à la ſagita* AD, *la* EC *tirada del punto* E, *à la extremidad de la aplicada* DC, *ſerà tangente.*

P*Reparacion.* Si no es tangente, cortarà la hiperbola, y vendrà por exemplo al punto F: tireſe pues por F, la aplicada GFH; y por los puntos A, y B, las AL, BK, paralelas à EC, y junteniſe BCX, DCK, y GCM.

Demonſtr. Por ſupoſicion BD à AD, eſto es, BK à AN, (4.6.Euc.) es como BE à EA; eſto es, como BC à CX, ò como BK à XN, por la ſemejanza de los triangulos BCK, XCN: luego BK à AN, es como la miſma BK à XN: luego AN, XN ſon iguales: luego (5. 2. Euc.) el quadrado ANX, es mayor que el rectangulo AOX: luego mayor razon tiene la NX à XO, que la AO à AN. Eſta conſequencia es clara, porque ſi ſe hicieſſe el rectangulo AOS, igual al rectangulo, ò quadrado ANX, ſeria NX à SO, como AO à AN, como ſe vè en las lineas pueſtas à parte: luego ſiendo OS mayor que XO, mayor razon tendrà NX à XO, que à OS: luego mayor razon tiene tambien NX à XO, que AO à AN; pero como NX à XO, aſsi es BK à BM, por la ſimilitud de los triangulos XCN, BCK: luego mayor razon tiene BK à BM, que AO à AN: luego el rectangulo hecho de los extremos BK, AN, es mayor que el de los medios BM, OA; y por conſiguiente, el primero tiene con el quadrado de CE, mayor razon que el ſegundo: pero como el rectangulo de BK, AN, al quadrado de CE; aſsi es el rectangulo BDA, al quadrado DE: (2.6.Euc.) y tambien, como el rectangulo de BM, AO, al quadrado de CE; aſsi el rectangulo BGA, al quadrado de GE: luego mayor razon tiene el rectangulo BDA, al quadrado de DE, que el rectangulo BGA, al quadrado de GE; y permutando, mayor

yor el primer rectangulo al segundo, que el quadrado primero al segundo; y como (1.) sea como el rectangulo BDA, al rectangulo BGA; assi el quadrado CD, al quadrado GH: y como el quadrado DE, al quadrado GE; assi el quadrado CD, al quadrado FG: (por suponerse, que la EC prolongada viene à F) luego mayor razon tiene el quadrado CD, al quadrado GH, que es el mismo quadrado CD, al quadrado FG, lo que es absurdo, y contra lo demonstrado en la *propos.* 8. *lib.* 5. Eucl. luego la EC alargada no puede venir al punto F, ni à otro dentro de la seccion: luego ha de caer fuera de ella; y por consiguiente serà tangente.

PROP. IX. Theorema.

Si una recta toca à la hiperbola, y del punto del contacto se tira una aplicada, las partes del diametro determinado tendràn la misma razon que la recta compuesta de dicho diametro, y sagita tiene con la sagita.

(*fig.* 11.)

SEa OV el diametro de la hiperbola; y la tangente PT; y PQ la aplicada. Digo, que OQ à VQ, tiene la misma razon que OT à TV.

Demonstr. Si no es assi, hagase como OT à TV; assi OS à VS, y tirese la aplicada SR: conque (8.) la TR serà tangente; y alargada àzia baxo, cortarà à la TP; y por consiguiente, dos rectas cerraràn espacio, lo que es impossible.

COROLARIOS.

DE *aqui se colige, que qualquiera tangente de la hiperbola prolongada corta el diametro entre el centro, y el vertice, ò à menor distancia del vertice, que el semidiametro; porque las partes del diametro OT à TV, tienen la misma razon que OQ à VQ; y como la OQ siempre haya de ser mayor que su parte VQ; tambien la OT, siempre serà mayor que TV: luego TV es menor que el semidiametro.*

2 *Si de un punto del diametro, que no diste del vertice de la hiperbola menos que el semidiametro, se tira una recta à la hiperbo-*

bola, la ha de cortar precisamente. Consta de lo dicho.

PROP. X. Theorema.

Si del contacto O (fig. 12.) se tira una aplicada OQ, al diametro MQ, serà el quadrado del semidiameteo QR, igual al rectangulo QGN.

DEmonstr. (8.) MN à NR, es como MQ à RQ: luego componiendo, serà como MN, y NR juntas; esto es, como MR, à NR: asi MQ, y RQ juntas, à RQ: luego las mitades de los antecedentes, son proporcionales con los mismos consequentes; esto es, GR, mitad de MR à NR, serà como GQ, mitad de las lineas MQ, y RQ à RQ: luego convirtiendo la razon, serà GQ à GR, como GQ—RQ à GR—NR; esto es, GQ à GR, como GR à GN: luego (17. 6. Eucl.) el quadrado de GR, es igual al rectangulo QGN. De àqui se colige bastantemente la conversa.

PROP. XI. Theorema.

En la misma suposicion (fig. 12.) el rectangulo MNR, es igual al rectangulo QNG.

DEmonstr. (10.) QG à GR, es como GR à NG: luego componiendo, serà como QM à GM: asi MN à GN; y alternando, como QM à MN, asi GM à GN; y dividiendo, como QN à NM, asi RN à NG: luego el rectangulo de los medios MNR, es igual al de los extremos QNG, (16. 6. Euclid.)

PROP. XII. Theorema.

En la misma suposicion (fig. 12.) es el rectangulo GQN, al quadrado de QO, como el diametro MR al parametro.

DEmonstr. Consta de lo dicho en la demonstracion de la propos. anteced. que GQ à RQ, es como GR, ò MG su igual à NR: luego alternando, es GQ à MG, como QR à NR; y componiendo, es como MQ à QG; asi NQ à QR: luego (16.6.Euc.) los rectangulos MQR, GQN son iguales; pero el rectangulo MQR, es (*corol.* 2.2.) al quadrado de QO, como el diametro MR al parametro: luego el rectangulo GQN, al quadrado de QO, es como el diametro MR al parametro.

PROP. XIII. Theorema.

Hallar el diametro, centro, y exe de una hiperbola. (*fig.* 13.)

1 DAda la hiperbola IKP, pidese uno de sus diametros. *Operacion.* Tirense dentro de ella de qualquiera manera dos paralelas HF, IL: dividanse por medio en E, C: tirese la CE larga à discrecion, y serà el diametro indeterminado propio de las aplicadas HF, IL, y uno de los de la hiperbola.

Demonstr. Si la CE no es diametro, respecto de las HF, IL, lo serà alguna otra linea NP: luego cortarà por medio la IL en O, (*def.* 3.) siendo assi, que se ha supuesto cortada por medio en C: luego no la NP, ni otra alguna puede ser el diametro, respecto de las aplicadas HF, IL, si solamente la CE.

2 Pidese el centro de la misma hiperbola. *Operacion.* Tirado el diametro CE, con las paralelas HF, IL, tirense otras dos paralelas NP, QS, y dividanse por medio en O, R. Tirese el diametro RO, que cortarà al otro CE, alargado en M, y este punto M, serà el centro de la hiperbola; (*corol.* 2.6.) y las MK, MG, son semidiametros determinados, y su duplo seràn diametros determinados. (*defin.* 9.)

3 Pidese el exe de la hiperbola. *Operacion.* Del centro T, dado, ò hallado por la operacion antecedente, descrivase un arco de circulo, que cortarà la hiperbola en dos puntos Z, S. Tirese la recta ZS, que se dividirà por medio en V; tirese la TV, y serà el exe, por ser perpendicular à la aplicada ZS.

PROP.

PROP. XIV. Problema.

De un punto dado, tirar una tangente à la hiperbola.
(*fig.* 12.)

1 SEa dado el punto O en la periferia de la hiperbola, de quien se ha de tirar la tangente. *Operacion.* Tirese la recta OP de qualquiera suerte, y hallese (13.) el centro G, y tirese el semidiametro GQ: y tomando GM igual à GR, serà MR el diametro determinado. Dividase MR en N, en dos partes, que tengan la misma razon que MQ à RQ; y la NO serà la tangente que se pide. Consta de la *prop.* 8.

2 Pidese, que del punto N, dado en el diametro entre el centro G, y el vertice R, se tire una tangente à la hiperbola. *Operacion.* Hallese una tercera proporcional à las NG, y GR, que serà la NQ: tirese por Q la aplicada PQO, y la NO serà la tangente. La razon es, porque segun esta practica, serà el quadrado del semidiametro GR, igual al rectangulo NGQ: luego (10.) la NO, es tangente. El modo de tirar la aplicada PQO, es el mismo que el de la parabola, y el que se sigue en la propos. siguiente.

PROP. XV. Problema.

Dado el diametro, y un punto, tirar por este punto una aplicada al diametro, y una tangente por el vertice.
(*fig.* 14.)

1 SEa AB el diametro de una hiperbola: pidese se tire una aplicada al diametro sobredicho, por el punto P dado en la periferia.

Operacion. Tirese la PTQ por el vertice T, y sean iguales PT, TQ: tirese la QR paralela al diametro AB, que cortarà la periferia en R: tirese la PR, y serà la aplicada que se pide; porque PB à BR, es como PT à TQ; y siendo estas iguales, tambien lo seràn aquellas: luego la PR queda dividida por medio en B: luego es aplicada. (*defin.* 3.)

2 Pidese se tire una aplicada par un punto S dado en el diametro.

Operacion. Tirese por qualquier punto P de la periferia la ordenada PR, por la regla dada: hagase por el punto S la MSN paralela à PR, y serà la aplicada que se pide.

3 Pidese, que por el vertice T se tire una tangente. Tirese la LT paralela à MN, y quedarà hecho. Consta de la *prop.* 7.

PROP. XVI. Theorema.

En la hiperbola, si del punto del contacto se tira una aplicada, y por las extremidades del diametro determinado se tiran dos paralelas à la ordenada, que lleguen hasta la tangente, el rectangulo hecho de dichas paralelas, es igual à la quarta parte de la figura. (*fig.* 15.)

APolonio entiende por *figura* el rectangulo hecho del diametro determinado, y parametro. Sea pues PR la tangente, y la aplicada PQ: por las extremidades del diametro NL, tirense las LI, NO paralelas à PQ, hasta que concurran con la tangente PR alargada: y sea LM el parametro. Digo, que el rectangulo hecho de LI, NO, es la quarta parte del rectangulo hecho de NL, LM.

Demonstr. Por ser RP tangente, (11.) los rectangulos QRE, NRL son iguales: luego como se ha el quadrado de QR con el rectangulo QRE; esto es, como QR à RE: assi se ha tambien el mismo quadrado de QR con el rectangulo NRL; pero esta razon del quadrado de QR al rectangulo NRL, se compone de la razon de QR à NR, ù de PQ à NO; y de la razon de QR à RL, ù de PQ à IL, que son las que componen la razon del quadrado de PQ al rectangulo de IL, NO: luego la misma razon tienen QR à RE, ò el rectangulo EQR, al rectangulo QER, ò al quadrado de LE su igual, (10.) que el quadrado de PQ al rectangulo NO, IL: y permutando, como el rectangulo EQR al quadrado de PQ, esto es, (15.) como el diametro NL al parametro LM: assi el quadrado de LE, al rectangulo NO, IL; pero como NL al parametro LM, assi el quadrado de NL al rectangulo NLM: (1.6.Eucl.) luego el quadrado de LE al rectangulo LI, NO, es como el quadrado de NL al rectangulo NLM: y alternando, como el quadrado de LE

al

al quadrado de NL, asi el rectangulo LI, NO al rectangulo NLM: y siendo, como es el primero, la quarta parte del segundo, serà tambien el tercero la quarta parte del quarto: es pues el rectangulo de LI, NO, la quarta parte del rectangulo NLM, ù de la figura.

PROP. XVII. Theorema.

En la hiperbola, si por el punto del contacto se tira una aplicada, y por el centro se hace una paralela à dicha aplicada, que se termine en la tangente, serà el rectangulo hecho de la aplicada, y de la paralela sobredicha, igual à la quarta parte de la figura. (*fig.* 15.)

LA recta RP toca à la hiperbola en P: tirese la aplicada PQ, y por el centro E hagase la EF paralela à dicha aplicada. Digo, que el rectangulo hecho de EF, PQ, es igual à la quarta parte de la figura, ù del rectangulo NLM.

Demonstr. (11.) Los rectangulos NRL, QRE son iguales: luego (14.6.Eucl.) tienen sus lados reciprocos; esto es, NR à QR, ò NO à PQ, como RE à RL, ò como EF à IL: (4.6. Eucl.) luego NO à PQ, es como EF à IL: luego el rectangulo de PQ, EF, es igual al rectangulo NO, IL; pero èste (16.) es igual à la quarta parte de la figura: luego tambien lo es el rectangulo de PQ, EF.

PROP. XVIII. Theorema.

En la hiperbola, (*fig.* 16.) *cuyo diametro es AB, y el centro C, y en quien es,* (1.) *como el rectangulo ADB al rectangulo AFB, assi el quadrado DE al quadrado FG: si se hace como el rectangulo ADB al mismo rectangulo ADB, mas el quadrado CB, assi el quadrado DE al quadrado DH: y assimismo, si se hace como el rectangulo AFB al mismo rectangulo AEB, mas el quadrado de CB, assi el quadrado de FG al quadrado de FI, la linea CHI que sale del centro, y passa por dichos puntos, es recta, y asimptotas; y quanto mas se alarga, mas se acerca à la hiperbola, sin que jamàs pueda concurrir con ella.*

DEmonstr. Por estàr la AB partida por medio en C, y haversele añadido la BD, es (6. 2. Eucl.) el rectangugulo ADB, mas el quadrado CB, igual al quadrado CD. Por la misma razon el rectangulo AFB, mas el quadrado CB, es igual al quadrado CF; pero el rectangulo ADB, por construccion, es al rectangulo ADB, mas el quadrado de CB, como el quadrado de DE, al quadrado de DH: luego el rectangulo ADB, al quadrado de CD, es como el quadrado de DE, al quadrado de DH: y de la misma suerte se infiere, que el rectangulo AFB, al quadrado de CF, es como el quadrado FG, al quadrado de FI; pero (1.) alternando los terminos, el rectangulo ADB, es al quadrado DE, como el rectangulo AFB, al quadrado FG: luego el quadrado CD al quadrado DH, es como el quadrado CF al quadrado FI: luego tambien serà (22. 6. Eucl.) la linea CD à DH, como CF à FI: luego CHI, es linea recta; (4.6. Euclid.) y porque el quadrado de FI, siempre excede al quadrado de FG, los puntos G, I, jamàs podràn concurrir; aunque el punto I, y los demàs que infinitamente se pueden continuar, siempre se iràn acercando mas à la hiperbola, por haver de ser siempre mayor la razon del quadrado de GF al quadrado de ED, que la del quadrado de IF al quadrado de HD, por ser la primera la misma del rectangulo AFB al rectangulo ADB, y la segunda la de los mismos rectangulos, juntos con el quadrado de CB añadido à cada uno.

PROP. XIX. Theorema.

En la misma construccion (fig. 16.) el rectangulo HEL, es igual al rectangulo IGN.

PAra la demonstracion se ha de advertir, que (6.2. Eucl.) si del quadrado de CD se quita el rectangulo ADB, queda el quadrado de CB; y si del quadrado de CF se quita el rectangulo AFB, queda tambien el mismo quadrado de CB, como consta claramente de la demonstr. antec. Tambien por estàr la LH dividida por medio en D, y desigualmente en E, si del quadrado de DH se quita el quadrado de DE, queda el rectangulo HEL; (5. 2. Eucl.) y assimismo,

si

si del quadrado de FI se quita el quadrado de FG, queda el rectangulo IGN. Esto supuesto,

Demonstr. (18.) Como el quadrado de CD, al quadrado de CF, assi es el quadrado de DH, al quadrado de FI; y tambien (1.) como el rectangulo ADB, al rectangulo AFB, assi es el quadrado de DE, al quadrado de FG: luego si del quadrado de CD, se quita el rectangulo ADB, y del quadrado de CF se quita el rectangulo AFB, y del quadrado de DH el quadrado de DE, y del quadrado de FI el quadrado de FG, los residuos seràn tambien en la misma razon proporcionales: luego serà como el quadrado de CB, al mismo quadrado de CB; assi el rectangulo HEL, al rectangulo IGN; pero CB con CB, tiene razon de igualdad: luego dichos rectangulos son iguales.

COROLARIO.

De aqui se colige otra vez, que IG, es menor que HE: porque siendo los rectangulos HEL, IGN iguales, tendràn (14. 6. Euc.) los lados reciprocos, y serà HE à IG, como GN à EL; pero GN, es mayor que EL: luego HE, es mayor que IG.

PROP. XX. Theorema.

Si por el vertice de la hiperbola passa una tangente, cuyo quadrado sea igual à la quarta parte de la figura, las lineas tiradas del centro por sus extremidades seràn asimptotas. (fig. 17.)

Sea MN diametro de la hiperbola, cuyo centro es C: por el vertice V passe la tangente PV, cuyo quadrado, ò el de VQ, sea igual à la quarta parte de la figura; esto es, sea la quarta parte del rectangulo hecho del diametro determinado MV, y del parametro VL. Digo, que las lineas CP, CQ son asimptotas, que acercandose siempre à la hiperbola, jamàs podràn concurrir con ella: si se dixere que pueden concurrir, sea en qualquier punto G; tirese la aplicada GN, que serà paralela à PV. (7.)

De-

Demonstr. MV à VL, es como el quadrado de MV, al rectangulo MVL; (1.6.Euc.) y siendo el quadrado de CV, la quarta parte del quadrado de MV, y el quadrado de PV por suposicion, la quarta parte del rectangulo MVL, serà MV à VL, como el quadrado de CV, al quadrado de PV; ò como el quadrado de CN, al quadrado de NG, (4.6.Euc.) por suponerse concurrir la CP en G; pero MV à VL, es (*corol.* 2. 2.) como el rectangulo MNV, al quadrado de NG: luego la misma razon tienen el rectangulo MNV, y el quadrado de CN, con el quadrado de GN: luego el rectangulo MNV, y el quadrado de CN seràn iguales, contra la *prop.* 6. *lib.* 2. Eucl. luego la CP, no puede jamàs concurrir con la hiperbola: à mas de esto, siempre se va acercando mas à ella, porque las paralelas ZX, ON terminadas en la CO, crecen (2.6. Eucl.) segun la razon de CV à VP; y las aplicadas XT, NG crecen, (1.) segun la razon del rectangulo MXV, al rectangulo MNV, que es mayor razon que la sobredicha, por componerse de las razones de MX à XV, y de MN à NV, que son mayores que la de CV à VP: *luego la* hiperbola se va continuamente acercando mas à la CO, sin poder jamàs concurrir con ella: luego la CPO, es asimptotas.

PROP. XXI. Theorema.

Qualquiera tangente de la hiperbola corta entrambas asimptotas, y queda dividida por medio en el punto del contacto, y el quadrado de su mitad, es igual à la quarta parte de la figura. (*fig.* 17.)

La linea VL, toca à la hiperbola en V, y del centro C salen las asimptotas CO, CK. Digo lo primero, que dicha tangente corta entrambas asimptotas. La razon es, porque (corol. de la *propos.* 4.) las paralelas à la tangente tiradas dentro de la hiperbola la cortan por entrambas partes, y tambien al diametro; y por consiguiente, continuadas, cortan las dos asimptotas: luego la tangente tambien las corta.

Di-

Digo lo segundo, que el punto V del contacto corta la tangente en dos partes iguales VP, VQ, y que sus quadrados son iguales à la quarta parte de la figura; porque si el quadrado de VP, y lo mismo digo de VQ, no fuesse igual à la quarta parte de la figura, se podria alargar, ò acortar de suerte, que su quadrado fuesse igual à la quarta parte de la figura; y por su extremidad se tiraria una linea distinta de la CO, que (20.) seria tambien asimptotas, lo que es imposible, como consta de lo demonstrado acerca de estas lineas: luego el quadrado de VP, y assimismo el de VQ, es igual à la quarta parte de la figura; y dichas lineas son entre sì iguales. Lo mismo que se ha dicho de la tangente PQ, se ha de entender de otra qualquiera tangente.

COROLARIOS.

De aqui se colige, que ninguna tangente de la hiperbola puede passar por el centro, por cortar necessariamente las asimptotas en dos distintos puntos, como se ha demonstrado.

2 *Coligese tambien el modo de tirar una tangente à la hiperbola desde un punto P, dado en la asimptota. Dividase PC por medio en L: tirese la LV, paralela à la CK, la qual cortarà la hiperbola en V: tirese la PV, y serà tangente; porque en el triangulo PCQ, (2.6. Eucl.) es PV à VQ, como PL à LC; pero èstas son iguales: luego tambien lo son PV, VQ: luego PQ es tangente.*

PROP. XXII. Problema.

Dadas dos lineas que formen un angulo, y dado un punto dentro del mismo angulo, descrivir una hiperbola por el dicho punto, cuyas asimptotas sean las lineas sobredichas.
(*fig.* 18.)

Sean dadas las dos lineas AB, AC, que forman el angulo BAC, y sea dado el punto D, por el qual se ha de descrivir la hiperbola, cuyas asimptotas han de ser AB, AC.

Ope-

Operacion. Tirese la recta DA, y haganse DA, AE iguales; y el punto A, serà el sentro de la hiperbola, y DE su diametro determinado. Tirese la DF, paralela à AB, y haganse AF, FC iguales; y tirese la CDB, y (2.6.Euc.) seràn las BD, DC iguales; hallese una tercera proporcional à las lineas AD, BC, y sea G, que servirà de parametro. Dado pues el diametro ED, y el parametro G, se descrivirà facilmente la hiperbola en esta forma. Hagase DH, igual al parametro G; tirese la EH larga à discrecion; y tirense las IK, que se quisiere, paralelas à DH; y entre cada DI, y cada IK, hallese una media proporcional IL: y por los puntos L, se descrivirà la hiperbola DLL, &c. y las AC, AB, seràn sus asimptotos.

Demonstr. Por ser las IL medias proporcionales entre las DI, IK, seràn sus quadrados iguales à los rectangulos DIK: luego (*corol.* 3. *propos.* 2.) los puntos L, L, forman la hiperbola. Tambien por ser la BC media proporcional entre el diametro ED, y el parametro DH, serà el quadrado de BC, igual al rectangulo de ED, DH; y por consiguiente, el quadrado de DC, serà la quarta parte del rectangulo de ED, DH, ù de la figura: luego (20.) las AB, AC son asimptotas.

PROP. XXIII. Theorema.

Si del centro se tira una recta por el punto del contacto, dividirà todas las paralelas à la tangente en dos partes iguales, y serà diametro. (*fig.* 18.)

LA recta BC toca la hiperbola en el punto D. Digo, que la recta tirada del centro A, por dicho punto D, divide por medio en I, todas las HL, paralelas à BC; y por consiguiente, que la recta ADI es diametro.

Demonstr. Tiradas las asimptotas AM, AO, queda formado el triangulo AMO; y tirada la AI, forma con las paralelas todos los triangulos AMI, proporcionales con el triangulo ABD: (2.6.Euc.) y assimismo todos los AIO, proporcionales con ADC: luego serà AI con IM, como AD con DB; y AI con IO, como AD con DC: pero por ser las DB, DC (21.) iguales, la misma razon tiene AD

con

con DB, que con DC: luego la misma razon tiene tambien AI con IM, que con IO: luego las IM, IO son iguales. Por la misma razon son iguales en el triangulo ENK, las IN, IK: luego las medias proporcionales entre DI, IK, seràn iguales à las medias proporcionales entre DI, IN, que (22.) son las IL, IH: luego estas lineas son iguales; y por consiguiente, ADI es diametro.

PROP. XXIV. Theorema.

Si el diametro PVT (fig. 19.) corta por medio la RS, la tangente QV, tirada por el vertice V, serà paralela à RS.

DEmonstr. Si no es paralela, tirese la SZ, paralela à QV: luego (23.) quedarà dividida por medio en O; y como la SR se suponga dividida por medio en T, serà como SO à OZ, assi ST à TR: luego (2.6.Euc.) la recta RZ serà paralela à OT, siendo assi, que (corol. *prop.* 1.) alargada concurre con la TOP, fuera de la seccion: luego la VQ no es paralela à SZ, si à la RS.

COROLARIO.

SI la QV es tangente, y la RS su paralela està dividida por medio en T, la recta VT serà diametro; porque si no lo fuesse, lo seria otra linea, como VN, y èsta (def. 3.) dividiria por medio la RS, en otro punto N: luego estaria dividida por medio en N, y en T, lo que es impossible.

PROP. XXV. Theorema.

Qualquier linea que corta à la hiperbola en dos puntos, corta entrambas asimptotas; y los segmentos de dichu linea, comprehendidos entre la hiperbola, y las asimptotas, son iguales. (fig. 20.)

