COURS
DE
MATHÉMATIQUE.

Premiére Partie.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

PAR M. CAMUS, Charles Étienne Louis
1699-1768
De l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Ingénieurs, Professeur & Sécrétaire Perpétuel de l'Académie Royale d'Architecture, Honoraire de l'Académie de Marine.

TROISIÉME ÉDITION.

A PARIS,
De l'Imprimerie de BALLARD, Seul Imprimeur du Roi pour la Musique, & Noteur de la Chapelle de Sa Majesté, rue des Noyers.

M. D. CC. LXIV.
Avec Approbation & Privilége du Roi.

A MONSEIGNEUR

LE COMTE

D'ARGENSON,

MINISTRE,

SÉCRÉTAIRE D'ÉTAT,

ayant le Département de la Guerre.

MONSEIGNEUR,

Le Traité que j'ai l'honneur de vous présenter est la premiére Partie d'un Cours de Mathématique, où vous m'avez ordonné *de réunir les Elémens des Sciences propres à un Ingénieur. Je m'estimerai heureux,* MONSEIGNEUR, *si cet Essai est conforme aux vues que vous nous communiquez dans les Assemblées de l'Académie Royale des Sciences; & si, par mon zéle pour la continuation de l'Ouvrage, je puis répondre aux soins que vous donnez à tout ce qui intéresse l'Etat Militaire du Royaume, & particuliérement un Corps d'Officiers dans lesquels le Service du Roi demande des Talens dont vous avez toujours été le Protecteur.*

Je suis avec un profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur, CAMUS.

PRÉFACE.

LORSQUE M. le Comte d'Argenſon a bien voulu me charger de l'examen des ſujets qui ſe préſentent pour être reçus ingénieurs, il a fixé le degré de connoiſſance qu'il falloit exiger de la part des aſpirans : il a même eu la bonté d'entrer dans tous les détails qui regardent leur inſtruction : & pour leur épargner la lecture d'un trop grand nombre de livres avant l'examen ; il m'a ordonné de réunir dans un même ouvrage traité ſynthétiquement toute la théorie dont un ingénieur peut avoir beſoin.

C'eſt dans cet eſprit que, pour exécuter les ordres de ce Miniſtre, j'ai compoſé un Cours de Mathématique élémentaire qui comprend l'Arithmétique, la Géométrie, la Méchanique Statique & l'Hydraulique. Les Leçons que j'ai données aux Écoles de l'Académie royale d'Architecture, m'ont fourni le moyen de remplir mon objet plûtôt qu'il ne m'auroit été poſſible de le faire, ſi je n'avois trouvé des matériaux dans mes traités.

Quoiqu'avec le ſecours des différens Livres d'Arithmétique que nous avons, l'on puiſſe appliquer le calcul numérique à tout ce qui a rapport aux fonctions d'un ingénieur, j'ai cependant jugé convenable d'en faire un nouveau. Les applications qu'on trouvera dans la ſuite de l'ouvrage, de pluſieurs principes généraux qui, dans l'ordre naturel, doivent être établis en parlant du calcul numérique, feront voir que je n'ai pû m'en diſpenſer. D'ailleurs on remarquera que je me ſuis attaché à déveloper des méthodes qui juſqu'ici n'ont été expliquées que fort ſuperficiellement.

Le Traité d'Arithmétique, par lequel je commence le Cours de Mathématique que j'entreprends de donner, eſt partagé ou neuf livres.

Dans le premier, j'expoſe la nature des nombres en général, des parties décimales, l'art de la numération & les principes généraux ſur leſquels l'Arithmétique eſt fondée.

Toutes les opérations de l'Arithmétique pouvant être réduites à l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication & la Diviſion; j'explique dans le ſecond livre les méthodes pour faire ces quatre opérations ſur les nombres incomplexes qui ſont les plus ſimples; & je les applique en même temps aux nombres qui contiennent des parties décimales.

Comme les opérations que j'enſeigne dans le ſecond livre, ne peuvent pas ſuivant l'ordre naturel être appliquées aux grandeurs complexes, ſans donner une idée des fractions; je traite dans le troiſiéme des fractions, de leurs réductions, des différentes préparations qui les rendent ſuſceptibles de l'Addition & de la Souſtraction, de la maniére de les ajoûter, de les ſouſtraire, de les multiplier & de les diviſer.

J'applique enſuite dans le quatriéme livre les opérations de l'Arithmétique aux nombres complexes. Quoique les ſurfaces, les ſolides & la maniére dont ces étendues ſont engendrées & décompoſées, appartiennent proprement à la Géométrie; j'ai cependant expliqué dans les chapitres de la Multiplication & de la Division des nombres complexes, comment ces deux espéces d'étendue sont produites par la Multiplication & décomposées par la Division des nombres substitués aux lignes; & je me suis particuliérement attaché à déterminer les vraies dénominations des différentes unités dont les produits & les quotiens sont composés.

Dans le cinquiéme livre, je traite des Rapports & des Proportions en général, des Regles de Trois, de Compagnie, de Fausses positions, & je me borne, en parlant des Proportions, à ce qui est nécessaire pour l'intelligence de ces différentes régles & des autres matiéres comprises dans la suite de ce traité.

Dans le sixiéme, j'explique les Regles d'Alliage; & je m'attache non-seulement à distinguer entre les différentes questions qui peuvent être proposées, celles qui sont déterminées, de celles qui sont indéterminées; mais encore à faire connoître comment ces derniéres peuvent être réduites, par des circonstances particuliéres, à un certain nombre de solutions.

Dans le septiéme, aprés avoir démontré comment & de quelles parties les Quarrés & les Cubes sont composés, je donne les méthodes pour en extraire les Racines exactes; ou pour en approcher autant qu'on peut le désirer, lorsque les nombres proposés ne sont pas des quarrés ou des cubes parfaits.

Dans le huitiéme, je traite des Proportions & Progressions arithmétiques, des Progressions géométriques & des Logarithmes ausquels ces progressions servent de préparation. L'usage qu'on peut faire des logarithmes pour calculer de grands nombres, me persuade qu'on ne les trouvera point déplacés dans une Arithmétique destinée à des personnes qui s'en serviront nécessairement dans la suite de leurs études.

Enfin je termine ce traité par un neuviéme livre qui contient une doctrine abrégée des Changemens d'ordre ou Permutations, & des Combinaisons dans trois différentes hypothéses.

On pourra être surpris de ce qu'ayant à composer un Cours de Mathématique élémentaire, je n'ai pas donné le calcul littéral en même temps que le calcul numérique, à l'exemple de quelques Auteurs. Mais ayant à traiter par la seule synthèse les principales parties dont un Ingénieur doit être instruit, j'ai crû devoir réserver le Calcul littéral pour l'Analyse.

Je préviens donc ici que je ne parlerai du calcul littéral & de l'analyse, qu'après avoir rempli mes engagemens, & donné les traités que je viens d'annoncer en ne faisant usage que de la synthèse. Je travaillerai avec la plus grande assiduité à contribuer au progrès que les Ingénieurs desirent de faire dans les sciences. Ma plus grande satisfaction sera de partager par mes veilles l'ardeur que témoignent ces Messieurs de soutenir la réputation que leur corps s'est acquise, & de faire valoir les soins dont le Ministre est occupé pour rendre leurs talens utiles à l'État & agréables au Roi.

EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie royale des Sciences.

MEssieurs Nicole & Clairault qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. Camus intitulé *Cours de Mathématique élémentaire à l'usage des Ingénieurs*, ayant fait leur rapport de la partie de ce Cours qui contient l'Arithmétique, & qui en doit composer le premier volume, l'Académie a jugé cette partie de l'ouvrage digne de l'impression. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris le 21 Mai 1749.

GRANJEAN DE FOURCHY, Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie royale d'Architecture.

MOnsieur Cartaud qui avoit été chargé par l'Académie royale d'Architecture, d'examiner des *Elémens d'Arithmétique*, faisant partie d'un Cours de Mathématique composé par M. Camus, Professeur de Mathématique & Secrétaire de l'Académie, en ayant fait son rapport à la Compagnie, Elle a été d'avis que ce Traité, pouvant être très-utile au Public, étoit digne de l'impression. A Paris ce 20 Mai 1749.

GABRIEL.

EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie de Marine.

Du 15 Février 1753.

MOnsieur Dechezac & M. Bory qui avoient été nommés par l'Académie de Marine pour examiner les quatre premieres parties du *Cours de Mathématique* de M. Camus, en ayant fait leur rapport. La Compagnie a jugé que le Public verroit avec plaisir la réimpression d'un Ouvrage auquel il a déja accordé son approbation, & qui ne sera pas moins utile à la Marine qu'au Corps en faveur duquel il a été composé. A Brest lesdits jours & an ci-dessus.

CHOQUET, Sécrétaire de l'Académie de Marine.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra ; SALUT. Notre *Académie Royale des Sciences* Nous a très-humblement fait exposer que depuis qu'il Nous a plu lui donner, par un Réglement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences qui font l'objet de ses exercices ; en sorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnés au public, elle soit en état d'en produire encore d'autres : S'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilége, attendu que celles que Nous lui avons accordées en date du *6 Avril 1693*, n'ayant point eu de terme limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conseil d'Etat du 13 Août 1704, celles de 1713 & celles de 1716 étant aussi expirées, & desirant donner à notredite Académie en corps & en particulier, & à chacun de ceux qui la composent, toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au Public, Nous avons permis & permettons par ces présentes à notredite Académie, de faire vendre ou débiter par tous les lieux de notre obéissance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choisir, toutes les *Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de notredite Académie Royale des Sciences ; comme aussi les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des particuliers qui la composent & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages & jugé qu'ils sont dignes de l'impression ;* & ce pendant le tems de quinze années consécutives, à compter du jour de la date desdites présentes : Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere, dans aucun lieu de notre obéissance ; Comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire aucun desdits Ouvrages ci-dessus spécifiés, en tout ni en parties, ni d'en faire aucuns extraits sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement de titre, feuilles même séparés ou autrement sans la permission expresse & par écrit de notredite Académie ou de ceux qui auront droit d'elle & de ses ayans cause, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts : A la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que notredite Académie se conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; & qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état, avec les Approbations & Certificats qui en auront été donnés ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le Sieur CHAUVELIN; & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur CHAUVELIN, le tout à peine de nullité des présentes: Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir notredite Academie ou ceux qui auront droit d'elle & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Sécretaires, foi soit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Fontainebleau le douziéme jour du mois de Novembre, l'an de grace mil sept cent trente-quatre, & de notre Regne le trente-huitiéme. Par le Roi en son Conseil. SAINSON.

Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N° 792. fol. 775. conformement au Reglement de 1724. qui fait défense Art. IV. à toutes personnes de quelque qualité qu'elles soient, autre que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, & faire afficher aucuns Livres, pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement; & à la charge de fournir les Exemplaires prescrits par l'Article 108. du même Reglement. A Paris le 15 Novembre 1734. G. MARTIN, *Syndic.*

EXPLICATION
DES NOMS DES PROPOSITIONS
Qui composent ce Traité.

CE Traité est composé de six sortes de Propositions ; de Définitions, *de* Théorêmes, *de* Problêmes, *de* Corollaires, *de* Remarques *&* *de* Scholies.

Une Définition *est l'explication de ce qu'on entend par un mot dont on veut faire usage.*

Le Théorême *est une proposition dont il faut prouver la vérité.*

Le Problême *est une proposition dans laquelle il s'agit de faire une opération, ou de découvrir une vérité inconnue.*

Le Corollaire *est une conséquence tirée d'un Théorême démontré ou d'un Problême résolu.*

Les Remarques *sont des réflexions sur une ou plusieurs propositions précédentes.*

Le Scholie *est aussi une remarque qui tend à faire voir l'utilité d'une proposition, ou l'accord de plusieurs propositions précédentes dont on fait la récapitulation.*

ELEMENS

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE PREMIER.

Des Nombres & des Principes généraux de l'Arithmétique.

CHAPITRE PREMIER.

Des Nombres en général & de l'Unité.

DÉFINITIONS.

1 L'ARITHMÉTIQUE est la Science des Nombres.

On appelle *Nombre* l'assemblage de plusieurs Unités.

On nomme *Unité* tout ce qui est considéré comme indivisible, quoiqu'il puisse être véritablement divisé.

On prend pour unité, non seulement chaque chose non divisée ou naturellement indivisible, comme un homme, un mouton, une étoile, &c ; mais encore la collection de plusieurs choses de la même espéce, en les considérant comme un tout, par exemple, une armée, un troupeau, une conſtellation; l'on prend même pour unité l'aſſemblage de pluſieurs choſes de différentes eſpéces, comme un équipage, un habillement, un meuble.

On eſt convenu pour la facilité du commerce, d'employer différentes eſpéces d'unités qui ſont connues de tout le monde. Dans les monnoies l'on a établi pour unités, la livre, le ſol & le denier. Pour meſurer les diſtances & les longueurs, l'uſage & les loix ont établi la toiſe, le pied, le pouce, & la ligne, l'aune, la perche, & pluſieurs autres meſures dont l'étendue eſt fixée par la coutume & par l'autorité du Prince. Dans la meſure des aires ou des ſuperficies, l'on prend pour unités, la toiſe quarrée, le pied quarré, le pouce quarré, l'aune quarrée, la perche quarrée, l'arpent: & pour rendre les calculs plus faciles; l'orſque l'on a beſoin de différentes unités, l'on prend pour unités différentes meſures qui ont toutes la même longueur ſur différentes largeurs, & qui prennent leurs dénominations diſtinctives de leurs largeurs. Nous parlerons plus amplement de ces différentes unités de ſuperficies, l'orſque nous traiterons du toiſé des ſurfaces. Dans le toiſé des ſolides, on prend pour unités, la toiſe cube, le pied cube, le pouce cube, la ligne cube, & différens ſolides qui ont tous pour baſe une toiſe quarrée ſur différentes hauteurs dont ils prennent leurs dénominations diſtinctives, ſans compter quantité d'autres meſures telles que la pinte, le boiſſeau, le ſetier, le muid, &c, qui ne ſont pas partout les mêmes. Enfin chaque eſpéce de choſe a une unité particuliere de même nature qu'elle, & dont la grandeur eſt autoriſée par l'uſage.

Les unités dont on vient de parler, & toutes les autres qui ſont relatives à des choſes de quelque eſpéce qu'elles puiſſent être, s'appellent *unités concretes*.

Il y a une autre unité qui ne déſigne aucune eſpéce de choſe en particulier, & qui eſt applicable à toutes ſortes d'eſpéces : cette unité s'appelle *unité vague* ou *abſtraite* ou *abſolue*, & s'exprime par le mot *un* ou *une fois*.

CHAPITRE II.

Des Nombres & de la Numération.

2 NOus avons dit, dans le Chapitre précédent, qu'un nombre étoit l'aſſemblage de pluſieurs unités, & nous avons ſuffiſamment expliqué ce qu'on entend par unité.

En ajoûtant une unité à une autre unité, l'on fait un nombre que l'on nomme *deux* ; en joignant à ce nombre une nouvelle unité, il en réſulte le nombre que l'on appelle *trois* ; & en continuant ainſi d'ajoûter de nouvelles unités aux nombres déja faits, l'on forme les nombres ſuivants que l'on nomme *quatre*, *cinq*, *ſix*, *ſept*, *huit*, *neuf*, &c. Comme l'unité pourra toûjours être ajoûtée aux nombres que l'on aura faits, quelque grands qu'ils puiſſent être ; eſt évident que la ſuite des nombres n'a point de bornes.

Si l'on vouloit exprimer chaque nombre par un mot ou par un caractere particulier, il faudroit donc employer une infinité de mots ou de caracteres, & la vie d'un homme ne ſuffiroit pas pour apprendre à compter juſqu'à cinquante mille qui eſt un fort petit nombre, non ſeulement entre les nombres poſſibles, mais encore entre ceux que l'on eſt dans l'uſage de compter : mais les hommes & principalement les Mathématiciens obligés de faire uſage de très-grands nombres, ont imaginé l'art de compter avec un très petit nombre de mots & de caracteres répétés plusieurs fois ; cet art se nomme la *Numération*.

L'on considére en général deux sortes de nombres, *les nombres concrets*, & les *nombres abstraits* ou *absolus*.

Lorsque les nombres sont appliqués à compter plusieurs unités de quelque espéce particuliere ; on les appelle *nombres concrets* ; par exemple *deux livres*, *trois toises*, *quatre chevaux*, sont des nombres concrets, qui ont pour unités des *livres*, des *toises*, des *chevaux*.

Les nombres qui ne sont appliqués qu'à nombrer des unités vagues, ou abstraites, tels que ceux-ci, *deux*, *trois*, *quatre*, &c : ou plûtôt *deux fois*, *trois fois*, *quatre fois*, &c, qui ne comptent aucune espéce de choses particulieres, mais qui sont propres à nombrer des unités de toutes les espéces, s'appellent *nombres abstraits*, ou *nombres absolus*.

Comme l'on ne connoît de véritables nombres, que relativement aux choses nombrées ; les nombres concrets sont les seuls qui existent véritablement par eux-mêmes; & l'on peut dire que les nombres abstraits ou absolus n'existent que dans l'esprit, ou par la maniere dont on considére les choses nombrées.

La considération des nombres abstraits n'est pourtant point inutile pour plusieurs raisons. Premierement les nombres ne sont pas moins nombres, pour avoir des unités différentes : ainsi il est indifférent à l'Arithmétique, qui est proprement la science des nombres, d'avoir telle ou telle espéce d'unités à nombrer : ensorte que l'unité vague ou abstraite, *une fois*, peut être prise aussi bien que toutes les unités concretes, pour le principe de composition des nombres qui sont l'objet de l'Arithmétique ; c'est même cette espéce d'unité que l'Arithmétique considére véritablement. Secondement il y a des questions arithmétiques, dont les réponses ſe réduiſent à des nombres abſtraits, comme celle-ci : *Combien de fois huit écus contiennent-ils quatre écus ?* dont la réponſe eſt *deux fois*, qui eſt un nombre véritablement abſtrait. La conſidération des nombres abſtraits ne doit donc point être négligée : elle eſt même abſolument néceſſaire, comme nous le verrons encore dans la ſuite.

Quoiqu'il y ait une infinité de nombres différens, l'on a trouvé le moyen de les repréſenter tous avec dix caracteres ſeulement différemment combinés & répétés ; & en écrivant à la droite des caracteres qui repréſentent un nombre quel qu'il ſoit, le nom de l'unité, ou le caractere qui marque l'eſpéce de l'unité dont ce nombre eſt compoſé, l'on repréſentera telle eſpéce de nombre concret que l'on voudra.

Les dix caracteres par leſquels on repréſente tous les nombres, & que l'on appelle *chiffres*,

Sont	0	On les nomme	zéro ou rien
	1		un
	2		deux
	3		trois
	4		quatre
	5		cinq
	6		ſix
	7		ſept
	8		huit
	9		neuf

Avec ces dix caracteres l'on peut, ſans aucun art, compter depuis rien juſqu'à neuf incluſivement ; & l'on ne pourroit point compter au-delà, ſi l'on n'avoit point d'autre unité que celle de l'eſpéce que l'on doit nombrer. Par exemple, ſi les unités dont un nombre doit être compoſé étoient des toiſes, dont l'eſpéce de l'unité eſt repréſentée par T, on pourroit ſeulement compter depuis rien juſqu'à neuf toiſes, en écrivant

0^T		rien ou zéro toiſe
1^T		une toiſe
2^T		deux toiſes
3^T		trois toiſes
4^T	Ce qui ſignifie	quatre toiſes
5^T		cinq toiſes
6^T		ſix toiſes
7^T		ſept toiſes
8^T		huit toiſes
9^T		neuf toiſes

& l'on ne pourroit pas compter au-delà de 9 toiſes, ſi l'on n'avoit point d'autre unité que la toiſe.

Mais outre l'unité de l'eſpéce que l'on doit compter, & que nous nommerons *unité principale*, ou *unité de l'eſpéce*, ou *unité ſimple*; par exemple, outre la toiſe qui ſert d'unité principale dans les nombres que nous venons de donner, l'on a imaginé d'autres unités, que nous nommerons *unités collectives*, qui peuvent être comptées depuis rien juſqu'à neuf incluſivement; & moyennant ces unités collectives, on eſt en état de repréſenter tous les nombres poſſibles compoſés de la répétition de l'unité principale, comme on va l'expliquer.

Des Unités.

Lorſque les unités principales ne paſſeront pas le nombre de neuf, & que l'on pourra par conſéquent les écrire avec un ſeul chiffre; le chiffre qui en repréſentera le nombre, ſera nommé *nombre des unités du premier degré*, & la place que ce chiffre occupera ſera nommée la *premiere place*.

Des Dixaines.

De dix unités du premier degré, l'on fait une unité collective que l'on nomme *dixaine*, ou *unité du ſecond degré*; & l'on en peut compter depuis rien juſqu'à neuf, par le moyen de quelqu'un des mêmes chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Pour diſtinguer le chiffre qui compte ces nouvelles *unités du ſecond degré*, de celui qui compte le nombre des *unités du premier degré*; on le met à la ſeconde place immédiatement à gauche de celui qui compte les unités du premier degré, & qui occupe la premiere place, en obſervant toujours de remplir la premiere place par un chiffre qui puiſſe repréſenter le nombre des unités du premier degré, comme on va le voir dans les exemples ſuivans.

1°. Lorſque le nombre des unités que l'on compte, ſe réduit à des *dixaines* ou unités du ſecond degré ſans reſte, & que le nombre de dixaines que l'on a, ne ſurpaſſe pas *neuf*; on met à la premiere place le caractere (0) qui ne compte rien, & qui en ſignifiant qu'il n'y a point d'unités du premier degré, fait tenir la ſeconde place au chiffre qui marque le nombre des unités du ſecond degré, & le détermine à compter cette eſpéce d'unité collective plûtôt qu'une autre.

	10		une dixaine *ou dix*.
	20		deux dixaines *ou vingt*.
	30		trois dixaines *ou trente*.
	40		quatre dixaines *ou quarante*.
Ainſi	50	Signifient	cinq dixaines *ou cinquante*.
	60		ſix dixaines *ou ſoixante*.
	70		ſept dixaines *ou ſeptante*.
	80		huit dixaines *ou huitante*.
	90		neuf dixaines *ou nonante*.

Pour exprimer la ſuite des nombres de dixaines, on dit, ou du moins on peut dire en nombrant, *dix*, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *ſoixante*, *ſeptante*, *huitante*, *nonante*; mais hors du calcul on dit & l'on écrit pour les trois derniers nombres de dixaines, *ſoixante & dix*, *quatre-vingt*, *quatre-vingt-dix*.

2°. Puiſqu'en mettant quelqu'un des dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, à la ſeconde place, l'on peut compter les dixaines depuis rien juſqu'à neuf, & qu'en mettant quelqu'un des mêmes chiffres à la premiere place, on peut compter les *unités ſimples* ou *du premier degré* depuis rien juſqu'à neuf; on peut par le moyen de deux chiffres qui occupent les deux premieres places, compter depuis rien juſqu'à nonante-neuf; c'eſt-à-dire, juſqu'à quatre-vingt-dix-neuf.

Les chiffres qui ſont à la ſeconde place, doivent garder les noms des nombres de dixaines qu'ils expriment; & ceux qui ſont à la premiere place, doivent pareillement garder les noms des nombres des unités ſimples qu'ils repréſentent. Cependant il en faut excepter quelques nombres dont la prononciation fait une irrégularité, & une exception à la regle générale.

Les nombres	11	devroient s'écrire & ſe prononcer	dix-un	on les écrit & les prononce	onze
	12		dix-deux		douze
	13		dix-trois		treize
	14		dix-quatre		quatorze
	15		dix-cinq		quinze
	16		dix-ſix		ſeize

Ceux-ci	17	ſuivent la regle générale	dix-ſept
	18	on les écrit	dix-huit
	19	& on les nomme	dix-neuf

Pour les nombres ſuivans, depuis vingt repréſenté par 20, juſqu'à ſoixante & neuf repréſenté par 69, on ſuit la regle générale en les écrivant & en les nommant.

Nombres	*Noms*	*Nombres*	*Noms*
20	vingt	40	quarante
21	vingt & un	41	quarante & un
22	vingt-deux	42	quarante-deux
23	vingt-trois	43	quarante-trois
24	vingt-quatre	44	quarante-quatre
25	vingt-cinq	45	quarante-cinq
26	vingt-ſix	46	quarante-ſix
27	vingt-ſept	47	quarante-ſept
28	vingt-huit	48	quarante-huit
29	vingt-neuf	49	quarante-neuf
30	trente	50	cinquante
31	trente & un	51	cinquante & un
32	trente-deux	52	cinquante-deux
33	trente-trois	53	cinquante-trois
34	trente-quatre	54	cinquante-quatre
35	trente-cinq	55	cinquante-cinq
36	trente-ſix	56	cinquante-ſix
37	trente-ſept	57	cinquante-ſept
38	trente-huit	58	cinquante-huit
39	trente-neuf	59	cinquante-neuf

Nombres	Noms	Nombres	Noms
60	ſoixante	65	ſoixante & cinq
61	ſoixante & un	66	ſoixante & ſix
62	ſoixante & deux	67	ſoixante & ſept
63	ſoixante & trois	68	ſoixante & huit
64	ſoixante & quatre	69	ſoixante & neuf

A l'égard des trente nombres ſuivans, que l'on repréſente par deux chiffres : on peut ſuivre la regle générale dans les calculs, en retenant les noms de *ſeptante*, *huitante*, *nonante*, pour exprimer *ſept dixaines*, *huit dixaines*, *neuf dixaines ;* mais hors les calculs, on ſuit l'irrégularité que l'uſage a introduite, en diſant *ſoixante & dix* pour *ſeptante*, *quatre-vingt* pour *huitante*, *quatre-vingt-dix* pour *nonante :* & comme pour les ſix nombres au-deſſus de dix, on ne dit pas *dix un*, *dix deux*, *dix trois*, *dix quatre*, *dix cinq*, *dix ſix ;* mais que l'on dit & que l'on écrit *onze*, *douze*, *treize*, *quatorze*, *quinze* & *ſeize ;* on ne dit pas non plus *ſoixante & dix un*, *ſoixante & dix deux*, *ſoixante & dix trois*, *ſoixante & dix quatre*, *ſoixante & dix cinq*, *ſoixante & dix ſix*, ni *quatre-vingt-dix un*, *quatre-vingt-dix deux*, *quatre-vingt-dix trois*, *quatre-vingt-dix quatre*, *quatre-vingt-dix cinq*, *quatre-vingt-dix ſix ;* mais on dit & l'on écrit *ſoixante & onze*, *ſoixante & douze*, *ſoixante & treize*, *ſoixante & quatorze*, *ſoixante & quinze*, *ſoixante & ſeize*, *quatre-vingt-onze*, *quatre-vingt-douze*, *quatre-vingt-treize*, *quatre-vingt-quatorze*, *quatre-vingt-quinze*, *quatre-vingt-ſeize*.

On voit dans la table ſuivante les deux noms que l'on peut donner à chacun des trente nombres qui ſuivent 69.

Nombres	*Noms dont on peut faire usage dans le calcul.*	*Noms dont l'usage est plus ordinaire.*
70	feptante	foixante & dix
71	feptante-un	foixante & onze
72	feptante-deux	foixante & douze
73	feptante-trois	foixante & treize
74	feptante-quatre	foixante & quatorze
75	feptante-cinq	foixante & quinze
76	feptante-fix	foixante & feize
77	feptante-fept	foixante & dix-fept
78	feptante-huit	foixante & dix-huit
79	feptante-neuf	foixante & dix-neuf
80	huitante	quatre-vingt
81	huitante-un	quatre-vingt-un
82	huitante-deux	quatre vingt-deux
83	huitante-trois	quatre-vingt-trois
84	huitante-quatre	quatre-vingt-quatre
85	huitante-cinq	quatre-vingt-cinq
86	huitante-fix	quatre-vingt-fix
87	huitante-fept	quatre-vingt-fept
88	huitante-huit	quatre-vingt-huit
89	huitante-neuf	quatre-vingt-neuf
90	nonante	quatre-vingt-dix
91	nonante-un	quatre-vingt-onze
92	nonante-deux	quatre-vingt-douze
93	nonante-trois	quatre-vingt-treize
94	nonante-quatre	quatre-vingt-quatorze
95	nonante-cinq	quatre-vingt-quinze
96	nonante-fix	quatre-vingt-feize
97	nonante-fept	quatre-vingt-dix-fept
98	nonante-huit	quatre-vingt-dix-huit
99	nonante-neuf	quatre-vingt-dix-neuf

Des Centaines.

De même que la ſomme de dix *unités du premier degré* compoſe une *unité du ſecond degré*, l'aſſemblage de dix *unités du ſecond degré*, fait une *unité du troiſiéme degré*, que l'on nomme *centaine* ou *cent*; & l'on donne la troiſiéme place vers la gauche, aux chiffres qui expriment les nombres de ces nouvelles unités.

On peut encore compter ces nouvelles unités de centaines depuis rien juſqu'à neuf, avec les mêmes caracteres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: & comme l'on peut auſſi compter avec les mêmes chiffres les dixaines depuis rien juſqu'à neuf, & les unités ſimples depuis rien juſqu'à neuf; il eſt clair que l'on eſt en état de compter tous les nombres depuis rien juſqu'à *neuf cents nonante-neuf*, que l'uſage oblige de nommer *neuf cents quatre-vingt-dix-neuf*.

Les différens nombres de centaines n'ont point de noms particuliers: on les déſigne par le nom *cent*, précédé du mot qui en exprime le nombre, comme on le voit dans cet exemple.

Nombres	Noms
100	cent
200	deux cents
300	trois cents
400	quatre cents
500	cinq cents
600	ſix cents
700	ſept cents
800	huit cents
900	neuf cents

L'énoncé d'un nombre repréſenté par trois chiffres, n'a aucune nouvelle difficulté. On commence par énoncer le nombre des *cents*, exprimé par le chiffre qui eſt à la troiſiéme place; enſuite on prononce le nom du nombre exprimé par les deux chiffres qui occupent la ſeconde & la premiere place, en ſuivant la regle générale ou l'uſage, & ayant égard aux exceptions que nous avons fait remarquer, comme dans ces exemples.

Nombres	Noms
364	trois cents ſoixante-quatre
576	cinq cents ſeptante-ſix, ou *cinq cents ſoixante & ſeize*
193	cent nonante-trois, ou *cent quatre-vingt-treize*
916	neuf cents ſeize
807	huit cents ſept
290	deux cents nonante, ou *deux cents quatre-vingt-dix*

Nous ferons ſeulement remarquer que ſi l'on trouve (o) qui ne marque rien, à la place des dixaines, & qui ſignifie que l'on n'a point de dixaines à compter; il faudra exprimer le nombre des unités ſimples auſſitôt après celui des cents qui ſont à la troiſiéme place, comme dans le cinquiéme exemple: & ſi le caractere (o) ſe trouve à la premiere place, il marquera qu'il n'y a point d'unités ſimples; ainſi il faudra ſeulement exprimer le nombre des centaines & celui des dixaines, comme on le voit dans le dernier exemple.

Des Unités collectives qui ſont de degrés ſupérieurs au troiſiéme.

De dix *unités du troiſiéme degré* nommées *centaines*, l'on fait une *unité du quatriéme degré*, que l'on nomme *mille.* Ces nouvelles unités ſe peuvent compter comme les autres unités collectives dont nous avons parlé, depuis rien juſqu'à neuf, & le chiffre qui en repréſente le nombre ſe met toûjours à la quatriéme place, à la gauche de celui des *cents.*

En continuant ainsi de faire de nouvelles unités collectives, dont chacune soit composée de dix unités du degré précédent ; on aura une progression d'unités décuples les unes des autres, qui n'aura point de bornes, & l'on pourra par son moyen représenter tous les nombres possibles, quelque grands qu'ils soient, en se servant seulement des dix caracteres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Les trois chiffres qui occupent les trois premieres places, ont des noms particuliers. On appelle *nombre simple*, celui de la premiere place ; *dixaine*, celui de la seconde place ; & *centaine*, celui de la troisiéme place. On auroit pu de la même maniere donner des noms particuliers aux unités des degrés supérieurs : mais comme ces nouveaux noms auroient chargé la mémoire inutilement, & qu'il auroit été trop difficile de prononcer un grand nombre de mots différens dans un ordre précis ; l'on a donné aux trois chiffres suivans qui occupent la quatriéme, la cinquiéme & la sixiéme place, les mêmes noms de *nombre*, *dixaine*, *centaine*, & ainsi des autres : ensorte que les chiffres qui représentent un grand nombre, étant partagés en tranches de trois chiffres en trois chiffres, en commençant par la droite ; chaque tranche aura un nombre d'unités dans sa premiere place à droite, un nombre de dixaines dans sa seconde place, & un nombre de centaines dans sa troisiéme place. Il en faut pourtant excepter la derniere tranche vers la gauche, qui n'est pas toûjours composée de trois chiffres, & qui n'en contient souvent qu'un ou deux ; savoir un nombre d'unités, ou un nombre d'unités avec des dixaines.

Pour ne point confondre toutes ces tranches, & pour les distinguer les unes des autres ; l'on a donné au premier chiffre de chacune d'elles, un nom particulier qui est aussi le nom de cette tranche.

Le premier chiffre de la premiere tranche, s'appelle le nombre des unités simples; & la premiere tranche qui contient aussi les dixaines & les centaines d'unités simples, se nomme *la tranche des unités simples.*

Le premier chiffre de la deuxiéme tranche, se nomme *mille*; & cette seconde tranche qui contient aussi les dixaines & les centaines de mille, s'appelle *la tranche des mille.*

Le premier chiffre de la troisiéme tranche, s'appelle *million*; & cette tranche qui contient aussi les dixaines & les centaines de millions, s'appelle *la tranche des millions.*

Après la tranche des millions, viennent celles des *billions*, des *trillions*, des *quatrillions*, des *quintillions*, des *sextillions*, des *septillions*, des *octillions*, des *nonillions*, des *decillions*, &c, qui contiennent chacune leurs unités, leurs dixaines, & leurs centaines.

Les chiffres écrits pour représenter un grand nombre, étant ainsi partagés en tranches composées de trois chiffres, excepté la derniere ou la plus à gauche, qui peut n'avoir qu'un ou deux chiffres; il est extrémement facile d'énoncer ce nombre : puisqu'il suffit d'exprimer les uns après les autres, en commençant par la gauche, les nombres représentés par ces tranches, comme si chaque tranche étoit unique; mais il faut avoir attention, après l'expression du nombre de chaque tranche, d'exprimer le nom de cette tranche.

Pour faire voir d'un coup d'oeil les noms des différentes tranches d'un grand nombre représenté par beaucoup de chiffres, avec les noms des chiffres de chaque tranche; nous prendrons pour exemple le nombre des grains de sable qu'Archimede a trouvé qu'il falloit pour composer une masse égale à celle de la terre, en supposant qu'il faut mettre dix grains de fable bout à bout, pour faire le diametre d'un grain de coriandre ; qu'il faut dix grains de coriandre, pour un pouce ; douze pouces, pour un pied ; cinq pieds, pour un pas géométrique ; trois mille pas, pour une lieue ; que le diametre de la terre eſt de deux mille huit cents ſoixante & quatre lieues ; & que la circonférence d'un cercle vaut trois fois ſon diametre, avec la ſeptiéme partie de ce diametre.

Voici ce nombre de grains de ſable, avec les noms de ſes tranches & les noms des places de chaque tranche.

Noms des places de chaque tranche.		Noms des tranches.
dixaine nombre	71	nonillions
centaine dixaine nombre	764	octillions
centaine dixaine nombre	546	ſeptillions
centaine dixaine nombre	809	ſextillions
centaine dixaine nombre	270	quintillions
centaine dixaine nombre	857	quatrillions
centaine dixaine nombre	142	trillions
centaine dixaine nombre	857	billions
centaine dixaine nombre	142	millions
centaine dixaine nombre	857	mille
centaine dixaine nombre	142	unités ſimples

Ce prodigieux nombre s'exprime ainſi : ſeptante & un *nonillions*, ſept cents ſoixante & quatre *octillions*, cinq cents quarante-ſix *ſeptillions*, huit cents neufs *ſextillions*, deux

deux cents ſeptante *quintillions*, huit cents cinquante-ſept *quatrillions*, cent quarante-deux *trillions*, huit cents cinquante-ſept *billions*, cent quarante-deux *millions*, huit cents cinquante-ſept *mille*, cent quarante-deux *unités* ou *grains de ſable*.

Nous avons ſuffiſamment expliqué comment il faut exprimer un nombre repréſenté par trois chiffres, ſoit qu'il y ait des zéros, ſoit qu'il n'y en ait point. Ainſi l'on eſt en état d'exprimer la valeur de chaque tranche d'un nombre quelquonque, lorſque chaque tranche ſera véritablement un nombre; mais il peut arriver qu'une ou pluſieurs tranches ſoient remplies de zéros: dans ce cas, il faudra ſupprimer les noms de ces tranches. Par exemple,

trillions	*billions*	*millions*	*mille*	*unités*
2	800	000	045	003

s'exprime ainſi, deux *trillions* huit cents *billions* quarante-cinq *mille* trois *unités*; où l'on voit que nous ſupprimons le mot de *millions*, dont la tranche entiere eſt occupée par des zéros.

Puiſque ſuivant la loi de la progreſſion des unités collectives, que nous venons d'expliquer, il faut dix unités du premier degré ou de celles qui ſont à la premiere place, pour en compoſer une du ſecond degré ou de celles qui ſont à la ſeconde place, & qu'il en faut dix de celles qui ſont à la ſeconde place, pour en compoſer une de celles qui ſont à la troiſiéme place; il eſt clair que toutes les fois qu'on avancera un chiffre d'une place, il deviendra décuple de ce qu'il étoit; parce que chacune de ſes unités en vaudra dix de celles dont le chiffre étoit compoſé avant d'avoir changé de place. Et réciproquement ſi l'on recule un chiffre d'une place, il ne vaudra plus que la dixiéme partie de ce qu'il valoit avant d'avoir changé de place. Cela eſt trop évident pour mériter une plus ample explication.

Puiſqu'un chiffre devient décuple de ce qu'il valoit, toutes les fois qu'on l'avance d'une place; il deviendra dix fois décuple ou centuple, en l'avançant de deux places; il deviendra dix fois centuple ou mille fois plus grand, en l'avançant de trois places; &c. Et réciproquement, un chiffre reculé de deux places, ne vaudra plus que la dixiéme partie de la dixiéme partie, ou la centiéme partie de ce qu'il valoit; & en le reculant de trois places, il ne vaudra plus que la dixiéme partie de la centiéme partie, ou la milliéme partie de ce qu'il valoit auparavant.

CHAPITRE III.

Des Parties Décimales.

3 NOus avons vû dans le Chapitre précédent; comment les unités deviennent continuellement décuples les unes des autres, à meſure qu'on avance leur chiffre d'un rang vers la gauche; & nous avons ſuffiſamment expliqué comment par les différentes combinaiſons & répétitions des mêmes chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, l'on peut exprimer tous les nombres poſſibles composés d'unités ſimples de quelque eſpéce qu'elles puiſſent être. Nous allons maintenant expliquer comment on peut, par le moyen des mêmes caracteres, exprimer tous les nombres dont les unités ne ſont que des dixiémes ou des centiémes ou des milliémes parties, &c. de l'unité ſimple que l'on regarde comme l'unité principale.

Puisque suivant les principes établis dans le Chapitre précédent, dix unités d'un certain degré composent une unité du degré supérieur, & du rang immédiatement à gauche; il est évident que si l'on partage une unité d'un degré quelconque en dix parties égales, ces parties seront dix unités du degré inférieur, & du rang immédiatement à droite. Par exemple, si l'on partage une *centaine* qui est une unité du troisiéme degré & du troisiéme rang, en dix parties égales; l'on aura des *dixaines* ou des unités du second degré, qui ne doivent avoir que la seconde place: si l'on partage encore une de ces nouvelles unités en dix parties égales; l'on aura des *unités simples*, ou du premier degré, qui doivent occuper la premiere place. Ainsi en divisant continuellement les unités en dix parties égales; l'on trouve toûjours de nouvelles unités sous-décuples ou dix fois plus petites, dont les chiffres qui représentent leurs nombres, doivent occuper des places reculées de plus en plus vers la droite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux unités simples qui occupent la premiere place; mais rien n'empêche qu'on ne puisse pousser plus loin la même division.

Les chiffres placés dans des rangs continuellement reculés vers la droite, ayant des unités continuellement sous-décuples de celles des chiffres précédens: si l'on place une virgule à la droite du chiffre des unités simples ou principales, pour faire reconnoître la place de ces unités, & que l'on écrive tant de chiffres qu'on voudra à la droite de cette virgule, comme on le voit dans ce nombre (576,347892); on distinguera facilement que le nombre représenté par les chiffres 576 qui seront à la gauche de la virgule, nombrera des unités simples ou principales; & que les autres chiffres 347892 qui seront à la droite de la virgule, nombreront des unités qui ſeront d'autant plus ſous-décuples de l'unité ſimple, qu'ils ſeront plus reculés ſur la droite de la même virgule.

Car ſuivant les principes de la numération, le chiffre 3 qui ſera immédiatement à la droite de la virgule ou du chiffre 6 des unités ſimples, aura des unités ſous-décuples ou dix fois plus petites que celles du chiffre 6 qui ſont des unités ſimples; ainſi les unités de ce chiffre 3 ſeront des dixiémes parties de l'unité ſimple, & ſeront par conſéquent nommées des *dixiémes*. Il en ſera de même du chiffre 4 qui ſera à la droite du chiffre 3 : ſes unités ſeront des dixiémes parties de celles du chiffre 3, & ſeront par conſéquent des dixiémes parties de dixiéme, ou des centiémes de l'unité ſimple, & ſeront à cauſe de cela nommées des *centiémes*. Enfin les unités des chiffres ſuivans 7 8 9 2 qui ſeront à droite, devenant continuellement ſous-décuples, ſeront des milliémes, des dix-milliémes, des cent-milliémes, des millioniémes parties, &c. de l'unité principale, & ſeront pour cette raiſon nommées *milliémes*, *dix-milliémes*, *cent-milliémes*, *millioniémes*, &c. comme dans l'exemple ſuivant.

Chiffres décimaux.

5	7	6,	3	4	7	8	9	2
centaines	dixaines	unités ſimples	*dixiémes*	*centiémes*	*milliémes*	*dix milliémes*	*cent-milliémes*	*millioniémes*

Tous les chiffres qui ſeront placés à la droite du chiffre des unités ſimples, dont la place eſt marquée par une virgule, feront nommés *chiffres décimaux*, & leurs unités feront appellées *parties décimales* ou *fractions décimales.*

Avant d'expliquer comment il faut énoncer un nombre qui contient des parties décimales; il faut remarquer que dans les chiffres décimaux, de même que dans les autres, dix unités d'un degré quelconque compofent une unité du degré fupérieur & du rang immédiatement à gauche. Par exemple, dix *millioniémes* compofent un *cent-milliéme*, dix *cent-milliémes* valent un *dix-milliéme*.... dix *dixiémes* font une *unité fimple;* enforte que les chiffres décimaux ont la même propriété que les autres chiffres dont nous avons expliqué la numération. Cela pofé, on concevra aifément comment on peut s'énoncer dans la numération des nombres dont l'expreffion contient des chiffres décimaux. Nous prendrons pour exemple le même nombre (576,347892).

1°. On peut confidérer (576,347892) comme un nombre compofé de deux parties, dont la premiere repréfentée par les chiffres 576 qui font à la gauche de la virgule, ne compte que des unités fimples ou principales, & dont la feconde repréfentée par les chiffres 347892 qui font à la droite de la virgule, a pour unités des millioniémes, de même que fon chiffre 2 le plus reculé vers la droite de la virgule; en un mot on peut regarder (576,347892) comme fi ce nombre étoit écrit de cette maniere, 576 *unités fimples* & 347892 *millioniémes.*

La premiere partie du nombre (576,347892) pouvant évidemment s'écrire ainfi, 576 *unités*; il eft clair que, fuivant les principes établis dans le Chapitre précédent, on peut l'énoncer de cette maniere, *cinq cents foixante & feize* unités fimples, ou de l'efpéce principale que l'on veut nombrer.

A l'égard de la seconde partie du même nombre (576,347892), laquelle ne contient que des chiffres décimaux : si l'on démontre qu'on peut l'écrire ainsi, 347892 *millioniémes* ; il est évident que, suivant les mêmes principes établis, l'on pourra l'énoncer de cette maniere, *trois cents quarante-sept mille huit cents quatre-vingt-douze* millioniémes. Ainsi nous devons nous attacher à prouver que la seconde partie du nombre (576,347892) donné pour exemple, peut être écrite ainsi, 347892 *millioniémes.*

Le chiffre le plus à droite du nombre (576,347892) est composé de deux unités, qui relativement à la place de ce chiffre, ont été nommées *millioniémes.*

Suivant ce que nous avons dit des chiffres décimaux, dont les unités deviennent continuellement sous-décuples ou dix fois moindres à mesure que leur chiffre est reculé vers la droite : dix des unités nommées *millioniémes*, valent une unité du chiffre suivant (9) qui est immédiatement à gauche ; ainsi ce 9 vaut nonante ou quatre-vingt-dix *millioniémes.*

Par la même raison dix unités semblables à celles du 9, c'est-à-dire, dix dixaines de *millioniémes* composeront une unité du chiffre 8 qui suit à gauche : les unités du chiffre 8 seront donc des dixaines de dixaines, ou des centaines de *millioniémes* ; & ainsi des autres chiffres décimaux qui composent la seconde partie du nombre proposé.

On pourra donc considérer les *millioniémes* comme des unités simples ou principales qui composent la seconde partie du nombre proposé ; & cette seconde partie pourra être regardée comme un nombre ordinaire appliqué à nombrer des *millioniémes.* Ainsi la seconde partie du nombre proposé (576,347892) peut être écrite de cette maniere, 347892 *millioniémes.* Donc enfin le nombre total représenté par

(576, 347892) peut être énoncé de cette maniere, *cinq cents soixante & seize* unités, & *trois cents quarante-sept mille huit cents quatre-vingt-douze* millioniémes.

2°. En considérant encore que les unités des chiffres du nombre proposé (576, 347892) sont continuellement décuples les unes des autres, en allant de la droite à la gauche, & que les unités de la plus basse espéce sont des *millioniémes*; on sentira aisément que le nombre entier proposé peut être regardé comme un nombre ordinaire de la nature de ceux dont nous avons parlé dans le Chapitre précédent, mais dont les unités propres ou principales sont des *millioniémes*. En se représentant ainsi le nombre proposé, on pourra l'énoncer de cette maniere, *cinq cents soixante & seize millions trois cents quarante-sept mille huit cents quatre-vingt-douze* millioniémes.

Il est aisé de voir maintenant qu'un nombre quelconque qui contient des chiffres décimaux, n'est différent d'un autre nombre qui n'en contient point, qu'en ce qu'ils ont des unités différentes. Le nombre qui ne contient point de chiffres décimaux a pour unité principale, l'unité absolue entiere *une fois*, ou l'unité entiere de l'espéce que l'on veut nombrer. Le nombre qui contient des chiffres décimaux n'a pour unités principales, que des parties de l'unité absolue *une fois*, ou de l'unité de l'espéce que l'on veut nombrer; & c'est la place de la virgule qui décide quelles sont les parties de l'unité entiere, qui servent d'unités principales à ce nombre. Par exemple, si la virgule a un, ou deux, ou trois ..... ou six chiffres décimaux après elle; les unités principales seront des dixiémes, ou des centiémes, ou des milliémes ..... ou des millioniémes de l'unité entiere.

Cette seconde maniere de considerer les nombres qui contiennent des chiffres décimaux, est souvent la plus commode, & nous aurons occaſion de nous en ſervir dans la ſuite.

3°. Enfin lorſque les nombres contiennent des chiffres décimaux, l'on peut commencer l'énoncé de la numération par celle de la partie qui eſt à la gauche de la virgule, ſuivant les principes ci-devant expliqués, & énoncer enſuite les valeurs de tous les chiffres décimaux les unes après les autres, avec les noms particuliers de leurs unités. Par exemple, pour énoncer le nombre (576, 347892) l'on peut dire : cinq cents ſoixante & ſeize *unités entieres*, & trois *dixiémes*, quatre *centiémes*, ſept *milliémes*, huit *dix-milliémes*, neuf *cent-milliémes*, & deux *millioniémes*. Mais il faut avouer que cet énoncé, quoiqu'auſſi bon & preſque auſſi court que les autres, n'eſt guère en uſage ; il faut cependant le connoître, quand ce ne feroit que pour ſavoir qu'il ſignifie la même choſe que les autres : on a même beſoin de conſidérer ainſi les chiffres décimaux dans pluſieurs occaſions.

Soit que l'on conſidere les chiffres qui ſont à la gauche de la virgule, ſoit que l'on conſidere ceux qui ſont à ſa droite ; la place occupée par le chiffre des unités, & qui eſt marquée par une virgule, ſera toujours nommée *la premiere place*. Les places des chiffres qui feront ſur la gauche de la virgule, ſeront nommées *ſeconde*, *troiſiéme*, *quatriéme place* en montant ; au lieu que les places des chiffres qui ſeront à la droite de la même virgule, feront nommées *ſeconde*, *troiſiéme* & *quatriéme place* en deſcendant : ainſi les *dixaines* auront la *ſeconde place* en montant, & les *dixiémes* auront la *ſeconde place* en deſcendant.

Un nombre n'a ſouvent ni unités principales, ni unités collectives, mais ſeulement des chiffres décimaux : & comme on ne peut diſtinguer la nature des chiffres décimaux que par les places qu'ils occupent ;

il faut marquer la place des unités ſimples ou principales par un zéro ſuivi d'une virgule, afin de faire connoître qu'il n'y a point d'unités ſimples, & que tous les chiffres qui ſont à la droite, ſont des chiffres décimaux. Par exemple, (0, 874563) ſignifie & repréſente 874563 *millioniémes.*

Il arrive encore ſouvent qu'un nombre manque, non ſeulement d'unités ſimples ou principales, mais qu'il manque encore de *dixiémes*, de *centiémes*, de *milliémes*, &c. & qu'il a des chiffres décimaux d'eſpéces inférieures. Dans ce cas, pour donner à chaque chiffre décimal la place qui lui convient, il faut non ſeulement remplir la place des unités ſimples par un zéro ſuivi d'une virgule; mais il faut encore remplir par des zéros, les places des chiffres décimaux qui manquent; enſorte qu'un nombre qui n'auroit ni unités ſimples, ni dixiémes, ni centiémes, ni milliémes, auroit quatre zéros à ſa gauche. Par exemple, (0, 000289) repréſentera 289 *millioniémes.*

Comme la virgule placée à la droite d'un chiffre ſignifie que ce chiffre eſt à la premiere place, & le détermine par conſéquent à compter des unités ſimples; on pourra toûjours placer à la droite de la virgule autant de zéros qu'on voudra, ſans qu'il en arrive aucun changement au nombre à la droite duquel on aura mis ces zéros. Par exemple, le nombre 389 ne ſera pas changé, en l'écrivant ainſi (389,000) & ſignifiera toûjours *trois cents huitante-neuf* unités ſimples; parce que les zéros placés après la virgule, marqueront qu'il n'y a ni dixiémes, ni centiémes, ni milliémes, ni aucune eſpéce de nombre décimal.

Quelquefois l'on met des zéros à la droite de la virgule d'un nombre, pour changer la dénomination de l'unité principale, ou pour la réduire en unités plus petites. Par exemple, ſi l'on veut réduire les unités du nombre 389 en *centiémes*; on l'écrira ainsi ; (389, 00) & il signifiera 38900 *centiémes*. Si on vouloit réduire les unités en *dix-milliémes*, on l'écriroit de cette maniere (389,0000), & il signifieroit 3890000 *dix-milliémes* : & ainsi des autres changemens.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE SECOND.

Des Opérations de l'Arithmétique sur les Nombres incomplexes.

LES Opérations de l'Arithmétique se réduisent à ces quatre problêmes ; *ajoûter*, *soustraire*, *multiplier*, *diviser*. Toutes les autres opérations plus composées ne sont que des combinaisons de celles-ci.

Les quatre Opérations de l'Arithmétique se font sur des nombres *incomplexes*, ou sur des nombres *complexes*.

4 Les *nombres incomplexes* sont ceux qui n'ont qu'une unité principale, comme la livre tournois, la toise & toute autre unité qui seroit ou arbitraire ou établie par l'usage.

Les *nombres complexes* sont ceux qui ont plusieurs unités principales différentes, & qui devroient plutôt être appellés *sommes* que *nombres* ; parce qu'un nombre est la collection de plusieurs unités égales.

Par exemple, la somme composée de 8 livres, de 8 sols & de 8 deniers, est un nombre complexe; celle de 50 toises & de 5 pieds, est pareillement un nombre complexe; parce que ces deux sommes sont composées de nombres qui ont différentes unités principales.

Nous ne parlerons dans ce Livre que de l'Addition, de la Soustraction, de la Multiplication & de la Division des nombres incomplexes; & nous réserverons pour le Livre quatriéme, les mêmes opérations sur les nombres complexes.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition des Nombres incomplexes.

DÉFINITIONS.

5 L'Addition est une opération par laquelle on trouve un nombre égal à la somme de plusieurs autres nombres.

Comme toutes les unités d'un même nombre doivent être de la même espéce; il faut que tous les nombres que l'on proposera d'ajoûter ensemble, pour ne faire qu'un même nombre, ayent des unités de la même espéce, ou qui puissent être réduites à la même espéce. Par exemple, si l'on proposoit d'ajoûter ensemble 20 livres tournois, 50 chevaux & 60 toises, qui sont trois nombres dont les unités principales ne sont pas de la même espéce, & ne sont pas même réductibles à la même espéce d'unité, on ne s'aviseroit pas de chercher un nombre égal à la somme de ces trois nombres; & pour les ajoûter ensemble, on se contenteroit d'en faire un mémoire qui représenteroit leur somme. Si l'on proposoit d'ajoûter ensemble

2 toises, 5 pieds & 8 pouces, on ne s'aviseroit pas non plus d'ajoûter simplement ensemble les trois nombres 2, 5 & 8, leurs unités étant différentes. Cependant comme ces unités différentes sont réductibes à la même espéce, puisque deux toises valent 144 pouces, que 5 pieds valent 60 pouces, & qu'on peut faire un seul nombre des trois nombres 144 pouces, 60 pouces & 8 pouces; l'on pourra ajoûter ensemble 2 toises 5 pieds 8 pouces, & n'en faire qu'un seul nombre en réduisant toutes les unités à la même espéce; mais comme ce n'est point ici le lieu de parler des nombres dont les unités ont différentes dénominations, il faut revenir aux nombres incomplexes dont les unités sont de la même espéce.

Le nombre qui résulte de l'assemblage ou de l'addition de plusieurs autres, se nomme *Somme*.

PROBLÉME.

6 *Ajoûter ensemble plusieurs nombres représentés par tant de chiffres que l'on voudra.*

Pour faire cette opération commodément: l'on écrira les uns sous les autres les nombres que l'on doit ajoûter ensemble, de maniere que les chiffres du même degré soient exactement dans une même colonne verticale; & l'on tirera une ligne au-dessous de tous ces nombres, pour les séparer de celui qui en doit être la somme.

Ensuite on ajoûtera ensemble tous les chiffres du plus bas degré qui sont dans la premiere colonne à droite. Si la somme de ces chiffres est moindre que 10, & qu'elle puisse par conséquent être représentée par un seul chiffre; on écrira ce chiffre dans cette premiere colonne au-dessous de la barre: mais si cette somme surpasse 9, & ne peut être représentée que par plusieurs chiffres; on écrira au-dessous de la barre le chiffre des unités de cette ſomme, & l'autre chiffre étant de l'eſpéce de ceux de la ſeconde colonne, ſera retenu pour être ajoûté avec eux.

On fera la même opération pour toutes les colonnes juſqu'à la derniere qui contient les chiffres du plus haut degré: & lorſqu'on aura ajoûté enſemble les chiffres de cette derniere colonne, avec celui ou ceux qu'on aura retenus de la colonne précédente; on écrira dans cette colonne, au-deſſous de la barre, le nombre que l'on aura trouvé.

Cette opération étant faite; tous les chiffres qui ſe trouveront au-deſſous de la barre, repréſenteront la ſomme de tous les nombres que l'on a propoſé d'ajoûter enſemble.

Comme des Exemples frappent davantage que des préceptes généraux, nous allons détailler l'opération de l'addition dans les exemples ſuivans.

EXEMPLE PREMIER.

On propoſe d'ajoûter enſemble les deux nombres 3456 *&* 4231.

	4.e colonne	3.e colonne	2.e colonne	1.ere colonne
Ces deux nombres étant ainſi diſpoſés	3	4	5	6
	4	2	3	1
On trouvera pour leur ſomme	7	6	8	7

Pour déterminer les uns après les autres, les chiffres de cette ſomme, on opérera comme il ſuit.

1°. On ajoûtera enſemble les deux chiffres 6 & 1 qui compoſent la premiere colonne: & comme leur ſomme eſt *ſept*, que l'on peut écrire par le ſeul chiffre

7; on écrira 7 au-dessous de la barre, dans cette premiere colonne.

2°. On ajoûtera ensuite les chiffres 5 & 3 du second degré, qui composent la seconde colonne : & comme leur somme est *huit*, que l'on peut représenter par le seul chiffre 8 ; on écrira 8 au-dessous de la barre dans cette seconde colonne.

3°. On ajoûtera de même ensemble les chiffres 4 & 2 de la troisiéme colonne : & leur somme pouvant être représentée par le seul chiffre 6 ; on écrira 6 au-dessous de la barre, dans cette troisiéme colonne.

4°. Enfin l'on ajoûtera ensemble les chiffres 3 & 4 de la quatriéme & derniere colonne : & leur somme étant représentée par le seul chiffre 7 ; l'on écrira 7 au-dessous de la barre, dans cette derniere colonne.

L'opération étant conduite comme on vient de l'expliquer ; l'on trouve au-dessous de la barre les quatre chiffres 7687, qui représentent le nombre sept mille six cents huitante-sept, auquel montent les deux nombres 3456 & 4231 que l'on a proposé d'ajoûter ensemble.

EXEMPLE II.

On propose d'ajoûter ensemble les quatre nombres 5874, 9956, 459, 15.

Les chiffres du même degré étant mis les uns sous les autres, comme ici

$$\begin{array}{r} 5874 \\ 9956 \\ 459 \\ 15 \\ \hline 16304 \end{array}$$

On trouvera que la somme est 16304

Pour déterminer suivant la regle les chiffres de cette somme les uns après les autres, on opérera comme il suit.

1°. On ajoûtera ensemble les nombres représentés par les chiffres qui composent la premiere colonne, en disant : 4 & 6 font 10, & 9 font 19, & 5 font 24. Comme cette somme 24 ne peut être représentée que par deux chiffres savoir par 4 qui représente 4 unités, & par 2 qui représente 2 dixaines, on écrira 4 dans la premiere colonne au-dessous de la barre, & l'on retiendra le 2 ou plutôt les deux dixaines, pour les ajoûter avec les quatre nombres de dixaines, qui composent la seconde colonne.

2°. Passant à l'addition des nombres de la deuxiéme colonne, dont les chiffres sont composés d'unités du second degré, l'on dira : 2 que l'on a retenu de la premiere colonne & 7 font 9, & 5 font 14, & 5 font 19, & 1 font 20. Comme cette somme 20 d'unités du second degré, ne peut être écrite que par deux chiffres, dont celui 2 signifie qu'il y a deux dixaines d'unités du second degré, qui ne font que deux unités de la troisiéme colonne ou du troisiéme degré, & dont celui 0 marque qu'il n'y a point d'unités du degré de celles qu'on a ajoûtées ; l'on écrira 0 au-dessous de la seconde colonne, & l'on retiendra le 2 pour l'ajoûter avec les chiffres de la troisiéme colonne.

3°. Pour la troisiéme colonne dont les chiffres représentent des nombres composés d'unités du troisiéme degré, l'on dira : 2 que l'on a retenu de la seconde colonne & 8 font 10, & 9 font 19, & 4 font 23. Comme ce nombre 23 s'écrit par deux chiffres, savoir par un 3 qui signifie trois unités de la colonne que l'on vient d'ajouter, & par un 2 qui représente deux dixaines d'unités de la même colonne, ou deux unités d'un degré supérieur, ou semblables à celles de la quatriéme colonne ; on écrira 3 sous la barre dans la troisiéme colonne, & l'on retiendra 2 pour l'ajoûter avec la quatriéme colonne qui suit.

4°. Enfin pour l'addition de la quatriéme colonne avec ce qu'on a retenu, l'on dira : 2 que l'on a retenu & 5 font 7, & 9 font 16. Cette somme étant composée de 6 unités semblables à celles de la quatriéme colonne & d'une unité d'un degré supérieur, on écrira 6 sous la barre dans la quatriéme colonne. A l'égard de l'unité d'un degré supérieur, on la retiendroit, si l'on avoit encore une colonne à ajoûter; mais comme on n'en a point, on avancera le 1 à la gauche du 6, c'est-à-dire qne l'on écrira 16 tout simplement

EXEMPLE III.

7 *On propose d'ajoûter ensemble les quatre nombres* (5874; 4631, 752; 6872, 44; 9797, 5) *dont les trois derniers contiennent des chiffres décimaux.*

On écrira tous ces nombres les uns sous les autres; de maniere que les chiffres des unités simples soient dans une même colonne, & que tous les autres chiffres de même dénomination se trouvent pareillement dans une même colonne les uns sous les autres. Les chiffres étant ainsi disposés,

5874
4631, 752
6872, 44
9797, 5
27175, 692

1°. On ajoûtera ensemble les chiffres du plus bas degré qui sont des *milliémes*; & comme il n'y a que 2 *milliémes*, on écrira 2 au-dessous de la barre dans la colonne des *milliémes*.

2°. On ajoûtera les chiffres 5 & 4 de la colonne suivante qui est celle des *centiémes*; & comme leur somme 9 s'écrit par un seul chiffre, on écrira ce chiffre 9 dans cette colonne au-dessous de la barre.

3°. On ajoûtera ensemble les chiffres de la colonne des *dixiémes*, en disant : 7 & 4 font 11, & 5 font 16 ; & comme cette somme 16 est composée de 6 unités du degré de cette colonne, & d'une dixaine qui vaut une unité de la colonne suivante ; l'on écrira 6 sous cette colonne, & l'on retiendra 1 pour l'ajoûter avec la colonne suivante.

4°. Ajoûtant l'unité qu'on vient de retenir avec les chiffres de la colonne des unités *simples* ou *principales*, on trouvera 15, c'est-à-dire, 5 unités de cette colonne, & 1 *dixaine* qui vaut une unité de la colonne suivante ; ainsi l'on écrira 5 au-dessous de cette colonne, & l'on retiendra 1 pour la colonne suivante.

5°. Ajoûtant de même l'unité qu'on vient de retenir avec la colonne des dixaines, on trouvera 27, c'est-à-dire, 7 unités de cette colonne, & 2 dixaines qui valent deux unités de la colonne suivante ; ainsi l'on écrira 7 sous cette colonne, & l'on retiendra 2 pour la colonne suivante.

On fera la même opération pour les autres colonnes, & l'on trouvera (27175,692) pour la somme des quatre nombres proposés.

REMARQUE.

8 Les nombres (5874 ; 4631, 752 ; 6872, 44 ; 9797, 5) que l'on a proposés dans le dernier exemple pour en faire l'addition, auroient pû être changés, & réduits à avoir des unités principales de même dénomination ; & comme l'un de ces nombres (4631,752) représente 4631 unités simples & 752 *milliémes*, ou 4631752 *milliémes*, on auroit pû réduire les autres à avoir des *milliémes* pour unités principales : alors le nombre 5874 qui représente 5874 *unités simples*, seroit devenu 5874000 *milliémes*, celui (6872,44)

seroit devenu 6872440 *milliémes*, & celui (9797,5) seroit devenu 9797500 *milliémes*. Tous les nombres proposés étant ainsi réduits à avoir des unités de même dénomination, leur addition auroit pu être faite suivant les préceptes que l'on a donnés pour ajoûter les nombres qui n'ont point de chiffres décimaux; & le total auroit été 27175692 *milliémes*; ensuite pour supprimer le mot de *milliémes*, on auroit pu écrire la même somme sous cette forme 27175,692). (*N*°.3.).

DÉMONSTRATION

Des Opérations que l'on a faites pour l'Addition.

Par ces opérations l'on a ajoûté ensemble toutes les parties des nombres qui étoient proposés; & par conséquent les résultats que l'on a trouvés sont les sommes de ces nombres.

CHAPITRE II.

De la Soustraction des Nombres incomplexes.

DÉFINITION.

9 L'OPÉRATION par laquelle on retranche une quantité d'une autre, s'appelle *Soustraction*.

Il faut donc que la quantité qui doit être retranchée soit contenue dans celle dont on proposera de la retrancher; & par conséquent ces deux quantités doivent être de même espéce, ou réductibles à la même espéce.

PROBLÊME.

10 *Soustraire un nombre d'un autre nombre.*

Pour faire une soustraction, l'on écrit le nombre qu'on veut retrancher au-dessous de celui dont on veut le retrancher, & l'on dispose les chiffres de ces deux nombres de maniere que les unités ſoient ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, &c ; & s'il y a des chiffres décimaux, ceux qui ſont de même eſpéce doivent auſſi être les uns ſous les autres. Les deux nombres étant ainſi diſpoſés, l'on tire une barre au-deſſous de laquelle doit être écrit le reſte de la ſouſtraction.

Pour faire la ſouſtraction par parties, on retranche chaque chiffre inférieur de ſon correſpondant ſupérieur, en commençant par la droite, & en allant toujours des chiffres du plus bas degré vers ceux qui ſont de degrés plus élevés. Mais dans cette opération, il peut arriver trois cas ; ou le chiffre inférieur eſt plus petit que le chiffre ſupérieur qui lui répond, ou il lui eſt égal, ou il eſt plus grand.

Si le chiffre inférieur eſt plus petit que le ſupérieur, il en pourra être retranché ſans difficulté, & l'on aura un reſte que l'on écrira au-deſſous

Si le chiffre inférieur eſt égal au ſupérieur, il pourra encore en être retranché ; & comme il ne reſtera rien, on mettra un zéro au-deſſous pour le reſte.

Enfin, ſi le chiffre inférieur eſt plus grand que le ſupérieur, il n'en pourra point être retranché ſans une préparation qui conſiſte à emprunter une unité ſur le chiffre d'un degré ſupérieur, pour l'ajoûter avec le chiffre trop petit : alors le chiffre ſur lequel on a emprunté une unité, devient plus petit qu'il n'étoit d'une unité, & cette unité étant portée dans un rang inférieur d'un degré, y doit être comptée pour une dixaine ; enſorte que le chiffre trop petit auquel on l'ajoûte, eſt toûjours augmenté de dix, & devient par conſéquent toûjours aſſez grand pour qu'on en puiſſe retrancher le chiffre inférieur qui ne ſauroit paſſer 9. Des exemples feront beaucoup mieux entendre cette opération.

EXEMPLE PREMIER.

Si du nombre	466
On retranche	324
Le reste sera	142

Le nombre que l'on veut retrancher étant écrit au-dessous de celui dont il faut le retrancher, de maniere que les chiffres de même dénomination soient les uns sous les autres, & la barre étant tirée comme on le voit dans cet exemple, on déterminera les chiffres du reste les uns après les autres, en opérant comme il suit.

1°. Commençant par retrancher le chiffre du plus bas degré qui est le plus à droite, du chiffre qui est au-dessus de lui, l'on dira : si de 6 l'on ôte 4, il restera 2 que l'on écrira au-dessous de la barre dans le premier rang, où sont les chiffres sur lesquels on opere.

2°. Passant au rang suivant, l'on dira : si de 6 l'on ôte 2, il restera 4 que l'on écrira dans le second rang où l'on opere.

3°. Enfin étant parvenu au dernier rang où sont les chiffres de la plus haute dénomination, l'on dira : si de 4 on ôte 3, il restera 1 que l'on écrira au-dessous de la barre dans le troisiéme rang ; & l'opération sera faite.

Le reste de la soustraction sera donc 142.

EXEMPLE II.

Si du nombre	552
On retranche	51
Il restera	501

Les chiffres étant disposés comme on le voit, & de la maniere dont on vient de l'expliquer, 1°. Commençant par les chiffres du plus bas degré, l'on dira : si de 2 l'on ôte 1, il restera 1 que l'on écrira au-dessous.

2°. Passant au rang suivant, l'on dira : si de 5 l'on ôte 5, il ne restera rien ; ainsi l'on écrira un zéro qui marquera que les chiffres des dixaines étant soustraits l'un de l'autre, ne donnent point de reste.

3°. Enfin passant au troisiéme rang où il n'y a point de chiffre à retrancher, l'on dira : si de 5 on n'ôte rien, il restera 5 ; ainsi l'on écrira 5 pour le reste au-dessous de la barre dans ce troisiéme rang.

L'opération étant achevée, l'on aura 501 pour le reste que l'on demande.

EXEMPLE III.

Si du nombre	7̇5̇8
L'on propose de retrancher	592
L'on trouvera pour le reste	159

Les chiffres de même dénomination étant disposés les uns au-dessous des autres, on opérera comme il suit.

1°. Commençant par les chiffres du plus bas ordre, l'on proposera de retrancher 9 de 8. Comme cela ne se peut pas ; l'on prendra sur le chiffre suivant (5) du nombre supérieur une unité, pour en joindre la valeur avec le 8 qui est trop petit ; & comme cette unité transportée dans le rang du 8 y vaudra 10, elle augmentera 8 de 10, & l'on aura 18 dont on pourra retrancher 9. Le reste sera 9 que l'on écrira au-dessous de la barre dans le premier rang

2°. Passant au rang suivant où le 5 ne vaut plus que 4, à cause de l'unité qu'on a prise sur lui, & qu'on aura pû marquer par un point pour s'en souvenir ;

l'on proposera d'ôter 9 de 4. Comme cela ne se peut pas, l'on prendra une unité sur le chiffre suivant (7) du nombre supérieur, pour en joindre la valeur avec le 4 dont on doit ôter 9 ; & comme cette unité du troisiéme degré portée dans le rang inférieur y vaudra 10 ; en la joignant avec 4 restant de 5, l'on aura 14 dont on pourra retrancher 9, & il restera 5 que l'on écrira au-dessous.

3°. Passant au rang des centaines où le 7 ne vaut plus que 6, à cause de l'unité qu'on a prise sur lui, & que l'on a pu marquer par un point ; on proposera d'ôter 5 de 6, & il restera 1 que l'on écrira au-dessous. Ainsi le reste demandé sera 159.

II *Il arrive souvent que le chiffre sur lequel il faut emprunter une unité est un zéro, lequel ne représentant rien, ne peut rien prêter. Dans ce cas, il faudra emprunter sur le chiffre qui sera à la gauche du zéro ou de tous les zeros, s'il y en a plusieurs ; & laissant 9 au-dessus de chacun des zéros au-delà desquels on aura emprunté, l'on ne réservera qu'une dixaine pour la joindre au chiffre duquel on veut soustraire. Pour mieux faire entendre cette opération, nous proposerons l'exemple suivant.*

EXEMPLE IV.

	99
Si du nombre	7004
L'on retranche le nombre	5486
Le reste sera	1518

L'on proposera d'ôter 6 de 4. Comme cela est impossible, & qu'on ne peut pas emprunter sur le chiffre qui est immédiatement à gauche du 4, ni sur le suivant, parce que ce sont deux zéros ; on empruntera une unité sur le 7 qui est au-delà de ces zéros. Mais comme l'unité empruntée sur le 7 vaut 100 dixaines, &

qu'on n'a besoin que d'une dixaine pour joindre avec le 4 dont on doit retrancher 6, on laissera au-dessus des zéros qui sont à la troisiéme & à la seconde place les deux chiffres 9 9 qui vaudront 99 dixaines : ensorte que des 100 dixaines empruntées sur le chiffre 7, on ne prendra qu'une dixaine qui étant jointe avec 4 fera 14 dont on retranchera 6, & il restera 8 que l'on écrira au-dessous pour le premier chiffre du reste que l'on cherche.

Le nombre supérieur étant ainsi préparé, le 7 sur lequel on a emprunté 1 ne vaudra plus que 6, & les deux zéros sur lesquels on a laissé des 9, ne seront plus regardés comme des riens, mais comme des 9. Ainsi pour continuer la soustraction, on retranchera 8 de 9, & il restera 1 qu'on écrira au-dessous. Puis on retranchera 4 de 9, & il restera 5 qu'on écrira pareillement au-dessous. Enfin on ôtera 5 de 6, & il restera 1 qu'on écrira de même au-dessous.

L'opération étant entiérement faite, comme on vient de l'expliquer, l'on aura 1518 pour le reste qu'on demande.

12 *Lorsqu'il y a des chiffres décimaux dans le nombre que l'on doit retrancher, ou dans celui duquel il faut retrancher, ou dans tous les deux ; on dispose d'abord les chiffres de même degré les uns sous les autres ; & la soustraction se fait ensuite de la même maniere que la précédente, en retranchant chaque chiffre de l'un de chaque chiffre correspondant de l'autre.*

Pour n'avoir point de difficulté dans cette opération, lorsque l'un des deux nombres n'aura pas autant de chiffres décimaux que l'autre ; l'on mettra à la droite de celui qui en aura le moins, autant de zéros qu'il en faudra pour qu'ils ayent tous les deux un nombre égal de chiffres décimaux ; ce qui ne changera rien à la valeur de ce nombre, puisque la virgule conservera à chaque chiffre le rang qu'il avoit avant l'addition des zéros.

Les deux nombres étant ainsi préparés, & leur plus basse unité étant de la même espéce, on pourra la prendre pour l'unité principale, & regarder les deux nombres comme s'ils n'avoient point de chiffres décimaux. Pour mieux faire entendre cette regle, en voici un exemple.

EXEMPLE V.

On propose le nombre	230009, 3
Pour en retrancher le nombre	8716, 257

Comme ces deux nombres n'ont pas la même quantité de chiffres décimaux, le second en ayant deux plus que le premier; on mettra deux zéros à la droite du premier, & les deux nombres proposés deviendront ceux-ci

230009, 300
8716, 257

dont les unités du plus bas degré seront des *milliémes*; ensorte qu'on pourra les regarder comme des nombres sans chiffres décimaux, destinés à compter des unités qui sont des *milliémes*. On pourroit même ne point employer de virgules, en écrivant après eux le nom de *milliéme* comme ci-dessous; & faisant la soustraction comme dans les exemples précédens,

	230009300	*milliémes*
	8716257	*milliémes*
On auroit pour reste	221293043	*milliémes*

Mais comme les virgules n'ont point d'autre effet que de déterminer le degré de chaque chiffre, & de fixer la dénomination des unités du plus bas degré, on aime mieux supprimer le mot de *milliéme*, & placer une virgule après le troisiéme chiffre de chaque nombre. Suivant cela, l'on aura

Nombre dont il faut soustraire	230009, 300
Nombre à soustraire	8716, 257
	221293, 043

DÉMONSTRATION

De l'Opération de la Soustraction.

Par les opérations que l'on a faites, toutes les parties du nombre que l'on devoit soustraire, ont été retranchées des parties correspondantes de l'autre nombre, & chaque reste a été écrit; on a donc retranché le nombre proposé, comme on le devoit; & les chiffres qui se trouvent écrits, composent un nombre égal au reste que l'on demandoit.

REMARQUE.

13 Il y a encore plusieurs méthodes différentes de celle que nous avons expliquée, pour faire la soustraction; mais nous n'en proposerons que deux: la premiere, parce qu'on en fait assez communément usage; la seconde, parce qu'elle nous servira à faire la preuve de l'addition; nous n'en parlerons même que par rapport à cette preuve.

La premiere des deux méthodes que nous nous proposons d'expliquer, ne differe de celle dont nous avons parlé, qu'en ce que l'on n'ôte point des chiffres supérieurs les unités qu'on a empruntées sur eux, avant d'en soustraire les chiffres qui sont au-dessous d'eux, & que l'unité qu'on a empruntée sur un chiffre supérieur s'ajoûte avec le chiffre inférieur; ensorte qu'on ôte tout à la fois du chiffre supérieur l'unité qu'on a empruntée sur lui, & le chiffre inférieur qu'on en doit retrancher. Voici un exemple de cette opération.

EXEMPLE.

Si du nombre	7004
On soustrait le nombre	5486
Il restera	1518

Pour trouver tous les chiffres du reste suivant la méthode dont nous venons de donner une idée,

1°. On proposera d'ôter 6 de 4; & comme cela est impossible, on ajoûtera une dixaine à 4, ce qui fera 14; puis on ôtera 6 de 14, & il restera 8 qu'on écrira au-dessous.

2°. La dixaine que l'on ajoûtée avec 4 auroit dû être une unité empruntée sur le zéro qui suit 4. Ainsi cette unité devant être ôtée de ce zéro, & le chiffre 8 qui est au-dessous du même zéro, devant aussi en être retranché, on ajoûtera l'unité empruntée avec le 8, & l'on proposera de retrancher leur somme 9 du zéro: mais comme cela est impossible, on empruntera une unité d'un degré supérieur, qui étant apportée dans le rang du zéro vaudra 10; puis on retranchera 9 de 10, & il restera 1 qu'on écrira au-dessous.

3°. L'unité qu'on a empruntée, devant être retranchée du second zéro, aussi bien que le 4 qui est au-dessous de lui: on ajoûtera l'unité empruntée avec 4, puis on proposera de retrancher leur somme 5 du zéro qui est au-dessus; & comme cela est impossible, l'on empruntera une unité du rang supérieur, qui étant apportée dans le rang où est le zéro pour la joindre avec lui, vaudra 10; ensuite on retranchera 5 de 10, & il restera 5 qu'on écrira au-dessous.

4°. Enfin l'unité empruntée devant être ôtée du 7, aussi bien que le 5 qui est au-dessous de lui, l'on ajoûtera cette unité avec 5, & ayant retranché leur somme 6 de 7, il restera 1 qu'on écrira au-dessous.

L'opération étant faite comme on vient de l'expliquer, l'on trouve 1518 pour le reste demandé.

Nous avons choisi un exemple sur lequel il auroit fallu emprunter au-delà de plusieurs zéros en suivant la méthode qui a été premierement expliquée, pour faire voir que cette derniere méthode est générale, & qu'on opere toûjours de la même maniere dans tous les cas qui peuvent se présenter.

DE LA PREUVE

DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION.

ON n'entend point ici par preuve une démonstration, mais seulement une opération qui puisse faire connoître si l'on a commis quelque erreur en opérant.

L'Addition & la Soustraction peuvent se servir mutuellement de preuve, comme on va le faire voir.

Preuve de l'Addition.

14 La somme de l'Addition doit contenir exactement tous les nombres qu'on a ajoûtés ensemble; c'est pourquoi si de la somme de l'addition l'on retranche toutes les parties qu'on a ajoûtées, il ne doit rien rester. Nous proposerons donc pour preuve de l'addition de retrancher de la somme toutes les parties des nombres ajoûtés; & si après cette soustraction il ne reste rien, l'addition sera réputée bonne.

Voici l'ordre qu'on suit dans cette opération.

Supposons qu'on a ajoûté ensemble les trois nombres	473 567 924
Et qu'on a trouvé que leur somme est	1964 110

Si cette somme 1964 est exacte & contient toutes les parties des nombres ajoûtés ; il est évident que si l'on en retranche toutes les centaines, toutes les dixaines & toutes les unités des nombres ajoûtés, il ne restera rien.

On pourroit faire cette soustraction en commençant par les unités, de même que nous l'avons faite dans tous les exemples qu'on vient de voir ; mais comme il faudroit assembler les unités, les dixaines & les centaines dans le même ordre qu'on les a ajoûtées pour trouver leur somme, l'on courroit risque de retomber dans les mêmes erreurs qu'on pourroit avoir commises en faisant l'addition. Nous nous proposerons donc de faire la soustraction, en commençant par les chiffres dont les unités sont du plus haut degré ; ce qui fera une troisiéme méthode de soustraction.

1°. Pour retrancher les centaines des nombres ajoûtés, de la somme de ces nombres, nous ajoûterons ces centaines, en disant : 4 & 5 font 9, & 9 font 18 ; & retranchant ces 18 centaines des 19 centaines de la somme, il restera 1 que nous écrirons au-dessous de 9, après avoir barré les deux chiffres 19.

2°. Pour retrancher les dixaines, nous les ajoûterons, en disant : 7 & 6 font 13, & 2 font 15 ; puis ayant retranché ces 15 dixaines des 16 dixaines qui restent dans la somme, & qui sont composées du premier reste 1 écrit au-dessous du 9, & du chiffre 6 *dixaines* de la somme, il restera 1 que nous écrirons au-dessous de 6, après avoir barré les deux chiffres 16.

3°. Enfin nous ajoûterons les unités, en disant : 3 & 7 font 10, & 4 font 14; & ayant retranché ces 14 unités de 14 unités qui sont encore dans la somme, il ne restera rien : on écrira donc un zéro au-dessous de 4, après avoir barré 14.

Comme il ne reste rien de cette soustraction, l'addition des trois nombres 473, 567, 924, sera réputée bonne.

Preuve de la Soustraction.

15 Pour prouver qu'une soustraction a été bien faite, nous proposerons d'ajoûter son reste avec la quantité retranchée; & si la somme est égale à la quantité dont on a retranché, la soustraction sera réputée bonne. En voici un exemple.

Lorsque d'un nombre tel que	7004
L'on a retranché un autre nombre tel que	5486
Si le reste est exactement le nombre	1518
Ajoûtant 1518 avec 5486, on aura cette somme	7004

La somme étant la même que le nombre dont on a soustrait, prouvera que la soustraction a été bien faite.

Il est évident que la quantité retranchée étoit dans celle dont elle a été soustraite, & que le reste étoit aussi dans cette même quantité; ensorte que la quantité retranchée & le reste sont toutes les parties de la quantité dont on a soustrait : il est donc clair que l'assemblage de la quantité soustraite & du reste, doit être égal à la quantité dont on a soustrait.

CHAPITRE III.

De la Multiplication des Nombres incomplexes.

DÉFINITIONS.

16 LA Multiplication est une opération par laquelle on répete une quantité un certain nombre de fois.

Il faut donc deux nombres pour une multiplication; premierement le nombre qui doit être multiplié ou répété, qu'on appelle *multiplicande*; secondement celui qui indique par le nombre de ses unités combien de fois il faut répéter le multiplicande, & que l'on nomme *mutiplicateur.*

Le multiplicande & le multiplicateur se nomment aussi *facteurs* de la multiplication; & le nombre qui résulte de la multiplication, ou qui contient le multiplicande autant de fois que le mutiplicateur contient l'unité, se nomme *produit.*

Par exemple, si l'on propose de multiplier 8 par 4, ces deux nombres 8 & 4 seront les deux *facteurs* de la multiplication; le premier (8) que l'on doit répéter sera le *multiplicande*; le second (4) dont les quatre unités marquent qu'il faut répéter 4 fois le multiplicande, sera le *multiplicateur*; enfin le nombre 32 que l'on trouvera en répétant 8 quatre fois, sera le *produit.*

17 Pour indiquer que deux nombres doivent être multipliés l'un par l'autre, l'on met entr'eux cette marque × qui signifie *multiplié par.* Ainsi 8 × 4 signifie que l'on multiplie 8 par 4; & comme le produit de cette multiplication est 32, l'on peut dire que 8×4 est égal à 32.

Si l'on vouloit encore multiplier ce produit 8×4 ou 32 par un nouveau multiplicateur 2; l'on écriroit $8 \times 4 \times 2$ ou 32×2, dont le produit eſt 64; c'eſt-à-dire que l'on écriroit les uns après les autres tous les facteurs dont la multiplication doit compoſer un produit, en les ſéparant par la marque $\times$. Nous verrons dans la ſuite qu'on peut prendre ces facteurs dans tel ordre qu'on voudra, pour les multiplier enſemble.

On pourroit encore faire la multiplication, par exemple, celle de 32 par 4, en la réduiſant à une addition dans laquelle on écriroit le multiplicande 32 quatre fois & dans l'ordre où l'on écrit les quantités que l'on veut ajoûter; parce que la ſomme de cette addition contiendroit 32 quatre fois, & ſeroit par conſéquent le produit de 32 multiplié par 4.

Cette façon de faire la multiplication peut être miſe en uſage lorſque le multiplicateur n'a que très-peu d'unités; mais elle ne ſeroit pas praticable ſi le multiplicateur étoit un nombre un peu grand. Ainſi il faudra avoir recours à des regles particulieres & ſimples, pour abréger les opérations.

Corollaire premier.

18 Donc le produit d'une multiplication aura des unités de même eſpéce que celles du multiplicande; car ce produit étant fait de l'addition répétée du multiplicande, il ne peut pas avoir d'autres unités que lui.

1°. Il ſuit de là que ſi les unités du plus bas ordre du multiplicande, ſont des unités ſimples, ou des dixaines, ou des centaines, &c. les unités du plus bas ordre du produit ſeront auſſi des unités ſimples, ou des dixaines, ou des centaines, &c. Ainſi le produit doit avoir à ſa droite autant de rangs qu'il y en a à la droite du

multiplicande.

multiplicande. Par exemple, si l'on multiplie 8 ou 80 ou 800 par 4, ce que l'on fera en répétant quatre fois le chiffre significatif 8 du multiplicande, le produit 32 aura à sa droite autant de zéros ou de places qu'il y en a après le chiffre 8 multiplié, & sera 32 ou 320, ou 3200.

2°. La conséquence que l'on vient de tirer, suppose que les unités du multiplicateur sont des unités simples; mais si les unités du multiplicateur étoient des unités collectives, comme des dixaines, ou des centaines, ou des milles, &c. chacune de ces unités collectives marqueroit qu'il faut répéter le multiplicande dix fois, ou cent fois, ou mille fois: ensorte que le produit seroit dix fois, ou cent fois, ou mille fois plus grand que si l'on avoit multiplié par un nombre d'unités simples; & par conséquent ce produit auroit encore à sa droite autant de places qu'il y en auroit à la droite du chiffre multiplicateur.

Par exemple, si l'on multiplie 8 par 4, ou par 40, ou par 400, ou par 4000, &c; ce que l'on fera en répétant 8 quatre fois; le produit 32 aura dans tous ces cas autant de zéros ou de places à sa droite qu'il y en aura à *la droite* du chiffre 4 multipliant, & sera par conséquent 32, ou 320, ou 3200, ou 32000.

3°. Et joignant ensemble ces deux conséquences, on conclurra que le produit de deux chiffres multipliés l'un par l'autre doit avoir à sa droite autant de zéros ou de rangs, qu'il y en aura en tout à la droite du chiffre multiplié & à la droite du chiffre multipliant.

Par exemple, si l'on multiplie 800 par 4, ou par 40, ou par 400, ou par 4000, &c; ce qu'on fera en répétant le chiffre significatif 8 du multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le chiffre significatif 4 du multiplcateur; le produit 32 aura premierement à sa droite les deux zéros qui sont à la droite de 8, & aura de plus à ſa droite tous les zéros qui ſeront à la droite du chiffre 4 multipliant; & ſera par conſéquent 3200, ou 32000, ou 320000, ou 3200000, &c.

Corollaire II.

19 Un nombre, quelle que ſoit la nature de ſes unités, peut être répété autant de fois qu'on le voudra; ainſi le multiplicande d'une multiplication peut être un nombre abſtrait, ou un nombre concret compoſé d'unités de telle eſpece qu'on voudra

Il n'en eſt pas de même du multiplicateur qui doit marquer combien de fois le multiplicande doit être répété. Chacune de ſes unités ſimples ou collectives ne doit repréſenter qu'un nombre de fois; ainſi l'on doit néceſſairement le conſidérer comme un nombre abſtrait ou abſolu, & jamais il ne peut être regardé comme un nombre concret

On propoſe cependant quelquefois de multiplier un nombre concret par un autre nombre concret. En ſuppoſant, par exemple, qu'une piece de bois coûte 5 *livres*, & qu'on veut ſavoir le prix de 20 pieces de bois, l'on propoſe de multiplier 5 *livres* par 20 *pieces de bois*; mais il eſt évident que cette propoſition eſt contre les regles de la multiplication & qu'il ne faut pas multiplier 5 *livres* par le nombre concret 20 *pieces de bois*, mais ſeulement par le nombre abſolu 20 *fois*, puiſque pour avoir le prix de 20 *pieces de bois* dont chacune coûte 5 *livres*, il ſuffit de répéter 5 *livres* 20 *fois.*

Lorſque nous diſons que le multiplicateur eſt un nombre abſolu compoſé d'unités vagues ou abſtraites, nous ne parlons que de la multiplication des nombres, & nous ne prétendons point toucher à la multiplication géométrique, dans *laquelle l'un des facteurs étant une ligne, l'autre facteur peut être une ligne ou une surface, & dans laquelle le produit n'a jamais des unités de même espéce que celle de ses facteurs. Ce n'est point ici le lieu d'expliquer cette espéce de multiplication, ni la nature des unités de son produit.*

COROLLAIRE III.

20 Donc, le multiplicande restant le même, si le multiplicateur devient double ou triple ou quadruple, &c de ce qu'il étoit; le produit deviendra aussi double ou triple ou quadruple, &c de ce qu'il étoit; parce que le nouveau produit contiendra le même multiplicande deux fois ou trois fois ou quatre fois, &c, plus que l'ancien produit ne le contenoit.

Le multiplicateur restant le même, si le multiplicande devient double ou triple ou quadruple, &c, de ce qu'il étoit; le produit deviendra aussi double ou triple ou quadruple &c, de ce qu'il étoit: parce que le nouveau produit contiendra un multiplicande double ou triple ou quadruple, &c, autant de fois que le premier produit contenoit le multiplicande simple; & qu'il est évident qu'un tout doit doubler ou tripler ou quadrupler, lorsque les parties qui le composent deviennent doubles ou triples ou quadruples &c, de ce qu'elles étoient.

1°. Il suit de là que l'on multipliera par 2, ou par 3, ou par 4, &c, le produit de deux facteurs tel que 7×5, en multipliant un seul de ces facteurs, savoir le multiplicande 7 ou le multiplicateur 5, par le nouveau multiplicateur 2, ou 3, ou 4, &c; parce qu'en multipliant ainsi l'un des deux facteurs, on rend leur produit double ou triple ou quadruple, &c, de ce qu'il étoit.

2°. Il suit encore de là que si deux nombres quelconques, par exemple 3 & 7 doivent être multipliés l'un par l'autre, on aura toûjours le même produit; ſoit qu'on multiplie 3 par 7, ou que l'on multiplie 7 par 3; & par conſéquent ſoit que l'on écrive 3×7, ou 7×3.

Car tout nombre peut être regardé comme un produit de lui-même & de l'unité. Ainſi 1×7 eſt la même choſe que 7; & par conſéquent l'on aura le même produit ſoit qu'on multiplie 1×7 par 4, ſoit qu'on multiplie 7 par 3.

Mais pour multiplier 1×7 par 3, il ſuffira de tripler le multiplicande 1, ce qui donnera 3×7; & l'on multipliera 7 par 3 en écrivant 7×3.

Donc 3×7 eſt la même choſe que 7×3; c'eſt-à-dire que de deux nombres qui doivent être multipliés l'un par l'autre, il n'importe pas lequel on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur.

3°. Il ſuit de l'article précédent que ſi l'on a trois nombres tels que 2, 3, 7, à multiplier enſemble; leur produit ſera toûjours le même, quel que ſoit l'ordre qu'on ſuivra pour les multiplier: en ſorte que ſi l'on écrit de ſuite ces trois facteurs, & qu'on les ſépare par la marque $\times$; l'on pourra les écrire de ces ſix manieres, $2 \times 3 \times 7$, $3 \times 2 \times 7$, $3 \times 7 \times 2$, $7 \times 3 \times 2$, $7 \times 2 \times 3$, $2 \times 7 \times 3$.

Car nous venons de voir que les deux produits 3×7, 7×3, ſont égaux; ainſi en les multipliant par un même nombre 2, les deux produits qui en réſulteront, ſeront encore égaux: & comme les deux produits 3×7, 7×3, peuvent être multipliés par 2, ſoit en multipliant le facteur 3, ſoit en multipliant le facteur 7, & qu'on peut écrire le nouveau facteur 2 devant ou aprés le chiffre qu'on multipliera, il en réſultera ſix arrangemens différens des trois facteurs 2, 3, 7,

Si l'on avoit un plus grand nombre de facteurs à multiplier enſemble, l'on prouveroit de la même maniere, qu'en les arrangeant de toutes les façons possibles, le produit feroit toujours le même.

4°. Donc si l'on a un nombre quelconque de facteurs à multiplier ensemble; l'on pourra ne multiplier réellement ensemble que les facteurs qu'on voudra, & écrire devant ou après le produit les autres facteurs, en se servant de la marque × pour les séparer les uns des autres & du produit de ceux qu'on a multipliés.

Par exemple au lieu d'écrire $2 \times 3 \times 5 \times 7$, l'on pourra mettre $6 \times 5 \times 7$, ou 30×7, ou $2 \times 3 \times 35$, ou 2×105, ou $2 \times 15 \times 7$, &c, & changer comme on voudra l'ordre de ces facteurs, sans qu'il en résulte aucun changement dans la valeur du produit.

PROBLÊME.

21 *Multiplier l'un par l'autre deux nombres représentés chacun par un seul chiffre, c'est-à-dire deux nombres dont chacun est moindre que* 10.

Nous proposerons deux moyens faciles pour trouver le produit de la multiplication de deux nombres dont chacun est moindre que 10.

Le premier moyen est une Table qu'on attribue à Pythagore, & qui contient les produits de tous les nombres qu'on peut écrire par un seul chiffre. Ceux qui ne sont pas encore exercés dans la multiplication doivent avoir cette table devant les yeux lorsqu'ils ont une multiplication à faire.

Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Pour compoſer cette table qui contient neuf bandes chacune de neuf caſes, on écrit dans la premiere bande horiſontale la ſuite naturelle des nombres, depuis 1 juſqu'à 9. On met dans la ſeconde bande horiſontale la ſuite des nombres que l'on a, en commençant par 2, & en ajoûtant continuellement 2. La troiſiéme bande commence par 3, & en ajoûtant continuellement 3, on forme tous les nombres qui en rempliſſent les caſes : & ainſi des autres bandes qui commençent par 4, 5, 6, 7, 8, 9, & dont toutes les caſes ſont remplies de la même maniere par les nombres que l'on trouve, en ajoûtant continuellement le nombre qui eſt dans la premiere caſe.

Pour faire usage de cette table dans la multiplication des nombres moindres que 10, l'on cherche dans la premiere bande horisontale le multiplicande, & descendant jusqu'à la bande horisontale qui commence par un nombre égal au multiplicateur, on trouve le produit qu'on demande. Par exemple, si l'on veut multiplier 8 par 7, on cherchera 8 dans la premiere bande horisontale, & descendant jusqu'à la bande horisontale qui commence par 7, on trouvera 56 pour le produit de 8 par 7.

Le second moyen pour multiplier ensemble deux nombres moindres que 10, est d'opérer par ses doigts; mais pour cela il faut savoir multiplier l'un par l'autre deux nombres moindres que 6. Voici comment on fait cette opération.

On ferme les deux mains, & attribuant un nombre à chaque main, on leve autant de doigts de chacune, qu'il y a d'unités depuis le nombre qu'on lui attribue jusqu'à dix; puis ayant multiplié le nombre des doigts qu'on a levés d'une main, par le nombre des doigts qu'on a levés de l'autre, on ajoûte au produit autant de dixaines qu'il y a de doigts qui n'ont pas été levés dans les deux mains.

