COURS ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

ANGERS, IMPRIMERIE DE COSNIER ET LACHÈSE.

COURS ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE,

A L'USAGE

2320

DES ÉLÈVES DES ÉCOLES ROYALES D'ARTS ET MÉTIERS,

Par J. Jariez,

SOUS-DIRECTEUR DE L'ÉCOLE ROYALE D'ARTS ET MÉTIERS DE CHALONS-SUR-MARNE,
ANCIEN SOUS-DIRECTEUR DE L'ÉCOLE D'AIX,
EX-PROFESSEUR DE MÉCANIQUE INDUSTRIELLE, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE
A L'ÉCOLE ROYALE D'ARTS ET MÉTIERS D'ANGERS.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'ÉCOLE DES ARTS INDUSTRIELS
ET DU COMMERCE,

DIRIGÉE PAR M. PINEL-GRANDCHAMP, RUE DE CHARONNE, 95, A PARIS.

Première Partie.

SECONDE ÉDITION.

PARIS,
MATHIAS, A LA LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE
ET INDUSTRIELLE, QUAI MALAQUAIS, 15.
ANGERS,
LIBRAIRIE DE COSNIER ET LACHÈSE.
rue Chaussée-Saint-Pierre, 15.
CHALONS-SUR-MARNE,
LIBRAIRIE DE BONIEZ-LAMBERT.

MARSEILLE,
LIBRAIRIE DE Mme CAMOIN.
TOULON,
LIBRAIRIE DE MONGE ET VILLAMUS.
AIX,
LIBRAIRIE DE MAKAIRE ET DELEUIL.

1847.

AVANT-PROPOS.

Je crois nécessaire de rappeler, dans cette seconde édition, le but que je me suis proposé d'atteindre en publiant la première.

Ce Traité ne saurait avoir la portée d'un ouvrage scientifique, et son genre de rédaction doit le faire considérer comme plus particulièrement destiné à l'enseignement de la Mécanique dans les écoles industrielles. Je me suis appliqué à y réunir, le plus succinctement, mais en même temps le plus clairement possible, toutes les notions sur la théorie des moteurs, et les principaux éléments qui les composent Je me suis efforcé, par une méthode rigoureuse et régulièrement suivie, de joindre à l'intérêt qui s'attache tout naturellement à l'étude d'une science de faits comme la Mécanique industrielle, celui qui est inhérent à l'étude des sciences mathématiques proprement dites; et j'ai cherché, surtout, à rendre toujours cette étude accessible à tous les jeunes gens dont les connaissances en mathématiques n'ont pas dépassé les éléments.

Pour parvenir à ces divers résultats, j'ai dû prendre pour bases de mes théories les principes posés par Navier, qui ont fait révolution dans la science des machines, et suivre la marche habilement tracée par nos maîtres et nos seuls guides aujourd'hui dans cette matière, MM. Charles Dupin et Poncelet. Je dois principalement citer, comme m'ayant été d'un immense secours dans mes extraits et mes recherches, les leçons de M. Poncelet à l'école de Metz, recueillies et rédigées par son ami M. le colonel du génie Gosselin, à qui l'on doit d'en avoir conservé la trace. J'ai de nouveau consulté cet ouvrage pour apporter à la première édition les modifications que ma propre expérience, et les conseils de personnes éclairées, avaient rendues nécessaires.

Au nombre de ces modifications, je citerai plus particulièrement celle qui place la théorie du travail des forces immédiatement après l'exposé des lois des divers mouvements des corps, afin de mettre en mesure de traiter de suite de l'action des forces sur les machines, au point de vue de leur mouvement, et de calculer en même temps les résistances nuisibles que ce mouvement développe. Ensuite, quelques additions au pendule, aux ponts suspendus, aux machines à vapeur, au calcul et à l'établissement des pompes, complètent les changements que j'ai jugés indispensables.

L'enseignement de la Mécanique industrielle a fait de notables progrès dans les trois écoles d'arts et métiers qui existent aujourd'hui en France. Je suis heureux, en terminant, de pouvoir rendre, aux élèves qui en sortent, le témoignage que méritent le zèle et l'intelligence qu'ils ont toujours montrés pour l'étude de cette science. Soit comme professeur, soit comme chef de l'instruction, j'ai pu les apprécier dans les trois écoles, où j'ai été successivement appelé, et l'espoir d'être et d'avoir été pour quelque chose dans leurs succès, est et sera toujours ma plus douce récompense.