LA recta AC corta la hiperbola en los puntos A, y C. Digo, que prolongada, corta tambien entrambas asimptotas DE, y de DF, y que los segmentos AE, CF son iguales. Dividase AC por medio en G, y tirese del centro

D

D, la linea DG, que cortarà la hiperbola en el punto H, por el qual hagase la HBK, paralela à AC.

Demonstr. (corol. antec.) La BG es diametro, y la HK es tangente, (7.) la qual corta (21.) entrambas asimptotas: luego tambien las cortarà su paralela AC; y siendo (21.) las BH, BK iguales, tambien lo seràn las GE, GF; y quitando las GA, GC, iguales, quedaràn AE, CF iguales.

PROP. XXVI. Theorema.

Si à la tangente de una de las hiperbolas opuestas, se le tira una paralela por el centro, èsta serà el diametro conjugado del que passa por el contacto. (*fig.* 21.)

LA linea AG toca à la hiperbola inferior en A: hagase por el centro O, su paralela OR. Digo, que OR es el diametro conjugado de OA, que passa por el contacto: tirese qualquiera linea HF, paralela à AO, que encuentre con entrambas hiperbolas en H, F; y de estos puntos tirense las aplicadas FN, HD.

Demonstr. Las aplicadas FN, HD, son paralelas, por estàr aplicadas à un mismo diametro; y como ND, FH, se supongan ser paralelas, seràn NF, DH iguales; y (1.) los rectangulos ANE, EDA, seràn iguales; y por consiguiente seràn AD, EN iguales, como tambien ON, OD, y sus paralelas RF, RH: luego HF està dividida por medio en R. Lo mismo demonstrarè de qualquier otra paralela: luego OR es diametro conjugado del diametro AE, segun la *defin.* 11.

PROP. XXVII. Theorema.

Las asimptotas de las hiperbolas opuestas son comunes. (*fig.* 22.)

SEa EB uno de los diametros de las hiperbolas opuestas, cuyo centro C. Digo, que las asimptotas son comunes à entrambas.

Preparacion. Tirense por los puntos E, y B, dos tangentes FBG, DEA, que seràn paralelas à las aplicadas: (*def.* 3.) cortense las rectas EA, ED; BG, BF iguales: y sean tales, que

que su quadrado sea igual à la quarta parte de la figura, propia del diametro EB; y juntense las rectas CD, CA, CF, CG.

Demonstr. Las lineas BG, DE, son paralelas: luego los angulos alternos DEC, GBC, son iguales; y como BG, DE sean por construccion iguales, como tambien BC, CE, seràn (4.1.Eucl.) los triangulos DCE, BCG, totalmente iguales: luego sus angulos en C, son iguales; y siendo verticales opuestos, las lineas DC, CG, son una linea recta; y porque las lineas DE, AE, FB, BG, pueden la quarta parte de la figura, seràn (20.) las DG, FA asimptotas comunes à entrambas hiperbolas.

PROP. XXVIII. Theorema.

Si por los puntos en que las paralelas TV, HI (fig. 23.) cortan à la hiperbola puesta dentro de sus asimptotas, se tiran las ON, LM, paralelas à GI; y las PQ, RS, paralelas à GH, seràn proporcionales RS à PQ, como LM à ON.

DEmonstr. (25.) Las TO, PV son iguales, como tambien HL, RI; y los triangulos RSI, PQV son semejantes, por tener sus lados paralelos, como tambien lo son HML, TNO, assi entre sì, como à los primeros: luego tienen los lados proporcionales, como RS à PQ; assi LM à ON.

PROP. XXIX. Theorema.

Si la linea LR (fig. 24.) corta la hiperbola, y de las intersecciones se tiran RS, LM, paralelas à las asimptotas GH, GI, seràn los rectangulos LMG, RSG, iguales.

DEmonstr. (25.) Las HL, RI son iguales; y los triangulos RSI, HML, son semejantes: luego seràn RS, HM; SI, ML iguales. Tambien por ser semejantes los triangulos ISR, IGH, serà RS à HG, como IS, ò ML à GI; y dividiendo, serà como RS à MG; assi ML à GS: lue-

luego el rectangulo, ò paralelogramo equiangulo hecho d los extremos RS, GS, es igual al de los medios MG, ML.

PROP. XXX. Theorema.

Si à una de las asimptotas se tiran dos paralelas, los segmentos que hacen en la otra asimptota son proporcionales con las paralelas. (fig. 25.)

TIrense arbitrariamente las rectas AB, CD, paralelas à la asimptota EF. Digo, que son proporcionales CD à AB, como BE à DE. Por los puntos C, y A, tirese la linea CA, que cortarà las asimptotas en I, y en F: tirense tambien por A, y C, las lineas GH, AG, paralelas à la otra asimptota ED, y seràn (29.) los rectangulos AGEB, CDEH iguales: luego (14. 6. Eucl.) tendràn sus lados reciprocos, esto es, CD à AB, como BE à ED.

PROP. XXXI. Theorema.

En la misma suposicion, si se tira la EC, seràn BA, DC, BI continuas proporcionales. (fig. 25.)

DEmonstr. (30.) Es BA à CD, como DE à BE; pero como DE à BE, assi es DC à BI: luego BA à CD, es como DC à BI.

PROP. XXXII. Theorema.

Si à la asimptota AG (fig. 26.) se tiran dos paralelas BC, DE; y por el punto C, se tira la ACF, hasta encontrar con la DE, alargada en F, seràn las DE, BC, DF continuas proporcionales.

DEmonstr. (30.) Son proporcionales DE à BC, como AB à AD; pero como AB à AD, assi es BC à DF: (2. 6. Eucl.) luego como DE à BC, assi es BC à DF.

PROP.

PROP. XXXIII. Theorema.

Si una asimptota se divide en partes proporcionales, y por ellas se tiran paralelas à la otra asimptota, hasta cortar la hiperbola, estas paralelas seràn proporcionales. (fig. 26.)

EN la asimptota AD, sean proporcionales AH à AB, como AB à AD; y por los puntos H, B, D, tirense hasta la hiperbola las rectas HI, BC, DE. Digo, que las rectas DE, BC, HI, son proporcionales.

Demonstr. (30.) AH à AB, es como BC à HI; y como *AB* à *AD*, assi es *DE* à *BC*; pero *AH*, *AB*, *AD*, se suponen proporcionales: luego tambien lo son *DE*, *BC*, *HI*.

COROLARIOS.

1 *LAs DE, HO, son iguales, porque (32.) DE, BC, DF, son proporcionales; pero las HO, BC, DF, son proporcionales, (2. 6. Euc.) por serlo por suposicion las AH, AB, AD: luego DE, HO, son iguales. Assimismo DE, BC, HI, son proporcionales; pero (32.) tambien lo son DE, BC, DF: luego HI, y DF, son iguales.*

2 *Por suponerse AH, AB, AD, proporcionales, y ser HO, BC, DF, paralelas, son (2.6. Euc.) las AO, AC, AF, tambien proporcionales.*

PROP. XXXIV. Theorema.

Si se tiran algunas paralelas à una de las asimptotas, que sean entre sì proporcionales, y terminadas entre la otra asimptota, y la hiperbola; y del centro se tira una recta à la ultima de ellas, se continuarà una misma proporcion. (fig. 27.)

LAs rectas BA, DC, FE, HG, son proporcionales, y paralelas à la asimptota MN; y se ha tirado la MG del centro à la ultima HG. Digo, que BA, DC, FE, HG, FL, DK, BI, son continuas proporcionales.

Demonstr. Por ser BA, DC, EF, HG, continuas proporcionales, tambien las MB, MD, MF, MH, tendràn la misma pro-

proporcion, aunque con orden inverso; esto es, serà como FE à HG, assi HM à FM; (30.) pero como HM à FM assi es HG à FL, (2.6.Eucl.) y como FM à DM; assi FL à DK, &c. luego se continua la misma proporcion en las lineas sobredichas.

PROP. XXXV. Theorema.

Si se tiran algunas paralelas à una de las asimptotas, que sean entre si proporcionales, y terminadas entre la otra asimptota, y la hiperbola; y del centro se tira una recta à la primera de ellas, se continuarà una misma proporcion. (fig. 28.)

SEan las lineas *HG*, *FE*, *DC*, *BA*, proporcionales, y paralelas à la otra asimptota *MN*: tirese del centro *M*, la *MA* prolongada; y continuense las paralelas hasta esta linea. Digo, que se continùa la misma proporcion en las lineas enteras; esto es, que son proporcionales *HG*, *FE*, *DC*, *BA*, *DL*, *FK*, *HI*.

Demonstr. (30.) Assi es *DC* à *BA*, como *MB* à *MD*; pero como *MB* à *MD*, assi es *BA* à *DL*: luego como *DC* à *BA*, assi es *BA* à *DL*; y assi de los demàs: luego se continùa la misma proporcion en la forma dicha.

COROLARIO.

DE aqui se sigue, que si se hacen proporcionales MB, MD, MF, &c. las paralelas HG, FE, DC, &c. seràn proporcionales.

PROP. XXXVI. Theorema.

Si à entrambas asimptotas se tiran dos paralelas proporcionales, resultaràn dos quadrilateros iguales. (fig. 29.)

LAs AG, BI son paralelas à la asimptota ED; y las EC, FB son paralelas à la asimptota DG, y son proporcionales AG à BI, como EC à FB. Digo, que tiradas las CB, AB, el quadrilatero AGBI, es igual al quadrilate-

ro

ro ECBF: continuense las IB, FB, y perficionense los paralelogramos HF, MI.

Demonstr. AG à BI, es como EC à FB; y siendo (30.) como AG à BI, asi DI à DG; y como EC à FB, asi DF à DE, serà DI à DG, como DF à DE: luego el rectangulo DB, al rectangulo DM, es como el mismo rectangulo DB, al rectangulo DH: luego los rectangulos DM, DH, son iguales. Tambien por ser AG à IB, ò GM, como EC à FB, ò EH; serà tambien GA à GM, como EC à EH; y componiendo, serà GM à AM, como EH à CH; pero como GM à AM, asi es el rectangulo MI, al rectangulo AMB: y como EH à CH, asi es el rectangulo EB, al rectangulo CHB; luego el rectangulo AMB, es igual al rectangulo CHB: luego los triangulos AMB, CHB, que son la mitad de dichos paralelogramos, son iguales; luego quitados de los paralelogramos iguales MI, HF, los quadrilateros residuos AGBI, ECBF, son iguales.

PROP. XXXVII. Theorema.

Tirada la CO, (fig. 29.) paralela à la asimptota ED, serà el rectilineo AGIB, igual al rectilineo CBIO.

D*Emonstr.* Por suponerse AG à BI, como EC à FB, es (30.) DI à DG, como DF, ò BI su igual à DE, ò OC su igual: son pues proporcionales DI à DG, como BI à OC; pero como DI à DG, asi es (30.) AG à BI: luego AG à BI, es como BI à CO: luego componiendo, AG, mas MG à BI, es como BI, mas CO à CO: luego dividiendo, serà BI, menos AG; esto es, MA, ò CH, su igual à BI, como CO menos BI; esto es, como HB, ò su igual MB à CO; con que son proporcionales CH à BI, como BM à CO: luego el rectangulo HO, hecho de los extremos, es igual al rectangulo MI, hecho de los medios; y quitando de dichos rectangulos iguales los triangulos iguales CBH, AMB, quedaràn los quadrilateros AGIB, COIB iguales.

COROLARIO.

Lo mismo que se ha demonstrado de los quadrilateros AG CBIO, por ser proporcionales las lineas AG, BI, CO, se demonstrarà de otros qualesquiera quadrilateros, formados con paralelas à una asimptota, mientras sean proporcionales; esto es, que todos seràn iguales.

PROP. XXXVIII. Theorema.

El mayor de todos los triangulos que se pueden inscrivir en la hiperbola, es el que tiene con ella un mismo vertice, y es mayor que la mitad de la hiperbola.
(*fig.* 30.)

SEa la hiperbola MUN terminada con la recta MN; su vertice es V; y el diametro es VO. Digo, que el triangulo MVN, es el mayor de todos los que se pueden inscrivir en dicha hiperbola. Por V tirese la PVR, paralela à MN, y serà tangente de la hiperbola en U: *luego* el triangulo que tiene el vertice en V, serà mayor que otro qualquiera inscrito en la hiperbola sobre la misma basa MN: porque ninguno de èstos llegarà à la tangente, y por consiguiente tendràn todos menor altura.

Digo tambien, que dicho triangulo MVN, es mayor que la mitad de la hiperbola, porque (41. 1. Eucl.) es la mitad del paralelogramo MR; y como èste sea claramente mayor que la hiperbola, serà dicho triangulo mayor que la mitad de la hiperbola.

PROP. XXXIX. Problema.

Si en la hiperbola se inscrive el triangulo maximo, y los triangulos maximos inscritos, en los segmentos residuos son iguales. (*fig.* 31.)

EL triangulo ABC, sea el maximo que se puede inscrivir en la hiperbola, cuyo centro sea D; y la DBE parta por medio la AC: dividanse por medio los lados

AB

AB, BC en F, y G; tirense los diametros DMG, DHF. Digo, que los triangulos AHB, BMC, que (38.) son los maximos que se pueden inscrivir en aquellos segmentos residuos, son iguales.

Preparacion. Tirese por H la aplicada HM, que quedarà dividida por medio en L: tirese tambien la FG, que serà paralela à AC, y quedarà dividida por medio en N: tambien tirando la HI de la una interseccion à la otra, serà tambien paralela à FG, y quedarà dividida por medio en L, como la HM: luego HI, y HM son una misma linea.

Demonstr. Por ser FG, HM paralelas, es (2.6.Eucl.) GM à MD, como FH à HD: tambien por ser NF, NG iguales, son los triangulos DNF, DNG iguales, como tambien FBN, NBG: luego los restantes FBD, GBD son iguales; y como el triangulo FBH al triangulo HBD, sea como HF à HD; esto es, como GM à MD, segun lo dicho arriba; serà GBM à MBD, como FBH, à HBD; y componiendo, FBD à FBH, como GBD à GBM; y siendo el primero, y tercero iguales, tambien lo seràn el segundo, y quarto; esto es, FBH, y GBM: luego sus duplos AHB, BMC son tambien iguales.

PROP. XL. Theorema.

Las lineas que juntan dos paralelas en la hiperbola, cortan dos segmentos, cuyos triangulos maximos son iguales. (fig. 32.)

LAs lineas AB, CD, juntan en la hiperbola las dos paralelas AD, BC: Digo, que los triangulos maximos de los segmentos AB, CD son iguales.

Preparacion. Dividase AD por medio en K; y del centro E tirese el diametro EK, que cortarà por medio la paralela BC; partanse por medio las AB, CD en F, y G; y tirese la FG: tirense los diametros EHF, EIG; y la ordenada HM, que como se demonstrò en la prop. anteced. vendrà al punto I; y serà HI paralela à AD; y por consiguiente à FG; y (2.6.Euc.) serà GI à IE, como FH à HE: tirense las BN, CN, BE, CE.

Demonstr. Por ser BC, AD paralelas, y estàr las AB DC divididas por medio en F, y G, seràn FG, AD paralelas; y la FG estarà tambien dividida por medio, como sus paralelas BC, AD: luego los triangulos FBN, NCG son iguales, como tambien BNL, CNL, y BEL, CEL: quitados estos triangulos de los iguales FEN, GEN, restaràn iguales los triangulos FEB, GEC; y por ser HI paralela à FG, serà como GI à IE, assi FH à HE; y tiradas las BH, *CI*, se demonstrarà como antes, que los triangulos HEB, IEC son iguales; y por consiguiente los residuos FHB, GIC: luego sus duplos AHB, DIC son iguales.

PROP. XLI. Theorema.

Si de los extremos de las aplicadas se tiran rectas al vertice, los segmentos convexos que resultan, son iguales; y si por los mismos extremos, y vertice se tiran paralelas à una asimptota, los segmentos concavos que resultan, son tambien iguales. (*fig.*33.)

SEa HM el diametro, y su aplicada NI, de cuyos extremos al vertice V corran las NV, IV. Digo lo primero, que los segmentos convexos NOV, IPV son iguales.

Demonstr. Divididas NV, IV por medio en R, S, y tirados los diametros HR, HS, y tiradas las rectas NO, OV, IP, PV, resultan (39.) entrambos triangulos iguales. Assimismo, si se formassen otros triangulos sobre NO, PI, serian tambien iguales; y assi infinitamente en los segmentos residuos; y tantos se formaràn en la una parte como en la otra. Llevandose pues (38.) cada uno de estos triangulos mas de la mitad del segmento en que se inscrive, vendràn à degenerar en los segmentos parabolicos, de tal manera, que lo que sobrare serà menos que qualquiera cantidad assignable, como demonstrè al principio del *lib.* 8. de la *Geomet. Element.* que es el 12. de Eucl. luego siendo cada triangulo de un segmento igual al otro su correspondiente en el otro segmento, seràn dichos segmentos iguales. (*Porisma antes de la propos.*2. *lib.* 12. *Euclid.*)

Por los puntos N, V, I tirense tres paralelas à la asimpto-

to-

tota, que ſon NQ, VT, IL. Digo lo ſegundo, que los ſegmentos concavos IPVTL, NOVTQ ſon iguales.

Demonſtr. Como ſe demonſtrò en la *propoſ.* 37. las tres lineas IL, VT, NQ ſon proporcionales: luego (37.) los rectilineos ILTU, NVTQ ſon iguales: luego ſi de eſtos ſe quitan los ſegmentos convexos ſobredichos que ſe han probado iguales, reſtaràn los ſegmentos concavos ILTV, NVTQ iguales.

PROP. XLII. Theorema.

Si una aſimptota ſe divide en partes proporcionales, y por los puntos dividentes ſe tiran paralelas à la otra aſimptota, eſtas ſeràn proporcionales; y los eſpacios comprehendidos entre ellas, ſeràn iguales.

(*fig.* 34.)

DIvidaſe la aſimptota AC en partes proporcionales; eſto es, ſea AG à AH, como AH à AI: y como AH à AI, aſsi AI à AO, &c. y tirenſe las GD, HE, &c. paralelas à la otra aſimptota AL. Digo, que las GD, HE, &c. ſon geometricamente proporcionales; y los ſegmentos concavos CM, ON, &c. ſon iguales.

Demonſtr. Por ſer AG, AH, AI, continuas proporcionales, ſon (33.) las CF, OM, IN, &c. proporcionales; y (41.) los ſegmentos concavos CM, ON, &c. ſon iguales.

Eſta es la propiedad admirable de la hiperbola, que demonſtrò el inſigne Geometra el P. Gregorio de San Vicente, de la Compañia de Jeſus, en que ſe ve que las paralelas CF, OM, &c. dan los numeros que crecen en progreſsion Geometrica; y los eſpacios concavos que forman ſon iguales; y por conſiguiente dan los logarithmos correſpondientes à cada linea; eſto es, el eſpacio CM es logarithmo de CF: el eſpacio CN, es logarithmo de OM: CE, de IN, &c. por proceder eſtos eſpacios en progreſsion Arithmetica.

PROP.

PROP. XLIII. Problema.

Hallar las asimptotas de una hiperbola. (*fig.* 35.)

O*Peracion.* Hallese (13.) qualquiera diametro AB de la hiperbola; y su centro C: hallase tambien (2.) su parametro BD: hallese una media proporcional entre el diametro AB, y el parametro BD; y serà BE, que se dividirà por medio en F: y haciendo BG igual à BF, se tiraràn del centro C las CG, CF, y èstas seràn las asimptotas.

Demonstr. El quadrado de BF, es la quarta parte del quadrado de BE, por estar BE partida por medio en F: y como BE sea media proporcional entre el diametro AB, y el parametro BD, serà su quadrado igual al rectangulo hecho de AB, BD, que se llama *figura*: luego el quadrado de BF es igual à la quarta parte de la *figura*: luego (20.) la CF, como tambien la CG, son asimptotas.

PROP. XLIV. Problema.

Hallar los focos de la hiperbola. (*fig.* 36.)

O*Peracion.* Hallese (10.) el exe de la hiperbola, y sea AV: hallese tambien el (2.) parametro VP en la tangente VP perpendicular al exe. Hagase VE media proporcional entre AU, VP, que se partirà por medio en F; y haciendo centro en C, que lo es de la parabola, con la distancia CF descrivase el semicirculo LFH: y los puntos L, H seràn los focos de entrambas hiperbolas opuestas.

Demonstr. El quadrado de VF, como demonstrè en la prop. passada, es igual à la quarta parte de la *figura*; y por consiguiente la CFO es asimptota; pero la CL es igual à la CF: luego el punto L dista del centro C quanto es la CF, porcion de la asimptota comprehendida entre dicho centro, y la tangente VE: luego (*defin.* 16.) el punto L es el focus; y assimismo lo es en la hiperbola opuesta el H, por la misma razon.

PROP.

PROP. XLV. Problema.

Dada la porcion de diametro, que ha de caer dentro de la hiperbola, y una aplicada, descrivir la hiperbola. (*fig.* 37.)

SEa AB el diametro dado para dentro de la hiperbola, y la aplicada BD; y la razon del diametro determinado con el parametro, dada, ò elegida, sea la que hay de R à S.

Operacion. Hallese una tercera proporcional à las rectas AB, BD, y sea BC: conque el quadrado de BD, serà igual al rectangulo ABC: hagase aora como S à R; assi BC à BE: y tirese la EC: tirese por el vertice A la AL; y por qualquiera punto la FH, entrambas paralelas à la BC: sea FK media proporcional entre AF, FH; y el punto K, pertenecerà à la periferia de la hiperbola, (22.) cuyo vertice es A, el semidiametro determinado es AE, y el parametro AL. De la misma suerte se hallaràn quantos puntos se quisieren; y guiando por ellos una linea curva, quedarà descrita la hiperbola.

PROP. XLVI. Problema.

Descrivir una hiperbola al rededor de un triangulo dado. (*fig.* 38.)

SEa dado el triangulo NUO, à quien se ha de circunscrivir una hiperbola. *Operacion.* Dividase la basa NO por medio en T. Tirese TV larga à discrecion; y tirese MO: tirese qualquiera PQS, paralela à TO; y hagase PR media proporcional entre PQ, PS: conque serà el quadrado de PR, igual al rectangulo QPS. Digo, que los puntos N, V, R, O, estàn en la periferia de la hiperbola.

Demonstr. (2.6.Eucl.) La razon de TO à PS, es la misma que de TM à PM; y la razon de TO à PQ, es la misma que de TV à PV; y la razon del quadrado de TO, al rectangulo QPS, se compone de la razon de TO à PS, y de de la razon de TO à PQ; luego se compone de la razon de TM à PM, y de la razon de TV à PV; pero estas mismas dos razones son las que componen la razon del rectangulo MTV, al rectangulo MPV: luego los quadrados de TO, PR, tienen la misma razon que los rectangulos MTV, MPV: luego (1.) siendo MV el diametro determinado, seràn TO, PR las aplicadas: luego los puntos N, V, *R*, *O*, estàn en la hiperbola.

Otras practicas hallarà el curioso en el P. Gregorio à S. Vincentio, y en el P. Milliet; pero bastan las que se han dicho para nuestro intento.

TRA-

ATADO IX.

DE LA

AQINARIA,

PAra mover, y levantar los cuerpos graves con igual, ò mayor potencia que ſu peſo, no ſe neceſsita de algun arte: ſin ella derriba el viento qualquier fabrica, quando la vehemencia de ſus ſoplos ſupera la reſiſtencia de los muros; pero la fuerza menor, jamàs podrà vencer peſos ivos ſin el ſocorro del arte. Armaſe èſta en favor con las valientes maquinas que fabrìca; y logra eliz ſu deſempeño, que privando à las fuerzas de turaleza de el titulo glorioſo de inſuperables, lleor timbre la reſolucion de el Problema: *Data quanibet exigua potentia, quantumlibet grave movere pondus.* inſpirò al ingenioſo Archimedes la oſſadia para afirr al Rey Heron, moveria el gran peſo de toda la tierſi pudieſſe firmar fuera de ella ſus plantas: *Da ubi conam, terramque movebo.* Y aſsi como la viſta mas canſada iguala con la mas perſpicaz, aſsiſtida de proporcionas anteojos; y la que apenas podia ver con diſtincion los getos cercanos, llega à deſcubrir con claridad los Celeſs, aplicada à los largomiras, aſsi la mas debil potencia, ſi aplica à las maquinas, alcanza robuſtez ſuperior à la reitencia de crecidiſsimos peſos.