Supposons, par exemple, qu'on veut multiplier 8 par 7. Ayant attribué 8 à la main droite, on en levera deux doigts, par ce qu'il y a deux unités depuis 8 jusqu'à 10, & il restera trois doigts couchés dans cette main; attribuant le 7 à la main gauche, on en levera trois doigts, parce qu'il y a trois unités depuis 7 jusqu'à 10, & il restera deux doigts couchés dans cette main. Comme on a trois doigts de levés dans une main, & deux doigts de levés dans l'autre, l'on multipliera 3 par 2, ce qui donnera 6 unités pour le produit; & parce qu'il y a cinq doigts en tout de couchés, savoir deux dans une main, & trois dans l'autre, on prendra ces cinq doigts couchés pour 5 dixaines ou pour 50, que l'on ajoûtera avec les 6 unités du produit qu'on a trouvé, & l'on aura 56 pour le produit de 8 par 7.

PROBLÉME.

22 *Multiplier un nombre quelconque qui n'a point de parties décimales, par un autre qui n'en a point non plus, & qui est représenté par un seul chiffre.*

Ayant placé le chiffre multiplicateur sous le multiplicande, & ayant tiré une barre au-dessous pour séparer les deux facteurs de la multiplication, du produit que l'on doit écrire au-dessous; l'on multipliera chaque chiffre du multiplicande, en commençant par celui du plus bas degré, par le chiffre multiplicateur. Si chaque produit peut être écrit par un seul chiffre, on l'écrira au-dessous du chiffre multiplié. Mais si quelques produits ne peuvent être représentés que par deux chiffres, on n'écrira qne le premier, qui est du plus bas degré, au dessous du chiffre multiplié, & l'on retiendra l'autre pour le joindre avec le produit suivant. Lorsque tous les chiffres du multiplicande seront ainsi multipliés, & que tous les produits particuliers seront écrits, l'on trouvera au-dessous de la barre le produit de la multiplication.

EXEMPLE PREMIER.

23	*Si l'on multiplie*	964	*multiplicande.*
	Par	4	*multiplicateur.*
	L'on trouvera	3856	*produit*

Pour trouver les chiffres de ce produit les uns après les autres, 1°. L'on commencera la multiplication par celle des unités ou du premier chiffre 4 du multiplicande, en disant : quatre fois 4 font 16 ; & comme ce premier produit est représenté par deux chiffres dont le premier (6) n'exprime que des unités, & dont le second (1) est une dixaine ou une unité du second degré ; l'on écrira 6 au rang des unités au-dessous du chiffre multiplié, & l'on retiendra 1 pour le joindre avec le produit suivant dont les unités seront du second degré.

2°. Passant à la multiplication du second chiffre (6) du multiplicande qui représente six dixaines ou six unités du second degré ; l'on dira : 4 fois 6 font 24, & 1 qu'on a retenu du produit précédent font 25, ou plûtôt 25 dixaines ou unités du second degré, dont on écrira le premier chiffre (5) au second rang ; & l'on retiendra le second chiffre (2) qui représente deux dixaines de dixaines, ou deux unités du troisiéme degré, pour le joindre au produit suivant dont les unités seront aussi du troisiéme degré.

3°. Continuant la multiplication, l'on dira : 4 fois 9 font 36, & 2 qu'on a retenu du produit précédent font 38, c'est-à-dire 38 centaines ou unités du troisiéme degré, dont on écrira le premier chiffre (8) au troisiéme rang. A l'égard du second chiffre (3) qui représente trois unités du quatriéme degré, on le retiendroit pour le joindre au produit suivant, si l'on avoit encore quelque chiffre à multiplier ; mais comme tout est multiplié, on placera ce chiffre 3 au quatriéme rang à la gauche du chiffre 8 que l'on vient d'écrire.

Tous les chiffres du multiplicande 964 étant multipliés par 4, & les chiffres des produits particuliers étant écrits les uns après les autres, comme on vient de l'expliquer ; l'on trouvera au dessous de la barre le nombre 3856 pour le produit demandé.

La démonſtration de cette opération eſt ſimple. L'on a multiplié par 4 les unités ſimples, les dixaines, les centaines, en un mot toutes les parties du multiplicande, & l'on a placé ſuivant leur ordre tous les chiffres des produits particuliers à meſure qu'on les a trouvés; ainſi tout le multiplicande a été multiplié par 4, & tous les chiffres dont le produit eſt composé, ont été écrits dans les rangs qui leur convenoient; donc 3856 eſt le produit de 964 par 4.

Exemple II.

24	*Si l'on multiplie*	964	*multiplicande*
	Par	60	*multiplicateur*
	L'on aura	57840	*produit*

Si l'on avoit à multiplier le nombre 964 par 6 unités, l'on trouveroit, en ſuivant la regle que l'on vient d'expliquer, 5784 pour le produit; mais le nombre 60, par lequel il faut multiplier, eſt décuple de 6 : ainſi le produit que l'on demande doit être décuple du produit 5784 que l'on trouveroit en multipliant par 6.

Or nous avons vû dans les regles de la numération que chaque chiffre d'un nombre étant avancé d'un rang vers la gauche, ce qui ſe fait en mettant un zéro à la droite de ce nombre; il devient décuple de ce qu'il étoit. Donc en mettant un zéro à la droite du nombre 5784, on aura 57840 pour le produit demandé de 964 multiplié par 60.

EXEMPLE III.

25 *Si l'on multiplie* 964 *multiplicande*
Par 200 *multiplicateur*

L'on aura 192800 *produit*

En multipliant 964 par 2 unités, l'on trouveroit 1928 pour le produit; mais le nombre 200 par lequel il faut multiplier est centuple de 2 : ainsi le produit que l'on demande doit être centuple de 1928, & par conséquent les unités simples de ce nombre doivent être des centaines ou des unités du troisiéme degré, comme celles du multiplicateur 2 centaines par lequel on doit multiplier.

Donc le nombre 1928 doit avoir à sa droite deux zéros ou deux places, pour être le produit de 964 par 200.

On prouvera de la même maniere que si l'on doit multiplier par un chiffre dont les unités soient du quatriéme ou du cinquiéme degré, il faudra multiplier le multiplicande par ce chiffre, comme s'il ne représentoit que des unités du premier degré, & mettre à la droite du produit autant de zéros qu'il y a de places à la droite du chiffre multipliant.

PROBLÉME.

26 *Multiplier un nombre quelconque qui n'a point de parties décimales par un autre nombre qui n'a point de décimales, & qui est représenté par plusieurs chiffres.*

On multipliera tout le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur comme on vient de le voir; & comme on aura autant de produits qu'il y aura de chiffres significatifs dans le multiplicateur, on ajoûtera tous ces produits ensemble, & leur somme sera le produit demandé.

EXEMPLE PREMIER.

Si l'on propose de multiplier	964	*multiplicande*
Par	264	*multiplicateur*
	3856	1er. *produit*
	57840	2e. *produit*
	192800	3e. *produit*
L'on trouvera	254496	*produit total*

Le multiplicateur 264 eſt compoſé de quatre unités, de ſix dixaines & de deux centaines, c'eſt-à-dire de 4, de 60, & de 200; il faudra donc multiplier le multiplicande 964 par ces trois nombres 4, 60, & 200.

1°. En multipliant par le premier chiffre 4, qui repréſente 4 unités, on aura pour le premier produit 3856 unités, dont on écrira les chiffres les uns après les autres ſous les chiffres multipliés à meſure qu'on les trouvera comme il a été expliqué (*N*°. 23.) dans le premier exemple du Problême précédent.

2°. En multipliant par le ſecond chiffre (6) du multiplicateur, c'eſt-à-dire par 60, on aura (*N*°. 24.) pour ſecond produit 57840 qu'on écrira au-deſſous du premier produit, en obſervant de mettre les uns ſous les autres les chiffres du même degré; mais comme les chiffres de ce ſecond produit doivent être mis à meſure qu'on les trouve, aux places qui leur conviennent, on commencera par mettre un zéro à la premiere place.

3°. Pour multiplier par le troiſiéme chiffre (2) qui ſignifie 200, & qui donnera des centaines pour les unités du produit; on placera d'abord deux zéros pour remplir la place des unités & celle des dixaines; &

multipliant ensuite par 2 tous les chiffres du multiplicande les uns après les autres, on placera vers la gauche des deux zéros les chiffres du produit, à mesure qu'on les trouvera; & l'on aura (No. 25.) 192800 pour le troisiéme produit.

Le multiplicande 964 étant multiplié par les trois chiffres du multiplicateur, & les trois produits particuliers étant ainsi écrits; on les ajoûtera ensemble suivant les regles qu'on a données pour l'addition; & l'on aura 254496 pour le produit de 964 par 264.

REMARQUE.

Comme les zéros qu'on a écrits avant de faire le second & le troisiéme produits, n'ont point d'autre propriété que celle de déterminer les chiffres du produit de la multiplication par 6 à compter des dixaines, & ceux du produit de la multiplication par 2 à compter des centaines; on auroit pû s'épargner la peine d'écrire ces premiers zéros dans les deux derniers produits, parce que les places des unités de tous les degrés sont marquées par les chiffres du premier produit: & l'on auroit écrit les trois produits particuliers comme on le voit.

964	*multiplicande*
264	*multiplicateur*
3856	1er. *produit*
5784	2e. *produit*
1928	3e. *produit*
254496	*produit tota*

EXEMPLE II.

Si l'on propose de multiplier	43216	*multiplicande*
Par	30050	*multiplicateur*
	2160800	1[er]. *produit*
	129648	2[e]. *produit*
L'on trouvera	1298640800	*produit total*

Le multiplicateur n'étant composé que de deux chiffres significatifs 5 & 3, dont le premier signifie 50 ou 5 dixaines, & le second 30000 ou 3 dixaines de mille, on n'aura que deux produits particuliers à trouver.

La premiere multiplication par 5 dixaines, donnera des dixaines. Ainsi l'on posera d'abord un zéro à la place des unités: puis on multipliera le multiplicande 43216 par 5; & l'on écrira vers la gauche du zéro premiérement posé, les chiffres du produit à mesure qu'on les trouvera. On dira donc: 5 fois 6 font 30, dont on mettra le premier caractere (0) à la seconde place, & l'on retiendra 3. On continuera de multiplier les autres chiffres du multiplicande par 5, comme on l'a ci-devant expliqué; & l'on aura 2160800 pour le premier produit particulier.

La seconde multiplication par 3 dixaines de mille produira des dixaines de mille, qui doivent avoir quatre places à leur droite. Ainsi l'on posera d'abord quatre zéros aux quatre premieres places, ou bien on laissera ces places vuides: puis on multipliera le multiplicande 43216 par 3; & l'on écrira vers la gauche des quatre zéros ou des quatre premieres places les chiffres du produit 129648, à mesure qu'on les trouvera.

Enfin l'on ajoûtera ensemble les deux produits particuliers qu'on vient de trouver, & ils donneront 1298640800 pour le produit total de 43216 multiplié par 30050.

EXEMPLE III.

Si l'on propose de multiplier	700800	*multiplicande*
Par	40600	*multiplicateur*
	420480000	1^e. *produit*
	2803200....	2^e. *produit*
L'on aura	28452480000	*produit total*

1°. Avant de multiplier le multiplicande par le premier chiffre significatif (6) qui a deux zéros ou deux places à sa droite, & qui doit par conséquent produire des unités du troisiéme degré, l'on commencera par écrire deux zéros dans les deux premieres places; ensuite on dira : 6 fois o est zéro, & l'on écrira un zéro à la troisiéme place, c'est-à-dire, à la gauche de ceux qu'on a premiérement posés. Passant à la multiplication du second chiffre du multiplicande, on dira encore : 6 fois o est zéro, & l'on écrira aussi un zéro à la quatriéme place. Continuant la multiplication, l'on dira : 6 fois 8 font 48, pour lequel produit l'on écrira 8 à la cinquiéme place, & l'on retiendra 4. Ensuite on dira 6 fois o est zéro, & 4 qu'on a retenu font 4 qu'on écrira à la sixiéme place; puis on dira : 6 fois o est zéro, & l'on écrira zéro à la septiéme place. Enfin l'on dira, pour finir la premiere multiplication : 6 fois 7 font 42, & l'on écrira 2 à la huitiéme place, & 4 à la neuviéme. En opérant ainsi, l'on aura 420480000 pour le premier produit.

2°. Avant de multiplier le multiplicande par le deuxiéme chiffre significatif (4) qui a 4 places à sa droite, on remplira par 4 zéros les quatre premieres places du second produit qu'on doit écrire; ou bien, comme ces quatre premieres places sont déja marquées par les chiffres du premier produit, on laissera ces quatre premieres places vuides & l'on multipliera ensuite 700800 par 4, de la même maniere qu'on vient de le multiplier par 6, ce qui donnera pour le second produit 2803200000.

Enfin l'on ajoûtera les deux produits particuliers, & l'on aura 2845248000 pour le produit total.

PROBLÉME.

27 *Multiplier un nombre qui contient des parties décimales, par un autre nombre qui contient ou qui ne contient point de parties décimales.*

On multipliera le multiplicande par le multiplicateur, comme si aucun d'eux ne contenoit de parties décimales. Le produit total de la multiplication étant trouvé, suivant les regles que nous avons expliquées, on y mettra une virgule qui en séparera vers la droite autant de chiffres décimaux, qu'il y en aura en tout dans le multiplicande & dans le multiplicateur.

EXEMPLE PREMIER.

Si l'on propose de multiplier	74,964	*multiplicande*
Par	264	*multiplicateur*
	299,856	1er. *produit*
	4497,84	2e. *produit*
	14992,8	3e. *produit*
L'on aura	19790,496	*produit total*

Le multiplicande (74, 964) signifie 74964 *milliémes*, & peut être regardé comme un nombre ordinaire dont les unités principales sont des *milliémes*. Cela posé, les unités du produit seront des *milliémes*, & ce produit

produit sera 19790496 *milliémes;* parce que (N°. 18.) les unités du produit sont toûjours de même espece que celles du multiplicande, lorsqu'on multiplie par un nombre ordinaire sans décimales.

Il faut donc faire connoître que les unités du produit 19790496 sont des *milliémes*, de même que celles du multiplicande. Pour cela il faut placer dans ce produit, une virgule qui en sépare trois chiffres décimaux, ou en général, qui en sépare autant de chiffres décimaux, qu'il y en a dans le multiplicande.

Donc pour multiplier un nombre qui contient des décimales par un autre qui n'en contient point; il faut faire la multiplication comme si le multiplicande n'avoit point de décimales, & mettre ensuite dans le produit une virgule qui en sépare autant de décimales, qu'il y en a dans le multiplicande.

Comme le multiplicateur n'a point de décimales dans l'exemple proposé, les chiffres décimaux qui se trouvent dans le multiplicande, sont tout ce qu'il y en a dans le multiplicande & le multiplicateur ensemble. Ainsi la regle générale, qui veut que l'on sépare du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a en tout dans le multiplicande & le multiplicateur, est applicable à ce premier exemple.

EXEMPLE II.

Si l'on propose de multiplier	74964	*multiplicande*
par	2,64	*multiplicateur*
	2998,56	1er. *produit*
	44978,4	2e. *produit*
	149928	3e. *produit*
L'on aura	197904,96	*produit total*

En considérant le multiplicateur comme un nombre d'unités, ou supprimant sa virgule; on trouvera pour le produit 19790496 *unités simples.* Mais le multiplicateur proposé (2,64) qui signifie 264 *centiémes*, n'est que la centiéme partie de 264 *unités* : ainsi le produit ne doit être que la centiéme partie du produit 19790496 qu'on a trouvé en multipliant par 264. Il faut donc changer les *unités* de ce produit en *centiémes* ; ce qu'on fera en y plaçant une virgule qui en séparera autant de chiffres décimaux, qu'il y en a dans le multiplicateur.

Comme le multiplicande n'a point de chiffres décimaux, ceux du multiplicateur sont ce qu'il y en a en tout dans le multiplicande & dans le multiplicateur. Ainsi la regle qu'on a donnée dans le problême, est encore applicable à ce second exemple.

Exemple III.

Si l'on propose de multiplier	74,964	*multiplicande*
Par	2,64	*multiplicateur*
	2,99856	1er. *produit*
	44,9784	2^{e}. *produit*
	149,928	3^{e}. *produit*
L'on aura	197,90496	*produit total*

En multipliant le multiplicande (74,964) qui a trois chiffres décimaux, par le multiplicateur consideré comme un nombre d'*unités simples* ; c'est à-dire en multipliant (74,964) par 264 ; on trouvera, comme dans le premier exemple, (19790,496) pour le produit.

Mais ce produit (19790,496) est centuple de celui qu'on demande ; parce qu'on a multiplié par 264 qui est centuple du multiplicateur donné (2,64) : ainsi ce produit doit devenir cent fois plus petit ; & par conséquent il faut encore avancer la virgule vers la gauche d'autant de places qu'il y en a après la virgule du multiplicateur. Et comme il y avoit déjà autant de places à la droite de la virgule du produit, qu'il y en a dans le multiplicande; il y aura nécessairement à la droite de la virgule du produit, autant de places ou de chiffres décimaux, qu'il y en a en tout dans le multiplicande & dans le multiplicateur. Ainsi (197,90496) sera le produit de (74,964) par (2,64) conformément à la regle générale (No. 27.).

EXEMPLE IV.

Si l'on propose de multiplier	0,125	*multiplicande*
Par	0,0625	*multiplicateur*
	625	1er. *produit*
	250	2e. *produit*
	750	3e. *produit*
L'on aura	0,0078125	*produit total*

Lorsque le multiplicande sera multiplié par le multiplicateur, comme si les deux facteurs ne contenoient point de chiffres décimaux, & que tous les produits particuliers auront été ajoûtés ensemble; on placera dans le produit total une virgule, de maniere qu'elle ait à sa droite autant de chiffres décimaux qu'il y en a en tout dans le multiplicande & le multiplicateur. Et comme l'on trouvera sept chiffres décimaux en tout dans les deux facteurs, & qu'il n'y a que cinq chiffres dans le produit; il faudra mettre encore deux zéros à la gauche de ce produit, pour avoir sept figures décimales, & placer ensuite une virgule à la gauche de ces sept figures, afin qu'elles soient réputées décimales: on mettra même aussi un zéro à la gauche de la virgule, pour tenir la place des unités; & l'on aura (0,0078125) pour le produit de (0,125) multiplié par (0,0625).

CHAPITRE IV.

De la Division des Nombres incomplexes.

Définitions.

28 Diviser un nombre par un autre, c'eſt chercher un troiſiéme nombre qui multiplié par le ſecond, donne un produit égal au premier nombre.

Le nombre qu'on diviſe s'appelle *dividende*; celui par lequel on diviſe s'appelle *diviſeur*; & l'on donne le nom de *quotient* au troiſiéme nombre qui réſulte de la diviſion.

Lorſqu'on veut ſeulement marquer que deux nombres ſont ou doivent être diviſés l'un par l'autre, on écrit le diviſeur au-deſſous du dividende avec une barre horiſontale entre les deux. Par exemple, ſi l'on veut marquer que le nombre 32 *toiſes* eſt, ou doit être diviſé par le nomme 8 *toiſes*, l'on écrit

$$\frac{32 \textit{ toiſes}}{8 \textit{ toiſes}}$$

Corollaire premier.

29 Il faut donc que le diviſeur ou le quotient ſoit un nombre abſtrait, & que l'un des deux ait des unités de même eſpece que celles du dividende; ſans quoi le diviſeur & le quotient multipliés l'un par l'autre, ne produiroient pas une quantité égale au dividende; or ſuivant que le diviſeur ſera un nombre abſtrait, ou un nombre de même eſpece que le dividende, on pourra ſe former deux idées différentes de la diviſion.

1°. Lorſque le diviſeur ſera un nombre de même eſpece que le dividende; le quotient qu'on trouvera ſera néceſſairement un nombre abſtrait, qui marquera combien de fois le diviſeur doit être répété pour produire le dividende. Dans ce cas, l'on pourra dire que *la diviſion eſt une opération par laquelle on trouve combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende:* & ce *combien de fois* que l'on trouve, étant exprimé en latin par le mot *Quoties*, on lui a donné le nom de *quotient*.

Par exemple, ſi l'on propoſe de diviſer 32 *toiſes* par 8 *toiſes*, ou de trouver un troiſiéme nombre qui multipliant 8 *toiſes* produiſe le premier nombre 32 *toiſes*; le nombre 4 que l'on trouvera ſera un nombre abſolu qui ſignifiera qu'il faut prendre 8 *toiſes* 4 fois, pour produire 32 *toiſes*, & que 8 *toiſes* ſont par conſéquent contenues 4 fois dans le dividende 32 *toiſes*. Ainſi la diviſion du dividende 32 *toiſes*, par le diviſeur 8 *toiſes* de même eſpece, ſe réduira à trouver combien de fois le diviſeur 8 *toiſes* eſt contenu dans le dividende 32 *toiſes*; & le nombre abſolu 4 que l'on trouvera, & qui ſignifiera 4 fois, ſera le quotient proprement dit de cette diviſion.

2°. Lorſque le diviſeur ſera compoſé d'unités abſolues; il marquera combien de fois le quotient que l'on cherche doit être répété, pour produire le dividende. Ainſi pour avoir ce quotient, il faudra partager le dividende en autant de parties égales que le diviſeur aura d'unités abſolues. Dans ce ſecond cas, l'on pourra dire que *la diviſion eſt une opération par laquelle on partage le dividende en autant de parties égales, qu'il y a d'unités abſolues dans le diviſeur, pour avoir une de ces parties qui ſera néceſſairement de même eſpece que le dividende.*

Par exemple, ſi l'on propoſe de diviſer 32 *toiſes* par le nombre abſolu 4, ou de trouver un nombre qui répété quatre fois produise 32 *toises*; il est clair que le nombre qu'on trouvera sera la quatriéme partie de 32 *toises*, & sera par conséquent un nombre de *toises*. Ainsi la division se réduira à partager 32 *toises* en quatre parties égales, pour avoir une de ces parties, qui sera 8 *toises* : mais ces 8 *toises* qu'on trouvera ne seront nommées *Quotient* qu'improprement, puisque ne signifiant pas 8 *fois*, elles ne répondent pas au mot *Quoties*, qui signifie *combien de fois*.

3°. Lorsque le dividende & le diviseur seront tous deux des nombres absolus, le quotient sera aussi un nombre absolu; & l'on pourra appliquer à la division, les deux définitions particulieres que nous venons de donner de cette opération.

Par exemple, si l'on propose de diviser le nombre absolu 32, par le nombre absolu 8; la division se réduira, suivant la premiere des deux définitions particulieres, à trouver combien de fois le diviseur 8 est contenu dans le dividende 32 qui est de même espece que lui. En considérant ainsi la division, le nombre 4 que l'on trouvera, & qui signifiera 4 *fois*, sera le quotient proprement dit de 32 divisé par 8.

Mais le diviseur 8 étant un nombre absolu, peut aussi indiquer qu'il faut prendre la huitiéme partie du dividende 32; & cette façon de considérer la division, est conforme à l'idée que nous en avons donnée dans la deuxiéme définition particuliere.

Lorsque nous disons qu'il faut que le diviseur ou le quotient soit un nombre abstrait, & que l'un des deux doit avoir des unités de même espece que le dividende, cela ne doit s'entendre que de la division arithmétique, & nous ne prétendons point toucher à la division géométrique, dont nous parlerons dans la suite.

COROLLAIRE II.

30 Nous avons assez expliqué les différentes manieres de considerer la division, pour qu'on voye clairement que le nombre des unités du quotient sera le même, lorsque le dividende & le diviseur auront des unités de même espece, que quand le diviseur sera un nombre abstrait, & que les quotiens ne seront différens que par la nature de leurs unités.

Par exemple, si l'on propose ces deux divisions; 32 *toises* à diviser par 8 *toises*, & 32 *toises* à diviser par 8; les quotiens seront composés l'un & l'autre de 4 unités, & ne différeront qu'en ce que les unités du premier seront absolues, & que les unités du second seront des *toises*.

On pourra donc, lorsqu'on aura une division à faire, ne considérer d'abord que les nombres des unités du dividende & du diviseur, sans faire attention à la nature de ces unités; & chercher pour le quotient un nombre absolu qui indique combien de fois le nombre des unités du diviseur est contenu dans le nombre des unités du dividende, comme si le dividende & le diviseur avoient des unités de même espece. Ensuite on pourra déterminer de quelle espece doivent être les unités de ce quotient, en observant, comme nous l'avons prouvé, que ces unités seront abstraites lorsque le dividende & le diviseur seront véritablement de même espece, & qu'elles seront de même nature que celles du dividende, lorsque le diviseur sera un nombre absolu. En considérant ainsi la division, il sera facile d'en déduire les corollaires suivans.

COROLLAIRE III.

31 1°. Si l'on multiplie le dividende d'une division par un nombre quelconque, sans rien changer à son diviseur ; le quotient de la nouvelle division sera égal au quotient de la premiere multiplié par le même nombre.

Par exemple si l'on a 32 à diviser par 8, ce qui s'exprime ainsi $\frac{32}{8}$, le quotient sera 4 : & si l'on multiplie le dividende 32 par 2 ou par 3, &c, sans rien changer au diviseur 8 ; on aura ces nouvelles divisions $\frac{64}{8}$, $\frac{96}{8}$, &c, dont les quotiens 8, 12, &c seront égaux au premier quotient 4 multiplié par 2 ou par 3, &c. Car il est évident qu'un diviseur constant est contenu deux fois davantage dans un dividende double, trois fois davantage dans un dividende triple, &c.

2°. Et réciproquemment si l'on divise le dividende d'une division par un nombre quelconque, sans rien changer à son premier diviseur ; le quotient de la nouvelle division sera égal au quotient de la premiere, divisé par le même nombre.

Par exemple, si l'on a 96 à diviser par 8, c'est-à-dire $\frac{96}{8}$ dont le quotient est 12, & qu'on divise le dividende 96 par 2 ou par 3, &c ; l'on aura ces nouvelles divisions $\frac{48}{8}$, $\frac{32}{8}$, &c, dont les quotiens 6, 4, &c, seront égaux au premier quotient 12 divisé par 2 ou par 3, &c ; car en divisant le dividende par 2 ou par 3, &c, on le rend deux fois ou trois fois, &c, plus petit qu'il n'étoit : ainsi le diviseur constant 8 doit y être contenu deux fois, ou trois fois, &c, moins qu'auparavant ; & par conséquent le quotient doit être deux fois ou trois fois, &c, moindre que le premier quotient, c'est-à-dire égale au premier quotient divisé par 2 ou par 3, &c.

Corollaire IV.

32 1°. Si l'on multiplie le diviſeur d'une diviſion par un nombre quelconque, ſans rien changer à ſon dividende ; le quotient de la nouvelle diviſion ſera égal à celui de la premiere, diviſé par le même nombre qui a multiplié le diviſeur.

Par exemple, ſi l'on a 96 à diviſer par 8, c'eſt-à-dire $\frac{96}{8}$ dont le quotient eſt 12 ; & que ſans rien changer au dividende 96, on multiplie le diviſeur 8 par 2 ou par 3, &c ; on aura ces nouvelles diviſions $\frac{96}{16}$, $\frac{96}{24}$, &c dont les quotiens 6, 4, &c ſeront égaux au premier quotient 12 diviſé par les nombres 2, 3, &c qui ont multiplié le diviſeur. Car il eſt évident qu'un diviſeur devenu double ou triple &c, eſt contenu deux fois ou trois fois moins &c dans un même dividende : ainſi le quotient doit être deux fois ou trois fois &c plus petit qu'il n'auroit été, ſi l'on n'avoit point multiplié le diviſeur par 2 ou par 3 &c.

2°. Et réciproquement, ſi l'on diviſe par un nombre quelconque le diviſeur d'une diviſion, ſans rien changer au dividende ; le quotient de la nouvelle diviſion ſera égal à celui de la premiere, multiplié par le nombre qui a diviſé ſon diviſeur.

Par exemple, ſi l'on a 96 à diviſer par 24, c'eſt-à-dire $\frac{96}{24}$ dont le quotient eſt 4 ; & que ſans changer le dividende 96, on diviſe le diviſeur 24, par 2 ou par 3 &c ; l'on aura ces nouvelles diviſions $\frac{96}{12}$, $\frac{96}{8}$, &c dont les quotiens 8, 12, &c ſeront égaux au premier quotient 4 multiplié par les nombres 2, 3, &c qui ont diviſé le diviſeur ; parce qu'en diviſant un diviſeur par 2 ou par 3 &c, on le rend deux fois ou trois fois &c plus petit ; & qu'il eſt évident qu'un diviſeur 2 fois ou 3 fois &c plus petit, eſt contenu 2 fois ou 3 fois &c davantage dans un même dividende.

Corollaire V.

33 1°. Donc si l'on multiplie le dividende & le diviseur d'une division par une même quantité; le quotient de la division du nouveau dividende par le nouveau diviseur, sera le même que le quotient de la premiere division.

Par exemple, si on a 32 à diviser par 8, c'est-à-dire $\frac{32}{8}$ dont le quotient est 4, & qu'on multiplie le dividende & le diviseur par 2 ou par 3 ou par une même quantité; l'on aura ces nouvelles divisions $\frac{64}{16}$, $\frac{96}{24}$, &c qui auront le même quotient 4 que la premiere division. Car en multipliant le dividende & le diviseur d'une division par une même quantité, le quotient de la premiere division est en même temps multiplié & divisé par cette même quantité (N°. 31 & 32.) & ne change par conséquent point de valeur.

2. Si l'on divise le dividende & le diviseur d'une division par une même quantité, le quotient de la nouvelle division sera encore le même que celui de la premiere division; puisque par cette opération l'on divise & l'on multiplie également le quotient de la premiere division (N°. 31 & 32.).

Par exemple, si l'on a 96 à diviser par 24, c'est-à-dire $\frac{96}{24}$ dont le quotient est 4, & qu'on divise le dividende 96 & le diviseur 24 par 2 ou par 3 ou par une même quantité quelconque; l'on aura ces nouvelles divisions $\frac{48}{12}$, $\frac{32}{8}$, &c qui auront toutes le même quotient 4, comme la premiere division $\frac{96}{24}$.

Corollaire VI.

34 Lorsqu'un dividende doit être divisé par un diviseur composé de plusieurs facteurs multipliés ensemble,

au lieu de diviser le dividende par le diviseur composé, on pourra le diviser par un facteur du diviseur; puis diviser le quotient de cette division par un second facteur du diviseur, & continuer toûjours de diviser le nouveau quotient par un nouveau facteur du diviseur, jusqu'à ce que l'on ait divisé par tous les facteurs. La derniere division étant faite, le dernier quotient sera le quotient de la division du dividende par le diviseur composé.

Par exemple, si l'on doit diviser 840 par le diviseur composé $3 \times 5 \times 7$; ce qu'on peut exprimer ainsi $\frac{840}{3 \times 5 \times 7}$; au lieu de faire le produit des trois facteurs 3, 5, 7, & de diviser ensuite par leur produit 105, le dividende 840; on pourra diviser d'abord 840 par 3, ce qui donnera 280 pour un premier quotient; puis diviser ce quotient 280 par 5, ce qui donnera 56 pour un second quotient; & diviser enfin ce quotient 56 par 7, ce qui donnera 8 pour le dernier quotient qui ne différera pas de celui qu'on auroit eu en divisant 840 par le produit 105 des trois facteurs 3, 5, 7.

Car $\frac{840}{3 \times 5 \times 7}$ représentant la division de 840 par $3 \times 5 \times 7$, si l'on divise le dividende 840 & le diviseur $3 \times 5 \times 7$ par le même nombre 3, la nouvelle division $\frac{280}{5 \times 7}$ aura le même quotient (N°. 33.). Si l'on divise encore le nouveau dividende 280 & le nouveau diviseur 5×7, par le nombre 5; la division $\frac{56}{7}$ qui restera à faire, aura encore le même quotient (N°. 33.). Donc en divisant 840 par 3, & le quotient de cette division par 5, & divisant encore le nouveau quotient par 7, on aura le même quotient que l'on auroit en divisant 840 par le diviseur composé $3 \times 5 \times 7$.

Avertissement.

35 Nous supposerons dans la suite, qu'on sçait diviser tout nombre moindre que 90 par tout autre nombre moindre que 10. Ceux qui ne sont pas assez exercés dans la division pour trouver aisément les quotiens & les restes de toutes ces divisions, pourront avoir recours à la Table de Pythagore (N°. 21.) dont voici l'usage.

On cherchera au haut de la table le nombre par lequel on doit diviser; puis on descendra verticalement jusqu'à ce qu'on trouve le nombre que l'on doit diviser, ou un nombre plus petit qui en approche le plus; & allant de ce nombre vers la gauche de la table, on trouvera vis-à-vis dans la premiere colonne verticale, le quotient de la division.

Supposons qu'on veut diviser 72 par 8. On prendra 8 au haut de la table, & l'on descendra verticalement jusqu'à 72; puis allant de 72 vers la gauche de la table, on trouvera vis-à vis dans la premiere colonne le quotient 9 que l'on demande.

Supposons maintenant qu'on veut diviser 64 par 7. L'on prendra 7 au haut de la table, & descendant verticalement au-dessous de 7, on ne trouvera pas 64, mais 63 qui est plus petit & qui en approche le plus; on s'arrêtera donc au nombre 63; & allant de 63 vers la gauche de la table, on trouvera vis-à-vis dans la premiere colonne, le nombre 9 qui ne sera que le quotient de 63 divisé par 7: & comme c'est 64 & non 63 qu'on a proposé de diviser par 7, la division aura un reste 1 qui ne sera pas divisé.

PROBLÊME.

36 *Diviser un nombre par un autre nombre représenté par un seul chiffre.*

On divisera toutes les parties du dividende par le diviseur, en commençant la division par celle des chiffres dont les unités sont du plus haut degré. Supposant, par exemple, que le dividende est composé de trois chiffres, d'*unités simples*, de *dixaines* & de *centaines*; on commencera par diviser la partie des *centaines* qui pourra être partagée en autant de parties égales que le diviseur aura d'unités. Ensuite on réduira le reste des *centaines* en *dixaines*, & les ayant ajoûtées avec les *dixaines* du dividende, on divisera encore la partie des *dixaines* qui pourra être partagée en autant de parties égales que le diviseur aura d'unités. Enfin l'on réduira le reste des *dixaines* en *unités simples*, pour les ajoûter avec les *unités simples* du dividende & diviser le tout par le diviseur.

On voit par cet exposé qu'on aura autant de divisions particulieres à faire, que de parties différentes du dividende à diviser; & qu'il faudra par conséquent écrire autant de quotiens particuliers, qu'on aura de divisions à faire.

Pour rendre plus sensibles les opérations que nous venons d'exposer en général, nous allons les détailler dans quelques exemples.

EXEMPLE PREMIER.

On propose de diviser 952 par 4.

On écrira le diviseur à la droite du dividende, & les ayant séparés par une barre verticale ou par un crochet; on tirera sous le diviseur une barre au-dessous de laquelle seront écrits les chiffres du quotient à mesure qu'on les trouvera.

Dividende	952	4	*divisfeur*
	8	2	*quotient de la* 1^{ere}. *division*
Reste de la 1^{ere}. *division*	1		

Le dividende & le diviseur étant ainsi disposés, on commencera à diviser les 9 *centaines* par 4; en disant : la quatriéme partie de 9 *centaines* est 2 *centaines*; ou plus simplement, la quatriéme partie de 9 est 2 qu'on écrira au quotient dans une place qui sera celle des *centaines*.

Pour déterminer la partie de 9 qu'on a divisée & trouver le reste de la division; l'on multipliera le diviseur 4 par le quotient 2, ce qui produira 8 que l'on écrira au-dessous de 9; puis on retranchera 8 de 9, & le reste 1 que l'on écrira au-dessous sera la partie des 9 *centaines* qui n'a pas été divisée par 4.

Abaissant à la droite du reste 1 des *centaines* les 5 *dixaines* du dividende, on aura 15 *dixaines* à diviser par 4; ainsi l'on prendra la quatriéme partie de ces 15 *dixaines*, qui ne peut être que 3 *dixaines* avec un reste.

Dividende	952	4	*diviseur*
	8	23	*quotient des deux premieres divisions*
	15		
	12		
Reste de la 2^e. *division*	3		

On écrira donc 3 au quotient à la place des *dixaines*, c'est-à-dire à la droite des 2 *centaines* qu'on a écrites pour le quotient de la premiere division.

Il faut maintenant déterminer la partie des 15 *dixaines* qui n'a pas été divisée. Pour cela, on multipliera le diviseur 4 par le quotient 3, ce qui produira 12; & ayant écrit ce produit 12 au-dessous des 15 *dixaines* sur lesquelles on opere actuellement, on le retranchera de 15, ce qui donnera 3 *dixaines* pour le reste de la division, ou pour la partie des 15 *dixaines* qui n'a pas été comprise dans la division.

Le reste 3 de la division des 15 *dixaines*, étant écrit au-dessous des *dixaines*, on abaissera à sa droite les 2 *unités* du dividende, & l'on aura 32 *unités simples* à diviser par le même diviseur 4. On prendra donc la quatriéme partie de 32; & comme on sçait qu'elle est 8, on écrira 8 au quotient dans le rang des *unités simples*, c'est-à-dire à la droite des 3 *dixaines*.

$$\begin{array}{rl} \textit{Dividende}\ 952 & \left\{ \begin{array}{l} \underline{\ \ 4\ \ }\ \textit{diviseur} \\ 238\ \ \textit{quotient entier} \end{array} \right. \\ \underline{8\ \ } & \\ 15\ & \\ \underline{12\ } & \\ 32 & \\ 32 & \end{array}$$

Pour connoître si cette derniere division n'a point de reste, on multipliera le diviseur 4 par le quotient 8 que l'on vient de trouver, ce qui produira 32 pour la partie des *unités* qu'on vient de diviser: ainsi écrivant, si on juge à propos, ce produit 32 au dessous des 32 *unités* qu'on avoit encore à diviser, & ôtant l'un de l'autre, il ne restera rien; ce qui assure que la division n'a point de reste, & que le diviseur 4 est contenu 238 fois dans 952.

EXEMPLE II.

On propose de diviser 7264 par 9.

Le dividende & le diviseur étant disposés comme dans le premier exemple; on divisera les unes après les autres toutes les parties du dividende, en commençant par les *mille*, & passant ensuite aux *centaines*, puis aux *dixaines* & aux *unités*.

Dividende	7264	9	*diviseur*
	72	8	*quotient*
Premier reste	0		

1°. Comme le premier chiffre 7 ne peut pas être divisé par 9, on le joindra au chiffre suivant, & l'on aura 72 à diviser par 9; & comme 9 y est contenu huit fois, on écrira 8 au quotient dans une place qui sera celle des *centaines*.

Pour avoir le reste de cette premiere division, l'on multipliera le diviseur 9 par le quotient 8; & ayant écrit leur produit 72 au-dessous de 72 qu'on vient de diviser, on retranchera l'un de l'autre; & comme il ne restera rien, on écrira au-dessous un zéro qui marquera que la division de 72 *centaines* par 9, donne exactement 8 *centaines* pour quotient, sans aucun reste.

Dividende	7264	9	*diviseur*
	72	80	*quotient*
Second reste,	06		

2°. On abaissera à la droite du zéro, les 6 *dixaines* du dividende pour les diviser aussi par 9; & comme cela

cela n'eſt pas poſſible, on écrira au quotient un zéro à la place des dixaines, pour marquer que le quotient ne contiendra point de dixaines : & le 6 que l'on vient d'abaiſſer, & qui n'a pas pû être diviſé, reſtera pour la diviſion ſuivante.

Dividende	7264	9	*diviſeur*
	72	807	*quotient*
	064		
	63		
Dernier reſte de la diviſion	1		

3°. On abaiſſera les 4 unités du dividende à la droite des 6 dixaines que l'on a de reſte, ce qui fera 64 unités qu'on diviſera par 9 ; & comme on trouvera que 9 y eſt contenu 7 fois, on écrira 7 au quotient à la place des unités : & la diviſion ſera faite, relativement au quotient que l'on demande ; puiſqu'on aura trouvé tous les chiffres qui le compoſent : mais il faudra encore déterminer le reſte de la diviſion. Pour cela on multipliera le diviſeur 9, par le dernier quotient 7 ; & le produit 63 étant écrit au-deſſous de 64, & enſuite retranché de 64 ; on aura 1 pour le reſte de la diviſion.

Le dividende 7264 étant diviſé par le diviſeur 9, donne donc 807 pour le quotient, avec un reſte 1 qui n'a pas été diviſé ; enſorte que 807 n'eſt le quotient exact que de 7263 diviſé par 9.

PROBLÊME.

37 *Diviſer un nombre par un autre nombre compoſé de pluſieurs chiffres.*

La diviſion d'un nombre par un autre compoſé de pluſieurs chiffres, ſe fait de la même maniere que celle dont le diviseur n'a qu'un chiffre. L'on divise par le diviseur chaque partie du dividende, qui peut être partagée en autant de parties égales que le diviseur contient d'unités. Puis ayant écrit au quotient le nombre de fois que chaque partie du dividende contient le diviseur; on multiplie le diviseur par les chiffres du quotient à mesure qu'on les trouve, & l'on écrit les produits sous les parties du dividende que l'on divise actuellement. Ensuite on retranche ces produits des parties du dividende, & l'on écrit les restes pour les diviser conjointement avec les parties suivantes du dividende. On va faire l'application de cette regle dans les exemples suivans.

Exemple premier.

On propose de diviser 1728 *par* 288.

Dividende	1728	288	*diviseur*
	1728	6	*quotient*
Reste	0		

Le dividende & le diviseur étant disposés comme dans les exemples du problême précédent; on proposera d'abord de diviser les trois premiers chiffres du dividende qui valent 172 *dixaines*, par les trois chiffres 288 du diviseur; & comme cela n'est pas possible, on prendra tous les quatre chiffres 1728 du dividende, pour les diviser par 288. Mais n'étant pas facile de voir tout d'un coup combien de fois 288 est contenu dans 1728; on abandonnera pour un moment les unités & les dixaines du dividende & du diviseur, & l'on cherchera combien de fois les 2 *centaines* du diviseur sont contenues dans les 17 *centaines* du dividende, c'est-à-dire combien de fois 2 est contenu dans 17.

On trouvera d'abord qu'il y eſt 8 fois; mais comme les dixaines & les unités du diviſeur ne ſont pas contenues huit fois dans les dixaines & les unités du dividende, on n'écrira pas pour quotient ce nombre 8 qui marque le nombre de fois que les 2 *centaines* du diviſeur ſont dans les 17 *centaines* du dividende, & l'on prendra un nombre plus petit, afin qu'il reſte quelques *centaines* qui jointes aux *dixaines* du dividende, puiſſent contenir les *dixaines* du diviſeur, le nombre de fois qu'on aura écrit au quotient.

Comme il eſt difficile de voir d'abord au juſte le vrai quotient que l'on doit écrire; on commencera par prendre, ſans les écrire, différens quotiens continuellement plus petits d'une unité que celui qui exprime combien de fois les 2 *centaines* du diviſeur ſont contenues dans les 17 *centaines* du dividende, juſqu'à ce que l'on ſoit parvenu à un nombre dont le produit par le diviſeur entier, ne ſoit pas plus grand que le dividende,

En diminuant ainſi continuellement le premier quotient d'une unité, l'on trouvera enfin le nombre 6 qui n'étant pas trop grand pour le quotient, ſera mis à la place que l'on deſtine au quotient. Enſuite on multipliera le diviſeur entier 288 par le quotient 6; & les chiffres du produit étant écrits à meſure qu'on les trouvera, ſous les chiffres correſpondans du dividende, l'on retranchera ce produit du dividende.

Comme dans le préſent exemple, la ſouſtraction ne donne point de reſte; c'eſt une marque que le diviſeur 288 eſt contenu 6 fois exactement dans le dividende 1728.

Exemple II.

On propoſe de diviſer 4571112 *par* 897.

Dividende	4571112	897	*diviſeur*
	4485	5	*quotient*
Premier reſte	86		

1°. Le dividende & le diviſeur étant diſpoſés comme nous l'avons déjà dit, & les trois chiffres du diviſeur, faiſant un nombre plus grand que les trois premiers chiffres de la gauche du dividende ; on prendra un chiffre de plus dans le dividende, c'eſt-à-dire qu'on prendra d'abord 4571 *mille* pour les diviſer par 897, ſans faire aucune attention aux centaines, aux dixaines & aux unités du dividende, qu'on diviſera enſuite avec ce qui reſtera de la diviſion des *mille*.

Comme on prendra dans le dividende un chiffre de plus qu'il n'y en a dans le diviſeur ; les 8 centaines du diviſeur répondront aux 45 centaines de *mille* du dividende : ainſi l'on cherchera combien de fois 8 centaines ſont contenues dans 45 centaines. Comme on trouvera qu'elles y ſont contenues 5 fois avec un reſte 5 centaines de *mille*, qui étant joint aux dixaines de *mille*, donnera un nombre ſuffiſant pour contenir auſſi 5 fois les dixaines du diviſeur ; on écrira au quotient ce premier chiffre 5 qui repréſentera 5 *mille*.

Pour avoir le reſte de cette premiere diviſion, l'on multipliera le diviſeur 897 par le quotient 5 ; & ayant écrit les chiffres de leur produit 4485, à meſure qu'on les aura trouvés, ſous les chiffres correſpondans 4571 du dividende ; on retranchera ce produit du dividende, & l'on aura le premier reſte 86 qu'on écrira au-deſſous.

2°. L'on abaiſſera la centaine du dividende, & l'ayant pointée pour marquer qu'elle eſt abaiſſée, on la placera à la droite de 86 reſtant de l'opération précédente ; ce qui fera 861 *centaines*, ou plus ſimplement 861, ſi l'on ne fait point attention aux dixaines & aux unités du dividende, dont il n'eſt point encore queſtion.

Dividende	4571112	897	*diviſeur*
	4485	50	*quotient*
Second reſte	861		

On ſe propoſera donc de diviſer 861 par 897 ; & comme cela ne ſe peut pas, on écrira au quotient un zéro qui marquera que le quotient ne doit point contenir de *centaines*.

3°. Le nombre 861 qui ſignifie 861 *centaines*, n'ayant pû être diviſé par 897 dans l'opération précédente, eſt reſté tout entier pour être diviſé conjointement avec les *dixaines* du dividende ; on pointera donc la *dixaine* du dividende & on l'abaiſſera à la droite de 861, ce qui donnera 8611 *dixaines* que l'on diviſera par 897.

Dividende	4571112	897	*diviſeur*
	4485	509	*quotient*
	8611		
	8073		
Troiſiéme reſte	538		

Comme il y a un chiffre de plus au nouveau dividende 8611 qu'au diviſeur 897 ; le chiffre 8 du diviſeur répondra aux deux chiffres 86, & ſera contenu 10 fois dans leur valeur avec un reſte. Mais on ne peut jamais mettre qu'une figure à la fois dans le quotient : ainsi l'on ne prendra que 9 pour le nombre de fois que 8611 contient 897, & l'on écrira au quotient ce nombre 9 à la place des dixaines, c'est-à-dire à la droite des 50 *centaines* qui y sont déjà.

Pour avoir le reste de cette division, on multipliera le diviseur 897 par le nouveau quotient 9 ; & les chiffres du produit 8073, étant écrits sous le dividende 8611 à mesure qu'on les aura trouvés, on retranchera ce produit du dividende qui sera au-dessus ; & il restera 538 *dixaines* pour la division suivante.

4°. Enfin l'on abaissera les deux unités du dividende à la droite de 538 *dixaines* qui restent de l'opération précédente, ce qui fera 5382 *unités* qu'il faudra diviser par 897.

Dividende	4571112	897	*diviseur*
	4485	5096	*quotient*
	8611		
	8073		
	5382		
	5382		
Dernier reste	0000		

Comme le nouveau dividende 5382 a un chiffre de plus que le diviseur 897 ; le chiffre 8 des centaines du diviseur répondra aux 53 *centaines* du dividende, & y sera contenu 6 fois avec un reste suffisant ; on écrira donc 6 au quotient à la place des unités, c'est-à-dire à la droite de 509 qui se trouve déjà écrit ; & l'on aura 5096 pour le quotient de 4571112 divisé par 897.

Pour savoir si cette derniere division ne donne point de reste ; on multipliera le diviseur 897, par le dernier quotient 6 qu'on vient de trouver, & l'on écrira les chiffres du produit 5382 à mesure qu'on les trouvera, sous les chiffres correspondans du dividende 5382 : puis on retranchera ce produit du dividende ; & comme il ne restera rien, l'on sera assuré que le dividende 4571112 est exactement divisé par le diviseur 897, & que 5096 est le quotient de cette division.

EXEMPLE III.

On propose de diviser 239200 par 52.

Dividende	239200	52	*diviseur*
	208	4	*quotient*
Premier reste	31		

1°. Le dividende & le diviseur étant disposés comme il a été dit, & les deux chiffres qui composent le diviseur 52 ne pouvant pas être contenus dans les deux premiers chiffres de la gauche du dividende ; on prendra dans le dividende les trois chiffres 239 pour les diviser par 52 sans faire aucune attention au reste des chiffres du dividende qu'on réserve pour les divisions suivantes. Or en divisant 239 par 52, on trouvera 4 pour le quotient, avec le reste 31.

Dividende	239200	52	*diviseur*
	208	46	*quotient*
	312		
	312		
	0		

2°. Ayant abaissé le chiffre 2 du dividende, à la droite du reste 31 de la division précédente ; on aura le nombre 312 qui étant diviſé par 52, donnera 6 pour quotient ſans aucun reſte.

3°. Pour continuer la diviſion ſuivant les regles précédemment expliquées, il faudra abaiſſer ſucceſſivement les deux *zéros* du dividende; mais comme chacun de ces *zéros* abaiſſé à la droite du reſte *zéro*, étant diviſé par 52 donnera *zéro* pour quotient; il faudra placer deux *zéros* à la droite du quotient qu'on vient de trouver.

Dividende	239200	52	*diviſeur*
	208	4600	*quotient*
	312		
	312		
	000		

Ainſi le quotient total de la diviſion de 239200 par 52, ſera 4600.

PROBLÊME.

38 *Diviſer un nombre quelconque par un autre, lorſque le dividende ou le diviſeur contient des parties décimales, ou qu'ils en contiennent tous les deux.*

La regle générale pour diviſer des nombres qui contiennent des parties décimales, eſt de rendre les unités du dividende & celles du diviſeur de la même eſpece, en mettant après la virgule, ou après les décimales du terme qui a moins de chiffres décimaux que l'autte, autant de zéros qu'il en faut pour que le dividende & le diviſeur ayent le même nombre de caractéres après leurs virgules. Le dividende & le diviſeur étant ainſi préparés, on les diviſera l'un par l'autre sans faire aucune attention aux virgules qu'on pourroit supprimer & que l'on ne conserve que pour ne point changer les valeurs du dividende & du diviseur.

Par exemple, si l'on veut diviser (172,8) par (1,44) c'est-à-dire 1728 *dixiémes* par 144 *centiémes*; comme le diviseur a un chiffre décimal de plus que le dividende, on écrira un zéro à la droite du dividende. Ce dividende étant devenu (172,80) qui signifie 17280 *centiémes*, aura des unités de même espece que celles du diviseur (1,44) signifie 144 *centiémes.*

Le dividende & le diviseur ainsi préparés & devenus (172,80) & (1,44) n'auront point changé de valeur. Le quotient de (172,80) divisé par (1,44) sera donc le même que si l'on divisoit (172,8) par (1,44).

Supprimons maintenant la virgule du dividende (172,80) & celle du diviseur (1,44). Tous les chiffres du dividende & du diviseur avanceront chacun de deux places, & deviendront par-là centuples de ce qu'ils étoient, c'est-à-dire qu'ils seront multipliés l'un & l'autre par 100. Le quotient sera donc (N°. 33.) encore le même que si l'on divisoit le dividende (172.80) par (1,44).

Donc, si l'on écrit à la droite du dividende ou du diviseur autant de zéros qu'il en faut pour que ces deux termes ayent un même nombre de figures décimales, & qu'après avoir supprimé la virgule du dividende & celle du diviseur, on divise le nouveau dividende par le nouveau diviseur; on aura le quotient demandé.

Puisque la division des quantités qui contiennent des parties décimales par des quantités qui en contiennent aussi, se réduit à la division d'un dividende qui n'a point de déci-

males par un diviseur qui n'en a point non plus, & que nous avons donné assez d'exemples de cette division; nous pouvons nous dispenser d'en donner de ce dernier Problême.

REMARQUE.

Lorsqu'on a réduit le dividende & le diviseur à des unités de la même espece, en leur donnant à chacun le même nombre de figures décimales; & que l'on fait la division comme si le dividende & le diviseur n'avoient point de parties décimales; on trouve des quotiens qui sont composés d'unités simples; mais il n'arrive pas toujours que le diviseur soit contenu dans le dividende un certain nombre de fois sans reste: & dans ce cas, l'on peut être obligé de réduire en décimales la partie de fois que le diviseur est dans le dividende. Souvent cette partie de fois se peut exprimer exactement par des chiffres décimaux; mais le plus ordinairement il faudroit des chiffres décimaux à l'infini pour donner une expression exacte du vrai quotient. Tous ces différens cas vont être éclaircis dans le Problême suivant, où l'on supposera que le dividende a toujours des parties dicimales & que le diviseur n'en a point; & dans le cas où le diviseur aura des parties décimales, on le réduira à un diviseur sans décimales, en donnant toujours au dividende autant de décimales qu'on voudra.

PROBLÉME.

39 *Diviser un nombre qui a des parties décimales, par un diviseur qui n'en a point.*

On divisera le dividende par le diviseur, comme si le dividende n'avoit point de parties décimales: & lorsque le quotient sera trouvé; on en séparera, par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y en aura dans le dividende.

Exemple.

Si l'on propose de diviser (79,58) par 23.

Dividende	79,58	23	*diviseur*
	69	3,46	*quotient*
	10 5		
	9 2		
	1 38		
	1 38		
	0 00		

On divisera (79,58) par 23, comme si l'on avoit à diviser 7958 par 23 : & ayant trouvé 346 pour le quotient; on placera dans ce quotient une virgule qui en séparera deux chiffres décimaux; & l'on aura (3,46) pour le quotient de (79,58) divisé par 23.

La raison de cette opération est facile à concevoir : car le nombre (79,58) qu'on propose de diviser, signifie 7958 *centiémes*; & le diviseur 23 signifie qu'il faut prendre la vingt-troisiéme partie de ce dividende 7958 *centiémes*. Mais une partie d'un nombre dont les unités sont des *centiémes*, ne peut avoir pour unités que des *centiémes* : ainsi le quotient 346, qu'on trouve en divisant 7958 *centiémes*, par 23, ne peut avoir pour unités que des *centiémes*, & ne doit signifier que 346 *centiémes*; d'où il suit que chaque chiffre de ce quotient doit être reculé de deux places, ce que l'on fait par une virgule qui en sépare deux décimales.

Il eſt peut-être plus ſimple de démontrer le Problême & ſon exemple comme il ſuit.

Lorſqu'on ne fait point attention à la virgule du dividende (79,58) & qu'on diviſe 7958 par le diviſeur propoſé 23; l'on diviſe un nombre centuple du dividende propoſé : ainſi le quotient qu'on trouve eſt centuple de celui qu'on doit trouver Ce quotient doit donc être réduit à valoir cent fois moins; & c'eſt ce qu'on fait (No. 3.) en y plaçant une virgule qui a deux chiffres à ſa droite.

PROBLÊME.

40 *Diviſer un nombre quelconque, par un diviſeur qui n'a point de decimales; & pouſſer la diviſion juſqu'à ce que le quotient ne differe pas du vrai quotient exact, d'une unité décimale de tel ordre qu'on voudra.*

Ayant placé une virgule à la droite du chiffre des unités ſimples du dividende propoſé; on mettra à la droite de cette virgule des zéros, juſqu'à ce que la place des décimales du dernier ordre de celles qu'on veut avoir au quotient, ſoit remplie.

Le dividende étant ainſi préparé, on le diviſera par le diviſeur, comme s'il ne contenoit point de décimales; & l'on mettra enſuite dans le quotient une virgule qui en ſéparera autant de décimales, qu'il y en aura dans le dividende préparé.

EXEMPLE.

On propoſe de diviſer (103,2) *par* 33 *& de trouver un quotient qui ne differe pas d'un* millième, *du quotient exact qu'on trouveroit, ſi la diviſion pouvoit ſe faire ſans reſte.*

Comme le dividende propoſé ne contient en décimales, que des *dixièmes*; on écrira de ſuite à ſa droite deux zéros pour remplir la place des *centiémes* & des *milliémes*; parce que l'erreur du quotient devant être moindre que 1 *milliéme*, la divifion doit être pouffée jufqu'aux *milliémes*.

Le dividende ainfi préparé, l'on aura (103,200) à divifer par 33; & faifant la divifion comme il a été dit dans le Problême précédent, en ne confidérant point la virgule du dividende; on trouvera le quotient 3127 qui ne doit repréfenter que des *milliémes*; puifque l'on a divifé des *milliémes*: ainfi ce quotient doit être (3,127).

Dividende	103,200	33	*divifeur*
	99	3,127	*quotient*
	42		
	33		
	90		
	66		
	240		
	231		
	9		

Comme il n'étoit pas poffible de mettre une unité de plus dans le quotient 3127, fans le rendre trop grand; & que cette unité ne feroit que 1 *milliéme*; il eft évident que le quotient (3,127) qu'on trouve, quoiqu'il ne foit pas exact, ne differe pas du vrai quotient, de la milliéme partie d'une unité.

PROBLÈME.

41 *Diviser un nombre quelconque par un diviseur plus grand que le dividende, & pousser la division jusqu'à ce que le quotient ne differe pas du quotient exact, d'une unité décimale de tel ordre qu'on voudra.*

Si le diviseur n'a point de parties décimales; on écrira à la droite du dividende, autant de zéros qu'il en faudra pour que la place des décimales du dernier ordre de celles qu'on veut avoir au quotient, soit remplie.

Mais si le diviseur contient des parties décimales; on supprimera sa virgule, & l'on reculera celle du dividende vers la droite, d'autant de places qu'il y avoit de chiffres décimaux dans le diviseur: ensuite on écrira à la droite du dividende autant de zéros qu'il en faudra, pour qu'il y ait à la droite de la nouvelle virgule autant de décimales qu'on veut en avoir au quotient.

Le dividende & le diviseur étant ainsi préparés, on les divisera l'un par l'autre, comme s'ils n'avoient point de décimales.

Comme le quotient doit avoir autant de décimales que le dividende; & qu'il pourra arriver que ce quotient aura moins de figures que le dividende n'aura de décimales; l'on sera obligé, dans ce cas de mettre assez de zéros à la gauche du quotient qu'on trouvera, pour qu'il ait autant de figures décimales qu'il y en aura dans le dividende préparé; & ayant placé une virgule à la gauche de ces zéros qui completeront le nombre des figures décimales du quotient, l'on mettra encore à la gauche de cette vigule un nouveau zéro, pour tenir la place des unités.

Exemple premier.

On propose de diviser le nombre 2 par 189, & de pousser *la division jusqu'à ce que le quotient ne differe pas du quotient exact, de la* cent-milliéme *partie d'une unité.*

Ayant placé une virgule à la droite du nombre 2 qu'on doit diviser; l'on écrira cinq zéros à la droite de cette virgule, afin que la place des *cent-milliémes* soit occupée; & l'on aura (2,00000) à diviser par le diviseur 189.

Dividende	2,00000	189	*diviseur*
	189	0,01058	*quotient*
	1100		
	945		
	1550		
	1512		
Reste	38		

Le dividende étant ainsi préparé sans toucher au diviseur 189, parce qu'il ne contient point de décimales; on divisera le dividende (2,00000) par 189, comme si ce dividende ne contenoit point de décimales, & l'on trouvera 1058 pour le quotient. Mais comme on n'avoit que des *cent-milliémes* à diviser par 189, le quotient 1058 n'aura pour unités que des *cent-milliémes* : ainsi il faudra que son chiffre 8 de la droite tienne le rang des *cent-milliémes*, & soit par conséquent à la cinquiéme place à la droite de sa virgule. On mettra donc un zéro à la gauche du quotient 1058, avec une virgule à la gauche de ce zéro; afin que ce quotient ait cinq figures décimales comme le dividende. Enfin l'on mettra encore un zéro à la gauche de la virgule, pour tenir la place des unités; & l'on aura (0,01058) pour le quotient de 2 divisé par 189. En opérant ainsi, la division sera poussée jusqu'à ce que le quotient ne differe pas du quotient exact de 1 *cent-milliéme.*

Exemple II.

On propose de diviser (0,025) *par* (1,89) *& de pousser la division jusqu'à ce que le quotient ne differe pas du quotient exact d'un* millioniéme.

Supprimant la virgule du diviseur, on reculera de deux places vers la droite la virgule du dividende, parce qu'il n'y a que deux chiffres décimaux au diviseur. Le dividende & le diviseur seront ainsi multipliés par 100 (N°. 3.), & le quotient ne changera point de valeur (N°. 33.). La division sera donc réduite à celle de (002,5 ou 2,5), par 189.

Comme il faut pousser la division jusqu'aux *millioniémes* qui sont des décimales du sixiéme ordre, lesquelles doivent occuper la sixiéme place à la droite de la virgule ; & que le dividende (2,5) a déjà une décimale à la droite de sa virgule ; on écrira encore cinq zéros à la droite de ce dividende, pour lui donner six chiffres décimaux ; & l'on aura

Nouveau dividende	2,500000	189	*Nouveau diviseur*
	189	0,013227	*quotient*
	610		
	567		
	430		
	378		
	520		
	378		
	1420		
	1323		
Reste	97		

La division étant faite, on aura 13227 pour le quotient : & comme on a divisé des *millioniémes*, ce

quotient

quotient comptera des *millioniémes*; ainsi sa derniere figure 7 doit être la sixiéme à la droite de la virgule. On mettra donc un zéro à la gauche de ce quotient, avec une virgule à la gauche de ce zéro, & encore un nouveau zéro à la gauche de la virgule pour tenir la place des unités; ensorte que l'on aura (0,013227) pour le quotient de (2,500000) divisé par 189, ou pour celui de (0,025) divisé par (1,89).

Comme le dividende (2,500000) qui signifie 2500000 *millioniémes*, n'est pas exactement divisible par 189; on trouve après la division 97 *millioniémes* de reste, qui ne peuvent plus être divisés par 189, à moins qu'on ne veuille avoir au quotient des décimales inférieures aux *millioniémes*.

Si l'on avoit voulu pousser la division jusqu'aux *cent-millioniémes* qui sont des décimales du huitiéme ordre; il auroit fallu mettre encore deux zéros à la droite du dividende; c'est-à-dire qu'il auroit fallu diviser (2,50000000) par 189: & l'on auroit eu pour le quotient 1322751 *cent-millioniémes* ou (0,01322751) avec un reste 61 *cent-millioniémes*.

Enfin si l'on vouloit pousser la division à l'infini, on auroit (0,01 322751 322751 322751 &c.) pour le quotient; c'est-à-dire qu'après (0,01) l'on répéteroit continuellement les mêmes chiffres 322751.

Avertissement.

Outre la méthode qu'on vient d'expliquer pour la division, & que les Arithméticiens appellent *Méthode Italienne*: il y en a trois autres principales dont l'usage paroît plus ordinaire; quoiqu'on soit plus exposé à y faire des erreurs, à cause de la plus grande attention qu'il y faut apporter, & qu'il soit plus difficile d'y trouver & corriger les fautes qu'on a faites en opérant. Ces trois Méthodes que nous allons expliquer ſuccinctement, pour en donner une idée, ſont la *Méthode Italienne abrégée*, l'*Eſpagnole* & la *Françoiſe*.

DE LA MÉTHODE ITALIENNE ABRÉGÉE.

42 La Méthode Italienne abrégrée ne differe de celle qu'on vient d'expliquer, qu'en ce que pour rendre les opérations plus courtes, l'on n'écrit point les produits de la multiplication du diviſeur par les chiffres du quotient, & qu'on retranche du dividende les chiffres de ces produits à meſure qu'on les trouve. Un exemple ſuffira pour expliquer cette Méthode, & pour faire voir en quoi elle differe de la Méthode Italienne ordinaire.

Dividende	7958	23	*diviſeur*
	105	346	*quotient*
	138		
	000		

On écrira comme on a toûjours fait le diviſeur à la droite du dividende, & commençant la diviſion par celle des chiffres de la plus haute dénomination ; l'on diviſera d'abord 79 *centaines*, par le diviſeur 23 ; ce qui donnera 3 *centaines* pour le quotient : ainſi l'on écrira 3 au quotient, dans une place qui ſera celle des centaines.

Pour avoir le reſte de cette premiere diviſion particuliere des centaines ; on multipliera le diviſeur 23 par le quotient 3, & le produit ſera retranché du dividende actuel 79 ; mais l'on n'écrira point ce produit, comme nous avons fait dans la méthode précédente, & l'on ſe contentera de retrancher de 79 *centaines*, les chiffres de ce produit à meſure qu'on les trouvera. On dira donc : 3 fois 3 font 9 ; & comme en retranchant ce produit 9, du chiffre 9 du dividende, il ne restera rien ; l'on écrira un zéro au-dessous du 9. Ensuite on dira : 3 fois 2 font 6 qu'on retranchera du chiffre 7 du dividende ; & comme il restera 1, l'on écrira 1 au-dessous du 7. Ainsi en divisant 79 *centaines* par 23, l'on aura 3 *centaiees* pour le quotient, avec 10 *centaines* de reste, qui n'ont pas pû être divisées par 23.

Pour continuer la division, l'on abaissera les 5 *dixaines* du dividende à la droite des 10 *centaines* restantes de la premiere division : & ayant 105 *dixaines* à diviser par 23, le quotient sera 4 *dixaines* qu'il faudra écrire à la droite des 3 *centaines* que l'on a déjà. Puis pour avoir le reste de cette seconde division des dixaines ; l'on multipliera 23 par 4 ; & à mesure qu'on trouvera les chiffres du produit, on les retranchera du dividende 105 sur lequel on opere. L'on dira donc : 4 fois 3 font 12 qu'on proposera de retrancher de 5 ; & comme cela est impossible, on empruntera 1 *dixaine* ou une unité d'un degré supérieur, qui étant ajoûtée à 5 fera 15 ; & retranchant 12 de 15, il restera 3 qu'on écrira sous le 5. Ensuite on dira : 4 fois 2 font 8, & 1 que l'on a emprunté & qu'il faut retrancher font 9 ; & retranchant 9 de 10, il restera 1 qu'on écrira au-dessous ; de sorte que le reste de cette seconde division sera 13.

Pour achever la division l'on abaissera les 8 *unités* du dividende à la droite des 13 *dixaines* restantes de la division précédente, & l'on aura 138 *unités* à diviser par 23 ; ce qui donnera pour le quotient 6 unités que l'on écrira à la droite des deux chiffres 34 qui y sont déjà placés. Puis pour avoir le reste de la division, l'on multipliera le diviseur 23 par 6 ; & à mesure qu'on trouvera les chiffres du produit, on les retranchera du dividende actuel 138. Pour cela l'on dira 6 fois 3 font 18, qu'on proposera de retrancher de 8 ; & comme cela ne se peut pas, on empruntera 1 *dixaine* ou une unité du degré supérieur, qui jointe à 8 fera 18, & retranchant 18 de 18, il ne restera rien; ainsi l'on écrira o sous le 8. Ensuite on dira : 6 fois 2 font 12, & l'unité empruntée qu'il faut retrancher, font 13; ainsi l'on retranchera 13 de 13, & comme il ne restera rien, l'on écrira o au-dessous.

La division étant faite, on trouvera 346 pour le quotient exact de 7958 divisé par 23.

Cette Méthode est un peu plus courte que celle qu'on a précédemment expliquée; mais elle expose plus que la premiere à tomber dans l'erreur; parce qu'il faut se souvenir de ce qu'on a emprunté, pour le joindre avec le produit suivant; & qu'il y a deux opérations entre l'emprunt & le compte que l'on en tient.

DE LA MÉTHODE ESPAGNOLE.

43 La Méthode Espagnole est assez semblable à la Méthode Italienne abrégée : elle en differe cependant, en ce que dans chaque division particuliere, l'on écrit le diviseur au-dessous du dividende & le reste au-dessus. Un exemple suffira pour la faire connoître.

	10		
On propose de diviser	~~7~~~~9~~58	(3	*quotient*
Par	~~2~~~~3~~		

On prendra autant de chiffres de la gauche du dividende, qu'il en faudra pour que le diviseur y puisse être contenu : & comme dans l'exemple proposé les deux chiffres 79 du dividende contiennent le diviseur 23; on se proposera de diviser seulement 79 par 23.

Ayant écrit 23 sous 79; on cherchera combien de fois 23 est contenu dans 79, ou combien de fois 2 est contenu dans 7; & comme on trouvera qu'il y eſt contenu 3 fois on écrira 3 au quotient.

Pour connoître le reſte de cette premiere diviſion, l'on multipliera le diviſeur 23 par le quotient 3; & à meſure qu'on trouvera les chiffres du produit, on les ſouſtraira des chiffres ſupérieurs en écrivant les reſtes au-deſſus de ces chiffres ſupérieurs. On dira donc: 3 fois 3 font 9, qu'on ôtera du 9 ſupérieur; & comme il ne reſtera rien, l'on écrira un zéro au-deſſus de ce 9 que l'on barrera, auſſi-bien que le chiffre 3 multiplié. Enſuite on dira: 3 fois 2 font 6, que l'on ſouſtraira du chiffre ſupérieur 7, & il reſtera 1 que l'on écrira au-deſſus du 7, en barrant ce 7 & le chiffre 2 multiplié.

Par cette premiere opération, les 79 centaines du dividende ſeront diviſées par 23; le quotient ſera 3 centaines, & il reſtera 10 centaines qui n'ont pas pû être diviſées par 23.

Pour continuer la diviſion, l'on prendra les 5 dixaines du dividende avec les 10 centaines reſtantes de la premiere diviſion; & l'on aura 105 dixaines à diviſer par 23.

$$\begin{array}{lllll} & 1 & & & \\ & \cancel{1}\cancel{0}3 & & & \\ \textit{Dividende} & \cancel{7}\cancel{9}\cancel{5}8 & (34 & \textit{quotient} \\ & \cancel{2}\cancel{3}\cancel{3} & & & \\ & \cancel{2} & & & \end{array}$$

Pour faire cette diviſion; l'on écrira de nouveau le diviſeur 23 au-deſſous du dividende 105 dixaines, de maniere que le 3 ſoit ſous le 5, & le 2 ſous le zéro; c'eſt-à-dire que l'on reculera les chiffres du diviſeur d'un rang vers la droite. Puis on cherchera combien de fois 23 eſt contenu dans 105; & ayant trouvé qu'il y eſt 4 fois, l'on écrira 4 au quotient à la droite du chiffre 3 premierement trouvé.

Pour avoir le reſte de cette ſeconde diviſion, l'on dira : 4 fois 3 font 12 ; & comme ce premier produit particulier ne peut pas être retranché du chiffre ſupérieur 5, on empruntera 1 dixaine laquelle jointe à 5 ſera 15 dont on ôtera 12 ; & il reſtera 3 que l'on écrira au-deſſus de 5, après avoir barré ce 5 & le 3 multiplié. Puis on dira : 4 fois 2 font 8, & 1 que l'on a emprunté font 9, que l'on retranchera de 10 ; & il reſtera 1 que l'on écrira au-deſſus du zéro, après avoir barré 10 & le 2 multiplié.

Par cette ſeconde opération, les 105 dixaines ſeront diviſées par 23 ; le quotient ſera 4 dixaines, & il reſtera encore 13 dixaines qui n'ont pas pû être diviſées par 23.

Pour achever la diviſion propoſée, l'on joindra les 13 dixaines reſtantes avec les 8 unités ; & l'on aura 138 unités à diviſer par 23.

```
              1
              105
*Dividende*   7958  ( 346   *quotient*
              2333
               22
```

Pour faire cette derniere diviſion, l'on écrira comme on a déjà fait, le diviſeur 23 au-deſſous du nouveau dividende 138, en reculant ſes chiffres d'un rang vers la droite, enſorte que le 3 ſoit ſous le 8. Puis ayant trouvé que 23 eſt 6 fois dans 138, & ayant écrit 6 au quotient à la droite de 34 ; l'on multipliera le diviſeur 23 par 6 : & à meſure qu'on fera le produit de la multiplication d'un chiffre du diviſeur par 6, on le retranchera du chiffre ſupérieur, comme dans les deux opérations précédentes. Les produits particuliers qui compoſent celui de 23 par 6, étant ôtés de 138 ; il ne reſtera rien. Ainſi 346 ſera le quotient exact de 7958 diviſé par 23.

Cette Méthode a le même inconvenient que la précédente ; & comme elle a de plus un embarras de chiffres disposés pyramidalement ; il est difficile d'y reconnoître & de corriger les fautes qu'on peut avoir faites.

DE LA MÉTHODE FRANÇOISE.

44 La Méthode Françoise ressemble à la Méthode Espagnole, par la disposition du dividende & du diviseur, & par la façon d'écrire les restes des divisions particulieres au-dessus du dividende ; mais elle en differe en ce que l'on n'emprunte point. Un exemple suffira pour faire connoître cette Méthode.

	5		
	127		
On propose de diviser	84162	(8	*quotient*
Par	98		

Comme le diviseur 98 n'est pas contenu dans les deux chiffres 84 de la gauche du dividende, on se proposera d'abord de diviser les trois chiffres 841 de la gauche du dividende, c'est-à-dire 841 centaines par 98. Pour cela l'on écrira le diviseur 98 au-dessous de 41, & cherchant combien de fois 98 est contenu dans 841, l'on trouvera qu'il y est 8 fois : ainsi l'on écrira 8 au quotient dans une place qui sera celle des centaines, puisque l'on divise des centaines.

Pour avoir le reste de cette premiere division, l'on multipliera successivement les deux chiffres de 98 par 8, en commençant par le chiffre 9 du plus haut degré ; & à mesure qu'on trouvera les produits, on les ôtera des chiffres supérieurs. On dira donc : 8 fois 9 font 72 qu'on retranchera de 84, en ôtant le 2 du 4 & le 7 du 8 ; & il restera 12 qu'on écrira au-dessus, après avoir barré 84 & le chiffre 9 qu'on vient de multiplier. Ensuite on dira : 8 fois 8 font 64 que l'on retranchera de 121 ; & il restera 57 qu'on écrira au-dessus, après avoir barré 121 & le chiffre 8 qu'on vient de multiplier.

Par cette premiere opération, les 841 centaines seront divisées par 98 ; le quotient sera 8, & il restera 57 centaines qui n'ont pas pû être divisées par 98.

Pour continuer la division, l'on reculera le diviseur 98 d'un rang, en l'écrivant au-dessous de 76, afin de diviser les 57 centaines restantes avec les 6 dixaines, c'est-à-dire afin de diviser 576 dixaines par 98.

$\cancel{1}8$

$\cancel{5}\cancel{2}$

$\cancel{1}\cancel{2}\cancel{7}6$

Dividende $\cancel{8}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{6}2$ (85 *quotient*

$\cancel{9}8\cancel{8}$

$\cancel{9}$

Le diviseur 98 étant contenu 5 fois dans le dividende actuel 576, & ayant écrit 5 au quotient à la droite du 8 qu'on y a déjà placé ; l'on multipliera 98 par 5, en commençant par le chiffre du plus haut degré ; & à mesure qu'on fera le produit d'un chiffre par 5, on le retranchera des chiffres supérieurs. L'on dira donc : 5 fois 9 font 45 qu'on retranchera de 57 ; & il restera 12 qu'on écrira au-dessus de 57, après avoir barré 57 & le chiffre 9 multiplié. Ensuite on dira : 5 fois 8 font 40 qu'on retranchera de 126 ; & il restera 86 qu'on écrira au-dessus de 126, ou plûtôt au-dessus de 26, après avoir barré 126 & le chiffre 8 multiplié.

Par cette seconde opération, le nombre 576 dixaines sera divisé par 98 ; le quotient sera 5 dixaines, & il restera 86 dixaines qui n'ont pas pû être divisées par 98.

Pour finir la diviſion propoſée, l'on reculera encore le diviſeur d'un rang, afin de diviſer les 86 dixaines reſtantes avec les deux unités, c'eſt à-dire afin de diviſer 862 unités par 98.

$$
\begin{array}{lcll}
 & \cancel{1} & & \\
 & \cancel{1}\cancel{8}7 & & \\
 & \cancel{5}\cancel{2}\cancel{4} & & \\
 & \cancel{1}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{6}8 & & \\
\textit{Dividende} & \cancel{8}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{2} & (858 & \textit{quotient} \\
 & \cancel{9}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{8} & & \\
 & \cancel{9}\cancel{9} & &
\end{array}
$$

Ayant trouvé que 98 eſt contenu 8 fois dans le dividende actuel 862, & ayant écrit 8 au quotient à la droite de 85 ; l'on cherchera le reſte de cette diviſion, en diſant comme ci-devant : 8 fois 9 font 72, qu'on retranchera des chiffres ſupérieurs 86 ; & il reſtera 14 que l'on écrira au-deſſus de ces chiffres, après avoir barré 86 & le chiffre 9 qu'on vient de multiplier. Puis on dira : 8 fois 8 font 64, qu'on retranchera de 142 ; & il reſtera 78 unités qu'on écrira au-deſſus de 42.

Par cette derniere opération, les 862 unités ſeront diviſées par 98 ; le quotient ſera 8 unités, & il reſtera 78 unités qui ne peuvent point être diviſées par le diviſeur 98.

Le quotient de 84162 diviſé par 98 ſera donc 858, & il reſtera 78 unités qu'on ne peut plus diviſer par 98, à moins qu'on ne les transforme en d'autres unités plus petites ; mais ce n'eſt point ici le lieu de parler des unités plus petites que les unités ſimples.

Cette derniere Méthode a cela d'avantageux, qu'on n'eſt point obligé d'emprunter ; mais d'un autre côté, elle a cela d'incommode, qu'il faut ſavoir retrancher un nombre exprimé par deux chiffres, d'un autre nombre exprimé par deux *ou trois chiffres. D'ailleurs elle a le même inconvenient que la Méthode précédente, en ce que les restes des divisions étant disposés pyramidalement au-dessus du dividende, il est difficile de reconnoître & corriger les endroits où l'on peut avoir fait quelque erreur.*

Des suites décimales composées de Périodes égales qui se succédent a l'infini.

45 Lorsqu'on veut avoir le quotient d'une division en parties décimales & qu'on pousse le calcul assez loin; après avoir trouvé un certain nombre de chiffres pour le quotient, on parvient à retrouver les mêmes chiffres pour la suite de ce quotient. En voici des exemples.

1°. Si l'on divise 1 par 3, on trouvera pour le quotient (0,3333&c); c'est-à-dire que le quotient sera composé de trois *dixiémes*, trois *centiémes*, trois *milliémes*, & toûjours ainsi de suite jusqu'à l'infini.

2°. Si l'on divise 1 par 6, on trouvera pour quotient (0,16666 &c); c'est-à-dire que le premier chiffre du quotient sera 1 *dixiéme*, & que tous les autres chiffres décimaux seront des 6.

3°. Si l'on veut diviser 1 par 7, on trouvera pour le quotient (0,142857 142857 &c); c'est-à-dire qu'après avoir trouvé 142857 pour les six premiers chiffres décimaux du quotient, on trouvera les mêmes chiffres 142857 pour les six chiffres suivans, & toûjours la même chose à l'infini.

4°. Si l'on divise 1 par 9, on trouvera pour le quotient (0,1111 &c); c'est-à-dire que tous les chiffres décimaux seront des unités.

5°. Si l'on divise 1 par 24, l'on trouvera pour le quotient (0,041666&c); c'est-à-dire que les trois premiers chiffres décimaux seront 041 qui signifient

41 *milliémes*, & que tous les chiffres décimaux suivans à l'infini, seront des 6.

Lorsque les mêmes chiffres reviennent ainsi dans un quotient; l'on n'écrit que deux périodes de chiffres semblables, & l'on met ensuite &c pour marquer que ces périodes reviendront toûjours à l'infini.

THÉORÉME.

46 1°. *Tout dividende moindre que 9, qui sera divisé par 9, donnera pour le quotient, une suite infinie de chiffres décimaux égaux à celui du dividende.*

2°. *Tout dividende moindre que 99, qui sera divisé par 99, donnera pour le quotient, une suite infinie de périodes décimales de deux figures égales à celles du dividende.*

3°. *Tout dividende moindre que 999, qui sera divisé par 999, donnera pour le quotient, une suite infinie de périodes décimales de trois figures égales à celles du dividende.*

Il en sera de même de tous les diviseurs qui seront d'une unité moindres que les termes de la progression décuple, 10, 100, 1000, 10000, 100000, &c, *& qui diviseront des nombres plus petits qu'eux-mêmes.*

DÉMONSTRATION.

1°. Tout nombre moindre que 9 ne pouvant pas être divisé par 9, doit être réduit en *dixiémes*, & vaudra autant de dixaines de *dixiémes* qu'il aura d'unités. Or chaque dixaine de *dixiémes* donnera 1 *dixiéme* pour le quotient, & il restera 1 *dixiéme*. Donc toutes les dixaines de *dixiémes* qui composeront la valeur du dividende, donneront autant de *dixiémes* au quotient & au reste, que le dividende aura d'unités; & par conséquent le premier chiffre décimal du quotient, & le premier chiffre décimal restant, seront les mêmes que celui du dividende qu'on suppose moindre que 9.

Le chiffre reſtant de la premiere diviſion étant égal à celui du dividende, & devant être diviſé par 9, ſera réduit en *centiémes*, & donnera par les mêmes raiſons autant de *centiémes* au quotient & au reſte, que le dividende aura d'unités; & toûjours de même à l'infini.

Par exemple, ſi l'on diviſe 7 par 9; l'on fera du dividende 7, 7 dixaines de *dixiémes*. Or chaque dixaine de *dixiémes* étant diviſée par 9, donnera 1 *dixiéme* pour le quotient, & il reſtera 1 *dixiéme*. Donc les 7 dixaines de *dixiémes* étant diviſées par 9, donneront 7 *dixiémes* pour le quotient, & donneront auſſi 7 *dixiémes* pour le reſte.

Ces 7 *dixiémes* reſtans de la premiere diviſion ne pouvant pas être diviſés par 9; l'on en fera 7 dixaines de *centiémes*; & comme chaque dixaine de *centiémes*, étant diviſée par 9, donnera 1 *centiéme* pour le quotient & 1 *centiéme* de reſte; les 7 dixaines de *centiémes* donneront 7 *centiémes* pour le quotient & 7 *centiémes* de reſte. Il en ſera de même des *milliémes* &c; c'eſt-à-dire que chaque chiffre décimal du quotient & du reſte ſera le même que le chiffre du dividende.

2°. Tout nombre moindre que 99, ne pouvant point être diviſé par 99, ſera réduit en autant de centaines de *centiémes* qu'il a d'unités. Or chaque centaine de *centiémes* étant diviſée par 99, donnera 1 *centiéme* pour le quotient, & il reſtera 1 *centiéme*. Donc toutes les unités du dividende donneront pour le quotient un nombre de *centiémes* exprimé par les mêmes chiffres que le dividende, & il reſtera le même nombre de *centiémes*. Il en ſera de même des autres chiffres du quotient.

Par exemple, ſi l'on veut diviſer 42 par 99, on fera 42 centaines de *centiémes*, du dividende 42; & chaque centaine de *centiémes* diviſée par 99, donnant 1 *cen-*

tiéme pour le quotient & 1 *centieme* de reste; les 42 centaines de *centiémes* donneront 42 *centiémes* pour le quotient, avec 42 *centiémes* de reste. Ainsi le nombre des *centiémes* du quotient, & le nombre des *centiémes* du reste, seront exprimés par les mêmes chiffres que le dividende 42.

Les 42 *centiémes* restans ne pouvant plus être divisés par 99, l'on en fera 42 centaines de *centiémes de centiémes*, c'est-à-dire 42 centaines de *dix-milliémes*. Mais chaque centaine de *dix-milliémes*, étant divisée par 99, donnera 1 *dix-milliéme* pour le quotient avec 1 *dix-milliéme* de reste: ainsi 42 centaines de *dix-milliémes*, donneront 42 *dix-milliémes* pour le quotient, avec 42 *dix-milliémes* de reste. Donc le nombre des *dix-milliémes* du quotient & le nombre des *dix-milliémes* du reste, seront exprimés par les mêmes chiffres que le dividende 42.

En suivant le même raisonnement, l'on fera voir que tous les autres chiffres du quotient seront égaux deux à deux à ceux du dividende qu'on suppose moindre que 99. Ainsi en divisant 42 par 99, on aura pour le quotient (0,42 42 42 &c).

Si le nombre à diviser par 99 étoit exprimé par un seul chiffre, par exemple, si l'on avoit 5 ou 05 à diviser par 99; on changeroit 5 en 500 *centiémes* qu'on diviseroit par 99, & l'on auroit pour le quotient (0,05) c'est-à dire 5 *centiémes* avec (0,05) de reste; puis on transformeroit ce reste en 500 *dix-milliémes* qu'on diviseroit par 99, & l'on auroit 5 *dix-milliémes* ou (0,0005) avec 5 *dix-milliémes* ou (0,0005) de reste; ensorte que le quotient seroit composé de périodes décimales semblables, qui toutes auroient les deux caracteres 05 égaux à ceux du dividende; c'est-à-dire que 5 ou 05, étant divisé par 99, donneroit pour le quotient (0,05 05 05 &c).

Enfin toutes les fois qu'on divisera un nombre quelconque, par un nombre plus grand que lui, dont tous les chiffres seront des 9; on aura pour le quotient une suite infinie de périodes décimales composées d'autant de caracteres que le diviseur aura de chiffres; & chacune de ces périodes aura les mêmes chiffres significatifs que le dividende; ensorte que si le dividende avoit moins de chiffres que le diviseur il se trouveroit dans chaque période, des places remplies par des zéros écrits à la gauche du chiffre ou des chiffres significatifs égaux à ceux du dividende.

Corollaire premier.

47 Et réciproquement, si l'on a une suite infinie de périodes décimales composées des mêmes chiffres; la somme de cette suite sera égale au quotient d'une période divisée par un nombre composé d'autant de 9 qu'il y aura de figures dans la période.

Par exemples, la suite (0,333 &c) dont chaque période n'a qu'un chiffre 3, est égale au quotient de la division de 3 par 9 ou de 1 par 3.

La suite (0,23 23 23 &c) dont chaque période (23) a deux chiffres, est le quotient de la division de 23, par 99.

La suite (0,087 087 087 &c) dont chaque période (087) a trois figures, est le quotient de la division de 087 ou de 87, par 999.

La suite (0,001 001 001 &c) dont chaque période (001) a trois figures, est le quotient de la division de 001 ou de 1, par 999: & ainsi des autres.

Corollaire II.

48 A mesure qu'on avance la virgule d'une place vers la gauche, les chiffres décimaux qu'on avoit,

valent dix fois moins qu'ils ne valoient. Par exemple si l'on a une suite (0,298 298 &c), & qu'on avance la virgule d'un rang vers la gauche; on aura (0,0298 298 &c) qui vaudra dix fois moins que (0,298 298 &c). Si l'on avance encore la vigule d'un rang vers la gauche; on aura (0,00298 298 &c) qui vaudra dix fois moins que (0,0298 298 &c), ou cent fois moins que (0,298 298 &c): & ainsi les autres.

Mais la suite (0,298 298 &c) composée de périodes égales, dont la premiere commence immédiatement après la virgule, est le quotient de la division de 298 par 999.

Donc cette suite (0,0298 298 298 &c) qui vaut dix fois moins que la premiere, est le quotient de la division de 298 par 9990; & la suite (0,00298 289 &c) qui vaut cent fois moins que la premiere est le quotient de la division de 298 par 99900: & ainsi des autres; c'est-à-dire que quand une suite de périodes décimales ne commence pas précisément après la virgule; elle représente le quotient d'une division dont le dividende est égal à une période, & dont le diviseur est composé, non seulement d'autant de 9 que la période a de chiffres, mais encore d'autant de zéros qu'il y a de places entre la virgule & le premier chiffre de la premiere période.

Comme nous traiterons plus généralement la même matiere dans le Chapitre III du VIII Livre, & que nous ne pouvons pas nous dispenser de parler encore des parties décimales dans le Livre des fractions: nous n'en dirons pas davantage pour le présent; & nous réserverons la réduction des suites infinies de périodes décimales en fractions finies, pour en traiter lorsque nous expliquerons les opérations de l'Arithmétique sur les fractions.

DE LA PREUVE

de la Multiplication et de la Division.

La multiplication & la diviſion ſe ſervent mutuellement de preuve ; c'eſt-à-dire que l'on connoît par la diviſion, s'il n'y a point de fautes dans la multiplication ; & que l'on trouve par la multiplication, ſi l'on n'a point commis d'erreurs dans la diviſion.

Preuve de la Multiplication.

49 En diviſant un nombre par un autre, l'on trouve un troiſiéme nombre nommé *quotient* lequel multiplié par le ſecond donne un produit égal au premier nombre : ainſi en diviſant le produit d'une multiplication par ſon multiplicande, l'on doit trouver pour le quotient, un nombre égal au multiplicateur : ou bien en diviſant le produit par le multiplicateur, on doit avoir un quotient égal au multiplicande ; puiſque de la multiplication du multiplicande & de ce quotient, il doit réſulter un nombre égal au produit qu'on a diviſé.

Nous propoſerons donc pour preuve de la multiplication, de diviſer le produit par le multiplicande, ou par le multiplicateur ; & ſi le quotient que l'on trouve eſt égal au multiplicateur ou au multiplicande, ce ſera une marque que la multiplication a été bien faite : ſinon la multiplication ſera réputée mal faite, & il faudra la recommencer.

Par exemple, ſi après avoir multiplié 964 par 264 ; on trouve que le produit eſt 254496 ; l'on diviſera ce produit 254496, par le multiplicande 964 ; & comme le le quotient qu'on trouvera ſera égal au multiplicateur 264, la multiplication ſera réputée bonne : ou bien l'on diviſera le produit 254496 par le multiplicateur 264 ; & comme on trouvera pour le quotient un nombre égal au multiplicande 964, on en conclura que la multiplication a été bien faite.

Lorſqu'un multiplicateur eſt composé de pluſieurs chiffres, l'on eſt obligé de multiplier le multiplicande par chacun des chiffres particuliers du multiplicateur ; ce qui donne autant de produits particuliers qu'il y a de chiffres dans le multiplicande : enſuite en ajoûtant enſemble tous ces produits particuliers, on trouve un total qui eſt le produit de la multiplication.

Pour faire la preuve de la multiplication, l'on peut attendre que le produit total ſoit trouvé, & diviſer ce produit total par le multiplicande ou par le multiplicateur, comme nous l'avons dit. Mais il eſt plus à propos d'examiner chaque produit particulier, en le diviſant par le chiffre du multiplicateur, qui a multiplié le multiplicande ; parce que ſi le quotient ſe trouve égal au multiplicande, ce ſera une marque que ce produit particulier eſt bon ; & ſi le quotient n'eſt pas égal au multiplicande, on ſera sûr qu'il y a une faute dans ce produit, & l'on ne ſera pas obligé de la chercher ailleurs. Par exemple,

En multipliant	964
Par	264
Le multiplicande multiplié par 4 donne	3856
Le multiplicande multiplié par 6 donne	5784
Le multiplicande multiplié par 2 donne	1928
Ces trois produits particuliers donnent enſemble	254496

Or ſans attendre qu'on ait trouvé le produit total 254496 de la multiplication, pour en faire la preuve ;

on peut éprouver par la diviſion les produits particuliers à meſure qu'on les a trouvés.

Comme le premier produit particulier 3856 réſulte de la multiplication de 964 par le ſeul chiffre 4; on diviſera ce produit par 4 c'eſt-à-dire qu'on en prendra le quart, en diſant : le quart 38 centaines eſt 9 centaines qui ſe trouvent multiplicande. Mais comme 9 eſt le quart de 36; il reſtera 2 centaines qui vaudront 20 dixaines, leſquelles étant jointes à 5 dixaines feront 25 dixaines, dont le quart eſt 6 dixaines qui ſe trouvent au multiplicande. Enfin comme 6 eſt le quart de 24 & non pas de 25 ; il reſtera 1 dixaine que l'on convertira en 10 unités & que l'on joindra avec le 6, ce qui fera 16 dont le quart eſt juſtement 4 unités qui ſe trouvent au multiplicande. Comme ce premier produit 3856 donne exactement pour le quotient les mêmes chiffres que ceux du multiplicande; c'eſt une preuve que ce premier produit 3856 eſt bon.

Le ſecond produit particulier 5784 venant de la multiplication de 964 par 6; on le diviſera par 6, & l'on trouvera pour le quotient les mêmes chiffres que ceux du multiplicande; ce qui prouvera que ce ſecond produit eſt bon.

Enfin le troiſiéme produit 1928 étant fait de 964 multiplié par 2; on le diviſera par 2, & l'on trouvera pour le quotient 964; ce qui fera voir que ce troiſiéme produit eſt ſans erreur.

Tous les produits particuliers d'une multiplication, dont le multiplicateur eſt compoſé de pluſieurs chiffres, étant éprouvés par des diviſions; on les ajoûtera enſemble pour avoir un produit total; & l'on éprouvera enſuite ce total en ſe ſervant de la preuve de l'addition (N°. 14.) : & ſi l'on ne vouloit pas ſe ſervir de cette preuve on pourroit encore diviſer le produit total par le multiplicande ou par le multiplicateur, pour voir si le quotient est égal au multiplicateur ou au multiplicande; ce qui assureroit davantage que la multiplication est bien faite.

Preuve de la Division.

50 1°. Puisque (N°. 28.) diviser un nombre par un autre, c'est chercher un troisiéme nombre qui multiplié par le second, donne uu produit égal au premier nombre; nous pouvons proposer pour preuve de la division, de multiplier le quotient par le diviseur, & de regarder une division comme bonne ou mauvaise, suivant que le produit de la multiplication du quotient par le diviseur sera ou ne sera pas égal au dividende.

Par exemple, si en divisant 254496 par 264, on a trouvé 964 pour le quotient; l'on multipliera le quotient 964 par le diviseur 264; & comme on trouvera pour le produit le nombre 254496 qui est égal au dividende; l'on dira que la division a été bien faite; & que 964 est le quotient exact de 254496 divisé par 264: si au contraire on avoit trouvé pour le quotient de la division un nombre plus ou moins grand que 964, ce qui auroit pû arriver par quelque erreur de calcul; en multipliant ce quotient trop grand ou trop petit par le diviseur 264, l'on trouveroit que le produit seroit plus grand ou plus petit que le dividende 254496, & l'on jugeroit par là qu'il y a quelque erreur dans la division.

Pour prévenir la multiplicité des erreurs & les découvrir dans le cours de la division, à mesure qu'on les fait; il est bon de vérifier chaque chiffre du quotient à mesure qu'on le trouve. Voici un exemple de cette opération.

Supposons qu'on ait à diviser 254496 par 264.

Dividende	254496	264	*diviseur*
1^er^. *produit*	2376	964	*quotient*
1^er^. *reste*	1689		
2^e^. *produit*	1584		
2^e^. *reste*	1056		
3^e^. *produit*	1056		
Dernier reste	0000		

Commençant la division par les chiffres de la plus haute espéce, l'on divisera d'abord 2544 *centaines* par 264, & l'on trouvera 9 centaines pour le quotient; l'on écrira donc 9 au quotient dans un rang qui se trouvera celui des centaines. Pour voir si le chiffre 9 placé au quotient est bon, ou si le diviseur 264 est 9 fois dans le dividende 2544 qu'on a premierement divisé; l'on multipliera 264 par 9; ce qui donnera un premier produit 2376, que l'on écrira au-dessous du dividende actuel 2544: puis on retranchera ce produit 2376 de 2544, & l'on trouvera 168, pour le premier reste.

Pour connoître si ce premier reste 168 qui vaut 168 *centaines* est bon; il faut s'assurer de deux choses. 1°. Il faut prouver que 2376 est exactement le produit de 264 par 9; ce qu'on fera en prenant la neuviéme partie de ce produit: & comme cette neuviéme partie sera égale au diviseur 264 qu'on a regardé comme un multiplicande, en faisant le produit 2376; on sera sûr que ce produit est bon. 2°. Il faut s'assurer que la soustraction est bonne; ce qu'on fera en ajoûtant le reste 168 avec le produit 2376 qu'on a retranché: & comme on trouvera que la somme est parfaitement égale à celle 2544 dont elle a été soustraite; on sera sûr que le reste 168 qui est moindre que le diviseur 264, est bon.

Pour continuer la division, l'on abaisse les 9 *dixaines* du dividende, à la droite des 168 *centaines* restantes de la division qu'on vient de faire; & l'on a 1689 *dixaines* à diviser par 264; ce qui donne 6 dixaines pour le quotient. Ensuite on multiplie 264 par 6, ce qui donne 1584 pour un second produit que l'on retranche de 1689; & l'on trouve 105 pour un second reste. On éprouvera cette seconde division comme la premiere. 1°. En prenant la sixiéme partie de 1584 qu'on trouvera égale au diviseur 264, ce qui marquera que le produit 1584 est bon. 2°. En ajoûtant 105 avec 1584, ce qui fera une somme égale au dividende actuel 1689, & prouvera que le reste 105 qui est moindre que le diviseur 264, est bon.

On éprouvera de la même maniere les opérations qu'on fera pour les 4 unités du quotient.

On doit remarquer ici que chaque reste de division particuliere, doit toûjours être moindre que le diviseur; sans quoi le diviseur seroit contenu dans ce reste; & ce seroit une marque que l'on n'auroit pas écrit un nombre assez grand au quotient.

Lorsqu'on dit que le diviseur multiplié par le quotient, doit produire une quantité égale au dividende, on suppose que le dividende est divisé sans aucun reste: mais si la division a un reste, on ajoûtera ce reste au produit de la multiplication du diviseur par le quotient; & la somme qui en résultera, sera égale au dividende, si l'on a bien opéré.

2°. On peut encore éprouver la division par la division elle-même, en divisant le dividende par le quotient: car si l'on trouve, pour le nouveau quotient, une quantité égale au premier diviseur; ce sera une marque que la premiere division a été bien faite.

REMARQUE.

§ I Avant d'éprouver si une division est bonne, par la multiplication du diviseur par le quotient; il est bon d'examiner si le quotient a autant de chiffres qu'il doit en avoir; ce qui est facile à reconnoître.

1°. Si pour trouver le premier chiffre, c'est-à-dire le chiffre du plus haut degré du quotient, il a fallu prendre un chiffre de plus dans le dividende qu'il n'y en a dans le diviseur; le nombre des chiffres du quotient sera égal à la différence qu'il y aura entre le nombre des chiffres du dividende & celui des chiffres du diviseur.

Par exemple, si l'on propose de diviser 17328 par 24, dont le quotient sera 722 : comme les deux chiffres du diviseur 24, ne sont pas contenus dans les deux chiffres 17 de la gauche du dividende; il faudra prendre les trois chiffres 173 du dividende & les diviser par 24, pour trouver le premier chiffre 7 du quotient. Dans ce cas, pour un chiffre qu'il y a de plus dans le dividende particulier 173 dans que le diviseur 24, il vient un chiffre pour le quotient : mais comme il y a encore dans le dividende deux chiffres 28 ausquels on n'a point touché, qu'il faut diviser successivement ces deux chiffres avec les restes des divisions précédentes, & que chaque division particuliere donne un chiffre pour le quotient; il est clair qu'on aura pour le quotient un nombre de chiffres égal à la différence qu'il y aura entre le nombre des chiffres du dividende & le nombre des chiffres du diviseur.

2°. Si pour trouver le premier chiffre du quotient, il suffit de prendre autant de chiffres dans le dividende qu'il y en a dans le diviseur; le nombre des chiffres du quotient sera plus grand d'une unité, que la différence qu'il y aura entre le nombre des chiffres du dividende & le nombre des chiffres du diviseur.

Par exemple, si l'on propose de diviser 3456 par 24, dont le quotient est 144; comme les deux chiffres du diviseur 24, sont contenus dans les deux chiffres 34 du dividende; cette premiere division, où il n'y a point de différence entre le nombre des chiffres du dividende & le nombre des chiffres du diviseur, donnera un chiffre pour le quotient. Chacun des chiffres 56 qui sont de plus dans le dividende que dans le diviseur, & que l'on divisera successivement avec les restes des divisions, donnera encore un chiffre pour le quotient. Il y aura donc au quotient un nombre de chiffres plus grand d'une unité, que la différence qu'il y aura entre le nombre des chiffres du dividende & le nombre des chiffres du diviseur.

AUTRE PREUVE DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION APPELLÉE *Preuve par 9.*

On peut encore éprouver la multiplication & la division, par une opération très-simple appellée Preuve par 9.

Supposons qu'on ait multiplié 4872 par 863, & qu'on ait trouvé 4204536 pour le produit.

Pour en avoir la preuve, on additionnera les chiffres 4, 8, 7, 2, du multiplicande, comme s'ils ne comptoient que des unités simples; & ôtant tous les 9, on conservera le reste 3.

On additionnera de même les chiffres 8, 6, 3, du multiplicateur; & rejettant tous les 9, on ne gardera que le reste 8.

Ensuite on multipliera le reste 3 du multiplicande par le reste 8 du multiplicateur; ce qui produira 24 dont les deux chiffres additionnés ne font que 6.

Si ce reste est égal au reste de l'addition de tous les chiffres 4, 2, 0, 4, 5, 3, 6, du produit, après avoir supprimé tous les 9; on pourra présumer que la multiplication est juste: sinon ce sera une preuve qu'elle contient quelque erreur.

On éprouvera de même la division, en la regardant comme une multiplication qui a le diviseur pour multiplicande, *le quotient pour multiplicateur, & le dividende pour produit ; c'est à-dire que supposant l'addition faite & tous les 9 rejettés, on multipliera le reste du diviseur par le reste du quotient : & si, après avoir ajoûté au produit les chiffres du reste de la division lorsqu'il y en a, & avoir ôté tous les 9, le reste est égal au reste du dividende ; on présumera que la division est juste ; autrement, on sera sûr qu'elle est mal faite.*

Cette preuve est fondée sur les observations suivantes.

Si l'on retranche les 9 contenus dans un nombre exprimé par un chiffre significatif suivi de plusieurs zéros, le reste sera représenté par un chiffre égal au chiffre significatif de ce nombre.

Par exemple, si des nombres 4000, 800, 70; *on rejette les* 9, *les restes seront* 4, 8, 7.

Ainsi en rejettant les 9 d'un nombre quelconque, tel que 4872 *qui vaut* 4000 *plus* 800 *plus* 70 *plus* 2, *le reste sera* 4 *plus* 8 *plus* 7 *plus* 2 ; *& supprimant encore les* 9 *contenus dans ces quatre chiffres qui valent* 21 ; *il restera* 2 *plus* 1, *ou* 3.

Donc si l'on regarde tous les chiffres d'un nombre comme des chiffres d'unités simples, & qu'en les assemblant on supprime tous les 9 ; le reste sera égal à celui qu'on auroit en ôtant tous les 9 du nombre proposé.

Donc si l'on veut multiplier l'un par l'autre deux facteurs tels que 4872 & 863, *& que l'on veuille rejetter tous les 9 de leur produit, sans le faire ; on pourra retrancher tous les 9 des facteurs, (parce que la multiplication de ces 9 par un nombre quelconque, ne produira que des 9 qu'on veut rejetter) & ne prendre que leurs restes* 3 & 8 *qu'on multipliera ensemble, & dont le produit* 24 *sera réduit à* 6, *par la suppression des* 9.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE III.

Des Fractions.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fractions en général & de leur Réduction.

NOus avons dit que l'unité est une quantité arbitraire que l'on prend pour servir de mesure à d'autres grandeurs de même espéce, & que la collection de plusieurs unités s'appelle *nombre*.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que des nombres qui sont composés de plusieurs unités entieres, & que nous avons nommés par cette raison *nombres entiers*; mais il arrive souvent que l'unité qu'on a choisie, ou qui est établie par l'usage, est trop grande pour être contenue exactement une ou plusieurs fois dans la grandeur qu'on veut mesurer. Dans ce cas, l'on fait de nouvelles unités plus petites, qui puissent mesurer exactement la grandeur proposée, c'est-à-dire qui puissent être contenues en elle justement une fois, ou un certain nombre de fois.

Définitions.

52 Pour avoir des unités convenables à la grandeur qu'on veut mesurer ; l'on partage l'unité principale qu'on a choisie, en plusieurs parties égales que l'on nomme en général *unités fractionnaires*, & qui ont encore des noms particuliers dérivés du nombre des parties dans lesquelles l'unité principale a été divisée. Par exemple si l'on partage l'unité principale en 2 ou en 3 ou en 4 ou en 5 parties égales ; chaque partie se nomme 1 *demi* ou 1 *tiers* ou 1 *quart* ou 1 *cinquiéme* ; & ces parties sont des *unités fractionnaires*.

Une unité fractionnaire ou la collection de plusieurs unités fractionnaires égales, se nomme une *fraction* ou un *nombre rompu*.

Il faut donc deux nombres pour représenter un nombre rompu ; savoir un nombre pour marquer l'espéce de l'unité fractionnaire, c'est-à-dire pour faire voir en combien de parties égales l'unité principale a été rompue ; & un autre nombre pour faire voir combien de fois ces nouvelles unités sont prises.

Pour distinguer ces deux nombres, on les écrit l'un sous l'autre, avec une barre entre deux. L'on met au-dessous de la barre celui qui marque en combien de parties égales l'unité principale a été rompue, & qui désigne par conséquent l'espéce de l'*unité fractionnaire* ; & l'on écrit au-dessus de la barre, le nombre qui montre combien de fois l'on prend l'*unité fractionnaire*.

Par exemple, $\frac{7}{8}$ est un nombre rompu ou une fraction dont le nombre inférieur (8) signifie que l'unité principale a été divisé en 8 parties égales, & que chaque partie est par conséquent 1 *huitiéme* de l'unité principale ; & le nombre supérieur (7) marque que l'on prend 7 de ces nouvelles unités ; en sorte que la fraction $\frac{7}{8}$ signifie 7 *huitiémes* de l'unité ou de la quantité que l'on a prise pour l'unité.

Comme le nombre inférieur d'une fraction donne la dénomination à l'*unité fractionnaire*, on le nomme *dénominateur*; & parce que le nombre supérieur marque le nombre que l'on prend de ces nouvelles unités, on l'appelle *numérateur*. Ainsi dans la fraction $\frac{7}{8}$, le nombre inférieur (8) qui signifie *huitiémes*, est le *dénominateur*; & le nombre supérieur (7) qui marque que l'on prend 7 de ces unités nommées *huitiémes*, est le *numérateur*.

Le numérateur & le dénominateur d'une fraction, se nomment les deux *termes* de cette fraction; le numérateur s'appelle le *premier terme*, & le dénominateur s'appelle le *second terme*.

On distingue deux sortes de nombres rompus; les *nombres rompus abstraits*, & les *nombres rompus concrets*.

Les nombres rompus tels que $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, qui signifient 1 *quart de fois*, 2 *cinquiémes de fois*, 5 *sixiémes de fois*, sont nommés *abstraits*, ou *absolus*, ou *vagues*, tant qu'ils ne sont appliqués à nombrer aucune espéce de chose.

Les nombres rompus que l'on applique à nombrer les parties de quelque chose, sont nommés des *nombres rompus concrets*. Par exemple $\frac{1}{4}$ *écu*, $\frac{2}{5}$ *toise*, $\frac{5}{6}$ *heure*, qui signifient *un quart d'écu*, *deux cinquiémes de toise*, *cinq sixiémes d'heure*, sont des *nombres rompus concrets*.

Puisque les nombres rompus abstraits $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, qui ont pour unités propres des parties de l'unité abstraite, signifient 1 *quart de fois*, 2 *cinquiémes de fois*, 5 *sixiémes de fois*; & que les concrets $\frac{1}{4}$ *écu*, $\frac{2}{5}$ *toise*, $\frac{5}{6}$ *heure*, qui ont pour unités propres des parties d'unités concrétes, signifient 1 *quart d'écu*, 2 *cinquiémes de toise*, 5 *sixiémes d'heure* : il paroît évident que tous les nombres rompus, soit abstraits, soit concrets, peuvent être regardés comme des espéces de nombres entiers concrets qui ont pour unités principales & spécifiques, leurs unités fractionnaires propres. Cette façon de considérer les fractions, soit abstraites, sont concrétes, peut être très-commode & très-propre à faciliter l'intelligence de la théorie des fractions.

COROLLAIRE PREMIER.

53 On peut encore considérer une fraction comme le quotient d'une division, en prenant son numérateur pour le dividende & son dénominateur pour le diviseur. Par exemple, la fraction $\frac{7}{8}$ peut être regardé comme le quotient de 7 divisé par 8.

Car diviser 7 par 8, c'est prendre la huitiéme partie de 7. Mais pour prendre la huitiéme partie de 7, il faut prendre la huitiéme partie de chacune des unités qui composent 7 : & comme chaque unité donnera 1 huitiéme, pour sa huitiéme partie ; 7 unités donneront 7 huitiémes, c'est-à-dire la fraction $\frac{7}{8}$, pour leur huitiéme partie. Ainsi la fraction $\frac{7}{8}$ est le quotient de 7 divisé par 8.

COROLLAIRE II.

54 Comme il est évident que l'on ne change point un nombre en le multipliant & le divisant par une même quantité ; puisqu'on le rend d'autant moindre par la division, qu'on le rend plus grand par la multiplication ; il est clair que l'on pourra toûjours convertir un nombre entier en une fraction, en le multipliant par un nombre quelconque pour en faire un numérateur, & en lui donnant ce même nombre pour dénominateur.

COROLLAIRE III.

55 Puisqu'une fraction est égale au quotient de la division de son numérateur par son dénominateur ; il est clair qu'elle est égale à l'unité entiere, lorsque son numérateur est égal à son dénominateur ; car le dénominateur sera contenu une fois dans son numérateur.

COROLLAIRE IV.

56 Une fraction eſt le quotient de la diviſion de ſon numérateur par ſon dénominateur (No. 53.). Mais (No. 33.) en multipliant ou en diviſant par une même quantité le dividende & le diviſeur d'une diviſion, l'on ne change rien à la valeur du quotient. Donc ſi l'on multiplie ou ſi l'on diviſe par une même quantité le numérateur & le dénominateur d'une fraction, la fraction ne changera point de valeur.

Si l'on a, par exemple, une fraction $\frac{4}{5}$, & qu'on mulplie le numérateur 4 & le dénominateur 5 par 3 ou par 4, on aura une nouvelle fraction $\frac{12}{15}$ ou $\frac{16}{20}$ qui vaudra autant que la premiere $\frac{4}{5}$.

Et réciproquement, ſi l'on diviſe par un même nombre par exemple par 3, le numérateur & le dénominateur d'une fraction $\frac{12}{15}$, l'on aura une nouvelle fraction $\frac{4}{5}$ qui ſera égale à la premiere $\frac{12}{15}$.

57 *En diviſant le numérateur & le dénominateur d'une fraction par une même quantité, on la rend plus ſimple & d'autant plus ſimple que la quantité par laquelle on diviſe eſt plus grande. Enfin lorſque les deux termes d'une fraction ſont diviſés par le plus grand diviſeur commun, on dit que la fraction dont les deux termes ne peuvent plus être diviſés par une même quantité, eſt réduite à ſes moindres termes.*

PROBLÊME.

58 *Réduire une fraction à ſes moindres termes, ſans en changer la valeur.*

On diviſera le plus grand terme par le moindre; & ſi la diviſion ſe fait ſans reſte, le moindre terme ſera évidemment le plus grand diviſeur commun des deux termes de la fraction, dont le moindre terme ſera réduit à l'unité.

Si la diviſion ne ſe fait pas ſans reſte ; on diviſera le moindre terme, par le reſte ; & ſi cette diviſion ſe fait ſans reſte, le reſte de la premiere diviſion ſera le plus grand diviſeur commun des deux termes de la fraction.

Si cette ſeconde diviſion ne ſe fait pas ſans reſte ; l'on diviſera le premier reſte par le deuxiéme ; puis on diviſera le ſecond reſte par le troiſiéme, & toûjours de même juſqu'à ce que l'on parvienne à une diviſion ſans reſte : & alors le dernier diviſeur ſera le plus grand diviſeur commun des deux termes de la fraction. Ainſi en diviſant les deux termes par ce dernier diviſeur, l'on réduira la fraction à ſes moindres termes. Mais ſi l'on ne parvient point à faire une diviſion ſans reſte, ou ſi l'on parvient à un reſte qui ſoit l'unité ; ce ſera une marque que la fraction eſt exprimée par ſes plus ſimples termes, & qu'elle n'eſt pas réductible à des termes plus ſimples.

Par exemple, ſi l'on propoſe de réduire à ſes moindres termes la fraction $\frac{2016}{5796}$.

1°. L'on diviſera le plus grand terme 5796 par le moindre 2016. La diviſion étant faite, il reſtera 1764.

2°. L'on diviſera 2016 par le reſte 1764 ; & ſans faire aucune attention au quotient, l'on ne prendra que le reſte 252.

3°. L'on diviſera le premier reſte 1764 par le ſecond reſte 252 ; & comme la diviſion ſe fera exactement, ce dernier diviſeur 252 ſera le plus grand diviſeur commun des deux termes de la fraction $\frac{2016}{5796}$. Ainſi diviſant les deux termes de cette fraction par 252, l'on aura une nouvelle fraction $\frac{8}{23}$ qui ne pourra pas avoir de plus ſimples termes, & qui aura la même valeur que la fraction propoſée $\frac{2016}{5795}$. Voici la démonſtration de cette opération.

1°. En diviſant par 2016 le dénominateur de la fraction $\frac{2016}{5796}$; on trouve que le diviſeur y eſt contenu 2 fois avec un reſte 1764. Ainſi le dénominateur 5796 eſt compoſé de deux parties 4032 & 1764, & la fraction $\frac{2016}{5796}$ peut avoir cette forme $\frac{2016}{2 \times 2016 \text{ plus } 1764}$. Donc tout nombre qui ſera le plus grand diviſeur exact des deux termes de la fraction $\frac{2016}{5796}$, doit être auſſi le plus grand diviſeur commun de 2×2016 & de 1764 qui ſont les deux parties du dénominateur, & doit par conſéquent être auſſi le plus grand diviſeur de 2016 & de 1764.

2°. Diviſant 2016 par 1764, on trouvera qu'il y eſt contenu une fois avec 252 de reſte, c'eſt-à-dire que 2016 eſt compoſé de deux parties, de 1764 & de 252. Ainſi le nombre qui ſera le plus grand diviſeur de 2016 & de 1764 ſera auſſi un diviſeur de 252. Mais 252 eſt le plus grand diviſeur de 252, & il diviſe exactement 1764 : donc il diviſera auſſi 2016 qui eſt la ſomme de 252 & de 1764, & ſera auſſi un diviſeur de 2 fois 2016, c'eſt-à-dire de 2×2016.

Le nombre 252 étant un diviſeur de 2×2016 & de 1764, ſera auſſi un diviſeur de leur ſomme 5796, & diviſera par conſéquent le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{2016}{5796}$.

De plus, 252 eſt le plus grand diviſeur commun de 2016 & de 5796 ; puiſque le diviſeur commun de ces deux nombres doit être un diviſeur de 252, & que 252 eſt le plus grand diviſeur de 252.

REMARQUE.

Il y a encore une maniere de réduire une fraction à ſes moindres termes, qui eſt plus facile & ſouvent plus commode que la précédente.

1°. Si le numérateur & le dénominateur d'une fraction ſont des nombres pairs, on les diviſera tous les deux par 2, jusqu'à ce que l'un de ces deux termes soit devenu impair. Si les deux termes finissent par 5, on pourra aussi les diviser par 5, jusqu'à ce que l'un des deux ne finisse plus par 5. Les deux termes de la fraction n'étant point pairs & ne finissant point par 5, on tentera de les diviser par 3, jusqu'à ce que l'un des deux ne soit plus divisible par 3. Ensuite on tentera de diviser les deux nouveaux termes par 7, puis par 11, puis par 13, par 17, 19, 23; & toûjours ainsi de suite par tous les nombres qui n'ont point d'autres diviseurs qu'eux-mêmes & l'unité. Enfin lorsque l'un des termes ne sera plus divisible, ou que les deux termes ne pourront plus être divisés par une même quantité, la fraction sera réduite à ses moindres termes.

Par exemple, si l'on propose de réduire la fraction $\frac{2016}{3780}$ à ses moindres termes.

On divisera les deux termes qui sont pairs par 2; & l'on aura $\frac{1008}{1890}$.

On divisera encore par 2 les deux nouveaux termes qui sont pairs, & l'on aura $\frac{504}{945}$.

Puis divisant ces deux termes par 3, l'on aura $\frac{168}{315}$.

Divisant encore par 3, l'on aura $\frac{56}{105}$.

Divisant ensuite par 7, on trouvera $\frac{8}{15}$.

Et cette fraction $\frac{8}{15}$ sera enfin la fraction réduite, parce que son numérateur 8 ne peut être divisé que par 2, ou par un multiple de 2, & que son dénominateur 15 ne peut pas être divisé par 2.

Si les deux termes de la fraction ont des zéros à leur droite, il est évident qu'on pourra en effacer un pareil nombre dans ces deux termes; parce que chaque terme se trouvera divisé par 10 chaque fois que l'on supprimera un zéro.

Supposons qu'on veut réduire à ses moindres termes la fraction $\frac{3150}{11400}$.

On

On divisera d'abord les deux termes par 10, en supprimant dans chacun d'eux le zéro qui occupe la place des unités simples; & l'on aura $\frac{315}{1140}$.

Puis, comme le nouveau numérateur finit par 5; & qu'il est par conséquent divisible par 5, aussi bien que le nouveau dénominateur qui finit par un zéro, l'on divisera par 5; & l'on aura $\frac{63}{228}$.

Ensuite on divisera par 3; & l'on aura $\frac{21}{76}$.

Et cette fraction $\frac{21}{76}$ sera réduite à ses moindres termes; parce que le numérateur 21 n'est divisible que par 7 & par 3, & que le dénominateur 76 n'est divisible ni par l'un ni par l'autre.

PROBLÊME.

59 *Réduire deux fractions au même dénominateur, sans rien changer à la valeur de ces fractions.*

On multipliera le numérateur & le dénominateur de la premiére fraction par le dénominateur de la seconde, & l'on multipliera le numérateur & le dénominateur de la seconde par le dénominateur de la premiére. Par cette opération l'on aura (No. 56.) deux autres fractions de même valeur que les deux premiéres, & qui auront un même dénominateur; puisque le dénominateur de chacune d'elles, sera le produit des dénominateurs des deux premiéres fractions.

Par exemple, si l'on veut réduire à la même dénomination les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{7}$.

1°. L'on multipliera les deux termes 2 & 3 de la 1ere fraction $\frac{2}{3}$, par le dénominateur 7 de la 2e; & l'on aura une nouvelle fraction $\frac{14}{21}$ égale à la 1ere $\frac{2}{3}$.

2°. L'on multipliera les deux termes 5 & 7 de la 2e fraction $\frac{5}{7}$, par le dénominateur 3 de la 1ere; & l'on aura une nouvelle fraction $\frac{15}{21}$ égale à la 2e $\frac{5}{7}$.

Par ce moyen les deux fractions proposées $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{7}$, sans changer de valeur, seront réduites aux deux fractions $\frac{14}{21}$ & $\frac{15}{21}$, qui ont chacune pour dénominateur le produit des dénominateurs 3 & 7 des deux fractions proposées.

PROBLÊME.

60 *Réduire à un même dénominateur tant de fractions qu'on voudra.*

1°. On multipliera ensemble tous les dénominateurs des fractions, & le produit sera le dénominateur que doivent avoir toutes les fractions réduites à la même dénomination.

2°. Pour avoir le numérateur de la 1^ere^ des fractions qu'on veut réduire à la même dénomination ; l'on multipliera ensemble les dénominateurs de toutes les fractions, excepté celui de la premiére ; puis on multipliera le produit par le numérateur de la 1^ere^, & l'on aura le numérateur de cette 1^ere^ fraction.

Si l'on vouloit avoir le numérateur de la 2^e^ fraction réduite ; l'on multiplieroit ensemble tous les dénominateurs, excepté celui de la 2^e^ ; puis on multiplieroit le produit par le numérateur de la même 2^e^ fraction ; & le nouveau produit seroit le numérateur de la 2^e^ fraction réduite : & ainsi des autres.

Par exemple, si l'on propose de réduire à la même dénomination les quatre fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; l'on multipliera ensemble tous leurs dénominateurs 2, 3, 5, 7 ; & le produit 210 sera le nouveau dénominateur qui doit être commun à toutes les fractions.

Pour avoir le numérateur de la 1^ere^ des nouvelles fractions ; on multipliera ensemble tous les dénominateurs, excepté le premier (2), c'est-à-dire qu'on multipliera ensemble les trois dénominateurs 3, 5, 7 ; puis on multipliera leur produit 105 par le numérateur 1 de la 1^ere^ fraction, & le produit 105 sera le numérateur de la 1^ere^ fraction qui deviendra $\frac{105}{210}$.

Pour avoir le numérateur de la 2^e^. nouvelle fraction; l'on multipliera ensemble tous les dénominateurs, excepté le second (3), c'est-à-dire qu'on multipliera ensemble les trois dénominateurs 2, 5, 7, qui produiront 70; puis on multipliera 70 par le numérateur 2 de la 2^e^. fraction proposée, & le produit 140 sera le numérateur de la nouvelle seconde fraction $\frac{140}{210}$.

On trouvera de même les numérateurs des deux autres fractions qui seront $\frac{168}{210}$ & $\frac{180}{210}$. Ainsi les quatre fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, étant réduites à la même dénomination, deviendront celles-ci $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$.

REMARQUE.

61 Par ces deux Problêmes on donnera même dénominateur à tant de fractions qu'on voudra, sans en changer la valeur; mais ces fractions ne seront pas toujours réduites aux moindres termes qu'elles peuvent avoir, en conservant un dénominateur commun.

1°. Si parmi les fractions réduites à leurs moindres termes, telles que celles-ci $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; il ne s'en trouve pas plusieurs dont les dénominateurs ayent un diviseur commun: lorque ces fractions seront réduites à la même dénomination; les nouvelles fractions $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$, qu'on aura, ne pourront point être réduites à de moindres termes, en conservant un dénominateur commun.

2°. Si parmi les fractions qu'on suppose réduites à leurs moindres termes, il s'en trouve plusieurs dont les dénominateurs ayent des diviseurs communs: lorsque toutes ces fractions auront été réduites à la même dénomination; on pourra les réduire à de moindres termes, & leur conserver un dénominateur commun, en divisant leurs numérateurs & le dénominateur commun, par les communs diviseurs autant de fois moins une, qu'il y aura dans les premieres fractions, de dénominateurs auxquels ces diviſeurs feront communs. Mais on doit remarquer que s'il y avoit des diviſeurs composés, il faudroit leur préférer, pour diviſer, leurs facteurs communs plus ſimples, dans le cas où ils ſeroient communs à un plus grand nombre de dénominateurs. En voici des exemples.

Si l'on a ces quatre fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ réduites à leurs plus ſimples termes, parmi leſquelles il y en trois dont les dénominateurs 2, 4, 6, ſont diviſibles par 2 : lorſque toutes ces fractions feront réduites à la même dénomination, & feront devenues $\frac{168}{336}, \frac{84}{336}, \frac{56}{336}, \frac{48}{336}$; on pourra diviſer le numérateur de chacune d'elles & le dénominateur commun, deux fois de ſuite par 2, ce qui les réduira à celles-ci $\frac{42}{84}, \frac{21}{84}, \frac{14}{84}, \frac{12}{84}$.

Si l'on propoſe ces quatre fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ que l'on peut mettre ſous cette forme $\frac{1}{2}, \frac{1}{2\times2}, \frac{1}{2\times3}, \frac{1}{2\times2\times3}$: quoique les dénominateurs 2×2, $2\times2\times3$ de deux d'entr'elles ſoient diviſibles par le diviſeur composé 2×2 ; on ne fera point uſage de ce diviſeur composé ; parce que le diviſeur ſimple 2 eſt commun à un plus grand nombre de dénominateurs, que le composé 2×2 : & l'on remarquera que

1°. Les quatre dénominateurs 2, 2×2, 2×3, $2\times2\times3$ peuvent être diviſés par 2, & réduits à 1, 2, 3, 2×3.

2°. Ces quatre termes réduits par la diviſion, en contiennent encore deux ſavoir 2 & 2×3 qui peuvent encore être diviſés par 2 ; enſorte que ces quatre termes ſont réductibles à 1, 1, 3, 3.

3°. Enfin ces quatre nouveaux termes, en renferment encore deux, ſavoir 3 & 3 qui ſont diviſibles par 3.

Ainſi lorſque les quatre fractions propoſées $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ feront réduites à la même dénomination, & feront devenues $\frac{288}{576}, \frac{144}{576}, \frac{96}{576}, \frac{48}{576}$; on les réduira à leurs moindres termes & on leur conſervera un dénominateur commun, en divisant leurs numérateurs & dénominateurs, trois fois de suite par 2, ou une fois seulement par 8, ensuite une fois par 2, & enfin une fois par 3, ce qui réduira ces quatre fractions à celles-ci $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{12}$ que l'on ne peut plus réduire à de moindres termes, en leur conservant un dénominateur commun.

Les fractions qu'on a proposé de réduire à la même dénomination, étoient toutes réduites à leurs moindres termes. Lorsqu'on en proposera qui ne seront pas réduites à leurs moindres termes, il sera toûjours à propos de les y réduire avant de leur donner un même dénominateur.

PROBLÉME.

62 *Trouver les entiers qui sont dans les fractions.*

Les opérations qu'on fera sur les fractions, en feront souvent résulter d'autres fractions dont les numérateurs seront plus grands que leurs dénominateurs. Et comme une fraction est égale à l'unité entiére, lorsque ses deux termes sont égaux; les fractions contiendront autant d'unités entiéres, que les numérateurs contiendront de fois leurs dénominateurs.

Donc pour trouver le nombre des unités entiéres contenues dans une fraction; il faudra diviser véritablement le numérateur par le dénominateur, & le quotient de cette division sera le nombre des unités entiéres contenues dans la fraction. A l'égard du reste de la division s'il y en a, on en fera le numérateur d'une fraction qui aura le diviseur pour dénominateur.

Par exemple $\frac{18}{4}$ étant une fraction proposée; l'on divisera le numérateur 18 par le dénominateur 4, & l'on aura pour quotient 4 unités entiéres avec un reste 2; & ce reste étant divisé par le dénominateur 4, donnera la fraction $\frac{2}{4}$ qu'on réduira à $\frac{1}{2}$; ensorte que la fraction $\frac{18}{4}$ sera convertie en 4 unités & $\frac{1}{2}$.

CHAPITRE II.

De l'Addition & de la Soustraction des Fractions.

NOUS renfermons dans ce Chapitre l'addition & la soustraction des fractions ; parce que ces deux opérations demandent les mêmes préparations.

On ne peut ajoûter ensemble, ou soustraire véritablement les unes des autres, que des quantités qui sont composées d'unités de la même espéce. Ainsi les fractions ne peuvent être ajoûtées ensemble ou soustraites les unes des autres, que quand leurs unités fractionnaires sont les mêmes ; & pour cela il faut qu'elles ayent le même dénominateur.

PROBLÊME.

63 *Ajoûter ensemble plusieurs Fractions.*

1°. Si les fractions proposées ont un même dénominateur ; on aura leur somme, en faisant une nouvelle fraction de même dénominateur, qui aura pour numérateur, la somme de leurs numérateurs.

Par exemple, si l'on veut ajoûter ensemble les fractions $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$ qui ont le même dénominateur 7 ; on les regardera comme des nombres concrets, dont les unités propres sont des *septiémes ;* & l'on dira 3 *septiémes* & 4 *septiémes* font 7 *septiémes* qui avec 6 *septiémes* font 13 *septiémes* que l'on écrira ainsi, $\frac{13}{7}$: c'est-à-dire qu'on ajoûtera ensemble les trois numérateurs 3, 4, 6, & que leur somme 13 sera prise pour le numérateur d'une fraction à laquelle on donnera le dénominateur 7 commun à toutes les fractions ajoûtées ; & l'on aura la fraction $\frac{13}{7}$ pour la somme demandée.

2°. Si les fractions qu'il faut ajoûter ensemble n'ont pas le même dénominateur : on les réduira à la même dénomination (N°. 59 & 60.) ; puis on additionnera ces nouvelles fractions, comme il vient d'être dit.

Par exemple si l'on propose d'additionner les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; on les convertira en celles-ci $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$, qui ont un même dénominateur. Ensuite on ajoûtera ensemble leurs numérateurs 105, 140, 168, 180 ; & ayant appliqué à leur somme 593 le dénominateur 210, on aura une seule fraction $\frac{593}{210}$ égale à la somme des fractions $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{180}{210}$, qui sont égales aux quatre proposées.

De l'addition de plusieurs fractions, il résulte souvent une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur. Une telle fraction étant plus grande que l'unité principale, doit être réduite (N°. 62.) aux entiers qu'elle contient, & à une fraction qu'elle peut contenir de plus.

Par exemple nous venons de trouver que la somme des trois fractions $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$, étoit $\frac{13}{7}$ dont le numérateur 13 contient le dénominateur 7 une fois avec un reste 6 ; ainsi cette fraction $\frac{13}{7}$ peut être partagée en ces deux autres $\frac{7}{7}$ & $\frac{6}{7}$, & vaut par conséquent 1 & $\frac{6}{7}$.

PROBLÊME.

64 *Soustraire une fraction d'une autre fraction.*

1°. Si les fractions ont un même dénominateur, on les regardera comme des nombres concrets dont les unités propres sont égales ; & pour retrancher l'une de l'autre, il n'y aura qu'à retrancher le nombre des unités propres de l'une, du nombre des unités propres de l'autre.

Or les numérateurs des fractions expriment les nombres des unités propres qu'elles contiennent. Donc on aura le reste de la soustraction, en retranchant le numérateur de l'une du numérateur de l'autre, & en appliquant au reſte, le dénominateur commun aux deux fractions; parce que les unités reſtantes de la ſouſtraction doivent être de même eſpéce que celles du nombre dont on a ſouſtrait.

Par exemple ſi l'on veut retrancher $\frac{2}{9}$ de $\frac{8}{9}$; on retranchera 2 de 8, & il reſtera 6 qu'on prendra pour un numérateur auquel on appliquera le même dénominateur 9; & l'on aura, pour le reſte de la ſouſtraction, la fraction $\frac{6}{9}$ qui peut être réduite à la fraction $\frac{2}{3}$.

2°. Si les fractions propoſées ont différens dénominateurs; on les réduira à la même dénomination. Enſuite on ſouſtraira l'une de l'autre, comme il a été dit dans l'article premier.

Par exemple ſi l'on veut ſouſtraire $\frac{2}{3}$ de $\frac{6}{7}$; on réduira d'abord ces deux fractions à la même dénomination, & elles deviendront $\frac{14}{21}$ & $\frac{18}{21}$. Alors ſouſtrayant le numérateur 14 du numérateur 18, il reſtera 4; & appliquant à ce reſte, le dénominateur 21; l'on aura $\frac{4}{21}$ pour le reſte de la ſouſtraction.

CHAPITRE III.

De la Multiplication & de la Diviſion des Fractions.

Les multiplications & diviſions des fractions par des fractions, ne ſont pas de ſimples multiplications ni de ſimples diviſions: ce ſont des opérations compoſées de la multiplication & de la diviſion des fractions par des nombres entiers, comme on le verra dans la ſuite de ce Chapitre. Ainſi avant de traiter de la multiplication & de la diviſion des fractions par des fractions; nous devons expliquer la multiplication & la diviſion des fractions, par des nombres entiers.

PROBLÈME.

65 *Multiplier une fraction par un nombre entier.*

Multiplier une fraction par un nombre entier, par exemple par 2, ou par 3, ou par 4, &c, c'est la répéter 2 fois, ou 3 fois, ou 4 fois, &c, ou en général autant de fois que le multiplicateur contient l'unité : ainsi c'est faire une fraction 2 fois ou 3 fois ou 4 fois &c aussi grande que la fraction proposée. Or on peut faire cette opération en deux maniéres ; savoir en opérant sur le numérateur seulement, ou en opérant sur le dénominateur seulement.

1°. Si l'on veut opérer sur le numérateur seulement ; il faudra multiplier le numérateur de la fraction proposée, par le nombre entier qui doit servir de multiplicateur ; & appliquant à ce produit le dénominateur de la fraction proposée, on aura une nouvelle fraction qui sera le produit demandé : ce que l'on comprendra aisément par l'exemple suivant.

Pour multiplier la fraction $\frac{2}{9}$ par 4 ; on regardera le multiplicande $\frac{2}{9}$ comme un nombre concret (2 *neuviémes*) qu'on doit répéter 4 fois ; ainsi l'on dira 4 fois 2 *neuviémes* font 8 *neuviémes*, que l'on écrira ainsi $\frac{8}{9}$: c'est-à-dire que l'on multipliera le numérateur 2 par 4, & que l'on aura le nombre 8 auquel on appliquera le même dénominateur 9 ; ce qui donnera $\frac{8}{9}$ pour le produit demandé.

2°. Si l'on ne veut opérer que sur le dénominateur ; on divisera ce dénominateur par le multiplicateur proposé ; & prenant le quotient pour le dénominateur d'une nouvelle fraction à laquelle on donnera le numérateur de la fraction qui doit être multipliée ; la nouvelle fraction qui résultera de cette opération, sera encore le produit demandé, comme on va le prouver.

Par exemple si l'on doit multiplier $\frac{5}{12}$ par 2 ; on divisera le dénominateur 12 par 2, & l'on aura une nouvelle fraction $\frac{5}{6}$ pour le produit de $\frac{5}{12}$ multiplié par 2.

Car l'unité principale étant divisée en deux fois plus de parties dans la fraction $\frac{5}{12}$ que dans la fraction $\frac{5}{6}$, les unités fractionnaires de la fraction $\frac{5}{6}$ seront doubles de celles de la fraction $\frac{5}{12}$. Et comme ces fractions ont le même nombre de parties, celle $\frac{5}{6}$ dont les parties sont doubles, sera double de l'autre $\frac{5}{12}$.

Comme il est toûjours possible de multiplier un nombre par un autre, & qu'on ne peut pas toûjours diviser un nombre par un autre sans reste ; il sera toûjours possible de faire la multiplication d'une fraction par un nombre entier, en multipliant son numérateur par ce nombre entier ; mais on ne pourra pas toûjours multiplier une fraction par un nombre entier, en divisant son dénominateur par ce nombre entier.

PROBLÉME.

66 *Diviser une fraction par un nombre entier.*

Diviser une fraction par un nombre entier, par exemple par 2, ou par 3, ou par 4, &c ; c'est faire une nouvelle fraction qui soit 2 fois ou 3 fois ou 4 fois &c plus petite que la fraction qu'on veut diviser. Or on peut faire cette opération en deux maniéres différentes ; en opérant sur le numérateur seulement, ou en opérant sur le seul dénominateur.

1°. Si l'on veut opérer sur le numérateur seulement : il faudra diviser le numérateur de la fraction proposée, par le nombre entier qui doit servir de diviseur ; & donnant au quotient le dénominateur de la fraction proposée, l'on aura une nouvelle fraction qui sera le quotient demandé. Un exemple suffira pour démontrer cette opération.

Supposons qu'on ait la fraction $\frac{8}{9}$ à diviser par 4, on regardera le dividende $\frac{8}{9}$, comme un nombre concret qui représente 8 *neuviémes*; & pour le diviser par 4, on dira le quart de 8 *neuviémes*, est évidemment 2 *neuviémes* que l'on écrit ainsi $\frac{2}{9}$. Donc la fraction $\frac{2}{9}$ que l'on trouve, en divisant par 4 le numérateur de $\frac{8}{9}$, est évidemment le quotient de la fraction $\frac{8}{9}$ divisée par le nombre entier 4.

2°. Si l'on ne veut opérer que sur le seul dénominateur; on multipliera le dénominateur de la fraction par le diviseur proposé: & prenant le produit pour le dénominateur d'une nouvelle fraction à laquelle on donnera le numérateur de la fraction proposée; la nouvelle fraction qu'on formera sera encore le quotient demandé.

Par exemple si l'on propose de diviser la fraction $\frac{6}{7}$ par 4; on ne touchera point à son numérateur 6, & l'on multipliera seulement son dénominateur 7 par 4; ce qui donnera la fraction $\frac{6}{28}$, pour le quotient de la fraction $\frac{6}{7}$ divisée par 4.

Car l'unité principale étant divisée en quatre fois plus de parties dans la fraction $\frac{6}{28}$ que dans la fraction $\frac{6}{7}$; les unités fractionnaires de la fraction $\frac{6}{28}$ ne seront que des quatriémes parties de celles de la fraction $\frac{6}{7}$. Et comme ces deux fractions ont le même nombre de parties; celle $\frac{6}{28}$ dont les parties sont quatre fois plus petites, sera contenue quatre fois dans l'autre $\frac{6}{7}$, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'unités dans le diviseur 4.

Comme on peut toûjours multiplier le dénominateur d'une fraction par un nombre entier, & que souvent il n'est pas possible de diviser exactement son numérateur sans reste: il est clair qu'on pourra toûjours diviser une fraction en multipliant son dénominateur, & qu'il ne sera pas toûjours possible de la diviser en divisant son numérateur.

PROBLÊME.

67 *Multiplier par une fraction.*

Multiplier par une fraction, c'eſt multiplier par ſon numérateur, & diviſer enſuite par ſon dénominateur.

Pour le démontrer, ſuppoſons qu'on ait à multiplier une grandeur quelconque par la fraction $\frac{2}{3}$. Si au lieu de multiplier par la fraction $\frac{2}{3}$, on multiplie par ſon numérateur 2; l'on aura un produit triple de celui qu'on doit avoir, parce qu'on aura multiplié par un nombre triple de celui $\frac{2}{3}$ par lequel on devoit multiplier. Ainſi il faudra prendre le tiers de ce produit, c'eſt-à-dire le diviſer par le dénominateur 3, pour le réduire à la juſte valeur qu'il doit avoir.

Donc multiplier par une fraction, c'eſt multiplier par ſon numérateur, & diviſer enſuite par ſon dénominateur.

Corollaire.

68 Donc la multiplication par une fraction dont le numérateur eſt l'unité, eſt une véritable diviſion par le dénominateur de cette fraction. Par exemple, les multiplications par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c, ſont de véritables diviſions, par les dénominateurs 2, 3, 4 &c de ces fractions.

Car pour multiplier par $\frac{1}{2}$ ou par $\frac{1}{3}$ ou par $\frac{1}{4}$, il faut (N° 67.) multiplier d'abord par l'unité, ce qui ne change rien à la quantité multipliée; & il faut diviſer enſuite par 2 ou par 3 ou par 4.

PROBLÊME.

69 *Multiplier une fraction par une fraction.*

Ce problême peut être réſolu en quatre maniéres dont les trois premiéres peuvent avoir lieu en certains cas, & dont la derniére eſt toûjours poſſible.

1°. On peut multiplier une fraction par une fraction, en opérant seulement sur le numérateur de la fraction multiplicande, & par conséquent sans rien changer au dénominateur de cette fraction.

2°. On peut multiplier une fraction par une fraction, en opérant seulement sur le dénominateur de la premiére, ce qui ne change rien au numérateur de cette fraction.

3°. On peut multiplier une fraction par une fraction, en opérant sur les deux termes de la fraction multiplicande, par voie de division.

4°. On peut multiplier une fraction par une fraction, en opérant sur les deux termes de la premiére, par voie de multiplication.

Ces quatre maniéres de multiplier une fraction par une fraction, vont être expliquées & démontrées dans les quatre articles suivans.

I.

Multiplier une fraction par une fraction, en opérant seulement sur le numérateur de la fraction que l'on considére comme multiplicande.

On multipliera le numérateur de la fraction multiplicande par le numérateur de la fraction multiplicateur; & ayant divisé ce produit par le dénominateur de la fraction multiplicateur, on donnera au quotient résultant, le dénominateur du multiplicande; & l'on aura une fraction égale au produit demandé, ce que l'on peut aisément expliquer & démontrer dans un exemple.

Supposons qu'on ait $\frac{9}{10}$ à multiplier par $\frac{2}{3}$,

La fraction $\frac{9}{10}$ étant considérée comme un nombre concret 9 *dixiémes*, on la multipliera d'abord par le numérateur 2 de la fraction multiplicateur $\frac{2}{3}$, en disant 2 fois 9 *dixiémes* font 18 *dixiémes* ou $\frac{18}{10}$. Mais ayant multiplié par 2, on a multiplié par un nombre 3 fois trop grand; puisque l'on ne devoit multiplier que par $\frac{2}{3}$ qui est le tiers de 2. Donc le produit 18 *dixièmes* qu'on a trouvé, est aussi 3 fois trop grand; ainsi il en faudra prendre le tiers, ou le diviser par 3; & l'on aura 6 *dixièmes* ou $\frac{6}{10}$, pour le véritable produit de $\frac{9}{10}$ multiplié par $\frac{2}{3}$.

Si l'on examine les opérations qu'on a faites pour trouver le produit $\frac{6}{10}$ résultant de la multiplication de $\frac{9}{10}$ par $\frac{2}{3}$; on remarquera que le dénominateur du produit $\frac{6}{10}$ est le même que celui du multiplicande $\frac{9}{10}$; & que pour avoir le numérateur 6 de ce produit, l'on a multiplié le numérateur de la fraction multiplicande $\frac{9}{10}$ par le numérateur 2 de la fraction multiplicateur $\frac{2}{3}$, ce qui a produit 18; & qu'on a divisé ce produit 18 par le dénominateur 3 de la même fraction multiplicateur, ce qui a donné 6 pour le numérateur du produit $\frac{6}{10}$. *C. Q. F. D.*

II.

Multiplier une fraction par une fraction en opérant seulement sur le dénominateur de la fraction que l'on considére comme multiplicande.

On divisera le dénominateur de la fraction considérée comme multiplicande, par le numérateur de la fraction considérée comme multiplicateur; puis on multipliera le quotient par le dénominateur du multiplicateur; & prenant le produit pour le dénominateur d'une fraction à laquelle on donnera le numérateur du multiplicande; cette fraction sera le produit des deux fractions qu'on avoit à multiplier l'une par l'autre; comme on va le prouver.

Supposons qu'ont ait à multiplier la fraction $\frac{9}{10}$ par celle $\frac{2}{3}$: en divisant le dénominateur 10 de la premiére par le numérateur 2 de la seconde, la premiére fraction $\frac{9}{10}$ sera multipliée par 2; (N°. 65.); ainsi la fraction résultante $\frac{9}{5}$ sera triple de celle qu'on demande, puisqu'on aura multiplié par 2 qui est triple de la fraction $\frac{2}{3}$ par laquelle on devoit multiplier; il faudra donc diviser ce produit $\frac{9}{5}$ par 3 qui est le dénominateur de la fraction $\frac{2}{3}$. Or en multipliant par 3 le dénominateur du produit $\frac{9}{5}$, ce produit sera divisé par 3 (N°. 66.). Donc la fraction résultante $\frac{9}{15}$ sera le véritable produit de la fraction $\frac{9}{10}$ multipliée par $\frac{2}{3}$. *C. Q. F. D.*

III.

Multiplier une fraction par une fraction, en opérant par voie de division, sur les deux termes de la fraction que l'on considére comme multiplicande.

On divisera le dénominateur de la premiére par le numérateur de la 2e. & le numérateur de la premiére par le dénominateur de la seconde; & de ces deux opérations, il résultera une fraction égale au produit qu'on demande.

Pour le prouver, supposons qu'on ait $\frac{9}{10}$ à multiplier par $\frac{2}{3}$: on divisera d'abord le dénominateur 10 de la 1ere, par le numérateur 2 de la 2e, & par cette opération la fraction $\frac{9}{10}$ sera multipliée par 2 (N°.65.). Mais le produit $\frac{9}{5}$ sera triple de celui qu'on demande; puisque le nombre 2 par lequel on aura multiplié, est triple de celui $\frac{2}{3}$ par lequel on devoit multiplier. Ce produit $\frac{9}{5}$ que l'on regardera comme un nombre concret 9 *cinquiémes* doit donc être divisé par 3; ainsi l'on dira le tiers de 9 *cinquiémes* est 3 *cinquiémes* ou $\frac{3}{5}$, & cette fraction $\frac{3}{5}$ sera le produit demandé. Or il est clair que par les opérations qu'on a faites pour avoir le produit $\frac{3}{5}$, on a divisé le dénominateur de la fraction multiplicande par le numérateur de la fraction multiplicateur, & le numérateur de la 1ere, par le dénominateur de la 2e. *C. Q. F. D.*

IV.

Multiplier une fraction par une fraction, en opérant par voie de multiplication, sur les deux termes de la fraction considérée comme multiplicande.

On multipliera le numérateur de la premiére par celui de la seconde, & le dénominateur de la premiére par celui de la seconde : & la fraction résultante qui aura pour numérateur, le produit des deux numérateurs, & pour dénominateur le produit des deux dénominateurs, sera le produit demandé. En voici la preuve.

Supposons qu'on ait $\frac{9}{10}$ à multiplier par $\frac{2}{3}$: si l'on considére la fraction multiplicande $\frac{9}{10}$ comme un nombre concret 9 *dixiémes*, & qu'on la multiplie d'abord par le numérateur 2 de la fraction multiplicateur $\frac{2}{3}$, en disant 2 fois 9 *dixiémes* font 18 *dixiémes* ou $\frac{18}{10}$; ce produit sera triple de celui qu'on demande, parce que le nombre 2 par lequel on aura multiplié, est triple de la fraction $\frac{2}{3}$ par laquelle on devoit multiplier.

Il faudra donc diviser le produit $\frac{18}{10}$ par le dénominateur 3 du multiplicateur $\frac{2}{3}$, pour le réduire à sa juste valeur : & c'est ce qu'on fera (N°. *66.*), en multipliant le dénominateur 10 par 3, ce qui donnera la fraction $\frac{18}{30}$ pour le produit demandé. Or il est aisé de remarquer dans les opérations qu'on a faites, que le numérateur 18 du produit $\frac{18}{30}$, est composé de la multiplication des numérateurs des deux fractions proposées ; & que le dénominateur de ce produit, est le résultat de la multiplication des dénominateurs des mêmes fractions. *C. Q. F. D.*

Corollaire.

70 1°. Puisque (art. IV. de la multiplication d'une fraction par une fraction), il résulte pour le produit une fraction dont le numérateur est le produit des

numérateurs

numérateurs des deux fractions qu'on multiplie ensemble, & dont le dénominateur est le produit des deux dénominateurs des mêmes fractions ; il est clair qu'on pourra prendre pour multiplicande celle des deux fractions qu'on voudra ; car les deux numérateurs multipliés ensemble, & les deux dénominateurs multipliés l'un par l'autre, comme on voudra, donneront toûjours les mêmes produits.

2°. Un nombre entier pouvant être considéré comme une fraction dont il est le numérateur, & dont le dénominateur est l'unité : lorsqu'on aura un entier à multiplier par une fraction, on pourra rapporter cette opération à la multiplication d'une fraction par une fraction. Par exemple si l'on doit multiplier 3 par $\frac{4}{5}$; on rapportera cette multiplication à celle de $\frac{3}{1}$ par $\frac{4}{5}$; & l'on aura pour le produit $\frac{12}{5}$ ou 2 & $\frac{2}{5}$.

3°. Donc la multiplication d'un entier par une fraction, par exemple de 3 par $\frac{4}{5}$, est la même chose que la multiplication de la fraction $\frac{4}{5}$ par le nombre entier 3. Car $3 \times \frac{4}{5}$ ou $\frac{3}{1} \times \frac{4}{5}$ est égal à $\frac{4}{5} \times \frac{3}{1}$ ou $\frac{4}{5} \times 3$.

PROBLÈME.

71 *Diviser par une fraction.*

Pour diviser par une fraction, il faut diviser par son numérateur, & multiplier ensuite par son dénominateur.

Pour le démontrer supposons qu'on ait une quantité quelconque à diviser par la fraction $\frac{3}{4}$, & que l'on divise d'abord par le numérateur 3 de cette fraction : ce diviseur étant 4 fois trop grand, puisqu'on ne doit diviser que par le quart de 3, donnera un quotient 4 fois trop petit ; ainsi il faudra multiplier ce quotient par le dénominateur 4 de la même fraction, pour qu'il devienne tel qu'il doit être. Donc pour diviser par une fraction, il faut diviser par son numérateur, & multiplier ensuite par son dénominateur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

72 1°. Donc la division par une fraction, par exemple par $\frac{3}{4}$, se réduit à une multiplication par la fraction inverse $\frac{4}{3}$.

Car on vient de voir que pour diviser par la fraction $\frac{3}{4}$, il faut diviser par 3 & multiplier ensuite par 4 : or pour multiplier par la fraction inverse $\frac{4}{3}$, il faut faire précisément les mêmes opérations; c'est-à-dire que (N°. 67 il faut multiplier par 4 & diviser par 3.

2°. Il suit delà que la division par une fraction dont le numérateur est l'unité, est une véritable multiplication par le dénominateur de cette fraction. Car pour diviser par les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c, il faut multiplier par les inverses $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$ &c, c'est-à-dire par les nombres entiers 2, 3, 4, &c.

PROBLÈME.

73 *Diviser une fraction par une fraction.*

PREMIÈRE SOLUTION.

Puisque (N°. 72.) la division par une fraction se réduit à une multiplication par la fraction inverse; lorsque l'on aura une fraction à diviser par une fraction; par exemple $\frac{9}{20}$ à diviser par $\frac{3}{4}$, & que l'on aura bien distingué la fraction dividende $\frac{9}{20}$, de la fraction diviseur $\frac{3}{4}$; on renversera les termes de cette derniére, pour avoir son inverse $\frac{4}{3}$: ensuite on multipliera la fraction dividende $\frac{9}{20}$, par celle $\frac{4}{3}$ inverse du diviseur, en opérant suivant quelqu'une des quatre méthodes expliquées au (N°. 69.) & le produit qu'on trouvera, sera le quotient de la fraction $\frac{2}{20}$ divisée par celle $\frac{2}{4}$. Ainsi le problême sera résolu.

Dans la solution de ce problême, on a choisi un exemple où les quatre méthodes expliquées au (No. 69.) peuvent avoir lieu pour multiplier la fraction dividende, par la fraction inverse du diviseur : ces quatre méthodes ayant été suffisamment détaillées, il est inutile de les expliquer ici de nouveau.

SECONDE SOLUTION.

1°. *Si la fraction dividende & la fraction diviseur ont le même dénominateur ; on divisera le numérateur du dividende par le numérateur du diviseur ; ou bien on fera une nouvelle fraction qui aura pour numérateur, le numérateur de la première, & pour dénominateur, le numérateur de la seconde : & le quotient, ou la fraction qui résultera de cette opération, sera le quotient de la division de la fraction dividende par la fraction diviseur.*

2°. *Si la fraction dividende & la fraction diviseur n'ont pas le même dénominateur; on les réduira (N°. 59.) à la même dénomination, & l'on divisera ensuite la premiére par la seconde comme il vient d'être dit.* Ainsi ce 2e. cas se rapporte au 1er.

Pour le démontrer supposons 1°. qu'on ait la fraction $\frac{8}{9}$ à diviser par la fraction $\frac{4}{9}$ qui à même dénominateur que la premiére ; & considérons (N°. 52.) ces deux fractions comme des nombres concrets 8 *neuviémes*, 4 *neuviémes* qui ont tous deux pour unités propres des *neuviémes* ; la division de $\frac{8}{9}$ par $\frac{4}{9}$ se réduira (N°. 29.) à chercher combien de fois le dividende 8 *neuviémes* contient le diviseur 4 *neuviémes*, ce que l'on trouvera (N°. 29 & 30.), en divisant le nombre 8 des unités propres du dividende, par le nombre 4 des unités propres du diviseur ; c'est-à-dire en divisant le numérateur 8 de la fraction dividende $\frac{8}{9}$, par le numérateur 4 de la fraction diviseur $\frac{4}{9}$; ce qui donnera le nombre entier 2, pour le quotient demandé.

2°. Si l'on avoit proposé la fraction $\frac{4}{9}$ à diviser par la fraction $\frac{8}{9}$, où le nombre concret 4 *neuviémes* à diviser par le concret de même espéce 8 *neuviémes*; il auroit fallut diviser le nombre 4 des unités propres du dividende, par le nombre 8 des unités propres du diviseur, ce qui (N°. 28.) auroit donné pour le quotient, la fraction $\frac{4}{8}$ qui à pour numérateur, le numérateur de la fraction dividende $\frac{4}{9}$, & pour dénominateur le numérateur de la fraction diviseur $\frac{8}{9}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

CHAPITRE IV.

Des Fractions de Fractions.

74. NOus avons vû dans le chapitre précédent qu'une fraction est une unité fractionnaire ou la collection de plusieurs unités fractionnaires. Soit qu'une fraction contienne une ou plusieurs unités fractionnaires, on peut la considérer comme une unité collective; & de même que l'unité principale se partage en plusieurs unités fractionnaires, la fraction considérée comme unité collective, peut être partagée en plusieurs autres parties égales que nous appellerons *unités fractionnaires de fraction.*

Une quantité qui vaut une ou plusieurs unités fractionnaires de fraction s'appelle *fraction de fraction.*

Par exemple si l'on a une fraction $\frac{5}{6}$, & qu'en la considérant comme une unité, on la partage en trois parties égales; chaque partie qui ne sera que le tiers de la fraction $\frac{5}{6}$, sera une unité fractionnaire de fraction, & la quantité qui vaudra une ou plusieurs de ces unités fractionnaires se nommera *fraction de fraction.*

Pour exprimer une fraction de fraction, il faut deux fractions entre lesquelles ont met l'article *de*. Ainsi pour représenter les deux tiers de la fraction $\frac{5}{6}$, l'on écrit $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$, & l'on dit, 2 tiers de 5 sixiémes.

Le dénominateur 3 de la premiére fraction fait voir en combien de parties la seconde fraction est divisée; & le numérateur de la premiére fraction marque combien on prend de ces parties de fraction.

De même que l'on partage une fraction en plusieurs parties égales, & que d'une ou de plusieurs de ces parties l'on fait une *fraction de fraction*; de même aussi l'on partage une fraction de fraction en plusieurs parties égales, & l'on prend une ou plusieurs de ces nouvelles parties pour faire une *fraction de fraction de fraction* : & ainsi de suite à l'infini.

Toutes ces espéces différentes de fractions de fractions s'écrivent les unes après les autres, en les séparant par l'article *de*.

Par exemple si l'on a une fraction $\frac{5}{6}$ & qu'on en prenne les $\frac{2}{3}$, l'on dira, deux tiers de cinq sixiémes, & l'on écrira $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$, qui est une fraction de fraction.

Si l'on veut avoir les trois quarts de cette fraction de fraction, l'on dira, trois quarts des deux tiers de cinq sixiémes, & l'on écrira, $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$.

THÉORÉME.

75 *Une fraction de fraction est égale au produit de la multiplication des deux fractions par lesquelles elle est exprimée.*

Prenons pour exemple la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$ qui représente deux fois le tiers de cinq sixiémes.

Nous avons dit, dans le Chapitre précédent, que pour prendre le tiers $\frac{5}{6}$, il faut diviser cette fraction par 3 : ainsi pour prendre deux fois le tiers de la fraction $\frac{5}{6}$, il faudra la diviser par 3, & multiplier le quotient par 2; c'est-à-dire multiplier l'un par l'autre les deux dénominateurs & les deux numérateurs des fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{6}$; ce qui donnera (suivant les regles de la multiplication des fractions) le produit de ces mêmes fractions.

Donc une fraction de fraction est égale au produit de la multiplication des deux fractions par lesquelles elle est exprimée.

COROLLAIRE PREMIER.

76 Donc la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$ est égale à la fraction de fraction $\frac{5}{6}$ *de* $\frac{2}{3}$. Car une fraction de fraction est le produit des deux fractions par lesquelles elle est exprimée; & ce produit sera toûjours le même quel que soit l'arrangement des deux fractions.

COROLLAIRE II.

77 Donc une fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$, est égale à une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs de toutes les fractions par lesquelles elle est exprimée, & pour dénominateur le produit des dénominateurs des mêmes fractions.

Car la fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$, est les trois quarts de la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$. Or cette fraction de fraction est égale à la fraction $\frac{2\times5}{3\times6}$ ou $\frac{10}{18}$: donc la fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$ est égale à la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2\times5}{3\times6}$ ou $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{10}{18}$.

Mais cette fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2\times5}{3\times6}$ est égale à la fraction $\frac{3\times2\times5}{4\times3\times6}$. Donc la fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{5}{6}$ est aussi égale à la fraction $\frac{3\times2\times5}{4\times3\times6}$ qui a pour numérateur, le produit des numérateurs de toutes les fractions par lesquelles la fraction de fraction de fraction est exprimée, & pour dénominateur, le produit des dénominateurs des mêmes fractions.

On peut faire voir de la même maniére que toutes les fractions de fractions de fractions de fractions &c. quelque loin qu'on les pousse, sont égales à des fractions qui ont pour numérateurs les produits de tous les numérateurs des fractions *composantes, & pour dénominateurs, les produits de tous les dénominateurs des mêmes fractions.*

Comme tous les numérateurs de ces fractions donneront toujours le même produit, en quelqu'ordre qu'on les multiplie (N°. 20.), *& qu'il en sera de même du produit de tous les dénominateurs ; il est clair que toutes les fractions de fractions de fractions &c. à l'infini, qui seront composées des mêmes fractions arrangées comme on voudra, seront égales entr'elles, puisqu'elles se réduiront à la même fraction.*

CHAPITRE V.

De la Réduction des Fractions décimales qui sont composées d'une suite infinie de Périodes égales.

78 NOUS avons déjà vû (N°. 47.) qu'une suite infinie de périodes décimales égales, est le quotient d'une division dont le dividende est égal au nombre représenté par les chiffres d'une période, & dont le diviseur est exprimé par une suite de 9 en même nombre que les figures de la période. Par exemple,

0,1111 &c	*est le*	1 *par* 9		$\frac{1}{9}$
0,2626 &c	*quotient*	26 *par* 99		$\frac{26}{99}$
0,450450 &c	*de la*	450 *par* 999	*qui est*	$\frac{450}{999}$
0,04545 &c	*division*	45 *par* 990		$\frac{45}{990}$
0,00523523 &c	*de*	523 *par* 99900		$\frac{523}{99900}$

& ainsi des autres.

Mais outre ces fractions décimales qui sont uniquement composées de périodes égales ; il y en a d'autres qui indépendamment d'une suite infinie de périodes égales, ont encore un certain nombre de chiffres décimaux après lesquels commencent les périodes égales, telles que celles-ci 0,1666 &c ; 0,08333 &c ; 0,004 629 629 &c.

La 1ere 0,1666 &c de ces fractions est composée de 0,1 ou $\frac{1}{10}$, & d'une infinité de périodes de 6.

La 2^e^ 0,08333 &c est composée d'une partie 0,08 qui vaut $\frac{8}{100}$, & d'une infinité de périodes de 3.

La 3^e^. 0,004 629 629 &c est composée d'une partie 0,004 qui signifie $\frac{4}{1000}$, & d'une infinité de périodes de 629 : ainsi des autres.

Or tous ces nombre décimaux, & leurs semblables peuvent être réduits à de simples fractions, comme on va le voir dans le Problême suivant.

PROBLÊME.

79 *Trouver une fraction simple, égale à un nombre décimal tel que 0,004.629.629 &c composé de quelques chiffres décimaux qui précedent une suite infinie de periodes égales.*

1°. On séparera la suite infinie de périodes, d'avec les chiffres décimaux qui les précédent, pour faire deux nombres décimaux de celui qui est proposé; & l'on aura les deux nombres décimaux $\begin{cases} 0,004 \\ 0,000\,629\,629\ \&c \end{cases}$ contenus dans le nombre donné 0, 004 629 629 &c.

Or la première partie (0, 004) qui signifie 4 milliémes, est égale à la fraction $\frac{4}{1000}$.

La seconde partie 0,000 629 629 &c qui est uniquement composée d'une suite infine de périodes égales, est égale à la fraction $\frac{629}{999000}$ (N°. 48.).

Donc la somme des deux parties 0, 004 & 0, 000 629 629 &c, ou la suite décimale proposée 0, 004 629 629 &c, est égale à la somme des deux fractions $\frac{4}{1000}$ & $\frac{629}{999000}$.

2°. Ensuite on donnera la même dénomination à ces deux fractions, en multipliant les deux termes de la 1^ere^ par 999; & l'on aura les deux fractions $\frac{3996}{999000}$ & $\frac{629}{999000}$, dont la somme $\frac{4625}{999000}$ (qu'on réduira à $\frac{1}{216}$, en divisant ses deux termes par le numérateur 4625) sera la valeur de la fraction décimale proposée 0,004 629 629 629 &c.

ÉLÉMENS
D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE IV.

Des Opérations de l'Arithmétique sur les Nombres complexes.

80 ON fait sur les nombres complexes les mêmes opérations que nous avons faites dans le Livre second sur les nombres incomplexes; c'est-à-dire qu'on les ajoûte, on les soustrait, on les multiplie, & on les divise.

Si l'on n'avoit qu'une sorte d'unité pour toutes les grandeurs d'une même espéce; on ne pourroit pas exprimer avec assez de justesse toutes ces grandeurs par les nombres, à moins que l'unité ne fut très-petite; mais alors il faudroit des nombres fort grands pour exprimer les grandeurs les plus communes, ce qui seroit extrémement incommode dans le commerce. Par exemple si l'on prenoit toûjours le denier pour unité dans le compte des monnoies; les nombres par lesquels on représenteroit les différentes sommes, seroient 12 fois plus grands qu'en prenant le sol pour l'unité, & seroient 240 fois plus grands que si l'on prenoit pour unité la livre tournois.

Si l'on prenoit la livre pour l'unité & qu'on n'en eut point d'autres; on ne pourroit pas compter toutes les sommes possibles sans négliger quelque chose moindre à la vérité que la livre, mais cependant assez considérable pour mériter qu'on y ait égard; & l'on ne pourroit point y avoir égard sans rompre la livre en différentes parties, ce qui demanderoit une connoissance particuliére des fractions dont l'usage n'est pas familier à tout le monde.

Pour éviter ces deux inconvéniens, l'on est convenu d'employer des unités de différentes grandeurs, pour une même espéce.

Dans les calculs des monnoies; on se sert ordinairement de trois sortes d'unités, de la *livre*, du *sol*, & du *denier*. L'on prend aussi pour unité l'*écu* qui vaut 3 livres, la *pistole* qui vaut 10 livres, le *louis* qui vaut aujourd'hui 24 livres, & toutes les différentes piéces de monnoie, qui ont cours dans le commerce.

Dans les calculs de l'étendue des lignes; l'usage & les loix ont établi pour unités, la *toise*, le *pied*, le *pouce*, la *ligne*, l'*aune*, la *perche*, & plusieurs autres mesures dont l'étendue est fixée relativement à la toise. Nous parlerons plus particuliérement de ces mesures & de celles qui en résultent, dans l'Article du Toisé.

Dans les calculs des poids; on prend pour unités la *livre*, le *marc*, l'*once*, le *gros*, le *scrupule* ou *denier*, & le *grain*. Dans les grands poids, l'on prend pour unité le *quintal* qui pése 100 livres, & même le *millier* qui pése 1000 livres.

Dans les calculs du temps; on prend pour unités l'*année*, le *mois*, le *jour*, l'*heure*, la *minute*, la *seconde*, la *tierce*, &c. On prend aussi pour unités la *semaine* qui est de 7 jours, & le *siécle* qui est de 100 années.

Dans les calculs des angles & des arcs de cercles; on prend pour unités le *degré*, la *minute*, la *seconde*, la *tierce*, &c. L'on prend aussi pour unités les *signes* qui contiennent chacun trente degrés.

Enfin pour le calcul de chaque espéce de chose; on prend pour unités les grandeurs de quelques parties connues de la même espéce.

Lorsqu'on a des nombres composés de différentes unités, la collection de ces nombres s'appelle *nombre complexe*. Par exemple la collection des trois nombres suivans, 12 *livres* 13 *sols* 8 *deniers*, est un nombre complexe. Ces quatre autres nombres, 25 *toises* 4 *pieds* 5 *pouces* 10 *lignes*, composent aussi un nombre complexe.

Valeurs de différentes unités de quelques espéces, & caractéres par lesquels on distingue ces différentes unités les unes des autres.

POUR LES MONNOIES.

₶ *signifie* . . . livre	1 livre *vaut*	20 sols
ß . . . . sol	1 sol *vaut*	12 deniers
₰ . . . . denier		

POUR LES POIDS.

℔ *signifie* . . . livre	1 ℔ poids de *M* *vaut*	2 marcs
M . . . . marc	1 marc *vaut*	8 onces
O *ou* ℥ . . . . . . once	1 once	8 gros
G *ou* ʒ . . . . . . gros	1 gros, 3 den. *ou*	3 scrupules
D ou ℈ denier *ou* scrupule	1 denier . . .	24 grains
g . . . . grain		

Pour l'Étendue des Lignes.

T	*signifie*	toise	1 toise	*vaut*	6 pieds
P	. . . . . .	pied	1 pied	*vaut*	12 pouces
p	. . . . . .	pouce	1 pouce	. . .	12 lignes
L	. . . . . .	ligne	1 ligne	. . .	12 points
A	. . . . . .	aune	1 aune *vaut* 3^P $7p$ 10 lignes & 5 sixiémes de ligne.		

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition des Nombres complexes.

Nous avons déjà dit, en parlant de l'addition des nombres incomplexes, que l'addition est une opération par laquelle on trouve un nombre égal à la somme de plusieurs autres nombres. Nous avons fait voir ensuite que les nombres additionnés doivent avoir des unités de la même espéce, & que de leur addition il résulte une somme dont les unités sont encore de la même espéce.

Il en est de même des nombres complexes. Car quoique les unités de toutes leurs parties, ne soient point absolument les mêmes, elles doivent être réductibles à des unités semblables; c'est-à dire qu'un certain nombre d'unités de l'espéce la moins considérable, doit composer une unité d'une autre partie dont l'espéce est plus grande. Nous en avons vû assez d'exemples dans l'exposition que nous venons de faire des valeurs des différentes unités de quelques espéces, & des caracteres par lesquels on les distingue les unes des autres.

PROBLÈME.

81 *Ajoûter ensemble plusieurs nombres complexes.*

On écrira les uns sous les autres tous les nombres complexes qu'on doit ajoûter ; de maniere que toutes les parties dont les unités sont semblables, soient dans une même colonne verticale ; & que tous les chiffres de même degré dans la progression décuple, soient aussi les uns sous les autres.

Tous les nombres complexes étant ainsi disposés, & ayant tiré une barre horisontale au-dessous, pour les séparer de leur somme ; on commencera par ajoûter ensemble toutes les parties dont les unités sont de la plus basse espéce : & si le nombre de ces unités assemblées est assez grand pour valoir une ou plusieurs unités de l'espéce supérieure ; on retiendra ces unités supérieures pour les ajoûter avec celles de la colonne suivante ; & l'on écrira au-dessous de la colonne dont on a fait l'addition, le nombre des unités qui ne pourront point composer une unité de l'espéce supérieure.

On fera la même opération pour chaque colonne ; & lorsque toutes les colonnes seront ajoûtées, on trouvera au dessous de la barre, la somme des quantités complexes qu'on devoit additionner.

Pour faciliter l'application de ce Problême, on en va donner différens exemples ; sur les monnoies, en prennant pour unités la *livre*, le *sol* & le *denier* ; sur l'étendue, en prenant pour unités la *toise*, le *pied*, le *pouce* & la *ligne* ; & sur les poids, en prenant pour unités le *marc*, l'*once*, le *gros*, le *denier* & le *grain*. On déduira aisément de ces exemples l'application du même Problême à des nombres complexes composés d'unités de toute autre espéce.

Exemple premier.

On propose de faire l'addition des quatre nombres complexes suivans, ou plûtôt des quatre sommes suivantes, dont chacune est composée de livres, sols & deniers.

Sommes à ajoûter	387^{tt}	$12^{ß}$	8^{d}
	759	19	11
	896	17	10
	4563	19	9
Somme totale	6608^{tt}	$10^{ß}$	2^{d}

1°. Les deniers étant les unités de la plus basse espéce, on commencera par les ajoûter ensemble : & comme les dixaines de deniers ne font pas des unités particuliéres, & qu'il faut 12^{d} pour 1 sol ; on ajoûtera ensemble non-seulement tous les deniers, mais encore les dixaines de deniers, pour ne faire du tout qu'une même somme de deniers. On dira donc : 8 deniers & 11^{d} font 19^{d}, & 10^{d} font 29^{d}, & 9^{d} font 38^{d} : & comme dans 38^{d} il y a 3 fois 12 deniers qui font 3 sols, avec 2 deniers de plus ; on écrira 2 deniers au-dessous de la barre dans la colonne des deniers, & l'on retiendra 3 sols pour les ajoûter avec la colonne suivante.

2°. Comme 2 dixaines de sols font une livre, & que nous avons des unités de sols dont l'assemblage peut faire des dixaines de sols ; nous ajoûterons la colonne des sols en deux fois, & nous commencerons par l'addition des nombres simples de sols. Nous dirons donc : 3 sols que nous avons retenus de la colonne des deniers, & 2 sols font $5^{ß}$, & $9^{ß}$ font $14^{ß}$, & $7^{ß}$ font $21^{ß}$, & $9^{ß}$ font $30^{ß}$, ou 3 dixaines de sols & rien de plus. Ainsi nous poserons un zéro dans la colonne des nombres simples de sols, & nous retiendrons 3 pour le joindre avec les dixaines de sols que nous devons additionner. Nous dirons donc : 3 dixaines de sols que nous avons retenues, & 1 dixaine font 4 dixaines, & 1 dixaine font 5 dixaines, & 1 dixaine font 6 dixaines, & 1 dixaine font 7 dixaines de sols ; & comme 2 dixaines de sols valent 1 livre, les 7 dixaines de sols feront 3 livres & 1 dixaine de sols. Nous poserons donc 1 dans la colonne des dixaines de sols, & nous retiendrons 3 livres pour les ajoûter avec les livres.

3°. Passant à la colonne des livres simples, on dira : 3# qu'on a retenues de la colonne des dixaines de sols, & 7# font 10#, & 9# font 19#, & 6# font 25#, & 3# font 28#, dans lesquelles il y a 2 dixaines de livres, & 8# de plus : ainsi l'on écrira les 8# dans la colonne des livres simples, & l'on retiendra 2 dixaines pour les ajoûter avec celles de la colonne suivante.

Le reste de l'opération se fera comme nous l'avons expliqué pour l'addition des nombres incomplexes ; & l'on trouvera pour la somme totale 6608# 10ſ 2ᵭ.

EXEMPLE II.

On propose d'ajoûter ensemble ces cinq sommes de monnoies.

	169#	9ſ	10ᵭ
	48	7	11
	69	4	9
	57	8	8
	96	16	7
Somme totale	441#	07ſ	9ᵭ

En opérant comme dans l'exemple précédent, l'on trouvera pour la somme totale 441# 07ſ 9ᵭ.

Exemple III.

Pour l'Étendue.

On propose d'ajoûter ensemble ces quatre sommes.

	32^T	4^P	$6p$	10^L
	144	5	9	9
	67	2	10	8
	78	3	11	11
Somme totale	323^T	5^P	$3p$	2^L

Comme les lignes sont les unités de la plus basse espéce, on additionnera d'abord la colonne des lignes, en disant : 10^L & 9^L font 19^L, & 8^L font 27^L, & 11^L font 38^L, dans lesquelles il y a 36 lignes, c'est-à-dire 3 douzaines de lignes qui font 3 pouces, avec 2^L de plus : ainsi l'on écrira 2^L dans la colonne des lignes, & l'on retiendra $3p$ pour les ajoûter avec la colonne des pouces.

Passant à la colonne des pouces, l'on dira : $3p$ qu'on a retenus de la colonne des lignes, & $6p$ font $9p$, & $9p$ font $18p$, & $10p$ font $28p$, & $11p$ font $39p$, dans lesquels il y a 3 douzaines de pouces qui valent 3 pieds, avec 3 pouces de plus : ainsi l'on écrira 3 pouces dans la colonne des pouces, & l'on retiendra 3 pieds pour les ajoûter avec la colonne des pieds.

Passant à la colonne des pieds, l'on dira : 3 pieds qu'on a retenus & 4 pieds font 7 pieds, & 5^P font 12^P, & 2^P font 14^P, & 3^P font 17^P, dans lesquels il y a 2 fois 6 pieds qui valent 2 toises, & 5 pieds de plus : ainsi l'on retiendra 2 toises pour les joindre à la colonne des toises, & l'on écrira 5^P dans la colonne des pieds.

Passant

Passant à l'addition de la colonne des toises, l'on dira : 2 toises qu'on a retenues & 2^T font 4^T, & 4^T font 8^T, & 7^T font 15^T, & 8^T font 23^T, dans lesquelles il y a 2 dixaines de toises & 3 toises de plus : ainsi l'on écrira 3 toises dans la colonne des toises, & l'on retiendra 2 dixaines de toises pour les joindre à la colonne des dixaines de toises qui suit.

On achevera l'addition comme il a été dit dans l'addition des quantités incomplexes, & l'on trouvera pour la somme totale, $323^T\ 5^P\ 3p\ 2L$.

EXEMPLE IV.

Pour les Poids.

On propose d'ajoûter ensemble ces quatre sommes de Poids.

	35*M*	2*O*	4*G*	2*D*	20*g*
	168	3	7	2	23
	944	7	6	1	10
	479	6	4	1	9
Somme totale	1628*M*	4*O*	7*G*	2*D*	14*g*

Les grains étant les unités de la plus basse espece, on commencera par l'addition de la colonne des grains, & l'on dira : 20g & 23g font 43g, & 10g font 53g, & 9g font 62g, dans lesquels il y a 2 fois 24g qui valent 2 scrupules ou 2 deniers, avec 14g de plus : ainsi l'on écrira 14g dans la colonne des grains, & l'on réservera les 2 deniers ou scrupules pour les joindre avec la colonne des deniers ou scrupules.

Passant à la colonne des deniers, on y trouvera 6*D*, qui avec les 2*D* qu'on a retenus de celle des grains, font 8*D* dans lesquels il y a 2 fois 3 deniers qui valent 2 gros avec 2 deniers de reste : ainsi l'on écrira 2 deniers ou 2 scrupules dans la colonne des deniers ou ſcrupules, & l'on retiendra 2 pour la colonne des gros.

Paſſant à la colonne des gros, & ajoûtant avec elle les 2 gros qu'on a retenus, on y trouvera 23^G dans leſquels on aura 2 fois 8 gros qui valent 2 onces, avec 7 gros de plus: ainſi l'on placera 7^G dans la colonne des gros, & l'on retiendra 2 onces pour les joindre à la colonne des onces.

Paſſant à la colonne des onces, & ajoûtant avec elle les 2 onces qu'on vient de retenir, on trouvera 20 onces, ou 2 fois 8 onces qui font 2 marcs ou 2 unités de la colonne ſuivante, avec 4 onces de plus: ainſi l'on écrira 4 onces dans la colonne des onces, & l'on retiendra 2 marcs pour les joindre avec celle des marcs.

Paſſant à la colonne des ſimples marcs, & ajoûtant avec elle les 2 marcs qu'on vient de retenir, on aura 28 marcs, c'eſt-à-dire 2 dixaines de marcs & 8 marcs de plus: ainſi l'on écrira 8 marcs dans la colonne des ſimples marcs, & l'on retiendra 2 dixaines de marcs pour les ajoûter avec la colonne des dixaines de marcs. Le reſte de l'opération ſe réduit à l'addition des nombres incomplexes.

L'opération étant entiérement faite, on trouvera que la ſomme totale eſt $1628^M\ 4^O\ 7^G\ 2^D\ 14^g$.

CHAPITRE II.

De la Souſtraction des nombres complexes.

NOUS avons déjà dit, en parlant des nombres incomplexes, que la ſouſtraction eſt une opération par laquelle on retranche une quantité d'une autre. Il faut donc que la quantité que l'on propoſera de retrancher ſoit contenue dans celle dont on voudra la souftraire ; & par conféquent ces deux quantités doivent être de la même efpece, ou être réductibles à la même efpece.

Il en eft de même des nombres complexes. L'on ne pourroit pas fouftraire une quantité d'une autre, fi l'une & l'autre n'étoient pas de la même efpece, ou fi elles ne pouvoient pas être réduites toutes les deux à la même efpece. Par exemple on ne pourroit point retrancher une quantité compofée de différens poids, d'une autre quantité qui ne contiendroit que des toifes & des parties de la toife ; mais on pourra toûjours fouftraire des toifes ou des parties connues de la toife, d'une autre quantité qui ne fera compofée que de toifes & de parties de la toife.

PROBLÉME.

82 *Souftraire un nombre complexe d'un autre nombre complexe ou incomplexe.*

On difpofera les parties de la quantité qu'on veut fouftraire, au-deffous des parties femblables de la quantité dont on doit fouftraire, en obfervant de mettre les unités, dixaines, centaines, &c, des parties d'une efpece, fous les unités, dixaines, centaines, &c, de la même efpece ; puis on tirera une barre au-deffous de ces nombres pour les féparer du refte. Enfuite on retranchera chaque partie de la quantité qui doit être fouftraite, de chaque partie correfpondante de l'autre quantité, en commençant par les parties de la plus baffe efpece, & en paffant de celles-ci à celles qui font d'une efpece immédiatement plus grande ; & de celles-ci l'on paffera à d'autres d'une efpece encore immédiatement plus grande ; & toûjours ainfi de fuite, jufqu'à ce que toutes les parties de la quantité qu'on doit retrancher, foient fouftraites.

Si le nombre des parties que l'on doit retrancher est moindre que le nombre des parties correſpondantes de l'autre quantité ; il n'y aura aucune difficulté pour les retrancher, & l'on écrira le reſte au-deſſous de la barre dans la même colonne où ſont ces parties.

Mais ſi l'on rencontre dans le nombre inférieur qu'on doit retrancher, des parties dont le nombre ſoit plus grand que celui des parties correſpondantes du nombre ſupérieur ; on empruntera, dans le nombre ſupérieur, une unité ſur les parties ſuivantes qui ſont d'une eſpece immédiatement plus grande : puis ayant réduit cette unité en parties de même eſpece que celles dont il faut ſouſtraire, on les ajoûtera à ces dernieres, qui par cette addition ſeront en aſſez grand nombre, pour qu'on en puiſſe ſouſtraire le nombre des parties qu'on ne pouvoit point retrancher auparavant.

On fera la même opération pour toutes les eſpeces de parties qui ſeront en plus grand nombre que les correſpondantes de l'autre quantité dont on doit ſouſtraire, en obſervant que le nombre ſur lequel on aura emprunté une unité, ſera diminué de la même unité.

Exemple premier.

Nombre complexe dont il faut ſouſtraire	199#	1ſ	6d
Nombre complexe qu'il faut ſouſtraire	99	14	10
Différence ou reſte de la Souſtraction	100#	6ſ	8d

Pour trouver le reſte de cette ſouſtraction, l'on commencera par ſouſtraire les deniers qui ſont les parties de la plus baſſe eſpece. Mais comme les 10 deniers qu'il faut ſouſtraire, ne ſont pas contenus dans les 6 deniers correſpondans du nombre ſupérieur, on empruntera 1 ſol ſur ce qu'il y a de ſols dans le nombre ſupérieur ; & ayant converti ce ſol en 12 deniers, on l'ajoûtera avec les 6 deniers que l'on a déjà, ce qui fera 18 deniers dont on retranchera facilement 10 deniers ; & il reſtera 8 deniers qu'on écrira au-deſſous pour le reſte des deniers.

Paſſant à la colonne des ſols, on aura 14 ſols à retrancher de rien, parce que le ſol qui ſe trouvoit dans le nombre ſupérieur, a été emprunté & employé dans les deniers : ainſi on empruntera 1 livre ſur le nombre ſupérieur des livres ; & ayant converti cette livre en 20ß, on en retranchera 14ß ; & il reſtera 6ß qu'on écrira au-deſſous pour le reſte des ſols.

Paſſant aux unités ſimples des livres, on aura 8 livres à ſouſtraire de 8 livres, (à cauſe que l'unité qui a été empruntée ſur le chiffre 9, pour la porter à la colonne des ſols, a réduit ce chiffre à 8) ; & il reſtera zéro.

Continuant la ſouſtraction comme on a fait pour les grandeurs incomplexes, l'on trouvera pour le reſte demandé 100# 6ß 8d.

EXEMPLE II.

	9	19	
Nombre complexe dont il faut ſouſtraire	40#	0ß	8d
Nombre complexe qu'il faut ſouſtraire	9	16	11
Différence ou reſte de la Souſtraction	30#	3ß	9d

Les 11 deniers qu'il faut ſouſtraire, ne pouvant pas être retranchés de 8 deniers qui ſont au-deſſus, & les ſols & unités ſimples des livres ne pouvant rien prêter, puiſque ce ſont des zéros ; l'on empruntera une dixaine de livres, dont on laiſſera 9 livres au rang des livres, & 19 ſols au rang des ſols ; & le ſol reſtant converti en 12 deniers, étant ajoûté aux 8 deniers, on aura 20 deniers dont on ſouſtraira 11 deniers ; & il reſtera 9 deniers qu'on écrira au-deſſous.

Le reste de l'opération se réduira à soustraire 9 livres 16 sols de 39 livres 19 sols ; ce que l'on fera en suivant les regles ci-devant expliquées

Exemple III.

Nombre complexe dont il faut soustraire	100^T	5^P	0^p
Nombre complexe qu'il faut soustraire	97	5	11
Différence ou reste de la Soustraction	2^T	5^P	1^p

Ayant disposé les deux nombres comme il a été dit, l'on aura 11 *p* à retrancher de o*p*. Comme cela ne se peut pas, on empruntera une unité sur les pieds, & l'ayant convertie en 12 pouces, on en retranchera les 11 pouces ; & il restera 1 pouce qu'on écrira au-dessous.

Passant aux pieds, l'on y trouvera 5^P à retrancher de 4^P, parce que les 5^P du nombre supérieur ont prêté 1^P. Comme cela est impossible, on empruntera 1 toise qui étant convertie en 6 pieds sera ajoûtée aux 4 pieds, ce qui fera 10 pieds dont on retranchera 5 pieds ; & il restera 5 pieds qu'on écrira au-dessous pour le reste des pieds.

On achévera l'opération suivant les regles précédemment expliquées pour les nombres incomplexes.

Exemple IV.

Nombre dont il faut soustraire	16℔	12O	7^G	7g
Nombre qu'il faut soustraire	8	15	7	40
Reste de la Soustraction	7℔	12O	7^G	39g

Commençant par les grains qui sont les poids de la moindre espece, l'on aura 40 grains à soustraire de 7 grains, ce qui ne se peut pas : ainsi l'on empruntera 1 gros qui vaut 72 grains lesquels étant joints à 7 grains donneront 79 grains dont on retranchera 40 grains ; & il restera 39 grains que l'on écrira au-dessous.

Passant à la colonne des gros, l'on aura 7 gros à retrancher de 6 gros, parce que les 7 gros du nombre supérieur en ont prêté un. Comme cela ne se peut pas, on empruntera 1 once qui vaut 8 gros, & joignant ces 8 gros aux 6 gros, l'on aura 14 gros dont on retranchera les 7 gros du nombre inférieur ; & il restera 7 gros que l'on écrira au-dessous.

Passant à la colonne des onces, l'on aura 15 onces à soustraire des 11 onces, parce que les 12 d'en haut en ont prêté une. Comme cela ne se peut pas, on empruntera 1 livre qui vaut 16 onces, & qui étant jointe à 11 onces fera 27 onces dont on pourra retrancher les 15 onces du nombre inférieur ; & il restera 12 onces qu'on écrira au-dessous pour le reste des onces.

Enfin passant à la colonne des livres, on aura 8 livres à soustraire de 15 livres, parce que les 6 livres en ont prêté une ; & il restera 7 livres qu'on écrira au-dessous pour le reste des livres.

Comme il n'y a plus rien à soustraire, & que tout le nombre supérieur a été employé, la soustraction est faite, & son reste est de 7℔ 12O 7G 39g.

On a détaillé dans ces 4 exemples toutes les petites difficultés qu'on peut trouver dans la soustraction des nombres complexes, soit dans le passage d'une colonne à l'autre ; soit pour les emprunts, dans le cas où les parties à soustraire sont en plus grand nombre que celles dont il faut les soustraire. Comme les raisonnemens qu'il faudra faire, lorsqu'il s'agira de soustraire d'autres quantites complexes composées de parties différentes de celles que nous avons prises *pour exemples, seront semblables à ceux que nous avons faits; nous avons lieu de croire que ces exemples sont suffisans pour bien faire entendre la regle générale de la soustraction des nombres complexes, & qu'il n'est pas besoin d'en donner un plus grand nombre.*

CHAPITRE III.

De la Multiplication des Nombres complexes.

83. La multiplication par des nombres complexes, se fait en multipliant le multiplicande par toutes les parties du multiplicateur: mais comme le multiplicateur, lorsqu'il est complexe, a des parties moindres que son unité principale; & que chacune de ses unités principales, marque qu'il faut prendre le multiplicande une fois, les parties du multiplicateur, qui seront moindres que l'unité principale, marqueront qu'il ne faut prendre le multiplicande qu'une partie de fois. Pour rendre les regles de la multiplication des nombres complexes plus intelligibles, nous les expliquerons par différens exemples ausquels nous en ferons l'application.

La multiplication étant une opération par laquelle on répéte le multiplicande un certain nombre de fois exprimé par le nombre des unités principales du multiplicateur; on doit regarder le multiplicateur comme un nombre absolu, lors même qu'il est appliqué à la numération d'une espece particuliere d'unités, comme nous l'avons expliqué dans la multiplication des nombres incomplexes; & les unités du produit doivent par conséquent être de la même espece que celles du multiplicande.

PROBLÈME.

84 *On propose de multiplier* $518^{\text{tt}}\ 14^{\text{ſ}}\ 8^{\text{d}}$ *multiplicande*
Par $74\ \frac{1}{4}$ *multiplicateur*

Produits particuliers pour	4	2072^{tt}		
	70	3626		
	$10^{\text{ſ}}$	37		
	$4^{\text{ſ}}$	14	$16^{\text{ſ}}$	
	8^{d}	2	9	4^{d}
	$\frac{1}{4}$	129	13	8
Produit total		38515^{tt}	$19^{\text{ſ}}$	

Pour multiplier dans un ordre convenable & régulier toutes les parties du multiplicande proposé, par toutes les parties du multiplicateur ; on commencera par multiplier tout le multiplicande par 74, ensuite on multipliera le même multiplicande par la fraction $\frac{1}{4}$.

Mais le multiplicande $518^{\text{tt}}\ 14^{\text{ſ}}\ 8^{\text{d}}$ étant composé de trois parties, il faudra multiplier ces trois parties les unes après les autres par 74.

1°. Pour multiplier 518^{tt} par 74, l'on opérera comme on a fait pour les nombres incomplexes ; c'est-à-dire qu'on multipliera d'abord 518^{tt} par 4 unités, & qu'on multipliera ensuite le même nombre 518^{tt} par 7 dixaines ; ce qui donnera ces deux produits particuliers 2072 unités de livre, & 3626 dixaines de livre, qui seront placés comme on le voit dans l'exemple.

2°. Pour multiplier $14^{\text{ſ}}$ par 74, on partagera $14^{\text{ſ}}$ en parties qui puissent être contenues chacune un certain nombre de fois dans la livre qui est l'unité principale du multiplicande. Ces parties seront $10^{\text{ſ}}$ & $4^{\text{ſ}}$ qu'on multipliera séparément par 74.

Pour multiplier 10$^{\text{ß}}$ par 74, on remarquera que 10$^{\text{ß}}$ eſt la moitié d'une livre, & qu'une livre entiere étant multipliée par 74 donneroit 74 livres; d'où l'on conclura que la moitié d'une livre ou 10$^{\text{ß}}$ ne doit donner que la moitié de 74$^{\#}$, c'eſt-à-dire 37$^{\#}$.

Pour multiplier 4$^{\text{ß}}$ par 74, on remarquera que 4$^{\text{ß}}$ n'eſt que la cinquiéme partie d'une livre, & que 1 livre multipliée par 74 donnant 74$^{\#}$, la cinquiéme partie de 1$^{\#}$ ou 4$^{\text{ß}}$ multipliés par 74, ne doivent donner que la cinquiéme partie de 74$^{\#}$ qui eſt 14$^{\#}$ 16$^{\text{ß}}$: car la cinquiéme partie de 74$^{\#}$ eſt 14$^{\#}$, & il reſte 4$^{\#}$ qui valent 80$^{\text{ß}}$ dont la cinquiéme partie eſt 16$^{\text{ß}}$.

3°. Pour multiplier 8 deniers par 74, on pourra remarquer que 8 deniers ne ſont que la trentiéme partie d'une livre, & que 8 deniers multipliés par 74 ne doivent par conſéquent produire que la trentiéme partie de 74$^{\#}$: ainſi l'on pourroit prendre la trentiéme partie du multiplicateur 74, conſidéré comme un nombre de livres.

Mais au lieu de prendre tout d'un coup la trentiéme partie de 74$^{\#}$, il ſera plus commode de faire uſage du produit 14$^{\#}$ 16$^{\text{ß}}$ qu'on a trouvé pour 4$^{\text{ß}}$: car en conſidérant que 8 deniers ſont la ſixiéme partie de 4$^{\text{ß}}$, le produit de 8^{d} par 74 ne doit être que le ſixiéme du produit 14$^{\#}$ 16$^{\text{ß}}$ qu'on a trouvé en multipliant 4$^{\text{ß}}$ par 74. Ainſi l'opération ſe réduira à prendre le ſixiéme de 14$^{\#}$ 16$^{\text{ß}}$ qui ſera 2$^{\#}$ 9$^{\text{ß}}$ 4^{d}; parce que la ſixiéme partie de 14$^{\#}$ eſt 2$^{\#}$; & il reſte 2$^{\#}$ qui valent 40$^{\text{ß}}$ leſquels avec 16$^{\text{ß}}$ font 56$^{\text{ß}}$ dont la 6^{e}. partie eſt 9$^{\text{ß}}$; & il reſte 2 ſols qui valent 24 deniers dont la 6^{e}. partie eſt 4 deniers.

Juſqu'ici le multiplicande 518$^{\#}$ 14$^{\text{ß}}$ 8^{d} n'a été multiplié que par 74. Il reſte donc encore à le multiplier par la fraction $\frac{1}{4}$.

Si l'on avoit 518$^{\#}$ 14 8^{d} à multiplier par 1, il faudroit le prendre 1 fois, & l'on auroit pour le produit le multiplicande entier 518# 14ß 8d. Ainsi pour multiplier ce même nombre par $\frac{1}{4}$, il faut prendre le quart de 518# 14ß 8d, que l'on trouvera être 129# 13ß 8d, parce que le quart de 518# est 129#; & il reste 2#, c'est-à-dire 40ß qui ajoûtés à 14ß font 54ß dont le $\frac{1}{4}$ est 13ß; & il reste encore 2ß ou 24d qui avec 8d font 32d dont le quart est 8d.

Toutes les parties du multiplicande étant ainsi multipliées par toutes les parties du multiplicateur, & tous les produits particuliers étant écrits; on additionnera tous ces produits, & la somme 38515# 19ß sera le produit total du nombre complexe 518# 14ß 8d multiplié par 74$\frac{1}{4}$.