El arte pues que diſpone el maravilloſo artificio de

eſtas

eſtas maquinas, ſe llama comunmente *Mechanica*, que es lo miſmo, ſegun ſu derivacion del Griego, que *Invencion ingenioſa*; y èſta es la cauſa porquè ſus maquinas ſe llaman *Ingenios*, y ſus Arquitectos, *Ingenieros*, ò *Ingeniarios*. Yo le doy el nombre de *Maquinaria*, para que le tenga diferente del que en nueſtro vulgar idioma tienen las Artes, que no ſon liberales; y aſsi digo, que la Maquinaria, es un *Arte que enſeña la fabrica de tales Maquinas, que pueda con ellas qualquiera fuerza levantar, y mover qualquiera peſo.*

Son èſtas inumerables, pues ademàs de haver dimanado de eſte Arte prodigioſo todos los inſtrumentos de que uſan vulgarmente los Artifices; ademàs de ajuſtarſe à ſus reglas el orden de los hueſſos, muſculos, y nervios de nueſtro cuerpo, que nos ſirven para tan varios movimientos, como notò Galeno *lib. 1. de Placit. Hipocr. & Plat.* ſon caſi ſin numero las maquinas, que para efectos raros, y eſtupendos inventaron los antiguos, y perficionaron los modernos con admiracion del orbe; como las celebres eſtatuas de Memnon, la esfera de Archimedes, la paloma artificioſa de Architas, el pancracio de Simon Stevino, y otras muchas; pero todas èſtas ſe originan de las cinco principales, y fundamentales, de que trata Ariſtoteles en el libro de las queſtiones mechanicas; (ſi acaſo es ſuyo) y ſon la *Vectis*, *Barra, ò Palanca*; *Axis in Peritrochio*, *el Argue*, *ò Exe en la rueda*, *ò Torno*; *Trochlea*, *ò Garrucha*; *Cuneus*, *ò Cuña*; *y Cochlea*, *que es la Roſca.* Llamanſe *fundamentales*, porque la virtud, y fuerza de las demàs, toda conſiſte en la compoſicion artificioſa de las Maquinas ſobredichas.

LI

LIBRO I.

DE LOS PRINCIPIOS DE LA Maquinaria, y razon Physico-Mathematica del aumento de la potencia por las Maquinas.

DEFINICIONES.

1 *Cuerpo grave, ò pesado, es el que se mueve, ò tiene propension àzia el centro de la tierra.*

2. *Gravedad, ò peso, es la virtud que tiene un cuerpo pesado, para moverse àzia el centro de la tierra.*

3 *Momento de un cuerpo grave, es la propension que tiene para moverse àzia baxo, originada no solo de su gravedad, ò peso, si tambien de la disposicion, y situacion de sus partes.* Y assi un peso menor equipondèra, y aun prepondèra à otro mayor, si se coloca en el brazo mas largo de la romana; lo que proviene no solo del peso intrinseco, si de su colocacion, y disposicion de la maquina: y esto es lo que llamamos igual, mayor, ò menor *momento.*

4 *Centro de la gravedad de un cuerpo grave, es un punto dentro, ò fuera de dicho cuerpo, tal, que si de èl se suspende, ò se concibe suspenso el cuerpo grave, conservarà siempre una misma situacion, y equilibrio de sus partes.* De todo lo dicho se tratarà por extenso en la Estatica.

5 *Pesos iguales son los que puestos en las balanzas de brazos iguales, pesan igualmente, sin baxar mas el uno que el otro*: como 10. libras de plata, y 10. libras de plomo.

6. Pe-

6 *Pesos equilibres, ò puestos en equilibrio, son los que suspensos en el bastil de una romana, en igual, ò desigual distancia del exe, pesan igualmente, sin baxar mas el uno que el otro, ora sean dichos pesos iguales, ò desiguales.* Asi vèmos, que el plomo, que pesa una arroba, hace equilibrio, y equiponderà al peso de muchas arrobas, si se suspende à mayor distancia del exe.

7 *Movimientos iguales son los que en igual tiempo caminan espacios iguales. Desiguales, los que en igual tiempo caminan espacios desiguales.*

8 *Un movimiento es mas velòz que otro, si en igual tiempo camina mayor espacio; y menos velòz, ò mas tardo, si en igual tiempo camina menor espacio.*

9 *Potencia motriz*, es el cuerpo que puede mover à otro, y es en dos maneras, ò *animada*, como un viviente, ò *inanimada*, como piedra, ò plomo.

10 *Linea de direccion de un cuerpo, ò de una potencia*, es aquella linea recta, por la qual dirige su movimiento: èsta, en los cuerpos graves, es la que va del centro de la gravedad de dicho cuerpo al centro de la tierra; pero en las potencias animadas, las lineas de direccion pueden ser diferentes.

PROP. I. Theorema.

Explicase en què consista el punto de la dificultad, de aumentarse las fuerzas de una potencia por las Maquinas.

CONsta por la experiencia, que la potencia, cuyas fuerzas eran precisamente bastantes para vencer la resistencia de 100. libras de peso, si se aplìca à qualquiera de las maquinas, que hemos de explicar en este tratado, llega à poder levantar peso de mil, dos mil libras, &c. y asi indefinidamente. Es pues el assumpto de este primer libro, hallar la razon physica, y el real, y verdadero principio de tan admirable efecto de la naturaleza, que sabido, servirà de fundamento para todo lo que se ha de tratar. Y supuesto, que casi todos los Autores reducen las maquinas

nas à una, como raìz de las demàs, que es el peso que comunmente llamamos *Romana*: bastarà por aora explicar en ella el punto de la dificultad presente. Digo pues, que como cada dia se experimenta, si dos pesos iguales A, y B, por exemplo, cada uno de quatro libras, (*fig.* 1.) se ponen en los puntos G, y D, en igual distancia del exe C; esto es, que las lineas CG, CD, sean iguales, estaràn en equilibrio, sin vencer el uno al otro; pero si el peso B, se aparta algo mas del punto C, de suerte, que la CD sea mayor que CG, vencerà al peso A, y le levantarà. Y esto es de tal manera, que si lo que le falta à un peso menor para igualar con el mayor, se suple, dandole mayor distancia del exe en la misma proporcion, seràn iguales las fuerzas del menor con la resistencia del mayor, y estarà con èl en equilibrio, como por exemplo: Siendo el peso A, doblado del peso F, si la distancia CE, es doblada de CG, podrà el peso F, tanto como el peso A, y estaràn entrambos en equilibrio; y si se apartasse mas del exe C, preponderaria al peso A.

Donde se vè claramente, que quando las distancias son reciprocas con los pesos, hay igualdad de fuerzas, y equilibrio, y el peso menor puede tanto, como el mayor; como porque siendo el peso A, doblado de F, y la distancia EC, es doblada de GC, puede tanto el peso menor F, como el mayor A: y si la distancia CE, fuesse mas que doblada de la GC, preponderaria el peso menor F, al mayor A. Consiste pues la dificultad presente en señalar la causa physica, y real, porquè el menor peso F, puesto en mayor distancia del exe, puede tanto, ò mas que el peso mayor A.

Varios son los discursos que han hecho los Autores para explicar esta dificultad, verdaderamente una de las mayores de la Philosophia, y en que se necessita en gran manera del socorro de la Mathematica, para discurrir con acierto. No me detendrè en impugnar sus sentencias: contentarème con explicar mi sentir, que con pocas palabras insinùa el Autor de la Philosophia *Vetus, & Nova*, en el *tomo* 1. *lib.* 2. *trat. de la Metaphys. disp.* 3. *quaest.* 4. y el P. Milliet en el *lib.* 1. *de la Mecanica*, *prop.* 17. su explicacion se contiene en las proposiciones siguientes.

PROP.

PROP. II. Theorema.

Los movimientos son como los espacios, que con ellos se corren en un mismo tiempo.

LA razon es clara, porque moviendose un cuerpo siempre con el mismo movimiento, si en un minuto corre 10. varas de espacio, en otro minuto correrà otras 10. varas con el mismo movimiento: luego si el movimiento que tiene en el segundo minuto, estuviesse tambien en el primero, en un minuto con movimiento doblado correria 20. varas: luego con doblado movimiento en un mismo tiempo se corre doblado espacio; y si fuere tresdoble el movimiento, tambien lo fuera el espacio: luego los movimientos son como los espacios que se corren en un mismo tiempo. Tambien los efectos guardan la misma proporcion que sus causas: luego doblado movimiento llevarà por doblado espacio à un cuerpo en el mismo tiempo.

PROP. III. Theorema.

Un cuerpo mueve à otro mediante su movimiento.

COnsta de la experiencia, y es la razon, porque para que un cuerpo mueva à otro, y le saque del lugar donde se halla, ha menester impelerle, encontrando con èl mediata, ò immediatamente, como lo vemos en una bola, que para mover una otra, que està quieta, es menester corra hasta encontrar con ella, lo qual es movimiento: luego un cuerpo mueve à otro con su movimiento.

PROP. IV. Theorema.

Un cuerpo no puede comunicar à otro mas movimiento del que en sì tiene.

LA razon es, porque un cuerpo mueve à otro con su propio movimiento; segun es su movimiento, assi es el el impetu que lleva; y segun este impetu, assi es el impulso que imprime en el cuerpo movido; y segun es este impulso que causa el movimiento, assi es el movimiento: luego segun es el movimiento del cuerpo que mueve, assi, y no mas, serà el del movido: luego èste no puede ser mayor que el del cuerpo movente.

PROP. V. Theorema.

Tanto movimiento hay en un cuerpo que se mueve por espacio de 10. *palmos, como en dos cuerpos iguales de por sì con el primero, que en el mismo tiempo se mueven cada uno por espacio de cinco palmos.*

SUpongamos, que hay tres cuerpos iguales, cada uno de una libra de peso; y que en espacio de un minuto segundo se mueva uno de ellos, que nombrarèmos A, por espacio de 10. palmos; y los otros dos en esse mismo tiempo se muevan cada uno por espacio de cinco palmos. Digo, que el primero tiene tanto movimiento, como los dos juntos.

Demonstr. (1.) Los movimientos son como los espacios andados en el mismo tiempo. El espacio andado por el cuerpo A, es igual al que andan los dos juntos en el mismo tiempo, porque el cuerpo A, camina diez palmos en el mismo tiempo en que los otros dos caminan cada uno cinco, que juntos, hacen 10. palmos: luego el movimiento de A, es igual al de los otros dos. Tambien el movimiento del cuerpo A, es doblado del movimiento que lleva cada uno de los otros dos: luego es igual al que tienen entrambos juntos.

COROLARIO.

UN *cuerpo de una libra de peso, que en un minuto segundo se mueve por espacio (sirva de exemplo) de* 10. *varas, tiene igual movimiento con un cuerpo de peso de dos libras, que en el mismo tiempo se mueve por cinco varas: consta de lo dicho, porque si dicho cuerpo de dos libras de peso estuviera dividido en dos partes cada una de una libra, y entrambas se movieran à un mis-*

mismo tiempo por espacio de cinco varas, el que es de una libra de peso, moviendose por espacio de 10. varas, tendria igual movimiento al de los dos sobredichos: luego lo mismo es, quando los dos cuerpos sobredichos unidos, componen uno del peso de dos libras.

ADVERTENCIA.

COnsta de lo dicho, que haviendo, por exemplo, dos cuerpos, uno de una libra de peso, y otro de dos; y que al mismo tiempo en que el menor corre 10. varas, el mayor camina cinco, que entrambos tienen igual movimiento, y en este sentido, igual velocidad; porque cada libra del mas pesado tiene velocidad subdupla de la velocidad del que pesa menos; y entrambas juntas haràn una velocidad igual à la del mismo peso menor, como tambien el espacio total; y segun todas las dimensiones que anda, ò por donde passa el cuerpo de doblado peso, es real, ò virtualmente igual al que en dicha suposicion corre el cuerpo de menor peso; pero el comun estilo, es juzgar de la velocidad por la longitud de la linea, que corre el centro del cuerpo que se mueve, sin atender à otra cosa: conque si un cuerpo de una libra de peso camina una linea de 10. varas en el mismo, ò igual tiempo, en que otro cuerpo que pesa dos libras camina otra de cinco, se dice ser la velocidad de aquèl doblada de la de èste: el qual estilo guardarè siempre que fuere menester hablar de la velocidad, por no desviarme del que por uso tan frequente han recibido todos los Autores.

PROP. VI. Theorema.

Si dos cuerpos de gravedad desigual se mueven con igual cantidad de movimiento, el menos pesado caminarà con mayor velocidad.

SEan dos cuerpos, uno de dos libras de peso, y otro de una; y supongase que tanto impetu, y por consiguiente, tanto movimiento tenga el uno, como el otro. Digo, que el cuerpo, que pesa una libra, caminarà con mayor velocidad que el que pesa dos libras. La razon es, porque el cuerpo que pesa dos libras, camina la misma linea que caminaria cada mitad suya, con la mitad del movimiento: luego si el cuerpo que pesa una sola libra, tiene el movimienmiento mismo que aquellas dos, caminarà una linea doblada; pero la velocidad (en el comun modo de hablar) es segun la linea que corre el cuerpo movido: luego el cuerpo que pesa una libra correrà con doblada velocidad que el que pesa dos con igual movimiento.

De aqui se colige la razon, porquè una nave grande, y cargada que camina lentamente, si encuentra con un pequeño, y ligero navichuelo, le hace correr con gran velocidad; y es porque con el impulso que le imprime, le comunica igual movimiento con el suyo; y èste, que repartido en mover tantas partes como componen el volumen del navio grande, solo le adelantava quatro varas (por exemplo) en tiempo de un segundo, hallandose todo en el navichuelo pequeño, y ligero, le mueve en esse mismo tiempo, haciendole correr una linea de espacio, sin comparacion mayor, por la razon sobredicha.

PROP. VII. Theorema.

En la Romana, siempre que el peso menor tiene tanto movimiento como el mayor, puede levantarle hasta el equilibrio.

ES la razon, porque un cuerpo mueve à otro mediante su propio movimiento: (3.) luego las fuerzas para moverle son à medida de su movimiento: supuesto pues que dos pesos, el uno mayor, y el otro menor, se coloquen en la romana, de tal suerte, que en virtud de aquella disposicion tenga el uno tanto movimiento en la una parte del instrumento, como el otro en la otra, lucharàn entre sì con iguales fuerzas: luego ninguno vencerà: luego havrà equilibrio.

PROP. VIII. Theorema.

En la Romana, siempre que las velocidades son reciprocas con los pesos, hay equilibrio. (fig. 1.)

COnsiderese la romana GE, lenvantada en IH, y sea el peso I doblado del peso H; y el arco HE, que ha de correr el peso H, para restituirse à la situacion horizontal GE, sea doblado el arco IG, que ha de correr el peso I, para dicho efecto: de suerte, que assi como el peso I, es doblado del peso H, assi el arco HE, es doblado del arco IG, que es proporcion reciproca. Digo, que en esta disposicion hay equilibrio.

Demonstr. Por ser la velocidad de H doblada de la velocidad de I, y ser el peso I doblado de H, tanto movimiento tiene el peso I, como el peso H: (*corol.*5.) luego (7.) el peso H, levantarà al peso I, hasta el equilibrio GE.

PROP. IX. Theorema.

Siempre que en la Romana las distancias del exe son reciprocas con los pesos, hay equilibrio. (fig.1.)

SEa como el peso A con el peso F, assi la distancia EC del peso F, à la distancia CG del peso A. Digo, que havrà equilibrio.

Demonstr. Por ser CE doblada de CG, serà el arco HE doblado del arco IG: luego la velocidad HE, es doblada de la velocidad IG, por ser las velocidades como las lineas que se caminan, como dixe en la advertencia à la *propos.* 5. luego la velocidad del peso F à la del peso A, es como el peso A, al peso F, que es ser reciprocas: luego (8.) hay equilibrio.

PROP. X. Theorema.

Quando la velocidad del peso menor à la del mayor, tiene mayor razon, que el peso mayor al menor, vence el menor al mayor, y le levantarà. (fig. 2.)

SEa el peso A doblado del peso B; pero puestos en la romana, y levantandola à la situacion DE, serà el arco EB, que camina el peso B, triplo del arco AD, que camina el peso A: conque serà mayor la razon de la velocidad de B, à la velocidad de A, que la del peso A à B. Digo, que el peso B, levantarà al peso A, y tendrà mayor momento.

De-

Demonstr. (8.) Quando la velocidad del peso B, à la del peso A, es como el peso A, al peso B, hay equilibrio, por tener tanto movimiento el uno como el otro: luego siendo mayor la velocidad del peso B, respecto de la del peso A, que lo es el peso A, respecto del peso B, tendrà mas movimiento el peso B, que el peso A: luego el peso B tendrà mayor potencia, y fuerza contra el peso A; de suerte, que serà mayor que la fuerza que tiene dicho peso A para resistir al peso B: luego vencerà el peso B.

PROP. XI. Theorema.

Quando las distancias del exe tienen entre sì mayor razon que los pesos, vence el peso menor al mayor. (*fig.* 2.)

SEa la distancia BC tripla de la distancia AC; y el peso A sea solamente doblado del peso B. Digo, que el peso B vencerà al peso A.

Demonstr. Siendo la distancia CB tripla de CA, serà el arco EB triplo del arco DA: luego la velocidad del peso B, es tripla de la velocidad del peso A; y siendo èste solamente duplo del peso B, tendrà mayor razon la velocidad del peso menor B, con la del peso mayor A, que tiene el peso A con B: luego (10.) vencerà el peso B al peso A.

PROP. XII. Theorema.

El principio fundamental del aumento de la potencia motriz por las maquinas consiste, en que en virtud de ellas tiene la potencia igual, ò mayor movimiento que el que se ha de mover.

COnsta de lo dicho, porque un cuerpo mueve à otro mediante su propio movimiento: luego siempre que en virtud de alguna maquina podrà tener igual, ò mayor movimiento, al que en el mismo tiempo ha de tener el cuerpo pesado, quando le levante, le podrà mover, y levantar hasta el equilibrio, ò mas adelante: luego quando una potencia, que por sì sola no puede tener en el mismo tiempo igual movimiento al que ha de tener el peso, caso que se mueva, no le puede mover por sì sola; y si se aplica à las maquinas, ya puede adquirir dicho movimiento, y podrà con ellas mover el peso, aunque sea excessivo: esto pues sucede en todas las maquinas; porque, como veremos en este tratado, en todas ellas se aumenta el movimiento de la potencia, hasta ser mucho mayor que el del peso: de tal suerte, que es mas excessiva la velocidad de la potencia, respecto de la del peso, que lo es el peso, respecto de la potencia; y assi no es de estrañar mueva una debil potencia un grande, y enorme peso.

Aunque todo esto consta de las proposiciones antecedentes, y queda en ellas bastantemente demonstrado, quiero añadir à lo dicho mayor luz con la explicacion siguiente.

Sea pues (*fig.* 3.) el peso A de dos arrobas; y tomando la distancia CD igual à CB, coloquese en D el peso E de una arroba. No hay duda que cada arroba de las dos que tiene el peso A, (5.) corre un arco igual à BH al mismo tiempo que una arroba E corre un arco BI igual à BH: luego el peso A corre dos arcos iguales à BH al mismo tiempo que E corre uno: luego el peso A tiene doblado movimiento que el peso E puesto en D; y assi prevalecerà A contra E, y èste no le podrà mover.

Si el mismo peso E se passa à F, de suerte, que la distancia CF sea doblada de CB; mientras las dos arrobas del peso A corren dos arcos HB, el peso de una arroba puesto en F, correrà el arco FK doblado de HB: luego tiene allì igual movimiento; y assi ninguno prevalecerà contra el otro, y havrà equilibrio.

Passese el mismo peso E à L, de manera, que CL sea tripla de CB; y mientras las dos arrobas del peso A corren dos arcos HB, correrà el peso de una arroba, puesto en L, el arco LM, triplo de HB: luego tiene mayor movimiento: luego vencerà, y levantarà al peso A puesto en B.

Lo mismo que he dicho comparando dos arrobas con una, dirè comparando dos libras con una; dos onzas con una; dos adarmes con uno; dos granos con uno;

y

y assi infinitamente: luego siempre que en virtud de la maquina tiene el peso, ò potencia menor, mayor movimiento que el peso mayor, prevalecerà contra èl. Todo esto se verà con claridad en las maquinas que se explicaràn en los libros siguientes.

LIBRO II.

DE LA PRIMERA MAQUINA fundamental, llamada Barra, ò Palanca.

LA *barra*, ò *palanca*, que los Latinos llaman *Vectis*, los Griegos *Moclos*, y los Marineros *Manuella*, es entre las demàs maquinas fundamentales la primera, ya por ser la mas facil de entender, ya por reducirse à ella, sino todas, muchas de las demàs: es entre todas la mas simple; pero de tanto poder, que se puede con ella levantar un peso igual al de la tierra; por lo que atribuyò la antiguedad sus maravillosas fuerzas al Tridente de Neptuno, creyendo que à su impulso se comovia la tierra, como cantò Virgilio, 1. Georgic.

Magno Tellus percussa Tridenti.

Pero antes de entrar en la especulacion de èsta, y las demàs maquinas, quiero dar al Lector las advertencias siguientes. 1. Que la propia medida de las fuerzas de una potencia, es el peso que precisamente puede levantar con igual velocidad à la del peso: como si un hombre puede levantar à lo mas 100. libras de peso, moviendose su mano con igual velocidad que el peso, diremos ser sus fuerzas iguales à las de 100. libras de peso. 2. Que en todas las maquinas se prescinde de la gravedad, y renitencia propia de la matoteria que las compone, ſin atender mas que à la reſiſtencia del peſo que reſiſte, y à las fuerzas de la potencia que le vence.

DEFINICIONES.

1 *Barra, ò Palanca, es una pertiga de hierro, ò madera que ſirve para levantar coſas de mucho peſo.* Se han de diſtinguir en ella tres coſas principales, que ſon *la potencia que mueve*; *el peſo, ò cuerpo grave movido*; y el *apoyo* ſobre que eſtriva, llamado en Latin *Fulcrum*, y en Griego *Hypomochlion*; y es *aquel punto en que eſtriva la Palanca, y que ſirve de centro al movimiento con que ſe levanta el peſo.* Como en la *fig.* 4. GP es la barra, ò palanca; P es la potencia; G el peſo; y F el apoyo, ò hipomochlio, que ſirve de centro para el movimiento de la potencia por el arco PI; y del peſo por GH.

Tres generos hay de palanca, por lo que ſe llaman *de primero, ſegundo, y tercer genero.*

2 *La Vectis, ò Palanca del primer genero, es aquella en que el Hipomochlio ſe halla entre el peſo, y la potencia.* Como (*fig.* 4.) la vectis, ò palanca GP es del primer genero, por tener el hipomochlio F entre el peſo G, y la potencia P.

3 *La Vectis, ò Palanca del ſegundo genero, es aquella en que el peſo eſtà entre el hipomochlio, y la potencia.* Como (*fig.* 5.) la palanca FP es del ſegundo genero, por tener el peſo G entre el hipomochlio F, y la potencia P.

4 *La Vectis, ò Palanca del tercer genero, es aquella en que la potencia eſtà entre el hipomochlio, y el peſo.* Como (*fig.* 6.) la palanca FG es del tercer genero, por aplicarſe la potencia P entre el hipomochlio F, y el peſo G.

PROP.

PROP. I. Theorema.

Si la potencia, y el peso tienen en la Palanca razon reciproca con las distancias del Hipomochlio, sustentarà la potencia al peso, pero no le podrà levantar sobre el equilibrio. (*fig.* 4.)

EL peso G, tenga con la potencia P la razon misma, que la distancia PF à la distancia GF. Digo, que la potencia sustentarà el peso en el equilibrio; pero no le podrà levantar, si que entrambos quedaràn en situacion horizontal, sin levantarse mas la potencia que el peso, ni al contrario. La razon es la misma que dixe en la *prop*. 9. *lib*. 1. de los pesos en la romana; porque siendo las distancias reciprocas con la potencia, y el peso, seràn los arcos, ò velocidades PI, GH, reciprocas con la misma potencia, y peso: luego, ni el peso vencerà à la potencia, ni èsta al peso. Lo que he explicado en la palanca del primer genero, se ha de entender tambien de las demàs.

PROP. II. Theorema.

Si la potencia al peso tiene mayor razon, que la distancia del peso à la distancia de la potencia, contadas del hipomochlio, la potencia vencerà, y levantarà el peso. (*fig*. 4.)

SEa el peso G de una arroba, y la potencia P sea bastante para levantar, sin maquina alguna, una arroba; y la distancia GF sea la mitad de la FP: conque la razon de la potencia al peso, es de igualdad; y la razon de la distancia del peso à la de la potencia, es de menor desigualdad. Digo pues, que por ser mayor la razon de la potencia al peso, que la distancia de èste à la de aquella, vencerà, y levantarà la potencia al peso.

Demonstr. Supongase en P otra potencia O, que tenga con el peso G, la misma razon que la distancia GF à la FP. Esta potancia (1.) tendrà equilibrio con el peso: la potencia P, por tener mayor razon con el peso, que la distancia GF à la FP, es (10.5. Eucl.) mayor que la potencia O: luego go es mayor que la que eftà en equilibrio con el pefo G: luego es forzofo le venza, y levante.

PROP. III. Theorema.

Si la diftancia de la potencia, à la diftancia del pefo, contadas del hipomochlio, tiene mayor razon que el pefo à la potencia, vencerà èfta, y levantarà al pefo. (*fig.* 4.)