Les Regles de la multiplication des grandeurs complexes sont assez bien établies dans cet exemple de multiplication des monnoies, pour faire appercevoir ce qu'il y aura à observer dans d'autres exemples. Il est donc inutile d'en donner davantage; & il suffit d'exposer quelles parties il faudra prendre du multiplicateur consideré comme un nombre de livres, pour les différens nombres de sols & de deniers qui seront dans le multiplicande.

REMARQUE.

85 Lorsque le nombre des sols ou des deniers, ou que les sols & les deniers ensemble sont contenus exactement un certain nombre de fois dans 20ß, c'est-à-dire dans une livre; on dit que les sols ou les deniers, ou que les sols & les deniers ensemble, sont des *parties aliquotes* de la livre. Ainsi les parties aliquotes de la livre sont toûjours une fraction de la livre, qui a l'unité pour numérateur, & qui a pour dénominateur le nombre de fois que les sols ou les deniers, ou les sols & les deniers ensemble, sont contenus dans la livre.

PARTIES ALIQUOTES DE LA LIVRE.

10ſ ſont la *moitié* de 20ſ ou de la livre : ainſi pour 10ſ, l'on prend la moitié du multiplicateur conſideré comme un nombre de livres.

5ſ ſont le *quart* de la livre ; l'on prend donc le quart du multiplicateur pour 5 ſols.

Pour 4ſ, qui ſont le *cinquiéme* de la livre, on prend le cinquiéme du multiplicateur.

Pour 2ſ, qui ſont le *dixiéme* de la livre, on prend le dixiéme du multiplicateur.

Pour 1ſ, qui eſt la *vingtiéme* partie de la livre, on prend le vingtiéme du multiplicateur.

Pour 6ſ 8d, qui ſont le *tiers* de la livre, on prend le tiers du multiplicateur.

Pour 3ſ 4d, qui ſont le *ſixiéme* de la livre, on prend le ſixiéme du multiplicareur.

Pour 1ſ 8d, qui ſont le *douziéme* de la livre, on prend le douziéme du multiplicateur.

Pour 2ſ 6d, qui ſont le *huitiéme* de la livre, on prend le huitiéme du multiplicateur.

Pour 6d, qui ſont la *quarantiéme* partie de la livre, on prend la quarantiéme partie du multiplicateur.

Pour 3d, qui ſont la *quatre-vingtiéme* partie de la livre, on prend la quatre vingtiéme partie du multiplicateur.

Pour 8d, qui ſont la *trentiéme* partie de la livre, on prend la trentiéme partie du multiplicateur.

Pour 4d, qui ſont la *ſoixantiéme* partie de la livre, on prend la ſoixantiéme partie du multiplicateur.

Pour 2d, qui ſont la *cent-vingtiéme* partie de la livre, on prend la cent-vingtiéme partie du multiplicateur.

Pour 1d, qui eſt la *deux-cent quarantiéme* partie de la livre, on prend la deux-cent-quarantiéme partie du multiplicateur.

Lorſqu'un nombre de ſols n'eſt pas exactement contenu dans la livre un nombre de fois entier ſans reſte, on le nomme *partie aliquante* de la livre. On nomme auſſi partie aliquante de la livre un nombre de deniers qui n'eſt pas contenu dans la livre un nombre de fois entier ſans reſte.

Lorſqu'on trouve dans le multiplicande un nombre de ſols ou de deniers qui n'eſt point partie aliquote de la livre, & qui n'en eſt que partie aliquante ; on le partage en deux ou trois parties dont chacune ſoit une partie aliquote de la livre.

MÉTHODE ABRÉGÉE

86 *Pour multiplier les ſols par des nombres entiers ; & pour avoir au produit les livres que ce produit peut contenir.*

On multipliera le nombre des ſols par le chiffre des unités ſimples du multiplicateur ; & ſi ce produit eſt moindre que 20, on l'écrira dans la colonne des ſols ; mais ſi ce produit eſt plus grand que 20, l'on retiendra 1# pour chaque vingtaine de ſols qu'il contiendra, & l'on écrira le reſte dans la colonne des ſols.

Enſuite pour avoir les livres du produit, on multipliera la moitié du nombre des ſols par tous les autres chiffres du multiplicateur, en reculant d'une place vers la droite chaque chiffre de ce produit, & en ajoûtant à la premiere partie du produit le nombre des livres qu'on aura retenues. Par ce moyen l'on aura tout d'un coup en livres & en ſols le produit de la multiplication des ſols du multiplicande, par le nombre entier qui ſera donné pour multiplicateur.

Exemple premier.

On propose de multiplier	0#	1ß
Par	457	
Produit	22#	1ß

1°. Pour avoir les sols du produit on multipliera le chiffre 1ß par le chiffre 7 des unités du multiplicateur ; & comme le produit 7ß est moindre que 20ß, on l'écrira dans la colonne des sols.

2°. Pour avoir les livres du produit, on multipliera $\frac{1}{2}$ qui est la moitié du nombre des sols par les autres chiffres 45 du multiplicateur, c'est-à-dire qu'on prendra la moitié de 45, en reculant d'une place vers la droite chaque chiffre du produit qui sera 22# 10ß dont on placera la premiere partie 22# dans le rang des livres, comme on vient de l'indiquer ; & pour les 10ß on placera 1 dixaine à la gauche de 7ß que l'on a premierement écrit.

Par cette opération, l'on trouvera 22# 17ß pour le produit de 1ß multiplié par 457.

Exemple II.

On propose de multiplier	0#	18ß
Par	457	
Produit	411#	6ß

1°. On multipliera 18ß par le chiffre 7 des unités du multiplicateur. Mais comme il feroit trop difficile de faire cette multiplication en une seule fois ; on multipliera d'abord 8ß par 7, ce qui donnera 56ß dont on écrira le chiffre 6 au rang des sols, & l'on retiendra les 5 dixaines de sols. Ensuite on multipliera la dixaine de sols par 7, & l'on aura pour le produit 7 dixaines de sols que l'on joindra avec les 5 dixaines qu'on a retenues, ce qui fera 12 dixaines de sols qui valent $6^{\#}$: ainsi l'on n'aura rien à écrire au rang des dixaines de sols, & l'on retiendra $6^{\#}$ pour les joindre avec les livres qu'on va trouver.

2°. On multipliera la moitié du nombre des sols, c'est-à-dire $9^{ß}$ par les deux autres chiffres 45 du multiplicateur, en reculant d'un rang vers la droite les chiffres du produit ; & ajoûtant à ce produit, en le faisant, les $6^{\#}$ qu'on a retenues, on aura $411^{\#}$: ensorte que $411^{\#}\ 6^{ß}$ sera le produit total de $18^{ß}$ multipliés par 457.

Exemple III.

On propose de multiplier	$0^{\#}$	$17^{ß}$
Par	457	
	365	19
	22	10
	$388^{\#}$	$9^{ß}$

1°. On multipliera $17^{ß}$ par le chiffre 7 des unités du multiplicateur, ce qui donnera $5^{\#}$ 19 dont la partie $19^{ß}$ sera mise dans le rang des sols, en retenant la partie $5^{\#}$.

2°. On multipliera par les deux autres chiffres 45 du multiplicateur, la moitié du nombre des sols, c'est-à-dire 8 $\frac{1}{2}$; mais on ne pourra faire cette opération qu'en deux fois, & l'on commencera par multiplier 8 par 45, en reculant d'un rang les chiffres du produit, ce qui, avec les $5^{\#}$ qu'on a retenues, donnera $365^{\#}$.

Pour achever de multiplier la moitié de 17, c'est-à-dire 8 $\frac{1}{2}$ par 45, il faut encore multiplier $\frac{1}{2}$ par 45, c'est-à-dire qu'il faut prendre la moitié de 45 conſideré comme un nombre de livres, ce qui donnera $22^{\text{₶}}$ $10^{\text{ſ}}$.

Par cette opération, l'on trouve le produit de $17^{\text{ſ}}$ multipliés par 457, en deux parties dont la ſomme eſt $388^{\text{₶}}$ $9^{\text{ſ}}$.

REMARQUE.

Pour peu que l'on faſſe attention aux trois exemples que nous venons de propoſer, l'on remarquera aiſément que ſi le nombre des ſols qu'on doit multiplier par un nombre entier eſt pair, on aura toûjours le produit en livres & ſols, ſans être obligé de faire aucune addition; au lieu que ſi le nombre des ſols eſt impair & plus grand que l'unité, on ne pourra avoir les livres & les ſols du produit qu'en deux parties qu'il faudra additionner; car dans ce cas la moitié du nombre des ſols ſera compoſée de deux parties, d'un nombre entier & de la fraction $\frac{1}{2}$.

La Méthode qu'on vient d'expliquer pour multiplier les ſols par un nombre entier, peut aiſément s'appliquer à la multiplication des deniers par un nombre entier, lorſque le nombre des deniers eſt une partie aliquote du ſol, ou de 12 deniers. Quoique cette application ne ſoit qu'un corollaire naturel de la regle que nous venons d'expliquer, nous la propoſerons comme une Méthode particuliere à la multiplication des deniers.

MÉTHODE

87 *Pour multiplier les deniers par des nombres entiers, & pour avoir tout d'un coup les livres, les ſols & les deniers que le produit peut contenir.*

On diviſera le chiffre des unités du multiplicateur conſideré comme un nombre de livres, par le nombre de fois que les deniers ſont contenus dans

dans un ſol, & l'on mettra le quotient au rang des ſols & des deniers s'il y en a. Enſuite on diviſera les autres chiffres du multiplicateur par le double du nombre de fois que les deniers du multiplicande ſont contenus dans le ſol; & le quotient étant reculé d'un rang vers la droite, exprimera des livres, & des parties de livre s'il y en a.

EXEMPLE PREMIER.

Si l'on veut multiplier	0^{tt}	$0^{\text{ß}}$	3^{d}
Par	457		
On aura pour le produit	5^{tt}	$14^{\text{ß}}$	3^{d}

Les 3 deniers qui ſont au multiplicande étant le quart de $1^{\text{ß}}$, il faudra prendre le quart du chiffre des unités du multiplicateur conſidéré comme un nombre de livres, & prendre la moitié du quart, ou le huitiéme des autres chiffres du multiplicateur; c'eſt-à-dire qu'il faudra diviſer le chiffre 7 des unités par 4, & diviſer les autres par 8. Mais comme dans la diviſion, il faut commencer par diviſer les chiffres du degré le plus élevé, afin que les reſtes puiſſent être réduits & joints aux chiffres ſuivans; nous commencerons par prendre le huitiéme des chiffres du multiplicateur qui précédent celui des unités; & nous reculerons d'un rang vers la droite les chiffres du quotient, pour exprimer le nombre des livres.

On prendra donc la huitiéme partie de 45 dixaines qui eſt 5 dixaines: & comme il faut reculer ce quotient d'un rang vers la droite, on l'écrira au rang des livres; il reſtera 5 qui avec le chiffre ſuivant 7, fera 57 dont on prendra la quatriéme partie qui eſt $14\frac{1}{4}$ qu'on écrira aux rangs des ſols & deniers ſous cette forme $14^{\text{ß}}\ 3^{\text{d}}$.

On aura donc $5^{\text{tt}}\ 14^{\text{ß}}\ 3^{\text{d}}$ pour le produit de 3^{d} multipliés par 457.

EXEMPLE II.

On propose de multiplier	$0^{\#}$ $0^{\text{ß}}$ 8^{d}
Par	457
Produit	$15^{\#}$ $4^{\text{ß}}$ 8^{d}

Les 8 deniers qui ſont au multiplicande, étant les deux tiers d'un ſol; on prendra les deux tiers du chiffre 7 des unités du multiplicateur, ou le tiers de 14 double de ce chiffre 7, & l'on ne prendra que le tiers des autres chiffres du multiplicateur; mais comme cette opération eſt une diviſion, on commencera par les chiffres du degré le plus élevé, & l'on n'en prendra que le tiers en reculant le quotient d'un rang.

Il faudra donc prendre le tiers de 45 dixaines, qui eſt 15 dixaines: & comme ces 15 dixaines qui ſont compoſées de 1 centaine & de 5 dixaines, doivent être reculées d'un rang; l'on écrira 1 au rang des dixaines, & 5 au rang des unités de livre. Enſuite on prendra les deux tiers des 7 unités, ou le tiers de 14 unités; ce qui donnera $4\frac{2}{3}$ que l'on écrira aux rangs des ſols & des deniers ſous cette forme $4^{\text{ß}}$ 8^{d}.

Ainſi $15^{\#}$ $4^{\text{ß}}$ 8^{d} ſera le produit de 8^{d} multipliés par 457.

EXEMPLE III.

On propose de multiplier	$0^{\#}$	$0^{\text{ß}}$	11^{d}
Par	457		
Pour 8^{d}	15	4	8
Pour 3^{d}	5	14	3
Produit total	$20^{\#}$	$18^{\text{ß}}$	11^{d}

Comme les 11 deniers du multiplicande ne ſont pas une partie aliquote du ſol; l'on partagera 11 deniers en deux parties qui ſoient des parties aliquotes ou du moins des fractions commodes du ſol. Ces deux parties ſeront 8 deniers & 3 deniers, que l'on multipliera ſéparément par 457.

1°. En multipliant 8^{d} par 457, on trouvera comme dans le ſecond exemple $15^{\#}$ $4^{ß}$ 8^{d} pour le produit.

2°. En multipliant 3 deniers par 457, on trouvera comme dans le premier exemple $5^{\#}$ $14^{ß}$ 3^{d}.

3°. Ajoûtant enſemble ces deux produits, l'on aura $20^{\#}$ $18^{ß}$ 11^{d} pour le produit de 11 deniers multipliés par 457.

REMARQUE.

88 Lorſqu'on aura un nombre complexe compoſé de livres, ſols & deniers, tel que celui-ci $189^{\#}$ $18^{ß}$ 11^{d}, à multiplier par un nombre entier, par exemple par 457; les regles que nous avons expliquées pour la multiplication des nombres incomplexes, donneront le produit du nombre entier $189^{\#}$ multiplié par 457; la Méthode qne nous avons expliquée pour la multiplication des ſols, nous fera trouver le produit de $18^{ß}$ multipliés par 457: enfin la Méthode que nous venons de donner pour la multiplication des deniers, nous fera trouver le produit de 11^{d} multipliés par 457. Nous avons donc aſſez de méthodes pour multiplier un nombre complexe compoſé de livres, ſols & deniers, par un nombre entier.

Si le multiplicateur contenoit encore une fraction, par exemple ſi le multiplicateur étoit $457\frac{3}{5}$; après avoir multiplié le multiplicande entier $189^{\#}$ $18^{ß}$ 11^{d} par 457, il faudroit encore le multiplier par $\frac{3}{5}$, c'eſt-à-dire qu'il faudroit prendre encore 3 fois le cinquiéme du multiplicande, ce qui donneroit de nouvelles parties au produit.

Enfin toutes les parties du produit étant trouvées ; on les ajoûtera ensemble pour avoir le produit total de la multiplication.

DÉMONSTRATION

Des deux Méthodes que l'on a proposées pour multiplier les sols & les deniers.

1° En multipliant le nombre des sols par le dernier chiffre du multiplicateur, on a évidemment un nombre de sols : ainsi le produit qu'on trouve doit être mis au rang des sols, lorsqu'il ne surpasse pas $20^{ß}$; & lorsqu'il surpasse $20^{ß}$ il faut retenir une livre pour chaque vingtaine de sols, & écrire le reste au rang des sols. Cette premiere opération est évidente, & celle qu'on fait sur les autres chiffres du multiplicateur n'est guère plus difficile à comprendre, comme on va le voir.

On multiplie tous les autres chiffres du multiplicateur par la moitié du nombre des sols, & l'on recule d'une place chaque chiffre du produit. Mais 1°. en multipliant par la moitié du nombre des sols, l'on a un produit qui n'est que la moitié de celui qu'on auroit en multipliant par tous les sols. 2°. En reculant d'un rang vers la droite chaque chiffre de ce produit, l'on n'a que la dixiéme partie de ce produit, & par conséquent l'on n'a que la dixiéme partie de la moitié du produit qu'on auroit en multipliant à l'ordinaire ces chiffres par tout le nombre des sols ; mais la dixieme partie de la moitié de ce produit, c'est-à- dire la vingtiéme partie de ce produit est égale au nombre de livres qu'il contient.

Donc en multipliant par la moitié du nombre des ſols, tous les chiffres du multiplicateur, excepté celui des unités, & en reculant d'une place chaque chiffre du produit; l'on a un produit égal au nombre de livres contenues dans le produit de ſols qu'on auroit en multipliant ces chiffres à l'ordinaire par le nombre de ſols.

2°. Suivant cette regle, ſi le multiplicande ne contient que 1ß, l'on ne prendra que 1 fois le chiffre des unités du multiplicateur pour en faire des ſols, & l'on ne prendra que la moitié des autres chiffres du multiplicateur conſidérés comme livres, en reculant d'un rang chaque chiffre du produit : & comme pour la moitié, le quart, le tiers, le ſixiéme, ou le douziéme de 1ß, l'on ne doit prendre que la moitié, le quart, le tiers, le ſixiéme, ou le douziéme de ce que l'on prendroit pour 1ß; il eſt clair que pour la moitié, le quart, le tiers, le ſixiéme, ou le douziéme de 1ß, l'on ne doit prendre que la moitié, le quart, le tiers, le ſixiéme ou le douziéme du chiffre des unités du multiplicateur, pour le porter aux ſols; & que l'on ne doit prendre que la moitié de la moitié, ou du quart, ou du tiers, ou du ſixieme, ou du douziéme des autres chiffres du multiplicateur conſidérés comme livres, en reculant d'un rang chaque chiffre du produit; c'eſt-à-dire qu'on doit diviſer le chiffre des unités du multiplicateur par le nombre de fois que les deniers du multiplicande ſont contenus dans 1ß, & diviſer les autres chiffres du même multiplicateur conſidérés comme livres, par le double du nombre de fois que les deniers du multiplicande ſont contenus dans un ſol, en reculant d'un rang chaque chiffre du produit : & c'eſt ce que nous avons fait dans la Méthode que nous avons propoſée pour multiplier les deniers.

PROBLÊME.

89 *Multiplier des Poids tels que* 24M 7O 6G *Par* 51

Multiplier des Poids tels que		24M	7O	6G
Par		51		
Produits particuliers pour	1	24M		
	50	120		
	4O	25	4O	
	2O	12	6	
	1O	6	3	
	4G	3	1	4G
	2G	1	4	6
Produit total		1273M	3O	2G

1°. On multipliera 24 *marc* par 51, ſuivant les regles qu'on a expliquées pour la multiplication des quantités incomplexes : ce qui donnera deux produits particuliers, ſavoir 24*M* & 1200*M*.

2°. Pour multiplier 7 *onces* par 51, l'on partagera 7 onces en trois parties, 4 onces, 2 onces, 1 once aliquotes du marc qui contient 8 onces : & parce que ſi l'on multiplioit 1 *marc* par 51, l'on auroit un nombre de *marcs* égal au multiplicateur 51 ; lorſqu'on mutipliera 4 onces qui n'eſt que la moitié d'un *marc*, l'on n'aura qu'un nombre de *marcs* égal à la moitié du multiplicateur 51.

Pour 4 *onces*, l'on prendra donc la moité de 51 *marcs*, ſavoir, 25 *marcs* ½ ou 25 *marcs* 4 *onces*.

Pour 2 *onces* qui ne ſont que le quart d'un *marc* ou la moitié de 4 *onces*, l'on ne prendra que le quart du multiplicateur conſidéré comme 51 *marcs*, ou la moitié du produit 25 *marcs* 4 *onces* qu'on a trouvé pour 4 *onces ;* & l'on aura 12 *marcs* 6 *onces*.

Pour 1 *once* qui n'eſt que le huitiéme d'un *marc*, ou le quart de 4 *onces*, ou la moitié de 2 *onces*, on prendra le huitiéme du multiplicateur considéré comme 51 *marcs*, ou le quart du produit $25^M\ 4^O$ qu'on a trouvé pour 4 *onces*, ou la moitié du produit $12^M\ 6^O$ qu'on a trouvé pour 2 *onces*; & l'on aura $6^M\ 3^O$.

3°. Comme nous avons le produit de 1 *once* multiplié par 51, nous partagerons en parties aliquotes de l'once, les 6 *gros* que nous devons multiplier; & ces parties aliquotes seront 4 *gros* & 2 *gros*.

Pour 4 *gros* qui sont la moitié de 1 *once*, nous prendrons la moitié du produit 6 *marcs* 3 *onces* que nous avons trouvé pour 1 *once*; & nous aurons $3^M\ 1^O\ 4^G$.

Pour 2 *gros*, nous prendrons la moitié du produit précédent $3^M\ 1^O\ 4^G$ que nous venons de trouver pour 4 *gros*; & nous aurons $1^M\ 4^O\ 6^G$.

Toutes les parties du produit étant ainsi trouvées, on les ajoûtera ensemble; & l'on aura $1273^M\ 3^O\ 2^G$ pour le produit demandé.

Avertissement.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que de la multiplication Arithmétique dont le multiplicateur doit être un nombre abstrait, & dont le produit doit par conséquent avoir des unités de même espece que celles du multiplicande. Nous allons maintenant traiter de la multiplication Géométrique que nous nommons ainsi, parce qu'elle est relative à l'étendue qui est l'objet de la Géométrie

L'un des facteurs de la multiplication géométrique, peut être une ligne ou une surface ; l'autre facteur doit toûjours être une ligne ; & l'espece du produit, est toûjours différente de celles de ses facteurs.

Si les deux facteurs de la multiplication sont des lignes, leur produit sera une surface; & l'un des facteurs étant une ligne, si l'autre facteur est une surface, le produit sera un solide.

Les deux facteurs étendus que l'on doit multiplier l'un par l'autre, se réduisent en mesures de même espece que ces étendues ; & l'on donne à leur multiplication, des noms dérivés de ceux des mesures qui servent d'unités à ces étendues.

Si les deux facteurs étendus de la multiplication sont réduits en toises, ou en pieds, ou en pouces, &c, qui ne sont que des parties de la toise, on donne à la multiplication le nom de *Toisé*.

Si les deux facteurs de la multiplication étoient des aunes ou des parties relatives à l'aune, on donneroit à la multiplication le nom d'*Aunage*.

Si les deux facteurs de la multiplication étoient des perches ou d'autres mesures relatives à l'arpent qui contient cent perches quarrées, on donneroit à la multiplication le nom d'*Arpentage*.

Comme l'aune, la perche, & les autres mesures dont nous faisons usage, sont relatives à la toise qui tient le premier rang parmi nos mesures ; & qu'il sera facile d'appliquer à d'autres mesures ce que nous allons dire de la toise, ou de la multiplication des lignes & des surfaces mesurées en toises ; nous nous contenterons d'expliquer le toisé.

DU TOISÉ.

90 On appelle *Toisé* l'art de mesurer les étendues des lignes, des superficies, & des solides, par le moyen de la toise ou des autres mesures qui ont rapport à la toise.

Mesurer à la toise, c'est chercher combien de fois la toise & ses parties sont contenues dans l'étendue qu'on veut mesurer.

Comme les mesures contenues dans une étendue, sont des parties de cette étendue, & sont par conséquent de même espece qu'elle ; on est obligé de considérer trois especes de toises, pour mesurer les trois différentes especes d'étendue. On considere des toises linéaires pour mesurer les distances & toutes les lignes ; des toises superficielles, pour mesurer les superficies ; & des toises solides, pour mesurer les solides.

On démontre en Géométrie qu'un parallélogramme est égal au produit de sa base multipliée par sa largeur ou hauteur ; par exemple qu'un parallélogramme dont la base a 6 toises de long, & dont la largeur ou hauteur est de 5 toises, contient 5 fois 6 toises quarrées, ou 30 toises quarrées dans sa superficie. On démontre aussi qu'un parallélépipede est égal au produit de la superficie de sa base multipliée par sa hauteur ; par exemple qu'un solide dont la base est un parallélogramme de 6 toises de long sur 5 toises de large, & dont la hauteur est de 4 toises, contient 120 toises cubes, parce que la base ayant 6 toises de long sur 5 toises de large, contient 30 toises quarrées de superficie, & que 30 toises quarrées de superficie, multipliées par 4 toises, produisent 120 toises cubes.

Comme ces deux propositions sont le fondement du toisé, l'on ne peut pas se dispenser d'en faire voir la vérité, du moins dans les parallélogrammes rectangles qu'on appelle communément quarrés longs, & dans les parallélépipedes rectangles.

I.

Fig. 1. 91 Soit un quarré long *ABCD*, dont la base *BC* & la hauteur *AB* soient mesurées avec la toise linéaire, qu'on appelle simplement *toise*; que *BG*, *GI*, *IL*, *LN*, *NP*, *PC*, soient les toises contenues dans la base *BC*, & que *AQ*, *QR*, *RS*, *ST*, *TB*, soient les toises contenues dans la largeur ou hauteur *AB*. Si par les points *G*, *I*, *L*, *N*, *P*, de la base, on mene à la hauteur *AB* des paralleles *GF*, *IH*, *LK*, *NM*, *PO*; l'on divisera le quarré long *ABCD* en autant de rectangles *ABGF*, *FGIH*, *HILK*, *KLNM*, *MNPO*, *OPCD*, qu'il y aura de toises dans la base *BC*.

Chacun de ces rectangles ayant une toise de large, & ayant de longueur autant de toises qu'il y en a dans la hauteur *AB* du quarré long, contiendra évidemment autant de toises quarrées qu'il y a de toises linéaires dans la hauteur *AB*. Ainsi pour avoir le nombre des toises quarrées contenues dans le quarré long *ABCD*, il faudra prendre le nombre des rectangles *ABGF*, *FGIH*, *HILK*, &c qui sont apuyés sur la base *BC*, ou le nombre des toises linéaires *BG*, *GI*, &c contenues dans la base *BC*, autant de fois qu'il y aura de toises quarrées dans chacun de ces rectangles, c'est-à-dire autant de fois qu'il y aura de toises linéaires dans la hauteur *AB*.

Mais prendre le nombre des toises linéaires qui sont dans la base *BC* du rectangle, autant de fois qu'il y a de toises linéaires dans la hauteur *AB* de ce rectangle, c'eſt multiplier le nombre des toiſes linéaires de la baſe *BC*, par le nombre des toiſes linéaires de la hauteur ou largeur *AB*.

Donc on aura le nombre des toiſes quarrées contenues dans un quarré long, en multipliant le nombre des toiſes linéaires de ſa baſe par le nombre des toiſes linéaires de ſa hauteur ou largeur.

Par exemples ſi la baſe *BC* du quarré long *ABCD* a 6 de toiſes long, & ſi la hauteur *AB* eſt de 5 toiſes, le quarré long *ABCD* contiendra 6 rectangles *ABGF*, *FGIH*, *HILK*, *KLNM*, *MNPO*, *OPCD*, qui auront chacun 5 toiſes de long ſur une toiſe de large, & qui contiendront par conſéquent chacun 5 toiſes quarrées. Ainſi le quarré long contiendra 6 fois 5 toiſes quarrées, qui font 30 toiſes quarrées.

Il eſt évident que ſi l'on avoit meſuré en pieds linéaires la baſe *BC* & la hauteur *AB* du quarré long, on auroit autant de bandes d'un pied de large qu'on trouveroit de pieds dans la baſe *BC*, & que chaque bande contiendroit autant de pieds quarrés qu'il y auroit de pieds linéaires dans la hauteur *AB* du quarré long *ABCD*. Ainſi en multipliant le nombre des pieds linéaires contenus dans la baſe *BC* d'un quarré long *ABCD*, par le nombre des pieds contenus dans ſa hauteur *AB*, l'on aura le nombre des pieds quarrés contenus dans la ſuperficie du quarré long *ABCD*.

Par exemple la toiſe quarrée ayant une toiſe de long ſur une toiſe de large, ſa baſe & ſa hauteur auront chacune 6 pieds linéaires de longueur. Ainſi ſa ſuperficie contiendra 6 bandes de 6 pieds quarrés chacune, c'eſt-à-dire 6 fois 6 pieds quarrés ou 36 pieds quarrés. Fig. 2.

Si le quarré *ABCD* repréſentoit un pied quarré, sa base *BC* seroit de 12 pouces linéaires, & sa hauteur *AB* seroit pareillement de 12 pouces linéaires. Ainsi sa surface seroit de 12 fois 12 pouces quarrés, ou de 144 pouces quarrés.

Par la même raison, un pouce quarré dont la base & la hauteur ont chacune 12 lignes linéaires, contient 12 fois 12 lignes quarrées : & ainsi des autres.

Il arrive souvent qu'on ne prend pas les mêmes mesures pour mesurer la base & la hauteur du quarré long. Dans ce cas, les mesures superficielles contenues dans la surface du quarré long, ne sont pas des mesures quarrées, mais des mesures qui ont pour longueur la mesure qu'on a prise pour mesurer la base, & pour largeur la mesure qui a servi à mesurer la hauteur.

Fig. 3. Par exemple si l'on veut savoir le nombre des briques posées à plat qui sont contenues dans un quarré long : comme une brique a 8 pouces de long sur 4 pouces de large ; on mesurera la longueur *BC*, avec une mesure qui aura 8 pouces de long ; & l'on mesurera la hauteur ou largeur *AB* du quarré long, avec une mesure qui n'aura que 4 pouces ; puis on multipliera le nombre des mesures de 8 pouces contenues dans la base *BC*, par le nombre des mesures de 4 pouces contenues dans la hauteur *AB* ; & le produit sera le nombre des briques, ou des mesures superficielles de 8 pouces de long & de 4 pouces de large, contenues dans l'aire du quarré long *ABCD*.

Lorsqu'on mesure à la toise la longueur & la largeur d'un quarré long, l'on ne trouve pas toûjours que la toise y soit contenue un certain nombre de fois sans reste ; & l'on est obligé de mesurer ce reste en parties de la toise, savoir en pieds, pouces, lignes, &c. : & comme les produits de ces mesures ne donnent par conséquent pas toûjours des toises quarrées sans reste, on eſt auſſi obligé d'évaluer ce reſte en parties de la toiſe quarrée.

Quoique les parties les plus réguliéres de la toiſe quarrée, ſoient des pieds quarrés, des pouces quarrés, & des lignes quarrées ; ce ne ſont point cependant ces parties que l'on emploie le plus ordinairement, & l'on aime mieux partager la toiſe quarrée en parties analogues à la toiſe linéaire. Ainſi de même que la toiſe linéaire eſt partagé en 6 pieds linéaires, que le pied linéaire eſt partagé en 12 pouces linéaires, & le pouce linéaire en 12 lignes linéaires ; l'on partage la toiſe quarrée en 6 rectangles de 1 pied de large & de 1 toiſe de long, qu'on devroit nommer des *pied-toiſe* ou des *toiſe-pied* à cauſe de leurs deux dimenſions ; l'on partage le rectangle *toiſe-pied* en douze parties égales qui ont chacune 1 toiſe de long & 1 pouce de large, & que l'on devroit nommer des *toiſe-pouce* ; enfin l'on diviſe chacun de ces nouveaux rectangles en 12 parties égales qui ont chacune 1 toiſe de long & 1 ligne de large, & qu'on devroit appeller des *toiſe-ligne* à cauſe des deux dimenſions qu'elles ont : & ainſi des autres meſures dont la toiſe eſt la dimenſion principale.

Lorſqu'on meſurera les côtés d'un quarré long au pied linéaire, on ne trouvera pas toujours que le pied y ſoit contenu un certain nombre de fois ſans reſte ; & l'on meſurera ce reſte en pouces & en lignes. Dans ce cas, le produit des deux dimenſions meſurées ne donnera pas toujours un nombre juſte de pieds quarrés ſans reſte ; & il faudra avoir recours aux parties du pied quarré pour meſurer ce reſte.

Les parties du pied quarré les plus régulieres relativement à la diviſion du pied en pouces & lignes, ſont le pouce quarré & la ligne quarrée. Mais comme il faut 144 pouces quarrés pour un pied quarré, & 144 lignes quarrées pour un pouce quarré ; & que le pied linéaire n'eſt diviſé qu'en 12 pouces & le pouce linéaire en 12 lignes; on aime mieux renoncer à la régularité des parties quarrées du pied, & diviſer le pied quarré en 12 parties égales qui ont chacune 1 pied de long ſur 1 pouce de large, & qu'on devroit nommer des *pied-pouce* à cauſe des deux dimenſions qu'elles ont.

On diviſe pareillement le *pied-pouce*, comme le pouce linéaire, en 12 parties égales, qui ont chacune 1 pied de long ſur 1 ligne de large, & que pour cette raiſon l'on devroit appeller des *pied-ligne.*

Il eſt évident, par ce qui vient d'être dit, que deux nombres de meſures linéaires égales, multipliés l'un par l'autre, produiſent un nombre de meſures ſuperficielles quarrées, qui ont pour côtés les meſures linéaires qui ſont au multiplicateur & au multiplicande. Par exemple un nombre de toiſes linéaires, multiplié par un nombre de toiſes linéaires, produit toûjours un nombre de toiſes quarrées; un nombre de pieds linéaires, multiplié par un nombre de pieds linéaires, produit un nombre de pieds quarrés: & ainſi des autres.

Il eſt clair auſſi qu'un nombre de meſures linéaires égales entr'elles, multiplié par un nombre d'autres meſures linéaires auſſi égales entr'elles, mais différentes des premieres, produit un nombre de meſures ſuperficielles qui ont pour côtés contigus les deux ſortes de meſures du multiplicande & du multiplicateur. Par exemple un nombre de toiſes linéaires, multiplié par un nombre de pieds linéaires, produira un nombre de meſures ſuperficielles qui auront une toiſe de long ſur 1 pied de large; un nombre de toiſes linéaires, multiplié par un nombre de pouces ou de lignes linéaires, produira un nombre de meſures ſuperficielles qui auront chacune 1 toiſe de long ſur 1 pouce, ou ſur 1 ligne de large; un nombre de pieds linéaires, multiplié par un nombre de pouces ou de lignes linéaires, produira un nombre de meſures ſuperficielles qui auront chacune 1 pied de long ſur 1 pouce, ou ſur 1 ligne de large: & ainſi des autres.

I I.

72 Soit un parallélépipede rectangle *ABCDE*, dont la longueur *AD*, la largeur *AB* ou *DC*, & l'épaiſſeur *DE*, ſoient meſurées à la toiſe linéaire; & ſuppoſons que ce ſolide ſoit refendu par des plans paralléles *HFI*, *KGH*, en autant de ſolides égaux d'une toiſe d'épaiſſeur, qu'il y a de toiſes dans ſon épaiſſeur *DE*. Fig. 4.

Chaque ſolide tel que *ABCDF* contenu entre deux plans paralléles *ABCD*, *HFI*, ayant une toiſe d'épaiſſeur ſuivant *DF*, contiendra autant de toiſes cubes qu'il y aura de toiſes quarrées dans la face rectangle *ABCD*; parce qu'on pourra placer une toiſe cube ſur chacune des toiſes quarrées de cette face; & que toutes les toiſes cubes qu'on placera ſur toutes ces toiſes quarrées, feront exactement contenues entre les deux plans paralléles *ABCD*, *HFI*, entre leſquels il y a une toiſe d'intervalle.

Mais nous venons de voir que la face *ABCD* contient un nombre de toiſes quarrées égal au produit de ſa longueur *AD* multipliée par ſa largeur *AB* ou *DC*. Donc chacun des ſolides d'une toiſe d'épaiſſeur, dans leſquels on a diviſé le parallélépipede *ABCDE*, contient un nombre de toiſes cubes, égal au produit de ſa longueur *AD* multipliée par ſa largeur *DC*. Et comme il y a dans le parallélépipede *ABCDE* autant de ces ſolides d'une toiſe d'épaiſſeur, qu'il y a de toiſes dans ſon épaiſſeur *DE*; on aura le nombre des toiſes cubes contenues dans ce parallélépipede rectangle *ABCDE*, en multipliant le produit de sa longueur *AD* & de sa largeur *DC*, mesurées en toises linéaires, par le nombre des toises contenues dans son épaisseur *DE*.

Par exemple si l'on suppose que la longueur *AD* soit de 6 toises;

Que la largeur *DC* soit de 5 toises;

Que l'épaisseur *DE* soit de 3 toises;

Le nombre des toises cubes contenues dans le solide *ABCDE*, sera égal au produit des trois nombres 6, 5, 3; & sera par conséquent de 90 toises cubes.

Si au lieu de mesurer en toises linéaires, la longueur *AD*, la largeur *DC*, & l'épaisseur *DE* du parallélépipede *ABCDE*, l'on avoit mesuré ces trois dimensions en pieds ou pouces ou lignes linéaires; il est évident qu'au lieu des toises cubes que l'on a trouvées daus ce parallélépipede, on auroit trouvé des pieds cubes, ou des pouces cubes, ou des lignes cubes.

La démonstration de cette proposition est précisément la même que celle que nous venons de donner, & peut lui être appliquée, en mettant simplement le nom de pied, ou de pouce, ou de ligne, au lieu de celui de toise.

Une toise cube est un parallélépipede rectangle qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large, & 6 pieds d'épaisseur. Ainsi le nombre des pieds cubes contenus dans une toise cube est égal au produit des trois nombres 6, 6, 6, multipliés ensemble; c'est-à-dire que la toise cube contient 216 pieds cubes.

Un pied cube est un parallélépipede rectangle qui a 12 pouces de long, 12 pouces de large, & 12 pouces d'épaisseur. Ainsi le pied cube contient un nombre de pouces cubes représenté par $12 \times 12 \times 12$, dont le produit

produit eſt 1728 ; c'eſt-à-dire que le pied cube contient 1728 pouces cubes.

Par la même raiſon, 1 pouce cube qui a 12 lignes de long, 12 lignes de large, & 12 lignes d'épaiſſeur, contient 1728 lignes cubes : & ainſi des autres.

Lorſqu'on meſure à la toiſe les dimenſions d'un parallélépipede rectangle, on ne trouve que rarement un nombre exact de toiſes linéaires dans ſa longueur, ſa largeur, & ſon épaiſſeur ; & il faut, pour meſurer le reſte, qui eſt moindre qu'une toiſe, avoir recours aux parties de la toiſes, qui ſont le pied, le pouce, la ligne : ainſi le produit de ces trois dimenſions ne ſera pas ordinairement un nombre exact de toiſes cubes ſans reſte ; & il faudra évaluer ce reſte en parties de la toiſe cube.

Quoique le pied cube, le pouce cube, & la ligne cube, ſoient les parties les plus régulieres de la toiſe cube, relativement à la diviſion de la toiſe linéaire en pieds, pouces, lignes ; ce n'eſt point en parties de ces eſpeces qu'on évalue le plus ordinairement les parties des ſolides qui ſont moindres que la toiſe cube, lorſque la plus grande partie du ſolide eſt eſtimée en toiſes cubes ; & l'on aime mieux, pour la comodité du calcul, diviſer la toiſe cube en parties proportionnelles à celles de la toiſe linéaire.

On diviſe donc la toiſe cube en ſix parallélépipedes égaux qui ont chacun 1 toiſe de long, 1 toiſe de large, & 1 pied de haut, & qui à cauſe de leurs trois dimenſions devroient s'appeller des *toiſe-toiſe-pied.*

On diviſe une *toiſe-toiſe-pied*, ou la ſixiéme partie de la toiſe cube, en 12 parties égales qui ont chacune 1 toiſe quarrée de baſe, c'eſt-a-dire 1 toiſe de long & 1 toiſe de large, ſur 1 pouce d'épaiſſeur, & qui à cauſe de cela devroient ſe nommer des *toiſe-toiſe-pouce.*

On divise aussi la *toise-toise-pouce*, ou la douziéme partie de la sixiéme partie de la toise cube, en 12 parties égales qui ont chacune 1 toise quarrée de base sur 1 ligne d'épaisseur, & qui à cause de leurs trois dimensions devroient être nommées des *toise-toise-ligne*: & ainsi des autres.

Lorsqu'on mesure les trois dimensions d'un parallélépipede au pied linéaire, & que le pied n'y est pas contenu un certain nombre de fois sans reste; on mesure le reste en pouces & lignes qui sont parties aliquotes du pied qu'on a pris pour la mesure principale. Dans ce cas, le solide du parallélépipede contient un certain nombre de pieds cubes, avec un reste qu'on évalue en parties du pied cube. Pour cela, on divise le pied cube en 12 parties égales, comme le pied linéaire; & ces parties qui ont 1 pied de long, 1 pied de large, & 1 pouce d'épaisseur, devroient s'appeller des *pied-pied-pouce*; c'est-à-dire qu'elles devroient porter le nom des trois dimensions qu'elles ont. On sous-divise ensuite le *pied-pied-pouce* en 12 parties égales qui ont chacune 1 pied de long, 1 pied de large, & 1 ligne d'épaisseur, & qui devroient se nommer des *pied-pied-ligne*, pour les distinguer par leurs trois dimensions.

Enfin lorsqu'on mesure un solide avec des mesures quelconque, l'usage est de prendre des mesures cubiques pour les mesures principales du solide; & pour mesurer la partie qui est plus petite qu'une mesure solide principale, on prend d'autres mesures plus petites, en sous-divisant la mesure cubique principale en autant de parties égales, que la mesure linéaire en a: ensorte que toutes les mesures solides qui résultent de ces divisions, ont deux dimensions égales à celles de la mesure principale.

On peut donc conclure de ce qui vient d'être dit, qu'un nombre de mesures superficielles égales entr'elles, de longueur & de largeur quelconques, multiplié par un nombre de mesures linéaires de longueur quelconque, produit un nombre de mesures solides, qui ont pour leurs trois dimensions la longueur & la largeur d'une mesure superficielle du multiplicande, & la longueur d'une mesure du multiplicateur; ou qui ont pour bases des mesures du multiplicande, & pour hauteur des mesures du multiplicateur.

Par exemple si l'on multiplie un nombre de toises quarrées, qui ont 1 toise de long sur 1 toise de large, par un nombre de toises linéaires, le produit sera composé d'un nombre de mesures solides qui auront 1 toise de long, 1 toise de large, & 1 toise d'épaisseur; c'est-à-dire qui auront 1 toise quarrée de base sur 1 toise de hauteur, & qui seront par conséquent des toises cubes.

Si l'on multiplie un nombre de toises quarrées par un nombre de pieds, ou de pouces, ou de lignes linéaires, le produit contiendra un nombre de mesures solides qui auront chacune 1 toise quarrée de base, sur 1 pied ou 1 pouce ou 1 ligne de hauteur; c'est-à-dire qui auront 1 toise de long, 1 toise de large, & 1 pied ou 1 pouce ou 1 ligne d'épaisseur.

Si l'on multiplioit un nombre de mesures superficielles qui eussent deux dimensions différentes, par des mesures linéaires encore différentes de ces dimensions; par exemple si l'on multiplioit un nombre de mesures superficielles de 8 pouces de long sur 4 pouces de large, par un nombre de mesures linéaires de 2 pouces; on auroit pour le produit un nombre de mesures solides chacune de 8 pouces de long, 4 pouces de large, & 2 pouces d'épaisseur, semblables à des briques; & ainsi des autres.

Valeur des différentes unités relatives à la Toise linéaire, à la Toise quarrée, & à la Toise cubique, avec les caractéres distinctifs de ces différentes unités.

Pour les Mesures linéaires.

T	*signifie*	toise	$1T$	*vaut*	$6P$
P		pied	$1P$		$12p$
p		pouce	$1p$		$12L$
L		ligne	$1L$		12^{I}
I		point *ou* prime			

Pour les Mesures superficielles.

TT	toise quarrée	$1TT$	$36PP$		
PP	pied quarré	$1PP$	$144pp$		
pp	pouce quarré	$1pp$	$144LL$		
LL	ligne quarrée				
		$1TT$	$6TP$		
TP	toise-pied	$1TP$	$12Tp$	*ou*	$6PP$
Tp	toise-pouce	$1Tp$	$12TL$	*ou*	$\frac{1}{2}PP$
TL	toise-ligne	$1TL$	$12T^{I}$	*ou*	$6pp$
T^{I}	toise-prime	$1T^{I}$	$12T^{II}$	*ou*	$\frac{1}{2}pp$
T^{II}	toise-seconde	$1T^{II}$	$12T^{III}$	*ou*	$6LL$
T^{III}	toise-tierce	$1T^{III}$			$\frac{1}{2}LL$
		$1PP$	$12Pp$		
Pp	pied-pouce	$1Pp$	$12PL$	*ou*	$12pp$
PL	pied-ligne	$1PL$	$12P^{I}$	*ou*	$1pp$
P^{I}	pied-prime	$1P^{I}$	$12P^{II}$	*ou*	$12LL$
P^{II}	pied-seconde	$1P^{III}$			$1LL$
		$1pp$	$12pL$		
pL	pouce-ligne	$1pL$	$12p^{I}$	*ou*	$12LL$
p^{I}	pouce-prime	$1p^{I}$			$1LL$

POUR LES MESURES SOLIDES.

TTT *signifie*	toise cube	$1TTT$	*vaut*	$216PPP$
PPP	pied cube	$1PPP$		$1728ppp$
ppp	pouce cube	$1ppp$		$1728LLL$
LLL	ligne cube			
		$1TTT$	$6TTP$	
TTP	toise-toise-pied	$1TTP$	$12TTp$ *ou*	$36PPP$
TTp	toise-toise pouce	$1TTp$	$12TTL$	$3PPP$
TTL	toise-toise-ligne	$1TTL$	$12TT^{I}$	$\frac{1}{4}PPP$
TT^{I}	toise-toise-prime	$1TT^{I}$	$12TT^{II}$	$36ppp$
TT^{II}	toise-toise-seconde	$1TT^{II}$	$12TT^{III}$	$3ppp$
TT^{III}	toile-toise-tierce	$1TT^{III}$	$12TT^{IV}$	$\frac{1}{4}ppp$
TT^{IV}	toise-toise-quarte	$1TT^{IV}$	$12TT^{V}$	$36LLL$
TT^{V}	toise-toise-quinte	$1TT^{V}$	$12TT^{VI}$	$3LLL$
TT^{VI}	toise-toise-sixte	$1TT^{VI}$		$\frac{1}{4}LLL$
		$1PPP$	$12PPp$	
PPp	pied-pied-pouce	$1PPp$	$12PPL$	$144ppp$
PPL	pied-pied-ligne	$1PPL$	$12PP^{I}$	$12ppp$
PP^{I}	pied-pied-prime	$1PP^{I}$	$12PP^{II}$	$1ppp$
PP^{II}	pied-pied-seconde	$1PP^{II}$	$12PP^{III}$	$144LLL$
PP^{III}	pied-pied-tierce	$1PP^{III}$	$12PP^{IV}$	$12LLL$
PP^{IV}	pied-pied-quarte	$1PP^{IV}$		$1LLL$
		$1ppp$	$12ppL$	
ppL	pouce-pouce-ligne	$1ppL$	$12pp^{I}$	$144LLL$
pp^{I}	pouce-pouce-prime	$1pp^{I}$	$12pp^{II}$	$12LLL$
pp^{II}	pouce-pouce-seconde	$1pp^{II}$		$1LLL$
TPP	toise-pied-pied	$1TPP$	$2TTp$	$6PPP$
TPp	toise-pied-pouce	$1TPp$	$2TTL$	$\frac{1}{2}PPP$
TPL	toise-pied-ligne	$1TPL$	$2TT^{I}$	$72ppp$
Tpp	toise-pouce-pouce	$1Tpp$	$2TT^{I}$	$72ppp$
TpL	toise-pouce-ligne	$1TpL$	$2TT^{II}$	$6ppp$
TLL	toise-ligne-ligne	$1TLL$	$2TT^{III}$	$\frac{1}{2}ppp$

PROBLÈME.

93

Multiplier	57^{T}	4^{P}	$8p$	
Par	8^{T}	3^{P}	$6p$	
Pour 8^{T}	462^{TT}	1^{TP}	$4^{T}p$	
Pour 3^{P}	28	5	4	
Pour $6p$	4	4	10	8^{TL}
Produit total	495^{TT}	5^{TP}	$6^{T}p$	8^{TL}

Quoiqu'on puisse regarder comme multiplicateur le facteur qu'on voudra ; nous prenons, pour la plus grande facilité, celui qui a le moins de chiffres au nombre des toises.

Lorsque le nombre des toises du multiplicateur, est exprimé par un seul chiffre, comme dans cet exemple ; on multiplie d'abord chaque partie du multiplicande, en commençant par les parties dont les unités sont les plus petites, par le nombre des toises du multiplicateur, comme on va l'expliquer. Ensuite pour multiplier le multiplicande par les autres parties du multiplicateur, on prend des parties du multiplicande proportionnelles à ce que les parties du multiplicateur sont relativement à la toise. Voici le détail des opérations.

1°. On multipliera 8 *pouces* par 8 *toises*, ce qui produira 64 *toise-pouce*. Comme ce nombre de *toise-pouce* contient 5 *toise-pied* & 4 *toise-pouce*, l'on écrira $4^{T}p$ au-dessous des pouces, & l'on retiendra 5^{TP} pour les joindre avec les *toise-pied* que l'on va trouver.

On multipliera 4^{P} par 8^{T}, ce qui produira 32^{TP}, qui avec les 5^{TP} qu'on a retenues, feront 37^{TP}. Comme ce nombre de *toise-pied* contient 36^{TP} qui font 6 *toises quarrées*, avec 1^{TP} de plus, on écrira 1^{TP}

fous les pieds, & l'on retiendra 6 *toises quarrées* pour les joindre avec les autres *toises quarrées* que l'on va trouver.

Enfin l'on multipliera 57 *toises* par 8 *toises*, suivant les regles qui ont été expliquées pour multiplier les nombres incomplexes par des nombres entiers, & l'on joindra au produit les 6 *toises quarrées* qu'on a retenues; ce qui produira en tout 462 *toises quarrées*. Ainsi $57^T\ 4^P\ 8^p$ étant multipliés par 8^T, produisent $462^{TT}\ 1^{TP}\ 1^{Tp}$.

2°. Pour multiplier le même multiplicande 57^T, $4^P\ 8^p$, par la partie 3^P du multiplicateur; on remarquera que si ce multiplicande étoit multiplié par une *toise*, il produiroit $57^{TT}\ 4^{TP}\ 8^{Tp}$, c'est-à-dire qu'on auroit un produit égal au multiplicande, avec cette seule différence que chaque partie acquéreroit une dimension de 1 *toise* : ainsi en multipliant par 3 *pieds* qui ne sont que la moitié d'une *toise*, on ne doit avoir pour le produit, que la moitié du multiplicande, en donnant à chaque partie une seconde dimension de 1 *toise*. Or cette moitié sera 28 *toise-toise*, 5 *toise-pied* & 4 *toise-pouce*; parce que la moitié de 57^{TT} est 28^{TT}, & il reste 1 ^{TT} qui vaut 6 ^{TP}, lesquels avec 4 ^{TP} font 10 ^{TP}, dont la moitié est 5 ^{TP}, & que la moitié de 8 ^{TP} est 4 ^{Tp}.

3°. Pour multiplier le multiplicande par les 6 *pouces* qui sont au multiplicateur; on remarquera que 6 *pouces* sont la sixiéme partie de 3 *pieds*, & qu'ils doivent par conséquent donner la sixéme partie du produit $28^{TT}\ 5^{TP}\ 4^{Tp}$, qu'on vient de trouver pour 3 *pieds*. Or prenant la sixiéme partie de ce produit, on aura $4^{TT}\ 4^{TP}\ 10^{Tp}\ 8^{TL}$; parce que le sixiéme de 28^{TT} est 4^{TT}, avec un reste de 4^{TT} qui valent 24^{TP} dont le sixiéme est 4^{TP}; que 5^{TP} valent $60^{T}p$, dont le sixiéme sera $10^{T}p$; qu'enfin les $4^{T}p$ valant $48^{T}L$, leur sixiéme sera $8^{T}L$.

Ajoutant ensemble les trois produits particuliers qu'on vient de trouver, leur somme 495^{TT} 5^{TP} $6^{T}p$ $8^{T}L$ sera le produit demandé.

PROBLÊME.

94	*Multiplier*	57^{T}	4^{P}	$8p$
	Par	68^{T}	3^{P}	
		456		
		342		
		22	4	
		22	4	
		7	3	4
		28	5	4
	Produit total	3957^{TT}	4^{TP}	$8^{T}p$

La partie 68^{T} du multiplicateur, par laquelle il faut commencer la multiplication, étant composée de plusieurs chiffres; l'on ne pourra pas multiplier directement, comme on a fait dans le Problême précédent, toutes les parties du multiplicateur par cette premiere partie du multiplicateur: mais après avoir multiplié la partie 57 *toises* du multiplicande par 68 *toises* comme il a été dit pour les nombres incomplexes, l'on prendra pour les produits des autres parties du multiplicande par 68, des parties de 68 proportionnelles à ce que sont les parties 4 *pieds* 8 *pouces* du multiplicande relativement à la *toise*. Cela fait, on aura plusieurs produits particuliers, dont la somme sera le produit de 57^{T} 4^{P} $8p$ par 68 *toises*. Ensuite on multipliera, comme il a été dit dans le Problême précédent, le même multiplicande 57^{T} 4^{P} $8p$ par 3 *pieds*.

1°. En multipliant la partie 57^T du multiplicande par 68^T, l'on aura ces deux produits particuliers, 456^{TT} & 3420^{TT}.

2°. Pour multiplier 4 *pieds* par 68 *toises*, l'on remarquera que 1 *toise* multipliée par 68^T donneroit 68 *toises quarrées*, c'est-à-dire un nombre de toises quarrées égal au multiplicateur. Ainsi 4 *pieds*, qui ne sont que les deux tiers d'une *toise*, ne doivent donner que les deux tiers de 68 *toises quarrées*; & chaque tiers étant 22^{TT} 4^{TP}, on écrira deux fois 22^{TT} 4^{TP}.

3°. Pour multiplier 8 *pouces* par 68 *toises*; l'on remarquera que 8 *pouces* sont le tiers de 2 *pieds* qui ont produit 22^{TT} 4^{TP}. Ainsi pour 8 *pouces* l'on prendra le tiers de 22^{TT} 4^{TP}, qui sera 7^{TT} 3^{TP} 4^{Tp}.

Jusqu'ici l'on a seulement multiplié 57^T 4^P 8^p par 68^T. Ainsi il nous reste à multiplier le même multiplicande par 5 *pieds* qui donneront, comme dans l'exemple précédent, 28^{TT} 5^{TP} 4^{Tp}.

Ajoûtant ensemble tous ces produits particuliers, on aura 3957^{TT} 4^{TP} 8^{Tp} pour le produit demandé.

PROBLÈME.

95	*Multiplier*	3957^{TT}	4^{TP}	8^{Tp}	
	Par	22^T	2^P	6^p	
		7914^{TTT}			
		7914			
		7	2^{TTP}		
		7	2		
		2	2	8^{TTp}	
		1319	1	6	8^{TTL}
		329	4	10	8
	Produit total	88720^{TTT}	1^{TTP}	1^{TTp}	4^{TTL}

On se proposera d'abord de multiplier tout le multiplicande par 22^T : & comme il n'est pas facile d'en multiplier directement toutes les parties par 22^T, suivant la méthode du No. 93 ; on commencera par multiplier le nombre des *toise-toise* du multiplicande par 22^T, & l'on prendra ensuite pour les produits des autres parties du multiplicande par 22^T, des parties de 22^{TTT}, qui seront proportionnelles à ce que sont les parties 4^{TP} 8^{Tp} du multiplicande relativement à la *toise quarrée* ; comme on a fait (No. 94.).

1°. En multipliant la partie 3957^{TT} du multiplicande par 22^T, on aura ces deux produits particuliers 7914^{TTT} & 79140^{TTT}.

2°. Pour multiplier 4^{TP} par 22^T, on remarquera que si l'on avoit eu 1^{TT} à multiplier par 22^T, on auroit eu 22^{TTT} pour le produit. Ainsi puisque les 4^{TP} qu'on doit multiplier par 22^T ne sont que les deux tiers de 1^{TT}, on ne doit avoir que deux fois le tiers de 22^{TTT} au produit. Or le tiers de 22^{TTT} étant 7^{TTT} 2^{TTP}, on écrira deux fois ce tiers au produit.

3°. Comme les 8^{Tp} du multiplicande ne sont que le tiers de 2^{TP}, dont le produit par 22^T a été trouvé de 7^{TTT} 2^{TTP}, le produit de 8^{Tp} par 22^T ne doit être que le tiers de 7^{TTT} 2^{TTP}, qu'on trouvera de 2^{TTT} 2^{TTP} 8^{TTp}.

Jusqu'ici le multiplicande n'a été multiplié que par 22^T : ainsi il nous reste à le multiplier par 2^P 6^p.

4°. Si le multiplicande devoit être multiplié par 1^T, on auroit pour le produit 3957^{TTT} 4^{TTP} 8^{TTp}. Donc, puisqu'il doit être multiplié par 2^P qui ne sont que le tiers de 1^T, on n'aura pour le produit que le tiers de 3957^{TTT} 4^{TTP} 8^{TTp}, savoir 1319^{TTT} 1^{TTP} 6^{TTp} 8^{TTL}.

5°. Comme $6p$ ne font que le quart de 2^P, on ne doit trouver pour le produit de la multiplication par $6p$, que le quart du produit 1319^{TTT} 1^{TTP} 6^{TTp} 8^{TTL}, qu'on a trouvé pour 2^P; & ce quart sera 329^{TTT} 4^{TTP} 10^{TTp} 8^{TTL}.

Ajoûtant ensemble tous ces produits particuliers, on aura 88720^{TTT} 1^{TTP} 1^{TTp} 4^{TTL} pour le produit demandé.

PROBLÈME.

96 *Multiplier ensemble les trois nombres complexes suivans.*

57^T	4^P	$8p$
68^T	3^P	
22^T	2^P	$6p$

On multipliera d'abord les deux premiers nombres complexes l'un par l'autre. Ensuite on multipliera leur produit, par le troisiéme nombre complexe proposé.

1°. En multipliant	57^T	4^P	$8p$
par	68^T	3^P	
On aura (N°. 94.) le produit	3957^{TT}	4^{TP}	8^{Tp}
2°. Ce produit	3957^{TT}	4^{TP}	8^{Tp}
multiplié par	22^T	2^P	$6p$

Donnera (N°. 95.) 88720^{TTT} 1^{TTP} 1^{TTp} 4^{TTL}

pour le produit de la multiplication des trois nombres complexes proposés.

REMARQUE.

97 Jusqu'ici nous n'avons employé dans les produits des multiplications que des toises quarrées & cubiques, avec des parties de ces toises divisées en 6 & sous-divisées continuellement en 12. Mais il arrive souvent que, lorsqu'on a trouvé la valeur d'une surface en toises quarrées & en mesures plus petites qui ont toutes une toise de long sur des largeurs égales aux parties dans lesquelles on divise ordinairement la toise linéaire, on veut réduire toutes ces mesuras moindres que la toise quarrée, en mesures quarrées, c'est-à-dire en pieds quarrés, en pouces quarrés, & en lignes quarrées. Il peut aussi arriver qu'après avoir trouvé la solidité d'un corps en toises cubes, & en d'autres mesures solides qui ont toutes une toise quarrée de base, sur des épaisseurs égales aux parties dans lesquelles on divise la toise linéaire, on veuille réduire toutes les mesures moindres que la toise cube, en mesures cubes, savoir en pieds cubes, en pouces cubes & en lignes cubes. Ainsi il faut avoir des regles pour réduire les mesures superficielles moindres que la toise quarrée, en pieds quarrés, pouces qnarrés & lignes quarrées; & pour réduire les mesures solides moindres que la toise cube, en pieds cubes, pouces cubes & lignes cubes.

I.

Pour réduire en pieds quarrés, pouces quarrés & lignes quarrées, les mesures superficielles moindres que la toise quarrée.

1°. On multipliera par 6 le nombre des *TP*, & le produit sera des pieds quarrés.

2°. Chaque *toise-pouce* ayant 72 *pouces* de long sur 1 *pouce* de large, vaut 72 *pouces qnarrés*, ou la moitié d'un pied quarré. Ainſi l'on prendra la moitié du nombre des *toiſe-pouce* qu'on aura, & cette moitié donnera des *pieds quarrés*; & ſi en prenant la moitié il reſte 1, on mettra 72 *pouces quarrés* pour la *toiſe-pouce* reſtante.

3°. Chaque *toiſe-ligne* vaut la douziéme partie d'une *toiſe-pouce*, & la *toiſe-pouce* vaut 72 *pouces quarrés* : ainſi la *toiſe-ligne* vaut 6 *pouces quarrés.* On multipliera donc le nombre des *toiſe-ligne* par 6, & l'on portera le produit aux *pouces quarrés.*

4°. Chaque unité des meſures affectées de la marque T^{I} vaut la douziéme partie d'une *toiſe-ligne* qui vaut 6 *pouces quarrés* : ainſi chaque T^{I} vaut $\frac{1}{2}$ *pouce quarré*, ou 72 *lignes quarrées.* Donc en prenant la moitié du nombre des T^{I}, on aura des *pouces quarrés*; & s'il reſte 1, l'on mettra 72 *lignes quarrées* pour cette unité reſtante.

5° Chaque T^{II} vaut $6LL$, parce que $1T^{II}$ eſt la douziéme partie de $1T^{I}$ qui vaut 72 *lignes quarrées.* Donc en multipliant le nombre des T^{II} par 6, on les réduira en *lignes quarrées.*

6°. On fera voir de même que chaque T^{III} vaut $\frac{1}{2}LL$ Donc en prenant la moitié du nombre des T^{III}, on les réduira en *lignes quarrées* : & ainſi des autres parties continuellement 12 fois plus petites, qu'on pourra réduire en *primes quarrées*, qui ſont des *cent-quarante-quatriémes parties de ligne quarrée.*

Lorſque les deux facteurs de la multiplication n'auront pas des parties moindres que les lignes, & que les toiſes ſeront les parties principales, on n'aura jamais au produit des parties moindres que les T^{III} *dont deux valent une ligne quarrée : car ſi l'on réduiſoit les deux facteurs de la multiplication en lignes, le produit ne contiendroit que des lignes quarrées.*

Exemple.

On propose de réduire en pieds quarrés, pouces quarrés & lignes quarrées, *les mesures qui sont moindres que la* toise quarrée *dans ce produit.*

120851^{TT}	5^{TP}	5^{Tp}	9^{TL}	$0^{T^{I}}$	$4^{T^{II}}$	$8^{T^{III}}$
	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
	30^{PP}	72^{pp}	24^{LL}			
	2	54	4			
120851^{TT}	32^{PP}	126^{pp}	28^{LL}			

La premiere partie étant composée de *toises quarrées* qui sont les mesures principales, on n'y changera rien. Pour réduire les autres parties, l'on écrira 6 sous les TP, $\frac{1}{2}$ sous les Tp, 6 sous les TL, $\frac{1}{2}$ sous les T^{I}, 6 sous les T^{II}, & $\frac{1}{2}$ sous les T^{III}. Ensuite on multipliera chaque partie du produit par le nombre qu'on aura écrit au-dessous de lui, savoir la premiere, la troisiéme & la cinquiéme parties après les *toises quarrées* par 6; & la seconde, la quatriéme & la sixiéme parties après les *toises quarrées* par $\frac{1}{2}$: en observant que la premiere & la seconde parties après les *toises*, qu'on multipliera par 6 & par $\frac{1}{2}$, donneront des *pieds quarrés*; que la troisiéme & la quatriéme, multipliés par 6 & par $\frac{1}{2}$, donneront des *pouces quarrés*; & que la cinquiéme & la sixiéme parties, multipliées par 6 & par $\frac{1}{2}$, donneront des *lignes quarrées*.

On dira donc: 6 fois 5^{TP} font 30^{PP}, qu'on écrira au dessous avec le caractere PP qui signifie *pied quarré*. Puis on dira: la moitié de 5^{Tp} est $2^{PP}\frac{1}{2}$, c'est-à-dire 2 *pieds quarrés*, & 72 *pouces quarrés*: ainsi l'on écrira 2^{PP} au-dessous de 30^{PP}, & 72^{pp} dans la colonne suivante.

Ensuite on multipliera 9^{TL} par 6, ce qui produira 54*pp* qu'on écrira dans la colonne des *pouces quarrés* au-dessous de 72*pp*; & l'on multipliera $0^{T\,I}$ par $\frac{1}{2}$, ce qui ne produira rien de plus pour les *pouces quarrés*.

Enfin l'on multipliera $4^{T\,II}$ par 6, ce qui produira 24 *lignes quarrées*; & l'on multipliera $8^{T\,III}$ par $\frac{1}{2}$, ce qui produira encore 4 *lignes quarrées*.

Ajoûtant ensemble les nouvelles mesures quarrées de même espece, on trouvera que le produit proposé, $120851^{TT}\ 5^{TP}\ 5^{Tp}\ 9^{TL}\ 0^{T\,I}\ 4^{T\,II}\ 8^{T\,III}$ se réduit aux mesures quarrées $120851^{TT}\ 32^{PP}\ 126pp\ 28^{LL}$.

II.

Pour réduire en *pieds cubes*, *pouces cubes* & *lignes cubes*, les mesures solides qui ont une toise quarrée de base, sur une épaisseur égale aux parties dans lesquelles on divise ordinairement la toise linéaire.

1°. Comme la *toise quarrée* contient 36 *pieds quarrés*; & que 1^{TTP} est le produit de 1 *toise quarrée* ou de 36 *pieds quarrés*, multipliés par 1 pied, ce qui fait 36 *pieds cubes*; il est clair qu'en multipliant le nombre des *TTP* par 36, on les convertira en *pieds cubes*.

2°. Chaque *TTp* est la douziéme partie de 1^{TTP} qui vaut 36 *pieds cubes*. Ainsi chaque *TTp* vaut 3 *pieds cubes*; & par conséquent, si l'on multiplie par 3 le nombre des *TTp*, on les convertira en *pieds cubes*.

3°. Chaque *TTL* est la douziéme partie de 1^{TTp} qui vaut 3 *pieds cubes*. Ainsi chaque *TTL* est $\frac{1}{4}$ de *pied cube*; & comme le *pied cube* vaut 1728 *pouces cubes*, chaque *TTL* vaudra 432 *pouces cubes*. Donc en divisant le nombre des *TTL* par 4, on aura encore des *pieds cubes*; & s'il reste quelques unités qui ne puissent pas être divisées par 4, on les multipliera par 432, & le produit sera des *pouces cubes*; c'est-à-dire que pour $1TTL$ on mettra $432ppp$; pour $2TTL$ on mettra $864ppp$; & pour $3TTL$ on mettra $1296ppp$.

4°. Chaque TT^{I} est la douziéme partie de $1TTL$ qui vaut 432 *pouces cubes*. Ainsi $1TT^{I}$ vaut 36 *pouces cubes* : donc en multipliant le nombre des TT^{I} par 36, on les convertira en *pouces cubes*.

5°. $1TT^{II}$ est la douziéme partie de $1TT^{I}$ qui vaut 36 *pouces cubes*. Ainsi $1TT^{II}$ vaut 3 *pouces cubes* : donc en multipliant le nombre des TT^{II} par 3, on les convertira en *pouces cubes*.

6°. $1TT^{III}$ est la douziéme partie de $1TT^{II}$ qui vaut 3 *pouces cubes*. Ainsi $1TT^{III}$ vaut $\frac{1}{4}$ de *pouce cube* ou 432 *lignes cubes* : donc si l'on prend le quart du nombre des TT^{III}, on les convertira en *pouces cubes*; & s'il reste 1 ou 2 ou 3 unités, on prendra pour elles 432, ou 864, ou 1296 *lignes cubes*.

7°. $1TT^{IV}$ est la douziéme partie de $1TT^{III}$ qui vaut 432 *lignes cubes*. Ainsi $1TT^{IV}$ vaut 36 *lignes cubes* : donc en multipliant le nombre des TT^{IV} par 36, on les convertira en *lignes cubes*.

8°. $1TT^{V}$ est la douziéme partie de $1TT^{IV}$ qui vaut 36 *lignes cubes*. Ainsi $1TT^{V}$ vaut 3 *lignes cubes* : donc en multipliant le nombre des TT^{V} par 3, on les convertira en *lignes cubes*.

9°. Enfin $1TT^{VI}$ est le douziéme de $1TT^{V}$ qui vaut 3 *lignes cubes*. Ainsi $1TT^{VI}$ vaut $\frac{1}{4}$ de *ligne cube* : & par conséquent, si l'on divise le nombre des TT^{VI} par 4, on les convertira en *lignes cubes*.

On doit remarquer ici que le nombre des TT^{VI} sera toujours divisible par 4, & sera par conséquent toujours 0, ou 4, ou 8, toutes les fois ques les trois nombres complexes qu'on aura multipliés ensemble, n'auront point d'unités moindres que la ligne. Car si si le nombre des TT^{VI} étant divisé par 4, l'on avoit 1 ou 2 ou 3 unités de reste, ces unités restantes vaudroient ensemble quelque chose de moins que la ligne cube ; ce qui n'est pas possible ; puisque trois nombres qui ne renferment point d'unités moindres que la ligne, étant multipliés ensemble, ne peuvent pas produire des unités moindres que la ligne cube.

Exemple.

On propose de réduire en pieds cubes, pouces cubes, & lignes cubes, *les nombres suivans de mesures solides qui ont toutes une toise quarrée de base, sur différentes épaisseurs égales aux parties dans lesquelles on divise ordinairement la toise linéaire.*

0^{TTP}	0^{TTp}	2^{TTL}	3^{TTI}	5^{TTII}	5^{TTIII}	2^{TTIV}	2^{TTV}	8^{TTVI}
36	3	$\frac{1}{4}$	36	3	$\frac{1}{4}$	36	3	$\frac{1}{4}$
0^{PPP}			864^{ppp}			432^{LLL}		
			108			72		
			15			6		
			1			2		
0^{PPP}			988^{ppp}			512^{LLL}		

Sous les trois premiers nombres qui donneront des pieds cubes, on écrira ces trois nombres absolus 36, 3, $\frac{1}{4}$. Sous les trois nombres suivans qui donneront des pouces cubes, on écrira les mêmes nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$. Enfin sous les trois derniers nombres qui peuvent donner des lignes cubes, on écrira encore les mêmes nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$.

Ensuite on multipliera chaque nombre de mesures, par le nombre absolu qu'on aura écrit au-dessous de lui ; & comme les trois premiers ne pourront pas donner une unité, la réduction ne donnera point de pieds cubes. Mais comme il restera 2 toise-toise-lignes qui multipliées par $\frac{1}{4}$ ou divisées par 4, donneront $\frac{1}{2}$ pied, cube, ou la moitié de 1728 pouces cubes; on écrira pour cette moitié, 864 au rang destiné pour les pouces cubes.

Multipliant les trois nombres suivans $3TT^{I}$ $5TT^{II}$ $5TT^{III}$ qui doivent donner des pouces cubes, par les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$ qui sont au-dessous d'eux; on aura ces trois produits 108 pouces cubes, 15 pouces cubes & 1 $\frac{1}{4}$ pouce cube: ainsi l'on écrira 108, 15 & 1 au-dessous des 864 pouces cubes qu'on a déja trouvés: & comme $\frac{1}{4}$ pouce cube vaut 432 lignes cubes, on écrira 432 lignes cubes au lieu qu'on a destiné aux lignes cubes.

Enfin multipliant les trois derniers nombres de mesures, qui doivent donner des lignes cubes, par les trois nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, qui sont au-dessous d'eux; le premier produit sera 72 lignes cubes, le second sera 6 lignes cubes, & le troisiéme sera 2 lignes cubes.

Toutes les parties du produit proposé étant ainsi transformées en mesures cubiques, on en fera l'addition, & l'on aura $0PPP$ $988ppp$ $512LLL$.

CHAPITRE IV.

De la Division des nombres complexes.

98 Le diviseur donné pour diviser un nombre complexe, est ou incomplexe ou complexe.

Lorsque le diviseur donné est incomplexe, la division des nombres complexes ne differe pas de la division des nombres incomplexes. On la fait en divisant chaque partie du nombre complexe par le diviseur incomplexe donné, & en commençant par la division de la partie dont les unités sont de la plus grande espéce. Par exemple si l'on veut diviser un nombre complexe composé de livres, de sols & de deniers, on commence par diviser la partie des livres; ensuite on divise la partie des sols, en y ajoûtant la valeur des livres qui n'ont pas pû être divisées; enfin l'on finit par la division de la partie des deniers, en y joignant la valeur de la partie des sols qui n'a pas pû être divisée dans la division précédente.

Lorsque le diviseur donné est complexe, on le rend incomplexe en le multipliant par des nombres convenables, jusqu'à ce que toutes les parties qui ont des unités moindres que l'unité principale, soient évanouies. Et pour que le quotient soit le même qu'il seroit, si l'on divisoit par le diviseur donné sans le multiplier; on multiplie le dividende par les mêmes nombres qui ont servi à multiplier le diviseur, pour le rendre incomplexe; la raison de cette opération est que, un dividende & un diviseur multipliés également, donnent le même quotient qu'ils auroient donné s'ils n'avoient pas été multipliés.

Lorsque le diviseur est un nombre abstrait, les unités du quotient sont de même espéce que celles du dividende; parce que le diviseur abstrait marque par le nombre de ses unités, que le dividende doit être partagé dans un certain nombre de parties égales; & qu'il est évident que les parties d'un dividende sont de même espéce que ce dividende.

Lorsque le diviseur est un nombre concret, ses unités doivent toujours être de même espéce que celles du dividende, à moins que le dividende ne soit un nombre de mesures superficielles, ou solides: car dans ce cas, le diviseur concret peut être un nombre concret de mesures qui ont une ou deux dimensions de moins que les unités du dividende.

Si le dividende & le diviseur sont composés des mêmes espéces d'unités, le quotient est toûjours un nombre abstrait; puisqu'il doit exprimer combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.

Si le dividende contient des unités ou mesures quarrées, & que le diviseur contienne des mesures ou unités qui soient les côtés de ces mesures quarrées; le quotient contiendra des unités qui seront des côtés des mêmes mesures quarrées.

Et pour donner une regle générale : lorsque le dividende sera composé d'un nombre de mesures quelconques qui auront un certain nombre de dimensions, & que le diviseur sera composé d'unités qui auront quelques dimensions des unités du dividende; les unités du quotient auront toûjours les dimensions des unités du dividende, qui ne sont point aux unités du diviseur.

Tout ce qu'on vient de dire au sujet des différentes unités des quotiens, s'éclaircira dans des exemples.

EXEMPLE PREMIER.

On propose de diviser le nombre concret complexe 38386# 5ß 4ᵭ, par le nombre abstrait incomplexe 74.

Dividende	38386# 5ß 4ᵭ	74 *diviseur*
	370	518# 14ß 8ᵭ *quotient*
	138	
	74	
	646	
	592	
Reste des *livres* joint aux *sols*	54# 5ß *ou* 1085ß	
	20	74
		345
		296
Reste des sols *joint aux* deniers	49ß 4ᵭ *ou* 592ᵭ	
	12	592
		000

On écrira le diviseur à la droite du dividende, comme il a été dit pour la division des nombres incomplexes, & l'on tirera ſous le diviſeur une barre au-deſſous de laquelle on écrira les chiffres du quotient à meſure qu'on les trouvera. Le dividende & le diviſeur étant ainſi diſpoſés, on opérera dans l'ordre qui ſuit.

1°. On commencera par diviſer la partie $38386^{\#}$ du dividende par le diviſeur donné 74, comme ſi cette partie de livres étoit la ſeule choſe qu'on eût à diviſer; & l'on trouvera, en ſuivant les regles de la diviſion des nombres incomplexes, $518^{\#}$ pour le quotient, avec $54^{\#}$ de reſte qui ne peuvent plus être diviſées par 74 ſous la forme de livres.

2°. Cette premiere diviſion étant faite, on réduira en ſols les $54^{\#}$ reſtantes, en les multipliant par 20; ce qui produira $1080^{\text{ſ}}$ auſquels on ajoûtera les $5^{\text{ſ}}$ qui ſont au dividende; & l'on aura $1085^{\text{ſ}}$ pour une ſeconde partie du dividende, qu'il faudra encore diviſer par le diviſeur donné 74. Comme le dividende & le diviſeur de cette ſeconde diviſion ſont encore incomplexes, on la fera ſuivant les regles expliquées au N°. 37, & l'on trouvera $14^{\text{ſ}}$ pour le quotient, avec $49^{\text{ſ}}$ de reſte qui ne peuvent plus être diviſés par 74.

3°. Ce ſecond quotient $14^{\text{ſ}}$ étant écrit à la droite des $518^{\#}$ qu'on a déjà trouvées: on réduira en deniers les $49^{\text{ſ}}$ qui reſtent, en les multipliant par 12; ce qui avec les 4 deniers qui ſont au dividende, produira 592 deniers pour le dividende d'une troiſiéme diviſion, par le diviſeur donné 74. Comme ce dividende 592 deniers & le diviſeur 74 ſont des nombres incomplexes; l'on trouvera, en ſuivant les regles pour la diviſion des nombres incomplexes, 8 deniers pour le quotient, ſans aucun reſte.

Ces trois diviſions étant faites, l'on aura pour le quotient du nombre complexe, $38386^{\#}\ 5^{\text{ſ}}\ 4^{d}$, diviſé par le nombre abſtrait incomplexe 74, le nombre complexe $518^{\#}\ 14^{\text{ſ}}\ 8^{d}$ compoſé de livres, ſols & deniers comme le dividende.

Il eſt évident que dans les trois diviſions qu'on a faites, on a diviſé toutes les parties du dividende par le diviſeur 74. Ainſi l'on a fait ce qui étoit propoſé.

EXEMPLE II.

On propoſe de diviſer le nombre concret complexe 1280M 3O 1G 2D 17g *qui a pour unités des poids, par* 51 $\frac{1}{4}$.

Dividende propoſé } 1280M 3O 1G 2D 17g { 51 $\frac{1}{4}$ *Diviſeur propoſé*

Nouveau dividende } 5121M 4O 7G 1D 20g { 205 *Nouveau diviſeur*
{ 24M 7O 6G 2D 20g *quotient*

410

1021

Reſte des marcs joint aux onces } 201M 4O *ou* 1612 *onces*

8 1435

Reſte des onces *joint aux* grains 177O 7G *ou* 1423 *gros*

8 1230

Reſte des gros *joint aux* deniers 193G 1D *ou* 580D

3 410

Reſte des deniers *joint aux* grains 170D 20g

24

ou 4100g

4100

0000

Le diviſeur étant complexe, puiſqu'il contient une partie de 51 unités avec une autre $\frac{1}{4}$ dont l'unité eſt différente; on le multipliera par 4 pour faire évanouir la fraction $\frac{1}{4}$, ce qui donnera 205 pour un nouveau diviſeur quadruple de celui qui eſt propoſé: & afin que le quotient ſoit le même que ſi l'on diviſoit par le diviſeur propoſé 51 $\frac{1}{4}$, l'on multipliera auſſi le dividende propoſé par 4; ce qui donnera 5121M 4O 7G 1D 20g pour un nouveau dividende lequel étant divisé par le nouveau diviseur 205, donnera le même quotient que si l'on divisoit le dividende proposé par le diviseur donné; comme nous l'avons prouvé (No.33.).

Le nouveau diviseur étant placé à la droite du nouveau dividende, on fera la division comme il suit.

1°. On commencera par diviser la partie 5121*M* qui a les unités les plus grandes, par le diviseur 205, comme il a été expliqué dans la division des nombres incomplexes; & l'on trouvera 24 marcs pour le premier quotient, avec un reste de 201 marcs qui ne peut plus être divisé par 205.

2°. On convertira en onces le reste 201 marcs de la premiere division, en le multipliant par 8, & on lui ajoûtera les 4 onces qui sont au dividende; ce qui donnera 1612 onces pour un nouveau dividende qu'on divisera par le diviseur 205. Comme le dividende & le diviseur de cette nouvelle division sont incomplexes, on trouvera 7 onces pour le quotient de cette seconde division, avec un reste de 177 onces qui ne peut plus être divisé par 205.

3°. On réduira en gros les 177 onces restantes de la division précédente, en les multipliant par 8, & l'on y ajoûtera les 7 gros qui sont au dividende; ce qui donnera 1423 gros pour un nouveau dividende incomplexe qu'on divisera par le diviseur incomplexe 205: & l'on aura 6 gros pour le quotient, avec un reste de 193 gros qui ne peut plus être divisé par 205.

4°. On convertira le reste 193 gros en deniers, en le multipliant par 3; & ajoûtant au produit 1 denier qui se trouve au dividende, on aura un dividende 580 deniers qu'on divisera par 205; ce qui donnera 2 deniers pour le quotient, avec un reste de 170 deniers qui ne peut plus être divisé par 205.

5°. Enfin l'on réduira en grains ce reste 170 deniers, en le multipliant par 24, & l'on ajoûtera au produit les 20 grains qui sont au dividende; ce qui donnera 4100g pour un dernier dividende qu'il faudra diviser comme les autres par 205; & l'on trouvera pour le quotient 20 grains sans aucun reste.

Toutes ces divisions étant faites; les cinq quotiens qu'on aura trouvés, composeront le quotient complexe 24^{M} 7O 6G 2D 20g.

Comme on a divisé toutes les parties du nouveau dividende par le nouveau diviseur, & que le quotient qu'on a trouvé est évidemment le même que si l'on avoit divisé le dividende proposé par le diviseur donné; il est clair qu'on a trouvé le quotient que l'on demandoit.

Si au lieu de marcs qu'on a pris dans cet exemple pour les unités principales de poids, on avoit employé des livres qui valent deux marcs chacune, on auroit eu 640℔ 3O 1G 2D 17g à diviser par $51\frac{1}{4}$; & l'on auroit trouvé 12℔ 7O 6G 2D 20g pour le quotient. L'opération n'auroit été différente qu'en ce que, pour réduire le reste des livres en onces, il auroit fallu multiplier ce reste par 16.

EXEMPLE III.

On propose de diviser le nombre complexe $38515^{\#}\ 19^{ß}$ par $518^{\#}\ 14^{ß}\ 8^{d}$.

Dividende proposé	$38515^{\#}\ 19^{ß}$	$518^{\#}\ 14^{ß}\ 8^{d}$ *diviseur proposé*
Nouveau dividende	$115547^{\#}\ 17^{ß}$	$1556^{\#}\ 4^{ß}$ *nouveau diviseur*
Dividende préparé	$577739^{\#}\ 5^{ß}$	$7781^{\#}$ *diviseur préparé*
	54467	$74\ \frac{1}{4}$ *quotient*
	33069	
	31124	
	$1945^{\#}\ 5^{ß}$	

Le diviſeur étant complexe, on le multipliera par des nombres convenables pour faire évanouir les deniers & les ſols qu'il contient. Pour trouver ces nombres convenables, on remarquera que 8^{d} ſont le tiers de 2^{s} : ainſi en multipliant le dividende & le diviſeur par 3, l'on aura un nouveau dividende $115547^{\#}\ 17^{s}$, & un nouveau diviſeur $1556^{\#}\ 4^{s}$ qui ne contiendra plus de deniers. Enſuite on remarquera que les 4^{s} qui ſont au nouveau diviſeur, étant le cinquiéme de $1^{\#}$, ſi l'on multiplie le dividende & le diviſeur par 5, on aura un nouveau dividende $577739^{\#}\ 5^{s}$, & un nouveau diviſeur $7781^{\#}$ qui ne contiendra plus ni ſols ni deniers.

Le dividende & le diviſeur étant ainſi préparés, on les diviſera l'un par l'autre. Or diviſant $577739^{\#}$, premiere partie du dividende préparé, par le diviſeur préparé $7781^{\#}$, on trouvera pour le quotient le nombre abſtrait 74 qui ſignifie que le diviſeur $7781^{\#}$ eſt contenu 74 fois dans le dividende $577739^{\#}$; & il reſtera $1945^{\#}\ 5^{s}$ qui ne peuvent point être diviſés par $7781^{\#}$; mais comme ce reſte eſt préciſément le quart du diviſeur $7781^{\#}$, l'on mettra encore $\frac{1}{4}$ au quotient, & l'on aura $74\frac{1}{4}$ pour le quotient exact demandé.

Autrement : lorſque le dividende & le diviſeur ont des unités de même eſpéce; (comme dans cet exemple, où l'on a des livres & des parties de livre à diviſer par livres, ſols & deniers) on réduit le dividende & le diviſeur à des unités d'une même eſpéce qui ſoit la plus baſſe de celles qu'on trouve dans le dividende & le diviſeur; c'eſt-à-dire que dans l'exemple propoſé, où le diviſeur contient des deniers, on réduit le dividende & le diviſeur en deniers, en multipliant les livres par 240, & les ſols par 12; & qu'on ne fait qu'un ſeul terme de toutes les parties du dividende dont les livres & les sols ont été convertis en deniers; de même que de toutes les parties du diviseur dont les livres & les sols ont été pareillement convertis en deniers. Ensuite on divise le dividende réduit en un seul terme, par le diviseur réduit aussi à un seul terme; & l'on trouve le quotient par les regles que nous avons expliquées pour les nombres incomplexes; mais il faut remarquer que le dividende & le diviseur étant composés des mêmes especes d'unités, le diviseur sera un nombre abstrait qui exprimera combien de fois le quotient est contenu dans le dividende.

EXEMPLE IV.

Dividende proposé	*diviseur proposé*
$495^{TT}\ 5^{TP}\ 6^{Tp}\ 8^{TL}$	$57^{T}\ 4^{P}\ 8p$
Nouveau dividende	*nouveau diviseur*
$1487^{TT}\ 4^{TP}\ 8^{Tp}$	$173^{T}\ 2^{P}$
Dividende préparé	520^{T} *diviseur préparé*
$4463^{TT}\ 2^{TP}$	$8^{T}\ 3^{P}\ 6p$ *quotient*

$4463^{TT}\ 2^{TP}$
4160
Reste des TT joint aux TP $303^{TT}\ 2^{TP}$ *ou* 1820^{TP}
6 $\quad$ 1560
Reste des toise-pieds 260^{TP} *ou* 3120^{Tp}
12 $\quad$ 3120
0000

Comme il faut rendre le diviseur incomplexe, on le multipliera par 3 pour faire évanouir les 8 pouces, & l'on multipliera pareillement le dividende par 3; ce qui donnera $1487^{TT}\ 4^{TP}\ 8^{Tp}$ pour un nouveau dividende, & $173^{T}\ 2^{P}$ pour un nouveau diviseur.

Comme il faut encore faire évanouir dans le nouveau diviseur, les 2 pieds qui sont le tiers d'une toise, on multipliera encore par 3 le nouveau dividende & le nouveau diviſeur; ce qui donnera $4463^{TT}\ 2^{TP}$, pour le dividende, & 520^{T} pour le diviſeur entiérement préparé.

Le diviſeur étant rendu incomplexe, & ayant multiplié également le dividende & le diviſeur, comme nous venons de faire; le quotient de la diviſion de ces deux nouveaux termes ſera le même, que ſi l'on diviſoit le dividende propoſé, par le diviſeur complexe donné ſans aucune préparation. Ainſi en diviſant le dividende préparé par le diviſeur incomplexe préparé, l'on trouvera le quotient qu'on demande.

Lorſqu'on multiplie une quantité complexe compoſée de toiſes, pieds, pouces, par un nombre de toiſes, l'on trouve pour le produit un nombre de toiſes quarrées qui peuvent être accompagnées de pluſieurs parties de la toiſe quarrée diviſée en 6, & ſous-diviſée continuellement en 12: & comme on défait par la diviſion ce qu'on a fait par la multiplication; il eſt clair que ſi l'on diviſe par des toiſes, un nombre complexe compoſé de toiſes quarrées & de parties de toiſe quarrée, comme dans l'exemple propoſé, l'on aura un quotient compoſé de toiſes linéaires, & quelquefois de parties de toiſe linéaire, comme on va le voir dans le détail de cette diviſion.

En diviſant la partie 4463^{TT} du dividende préparé, par le diviſeur préparé 520^{T}, l'on trouvera pour le quotient 8 toiſes; & il reſtera 303 toiſes quarrées qui ne pourront point être diviſées par le diviſeur 520^{T}, tant qu'elles ſeront ſous la forme de toiſes quarrées.

Pour continuer la diviſion, l'on réduira en toiſe-pieds les 303 toiſes quarrées reſtantes, en les multipliant par 6 ; ce qui produira 1818 toiſe-pieds qui avec 2^{TP} que l'on a au dividende feront 1820^{TP}. Enſuite on diviſera ce nombre de toiſe-pieds, par le diviſeur préparé 520^{T} ; & l'on aura 3 pieds pour le quotient ; parce que les toiſe-pieds ſont des produits de multiplication de pieds, par des toiſes, & doivent par conſéquent donner des pieds lorſqu'on les diviſe par des toiſes. Cette diviſion étant faite, on aura un reſte de 260^{TP} qui ne pourra plus être diviſé par le diviſeur préparé 520^{T}.

Pour continuer la diviſion, l'on convertira en toiſe-pouces le reſte 260^{TP} de la diviſion précédente, en le multipliant par 12 ; ce qui donnera 3120^{Tp} qu'on diviſera encore par le diviſeur préparé 520^{T} ; & l'on aura pour le quotient 6 pouces ; parce que des toiſe-pouces diviſées par des toiſes doivent donner des pouces.

Cette diviſion étant faite ſans aucun reſte, le quotient demandé ſera $8^{T}\ 3^{P}\ 6p$.

Dans ce dernier exemple, la toiſe étant la principale dimenſion des meſures du dividende, nous avons été obligés de réduire le diviſeur complexe en toiſes ; & nous avons trouvé pour le quotient un nombre compoſé de toiſes, pieds, pouces, &c.

Si le pied étoit la principale dimenſion des parties du dividende, il faudroit convertir le diviſeur en un nombre incomplexe de pieds ; & l'on auroit pour le quotient un nombre compoſé de pieds, pouces, lignes, &c.

Par exemple ſi l'on avoit à diviſer $60^{PP}\ 1^{Pp}\ 10^{PL}$ *par* $2^{P}\ 6p\ 6^{L}$ *; on rendroit le diviſeur incomplexe, en multipliant le dividende & le diviſeur par* 24 *; & l'on auroit* $1443^{PP}\ 8^{Pp}$ *à diviſer par* 61^{P} *dont le quotient ſeroit* $23^{P}\ 8p$.

On ne croit pas devoir entrer dans le détail de cette opération ; parce qu'elle eſt ſemblable à la précédente.

EXEMPLE V.

On propose de diviser $88720^{TTT}\ 1^{TTP}\ 1^{TTp}\ 4^{TTL}$ *par* $22^{T}\ 2^{P}\ 6p$.

Dividende proposé	*Diviseur proposé*
$88720^{TTT}\ 1^{TTP}\ 1^{TTp}\ 4^{TTL}$	$22^{T}\ 2^{P}\ 6p$
Nouveau dividende	*Nouveau diviseur*
$177440^{TTT}\ 2^{TTP}\ 2^{TTp}\ 8^{TTL}$	$44^{T}\ 5^{P}$

Dividende préparé | *Diviseur préparé*

$1064642^{TTT}\ 1^{TTP}\ 4^{TTp}$ | 269^{T}

quotient $3957^{TT}\ 4^{TP}\ 8^{Tp}$

807
2576
2421
1554
1345
2092
1883

Reste des TTT joints aux TTP $209^{TTT}\ 1^{TTP}$ *ou* 1255^{TTP}
6 1076

Reste des TTP *joint aux* TTp $179^{TTP}\ 4^{TTp}$ *ou* 2152^{TTp}
12 2152
0000

Pour faire évanouir les $2^{P}\ 6p$ du diviseur, on multipliera le dividende & le diviseur successivement par 2 & par 6; ce qui donnera pour nouveau dividende préparé $1064642^{TTT}\ 1^{TTP}\ 4^{TTp}$, & 269^{T} pour nouveau diviseur préparé.

Comme on a vu dans le chapitre précédent, que la multiplication d'un nombre complexe composé de toises quarrées & de parties de la toise quarrée divisée en 6 & sous-divisée continuellement en 12, par un nombre de toises simples, donne pour le produit un nombre complexe composé de toises cubes, de toise-toise pieds, de toise-toise pouces &c ; & qu'il est évident que l'on défait par la division, ce que l'on a fait par la multiplication, il est clair que la division que l'on doit faire du dividende complexe 1064642^{TTT}, 1^{TTP} 4^{TTp} composé de toises cubes & de parties de la toise cube divisée en 6, & sous-divisée en 12, par le diviseur 269^{T} composé de toises simples, donnera pour le quotient un nombre complexe composé de toises quarrées, & de Toise-pieds, Toise-pouces, &c. qui sont des parties de la toise quarrée divisée en 6, & sous-divisée continuellement en 12. Cela posé.

1°. On divisera 1064642^{TTT} par 269^{T} ; & le quotient sera 3957^{TT}, avec un reste de 209^{TTT}.

2°. On réduira ce reste en toise-toise-pieds, en le multipliant par 6, & l'on y ajoûtera une toise-toise-pied qui se trouve au dividende préparé ; ce qui donnera 1255^{TTP} qu'il faudra aussi diviser par 269^{T} ; & le quotient sera 4^{TP}, avec un reste 179^{TTP}.

3°. On réduira ce reste en toise-toise-pouces, en le multipliant par 12, & l'on ajoûtera au produit 4^{TTp} qui sont au dividende préparé ; ce qui donnera 2152^{TTp} qu'il faudra encore diviser par le diviseur préparé 269^{T} ; & le quotient sera 8^{Tp} sans aucun reste.

Donc 3957^{TT} 4^{TP} 8^{Tp} sera le quotient total de la division proposée.

Exemple VI.

On propose de diviser le nombre complexe 2747^{Tpp} 1^{Ppp} 4^{ppp} par le nombre incomplexe 72^{pp}.

On a vû (N°. 33.) que si l'on divise le dividende & le diviseur d'une division, par une même quantité, le quotient de la division du nouveau dividende par le nouveau diviseur sera le même que celui du premier dividende divisé par le premier diviseur.

Or le dividende proposé $2747^T pp\ 1^P pp\ 4ppp$ étant le produit de ... $2747^T\ 1^P\ 4p$ par $1pp$, peut être divisé par $1pp$ & se réduire à $2747^T\ 1^P\ 4p$; & le diviseur $72pp$ étant le produit de $1pp$ multiplié par le nombre abstrait 72, peut être aussi divisé par $1pp$ & se réduire au nombre absolu 72.

Donc le quotient de la division sera le même, soit que l'on divise le dividende proposé, par le diviseur proposé; soit que l'on divise le dividende abregé $2747^T\ 1^P\ 4p$ par le diviseur abregé 72. Et comme ces nouveaux dividende & diviseur sont plus simples que les premiers, on les préferera aux premiers pour faire la division.

			72 *diviseur préparé*
Dividende préparé	$2747^T\ 1^P\ 4p$		*quotient*
	216		$38^T\ 0^P\ 11p\ 2^L\ 8^l$
	587		
	576		
Reste des toises joint aux pieds	$11^T\ 1^P$ *ou* 67^P		
	6 12		
Même reste joint aux pouces du dividende		$808p$	
		72	
		88	
		72	
Reste des pouces		$16p$ *ou* 192^L	
		12 144	
Reste des lignes		48^L *ou* 576^l	
		12 576	
		000	

1°. En divisant 2747^T par 72, on aura pour le quotient 38^T avec un reste 11^T.

2°. On réduira le reste 11^T en pieds en le multipliant par 6, & on lui ajoûtera 1^P qui est au dividende, ce qui donnera 67^P qu'on ne pourra pas diviser par 72; ainsi l'on écrira 0^P au quotient, & les 67^P, qui n'ont pas pû être divisés, resteront.

3°. On réduira le reste 67^P en pouces, en le multipliant par 12, & on lui ajoûtera les 4 pouces qui sont au dividende, ce qui donnera $808p$ qu'il faudra diviser par 72: & l'on aura 11 pouces pour le quotient, avec 16 pouces de reste.

4°. On réduira le reste 16 pouces en lignes, en le multipliant par 12: & l'on aura 192 lignes qu'on divisera par 72; ce qui donnera 2 lignes au quotient, & 48 lignes de reste.

5°. Enfin l'on réduira le reste 48 lignes en points ou primes, en le multipliant par 12; & l'on aura 576^I qu'on divisera par 72, ce qui donnera 8^I, sans reste.

Ainsi $38^T\ 0^P\ 11p\ 2^L\ 8^I$ sera le quotient exact de la division proposée.

CHAPITRE V.

Du Toisé des Bois.

99 ON appelle en général *Solive*, toute piéce de bois qui contient 3 pieds cubes.

Comme une piéce de bois quarrée de grosseur uniforme, qui a 2 toises de longueur, sur 6 pouces de largeur & 6 pouces d'épaisseur, contient 3 pieds cubes, on donne ordinairement le nom de solive à une piéce qui a ces trois dimensions.

Mais parce que la toise est la principale mesure dans les toisés, l'on réduit la solive en un parallélépipede qui a 1 toise de long sur une base de 72 pouces quarrés, ou égale à la moitié d'un pied quarré.

En

En considérant ainsi la solive, on la divise comme la toise en 6 parties égales qu'on appelle *pieds de solive*. Ainsi chaque pied de solive est un parallélépipede qui a 1 pied de haut sur 72 pouces quarrés de base.

Le pied de solive se divise comme le pied linéaire, premierement en 12 pouces; ensuite le pouce se divise en 12 lignes, &c: ensorte que le pouce & la ligne de solive sont des parallélépipedes dont l'un a 1 pouce, & l'autre 1 ligne de haut, sur une base égale à 72 pouces quarrés, ou a la moitié d'un pied quarré.

PROBLÊME.

100 *Toiser une piéce de bois quarré, & la réduire en Piéces ou Solives.*

I.

On mesurera la longueur de la piéce en toises, sa largeur & son épaisseur en pouces: puis ayant multiplié le nombre des pouces de la largeur par le nombre des pouces de l'épaisseur; on multipliera le produit qui sera composé de pouces quarrés par le nombre des toises contenues dans la longueur de la piéce, ce qui donnera un second produit dont les unités propres seront des *toise-pouce-pouce*, ou des baguettes quarrées qui auront chacune une toise de long sur un pouce quarré de base. Et comme la solive qui a 1 toise de long sur 72 pouces quarrés de base, contient 72 de ces baguettes; il faudra diviser le dernier produit par 72, pour avoir le nombre des solives qu'il contient; ou bien diviser ce produit par 72*pp*, ce qui donnera autant de solives & de parties de solive qu'on trouvera de toises & de parties de la toise pour le quotient.

Soit par exemple proposé de trouver le nombre des solives & des parties de solive contenues dans un parallélépipéde de 28 pieds 8 pouces de long sur 1 pied 11 pouces de large, & 2 pieds 1 pouce d'épaisseur.

La longueur de la piéce n'ayant point été mesurée en toises, & les dimensions de sa grosseur n'ayant point été évaluées en pouces ; on commencera par réduire en toises la partie de 28 pieds 8 pouces qui pourra s'y réduire, le surplus restant évalué en pieds & pouces ; & l'on convertira en pouces les deux dimensions de la grosseur.

La longueur	28^P	$8p$	*se réduiront à*	4^T 4^P $8p$
La largeur	1^P	$11p$		$23p$
L'épaisseur	2^P	$1p$		$25p$

L'on multipliera donc la largeur	23 *pouces*			
Par l'épaisseur	25 *pouces*			
	115			
	46			
Ce qui produira	575 *pouces quarrés*			
Que l'on multipliera par la longueur	4^T	4^P	$8p$	
	$2300^T pp$			
	191	$4^P pp$		
	191	4		
	63	5	$4ppp$	
Ce qui donnera ce nouveau produit	$2747^T pp$	$1^P pp$	$4ppp$	

que l'on divisera par $72pp$ comme il a été expliqué dans le 6ᵉ exemple du chapitre précédent ; & l'on aura le Quotient $38^T\ 0^P\ 11p\ 2^L\ 8^1$ qui représentera 38 solives $0^P\ 11p\ 2^L\ 8^1$ contenus dans la piéce proposée.

II.

Il y a des Toiseurs qui, après avoir multiplié l'une par l'autre la largeur & l'épaisseur de la piéce mesurées en pouces, divisent ce produit par 72 ; & qui multiplient ensuite le nombre des toises contenues dans la longueur de la piéce, par le quotient de cette division, pour avoir le nombre des solives contenues dans la piéce.

Par exemple si la longueur de la piéce est de $4^T 4^P 8p$, & que les dimensions de sa grosseur soient $25p$ & $23p$;

$$
\begin{array}{l}
25p \\
\underline{23p} \\
75 \\
\underline{50} \\
575pp \left\{ \begin{array}{l} \underline{72pp} \\ 7 \end{array} \right. \\
\underline{504} \\
71pp
\end{array}
$$

Ils multiplient $25p$ par $23p$, ce qui produit 575 pouces quarrés; ensuite ils divisent ce produit par 72, ce qui donne 7 bases de solive pour le quotient, avec un reste de 71 pouces quarrés: enfin ils multiplient la longueur 4^T 4^P $8p$ de la piéce par le quotient 7 que l'on vient de trouver, & par son reste $71pp$.

	4^T	4^P	$8p$		
	7	$71pp$			
Pour 7 *bases de solive*	33^{solives}	2^P	$8p$		
36 *pouces quarrés*	2	2	4		
18 *pouces quarrés*	1	1	2		
12 *pouces quarrés*	0	4	9	4^L	
4 *pouces quarrés*	0	1	7	1	4^I
1 *pouce quarré*	0	0	4	9	4
Ce qui donne le produit	38^{solives}	0^P	$11p$	$2L$	8^I

Pour faire cette opération, on multipliera d'abord 4^T 4^P $8p$ par 7, ce qui produira 33 solives 2^P $8p$.

Pour multiplier par $71pp$, on les partagera en parties aliquotes de $72pp$, qui seront 36, 18, 12, 4, 1, pouces quarrés; & l'on opérera comme il suit.

Si l'on avoit 4^T 4^P $8p$ à multiplier par 72 pouces quarrés, on auroit pour le produit 4 solives 4^P $8p$. Ainsi n'ayant à multiplier que par $36pp$, l'on ne doit avoir que la moitié de 4 solives 4^P $8p$, savoir 2 solives $2^P 4p$ que l'on écrira.

En multipliant par 18*pp*, on ne doit avoir que la moitié de 2 solives $2^P\ 4p$ qu'on a trouvés pour 36*pp*; on n'aura donc que 1 solive $1^P\ 2p$.

En multipliant par 12 pouces quarrés; on ne doit avoir que le tiers du produit $2^{sol}\ 2^P\ 4p$ qu'on a trouvé pour 36 pouces quarrés, savoir o solive $4^P\ 9p\ 4^L$.

En multipliant par 4 pouces quarrés, on ne doit avoir que le tiers de $o^{soliv}\ 4^P\ 9p\ 4^L$ qu'on a trouvés pour 12 pouces quarrés, savoir $o^{soliv}\ 1^P\ 7p\ 1^L\ 4^I$.

Enfin multipliant par 1 pouce quarré, l'on n'aura que le quart de $o^{soliv}\ 1^P\ 7p\ 1^L\ 4^I$ qu'on a trouvés pour 4 pouces quarrés, savoir $o^{soliv}\ o^P\ 4p\ 9^L\ 4^I$.

Ajoûtant ensemble tous ces produits, on trouvera pour la valeur de la piéce proposée $38^{soliv}\ o^P\ 11p\ 2^L\ 8^I$.

III.

On a tâché de diminuer le travail du toisé des bois quarrés, en opérant comme il suit.

On regarde le nombre des pouces d'une dimension de la grosseur comme des pieds, & le nombre des pouces de l'autre dimension de la grosseur comme des demi-pieds; & ayant réduit ces pieds & demi-pieds en toises, on multiplie successivement par ces nouveaux nombres, le nombre des toises & parties de toise contenues dans la longueur de la piéce : ce qui donne un produit composé de toises cubes & de parties de la toise cube divisée en 6, & sous-divisée continuellement en 12.

Par exemple, si l'on propose de réduire en solives, une piéce de bois dont la longueur est de $4^T\ 4^P\ 8p$, & dont la grosseur est de 25*p* & 23*p*.

On regardera 25 pouces comme 25^P que l'on réduira à $4^T\ 1^P$, & pour 23 pouces on prendra 23 demi-pieds, ou $11^P\ 6p$ qu'on réduira à $1^T\ 5^P\ 6p$.

Les dimensions de la grosseur de la piéce étant ainsi préparées, on multipliera ensemble dans tel ordre qu'on voudra les trois facteurs $4^T\ 4^P\ 8p$, $4^T\ 1^P\ 0p$, & $1^T\ 5^P\ 6p$.

1°. *On multipliera* $4^T\ 4^P\ 8p$

Par $4\ 1$

Et l'on aura pour	4^T	19^{TT}	0^{TP}	$8^{T}p$	
	1^P		4	9	4^{TL}
Produit total		19^{TT}	5^{TP}	$5^{T}p$	4^{TL}

2°. *On multipliera ce produit des deux premiers facteurs, sçavoir* $19^{TT}\ 5^{TP}\ 5^{T}p\ 4^{TL}$

Par le 3e fact. $1^T\ 5^P\ 6p$

Ce qui donnera pour	1^T	19^{TTT}	5^{TTP}	$5^{TT}p$	4^{TTL}	
	3^P	9	5	8	8	
	2^P	6	3	9	9	4^{TTI}
	$6p$	1	3	11	5	4
Produit total		38^{TTT}	0^{TTP}	$11^{TT}p$	2^{TTL}	8^{TTI}

Mais au lieu de considérer ce produit des trois dimensions de la piéce, comme un nombre de toises cubes & de parties de la toise cube divisée en 6, & sous divisée continuellement en 12, on le regardera comme un nombre de solives & de parties de solive divisée en 6, & sous-divisée continuellement en 12; ensorte qu'au lieu d'écrire, comme on a fait, 38^{TTT} 0^{TTP} $11^{TT}p$ 2^{TTL} 8^{TTI} pour le produit, on écrira 38 solives $0^P\ 11p\ 2^L\ 8^I$; ce qui signifiera 38 solives, avec 11 pouces 2 lignes & 8 points de solive.

Pour démontrer cette méthode, on remarquera qu'en regardant, comme on a fait, les pouces d'une dimension de la grosseur de la piéce comme des pieds, & les pouces de l'autre dimension comme des demi-pieds, on a rendu une dimension 12 fois trop grande, & l'autre dimension 6 fois trop grande; ensorte que le produit solide $38^{TTT}\ 0^{TTP}\ 11^{TT}p\ 2^{TTL}\ 8^{TTI}$, dans lequel entrent ces deux dimensions, est 12 fois

6 fois, ou 72 fois trop grand. Ainsi l'on réduira ce produit à la juste valeur qu'il doit avoir, en le rendant 72 fois moins grand. Mais la solive étant de 3 pieds cubes, ne vaut que la soixante-douxiéme partie de la toise cube qui contient 216 pieds cubes; & les parties de la solive divisée en 6 & sous-divisée continuellement en 12, ne sont que des soixante-douziémes des parties correspondantes de la toise cube divisée en 6 & sous-divisée continuellement en 12. On rendra donc le produit 38^{TTT} 0^{TTP} 11^{TTp} 2^{TTL} 8^{TT1}, 72 fois moins grand, en écrivant solives, & pieds, pouces &c, de la solive, à la place de toises cubes & de pieds, pouces &c de la toise cube.

IV.

D'autres toiseurs operent de la maniére suivante, qui est fondée sur les mêmes principes que la précédente.

Ils rendent une des dimensions de la grosseur de la piéce, 72 fois plus grande, en regardant comme autant de toises le nombre des pouces qu'elle contient: ensuite ils la multiplient successivement par les deux autres dimensions de la piéce évaluées en toises & parties de la toise, ce qui donne en toises cubes & parties de la toise cube, un produit 72 fois trop grand; enfin ils réduisent ce produit à sa juste valeur, en écrivant solives & pieds, pouces, &c de solive, à la place de toises cubes & pieds, pouces, &c de la toise cube.

Par exemple pour réduire en solives une piéce de 4^T 4^P $8p$ de longueur, dont la grosseur est de $25p$ sur $23p$; ils prennent 25^T pour $25p$; ensuite ils multplient 25^T par $23p$, ou plûtôt par 0^T 1^P $11p$, & mutiplient encore le produit résultant 7^{TT} 5^{TP} 11^{TP}, par la longueur 4^T 4^P $8p$, ce qui donne ce produt 38^{TTT} 0^{TTP} 11^{TTp} 2^{TTL} 8^{TT1} pour lequel ils écrivent 38 solives 0^P $11p$ 2^L 8^1.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE V.

Des Proportions & des principales Regles qui en dépendent.

CHAPITRE PREMIER.

Des proportions en général.

DÉFINITIONS.

101 ON appelle *Rapport* ou *Raison* la comparaison d'une grandeur avec une autre.

Dans la comparaison que l'on fait de deux grandeurs, si l'on ne considére que leur différence, c'est-à-dire la quantité dont l'une surpasse l'autre ou est surpassée par l'autre, cette différence se nommera *Rapport arithmétique* ou *Raison arithmétique*. Par exemple en comparant 12 avec 3, si l'on considére seulement que

12 surpasse 3, ou que 3 est supassé par 12 de 9 unités; ces 9 unités qui sont la différence de 12 à 3 ou de 3 à 12, seront le rapport arthmétique de 12 à 3.

Mais si en comparant deux grandeurs, on considére combien de fois l'une contient l'autre, ou est contenue dans l'autre; ce *nombre de fois* sera nommé *Rapport géométrique* ou *Raison géométrique*, ou simplement *Rapport* ou *Raison* des deux grandeurs comparées. Par exemple en comparant 12 avec 3, si l'on considére que 12 contient 4 fois 3, ou que 3 est contenu 4 fois dans 12; ce nombre 4 s'appellera le *Rapport géométrique* ou la *Raison géométrique* de 12 à 3, ou simplement *Rapport* ou *Raison* de 12 à 3,

On voit par ces définitions des Rapports, qu'il n'y a de rapport arithmétique ou géométrique qu'entre les quantités de même espéce.

1°. Le *Rapport arithmétique* étant la différence de deux grandeurs, on ne peut avoir ce rapport ou cette différence, qu'en retranchant la plus petite quantité de la plus grande. Ainsi la plus petite quantité doit faire partie de la plus grande, & doit par conséquent être de même espéce qu'elle.

2°. Le *Rapport géométrique* de deux grandeurs, étant le nombre de fois que l'une contient l'autre, suppose évidemment que la plus petite est une partie de la plus grande, & est par conséquent de même espéce qu'elle. Ainsi dans le *Rapport géométrique* comme dans le *Rapport arithmétique*, les deux grandeurs comparées doivent être de la même espéce.

Il suit encore de ce qu'on vient de dire, que le rapport arithmétique de deux grandeurs, est une grandeur de même espéce que celles qui sont comparées; car le rapport arithmétique étant la différence des deux grandeur comparées, ou l'excès de la plus grande sur la plus petite, est nécessairement une partie de la plus grande, & eſt par conſéquent de même eſpéce qu'elle.

Il n'en eſt pas de même du rapport géométrique. Ce rapport eſt toûjours un nombre abſtrait, puiſqu'il ne repréſente qu'un nombre des fois, c'eſt-à-dire le nombre de fois que l'une des deux grandeurs comparées contient l'autre.

Puiſque le rapport géométrique de deux grandeurs eſt le nombre de fois que l'une contient l'autre; & qu'on trouve ce nombre de fois, en diviſant l'une par l'autre; il eſt évident que le rapport géométrique de deux grandeurs, eſt le quotient de la diviſion de l'une de ces grandeurs par l'autre. Par exemple le rapport qu'il y a entre 12 & 3, eſt le quotient de la diviſion de 12 par 3.

Lorſque l'on compare deux grandeurs, par exemple 12 & 3, la grandeur 12 qu'on nomme ou que l'on écrit la premiere, s'appelle *Antécédent*, & l'autre 3 ſe nomme *Conſéquent*: & ſi l'on comparoit 3 avec 12, la grandeur 3 qui ſeroit écrite la premiere, ſeroit l'antécédent du rapport, & l'autre grandeur 12 en ſeroit le conſéquent.

Puiſque le rapport géométrique de deux grandeurs eſt le quotient de la diviſion de l'une par l'autre, on peut écrire les deux termes d'un rapport en forme de fraction ou de diviſion indiquée; c'eſt-à-dire qu'on peut écrire l'antécédent au-deſſus du conſéquent, avec une barre entre deux. Par exemple pour écrire le rapport de 12 à 6, on le met ſous cette forme $\frac{12}{6}$ qui ſignifie 12 diviſé par 6, ou plûtôt le quotient de 12 diviſé par 6; & pour écrire le rapport de 3 à 12, on le met ſous cette forme de fraction $\frac{3}{12}$ qui ſignifie le quotient de 3 diviſé par 12.

102 Deux rapports égaux, par exemple le rapport de 2 à 3 & celui de 4 à 6, font une *Proportion géométrique.* Ainſi une Proportion géométrique eſt compoſée de 4 termes dont le premier contient le ſecond autant de fois que le troiſiéme contient le quatriéme; ou de quatre termes, dont le premier eſt contenu dans le ſecond autant de fois que le troiſiéme eſt contenu dans le quatriéme.

Pour repréſenter une proportion géométrique, par exemple celle qui ſeroit compoſée des deux rapports égaux $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{6}$, on l'écrit ordinairement ainſi, $2:3::4:6$; ce qui ſignifie que 2 eſt à 3 comme 4 eſt à 6, ou que 2 eſt contenu dans 3 comme 4 eſt contenu dans 6; c'eſt-à-dire qu'on met deux points entre les deux termes de chaque rapport, & qu'on ſépare les deux rapports égaux, par quatre points.

Le premier & le quatriéme termes d'une Proportion géométrique ſe nomment les *Extrêmes*; & le ſecond avec le troiſiéme s'appellent les *Moyens*.

THÉORÊME.

103 *On aura le quatriéme terme d'une Proportion géométrique, en multipliant le troiſiéme terme par le quotient du ſecond diviſé par le premier.*

Il peut arriver deux cas; ou le premier terme ſera contenu dans le ſecond, ou le ſecond ſera contenu dans le premier. On va faire voir la vérité du Théorême dans ces deux hypothèſes.

Premier cas. Il eſt évident qu'on aura le quatriéme terme d'une proportion géométrique, en multipliant le troiſiéme terme par le nombre de fois qu'il eſt contenu dans le quatriéme.

Mais par la nature de la proportion, le troiſiéme terme eſt contenu dans le quatriéme autant de fois que le premier est contenu dans le second (N°. 102.), & ce nombre de fois que le premier terme est contenu dans le second, est égal au quotient du second terme divisé par le premier.

Donc on aura le quatriéme terme d'une proportion géométrique, en multipliant son troisiéme terme par le quotient du second terme divisé par le premier.

Par exemple si une proportion géométrique commence par ces trois termes 2 : 3 : : 7 :, & qu'on veuille avoir le quatriéme terme; on divisera le second terme 3 par le premier terme 2; & l'on aura pour le quotient la fraction $\frac{3}{2}$ qui sera le nombre de fois que le premier terme 2 est contenu dans le second 3, ou que le troisiéme terme 7 est contenu dans le quatriéme qu'on cherche. Ainsi en multipliant 7 par $\frac{3}{2}$, le produit $\frac{21}{2}$ ou 10 $\frac{1}{2}$ sera le quatriéme terme demandé; & la proportion entiere sera 2 : 3 : : 7 : 10 $\frac{1}{2}$.

Second cas. Il est clair qu'on aura le quatriéme terme d'une proportion, en divisant le troisiéme terme par le nombre de fois que le quatriéme y est contenu.

Mais par la nature de la proportion, le quatriéme terme est contenu dans le troisiéme autant de fois que le second est contenu dans le premier; & ce nombre de fois est égal au quotient de la division du premier terme par le second.

Donc on aura le quatriéme terme d'une proportion géométrique, en divisant le troisiéme terme par le quotient de la division du premier terme par le second, c'est-à-dire par une fraction qui aura le premier terme pour numérateur, & le second pour dénominateur.

Mais (N°. 72.) diviser par une fraction qui a pour numérateur le premier terme & pour dénominateur le second terme, c'est multiplier par la fraction inverse qui a pour numérateur le second terme & pour dénominateur le premier, & qui est parconséquent le quotient de la division du second terme par le premier.

Donc on aura le quatriéme terme d'une proportion géométrique, en multipliant son troisiéme terme par le quotient du second terme divisé par le premier, comme dans le premier cas.

Par exemple si une proportion géométrique commence par ces trois termes 12 : 8 :: 20 :, & qu'on veuille avoir le quatriéme terme; on divisera le premier terme 12 par le second 8; & l'on aura pour le quotient la fraction $\frac{12}{8}$ qui sera le nombre de fois que le second terme 8 est contenu dans le premier 12, ou que le quatriéme terme qu'on cherche, est contenu dans le troisiéme 20.

Ainsi en divisant 20 par $\frac{12}{8}$, on doit évidemment avoir le quatriéme terme.

Mais diviser 20 par la fraction $\frac{12}{8}$, c'est multiplier 20 par la fraction inverse $\frac{8}{12}$ (*N*°. 72.).

On aura donc le quatriéme terme de la proportion dont les trois premiers sont 12 : 8 :: 20 :, en multipliant le troisiéme terme 20 par la fraction $\frac{8}{12}$ qui est le quotient du second terme divisé par le premier; & ce quatriéme terme étant 13 $\frac{1}{3}$, la proportion entiere sera 12 : 8 :: 20 : 13 $\frac{1}{3}$.

COROLLAIRE PREMIER.

104 Multiplier un nombre par une fraction, c'est le multiplier par le numérateur de la fraction, & diviser le produit par le dénominateur de la même fraction (*N*°. 67.). Donc puisqu'on trouve le quatriéme terme d'une porportion, en multipliant son troisiéme terme par une fraction qui a le second terme

pour numérateur & le premier pour dénominateur; on aura ce quatriéme terme en multipliant le troisiéme par le second, & en divisant le produit par le premier terme; c'est-à-dire que le quatriéme terme sera égal au produit des moyens de la proportion, divisé par le premier terme.

Par exemple si une porportion géométrique commence par ces trois termes 2 : 3 : : 7 :, & qu'il faille en trouver le quatriéme terme; il faudra multiplier le troisiéme terme 7 par la fraction $\frac{3}{2}$ (*No.* 103); c'est-à-dire qu'il faudra multiplier 7 par 3, & diviser le produit par 2 (*No.* 67); ce qui donnera $\frac{21}{2}$ ou 10 $\frac{1}{2}$ pour le quatriéme terme. Ainsi la proportion sera 2 : 3 : : 7 : 10 $\frac{1}{2}$.

Corollaire II.

105 Donc si les trois premiers termes d'une proportion géométrique sont donnés, par exemple ces trois nombres 2 : 3 : : 7 :, on pourra toûjours mettre le troisiéme 7 à la place du second 3, & le second 3 à la place du troisiéme 7, comme ici 2 : 7 : : 3 :, sans qu'il en arrive aucun changement dans le quatriéme terme qu'on doit trouver.

Car (*No.* 104) le quatriéme terme est égal au produit des moyens divisé par le premier, & dans ces deux arrangemens $\left\{\begin{matrix} 2 : 3 :: 7 : \\ 2 : 7 :: 3 : \end{matrix}\right\}$, les moyens étant les mêmes aussi bien que le premier terme, il n'y aura point de changement dans le quotient de la division du produit des moyens par le premier terme.

Il nous arrivera souvent de changer d'ordre, le second & le troisiéme termes d'une porportion dont nous aurons le quatriéme terme à trouver par le moyen des trois premiers.

Corollaire III.

106 Puiſqu'on trouve le quatriéme terme de toute proportion géométrique, par exemple de celle-ci 2 : 3 : : 4 : 6, en multipliant le troiſiéme terme par le ſecond, & en diviſant le produit par le premier; il en réſulte que le produit des extêmes d'une proportion géométrique eſt égal au produit des moyens de la même proportion, c'eſt-à-dire que 6×2 & 4×3 ſont des produits égaux.

Pour le prouver, il ſuffit de remarquer que le quatriéme terme conſidéré (No. 104) comme le produit des moyens diviſé par le premier terme, étant multiplié par le premier terme, pour faire le produit des exrêmes, il en réſultera formellement le produit des moyens.

Car la diviſion du produit des moyens par le premier terme ſera détruite par la multiplication qu'on fera enſuite par ce premier terme; enſorte que le réſultat ſe réduira au produit des moyens.

Donc le produit des extrêmes d'une proportion géométrique, eſt égal au produit des moyens de la même proportion.

Corollaire IV.

107 Le produit des extrêmes d'une proportion géométrique, étant égal au produit des moyens; ſi l'on diviſe ces deux produits par un extrême ou par un moyen, l'on trouvera que chaque terme extrême d'une proportion eſt égal au produit des moyens diviſé par l'autre extrême, & que chaque terme moyen eſt égal au produit des extrêmes diviſé par l'autre moyen.

Ainsi lorsque trois termes d'une proportion géométrique seront donnés, & que l'on connoîtra l'ordre suivant lequel ces trois termes sont disposés dans la proportion, l'on sera en état de trouver le terme qui manque dans cette proportion; parce qu'on saura si ce terme à trouver est un extrême ou un moyen, & que nous avons appris à trouver un extrême ou un moyen, en employant les trois autres termes de la proportion.

CHAPITRE II.

De la Regle de Trois & de ses différentes espèces.

DÉFINITIONS.

108 LORSQUE l'on connoît trois termes d'une proportion géométrique, l'opération qu'on fait pour trouver le terme qui manque à cette proportion, s'appelle *Regle de Trois.* On la nomme aussi *Regle de Proportion*; & quelques-uns l'appellent *Regle d'Or*, à cause de l'utilité dont elle est dans le commerce.

Nous avons vû dans le Chapitre précédent, comment on découvre le terme qui manque dans une proportion dont on connoît trois termes. Dans celui-ci nous verrons différens exemples de cette opération, & comment les termes connus doivent être considérés.

Les Arithméticiens distinguent deux sortes de Regles de Trois; la *Regle de Trois directe*, & la *Regle de Trois inverse*, qui sont toutes deux ou *simples* ou *composées.*

Ainsi l'on compte quatre sortes de Regles de Trois; la *Regle de Trois directe simple* & la *Regle de Trois inverse simple*; la *Regle de Trois directe composée* & la *Regle de Trois inverse composée.*

La Regle de Trois directe simple, est celle dont les trois termes connus sont les trois premiers d'une proportion géométrique. Ainsi l'objet de cette Regle est de faire trouver le quatriéme terme d'une proportion géometrique dont on connoît les trois premiers termes.

La Regle de Trois inverse simple, est celle où l'on connoît trois termes dont deux sont les extrêmes d'une proportion géométrique, & l'autre un moyen de la même proportion : ensorte que l'objet de cette Regle est de faire découvrir un terme moyen d'une proportion dont trois termes sont donnés. Mais par ce que les Arithméticiens ne s'assujetissent point à mettre dans sa place le terme inconnu qu'ils cherchent, & qu'ils écrivent de suite les trois termes qu'ils connoissent, comme si ces trois termes étoient les trois premiers d'une proportion; le dernier rapport de la proportion se trouve renversé, lorsque le terme inconnu que l'on demande est véritablement un moyen de la proportion; & c'est par cette raison que l'opération qu'on fait pour trouver le terme moyen inconnu, s'appelle *Regle de Trois inverse.*

La Regle de Trois composée est celle dont l'énoncé renferme plus de trois termes connus. Mais nous verrons que tous ses termes connus se réduisent toûjours à trois entiérement connus; & que le terme qu'on cherche est toûjours le quatriéme terme, ou un facteur du quatriéme terme d'une proportion, losque la regle est directe. Enfin nous verrons que le terme demandé est toûjours un terme moyen, ou le le facteur d'un terme moyen, lorsque la Regle est inverse.

DE LA REGLE DE TROIS DIRECTE SIMPLE.

109 Nous venons de dire que l'objet d'une *Regle de Trois directe simple*, est de faire découvrir le quatriéme terme d'une proportion géométrique dont les trois premiers termes sont simples & connus.

Par exemple, dans cette question :

Si 37 *toises d'un certain bois coûtent* 148# ;
combien coûteront 30 *toises du même bois ?*

Il est évident que le prix de 30 toises de bois, qui doit servir de réponse à cette question, est le quatriéme terme d'une proportion géométrique dont 37 toises, 30 toises, & 148#, sont les trois premiers termes; parce qu'il est clair que 37 toises de bois doivent contenir 30 toises du même bois, comme le prix 148# des 37 toises, contient le prix demandé des 30 toises.

Il en sera de même de cette autre question qui n'est que le réciproque de la précédente.

Si pour 148# *l'on a* 37 *toises de bois ;*
combien pour 120# *aura-t-on de toises du même bois ?*

Il est clair que le nombre de toises de bois, qui doit servir de réponse à cette question, est le quatriéme terme d'une proportion géométrique, dont les trois premiers termes sont 148#, 120# & 37 toises ; parce que les deux nombres de toises du même bois, doivent être proportionnés aux deux sommes d'argent 148# & 120# qui sont destinées à les payer ; c'est-à-dire que

148# *destinées à payer* 37 *toises de bois, sont à* 120# *destinées à payer le nombre cherché de toises du même bois.*

Comme 37 toises de bois, sont au nombre cherché de toises du même bois.

Pour faire ces Regles de Trois, c'est-à-dire pour découvrir les quatriémes termes de ces deux proportions dont nous connoissons les trois premiers termes, nous avons vû (N°. 104.) qu'il faut multiplier le second terme par le troisiéme, ou le troisiéme par le second, ce qui donne le même produit; & diviser ce produit par le premier terme; mais ceci présente une difficulté, qu'il est cependant facile de lever.

Si l'on ne considéroit que les multiplications qu'il faut faire pour trouver les quatriémes termes des proportions données pour exemples; on auroit des nombres de livres & de toises à multiplier les uns par les autres, ce qui seroit contre la regle de la multiplication, où nous avons fait voir que les facteurs d'une multiplication, ne peuvent pas être tous deux des nombres concrets.

Mais si l'on fait attention que les deux premiers termes dont les unités sont de la même espece, n'influent sur le quatriéme terme que par le nombre de fois que l'un contient l'autre, (puisque (N°. 103.) pour avoir le quatriéme terme, il suffit de multiplier le troisiéme par le quotient du second divisé par le premier, & que ce quotient est un nombre abstrait semblable à celui qu'on auroit en divisant un nombre abstrait par un autre nombre abstrait) l'on sentira aisément que ces deux termes concrets peuvent être regardés comme des nombres abstraits.

En effet, puisque 37 toises contiennent 30 toises de la même maniere que 37 unités abstraites contiennent 30 unités abstraites, & que 148# contiennent 120# de la même façon que 148 unités abstraites contiennent 120 unités abstraites; il est évident que les deux proportions données pour exemples peuvent être réduites aux suivantes, dont les deux premiers termes sont des nombres abstraits :

37 sont à 30, comme 148^{tt} sont au quatriéme terme demandé ;

Et 148 sont à 120, comme 37 toises de bois sont au quatriéme terme demandé.

A l'égard de la nature des unités du quatriéme terme qui est celui qu'on demande ; il est clair que ces unités seront de la même espéce que celles du terme moyen qui n'est pas considéré comme abstrait. Car pour trouver le quatriéme terme, il faudra multiplier le moyen concret par l'autre moyen abstrait, & diviser ensuite le produit par le premier terme qui est abstrait ; & l'on a vû que les unités d'un terme concret, ne changent point de nature, soit qu'on multiplie ou qu'on divise leur nombre par un nombre abstrait.

On voit par tout ce qui vient d'être dit, que si les trois premiers termes d'une Regle de Trois sont des nombres abstraits, le dernier terme qu'on cherche sera aussi un nombre abstrait.

Pour faire ensorte que les deux premiers termes de chaque proportion soient de même espéce, & composent un rapport géométrique, nous avons été obligés de renverser l'ordre du second & du troisiéme termes des énoncés des deux Regles de Trois prises pour exemples ; mais il est clair que ce renversement ne change rien à la valeur du quatriéme terme demandé ; ainsi qu'il a été prouvé (N°. 105).

Comme le renversement d'ordre du second & du troisiéme termes, n'est pas nécessaire pour découvrir le quatriéme ; il nous arrivera souvent dans la suite de laisser les termes des Regles de Trois dans l'ordre de leur énoncé, lors même que *les deux premiers ne seront pas de la même espéce ; & dans ce cas, il faudra considérer le premier & le troisiéme termes qui seront de même espéce, comme des nombres abstraits.*

Exemple premier.

Si 37 *toises de bois coûtent* 148$^{\text{tt}}$; *combien coûteront* 30 *toises du même bois ?*

Pour faire cette Regle, on n'aura aucune attention aux toises qui caractérisent les unités du premier & du troisiéme termes, & l'on considérera ces termes comme des nombres abstraits, c'est-à-dire comme si la question étoit :

Si 37 *coûtent* 148$^{\text{tt}}$; *combien coûteront* 30 ?

Second terme	148$^{\text{tt}}$	*à multiplier par le*
troisiéme terme	30	
Produit	4440$^{\text{tt}}$	37 1$^{\text{r}}$. *terme, par lequel on divise*
	37	120$^{\text{tt}}$ *quotient ou quatriéme terme*
	74	
	74	
	0	

On multipliera donc le second terme 148$^{\text{tt}}$ par 30 ; ce qui donnera 4440$^{\text{tt}}$ pour le produit, qu'on divisera par le premier terme 37 ; & l'on aura 120$^{\text{tt}}$ pour le quotient, ou pour la valeur demandée des 30 toises.

Exemple II.

Si pour 148$^{\text{tt}}$ *on a* 37 *toises de bois ; combien pour* 120$^{\text{tt}}$ *aura-t-on de toises du même bois ?*

On regardera le premier & le troisiéme termes qui ſont de même eſpéce, comme des nombres abſtraits, & comme ſi la queſtion étoit ainſi propoſée :

Si pour 148 *unités on a* 37 *toiſes de bois ; combien pour* 120 *aura-t-on de toiſes du même bois ?*

Second terme	37^T	*à multiplier par le*
troiſiéme terme	120	
	740	
	37	
Produit	4440^T	148 1^r. *terme par lequel on diviſe*
	444	30^T *quotient ou quatriéme terme*
	0	

On multipliera le ſconde terme 37^T par le troiſiéme 120, ce qui donnera 4440 toiſes ; & l'on diviſera ce produit par le premier terme 148 ; ce qui donnera 30^T pour la réponſe à la queſtion propoſée.

EXEMPLE III.

Si 7^{tt} $13^{\text{ſ}}$ 4^{d} *ont gagné* 20^{tt} $6^{\text{ſ}}$ 9^{d} ; *combien* 30^{tt} $13^{\text{ſ}}$ 4^{d} *gagneront-ils ?*

On regardera les livres du premier & du troiſiéme termes comme des unités abſtraites, & l'on conſidérera leurs ſols & leurs deniers comme des fractions d'unités abſtraites ; enſorte que $13^{\text{ſ}}$ 4^{d} étant les deux tiers d'une livre, on fera comme ſi la queſtion étoit énoncée ainſi.

Si $7\frac{2}{3}$ *ont gagné* 20^{tt} $6^{\text{ſ}}$ 9^{d} ; *combien* $30\frac{2}{3}$ *gagneront-ils ?*

La queſtion étant ainſi réduite à de plus ſimples termes, on multipliera le ſecond terme 20^{tt} $6^{\text{ſ}}$ 9^{d}

par le troisiéme $30\frac{2}{3}$; ce qui donnera pour le produit total 623^{lt} $13^{\text{ſ}}$ 8^{d} qu'il faudra diviser par le premier terme $7\frac{2}{3}$: & l'on aura 81^{lt} $7^{\text{ſ}}$ pour quotient, c'est-à-dire pour la réponse à la question proposée.

20^{lt}	$6^{\text{ſ}}$	9^{d}		
30	$\frac{2}{3}$			
600				
9				
	15			
	7	6		
8	15	7		
6	15	7		
623^{lt}	$13^{\text{ſ}}$	8^{d}	7	$\frac{2}{3}$
1871^{lt}	$1^{\text{ſ}}$		23	
184			81	$7^{\text{ſ}}$
31				
23				
8				
20				
$161^{\text{ſ}}$				
161				
0				

Il arrive souvent que les sols & les deniers du premier & du troisiéme termes sont embarrassans à réduire en fractions. Dans ce cas, on a plûtôt fait de réduire ces deux termes en deniers. Par exemple dans la question proposée, on auroit pû réduire en deniers le premier terme 7^{lt} $13^{\text{ſ}}$ 4^{d}, & le troisiéme 30^{lt} $13^{\text{ſ}}$ 4^{d} ; ce qui auroit changé ces deux termes en ceux-ci 1840^{d} & 7360^{d}, & la question proposée en celle-ci :

Si 1840 deniers ont gagné 20^{tt} 6^{ß} 9^{d}; combien 7360 deniers gagneront-ils ?

Considérant dans cette question le premier & le troisiéme termes comme des nombres abstraits, on multiplieroit le second 20^{tt} 6^{ß} 9^{d}, par le troisiéme 7360; ce qui produiroit 149684^{tt}. Ensuite on diviseroit ce produit par le premier terme 1840 : & l'on auroit comme ci-devant 81^{tt} 7^{ß} pour le quotient, & pour la réponse à la question proposée.

On pourroit convertir en deniers les trois premiers termes de la proportion ; & après avoir trouvé le quatriéme en deniers, on le réduiroit aux livres & sols qu'il contiendroit. Mais cette maniere d'opérer obligeroit à deux réductions inutiles.

COROLLAIRE.

110 Puisque (N°. 109.) pour trouver le quatriéme terme d'une Regle de Trois, il faut multiplier le second terme par le troisiéme, & diviser leur produit par le premier, & qu'un nombre quelconque divisé par l'unité, donne un quotient égal à ce nombre ; il est clair que si l'unité est le premier terme d'une Regle de Trois, on trouvera le quatriéme terme qu'on demande, en multipliant seulement le second terme par le troisiéme, ou le troisiéme par le second.

Quoiqu'une Regle de Trois qui a l'unité pour premier terme, se réduise à la multiplication des deux autres termes donnés, il faut pourtant remarquer que quand le premier terme est une unité concrete, on ne doit point le supprimer comme inutile, & qu'on ne peut pas proposer la Regle comme une simple multiplication ; parce que l'unité concrete du premier terme sert à fixer la nature des unités du produit des deux autres termes, en déterminant celui des moyens *dont les unités sont de même espéce qu'elle, à devenir un nombre abstrait.*

Par exemple si l'on propose ces deux Regles de Trois :

Si 1 toise de bois coûte $4^{\#}$ $10^{ß}$ 6^{d} ; combien coûteront 27 toises du même bois ?

Si pour $1^{\#}$ on a 27 toises de bois ; combien pour $4^{\#}$ $10^{ß}$ 6^{d} aura-t-on de toises du même bois ?

L'unité étant le premier terme, & les deux autres termes donnés, dont on peut changer l'ordre sans inconvénient, étant les mêmes dans ces deux Regles, savoir 27 toises de bois, *&* $4^{\#}$ $10^{ß}$ 6^{d} ; *on aura également le quatriéme terme de chacune d'elles, en multipliant 27 toises par* $4^{\#}$ $10^{ß}$ 6^{d}. *Mais les quatriémes termes de ces deux Regles de Trois, quoique produits par la multiplication des mêmes termes, ne sont pas composés des mêmes unités ; parce que le premier & le troisiéme termes concrets, étant composés de toises dans la premiere Regle, & de livres dans la seconde, on pourra* (No. 109.) *les rendre abstraits, en supprimant la dénomination de* toises *dans la premiere, & la dénomination de* livres *dans la seconde. Dans la premiere Regle, le produit de 27 toises par* $4^{\#}$ $10^{ß}$ 6^{d}, *se réduira donc à* $4^{\#}$ $10^{ß}$ 6^{d} *répetés 27 fois ; ce qui donnera* $122^{\#}$ $3^{ß}$ 6^{d} *pour le quatriéme terme de cette Regle : au lieu que dans la seconde, le produit de 27 toises par* $4^{\#}$ $10^{ß}$ 6^{d}, *se réduira à 27 toises répetées un nombre de fois exprimé par* $4\frac{1}{2}$ *&* $\frac{1}{40}$ *ou par* $4\frac{21}{40}$; *ce qui donnera 122 toises* $\frac{7}{40}$ *pour le quatriéme terme de cette seconde regle.*

Donc dans une Regle de Trois qui a l'unité pour premier terme, & dont on aura par conséquent le quatriéme terme en multipliant seulement le second par le troisiéme, on ne doit point négliger de considérer la nature de l'unité qui fait le premier terme ; puisqu'il n'y a que l'espéce de cette unité qui puisse faire connoître de quelle nature seront *les unités du quatriéme. Ainsi une Regle de Trois dont le premier terme est une unité concrete, ne peut pas être regardée comme une simple multiplication.*

Nous avons dit en parlant de la multiplication, que le multiplicande peut être composé d'unités de telle espece qu'on voudra; mais que le multiplicateur ne peut être composé que d'unités abstraites, dont chacune signifie simplement une fois *& ne désigne aucune espéce de chose. On propose cependant tous les jours des multiplications, dont les facteurs sont tous deux énoncés comme des nombres concrets. On propose, par exemple, de multiplier 27 toises par 4^{tt} 10^{s} 6^{d}; sans rien dire de plus pour fixer l'espéce des unités du produit. Or la multiplication de ces deux nombres pouvant donner des produits composés d'unités différentes, comme on vient de le voir dans deux Regles de Trois; il est clair qu'on ne pourra pas déterminer les unités du produit d'une semblable multiplication; & par conséquent le multiplicande & le multiplicateur d'une multiplication ne sauroient être tous deux des nombres concrets.*

De la Regle de Trois directe composée.

111 Une Regle de Trois est composée, lorsque son énoncé contient plus de trois nombres connus; & quoiqu'elle ait plus de trois termes, on la nomme toûjours Regle de Trois; parce qu'on peut la réduire à une Regle de trois termes résultans de la multiplication de ceux que l'énoncé renferme.

Une Regle de Trois est d'autant plus composée qu'elle contient un plus grand nombre de termes. Pour la réduire à trois termes, il faut y considérer deux causes & deux effets; écrire les uns sous les autres tous les termes qui appartiennent à la premiere cause; écrire aussi les uns sous les autres tous ceux qui composent le premier effet; placer de même les termes qui appartiennent à la seconde cause, ainsi que ceux qui composent le second effet : en observant de disposer alternativement les causes & leurs effets, & de commencer par la premiere cause ou par le premier effet, suivant que le terme qu'on cherche appartient au second effet ou à la seconde cause. Ensuite il faut multiplier ensemble toutes les quantités qui composent chaque terme ; & l'on aura une Regle de Trois simple, dont les trois premiers termes seront connus, ensorte qu'on en pourra trouver le quatriéme terme (N°. 109.).

Mais après avoir ainsi réduit les termes d'une Regle de Trois composée, il peut arriver deux cas ; ou la quantité que l'on cherche sera le quatriéme terme entier de la proportion, ou elle ne sera qu'un facteur de ce quatriéme terme. Dans le premier cas, la résolution de la Regle de Trois (N°. 109) donnera évidemment la quantité qu'on demande. Dans le second cas, lorsque le quatriéme terme sera trouvé, on sera obligé de le diviser par les facteurs connus qui entrent dans sa composition, pour avoir la quantité qu'on demande. On va prouver tout ce qu'on vient de dire dans les exemples suivans.

Exemple premier.

Si 20 personnes dépensent 99# en 15 jours ;
Combien dépenseront 60 personnes en 25 jours ?

Dans cette question, il y a 5 termes connus ; & l'on cherche un sixiéme terme, qui est la dépense inconnue de 60 personnes en 25 jours. De ces six termes, il y en a deux (20 personnes & 15 jours) qui sont la cause d'un premier effet, ou de la premiere dépense 99# ; & deux autres (60 personnes & 25 jours) qui sont la cause d'un second effet, ou de la seconde dépense inconnue. On mettra donc l'un sous l'autre pour un premier terme, 20 personnes & 15 jours qui composent la premiere cause; puis on écrira pour deuxiéme terme le premier effet 99ᵗᵗ. Ensuite on écrira l'un sous l'autre pour un troisiéme terme, les deux quantités 60 personnes & 25 jours qui composent la deuxiéme cause; & l'on aura pour quatriéme terme le second effet, qui est la dépense inconnue de 60 personnes en 25 jours.

1ere. *cause*	1er. *effet*	2e. *cause*	2e. *effet*
20 personnes 15 jours	99ᵗᵗ	60 personnes 25 jours	inconnu

Comme les causes sont proportionnelles à leurs effets, ces quatre termes dont le dernier est inconnu, composent une proportion géométrique. Ainsi l'on aura le quatriéme terme inconnu, savoir la dépense de 60 personnes en 25 jours, en multipliant le second terme par le troisiéme, & divisant le produit par le premier.

Mais avant de faire cette Regle de Trois, il faut déterminer en quoi consistent, ou à quoi se rédnisent le premier & le troisiéme termes de la proportion. Pour cela, on remarquera que 20 personnes dépenseront en 15 jours, autant que 15 fois 20 personnes en un jour; & que 60 personnes dépenseront en 25 jours, autant que 25 fois 60 personnes en un jour: ensorte que le premier & le troisiéme termes se réduiront à ces deux produits, 15 fois 20 personnes, & 25 fois 60 personnes. On aura donc pour résoudre la question proposée, cette Regle de Trois.

Si 15 fois 20 personnes dépensent 99ᵗᵗ;
Combien dépenseront 25 fois 60 personnes?

La Regle étant ainsi réduite, on trouvera le quatriéme terme qu'on demande, en suivant les préceptes que nous avons donnés dans l'article précédent, après avoir réduit 15 fois 20 personnes ou 15 fois 20 en un seul terme 300, & 25 fois 60 personnes ou 25 fois 60 en un seul terme 1500. Enfin la Regle étant faite, on aura 495^{tt} pour le quatriéme terme, c'est-à-dire pour la dépense de 60 personnes en 25 jours.

Si l'on fait attention à la solution que nous avons donnée de la question proposée, l'on reconnoîtra aisément que dans toutes les Regles de Trois composées, il faut démêler les termes qui composent les deux causes, d'avec les effets; mettre l'un sous l'autre les termes de la premiere cause, & les multiplier l'un par l'autre; écrire ensuite le premier effet; puis mettre l'un sous l'autre les termes qui composent la deuxiéme cause & les multiplier ensemble, & regarder ces trois termes comme les trois premiers termes d'une Regle de Trois.

1^{ere}. *cause*	1er. *effet*	2^{e}. *cause*	2^{e}. *effet*
20 personnes 15 jours	99^{tt}	60 personnes 25 jours	inconnu
300 :	99^{tt} ::	1500 :	R. 495^{tt}

Dans cet exemple la quantité demandée s'est trouvée le quatriéme terme entier de la proportion. Dans l'exemple suivant, la quantité cherchée ne sera qu'un facteur du quatriéme terme.

EXEMPLE II.

Si 20 *personnes dépensent* 99^{tt} *en* 15 *jours?*
En combien de jours 60 *personnes dépenseront-elles* 495^{tt}?

Dans cet exemple, la cause de la premiere dépense 99^{tt} est composée de 20 personnes & de 15 jours, & la cause de la seconde dépense 495# est composée de 60 personnes & d'un certain nombre inconnu de jours.

Le nombre inconnu de jours qu'on cherche, étant dans la cause de la deuxiéme dépense, on ne pourra faire trouver ce nombre de jours dans le quatriéme terme de la proportion, qu'en mettant la cause de la dépense après l'effet. Ainsi conformément à ce que nous avons dit dans l'exemple précédent, & à ce que nous venons de remarquer, l'on écrira comme il suit les termes donnés de la question.

1er. *effet*	1ere. *cause*	2e. *effet*	2e. *cause*
99#	20 personnes 15 jours	495#	60 personnes nombre inconnu de jours

Comme les deux quantités qui produisent chaque terme composé, doivent être multipliées l'une par l'autre, & que 60 personnes sont dans le même quatriéme terme avec le nombre de jours qu'on demande; on cherchera ce quatriéme terme tout entier: & quand il sera trouvé, on le divisera par 60, pour avoir le nombre inconnu de jours demandé; parce que ce quatriéme terme est composé de ce nombre de jours multiplié par 60.

Pour découvrir ce quatriéme terme composé, on regardera tous les autres termes, excepté 15 jours, comme des nombres abstraits: & après avoir multiplié 15 jours par 20, ce qui donnera 300 jours pour le second terme composé; l'on multipliera ce second terme 300 jours par le troisiéme 495; & l'on aura 148500 jours pour le produit. Enfin ce produit étant divisé par le premier terme 99, l'on trouvera 1500 jours pour le quotient, & pour le quatriéme terme entier de la proportion, Comme ce nombre 1500 jours est fait du nombre demandé de jours, multiplié par 60, on divisera 1500 jours par 60 ; & l'on aura au quotient 25 jours pour le nombre de jours qu'on demande.

On peut remarquer ici, qu'on auroit rendu la solution plus simple, en décomposant les deux dépenses de la question, comme il suit.

1°. *L'hypothèse de l'exemple proposé, est que 20 personnes dépensent 99ᵗᵗ en 15 jours. Ainsi en divisant 99ᵗᵗ par 20, l'on auroit eu 4ᵗᵗ 19ſ pour la dépense d'une personne en 15 jours ; ce qui auroit rendu l'hypothèse plus simple.*

2°. *On demande en combien de jours 60 personnes dépenseront 495ᵗᵗ. Or 495ᵗᵗ ne dureront pas plus de temps à 60 personnes, que la soixantième partie de 495ᵗᵗ, qui est 8ᵗᵗ 5ſ, durera à une personne. Ainsi la question proposée se seroit réduite à celle-ci.*

Si une personne dépense 4ᵗᵗ 19ſ en 15 jours ;

En combien de temps la même personne dépensera-t-elle 8ᵗᵗ 5ſ ?

La Regle de Trois se seroit trouvée directe simple, & l'on auroit eu 25 jours pour la réponse à la question.

EXEMPLE III.

Si 60 hommes en travaillant 8 heures par jours, font en 12 jours un fossé long de 10 toises, large de 5 pieds, & profond de 7 pieds ;

On demande quelle sera la longueur d'un fossé, large de 4 pieds, profond de 6 pieds, que 50 hommes feront en 15 jours dans le même terrein, en travaillant 6 heures par jours.

1°. Il est clair que 60 hommes, 12 jours pendant lesquels ils travaillent, & 8 heures qu'ils emploient par jour, composent par leur multiplication la cause du premier fossé ; parce que 60 hommes font 12 fois autant d'ouvrage en 12 jours, qu'ils en feroient en un jour. C'est pourquoi les 60 hommes doivent être multipliés par 12 : & comme il y aura encore 8 fois autant d'ouvrage de fait, en travaillant 8 heures par jour, qu'on en feroit en travaillant 1 heure ; il faut encore multiplier par 8 le premier produit de 60 hommes multiplié par 12.

2°. Le fossé long de 10 toises, large de 5 pieds, & profond de 7 pieds, étant considéré comme un parallélépipede, est un effet composé de la multiplication de ses trois dimensions, 10 toises, 5 pieds & 7 pieds.

3°. 50 hommes, 15 jours pendant lesquels ils travaillent, & les 6 heures qu'ils emploient par jour, composent par leur multiplication la cause du deuxiéme fossé, par les raisons que nous avons données en examinant la cause du premier fossé.

4°. Enfin le second fossé, composé de la multiplication de sa longueur inconnue par sa largeur & par sa profondeur, est l'effet de la deuxiéme cause.

Ainsi l'on disposera les uns sous les autres les facteurs de chaque cause, & l'on rangera pareillement les uns sous les autres les facteurs de chaque effet comme ici.

1ere *cause*	1er *effet*	2e *cause*	2e *effet*
60 hommes	10^T	50 hommes	longueur cherchée
12 jours	5^P	15 jours	4^P
8 heures	7^P	6 heures	6^P
5760 :	350^T ::	4500 :	4e *terme*

Ensuite on multipliera ensemble les facteurs des trois premiers termes, pour avoir des termes simples ; & l'on considérera tous ces facteurs comme des nombres abstraits, excepté celui 10 toises du premier effet, pour pouvoir trouver en toises la longueur du fossé. Enfin l'on multipliera le second terme réduit

350 toises, par le troisiéme réduit 4500, ce qui produira 1575000 toises; & ayant divisé ce produit par le premier terme réduit 5760 l'on aura au quotient 273 toises 2 pieds 7 pouces, à peu de chose près, pour le quatriéme terme composé.

Mais ce quatriéme terme est le produit de la longueur du fossé, multipliée par le produit 4×6 ou 24 de sa largeur & de sa profondeur. Ainsi en divisant 273 toises 2 pieds 7 pouces, par 24, on aura au quotient 11 toises 2 pieds 4 pouces, à peu de chose près, pour la longueur demandée du fossé.

EXEMPLE IV.

On occupe trois ouvriers pour faire un fossé, & les forces de ces trois ouvriers sont telles, que le premier peut faire le fossé en 11 jours; le second peut le faire en 22 jours; le troisiémé peut le faire en 33 jours.

On demande quel temps il faudra à ces trois hommes ensemble pour faire le fossé.

Suivant l'énoncé du Problême, le premier ouvrier fera $\frac{1}{11}$ du fossé en 1 jour; le second ouvrier fera $\frac{1}{22}$ du même fossé en 1 jour; & le troisiéme ouvrier fera $\frac{1}{33}$ du fossé aussi en 1 jour. Ainsi les trois ouvriers feront $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{22}$ & $\frac{1}{33}$ du fossé en un jour. Ajoûtant ensemble ces trois fractions ou parties de fossé, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{33}$, après les avoir réduites à la même dénomination, l'on trouvera que leur somme est $\frac{121}{726}$ ou $\frac{1}{6}$; c'est-à-dire que les trois ouvriers travaillant ensemble, feront $\frac{1}{6}$ du fossé en un jour.

Comme ces ouvriers feront d'autant plus d'ouvrage qu'il travailleront plus de temps, les quantités d'ouvrage seront directement proportionnelles aux tems employés à les faire. Ainsi prenant le fossé pour l'unité, on fera cette proportion.

Comme $\frac{1}{6}$ du fossé, est à 1 qui représente le fossé entier;

Ainsi

Ainsi 1 jour, temps employé à faire $\frac{1}{6}$ du fossé,

Est au nombre de jours que les trois ouvriers emploieront à faire le fossé entier.

Donc pour trouver le nombre de jours que les trois ouvriers emploieront à faire le fossé, il faudra multiplier le troisiéme terme 1 jour par le deuxiéme 1 qui représente le fossé, ce qui produira 1 jour; & diviser ce produit 1 jour, par le premier terme, c'est-à-dire par la fraction $\frac{1}{6}$, ou le multiplier par 6; ce qui donnera 6 jours pour le temps demandé.

De la Regle de Trois inverse simple.

112 Nous avons dit qu'une Regle de Trois est inverse, lorsque des trois termes donnés, il y en a deux qui sont les extrêmes d'une proportion; ensorte que le terme qu'on demande, est un moyen de la même proportion. Et comme les termes de la *Regle de Trois* sont donnés de suite; on est obligé pour avoir ce moyen, de multiplier le premier terme par le second qui dans le fond n'est que le quatriéme de la proportion, & de diviser le produit par le troisiéme terme.

Exemple.

Si 30 hommes emploient 40 jours à faire un ouvrage;

Combien de jours 10 hommes emploieront-ils, pour faire le même ouvrage?

Comme les 30 hommes & les 10 hommes ont le même ouvrage à faire; il faudra d'autant plus de temps, qu'il y aura moins d'hommes; c'est-à-dire que deux fois moins d'hommes seront deux fois plus de temps; trois fois moins d'hommes seront trois fois plus de temps &c. Ainsi 30 qui est le premier nombre d'hommes, sera au second 10; comme le temps inconnu employé par le ſecond nombre d'hommes, ſera au temps 40 jours employé par le premier nombre d'hommes.

La proportion étant ainſi énoncée, le temps demandé ſe trouve le troiſiéme terme. On aura donc (*No.* 107.) la valeur de ce terme, en multipliant l'un par l'autre les extrêmes 30 & 40 jours, & en diviſant le produit par le terme moyen 10 qui eſt donné ; c'eſt-à-dire que le temps demandé ſera $\frac{30 \times 40 \text{ jours}}{10}$, ce qui ſe réduit à 120 jours.

Mais les deux termes 30 & 40 jours qu'on a multipliés, ſont le premier & le ſecond termes de la Regle de Trois inverſe propoſée dont trois termes, 30 hommes, 40 jours & 10 hommes ſont écrits de ſuite. Donc pour avoir le terme inconnu d'une Regle de Trois inverſe, il faut multiplier le premier terme par le deuxiéme, & diviſer le produit par le troiſiéme.

REMARQUE.

113 Comme les inverſions ſont embarraſſantes ; il eſt à propos de faire remarquer que la Regle de Trois inverſe ſe réduit à une Regle de Trois compoſée dont les termes ſont égaux deux à deux.

Par exemple dans la queſtion propoſée, 1°. 30 hommes & 40 jours compoſent la cauſe de l'ouvrage. 2°. 10 hommes & le nombre demandé de jours qu'ils emploient à travailler, ſont la cauſe du même ouvrage. Ainſi, nommant l'ouvrage 1, l'on aura :

30 *fois* 40 *jours, eſt à* 1 ;
Comme 10 *fois le nombre de jours cherché, eſt à* 1.

Donc 30 fois 40 jours ſont égaux à 10 fois le nombre de jours demandé, puiſqu'ils contiennent également l'unité.

D'où il ſuit que la dixiéme partie de 30 fois 40 jours, c'eſt-à-dire 120 jours, eſt le temps demandé.

De la Regle de Trois inverse composée.

114 La Regle de Trois inverse composée ne differe de la Regle de Trois inverse simple, qu'en ce que les termes connus de celle-ci sont simples, & que les termes connus de celle-là sont faits de la multiplication de plusieurs autres; en sorte qu'après avoir réduit la regle de Trois inverse composée, à trois termes entiérement connus, elle est semblable à la Regle de Trois inverse simple.

EXEMPLE.

Si 30 hommes en travaillant 8 heures par jour, font un ouvrage en 40 jours;

En combien de jours 10 hommes feront-ils le même ouvrage, en travaillant 6 heures par jour?

Comme les 30 hommes & les 10 hommes doivent faire le même ouvrage; les 10 hommes emploieront d'autant plus de jours que leur nombre est moindre, & qu'ils travailleront moins d'heures par jour. Ainsi l'on aura cette proportion.

Comme 30 hommes travaillans pendant 8 heures,

Sont à 10 hommes travaillans pendant 6 heures:

Ainsi le nombre inconnu de jours que les 10 hommes emploieront,

Sera à 40 jours que les 30 hommes emploient.

Le premier terme de cette proportion se réduira à 8 fois 30 hommes, ou 240 hommes; & le second se réduira à 6 fois 10 hommes, ou 60 hommes; parce que 30 hommes travaillans pendant 8 heures font le même ouvrage, que 8 fois 30 hommes travaillans pendant 1 heure; & que 10 hommes travaillans pendant 6 heures, font le même ouvrage que 6 fois 10 hommes travaillans pendant 1 heure. Ainsi la proportion se réduira à celle-ci.

240 *hommes, sont à* 60 *hommes; comme le nombre inconnu de jours, est à* 40 *jours.*

Et en considérant les deux nombres d'hommes, comme des nombres abstraits, cette proportion se réduira encore à celle-ci :

240; *sont à* 60; *comme le nombre de jours cherché, est à* 40 *jours.*

On aura donc le nombre de jours demandé, en multipliant 40 jours par 240, & divisant le produit 9600 jours, par 60; ce qui donnera 160 jours.

REMARQUE.

115 L'ordre dans lequel il faut prendre les deux nombres de jours dont l'un est inconnu, étant opposé à celui suivant lequel on a pris les deux nombres de travailleurs; on peut être exposé à se tromper, quand on ne fait point assez d'attention à ce renversement d'ordre. Ainsi l'on fera toûjours bien d'éviter les inversions, en considérant dans la question deux causes & deux effets, & en comparant directement les causes avec leurs effets.

Dans la question proposée :

Si 30 *hommes, en travaillant* 8 *heures par jour, font un ouvrage en* 40 *jours; en combien de jours* 10 *hommes feront ils le même ouvrage, en travaillant* 6 *heures par jour?*

On remarquera aisément que 30 hommes, 8 heures & 40 jours composent par leur multiplication la premiere cause de l'ouvrage qu'ils font; & que 10 hommes, 6 heures & le nombre de jours que l'on cherche, composent aussi par leur multiplication la cause du même ouvrage que ces 10 hommes doivent faire. Or les deux effets ou les deux ouvrages étant égaux, leurs causes sont égales. Donc en regardant comme nombres abstraits tous les nombres donnés, excepté celui des jours; on trouvera que 30×8×40 jours, ou 9600 jours, sont égaux à 10 fois 6 fois ou à 60 fois le nombre de jours qu'on cherche. Ainsi la soixantiéme partie de 9600 jours, c'est-à-dire 160 jours, sera le nombre de jours demandé.

Ainsi lorsque tous les termes d'une Regle de trois composée inverse, peuvent se réduire à deux causes qui produisent un même effet; on peut proposer pour Regle générale de multiplier ensemble tous les nombres qui composent la premiere cause, en ne regardant comme concret que celui qui a des unités semblables à celles du nombre que l'on cherche; de diviser ensuite le produit, par le produit des termes qui sont donnés dans la seconde cause, en regardant ces termes comme des nombres abstraits, & de prendre le quotient, pour le terme demandé.

CHAPITRE III.

Des Regles de Compagnie.

116 LORSQU'ON se propose de partager un nombre donné, en parties proportionnelles à celles d'un autre nombre divisé comme on voudra; l'opération qu'on fait pour résoudre ce Problême, s'appelle une *Regle de Compagnie.*

On voit par cette définition, que pour trouver chacune des parties du nombre qu'on doit partager, il faut faire cette Regle de Trois.

Comme le nombre déja divisé, est à l'une de ses parties:

Ainsi le nombre qu'il faut diviser, est à une de ses parties, correspondante à celle qu'on a prise pour second terme.

Il faut donc, pour une Regle de Compagnie, faire autant de Regles de Trois moins une, qu'il faut trouver de parties différentes dans le nombre qu'on doit divifer. Nous difons *autant de Regles de Trois moins une*; parce qu'après avoir trouvé toutes les parties qui précédent la derniere, & avoir retranché ces parties de la totalité du nombre, le refte fera pour la derniere partie du même nombre. Ainfi l'on peut fe difpenfer de faire une Regle de Trois pour trouver cette derniere partie.

Une Regle de Compagnie peut être fimple ou compofée. Elle eft fimple, lorfque les termes des Regles de Trois qu'il faut faire, font fimples; & elle eft compofée, lorfque les termes des Regles de Trois dont dépend la folution, font compofés. Comme nous nous fommes affez étendus fur les différentes Regles de Trois; quelques exemples fuffiront pour montrer comment on peut faire toutes les Regles de Compagnie fimples ou compofées, qui fe rapportent à des Regles de Trois.

EXEMPLE PREMIER.

Trois marchands de blé fe font affociés:
Le premier pour 300 *facs de blé;*
Le fecond pour 250 *facs;*
Le troifiéme pour 450 *facs.*
La totalité de leurs grains a été vendue 12700#.
On demande combien il revient à chacun.

Il eft clair que pour réfoudre cette queftion, il faut partager 12700# en parties proportionnelles à celles 300 facs, 250 facs, 450 facs que les marchands ont mis en commun; & que la totalité des facs, doit être à la totalité du prix, comme chaque nombre particulier de facs, eſt à leur valeur ou à ce qui revient à chaque marchand.

On ajoûtera donc enſemble les trois nombres de facs de blé mis en ſociété ; ce qui donnera 1000 facs de blé dont le prix eſt 12700^{tt} : puis on fera ces trois proportions.

1°. *Si*	1000	*ſacs valent*		12700^{tt},
Combien	300	*ſacs valent ils?*	℞.	3810^{tt}.
2°. *Si*	1000	*ſacs valent*		12700^{tt},
Combien	250	*ſacs valent-ils?*	℞.	3175^{tt}.
3°. *Si*	1000	*ſacs valent*		12700^{tt},
Combien	450	*ſacs valent-ils?*	℞.	5715^{tt}.

On auroit pû ſe diſpenſer de faire la derniere Regle de Trois, pour trouver le prix du blé du troiſiéme marchand. Car en ajoûtant les premieres parties 3810^{tt} & 3175^{tt}, & ſouſtrayant leur ſomme 6985^{tt}, du prix total 12700^{tt}, on auroit eu 5715^{tt} de reſte, pour ce qui revient au troiſiéme marchand.

Si l'on avoit à trouver un grand nombre de parties proportionnelles ; il vaudroit mieux chercher la partie du nombre à diviſer, qui répond à une unité du nombre total déjà diviſé ; & multiplier enſuite par cette partie, chaque partie du nombre diviſé. On auroit par ce moyen toutes les parties proportionnelles qu'on demande, ſans faire autant de Regles de Trois qu'on a de nombres à trouver ; ce qui épargneroit autant de diviſions qu'il faudroit faire de Regles de Trois.

Par exemple, dans la queſtion propoſée, il faudroit chercher le prix d'un ſac de blé par cette proportion.

Si 1000 *ſacs valent* 12700^{tt} ; *combien vaut* 1 *ſac ?*

Et l'on trouveroit 12# 14ß, en divisant le second terme 12700# par le premier 1000.

Ayant trouvé 12# 14ß pour le prix d'un sac, on multiplieroit 12# 14ß par 300; & l'on auroit 3810# pour 300 sacs.

On multiplieroit 12# 14ß par 250; & l'on auroit 3175# pour 250 sacs.

Enfin l'on multiplieroit 12# 14ß par 450; & l'on auroit 5715# pour 450 sacs.

Exemple II.

Un négociant a mis 100000# dans le commerce. Au bout de 6 mois, un second négociant s'associe avec le premier pour 25000# dans les 100000#; & au bout de deux autres mois, le premier négociant a cédé à un troisiéme une part de 30000# dans la portion qui lui restoit des 100000#. Enfin au bout de 6 autres mois, les 100000# ont gagné 18000#.

Les conditions de la société étant que chacun aura part au profit à raison de sa mise, & du temps qu'elle aura été dans le commerce, sans avoir égard à l'intérêt de l'intérêt; on demande combien chaque négociant a gagné.

Suivant l'énoncé de la question, il y a toûjours eu pendant 14 mois 100000# dans le commerce, qui sont censées avoir gagné pendant ces 14 mois, autant que 14 fois 100000# ou 1400000# auroient gagné pendant un mois. Ainsi au lieu de prendre 100000# pendant 14 mois pour la cause du gain 18000#, on peut prendre 1400000# pour la cause de ce gain.

Le second négociant ayant pris au bout de 6 mois une part de 25000# dans les 100000#, les 25000# de ce négociant ont été 8 mois dans le commerce, & auront gagné pendant 8 mois, autant que 8 fois

25000ᵗᵗ, ou autant que 200000ᵗᵗ auroient gagné dans un mois. Ainsi au lieu de prendre 25000ᵗᵗ pendant 8 mois pour la cause du gain que doit faire le deuxiéme négociant, nous prendrons 200000ᵗᵗ pour la cause simple de ce gain.

Le troisiéme négociant ayant pris au bout de deux autres mois une part de 30000ᵗᵗ dans les 100000ᵗᵗ; les 30000ᵗᵗ de ce négociant auront été encore 6 mois dans le commerce, & auront gagné pendant ces 6 mois, autant que 6 fois 30000ᵗᵗ ou 180000ᵗᵗ auroient gagné pendant un mois. Ainsi au lieu de prendre 30000ᵗᵗ pendant 6 mois pour la cause du gain de ce troisiéme négociant, nous prendrons 180000ᵗᵗ pour la cause simple de son gain.

Mais les causes des gains sont proportionnelles aux gains.

On trouvera donc le gain du second négociant par cette Regle de Trois.

Comme 1400000ᵗᵗ *cause réduite du gain total,*

Est au gain total 18000ᵗᵗ.

Ainsi 200000ᵗᵗ *cause réduite du gain du second négociant,*

Est au gain de ce second négociant.

Or cette regle étant faite, comme nous l'avons expliqué, l'on trouvera 2571ᵗᵗ 8ˢ 7ᵈ, à peu de chose près, pour le gain du second négociant.

Pour trouver le gain du troisiéme négociant, qui a eu 30000ᵗᵗ dans le commerce pendant 6 mois, on fera cette seconde proportion.

Comme 1400000ᵗᵗ *cause réduite du gain total,*

Est au gain total 18000ᵗᵗ.

Ainsi 180000ᵗᵗ *cause réduite du gain du troisiéme négociant,*

Est au gain de ce négociant.

La regle étant faite, on trouvera à peu près

2314# 5ſ 8d, pour le gain du troiſiéme négociant.

Pour avoir le gain du premier négociant, il n'y aura point de Regle de Trois à faire; parce que le

deuxiéme ayant gagné	2571#	8ſ	7d
Et le troiſiéme ayant gagné	2314#	5ſ	8d
La ſomme de ces deux gains ſera	4885#	14ſ	3d
Et ſi du gain total	18000#		
On ôte la ſomme de ces deux gains	4885#	14ſ	3d
Il reſtera pour le gain du premier négociant	13114#	5ſ	9d

CHAPITRE IV.

Des Regles de Fauſſes poſitions.

117 LES Regles de Fauſſes poſitions reſſemblent à des Regles de Compagnie, en ce que par leur moyen l'on partage un nombre donné, ou une partie d'un nombre donné, en parties proportionnelles à celles d'un autre nombre que l'on prend à volonté, en ſuivant cependant les conditions de la queſtion.

On diſtingue deux ſortes de *Regles de Fauſſe poſition*: ſavoir les *Regles d'Une Fauſſe poſition* & les *Regles de Deux Fauſſes poſitions*.

Dans les Regles d'une Fauſſe poſition, l'on ne fait qu'une ſuppoſition de parties proportionnelles à celles dans leſquelles il faut partager le nombre propoſé.

Dans les Regles de deux Fauſſes poſitions, l'on fait réellement deux ſuppoſitions qui ſont toutes deux fauſſes, & l'on en conclud les véritables parties du nombre propoſé à diviſer.

DES REGLES D'UNE FAUSSE POSITION.

118 Les Regles d'Une Fausse position consistent, comme nous l'avons dit, à supposer des parties proportionnelles à celles du nombre qu'on doit diviser. Ces parties supposées font une fausse position, en ce qu'elles ne sont pas égales aux parties dans lesquelles le nombre proposé doit être divisé. Mais comme ces mêmes parties supposées sont proportionnelles à celles qu'on demande; la totalité de ces parties supposées, est à chacune d'elles en particulier; comme le nombre donné à diviser, est à chacune des parties que l'on demande. Ainsi lorsqu'on a une fois supposé des parties proportionnelles à celles que l'on demande, & qu'on en a fait la somme, le reste de l'opération se fait comme la regle de Compagnie, par des Regles de Trois.

EXEMPLE PREMIER.

Trouver un nombre dont la moitié, le tiers & le quart, fassent ensemble 52.

On choisira un nombre dont on puisse prendre aisément la moitié, le tiers & le quart; & pour avoir ce nombre, on multipliera ensemble les dénominateurs des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ou plus simplement les dénominateurs 4 & 3, parce que le dénominateur 2 est contenu dans 4; ce qui donnera 12. On prendra donc la moitié de 12 qui est 6; le tiers de 12 qui est 4; & le quart de 12 qui est 3. Ajoûtant ensemble toutes ces parties de 12, on aura 13.

Ensuite on fera cette Regle de Trois simple directe.

Si 13 *contient la moitié, le tiers & le quart de* 12;

De quel nombre 52 *contiendra-t-il la moitié, le tiers, & le quart?*

On aura donc le nombre demandé, en multipliant le second terme 12 par le troisiéme 52, & en divisant le produit 624 par le premier nombre 13; ce qui donnera 48.

Ainsi 48 est le nombre demandé dont la moitié, le tiers & le quart font ensemble 52.

Exemple II.

Un pere en partageant son bien à trois enfans, en a laissé la moitié à l'aîné, le tiers au second, & 20000# au troisiéme. On demande le bien que ce pere de famille avoit.

Supposons que le bien du pere de famille soit 1. La moitié qu'il a laissée à l'aîné de ses enfans sera $\frac{1}{2}$; & le tiers qu'il a laissé au second sera $\frac{1}{3}$. Ces deux parties réduites à la même dénomination seront $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$ dont la somme est $\frac{5}{6}$. Ces deux parts ou leur somme $\frac{5}{6}$ étant retranchée du bien total 1, il restera $\frac{1}{6}$ pour la part du troisiéme enfant: & comme les parties sont proportionnelles aux totalités, on fera cette Regle de Trois.

Comme $\frac{1}{6}$, *part du troisiéme enfant; est au bien supposé* 1;
Ainsi 20000#, *véritable part du troisiéme enfant; est au véritable bien que le pere de famille avoit.*

La Regle de Trois étant faite, en multipliant seulement le troisiéme terme par 6; parce que le second terme 1 ne multiplie point, & que la division par $\frac{1}{6}$ est une multiplication par 6; on trouvera 120000# pour le bien que le pere de famille avoit.

Exemple III.

Trois personnes ont partagé 100#, de maniere que,

La seconde a eu 2 fois autant que la premiere.

La troisiéme a eu autant que la premiere & la seconde ensemble.

On demande combien chacune a eu.

Si la part du premier avoit été	1
La part du second qui a eu deux fois autant que le premier, auroit été	2
La part du troisiéme qui a eu autant que les deux premiers ensemble, auroit été	3
Et la totalité des parts ou du bien partagé, auroit été	6

La question se réduit donc à partager 100# en parties proportionnelles à celles 1, 2, 3, dans lesquelles 6 auroit été partagé. Ainsi l'on trouvera les parries de 100# par les proportions suivantes, c'est-à-dire par trois Regles de Trois.

Comme le nombre total supposé	6
Est à ses parties	1 2 3

Ainsi le nombre 100# qu'on a partagé

Est à ses parties	16#	13ß	4d
	33#	6ß	8d
	50#	0ß	0d

DES REGLES DE DEUX FAUSSES POSITIONS.

119 Dans une Regle de Deux Fausses positions, il s'agit de partager un nombre en deux parties, & de partager encore une de ces parties en parties proportionnelles à d'autres parties supposées.

Pour faire ces deux partages, on fait deux fausses suppositions, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.

Exemple.

Trois personnes ont partagé 120ᵗᵗ, de maniere que
La seconde a eu deux fois autant que la premiere, & 3ᵗᵗ de plus.
La troisiéme a eu autant que les deux autres, & 4ᵗᵗ de plus.
On demande combien chacun des partageans a eu.

Si la part du premier avoit été	1ᵗᵗ
La part du second qui a eu deux fois autant que le premier & 3ᵗᵗ de plus, auroit été 2ᵗᵗ plus 3ᵗᵗ ou	5ᵗᵗ
La part du troisiéme qui a eu autant que les deux autres & 4ᵗᵗ de plus, auroit été 6ᵗᵗ plus 4ᵗᵗ ou	10ᵗᵗ
Enfin la totalité des parts auroit été	16ᵗᵗ

Voilà la premiere supposition qui est fausse, non-seulement en ce que les parties supposées ne sont pas les véritables; mais encore en ce que ces parties ne sont pas proportionnelles à celles dans lesquelles il faut diviser 120ᵗᵗ. Car les deux dernieres parties supposées renferment chacune deux autres parties, dont une est relative à la premiere part 1ᵗᵗ, & dont l'autre est déterminée. La seconde part 5ᵗᵗ, par exemple, est composée de deux parties 2ᵗᵗ & 3ᵗᵗ, dont l'une 2ᵗᵗ doit être double de la premiere part supposée, & changeroit de valeur proportionnellement aux variations qui arriveroient à la premiere part 1ᵗᵗ; au lieu que la deuxiéme partie 3ᵗᵗ est une grandeur déterminée qui ne changeroit point, en changeant la valeur de la premiere part 1ᵗᵗ.

En considérant que chaque part est ainsi composée de deux parties dont l'une est relative à la premiere part supposée, & dont l'autre est une grandeur déterminée qui feroit toujours la même, quelle que fut la premiere part; on examinera quelle eſt la portion du nombre 120$^{\text{#}}$, qui contient les parties des parts proportionnelles à la premiere part ſuppoſée; & quelle eſt la portion du même nombre 120$^{\text{#}}$, qui contient les parties déterminées de ces parts: & lorſque cette derniere portion de 120$^{\text{#}}$ ſera découverte, on la retranchera de 120$^{\text{#}}$, pour n'avoir que la premiere portion qui contient les premieres parties des parts.

Pour déterminer cette ſeconde portion de 120$^{\text{#}}$, on fera une ſeconde ſuppoſition dans laquelle n'entreront point les parties déterminées 3$^{\text{#}}$ & 4$^{\text{#}}$ qui accroiſſent les parts; l'on fera, dis-je, comme ſi la queſtion étoit ainſi propoſée.

Trois perſonnes ont partagé 120$^{\text{#}}$.
La ſeconde a eu deux fois autant que la premiere.
La troiſiéme a eu autant que les deux autres.

On ſuppoſera, comme on a déja fait, que

la part du premier partageant eſt	1$^{\text{#}}$
La part du ſecond ſera	2$^{\text{#}}$
La part du troiſiéme ſera	3$^{\text{#}}$
Et la ſomme de ces trois parts ſera	6$^{\text{#}}$

Cette ſeconde ſuppoſition ſera encore fauſſe, non-ſeulement parce que les parties ſuppoſées ne ſeront pas les véritables, mais encore parce qu'elles ne ſeront pas proportionnelles aux véritables parts des partageants.

Comme les parts qu'on a priſes dans cette ſeconde ſuppoſition, ne contiennent point les parties déterminées 3$^{\text{#}}$ & 4$^{\text{#}}$ dont les parties proportionnelles des parts ſont accrues; leur totalité 6$^{\text{#}}$ ne contiendra pas non plus le réſultat de ces parties déterminées; au lieu que la totalité 16₶ des parts de la premiere fauſſe poſition, contenoit le réſultat de ces parties déterminées.

Donc ſi l'on retranche la ſomme 6₶ des trois parts de la deuxiéme ſuppoſition, de la ſomme 16₶ des trois parts de la premiere ſuppoſition; le reſte 10₶ ſera la portion pour laquelle les parties déterminées 3₶ & 4₶ entrent dans la ſomme 120₶ qu'il faut partager : d'où il ſuit qu'en retranchant 10₶ de 120₶, le reſte 110₶ ſera la portion qui contient les parties des parts, relatives à la premiere part.

Après cet expoſé, il ne ſera pas difficile de trouver la part du premier partageant, par la ſeconde fauſſe ſuppoſition où les parts ſont ſuppoſées 1, 2, 3 dont la totalité eſt 6; on trouvera dis-je la part du premier partageant, ſur laquelle ſont fondées les deux autres, par cette Regle de Trois.

Comme la ſomme 6₶ des trois parts ſuppoſées,
Eſt à la premiere part 1₶;
Ainſi 110₶,
Eſt à la part du premier.

La Regle de Trois étant faite, en regardant les deux premiers termes comme des nombres abſolus, on trouvera que

La part du premier partageant eſt 18₶ 6ſ 8₰.

A l'égard des deux autres parts, on les trouvera en ſuivant les conditions de la queſtion, comme il ſuit.

Le ſecond doit avoir deux fois autant que le premier & 3₶ de plus : ainſi il aura 36₶ 13ſ 4₰ & 3₶ de plus, c'eſt-à-dire qu'il aura 39₶ 13ſ 4₰.

Le troiſiéme doit avoir autant que les deux premiers & 4₶ de plus : il aura donc d'abord 58₶ & enſuite 4₶ : ainſi il aura en tout 62₶.

Les trois parts demandées ſont donc 18₶ 6ſ 8₰, 39₶ 13ſ 4₰, & 62₶, qui font enſemble 120₶.

ÉLÉMENS

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE VI.

De la Regle d'Alliage.

120 LA Regle d'Alliage est une opération par laquelle on mêle ensemble plusieurs quantités de différentes valeurs, pour en composer d'autres d'une valeur moyenne.

Lorsque l'on connoît le nombre & la valeur des parties qui entrent dans l'alliage, & qu'il faut trouver la valeur des parties nouvelles de la chose alliée; le problême n'a aucune difficulté, & il est toûjours déterminé; c'est-à-dire qu'il n'a qu'une solution.

Mais lorsque la valeur des unités ou parties nouvelles du corps composé, est donnée, & qu'il faut trouver combien on doit prendre de parties de chacune des choses qu'il faut mêler ensemble; le problême est plus difficile, & il n'est déterminé que dans le cas où les choses qui doivent entrer dans le mélange, ne sont que de deux espéces, ou peuvent être réduites à deux espéces.

PROBLÊME.

121 *Lorsque l'on connoît la valeur & le nombre des différentes choses qui entrent dans la composition d'un corps allié, trouver la valeur des unités du corps allié.*

On multipliera la valeur de l'unité de chaque espéce de chose, par le nombre des unités de cette espéce ; ce qui donnera autant de produits particuliers, qu'on aura de choses à faire entrer dans le mélange. Ensuite on additionnera tous ces produits ; & ayant divisé leur somme, par la somme des unités de toutes les choses qui composent le mélange ; le quotient sera la valeur de l'unité du corps allié.

EXEMPLE PREMIER.

On a mêlé ensemble trois sortes de grains de différens prix ; savoir,

10 sacs de blé à 12#,
8 sacs de blé à 14#,
6 sacs de seigle à 8# :

Et l'on demande combien vaut le sac du mélange.

Multipliant 12# par 10, on aura pour 10 sacs de blé à 12#	120#
Multipliant 14# par 8, on aura pour 8 sacs de blé à 14#	112#
Multipliant 8# par 6, on aura pour 6 sacs de seigle à 8#	48#
Ainsi les 24 sacs mêlés ensemble vaudront en tout	280#

Divisant cette somme 280# par 24 qui est le nombre des sacs, le quotient 11# 13ſ 4d. sera la valeur d'un sac du mélange.

EXEMPLE II.

Un marchand a mêlé ensemble 288 pintes de différens vins; savoir,

156 pintes de vin à $8^{ß}$ la pinte,

132 pintes de vin à $6^{ß}$ la pinte.

On demande à quel prix il doit vendre la pinte de ce mélange, pour n'y rien perdre.

Multipliant $8^{ß}$ par 156, on aura pour 156 pintes de vin à $8^{ß}$,	$1248^{ß}$
Multipliant $6^{ß}$ par 132, on aura pour 132 pintes de vin à $6^{ß}$,	$792^{ß}$
Ainsi les 288 pintes vaudront en tout	$2040^{ß}$

Donc en divisant ce prix total $2040^{ß}$ de 288 pintes, par 288; le quotient $7^{ß}$ 1^{d} sera le prix auquel le marchand doit vendre la pinte du mélange de ses vins, pour n'y rien perdre.

EXEMPLE III.

Un orfévre a fondu ensemble 60 marcs d'argent à différens titres; savoir,

32 marcs à 11 deniers de fin,

20 marcs à 11 deniers 12 grains de fin,

8 marcs à 10 deniers 12 grains de fin.

On demande à quel titre est le mélange.

On divise le marc d'argent en 12 parties égales qu'on nomme *deniers*, & l'on partage le *denier* en 24 *grains*.

Si l'argent est pur & sans mélange d'aucun autre métal, c'est-à-dire si les 12 parties du marc d'argent sont fines; on dit que l'argent est à 12 *deniers*. Si le marc est composé de 11 parties d'argent pur & de

1 partie d'un autre métal; on dit que l'argent est à 11 *deniers.* Si le marc d'argent est composé de 10 parties & demie d'argent fin & de 1 partie & demie d'un autre métal; on dit que le tirre de l'argent est à 10 *deniers & demi*, ou à 10 *deniers* 12 *grains*: & ainsi des autres. Cela posé, voici comment on résoudra la question.

Comme on a 32 marcs à 11 deniers, 20 marcs à 11 deniers 12 grains, 8 marcs à 10 deniers 12 grains;

On multipliera 11*D* par 32 & l'on aura	352*D*
On multipliera 11*D* 12g par 20, & l'on aura	230*D*
On multipliera 10*D* 12g par 8, & l'on aura	84*D*
Les 60 marcs contiendront donc en tout	666*D*

Ainsi en divisant ces 666 *deniers de fin*, par 60; le quotient 11*D* 2g $\frac{2}{5}$ sera la quantité d'argent fin contenu dans un marc du mélange, & sera par conséquent le titre de ce mélange.

Jusqu'ici l'on a donné le nombre & la valeur de chaque espéce de parties qu'on a proposé de mêler, & il a seulement été question de trouver la valeur d'une partie du mélange. Dans les deux problêmes suivans & leurs exemples, on ne supposera connu, que le nombre total des parties du mélange, avec la valeur de chaque espéce de parties & la valeur totale de ce mélange; & il faudra déterminer le nombre des parties de chaque espéce, dont le mélange sera composé.

PROBLÊME.

122 *Deux unités de différentes valeurs étant données; trouver quelles parties il en faudra prendre, pour composer une unité d'une valeur moyenne donnée.*

On fera deux fractions qui auront pour dénominateur commun, la différence de la plus haute valeur à la moindre. L'une de ces fractions aura pour numérateur, la différence de la valeur moyenne à la plus basse, & sera la portion qu'il faudra prendre de l'unité de la plus grande valeur. L'autre fraction aura pour numérateur, la différence de la valeur moyenne à la plus haute, & sera la portion qu'il faudra prendre de l'unité qui vaudra le moins.

On va démontrer cette regle dans le premier exemple qui suit.

Exemple premier.

On veut faire un sac de blé à 12#, en mêlant ensemble du blé à 10# le sac, & du blé à 13# le sac.

Imaginons que les trois sacs, celui de 10# qui est le moins cher, celui de 13# qui est le plus cher, & celui que l'on veut composer pour le donner au prix moyen 12#, sont partagés en parties égales; il n'importe en combien pour le présent.

La différence 2# du plus bas prix 10# au prix moyen 12#, étant double de la différence 1# du plus haut prix au même prix moyen; il est clair que chaque partie qu'on prendra du blé le moins cher, pour faire le mélange, diminuera le prix moyen d'une quantité double de celle dont chaque partie du blé le plus cher augmentera le prix moyen. Ainsi pour augmenter le prix moyen du sac par le blé le plus cher, de la même quantité dont il sera diminué par le blé le moins cher, afin que le prix moyen soit tel qu'on le demande; il faudra prendre deux parties du blé le plus cher, contre une partie du blé le moins cher; c'est-à-dire que, de trois parties qu'on prendra en tout pour composer un sac au prix moyen, il faudra prendre deux parties du blé le plus cher, & une partie du blé le moins cher. Ainsi le sac de blé à 12#, sera composé de $\frac{2}{3}$ de sac à 13#, & de $\frac{1}{3}$ de sac à 10#.

Pour ramener cette opération à la regle du problême ; on remarquera que le dénominateur 3 commun aux deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$ qui représentent les deux portions de sac dont on compose le mélange, vient de la différence 3# qu'il y a entre le blé le plus cher & le blé le moins cher ; & que les numérateurs 2 & 1 de ces fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$, viennent des différences 2# & 1# qu'il y a du prix moyen 12# aux deux prix 10# & 13# des deux sacs dont les parties composent le mélange : en sorte que les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$ viennent de celles-ci $\frac{2\#}{3\#}$ & $\frac{1\#}{3\#}$.

EXEMPLE II.

On veut faire un marc d'argent à 11 deniers de fin, en mêlant ensemble de l'argent à 11D 18g, & de l'argent à 10D 12g ; & l'on demande combien il faut prendre de chacune de ces deux especes d'argent.

Le titre le plus bas étant de	10*D* 12*g*
Le titre le plus haut étant de	11*D* 18*g*
Le titre moyen étant de	11*D*

La différence du titre le plus bas au plus haut, sera 1*D* 6*g* ou 30 grains.

La différence du titre moyen au plus bas, sera de 12 grains.

La différence du titre moyen au plus haut, sera de 18 grains.

Ainsi (*N*°. 122.) deux fractions qui auront 30*g*, ou simplement 30 pour dénominateur commun, & qui auront 12*g* & 18*g*, ou simplement 12 & 18 pour numérateurs, seront les portions de marc, qu'il faudra prendre des deux argents dont les titres sont à 11*D* 18*g* & à 10*D* 12*g* ; c'est-à-dire que,

1°. $\frac{12}{30}$ ou $\frac{2}{5}$ sera la portion qu'il faudra prendre du marc à 11*D* 18*g*.

2°. $\frac{18}{30}$ ou $\frac{3}{5}$ sera la portion qu'il faudra prendre du marc à 10*D* 12*g*.

EXEMPLE III.

Faire un pied cube de matiere du poids de 500℔, en mêlant deux matieres dont l'une pése 650℔ & l'autre 480℔ le pied cube.

Le pied cube le plus pesant étant de 650℔
Le pied cube le moins pesant étant de 480℔
Le pied cube du poids moyen étant de 500℔
La différence du moindre poids au plus grand, sera 170℔,

La différence du poids moyen au moindre, sera 20℔.

La différence du poids moyen au plus grand, sera 150℔.

Ainsi (*No*. 122.) deux fractions qui auront 170℔, ou simplement 170 pour commun dénominateur, & qui auront 20℔ & 150℔, ou simplement 20 & 150 pour leurs numérateurs, seront les portions qu'il faudra prendre des deux pieds cubes donnés, pour composer le pied cube demandé du poids de 500℔; c'est-à-dire que,

1°. $\frac{20}{170}$ ou $\frac{2}{17}$ sera la partie qu'il faudra prendre du pied cube qui pése 650℔.

2°. $\frac{150}{170}$ ou $\frac{15}{17}$ sera la partie qu'il faudra prendre du pied cube qui pése 480℔.

On dit qu'Hiéron Prince de Siracuse, soupçonnant qu'il y avoit de l'alliage dans une couronne d'or qu'on lui avoit faite, eut recours à Archimede pour decouvrir, sans endommager la couronne, de combien d'argent elle pouvoit être mêlée; & qu'Archimede, par une regle semblable à celle que nous avons appliquée au dernier exemple, trouva la quantité d'argent qui étoit dans la couronne.

Le problême qu'Archimede avoit à résoudre, consistoit à faire un volume égal à celui de la couronne, & du même *poids que la couronne, en mêlant ensemble de l'or & de l'argent purs. Mais pour faire cet alliage, il avoit besoin de connoître le poids d'un volume d'or pur, égal à celui de la couronne, & celui d'un volume d'argent pur, égal à celui de la couronne; ce qui faisoit le sujet d'un autre problême, qu'Archimede eut premierement à résoudre.*

Un corps pesant plongé dans l'eau, y perd une partie de son poids, égale au poids du volume d'eau qu'il déplace. Ainsi les corps qui perdent dans l'eau des parties égales de leurs poids, déplacent des volumes d'eau égaux, & ont par conséquent eux-mêmes des volumes égaux.

Suivant ce principe, Archimede, après avoir pesé la couronne dans l'air, la pesa dans l'eau pour connoître combien elle y perdoit de son poids. On peut présumer qu'il pesa ensuite dans l'air une quantité d'or pur qu'il augmenta ou diminua, jusqu'à ce qu'en la pesant dans l'eau, elle y perdit une partie de son poids égale à celle que la couronne y avoit perdue. Par ce moyen, dont nous supposons qu'Archimede se servit, il parvint à faire un volume d'or pur, égal à celui de la couronne. En supposant qu'Archimede trouva de la même maniere un volume d'argent pur, égal à celui de la couronne, il fut en état de découvrir l'alliage de la couronne; c'est-à-dire de déterminer combien il falloit d'or pur & d'argent pur, pour composer un volume égal à celui de la couronne & du même poids que la couronne.

Nous ne nous occuperons point des différentes façons dont Archimede pouvoit découvrir le poids d'un volume d'or ou d'argent égal à celui de la couronne, en pesant successivement dans l'air & dans l'eau un lingot quelconque d'or ou d'argent; parce que ces problêmes appartiennent à l'Hydrostatique, où nous aurons occasion de les expliquer plus particulierement, & de remarquer l'insuffisance de cette méthode, pour déterminer l'alliage des métaux ou des liqueurs.

PROBLÊME.

123 *Faire une ſomme propoſée avec deux ſortes de piéces, de chacune deſquelles la valeur ſera donnée, & dont le nombre total ſera auſſi déterminé.*

1° On multipliera la valeur d'une des moindres piéces, par le nombre total des piéces; & l'on retranchera ce produit de la ſomme totale qu'on doit compoſer par l'alliage des deux eſpéces de piéces. Puis on diviſera le reſte de cette ſouſtraction, par la différence d'une grande piéce à une petite piéce; & le quotient de cette diviſion ſera le nombre qu'on prendra des plus grandes piéces, pour faire l'alliage propoſé.

2°. Si l'on vouloit avoir le nombre des petites piéces qui doivent entrer dans l'alliage propoſé; l'on multiplieroit la valeur d'une des plus grandes piéces, par le nombre total des piéces; & de ce produit, l'on retrancheroit la ſomme propoſée. Enſuite on diviſeroit le reſte de cette ſouſtraction, par la différence de la plus grande piéce à la plus petite; & le quotient de cette diviſion ſeroit le nombre des petites piéces qui doivent entrer dans l'alliage propoſé.

On va donner la démonſtration de cette Regle dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE PREMIER.

On n'a que des piéces de 2 ſols & de 18 deniers, & l'on veut faire 40 ſols en 24 piéces.

1°. Si toutes les 24 piéces étoient de 18 deniers, elles ne produiroient que 36 ſols, & donneroient par conſéquent 4 ſols de moins que les 40 ſols qu'on demande. Ainſi il faudroit augmenter de 4 ſols ce produit 36 sols, sans augmenter le nombre des 24 piéces. Or il est évident que c'est cette augmentation de 4 sols, que la premiere partie de la solution du problême fait trouver, en multipliant une petite piéce par le nombre total des piéces, & en retranchant le produit de la somme proposée.

Comme une piéce de 2 sols surpasse une piéce de 18 deniers de $\frac{1}{2}$ sol; chaque piéce de 2 sols qu'on mettra à la place d'une piéce de 18 deniers, augmentera le produit 36 sols de $\frac{1}{2}$ sol, sans augmenter le nombre des piéces. Ainsi pour augmenter de 4 sols le produit 36 sols des 24 piéces de 18 deniers, il faudra prendre à la place de piéces de 18 deniers, autant de piéces de 2 sols, que $\frac{1}{2}$ sol est contenu de fois dans 4 sols; c'est-à dire qu'il faudra prendre 8 piéces de 2 sols. Or c'est ce nombre de 8 piéces, que la même partie de la solution du problême fait trouver, en divisant le reste de la soustraction par la différence de la plus grande piéce à la plus petite. On n'aura donc plus que 16 piéces de 18 deniers, avec 8 piéces de 2 sols, qui font ensemble 24 piéces, & composeront la somme 40 sols qu'on demande.

2°. Si toutes les 24 piéces étoient de 2 sols, elles produiroient 48 sols, & donneroient par conséquent 8 sols de plus que les 40 sols qu'on demande. Ainsi il faudroit diminuer de 8 sols ce produit 48 sols, sans diminuer le nombre des 24 piéces. Or c'est cette diminution de 8 sols, que la seconde partie du problême fait trouver, en multipliant une grande piéce par le nombre total des piéces, & en retranchant du produit, la somme qu'on se propose de faire.