LA diftancia FP, tenga con la diftancia FG, mayor razon, que el pefo G à la potencia P; efto es, por exemplo, fea FP tripla de FG, y el pefo G fea duplo de la potencia P. Digo, que la potencia vencerà, y levantarà al pefo.

Demonftr. Afsi como el pefo G es duplo de la potencia P, hagafe la diftancia FL, dupla de la diftancia FG, y ferà FL menor que FP: (10.5.Eucl.) y la potencia P, fi fe aplica en L, tendrà equilibrio con el pefo G, por fer las diftancias reciprocas; y por configuiente, ferà fu velocidad à la del pefo, como efte à la potencia: fi fe aplica en P, tiene mayor velocidad que en L: luego la potencia mifma, aplicada en P, tiene mayor velocidad, refpecto de la del pefo, que fon las fuerzas del pefo, refpecto de las de la potencia puefta en P: luego, fegun el principio fundamental, (12.1.) la potencia en P vencerà, y levantarà al pefo G.

PROP. IV. Theorema.

Si el pefo à la potencia tiene mayor razon, que la diftancia de la potencia à la del pefo, la potencia no podrà levantar, ni aun fuftentar el pefo. (*fig.* 4.)

TEnga el pefo G mayor razon con la potencia P, que la diftancia FP tiene con la diftancia FG: como por exemplo, fea el pefo G, triplo de la potencia P; y la diftancia FP, dupla de FG. Digo, que la potencia no podrà mover, ni aun fuftentar el pefo en equilibrio.

Demonftr. Supongamos una otra potencia O en P, tal, que el pefo à la potencia O, tenga la mifma razon, que la diftancia FP, à la diftancia FG: conque el pefo G tendrà me-

menor razon con la potencia O, que con la potencia P; y serà (10. 5. Eucl.) O mayor que P. Esto supuesto, por ser el peso G à la potencia O, como FP à FG, serà la potencia O (1.) precisamente bastante para sustentar el peso G en el equilibrio: luego la potencia P, que es menor, no serà bastante para sustentar dicho peso en el equilibrio, y mucho menos para levantarle.

PROP. V. Theorema.

Si la distancia del peso tiene mayor razon con la distancia de la potencia, que la potencia con el peso, no podrà la potencia levantar, ni sustentar dicho peso.

(*fig.* 4.)

LA razon de la distancia FG, à la distancia FP, sea mayor que la que tiene la potencia P al peso G: como por exemplo, sea la distancia GF, la mitad de la FP; pero la potencia P sea solo un tercio del peso G. Digo, que la potencia, ni podrà levantar, ni aun sustentar el peso en el equilibrio.

Demonstr. Pongase en P otra potencia O, que tenga con el peso la misma razon que GF à FP, y la potencia O tendrà mayor razon con el peso G, que la potencia P con el mismo peso; conque la potencia O serà mayor que P; pero por tener la potencia O con el peso G, la razon misma de GF à FP, sustenta al peso G precisamente en el equilibrio: luego la potencia P, siendo menor que O, no podrà moverle, ni aun sustentarle en el equilibrio.

Todo lo dicho se demuestra de la propia suerte en las palancas del segundo, y tercer genero.

PROP. VI. Theorema.

A tantas potencias iguales equivale una sola en la Palanca, quantas veces cabe la distancia entre el peso, y el hipomochlio, en la distancia entre el hipomochlio, y la potencia.

(*fig.* 7.)

SUpongamos, que la potencia L es precisamente poderosa para sustentar sin maquina alguna 100. libras de pe-

peso: y pongase en el un cabo de la palanca la potencia L, y al otro cabo un peso M, de suerte, que la distancia HM, quepa quatro veces en la distancia HL. Digo, que la potencia L equivale à quatro potencias iguales à ella; y assi, que podrà sustentar en esta disposicion 400. libras de peso. La razon consta de la *propos.* 1. porque si la potencia L, es igual à 100. libras, y el peso M, es de 400. libras, assi como la distancia HM cabe quatro veces en HL, assi la potencia L cabe, en quanto à la virtud, quatro veces en el peso M: luego la potencia, y el peso son reciprocos con las distancias: luego hay equilibrio entre la potencia, y el peso.

PROP. VII. Theorema.

En una misma distancia de la potencia al hipomochlio, quanto mas se acerca el peso al hipomochlio, tanto mas se aumentan las fuerzas de la potencia.

LA razon consta de la proposicion passada; porque quanto mas se acerca el peso al hipomochlio, tanto mas veces cabe su distancia del hipomochlio, en la distancia invariada del hipomochlio à la potencia: èsta (6.) equivale à tantas potencias iguales à sì, quantas veces cabe la distancia del peso en la distancia de la misma potencia: luego tanto mas crecen las fuerzas de la potencia, quanto, conservando la misma distancia, se acerca mas el peso al hipomochlio.

PROP. VIII. Theorema.

Quanto mas se disminuye la velocidad del peso, y se aumenta la de la potencia, tanto mas crecen las fuerzas de la potencia. (*fig.* 4.)

COnsta de lo dicho, y del principio fundamental de el aumento de la potencia en las maquinas: porque quanto mas se acerca el peso al hipomochlio, tanto mas crecen las fuerzas de la potencia, conservandose èsta en la misma distancia. En este mismo caso, quanto mas se acerca el peso al hipomochlio, tanto menor es la velocidad con

que

que se mueve (porque si el peso G se passa à Q, tanto menor es la velocidad, ò arco QR, que la velocidad G, quanto FQ es menor que FG): luego quanto es menor la velocidad del peso, respecto de la velocidad de la potencia, tanto mas crecen las fuerzas de èsta. Assimismo se prueba, que conservando el peso su misma velocidad, quanto mas se aumenta la de la potencia, tanto mas crecen sus fuerzas; y si por una parte, en virtud de qualquier maquina, se disminuye la velocidad del peso, y se aumenta por otra parte la de la potencia, creceràn mucho mas sus fuerzas.

PROP. IX. Theorema.

Aplicase la doctrina sobredicha à las Palancas de segundo, y tercer genero.

1 SEa (*fig.* 5.) FP la palanca del segundo genero, en quien se coloque el peso en G, y la potencia en P; y el hipomochlio sea F: y si la distancia PF à la distancia FG, fuere como el peso G, à la potencia P, havrà equilibrio, y podrà la potencia precisamente sustentar el peso; pero si dicha razon de las distancias fuere menor que la del peso à la potencia, ò la distancia del peso à la de la potencia tuviere mayor razon que la potencia al peso, no le podrà mantener en el equilibrio. Consta de las *propos.* 1. 4. y 5. de este libro. Tambien si la distancia FP, à la FG, tiene mayor razon que el peso G, à la potencia P, vencerà, y levantarà la potencia al peso. Consta de la *prop.* 3.

2 Sea (*fig.* 6.) FG la palanca del tercer genero, cuyo hipomochlio es F, la potencia P, y el peso G. Si la distancia PF à la distancia GF, es como el peso G, à la potencia P, podrà sustentar èsta al peso en equilibrio; y si el peso G à la potencia P, tiene mayor razon que la distancia PF à la distancia GF, no le podrà mover: consta de la *propos.* 1. y 4. Pero si la distancia PF, à la distancia GF, tiene mayor razon que el peso G à la potencia P, la potencia levantarà al peso, por la *prop.* 3.

Aqui se ha de advertir, que la palanca del tercer genero no añade fuerzas à la potencia para vencer el peso;

por-

porque siendo en ella necessariamente mayor la velocidad del peso, que la de la potencia, por distar mas que ella del hipomochlio, mayor fuerza serà menester para levantar, y mover el peso en esta palanca, que sin ella; porque sin ella tendria la potencia igual velocidad con el peso, y con ella la tiene menor. Pero aunque esto es assi, no se ha de tener por inutil; porque como notò el P. Zucchio, aprovecha en gran manera para muchos casos, en que siendo esforzada la potencia motriz, necessitamos de que el peso se mueva con gran velocidad.

PROP. X. Theorema.

Aplicase la misma doctrina à otros instrumentos ordinarios.

NO solo sirve la palanca para levantar los cuerpos pesados, si tambien para cortarles, y dividirles entre si, y superar facilmente qualquiera resistencia.

1 Para arrancar, ò separar una piedra de otra, como (*fig.*8.) M, N, usan comunmente los Artifices de la palanca OQ. De tal suerte, que si se ha de remover, y apartar la piedra M, quedando firme la piedra N, servirà èsta de hipomochlio en el punto P; el resistente serà M en la extremidad O; y la potencia estarà colocada en el cabo Q, y serà QO palanca del primer genero; y quantas veces PO cupiere en PQ, tanto mas fuerzas tendrà la potencia, iguales à la fuerza natural que tiene sin la maquina. Y si la piedra que se ha de remover fuesse N, serviria la piedra M de hipomochlio en el punto O; el resistente seria N en el punto P; y la potencia en Q, cuyas fuerzas se aumentan tantas veces, quantas PO cabe en OQ; y serà palanca del segundo genero: de que se colige, que siendo igual la resistencia de una, y otra piedra, primero cederà, y se removerà la N, que la M; porque mas veces cabe OP en OQ, que en PQ; y por consiguiente, mas puede la potencia Q contra la piedra N, que contra M.

2 Para arrancar un clavo R, usamos del martillo, y formamos como una palanca del segundo genero, cuyo resistente es R, el hipomochlio S, y la potencia està en T.

3. La

3 La fuerza de las tenazas tambien consiste en componerse de dos palancas del primer genero, que tienen el hipomochlio comun à entrambas, y es (*fig.* 9.) el clavo V; el cuerpo resistente, que se ha de asir, ò arrancar, està en R, y la potencia en XZ; y quanto menor fuere la distancia VR, y mayor la VZ, mayores seràn las fuerzas de la potencia: y lo mismo es en las tixeras por la misma razon, y en otros muchos instrumentos semejantes.

COROLARIO.

De lo dicho se colige, que en la palanca del segundo genero, la potencia que puede precisamente sustentar el peso, siempre es menor que es peso, por estar siempre en mayor distancia del hipomochlio que es el peso: en la palanca del tercer genero siempre es mayor, por la razon contraria; pero en la del primer genero puede ser la potencia mayor, menor, ò igual con el peso.

PROP. XI. Theorema.

De lo dicho se colige quan grandes sean las fuerzas de los musculos de nuestro cuerpo. (*fig.* 10.)

EL principal instrumento, que sirve para executar los movimientos de nuestro cuerpo, y para levantar, y sustentar las cosas pesadas, son los musculos, que compuestos de porciones carnosas, y tendinosas, estàn asidos, mediantes los tendones, à los huessos, à quienes, ya contrayendose, ya relaxandose, mueven, levantan, doblan, ò enderezan, formando este movimiento cerca de las articulaciones, ò junturas. Aqui se ve claramente ser el huesso una palanca, ò vectis à quien rige, y mueve la potencia aplicada, que es el musculo, levantando, y sustentando con su contraccion grandes pesos.

Esta maquina es ciertamente palanca del tercer genero, como se ve en la *fig.* 10. en quien EA es el ombro; el codo, y mano, AB; y el musculo que sirve para levantar, y sustentar el codo, sea DC: este se une con el huesso del ombro en D; y con el huesso AF del codo, no en F, por muchas razones que no son para este lugar, y son bien claras,

ras, si en C; y porque el movimiento del codo AF se hace en la articulacion sobre el punto O, que es el centro de dicho movimiento, es cierto ser el codo, y mano AB una palanca, cuyo hipomochlio es O; el peso està en B; y la potencia motriz en C: luego (*def.* 4.) es palanca del tercer genero, en quien la potencia siempre es mayor que el peso; (corol. antec.) y estando la potencia tan cerca del hipomochlio, es forzoso sean muy poderosas, y robustas sus fuerzas.

Y para que se vea quantas sean, supongo, que en dicha postura recta, y horizontal del brazo, sustente la extremidad B un peso R, que sea el mayor que precisamente pueda sustentar la potencia: el qual, segun consta por la experiencia, puede ser à lo mas, en un mozo robusto, de 26. libras, à que se ha de añadir el peso de mano, y brazo, que aunque es casi de 4. libras; pero por no estàr todo en B, hace efecto, ò gravamen de 2. libras: es pues el peso que sustenta en esta postura la potencia DC 28. libras. La distancia verdadera que hay de la potencia C al hipomochlio O, es la OI perpendicular à la direccion CD, como se verà en su lugar; y la distancia del peso es BO, de suerte, que caberà OI en OB mas de 20. veces: luego la robustèz, y fuerza de la potencia del musculo, es à lo menos veinte veces tanto como 28. libras, (6.) que son 560. libras. Digo pues, que sin la maquina equivale la fuerza de este musculo à 560. libras de peso. Esta fuerza la tiene el musculo en virtud de otra maquina, como en su lugar veremos.

PROP. XII. Problema.

Mover qualquier peso con qualquiera potencia con la Palanca del primero, y segundo genero. (*fig.* 11.)

El peso dado sea B de arbitraria magnitud: sea A la potencia dada, tan debil como se quiera. Digo, que esta potencia podrà mover el peso B, aplicada à la palanca del primero, ò segundo genero, en la forma siguiente. Como el peso B no sea infinito, es cierto tendrà alguna proporcion con las fuerzas de la potencia A. Dividase pues la

pa-

palanca CD en E, de tal ſuerte, que CE à ED tenga la miſma proporcion que el peſo B à la potencia A: pongaſe el hipomochlio en E, el peſo en D, y la potencia en C; y por ſer las diſtancias reciprocas con el peſo, y potencia, havrà entre èſtos equilibrio; (1.) y ſi el peſo ſe acerca un poco mas al hipomochlio, podrà la potencia levantar el peſo en eſta palanca del primer genero.

De la miſma ſuerte obrarèmos en la palanca del ſegundo genero FH, ſi ſe divide la palanca en G de tal ſuerte, que toda entera, à la porcion GH, tenga la miſma razon que el peſo B à la potencia A; porque colocando el hipomochlio en el extremo H, la potencia en F, y el peſo en G, ſerà la diſtancia FH de la potencia, à la diſtancia GH del peſo al hipomochlio, como el peſo B à la potencia A: luego eſtaràn en equilibrio, y por poco mas que ſe acerque el peſo al extremo H, vencerà la potencia.

Eſta es la celebre propueſta de Archimedes, en que ofrecia levantar la tierra, ſi ſe le dieſſe fuera de ella un lugar firme en que poner el hipomochlio; lo qual es caſi tan impoſsible en la practica, como cierto en la eſpeculacion.

PROP. XIII. Problema.

Diſponer de tal ſuerte la potencia, y el peſo en la Palanca, que no pueda la potencia, por valiente que ſea, mover el mas ligero peſo. (fig. 12.)

SEa un peſo A quan pequeño ſe quiera, y ſea la potencia B tan esforzada como ſe quiera. Digo, que ſe pueden colocar en la palanca, con tal diſpoſicion, que no pueda la potencia mover al peſo. Dividaſe la palanca KM en L, de ſuerte, que LM à KL, ſea como la potencia B al peſo A. Pongaſe el peſo en M, y la potencia en K, y (1.) havrà equilibrio: luego ſi el hipomochlio ſe acerca un poco mas à la potencia que eſtà en K, vencerà el peſo A pueſto en M, y no le podrà levantar la potencia.

COROLARIO.

INfierese de lo dicho, que generalmente siempre que por disposicion de una maquina se aumentan las fuerzas de la potencia contra el peso, sucede, que si permutan el peso, y potencia sus lugares, se disminuyen las fuerzas de la potencia, y se aumenta la resistencia del peso, en la misma proporcion en que antes las de la potencia excedian à la resistencia del peso.

PROP. XIV. Theorema.

Explicanse varios modos con que el peso se puede aplicar à la Palanca, y en què se varia su resistencia.

1 EL cuerpo pesado se puede aplicar de tal suerte à la palanca, que èsta le atraviesse por medio de manera, que el centro de la gravedad del cuerpo estè en la misma palanca; como se ve en la *fig.* 13. en que la palanca BA passa por el centro D, que lo es de la gravedad de dicho cuerpo.

2 Puedese el cuerpo pesado poner pendiente de la extremidad de la palanca, como en FE, (*fig.* 14.) de cuyo cabo E pende el peso H.

3 Se puede colocar el peso en la extremidad de la palanca, de suerte, que el centro de la gravedad estè sobre ella, como en DE, (*fig.* 15.) sobre cuya extremidad E se supone colocado el peso.

4 Se puede colocar de suerte, que el centro de la gravedad estè debaxo de la palanca, como en TX. (*fig.* 16.)

Estos son los modos mas principales de colocarse el peso en la palanca, de cuya varia disposicion se siguen diferentes grados de resistencia, que se explican en las proposiciones siguientes.

PROP.

PROP. XV. Theorema.

Quando el centro de la gravedad del peso està en la misma Palanca, la misma fuerza basta para sustentarle, ò en la situacion horizontal, ò sobre ella, ò debaxo de ella.

(*fig.*13.)

SEa la palanca horizontal AB, cuyo hipomochlio sea C, la potencia estè en B, y el peso en A; de suerte, que el centro de la gravedad del peso estè en la misma palanca: muevase sobre el hipomochlio C, ò à la situacion FG, en que el centro de la gravedad està en L; ò à la situacion HN, en que el centro de la gravedad està en M. Digo, que la misma potencia B, tanto, que estè en G, como en N, sustentarà con la misma facilidad el peso; y la resistencia de èste siempre serà la misma en qualquiera postura. La razon es, porque en todo caso conserva el centro de la gravedad del peso una misma distancia del hipomochlio C, como tambien la potencia: luego en qualquiera situacion es una misma la proporcion entre las distancias: luego la fuerza de la potencia siempre serà la misma, como tambien la resistencia del peso. Lo mismo se ha de decir en las palancas del segundo, y tercer genero.

PROP. XVI. Theorema.

Quando el peso està pendiente de la Palanca, tambien basta la misma fuerza para sustentarle en qualquiera situacion. (*fig.*14.)

EN la palanca FE, cuyo hipomochlio es G, estè pendiente el peso H de la extremidad E. Digo, que si se mueve la palanca, y se constituye en la situacion QP, ò otra qualquiera, la misma potencia bastarà para sustentar el peso en todo caso. Porque las distancias del peso, y potencia al hipomochlio, se toman de las perpendiculares PM, NQ, tiradas del punto P de la suspension del peso, y del punto Q, de la aplicacion de la potencia; y como por ser proporcionales los triangulos GPM, GNQ, la misma razon tenga NG à GM, que QG à GP; esto es, que FG à GE sus iguales, la misma proporcion tendràn entre sì, en qualquiera situacion, las distancias del peso, y de la potencia: luego en qualquiera situacion seràn las mismas fuerzas las de la potencia, como tambien la resistencia del peso; y por consiguiente, las mismas fuerzas bastaràn para sustentarle en qualquiera disposicion de las referidas.

PROP. XVII. Theorema.

Quando el centro de la gravedad del peso està sobre la Palanca horizontal, quanto mas se levanta, tanto menor fuerza basta para sustentarle; y quanto mas se deprime, tanto mayor fuerza es menester. (*fig.* 15.)

SEa la palanca DE en situacion horizontal, cuyo hipomochlio sea C; y en su extremidad E, pongase el peso G, cuyo centro I de la gravedad, estè sobre la palanca; y apliquese la potencia en D, y muevase la palanca hasta ponerse en MK. Digo lo primero, que en esta situacion es menester menor fuerza para sustentar el peso, que quando estava en DE.

Demonstr. En DE, la linea de la direccion; esto es, la linea que del centro de la gravedad del cuerpo va al centro de la tierra, es IG; pero en MK, ya no es IG la linea de la direccion, si IS; y por consiguiente, la distancia del peso al hipomochlio en la situacion horizontal DE, es GC; pero en la MK, es CS menor que CG: luego (7.) siendo en todo caso una misma la distancia que hay de la potencia al hipomochlio, menor fuerza es menester para sustentar el peso en la disposicion MK, que en la DE.

Muevase la palanca DE, y pongase en la situacion RO. Digo, que en este caso es menester mayor fuerza para sustentar el peso, que en DE: porque en DE, es la linea de la direccion IG; pero en RO, es IS; y por consiguiente, en este caso la distancia del peso al hipomochlio, es CS mayor que CG: luego (7) mayor fuerza se requiere en RO, que en DE para sustentar el peso, haviendo la misma distancia entre la potencia, y hipomochlio.

PROP.

PROP. XVIII. Theorema.

Quando el centro de la gravedad del peso està debaxo de la Palanca horizontal, quanto mas se levanta el peso, tanto mayor fuerza es menester para sustentarle; y tanto menor, quanto mas se deprime.
(*fig.* 16.)

SEa la palanca horizontal TX: sea el hipomochlio A: la potencia estè en T: y el peso sea V, cuyo centro O de la gravedad estè debaxo de la palanca. Digo, que en la postura SK se requiere mayor fuerza para sustentar el peso; porque en TX la linea de la direccion es OV; y en SK, es OK: luego en TX, la distancia del peso al hipomochlio es AV; y en SK, es AK mayor que AV: luego en esta disposicion es menester mayor fuerza que en la primera. Digo tambien, que en RK, es menester menor fuerza, por ser la distancia AK menor que AV.

PROP. XIX. Theorema.

La figura del hipomochlio conduce mucho para facilitar, ò dificultar el movimiento del peso. (*fig.* 17.

LA razon es, porque puede ser tal la figura del hipomochlio, que al moverse sobre èl la palanca, se varien los puntos en que estriva; y por consiguiente, no se conserven las mismas distancias del peso, y potencia al hipomochlio: como por exemplo, si la palanca se colocasse sobre una esfera, ò cilindro, y en la postura horizontal tocasse el punto A en el obliquo, estrivaria en el punto B; donde se ve claramente variarse la proporcion de las distancias; y por consiguiente, la facilidad de la potencia.

PROP. XX. Theorema.

Si la potencia mueve à la Palanca por linea obliqua, seràn menores sus fuerzas, que moviendola por linea perpendicular. (*fig.* 18.)

DIgo, que si la potencia A impele la palanca por la linea AB obliqua, podrà menos contra el peso, que si con la misma fuerza la impeliere por la perpendicular AC. La razon es, porque impeliendo por la linea AB, parte del impulso se consume en retraer la misma palanca del hipomochlio: como tambien moviendo por AD, se emplea parte en moverla contra el hipomochlio; pero impeliendola por la perpendicular AC, todo el impulso se emplea en levantar el peso: luego mas facilmente le moverà la potencia, encaminando su movimiento por la linea AC, que por otra alguna. Otra razon hay mas eficàz, y evidente, y es la que se colige del Theorema siguiente.

PROP. XXI. Theorema.

Quando la potencia mueve la Palanca por linea obliqua, su verdadera distancia es la perpendicular, que sale del hipomochlio à la linea de su movimiento. (*fig.* 19.)

SUpongamos, que una potencia mueva la palanca AB por la linea obliqua BC, à quien es perpendicular la FD, que sale del hipomochlio. Digo, que la distancia verdadera de la potencia al hipomochlio es la perpendicular FD; y segun èsta, se han de nivelar las fuerzas de la potencia.

Demonstr. Aunque lo mismo es, que la potencia estè aplicada en B, ò que mueva tirando de una cuerda BC, mientras conserve siempre la misma linea del movimiento, ò por mejor decir, la misma obliquidad con la palanca, ò angulo B; pero para mayor claridad, supongo estè la potencia aplicada en el punto D de la cuerda, y que tirando do se passe la potencia à E, y el cabo de la palanca baxe à G; tirese pues la recta EG, y juntese FE.

En los triangulos FBD, FGE, los lados FB, FG son iguales, como tambien BD, GE por suposicion; y suponiendose los angulos B, G iguales, seràn (4. 1. Eucl.) los angulos BFD, GFE iguales; y quitando el comun GFD, quedaràn los angulos BFG, DFE iguales; y por consiguiente, los arcos BG, HI, que son sus medidas, seràn iguales. El arco DE, por donde se moviò la potencia, tiene con HI, ò BG, ò AK, por donde se moviò el peso, la misma razon que FD à AF: luego la verdadera distancia, segun la qual crece, ò se disminuye el movimiento de la potencia, es la linea FD, que sale del hipomochlio, y es perpendicular à la linea del movimiento de la potencia.

COROLARIOS.