Chaque piéce de 18 deniers qu'on mettra à la place d'une piéce de 2 sols, diminuera de $\frac{1}{2}$ sol le produit 48 sols, sans augmenter ni diminuer le nombre total des piéces. Ainſi pour diminuer ce produit de 8 ſols, il faudra prendre autant de piéces de 18 deniers, que $\frac{1}{2}$ ſol différence des deux eſpéces de piéces, eſt contenu de fois dans 8 ſols; c'eſt-à-dire que le quotient 16 de la diviſion de 8 ſols, par la différence $\frac{1}{2}$ ſol des deux eſpéces de piéces, ſera le nombre des piéces de 18 deniers qui doivent faire partie de l'alliage demandé. On aura donc 16 piéces de 18 deniers, & 8 piéces de 2 ſols, qui font enſembles 24 piéces & compoſent les 40 ſols qu'on demande.

Lorſqu'on a trouvé le nombre des piéces de l'une des deux eſpéces, il n'eſt pas néceſſaire de chercher par les préceptes du problême, le nombre des piéces de l'autre eſpéce; puiſque ſi l'on retranche le nombre des piéces qu'on aura trouvé, du nombre total des piéces qui eſt donné; le reſte de la ſouſtraction ſera évidemment le nombre des piéces de l'autre eſpéce.

EXEMPLE II.

30 *Officiers tant Capitaines que Lieutenans, ont payé en tout* 2000# *pour leur rançon: chaque Capitaine a payé* 100#, *& chaque Lieutenant* 60#. *On demande combien il y avoit de Capitaines, & combien il y avoit de Lieutenans.*

Il eſt évident que cette queſtion revient à la précédente; & que dans celle-ci, il s'agit de faire 2000# en 30 piéces dont les unes ſoient de 100# & les autres de 60#.

Ainſi pour avoir le nombre des Capitaines qui payent la plus forte rançon 100#; on multipliera la plus petite rançon 60#, par le nombre 30 des Officiers; & ayant retranché le produit 1800#, de la totalité 2000# des rançons, il reſtera 200# qu'on divisera, par la différence 40# de la plus forte rançon à la plus foible; & le quotient 5 sera le nombre des Capitaines qui ont payé la plus forte rançon.

Comme il n'y a que 30 Officiers, tant Capitaines que Lieutenans, & qu'on a trouvé 5 Capitaines; il est clair qu'il n'y aura que 25 Lieutenans.

Exemple III.

On a loué un ouvrier pour 30 jours, à condition de lui donner 40 sols pour chaque jour qu'il travaillera, & de lui retenir sur ce qu'il aura gagné, 6 sols pour chaque jour qu'il ne travaillera pas. Au bout des 30 jours l'ouvrier a reçu 37#. On demande combien de jours cet ouvrier n'a pas travaillé.

Il s'agit dans cet exemple de faire 37# effectives, avec 30 choses de deux espéces opposées, savoir avec des gains de 40 sols chacun, & avec des pertes de 6 sols chacune. Ainsi la question se réduit à une Regle d'Alliage qu'on fera suivant le dernier probléme.

1°. On multipliera 40 sols, par 30 nombre des jours; & du produit 1200ß ou 60#, on retranchera la somme 37#; ce qui donnera un reste de 23#, ou de 460ß.

2°. La différence d'un gain de 40ß à une perte de 6ß, est 46ß. Ainsi l'on divisera le reste 460ß qu'on a trouvé, par 46ß; & le quotient 10 sera le nombre de jours que l'ouvrier n'a point travaillé.

Car si l'ouvrier n'avoit manqué aucun jour à travailler, il auroit gagné 60# en 30 jours, au lieu de 37# seulement qu'il a reçues: ainsi les 23# qu'il a manqué de gagner, sont pour les jours qu'il a manqué de travailler. Mais par les conditions du marché, l'ouvrier perd 46ß chaque jour qu'il ne travaille point, savoir 40ſ qu'il manque de gagner, & 6ſ qu'on lui retient sur ce qu'il a précédemment gagné. Donc en divisant les 23# de perte totale, par la perte 46ſ d'un jour; le quotient 10 qu'on trouve, est le nombre des jours de perte.

On rapporte aux deux derniers problêmes tous les alliages de plus de deux choses différentes, lorsque par les conditions des questions, les différentes choses qu'on veut allier peuvent se réduire à deux espèces seulement. On va donner des exemples de ces alliages.

EXEMPLE IV.

On veut faire 30 livres de poudre à 20ſ la livre, en mêlant ensemble de la poudre à 28ſ, de la poudre à 18ſ & de la poudre à 8ſ; à condition que la poudre à 18ſ & celle à 8ſ seront en parties égales.

Puisque la poudre à 18ſ & la poudre à 8ſ la livre, doivent être en parties égales dans le mélange; & que 1 livre de poudre à 18ſ avec 1 livre de poudre à 8ſ, feront 2 livres de poudre valant ensemble 26ſ, & composeront par conséquent de la poudre à 13ſ la livre: il évident que la question se réduira premiérement à faire 30 livres de poudre à 20ſ, ou la somme de 600ſ, avec de la poudre à 20ſ & de la poudre à 13ſ la livre, ou bien avec 30 piéces dont les unes seront de 28ſ & les autres de 13ſ. Or cette question se rapportera au dernier problême.

En résolvant la question, l'on trouvera qu'il faut 14 livres de poudre à 28ſ, & 16 livres de poudre à 13ſ. Et comme la poudre à 18ſ & la poudre à 8ſ, sont en parties égales dans la poudre à 13ſ; il est évident que l'alliage demandé sera composé de 14 livres de poudre à 28ſ, de 8 livres de poudre à 18ſ, & de 8 livres de poudre à 8ſ.

Si pour faire les 30℔ de poudre à 20ß la livre; avec de la poudre à 28ß, de la poudre à 18ß, & de la poudre à 8ß la livre; on impose la condition de prendre deux fois autant de poudre à 18ß que de poudre à 8ß: comme 2 livres de poudre à 18ß & 1 livre de poudre à 8ß, font 3 livres de poudre valant ensemble 44ß; la livre de ce premier mélange vaudra 14ß 8ᵭ. Ainsi la question se réduira à faire 30℔ de poudre à 20ß la livre, avec de la poudre à 28ß & de la poudre à 14ß 8ᵭ la livre; & l'on trouvera qu'il faut prendre 12℔ de poudre à 28ß, avec 18℔ de poudre à 14ß 8ᵭ la livre. Et comme les 18℔ de poudre à 14ß 8ᵭ, sont composées de deux parties de poudre à 18ß, & d'une partie de poudre à 8ß; l'alliage demandé sera composé de 12℔ de poudre à 18ß, de 6℔ de poudre à 8ß, mêlées avec 12℔ de poudre à 28ß la livre.

Comme on pourra toûjours faire de la poudre à 20ß la livre, avec de la poudre à 28ß, de la poudre à 18ß & de la poudre à 8ß la livre, quel que soit le rapport qu'on voudra mettre entre la quantité de poudre à 18ß & la quantité de poudre à 8ß, & qu'on pourra varier ce rapport à l'infini; il est évident qu'il y a une infinité de combinaisons différentes, par lesquelles on pourra faire de la poudre à 20ß la livre, avec de la poudre à 28ß, de la poudre à 18ß & de la poudre à 8ß la livre. Ainsi le problême où l'on proposeroit seulement de faire de la poudre à 20ß, avec de la poudre à 28ß, de la poudre à 18ß & de la poudre à 8ß la livre, auroit une infinité de solutions. & seroit ce qu'on appelle un Probléme indéterminé.

Il en sera de même de tous les autres problêmes, lorsqu'il sera question de composer un nombre donné de choses d'une valeur donnée, en alliant trois espéces de choses de différentes valeurs données, & qu'il n'y aura point de condition *qui détermine en quel rapport ſeront les quantités de deux des trois choſes données.*

Quoique ces problêmes d'alliage de trois choſes, (lorſque rien ne détermine à réduire à deux eſpéces les choſes qu'on doit allier) ſoient par eux-mêmes ſuſceptibles d'une infinité de ſolutions, c'eſt-à-dire de combinaiſons des choſes alliées; il y a néanmoins des conditions qui réduiſent toutes les ſolutions poſſibles à un certain nombre de combinaiſons; comme nous le verrons dans un problême particulier qui ſuivra l'exemple cinquiéme qu'on va donner.

EXEMPLE V.

On propoſe de faire 40℔ de poudre à 20 ſols la livre, en mêlant enſemble de la poudre à 12ß, de la poudre à 16ß, de la poudre à 18ß & de la poudre à 28ß la livre; en obſervant d'employer trois fois autant de poudre à 12ß que de celle à 16ß, & de mettre deux fois autant de poudre à 28ß que de poudre à 18ß.

1°. Pour remplir une premiere condition de la queſtion; il faudra prendre 3℔ de poudre à 12ß, contre 1℔ à 16ß, qui feront 4 livres de poudre valant enſemble 52ß, & compoſeront par conſéquent de la poudre à 13ß la livre.

2°. Par une autre condition de la queſtion, il faut prendre 2℔ de poudre à 28ß contre 1℔ de poudre à 18ß, qui feront 3℔ de poudre valant enſemble 74ß, & compoſeront par conſéquent de la poudre à 24ß 8d la livre.

Les quatre eſpéces de poudre qu'il faudra allier, ſe réduiront donc à deux eſpéces; & il s'agira de faire 40℔ de poudre à 20ß, avec de la poudre à 13ß, & de la poudre à 24ß 8d la livre.

En réſolvant la queſtion, l'on trouvera qu'il faut

16℔ de poudre à 13ß, & 24℔ de poudre à 24ß 8ᵈ la livre.

1°. Comme les 16℔ de poudre à 13ß contiendront trois parties de poudre à 12ß, contre une partie de poudre à 16ß; il est clair qu'il faudra prendre 12℔ de poudre à 12ß & 4℔ de poudre à 16ß, pour faire l'alliage demandé.

2°. Et comme les 24℔ de poudre à 24ß 8ᵈ, contiendront deux parties de poudre à 28ß, contre une partie de poudre à 18ß; il faudra nécessairement prendre 16℔ de poudre à 28ß & 8℔ de poudre à 18ß.

Il est visible que si l'on avoit fixé un autre rapport entre les quantités de poudre à 12ß & à 16ß, ou entre les quantités de poudre à 28ß & à 18ß; l'on auroit trouvé une autre combinaison pour le mélange demandé, & qu'on auroit toujours fait 40℔ de poudre à 20ß la livre, avec les quatre espéces données : & comme ces rapports peuvent être variés à l'infini; il s'ensuit que les problêmes d'alliage de 4 choses, peuvent avoir une infinité de combinaisons, lorsque les quatre choses données ne peuvent pas être réduites à deux. Nous verrons cependant dans le problême suivant & ses exemples, que certaines circonstances, telles que celles où il faut prendre des nombres entiers, réduisent toutes les solutions possibles, à quelques combinaisons seulement.

PROBLÊME.

124 *Faire une somme proposée avec trois sortes de pieces, dont le nombre total soit donné avec la valeur de chacune en particulier.*

On multipliera la valeur de la plus petite piéce, par le nombre des piéces qu'on doit employer dans l'alliage, & l'on retranchera ce produit de la somme totale

totale qu'on se proposera de faire; ce qui donnera un reste dont il faudra augmenter le produit, pour faire la somme demandée.

On partagera ce reste en deux parties dont l'une soit divisible par l'excès de la plus grande piece sur la plus petite, & dont l'autre soit divisible par l'excès de la moyenne piéce sur la plus petite.

Si l'on ne peut faire ce partage que d'une maniere, le problême n'aura qu'une solution; mais si l'on peut faire ce partage en plusieurs manieres, & que les deux parties étant divisées, l'une par l'excès de la plus grande piéce sur la plus petite, l'autre par l'excès de la moyenne piéce sur la plus petite, donnent des quotiens dont la somme ne soit pas plus grande que le nombre des piéces qu'on doit employer; le problême aura autant de solutions, qu'il y aura de manieres de partager le reste en deux parties de cette espéce.

Le reste étant ainsi partagé en deux parties de toutes les façons possibles; on divisera les premieres parpies par l'excès de la plus grande piéce sur la plus petité; & les quotiens de ces divisions seront les différens nombres qu'on pourra prendre des piéces de la plus grande valeur, pour faire l'alliage demandé.

On divisera de la même maniere les secondes parties du reste, par l'excès de la moyenne piéce sur la plus petite; & les quotiens de ces divisions seront les différens nombres qu'on pourra prendre des piéces de la moyenne valeur, pour faire l'alliage proposé.

Les deux parties correspondantes du reste, divisées comme on vient de le dire, ayant donné le nombre des piéces de la plus grande valeur & le nombre des piéces de la moyenne valeur; la somme de ces deux nombres de piéces sera retranchée du nombre total des piéces qui eſt donné ; & le reſte ſera le nombre des piéces de la moindre valeur. Or il eſt évident qu'on aura autant de différens nombres de ces moindres piéces, qu'on aura trouvé de nombres différens pour les autres piéces.

On va donner la démonſtration de ce procédé dans le premier exemple qui ſuit.

EXEMPLE PREMIER.

On propoſe de faire 18^{tt} *ou* $360^{ſ}$, *en* 22 *piéces de trois eſpeces, ſavoir de* $24^{ſ}$, *de* $12^{ſ}$ *& de* $6^{ſ}$.

Si les 22 piéces étoient toutes de $6^{ſ}$, elles ne produiroient que $132^{ſ}$, & feroient $228^{ſ}$ de moins que la ſomme $360^{ſ}$ qu'on demande. Ainſi le produit $132^{ſ}$ qu'on aura, en multipliant par 22 la valeur de la plus petite piéce qui eſt de $6^{ſ}$, doit être augmenté de $228^{ſ}$, ſans que le nombre des 22 piéces ſoit changé. Or cette augmentation de $228^{ſ}$, qu'on trouvera en retranchant le produit $132^{ſ}$ de la ſomme propoſée $360^{ſ}$, ne peut être faite que par l'échange de quelques piéces de $24^{ſ}$ & de $12^{ſ}$, contre un pareil nombre de piéces de $6^{ſ}$.

1°. Chaque piéce de $24^{ſ}$ qu'on mettra à la place d'une piéce de $6^{ſ}$, donnera une augmentation de $18^{ſ}$, égale à la différence de la plus grande piéce à la plus petite. Ainſi la partie d'augmentation qu'on produira, en changeant quelques piéces de $6^{ſ}$, contre un pareil nombre de piéces de $24^{ſ}$, ſera un nombre de ſols multiple de $18^{ſ}$, & par conſéquent diviſible par $18^{ſ}$ différence de la plus grande piéce à la plus petite.

2°. Chaque piéce de $12^{ſ}$ qu'on mettra pour une piéce de $6^{ſ}$, produira une augmentation de $6^{ſ}$, qui eſt la différence d'une moyenne piéce à la plus petite. Ainſi la partie d'augmentation qu'on produira, en ſubſtituant des piéces de 12^{ſ} à des piéces de 6^{ſ}, ſera un nombre de ſols multiple de 6^{ſ}, & par conſéquent diviſible par 6^{ſ} différence de la moyenne piéce à la plus petite.

Il faudra donc partager l'augmentation 228^{ſ} en deux parties, dont l'une ſoit diviſible par la différence 18^{ſ} de la plus grande piéce à la plus petite, & dont l'autre ſoit diviſible par la différence 6^{ſ} de la moyenne piéce à la plus petite.

	18^{ſ}		210^{ſ}
	36	Secondes parties	192
Premieres parties	54	correſpondantes	174
de 228^{ſ}, qui ſont	72	de 228^{ſ}, qui ſont	156
diviſibles par 18^{ſ},	90	diviſibles par 6^{ſ},	138
& qui peuvent être	108	& qui peuvent être	120
produites en ſubſtituant des piéces	126	produites en changeant des piéces	102
de 24^{ſ} à des piéces de 6^{ſ}.	144	de 12^{ſ}, contre un	84
	162	pareil nombre de	66
	180	piéces de 6^{ſ}.	48
	198		30
	216		12

Chaque piéce de 24^{ſ} ſubſtituée à une piéce de 6^{ſ}, ne produiſant que 18^{ſ} dans les premieres parties de 228^{ſ}, & chaque piéce de 12^{ſ} miſe à la place d'une piéce de 6^{ſ}, ne produiſant que 6^{ſ} dans les ſecondes parties de 228^{ſ}; il eſt clair que ſi l'on diviſe les premieres parties par 18^{ſ}, on aura les différens nombres de piéces de 24^{ſ} qui produiſent les premieres parties, ou qui peuvent entrer dans l'alliage; & qu'en diviſant les ſecondes parties par 6^{ſ}, on aura les différens nombres de piéces de 12^{ſ} qui peuvent entrer en même temps dans l'alliage. Ces divisions étant faites, on aura les nombres suivans de piéces de 24ß & de piéces de 12ß.

Différens nombres de piéces de 24ß qui peuvent entrer dans l'alliage.	1	Nombres correspondans de piéces de 12ß qui peuvent entrer dans l'alliage.	35
	2		32
	3		29
	4		26
	5		23
	6		20
	7		17
	8		14
	9		11
	10		8
	11		5
	12		2

Comme il ne faut que 22 piéces en tout dans l'alliage qu'on demande ; il est évident que les sept premiers nombres de pieces de 24ß, qui, avec les nombres correspondans de piéces de 12ß, font plus de 22 piéces, doivent être rejettés avec leurs correspondans ; & que le huitiéme nombre 8 des piéces de 24ß, qui, avec le nombre correspondant 14 de piéces de 12ß, fait justement 22 piéces, doit pareillement être rejetté de l'alliage proposé avec son correspondant 14, si l'on veut que cet alliage contienne des piéces de 6ß, comme on le demande dans la question qui fait le sujet de l'exemple.

Les huit premiers nombres de piéces de 24ß, & les huit nombres correspondans de piéces de 12ß étant supprimés ; il ne restera plus que quatre nombres différens de piéces de 24ß, avec quatre nombres correspondans de piéces de 12ß : & comme il ne faut que 22 piéces en tout ; si de 22 l'on retranche chaque ſomme faite d'un nombre de piéces de $24^{\text{ſ}}$ & du nombre correſpondant de piéces de $12^{\text{ſ}}$; chaque reſte ſera le nombre correſpondant de piéces de $6^{\text{ſ}}$.

Il y aura donc quatre combinaiſons différentes de piéces de $24^{\text{ſ}}$, de $12^{\text{ſ}}$ & de $6^{\text{ſ}}$, pour faire $18^{\text{#}}$ ou $360^{\text{ſ}}$, en 22 piéces de ces trois eſpéces. Voici ces quatre combinaiſons.

Nombres de piéces de $24^{\text{ſ}}$.	Nombres correſpondans de piéces de $12^{\text{ſ}}$.	Nombres correſpondans de piéces de $6^{\text{ſ}}$.
9	11	2
10	8	4
11	5	6
12	2	8

Les ſept premiers nombres de piéces de $24^{\text{ſ}}$, & les ſept nombres correſpondans de piéces de $12^{\text{ſ}}$ qu'on a rejettés, auroient pû réſoudre cette queſtion.

Une perſonne s'étant intéreſſée à trois différens jeux, a gagné des piéces de $24^{\text{ſ}}$ au premier, des piéces de $12^{\text{ſ}}$ au ſecond, & a perdu des piéces de $6^{\text{ſ}}$ au troiſiéme : & ayant gagné 22 piéces de plus de celles de $24^{\text{ſ}}$ & de celles de $12^{\text{ſ}}$, qu'elle n'a perdu de celles de $6^{\text{ſ}}$; ſon gain a été de $18^{\text{#}}$ ou de $360^{\text{ſ}}$. On demande combien cette perſonne peut avoir gagné de piéces de $24^{\text{ſ}}$ & de piéces de $12^{\text{ſ}}$, & combien elle peut avoir perdu de piéces de $6^{\text{ſ}}$.

Cette queſtion aura ſept ſolutions, ſi l'on ſuppoſe que la perſonne a réellement perdu au jeu de $6^{\text{ſ}}$; & il y aura une huitiéme ſolution, ſi l'on ſuppoſe qu'elle n'a rien perdu au jeu de $6^{\text{ſ}}$. Les huit premiers nombres de piéces de $24^{\text{ſ}}$, & les huit nombres correſpondans de pieces de $12^{\text{ſ}}$, qu'on a rejettés dans la queſtion de l'exemple, ſeront les nombres de piéces de $24^{\text{ſ}}$ & de $12^{\text{ſ}}$ gagnées. Et comme on ſuppoſe que le joueur a gagné 22 piéces de plus de ces deux eſpéces, *qu'il n'en a perdu de celles de 6ſ; ſi l'on retranche 22; de chaque ſomme faite d'un nombre de pièces de 24ſ & d'un nombre correſpondant de pièces de 12ſ; chaque reſte ſera le nombre correſpondant des piéces de 6ſ qu'on ſuppoſe avoir été perdues. Voici les huit combinaiſons qui ſervent de réponſe á la queſtion.*

Nombres des piéces de 24ſ qui peuvent avoir été gagnées.		Nombres correſpondans des piéces de 12ſ qui peuvent avoir été gagnées.		Nombres correſpondans des piéces de 6ſ. qui peuvent avoir été perdues.	
	1		35		14
	2		32		12
	3		29		10
	4		26		8
	5		23		6
	6		20		4
	7		17		2
	8		14		0

EXEMPLE II.

On propoſe de faire 30tb de poudre à 20ſ la livre, en mêlant enſemble des nombres entiers de livres de poudre à 28ſ, à 18ſ & à 8ſ la livre; & l'on demande combien il faut employer de livres de poudre de chaque eſpéce.

Les 30tb de poudre à 20ſ vaudront 600ſ; & les livres de poudre à 28ſ, à 18ſ & à 8ſ, que l'on prendra, pouvant être regardées comme des piéces de 28ſ, de 18ſ & de 8ſ; la queſtion ſe réduira à faire une ſomme de 600ſ, en 30 piéces de trois eſpéces, dont les plus grandes ſeront de 28ſ, les moyennes de 18ſ & les plus petites de 8ſ. On pourra donc la réſoudre comme la précédente.

On multipliera 8ſ valeur de la plus petite piéce par 30; ce qui produira 240ſ, qu'on retranchera de la ſomme donnée 600ſ; & il reſtera 360ſ dont le produit 240ſ doit être augmenté par la ſubſtitution de quelques piéces de 28ſ & de 18ſ, à un pareil nombre de piéces de 8ſ.

La différence de la plus grande piéce qui vaut 28ß, à la plus petite qui vaut 8ß, sera 20ß.

La différence de la moyenne piéce qui vaut 18ß, à la plus petite qui vaut 8ß, sera 10ß.

On partagera donc 360ß en deux parties qui soient divisibles l'une par 20ß & l'autre par 10ß; & l'on rejettera les six premieres parties divisibles par 20ß avec leurs correspondantes qui se trouveront divisibles par 10ß; parce qu'elles produiroient un nombre total de piéces plùs grand que 30.

Premieres parties de 360ß, divisibles par 20ß, lesquelles peuvent être produites en substituant des piéces de 28ß à des piéces de 8ß.	140ß	Secondes parties correspondantes de 360ß, divisibles par 10ß, lesquelles peuvent être produites en substituant des piéces de 18ß à des piéces de 8ß.	220ß
	160		200
	180		180
	200		160
	220		140
	240		120
	260		100
	280		80
	300.		60
	320		40
	340		20

Divisant les premieres parties par 20, & les secondes parties correspondantes par 10, les quotiens correspondans seront les nombres de piéces de 28ß & de 18ß; c'est-à-dire les nombres de livres de poudre à 28ß & à 18ß, qui doivent entrer dans l'alliage demandé. Et comme, par les conditions du problême, il ne faut que 30 piéces ou 30 livres de poudre; si de 30 on retranche chaque somme faite d'un nombre de livres de poudre à 28ß, & du nombre correspondant de livres de poudre à 18ß; chaque reste sera le nombre correspondant des troisiémes piéces, ou des livres de poudre à 8ß.

En faisant ces opérations, l'on trouvera les 11 combinaisons suivantes, pour faire 30℔ de poudre à $20^{ß}$, en mêlant ensemble des livres entieres de poudre à $28^{ß}$, à $18^{ß}$ & à $8^{ß}$.

Nombres de livres de poudre à $28^{ß}$, ou de piéces de $28^{ß}$.		Nombres correspondans de livres de poudre à $18^{ß}$, ou de piéces de $18^{ß}$.		Nombres correspondans de livres de poudre à $8^{ß}$, ou de piéces de $8^{ß}$.	
	7		22		1
	8		20		2
	9		18		3
	10		16		4
	11		14		5
	12		12		6
	13		10		7
	14		8		8
	15		6		9
	16		4		10
	17		2		11

Cette question n'a que onze solutions, parce qu'on a imposé la condition de prendre des livres entieres de poudre des trois espéces.

Si par les conditions de la question, l'on avoit permis de prendre des demi-livres de poudre des trois espéces; la question se seroit réduite à faire 60 demi-livres de poudre à $10^{ß}$ la demi-livre, avec de la poudre à $14^{ß}$, à $9^{ß}$ & à $4^{ß}$ la demi-livre. Alors le problême auroit eu 23 combinaisons, ou le double des combinaisons précédentes & une de plus.

Et si l'on eut permis de prendre la poudre par quarterons; le problême auroit eu 47 combinaisons; c'est-à-dire le double de celles qu'il auroit eues en prenant la poudre à la demi-livre, & encore une de plus.

Si l'on permettoit de peser la poudre 2 onces à 2 onces; le probllême auroit 95 combinaisons ou solutions differentes; & si l'on prenoit la poudre par onces, il en auroit 191 &c.

Ainsi l'on pourra multiplier à l'infini le nombre des combinaisons ou soulutions, en prenant la poudre par parties *continuellement plus petites, & le problême aura réellement une infinité de combinaisons, lorsque les parties qu'on pourra prendre de chaque espéce de poudre, seront arbitraires.*

PROBLÉME.

125 *Faire une somme proposée, en quatre sortes de piéces dont le nombre total soit donné avec la valeur de chacune en particulier.*

On multipliera la valeur de la plus petite piéce, par le nombre total des piéces, & le produit sera retranché de la somme qu'on doit faire par l'alliage de toutes les piéces; ce qui donnera un reste.

On partagera ce reste en 3 parties qui soient divisibles par les 3 différences qu'il y aura entre la plus petite piéce & les trois autres. Si ce partage ne peut être fait que d'une maniere, le problême n'aura qu'une solution: mais si on peut le faire de plusieurs façons, & que les trois parties étant divisées par les trois différences, la somme des trois quotiens soit moindre que le nombre total des piéces; le problême aura autant de solutions, qu'il y aura de manieres de partager la différence trouvée, en trois parties de cette espéce.

Enfin les quotiens des trois divisions seront les trois nombres des trois espéces de piéces supérieures à la plus petite, qui entreront dans l'alliage.

EXEMPLE.

On veut faire 10ſs ou 120d, en 9 piéces de quatre espéces, les premieres de 2ſs ou 24d, les secondes de 18d, les troisiémes de 1ſs ou 12d, les quatriémes de 6d; & l'on demande combien il faudra prendre de piéces de chacune de ces quatre espéces, & toutes les manieres dont le problême peut être résolu, en prenant toûjours des piéces entieres.

On multipliera 6^{d} valeur de la plus petite piéce, par 9 nombre total des piéces ; & le produit 54^{d} étant retranché de la somme 120^{d} qu'on doit faire, il restera 66^{d}.

Les trois différences de la plus petite piéce qui est de 6^{d}, aux trois autres qui sont de 24^{d}, de 18^{d}, de 12^{d}, étant 18^{d}, 12^{d}, 6^{d} ; on partagera le reste 66^{d} en trois parties divisibles par 18^{d}, 12^{d} & 6^{d}. Pour faire commodément ce partage, voici l'ordre qu'on suivra.

On prendra d'abord les parties de 66^{d} qui sont divisibles par 18^{d}. Ces parties seront 18^{d}, 36^{d}, 54^{d}.

1°. La partie 18^{d} qu'on prendra dans 66^{d}, laissera 48^{d}, pour les deux autres parties qui doivent être divisibles par 12^{d} & par 6^{d}. Ainsi ces deux dernieres parties seront 12^{d} & 36^{d}, ou 24^{d} & 24^{d}, ou 36^{d} & 12^{d} ; d'où l'on tirera trois combinaisons différentes des trois parties de 66^{d}, qui sont divisibles par 18^{d}, 12^{d} & 6^{d} : savoir,

Premiere combinaison	18^{d},	12^{d},	36^{d}.
Seconde combinaison	18^{d},	24^{d},	24^{d}.
Troisiéme combinaison	18^{d},	36^{d},	12^{d}.

Divisant respectivement les 3 termes de chaque combinaison, par 18^{d}, 12^{d} & 6^{d} ; on aura trois combinaisons de piéces de 24^{d}, de 18^{d} & de 12^{d}, qui doivent entrer dans l'alliage demandé ; savoir,

1 piéce de 24^{d}, 1 piéce de 18^{d}, & 6 piéces de 12^{d}.
1 piéce de 24^{d}, 2 piéces de 18^{d}, & 4 piéces de 12^{d}.
1 piéce de 24^{d}, 3 piéces de 18^{d}, & 2 piéces de 12^{d}.

2°. Si l'on prend 36 deniers, pour la partie du reste 66^{d} qui est divisible par 18^{d} ; il restera 30 deniers pour les deux autres parties qui doivent être divisibles par 12^{d} & par 6^{d}. Ainsi ces deux dernieres parties seront 12^{d} & 18^{d}, ou 24^{d} & 6^{d}; d'où l'on tirera encore deux combinaisons différentes des trois parties de 66^{d}, qui sont divisibles par 18^{d}, 12^{d} & 6^{d}; savoir,

Quatrième combinaison 36^{d}, 12^{d}, 18^{d}.
Cinquième combinaison 36^{d}, 24^{d}, 6^{d}.

Divisant les trois termes de ces deux combinaisons, par les trois différences 18^{d}, 12^{d}, 6^{d}; on aura encore deux combinaisons de piéces de 24^{d}, de 18^{d} & de 12^{d}, qui peuvent entrer dans l'alliage demandé; savoir,

2 piéces de 24^{d}; 1 piéce de 18^{d}; 3 piéces de 12^{d}.
2 piéces de 24^{d}; 2 piéces de 18^{d}; 1 piéce de 12^{d}.

3°. Si l'on prend 54^{d} pour la partie de 66^{d}, qui peut être divisée par 18^{d}; cette partie ne laissera que 10^{d}, pour les deux autres parties divisibles par 12^{d} & par 6^{d}: & comme 10^{d} ne peuvent pas fournir à ces deux parties; il est clair que la partie 54^{d} doit être rejettée, & ne peut pas donner de nouvelles combinaisons de piéces qu'on puisse allier.

Comme on a épuisé toutes les parties de 66^{d}, qui peuvent être divisées par 18^{d}, & qu'on en a tiré toutes les combinaisons possibles des piéces de 24^{d}, de 18^{d}, & de 12^{d}, dont l'alliage demandé peut être composé; il est évident que la solution de la question se réduit aux cinq combinaisons qu'on a trouvées; savoir,

1 piéce de 24^{d}; 1 piéce de 18^{d}; 6 piéces de 12^{d}.
1 piéce de 24^{d}; 2 piéces de 18^{d}; 4 piéces de 12^{d}.
1 piéce de 24^{d}; 3 piéces de 18^{d}; 2 piéces de 12^{d}.
2 piéces de 24^{d}; 1 piéce de 18^{d}; 3 piéces de 12^{d}.
2 piéces de 24^{d}; 2 piéces de 18^{d}; 1 piéce de 12^{d}.

Enfin, puisque l'alliage ne doit contenir que 9 piéces en tout; si de 9 l'on retranche le nombre total des piéces de chacune des cinq combinaisons qu'on vient d'exposer; les cinq restes seront les cinq nombres de piéces de 6^{d}, qui doivent entrer dans ces cinq combinaisons, pour faire l'alliage demandé.

On fera donc 10^{ß} ou 120^{d} avec 9 piéces de quatre espéces, dont les premieres seront de 24^{d}, les secondes de 18^{d}. les troisiémes de 12^{d}, & les dernieres de 6^{d}, en cinq manieres différentes; & l'on ne pourra le faire d'aucune autre façon, en prenant des piéces entieres. Voici ces cinq combinaisons.

piéces de 24^{d}.	piéces de 18^{d}.	piéces de 12^{d}.	piéces de 6^{d}.
1	1	6	1
1	2	4	2
1	3	2	3
2	1	3	3
2	2	1	4

126 *Si l'on avoit un plus grand nombre de piéces à allier, on suivroit la même méthode; c'est-à-dire qu'on commenceroit par multiplier la valeur de la plus petite piéce, par le nombre total des piéces; & le produit étant retranché de la somme total qu'on doit composer par l'alliage de toutes les piéces, on auroit un reste qu'on partageroit en autant de parties moins une, qu'on auroit d'espéces de piéces à allier, avec cette condition que les parties du reste fussent divisibles & divisées par les différences de la plus petite piéce à toutes les autres. Les divisions des parties du reste étant faites, par les différences; les quotiens seroient les nombres des piéces supérieures aux plus petites.*

Comme on a déja trop insisté sur ce problême qui n'est pas d'une grande utilité; on se dispensera d'en donner de nouveaux exemples dont la longueur seroit plus capable d'ennyuer que d'amuser: on n'auroit pas même parlé de ces sortes de regle d'alliage, si tous les livres d'Arithmétique n'en étoient remplis.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE VII.

De la Composition des Quarrés & des Cubes; & de l'Extraction de leurs Racines.

CHAPITRE PREMIER.

De la Composition des Quarrés & de l'Extraction des Racines quarrées.

DÉFINITIONS.

127 LORSQU'ON multiplie un nombre par lui-même, le produit qui résulte de cette multiplication, se nomme *Quarré* du nombre qu'on a multiplié par lui-même; & le nombre multiplié, s'appelle *Racine quarré* de ce Quarré.

Par exemple, si l'on multiplie 5 par 5, le produit 25 sera nommé le *Quarré* de 5; & le nombre 5 s'appellera la *Racine quarrée* de 25.

Si l'on multiplie 1 par 1, le produit qui sera aussi 1, sera le quarré de 1; & 1 sera la racine quarrée de ce quarré 1.

Il faut bien remarquer cette propriété de l'unité dont le quarré est égal à sa racine. Nous verrons dans le Chapitre suivant que le cube de l'unité est aussi l'unité.

L'extraction de la racine quarrée est une opération par laquelle on trouve un nombre qui multiplié par lui-même, produit un nombre égal à celui qui est proposé pour en extraire la racine quarrée.

Lorsque le nombre proposé vient réellement de la multiplication d'un nombre par lui-même, il est toûjours possible d'en extraire la racine quarrée. Mais il arrive souvent que des nombres dont on propose d'extraire la racine quarrée, ne sont pas le juste produit de la multiplication d'un nombre par lui-même. Dans ce cas, on ne peut extraire la racine quarrée que du plus grand nombre quarré contenu dans le nombre proposé.

128 Lorsque le nombre proposé, pour en extraire la racine quarrée, sera exprimé par un ou deux chiffres seulemenr, sa racine quarrée n'aura qu'un seul chiffre. Car le plus petit nombre représenté par trois chiffres, est 100; & la racine quarrée de 100 est 10 qui est exprimé par deux chiffres. Ainsi un nombre qui n'est exprimé que par un ou deux chiffres, & qui est parconséquent moindre que 100, doit avoir un nombre moindre que 10 pour sa racine quarrée, ou pour celle du plus grand quarré qu'il contient. Or un nombre moindre que 10 s'exprime par un seul chiffre.

129 Si le nombre proposé, pour en extraire la rane quarrée, avoit plus de deux chiffres, sa racine auroit

plus d'un chiffre ; puisque le moindre des nombres qui ont plus de deux chiffres, est 100, & que la racine quarrée de 100 est 10 qui a plus d'un chiffre.

Les regles pour extraire la racine quarrée d'un nombre exprimé par plus de deux chiffres, supposent qu'on sçait tirer celle d'un nombre qui n'a qu'un ou deux chiffres : & comme une méthode pour tirer la racine quarrée d'un nombre exprimé par un ou deux chiffres, seroit superflue ; on se contente de donner une table qui renferme les neuf nombres quarrés qui n'ont qu'un ou deux chiffres, avec les racines de ces nombres, au-dessus. On y joint le quarré 100 qui est le plus petit des quarrés exprimés par plus de deux chiffres, avec sa racine 10 au-dessus.

Racines quarées	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Quarrés	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.

130 Lorsqu'on ne connoîtra pas la racine quarrée d'un nombre exprimé par un ou deux chiffres, on cherchera ce nombre dans la bande des quarrées de cette table. Si on l'y trouve, le nombre qu'on verra au-dessus dans la bande des racines, sera exactement la racine quarrée de ce nombre. Mais si le nombre proposé ne se trouve pas dans la bande des quarrés, on prendra le quarré plus petit qui en approchera le plus ; & le nombre qu'on trouvera au-dessus de ce quarré, sera la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé.

Par exemple si l'on demande la racine quarrée du nombre 72, qu'on ne trouve point dans la bande des quarrés ; on prendra dans cette bande le quarré 64 qui est plus petit que le nombre proposé 72, &

qui en approche le plus ; & l'on trouvera au-dessus de ce quarré le nombre 8 qui sera la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé 72.

Lorsqu'on dit qu'un nombre est le plus grand quarré conteuu dans un nombre proposé, l'on entend que c'est le plus grand quarré exprimé par un nombre entier ; & l'on ne prétend pas parler du plus grand quarré qui peut avoir une fraction à sa racine quarrée.

La petite table qu'on vient de donner, étant suffisante pour l'extraction des racines quarées des nombres qui n'ont pas plus de deux chiffres ; nous n'insisterons pas davantage sur les racines quarrées de ces nombres. Mais lorsque les nombres ont plus de deux chiffres, il faut de l'art pour en extraire les racines ; & c'est cet art que nous nous proposons d'expliquer dans ce Chapitre.

Pour préparer aux opérations que demande l'extraction des racines quarrées, nous commencerons par examiner comment & de quelles parties est formé un quarré dont la racine est composée de deux parties. Nous ferons d'abord cet examen sur une figure : ensuite nous observerons comment les parties d'un nombre quarré sont disposées dans ce nombre ; & de-là nous passerons à l'extraction des racines quarrées.

De la Composition des Quarrés.

I.

Fig. 5. 131 Si l'on augmente les côtés contigus *AB*, *AD*, d'un quarré *ABCD*, de deux quantiés égales *BE*, *DF*, & qu'on fasse un second quarré *AEGF* qui ait

ait pour côtés contigus les lignes totales *AE*, *AF*; ce ſecond quarré qu'on aura en multipliant *AE* par *AF* (*N°*. 91.), ou en multipliant ſon côté *AE* par lui-même, ſera compoſé des quatre parties *ABCD*, *BEHC*, *DCIF*, *CHGI* que l'on va faire connoître relativement aux deux parties *AB*, *BE* de ſon côté *AE*.

1°. On trouvera la premiere partie *ABCD*, en multipliant *AB* par *BC* (*N°*. 91.), ou en multipliant *AB* par lui-même; parce que *ABCD* étant un quarré, ſes deux côtés *AB*, *BC* ſont égaux. Ainſi (*N°*. 127.) cette premiere partie *ABCD* ſera nommée le quarré de la premiere partie *AB* du côté *AE*.

2°. On aura la ſeconde partie *BEHC*, en multipliant *BC* par *BE*, ou en multipliant *AB* par *BE*; puiſque les deux côtés *AB*, *BC* du quarré *ABCD* ſont égaux. Ainſi cette ſeconde partie *BEHC* ſera le produit des deux parties *AB*, *BE* du côté *AE*.

3°. On déterminera la troiſiéme partie *DCIF*, en multipliant *DC* par *DF*, ou en multipliant *AB* par *BE*; puiſque les deux côtés *AB*, *DC* ſont égaux, & que leurs alongemens *BE*, *DF* ſont auſſi égaux. Ainſi cette troiſiéme partie *DCIF* ſera, comme la ſeconde, le produit des deux parties *AB*, *BE* du côté *AE*.

4°. On trouvera la quatriéme partie *CHGI*, en multipliant *CH* par *CI*, ou *BE* par *DF*, ou *BE* par lui-même. Ainſi cette quatriéme partie ſera le quarré de la ſeconde partie *BE* du côté *AE*.

Donc un quarré *AEGF*, ou le produit fait d'une ligne *AE* compoſée de deux parties *AB*, *BE*, multipliée par elle-même, contient le quarré de la premiere partie *AB*, plus deux fois le produit de la premiere partie *AB* multipliée par la ſeconde *BE*, plus le quarré de la ſeconde partie *BE*; ou bien le quarré de la premiere partie *AB*, plus le produit du double de la premiere partie *AB* multipliée par la ſeconde *BE*, plus le quarré de la ſeconde partie *BE*.

II.

132 Si l'on repréſente un nombre compoſé de deux parties, par les deux parties d'une ligne, & que l'on conçoive bien dans la Figure cinquiéme toutes les parties d'un quarré conſtruit ſur une ligne compoſée de deux parties ; l'on ſentira aiſément que le quarré du nombre entier compoſé de deux parties, contiendra

1°. Le quarré de la premiere partie ;

2°. Deux fois le produit de la premiere partie multipliée par la ſeconde, ou bien le produit fait du double de la premiere partie multipliée par la ſeconde ;

3°. Le quarré de la ſeconde partie.

Par exemple ſi le nombre 6 eſt partagé en deux parties 4 & 2 ; le quarré de 6, ſavoir 36, contiendra le quarré de la premiere partie 4, ſavoir 16 ; plus le produit du double de la premiere partie 4, ſavoir 8, multiplié par la ſeconde partie 2, ce qui fera 16 ; plus le quarré de la ſeconde partie 2, ſavoir 4.

III.

133 Quoiqu'on puiſſe partager un nombre quelconque en deux parties de telle grandeur qu'on voudra ; nous partagerons toujours les racines des quarrés en deux parties, dont l'une ſera compoſée d'un nombre de dixaines, & dont l'autre ne contiendra qu'un nombre d'unités ſimples, qui ne paſſera jamais 9.

Le quarré d'un nombre quelconque ainſi partagé en un nombre de dixaines & en un nombre d'unités, contiendra donc le quarré du nombre des dixaines; plus le produit fait du double du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités; plus le quarré du nombre des unités. Voyons maintenant comment toutes ces parties du quarré d'un nombre ſont arrangées dans ce quarré.

Un nombre de dixaines qui a une place à ſa droite, étant multiplié par un nombre de dixaines, lequel a auſſi une place à ſa droite, produira un nombre dont les unités ſeront des centaines, & qui aura par conſéquent deux places à ſa droite (*N*°. 18.) Ainſi le quarré d'un nombre de dixaines aura deux places à ſa droite.

Un nombre de dixaines, qui a une place à ſa droite, étant multiplié par un nombre d'unités, qui n'a rien à ſa droite, produira un nombre dont les unités ſeront des dixaines, & qui n'aura par conſéquent qu'une place à ſa droite. Ainſi le produit fait du double d'un nombre de dixaines multiplié par un nombre d'unités, n'aura qu'une place à ſa droite.

Un nombre dunités ſimples multiplié par un nombre d'unités ſimples, qui n'a rien à ſa droite, donnera un produit compoſé d'unités ſimples, lequel n'aura rien à ſa droite. Ainſi le quarré d'un nombre d'unités ſimples n'aura rien à ſa droite.

Par exemple ſi l'on fait le quarré du nombre 39 compoſé de 3 dixaines & de 9 unités; ce quarré contiendra le quarré de 3 dixaines, plus le produit fait de 6 dixaines multipliées par 9 unités, plus le quarré de 9 unités.

1°. Le quarré de 3 étant 9, le quarré de 3 dixaines ſera 9 centaines, ou 9 avec deux places à ſa droite.

2°. Le produit du double de 3 par 9, ou le produit de 6 multiplié par 9, sera 54. Ainsi le produit fait de 6 dixaines multipliées par 9 unités, sera 54 dixaines, ou 54 avec une place à sa droite.

3°. Le quarré de la partie 9 unités qui n'a rien à sa droite, sera 81 qui n'aura rien à sa droite.

Ainsi les trois parties du quarré de 39 seront	9 . .
	54 .
	81
Et le quarré de 39 sera	1521

IV.

134 Connoissant par la composition d'un quarré, l'arrangement des différentes parties quil contient; lorsqu'on viendra à décomposer ce quarré, il ne sera pas difficile d'y connoître toutes les parties qui le forment. Par exemple si l'on veut décomposer le quarré 1521 qu'on vient de faire, en parties relatives au nombre de dixaines & au nombre d'unités de sa racine; on y procédera de cette maniere.

1°. Le quarré du nombre des dixaines, ayant deux places ou deux chiffres à sa droite; si dans le quarré total 1521 l'on tire une barre qui en sépare les deux chiffres 21 de la droite, comme ici 15|21; le quarré du nombre des dixaines se trouvera dans la partie 15 située à la gauche de la barre, & sera le plus grand quarré contenu dans cette partie 15.

Si du quarré total	15|21
On retranche le plus grand quarré contenu dans la partie 15, savoir	9
Le reste du quarré sera	6|21

Or ce reste 621 doit contenir deux fois le produit du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, plus le quarré du nombre des unités.

2°. Mais deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, doit avoir une place à sa droite : ainsi il doit être dans 62 qui n'a qu'un chiffre à sa droite.

3°. Lorsque de 62, on aura retranché deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités ; il est évident que le reste de 62, suivi du chiffre 1 des unités du nombre proposé, contiendra le quarré du nombre des unités de la racine totale.

Quoiqu'on puisse trouver de la même maniere l'arrangement de toutes les parties d'un quarré dont la racine a plus de deux chiffres ; on ne parlera point ici de la situation des parties de ces quarrés, attendu que ce qu'on vient de dire au sujet des quarrés dont les racines sont composées de deux parties, savoir d'un nombres de dixaines & d'un nombre d'unités, suffit pour faire entendre ce qu'on va dire de l'extraction des racines quarrées de tous les nombres qu'on peut proposer.

DE L'EXTRACTION DES RACINES QUARRÉES

Nous avons dit que l'extraction des racines quarrées est une opération par laquelle ont trouve un nombre qui multiplié par lui-même, produit un nombre égal à celui qui est proposé, ou égal au plus grand quarré contenu dans ce nombre proposé.

PROBLÊME.

Extraire la racine quarrée d'un nombre proposé quelconque, ou du plus grand quarré contenu dans ce nombre.

Comme des préceptes généraux seroient trop abstraits pour être entendus facilement, nous n'expliquerons la méthode d'extraire les racines quarrées, que dans des exemples. Et parce que les opérations qu'il faut faire pour extraire les racines quarrées qui ont plus de deux chiffres, ne different en rien de celles qui sont nécessaires pour trouver les racines quarrées composées de deux chiffres; l'ordre demande que nous commencions par un exemple où la racine quarrée qu'on tirera, n'ait que deux chiffres; & que nous fassions voir dans les exemples suivans, comment on peut appliquer ce premier exemple à l'extraction des racines quarrées qui ont plus de deux chiffres.

EXEMPLE PREMIER.

135 *On demande la Racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre* 1561.

$$\left.\begin{array}{r}\textit{Nombre proposé pour en}\\ \textit{extraire la Racine quarrée}\end{array}\right\} \begin{array}{r|l} 15 & 61 \\ 9 & \\ \hline 6 & 61\end{array} \left\{\begin{array}{l}\underline{39}\ \ \textit{Racine quarrée}\\ 6\ \left\{\begin{array}{l}\textit{Double des}\\ \textit{dixaines}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

On mettra, comme on a fait pour la division, un crochet à la droite du nombre proposé, & l'on tirera dans ce crochet une barre horisontale, au-dessus de laquelle on écrira les chiffres de la racine demandée, à mesure qu'on les trouvera, & au-dessous de laquelle on écrira les nombres dont aura besoin pour parvenir à découvrir les chiffres de la racine. Tout étant ainsi préparé, on opérera comme il suit.

On considérera dans la racine quarrée inconnue que l'on demande, deux parties, l'une composée de dixaines, l'autre composée d'unités simples; & regardant ces deux parties comme celles d'une ligne, on fera sûr (*N*°. 133.) que le plus grand quarré qui se trouvera dans le nombre proposé 1561, contiendra le quarré du nombre inconnu des dixaines, plus deux fois le produit fait de ce nombre inconnu de dixaines multiplié par le nombre inconnu des unités, plus le quarré de ce nombre d'unités.

1°. Or le quarré du nombre des dixaines de la racine quarrée, aura deux chiffres à sa droite (*N*°. 134.). Ainsi en séparant, comme nous avons fait, par une barre, les deux chiffres 61 de la droite du nombre proposé ; le quarré inconnu du nombre des dixaines sera le plus grand quarré contenu dans la partie 15 située à la gauche de la barre : & comme cette partie 15 n'est composée que de deux chiffres ; l'on verra aisément (*N*°. 130.) que 9 est le plus grand quarré qu'elle contient : d'où il suit que 3 qui est la racine quarrée de 9, est le nombre des dixaines de la racine qu'on demande. On écrira donc 3 dans le crochet, pour le chiffre des dixaines de la racine.

Ayant placé sous 15 le plus grand quarré 9 que cette partie contient ; l'on retranchera 9 de 15, & le nombre proposé se réduira à 6|61 qui doit contenir encore deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre inconnu des unités, plus le quarré du nombre des unités.

2°. Mais deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, doit avoir une place ou un chiffre à sa droite. Ainsi ce double produit sera dans la partie 66 du reste 6|61, & sera par conséquent une partie de 66 divisible par 6, c'est-à-dire par le double du nombre 3 des dixaines qu'on vient de trouver.

Or le produit fait du double du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, étant divisé par le double du nombre des dixaines, donnera évidemment pour quotient le nombre des unités. Ainsi pour trouver régulierement le nombre des unités de la racine quarrée, on doublera le premier chiffre 3 qu'on a écrit à la racine ; & ayant écrit au-dessous de lui son double 6, on divisera 66 par ce double 6, & l'on ne prendra pas tout le quotient qu'on peut en avoir, mais seulement une portion convenable de ce quotient.

Pour choisir la partie convenable de ce quotient ; l'on remarquera que le nombre des dixaines de la racine étant connu, le nombre des unités qui reste à trouver ne doit pas surpasser 9. Ainsi au lieu de prendre tout le quotient 11 qu'on pourroit avoir en divisant 66 par 6 ; on ne prendra que 9 qu'on écrira pour le chiffre des unités de la racine, à la droite des 3 dixaines qui sont déja écrites : ensorte que 39 sera la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé 1561.

La racine 39 qu'on demandoit, étant trouvée ; il faut connoître le reste de l'opération ; c'est-à-dire de combien le nombre proposé 1561 surpasse le plus grand quarré qu'il contient, & dont on a extrait la racine ; & pour le connoître, on a deux moyens.

Nombre proposé	15|61	39	*Racine quarrée*
	9|	69	
	6|61		
	6|21		
Reste de l'opération	40		

Le premier moyen est d'écrire le chiffre 9 des unités de la racine, à la droite du double 6 de ses dixaines ; ce qui composera le nombre 69 qu'on multipliera par les 9 unités de la racine, & l'on écrira les chiffres du produit 621 au-dessous de 661, à mesure qu'on les trouvera. Puis on retranchera le produit 621 de 661 ; & il restera 40 pour la quantité dont le nombre proposé 1561 surpasse le plus grand quarré qu'il contient.

La raison de cette opération est simple. Nous avons dit que le nombre 661 auquel le nombre proposé se réduisoit, après en avoir retranché le quarré du nombre des dixaines, contenoit deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, plus le quarré du nombre des unités. Or 1°. en multipliant le chiffre 9 de 69 par 9, on produit le quarré du nombre des unités. 2°. En multipliant le chiffre 6 de 69 par 9, on fait le produit du double des dixaines multiplié par le nombre des unités. Ainsi en multipliant 69 par 9, le produit 621 qu'on trouve, est précisément deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, avec le quarré du nombre des unités : & comme on retranche ce produit de 661 qui reste de 1561, après en avoir ôté le quarré du nombre des dixaines ; il est évident que le dernier reste 40 que l'on trouve, est l'excès du nombre proposé 1561, sur le plus grand quarré qu'il contient.

Le second moyen pour trouver la quantité dont le nombre proposé 1561 surpasse le plus grand quarré qu'il contient, quoique plus simple dans la théorie, est plus long dans la pratique. Il consiste à multiplier la racine totale 39 par elle-même ; & le quarré qui vient de cette multiplication, étant retranché du nombre entier proposé 1561 ; le reste 40 que l'on trouve, eſt l'excès du nombre propoſé ſur le plus grand quarré qu'il contient.

		39 *Racine quarrée*
Nombre propoſé	15|61	6 *Double des dixaines de la Racine.*
	9	
	6|61	
Quarré de 39	15|21	
Reſte de l'opération	40	

Exemple II.

136 *On propoſe d'extraire la Racine quarrée du plus grand Quarré contenu dans le nombre* 15 6183.

Nombre propoſé dont il faut extraire la racine quarrée	15|61|83	395 *Racine quarrée*
	$\cancel{9}$	$\cancel{6}\cancel{9}$
	$\cancel{6}$|$\cancel{6}$1	78
	$\cancel{6}$|21	
	40|83	

Tout étant diſpoſé comme dans l'exemple premier; l'on conſidérera ſeulement deux parties dans la racine inconnue qu'on demande, ſavoir un nombre de dixaines qui peut avoir pluſieurs chiffres, & un nombre d'unités exprimé par un ſeul chiffre.

On ſçait (*N*°. 133.) que le nombre propoſé contiendra le quarré du nombre des dixaines, plus deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, plus le quarré du nombre des unités.

1°. Le quarré du nombre des dixaines ayant deux chiffres à sa droite; si l'on sépare par une barre les deux chiffres 83 de la droite du nombre proposé, le quarré du nombre des dixaines sera dans la partie 1561 située à la gauche de cette premiere barre. Ainsi l'on ne pourra connoître le nombre de ces dixaines, qu'en tirant la racine du plus grand quarré contenu dans la partie 1561, comme nous avons fait dans l'exemple précédent auquel nous renvoyons pour cette premiere opération.

Ayant découvert (*N°*. 135.) que 39 est la racine du plus grand quarré contenu dans 1561, & ayant trouvé 40 pour le reste de cette opération; le nombre proposé 156183, diminué par la soustraction du plus grand quarré contenu dans 1561, sera réduit à 4083 qui contiendra encore deux fois le produit de la premiere partie 39 dixaines multipliée par le nombre des unités qui est encore inconnu, plus le quarré du nombre des unités.

2°. Or deux fois le produit fait du nombre 39 dixaines multiplié par le nombre des unités, doit avoir un chiffre à sa droite (*N°*. 133.) Ainsi ce double produit sera dans la partie 408 du reste auquel se réduit le nombre proposé; & comme deux fois le produit fait du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, étant divisé par deux fois le nombre des dixaines, donnera au quotient le nombre des unités; on doublera le nombre 39 des dixaines; puis on divisera 408 par ce double 78 des dixaines, & le quotient 5 qu'on trouvera sera le nombre des unités de la racine qu'on demande. On écrira donc 5 à la droite des 39 dixaines déjà trouvées pour la premiere partie;

& l'on aura 395 pour la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé 156183.

La Racine 395 qu'on demandoit étant trouvée ; on cherchera de combien le nombre proposé 156183 surpasse le quarré de la racine 395. Le moyen le plus simple est de multiplier 395 par lui-même, & de soustraire de 156183, le produit quarré que l'on trouvera ; ce qui donnera 158 pour le reste de l'opération. Mais quoique ce procédé soit le plus simple, il n'est pas le plus court ; & l'on aime mieux opérer comme il suit.

Nombre proposé dont il faut extraire la racine quarrée	15|61|83	395	*Racine quarrée*
	$\cancel{9}$|	$\cancel{6}\cancel{9}$	
	$\cancel{6}$|$\cancel{6}$2	785	
	$\cancel{6}$|21		
	40|83		
	39|25		
Reste de l'opération	1|58		

Le chiffre 5 des unités de la racine étant trouvé & écrit à la racine, on l'écrira aussi à la droite des 78 dixaines, qui sont le double de la premiere partie 39 dixaines de la racine ; ce qui composera 785 unités qu'on multipliera par les 5 unités de la racine ; & l'on aura le produit 3925 dont on écrira les chiffres, à mesure qu'on les trouvera, sous 4083. Enfin l'on ôtera ce produit, de 4083, & le reste 158 qu'on trouvera, sera l'excès du nombre proposé 156183 sur le quarré dont on a trouvé la racine. Nous avons donné la raison de cette opération, à la fin de l'exemple précédent.

Comme le reste 158 de l'opération ne surpasse pas le double de la racine qu'on a trouvée, on verra (*N°*. 139. *art*. 2.) qu'on ne peut pas mettre une unité de plus à cette racine. Ainsi le nombre 395 est la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé 156183.

EXEMPLE III.

137 *On propose d'extraire la Racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre* 258154.

Nombre dont il faut extraire la racine quarrée	25 | 81 | 54		508	*Racine quarrée*
	25		1$\cancel{0}$	
			1008	
	.. | 81 | 54			
	| 80 | 64			
Reste de l'opération	90			

On a vû dans l'exemple précédent que, pour tirer la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé 258154, il faut retrancher, par une barre, les deux chiffres 54 de la droite de ce nombre, & commencer par extraire la racine du plus grand quarré contenu dans la partie restante 2581, comme si la tranche 54, qu'on a retranchée, n'existoit point.

Ayant à tirer la racine du plus grand quarré contenu dans 2581, & considérant dans cette racine, deux parties, savoir un nombre de dixaines, & un nombre d'unités simples représenté par un seul chiffre; on remarquera que le nombre 2581 doit contenir le quarré du nombre des dixaines de sa racine ; plus le produit fait du double de ces dixaines multiplié par le nombre des unites simples, plus le quarré de ce nombre d'unités.

Le quarré du nombre des dixaines ayant (*N°.* 133.) deux chiffres à sa droite ; si l'on retranche encore, par une barre, les deux chiffres 81 de la droite du nombre 2581 ; le quarré des dixaines sera le plus grand quarré contenu dans la tranche 25, & sera par conséquent 25 qu'on écrira au-dessous de cette tranche : ensorte que la racine 5 du quarré 25, sera le nombre des dixaines de la racine du plus grand quarré contenu dans 2581. On écrira donc 5 dans le crochet, pour le premier chiffre de la racine ; & comme son quarré 25 étant retranché de la premiere tranche 25, ne donnera point de reste ; on n'aura rien à écrire audessous pour le reste de la soustraction, & l'on abbaissera la deuxiéme tranche 81 du nombre 2581.

Le produit fait de deux fois le nombre 5 des dixaines qu'on a trouvées, multiplié par le nombre des unités, devant avoir un chiffre à sa droite, ne peut être contenu que dans le chiffre 8 de la tranche 81 qui reste du nombre 2581 : ainsi divisant 8 par 10, le quotient sera le nombre des unités de la racine du plus grand quarré contenu dans 2581. Mais 8 ne pouvant pas être divisé par 10, la racine n'aura point d'unités : on mettra donc un zéro dans le crochet à la droite du 5, pour marquer que le plus grand quarré contenu dans 2581, n'a point d'unités simples, & que cette racine est 5 *dixaines* ou 50.

Le chiffre 8 *du reste* 81, *n'étant pas divisible par* 10, *quelques Commençans sont tentés de diviser par* 10 *le reste entier* 81 *du nombre* 2581 : *mais en cela ils se trompent ; parce que* 10 *étant le double d'un nombre* *de dixaines, & par conséquent un nombre de dixaines lui-même, doit diviser un nombre de dixaines, & non pas 81 qui est un nombre d'unités, puisqu'on n'a point d'égard à la tranche 54 qu'on a retranchée la prémiere.*

La racine du plus grand quarré contenu dans 2581, n'ayant point d'unités simples, le produit fait du double du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités simples, & le quarré de ces unités seront nuls : ainsi il n'y aura rien à retrancher de 81, pour ce produit & ce quarré ; & par conséquent le reste 81 sera l'excès de 2581 sur le plus grand quarré qu'il contient.

Pour trouver la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé 258154, l'on abbaissera sa derniere tranche 54, à côté du reste 81 de l'opération qu'on vient de faire, & ayant écrit au-dessous des deux chiffres 50 qui sont à la racine, leur double 100 ; on divisera (comme il a été expliqué dans l'exemple précédent) par ce double 100 les chiffres 815 qui précédent le dernier de 8154, & le quotient 8 qu'on écrira à la racine, sera le dernier chiffre de cette racine.

Pour trouver le reste de l'opération, ou l'excès du nombre proposé 258154 sur le plus grand quarré qu'il contient ; l'on écrira aussi le dernier chiffre 8 de la racine à la droite de 100 ; ce qui fera 1008 : puis on multipliera 1008 par le dernier chiffre 8 de la racine, & l'on écrira le produit 8064 au-dessous du reste 8154 du nombre proposé : enfin l'on retranchera ce produit 8064 de 8154, & le reste 90 qu'on trouvera, sera l'excès du nombre proposé 258154 sur le plus grand quarré qu'il renferme.

Exemple IV.

138 *On demande la Racine quarrée du nombre* 15618304.

Nombre dont il faut extraire la racine quarrée	~~15~~ | 61 | 83 | 04	3952	*Racine quarrée*
	~~9~~	~~69~~	1ere. *Opération*
	~~6~~ | ~~61~~	~~785~~	2e. *Opération*
	~~6~~ | ~~21~~	7902	3e. *Opération*
	~~40~~ | ~~83~~		
	~~39~~ | ~~25~~		
	1 | 58 | 04		
	1 | 58 | 04		
	0 00 00		

Tout étant disposé comme dans les exemples précédens; on regardera la racine qu'on demande, comme si elle n'avoit que deux parties, l'une composée de dixaines, l'autre composée d'unités. Ainsi (*N*o. 133.) le nombre proposé contiendra le quarré du nombre inconnu des dixaines, plus deux fois le produit fait de ce nombre de dixaines multiplié par le nombre inconnu des unités, plus le quarré de ce nombre d'unités.

1°. Le quarré du nombre des dixaines ayant deux chiffres à sa droite; si l'on sépare, par une barre, les deux chiffres 04 de la droite du nombre proposé, le quarré du nombre des dixaines sera le plus grand quarré contenu dans la partie 156183 située à la gauche de la barre qui sépare 04. Ainsi l'on ne pourra connoître le nombre des dixaines, qu'en tirant la racine

racine quarrée du plus grand quarré contenu dans la partie 156183, comme nous avons fait dans le second exemple auquel nous renvoyons.

Ayant trouvé (*No*. 136.) que 395 est la racine du plus grand quarré contenu dans 156183; ce nombre 395 sera celui des dixaines de la racine : ainsi on l'écrira à la place destinée à la racine quarrée.

Comme on a trouvé aussi (*No*. 136.) que le quarré de 395 étant ôté de 156183, il reste 158; il est clair que le nombre proposé 15618304 sera réduit à 15804 qui contiendra encore deux fois le produit fait de la premiere partie 395 dixaines, multipliée par le nombre des unités qui est encore inconnu, plus le quarré du nombre des unités.

2°. Deux fois le produit fait du nombre des dixaines de la racine, multiplié par le nombre de ses unités, devant avoir un chiffre à sa droite, se trouvera dans 1580 : d'ailleurs ce double produit étant divisé par deux fois le nombre des dixaines, donnera pour quotient le nombre des unités. On doublera donc les 395 dixaines qui composent la premiere partie de la racine; ce qui donnera 790 qu'on écrira au-dessous. Puis on divisera 1580 par 790; & le quotient 2 qu'on trouvera, & qu'on écrira à la droite des 395 dixaines de la racine, sera le nombre des unités de cette racine : ensorte que la racine quarrée entiere demandée sera 3952.

Le dernier chiffre 2 de la racine étant trouvé, on l'écrira aussi à la droite des 790 dixaines qui ont été produites en doublant les 395 dixaines de la racine; ce qui sera 7902 qu'on multipliera par le même chiffre 2 des unités de la racine; & l'on aura le produit 15804 dont on écrira les chiffres sous 15804, à mesure qu'on les trouvera. Puis on retranchera le produit 15804 de 15804 qui sera audessus ; & comme il ne restera rien, l'on conclura que le nombre proposé 15618304 est un quarré parfait, & que 1952 est exactement sa racine quarrée.

Il est clair que le produit 15804 qu'on vient de retrancher, est deux fois le produit fait du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités, plus le quarré du nombre des unités : car dans la multiplication de 7902 par 2, lorsqu'on a multiplié 2 par 2, on a fait le quarré du nombre 2 des unités ; & lorsqu'on a multiplié 790 par 2, on a fait le produit du double du nombre des dixaines & du nombre des unités.

REMARQUES.

I.

139 1°. Pour tirer la racine quarrée du nombre 15618304, nous avons séparé par une barre les deux chiffres 04 de la droite de ce nombre, comme ici, 156183|04 ; & nous avons fait voir qu'en considérant sa racine partagée seulement en deux parties, savoir en un nombre de dixaines & en un nombre d'unités, il falloit, pour avoir le nombre de dixaines de la racine, tirer la racine du plus grand quarré contenu dans la partie 156183 située à la gauche de la barre, comme si la partie 04 qui est à la droite de la barre, n'existoit point.

2°. Dans le second exemple (*No. 136.*), nous avons tiré la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre 156183 ; & pour cela, nous avons encore séparé deux chiffres de la droite de ce nombre, comme ici 1561|83 ; parce qu'en considérant sa racine partagée en deux parties, l'une composée de dixaines, l'autre composée d'unités, on ne peut avoir le nombre des dixaines, qu'en tirant la racine du plus grand quarré contenu dans la partie 1561 située à la gauche de la barre, comme si la partie située à la droite de cettte barre n'existoit point.

3°. Dans le premier exemple (*N*°. 135.), nous avons tiré la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre 1561 : & pour cela nous avons encore séparé par une barre les deux chiffres 61 de la droite de ce nombre, comme ici 15|61 ; parce que, considérant encore deux parties dans la racine, un nombre de dixaines & un nombre d'unités, on ne peut avoir le nombre des dixaines, qu'en prenant la racine du plus grand quarré contenu dans la partie 15 placée à la gauche de la barre, comme si la partie 61 située à la droite de cette barre, n'existoit point.

Il résulte de toutes ces opérations, que pour avoir la racine quarré d'un nombre quelconque, tel que 15618304, il faut séparer deux à deux tous les chiffres de ce nombre, en commençant par ceux de la droite, comme ici 15|61|83|04; & qu'il faut procéder à l'opération de l'extraction de la racine qu'on demande dans l'ordre suivant

1°. Il faut prendre la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans la premiere tranche 15 de la gauche, laquelle tranche peut avoir un ou deux chiffres.

2° Ensuite il faut tirer la racine du plus grand quarré contenu dans les deux premieres tranches 15|61 de la gauche, en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine qu'on a trouvée pour le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche 15.

3°. Après cela, il faut extraire la racine du plus grand quarré contenu dans les trois premieres tranches 15|61|83 de la gauche, comme si le reste du nombre proposé n'existoit point; en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine qu'on a trouvée pour le plus grand quarré contenu dans les deux premieres tranches 15|61.

4°. Enfin il faut chercher la racine quarré des quatre tranches qui composent le nombre proposé 15|61|83|04, en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine qu'on a trouvée pour les trois tranches précédentes 15|61|83.

En procédant de cette maniere à l'extraction des racines quarrées; c'est-à-dire en prenant toûjours la racine quarrée précédemment trouvée, pour le nombre des dixaines de la racine d'un nombre qui aura une tranche de plus que le nombre précédent; l'on parviendra à tirer la racine quarrée d'un nombre, quelque quantité de tranches qu'il puisse avoir.

II.

Lorsqu'on trouve un grand nombre, pour l'excès d'un nombre proposé sur le plus grand quarré dont on a extrait la racine, & que l'on craint d'avoir mis à la racine une unité de moins qu'il ne faut; on peut reconnoître si la racine est assez grande, par la Regle suivante.

Si le reste de l'opération ne surpasse pas le double de la racine qu'on a trouvée, la racine trouvée est assez grande.

Si le reste de l'opération surpasse d'une unité ou plus, le double de la racine qu'on a trouvée; on peut ajoûter une unité à cette racine, sans la rendre trop grande.

Ainsi dans l'exemple qu'on donne (*N*°. 135.) où le reste 40 de l'opération, est moindre que 78 double de la racine quarrée 39 qu'on a trouvée; on est sûr que la racine 39 est assez grande, ou qu'on ne peut pas lui ajoûter une unité, sans la rendre trop grande. En voici la démonstration.

Considérons 39, & l'unité qu'on voudroit y ajoûter, comme les deux parties d'une ligne. Il est clair (*N*°. 132.) que le quarré de la somme de ces deux parties, contiendra le quarré de la premiere partie 39, savoir 1521; plus deux fois le produit de 39 multiplié par la seconde partie 1, savoir 78; plus le quarré de la seconde partie 1, lequel sera 1 (*N*°. 127.). Ainsi le quarré de 39 plus 1, surpassera le quarré de 39, de 78 plus 1, c'est-à-dire de deux fois 39 plus 1. D'où il suit que si après avoir trouvé 39 pour la racine du plus grand quarré contenu dans un nombre, il ne reste pas deux fois 39 plus 1, c'est-à-dire 79; on ne pourra pas mettre une unité de plus à la racine 39. il est évident qu'il en sera de même des autres racines qui ne pourront pas être augmentées, lorsque le reste de l'opération ne surpassera pas le double de la racine qu'on aura trouvée.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que de l'extraction de la racine du plus grand quarré contenu dans un nombre proposé; & nous n'avons fait aucun usage du reste de l'opération. Nous allons voir maintenant comment on peut approcher de plus en plus de la racine d'un nombre qui n'est point quarré, & comment on tire la racine quarree d'une fraction.

PROBLÊME.

140 *Approcher si près qu'on voudra de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas un quarré parfait.*

Nous avons vû (*N*°. 27.) qu'un nombre qui contient des parties décimales, étant multiplié par un nombre qui contient aussi des parties décimales ; il en résulte un produit qui a autant de rangs de décimales, qu'il y en a dans les deux facteurs de la multiplication. Ainsi quand un nombre qui aura des décimales, sera multiplié par lui même, pour avoir son quarré ; ce quarré aura deux fois autant de chiffres décimaux que sa racine. Par exemple, le quarré d'un nombre qui contiendra des *dixiémes*, aura des *centiémes* ; celui d'un nombre qui contiendra des *centiémes*, aura des *dix-milliémes*, & ainsi des autres : en sorte que le nombre des rangs décimaux d'un quarré, sera toujours un nombre pair.

Et réciproquement, lorsqu'on tirera la racine quarrée d'un nombre qui aura des parties décimales ; la racine aura moitié moins de chiffres décimaux que le quarré : c'est-à-dire que la racine quarrée d'un nombre qui contiendra des *centiémes*, n'aura que des *dixiémes* ; celle d'un nombre qui contiendra des *dix-milliémes*, n'aura pas des unités d'un plus bas ordre que les *centiémes* ; & ainsi des autres : en sorte qu'on ne pourra tirer la racine quarrée, que des nombres qui auront un nombre pair de rangs décimaux.

Cela posé, lorsqu'un nombre proposé ne sera pas un quarré parfait, & qu'on voudra approcher de sa racine, de maniere que la racine qu'on trouvera ne differe pas d'un *dixiéme*, ou d'un *centiéme*, ou d'un *milliéme*, ou d'une unité décimale d'un ordre quelconque, de la véritable racine de ce nombre ; on cherchera sa racine en *dixiémes*, ou en *centiémes* &c. Pour cela, on réduira le nombre proposé en décimales, dont la derniere soit d'un ordre double de celui de la derniere partie décimale qu'on veut avoir à la racine ; ce qui ne sera pas bien difficile, puisqu'on n'aura qu'à mettre à la droite du nombre proposé deux fois autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine, & séparer ces zéros du nombre proposé par une virgule qui, en faisant distinguer les chiffres de la progression décuple, fera voir en quelles espéces de décimales le nombre proposé aura été réduit.

Le nombre proposé étant ainsi préparé, l'on en tirera la racine quarrée, comme s'il n'étoit point réduit en décimales; & lorsque la racine sera trouvée, on y mettra une virgule qui en séparera vers la droite, un nombre de chiffres, égal à la moitié du nombre des zéros qu'on aura mis à la droite du nombre proposé.

EXEMPLE.

141 *On propose de tirer la racine quarrée du nombre 647, & d'approcher de sa racine exacte, jusqu'à la centiéme partie d'une unité.*

Comme le dernier chiffre de la racine qu'on trouvera, représentera des *centiémes*, & qu'il y aura par conséquent deux figures décimales dans la racine; il faudra mettre 4 zéros à la droite du nombre proposé 647, après lequel on aura premiérement mis une virgule; & l'on aura (647, 0000) dont on extraira la racine quarré, de la même maniere que si ce nombre étoit 6470000.

En tirant la racine quarrée de ce nombre suivant les regles ci-devant expliquées (*N*°. 138.), on la trouvera égale à 2543; & le quarré de cette racine sera moindre que 6470000, de 3151.

Mais le nombre (647, 0000) dont il falloit extraire la racine, ayant quatre figures décimales, sa racine doit en avoir deux. On mettra donc dans la racine 2543 qu'on a trouvée, une virgule qui séparera les deux chiffres 43 des autres; & l'on aura

(25, 43) ou 25 $\frac{43}{100}$, pour la racine du nombre (647, 0000) ou 647, approchée de la racine exacte autant qu'on le demandoit.

PROBLÊME.

142 *Trouver la racine quarrée d'une fraction.*

On tirera la racine quarrée du numérateur, & celle du dénominateur de la fraction proposée; & la fraction qui aura pour numérateur la premiere racine & pour dénominateur la seconde, sera la racine quarrée de la fraction proposée.

Car la racine quarrée d'une fraction proposée, est une fraction qui multipliée par elle-même, donne un produit égal à la fraction proposée. Or une fraction qui a pour numérateur & pour dénominateur, les racines quarrées du numérateur & du dénominateur de la fraction proposée, étant multipliée par elle-même, donne un produit égal à la fraction proposée. Donc la fraction qui a pour numérateur & pour dénominateur, les racines du numérateur & du dénominateur de la fraction proposée, est la racine quarrée de cette fraction proposée.

Quoique la Regle qu'on vient de proposer soit générale, son application demande qu'on fasse plusieurs remarques sur les différens cas qui peuvent arriver.

I.

143 Lorsque le numérateur & le dénominateur d'une fraction seront des quarrés parfaits, on aura exactement les racines de ces quarrés; & l'on aura par conséquent exactement la racine quarrée de la fraction.

Par exemple si l'on propose de tirer la racine quarrée de la fraction $\frac{64}{225}$ dont le numérateur & le dénominateur sont des quarrés parfaits; on tirera exactement les racines de 64 & de 225, qui seront 8 & 15; & la fraction $\frac{8}{15}$ sera la racine quarrée de $\frac{64}{225}$, sans aucun reste.

II.

144 Si le dénominateur de la fraction est un nombre quarré, & que le numérateur ne soit pas un nombre quarré; l'on ne pourra pas tirer exactement la racine du numérateur; mais le défaut de la racine sera moindre qu'une unité fractionnaire d'une dénomination pareille à celle de la racine du dénominateur.

Par exemple si l'on propose de tirer la racine quarrée de la fraction $\frac{50}{81}$ dont le dénominateur est un nombre quarré qui a 9 pour racine, & dont le numérateur 50 n'est pas un nombre quarré; l'on prendra la racine du plus grand quarré contenu dans le numérateur 50; & cette racine étant 7, on aura $\frac{7}{9}$ pour la racine de la fraction proposée $\frac{50}{81}$, à peu de choses près.

Si l'on veut approcher davantage de la racine de la fraction $\frac{50}{81}$; on pourra multiplier le numérateur 50 & le dénominateur 81 par un nombre quarré quelconque, par exemple par 100 ou par 10000, ou par 1000000 &c. en mettant un nombre pair égal de zéros à la droite du numérateur & du dénominateur; ce qui n'empêchera pas le dénominateur de rester un quarré parfait. Ensuite on tirera les racines quarrées des deux termes de la fraction ainsi préparée. Par exemple si l'on multiplie les deux termes de la fraction $\frac{50}{81}$ par 10000, on aura $\frac{500000}{810000}$; & tirant les racines quarrées de deux termes de cette fraction, l'on aura, à peu de chose près, 707 pour celle du numérateur, & exactement 900 pour celle du dénominateur. Ainsi la racine quarrée de $\frac{500000}{810000}$ ou de $\frac{50}{81}$, sera $\frac{707}{900}$ à peu de chose près.

III.

145 Si aucun des termes de la fraction dont on veut tirer la racine quarrée, n'étoit un quarré parfait; on multiplieroit ses deux termes par son dénominateur; ce qui feroit une nouvelle fraction égale à la premiere, & dont le dénominateur seroit un quarré. Ainsi l'on pourroit en tirer la racine, comme on vient de le dire.

Par exemple si l'on propose de tirer la racine de cette fraction $\frac{5}{6}$; on en multipliera les deux termes 5 & 6, par 6; & l'on aura cette nouvelle fraction $\frac{30}{36}$ égale à la premiere, dont la racine est $\frac{5}{6}$ à quelque chose près.

Mais si l'on ne trouve point cette racine assez exacte; on mettra un nombre pair égal de zeros, par exemple 4 zéros, à la droite des deux termes de la fraction $\frac{30}{36}$; ce qui donnera cette nouvelle fraction $\frac{300000}{360000}$ égale à la premiere $\frac{30}{36}$ ou $\frac{5}{6}$: & tirant la racine des deux termes de cette nouvelle fraction; l'on aura cette autre fraction $\frac{547}{600}$, qui sera la racine approchée de la fraction $\frac{300000}{360000}$, ou de la fraction proposée $\frac{5}{6}$.

IV.

146 On peut encore extraire la racine quarrée d'une fraction, en réduisant la fraction proposée en une suite de parties décimales, qu'on arrête où l'on veut, plus ou moins loin, suivant qu'on desire avoir

une racine plus ou moins exacte. Ensuite on tire la racine quarrée de cette suite, & la racine qu'on trouve est celle de la fraction proposée.

Supposons qu'on veuille avoir la racine quarrée de la fraction $\frac{1}{7}$. On divisera 1 par 7, & l'on aura (*N°*. 45.) la suite de décimales (0,142857 &c.) dont les chiffres décimaux, à compter depuis la virgule, doivent être en nombre pair. Puis on extraira la racine quarrée de cette suite; & l'on trouvera pour cette racine, un peu moins que (0,378.). Mais il faut remarquer qu'on doit avoir trois chiffres décimaux après la virgule; parce qu'il y a six chiffres décimaux à la droite de la virgule du nombre dont on a tiré la racine.

PROBLÊME.

147 *Trouver la racine quarrée d'un nombre complexe composé de toises quarrées, de toises-pieds, de toises-pouces &c. tel que*

24^{TT}	1^{TP}	$0^{T}p$	6^{TL}
16			
8	$\cancel{49}$		
7	2	2	
	4^{TP}	$10^{T}p$	
		$\cancel{81}$	
	4^{TP}	$10^{T}p$	6^{TL}
0	0	0	0

4^{T}	5^{P}	$6p$
8^{T}	5^{P}	
4^{TT}	2^{TP}	$6^{T}p$
2	5	8
7^{TT}	2^{TP}	$2^{T}p$
9^{T}	4^{P}	$6p$
4^{TP}	$10^{T}p$	6^{TL}

1°. On commencera par extraire la racine quarrée du nombre des toises quarrées, contenu dans le nombre complexe proposé. Comme cette opération a été suffisamment expliquée, elle ne souffrira aucune difficulté; & l'on trouvera 4 toises pour la premiere partie de la racine, & 8 toises quarrées pour le reste de cette premiere opération.

2°. Pour trouver le nombre de pieds de la racine, on réduira, pour un moment seulement, en toise-pied, les 8^{TT} restantes de l'opération précédente; ce qui donnera 48^{TP}, lesquelles avec 1^{TP} qui se trouve dans le nombre complexe proposé, feront 49^{TP} qu'on écrira aussi pour un moment seulement, & qu'on effacera lorsqu'on n'en aura plus besoin. On doublera ensuite les 4^{T} qu'on a trouvées pour la racine; ce qui donnera 8^{T}. Puis on divisera 49^{TP} par 8^{T}; ce qui donnera 5^{P} pour le quotient, & pour le nombre des pieds de la racine. On écrira donc 5^{P} à la racine, & l'on mettra aussi ces 5^{P} à la droite de 8^{T}: puis on effacera les 49^{TP} dont on n'a plus besoin; parce que les 8^{TT} 1^{TP}, à la place desquelles on avoit pris 49^{TP}, seront plus commodes pour le reste de l'opération.

Pour avoir le reste de cette seconde opération, l'on multipliera par le nouveau terme 5^{P} de la racine, les 8^{T} 5^{P} qu'on a écrits au-dessous; ce qui, en suivant les Regles du Toisé, donnera 7^{TT} 2^{TP} 2^{Tp} qu'on écrira en partie au-dessous des 8^{TT} qui restent de l'opération précédente, & en partie au-dessous de 1^{TP} 0^{Tp} qui se trouvent dans le nombre complexe proposé, & qui n'ont point encore été employées. Ensuite on soustraira ce produit, de 8^{TT} 1^{TP} 0^{Tp}; & l'on aura 4^{TP} 10^{Tp} pour le reste de cette opération.

3°. Pour trouver le nombre des pouces de la racine, on multipliera par 12 les 4^{TP} restantes de l'opération précédente, pour les réduire en toise-pouces, ce qui produira 48^{Tp}, lesquelles avec 10^{Tp}

qu'on a auſſi de reſte, feront $58^{T}p$ qu'on écrira à part pour un moment ſeulement. Enſuite on doublera les 4^{T} 5^{P} qu'on a trouvés pour la racine ; ce qui fera 9^{T} 4^{P} : puis on diviſera $58^{T}p$ par 9^{T} 4^{P}, ou par la premiere partie 9^{T} ; ce qui donnera $6p$ pour le quotient & pour le nombre des pouces de la racine demandée. Ainſi l'on écrira $6p$ à la racine ; & l'on mettra auſſi ces $6p$ à la droite du double 9^{T} 4^{P} des deux premieres parties de la racine : après quoi l'on effacera $58^{T}p$ dont on n'aplus beſoin ; parce que les 4^{TP} $10^{T}p$ qui ſont au-deſſus, en tiendront lieu, & feront plus commodes.

Pour avoir le reſte de cette troiſiéme opération, l'on multipliera par le nouveau terme $6p$ de la racine, les 9^{T} 4^{P} $6p$ qui ſont au-deſſous ; ce qui, en ſuivant les regles du Toiſé, donnera 4^{TP} $10^{T}p$ 6^{TL} : & ayant écrit les termes de ce produit, en partie au-deſſous des 4^{TP} $10^{T}p$ qui reſtent des opérations précédentes, & en partie au-deſſous des 6^{TL} qui ſe trouve dans le nombre complexe propoſé, & dont on n'a point encore fait uſage, on les ſouſtraira des termes ſupérieurs. Comme il ne reſtera rien, ce ſera une marque que le nombre propoſé 24^{TT}, 1^{TP} $0^{T}p$ 6^{TL} eſt un quarré parfait ; & que le nombre complexe 4^{T} 5^{P} $6p$ qu'on a trouvé, eſt ſa racine exacte.

CHAPITRE II.

De la Composition des Cubes, & de l'Extraction des Racines cubiques.

DÉFINITIONS.

148 LORSQU'UN nombre est multiplié par lui-même, & que le quarré produit par cette multiplication, est encore multiplié par le même nombre; le produit de cette seconde multiplication se nomme *Cube* de ce nombre; & le nombre premiérement multiplié, s'appelle la *Racine cubique* de ce Cube.

Par exemple si l'on multiplie 5 par 5, & que le quarré 25 produit par cette multiplication, soit encore multiplié par 5; le produit 125 de cette seconde multiplication sera nommé le *Cube* du nombre 5 premiérement multiplié; & ce nombre 5 s'appellera la *Racine cubique* du Cube 125.

Si l'on multiplie 1 par 1, & que le quarré 1 produit par cette multiplication, soit encore multiplié par 1; le nouveau produit qui sera aussi 1, sera le cube de 1 premiérement multiplié; en sorte que le quarré & le cube de 1 seront égaux à leur racine 1: & comme tous les nouveaux produits qu'on aura, en multipliant continuellement par 1, ne donneront jamais que 1; l'on conclura que tous ces produits qu'on appelle *Puissances de l'unité*, sont égaux à leur racine premiérement multipliée.

L'Extraction de la Racine cubique est une opération par laquelle on trouve un nombre qui multiplié par son quarré, produit un nombre égal à celui qui est proposé pour en extraire la racine cubique.

Lorſque le nombre propoſé eſt produit par la multiplication d'un quarré par ſa racine, c'eſt-à-dire lorſqu'il eſt véritablement un Cube ; on peut toujours en tirer la racine cubique; mais lorſque le nombre propoſé n'eſt pas le juſte produit de la multiplication d'un quarré par ſa racine, il n'eſt pas poſſible d'en avoir exactement la racine cubique ; & il faut ſe contenter d'extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans ce nombre propoſé.

149 Lorſqu'un nombre n'a pas plus de trois chiffres, ſa racine cubique ne peut avoir qu'un chiffre. Car le plus petit nombre repréſenté par plus de trois chiffres eſt 1000, & la racine cubique de 1000 eſt 10 ; puiſque 10 multiplié par 10 produit le quarré 100, & que le quarré 100 multiplié par 10 produit le cube 1000. Ainſi un nombre qui n'a pas plus de trois chiffres, ou qui eſt moindre que 1000, doit avoir un nombre moindre que 10 pour ſa racine cubique, ou pour la racine du plus grand cube qu'il contient. Or un nombre moindre que 10 s'exprime par un ſeul chiffre.

150 Si le nombre avoit plus de trois chiffres, ſa racine cubique auroit plus d'un chiffre ; puiſque le moindre des nombres qui ont plus de trois chiffres, eſt 1000, & que la racine cubique de 1000 eſt 10 qui a plus d'un chiffre.

Les regles pour extraire la racine cubique d'un nombre qui a plus de trois chiffres, ſuppoſent qu'on ſait tirer celle d'un nombre qui n'a pas plus de trois chiffres. Ainſi nous allons donner une petite Table, dans laquelle on trouvera les neuf cubes qui n'ont qu'un chiffre à leur racine cubique, avec leurs racines cubiques au-deſſus. Nous y joindrons le cube 1000, avec ſa racine cubique 10 au-deſſus.

Racines cubiques	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Cubes	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

151 Lorſqu'on ne connoîtra pas la racine cubique d'un nombre qui n'aura pas plus de trois chiffres, on cherchera ce nombre dans la bande des cubes; ſi on l'y trouve, le nombre qu'on verra au-deſſus, ſera exactement la racine cubique de ce nombre. Mais ſi le nombre propoſé ne ſe trouve pas dans la bande des Cubes; l'on prendra dans cette bande un cube plus petit que lui, & qui en approchera le plus; & le nombre qu'on trouvera au-deſſus de ce cube, ſera la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé.

Par exemple ſi l'on demande la racine cubique du nombre 950 qui n'eſt point dans la bande des cubes; l'on prendra dans cette bande le cube 729 plus petit que 950, & qui en approche le plus; & l'on trouvera au-deſſus de ce cube le nombre 9 qui ſera la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé 950.

Pour préparer aux opérations de l'extraction de la racine cubique d'un nombre compoſé de plus de trois chiffres; nous examinerons d'abord, comment & de quelles parties eſt formé un cube dont la racine eſt une ligne compoſée de deux parties: & conſidérant enſuite dans une racine numérique deux parties que nous repréſenterons par les deux parties d'une ligne; l'examen que nous aurons fait de la compoſition de la figure d'un cube, nous conduira à trouver les parties dont un cube numérique ſera compoſé.

DE LA COMPOSITION DES CUBES.

I.

152 Nous avons vû (*N°.* 92.) qu'un Parallélépipede rectangle est égal au produit de sa longueur & de sa largeur, multiplié par son épaisseur ; c'est à-dire que pour avoir le nombre des mesures solides contenues dans un parallélépipede, il faut multiplier sa longueur par sa largeur, & multiplier encore le produit par l'épaisseur du parallélépipede.

Donc un Cube dont les trois dimensions, la longueur, la largeur & l'épaisseur, sont de même grandeur, est égal au produit fait d'un de ses côtés, multiplié par le quarré du même côté ; c'est à-dire que pour avoir le nombre des mesures cubiques contenues dans ce cube, il faut multiplier un de ses côtés par lui-même, & multiplier encore le quarré résultant de cette multiplication, par le même côté.

153 Soit un premier Cube *ABHCDLKI* dont la longueur *AB*, la largeur *AC* & l'épaisseur *AD* soient les côtés contigus à un même angle *A*. Si l'on ajoûte à ces côtés égaux, que nous nommerons aussi *Racines* du Cube, des parties égales *AE*, *AF*, *AG*, afin de faire un second cube plus grand qui ait pour côtés ou Racines, les lignes totales *BE*, *CF*, *DG* ; il faudra premiérement mettre sur les trois faces quarrées égales *ACID*, *ABLD*, *ABHC* du cube proposé, trois parallélépipedes *ACIDEPQR*, *ABLDFMNO*, *ABHCGVTS* qui auront des bases égales à ces faces quarrées, & qui auront pour épaisseurs les parties égales *AE*, *AF*, *AG* qu'on a ajoûtées aux racines du cube *ABHCDLKI*. Ensuite il faudra mettre dans les angles ou especes Fig. 61

de marches, que laisseront entr'eux ces trois parallélépipedes, trois autres parallélépipedes égaux *AFYGBMV*, *AEXGCPS*, *AFZEDOR* qui auront tous trois pour bases les quarrés *AFYG*, *AEXG*, *AFZE* égaux à ceux des parties égales qu'on a ajoûtées aux racines du premier cube. Enfin pour rendre complet le nouveau cube, il faudra encore ajoûter le cube *AFZEYGX* qui a pour racines les parties égales *AE*, *AF*, *AG* dont on a augmenté les racines ou côtés du premier cube : en sorte que le nouveau cube, dont chaque côté sera composé de deux parties, contiendra le cube de la premiere partie d'un de ses côtés; plus trois parallélépipedes égaux qui auront chacun pour base le quarré de la premiere partie, & pour hauteur ou épaisseur la seconde partie; plus trois autres parallélépipedes égaux qui auront pour bases des quarrés égaux à celui de la seconde partie, & pour hauteur la premiere partie; plus enfin le cube de la seconde partie.

II.

154 Si l'on représente un nombre par les deux parties d'une ligne, & que l'on conçoive bien sur la figure sixiéme toutes les parties solides qui composent un Cube dont le côté est de deux parties; l'on sentira aisément que le Cube du nombre contiendra.

1°. Le Cube de sa premiere partie, qu'on trouvera en multipliant cette premiere partie par elle-même, & en multipliant encore par la même premiere partie, le quarré que produira cette multiplication.

2°. Trois produits égaux à trois parallélépipedes qui auront pour bases des quarrés égaux à celui de la premiere partie, & pour épaisseur la seconde partie; lesquels produits on trouvera, en multipliant la premiere partie du nombre par elle-même, & en multipliant encore le triple du quarré que produira cette multiplication, par la ſeconde partie du nombre.

3°. Trois autres produits égaux à trois parallélépipedes qui auront pour baſes des quarrés égaux à celui de la ſeconde partie, & pour épaiſſeur la premier partie; leſquels on trouvera, en multipliant la ſeconde partie par elle-même, & en multipliant encore le triple du quarré que produira cette multiplication, par la premiere partie du nombre.

4°. Un produit égal au cube de la ſeconde partie; lequel on aura en multipliant la ſeconde partie par elle-même, & en multipliant encore le quarré que produira cette multiplication, par la même ſeconde partie.

III.

155 Les deux parties dans leſquelles nous partagerons la racine d'un Cube numérique quelconque, ſeront toûjours, l'une un nombre de dixaines qui pourra être exprimé par tant de chiffres qu'on voudra; l'autre un nombre d'unités qui n'aura jamais qu'un ſeul chiffre. Ainſi le cube d'un nombre compoſé de ces deux eſpéces de parties, contiendra le cube du nombre des dixaines de la racine; plus le produit fait de trois fois le quarré du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités; plus le produit fait de trois fois le quarré du nombre des unités, multiplié par le nombre des dixaines; plus le cube du nombre des unités. Mais pour connoître l'arrangement de ces quatre différentes parties dans un Cube numérique; il faut rappeller quelques propriétés des nombres, que nous avons déja expliquées.

Nous avons vû (N°. 18. & dans le cours du Chapitre de la multiplication des nombres incomplexes) que le produit de deux nombres multipliés l'un par l'autre, a toujours à sa droite autant de zéros ou de rangs, qu'il y en a en tout à la droite du nombre multiplié & à la droite du nombre par lequel on multiplie

Il suit delà que le produit de trois nombres multipliés ensemble, aura toûjours à sa droite autant de rangs, qu'il y en aura en tout à la droite des trois nombres multipliés ensemble. Par exemple si l'on multiplie un nombre de dixaines, qui a une place à sa droite, par un nombre de dixaines; & qu'on multiplie encore le produit de cette multiplication, par un nombre de dixaines, le nouveau produit aura trois places à sa droite; parce que le produit des deux premiers nombres de dixaines multipliés l'un par l'autre, aura deux places à sa droite (*N°*. 18.), & que ce produit étant encore multiplié par un nombre de dixaines, qui a une place à sa droite, acquerera une troisiéme place à sa droite.

156 Donc le cube d'un nombre de dixaines aura trois places à sa droite, puisque ce cube est fait par la multiplication d'un nombre de dixaines par un nombre de dixaines, dont le produit est encore multiplié par un nombre de dixaines.

Le quarré d'un nombre de dixaines qui a deux places à sa droite, étant multiplié par un nombre d'unités simples, qui n'a point de place à sa droite; le produit aura deux places à sa droite.

Le quarré d'un nombre d'unités, qui n'a point de place à sa droite, étant multiplié par un nombre de dixaines qui a une place à sa droite; le produit n'aura qu'une place à sa droite.

Enfin le cube d'un nombre d'unités n'aura point de place à sa droite; parce que ses trois facteurs n'ont point de place à leur droite.

Pour donner une idée de l'arrangement des parties d'un Cube, ſuppoſons qu'on veut avoir le Cube du nombre 39 compoſé de 3 dixaines & de 9 unités. Il eſt prouvé (*No.* 155.) que le cube qu'on demande contiendra le cube de 3 dixaines, plus 3 fois le quarré de 3 dixaines multiplié par 9 unités, plus 3 fois le quarré de 9 unités multiplié par 3 dixaines, plus le cube de 9 unités.

1°. Le cube de 3 étant 27 (*No.* 150.), le cube de 3 dixaines ſera 27 ſuivi de trois places à ſa droite.

2°. Le quarré de 3 ſera 9; 3 fois le quarré de 3 ſera 27; enfin 3 fois le quarré de 3 multiplié par 9 ſera 243. Ainſi 3 fois le quarré de 3 dixaines multiplié par 9 unités, ſera 243 avec deux places à ſa droite.

3°. Le quarré de 9 unités eſt 81; trois fois le quarré de 9 unités eſt 243; enfin 3 fois le quarré de 9 unités multiplié par 3, eſt 729. Ainſi 3 fois le quarré de 9 unités multiplié par 3 dixaines, ſera 729 avec une place à ſa droite.