1 *LA linea perpendicular à la palanca, es la mas apta para mover el peso, y por ella tendrà la potencia mayores fuerzas que por otra qualquiera, mientras salgan todas de un mismo punto de la palanca. Explicome en la palanca AB (fig. 20.) cuyo hipomochlio es C. Digo, que mas facilmente moverà la potencia al peso por la perpendicular BD, que por otra qualquiera. Supongamos se mueva por la BE, que forma el angulo agudo CBE: luego caerà dentro del circulo. Tirese pues la perpendicular CF, que, como dixe, es la verdadera distancia de la potencia, quando mueve por BE. Esta distancia CF, es necessariamente menor que la CB, que es la distancia de la misma potencia quando mueve por BD: luego menores son sus fuerzas quando mueve por BE, que quando por BD. Supongamos tambien que mueva por BG, formando el angulo obtuso CBG: conque el angulo CBH serà agudo, y la BH caerà dentro del circulo, y la perpendicular CI serà la verdadera distancia de la potencia, que siendo menor que CB tendrà la potencia menores fuerzas, quando dirige por ella su movimiento.*

2 *Si la potencia es un peso, que mueve solamente la palanca por su natural gravedad, su verdadera distancia en diferentes posituras serà el segmento de la palanca horizontal, contenido entre el hipomochlio, y la perpendicular. Sea la palanca AB, (fig. 21.) y el peso que sirve de potencia con su gravedad estè en B: considerese la*

pa-

palanca en la situacion horizontal EF, *y tirese la perpendicular* BC. *Digo, que la verdadera distancia de dicha potencia en* B, *es* DC. *La razon es, porque el cuerpo grave guia su movimiento por la perpendicular al horizonte, y à qualquier paralela suya, qual es* EF; *y por la misma razon, si el peso movente estuviere en* H, *serià su verdadera distancia la* DG.

PROP. XXII. Theorema.

Explicase la razon de algunas experiencias curiosas.

1 DE lo dicho se colige la razon, porquè levantamos con facilidad una pica, tomandola por su mitad; pero con gran dificultad si la tomamos por un cabo; de suerte, que solos aquellos la pueden levantar en esta forma, que alcanzan grandes fuerzas. Es pues la razon, porque tomandola por el medio, la tomamos, y levantamos por el mismo centro de su gravedad; y assi bastan solas aquellas fuerzas, que son iguales à su peso; pero tomandola por un cabo, y levantandola, la dividimos en dos partes muy desiguales, la menor dentro del puño, y la mayor fuera; y se forma una palanca de primero, ò tercer genero; de suerte, que siempre està la potencia mas cerca del hipomochlio, que el peso de la pica.

Para mayor claridad vease la *fig.* 22. en que la pica PL, si se toma por el medio M se divide en partes iguales, y se levanta por el centro de su gravedad; y assi ha menester pocas fuerzas; pero tomandola con el puño por la extremidad PO, se divide en dos partes muy desiguales, OL mayor, y OP menor; y la mano hace oficio de hipomochlio, y de potencia movente, ò sustentante de la parte mayor OL; de suerte, que si el punto del puño, correspondiente à P, se tiene como fixo, y firme; y el otro punto que corresponde à O se mueve àzia arriba, serà palanca del tercer genero, cuyo hipomochlio es P, y la potencia està en O; y es forzoso que por estàr tan cerca del hipomochlio P haya de experimentar gran resistencia en el peso de la pica; y si la parte del puño correspondiente à O se tiene firme, y la correspondiente à P moviendose àzia baxo hace baxar

xar el punto P, serà palanca del primer genero, en que la potencia P, por estàr tan cerca del hipomochlio O, ha de tener gran dificultad en levantar el peso de la pica. El modo de determinar què fuerzas sean menester para levantarla en esta disposicion, se verà en la Estatica.

Aqui se ha de advertir, que la mayor dificultad se siente quando la pica està en situacion horizontal, como en PL; porque quanto mas se elevare, como en PQ, siempre se hallarà menos, por ser la distancia OR, ò PR, tomada hasta la perpendicular, la que determina la mayor, ò menor dificultad; (21.) y siendo esta distancia menor que la PL, ò OL, y tanto menor, quanto mas se levanta, se sigue ser tambien menor la dificultad que siente la potencia.

2 Coligese tambien de lo dicho la causa porquè aplicando la rodilla al medio de ũn palo, y las manos à sus extremidades, con tanto mayor facilidad le rompemos, quanto mas distan del medio las manos; y es, porque se forman dos palancas del primer genero, para quienes sirve de hipomochlio la rodilla. Sea (*fig.* 23.) el baculo GMH, cuyas extremidades G, H, se toman con las manos, y se aplica à la rodilla IL; es cierto, que forcejando para romperle se dobla algun tanto, de suerte, que el punto M del medio, se aparta del medio de la rodilla; conque se forman dos palancas del primer genero HLM, GIM, que tienen el hipomochlio en L, I; el resistente que se ha de vencer està en M; y las potencias, que son las manos, estàn la una en H, y la otra en G: luego quanto mayores fueren las distancias HL, GI de los hipomochlios, creceràn mas las fuerzas de las potencias, y venceràn la resistencia de M con mayor facilidad, y romperàn el palò por el punto M.

3 Con la misma doctrina de la palanca se conoce la causa, y cessa la admiracion que suele ocasionar la siguiente experiencia. Sobre dos banquillos, ò escaños de igual altitud, ponganse dos vasos H, I, (*fig.* 24.) ò vacìos, ò casi llenos de agua para mayor seguridad: pongase sobre ellos un palo LO, que estè seco; de suerte, que con la fuerza de un golpe se pueda romper, y sus extremidades passen algun poco àzia el medio de los vasos; y con otro palo com-

competente desele un golpe en medio con buena fuerza, y se romperà el palo LO por medio en P, sin daño alguno de los vasos que le sustentan, y sin derramarse gota de agua. La razon es, porque la potencia que mediante el golpe se aplica en P, divide el baculo en dos partes PL, PO, cuyos cabos, que concurren en P, se mueven àzia baxo al tiempo de la fraccion, y los otros dos àzia arriba, conque son dos palancas del primer genero, cuyos hipomochlios son los labios M, N de los vasos, la potencia està en P, que con su movimiento hace ir àzia baxo las porciones mayores MP, NP, y levanta àzia arriba las menores ML, NO: y como las distancias PM, PN sean con tanto excesso mayores que las ML, NO, que son las que se levantan, es forzoso que en los puntos, ò estrivos M, N, se haga poca, ò ninguna fuerza al tiempo de romperse el palo por el punto P, y baxar las extremidades concurrentes en P, y subir las otras ML, NO, por lo que no reciben los vasos daño alguno.

PROP. XXIII. Theorema.

Quando dos potencias aplicadas à los cabos de la Palanca so[s]tienen un peso que de ella està pendiente, ò que tienen su centro d[e] gravedad en la misma Palanca, la potencia mas cercana al pe[so] sustenta mayor porcion que la mas remota, en proporcion reciproca de las distancias. (*fig.* 25.)

LAs dos potencias M, N, estavan aplicadas à los cab[os] de la palanca, de quien depende el peso P. Digo, q[ue] la potencia M sustenta mayor parte del peso, que la pote[n]cia N, en proporcion reciproca de las distancias; de suert[e] que si, por exemplo, la distancia NO es doblada de la di[s]tancia MO, la potencia M sustenta doblada parte de pe[so] que la potencia N: como si el peso P fuere de 60. libra[s] la potencia M sustenta las 40. libras, y la potencia N las 2[0] y para que entre las dos sustenten el peso en la postura so[]bredicha, serà menester que en N, haya una potencia suf[i]ciente para sustentar 20. libras; y en M, otra bastante pa[ra] 40. libras.

De-

Demonstr. La potencia M sirve de hipomochlio, respecto de la potencia N: luego para que haya equilibrio, y pueda la potencia N sustentar el peso P, havrà de tener la potencia N, con el peso P, la misma razon, que la distancia MO del hipomochlio, y peso, tiene con la distancia NM del hipomochlio, y potencia. (1.) La distancia MO se supone ser la tercera parte de NM: luego la potencia N, es la tercera parte del peso P; y siendo èste 60. libras, serà la potencia N bastante para sustentar 20. libras. Assimismo la potencia N, sirve de hipomochlio à la potencia M: luego, para que èsta pueda sustentar el peso P, havrà de tener con dicho peso la razon que la distancia ON tiene con la distancia MN, aquella es dos tercios de èsta: luego la potencia M equivale, y se equilibra con dos tercios del peso P; y siendo èste 60. libras, la potencia M havrà de equivaler à 40. libras.

COROLARIOS.

1 *SI el peso està en medio de la palanca, tanto sustenta la una potencia, como la otra.*

2 *Las dos potencias juntas han de ser iguales, ò poder tanto, como una potencia, que sin maquina sea suficiente para sostener el peso.*

3 *De lo dicho se colige, que en la palanca del primer genero, el hipomochlio sustenta tanto al peso, como à la potencia, y entrambos le gravan; pero en la palanca del segundo genero, el hipomochlio sustenta parte del peso, y la otra parte la potencia, tocandole à cada uno su gravamen segun fuere la proporcion reciproca de las distancias, con el peso, y potencia.*

4 *De lo dicho se infiere tambien el modo de señalar el punto en la palanca, para suspender alli un peso, de suerte, que si los dos que le han de sustentar tienen fuerzas desiguales, sean gravados cada uno segun sus fuerzas precisamente: como por exemplo, si uno puede solamente sustentar peso de 20. libras, y otro puede sustentar 40. sumense entrambos numeros, y seràn 60. Dividase aora la palanca en dos partes, que tengan entre sì la razon que 40. tiene con 20. y sea el punto O: (fig. 25.) suspendase en O un peso de 60. lib. y poniendo la fuerza menor en N, y la mayor en M, serà èsta gravada en 40. libras, y aquella en 20. porque serà como NO à*

MO;

MO; assi la fuerza, y gravamen de M, à la fuerza, y carga de N.

5 Que la palanca sea mas larga, ò mas corta, nada conduce para mayor, ò menor facilidad de sustentar el peso, mientras que la proporcion de las distancias con las potencias sea una misma: como si la palanca mayor MN, y la menor QR estàn divididas en O, y S proporcionalmente, esto es, que MO à ON, sea como QS à SR, y el mismo, ò igual peso P se suspende en entrambas por dichos puntos, el mismo gravamen sentiràn las potencias en la una que en la otra; porque tanta parte del peso sustenta la potencia M, como Q, y la potencia N, como R; y por el corol. 2. las potencias M, y N juntas, son iguales al peso P en la palanca mayor, como tambien en la menor.

PROP. XXIV. Theorema.

Quando dos potencias sustentan un peso, cuyo centro de gravedad està sobre la palanca, y èsta tiene situacion obliqua al horizonte, la potencia que està en el cabo mas baxo siente mayor peso; y al contrario si el centro de la gravedad està debaxo de la palanca. (fig. 26.)

LAs potencias A, y B llevan en situacion inclinada un peso, cuyo centro C està sobre la palanca, y en medio de ella. Digo, que la potencia B sustenta mayor parte del peso, que la potencia A. La razon es, porque el peso siempre agrava las potencias por la linea perpendicular, que es la que determina las verdaderas distancias del peso, hipomochlio, y potencias: luego el peso C, que en la disposicion horizontal de la palanca cargaria sobre el punto D, en la obliqua carga sobre E, mas cerca de la potencia B, y mas lexos de A: luego (23.) la potencia A siente alivio, y la B mayor gravamen, y peso.

Pero si el peso tiene su centro de gravedad debaxo la palanca, como en I, sucederà al revès; porque agrava por la linea perpendicular IK, y es lo mismo que si estuviera pendiente del punto K: luego se acerca mas à la potencia F mas elevada, y se aparta de la G mas baxa: luego aquella sentirà mayor gravamen, y èsta, alivio.

LI-

LIBRO III.

DE LA SEGUNDA MAQUINA fundamental, llamada Torno, Argue, ò Exe en la rueda.

DEspues de la palanca, se sigue la segunda maquina fundamental, llamada comunmente *torno*, ò *argue*, cuyo nombre Greco-Latino es *Axis in peritrochio*, que es lo mismo que un exe, ò cilindro en la rueda. Tiene tal dependencia de la palanca, que casi no se distingue de ella, como luego verèmos; por lo qual no serà dificultosa su noticia à quien tuviere bien comprehendido lo que expliquè en el libro antecedente.

PROP. I. Theorema.

Explicase la forma, y disposicion del torno, sus diferencias, y uso.

PAppo Alexandrino en el fin del *lib.* 8. de las *Colecciones Mathematicas*, y otros Autores, descriven el torno en la forma siguiente. Vease la *fig.* 27. en la qual AB es el *exe*, *abla*, ò *cabrio*, que es un cilindro, ò coluna redonda, llamada tambien *timpano*: E, y F son los clavos cilindricos, y muy firmes, que ruedan dentro los encaxes de los maderos, ò pies FG, EH, de tal suerte, que el exe venga à tener situacion horizontal: CD es una rueda bien unida con el exe, à quien llaman los Griegos *Peritrochio*, y de

quien

quien ſalen los rayos SQ, CN,&c. La cuerda de quien pende el peſo, ſe ata firmemente al exe, y queda formado el torno.

Su uſo es como ſe ſigue. La mano, ò potencia motriz ſe aplica à los rayos de la rueda, y haciendole dar bueltas juntamente con el timpano, ò exe, va rollandoſe en èl la cuerda que lleva conſigo el peſo L, y le ſube àzia arriba.

El torno puede ſer en dos maneras. El uno tiene el timpano horizontal, ò paralelo al horizonte, como es el que acabamos de explicar. El ſegundo tiene el timpano perpendicular, como ſe ve en la *fig.* 28. El primero ſirve ordinariamente para levantar los peſos; y el ſegundo, para traerles horizontalmente, ò hacerles ſubir por la cueſta de un monte. No me detengo mas en la explicacion de la fabrica del ſegundo, por no diferenciarſe de la del primero mas que en la ſituacion.

Eſtas dos eſpecies de torno ſe pueden, y ſuelen fabricar ſin rueda, atraveſando ſolamente por el timpano dos palos, ò perticas fuertes; conque tienen el miſmo uſo que los ſobredichos, pues aplicandoſe la potencia à las extremidades de las perticas, y dando bueltas, ſe embuelve la cuerda en el timpano, y ſe ſube, ò trae el peſo con facilidad ſuma. Si la ſituacion del timpano es horizontal, ò paralela al horizonte, como en la *fig.* 29. ſe llama *ſuccula*, y *cabria*, ò *trucha*; pero ſi dicho timpano es perpendicular al horizonte, como en la *fig.* 30. ſe llama en Latin *ergata*, y vulgarmente *argue*. Todas eſtas maquinas convienen en una miſma diſpoſicion eſſencial, y aſsi ſon unas miſmas ſus propiedades, que explico en las propoſiciones ſiguientes.

PROP. II. Theorema.

El torno es Palanca perpetua del primer genero. (*fig.* 31.)

SEa ABC la craſsicie, ò baſa del timpano, cuyo diametro ſea BC, y ſu centro E: la rueda concentrica al timpano ſea FGH, en cuya periferia eſtàn los rayos HI, PO, &c. y del punto B del timpano eſtè pendiente el peſo K, y la la potencia ſupongaſe aplicada en I: concibaſe la linea IEB paralela al horizonte; conque la potencia aplicada en I harà con ſu impulſo baxar el rayo IH, y juntamente harà rodar el torno, haſta que la linea IEB tenga la ſituacion OEN, y el punto B de la cuerda ſe ſubirà à N, à quien ſeguirà el peſo: donde ſe ve claramente, que el punto E es inmoble, y por conſiguiente hipomochlio, la potencia eſtà en I, y el peſo en B: luego IEB es palanca del primer genero, que tiene el hipomochlio entre la potencia, y el peſo: luego el torno viene à ſer palanca del primer genero. Que ſea palanca perpetua es conſtante, porque como el torno ſea circular, en haviendo baxado la palanca IEB à OEN, ſe pone en el lugar de aquella la TEQ, y baxando èſta de la miſma ſuerte, ſe ſubſtituye otra en ſu lugar, y aſſi infinitamente: conque moviendo ſucceſſivamente la potencia los rayos del torno, continùa el movimiento ſuyo, y el del peſo quanto quiere: luego el torno viene à ſer palanca perpetua.

PROP. III. Theorema.

La potencia viviente, que preciſamente baſta para ſuſtentar un peſo en el torno, tiene con el peſo la razon miſma que el ſemidiametro del timpano, con el ſemidiametro de la rueda, y rayo; y al contrario.

(*fig.* 31.)

DIgo, que ſi una potencia viviente, como por exemplo, la mano, aplicada en I, tiene equilibrio con el peſo pendiente de B; eſto es, tiene preciſamente las fuerzas que baſtan para ſuſtentarle, tendrà con el peſo la razon miſma, que tiene la diſtancia, ò ſemidiametro EB del timpano, à la diſtancia EI, compueſta del ſemidiametro EH de la rueda, y del rayo HI. La razon es, porque (2.) la IB es palanca del primer genero, cuyo hipomochlio es E, la potencia eſtà en I, y el peſo en B: luego (*lib.2.prop.1.*) quando el peſo, y potencia guardan equilibrio, tienen entre sì razon reciproca con las diſtancias, y ſeràn I à B, como BE à EI: y ſi guardan eſta proporcion, tendràn equilibrio.

CO-

COROLARIO.

EN este caso siempre serà la potencia menor que el peso, porque siempre EB serà menor que EI.

PROP. IV. Theorema.

Explicase la proporcion que tiene en el torno la potencia inanimada con el peso. (*fig.* 31.)

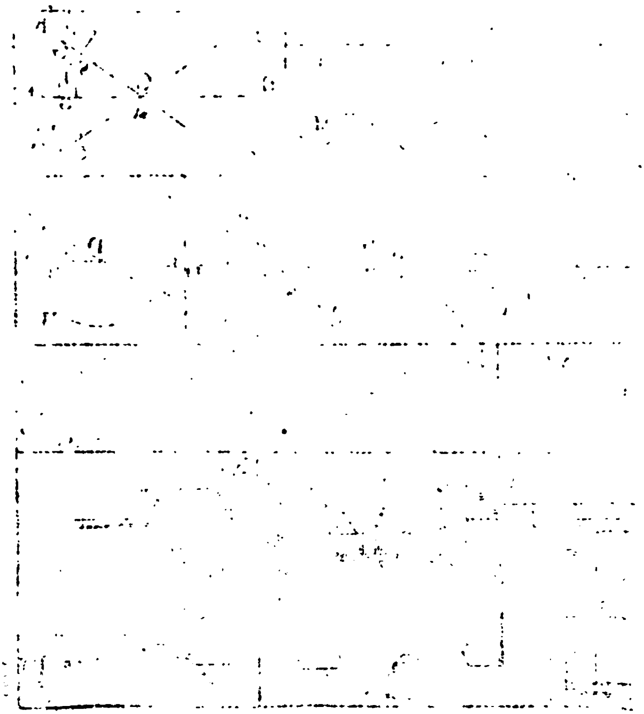
LA potencia inanimada sea el plomo D, y primeramente suspendase en I, y tenga equilibrio con el peso suspenso en B. Digo, que en esta postura horizontal, la misma razon tendrà la potencia D al peso K, que tiene EB con EI, por la misma razon de la prop. anteced.

Suspendase el mismo peso en T, y como el plomo obre segun su peso, y gravedad natural, moverà el torno exerciendo sus fuerzas por la linea TD, que va àzia el centro de la tierra. Tirese del punto E, centro del torno, la EH perpendicular à TD. Digo, que la potencia TD al peso K, aplicado, ò pendiente de B, tiene la misma razon que EB, distancia de dicho peso al hipomochclio, à la perpendicular EH. La razon es, porque EH es la verdadera distancia entre el hipomochlio, y potencia, por moverse en este caso la potencia por linea obliqua à la palanca TQ, TEQ: (21. *lib.* 2. de este trat.) luego por essas distancias se han de medir las fuerzas de la potencia. Esta razon no vale en la potencia animada, porque como èsta mueva al peso procediendo por linea circular, siempre impele por la tangente, que es perpendicular al radio IE: conque siempre guarda una misma distancia del hipomochlio, y siempre es una misma la direccion de su movimiento; y el arco que corre la potencia, guarda siempre una misma proporcion con el que camina el peso; y assi, de la misma suerte se miden sus fuerzas en IEB, que en TEQ, como antes dixe.

COROLARIO.

SIguese de lo dicho, que quando la potencia es inanimada, como por exemplo el plomo D, no siempre es menor que el peso,

à



quien se equilibra en el torno: porque la perpendicular que sale centro E al perpendiculo TD, puede ser menor que el semidiametro EB del timpano; porque el perpendiculo TD puede caer sobre mismo semidiametro entre C, y E; y en este caso, es forzoso sea mayor la potencia, que el peso à quien sostiene.

PROP. V. Problema.

Dado el semidiametro EB del timpano, (fig. 31.) y la distancia IE, ò HE, hallar las fuerzas del plomo pendiente de I, ù de T, bastantes para sustentar el peso pendiente de B.

O*Peracion.* Hagase una regla de tres en la forma siguiente; y para claridad, supongo, que IE consta de 6. partes iguales à EB; y que HE contiene 5. de dichas partes: sea el peso K de 600. libras: hagase, como EI 6. à BE 1. assi 600. à 100. Digo pues, que la potencia que aplicada en I, es suficiente para sustentar el peso B, es equivalente à 100. libras. Assimismo, como HE 5. à BE 1. assi 600. à 120. conque la potencia, ò plomo puesto en T, si se equilibra con B 600. es de 120. libras. Consta de las *proposiciones* 3. y 4.

PROP. VI. Theorema.

Quando la potencia tiene mayor razon con el peso, que el semidiametro del timpano al semidiametro de la rueda junto con el radio, elevarà la potencia al peso. Tambien si la distancia de la potencia, y el centro tiene mayor razon con el semidiametro del timpano, que el peso à la potencia, levantarà esta al peso; y al contrario. (fig. 31.)

DIgo lo primero, que si la potencia aplicada en I tiene mayor razon con el peso pendiente de B, que tiene EB con EI, la potencia, no solo se equilibrarà con el peso, y le sustentarà, si que prevalecerà, y le levantarà. Digo lo segundo, que si la IE tiene mayor razon con EB, que tiene el peso en B con la potencia aplicada en I, prevalecerà la potencia, y levantarà el peso sobre el equilibrio. Digo lo ter-

tercero, que si la potencia prevalece contra el peso levantandole sobre el equilibrio, tendrà con el peso mayor razon, que EB con EI; ò que EI con EB tendrà mayor razon, que el peso con la potencia.

Demonstr. (2.) La IEB, es palanca del primer genero. En la palanca se requieren dichas proporciones, para que la potencia pueda levantar al peso, como demonstrè en las *prop.* 4. y 5. del *lib.* 2. luego tambien en el torno.

COROLARIOS.

1 *PAra que la potencia que precisamente sustentava al peso, le pueda mover, y levantar, ò se ha de hacer mayor, ò ha de apartarse del centro mas de lo que estava: como si una potencia aplicada en* H, *sustentava el peso* K, *para que le pueda mover, y hacer subir, es preciso, ò que dicha potencia crezca, ò que se aplique al punto* I.

2 *Quanto mayor fuere la distancia de la potencia al centro, respecto del semidiametro del timpano, tanto menor potencia serà bastante para sustentar, y levantar el peso. Y quanto una misma potencia mas se apartàre del centro del timpano, con tanta mayor facilidad, y suavidad sustentarà, y moverà al peso. Tambien quanto mas delgado fuere el timpano, tanto menor potencia bastarà para sustentar el peso, permaneciendo las mismas circunstancias.*

3 *Si rodando el torno, de tal manera se rolla la cuerda, que unas bueltas caen sobre otras, crece la dificultad de mover el peso, porque crece el semidiametro del timpano, que ademàs de la magnitud que tenia, incluye lo gruesso de la cuerda tantas veces, quantas fueren sus bueltas; y siendo siempre una misma la distancia de la potencia, es fuerza tenga menor razon con la distancia del peso, y le levantarà con mayor dificultad.*

4 *Quando la potencia mueve un peso en el torno, la misma razon que hay de la distancia entre la potencia, y centro del timpano, al semidiametro del timpano, essa misma hay de la velocidad con que se mueve la potencia, à la velocidad con que se mueve el peso: porque mientras la potencia baxa por el arco* IO, *el punto* B *de la cuerda que lleva al peso, se sube por el arco* BN; *y tanto precisamente sube el peso* K *àzia* B: *luego la misma razon tiene el arco*

IO

IO, con el arco NB, que con el espacio que sube el peso: el arco IO al NB, tiene la razon de IE à BE: luego el movimiento de la potència, al del peso, es como IE à BE.

5 *La velocidad de la potencia à la del peso, y la linea que aquella corre, à la que èste camina, tiene mayor proporcion que el peso à la misma potencia en el caso sobredicho.*

6 *Quanto mas tardo es el movimiento del peso, respecto del de la potencia, tanto mas facilmente sube el peso: conque àssi en el torno, como en las demàs maquinas, tanto mas facil es el levantar, y mover el peso, quanto mas tiempo se gasta en su movimiento.*

PROP. VII. Theorema.

Explicase la maquina llamada comunmente Grua. (fig. 32.)