4°. Le cube de 9 unités ſera 729 ſans aucune place à ſa droite.

$$\text{Ainſi les quatre parties du Cube de 39 ſeront} \left\{ \begin{array}{r} 27\ldots \\ 243\ldots \\ .729.. \\ 729 \end{array} \right.$$

$$\text{Et le Cube de 39 ſera} \qquad \overline{59319}$$

Connoiſſant par la compoſition d'un Cube, l'arrangement des différentes parties qu'il contient; lorſqu'on voudra décompoſer ce Cube, il ne ſera pas difficile d'y connoître toutes les parties dont il eſt formé. Par exemple ſi l'on veut décompoſer le cube

59319 qu'on vient de faire, en parties relatives à un nombre de dixaines & à un nombre d'unités, dont on supposera que sa racine est composée; on y procédera comme il suit.

1°. Comme le cube du nombre des dixaines doit avoir trois places à sa droite; on séparera par une barre les trois chiffres de la droite du cube proposé 59319, comme ici, 59|319; & le cube des dixaines de la racine se trouvera dans la partie 59 située à la gauche de la barre, & sera le plus grand cube contenu dans 59, savoir 27.

Si du cube total donné	59|319
On retranche le plus grand cube contenu dans la partie 59, savoir	27|
Le cube total se réduira au reste	32|319

Or ce reste 32319 doit contenir 3 fois le quarré du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités; plus 3 fois le quarré du nombre des unités, multiplié par le nombre des dixaines; plus le cube du nombre des unités.

2°. Trois fois le quarré du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, devant avoir deux places à sa droite, ne peut être que dans 323 qui a deux chiffres à sa droite.

Quoiqu'on puisse trouver de la même maniere la situation des deux autres parties du cube; comme il importe peu de connoître ces deux autres parties, pour trouver la racine d'un cube, ou du plus grand cube contenu dans un nombre proposé; nous n'insisterons pas davantage sur l'arrangement des parties d'un cube; & nous passerons à la méthode pour extraire la racine cubique d'un nombre quelconque.

DE L'EXTRACTION DES RACINES CUBIQUES.

PROBLÉME.

Trouver la Racine cubique d'un nombre proposé quelconque, ou du plus grand Cube contenu dans ce nombre.

Comme des exemples feront mieux entendre la solution de ce problême, que des préceptes généraux qui pourroient être trop abstraits; nous appliquerons à différens exemples les regles que nous devons expliquer : & parce que les opérations qu'il faudra faire pour extraire les racines cubiques qui auront un grand nombre de chiffres, ne différent en rien de celles qui sont nécessaires pour trouver les racines cubiques composées de deux chiffres; nous commencerons par un exemple où la racine cubique n'aura que deux chiffres; & nous ferons voir dans les exemples suivans, comment on applique les regles du premier exemple, à l'extraction des racines cubiques qui ont plus de deux chiffres.

EXEMPLE PREMIER.

157 *On demande la Racine cubique du plus grand Cube contenu dans le nombre 61723.*

		39	*Racine cubique*
Nombre proposé	61'723	27	*Triple du quarré des dixaines*
	27		
	34|723		
	59|319		
Reste de l'opération	2|404		

On mettra, comme l'on a vû ci-dessus, un crochet à la droite du nombre proposé; & l'on tirera dans ce crochet une barre horisontale, au-dessus de laquelle on écrira les chiffres de la racine cubique demandée, à mesure qu'on les trouvera, & au-dessous de laquelle on écrira les nombres dont on aura besoin pour découvrir les chiffres de la racine. Tout étant ainsi disposé, voici ce qu'on fera.

On considérera dans la racine cubique inconnue, deux parties, l'une composée de dixaines, l'autre composée d'unités simples ; & l'on sera assuré (*N*°. 155.) que le plus grand cube contenu dans le nombre proposé 61723, renfermera le cube du nombre inconnu des dixaines, plus le produit fait de trois fois le quarré du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, plus trois fois le quarré du nombre des unités multiplié par le nombre des dixaines, plus le cube du nombre des unités.

Or le cube du nombre des dixaines de la racine cubique qu'on demande, aura trois chiffres à sa droite (*N*°. 156.). Ainsi en séparant, comme nous avons fait par une barre verticale, les trois chiffres 723 de la droite du nombre proposé ; le cube du nombre inconnu des dixaines de la racine cubique, se trouvera dans la partie 61 située à la gauche de la barre, & sera le plus grand cube contenu dans cette partie 61. Or cette partie 61 n'étant composée que de deux chiffres, l'on trouvera (*N*°. 150.) que 27 est le plus grand cube qu'elle renferme ; & que 3, qui est la racine cubique de 27, est par conséquent le nombre des dixaines de la racine cubique qu'on demande. On écrira donc 3 dans le crochet, pour le chiffre des dixaines de la racine cubique.

Ayant placé sous 61 le plus grand cube 27 que cette partie contient, l'on retranchera 27 de 61 ; & par cette soustraction, le nombre proposé se réduira à 34|723 qui doit contenir encore trois fois le quarré du nombre trouvé (3) des dixaines multiplié par le nombre inconnu des unités, plus trois fois le quarré du nombre des unités multiplié par le nombre des dixaines, plus le cube du nombre des unités. Mais nous n'avons besoin que de la premiere de ces trois parties.

Or trois fois le quarré du nombre des dixaines, multiplié par le nombre des unités, doit avoir deux places à sa droite (*No*. 156.). Ainsi ce produit sera dans la partie 34|7 qui a deux chiffres à sa droite. Mais le produit fait de trois fois le quarré du nombre des dixaines multiplié par le nombre des unités, étant divisé par trois fois le quarré du nombre des dixaines, donnera évidemment pour quotient le nombre des unités. Donc pour trouver le nombre des unités, on fera d'abord le quarré du nombre 3 des dixaines, qui sera 9; puis on triplera ce quarré 9, & l'on écrira le produit 27 sous la racine; enfin l'on divisera 34|7 par 27, & le quotient qu'on trouvera sera le nombre des unités qu'on cherche. Sur quoi il faut remarquer qu'on ne doit pas toujours prendre le quotient entier que cette division peut donner, mais seulement une partie convenable de ce quotient. Ainsi quoique le diviseur 27 puisse être contenu plus de 10 fois dans le nombre 347 qu'on divise; on ne prendra que 9 pour le quotient, ou pour le nombre des unités de la racine cubique; en sorte que la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre proposé 61723, sera 39.

La racine cubique 39 qu'on demandoit étant trouvée, il faut chercher le reste de l'opération; c'est-à-dire de combien le nombre proposé 61723 surpasse le plus grand cube qu'il renferme, & dont on a tiré la racine cubique 39. Or le moyen le plus simple pour faire cette opération est de cuber 39; c'est-à-dire de multiplier d'abord 39 par 39; ce qui produira le quarré 1521, & de multiplier encore ce quarré 1521 par 39; ce qui produira le cube 59319 qu'on écrira au-dessous du nombre proposé 61723, & qui étant retranché de ce nombre proposé, donnera 2404 pour le reste de l'opération, ou pour la quantité dont le nombre proposé 61723 surpasse le cube dont on a extrait la racine cubique 39.

Exemple II.

158 *On demande la Racine cubique du plus grand Cube contenu dans* 131096.

		56	*Racine cubique*
Nombre proposé	131|096		
	125	75	*Triple du quarré des dixaines*
Reste de l'opération	6|096		

Ayant retranché par une barre verticale, les trois chiffres 096 de la droite du nombre proposé; parce qu'on prévoit qu'il aura deux chiffres à sa racine cubique, savoir un nombre de dixaines & un nombre d'unités simples, & tout étant préparé comme dans l'exemple premier; on remarquera que le nombre proposé renferme quatre parties dont nous ne considérons que les deux premieres, savoir.

1°. Le cube du nombre des dixaines de la racine demandée, qui doit avoir trois chiffres à sa droite, & qui doit par conséquent être le plus grand cube 125 contenu dans la premiere tranche 131 du nombre proposé: ainsi la racine cubique 5 de ce plus grand cube, sera le nombre des dixaines de la racine demandée, & sera écrit dans le crochet destiné à recevoir cette racine.

2°. Le produit fait de 3 fois le quarré du nombre des dixaines de la racine, multiplié par le nombre des unités ſimples de cette racine, lequel produit doit avoir deux chiffres à ſa droite, & doit par conſéquent ſe trouver dans le nombre 60 que l'on trouve après avoir retranché de la premiere tranche 131, le plus grand cube 125 qu'il contient, & après avoir abbaiſſé à la droite du reſte de cette ſouſtraction le zéro par lequel la ſeconde tranche commence. Ainſi en diviſant 60 par le triple du quarré des 5 dixaines de la racine, ſavoir par 75, on aura le nombre des unités de la racine qu'on demande.

Mais 60 ne peut pas être diviſé par 75 : ainſi l'on n'aura point d'unités ſimples à joindre aux 5 dixaines qu'on a trouvées pour la racine ; & l'on mettra par conſéquent un zéro à la droite du 5 qu'on a écrit à la racine, pour remplir la place des unités & faire tenir au premier chiffre 5, la place des dixaines.

Les commençans qui ne remarquent pas avec aſſez d'attention que le produit fait de 3 fois le quarré du nombre des dixaines de la racine, multiplié par le nombre des unités ſimples de cette racine, doit néceſſairement avoir deux chiffres à ſa droite ; & qui trouvent, comme dans cet exemple, que le reſte 6 de la premiere tranche ſuivi du premier chiffres 0 de la ſeconde, ne peut pas être diviſé par le triple du quarré des dixaines, ſavoir par 75 ; ſont tentés de prendre encore un chiffre de la deuxiéme tranche, & de diviſer 609 par 75. Mais c'eſt une faute qu'on évite aiſément en faiſant attention aux préceptes qu'on a donnés dans ce dernier exemple.

La racine cubique du plus grand cube contenu dans 131096 ſe réduiſant à 5 dixaines ſans unités ſimples ; le produit fait de 3 fois le quarré du nombre des dixaines multiplié par celui des unités ſimples, le produit fait de 3 fois le quarré du nombre des unités, multiplié par celui des dixaines, & le cube des unités, seront nuls. Ainsi toute la seconde tranche 096 du nombre proposé, restera avec le reste 6 de la premiere tranche; & ces deux restans composeront ensemble le reste de l'opération ou l'excès 6096 dont le nombre proposé surpasse le plus grand cube qu'il renferme.

Exemple III.

159 *On demande la Racine cubique du plus grand Cube contenu dans* 61723537.

		395	*Racine cubique*
Nombre proposé	61|723|537	~~27~~	
	~~27~~		
	~~34~~|~~723~~		
	~~89~~|~~329~~	4563	*Triple du quarré de 39 dixaines*
	2|404|537		
	61|629|875		
Reste de l'opération	93|662		

Tout étant disposé comme dans l'exemple précédent, & comme on le voit ci-dessus; on considérera seulement deux parties dans la racine cubique inconnue qu'on demande, savoir un nombre de dixaines qui peut avoir plusieurs chiffres, & un nombre d'unités qui n'aura jamais qu'un chiffre. En conséquence de ce partage, le nombre proposé contiendra le cube du nombre des dixaines de sa racine cubique; plus trois fois le quarré de ce nombre de dixaines, multiplié par le nombre des unités; plus trois fois le quarré du nombre des unités, multiplié par le nombre des dixaines; plus le cube du nombre des unités.

Le cube du nombre des dixaines ayant trois chiffres à sa droite (*No.* 156.); si l'on sépare par une barre les trois chiffres 537 de la droite du nombre proposé, ce cube sera dans la partie 61723 située à la gauche de la barre. Ainsi l'on ne pourra connoître le nombre des dixaines, qu'en tirant la racine du plus grand cube contenu dans la partie 61723 du nombre proposé, comme si la partie 537 n'existoit point.

Comme dans l'exemple précédent nous avons trouvé 39 pour la racine cubique du plus grand cube contenu dans 61723, & 2404 pour le reste; nous renvoyons à cet exemple pour le détail des opérations qu'il faut faire; & nous nous contentons de les représenter dans celui-ci en chiffres barrés.

Ayant donc écrit 39 pour le nombre des dixaines de la racine, ou pour la racine du plus grand cube contenu dans la partie 61723, & 2404 étant le reste de l'opération; le nombre proposé 61723|537, diminué par la soustraction du plus grand cube renfermé dans 61723, sera réduit à 2404|537 qui contiendra encore trois fois le quarré des 39 dixaines, multiplié par le nombre inconnu des unités, plus trois fois le quarré du nombre des unités multiplié par le nombre des dixaines, plus le cube du nombre des unités; mais nous ne ferons usage qne de la premiere de ces trois parties.

Or 3 fois le quarré des 39 dixaines, multiplié par le nombre des unités, devant avoir deux chiffres à sa droite, sera dans la partie 2404|5 qui a deux chiffres à sa droite. Ainsi divisant 2404|5 par 3 fois le quarré de 39, c'est-à-dire par 4563; le quotient 5 que l'on trouvera, sera le nombre des unités de la racine. On mettra donc 5 à la droite des 39 dixaines déjà trouvées ; & l'on aura 395 pour la racine cubique demandée du plus grand cube contenu dans le nombre proposé 61723537.

La racine cubique 395 étant trouvée, on aura le reste de l'opération, en faisant le cube de 395, & en retranchant ce cube 61629875, du nombre proposé 61723537 ; ce qui donnera 93662 pour le reste, c'est-à-dire pour la quantité dont le nombre proposé 61723537 surpasse le plus grand cube qu'il renferme.

Exemple IV.

160 *On demande la Racine cubique du nombre* 61723537408.

Nombre proposé	61|723|537|408	3952	*Racine cubique*
	~~27~~	~~27~~	
	~~34~~|~~723~~	~~4563~~	
	~~59~~|~~319~~	468075	*Triple du quarré de 395 dixaines*
	~~2~~|~~404~~|~~537~~		
	~~61~~|~~629~~|~~875~~		
	93|662|408		
	61|723|537|408		
	00 000 000 000		

Tout étant préparé comme dans les deux exemples précédens, & considérant dans la racine cubique un nombre de dixaines & un nombre d'unités ; on trouvera dans le nombre proposé, le cube du nombre des dixaines de la racine cubique, plus trois fois le quarré des dixaines &c; plus &c (*N°*. 155.).

Le cube du nombre des dixaines devant avoir trois chiffres à sa droite; si l'on sépare par une barre trois chiffre de la droite du nombre proposé, ce cube sera dans la partie 61723537 située à la gauche de la barre, & sera le plus grand cube contenu dans cette partie. Ainsi l'on ne pourra connoître le nombre des dixaines, qu'en tirant la racine cubique du plus grand cube contenu dans la partie 61723537 du nombre proposé, comme si la partie 408 située à la droite de la barre n'existoit point. Comme nous avons trouvé, dans l'exemple précédent, que la racine cubique de ce plus grand cube est 395, & que le reste de l'opération est 93662; nous écrirons 395 pour le nombre des dixaines de la racine cubique qu'on demande; & nous renvoyons à l'exemple précédent, pour le détail des opérations qu'il faut faire. Nous avons cependant écrit ici en chiffres barrés tous les nombres qui appartiennent aux opérations faites dans les exemples précédens I & III.

Ayant trouvé que 395 est le nombre des dixaines de la racine, ou la racine cubique du plus grand cube contenu dans 61723537, & que 93662 est le reste de l'opération; le nombre proposé sera réduit à celui-ci 93662408 qui contiendra encore 3 fois le quarré des 395 dixaines qu'on vient de trouver, multiplié par le nombre des unités; plus deux autres parties, qu'il est inutile de considérer ici.

Or 3 fois le quarré des 395 dixaines multiplié par le nombre des unités, devant avoir deux chiffres à sa droite, sera dans 936624 qui a deux chiffres à sa droite. Ainsi en divisant 93662|4 par 3 fois le quarré de 395, c'est-à-dire par 468075; le quotient

2 de la division sera le nombre des unités qui restoit à trouver. On écrira donc 2 à la droite des 395 dixaines qui sont déjà écrites à la racine cubique ; & l'on aura 3952 pour la racine cubique entiere du plus grand cube contenu dans le nombre proposé 61723537408.

La racine cubique entiere 3952 étant trouvée, on aura le reste de l'opération en faisant le cube de 3952, & en retranchant ce cube du nombre entier proposé : & comme le cube de 3952 sera égal au nombre proposé, il ne restera rien. Ainsi le nombre proposé est un cube parfait qui a 3952 pour sa racine cubique exacte.

REMARQUES.

I.

161 1°. Pour extraire la racine cubique du nombre proposé 61723537408, nous avons séparé par une barre les trois chiffres de la droite de ce nombre, comme ici 61723537|408 ; & nous avons fait voir que la racine cubique de ce nombre étant partagée en deux parties, l'une composée de dixaines, l'autre composée d'unités ; il falloit, pour avoir la partie des dixaines, tirer la racine cubique du plus grand cube contenu dans la partie 61723537 située à la gauche de la barre, comme si l'autre partie 408 n'existoit point.

2°. Dans le troisiéme exemple (*N°.* 159.), nous avons tiré la racine cubique du plus grand cube renfermé dans le nombre 61723537 : & pour avoir cette racine, nous avons encore séparé trois chiffres

537 de la droite du nombre proposé, comme ici, 61723|537; parce que la racine cubique étant supposée partagée en deux parties, l'une composée de dixaines, l'autre composée d'unités; on ne peut avoir le nombre des dixaines, qu'en tirant la racine cubique du plus grand cube contenu dans la partie 61723 située à la gauche de la barre, comme si l'autre partie 537 n'existoit point.

3°. Dans le premier exemple (*N°.* 157.), nous avons extrait la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre 61723 : & pour avoir cette racine, nous avons séparé les trois chiffres 723 de la droite du nombre 61723, comme ici 61|723; parce que la racine cubique étant encore supposée partagée en deux parties, l'une composée de dixaines, l'autre composée d'unités; on ne peut avoir la partie des dixaines, qu'en tirant la racine cubique du plus grand cube contenu dans la partie 61 située à la gauche de la barre, comme si l'autre partie 723 n'existoit point.

Il est donc évident, par toutes ces opérations, que pour trouver la racine cubique d'un nombre quelconque tel que 61723537408; il faut séparer trois à trois, tous les chiffres de ce nombre, en commençant par ceux de la droite, comme ici, 61|723|537|408; & qu'ensuite il faut procéder à l'opération de l'extraction de la racine cubique qu'on demande, dans l'ordre suivant.

1°. Il faut prendre la racine cubique du plus grand cube contenu dans la premiere tranche 61 de la gauche; ce qui sera toûjours facile, puisque (*N°.* 149. cette racine n'aura jamais qu'un seul chiffre.

2°. Puis il faudra tirer la racine cubique du plus grand cube contenu dans les deux premieres tranches

61|723 de la gauche, en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine qu'on vient de trouver pour le plus grand cube contenu dans 61.

3°. Ensuite il faudra extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans les trois premieres tranches 61|723|537 de la gauche, comme si le reste du nombre proposé n'existoit point; en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine cubique précédente, qu'on a trouvée pour le plus grand cube renfermé dans 61|723.

4°. Enfin il faudra extraire la racine cubique des quatre tranches 61|723|537|408, en prenant pour le nombre des dixaines de cette racine, la racine cubique précédemment trouvée pour les trois tranches 61|723|537.

En procédant de cette maniere à l'extraction des racines cubiques, c'est-à-dire en continuant toûjours de prendre la racine cubique précédemment trouvée, pour le nombre des dixaines de la racine cubique d'un nombre qui aura une tranche de plus; on parviendra à tirer la racine cubique d'un nombre composé de tant de tranches qu'on voudra.

II.

Lorsqu'on trouve un grand nombre pour l'excès du nombre proposé sur le cube dont on a extrait la racine cubique; il est bon d'examiner si la racine cubique qu'on a trouvée ne pourroit point avoir une unité de plus.

Le moyen le plus simple pour faire cette épreuve, est d'ajoûter 1 à la racine trouvée, & de cuber cette racine ainsi augmentée de l'unité. Si l'on trouve un nouveau cube plus grand que le nombre proposé, ce sera une marque évidente que la racine cubique trouvée n'est pas trop petite.

Par exemple, ayant trouvé 39 pour la racine cubique d'un cube contenu dans 61723, & ayant eu 2404 pour le reste de l'opération, ce qui est un grand nombre; on ajoûtera 1 à la racine 39: puis on cubera la somme 40, en la multipliant par elle-même, & en multipliant encore par 40 le produit 1600; ce qui donnera 64000. Comme ce cube (64000) de 40 est plus grand que le nombre proposé 61723; c'est une preuve que 40 ne peut pas être la racine cubique d'un cube contenu dans 61723; & que la racine cubique 39 qu'on a trouvée, n'est par conséquent pas trop petite.

PROBLÊME.

162 *Approcher si près qu'on voudra de la Racine cubique d'un nombre qui n'est pas un Cube parfait.*

Nous avons vû (*N°.* 27.) qu'un nombre qui a des parties décimales, étant multiplié par un autre qui a aussi des parties décimales, il en résulte un produit qui a autant de figures décimales, qu'il y en a en tout dans les deux facteurs de la multiplication. Ainsi lorsque ce produit sera encore multiplié par un troisiéme nombre qui aura des parties décimales; le nouveau produit contiendra autant de figures décimales, qu'il y en aura en tout dans les trois facteurs de la multiplication.

Par exemple, si l'on multiplie (4, 254) qui a trois décimales, par (3, 36) qui a deux décimales, le produit (14, 29344) aura cinq figures décimales; & si l'on multiplie encore ce produit par (2, 6) qui a une figure décimale; le nouveau produit (37, 162944) aura six figures décimales, c'est-à-dire autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les trois facteurs (4, 254), (3, 36), (2, 6).

Donc le cube d'un nombre qui contiendra des dixiémes ou une figure décimale, aura trois figures décimales; puisque les trois facteurs de ce cube auront chacun une figure décimale: le cube d'un nombre qui aura deux figures décimales, contiendra six chiffres décimaux; puisque chaque facteur de ce cube aura deux chiffres décimaux: & en général, le cube d'un nombre quelconque qui aura des chiffres décimaux, contiendra trois fois autant de chiffres décimaux, que ce nombre en aura.

Il suit delà que le nombre des figures décimales d'un cube, ne peut être que 3 ou un multiple de 3; en sorte que si l'on proposoit d'extraire la racine cubique d'un nombre qui n'auroit que deux ou quatre ou cinq ou sept ou huit &c figures décimales; il faudroit mettre à sa droite un nombe de zéros suffisant, pour lui donner trois ou six ou neuf ou douze &c figures décimales.

Enfin il est clair que la racine cubique d'un nombre aura autant de figures décimales, qu'il y aura de fois trois figures décimales dans ce nombre.

Cela posé, lorsqu'un nombre ne sera pas un cube parfait; on pourra toujours approcher de sa racine cubique, de maniere que celle qu'on trouvera ne sera pas différente de la véritable, d'une quantité égale à un dixiéme ou à un centiéme ou à une quantité décimale de tel ordre qu'on voudra, en cherchant la racine cubique de ce nombre en dixiémes ou en centiémes ou en parties décimales de tel ordre qu'on voudra. Pour cela, on réduira le nombre proposé en décimales dont la derniere soit d'un ordre triple de celui de la derniere partie décimale qu'on veut avoir à la racine ; ce qui sera toujours fort aisé, puisqu'on n'aura qu'à mettre à la droite du nombre proposé trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine cubique qu'on demande, & séparer ces zéros du nombre proposé par une virgule qui, en faisant distinguer les chiffres de la progression décuple, fera voir en quelle espéce de parties décimales le nombre proposé aura été réduit.

Le nombre proposé, qui n'est point un cube parfait, étant ainsi préparé ; on en tirera la racine cubique, comme s'il n'étoit point réduit en décimales : & lorsque la racine du plus grand cube contenu dans ce nombre sera trouvée ; on en séparera, par une virgule, autant de chiffres de la droite, qu'on aura mis de fois trois zéros à la droite de la virgule du nombre proposé. Par cette opération, l'on aura une racine cubique qui, moyennant ses parties décimales, approchera autant qu'on voudra de la racine cubique du nombre proposé.

EXEMPLE.

On propose d'approcher de la Racine cubique du nombre 12, d'une quantité plus petite que la milliéme partie d'une unité.

Puisqu'on veut approcher de la racine cubique du nombre 12, d'une quantité plus petite que la milliéme partie d'une unité ; il faudra que la racine qu'on demande ait des milliémes pour ses parties décimales de la plus basse espéce, c'est-à-dire qu'elle ait trois figures décimales. Il faudra donc mettre trois fois trois zéros à la droite du nombre 12 proposé, après lequel on aura premierement mis une virgule, comme ici, (12,000000000); ce qui ne changera pas la valeur de 12. Ensuite on tirera la racine cubique du plus grand cube contenu dans ce nombre, comme s'il ne contenoit point de décimales. Lorsqu'on aura trouvé, par les méthodes ci-devant expliquées, que cette racine cubique est 2289; on en séparera trois figures de la droite par une virgule; ce qui donnera (2, 289) pour la racine cubique demandée. Car le nombre (12,000000000) ayant neuf figures décimales, sa racine cubique 2289 doit en avoir trois, & se réduire à (2, 289) qui signifie 2289 milliémes.

Comme on ne pourroit pas ajoûter 1 milliéme au nombre 2289 milliémes, sans rendre cette racine trop grande; il est clair qu'on a approché de la racine cubique de 12, d'une quantité plus petite que la milliéme partie d'une unité.

PROBLÉME.

163 *Trouver la Racine cubique d'une Fraction.*

On extraira la racine cubique du numérateur, & celle du dénominateur de la fraction proposée; & la fraction qui aura la premiere racine pour numérateur, & la seconde pour dénominateur, sera la racine cubique de la fraction proposée.

Car la racine cubique d'une fraction, est une quantité qui multipliée par son quarré, donne un produit égal à la fraction proposée. Or une fraction qui a pour numérateur & dénominateur, les racines cubiques du numérateur & du dénominateur de la fraction proposée, étant multipliée par son quarré, donne un produit égal à cette fraction. Donc la fraction qui a pour numérateur & pour dénominateur les racines cubiques du numérateur & du dénominateur d'une fraction proposée, est la racine cubique de cette fraction proposée.

Quoique cette regle soit générale, il seroit difficile d'en faire l'application à tous les cas, sans faire quelques remarques.

I.

164 Lorsque le numérateur & le dénominateur d'une fraction, sont des cubes parfaits; on tire exactement les racines cubiques de son numérateur & de son dénominateur; & par conséquent l'on trouve exactement la racine cubique de cette fraction.

Par exemple si l'on propose de tirer la racine cubique de la fraction $\frac{64}{125}$ dont le numérateur & le dénominateur sont des cubes parfaits qui ont 4 & 5 pour racines cubiques; la fraction $\frac{4}{5}$ sera sa racine cubique exacte.

II.

165 Lorsque le numérateur de la fraction proposée n'est pas un nombre cube, & que son dénominateur est un nombre cube; si après avoir tiré la racine du plus grand cube contenu dans le numérateur, & la racine cubique exacte du dénominateur, on fait une fraction qui ait pour numérateur & dénominateur ces deux racines cubiques; cette fraction ne sera pas la racine exacte de la fraction proposée; mais la différence sera moindre qu'une unité fractionnaire de la fraction qu'on prendra pour racine cubique.

Supposons qu'on ait à extraire la racine cubique de $\frac{79}{125}$ dont le numérateur ne contient point de nombre entier cube plus grand que 64 qui a 4 pour racine cubique, & dont le dénominateur est un cube parfait qui a 5 pour racine cubique. Si l'on prend $\frac{4}{5}$ pour la racine cubique de la fraction proposée $\frac{70}{125}$; on n'aura pas exactement la racine cubique de cette fraction ; mais l'erreur sera moindre que $\frac{1}{5}$.

Si l'on veut approcher davantage de la racine cubique d'une fraction dont le dénominateur seul est un cube parfait ; il faudra multiplier le numérateur & le dénominateur de la fraction proposée, par un cube parfait plus ou moins grand, suivant qu'on voudra approcher plus ou moins près de la véritable grandeur de la racine : & comme cette opération ne changera point la valeur de la fraction proposée, c'est-à-dire que la nouvelle fraction sera égale à la fraction proposée ; on aura la racine cubique de la fraction proposée avec le degré de précision qu'on voudra, en tirant les racines cubiques du numérateur & du dénominateur de cette nouvelle fraction.

Par exemple si l'on veut approcher de la racine cubique de la fraction $\frac{70}{125}$, de maniere que l'erreur soit moindre que la *centiéme* partie de $\frac{1}{5}$; on multipliera le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{70}{125}$ par le cube de 100, c'est-à dire par 1000000 ; ce qui donnera cette fraction $\frac{70000000}{125000000}$: & prenant les racines cubiques des deux termes de cette nouvelle fraction, pour en faire une autre fraction, l'on aura $\frac{412}{500}$ qui ne s'éloignera pas de la véritable racine cubique de $\frac{70}{125}$, d'une quantité égale à $\frac{1}{500}$.

III.

166 Si le numérateur & le dénominateur de la fraction proposée, ne sont ni l'un ni l'autre des cubes

parfaits ; on multipliera les deux termes de la fraction proposée par le quarré de son dénominateur, ce qui convertira cette fraction en une autre fraction qui lui sera égale, & dont le dénominateur sera un cube parfait. Alors on tirera la racine cubique de cette nouvelle fraction, comme il a été dit pour les fractions dont les dénominateurs sont des cubes parfaits.

IV.

167 On peut encore extraire la racine cubique d'une fraction quelconque de la maniere suivante.

On commencera par diviser le numérateur de la fraction par son dénominateur, en cherchant un quotient composé de parties décimales qu'on poussera plus ou moins loin, suivant que l'on voudra extraire plus ou moins exactement la racine cubique de la fraction proposée. Ensuite on extraira la racine cubique de ce quotient ; & cette racine sera celle de la fraction proposée, aussi exacte qu'on l'aura demandée.

Par exemple si l'on veut extraire la racine cubique de $\frac{1}{7}$, on cherchera le quotient de $\frac{1}{7}$ en parties décimales ; & l'on trouvera (0, 142857 142857 &c.) pour ce quotient dans lequel on aura soin de mettre un nombre de figures décimales multiple de 3. Ensuite on extraira la racine cubique de ce nombre ; & l'on trouvera (0,5227) qui sera, à peu de chose près, la racine cubique de $\frac{1}{7}$.

PROBLÊME.

168 *Trouver la Racine cubique d'un nombre complexe composé de toises cubiques & de parties de la toise cubique divisée en 6, & sous-divisée continuellement en 12, tel que*

$$\begin{array}{l|l}
118^{TTT}.5^{TTP}.1^{TTp}.5^{TTL}.6^{TT1} & 4^{T}\quad 5^{P}\quad 6^{p} \\
\underline{64} & \overline{48^{TT}} \\
\hline
54 \qquad \cancel{3}\cancel{2}\cancel{9} & \overline{70^{TT}.0^{TP}.6^{Tp}} \\
\hline
112^{TTT}.5^{TTP}.5^{TTp}.8^{TTL} & \\
\hline
5^{TTT}.5^{TTP}.7^{TTp}.9^{TTL}.6^{TT1} & \\
\qquad\qquad \cancel{4}\cancel{2}\cancel{7} & \\
\hline
118^{TTT}5.^{TTP}.1^{TTp}.5^{TTL}.6^{TT1} & \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

1°. On commencera par extraire la racine cubique du nombre des toises cubes contenues dans le nombre complexe proposé. Comme cette opération a été suffisamment expliquée, nous ne la détaillerons point; & nous dirons seulement que cette racine cubique sera 4^{T} qu'on écrira au lieu destiné pour la racine; & qu'on aura 54^{TTT} pour le reste des 118^{TTT} sur lesquelles la premiere opération aura été faite.

2°. Pour trouver le nombre des pieds de la racine, on réduira, pour un moment seulement, en toise-toise-pied les 54^{TTT} qu'on a de reste, en les multipliant par 6; ce qui produira 324^{TTP} lesquelles avec les 5^{TTP} qui se trouvent dans le nombre proposé, composeront 329^{TTP} qu'on écrira pour un moment seulement, & qu'on effacera lorsqu'on n'en aura plus besoin. Puis on prendra 3 fois le quarré des 4 toises qu'on vient de trouver pour la premiere partie de la racine; & l'on aura 48^{TT} par lesquelles on divisera les 329^{TTP} qu'on vient de préparer; ce qui donnera 5^{P} pour le quotient, & pour la seconde partie de la racine demandée. Ainsi ayant écrit 5^{P} après les 4^{T} qu'on a trouvées; on aura $4^{T}\ 5^{P}$ pour les deux premiers termes de la racine cubique demandée. La seconde partie de la racine étant ainsi trouvée, on effacera les 329^{TTP} qu'on avoit préparées; parce que les $54^{TTT}\ 5^{TTP}$ à la place desquelles on les avoit prises, seront plus commodes pour le reste de l'opération.

Pour avoir le reste de cette seconde opération, l'on cubera $4^{T}\ 5^{P}$ qu'on a trouvés pour la racine; c'est-à-dire qu'après avoir multiplié $4^{T}\ 5^{P}$ par $4^{T}\ 5^{P}$, l'on multipliera encore le produit quarré $23^{TT}\ 2^{TP}\ 2^{Tp}$ qui en résultera, par $4^{T}\ 5^{P}$; ce qui produira le cube $112^{TTT}\ 5^{TTP}\ 5^{TTp}\ 8^{TTL}$. Ensuite on retranchera ce cube du nombre complexe proposé; & le reste sera $5^{TTT}\ 5^{TTP}\ 7^{TTp}\ 9^{TTL}\ 6^{TTl}$.

30. Pour trouver le nombre des pouces de la racine, on réduira en toise-toise-pouce les toises cubiques & les toise-toise-pied qu'on a de reste, en multipliant les 5^{TTT} par 72 & les 5^{TTP} par 12; ce qui produira 360^{TTp} & 60^{TTp}, lesquels deux nombres de toise-toise-pouce étant joints aux 7^{TTp} qu'on a déjà, composeront 427^{TTp}. Ensuite on prendra 3 fois le quarré de $4^{T}\ 5^{P}$ qu'on a trouvés pour la racine; ce qui donnera $70^{TT}\ 0^{TP}\ 6^{Tp}$. Enfin l'on divisera 427^{TTp} par $70^{TT}\ 0^{TP}\ 6^{Tp}$, ou par sa premiere partie 70^{TT}; ce qui donnera 6 pouces pour le quotient, & pour le nombre de-

mandé des pouces de la racine. Ainſi l'on écrira 6 pouces à la droite des $4^T\ 5^P$ qu'on a déjà trouvés ; & l'on aura $4^T\ 5^P\ 6p$ pour la racine cubique du nombre complexe propoſé.

Pour avoir le reſte de cette opération, l'on cubera $4^T\ 5^P\ 6p$ qu'on a trouvés ; c'eſt-à-dire qu'on multipliera $4^T\ 5^P\ 6p$ par $4^T\ 5^P\ 6p$, ce qui donnera le produit quarré $24^{TT}\ 1^{TP}\ 0^{Tp}\ 6^{TL}$; & qu'on multipliera encore ce quarré par ſa racine $4^T\ 5^P\ 6p$, ce qui donnera le cube $118^{TTT}\ 5^{TTP}\ 1^{TTp}\ 5^{TTL}\ 6^{TT1}$. Enſuite on retranchera ce cube du nombre complexe propoſé ; & comme il ne reſtera rien, ce ſera une marque que le nombre complexe propoſé eſt un cube parfait, & que ſa racine cubique eſt exactement $4^T\ 5^P\ 6p$.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE VIII.

Des Proportions arithmétiques, des Progressions arithmétiques, des Progressions géométriques & des Logarithmes.

CHAPITRE PREMIER.

Des Proportions arithmétiques.

169 NOus avons dit (*No.* 101.) que dans la comparaison de deux grandeurs, telles que 12 & 3 ou 3 & 12, si l'on ne considére que la quantité 9 dont l'une surpasse l'autre ou est surpassée par l'autre; cette quantité 9 se nomme *Différence*, ou *Rapport arithmétique*, ou *Raison arithmétique* des deux grandeurs comparées. Nous avons dit aussi que celle des deux grandeurs comparées, qu'on nomme ou qu'on écrit la premiere, s'appelle *Antecédent*; & que celle qu'on écrit ou que l'on nomme la seconde, s'appelle *Conséquent*.

Lorsque le premier terme d'un Rapport arithmétique est moindre que le second; l'on dit que la *Différence* est *additive*; parce que pour avoir le second terme du rapport par le moyen du premier, il faut ajoûter au premier la *différence*, c'est-à dire la quantité dont il est surpassé par le second.

Au contraire, l'orsque le premier terme d'un rapport arihtmétique est plus grand que le second, l'on dit que la *Différence* est *soustractive*; parce que pour avoir le second terme du rapport par le moyen du premier, il faut soustraire du premier terme, la *difference*, c'est-à-dire la quantité dont il surpasse le second.

170 Quatre termes dont le premier est surpassé par le second, de la même quantité dont le troisiéme est surpassé par le quatriéme, ou dont le premier surpasse le second, de la même quantité que le troisiéme surpasse le quatriéme, se nomment emsemble une *Proportion arithmétique*. Par exemple ces quatre termes 3, 12, 5, 14, ou 12, 3, 14, 5, font en proportion arithmétique.

Une proportion arithmétique est donc composée de deux rapports arithmétiques égaux; & les différences égales des termes de ces rapports sont toutes deux additives, ou toutes deux soustractives.

Lorsqu'on écrit quatre termes d'une proportion arithmétique, on sépare par un point les deux termes de chaque rapport, & l'on met deux points l'un sur l'autre après le second terme, pour séparer le premiet rapport du second. Par exemple pour représenter une proportion arithmétique composée de ces quatre termes 3, 12, 5, 14, on écrira ces quatres termes de cette manierrè 3 . 12 : 5 . 14.

Pour énoncer une proportion arithmétique, telle que celle-ci 3 . 12 : 5 . 14, on dit: 3 *est à* 12 *comme*

5 *est à* 14. Nous avons vû qu'on peut énoncer de la même maniere une proportion géométrique.

Les quatre termes d'une proportion arithmétique ont les mêmes noms que ceux d'une proportion géométrique.

Le premier terme s'appelle *Antécédent du premier rapport*, ou *premier Antécédent.*

Le second terme se nomme *Conséquent du premier rapport*, ou *premier Conséquent.*

Le troisiéme terme s'appelle *Antécédent du second rapport*, ou *second Antécédent.*

Le quatriéme terme se nomme *Conséquent du second rapport*, ou *second Conséquent.*

Le premier & le quatriéme termes s'appellent les *Extrêmes*, parce qu'il sont aux extrémités de la proportion.

Le second & le troisiéme termes qui sont au milieu de la proportion, se nomment les *Moyens.*

171 Lorsque les antécédens d'une proportion arithmétique, telle que celle-ci 12. 3 : 14. 5, seront plus grands que leurs conséquens ; il est évident qu'en renversant l'ordre des termes de la proportion & en écrivant 5. 14 : 3 . 12, on aura encore une nouvelle proportion dont les antécédents seront moindres que leurs conséquens, & qui aura les mêmes extrêmes & les mêmes moyens que la premiere.

172 Une proportion arithmétique comme celle-ci 3. 7 : 7. 11 dont les deux termes moyens sont égaux, s'appelle *Proportion arithmétique continue.* Ordinairement on n'écrit qu'un des deux moyens ; ensorte que la proportion continue n'a que trois termes, à la gauche desquels on met une barre horisontale entre deux points dont l'un est au-dessus & l'autre au-dessous, comme ici ÷ 3 . 7 . 11.

THÉORÊME.

173 *Dans toute Proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

Démonstration.

Nous avons vû (*N°.* 171.) qu'une proportion arithmétique dont les antécédens sont plus grands que leurs conséquens, peut être réduite à une autre proportion qui a les mêmes extrêmes & les mêmes moyens, & dont les antécédens sont moindres que leurs conséquens: en sorte que si l'on prouve que la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens, dans une proportion dont les antécédens seront moindres que les conséquens; la proposition sera aussi démontrée pour les proportions dont les antécédens seront glus grands que leurs conséquens.

Supposons donc que les deux antécédens d'une proportion arithmétique sont surpassés également par leur conséquens. Il est évident qu'à la place du second terme, on pourra prendre le premier, plus la différence de ces deux termes; en sorte que la somme des moyens; c'est-à-dire la somme du second terme & du troisiéme, contiendra le premier terme avec la différence, plus le troisiéme terme.

Il n'est pas moins clair qu'à la place du quatriéme terme, on pourra prendre le troisiéme avec la différence de ces deux termes, laquelle (*N°.* 170.) est la même que celle du premier terme au second; en sorte que la somme des extrêmes; c'est-à-dire la somme du premier & du quatriéme termes, contiendra le premier terme, plus le troisiéme avec la même différence contenue dans la somme des moyens.

La

La somme des moyens & celle des extrêmes seront donc composées des trois mêmes parties, savoir du premier terme, du troisiéme terme & de la différence d'un antécédent à son conséquent : ainsi ces deux sommes seront égales.

COROLLAIRE PREMIER.

174 Si le premier terme d'une proportion arithmétique étoit zéro, la somme des extrêmes se réduiroit au quatriéme terme de la proportion ; & comme la somme des extrêmes seroit toujours égale à la somme des moyens, le quatriéme terme seroit égal à la somme des moyens.

On prouvera de même que si le quatriéme terme d'une proportion étoit zéro, le premier terme seroit égal à la somme des moyens.

Enfin l'on démontrera, de la même maniere, que si l'un des moyens étoit zéro, l'autre moyen seroit égal à la somme des extrêmes de la proportion.

COROLLAIRE II.

175 Dans une proportion arithmétique continue, telle que celle-ci 3 . 7 : 7 . 11, dont les deux moyens sont toujours égaux (*N*°. 172), la somme des moyens sera le double de l'un des moyens : & comme (*N*°. 173.) la somme des extrêmes sera toujours égale à la somme des moyens ; il est évident que la somme des extrêmes sera double de l'un des moyens.

Lorsque la proportion arithmétique continue est écrite de cette maniere $\div$ 3 . 7 . 11, il est clair que la somme des extrêmes est égale au double du terme moyen.

Corollaire III.

176 Puisque (*No* 173.) dans toute proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à celle des moyens, & qu'il est évident qu'en retranchant une même quantité de ces deux sommes égales, les restes seront égaux; il suit que

1°. Si l'on retranche un extrême, de ces deux sommes; l'autre extrême qui restera d'une part, sera égal à ce qui restera de l'autre part, savoir à la somme des moyens moins l'extrême retranché. Ainsi l'on aura celui des deux extrêmes qu'on voudra, en ajoûtant ensemble les deux moyens, & en retranchant l'autre extrême de leur somme.

2°. Si l'on retranche un moyen, de la somme des moyens & de la somme des extrêmes qui sont égales; le moyen qui restera d'une part, sera égal à ce qui restera de l'autre part, savoir à la somme des extrêmes moins le moyen retranché. Ainsi l'on trouvera celui des deux moyens qu'on voudra, en ajoûtant ensemble les extrêmes, & en retranchant l'autre moyen de leur somme.

Par exemple si une proportion arithmétique commence par ces trois termes 12 . 3 : 14 . *, & qu'on veuille avoir le quatriéme qui est le second extrême; on ajoûtera ensemble les deux moyens 3 & 14; & de leur somme 17 ayant retranché le premier terme 12, la quantité 5 qui restera, sera le quatriéme terme demandé: en sorte que la proportion entiere sera 12 . 3 : 14 . 5.

Si une proportion avoit pour ses trois derniers termes * . 3 : 14 . 5, & qu'on voulût avoir le premier; il faudroit encore additionner les deux moyens 3 & 14, puis de leur somme 17 retrancher le second extrême 5; & le reste 12 seroit le premier terme demandé:

en sorte que la proportion entiere seroit 12. 3 : 14 5.

Si le second terme manquoit dans une proportion arithmétique, & qu'on n'en eut que ces trois termes 12. * : 14. 5; on trouveroit le second terme, en ajoûtant ensemble les deux extrêmes 12 & 5, & en retranchant de leur somme 17 le moyen 14 que l'on a; ce qui donneroit 3 pour le second terme qui manque: en sorte que la proportion entiere seroit 12. 3 : 14. 5.

Enfin si le troisiéme terme manquoit dans une proportion arithmétique, & que l'on n'en connût que ces trois termes 12. 3 : * 5; on trouveroit le troisiéme terme qui manque, en ajoûtant ensemble les deux extrêmes 12 & 5, & en retranchant de leur somme 17 le premier moyen 3 que l'on a; ce qui donneroit 14 pour le second moyen demandé: & la proportion entiere seroit 12. 3 : 14. 5.

CHAPITRE II.

Des Progressions arithmétiques.

DÉFINITIONS.

177 UNE suite de termes qui croissent ou qui décroissent tous également, s'appelle une *Progression arithmétique.*

Si tous les termes de la progression arithmétique vont en augmentant, on la nomme *Progression arihmétique croissante*; & si tous les termes vont en diminuant, on l'appelle *Progression arithmétique décroissante.* Par exemple cette suite 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c, est une progression arithmétique croissante; & cette autre suite 13, 11, 9, 7, 5, 3, &c, est une progression arithmétique décroissante.

Pour marquer que tous les termes d'une ſuite telle que celle-ci 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c, ſont en progreſſion arithmétique; on place à la gauche du premier terme, deux points l'un ſur l'autre avec une barre horiſontale entre deux & l'on met un point après chaque terme de la progreſſion, comme ici $\div 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 .$ &c.

La quantité conſtante dont les termes d'une progreſſion arithmétique croiſſent ou décroiſſent s'appelle *Raiſon* ou *Difference* de la progreſſion; & cette *différence* qui eſt la même entre tous les termes conſécutifs, eſt *additive* ou *ſouſtractive*, ſuivant que les termes de la progreſſion vont en augmentant ou en diminuant.

Le premier & le dernier termes d'une progreſſion arithmétique, ſe nomment les *Etrêmes* de la progreſſion; & tous les autres termes s'appellent les *Moyens.*

COROLLAIRE PREMIER.

178 Puiſque (No. 177.) les termes d'une progreſſion arithmétique croiſſent ou décroiſſent tous, d'une quantité cônſtante égale à la *différence* de la progreſſion; il eſt évident qu'on peut repréſenter tous les termes d'une progreſſion arithmétique, en employant ſeulement le premier avec la *différence* conſtante de la progreſſion; & que chaque terme contiendra le premier, plus ou moins la *différence* multipliée par le nombre des termes qui ſeront avant lui.

Le premier terme qui n'a rien avant lui, ſe contiendra lui-même ſans addition ni ſouſtraction de la *différence*

Le ſecond terme qui a un terme avant lui, & qui doit être plus grand ou plus petit d'une *différence* que le précédent, contiendra le premier terme une fois, plus ou moins la *différence* une fois.

Le troisiéme terme qui a deux termes avant lui, & qui doit être plus grand ou plus petit d'une *différence* que le second, contiendra le premier terme, plus ou moins la *différence* deux fois.

Le quatriéme terme qui a trois termes avant lui, & qui doit être plus grand ou plus petit que le troisiéme d'une *différence*; contiendra le premier terme, plus ou moins la *différence* trois fois.

Enfin chaque terme augmentant ou diminuant toujours d'une *différence*, contiendra le premier terme, plus ou moins autant de *différences* qu'il aura de termes avant lui. Par exemple le centiéme terme qui a 99 termes avant lui, contiendra le premier terme, plus ou moins 99 fois la *différence* de la progression.

Ainsi connoissant le premier terme & la *différence constante* de la progression; l'on déterminera quel terme on voudra de cette progression, en multipliant la *différence* par le nombre des termes qui précédent celui qu'on veut avoir, & en ajoûtant ce produit au premier terme, si la progression est croissante; ou en retranchant ce produit du premier terme, si la progression est décroissante.

Corollaire II.

179 Puisque (*N°.* 178.) chaque terme d'une progression arithmétique contient le premier, plus ou moins la *différence* propre de la progression, multipliée par le nombre des termes qui sont avant lui; il est évident que chaque terme différera du premier, d'une quantité égale à la *différence* propre de la progression, multipliée par le nombre des termes qui seront avant lui. Par exemple le second terme différera du premier, d'une quantité égale à la simple *différence*

de la progression ; le troisiéme sera different du premier, d'une quantité égale à deux fois la *difference* de la progression ; .... le centiéme différera du premier, d'une quantité égale à 99 fois la *difference* propre de la progression : & ainsi des autres.

De même que nous avons comparé chaque terme d'une progression arithmétique avec le premier, on pourra comparer chaque terme avec tout autre terme que le premier ; & l'on verra clairement que deux termes qui se suivront immédiatement, auront pour différence, la *différence* propre de la progression ; que deux termes qui auront un terme entr'eux, auront pour différence deux fois celle de la progression ; que deux termes qui en auront deux autres entr'eux, auront une différence égale à trois fois celle de la progression ; enfin que deux termes qui auront un nombre quelconque d'autres termes entr'eux, auront pour différence celle de la progression, multipliée par un nombre plus grand d'une unité, que celui des termes qui seront entre les deux termes comparés.

Corollaire III.

180 Il suit delà que les termes d'une même progression arithmétique, ont entr'eux la même différence, lorsqu'ils ont entr'eux le même nombre de termes : car alors les différences de ces termes sont composées de la même *différence* propre de la progression, multipliée par le même nombre.

Corollaire IV.

181 Donc si l'on prend dans une progression arithmétique quatre termes tels, qu'il y ait autant de termes entre le premier & le second, qu'entre le troi-

siéme & le quatriéme ; ces quatre termes seront en proportion arithmétique ; puisque (No. 180.) la différence du premier de ces quatre termes au second, sera égale à la différence du troisiéme au quatriéme.

REMARQUE.

182 L'usage que nous ferons des progressions arithmétiques, pour expliquer la nature des Logarithmes dont nous parlerons dans le Chapitre quatriéme, nous oblige de faire remarquer qu'une même progression arithmétique peut avoir pour termes des nombres vrais, & des nombres faux. On en verra des exemples, après qu'on aura expliqué ce qu'on entend par nombres vrais & par nombres faux.

On appelle *Nombres vrais* ou *Nombres positifs*, tous ceux qui sont plus grands que zéro ; & l'on nomme *Nombres faux* ou *Nombres négatifs*, tous ceux qui sont moindres que zéro.

Comme zéro n'est rien, & qu'on a de la peine à se représenter quelque chose moindre que rien ; la plûpart de ceux qui entendent parler pour la premiere fois de nombres faux, de nombres moindres que zéro, ou que rien, ne manquent guère de les confondre avec zéro ou rien : mais il est aisé de faire voir que ces nombres sont très-differens de zéro.

On aura une idée juste des nombres vrais & des nombres faux, & de la différence des nombres faux à zéro, en se représentant les premiers comme de vrais biens, & les derniers comme des dettes.

Si un homme posséde 100#, & qu'il ait en même temps une dette de 100#; cet homme sera dans le même état que s'il ne possédoit rien, & qu'il n'eût rien à payer ; parce que les 100# qu'il posséde seront anéanties pour lui, par la dette de 100# qu'il doit payer, Ainsi l'on pourra dire que l'état de cet homme est précisément zéro.

Si un homme ne posséde rien, & qu'il ait une dette de 100#; on ne pourra pas dire que l'état de cet homme est précisément zéro; parce qu'il faut qu'il gagne 100# pour payer ce qu'il doit, & pour être dans l'état d'un autre qui n'a précisément rien. Il faudra donc convenir que l'état de cet homme est de 100# moindre que zéro ou que rien.

Les nombres faux sont le contraire des nombres vrais, comme les dettes le sont des biens vrais: & de même que les dettes anéantissent pour celui qui les a, autant de bien qu'il en faut pour les payer; de même aussi, si l'on met des nombres faux avec des nombres vrais, on détruira dans les derniers autant d'unités que les premiers en contiendront. Et réciproquement, comme des biens vrais détruisent des dettes, parce qu'ils peuvent les payer: en mettant des nombres vrais avec des nombres faux, on détruira dans ceux-ci autant d'unités qu'il y en aura dans les premiers.

Pour distinguer les nombres vrais d'avec les nombres faux, on met au-devant des derniers cette petite barre horisontale — qu'on appelle *Moins*.

Par exemple -1, -2, -3, -4, &c représentent des nombres faux ou négatifs, c'est-à-dire des nombres moindres que zéro, de 1, 2, 3, 4, &c unités: au lieu que 1, 2, 3, 4, &c représentent des nombres positifs ou vrais, c'est-à-dire des nombres plus grands que zéro de 1, 2, 3, 4, &c unités. Ainsi pour représenter au juste l'état d'un homme qui posséderoit 100#, & qui auroit une dette de 40#, on écriroit 100#—40#; ce qu'on pourroit abréger, en écrivant simplement 60# qui restent de 100# après avoir payé la dette de 40#; mais en écrivant 60#, l'état de cet homme ne seroit pas aussi-bien détaillé qu'en écrivant 100#—40#.

La barre horisontale — par laquelle on marque qu'un nombre est faux, ou moindre que zéro d'une quantité égale à ce nombre, étant appellée *Moins*, les quantités fausses -1, -2, -3, -4, &c seront nommées *moins* 1, *moins* 2, *moins* 3, *moins* 4, &c; & les quantités mêlées, 100—40, 100—60, qui peuvent représenter un vrai bien de 100 avec une dette de 40 ou de 60, seront nommées 100 *moins* 40, & 100 *moins* 60: en sorte que pour représenter l'état d'un homme qui posséderoit 100#, & qui auroit une dette de 40# ou de 60#; on pourroit dire que son état est 100# *moins* 40#, ou 100# *moins* 60#.

La barre horisontale — signifiant proprement *Moins*, elle est la marque d'une soustraction & signifie que la grandeur qui la suit, doit être retranchée de celle qui la précéde. Par exemple 100—40 signifie qu'il faut retrancher 40 de 100; ce qui réduit 100—40 à 60.

Lorsqu'un nombre positif qu'il faut retrancher, est moindre qu'un autre nombre positif dont on doit le retrancher, il est évident que le reste de la soustraction est toujours positif. Par exemple 100—40 qui signifie qu'on retranche le nombre vrai 40 du nombre vrai 100, se réduit au nombre vrai 60.

Mais lorsqu'un nombre vrai qu'il faut retrancher, est plus grand que le nombre vrai dont il faut le retrancher, & qu'il n'y a pas d'autre nombre sur lequel on puisse emprunter; le reste de la soustraction est toujours un nombre faux égal, pour le nombre de ses unités, à la différence des deux nombres. Par exemple si l'on doit retrancher 100 de 40, ce qu'on écrit ainsi 40—100; le reste de la soustraction sera le nombre faux —60; parce que le nombre 100 qu'il faut retrancher est composé de 40 & de 60, & qu'après avoir retranché 40 de 40, ce qui donne un reste égal à zéro, il faut encore en retrancher 60, ce qui donne un reste moindre que zéro de 60 unités.

Lorsqu'un nombre vrai doit être retranché d'un nombre faux, le reste est un nombre faux dont le nombre des unités est égal à la somme des deux nombres considérés comme faux. Par exemple si l'on doit retrancher le nombre vrai 60 du nombre faux —40, le reste sera —100 : car si l'on considere les nombres faux comme des dettes, on reconnoîtra facilement que retrancher un nombre vrai 60 d'un nombre faux —40, est la même chose que faire contracter une dette de 60 à un homme qui en a déja une de 40 ; ce qui fait une dette de 100, qu'on représentera par le nombre faux —100.

La nature des nombres vrais & des nombres faux étant bien connue, on n'aura pas de peine à concevoir comment une même progression arithmétique peut avoir parmi ses termes des nombres vrais & des nombres faux.

Si l'on considere une progression arithmétique décroissante, comme ÷ 11. 8. 5. 2. &c, dont la *différence* est 3 ; & qu'on veuille soustraire continuellement la *différence* 3, pour continuer cette progression à l'infini ; on parviendra bientôt à trouver un terme 2 qui sera moindre que la *différence* 3 : & si l'on continue de soustraire la *différence*, de ce terme 2 plus petit qu'elle, pour avoir les termes suivans de la progression; on ne trouvera pour ces termes que des nombres faux -1, -4, -7, -10, &c : en sorte que la progression étant continuée audelà du terme 2 plus petit que la *différence* 3, sera

÷ 11. 8. 5. 2. -1. -4. -7. -10. &c.

Tout ce que nous avons dit en général des progressions arithmétiques dont tous les termes sont vrais, convient aussi à celles qui ont pour termes des nombres vrais & des nombres faux, telles que celle-ci ÷ 11. 8. 5. 2. -1. -4. &c: & comme pour appliquer à ces nouvelles progressions les principes ci-devant établis, il suffiroit de répéter ce que nous avons déja dit, nous n'en parlerons pas davantage. Nous nous contenterons d'avertir que tout ce qui suit convient également au progressions dont les termes sont tous vrais ou tous faux, & à celles dont quelques termes sont faux.

THÉOREME.

183 *La somme des deux extrêmes d'une Progression arithmétique est égale à la somme de deux moyens quelconques pris à distance égale des extrêmes.*

DÉMONSTRATION.

Comme les deux moyens seront a distance égale des extrêmes de la progression, il y aura autant de termes entre le premier terme de la progression & le premier moyen, qu'il y en aura entre le second moyen & le dernier terme. Ainsi (*N°*. 181.) le premier terme, le premier moyen, le second moyen & le dernier terme de la progression, seront quatre termes en proportion arithmétique & par conséquent (*N°*. 173.) la somme des deux extrêmes sera égale à la somme des deux moyens.

Par exemple si l'on a cette progression arithmétique ÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15, dont la somme des extrêmes 3 & 15 vaut 18; la somme de deux moyens quelconques également éloignés des extrêmes, tels que 5 & 13, ou 7 & 11, ou 9 & 9, vaudra aussi 18.

COROLLAIRE.

184 Si le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, le terme du milieu ſera égal à la moitié de la ſomme des extrêmes. Car comme il y aura même différence du premier terme à celui du milieu, que de celui du milieu au dernier; il eſt clair que le premier terme, celui du milieu & le dernier ſeront en proportion continue. Ainſi la ſomme des extrêmes ſera double du terme du milieu (*N*°. 175.); & par conſéquent le terme du milieu ne vaudra que la moitié de la ſomme des extrêmes.

THÉOREME.

185 *La ſomme de tous les termes d'une Progreſſion arithmétique eſt égale à la moitié de la ſomme des extrêmes, multipliée par le nombre des termes de la progreſſion.*

DÉMONSTRATION.

Nous avons vû (*N*°. 183.) que la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme de deux termes moyens quelconques également éloignés des extrêmes; & nous avons prouvé (*N*°. 184.) que quand le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, le terme du milieu eſt égal à la moitié de la ſomme des extrêmes. Ainſi tous les termes d'une progreſſion arithmétique, ſont enſemble égaux à un pareil nombre de termes dont chacun ſeroit égal à la moitié de la ſomme des extrêmes; d'où il ſuit qu'on aura la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique, en prenant la moitié de la ſomme des extrêmes, autant de fois qu'il y a de termes dans la progreſſion, c'eſt-à-dire en multipliant la moitié de la ſomme des extrêmes, par le nombre des termes de la progreſſion.

Par exemple si l'on a cettte progression arithmétique ÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. dont la somme des extrêmes 3 & 15 est 18, & dont le nombre des termes est 7; on multipliera 9 qui est la moitié de 18, par 7; ce qui donnera 63 pour la somme de tous les termes de la progression proposée.

COROLLAIRE.

186 Donc on aura aussi la somme de tous les termes d'une progression arithmétique, en multipliant la somme des extrêmes par la moitié du nombre des termes de cette progression.

Par exemple si l'on a cette progression arithmétique ÷ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. dont la somme des extrêmes est 18 & dont le nombre des termes est 7; on multipliera 18 par $3\frac{1}{2}$ qui est la moitié de 7; & l'on aura 63 pour la somme de tous les termes de la progression proposée.

Pour mieux faire entendre les principes des progressions arithmétiques que l'on vient d'expliquer, on en va faire usage dans la résolution de quelques questions.

QUESTION PREMIERE.

On a payé une certaine somme en 28 semaines. Au bout de la premiere semaine on a payé 1₶; au bout de la seconde on a payé 4₶: & les payemens suivans ayant toujours été ainsi augmentés de 3₶; on demande de combien a été le payement de la vingt-huitiéme semaine.

Puisque les payemens ont toujours été augmentés de 3₶, les 28 payemens font une progression arithmétique croissante de 28 termes dont le premier est 1₶, & dont la différence additive est 3₶. Ainsi (*N*°. 178.) en multipliant la différence 3₶ par 27 nombre des termes qui précédent le dernier, & en ajoutant le produit 81₶ au premier terme 1₶; on aura 82₶ pour le dernier payement qu'on a fait au bout de la vingt-huitiéme semaine.

QUESTION II.

On a payé une certaine somme en 28 semaines. Au bout de la vingt-huitiéme semaine, on a payé 82#; la semaine précédente on avoit payé 3# de moins, & toutes les autres semaines on avoit toujours payé 3# de moins que la précédente. On demande combien l'on a payé la premiere semaine.

Il est clair que tous les payemens, à commencer par le dernier 82#, pris dans un ordre opposé à celui dans lequel ils ont été faits, composent une progression arithmétique décroissante de 28 termes dont le premier est 82#, & dont la différence soustractive est 3#. Ainsi (*N°.* 178.) en multipliant la différence 3# par le nombre 27 des termes qui précédent le dernier; & retranchant le produit 81#, du plus grand terme 82#; le reste 1#. sera le premier payement que l'on demande.

QUESTION III.

On a fait différens payemens qui ont toujours augmenté de 3#. Le premier a été de 1#, & le dernier a été de 82#. On demande combien l'on a fait de payemens.

Les payemens ayant toujours été augmentés également de 3#, font une progression arithmétique croissante dont le premier terme est 1#, le dernier 82#, & la différence 3#.

Or (*N°.* 179.) le dernier terme 82# doit surpasser le premier 1#, d'une quantité égale à la différence 3# multipliée par le nombre des termes qui sont avant le dernier. Ainsi retranchant le premier terme 1# du dernier 82#, le reste 81# sera égal à la différence 3# de la progression, multipliée par le nombre des termes qui précédent le dernier. D'où il suit que si l'on divise

81^{tt} par 3^{tt}, le quotient 27 sera le nombre des termes qui sont avant le dernier de la progression; & par conséquent la progression aura 28 termes, c'est-à-dire qu'on a fait 28 payemens.

QUESTION IV.

On a fait 28 payemens qui ont toujours été augmentés en progression arithmétique. Le premier payement a été de 1^{tt}, & le vingt-huitiéme a été de 82^{tt}. On demande de combien ces payemens ont toûjours été augmentés.

Le premier payement ayant été de 1^{tt}, & le dernier de 82^{tt}; la différence de ces payemens extrêmes a été de 81^{tt}. Mais (*N°.* 179.) cette différence 81^{tt} doit contenir la différence propre de la progression, autant de fois qu'il y a de termes avant le dernier (qui est ici le vingt-huitiéme); c'est-à-dire qu'elle doit contenir 27 fois la différence propre de la progression. Donc en divisant 81^{tt} par 27, le quotient 3^{tt} sera la différence propre de la progression, ou la quantité dont les payemens ont toûjours été augmentés.

QUESTION V.

Un monceau de terre étant à 5 toises du premier d'une file de 100 arbres éloignés les uns des autres de 3 toises: l'on a mené une brouettée de terre du monceau au pied de chaque arbre, & l'on a ramené la brouette au monceau. On demande combien de chemin le brouetteur a fait.

Le monceau de terre étant à 5 toises du premier arbre de la file, le brouetteur a fait 5 toises de chemin pour y mener sa brouette, & il a fait 5 autres toises pour ramener sa brouette au monceau; ainsi il a fait 10 toises de chemin pour le premier arbre.

Le second arbre étant de 3 toises plus éloigné du monceau que le premier ; le brouetteur a fait trois toises de plus pour y conduire sa brouette, & trois toises de plus pour la reconduire au monceau. Ainsi le brouetteur a fait six toises de plus pour le second arbre que pour le premier.

Par la même raison, le brouetteur a fait 6 toises de plus pour le troisiéme arbre que pour le second; & il a fait continuellement 6 toises de plus pour chaque arbre, à mesure qu'il a été plus éloigné du monceau où il a pris la terre. Ainsi les 100 chemins que le brouetteur a faits en allant & en revenant, pour les 100 arbres, font une progression arithmétique croissante de 100 termes dont le premier est 10 toises; & dont la différence propre est 6 toises.

Donc (*N*°. 178.) en multipliant la différence 6 toises, par le nombre 99 des termes qui précédent le centiéme, & ajoûtant le produit 594 toises au premier terme 10 toises, la somme 604 toises sera le centiéme terme de la progression, ou le chemin que le brouetteur a fait pour mener sa brouette au centiéme arbre & pour la reconduire au monceau.

Les deux extrêmes de la progression étant 10 toises & 604 toises; si l'on multiplie leur somme 614 toises, par la moitié 50 du nombre des termes, le produit 30700 toises sera (*N*°. 186.) la somme de tous les termes de la progression; c'est-à-dire la somme des chemins que le brouetteur a faits.

QUESTION VI.

On doit remettre 1162tt en plusieurs payemens qui doivent augmenter en progression arithmétique. Le premier payement doit être de 1tt & le dernier de 82tt. On demande combien on fera de payemens.

Le premier terme de la progression étant 1tt, & le dernier

dernier étant 82#, on aura 83# pour la somme des exrêmes.

Mais 1162# étant la somme de tous les termes de la progression, est composé (N°. 186.) de la moitié du nombre des termes, multipliée par la somme 83# des extrêmes.

Donc en divisant 1162# par 83#, le quotient 14 sera la moitié du nombre des termes. Ainsi la progression aura 28 termes, c'est-à-dire qu'on fera 28 payemens.

QUESTION VII.

On a remis 1162# en plusieurs payemens qui ont augmenté en progression arithmétique. Le premier payement a été de 1# & le dernier de 82#. On demande de combien les payemens ont augmenté; c'est-à-dire qu'on demande la différence propre de la progression.

On cherchera d'abord le nombre des termes de la progression, comme dans la question précédente; & l'on trouvera qu'il faut faire 28 payemens. Et comme on sait que le premier payement est de 1# & que le dernier est de 82#; on trouvera de combien les payemens ont augmenté, comme dans la quatriéme question.

QUESTION VIII.

On a payé 1162# en 28 payemens qui ont augmenté en progression arithmétique, & dont le premier a été de 1#. On demande de combien a été le dernier payement, & de combien les payemens ont augmenté.

Puisque 1162# est la somme des 28 payemens, ou de tous les termes de la progression; cette somme totale doit contenir la somme des extrêmes 14 fois, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre 28 des termes (N°. 186.). Ainsi en divisant 1162 # par 14, le quotient 83 # sera la somme des extrêmes de la progression : & comme on sait que le premier terme est 1 #, le dernier terme sera 82 # ; c'est-à-dire qu'on a donné 82 # au dernier payement.

Puisque l'on sait qu'on a fait 28 payemens en progression arithmétique, que le premier payement a été de 1 # & le dernier de 82 # ; on trouvera comme dans la quatriéme question, que les payemens ont augmenté continuellement de 3 #.

Question IX.

On a acquitté une dette de 1162 # en 28 payemens qui ont augmenté continuellement de 3 # ; & l'on demande de combien ont été le premier & le dernier payemens.

On a vû (*N*°. 186) que la somme 1162 # de tous les termes de la progression, contient la somme des extrêmes autant de fois qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre des termes. Ainsi cette somme totale 1162 # contiendra 14 fois la somme des extrêmes ; d'où il suit qu'en divisant 1162 # par 14, le quotient 83 # sera la somme des extrêmes.

Puisqu'il y a 28 termes dans la progression, & que la différence est 3 # ; le dernier terme contiendra 27 fois 3 #, c'est-à-dire 81 #, plus le premier terme : ainsi la somme des extrêmes contiendra 81 #, plus deux fois le premier terme. Mais nous avons trouvé que la somme des extrêmes est 83 #. Donc en retranchant 81 # de 83 #, le reste 2 # sera le double du premier terme ; & par conséquent ce premier terme sera 1 # : & comme le dernier terme doit contenir le premier 1 # avec 81 #, le dernier terme sera 82 #.

Le premier & le dernier payemens seront donc de 1 # & de 82 #.

CHAPITRE III.

Des Progressions géométriques.

Définitions.

187 UNE suite de termes dont chacun contient également celui qui le suit, ou dont chacun est également contenu dans le suivant, s'appelle *Progression geométrique*, ou simplement *Progression*.

Lorsque les termes d'une progression géométrique vont en augmentant, on la nomme *Progression croissante*; & lorsque ses termes vont en diminuant, on l'appelle *Progression décroissante*.

Le nombre entier ou rompu qui exprime combien de fois chaque terme d'une progression contient celui qui le suit, ou celui qui le précéde, se nomme *Raison* de la progression.

Pour marquer que tous les termes d'une suite sont en progression géométrique, on met à la gauche du premier terme quatre points, avec une barre horisontale qui sépare les deux points supérieurs des deux points inférieurs, & l'on met deux points l'un sur l'autre après chaque terme de la progression.

Par exemple $\div\!\div$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96, dont les termes vont en augmentant, est une progression géométrique croissante dont la raison est 2; parce que chaque terme est contenu deux fois dans celui qui le suit. Cette autre suite $\div\!\div$ 96 : 48 : 24 : 12 : 6 : 3, dont les termes vont en diminuant, est une progression géométrique décroissante dont la raison est 2; parce que chaque terme contient deux fois celui qui le suit.

Une progreſſion géométrique qui n'a que trois termes, comme $\div$ 3 : 6 : 12 ; ou $\div$ 12 : 6 : 3, s'appelle une *Proportion géométrique continue.* Ainſi dans une proportion géométrique continue, le premier terme eſt contenu dans le ſecond, ou contient le ſecond, de la même maniere que le ſecond eſt contenu dans le troiſiéme, ou contient le troiſiéme : & par conſéquent, ſi l'on écrit deux fois le terme du milieu, les proportions continues $\div$ 3 : 6 : 12 & $\div$ 12 : 6 : 3 ſeront converties en ces ſimples proportions 3 : 6 :: 6 : 12, & 12 : 6 :: 6 : 3.

COROLLAIRE PREMIER.

188 Donc 1°. Si un nombre quelconque eſt continuellement multiplié par un même nombre plus grand que l'unité ; les termes qui réſulteront de ces multiplications, formeront une progreſſion géométrique croiſſante. Car chaque terme ſera contenu également dans celui qui le ſuivra, & il y ſera contenu plus d'une fois.

Ainſi la ſuite $3 : 3 \times 2 : 3 \times 2 \times 2 : 3 \times 2 \times 2 \times 2 : 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$: &c réſultante du nombre 3 multiplié continuellement par 2, eſt une progreſſion géométrique croiſſante.

La ſuite $2 : 2 \times \frac{3}{2} : 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} : 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$: &c réſultante du nombre 2 multiplié continuellement par $\frac{3}{2}$ plus grand que l'unité, eſt auſſi une progreſſion géométrique croiſſante.

2°. Au contraire lorſqu'un nombre quelconque conſideré comme premier terme, ſera continuellement multiplié par une même fraction moindre que l'unité ; les termes qui réſulteront de ces multiplications, compoſeront une progreſſion géométrique décroiſſante, qui ſera la même que celle qu'on auroit en divisant continuellement le premier terme, par la fraction inverse qui sera plus grande que l'unité.

Par exemple la suite: $48 : 48 \times \frac{1}{2} : 48 \times \frac{1}{2} : \times \frac{1}{2} : 48 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$: &c, qu'on trouve en multipliant le premier terme 48 contiuuellement par la fraction $\frac{1}{2}$ moindre que l'unité, est une progression géométrique décroissante qui est la même que celle-ci $48 : \frac{48}{2} : \frac{48}{2 \times 2} : \frac{48}{2 \times 2 \times 2}$: &c, qu'on auroit en divisant 48 continuellement par $\frac{2}{1}$ ou par 2. Car multiplier par $\frac{1}{2}$ est la même chose que diviser par 2.

Cette suite $1 : \frac{2}{3} : \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} : \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} : \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$: &c ou $1 : \frac{2}{3} : \frac{4}{9} : \frac{8}{27} : \frac{16}{81}$: &c résultante de l'unité multipliée continuellement par la fraction $\frac{2}{3}$ moindre que l'unité, est une progression géométrique décroissante qui est la même que celle-ci $1 : \frac{1}{\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}}$: &c qu'on auroit en divisant l'unité, continuellement par $\frac{3}{2}$ qui est la fraction inverse de $\frac{2}{3}$. Car (N^o. 72.), diviser par $\frac{3}{2}$ est la même chose que multiplier par la fraction inverse $\frac{2}{3}$.

Quoique tous les termes d'une progression géométrique croissante ou décroissante, puissent être produits par la multiplication continuelle de son premier terme par un même nombre plus grand ou plus petit que l'unité; & que le nombre constant par lequel on multipliera continuellement, soit propre à exprimer comment chaque terme sera contenu dans le suivant, & puisse être par conséquent regardé comme la raison de la progression: ce multiplicateur continuel ne sera pris, dans le reste de ce chapitre, pour la raison de la progression, que dans le cas où il sera plus grand que l'unité, & que la progression sera par conséquent croissante. Et dans le cas où ce multiplicateur continuel sera une fraction moindre que l'unité, c'est-à-dire que la progression sera décroissante; on prendra pour raison de la progression, la fraction inverse qui *sera toûjours plus grande que l'unité; & l'on considérera les termes de la progression, comme s'ils étoient composés du premier terme divisé continuellement par cette fraction inverse.*

COROLLAIRE II.

189 Si deux termes de suite quelconques d'une progression, sont donnés; on pourra continuer cette progression autant qu'on voudra, soit en montant soit en descendant. Car en divisant le plus grand des deux termes qui se suivent, par le plus petit; le quotient qui surpassera l'unité, sera le nombre de fois que l'un contiendra l'autre; & ce nombre de fois sera la raison de la progression (*N*°. 187. & 188.). Ainsi (*N*°. 188.) en multipliant continuellement par ce quotient, le plus grand des deux termes donnés; on trouvera de suite tant de termes qu'on voudra de la progression en montant: & en divisant continuellement par ce quotient, le plus petit des deux termes donnés; on trouvera autant de termes qu'on voudra de la progression en descendant.

COROLLAIRE III.

190 Donc un terme quelconque d'une progression géométrique, est composé du premier terme multiplié ou divisé autant de fois de suite par la raison de la progression, qu'il y a de termes avant lui.

Par exemple le premier terme qui n'en a point d'autre avant lui, est compsé de lui-même, sans être multiplié ni divisé par la raison de la progression: le second terme qui a un terme avant lui, est composé du premier multiplié ou divisé une fois par la raison de la progression (*N*°. 188): le troisiéme terme qui en a deux avant lui, est composé du premier multiplié ou divisé deux fois de suite par la raison de la progression : & ainsi des autres.

Corollaire IV.

191 De même que l'on a comparé tous les termes d'une progression géométrique, avec le premier ; on pourra les comparer avec tel autre terme qu'on voudra de la même progression ; & l'on verra aisément que,

1°. Quand deux termes se suivront immédiatement, ou n'auront point d'autres termes entr'eux ; le second de ces deux termes sera composé du premier multiplié ou divisé une fois par la raison de la progression.

2°. Lorsque deux termes auront un terme entr'eux ; le second sera composé du premier multiplié ou divisé deux fois de suite par la raison de la progression.

3°. Lorsqu'il y aura deux termes entre ceux que l'on comparera ; le second des deux termes comparés, sera composé du premier multiplié ou divisé trois fois de suite par la raison de la progression.

Enfin quel que soit le nombre des termes qui se trouveront entre les deux termes que l'on comparera; le second sera toûjours composé du premier multiplié ou divisé par la raison de la progression, autant de fois de suite plus une fois, qu'il y aura de termes entre ceux que l'on comparera On concevra aisément tout ceci, pour peu qu'on examine la composition des termes des deux progressions qui ont servi d'exemple dans le corollaire premier.

Corollaire V.

192 Donc si, dans une progression géométrique, on prend quatre termes tels qu'il y ait autant de termes entre le premier & le second, qu'entre le troisiéme & le quatriéme ; ces quatre termes seront en proportion géométrique.

Car (*N*°. 191.) en comparant le premier & le troisiéme termes, avec le second & le quatriéme ; le second sera composé du premier multiplié ou divisé par la raison de la progression, autant de fois plus une fois qu'il y aura de termes entre le premier & le second que l'on comparera ; & le quatriéme sera composé du troisiéme mutiplié ou divisé par la même raison de la progression, autant de fois plus une fois qu'il y aura de termes entre ces deux termes comparés : & comme on suppose qu'il y a autant de termes entre le premier & le second, qu'entre le troisiéme & le quatriéme ; il est évident que le second & le quatriéme seront composés du premier & du troisiéme multipliés ou divisés le même nombre de fois par la raison de la progression. D'où il suit que le premier de ces quatre termes, sera contenu dans le second, ou contiendra le second, autant de fois que le troisiéme sera contenu dans le quatriéme, ou contiendra le quatriéme ; c'est-à-dire (*N*°. 102.) que ces quatre termes seront en proportion géométrique.

Et réciproquement, si dans une progression géométrique on prend quatre termes en proportion géométrique ; il y aura autant de termes entre le premier & le second, qu'entre le troisiéme & le quatriéme. Cette proposition est une suite si naturelle de la précédente, qu'elle n'a pas besoin de démonstration.

Il eſt donc évident que quatre termes pris dans une progreſſion géométrique, de maniere que le ſecond ſuive immédiatement le premier, & que le quatriéme ſuive immédiatement le troiſiéme, ſeront auſſi en proportion géométrique. Car (*N*°. 188.) le ſecond ſera compoſé du premier multiplié ou diviſé une fois par la raiſon de la progreſſion, & le quatriéme ſera compoſé du troiſiéme multiplié ou diviſé pareillement une fois par la même raiſon.

Enfin il eſt aiſé de voir par tout ce que nous avons dit, que ſi dans une progreſſion géométrique, on prend trois termes quelconques de ſuite, ou trois termes tels qu'il y ait autant de termes entre le premier & le ſecond, qu'entre le ſecond & le troiſiéme; ces trois termes feront une proportion géométrique continue; c'eſt-à-dire que le premier ſera au ſecond comme le ſecond eſt au troiſiéme.

Car (*N*°. 191 & 192.) pour compoſer le ſecond terme, il faudra multiplier ou diviſer autant de fois le premier par la raiſon de la progreſſion, qu'il faudra multiplier ou diviſer de fois le ſecond terme par la même raiſon de la progreſſion, pour avoir le troiſiéme.

THÉOREME.

193 *Lorſque trois termes ſont en proportion continue, le quarré du terme moyen eſt égal au produit des deux extrêmes.*

Prenons pour exemple cette proportion continue $\div$ 3 : 6 : 12. Si l'on écrit deux fois de ſuite le terme du milieu, on la convertira (*N*°. 187.) en cette ſimple proportion 3 : 6 : : 6 : 12.

Mais (*N*°. 106.) le produit des moyens d'une proportion, eſt égal au produit des extrêmes; & les moyens de cette proportion étant égaux, le produit des moyens eſt égal au quarré de l'un de ces moyens ; c'eſt-à-dire au quarré du moyen de la proportion continue $\div$ 3 : 6 : 12.

Donc dans une proportion continue, le quarré du terme moyen eſt égal au produit des extrêmes.

COROLLAIRE.

194 Puiſque dans une proportion continue, le quarré du terme moyen eſt égal au produit des extrêmes, & que des quantités égales ont des racines quarrées égales ; il eſt clair que le terme moyen qui eſt la racine quarrée de ſon quarré, eſt égal à la racine quarrée du produit des extrêmes.

THÉORÊME.

195 *Le quotient d'une diviſion dont le dividende eſt plus grand d'une unité que le diviſeur, eſt égal à la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante compoſée d'une infinité de termes dont le premier eſt l'unité, & dont la raiſon eſt égale au dividende.*

Par exemple. *Le quotient de la diviſion de* 12 *par* 11, *eſt égal à la ſomme de tous les termes de cette progreſſion géométrique décroiſſante pouſſée à l'infini* $\div$ 1 : $\frac{1}{12}$: $\frac{1}{12 \times 12}$: $\frac{1}{12 \times 12 \times 12}$: *&c.*

DÉMONSTRATION.

Pour fixer l'imagination & pour rendre ſenſible la démonſtration de ce théorême, ſuppoſons qu'on ait 12 à diviſer par 11.

1°. Le dividende 12 étant plus grand d'une unité que le diviſeur 11, le diviſeur y ſera contenu une fois : ainſi le premier terme du quotient ſera 1, & le reſte de la diviſion ſera auſſi 1.

2°. Le reste 1 ne pouvant pas être divisé par 11, on le réduira en *douziémes*, dont le dénominateur est égal au dividende proposé ; & l'on aura (*N°.* 54.) $\frac{12}{12}$ à diviser par 11, ce qui donnera (*N°.* 66.) $\frac{1}{12}$ pour la seconde partie du quotient, & $\frac{1}{12}$ pour le reste de cette opération.

3°. Le reste $\frac{1}{12}$ sera converti en *douziémes* de *douziéme* en multipliant son numérateur & son dénominateur par 12, ce qui ne changera point la valeur de ce reste (*N°.* 56.); & l'on aura $\frac{12}{12 \times 12}$ à diviser par 11, ce qui donnera (*N°.*66.) $\frac{1}{12 \times 12}$ pour la troisiéme partie du quotient, & $\frac{1}{12 \times 12}$ pour le reste de cette opération.

4°. Le reste $\frac{1}{12 \times 12}$ n'étant qu'une unité fractionnaire, si l'on continue de multiplier son numérateur 1 & son dénominateur 12×12, par le nombre 12 plus grand d'une unité que le nombre 11 par lequel on doit diviser ; la nouvelle partie qu'on trouvera pour le quotient, sera encore une unité fractionnaire $\frac{1}{12 \times 12 \times 12}$ dont le dénominateur sera 12 fois plus grand que celui de la partie précédente du quotient ; & le reste de l'opération sera égal à la nouvelle partie $\frac{1}{12 \times 12 \times 12}$ du quotient.

Enfin comme il faudra toûjours multiplier par 12 le numérateur & le dénominateur du reste qui ne sera jamais qu'une unité fractionnaire ; on aura toûjours à l'infini pour le quotient & pour le reste, de nouvelles unités fractionnaires continuellement 12 fois plus petites, sans jamais parvenir à faire la division sans reste.

Donc en divisant le nombre 12 par 11, on trouvera pour le quotient cette suite infinie de termes $\div 1 : \frac{1}{12} : \frac{1}{12 \times 12} : \frac{1}{12 \times 12 \times 12}$: &c, en progression géométrique décroissante dont le premier est l'unité, & dont la raison est égale au dividende 12.

En appliquant le même raisonnement à toute autre division dont le dividende sera plus grand d'une unité que le diviseur, & en multipliant continuellement le numérateur & le dénominateur du reste de chaque opération par le dividende, c'est-à-dire par un nombre plus grand d'une unité que le diviseur; on trouvera toûjours pour le quotient, une progression géométrique décroissante composée d'une infinité de termes dont le premier sera 1, & dont la raison sera égale au dividende.

On peut donc conclurre en général, que le quotient d'une division dont le dividende est plus grand d'une unité que le diviseur, est égal à la somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini, dont le premier terme est 1, & dont la raison est égale au dividende.

THÉORÈME.

196 *On aura la somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini, quel que soit son premier terme, en divisant la raison de cette progression par un nombre plus petit qu'elle d'une unité, & en multipliant le quotient de cette division, par le premier terme de la progression.*

Démonstration.

Pour mieux faire entendre la démonstration de ce théorême, prenons un exemple, & supposons qu'on veut avoir la somme de tous les termes de la progression géométrique décroissante à l'infini $\div\!\!\div 54 : 18 : 6 : 2 : \frac{2}{3} :$ &c, qui (No. 188.) est la même que celle-ci $\div\!\!\div 54 : \frac{54}{3} : \frac{54}{3\times3} : \frac{54}{3\times3\times3} : \frac{54}{3\times3\times3\times3} :$ &c, dont la raison est 3.

Comme le premier terme de cette progreſſion n'eſt pas l'unité, on en diviſera tous les termes par le premier 54 ; ce qui donnera cette nouvelle progreſſion $\div\!\!\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{3\times3} : \frac{1}{3\times3\times3} : \frac{1}{3\times3\times3\times3}$: &c, qui aura l'unité pour premier terme, & dont la raiſon ſera 3, comme celle de la progreſſion propoſée ; parce qu'en diviſant tous les termes de la premiere progreſſion par 54, on n'a diviſé que leurs numérateurs, & qu'on n'a point touché aux dénôminateurs, ou à la raiſon 3 par laquelle ces termes ſont continuellement diviſés.

La ſomme de tous les termes de cette nouvelle progreſſion $\div\!\!\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{3\times3} : \frac{1}{3\times3\times3} : \frac{1}{3\times3\times3\times3}$: &c, ne ſera que la cinquante-quatriéme partie de la ſomme des termes de la premiere ; puiſque tous les termes nouveaux ſont 54 fois plus petits que les anciens. Ainſi quand on aura trouvé la valeur de la ſomme de tous les termes de la nouvelle progreſſion ; il faudra multiplier cette valeur par 54, pour avoir la ſomme de tous les termes de la premiere progreſſion $\div\!\!\div 54 : \frac{54}{3} : \frac{54}{3\times3} : \frac{54}{3\times3\times3} : \frac{54}{3\times3\times3\times3}$: &c.

Mais (*No*. 195.) on aura la ſomme des termes de la nouvelle progreſſion $\div\!\!\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{3\times3} : \frac{1}{3\times3\times3} : \frac{1}{3\times3\times3\times3}$: &c dont le premier terme eſt 1, & dont la raiſon eſt 3, en diviſant la raiſon 3 de cette progreſſion, par 2.

Donc on aura la ſomme de tous les termes de la premiere progreſſion, qui eſt 54 fois plus grande que la nouvelle, en multipliant par 54 le quotient qu'on a trouvé pour la valeur de la nouvelle : c'eſt-à-dire en diviſant la raiſon 3 de la progreſſion par le nombre 2 plus petit d'une unité que cette raiſon, & en multipliant le quotient de cette diviſion par le premier terme 54 de la progreſſion.

Corollaire premier.

197 La regle qu'on vient d'établir pour trouver la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, eſt générale ; mais elle eſt rélative à une progreſſion réſultante de la diviſion continuelle d'un premier terme par un même nombre plus grand que l'unité.

Ainſi lorſqu'on propoſera de trouver la ſomme de tous les termes d'une progreſſion réſultante de la multiplication continuelle d'un premier terme, par une même fraction moindre que l'unité ; il faudra changer la forme de cette progreſſion, & regarder tous ſes termes, comme s'ils venoient de la diviſion continuelle d'un même terme, par une même fraction inverſe de la premiere, & par conſéquent plus grande que l'unité. Alors la progreſſion ſera en état d'être ſommée par la regle qu'on vient de donner.

Par exemple ſi l'on propoſe de trouver la ſomme de tous les termes de cette progreſſion $\div 1 : \frac{2}{3} : \frac{4}{9} : \frac{8}{27} : \frac{16}{81} :$ &c, ou $\div 1 : \frac{2}{3} : \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} : \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} : \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} :$ &c, réſultante de la multiplication continuelle du premier terme 1, par la même fraction $\frac{2}{3}$ moindre que l'unité ; il faudra lui donner cette forme $\div 1 : \frac{1}{\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}} :$ &c ; c'eſt-à-dire (*N°.* 188.) qu'on la regardera comme ſi tous ſes termes réſultoient du premier terme 1 diviſé continuellement par la fraction $\frac{3}{2}$ inverſe de la fraction $\frac{2}{3}$.

La progreſſion étant réduite à cette forme où elle a l'unité pour premier terme, & la fraction $\frac{3}{2}$ pour raiſon ; on trouvera la ſomme de tous ſes termes en diviſant ſa raiſon $\frac{3}{2}$ par $\frac{1}{2}$ qui eſt d'une unité moindre que $\frac{3}{2}$. Or en divisant $\frac{3}{2}$ par $\frac{1}{2}$, ou (*No*. 72.), en multipliant $\frac{3}{2}$ par 2, le nombre 3 qu'on trouvera sera égal à la somme de tous les termes de la progression $\div\!\!\div\; 1 : \frac{1}{\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} : \frac{1}{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}$: &c, décroissante à l'infini, & par conséquent de la proposée $\div\!\!\div\; 1 : \frac{2}{3} : \frac{4}{9} : \frac{8}{27} : \frac{16}{81}$: &c qui lui est égale.

COROLLAIRE II.

198 Donc 1°. la somme de tous les termes possibles de cette progression décroissante à l'infini $\div\!\!\div\; \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$: &c, est égale à l'unité.

2°. La somme de tous les termes de celle-ci $\div\!\!\div\; \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27}$: &c, est pareillement égale à l'unité.

3°. La somme de tous les termes de celle-ci $\div\!\!\div\; \frac{3}{4} : \frac{3}{16} : \frac{3}{64}$: &c, est encore égale à l'unité.

Enfin la somme de tous les termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini, qui aura pour premier terme une fraction dont le dénominateur surpassera le numérateur d'une unité, & qui aura pour raison le dénominateur du premier terme, sera égale à l'unité : & comme on peut faire une infinité de progressions géométriques différentes, qui auront toutes ces deux conditions ; il est clair qu'on peut aussi avoir une infinité de differentes progressions géométriques décroissantes à l'infini, dont chacune aura une somme égale à l'unité, & dont toutes les sommes seront par conséquent égales entr'elles.

PROBLÊME.

199 *On aura la somme d'un nombre quelconque de termes pris de suite dans une progression géométrique, en divisant la raison de la progression par un nombre plus*

petit qu'elle d'une unité, en multipliant le quotient par la différence du plus grand terme au plus petit, & en ajoutant le plus petit terme au produit de cette multiplication.

DÉMONSTRATION.

Pour faciliter l'intelligence de la démonſtration, ſuppoſons qu'on veut avoir la ſomme d'un nombre de termes en progreſſion géométrique, dont le plus grand eſt 15625, le plus petit 25, & dont la raiſon eſt 5; & le plus petit terme excepté, regardons les autres termes dont on demande la ſomme, comme la différence de deux progreſſions décroiſſantes à l'infini, qui ont toutes deux 5 pour leur raiſon. Que la premiere de ces progreſſions ait pour premier terme le plus grand terme 15625, & que la ſeconde ait pour premier terme le nombre 25 qui eſt le plus petit de ceux dont ont demande la ſomme.

1°. On aura (N°. 196.) la ſomme de tous le termes de la progreſſion décroiſſante à l'infini, dont le premier eſt 15625 & dont la raiſon eſt 5, en diviſant la raiſon 5 par 4, & en multipliant le quotient $1\frac{1}{4}$ par le premier terme 15625; ce qui produira $19531\frac{1}{4}$ pour la ſomme du nombre infini des termes de cette progreſſion.

2°. On aura (N°. 169.) la ſomme de tous les termes de la progreſſion décroiſſante à l'infini, qui a 25 pour premier terme, & 5 pour ſa raiſon, en diviſant la raiſon 5 par 4, & en multipliant le quotient $1\frac{1}{4}$ par le premier terme 25; ce qui donnera $31\frac{1}{4}$ pour la ſomme du nombre infini de termes de cette progreſſion.

Retranchant la ſomme $31\frac{1}{4}$ de la ſeconde progreſſion, de la ſomme $19531\frac{1}{4}$ de la premiere, le reſte 19500 contiendra évidemment la ſomme

de

de tous les termes qu'on demande, excepté le plus petit 25 ; parce que ce plus petit terme est compris dans la somme des termes de la seconde progression qu'on a retranchée. Ainsi en ajoûtant 25 au reste 19500 qu'on vient de trouver, le total 19525 sera la somme demandée de tous les termes dont le plus grand est 15625 & le plus petit 25, pris de suite dans la progression géométrique dont la raison est 5.

Si l'on examine cette opération, & qu'on fasse attention qu'en ôtant $31\frac{1}{4}$ de $19531\frac{1}{4}$, on a retranché le produit de $1\frac{1}{4}$ multiplié par 25, du produit de $1\frac{1}{4}$ multiplié par 15625 ; on concevra aisément qu'on auroit eu la même chose, en multipliant $1\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4}$ par 15600 différence de 15625 à 25. Ainsi le reste 19500 qu'on a trouvé, n'est rien autre chose que le quotient $\frac{5}{4}$ de la raison 5 divisée par 4, qu'on a multiplié par la différence 15600 du plus grand terme au plus petit terme : & comme il est évident que ce produit 19500 ne contient point le plus petit terme 25, on ajoûte ce terme au produit 19500, comme il est prescrit par le théorême ; & l'on trouve 19525 pour la somme demandée des termes dont le plus grand est 15625 & le plus petit 25, pris de suite dans une progression dont la raison est 5.

CHAPITRE IV.

Des Logarithmes & de leur usage dans l'Arithmétique.

Définitions.

200 Si l'on imagine que tous les nombres sont contenus dans une même progression géométrique dont l'un des termes soit l'unité; la distance qu'il y aura d'un terme quelconque de cette progression à l'unité, sera nommée le *Logarithme* de ce terme.

On entend par *Distance d'un terme à l'unité* le nombre de termes qu'il y a depuis l'unité exclusivement, jusqu'à ce terme inclusivement.

Corollaire premier.

201 La progression géométrique, dans laquelle on imaginera que tous les nombres sont contenus, ne pouvant avoir qu'un seul terme égal à l'unité que l'on regarde comme l'origine de la progression; la distance de l'unité à l'origine sera zéro; & par conséquent zéro sera le logarithme de l'unité.

Corollaire II.

202 Si l'on a cette progression géométrique ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, dont l'unité est le premier terme ou l'origine, & dont la raison est 10, c'est-à-dire dont les termes sont les produits de

l'unité multipliée continuellement par 10; le premier terme 10 qui ſuit l'origine, & qui eſt composé de l'unité multipliée ſimplement une fois par 10, ſera à la premiere diſtance de l'unité; & par conſéquent le logarithme de ce terme 10 ſera 1. Le nombre 100 qu'on trouve en multipliant l'unité deux fois de ſuite par 10, ſera à la ſeconde diſtance de l'unité: ainſi le logarithme de ce nombre 100 ſera 2. Il en ſera de même des autres termes 1000, 10000, 100000, &c de la même progreſſion qui étant produits en multipliant l'unité 3 fois, 4 fois, 5 fois de ſuite &c par la raiſon 10, ſeront à la troiſiéme, quatriéme, cinquiéme diſtances &c de l'unité, & auront par conſéquent les nombres 3, 4, 5, &c pour logarithmes.

Si l'on avoit pris la progreſſion géométrique $\div\!\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : &c dont le premier terme eſt 1, dont la raiſon eſt 2, & dont tous les termes ſont par conſéquent les produits de l'unité multipliée continuellement par 2; le premier terme 2 après l'unité auroit eu l'unité pour ſon logarithme, & les logarithmes des termes ſuivans, 4, 8, 16 32, &c auroient été 2, 3, 4, 5, &c.

COROLLAIRE III.

203 Puiſque (*N*°. 202.) les mêmes nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c peuvent ſervir de logarithmes à différens nombres conſidérés dans différentes progreſſions géométriques; il eſt clair qu'on aura autant de ſyſtêmes différens de logarithmes, qu'on voudra conſidérer de progreſſions géométriques différentes; mais il faut remarquer que dans toutes ces progreſſions géométriques, l'unité, qui ſera toûjours à l'origine, aura zéro pour logarithme.

Comme la progreſſion géométrique décuple ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, eſt le fondement de la numération ; c'eſt à cette progreſſion que l'on a rapporté tous les nombres dont on trouve les logarithmes dans les Tables : c'eſt-à-dire que dans toutes les Tables de logarithmes, qni ont été publiées juſqu'à préſent, on trouve que les nombres en progreſſion géométrique ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, ont pour logarithmes 0, 1, 2, 3, 4, &c.