ES bien conocida la maquina à quien llaman los Griegos *Geranon*, y vulgarmente *Grua*: usan de ella comunmente los artifices para subir las piedras grandes, y pesadas à las fabricas: consta de una rueda grande FG, y un timpano CI, à quien se ata una cuerda, que passando por la garrucha H, se ata firmemente al peso que se ha de subir. Su uso es bien notorio: entran en la rueda uno, ò dos hombres, y como si caminassen, van pisando la circunferencia interior, conque da bueltas la rueda, y se embuelve la cuerda en el timpano, levantando, y subiendo el peso.

Las fuerzas de la potencia aplicada en A, para subir el peso, se han de considerar en la forma siguiente: porque el hombre puesto en A mueve la rueda, en virtud de su propia gravedad, tirese la linea AD perpendicular al horizonte, que es la que dirige el impetu de la gravedad: del centro C de la rueda, tirese la CD perpendicular à la sobredicha linea, y esta serà la verdadera distancia entre el centro y la potencia; (21.2.Maquin.) y segun ella, se han de nivelar las fuerzas de la potencia: de suerte, que siendo como CD al semidiametro del timpano; assi el peso L, à la potencia A, podrà èsta sustentar el peso precisamente; pero siendo la razon de CD, al semidiametro del timpano, mayor que la del peso à la potencia, vencerà èsta, y le subirà quanto quisiere. Consta de las *proposiciones* 4. y 6. de este libro. Esta maquina es peligrosa, porque si se rompe la cuerda, lleva gran riesgo la vida del que mueve la rueda, por la gran velocidad con que se rebuelve.

PROP. VIII. Theorema.

Explicanse algunas maquinas, cuyas fuerzas tienen dependencia del torno.

1 EL *Argue* se aplica regularmente con feliz efecto para subir piedras grandes, y otros materiales à las fabricas en la forma que expressa la *fig.* 33. Puede moverle un cavallo, ò muchos hombres aplicados à los rayos, ò palancas A, B, C, D; y quanto estas fueren mas largas, se podrà subir mayor peso, y con menos fatiga. La cuerda que sube el peso, se guia por la garrucha E, que ha de estàr bien firme en tierra; y dando la buelta por otra garrucha F, levanta el peso al lugar que se desea.

2 De semejante maquina usan los Marineros, para arrancar, y subir las ancoras; para entrar cosas de mucho peso en los navios; para sacar à tierra algunos barcos grandes; y para otros muchos efectos.

3 Al torno se vienen à reducir los molinos, tanto de agua, como de viento, cuya disposicion no explico por ser tan vulgar, y sabida.

PROP. IX. Theorema.

Explicase el maravilloso aumento de la potencia con dos, ò mas Palancas. (*fig.* 34.)

USan comunmente los artifices de algunas maquinas, que por componerse de muchas de una misma especie, alcanzan mayores fuerzas. Las primeras que se nos ofrecen son las que se componen de dos, ò mas tornos; y supuesto que (como dixe en la *propos.* 2.) el torno se reduce à la palanca, la maquina compuesta de dos, ò mas tornos se reducirà à la composicion de dos, ò mas palancas; y assi, aunque la composicion de muchas palancas sea re-

gu-

gularmente de poco util, si no son perpetuas como el torno; pero es necessario tener entendido el maravilloso aumento de fuerzas que con ellas adquiere la potencia, para llegar al conocimiento de lo mucho que puede, aplicada à las maquinas compuestas de muchos tornos.

Sea pues (*figura* 34.) la palanca IM, cuyo hipomochlio es L; y sea ML à LI, como 10. à 1. conque la potencia aplicada en M, podrà diez veces tanto como por sì sola, ò equivale à 10 potencias iguales à ella misma: apliquese à su extremidad otra palanca NP, cuyo hipomochlio sea O, y sea PO à ON, tambien como 10. à 1. conque tambien la potencia aplicada en P, valdrà por 10. potencias iguales à ella misma, respecto del peso, ò resistente que estuviere en N: luego la potencia aplicada en P vale por 10. para mover àzia baxo el punto M de la palanca MI: luego puede ella sola tanto para levantar el peso I, como si 10. potencias iguales estuvieran en el cabo M. Cada una de estas vale por 10. como dixe, por ser ML à LI como 10. à 1. luego la potencia aplicada en P vale tanto como 100. para mover, y levantar el peso I.

La razon es evidente; porque el punto P tiene diez veces tanta velocidad, como el punto N, ò M: este punto M tiene tambien 10. veces tanta velocidad, como el punto, ò peso I: luego el punto, ò potencia P tiene 100. veces tanta velocidad como el peso I: luego segun el principio general de la maquinaria, *propos.* 8. *lib.* 2. la potencia en P vale por 100. para levantar el peso I. De esta suerte se irian aumentando las fuerzas de la potencia sin termino, añadiendo mas, y mas palancas.

PROP. X. Theorema.

Explicase la fuerza de algunas maquinas compuestas de tornos. (*figura* 35.)

1 SEan los tornos perpendiculares, ò argues M, N; y sea la palanca, ò rayo HI decupla del semidiametro del timpano N: luego la fuerza aplicada en I valdrà por 10. para traer el brazo, ò rayo FG del timpano M: y

supuesto sea tambien FG decupla del semidiametro de su timpano, podrà la potencia aplicada en I tanto como 100. para mover el peso P. Consta de lo dicho en la propos. antecedente.

2 Por quanto en la disposicion sobredicha, solo puede dar el torno M una media buelta, es dicha maquina casi del todo inutil; por lo qual se disponen los tornos en la forma siguiente, en que el movimiento se pueda continuar quanto se quiera, mediante una cuerda, que por esta causa llaman *perpetua*: rebuelvese èsta en el timpano N, y en la rueda del timpano M, cruzandose entre los dos, como se ve en la *fig.* 36. con lo qual la potencia aplicada en I, es poderosissima para traer el peso P, como queda dicho. Aprovecha esta maquina para inumerables usos mecanicos, como todos saben; ò con la dispocion sobredicha, en que los timpanos son verticales, y las ruedas horizontales; ò en otra en que los timpanos son horizontales, y las ruedas verticales, proporcionandoles al efecto que por su medio se pretende conseguir.

PROP. XI. Theorema.

Explicase la estupenda fuerza de las maquinas compuestas de ruedas con dientes. (*fig.* 37.)

LAs maquinas que se componen de diferentes ruedas se reducen claramente al torno, como à maquina fundamental; y reduciendose el torno à palanca perpetua, (2.) serà facil tambien demonstrar, se reducen dichas ruedas à palancas perpetuas, como veremos en la propos. siguiente. Las fuerzas que adquiere là potencia aplicada à estas maquinas es admirable; y para que se vea con claridad, sea ADF un exe muy firme, que tenga bien unida la ruedecita F con dientes, ò cilindro, ò timpano estriado: los dientes de F ajusten con los vacios de los dientes de la rueda G, cuyo exe tenga tambien otro timpano estriado M, cuyos dientes, ò estrias encaxen en los de la rueda H; como tambien los de N, con los de la rueda I, de cuyo exe estè pendiente el peso. P.

Su-

Supongamos, que la potencia aplicada en A sea por sì bastante para mover 100. libras de peso; y que AD sea decupla del semidiametro del timpano F; y que la rueda G tenga tantos dientes, que para que ella dè una buelta, haya de dar 10. el timpano F: assimismo la rueda H tenga tantos, que para dar una buelta haya de dar 10. el timpano M: y de la propia suerte la rueda I, respecto del timpano N. Digo, que la potencia, como 100. aplicada en A, podrà levantar 1000000. libras de peso.

Demonstr. La potencia A corre diez veces mayor espacio que la rotula, ò timpano F; el timpano F, diez veces mayor que la rotula, ò timpano M; y èste, diez veces mayor que N; y èste tambien anda diez veces mayor espacio que el cilindro LO: las fuerzas de la potencia crecen en la misma proporcion, en que su velocidad excede à la velocidad del peso, como consta del *principio fundamental de la Maquinaria*: luego la potencia A, respecto del peso P, equivale à diez mil potencias iguales à sì misma; y suponiendose ser la potencia A igual à 100. libras de peso, que son las que precisamente puede mover por sì sola, equivale en las fuerzas à diez mil potencias, bastantes cada una para mover 100. libras: luego la potencia aplicada en A, podrà levantar, y mover en virtud de esta maquina 1000000. lib. de peso.

COROLARIOS.

1 *QUando la fuerza natural de la potencia es muy crecida, se desea gran velocidad en el peso que se mueve, truecan sus lugares la potencia, y peso: porque puesta la potencia en la periferia del timpano L, y el peso en A, se movería èste con tal velocidad, que (segun lo arriba supuesto) daria en A mil bueltas, mientras la rueda I da una buelta; y como la velocidad de la rueda I se suponga diez veces mayor que la del timpano LO, daria el peso A diez mil bueltas mientras daria una la potencia en L.*

2 *De lo dicho se colige, que si se dispusiessen 50. ruedas en la forma sobredicha, de suerte, que sus movimientos procediessen en proporcion decupla, podria una sola hormiga, con esta maquina, mover no solo el globo de la tierra, sì tambien un globo lleno de arena,*

na, igual en la capacidad al firmamento; porque, como demuestra el Padre Clavio en la Esfera, à lo ultimo del cap. 1. el numero que consta de 50. zeros, y la unidad, es mayor que el numero de los granos de arena que pueden caber dentro el ambito del firmamento; y las 50. ruedas, cuya velocidad procediesse en proporcion decupla, darian à la potencia tal velocidad, que con la de la arena que llenaria el ambito del firmamento, seria como dicho numero de la unidad, y 50. zeros con un grano de arena, ò con una hormiga: luego ésta podria mover todo el peso sobredicho.

PROP. XII. Theorema.

Las sobredichas maquinas compuestas de ruedas, se reducen à Palancas perpetuas. (fig. 38.)

LA razon es, porque si bien se considera, los dientes que coronan las ruedas de las sobredichas maquinas, son otras tantas palancas, que se vàn succediendo unas à otras, de tal suerte, que en passando una, se substituye otra mientras dura el movimiento circular de las ruedas. En esta suposicion se demuestra tambien claramente el aumento de las fuerzas que adquiere la potencia con muchas palancas. Sean pues tres palancas MN, OP, QR, dispuestas como se expressa en la figura; y sea MS à SN, como 1. à 10. y assimismo OT à TP, y QV à VR. Digo, que la potencia aplicada en R, respecto del peso M, vale por mil.

Demonstr. El punto R se mueve diez veces mas que Q, ò P; y P se mueve diez veces mas que O, ò N: luego R se mueve 100. veces mas que N; este punto N se mueve diez veces mas que el peso M: luego la potencia en R se mueve mil veces mas que el peso M: luego (8. 2. de este trat.) la potencia R vale por mil para levantar el peso M. Esto no seria assi, si en lugar de las tres palancas se usasse de la AB, igual en longitud à ellas; porque la distancia LB es solamente treinta veces mayor que AL: conque la potencia en B solo vale por 30. para levantar el peso A, que es notabilissima diferencia.

De lo dicho hasta aqui se colige bastantemente el fundamento en que consiste las fuerzas de las maquinas compuestas de ruedas,

que

que ordinariamente sirven en los molinos de agua, y viento, y otros innumerables, de que usa la Hidraulica, y se explicaràn en su propio lugar.

LIBRO IV.

DE LA TERCERA MAQUINA fundamental, llamada Carrillo, ò Garrucha.

LA tercera maquina fundamental, que el Latino llama del Griego *Trochlea*, y nuestro vulgar *Garrucha*, *Carrillo*, ò *Polea*, es maquina tan conocida como usada por los Artifices para mover, y levantar piedras, y otras cosas de gran peso: sus fuerzas son excelentes, y facilita mucho el trabajo, singularmente quando à ella se añade el argue, ò torno, segun el estilo vulgar, y corriente.

DEFINICIONES.

1 *Garrucha, ò polea, es una maquina que consta de una, ò muchas rodajas, ò ruedas pequeñas, que se mueven circularmente sobre sus exes, y por quienes passa la cuerda, que trae, ò levanta al peso.*

2 *La garrucha, es de diferentes maneras, segun el numero de las rodajas de que se compone. Si consta de una sola, se llama simple, ò monopastos, como en la fig. 39. y 41. Si dos, se llama dispastos. (fig. 43.) Si tres, trispastos. (fig. 40. y 44.) Y generalmente, si constan de muchos carrillos, ò rodajas, se llaman polispastos, ò poleas compuestas.*

3 *Qualesquiera de estas especies de garruchas pueden ser, ò mo-*

movibles, ò inmobles. Movibles son aquellas, cuyas ruedas no solo tienen el movimiento al rededor de su exe, si que tambien su exe, y toda la maquina tiene movimiento, como en la fig. 41. *Otras son inmobles, y son aquellas, cuyos exes estàn fixos en un mismo lugar, y no tienen mas movimiento, que el de las ruedas sobre su exe, como en la fig.* 39.

PROP. I. Theorema.

La Garrucha sencilla, ò Monospastos, si es inmoble, ni añade, ni quita fuerzas à la potencia. (*fig.* 39.)

SEa la garrucha simple AB inmoble, esto es, pendiente de un clavo fixo por el garfio H. Digo, que no aumenta, ni disminuye las fuerzas de la potencia, que aplicada en E, y tirando àzia baxo, hace subir el peso D.

Demonstr. Quando en una maquina los movimientos del peso, y de la potencia son iguales, no se aumentan, ni disminuyen las fuerzas de la potencia; pero en la garrucha simple, è inmoble son iguales los movimientos del peso, y potencia: luego no se aumentan, ni disminuyen las fuerzas de dicha potencia. Que sean iguales dichos movimientos, es claro; porque si la potencia baxa de E, tirando la cuerda hasta G, el peso D, obedeciendo à su impulso, sube al punto I; y como en todo caso sea una misma la longitud de la cuerda, serà DAE igual à IAG; y quitando el segmento comun IAE, serà DI igual à EG: luego el movimiento del peso, y potencia son iguales; y por consiguiente, en virtud de esta maquina, ni se aumentan, ni disminuyen las fuerzas à la potencia.

Aprovecha pues esta maquina solamente para facilitar el movimiento, tanto del peso, como de la potencia, quitando aquella dificultad, que ciertamente causaria el rozarse la cuerda al passar por sobre el exe C, ò por otro qualquiera cuerpo fixo, è inmovil, sino estuviera la rueda que acompaña con su movimiento circular el de la cuerda. Logra tambien el hombre que sube un peso con esta maquina un grande alivio, que no consiguiera sin ella,

pues

pues es cierto, que sin la garrucha para levantar el peso, havia necessariamente de agoviarse, è inclinarse, experimentando, y sintiendo toda la gravedad del peso los musculos, y nervios, lo que no sucede aplicando los brazos à la cuerda, que tirando consigue con mayor suavidad el mismo efecto.

COROLARIOS.

1 *La garrucha simple, es lo mismo que una palanca perpetua del primer genero de brazos iguales. La razon es, porque aunque baxando la potencia, y subiendo el peso, siga tambien, y ruede el carrillo; pero siempre las distancias CA, CB son iguales: conque estando siempre el peso pendiente de A, y la potencia de B, y el hipomochlio en C, entre la potencia, y peso, serà continuamente la garrucha una palanca del primer genero, en que siempre las distancias del peso, y potencia son iguales.*

2 *Coligese de lo dicho, que ser mayor, ò menor el carrillo, no da mayores fuerzas à la potencia, porque siempre es igual la distancia de la potencia à la del peso, distando entrambos del exe, ò centro C, la distancia precisa de los semidiametros CA, CB, que siempre son iguales, sea el circulo mayor, ò menor; y por consiguiente, tanto en el carrillo mayor como en el menor, es igual el movimiento en el peso, y en la potencia: luego no da mayores fuerzas el carrillo.*

PROP. II. Theorema.

Con la garrucha simple inmovil puede un hombre levantar un peso mayor que el suyo.

DUdase si un hombre, que por lo regular suele pesar 150. libras, podrà levantar con la garrucha simple inmovil un peso mayor, como de 200. libras. A esta duda respondo con distincion: ò el hombre se aplica à la maquina, suspendiendo solamente su cuerpo de la cuerda con las manos, ò hace fuerza estrivando con los pies en tierra, ò en una pared, ò otra cosa firme. Si aplica sus fuerzas del primer modo, solo podrà levantar un peso igual al suyo: porque siendo la garrucha lo mismo que una palanca del primer genero, de iguales brazos, el peso natural del hom-

bre-

bre solo se podrà equilibrar con otro igual à sì; pero si para tirar la cuerda, y subir el peso, estriva con los pies en otro cuerpo firme, ademàs del impulso del propio peso, añade otro, originado de la resistencia que hacen los musculos, y nervios, con que podia levantar mayor peso que el igual al de su propio cuerpo.

PROP. III. Theorema.

Muchas garruchas inmobles, aunque sean inumerables, no aumentan, ni disminuyen las fuerzas de la potencia. (*fig.* 40.)

SEan las garruchas E, F, G inmobles, esto es, que sus exes, y centros no tengan movimiento alguno. Digo, que ni aumentan, ni disminuyen las fuerzas de la potencia. Supongamos, que la potencia està en A, y el peso en C; y que la potencia tirando la cuerda baxa à B, y el peso suba à D.

Demonstr. Quando los movimientos del peso, y potencia son iguales, ni se aumentan, ni se disminuyen las fuerzas de la potencia: esto es lo que sucede en este caso, porque como la cuerda AEFGC, sea la misma por suposicion, que BEFGD, quitando el segmento comun AEFGD, quedaràn DC, AB iguales; pero AB es el movimiento de la potencia, y DC es el movimiento del peso: luego el movimiento del peso, y potencia son iguales; y por consiguiente, ni se aumentan, ni disminuyen las fuerzas de la potencia.

PROP. IV. Theorema.

La garrucha movible, que lleva consigo el peso, duplica las fuerzas de la potencia. (*fig.* 41.)

SEa la garrucha A, cuya caxa sea movible, de cuyo garfio estè pendiente el peso B; y estando el cabo de la cuerda fixo en C, la potencia estè aplicada en D, que tirando la cuerda haga subir la garrucha, y peso pendiente, por exemplo, hasta E. Digo, que la potencia D tiene duplicadas sus fuerzas.

De-

Demonstr. Para que la garrucha ſuba al punto E, es meneſter que la potencia ſe mueva por tanto eſpacio, quanta es la longitud de las cuerdas CF, GD; eſto es, ha de correr toda la cuerda, menos el ſegmento, que quedarà recto en llegando la garrucha à E, el qual es igual al ſegmento FG: luego corre la potencia tanto, quanto ſon CF, DG; pero eſtos dos ſegmentos juntos ſon tanto como dos veces el eſpacio AE, à quien es igual el movimiento del peſo: luego el movimiento, ò velocidad de la potencia es doblado de la velocidad del peſo; y por conſiguiente, (12. 1. de eſte trat.) podrà doblado la potencia contra el peſo: de ſuerte, que las fuerzas preciſamente ſuficientes para levantar 100. libras de peſo, podràn con eſta maquina levantar peſo de 200. libras.

Si en el cabo C de la cuerda ſe añadieſſe otra potencia, que tuvieſſe igual movimiento que la D, ſolo experimentaria el gravamen de la mitad del peſo; como ſi dos llevaſſen en una palanca un peſo con igual diſtancia de entrambos.

PROP. V. Theorema.

Si la potencia ſe aplica à la garrucha ſimple movible, ſe diſminuyen ſus fuerzas por mitad, reſpecto del peſo pendiente de una extremidad de la cuerda. (*fig.* 41.)

SI la potencia ſe aplica en B, y el peſo ſe pone en el cabo D de la cuerda, las fuerzas de la potencia ſe diſminuiràn por mitad; eſto es, que ſi podia por sì ſola levantar 100. libras, aplicada en la forma dicha, ſolo podrà levantar 50. La razon es, porque en eſta aplicacion tiene el peſo doblado movimiento que la potencia; por lo que dixe en la propoſ. anteced. tenerle doblado la potencia quando eſtava en D: luego pierde la potencia la mitad de ſus fuerzas; ò puede la mitad menos de lo que podria ſin la maquina, moviendoſe la potencia, y peſo con igual movimiento.

PROP. VI. Theorema.

En la garrucha llamada Dispastos, si la cuerda passa por el carrillo movible sin estar atada à su caxa, sino à otro punto inmobil, la potencia solo adquiere dobladas fuerzas. (*fig.* 42.)

EL aumento de las fuerzas de la potencia es diferente, segun es diferente el modo de embolver, y acomodar la cuerda en las garruchas compuestas, ò *polipastos*; y sea el primero el siguiente.

El un cabo de la cuerda estè firme en el punto L, ò en B, ò otro qualquiera, y dando la buelta por el carrillo M movible, y por el carrillo I inmoble, apliquese la potencia al cabo H, y el peso al carrillo movible M. Digo, que las fuerzas de la potencia aplicada en H, en virtud de esta maquina se duplican para levantar, y subir el peso pendiente en M.

Demonstr. Tanto se mueve el punto H, como el punto N. (1.) Este punto N tiene doblada velocidad que el peso pendiente en M: (4.) luego el punto H se mueve doblado que el peso pendiente en M: luego la potencia aplicada en H tiene doblada velocidad que el peso: luego se duplican sus fuerzas, segun la *prop.* 12. *lib.* 1.

Lo mismo sucederà, si la extremidad H se supone fixa, y firme, y la potencia se aplica en L, y tira àzia arriba; esto es, que la potencia podrà doblado, pero serà inutil el carrillo I. La razon es, porque en este caso la porcion de cuerda HIN es inmoble: luego es lo mismo que si la cuerda estuviere atada en el punto N, y la potencia tiràra la cuerda desde L, y no huviere mas de una garrucha M simple, y movible, que lleva consigo el peso: luego (4.) se duplican en esta constitucion las fuerzas de la potencia.

COROLARIO.

COnsta de lo dicho, que si la potencia estuviere en M, y el peso en H, estando fixo el cabo L, las fuerzas de la potencia se disminuirian en la mitad, por ser el movimiento del peso doblado del de la potencia.

PROP.

PROP. VII. Theorema.

Si en la polea Dispastos, se ata el cabo de la cuerda en la garrucha movible que lleva el peso, y se embuelve en su carrillo, se triplicaràn las fuerzas de la potencia. (*fig.* 43.)

EN la polea, compuesta de dos carrillos B, I, atese el un cabo de la cuerda en la garrucha movible I, que lleva el peso; y embuelvase la cuerda en los dos carrillos B,I, y la potencia apliquese al cabo C. Digo, que tirando àzia arriba, tendrà tres veces mas fuerza para levantar el peso, en virtud de esta maquina, de la que tiene sin ella.

Demonstr. Supongamos, que la potencia C se mueva hasta tanto que suba la garrucha I à encontrar con la B. No hay duda, que en haviendo llegado à juntarse la garrucha I con la B, havrà passado toda la cuerda por las garruchas, y se havrà salido fuera de ellas, menos las dos porciones FBE, GIH, que necessariamente han de quedar, por ser las que abrazan los dos carrillos: luego el movimiento de la potencia es igual, ò se mide por toda la cuerda, menos las dos porciones sobredichas: luego es igual à las tres partes IE, FG, HC; estas tres partes juntas son triplas de la porcion IE, que es el movimiento del peso: luego el movimiento de la potencia es triplo del movimiento del peso: luego se triplican las fuerzas de la potencia.

PROP. VIII. Theorema.

En la polea llamada Trispastos, que consta de dos carrillos inmobles, y uno movible, se triplican las fuerzas de la potencia. (*fig.* 44.)

LA polea Trispastos, que se ve en la *fig.* 44. consta de tres carrillos: los dos superiores L, I, son inmobles; y el otro M, que lleva consigo pendiente el peso, es movible: el un cabo de la cuerda està atado en M, y passando dicha cuerda por el carrillo I, baxa; y passando por el carrillo M, buelve à subir, y passa por el carrillo L. Digo, que la po-

ten-

tencia, que desde el cabo P tira el peso, tiene en virtud de la maquina triplicadas sus fuerzas.

Demonstr. El punto, ò cabo P no se mueve mas que el punto O: de suerte, què el carrillo L solo se pone para mayor conveniencia de la potencia, que desde P tira àzia baxo, y desde O àzia arriba: luego en quanto à lo demàs, lo mismo es que si estuviera en O; en este caso (por la antec.) solo triplica la potencia sus fuerzas: luego tambien quando se aplica en P.

PROP. IX. Theorema.

En la polea Trispastos, si las dos garruchas que van juntas, y llevan el peso son movibles, se quadruplican las fuerzas de la potencia. (*fig.* 45.)

SEa la polea trispastos, cuyas dos garruchas inferiores MN, que llevan el peso, sean movibles. Digo, que la potencia tiene quadruplicadas fuerzas, en virtud de esta disposicion.