Corollaire. IV.

204 Quand on ne conſidére point d'autres termes que ceux de la progreſſion géométrique croiſſante ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, qui a l'unité pour premier terme : on voit bien que leurs logarithmes ſont les termes correſpondans d'une progreſſion arithmétique croiſſante ÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . &c, qui a zéro pour premier terme ou pour logarithme de l'unité. On voit bien auſſi que les logarithmes ÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . &c des termes de la progreſſion géométrique, expriment par le nombre de leurs unités, le nombre de fois qu'il a fallu multiplier le premier terme de la progreſſion par ſa raiſon 10, pour compoſer tous les termes de cette progreſſion; en ſorte qu'on peut dire que le logarithme d'un nombre, eſt le nombre des raiſons de la progreſſion, qui compoſent ce nombre par leur multiplication. Par exemple, on peut dire que 1, 2, 3, 4, &c ſont les logarithmes des nombres 10, 100, 1000, 10000, &c; parce qu'il faut 1,2,3,4, &c, raiſons 10 de la progreſſion, multipliées enſemble, pour compoſer les nombres 10, 100, 1000, 10000, &c.

Il ſuit delà que le logarithme d'une quantité nie, eſt un nombre infini. Car un terme infini de la progreſſion géométrique ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : &c, contiendra la raiſon 10 de cette progreſſion une infinité de fois.

COROLLAIRE V.

205 Puiſque les termes de la progreſſion géométrique croiſſante ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, ont pour logarithmes les termes correſpondans de la progreſſion arithmétique croiſſante ÷ 0. 1. 2. 3. 4. &c; il eſt évident que la même progreſſion géométrique étant conſidérée en décroiſſant ou ſous cette forme ∺ 10000 : 1000 : 100 : 10 : 1 : &c ; ſes termes auront pour logarithmes, les termes correſpondans de la progreſſion arithmétique décroiſſante ÷ 4 . 3 . 2 . 1 . 0 . &c.

Si l'on continue la même progreſſion géométrique au-deſſous de l'unité, en diviſant continuellement par 10 les termes de cette progreſſion; l'on aura ∺ 10000 : 1000 : 100 : 10 : 1 : $\frac{1}{10}$: $\frac{1}{100}$: $\frac{1}{1000}$: &c. Et comme les termes de la progreſſion arithmétique qui ſervent de logarithmes à ceux de cette progreſſion géométrique, doivent décroître continuellement d'une unité, à meſure que les termes correſpondans de la progreſſion géométrique deviennent 10 fois plus petits; en continuant au-delà de zéro la progreſſion arithmétique décroiſſante, on trouvera des termes négatifs ou faux, -1, -2, -3, &c, pour répondre à ceux $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c, qui ſont moindres que l'unité dans la progreſſion géométrique; en ſorte que les termes de la progreſſion géométrique ∺ 10000 : 1000 : 100, 10 : 1 : $\frac{1}{10}$: $\frac{1}{100}$: $\frac{1}{1000}$: &c, auront pour termes correſpondans, & par conſéquent pour logarithmes, les termes de cette progression arithmétique ÷ 4. 3. 2. 1. 0. -1. -2. -3. &c, composée de nombre positifs & de nombres négatifs.

Corollaire VI.

206 Il est donc évident par le corollaire précédent, que

1°. Les nombres plus petits que l'unité, ont pour logarithmes des nombres faux ou moindres que zéro.

2°. Deux nombres tels que 10 & $\frac{1}{10}$, ou 100 & $\frac{1}{100}$, ou 1000 & $\frac{1}{1000}$ &c, qui sont à distances égales de l'unité, ou dont le plus petit est égal à une fraction qui a l'unité pour numérateur, & le plus grand pour dénominateur, ont pour logarithmes le même nombre 1 ou 2 ou 3 &c; avec cette différence cependant, que le logarithme du nombre plus grand que l'unité, est un nombre vrai; & que le logarithme du nombre plus petit que l'unité, est un nombre faux: c'est-à-dire que les nombres

plus grands que l'unité,	10,	100,	1000,	&c.
ont pour logarithmes les nombres vrais	1,	2,	3,	&c.
& que les nombres moindres que l'unité	$\frac{1}{10}$,	$\frac{1}{100}$,	$\frac{1}{1000}$,	&c.
ont pour logarithmes les nombres faux	-1,	-2,	-3,	&c.

Car il faut multiplier l'unité, le même nombre de fois par 10, pour avoir les premiers nombres 10, 100, 1000, &c, qu'il faut diviser de fois la même unité par 10, pour avoir les fractions $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c.

3°. Le logarithme de zéro est un nombre infini négatif; car zéro peut être confidéré comme une fraction infiniment petite qui auroit l'unité pour numérateur, & un nombre infini pour dénominateur: ainfi zéro doit avoir le même logarithme, qu'un nombre infini, avec cette différence que le logarithme de zéro, doit être un nombre faux, & que le logarithme du nombre infini doit être un nombre vrai; & nous avons vû (*No.* 204.) que le logarithme d'un nombre infiniment grand, eft infini.

Avertiffement.

Jufqu'ici nous n'avons parlé que des nombres qui font les termes de la progreffion géométrique décuple

$$\div\!\!\div \tfrac{1}{10000} : \tfrac{1}{1000} : \tfrac{1}{100} : \tfrac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \&c,$$

dont la raifon eft 10, & de leurs logarithmes ou des termes correfpondans de la progreffion arithmétique

$$\div . -4 . -3 . -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . \&c,$$

dont la raifon eft 1. Ainfi il nous refte à faire voir comment les nombres intermédiaires aux termes de la progreffion géométrique peuvent être placés dans cette progreffion, & comment on peut avoir leurs logarithmes ou leurs diftances à l'origine.

207 Comme (*N°.* 206.) un nombre plus petit que l'unité, a le même logarithme qu'un nombre plus grand que l'unité, pris à la même diftance de l'origine de la progreffion dans laquelle on fuppofe que ces deux nombres font compris, avec cette différence cependant, que le logarithme du premier eft un nombre faux, & que le logarithme du fecond eft un nombre vrai; il fuffira pour expliquer en général la conftruction des Tables des logarithmes, de faire voir

comment tous les nombres plus grands que l'unité, & qui ſont différens des termes de la progreſſion décuple $\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, peuvent être placés dans cette progreſſion.

Et comme la progreſſion géométrique décuple $\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, dont les termes ont pour logarithmes $\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . &c, paſſe tout d'un coup de 1 à 10, de 10 à 100, de 100 à 1000, &c; ſi l'on avoit une Table de logarithmes à compoſer, il faudroit trouver les logarithmes des huit nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, plus grands que l'unité, & plus petits que 10; & pour continuer la Table juſqu'à 100, il faudroit pareillement trouver les logarithmes des 89 nombres plus grands que 10 & moindres que 100; enfin il faudroit chercher les logarithmes de tous les nombres entiers qui ſont intermédiaires à ceux de la progreſſion décuple.

Pour trouver les logarithmes de tous ces termes intermédiaires, le Baron de Neper, Ecoſſois, inventeur des logarithmes, & ſon aſſocié Henri Brigge, Profeſſeur à Oxford, ont pris 1 & 10 pour les extrêmes d'une progreſſion géométrique compoſée de 100000000000000 termes; & 0 & 1 logarithmes de 1 & 10, pour les extrêmes d'un pareil nombre de termes d'une progreſſion arithmétique; & ils ont regardé les termes de cette ſeconde progreſſion comme les logarithmes des termes correſpondans de la premiere.

Ils ont pareillement conſidéré, dans la progreſſion géométrique décuple, deux termes quelconques pris de ſuite, tels que 10 & 100, 100 & 1000, 1000 & 10000 &c, comme les extrêmes d'autant de progreſſions géométriques de 100000000000000 termes; & ont regardé les termes correſpondans 1 & 2, 2 & 3, 3 & 4 &c, de la progreſſion arithmétique, comme les extrêmes d'un pareil nombre de progreſſions arithmétiques de 100000000000000 termes ſervant de logarithmes aux termes des progreſſions géométriques correſpondantes.

Les termes de ces nouvelles progreſſions géométriques, inſérés entre ceux de la progreſſion géométrique décuple ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : &c, croiſſent d'une quantité ſi petite, que deux termes de ſuite peuvent être pris l'un pour l'autre, ſans qu'on ait à craindre une erreur ſenſible. Et comme les nombres entiers pris entre 1 & 10, & tous ceux qui ſeront entre les autres termes de la progreſſion décuple ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : &c, ſeront moyens entre deux termes des nouvelles progreſſions, ou ſeront préciſément quelques-uns de leurs termes ; on pourra, ſans craindre aucune erreur qui mérite qu'on y faſſe attention, prendre pour les nombres entiers intermédiaires aux termes de la progreſſion décuple, les termes des progreſſions intermédiaires, qui en approcheront le plus ; en ſorte que les logarithmes des nombres entiers intermédiaires aux termes de la progreſſion décuple, ſeront égaux aux logarithmes des termes dont ils approcheront le plus dans les progreſſions géométriques intermédiaires.

Pour repréſenter les logarithmes de tous les nombres entiers, en ſuppoſant qu'ils ſont termes des nouvelles progreſſions géométriques intermédiaires compoſées chacune de 100000000000000 termes, en y comprenant les termes de la progreſſion décuple qui leur ſervent d'extrêmes, Neper & Brigge ont employé des fractions décimales, qu'ils ont été obligés de pouſſer juſqu'à 14 chiffres décimaux. Mais le Baron de Neper étant mort peu de temps après le commencement de l'ouvrage; Brigge fut chargé de tout le travail, & publia à Londres en 1624, une Table de logarithmes pouſſée juſqu'à 14 chiffres décimaux, pour tous les nombres entiers depuis 1 juſqu'à 20000 & depuis 90000 juſqu'à 101000, en laiſſant une lacune depuis 20000 juſqu'à 90000.

Adrien Vlacq ayant rempli la lacune que Brigge avoit laiſſée dans ſes Tables; c'eſt-à-dire ayant calculé les logarithmes de tous les nombres entiers depuis 20000 juſqu'à 90000, publia en 1628 à Gouda en Hollande, une Table de logarithmes pour tous les nombres entiers depuis 1 juſqu'à 100000: mais ayant conſidéré qu'on pouvoit ſans inconvénient ſupprimer les quatre derniers chiffres décimaux de Brigge, il n'a pouſſé les logarithmes de ſes Tables que juſqu'à dix chiffres décimaux.

Enfin, comme les Tables de logarithmes ont été principalement faites en faveur des Aſtronomes qui n'ont beſoin pour leur uſage que des ſept premieres décimales des logarithmes; dans toutes les Tables qui ont été publiées depuis Vlacq, les logarithmes de la plus grande partie des nombres ont été réduits à ſept figures décimales.

208 Nous donnons une petite Table des logarithmes des nombres entiers depuis 1 juſqu'à 200 ſeulement. Elle nous ſervira pour montrer l'uſage qu'on peut faire des logarithmes dans l'Arithmétique.

Comme nous nous bornons à ſept chiffres décimaux, nous négligeons tous les autres, lorſqu'ils ne valent pas la moitié d'une unité décimale du ſeptiéme ordre; mais lorſqu'ils excédent la moitié de cette unité, nous ajoûtons 1 à la ſeptiéme figure. Il ſuit de là que deux logarithmes de la Table, étant ajoûtés enſemble ou ſouſtraits l'un de l'autre, donneront ſouvent une ſomme ou une différence plus grande ou plus petite de près d'une unité décimale du ſeptiéme ordre, que la ſomme ou la différence qu'ils auroient donnée, s'ils avoient été exacts.

Dans cette Table, les colonnes qui ont à la tête la lettre *N*, contiennent les nombres naturels; & celles qui ont en tête *Logarithmes*, contiennent les logarithmes de ces nombres. On remarquera que le premier chiffre de la gauche de chaque logarithme, eſt ſéparé des autres par une virgule qui marque que les chiffres de la droite ne ſont que des chiffres décimaux.

Le premier chiffre de la gauche ſe nomme *Caractériſtique* du logarithme; parce qu'il marque dans laquelle des progreſſions géométriques intermédiaires aux termes de la progreſſion décuple ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, le nombre eſt placé.

Les logarithmes de tous les nombres moindres que 10, & qui ſont compris dans la premiere progreſſion géométrique intermédiaire dont 1 & 10 ſont les extrêmes, ont zéro, c'eſt-à-dire le logarithme du premier terme de cette progreſſion, pour caractériſtique, ou pour premier chiffre de la gauche.

Les logarithmes de tous les nombres moindres que 100, compris dans la ſeconde progreſſion géométrique intermédiaire dont 10 & 100 ſont les extrêmes, ont pour caractériſtique le logarithme 1 du premier terme de cette progreſſion.

Enfin les logarithmes de tous les nombres moindres que le dernier extrême de la progreſſion intermédiaire, dans laquelle ils ſeront compris, auront pour caractériſtique le logarithme du premier terme de cette progreſſion.

N.	*Logarithmes.*	*N.*	*Logarithmes.*	*N.*	*Logarithmes.*
1	0,0000000	34	1,5314789	67	1,8260748
2	0,3010300	35	1,5440680	68	1,8325089
3	0,4771213	36	1,5563025	69	1,8388491
4	0,6020600	37	1,5682017	70	1,8450980
5	0,6989700	38	1,5797836	71	1,8512583
6	0,7781513	39	1,5910646	72	1,8573325
7	0,8450980	40	1,6020600	73	1,8633229
8	0,9030900	41	1,6127839	74	1,8692317
9	0,9542425	42	1,6232493	75	1,8750613
10	1,0000000	43	1,6334685	76	1,8808136
11	1,0413927	44	1,6434527	77	1,8864907
12	1,0791812	45	1,6532125	78	1,8920946
13	1,1139434	46	1,6627578	79	1,8976271
14	1,1461280	47	1,6720979	80	1,9030900
15	1,1760913	48	1,6812412	81	1,9084850
16	1,2041200	49	1,6901961	82	1,9138139
17	1,2304489	50	1,6989700	83	1,9190781
18	1,2552725	51	1,7075702	84	1,9242793
19	1,2787536	52	1,7160033	85	1,9294189
20	1,3010300	53	1,7242759	86	1,9344985
21	1,3222193	54	1,7323938	87	1,9395193
22	1,3424227	55	1,7403627	88	1,9444827
23	1,3617278	56	1,7481880	89	1,9493900
24	1,3802112	57	1,7558749	90	1,9542425
25	1,3979400	58	1,7634280	91	1,9590414
26	1,4149733	59	1,7708520	92	1,9637878
27	1,4313638	60	1,7781513	93	1,9684829
28	1,4471580	61	1,7853298	94	1,9731279
29	1,4623980	62	1,7923917	95	1,9777236
30	1,4771213	63	1,7993405	96	1,9822712
31	1,4913617	64	1,8061800	97	1,9867717
32	1,5051500	65	1,8129134	98	1,9912261
33	1,5185139	66	1,8195439	99	1,9956352
				100	2,0000000

N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.
101	2,0043214	134	2,1271048	167	2,2227165
102	2,0086002	135	2,1303338	168	2,2253093
103	2,0128372	136	2,1335389	169	2,2278867
104	2,0170333	137	2,1367206	170	2,2304489
105	2,0211893	138	2,1398791	171	2,2329961
106	2,0253059	139	2,1430148	172	2,2355284
107	2,0293838	140	2,1461280	173	2,2380461
108	2,0334238	141	2,1492191	174	2,2405492
109	2,0374265	142	2,1522883	175	2,2430380
110	2,0413927	143	2,1553360	176	2,2455127
111	2,0453230	144	2,1583625	177	2,2479733
112	2,0492180	145	2,1613680	178	2,2504200
113	2,0530784	146	2,1643529	179	2,2528530
114	2,0569049	147	2,1673173	180	2,2552725
115	2,0606978	148	2,1702617	181	2,2576786
116	2,0644580	149	2,1731863	182	2,2600714
117	2,0681859	150	2,1760913	183	2,2624511
118	2,0718820	151	2,1789769	184	2,2648178
119	2,0755470	152	2,1818436	185	2,2671717
120	2,0791812	153	2,1846914	186	2,2695129
121	2,0827854	154	2,1875207	187	2,2718416
122	2,0863598	155	2,1903317	188	2,2741578
123	2,0899051	156	2,1931246	189	2,2764618
124	2,0934217	157	2,1958997	190	2,2787536
125	2,0969100	158	2,1986571	191	2,2810334
126	2,1003705	159	2,2013971	192	2,2833012
127	2,1038037	160	2,2041200	193	2,2855573
128	2,1072100	161	2,2068259	194	2,2878017
129	2,1105897	162	2,2095150	195	2,2900346
130	2,1139434	163	2,2121876	196	2,2922561
131	2,1172713	164	2,2148438	197	2,2944662
132	2,1205739	165	2,2174839	198	2,2966652
133	2,1238516	166	2,2201081	199	2,2988531
				200	2,3010300

Comme la quantité de chiffres de chaque nombre, indiquera toujours dans quelle progreſſion intermédiaire ce nombre ſera contenu; la caractériſtique du logarithme de chaque nombre, contiendra autant d'unités moins une qu'il y aura de chiffres dans ce nombre. Par exemple tous les nombres depuis 1 juſqu'à 9, qui ſont exprimés par un ſeul chiffre, auront 0 pour caractériſtique; tous les nombres depuis 10 juſqu'à 99, qui ſont composés de deux chiffres, auront 1 pour caractériſtique; tous les nombres depuis 100 juſqu'à 999, auront 2 pour caractériſtique: & ainſi des autres.

Il ſuit delà que, dans une Table de logarithmes, on peut ſans aucun inconvénient ſupprimer la caractériſtique; puiſqu'on peut aiſément y ſuppléer en mettant pour elle un chiffre qui ait une unité de moins que la quantité des chiffres du nombre dont on veut avoir le logarithme.

Les chiffres décimaux, qui ſont à la droite de la virgule dans les logarithmes, indiquent les places que les nombres naturels, auſquels ces logarithmes appartiennent, occupent dans les progreſſions géométriques intermédiaires aux termes de la progreſſion décuple: en ſorte que les nombres qui occupent des places ſemblables dans les progreſſions intermédiaires, ont les mêmes chiffres décimaux dans leurs logarithmes.

Par exemple les nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, &c qui ſont aux origines des progreſſions intermédiaires, n'ont que des zéros pour chiffres décimaux de leurs logarithmes.

Les nombres 2, 20, 200, 2000, 20000, &c qui occupent les 3010300^{émes} places après les origines, ont tous 3010300 pour chiffres décimaux de leurs logarithmes.

Les nombres 3, 30, 300 3000, 30000, &c qui occupent les 4771213^{émes} places après les origines dans les progreſſions géométriques intermédiaires, ont tous 4771213 pour chiffres décimaux de leurs logarithmes : & ainſi des autres.

THÉORÉME.

209 *Lorſque quatre nombres ſont en proportion géométrique, leurs logarithmes ſont en proportion arithmétique.*

DÉMONSTRATION.

Quatre nombres en proportion géométrique, tels que 2 : 6 : : 12 : 36, étant ſuppoſés contenus dans une même progreſſion géométrique qui a l'unité pour origine ; il y aura (*N*°. 192.) autant de termes de la progreſſion géométrique entre le premier nombre 2 & le ſecond 6, qu'entre le troiſiéme 12 & le quatriéme 36. Ainſi la différence des logarithmes ou des diſtances des deux premiers nombres 2 & 6 à l'origine de la progreſſion géométrique, ſera égale à la différence des logarithmes ou des diſtances des deux derniers nombres à la même origine : & par conſéquent les logarithmes des quatre nombres 2 : 6 :: 12 : 36 en proportion géométrique, ſeront en proportion arithmétique.

Si l'on conſulte la petite Table que nous avons donnée, on trouvera que les logarithmes des quatre nombres 2 : 6 :: 12 : 36, *ſont* 0,3010300 . 0,7781513 : 1,0791812 . 1,5563025, *qui ſe trouvent en proportion arithmétique.*

COROLLAIRE PREMIER.

210 Si quatre nombres n'étoient point en proportion géométrique, leurs logarithmes ne feroient pas en proportion arithmétique.

Car en considérant que ces quatre nombres sont contenus dans une même progression géométrique qui a l'unité pour origine ; il y aura plus ou moins de termes de cette progression entre les deux premiers nombres, qu'entre les deux derniers. Ainsi la différence des logarithmes ou des distances des deux premiers nombres à l'origine, ne sera pas égale à la différence des logarithmes ou des distances des deux derniers nombres à l'origine : d'où il suit que les logarithmes de ces quatre nombres ne seront pas en proportion arithmétique.

Corollaire II.

211 Donc si quatre logarithmes sont en proportion arithmétique, les quatre nombres ausquels ils appartiendront seront en proportion géométrique.

Car (*N°*. 210.) si ces quatre nombres n'étoient point en proportion géométrique, leurs logarithmes ne seroient pas en proportion arithmétique.

Corollaire III.

212 Lorsque quatre nombres seront en proportion géométrique ; la somme des logarithmes des extrêmes, sera égale à la somme des logarithmes des moyens.

Car lorsque quatre nombres seront en proportion géométrique, leurs logarithmes seront en proportion arithmétique (*N°*. 209.). Mais (*N°*. 173.) dans toute proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens. Donc si quatre nombres sont en proportion géométrique, la somme des logarithmes des extrêmes sera égale à la somme des logarithmes des moyens.

Corollaire IV.

COROLLAIRE IV.

213 Il ſuit du dernier Corollaire, que ſi l'unité eſt le premier terme d'une proportion géométrique, le logarithme du quatriéme terme ſera égal à la ſomme des logarithmes des deux termes moyens.

Car le premier terme de la proportion géométrique étant l'unité, ſon logarithme ſera o (N°. 201.). Ainſi la ſomme des logarithmes des extrêmes, qui eſt égale à la ſomme des logarithmes des moyens (N°. 212.), ſe réduira au logarithme du quatriéme terme.

COROLLAIRE V.

214 Lorſque trois nombres ſont en proportion géométrique continue; la ſomme des logarithmes des extrêmes, eſt égale au double du logarithme du terme moyen.

Car ſi l'on écrit deux fois de ſuite le terme moyen d'une proportion géométrique continue, pour en faire une proportion géométrique dont les deux moyens ſoient égaux; les logarithmes des quatre termes de cette proportion, feront une proportion arithmétique dont les deux moyens ſeront auſſi égaux. Ainſi la ſomme des logarithmes extrêmes, étant égale (N°. 212.) à la ſomme des logarithmes moyens qui ſont égaux, ſera double de l'un de ces logarithmes moyens; & par conſéquent l'on aura le logarithme du terme moyen d'une proportion géométrique continue, en prenant la moitié de la ſomme des logarithmes des extrêmes.

Comme o eſt le logarithme de l'unité; lorſque l'unité ſera l'un des extrêmes d'une proportion géométrique continue, la ſomme des logarithmes des extrêmes ſe réduira au logarithme de l'extrême qui ne sera pas l'unité. Ainsi le logarithme de cet extrême sera double du logarithme du terme moyen; & par conséquent l'on aura le logarithme du terme moyen d'une proportion géométrique continue dont l'unité est le premier terme, en prenant la moitié du logarithme du troisiéme terme.

De l'Usage des Logarithmes dans l'Arithmétique.

Par le moyen des logarithmes, on peut abréger considérablement les opérations de l'Arithmétique, lorsqu'on a des Tables assez étendues.

1°. On réduit la Multiplication à une Addition.

2°. On réduit la Division à une simple Soustraction.

3°. La Regle de trois, qui demande une multiplication & une division, se fait par une addition & une soustraction.

4°. L'Elévation d'un nombre au Quarré ou au Cube, ou à d'autres Puissances, se réduit à une simple multiplication par 2 ou par 3, ou par un autre nombre.

5°. L'Extraction des Racines quarrées ou cubiques, & celle des Racines de toute autre espéce, se réduit à une simple division par 2 ou par 3, ou par un autre nombre.

Nous allons expliquer toutes ces opérations; & la Table qu'on vient de voir, quoique très-bornée, nous suffira pour en donner des exemples.

I.

215. *Si l'on veut avoir le produit de deux nombres quelconques,*

On ajoûtera le logarithme du multiplicande avec celui du multiplicateur; & la somme sera le logarithme du produit. Ainsi en cherchant ce dernier logarithme dans la Table, on trouvera à sa gauche le produit demandé.

Car (N°. 16.) le produit d'une multiplication étant composé du multiplicande répété autant de fois, qu'il y a d'unités dans le multiplicateur ; il est clair (N°. 102) que l'unité, le multiplicateur, le multiplicande & le produit, sont en proportion géométrique. Ainsi (N°. 213.) le logarithme du produit qui est le quatriéme terme, est égal à la somme des logarithmes des deux moyens qui sont le multiplicande & le multiplicateur.

Par exemple si l'on veut avoir le produit de 15 multiplié par 13,

On prendra dans la Table le logarithme de 15, savoir	1,1760913
Et le logarithme de 13, savoir	1,1139434
Additionnant ces deux logarithmes, on aura pour logarithme du produit la somme	2,2900347

Cherchant ensuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à sa gauche 195 pour le produit demandé de 15 multiplié par 13.

II

216 *Si l'on veut avoir le quotient d'une Division,*

On soustraira le logarithme du diviseur, du logarithme du dividende ; & le reste sera le logarithme du quotient.

Ainsi en cherchant dans la Table ce dernier logarithme, on trouvera à sa gauche le quotient demandé.

Car (N°. 28.) le diviſeur multiplié par le quotient, donnant un produit égal au dividende; la ſomme des logarithmes du diviſeur & du quotient, ſera égale au logarithme du dividende (N°. 215.). Ainſi en retranchant de part & d'autre le logarithme du diviſeur, le logarithme du quotient ſera égal à ce qui reſtera du logarithme du dividende, après en avoir retranché le logarithme du diviſeur.

Par exemple ſi l'on veut avoir le quotient de 195 diviſé par 13,

On prendra le logarithme de 195, ſavoir	2,2900346
Et le logarithme de 13, ſavoir	1,1139433
Retranchant le ſecond du premier, on aura pour logarithme du quotient, le reſte	1,1760913

Cherchant enſuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à ſa gauche 15 pour le quotient de 195 diviſé par 13.

III.

217 *Si l'on veut avoir le quatriéme terme d'une Regle de Trois,*

On ajoûtera le logarithme du ſecond terme avec celui du troiſiéme; & de leur ſomme ayant retranché le logarithme du premier terme, le reſte ſera le logarithme du quatriéme terme. Ainſi en cherchant ce logarithme dans la Table, on trouvera à côté le quatriéme terme demandé.

Car les trois premiers termes donnés de la Regle de Trois, & le quatriéme terme qu'on cherche, étant en proportion géométrique, leurs logarithmes ſont en proportion arithmétique. Ainſi (N°. 176.) ſi de la somme des moyens qui sont les logarithmes du second & du troisiéme termes de la Regle de Trois, on retranche le premier extrême qui est le logarithme du premier terme de la même regle; le reste sera le second extrême ou le logarithme du quatriéme terme de la Regle de Trois.

Par exemple si l'on veut avoir le quatriéme terme de cette Regle de Trois 125 : 150 :: 165 : *,

On prendra le logarithme de 150, savoir	2,1760913
Et celui de 165, savoir	2,2174839
Puis de leur somme	4,3935752
Retranchant le logarithme de 125, savoir	2,0969100
On aura pour logarithme du quatriéme terme, le reste	2,2966652

Enfin cherchant ce logarithme dans la Table, on trouvera à sa gauche 198 pour le quatriéme terme demandé.

IV.

218 1°. *Si l'on veut avoir le Quarré d'un nombre quelconque,*

On multipliera le logarithme de ce nombre par 2; & le produit sera le logarithme du quarré demandé. Ainsi en cherchant dans la Table ce dernier logarithme, on trouvera à sa gauche le quarré qu'on veut avoir.

Car (N°. 127.) pour quarrer un nombre, il faut le multiplier par lui-même. Ainsi (N°. 215.) il faut ajoûter son logarithme à lui-même, ou le doubler, pour avoir le logarithme de son quarré.

Par exemple si l'on veut avoir le quarré de 11,

On prendra le logarithme de 11,
savoir 1,0413927

Et multipliant ce logarithme par 2

On aura pour le logarithme du
quarré, le produit 2,0827854

Cherchant ensuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à sa gauche 121 pour le quarré du nombre 11.

2°. *Si l'on veut avoir le Cube d'un nombre quelconque,*

On multipliera le logarithme de ce nombre par 3; & le produit sera le logarithme du cube demandé. Ainsi en cherchant dans la Table ce dernier logarithme, on trouvera à sa gauche le cube qu'on veut avoir.

Car pour cuber un nombre, il faut le multiplier par son quarré. Ainsi (N°. 215.) pour avoir le logarithme de son cube, il faut ajoûter le logarithme de ce nombre à celui de son quarré.

Mais le logarithme du quarré d'un nombre est double du logarithme de ce nombre.

Donc pour avoir le logarithme du cube d'un nombre, il faut ajoûter le logarithme de ce nombre avec le double de ce logarithme; c'est-à-dire qu'il faut tripler ou multiplier par 3 le logarithme de ce nombre.

Par exemple si l'on veut avoir le cube de 5,

On prendra le logarithme de 5,
avoir 0,6989700

Et multipliant ce logarithme par 3

On aura pour le logarithme du
cube qu'on cherche, le produit 2,0969100

Cherchant ensuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à sa gauche 125 pour le cube de 5.

Il est évident que si l'on vouloit le produit de quatre ou cinq ou six ou sept &c nombres égaux multipliés ensemble, il faudroit multiplier par 4 ou 5 ou 6 ou 7 &c, le logarithme de l'un des facteurs égaux; & que le logarithme résultant de cette multiplication seroit le logarithme du produit demandé. Ainsi en cherchant ce logarithme dans les Tables, on trouveroit à sa droite le produit de tous ces nombres égaux multipliés ensemble.

Le produit de plusieurs nombres égaux multipliés ensemble, s'appelle en général Puissance *de l'un de ces nombres; & pour désigner qu'un produit est composé de deux ou trois ou quatre ou cinq ou six &c facteurs égaux, on le nomme* Puissance 2^e^ *ou* 3^e^ *ou* 4^e^ *ou* 5^e^ *ou* 6^e^ &c *de l'un de ses facteurs égaux: en sorte qu'un* Quarré *&* *un* Cube *sont la* seconde *& la* troisiéme Puissance *de leurs racines.*

V.

219 1°. *Si l'on veut avoir la Racine quarrée d'un nombre,*

On divisera le logarithme de ce nombre par 2, le quotient sera le logarithme de la racine quarrée demandée. Ainsi en cherchant dans la Table ce dernier logarithme, on trouvera à sa gauche la racine quarrée qu'on veut avoir.

Car il est évident qu'un nombre est le quarré de sa racine quarrée. Ainsi (N°. 218.) le logarithme d'un nombre est double du logarithme de sa racine quarrée; & par conséquent si l'on prend la moitié du logarithme de ce nombre, on aura le logarithme de sa racine quarrée.

Par exemple si l'on veut avoir la racine quarrée du nombre 121,

On prendra le logarithme de 121, savoir	2,0827854
Et divisant ce logarithme par	2
On aura pour le logarithme de la racine quarrée que l'on cherche, le quotient	1,0413927

Cherchant ensuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à sa gauche 11 pour la racine quarrée de 121.

2°. *Si l'on veut avoir la Racine cubique d'un nombre,*

On divisera le logarithme de ce nombre par 3, & le quotient sera le logarithme de la racine cubique demandée.

Car un nombre est le cube de sa racine cubique. Ainsi (N°. 218.) le logarithme d'un nombre est triple de celui de sa racine cubique; & par conséquent si l'on divise par 3 le logarithme de ce nombre, on aura le logarithme de sa racine cubique.

Par exemple si l'on veut avoir la racine cubique de 125,

On prendra le logarithme de 125, savoir	2,0969100
Et divisant ce logarithme par	3
On aura pour le logarithme de la racine cubique que l'on cherche, le quotient	0,6989700

Cherchant ensuite ce logarithme dans la Table, on trouvera à sa gauche 5 pour la racine cubique du nombre proposé 125.

Comme les racines quarrées sont deux fois facteurs dans leurs quarrés, & que les racines cubiques sont trois fois facteurs dans leurs cubes; ces deux especes de racines se nomment aussi Racines secondes & Racines troisiémes.

Par la même raison, lorsqu'un nombre est composé par la multiplication de 4 ou 5 ou 6 ou 7 &c facteurs égaux, un des facteurs s'appelle Racine quatriéme *ou* cinquiéme *ou* sixiéme ou septiéme &c *de ce nombre.*

Si l'on veut avoir la racine quatriéme ou cinquiéme, ou sixiéme ou septiéme &c d'un nombre proposé quelconque; il suit évidemment de ce que nous avons dit des racines quarrées & cubiques, qu'en divisant le logarithme de ce nombre par 4, ou par 5, ou par 6, ou par 7 &c, on aura le logarithme de la racine demandée du nombre proposé.

DE LA CONSTRUCTION DES TABLES DE LOGARITHMES.

220 Lorsqu'on a une Table de logarithmes à construire, il faut commencer par choisir le systême selon lequel on veut qu'elle soit composée. Pour donner une idée de la méthode qu'on peut suivre pour calculer ces sortes de Tables, nous choisirons le systême du Baron de Neper & de Brigge qui ont pris les termes de la progression arithmetique ÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . &c, pour les logarithmes des termes, correspondans de la progression géométrique décuple ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c.

La progression ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c dans laquelle on veut renfermer tous les nombres, étant choisie avec les logarithmes ÷ 0. 1. 2. 3 4. &c de ses termes; on procéde au calcul des nombres intermédiaires aux termes de la progression géométrique; mais on ne calcule point indistinctement par la même méthode les logarithmes de tous ces nombres ; & l'on distingue les nombres simples des nombres composés.

On appelle *nombres simples* tous ceux qui ne peuvent pas être composés de la multiplication de deux autres nombres. Il faut une méthode particuliere & un calcul long & pénible pour trouver les logarithmes de ces espéces de nombres. Il y a quatre de ces nombres simples entre les deux premiers termes 1 & 10 de la progression géométrique, savoir 2, 3, 5, 7; il y en a 21 entre le second terme 10 & le troisiéme 100 de la même progression ; & il y en a beaucoup plus entre les autres termes.

On appelle *Nombres composés* ceux qui sont le produit de la multiplication de deux ou de plusieurs autres nombres. Les logarithmes de ces nombres sont aisés à trouver (N°. 215.), quand on a ceux des nombres dont ils sont composés.

Il est quelquefois plus commode de chercher des logarithmes de nombres composés, pour en déduire ceux des nombres simples qu'ils renferment. Par exemple au lieu de chercher directement les logarithmes des nombres simples 3, 2, &c, on cherche les logarithmes de leurs quarrés ou de leurs cubes ; & au lieu de chercher le logarithme de 5, on cherche le logarithme de 2 qu'on retranche de celui de 10 ; ce qui donne (N°. 216.) le logarithme de 5.

Il y a deux méthodes pour calculer directement les logarithmes des nombres La premiere, qui consiste dans des extractions de racines quarrées, est facile à entendre, & porte avec elle sa démonstration ; mais elle est très-difficile dans la pratique, & demande de longs calculs qui exposent à de fréquentes erreurs. La seconde, qui consiste dans de simples divisions est beaucoup plus expéditive, & exige peu d'opérations; mais la démonstration en étant difficile, & supposant des connoissances qu'on ne peut pas donner dans des Elémens d'Arithmétique, nous la réservons pour un autre Traité. Nous allons expliquer ces deux méthodes dans les Problêmes suivans.

PROBLÊME.

221 *Trouver le logarithme du nombre 3, ou du moins en approcher jusqu'à 7 chiffres décimaux, de maniere que le logarithme qu'on aura, ne differe pas du logarithme de 3, d'une unité décimale du septiéme ordre.*

1°. Le nombre 3 dont on demande le logarithme, sera quelqu'un des termes d'une progression géométrique dont 1 & 10 sont les extrêmes Quelle que soit cette progression géométrique, la distance de son origine 1 à son terme du milieu, ne sera que la moitié de la distance de la même origine à l'extrême 10; & comme on a pris 1 pour la distance de 1 à 10, ou pour le logarithme de 10, la distance de l'origine au terme du milieu, c'est-à-dire le logarithme du terme du milieu, ne sera que $\frac{1}{2}$ qu'on représentera par 0, 5.

Le terme du milieu de la progression géométrique étant également éloigné des extrêmes 1 & 10; ces trois termes, le premier 1, le terme du milieu & le dernier 10, feront une proportion géométrique continue; en sorte que (N°. 194.) le terme du milieu sera la racine quarrée du produit 1 × 10 ou 10 des extrêmes. On prendra donc la racine quarrée de 10; & poussant cette racine quarrée jusqu'au huitiéme chiffre décimal, pour être plus sûr du septiéme; on aura le nombre 3,16227766 dont le logarithme ou la distance à l'unité, sera 0,5.

2°. Le nombre 3,16227766 qu'on vient de trouver, étant plus grand que le nombre 3 dont on veut avoir le logarithme, & ſon logarithme 0, 5 étant par conſéquent plus grand que celui qu'on demande ; on cherchera un nouveau nombre qui ſoit le moyen d'une proportion géométrique continue dont l'origine 1 & 3,16227766 ſoient les extrêmes ; & comme la diſtance de l'origine 1 à ce terme moyen, ne ſera que la moitié de la diſtance 0, 5 de la même origine à l'extrême 3,16227766 ; le logarithme de ce terme moyen ſera 0,25.

Le terme moyen de la proportion géométrique continue qui aura 1 & 3,16227766 pour extrêmes, ſera la racine quarrée de 1 × 3,16227766 produit des extrêmes. Ainſi on prendra la racine quarrée de 3,16227766 ; & pouſſant l'opération juſqu'au huitiéme chiffre décimal, on trouvera pour le terme moyen 1,77827941 dont le logarithme ou la diſtance à l'origine, ſera 0,25.

3°. Comme le nombre 3 dont on veut avoir le logarithme, eſt plus grand que le ſecond moyen 1,77827941 qu'on vient de trouver, & plus petit que le moyen précédent 3,16227766 ; on cherchera un nouveau nombre qui ſoit moyen géométrique entre ces deux premiers moyens : & comme la diſtance de l'origine à ce troiſiéme moyen, ſera la moitié de la ſomme des diſtances 0, 5 & 0, 25 de l'origine aux deux premiers moyens ; le logarithme de ce troiſiéme moyen ſera 0, 375.

Le terme moyen géométrique entre les deux premiers moyens 3,16227766 & 1,77827941, ſera la racine quarrée du produit de ces deux nombres. On multipliera donc ces deux nombres, l'un par l'autre, & de leur produit 5,6234132514809806, on extraira la racine quarrée qu'on trouvera de

2,37137370 dont la diſtance à l'origine 1 ou le logarithme, ſera 0,375.

4°. Comme le nombre 3 eſt encore plus grand que ce nouveau terme 2,37137370 dont le logarithme eſt 0,375, & plus petit que le premier moyen 3,16227766 dont le logarithme eſt 0,5 ; on cherchera un quatriéme moyen géométrique entre ces deux nombres, en faiſant leur produit 7,4989420750215420, puis en tirant de ce produit la racine quarrée qu'on trouvera de 2,73841962.

Enſuite on prendra un moyen arithmétique entre les logarithmes 0,375 & 0,5 ; & ce moyen 0,4375 ſera la diſtance de l'origine de la progreſſion géométrique, au terme 2,73841962, & ſera par conſéquent ſon logarithme.

5°. Comme le nombre 3 eſt encore plus grand que le nouveau terme 2,73841962 dont le logarithme eſt 0,4375, & plus petit que le premier moyen 3,16227766 dont le logarithme eſt 0,5 ; on fera le produit 8,6596431880316892 de ces deux termes, & l'on en tirera la racine quarrée 2,94272717 qui aura pour logarithme 0,46875 moyen arithmétique entre 0,4375 & 0,5.

6°. Le nombre 3 étant encore plus grand que le dernier terme 2,94272717 qu'on vient de trouver, dont le logarithme eſt 0,46875, & plus petit que le premier moyen 3,16227766 dont le logarithme eſt 0,5 ; on multipliera ces deux termes l'un par l'autre, & du produit 9,3057203891660222, on tirera la racine quarrée 3,05052789 qui aura pour logarithme 0,484375 moyen arithmétique entre 0,46875 & 0,5.

On continuera de chercher de la même maniere de nouveaux termes moyens proportionnels géométriques entre deux nombres dont l'un ſera plus grand

& l'autre plus petit que 3, ſavoir entre le dernier nombre trouvé & l'un des précédens que l'on choiſira le plus approchant au-deſſus ou au-deſſous de 3, ſuivant que le dernier nombre trouvé ſera au contraire au-deſſous ou au-deſſus de 3; & pour avoir les logarithmes de ces moyens géométriques, l'on prendra en même temps des logarithmes moyens arithmétiques entre les logarithmes des nombres entre leſquels on aura pris des termes moyens géométriques.

Lorſqu'on aura fait 26 de ces opérations, l'on trouvera un terme moyen géométrique égal à 3, ou qui n'en différera pas d'une unité décimale du huitiéme ordre; & le 26[e] terme moyen arithmétique correſpondant à ce 26[e] terme moyen géométrique, ſera le logarithme de 3.

On verra dans la Table ſuivante les vingt-ſix moyens géométriques, & les vingt-ſix moyens arithmétiques correſpondans, avec les extrêmes entre leſquels ces moyens ſont pris. Chaque moyen s'y trouve placé entre ſes extrêmes; & pour indiquer l'ordre des opérations, on a cotté A & B les deux premiers extrêmes 1 & 10 entre leſquels on a pris le premier moyen qu'on a cotté C: les autres moyens ſont déſignés par les lettres ſuivantes de l'Alphabet.

On pourra trouver par cette méthode les logarithmes de tous les nombres, en cherchant des moyens géométriques entre 1 & 10, *pour les nombres moindres que* 10; *entre* 10 & 100, *pour les nombres moindres que* 100 & *plus grands que* 10; *entre* 100 & 1000, *pour les nombres moindres que* 1000 & *plus grands que* 100, &c.: & *en prenant en même temps des moyens arithmétiques correſpondans entre* 0 & 1, *entre* 1 & 2, *entre* 2 & 3, &c.

	Nombres en Proportion géométrique continue.	*Logarithmes.*		*Nombres en Proportion géométrique continue.*	*Logarithmes.*
A	1,00000000	0,00000000	P	3,00035655	0,47717285
C	3,16227766	0,50000000	Q	2,99993491	0,47711182
B	10,00000000	1,00000000	N	2,99951334	0,47705078
A	1,00000000	0,00000000	Q	2,99993491	0,47711182
D	1,77827941	0,25000000	R	3,00014572	0,47714233
C	3,16227766	0,50000000	P	3,00035655	0,47717285
D	1,77827941	0,25000000	R	3,00014572	0,47714233
E	2,37137370	0,37500000	S	3,00004031	0,47712708
C	3,16227766	0,50000000	Q	2,99993491	0,47611182
E	2,37137370	0,37500000	S	3,00004031	0,47712708
F	2,73841962	0,43750000	T	2,99998751	0,47711945
C	3,16227766	0,50000000	Q	2,99993491	0,47711182
F	2,73841962	0,43750000	T	2,99998751	0,47711945
G	2,94272717	0,46875000	V	3,00001390	0,47712326
C	3,16227766	0,50000000	S	3,00004031	0,47712708
G	2,94272717	0,46875000	V	3,00001390	0,47712326
H	3,05052789	0,48437500	X	3,00000070	0,47712135
C	3,16227766	0,50000000	T	2,99998751	0,47711945
H	3,05052789	0,48437500	X	3,00000070	0,47712135
I	2,99614286	0,47656250	Y	2,99999410	0,47712040
G	2,94272717	0,46875000	T	2,99998751	0,47711945
I	2,99614286	0,47656250	Y	2,99999410	0,47712040
K	3,02321308	0,48046875	Z	2,99999739	0,47712088
H	3,05052789	0,48437500	X	3,00000070	0,47712135
K	3,02321308	0,48046875	Z	2,99999739	0,47712088
L	3,00964753	0,47851563	AA	2,99999908	0,47712112
I	2,99614286	0,47656250	X	3,00000070	0,47712135
L	3,00964753	0,47851563	AA	2,99999908	0,47712112
M	3,00288762	0,47753906	BB	2,99999989	0,47712123
I	2,99614286	0,47656250	X	3,00000070	0,47712135
M	3,00288762	0,47753906	BB	2,99999989	0,47712123
N	2,99951334	0,47705078	CC	3,00000029	0,47712129
I	2,99614286	0,47656250	X	3,00000070	0,47712135
N	2,99951334	0,47705078	CC	3,00000029	0,47712129
O	3,00120000	0,47729492	DD	3,00000009	0,47712126
M	3,00288762	0,47753906	BB	2,99999989	0,47712123
O	3,00120000	0,47729492	DD	3,00000009	0,47712126
P	3,00035655	0,47717285	EE	3,00000000	0,47712125
N	2,99951334	0,47705078	BB	2,99999989	0,47712123

PROBLÉME.

222 *Trouver le logarithme d'une fraction dont le numérateur surpasse le dénominateur d'une unité, & pousser le calcul jusqu'à ce que le logarithme contienne dix chiffres décimaux.*

1°. On divisera le nombre 0,8685889638 par la somme du numérateur & du dénominateur de la fraction dont on veut avoir le logarithme; puis on divisera ce premier quotient par le quarré de la somme du numérateur & du dénominateur; & l'on continuera de diviser le nouveau quotient par ce même quarré, jusqu'à ce qu'on ait un quotient moindre que le quarré par lequel on divise.

2°. Ensuite on ajoûtera ensemble le premier quotient, le tiers du second, le cinquiéme du troisiéme, le septiéme du quatriéme, le neuviéme du cinquiéme &c; & la somme sera le logarithme de la fraction.

EXEMPLE PREMIER.

223 *On demande le logarithme de la fraction* $\frac{11}{10}$.

1° On divisera le nombre 0,8685889638 par la somme 21 du numérateur & du dénominateur de la fraction proposée $\frac{11}{10}$; ce qui donnera ce premier quotient 0,0413613792.

2°. Ensuite on divisera le premier quotient 0,0413613792 par le quarré 441 de la somme 21; ce qui donnera pour le second quotient 0,0000937899 dont le tiers est 0,0000312633.

3°. On divisera le second quotient 0,0000937899 par le même quarré 441; ce qui donnera pour le troisiéme quotient 0,0000002126 dont la cinquiéme partie sera 0,0000000425.

4° On

4°. On divisera le 3e quotient 0,0000002126, par le même quarré 441 ; ce qui donnera 0,0000000005 pour le troisiéme quotient qui sera le dernier, parce qu'il est moindre que le diviseur 441 : & le septiéme de ce dernier quotient sera 0,0000000001.

5°. Additionnant ensemble le premier quotient 0,0413613792, le tiers 0,0000312633 du second, le cinquiéme 0,0000000425 du troisiéme, le septiéme 0,0000000001 du 4e; la somme 0,0413926851, sera le logarithme de la fraction proposée $\frac{11}{10}$.

EXEMPLE II.

224 *On demande le logarithme de la fraction $\frac{10}{9}$.*

1°. On divisera le nombre 0,8685889638, par 19 somme du numérateur & du dénominateur de la fraction proposée $\frac{10}{9}$; & l'on aura 0,0457152086 pour le premier quotient.

2°. On divisera ce premier quotient 0,0457152086 par 361 quarré de 19 ; & l'on aura 0,0001266349 pour le 2e quotient, dont le tiers sera 0,0000422116 & un peu plus.

3°. On divisera le second quotient 0,0001266349 par le même quarré 361 ; & l'on aura 0,0000003508 pour le troisiéme quotient, dont le cinquiéme sera 0,0000000702.

4°. On divisera le 3e quotient 0,0000003508 par le même quarré 361 ; & l'on aura 0,0000000010 pour le quatriéme quotient, dont le septiéme sera moindre que 0,0000000002.

5°. Enfin on ajoûtera ensemble le premier quotient, le tiers du second, le cinquiéme du troisiéme, le septiéme du quatriéme ; & la somme un peu moindre que 0,0457574906, sera le logarithme de la fraction proposée $\frac{10}{2}$.

Exemple III.

225 *On demande le logarithme de la fraction $\frac{9}{8}$.*

1°. On divisera le nombre 0,8685889638, par 17 somme du numérateur & du dénominateur de la fraction $\frac{9}{8}$; & l'on aura 0,0510934685 pour le premier quotient.

2°. On divisera ce premier quotient par 289 quarré de 17; & l'on aura 0,0001767940 pour le second quotient, dont le tiers sera 0,0000589313 & un peu plus.

3°. On divisera le second quotient 0,0001767940 par le même quarré 289; & l'on aura 0,0000006117 pour le troisiéme quotient, dont la cinquiéme partie sera 0,0000001223 & un peu plus.

4°. On divisera le 3e quotient 0,0000006117, par le même quarré 289; & l'on aura 0,0000000021 pour le quatriéme quotient, dont la septiéme partie sera 0,0000000003.

5°. Enfin l'on ajoûtera ensemble le premier quotient, le tiers du second, la cinquiéme partie du troisiéme, la septiéme partie du quatriéme; & la somme 0,0511525224 sera le logarithme de la fraction proposée $\frac{9}{8}$.

Exemple IV.

226 *On demande le logarithme de la fraction $\frac{8}{7}$.*

1°. On divisera le nombre 0,8685889638, par 15 somme du numérateur & du dénominateur de la fraction $\frac{8}{7}$; & l'on aura 0,0579059309 & un peu plus pour le premier quotient.

2°. On divisera ce 1er quotient 0,0579059309, par le quarré 225 de 15; ce qui donnera pour le second quotient 0,0002573597, dont le tiers sera 0,0000857866.

3°. On divisera par le même quarré 225, le second quotient 0,0002573597; ce qui donnera pour le troisiéme quotient 0,0000011438, dont la cinquiéme partie sera 0,0000002288 ou un peu moins.

4°. On divisera ce 3ᵉ quotient 0,0000011438, par le même quarré 225; & l'on aura ce dernier quotient 0,0000000051, dont la septiéme partie sera 0,0000000007 & un peu plus.

5°. Enfin on ajoûtera ensemble le premier quotient, le tiers du second, la cinquiéme partie du troisiéme, la septiéme partie du quatriéme; & la somme 0,0579919470 sera le logarithme de la fraction proposée $\frac{8}{7}$.

PROBLÉME.

227 *Connoissant le logarithme d'une fraction, & celui de l'un de ses termes; trouver le logarithme de l'autre terme.*

1°. Le logarithme de la fraction étant donné: si l'on connoît le logarithme du dénominateur, on ajoûtera ce dernier logarithme avec celui de la fraction; & la somme sera le logarithme du numérateur.

2°. Le logarithme d'une fraction étant donné: si l'on connoît le logarithme du numérateur; on retranchera le logarithme de la fraction de celui de son numérateur, & le reste sera le logarithme du dénominateur.

Car (*N°*. 53.) une fraction est le quotient de la division de son numérateur par son dénominateur. Ainsi (*N°*. 216.) le logarithme d'une fraction, est égal au logarithme de son numérateur moins celui de son dénominateur; & par conséquent 1°. si l'on ajoûte le logarithme du dénominateur à celui de la fraction, la somme sera égale au logarithme du numérateur de la même fraction. Ce qu'il falloit premierement prouver.

Pour démontrer 2°. qu'on trouve le logarithme du dénominateur d'une fraction, en retranchant le logarithme de cette fraction, de celui de son numérateur; il suffit (*N*°. 216.) de faire voir que si l'on divise le numérateur d'une fraction, par cette fraction, le quotient sera égal au dénominateur de la même fraction. Or pour diviser le numérateur d'une fraction par cette fraction; on sait (*N*°. 71.) qu'il faut d'abord le diviser par le numérateur de la fraction, c'est-à-dire le diviser par lui-même, ce qui donne 1 pour quotient; & qu'ensuite il faut multiplier ce premier quotient 1 par le dénominateur; ce qui produit le dénominateur lui-même. Ce qu'il falloit secondement prouver.

EXEMPLES.

228 1°. On sait que le logarithme de 10 est 1, ou	1,0000000000
Et (*N*°. 223.) que le logarithme de $\frac{11}{10}$ est	0,0413926851
Le logarithme de 11, sera donc égal à la somme	1,0413926851
2°. On sait que le logarithme de 10 est 1, ou	1,0000000000
Et (*N*°. 224.) que le logarithme de $\frac{10}{9}$ est	0,0457574906
Retranchant le logarithme de $\frac{10}{9}$, du logarithme de 10; le logarithme de 9, sera égal au reste	0,9542425094

3°. On vient de voir que le logarithme de 9 eſt	0,9542425094
Et l'on ſait (*N*o. 225.) que le logarithme de $\frac{9}{8}$ eſt	0,0511525224
Retranchant le logarithme de $\frac{9}{8}$, du logarithme de 9; le logarithme de 8, ſera égal au reſte	0,9030899870
4°. On vient de trouver que le logarithme de 8 eſt	0,9030899870
Et (*N*o. 226.) celui de $\frac{8}{7}$ eſt	0,0579919470
Retranchant le logarithme de $\frac{8}{7}$, du logarithme de 8; le logarithme de 7 ſera égal au reſte	0,8450980400

PROBLÊME.

229 *Conſtruire une Table de logarithmes, en ſuppoſant que les logarithmes des termes de la progreſſion géometrique decuple* ∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : &c, *ſont* ÷ 0. 1. 2. 3. 4. &c.

1°. On cherchera, comme nous avons fait (*N*o. 224. 225, 226.), les logarithmes des fractions $\frac{10}{9}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{8}{7}$.

Comme on ſçait que l'unité eſt le logarithme du numérateur de la premiere de ces fractions, on trouvera d'abord (*N*°. 228.) que le logarithme de 9 eſt 0,9542425094.

Ayant trouvé le logarithme de 9 & celui de la fraction $\frac{9}{8}$; on aura (*N*°. 228.) 0,9030899870 pour le logarithme de 8.

Le logarithme de 8 & celui de la fraction $\frac{8}{7}$ étant trouvés; on aura (*N*o. 228.), 0,8450980400 pour le logarithme de 7.

2°. Le nombre 2 étant la racine cubique de 8 dont on a le logarithme; en divisant le logarithme de 8 par 3, le quotient 0,3010299957 sera (*N°*. 219) le logatithme de 2.

Le nombre 4 étant le quarré de 2 dont on vient de trouver le logarithme: en multipliant le logarithme de 2 par 2, le produit 0,6020599913 sera (*N°*. 218.) le logarithme de 4.

3°. Le nombre 9 dont on a le logarithme, étant le quarré de 3; si l'on divise le logarithme de 9 par 2, le quotient 0,4771212547 sera (*N°*. 219.) le logarithme de 3.

4°. Le nombre 5 étant le quotient de la division de 10 par 2, dont on a les logarithmes; en retranchant le logarithme de 2, du logarithme de 10, on aura (*N°*. 216.) 0,6989700043 pour le logarithme de 5.

5°. Le nombre 6 étant le produit de 3 multiplié par 2, dont on a les logarithmes; en ajoûtant le logarithme de 2 à celui de 3, la somme 0,7781512504 sera (*N°*. 215.) le logarithme de 6.

Ainsi les nombres		ont pour logarithmes	
	1		0,0000000000
	2		0,3010299957
	3		0,4771212547
	4		0,6020599913
	5		0,6989700043
	6		0,7781512504
	7		0,8450980400
	8		0,9030899870
	9		0,9542425094
	10		1,0000000000

Les logarithmes de tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 10, étant trouvés; on cherchera les logarithmes des nombres qui sont entre 10 & 100.

Le premier de ces nombres, 11, étant un nombre ſimple; on cherchera (N°. 223.) le logarithme de la fraction $\frac{11}{10}$: & ajoûtant à ce logarithme le logarithme de 10, on trouvera (N°. 228.) 1,0413926851 pour le logarithme de 11.

Le nombre ſuivant 12 étant le produit de la multiplication de 6 par 2, ou de 4 par 3; en ajoûtant enſemble les logarithmes de 6 & de 2, ou ceux de 4 & de 3, la ſomme ſera le logarithme de 12.

On trouvera de la même maniere les logarithmes de tous les autres nombres, ſoit en additionnant les logarithmes des nombres dont il ſont composés, ſoit en prenant le logarithme d'une fraction qui aura pour numérateur le nombre dont on voudra avoir le logarithme, & qui aura pour dénominateur un nombre plus petit d'une unité, dont on ſuppoſe le logarithme trouvé.

On a pouſſé le calcul des logarithmes juſqu'à dix chiffres décimaux dans les articles 223 & ſuivans; parce que la méthode qu'on a ſuivie dans ces articles eſt ſi prompte, qu'il n'en coûte guère plus de peine pour les calculer juſqu'à dix décimales, que juſqu'à ſept. Au reſte quoique les logarithmes qu'on a donnés ſoient aſſez juſtes, pour qu'on ne puiſſe point y ajoûter ni en retrancher une unité décimale du dixiéme ordre, ſans les rendre trop grands ou trop petits; il ne faudroit pas ſe flatter que tous les dix chiffres décimaux ſeroient toûjours bons, ſi lon continuoit la Table commencée. Ainſi lorſqu'on auroit trouvé tous les logarithmes dont on auroit beſoin, il faudroit ſupprimer le dixiéme chiffre décimal, & ajoûter une unité au neuviéme, lorſque le dixiéme ſeroit 5 ou plus grand que 5.

On demandera ſans doute à quoi répond, & comment on trouve le nombre conſtant 0,8685889638, qui ſert de baſe aux logarithmes que nous avons trouvés. Mais comme la ſeconde méthode dans laquelle nous avons fait usage de ce nombre, ne peut pas être démontrée sans supposer des principes qu'on ne peut point expliquer dans ces Élémens; on n'en seroit pas plus avancé quand nous dirions que chaque systême de logarithmes à son module particulier, & que le nombre 0,8685889638 est le double du module du systême dans lequel l'unité est le logarithme de 10.

Pour donner une idée de l'utilité dont peuvent être les logarithmes, dans la résolution des problêmes qu'on propose assez communément aux Arithméticiens; on en va faire usage dans les questions suivantes.

QUESTION PREMIERE.

230 *Le premier terme & la raison d'une progression géometrique étant donnés; trouver le numéro d'un terme égal à un nombre proposé.*

Nous avons vû (*N*o. 188.) que tous les termes d'une progression géométrique, peuvent être représentés par le premier terme multiplié ou divisé continuellement de suite par la raison de la progression; & (*N*o. 190.) qu'un terme quelconque est par conséquent composé du premier, multiplié ou divisé autant de fois de suite par la raison de la progression, qu'il a de termes avant lui. Ainsi puisque dans la progression géométrique proposée, le premier terme, la raison & le terme dont on demande le numéro, sont donnés; on pourra trouver le numéro qui précede celui qu'on cherche, en multipliant continuellement de suite le premier terme par la raison de la progression, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un terme égal à celui dont on demande le numéro, & en marquant le nombre des multiplications que l'on fait: car ce nombre de multiplications sera évidemment égal au nombre des termes qui précédent celui qui est donné; & par conséquent en ajoûtant 1 à ce nombre, on aura le numéro qu'on demande.

Comme cette opération exige souvent beaucoup de multiplications qui conduisent à des fractions embarassantes, lorsque la raison de la progression n'est pas un nombre entier; & que dans le cas où le nombre dont on veut avoir le numéro, n'est pas un terme juste de la progression, elle ne peut faire trouver ce numéro que par des tâtonnemens qu'on n'oseroit conseiller; nous allons proposer une autre méthode dans laquelle nous ferons usage de la petite Table de logarithmes que nous avons donnée.

Puisque (*N*°. 188.) chaque terme de la progression est composé du premier multiplié ou divisé continuellement par la raison de la progression; il est clair (*N*°. 215 ou 216.) que les logarithmes des termes de cette progression, seront composés du logarithme du premier, en lui ajoûtant, ou en retranchant continuellement le logarithme de la raison. Ainsi les logarithmes des termes de la progression géométrique formeront une progression arithmétique qui aura pour premier terme le logarithme du premier terme de la progression géométrique, pour *différence propre additive* ou *soustractive* le logarithme de la raison de la progression géométrique, & pour dernier terme le logarithme du terme ou du nombre donné dont on demande le numéro. Et comme le premier terme, la raison & le terme ou nombre dont on demande le numéro, sont connus dans la progression géométrique; il est clair que les logarithmes de ces quantités, qui sont le premier terme, la différence & le dernier terme de la progression arithmétique correspondante, sont aussi connus.

Comme la progression géométrique & la progression arithmétique correspondante ont le même nombre de termes; le numéro du nombre que l'on considére comme dernier terme dans la progression géométrique, sera le même que celui de son logarithme considéré comme dernier terme dans la progression arithmétique. Ainsi la question dont l'objet est de trouver ce numéro, se réduira à trouver le nombre des termes d'une progression arithmétique dont les extrêmes & la différence propre sont donnés.

Quoique le problême auquel la question présente se réduit, soit semblable à la question III proposée page 382 sur les progressions arithmétiques; nous ne nous dispenserons point d'en continuer la résolution.

Comme le dernier terme de la progression arithmétique, ou le logarithme du nombre dont on demande le numéro, contient le premier terme de la même progression, (ou le logarithme du 1r. terme de la progression géométrique) avec la différence additive ou soustractive prise autant de fois qu'il y a de termes avant lui : si l'on retranche le logarithme du 1r. terme de la progression géométrique, du logarithme du terme dont on cherche le numéro, ou que l'on ôte ce dernier logarithme du premier; le reste sera égal au produit de la différence propre multipliée par le nombre des termes qui précédent celui dont on veut avoir le numéro. Ainsi en divisant ce reste par la différence, c'est-à-dire par le logarithme de la raison de la progression géométrique; le quotient sera le nombre des termes qui précédent celui dont on demande le numéro; & par conséquent en ajoûtant 1 à ce quotient, on aura le numéro demandé.

La regle pour résoudre la question proposée, consiste donc à prendre la différence du logarithme du premier terme, au logarithme du nombre ou terme dont on demande le numéro; ce qu'on fera en retranchant le plus petit de ces deux logarithmes, du plus grand; à diviser ensuite le reste, par le logarithme de la raison de la progression; & à mettre une unité de plus au quotient, pour le rendre égal au numéro demandé.

EXEMPLE PREMIER.

231 *Le premier terme d'une progression géométrique croissante étant 7, & la raison étant 2; on demande le numéro du terme qui est égal à 896.*

On prendra le logarithme de 896, savoir	2,9523080
Et le logarithme de 7, savoir	0,8450980
Puis retranchant le second logarithme du premier, il restera	2,1072100

Ensuite on prendra le logarithme de 2, savoir 0,3010300, & l'on divisera par ce logarithme le reste 2, 1072100; & le quotient 7 qu'on trouvera, sera le nombre des termes qui précédent le terme 896; en sorte que ce terme 896 sera le huitéme de la progression.

EXEMPLE II.

232 *Le premier terme d'une progression géométrique étant 1, & la raison étant $\frac{20}{21}$; on demande le numéro du terme égal à 3.*

On prendra le logarithme de 3, savoir 0,4771213: & comme le logarithme du premier terme 1, est zéro, on n'aura rien à retrancher du logarithme de 3; ainsi ce logarithme restera en entier.

On prendra ensuite le logarithme de la raison $\frac{21}{20}$, qu'on trouvera (*N*°. 216.) de 0,0211893: & divisant par ce logarithme, le logarithme de 3; le quotient 22, 51 qu'on trouvera, sera le nombre des termes qui précédent 3 : en sorte que 23, 51 sera le numéro du terme 3 ; c'est-à-dire que ce terme sera entre le vingt-troisiéme & le vingt-quatriéme, à peu près à égale distance des deux.

REMARQUE.

233 On peut remarquer dans ce dernier exemple, que dans le cas où l'unité est le premier terme d'une progression géométrique dont on connoit la raison ; la regle pour trouver le numéro d'un terme connu de cette progression, se réduit à diviser par le logarithme de la raison, le logarithme du terme donné dont on demande le numéro, & à augmenter d'une unité le quotient de cette division.

On peut encore remarquer en général que si la progression est décroissante, c'est-à-dire si le terme dont on demande le numéro est moindre que le premier ; on pourra regarder le terme dont on demande le numéro, comme le premier terme de la progression, & considérer le premier comme celui dont on demande le numéro. Par ce moyen les deux exemples que nous avons donnés pour des progressions croissantes, seront applicables à des progressions décroissantes.

QUESTION II.

234 *Une somme d'argent ayant été placée au denier 20, c'est-à-dire à condition d'en retirer un intérêt annuel égal au vingtiéme de cette somme ; au bout de la premiere année on ajoûte l'intérêt à la somme principale, pour retirer du tout un nouvel interêt au denier vingt, & l'on continue de faire la même chose tous les ans, jusqu'à ce que le fonds soit triplé. On demande au bout de quel temps la somme premiérement mise à intérêt, sera triplée.*

Puiſque le fonds produit un intérêt au denier 20, & qu'on ajoûte toûjours l'intérêt avec le fonds ; il eſt clair qu'au bout de la premiere année, ou au commencement de la ſeconde, le fonds ſera augmenté d'un vingtiéme, & que le ſecond fonds qui réſultera de cette augmentation, ſera par conſéquent égal au premier multiplié par 1 & $\frac{1}{20}$, c'eſt-à-dire par $\frac{21}{20}$.

Au bout de la ſeconde année, ou au commencement de la troiſiéme, le ſecond fonds ſera pareillement augmenté d'un vingtiéme ; ce qui fera un troiſiéme fonds égal au ſecond multiplié par 1 & $\frac{1}{20}$, c'eſt-à-dire par $\frac{21}{20}$.

Enfin comme à la fin de chaque année l'intérêt ſera toûjours ajoûté au fonds précédent, & ſera par conſéquent compoſé du fonds précédent multiplié par 1 & $\frac{1}{20}$, c'eſt-à-dire par $\frac{21}{20}$; il eſt évident que les différens fonds qui réſulteront de l'addition continuelle de l'intéret au fonds précédent, feront une progreſſion géométrique croiſſante dont la raiſon ſera $\frac{21}{20}$, & dont le premier & le dernier terme, ſeront la ſomme premiérement placée, & le triple de cette ſomme. Ainſi en ſuppoſant que le premier terme de cette progreſſion eſt 1, & que le dernier terme ou le fonds devenu triple eſt 3 ; on trouvera comme on a fait (*N°.* 232.), que le numéro du terme qui précéde le dernier 3 eſt 22,51, & que le numéro du dernier terme 3 eſt par conſéquent 23,51.

Comme le premier terme de la progreſſion géométrique que nous conſidérons, eſt le fonds qui répond au commencement de la premiere année ; & que chacun des autres termes répond au commencement d'une année ; il eſt évident que le numéro 23,51 du nombre 3 qui repréſente le fonds triplé, répondra à peu de choſe près au milieu de la vingt-troiſiéme année ; c'eſt-à-dire que le fonds mis premiérement à intérêt, sera triplé après vingt-deux ans & demi.

QUESTION III.

235 *D'un baril de 100 pintes de vin, on tire tous les jours une pinte que l'on remplace à mesure par une pinte d'eau; & l'on demande combien il faut tirer de pintes, pour réduire le vin du baril à la moitié.*

La premiere pinte qu'on tire du baril, en réduit le vin aux 99 centiémes: ainsi représentant la totalité du vin du baril par 1, le premier reste du vin est $\frac{99}{100}$.

La premiere pinte de vin tirée du baril, étant remplacée par une pinte d'eau, & le mélange contenant par conséquent 99 parties de vin & une partie d'eau; la seconde pinte qu'on en tire, en réduisant le mélange aux 99 centiémes, réduit aussi le vin de ce mélange à ses 99 centiémes; c'est-à-dire qu'après avoir tiré une seconde pinte du baril, il n'y reste en vin que les 99 centiémes de ce qu'il contenoit avant d'avoir tiré la seconde pinte.

La seconde pinte tirée étant encore remplacée par une pinte d'eau; la troisiéme pinte que l'on tire, réduit encore ce nouveau mélange à ses 99 centiémes: ainsi la quantité de vin de ce mélange, est aussi réduite à ses 99 centiémes; c'est-à-dire qu'il ne reste en vin dans le baril, que les 99 centiémes de ce qu'il y avoit avant d'avoir tiré la troisiéme pinte.

Comme on continue toûjours de remplir le baril avec une pinte d'eau, & qu'à mesure qu'on tire une pinte du mélange, on tire la centiéme partie du vin qu'il contient; il est évident que chaque quantité de vin qui reste dans le baril, après avoir tiré chaque pinte, est toûjours les 99 centiémes de la quantité de vin qu'il y avoit auparavant.

Les différentes quantités de vin qui reſtent dans le baril forment donc une progreſſion géométrique décroiſſante, dont la totalité du baril, qu'on repréſente par l'unité, eſt le premier terme, & dont cette fraction $\frac{99}{100}$ eſt la raiſon ; c'eſt-à-dire que chaque terme de cette progreſſion eſt le produit du terme précédent multiplié par $\frac{99}{100}$, ou le quotient de la diviſion du terme précédent, par $\frac{100}{99}$: & comme par les conditions du problême, on tire du baril juſqu'à ce que le vin ſoit réduit à la moitié de ce qu'il y en avoit, la queſtion ſe réduira à trouver le nombre des termes d'une progreſſion géométrique, dont le premier terme eſt 1, le dernier $\frac{1}{2}$, & la raiſon $\frac{99}{100}$.

On prendra donc le logarithme de $\frac{1}{2}$, ſevoir $-0,3010300$, & celui de $\frac{99}{100}$, ſavoir $-0,0043648$, qui ſont les mêmes que ceux de 2 & de $\frac{100}{99}$, avec cette différence qu'ils ſont négatifs : & diviſant le premier logarithme $-0,3010300$ par le ſecond $-0,0043648$, le quotient ſera le nombre des termes qui précédent le dernier de la progreſſion, ou le nombre de pintes qu'on a tirées du baril ; parce que le ſecond terme $\frac{99}{100}$ venant après avoir tiré la premiere pinte, la progreſſion doit avoir un terme de plus qu'on n'a tiré de pintes.

Les deux termes $-0,3010300$ & $-0,0043648$ de la diviſion qu'on doit faire, étant des nombres faux ; on ne peut pas ſe diſpenſer de faire remarquer, que deux nombres faux diviſés l'un par l'autre, ne donnent pas un quotient différent de celui qu'on auroit ſi le dividende & le diviſeur étoient des nombres vrais ; parce qu'un nombre faux eſt contenu dans un autre nombre faux, de la même maniere qu'un nombre vrai eſt contenu dans un nombre vrai. Par exemple, une dette de 100#, qu'on peut regarder comme un nombre faux $-$ 100#, eſt contenue 10 fois dans une dette de 1000# qui peut être auſſi conſidérée comme un nombre faux $-1000^{\#}$, de même qu'un bien de $100^{\#}$ eſt contenu 10 fois dans un bien de $1000^{\#}$.

Il eſt donc évident que pour diviſer $-0,3010300$ par $-0,0043648$, afin de trouver le nombre des pintes qu'on tire du baril pour réduire le vin à la moitié avec les conditions propoſées, on peut regarder le dividende & le diviſeur comme des nombres vrais ($0,3010300$ & $1,0043648$), & diviſer enſuite le premier par le ſecond ; ce qui donnera pour quotient le nombre vrai $68\frac{42236}{43648}$, lequel marquera qu'il faut tirer près de 69 pintes, & remplir à meſure qu'on tire une pinte, pour réduire à la moitié les 100 pintes de vin du baril.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

LIVRE IX.

Des Changemens d'Ordre & des Combinaisons.

230. ON entend par *Changement d'Ordre* ou *Permutation* la maniere d'arranger plusieurs choses de toutes les façons possibles, en sorte que les résultats de tous les arrangemens contiennent précisément les mêmes choses différemment arrangées.

Quoique le mot de *Combinaison* ne paroisse convenir qu'à une méthode pour trouver toutes les façons dont on peut prendre plusieurs choses deux à deux, on entend cependant par ce terme la maniere de trouver les résultats de plusieurs choses prises une à une, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, ou en aussi grand nombre qu'on peut les prendre, avec toutes les conditions dont une question est susceptible.

CHAPITRE PREMIER.

Des Changemens d'Ordre.

237 POUR découvrir toutes les façons possibles de changer l'ordre de plusieurs choses, par exemple, en combien de manieres on peut varier l'ordre de six personnes assises à une même table; il faut commencer par trouver tous les arrangemens d'un petit nombre de choses; & passant aux arrangemens différens que peuvent recevoir un plus grand nombre de choses, on parviendra à trouver la loi que suivent les dénombremens de tous les arrangemens possibles, que peuvent recevoir différentes choses quel qu'en soit le nombre.

Pour désigner les choses dont on voudra trouver tous les arrangemens possibles, rien ne paroît plus convenable que les lettres de l'alphabet. Nous représenterons donc une seule chose par *A*; deux choses différentes par *A*, *B*; trois choses par *A*, *B*, *C*; &c; & nous chercherons tous les arrangemens que peuvent recevoir les lettres que nous prendrons, comme si nous voulions trouver tous les mots possibles qu'on peut faire avec elles en les employant toutes.

1°. Une seule lettre *A* n'est pas susceptible de plusieurs arrangemens, tant qu'on ne prend point d'autres lettres, à l'égard desquelles elle puisse être différemment placée. Ainsi une seule lettre *A* ne peut faire qu'un seul mot, & par conséquent ne peut avoir qu'un arrangement.

2°. Si avec la lettre *A* l'on prend une seconde lettre *B*; on voit clairement que cette nouvelle lettre pourra être placée, d'abord à la droite, & ensuite à la gauche de *A*; & que deux lettres *A*, *B* peuvent par conséquent avoir ces deux arrangemens *AB*, *BA*.

3°. Lorsqu'on a les deux arrangemens *AB*, *BA*, de deux lettres; si l'on prend une troisiéme lettre *C*, il est évident qu'elle pourra occuper successivement trois places différentes, dans chacun des deux mots *AB*, *BA*; savoir une place au commencement, une place au milieu, & une place à sa fin de chaque mot; ensorte que les trois lettres *A*, *B*, *C* seront susceptibles de trois fois autant d'arrangemens que deux lettres *A*, *B*, & pourront par conséquent avoir 3 fois 2 ou six arrangemens différens *CAB*, *ACB*, *ABC*, *CBA*, *BCA*, *BAC*.

4°. Connoissant que trois lettres *A*, *B*, *C* peuvent être écrits dans six ordres différens; si l'on prend une quatriéme lettre *D*, on verra sans peine qu'on peut lui donner 4 places différentes dans chacun des 6 mots qu'on peut composer avec les 3 lettres *A*, *B*, *C*, savoir une place au commencement, une place à la droite de la premiere lettre, une place à la droite de la seconde, & une place à la droite de la troisiéme & derniere lettre; & que les 4 lettres *A*, *B*, *C*, *D* pourront par conséquent être arrangées en quatre fois autant de manieres que les trois lettres *A*, *B*, *C*, ou changer d'ordre en 4 fois 6, ou 24 manieres différentes.

Enfin, si l'on continue de prendre de nouvelles lettres avec celles dont on connoit le nombre des arrangemens possibles; on reconnoîtra aisément que 5 lettres pourront recevoir 5 fois 24 ou 120 arrangemens différens; que 6 lettres pourront avoir 6 fois 120 ou 720 arrangemens différens; que 7 lettres en peuvent avoir 7 fois 720 ou 5040; 8 lettres, 8 fois 5040 ou 40320; 9 lettres, 362880; 10 lettres, 3628800: & ainsi des autres nombres de lettres.

On aura donc tous les arrangemens que pourront recevoir tant de lettres qu'on voudra, en écrivant tous les nombres de suite 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, &c. & multipliant ensemble autant de ces nombres de suite, qu'on voudra avoir de lettres à changer d'ordre. Par exemple pour 3 lettres, on prendra le produit $1 \times 2 \times 3$; pour 4 lettres, le produit $1 \times 2 \times 3 \times 4$; pour 8 lettres, le produit $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$: & ainsi des autres.

Les différens arrangemens possibles que peuvent recevoir plusieurs choses, ne sont pas toujours utiles; & les conditions d'une question peuvent en faire rejetter un grand nombre. Par exemple si l'on proposoit de trouver en combien de manieres on peut varier l'ordre des mots de ce Vers latin composé à la louange de la Vierge par le R. P. Bernard Bauhuse Jésuite de Louvain,

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cœlo.

de sorte que de tous les changemens, il résulte toûjours un vers hexamétre, dont le cinquiéme pied doit être un dactyle & le sixiéme un spondée; on ne pourroit pas faire usage de la dixiéme partie des 40320 changemens d'ordre que les huit mots de ce vers peuvent recevoir.

Henry Dupuy ou Erycius Putéanus, en faisant l'énumération des changemens d'ordre de ce vers, compte autant de variations, que d'étoiles au ciel, dont il fixe le nombre à 1022 seulement.

Le P Prestet dans la premiere édition de ses élémens de mathématiques, compte 2196 variations du même vers; & dans la seconde édition, il en compte 3276. Wallis en compte 3096; & M. Jacques Bernoulli en compte 3312 dans lesquelles la mesure du vers est observée.

CHAPITRE II.

Des Combinaisons.

NOus avons déjà dit que les combinaisons consistent à prendre une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre &c, toutes les grandeurs qui sont données à combiner, avec toutes les conditions dont un problême est susceptible.

1°. On peut proposer, par exemple, de combiner les cinq voyelles *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, & de trouver combien de mots d'une lettre, de deux lettres &c, on peut faire avec elles; sans imposer d'autre condition que celle de ne point faire des mots de plus de cinq lettres. On peut proposer de même de trouver tous les mots possibles qu'on peut faire avec toutes les lettres de l'alphabet, à condition de ne point faire de mots qui ayent un plus grand nombre de lettres qu'il n'y en a dans l'alphabet : ensorte qu'on pourra faire des mots qui contiendront la même lettre une fois, deux fois, trois fois, & en général autant de fois qu'on aura de lettres à combiner; & des mots qui feront composés des mêmes lettres différemment arrangées.

2°. On pourroit proposer de faire des combinaisons d'un certain nombre de lettres, en défendant seulement d'employer plusieurs fois la même lettre dans le même mot.

3°. On peut proposer de combiner différentes choses, sans pouvoir prendre la même chose plusieurs fois en même temps, & sans avoir égard aux changemens d'ordre que ces choses prises deux à deux, ou trois à trois &c, peuvent recevoir. Par exemple on peut proposer de combiner de toutes les façons possibles dix ouvriers, pour les faire travailler un à un, deux à deux, trois à trois &c. Dans ce cas, le nombre des combinaisons seroit très-différent de celui des mots qu'on pourroit faire avec dix lettres, parce que le même ouvrier ne peut pas être combiné avec lui-même comme la même lettre, & que deux ou trois &c ouvriers différemment arrangés ne passeront pas dans le cas présent pour différentes combinaisons.

On pourroit ajoûter d'autres conditions, qui, au lieu de diminuer le nombre des combinaisons, l'augmenteroient; par exemple on pourroit permettre de faire des mots de 6 lettres, de 7 lettres &c, en employant les cinq voyelles seulement. Mais nous ne parlerons point de ces différentes combinaisons, où l'on peut employer plus de lettres qu'il n'y a d'espéces de caractéres à combiner.

I.

138. Si l'on proposoit de faire tous les mots possibles qui peuvent résulter des 25 lettres de l'alphabet *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, x, y, z*, prises une à une, deux à deux, trois à trois &c, en exigeant seulement qu'il n'y ait point de mot de plus de 25 lettres; on trouveroit un si grand nombre de combinaisons à faire, que personne ne pourroit se flatter de les écrire toutes. Mais sans exécuter ces combinaisons, on peut aisément en trouver le nombre, en examinant la loi suivant laquelle le nombre des combinaisons augmente, à

mesure qu'on emploie un plus grand nombre de lettres.

1°. En ne prenant qu'une lettre pour chaque mot, on composera 25 mots, c'est-à-dire autant de mots qu'on aura de lettres. Le nombre de ces premieres combinaisons se réduira donc à 25.

2°. Pour composer tous les mots de deux lettres, on remarquera qu'on peut mettre chaque lettre avec chacune de celles qui composent les 25 premieres combinaisons.

Premierement on peut mettre la lettre *a* à la gauche de chacune des 25 lettres; ce qui donnera ces 25 combinaisons de deux lettres *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *ag*, *ah*, *ai*, *aj*, *ak*, *al*, *am*, *an*, *ao*, *ap*, *aq*, *ar*, *as*, *at*, *au*, *av*, *ax*, *ay*, *az*, dont la premiere lettre sera *a*.

Secondement on peut mettre la lettre *b* à la gauche de chacune des 25 lettres; ce qui donnera encore ces 25 combinaisons de deux lettres *ba*, *bb*, *bc*, *bd*, *be*, *bf*, *bg*, *bh*, *bi*, *bj*, *bk*, *bl*, *bm*, *bn*, *bo*, *bp*, *bq*, *br*, *bs*, *bt*, *bu*, *bv*, *bx*, *by*, *bz*, dont la premiere lettre sera *b*.

Enfin les 25 lettres pouvant être mises successivement à la gauche de chacune des lettres de l'alphabet; il est évident qu'on aura 25 fois 25 ou 625 mots de deux lettres seulement.

3°. En combinant de la même maniere chacune des 25 lettres, avec les 625 combinaisons de deux lettres; c'est-à-dire en mettant d'abord *a*, puis *b*, ensuite *c*, &c à la gauche de ces 625 combinaisons; chaque troisiéme lettre donnera 625 mots différens; & les 25 lettres mises successivement à la gauche des 625 mots de deux lettres, donneront en tout 25 fois 625 mots de trois lettres, ou 15625 combinaisons des 25 lettres prises trois à trois.

Pour peu que l'on fasse attention à la méthode qu'on a suivie pour trouver les combinaisons des 25 lettres prises d'abord une à une, puis deux à deux, ensuite trois à trois; l'on reconnoîtra aisément que tous les différens nombres de combinaisons des 25 lettres, prises une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre &c, sont les termes de cette progression géométrique croissante dont le premier terme est 25, & dont la raison est aussi 25.

$$\dot{\div}\ 25 : 25\times25 : 25\times25\times25 : 25\times25\times25\times25 : \&c.$$

Il suit évidemment de ce qu'on vient de dire, que si l'on combinoit seulement les cinq voyelles *a, e, i, o, u*, une à une, puis deux à deux, ensuite trois à trois &c; les différens nombres de combinaisons seroient exprimés par les termes de la progression géométrique croissante $\dot{\div}\ 5 : 5\times5 : 5\times5\times5 : 5\times5\times5\times5 : 5\times5\times5\times5\times5$ qui a 5 pour premier terme & pour raison.

En un mot, il est aisé de voir que les différens nombres de combinaisons d'un nombre quelconque de lettres, prises d'abord une à une, puis deux à deux, ensuite trois à trois &c, sont répréséntés par les termes correspondans d'une progression géométrique, dont le premier terme est égal au nombre des lettres proposées, & dont la raison est égale au même nombre.

II.

239 Dans les combinaisons dont on vient de parler, sont compris tous les mots qu'on peut faire en répétant plusieurs fois la même lettre, & tous les mots qui contiennent précisément les mêmes lettres différemment arrangées

Si l'on vouloit exclurre du nombre des combinaisons des 25 lettres, tous les mot où la même lettre est répétée, comme il faudroit faire si les 25 lettres *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, ſ, t, u, v, x, y, z*, représentoient 25 personnes qui dussent être à une même table dans tous les ordres possibles; premierement une à une, puis deux à deux, ensuite trois à trois &c; les différens nombres de combinaisons des 25 lettres prises une à une, deux à deux, trois à trois &c, se réduiroient aux termes correspondans de cette suite 25; 25×24; 25×24×23; 25×24×23×22; 25×24×23×22×21 &c, dont le premier terme 25 est égal au nombre total des lettres qu'il faut combiner, & dont chaque terme est composé du précédent multiplié par un nouveau facteur décroissant continüellement d'une unité.

Car 1°. puisqu'ou n'a que 25 lettres pour composer des mots, il est évident qu'on n'aura que 25 mots d'une seule lettre.

2°. Pour composer tous les mots de deux lettres sans en répéter aucune deux fois dans le même mot; on remarquera que chacune des 25 lettres ne peut être combinée qu'avec les 24 autres, & que chaque lettre qu'on voudra écrire la premiere ne donnera par conséquent que 24 mots. La lettre *a*, par exemple, écrite la premiere & combinée successivement avec les 24 autres, ne donnera que ces 24 mots *ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, aj, ak, al, am, an, ao, ap, aq, ar, aſ, at, au, av, ax, ay, az*. La lettre *b*, écrite la premiere & combinée successivement avec les 24 autres lettres, ne donnera que ces 24 mots *ba, bc, bd, be, bf&c*: & ainsi des autres; en sorte que les 25 lettres donneront en tout 25 fois 24 mots de deux lettres, c'est-à-dire un nombre de mots exprimé par 25×24 qui est le second terme de la suite proposée.

3°. En composant les mots de trois lettres, sans en répéter aucune deux fois dans le même mot ; on observera que tous les mots de deux lettres, ne pourront pas être combinés avec les deux lettres qu'ils contiennent déjà, mais seulement avec les 23 autres. Par exemple les mots *ab*, *ba*, composés des deux lettres *a*, *b*, ne pourront plus être combinés avec ces deux lettres, mais seulement avec les 23 autres *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *ſ*, *t*, *u*, *u*, *x*, *y*, *z*. Les deux mots *bc*, *cb*, composés des deux lettres *b* & *c*, ne pourront plus être combinés avec ces deux lettres, mais seulement avec les 23 autres *a*, *d*, *c*, *e*, *f*, *g*, &c : & ainsi des autres ; en sorte que chaque mot de deux lettres ne pourra plus être combiné qu'avec un nombre de lettres de deux unités moindre que le nombre total 25 des lettres données. Or chaque mot de deux lettres écrit le premier, & combiné successivement avec les 23 autres lettres donnant vingt-trois mots de trois lettres ; il est clair que le nombre 25×24 des mots de deux lettres combinés successivement avec les 23 autres lettres, donnera un nombre de mots de trois lettres exprimé par 25×24×23 qui est le troisiéme terme de la suite proposée.

4°. Chacun des mots de trois lettres qu'on vient de trouver ne pouvant plus être combiné avec aucune des trois lettres qu'il contient, mais seulement avec les 22 autres ; on aura 22 fois autant de mots de quatre lettres, qu'il y a de mots de trois lettres. Ainsi le nombre des mots de quatre lettres sera représenté par 25×24×23×22 qui est le quatriéme terme de la suite.

Les mots déjà composés de plusieurs lettres ne peuvent plus être combinés qu'avec les lettres qu'ils ne contiennent point, c'est-à-dire avec un nombre de lettres égal à la différence qu'il y a entre le nombre total des lettres données, & le nombre des lettres des mots déja composés. Or le nombre des lettres avec lesquels les mots faits peuvent être combinés, diminuant continuellement d'une unité, à mesure que le nombre des lettres des mots précédemment faits, augmente d'une unité ; il est évident que la suite des nombres de mots qu'on peut faire avec un nombre de lettres données, prises d'abord une à une, puis deux à deux, ensuite trois à trois &c, sans répéter la même lettre deux fois dans le même mot, doit commencer par un terme égal au nombre total des lettres données ; & que chacun des autres termes doit être composé de celui qui le précéde, multiplié par un nouveau facteur continuellement décroissant d'une unité.

Les nombres de mots qu'on peut faire avec 25 lettres prises d'abord une à une, puis deux à deux, ensuite trois à trois &c, sans qu'aucune soit répétée deux fois dans le même mot, sont donc représentés par les termes correspondans de cette suite 25 ; 25×24 ; $25 \times 24 \times 23$; $25 \times 24 \times 23 \times 22$; $25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21$; ... . $25 \times 24 \times 23 \times \ldots\ldots \times 1$.

Les différens nombres de mots qu'on peut faire avec les cinq voyelles *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, en les prenant une à une, puis deux à deux, ensuite trois à trois, sans répéter deux fois la même voyelle dans le même mot, sont donc exprimés par les termes correspondans de cette suite 5 ; 5×4 ; $5 \times 4 \times 3$; $5 \times 4 \times 3 \times 2$; $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

On voit bien que la suite dont les termes expriment les différens nombres de mots d'une lettre, de deux lettres, de trois lettres &c, qu'on peut faire avec 25 lettres, se termine nécessairement au vingt-cinquiéme terme ; que celle dont les termes représentent les différens nombres de mots d'une letrre, de deux lettres, de trois lettres &c, qu'on peut faire avec les cinq voyelles, se termine au cinquiéme terme; & que chaque suite dont les termes donneront les nombres des mots d'une lettre, de deux lettres, de trois lettres &c, aura toujours autant de termes qu'il y aura de lettres à combiner; parce que dans toutes ces suites, le terme qui exprimera le nombre des mots composés de toutes les lettres données, aura l'unité pour dernier facteur, & que chacun des autres termes qu'on voudroit ajouter à ces suites, contiendroit un facteur plus petit d'une unité que le dernier facteur. Or ce nouveau facteur étant plus petit d'une unité que l'unité, seroit zéro; & il est évident que tous les termes qui contiendroient zéro multiplié par tout ce qu'on voudra, seroient nuls.

III.

240 Les combinaisons que nous avons trouvées dans l'article précédent, contiennent tous les mots composés de lettres données, prises d'abord une à une, ensuite deux à deux, puis trois à trois &c, sans qu'aucune lettre soit répétée dans le même mot; mais ces combinaisons renferment encore tous les mots que l'on peut faire avec les mêmes lettres différemment arrangées.

Si dans ces combinaisons, l'on ne vouloit conserver qu'un seul mot de tous ceux qui contiennent précisément les mêmes lettres; il est clair qu'il faudroit diviser le nombre des mots de deux lettres, par le nombre des arrangemens que peuvent recevoir deux lettres. Il faudroit aussi diviser le nombre des mots de trois lettres par le nombre des arrangemens que peuvent recevoir trois lettres: & ainsi des autres.

Or nous avons vû (N°. 237.) que deux lettres s'arrangent de deux manieres; trois lettres de 3 fois 2 manieres; quatre lettres, de 4 fois 3 fois 2 manieres, &c.

On divisera donc le nombre des combinaisons de deux lettres par 2, le nombre des combinaisons de trois lettres par 2×3, le nombre des combinaisons de quatre lettres par $2 \times 3 \times 4$, le nombre des combinaisons de cinq lettres par $2 \times 3 \times 4 \times 5$: & ainsi des autres.

Il suit de là que si l'on veut avoir le nombre de tous les mots qu'on peut composer avec les 25 lettres *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, ſ, t, u, v, x, y, z,* non seulement sans répéter aucune lettre dans le même mot, mais encore sans faire plusieurs mots qui contiennent précisément les mêmes lettres quoique différemment arrangées; il faudra prendre la suite qu'on a trouvée dans l'article précédent pour la combinaison de 25 lettres; & diviser le second terme de cette suite par 2, le troisiéme terme par 2×3, le quatriéme par $2 \times 3 \times 4$: & ainsi des autres; ce qui donnera pour les nombres des différentes combinaisons qu'on demande, les termes de cette suite

$$25 ; \frac{25 \times 24}{2} ; \frac{25 \times 24 \times 23}{2 \times 3} ; \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22}{2 \times 3 \times 4} ; \ldots\ldots\ldots\ldots ; \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times \ldots \ldots \ldots \ldots \times 1}{2 \times 3 \times 4 \ldots \ldots \ldots \ldots \times 25}.$$

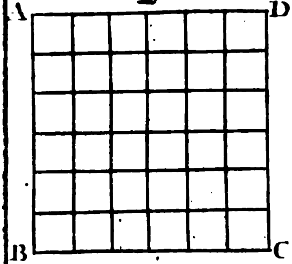
Si l'on vouloit avoir les nombres des mots qu'on peut composer avec les cinq voyelles, non-seulement sans répéter deux fois la même voyelle dans le même mot, mais encore sans faire aucun mot qui contienne les mêmes voyelles quoique différemment arrangées, on les trouveroit dans les termes de cette suite

$$5 ; \frac{\times}{2} ; \frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 3} ; \frac{\times 4 \times 3 \times 2}{\times 3 \times 4} ; \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 4 \times 5}.$$

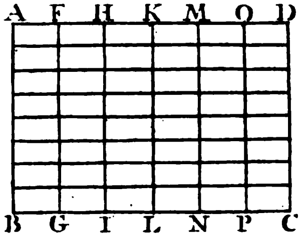
Enfin l'on aura tous les différens mots, ou tous les différens nombres de combinaisons d'un nombre quelconque de lettres, prises une à une, deux à deux, trois à trois, &c, sans répéter aucune lettre dans le même mot, & sans faire de mots qui contiennent précisément les mêmes lettres, en prenant les termes correspondans d'une suite, dont le premier terme sera égal au nombre total des lettres données; dont chacun des autres termes sera composé du précédent multiplié par un nouveau facteur décroissant continuellement d'une unité; & dont le second terme sera divisé par 2, le troisiéme par 2×3, le quatriéme par $2 \times 3 \times 4$, &c.

FIN.

2

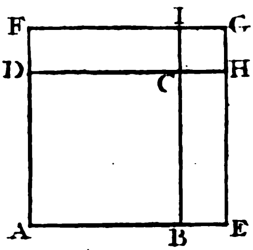

A
D
B
C

3


A F H K M O D
B G I L N P C


E
I

5


F I G
D H
C
A B E

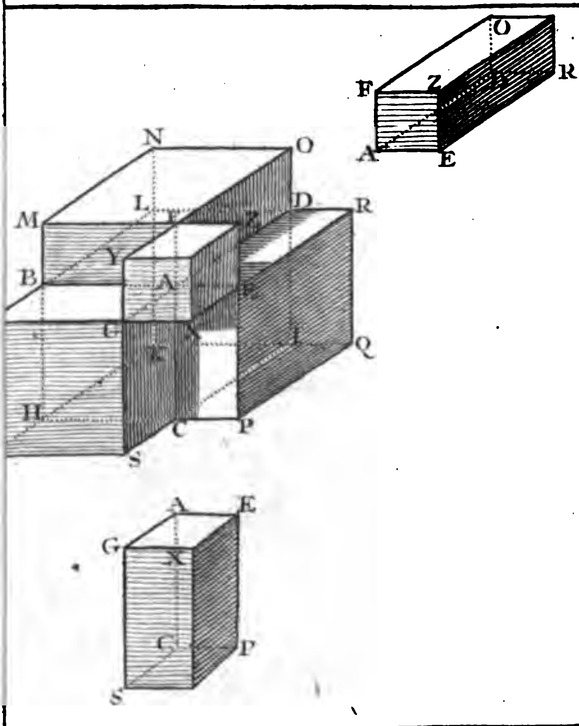

O
F Z R
A E
N O
M L D R
B Y
G I Q
H
C P S
A E
G X
C P
S

TABLE.

LIVRE PREMIER.

Des Nombres & des Principes généraux de l'Arithmétique.

LIVRE II.

Des Opérations de l'Arithmétique sur les Nombres incomplexes.

CHAPITRE III. De la Multiplication des Nombres incomplexes. 47

LIVRE III.

Des Fractions.

LIVRE IV.

LIVRE V.

Des Proportions & des principales Regles qui en dépendent.

LIVRE VI.

LIVRE VII.

De la composition des Quarrés & des Cubes, & de l'Extraction de leurs Racines.

CHAPITRE II. De la Composition des Cubes & de l'Extraction des Racines cubiques. 334

De la Composition des Cubes. 337

De l'Extraction des Racines cubiques. 343

LIVRE VIII.

Des Proportions arithmétiques, des Progressions arithmétiques, des Progressions géométriques, & des Logarithmes.

CHAPITRE IV. Des Logarithmes & de leur usage dans l'Arithmétique.