Demonstr. Supongamos, que la potencia V se mueve tirando la cuerda hasta que las garruchas MN lleguen à juntarse con la superior L: en este caso solamente quedaràn embueltos en los carrillos los pedazos de cuerda RST, ONH, PIQ; todo lo restante lo havrà traido la potencia, y serà medida de su movimiento, que son los segmentos RO, LP, TQ, HV; estos quatro segmentos son quadruplos de solo el segmento LP, que mide el movimiento del peso: luego en esta disposicion de polea, el movimiento de la potencia es quadruplo del movimiento del peso: luego las fuerzas de la potencia se quadruplican; esto es, valen tanto, como quatro iguales à si, para levantar el peso.

Y porque la potencia, que tiraria desde V àzia arriba, se fatigaria mucho, se añade sobre la garrucha RT, otra por cuyo carrillo passa el cabo de la cuerda V, y queda pendiente à la otra parte, con que puede la potencia aplicada tirar con menos trabajo àzia baxo, para mover, y subir el peso: conque resulta la polea *Tetraspastos*, ù de quatro carrillos, en quien la potencia adquiere quadruplas

fuer-

fuerzas, sirviendo la garrucha superior añadida para mayor facilidad, y suavidad tan solamente.

PROP. X. Theorema.

Tantas veces se multiplican las fuerzas de la potencia en la polea, cuya garrucha inferior es movible, quantos son los tirantes de las cuerdas, si la potencia se mueve segun la garrucha movible.

COnsta de las proposiciones antecedentes; porque en la disposicion de la *fig.* 41. hay dos tirantes de cuerda, y se duplican las fuerzas; (5.) y lo mismo es en la disposicion de la *fig.* 42. (6.) porque el tirante IH, jamàs ha de entrar en esta cuenta, por añadirse solo para mayor conveniencia. En la disposicion de la *fig.* 43. hay tres tirantes, y se triplican las fuerzas; (7.) y lo mismo es en la *fig.* 44. porque el tirante HP, solo se añade para mayor facilidad. (8.) En la garrucha (*fig.* 45.) se quadruplican las fuerzas, y tiene quatro tirantes; (9.) y si acaso se añade otro carrillo superior, y otro tirante, es, como dixe, por conveniencia: luego tantas veces multiplican las fuerzas, quantas los tirantes de las cuerdas, menos el què dixe se añade para mayor alivio de la potencia.

PROP. XI. Problema.

Disponer las poleas de tal manera, que al passo que se aumenta el numero de los carrillos, se aumenten en proporcion dupla las fuerzas de la potencia. (*fig.* 46.)

COnsta de lo dicho en las proposiciones antecedentes, que en las poleas dispuestas con el estilo ordinario crecen las fuerzas de la potencia en proporcion arithmetica. Buscase aora el modo de disponerlas, de suerte, que si hay un solo carrillo, se dupliquen las fuerzas; si dos, se quadrupliquen; si tres, sean ocho veces mayores, &c. Conseguiràse esto en la forma siguiente.

Suspendase el peso que se ha de levantar, de la garrucha movible B, y el un cabo de la cuerda estè bien fixo en

G,

G, y el otro estè atado à la garrucha movible C, cuya cuerda estè fixa en F por un cabo, y el otro vaya atado à la garrucha movible D; y asimismo la cuerda EDH tenga el un cabo fixo en E, y la potencia apliquese en H. Digo, que la potencia aplicada en H, siendo en sì igual al peso, tendrà ocho veces mas fuerzas que tenia por sì sola.

Demonstr. La potencia, que aplicada en H tira la cuerda àzia arriba, se mueve con doblada velocidad que la polea D: (4.) la polea D, lleva doblada velocidad que C; y èsta lleva tambien doblada velocidad, que la polea B con el peso: luego la potencia H, lleva ocho veces mayor velocidad que el peso: luego alcanza ocho veces mas fuerzas para mover el peso B, que las que por sì sola tiene: luego una potencia, ò peso subočtuplo de B, puesto en H, tendrà equilibrio con B. De suerte, que si el peso B es de 8. arrobas, bastarà el peso de una arroba en H para el equilibrio.

PROP. XII. Theorema.

Qualquiera potencia puede mover qualquier peso con la polea, ò garrucha.

LA razon es, porque asi como el peso se puede aumentar, y la potencia disminuir hasta el infinito; asi tambien añadiendo mas, y mas carrillos à la polea, se puede disminuir el movimiento del peso, y aumentar el de la potencia hasta el infinito; y como al passo que se disminuye el movimiento del peso, y se aumenta el de la potencia, crezcan en èsta las fuerzas, es cierto podràn siempre correr tanto, que superen la resistencia de qualquier peso.

LI-

LIBRO V.

DE LA QUARTA MAQUINA fundamental, llamada Cuña.

AUnque la cuña, por la sencillèz de su composicion, y poco artificio pareciò à algunos ponerse con menos propiedad en el numero de las maquinas;pero comunmente los Autores con Pappo Alexandrino la cuentan entre las maquinas fundamentales, por las grandes fuerzas que tiene para abrir, dividir, y romper los cuerpos firmes, lo que otras maquinas no podrian facilmente conseguir: su naturaleza,y propiedades se comprehenden en las pocas proposiciones que se siguen.

PROP. I. Theorema.

Explicase la forma, y uso de la cuña. (fig. 47.)

LA forma, ò figura de la cuña es de un prisma triangular, y dos de sus superficies opuestas vienen à terminar en una linea recta, comun à entrambas, como se ve en V: hacese de materia firme, como de madera, ò hierro: su uso es bien frequente: sirve para hender, dividir, y partir los cuerpos fuertes, como leños,piedras, &c. porque abriendo primero en dichos cuerpos un corte, ò pequeña hendedura, se ajusta en ella la cuspide de la cuña, que à fuerza de golpes se introduce, y abre las piedras, ò leños con gran facilidad, y poco trabajo.

PROP. II. Theorema.

La cuña no se reduce à palanca del primer genero. (*fig.*47.)

SUelen comunmente controvertir los Autores, si la cuña se reduce, ò no à la palanca; y dado caso que se reduzga à ella, si se reduce à la del primer genero, ò à la del segundo; y aunque la controversia es de poco util, la propondrè brevemente por no apartarme del estilo comun.

Aristoteles en la question 17. *Mechanic.* dice reducirse la cuña à dos palancas dèl primer genero opuestas entre sì: lo que explica Guidubaldo en su Mechanica como se sigue. Sea la cuña ABC, cuyo vertice B; y sea AB igual à BC; y el cuerpo que con ella se quiere dividir, y romper sea DEFG, donde yà se supone haver entrado la porcion HBK. Esto supuesto, quando se hiere con golpes la cuña en AC, viene à ser AB palanca del primer genero, cuyo estrivo, ò hipomochlio es H; y el peso, ò resistente està en B: assimismo CB es palanca del primer genero, cuyo hipomochlio es K, y el resistente està en B. Dandole mas golpes à la cuña se introduce mas à dentro del cuerpo scindible EG: supongamos pues haya entrado la porcion MBL, pues como MB, LB sean mayores que HB, KB, serà forzoso se haga mayor cision, y abertura: luego D se moverà àzia O; y G àzia N; y quanto mas se introduxere la cuña, tanto mayor serà la rotura, y division, y tanto mas se moverà D àzia O, y G àzia N: luego la parte KG es impelida en virtud de la palanca AB, cuyo hipomochlio es H; y el resistente està en B; y el punto B de la palanca AB impele la parte KG; y assimismo la palanca CB, cuyo hipomochlio es K, moverà la parte HD: luego, segun Aristoteles, la cuña se reduce à dos palancas del primer genero que concurren en B, donde està el resistente, la potencia en AC, y los hipomochlios en H, y K.

Este sentir de Aristoteles, ha sido tan mal admitido, que apenas se hallarà Autor que le aprueba. Lo primero, porque si las AB, CB fueren palancas del primer genero, quanto mayores serìan las distancias de la potencia, è hipopomochlio, mayores serian las fuerzas de la potencia; lo que es falso en el presente caso; porque acortando la cuña, ò acortandola por LM, el mismo efecto harà la potencia aplicada en LM, distancia menor, que en CA, distancia mayor: luego la cuña no se puede reducir à las dos palancas sobredichas del primer genero. Lo segundo, porque es falso que la extremidad, o cuspide B de la cuña, toque siempre al cuerpo que se rompe; antes regularmente no llega à tocarle: luego el resistente no està en B, donde havia de estàr si fuessen AB, CB palancas del primer genero, de que se colige ser ageno de toda verdad este discurso.

PROP. III. Theorema.

La cuña no se reduce à palanca del segundo genero. (*fig.* 47.)

Guidubaldo siente, que en caso de reducirse la cuña à palanca, se explicaràn mejor sus fuerzas, y virtud, reduciendola à dos palancas del segundo genero, cuyo hipomochlio comun sea la cuspide B; la potencia estè en A, y C; y el resistente, que se ha de remover, en los puntos K, y H; conque vienen à concurrir como dos palancas AB, y CB del segundo genero, de tal suerte, que introduciendo la potencia aplicada en A, y C la cuña en el solido GE, en virtud de la palanca AB, mueve la porcion HD àzia O, y con la palanca CB mueve la porcion KG àzia N, sirviendose mutuamente la una à la otra de estrivo en el punto B.

Este sentir de Guidubaldo, aunque parece mejor que el de Aristoteles, pero padece las mismas instancias: porque si AHB es palanca del segundo genero, cuya potencia es A, el estrivo B, y el resistente està en H, tanto mayores fuerzas tendria la potencia en virtud de esta palanca, quanto en la misma distancia HB serìa mayor la distancia AB: lo que es falso; pues como atestigua la experiencia, aunque se acorte la cuña cortandola por LM, las mismas fuerzas tiene la potencia aplicada en M, distancia menor de B, que en A, distancia mayor: luego las fuerzas de la cuña no se explican bien reduciendola à dos palancas del segundo ge-

PROP. II. Theorema.

La cuña no se reduce à palanca del primer genero. (*fig.*47.)

SUelen comunmente controvertir los Autores, si la cuña se reduce, ò no à la palanca; y dado caso que se reduzga à ella, si se reduce à la del primer genero, ò à la del segundo; y aunque la controversia es de poco util, la propondrè brevemente por no apartarme del estilo comun.

Aristoteles en la question 17. *Mechanic.* dice reducirse la cuña à dos palancas del primer genero opuestas entre sì: lo que explica Guidubaldo en su Mechanica como se sigue. Sea la cuña ABC, cuyo vertice B; y sea AB igual à BC; y el cuerpo que con ella se quiere dividir, y romper sea DEFG, donde yà se supone haver entrado la porcion HBK. Esto supuesto, quando se hiere con golpes la cuña en AC, viene à ser AB palanca del primer genero, cuyo estrivo, ò hipomochlio es H; y el peso, ò resistente està en B: assimismo CB es palanca del primer genero, cuyo hipomochlio es K, y el resistente està en B. Dandole mas golpes à la cuña se introduce mas à dentro del cuerpo scindible EG: supongamos pues haya entrado la porcion MBL, pues como MB, LB sean mayores que HB, KB, serà forzoso se haga mayor cision, y abertura: luego D se moverà àzia O; y G àzia N; y quanto mas se introduxere la cuña, tanto mayor serà la rotura, y division, y tanto mas se moverà D àzia O, y G àzia N: luego la parte KG es impelida en virtud de la palanca AB, cuyo hipomochlio es H; y el resistente està en B; y el punto B de la palanca AB impele la parte KG; y assimismo la palanca CB, cuyo hipomochlio es K, moverà la parte HD: luego, segun Aristoteles, la cuña se reduce à dos palancas del primer genero que concurren en B, donde està el resistente, la potencia en AC, y los hipomochlios en H, y K.

Este sentir de Aristoteles, ha sido tan mal admitido, que apenas se hallarà Autor que le apruebe. Lo primero, porque si las AB, CB fueren palancas del primer genero, quanto mayores serian las distancias de la potencia, è hipopomochlio, mayores serìan las fuerzas de la potencia; lo que es falso en el presente caso; porque acortando la cuña, ò acortandola por LM, el mismo efecto harà la potencia aplicada en LM, distancia menor, que en CA, distancia mayor: luego la cuña no se puede reducir à las dos palancas sobredichas del primer genero. Lo segundo, porque es falso que la extremidad, o cuspide B de la cuña, toque siempre al cuerpo que se rompe; antes regularmente no llega à tocarle: luego el resistente no està en B, donde havia de estàr si fuessen AB, CB palancas del primer genero, de que se colige ser ageno de toda verdad este discurso.

PROP. III. Theorema.

La cuña no se reduce à palanca del segundo genero. (*fig.* 47.)

GUidubaldo siente, que en caso de reducirse la cuña à palanca, se explicaràn mejor sus fuerzas, y virtud, reduciendola à dos palancas del segundo genero, cuyo hipomochlio comun sea la cuspide B; la potencia estè en A, y C; y el resistente, que se ha de remover, en los puntos K, y H; conque vienen à concurrir como dos palancas AB, y CB del segundo genero, de tal suerte, que introduciendo la potencia aplicada en A, y C la cuña en el solido GE, en virtud de la palanca AB, mueve la porcion HD àzia O, y con la palanca CB mueve la porcion KG àzia N, sirviendose mutuamente la una à la otra de estrivo en el punto B.

Este sentir de Guidubaldo, aunque parece mejor que el de Aristoteles, pero padece las mismas instancias: porque si AHB es palanca del segundo genero, cuya potencia es A, el estrivo B, y el resistente està en H, tanto mayores fuerzas tendria la potencia en virtud de esta palanca, quanto en la misma distancia HB serìa mayor la distancia AB: lo que es falso; pues como atestigua la experiencia, aunque se acorte la cuña cortandola por LM, las mismas fuerzas tiene la potencia aplicada en M, distancia menor de B, que en A, distancia mayor: luego las fuerzas de la cuña no se explican bien reduciendola à dos palancas del segundo ge-

PROP. II. Theorema.

La cuña no se reduce à palanca del primer genero. (*fig.*47.)

SUelen comunmente controvertir los Autores, si la cuña se reduce, ò no à la palanca; y dado caso que se reduzga à ella, si se reduce à la del primer genero, ò à la del segundo; y aunque la controversia es de poco util, la propondrè brevemente por no apartarme del estilo comun.

Aristoteles en la question 17. *Mechanic.* dice reducirse la cuña à dos palancas del primer genero opuestas entre sì: lo que explica Guidubaldo en su Mechanica como se sigue. Sea la cuña ABC, cuyo vertice B; y sea AB igual à BC; y el cuerpo que con ella se quiere dividir, y romper sea DEFG, donde yà se supone haver entrado la porcion HBK. Esto supuesto, quando se hiere con golpes la cuña en AC, viene à ser AB palanca del primer genero, cuyo estrivo, ò hipomochlio es H; y el peso, ò resistente està en B: asimismo CB es palanca del primer genero, cuyo hipomochlio es K, y el resistente està en B. Dandole mas golpes à la cuña se introduce mas à dentro del cuerpo scindible EG: supongamos pues haya entrado la porcion MBL, pues como MB, LB sean mayores que HB, KB, serà forzoso se haga mayor cision, y abertura: luego D se moverà àzia O; y G àzia N; y quanto mas se introduxere la cuña, tanto mayor serà la rotura, y division, y tanto mas se moverà D àzia O, y G àzia N: luego la parte KG es impelida en virtud de la palanca AB, cuyo hipomochlio es H; y el resistente està en B; y el punto B de la palanca AB impele la parte KG; y asimismo la palanca CB, cuyo hipomochlio es K, moverà la parte HD: luego, segun Aristoteles, la cuña se reduce à dos palancas del primer genero que concurren en B, donde està el resistente, la potencia en AC, y los hipomochlios en H, y K.

Este sentir de Aristoteles, ha sido tan mal admitido, que apenas se hallarà Autor que le apruebe. Lo primero, porque si las AB, CB fueren palancas del primer genero, quanto mayores serìan las distancias de la potencia, è hipopomochlio, mayores serìan las fuerzas de la potencia; lo que es falso en el presente caso; porque acortando la cuña, ò acortandola por LM, el mismo efecto harà la potencia aplicada en LM, distancia menor, que en CA, distancia mayor: luego la cuña no se puede reducir à las dos palancas sobredichas del primer genero. Lo segundo, porque es falso que la extremidad, o cuspide B de la cuña, toque siempre al cuerpo que se rompe; antes regularmente no llega à tocarle: luego el resistente no està en B, donde havia de estàr si fuessen AB, CB palancas del primer genero, de que se colige ser ageno de toda verdad este discurso.

PROP. III. Theorema.

La cuña no se reduce à palanca del segundo genero.
(fig. 47.)

GUidubaldo siente, que en caso de reducirse la cuña à palanca, se explicaràn mejor sus fuerzas, y virtud, reduciendola à dos palancas del segundo genero, cuyo hipomochlio comun sea la cuspide B; la potencia estè en A, y C; y el resistente, que se ha de remover, en los puntos K, y H; conque vienen à concurrir como dos palancas AB, y CB del segundo genero, de tal suerte, que introduciendo la potencia aplicada en A, y C la cuña en el solido GE, en virtud de la palanca AB, mueve la porcion HD àzia O, y con la palanca CB mueve la porcion KG àzia N, sirviendose mutuamente la una à la otra de estrivo en el punto B.

Este sentir de Guidubaldo, aunque parece mejor que el de Aristoteles, pero padece las mismas instancias: porque si AHB es palanca del segundo genero, cuya potencia es A, el estrivo B, y el resistente està en H, tanto mayores fuerzas tendria la potencia en virtud de esta palanca, quanto en la misma distancia HB serìa mayor la distancia AB: lo que es falso; pues como atestigua la experiencia, aunque se acorte la cuña cortandola por LM, las mismas fuerzas tiene la potencia aplicada en M, distancia menor de B, que en A, distancia mayor: luego las fuerzas de la cuña no se explican bien reduciendola à dos palancas del segundo ge-

nero. Otras razones traen el Padre Zucchio, Milliet, y Eſcoto; pero la ſobredicha es la mas concluyente.

PROP. IV. Theorema.

Las fuerzas de la cuña no ſe explican baſtantemente reduciendola à plano inclinado. (*fig.*48.)

INtentò el miſmo Autor Guidubaldo explicar las fuerzas de la cuña reduciendola à plano inclinado: porque ſi para levantar el cuerpo EG, nos valieſſemos de la cuña CBD, dicho cuerpo vendria como à moverſe ſobre el plano inclinado CD; pues lo miſmo viene à ſer para el preſente caſo, que dicho cuerpo ſe mueva, y ſuba ſobre el plano, ò que èſte ſe mueva, y ſe introduzga debaxo de dicho cuerpo: entrando pues la cuña CBD debaxo el cuerpo EG, de tal ſuerte le va levantando, que la cuña ſe mueve mucho mas que el cuerpo ſobredicho; y por conſiguiente, aumenta las fuerzas de la potencia que introduce la cuña, al paſſo que es mayor ſu movimiento: y eſto miſmo ſucede, quando mediante la cuña partimos, ò rompemos un cuerpo; como (*fig.* 47.) la cuña CBA ſe compone de dos planos inclinados AB, y CB, de los quales èſte ſirve para mover la porcion KG àzia N; y aquel, para mover la porcion HD àzia O, y hacer con eſtos movimientos encontrados la diviſion que ſe pretende. Mi ſentir es, que el imaginar dichos planos inclinados en la cuña, no ſirve para la explicacion del aumento de fuerzas que cauſa eſta maquina; y viene à parar ſolo en imaginacion, como tambien el reducir la cuña à palancas del primero, ò ſegundo generó; y eſto miſmo ſienten el Padre Milliet, y Eſcoto con otros Autores.

PROP.

PROP. V. Theorema.

Explicase la verdadera razon del aumento de las fuerzas para romper, y dividir los cuerpos con la cuña. (fig. 47.)

LA verdadera razon porquè la potencia, mediante la cuña, tiene mayores fuerzas para dividir, y romper los solidos consiste en que la potencia se mueve mucho, y el cuerpo resistente se mueve poco; esto es, que la potencia aplicada à la cuña tiene mayor movimiento, que las partes solidas que se dividen. Como en la cuña CBA se ve, que abriendo al solido GE ha corrido el punto B, y tambien la potencia el espacio PB, mientras que las porciones, que se han separado, han corrido, la una el espacio PH, y la otra el espacio PK, que supuesto sea el angulo B menor que 60. grados, es forzoso sea PB mayor que el espacio KH: luego en virtud de la disposicion de la cuña, el movimiento de la potencia es mayor que el del peso, ò resistente; y por consiguiente, creceràn las fuerzas de la potencia, segun la razon de PB à KH.

PROP. VI. Theorema.

Las cuñas mas agudas, aumentan mas las fuerzas de la potencia.

DIgo, que de dos cuñas, una mas aguda que otra, la mas aguda aumenta mas las fuerzas de la potencia. La razon es, porque quanto el movimiento de la potencia es mayor que el del peso, ò cuerpo resistente, tanto son mayores las fuerzas de la potencia para mover aquel peso: en la cuña mas aguda, es mayor el movimiento de la potencia, respecto del movimiento del cuerpo que se rompe, que en la cuña menos aguda; porque de dos triangulos de una misma basa, el que tiene el angulo vertical mas agudo, tiene mayores lados, (21. 1. Eucl.) y por consiguiente mayor altura, siendo entrambos Isoceles: luego

mi-

midiendose en la cuña el movimiento del solido resistente por la basa de dicho triangulo ; y el movimiento de la potencia por la altura : serà mayor el movimiento de la potencia, respecto del movimiento del peso, en la cuña mas aguda, que en la menos aguda: luego aquella da mayores fuerzas à la potencia.

COROLARIOS.

1 *LAs cuñas, cuyo angulo es mayor que de 60. grados, mas disminuyen que aumentan las fuerzas de la potencia; porque en èstas es mayor la basa del triangulo que forman por perfil, que su perpendiculo; y por consiguiente, es menor el movimiento de la potencia, que el del peso.*

2 *Casi todos los instrumentos de que usan los artifices para cortar, romper, agugerar, y taladrar los cuerpos solidos, se reducen à la cuña, como de su misma figura se colige.*

LIBRO VI.

DE LA QUINTA MAQUINA fundamental, llamada Rosca; y de algunas Maquinas compuestas.

ESta quinta maquina fundamental, que segun el Griego se llama *Cochlea*, y en nuestro vulgar *Rosca*, es sin duda la mas poderosa, por el increible aumento de fuerzas, que por ella adquiere la potencia. Reducenla comunmente los Autores à la *cuña*; y como reduzgan èsta à la palanca, segun expliquè en el libro antecedente, sacan por consequencia reducirse tambien la rosca à la misma palanca, como se puede ver en Guidubaldo. Otros conciben ser la rosca un plano inclinado, por donde sube el peso con mucho menor movimiento, que el de la potencia que le mueve, como de la cuña sintiò Guidubaldo; pero como dixe en la *propos.* 4. del libro passado, sirven poco semejantes consideraciones para explicar las fuerzas de las maquinas, por lo que no me detendrè mas en ellas.

PROP.

PROP. I. Theorema.

Explicase la forma, y uso de la Rosca. (fig. 49.)

L*A rosca, es un cilindro, que consta de una, ò muchas espiras, formadas en su contorno*, como se ve en la *fig.* 49. Su uso es tan comun, que casi no necessita de explicacion. Formase otro cilindro concavo, que se llama *matriz*, ò *rosca hembra*, cuyas espiras son concavas, y tan iguales à las del cilindro convexo, que se ajustan à ellas perfectamente, entrando las del convexo en las del concavo: su disposicion puede ser diferente, segun el efecto para que ha de servir. Muchas veces el cilindro concavo està fixo sin moverse, moviendose solamente el convexo, que dando repetidas bueltas al rededor de su exe, sube, ò baxa, segun es el movimiento, à la derecha, ò à la izquierda. Otras veces el cilindro convexo està firme, è inmovil, y se mueve el concavo. Para hacer rodar el cilindro convexo AB, y tal vez tambien para mover el concavo, se añaden una, ò muchas palancas BC, à quienes se aplica la potencia para el movimiento. Tienen las roscas singular uso en todo genero de compression, como en las prensas de la Imprenta, y otras inumerables: son imponderables sus fuerzas para levantar, ò traer grandes pesos, y para otros efectos bien ordinarios.

PROP. II. Theorema.

Explicase la causa del aumento de fuerzas que adquiere la potencia por medio de la Rosca. (fig. 49.)

SEa la rosca AB, con la barra, ò palanca BC: supongase aplicada la potencia en C, y que dando una buelta descriva con su movimiento el circulo CKL; es constante, que mientras la potencia se mueve por dicho circulo, sube la rosca con el peso O, el espacio que hay de una espira à otra, esto es, el espacio MN; y supuesto, por exemplo, que el espacio MN quepa cien veces en la periferia CKL, digo, que tendrà la potencia C cien veces mas fuerza para mo-

mover el peso, que tenia por sì sola sin la maquina, esto es, que si el peso es de cien arrobas, le podrà mover la potencia C con la maquina, aunque sin ella pudiesse levantar solamente una arroba.

Demonstr. Entonces hay equilibrio, ò igualdad entre la potencia, y el peso, quando el movimiento de la potencia tiene la misma proporcion con el movimiento del peso, que tiene el peso con la potencia. Esto sucede en la rosca, porque el movimiento de la potencia C, es cien veces mayor que el del peso, y el peso es cien veces mayor que la potencia: luego, en virtud de la rosca, havrà en este caso equilibrio, ò igualdad de las fuerzas de la potencia con el peso; y, si la potencia fuere algo mayor que una arroba, vencerà la resistencia del peso.

PROP. III. Theorema.

Aplicacion de la Rosca à varios usos.

ES muy ordinario el uso de las roscas para apretar, y sacar el zumo, tanto de las yervas, como acostumbran los Boticarios, como de las ubas en los lagares. Para semejantes efectos se pueden disponer de varios modos.

Modo 1. (*fig.* 50.) La rosca AB entra por el agugero B, que la abraza dentro de sus espiras concavas: passa tambien por el agugero C, liso, y sin espiras. En esta disposicion, quando el cilindro A llega à juntarse con la biga F en C, dando bueltas à la rosca, vienen à juntarse los maderos F, y D, apretando fuertemente entre sì al cuerpo intermedio; y se aumentan las fuerzas de la potencia E en la proporcion que tiene el circulo descrito con el movimiento de E, al intervalo que hay de una à otra espira. Y este mismo efecto se consigue, tanto que el madero BD sea inmoble, y el CF se mueva à juntarse con èl, como que CF sea inmoble, y el otro movible.

Modo 2. Que viene à ser mixto de rosca, y palanca, y es en esta forma. (*fig.* 51.) Sea la rosca AB, que entre en el madero AC por A, y dicho madero estè firme, è inmovil

en

en C; el cuerpo que ſe ha de cumprimir., y apretar, coloqueſe en D: conque dando bueltas la roſca, baxarà la tabla, ò madero CA, por la parte A, y ſerà palanca del ſegundo genero, cuyo eſtrivo eſtà en C, la potencia en A, y el reſiſtente en D.

Determinanſe las fuerzas de eſta maquina en eſta forma: Supongamos, que el madero CA peſe 200. libras; eſto es, que ſi libre, y ſencillamente ſe carga ſobre las ubas pueſtas en D, haga el efecto que harian 200. libras de peſo. Supongamos tambien, que la diſtancia de una eſpira de la roſca à otra ſea de un dedo, y que la palanca BE tenga ſiete pies de longitud; conque la periferia que corre la potencia aplicada en E ſerà 22. pies, ò 264. dedos. Supongaſe aſsimiſmo, que la fuerza del hombre que ſe aplica en E, ſea por sì ſola igual à cien libras. Digo, que un hombre ſolo con eſte genero de prenſa, tendrà tanta fuerza para comprimir, y apretar las ubas, quanta tendrian 52800. libras de peſo, ſi libremente ſe cargaſſen ſobre ellas. Y es la razon, porque mientras el hombre camina 22. pies, ò 264. dedos, la viga A baxa un ſolo dedo; y el reſiſtente D, que eſtà en medio de la palanca, ſolo ſe mueve eſpacio de medio dedo: luego el movimiento de la potencia al del reſiſtente, es como 264. à un medio; eſto es, como 528. à 1. y ſiendo la potencia igual à 100. ſeràn las fuerzas de la potencia que mueve eſta prenſa equivalentes à 52800. ò como dicho numero à la unidad: y añadiendo las 200. libras que peſa el madero CA, es la fuerza total de eſta maquina, tanta como el peſo de 53000. libras.

Modo 3. (*fig.* 52.) Es mas ordinario, y ſe compone de dos roſcas A, y B: ſirve para el miſmo efecto, que la prenſa antecedente, porque la una ſirve de hipomochlio, reſpecto de la otra, y el cuerpo que ſe comprime ſe coloca en medio. De otras maneras ſuelen diſponerſe las roſcas, ſegun el efecto para que ſe ordenan, que omito por no tener mas dificultad que las explicadas.

PROP.

PROP. IV. Theorema.

Explicanse algunas otras maquinas, en que concurre la rosca. (*fig.* 53.)

LA rosca tiene frequentemente grande uso en diferentes maquinas; pero entre todas, es singular la que llaman *compuesta*, por componerse de una rosca, y una rueda, entrando las espiras de aquella en los vacìos que dexan los dientes de èsta, de que resulta un maravilloso aumento à las fuerzas de la potencia. Su artificio es el siguiente.

Supongase, que la rueda R consta de 50. dientes, en cuyo timpano A se embuelva la cuerda que sustenta al peso. La rosca PC compongase de tal suerte con la rueda, que cada una de sus espiras pueda entrar en los vacìos que hay entre los dientes de la rueda. La empuñadura BP sirve de palanca para rodar la rosca; y tenga con el semidiametro del timpano A, la razon que 4. con 1. y la potencia de la mano aplicada en P, supongase igual à 100. libras. Digo, que dicha potencia, con esta maquina, podrà sustentar peso de 20000. libras, y que un hombre solo podrà tanto como ducientos.

Demonstr. Por quanto en cada buelta de la rosca solo se impele un diente de la rueda, constando èsta de 50. dientes, seràn menester 50. bueltas de la rosca, para que la rueda haga una perfecta buelta: luego la empuñadura BP harà 50. bueltas mientras la rueda hace una; y siendo, segun lo supuesto, cada buelta de la empuñadura BP, con cada una del timpano A, como 4. con 1. serà el movimiento de la potencia aplicada en P, al movimiento del peso pendiente del timpano, como quatro veces 50. à 1. esto es, como 200. à 1. luego usando de la razon reciproca, (8. 1. *Maquin.*) la potencia como 1. aplicada en P, tendrà equilibrio con un peso como 200. luego la potencia como 100. libras, podrà sustentar 20000. libras.

Si en lugar del timpano A, ſe puſiere alli otra roſca, con una otra rueda tambien de 50. dientes, un hombre ſolo podria tanto como 10000. y aſsi ſe pueden ir multiplicando las fuerzas; pero eſtas maquinas, aunque tan poderoſas, ſon en la practica inutiles, por no baſtar, ni lo firme de ſus exes, ni lo fuerte de las cuerdas para ſuſtentar tanto peſo, como podrian ſuſtentar las fuerzas de la potencia, mediante la maquina ſobredicha.

COROLARIOS.

1 *DE lo dicho ſe colige, de quan gran util ſea la roſca para diſminuir el movimiento del peſo: porque una roſca con una ſola eſpira diſminuye el movimiento del peſo tanto, como una maquina compueſta de muchas ruedas: lo que ſe puede aplicar à los reloxes, y evitar la multiplicidad de las ruedas.*

2 *Quanto mayor fuere el numero de las eſpiras, y mayor ſu obliquidad, y mayor juntamente la palanca que ſirve de empuñadura para mover la roſca, tanto menor ſerà el movimiento del peſo, y mayor el de la potencia; y por conſiguiente, tanto con mas facilidad ſe moverà el peſo, y tanto mas poderoſa ſerà la roſca. Conſta de lo dicho.*

3 *A eſta miſma maquina ſe reducen los taladros, ò barrenas, por no ſer otro que una roſca, que fenece en punta, donde rematan ſus eſpiras, lo que facilita tanto ſu entrada en el madero, como ateſtigua la experiencia.*

PROP. V. Theorema.

Explicaſe la conſtruccion, uſo, y fuerzas de otra maquina poderoſiſsima para levantar grandes peſos. (fig. 54.)

USan en algunas partes los Artifices de una maquina tan poderoſa para levantar qualquier peſo, que puede con ella un hombre ſolo levantar un carro muy cargado, y una caſa entera de madera, y otros peſos ſemejantes à èſtos: ſu fabrica, y uſo es como ſe ſigue.

Ha-

Haganse tres ruedas de acero muy solido, y fuerte, una mayor B, y dos menores A, y C, iguales, y de igual numero de dientes. Supongamos tenga cada una quatro dientes; pero la rueda B, para guardar buena proporcion, tenga diez y seis: èsta, y la rotula C han de tener un mismo exe comun à entrambas. Hagase asimismo de firme acero, è inflexible un prisma con sus dientes à modo de sierra DE. Y todo se ha de encerrar en una caxa de madera fuerte, y bien guarnecida de hierro, la qual quede abierta por arriba. Los dientes de la rotula C han de prender los del prisma; y asimismo los de la rotula A han de prender los de la rueda B. El exe de la dicha rotula A, sale fuera de la caxa que encierra la maquina; à quien se ajunta la empuñadura corva AGFH, para que aplicando una, ò dos manos en FH, se mueva circularmente el exe, y con èl la rotula A, con quien està unido: èsta mueve à la rueda B, y C; y encontrando los dientes de la rueda C, los del prisma DE les impelen, con que mueven dicho prisma àzia arriba, hasta que el ultimo diente E se junta con la rotula C. Ajustando pues el cabo curvo D à la cosa que se ha de levantar, y el cabo opuesto de la caxa estando bien firme en tierra, si se rueda el hierro HF sube el prisma, y saliendo de la caxa impele àzia arriba con gran fuerza el peso: y rodando al contrario el hierro HF, baxa el prisma, y se oculta en la caxa, como antes estava.

Para averiguar las fuerzas, y virtud de esta maquina, supongamos, que la empuñadura FG es quadrupla del semidiametro de la rotula A: y porque èsta no tiene mas que quatro dientes, y la rueda B tiene diez y seis, se sigue, que para dar una buelta la rueda B, y su anexa C, ha de rodar quatro veces la rotula A; y porque el semidiametro de la rueda B es tambien quadruplo del semidiametro de la rotula C, se moverà aquella con velocidad quatro veces mayor que èsta, y por consiguiente, que el prisma, y el peso: luego la potencia se mueve con velocidad diez y seis veces mayor que el peso: luego la potencia algo mayor que 100. libras, podrà levantar con esta maquina 1600. libras. En lugar de la rotula A, se puede poner una

rosca,

rosca, llamada *infinita*, semejante à la que lleva la maquina que explico en la proposicion siguiente.

PROP. VI. Theorema.

Explicase la maquina Kircheriana, compuesta de muchas, con que puede un niño levantar con un solo dedo 125. libras de peso. (fig. 55.)

EN el Museo Kircheriano del Colegio Romano hay una maquina compuesta de palanca, torno, rosca, y garrucha, en la forma siguiente. La empuñadura AB es palanca del primer genero, como en otra parte dixe. El cilindro BC es torno, en quien las espiras DE forman una rosca llamada *perpetua*, ò *infinita*; porque mientras rueda el cilindro BC, las espiras de la rosca siempre admiten nuevos dientes de la rueda, y expelen otros. La rueda EF tiene bien unido à sì el exe, ò cilindro paralelo al horizonte, cuya extremidad es G: en este exe se embuelve la cuerda que lleva al peso; y para mayor aumento de fuerzas, no se ata dicha cuerda inmediatamente al peso, si que se embuelve en la garrucha HM, que lleva el peso; y por concurrir en ella quatro ruedas, ò carrillos, se llama *tetraspasto*.

Las fuerzas de esta maquina son tantas, que aplicando un niño el dedo à la extremidad A del hierro, levanta un peso de 125. libras, que es igual à un talento; y tiene esta excelencia, que aunque se aparte la mano del hierro A, no por esso baxa el peso, si que en virtud de la maquina se queda suspenso en el ayre; y para que baxe, es menester rodar al contrario el hierro A. La causa de tantas fuerzas consiste, en que el movimiento de la potencia al del peso, tiene razon compuesta de las razones de la garrucha al peso: del semidiametro de la rueda EF, al semidiametro del exe G: y de la periferia del circulo, que describe el punto A con su movimiento, à la distancia que hay entre dos espiras inmediatas de la rosca.

PROP.

PROP. VII. Problema.

Dispener una Rosca perpetua, de suerte, que uno se pueda subir à sì mismo.

SI dentro de una caxa se dispone una rosca con su rueda, como la que se ve en la *figura* 55. y se ata firmemente una cuerda en el techo por un cabo, y el otro se rebuelva en el cilindro G, de suerte, que rodando èste, se vaya en el embolviendo la cuerda, podrà un hombre, sentado sobre esta maquina, subir à qualquier altura; porque rodando el mismo el hierro, ò exe AB, se irà embolviendo la cuerda en el cilindro G; y como el otro cabo estè firme, ò inmobil arriba, de suerte, que no puede ceder, es forzoso, que la maquina, y el que va en ella, vaya subiendo àzia arriba. Y tiene este instrumento una gran conveniencia, y es, que puede el que sube parar el movimiento à su arbitrio, solo con dexar de mover el hierro AB, sin peligro de caer; antes para baxar, serà menester mueva dicho hierro al contrario de quando subia.

Tambien puede uno subirse à sì mismo à qualquier altura con una garrucha simple, como es DC, (*fig.* 56.) en esta forma. Pongase en la cuerda un palo atravesado IK, y para mayor facilidad, y seguridad, atese à la otra parte de la cuerda un peso H, que sea algo menor que el peso del hombre que quiere subir. Hecho esto, tirese la cuerda del cabo F, hasta que el palo IK baxe, y el peso H suba à lo alto. Sientese el que ha de subir en el palo sobre ella, y tome con las manos la cuerda HG, y tirela àzia abaxo, y subirà con gran facilidad; y en queriendo baxar, irà poco à poco afloxando la cuerda HG, y se executarà todo sin peligro alguno.

PROP. VIII. Problema.

Disponer una nueva maquina, con la qual se levanten con un soplo 36. libras de peso.
(fig. 57.)

EN èsta, y las siguientes proposiciones se propone una nueva maquina muy simple, con la qual se explicaràn despues facilmente las acciones de los musculos de nuestro cuerpo, y su robusta potencia. Dispongase una vexiga de buey, ù de puerco MP, atando, y uniendo firmissimamente à su orificio M un cañoncillo de madera OM, segun se representa en la figura. En la puerta inferior M del cañon coloquese una ventanilla de vaqueta, ò otra materia competente, con tal disposicion, que abriendo àzia abaxo, cierre àzia arriba; para que introduciendo à soplos el ayre por el cañoncillo en la vexiga, no pueda bolver à salir. Pongase dicho cañon ajustado, y firme en el madero AB; y prenda el garfio P un peso R, que descanse en el suelo, è introduzgase el ayre à soplos por el orificio O, hasta que se dilate la vexiga; y hecho esto, con solo un soplo que se le añada, extendiendose por los lados, se acortarà la vexiga àzia arriba, y levantarà el peso R, que como se experimentò en el Colegio curioso Magdeburgese, era de 36. libras. La razon de esto se darà despues.

PROP. IX. Problema.

Disponer dicha maquina de suerte, que haga mayor efecto.
(fig. 58.)

PAra que el peso se levante à mayor distancia, se añadiràn quatro, ò mas vexigas, uniendo firmemente cada una con su inmediata, mediante un cañoncillo, semejante al que se dixo en la proposicion antecedente, previniendole à cada uno con la ventanilla de va-

vaqueta, de el mismo modo que arriba dixe: introduciendo pues el ayre por el orificio O, se ensancharàn, y acortaràn todas las quatro vexigas al ultimo soplo; de que se seguirà, que levantaràn el peso à distancia quadrupla de la que le levantava una sola, como tambien se ha experimentado. Y la razon es clara, porque si la vexiga 1. levanta à las demàs, y al peso, por exemplo, un dedo; como la 2. tenga igual potencia, en recibiendo el ayre, levantarà por si al peso un otro dedo; y lo mismo la 3. y 4. luego entre todas le levantaràn quatro dedos.

PROP. X. Theorema.

Explicase el fundamento del aumento de las sobredichas potencias. (fig. 59.)

SUpongase el peso G, pendiente del clavo F con dos cuerdas; y que las potencias H, h, distraygan, y separen las cuerdas, dirigiendo su movimiento por las lineas OH, oh. Digo, que levantaràn el peso G con mucha mayor facilidad, que si le levantassen tirandole por la perpendicular IF. La razon es clara, porque es mayor el movimiento de las potencias, que el del peso, porque moviendose ellas por la H, h, se levanta mucho menos el peso, pues corre una linea menor que la Hh. Què proporcion tenga el momento de estas potencias con el del peso G, lo podrà ver el curioso en Alfonso Borelo en la parte 1. *de Motu Animalium*, *propos.* 94. donde prueba, que las potencias H, h, tienen con los resistentes G, y F, quando equilibran con ellos sus fuerzas, la razon de la recta FI, à la recta Hh. Omito esta demonstracion, por necessitar de muchos Theoremas, y ser bastante para nuestro intento el saber, por la razon arriba dicha, que siendo en esta disposicion mayor el momento de las potencias, que el del peso, por pequeñas que ellas sean podràn levantar qualquier peso; pues en qualquier caſo podràn diſtraer, y doblar las cuerdas FHI, FhI por algun eſpacio, à que neceſſariamente ſe ha de ſeguir algun movimiento del peſo, ſi no lo eſtorbàre la mayor tenſion de las cuerdas, de que aora ſe preſcinde.

Supueſto lo ſobredicho, veaſe la *fig.* 60. en que ſe ſupone, que el peſo G pende de quatro cuerdas: èſtas diſtraidas en la forma ſobredicha por quatro potencias, es cierto haràn doblado efecto que las dos de ellas ſolamente; y por conſiguiente, quanto fueren mas las cuerdas que mantienen el peſo G, y mas las potencias, ſerà mayor la facilidad con que èſtas levantaràn el peſo G: ſiendo pues la vexiga en la *figura* 57. un agregado de inumerables fibras, ò hilos atados arriba al cañon, y abaxo con el peſo, quando eſtàn diſtraìdas por el ayre que dentro ſe introduce, ſe podrà con ellas levantar el peſo de las 36. libras con ſuma facilidad; y aunque la potencia de un ſoplo ſea muy debil, y en dos, ò tres fibras, no haràn efecto alguno ſenſible; pero ſiendo tantas, un ſolo ſoplo que las dilate igualmente à todas, podrà hacer efecto ſenſible, y levantar el peſo en la forma referida.

PROP. XI. Theorema.

Explicaſe la potencia que tienen los muſculos.

ES conſtante, que los muſculos de nueſtro cuerpo, y de qualquier animal, ſon los principales inſtrumentos, y maquinas para mover los miembros: es tambien cierto, que executan eſte movimiento con la dilatacion, y contraccion; porque acortandoſe, y contrayendoſe unos, mueven, por exemplo, la mano, ò brazo, à quienes eſtàn unidos; y dilatandoſe, y alargandoſe èſtos, y juntamente acortandoſe los antagoniſtas, ſe hace el movimiento contrario. Es tambien forzoſo, que los muſculos, en virtud de ſu diſpoſicion, ſean maquinas muy

muy vigorosas, y de gran potencia; porque estand aplicadas à los huessos como à vectes, ò palancas del tercer genero, como dixe en la *propos.* 11. del *lib.* 2. y estando su aplicacion muy cerca del hipomochlio, ò centro del movimiento, es forzoso sea tanta su fuerza, que pueda en disposicion tan contraria, no solo mover la mano, ò brazo, si levantar, y sustentar juntamente un gran peso, como atestigua la experiencia. Esta potencia pues tan vigorosa parece poderse explicar, segun lo arriba dicho, en la forma siguiente.

Supongo, que si à un mismo peso se le aplicassen en la forma dicha en la *propos.* 9. dos series de vexigas, como la de la *fig.* 58. aunque no por esso se levantaria el peso à mayor distancia; pero porque la una puede tanto como la otra, la potencia de las dos juntas serìa doblada; y si se aplicassen tres, serìa tripla; y assi se iria aumentando la potencia al mismo passo que se multiplicarian aquellas series: y por consiguiente, si una sola serie, animada con el soplo, puede mover, y elevar à cierta altitud un peso de 40. libras, ocho series iguales podràn levantar à la misma altura un peso de 320. libras; y si todas estas series estuviessen aplicadas cerca del centro de la palanca del tercer genero, como poco movimiento cerca del centro sea mucho en la extremidad donde suele colocarse el peso, no hay duda levantaria la extremidad de la palanca por grande espacio. Esto supuesto,

Qualquiera musculo se compone de inumerables fibras, assi carnosas, como tendinosas, llenas de poros, y receptaculos comunicantes, donde con increible celeridad, y muy semejante à la de la luz, se introduce aquel fluido sutil, ò sean espiritus animales, que decienden del celebro; y en consequencia de esto viene à ser el musculo un agregado de inumerables series como las arriba dichas, que todas vienen à unirse por su extremidad al huesso; pero muy cerca de la articulacion que sirve de centro para el movimiento. Introduciendose pues con aquella suma celeridad, y prontitud aquel fluido sutil, ò

es-

espiritus animales, se llenan todas las sobredichas cavidades, y se dilatan lateralmente sus fibras; de que se sigue la intumecencia lateral del musculo, y su contraccion, y decurtacion, segun la longitud. Contrayendose pues con tanta prontitud, lleva consigo el huesso, y le dà movimiento circular; y aunque por estàr unida esta potencia muscular cerca de la articulacion, y centro, sea alli pequeño, y corto el espacio por donde le mueve; pero en su extremidad es muy notable, y crecido.

Puede obgetarse contra esto, que en la *fig.* 57. la intumecencia de la vexiga alli propuesta, ha de ser muy notable para que haga el efecto, y movimiento de decurtacion, y levante el peso R, como alli se dixo; porque para que sensiblemente le mueva, es forzoso que sensiblemente se acorte; y no puede acortarse sensiblemente sin que sea mas notable su dilatacion lateral, y mayor que la decurtacion, como se dixo en la *proposicion* 10. luego lo mismo havia de suceder en el musculo, lo que es contra la experiencia; pues vemos ser poca su intumecencia al tiempo en que mueve, ò dobla el brazo, ò pierna, &c.

A esto respondo lo primero, que la intumecencia del musculo es alguna, como lo atestigua la ocular experiencia. Lo segundo digo, que no es menester sea mucha para exercer sus funciones, y movimientos. Lo primero, porque el cabo del musculo està aplicado, y asido cerca del centro del movimiento del huesso; y por consiguiente, por poco que alli mueva, es grande el movimiento en la extremidad del huesso, tan distante del centro, y de la aplicacion de la potencia. Lo segundo, porque siendo el musculo, como he dicho, compuesto de inumerables series de fibras, que divididas en pequeñas concavidades, son semejantes à la *serie* de la *figura* 58. no ha menester hacer todo el musculo dilatacion muy sensible para que sea bien notable su decurtacion, y el movimiento que ocasiona en los miembros:

bros: porque la mifma decurtacion, y contraccion que haria todo el mufculo, fi folo conftaffe de una concavidad total, como la vexiga de la *figura* 57. con gran dilatacion, hace dilatandofe muy poco, conftando, como confta, de diferentes concavidades, ò poros comunicantes; y para que efto fe vea con evidencia,

Sea en la *figura* 61. AD una fibra mufcular, la qual para acortarfe hafta quedar en AC, y levantar el pefo defde D hafta C, haya de dilatarfe todo lo que es la EB. Supongamos aora, que efta fibra confte de 4. receptaculos, como vexigas iguales. Digo baftarà, que cada una de ellas fe dilate folamente quanto es la OG, para que el cabo del mufculo, juntamente con el pefo pendiente, fuba de D hafta C. La razon es, porque los lados AB, BC fon iguales à los ocho lados AH, HF, FG, &c. de las 4. veficulas menores; porque FG es igual à HK, EI à KM, NL à BM: luego todas las quatro AH, FG, EI, NL, fon iguales à toda la AB: y de la mifma fuerte fe demonftrarà fer las HF, GE, &c. iguales à la BC: luego todos los ocho lados de las concavidadcs pequeñas fon iguales à los AB, BC: luego la decurtacion de la fibra de AD hafta AC, es la mifma, fiendo unica la concavidad, que fiendo quatro; pero fiendo quatro, es la dilatacion lateral de toda la fibra en la decurtacion, folamente lo que es la FG; efto es, la quarta parte de EB: luego con mucha menor dilatacion lateral fe hace la decurtacion, haviendo en cada ferie muchas cavidades, que con fola una. Y fi en lugar de las 4. cavidades fe pufieffen en la ferie 4000. fe elevaria el pefo à la mifma altura DC, y la dilatacion, è intumecencia ferìa 4000. veces menor, que la ABC. Conftando pues cada ferie mufcular de inumerables concavidades, fe harà la decurtacion, y movimiento de el mufculo fin notable intumecencia.

No dudo concurren en los mufculos otras circunftancias que conducen mucho para fus acciones, como fe puede ver en Alfonfo Borelo, Thomàs Bartholino, y

otros

otros Autores ; pero basta lo sobredicho para nuestro intento.

De que se colige claramente lo mucho que conduce este Tratado de la Maquinaria , ò Mecanica , para la explicacion , ò inteligencia de las cosas de la naturaleza , cuyas operaciones regularmente se executan por movimiento local.

FIN.