COURS ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DES ÉCOLES ROYALES D'ARTS ET MÉTIERS.

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

§ 1. *Objet de ce cours.* — L'étude de la mécanique industrielle a été, depuis un petit nombre d'années, l'objet de l'attention de quelques savants, en tête desquels nous pouvons placer MM. Charles Dupin et Poncelet. Tout en suivant les traces de leurs prédécesseurs, et entre autres celles de Navier, dont les travaux ont beaucoup contribué à détruire une foule d'erreurs généralement admises avant lui, ils se proposèrent pour but principal de soustraire cette science aux calculs d'un ordre élevé auxquels elle avait été soumise jusqu'alors ; et, en la rendant élémentaire, de lui permettre d'être abordée par tous ceux qui possèdent les plus simples notions des sciences mathématiques, arithmétique, algèbre et géométrie. Aujourd'hui, grâce à leurs soins, ces notions suffisent en effet pour apprécier, comme il est convenable de le faire dans la pratique, les avantages que présentent les machines dans leur application aux divers travaux des arts industriels, pour calculer leurs effets, et enfin pour les comparer entre elles.

Ces diverses considérations sur les machines, des notions exactes sur le mode de leurs dispositions, sur le meilleur emploi de la force motrice, et sur une foule d'autres circonstances de leurs mouvements, seront dans ce Cours l'objet de notre étude. Mais, avant d'entrer dans ces développements, il est nécessaire d'acquérir préalablement la connaissance des théories purement mathématiques, mais très-élémentaires, qui leur servent de base : ce sont les lois de l'équilibre et du mouvement des corps. L'étude de ces généralités précédera donc les questions toutes pratiques qui constituent plus véritablement la mécanique industrielle. Nous entrerons ensuite dans le domaine de cette science, et nous traiterons successivement : de l'action des forces sur les machines en mouvement, du frottement et des autres résistances nuisibles au mouvement, des organes élémentaires des machines et des engrenages. Nous étudierons ensuite les propriétés mécaniques des fluides; nous ferons connaître les moyens de calculer les machines hydrauliques déjà établies, et nous fournirons quelques données propres à en établir d'autres. Nous terminerons enfin le cours par un essai sur la théorie des machines à vapeur et sur leur application aux diverses usines de l'industrie.

Nous supposerons dans toute l'étendue de ce cours que le lecteur possède les notions de physique expérimentale qui se rapportent aux mouvements des corps, les principales propriétés des fluides, et les premières notions sur la théorie de la chaleur.

§ 2. *Mobilité, mouvement, repos, inertie.* — La *Mobilité* est la propriété dont jouissent tous les corps de pouvoir occuper successivement plusieurs lieux de l'espace indéfini.

Le *mouvement* est l'état d'un corps qui change de lieu ; le *repos* est sa permanence dans le lieu qu'il occupe. Il n'existe pas plus peut-être de mouvement absolu que de repos absolu : ce ne sont que des états relatifs des corps. Un corps n'est en mouvement ou en repos pour nous que parce qu'il change de place, ou qu'il reste à la même place, par rapport à ceux que nous regardons comme fixes. C'est ainsi qu'un corps placé dans un bateau est en mouvement relativement aux rives du fleuve, quoiqu'il soit en repos relativement aux autres objets placés dans ce bateau.

Lorsqu'un corps purement matériel a été mis en mouvement par une cause quelconque, et que cette cause a cessé son action sur lui, on ne conçoit pas qu'il puisse altérer de lui-même le mouvement qu'il a reçu. Il persistera donc dans ce mouvement, tel qu'il lui a été imprimé, tant qu'une nouvelle cause ne viendra pas agir sur lui. C'est ainsi qu'une bille, qui a été choquée sur un billard, continuerait indéfiniment son mouvement, si la résistance de l'air et du tapis ne le ralentissait sans cesse.

Il serait également difficile de comprendre qu'un corps pût de lui-même passer de l'état de repos à celui de mouvement. Cette propriété de la matière de ne pouvoir par elle-même se donner du mouvement ou changer celui qu'elle a reçu porte le nom d'*inertie*. L'inertie est donc l'indifférence de la matière, soit pour le repos, soit pour le mouvement.

§ 3. *Force, forces naturelles.* — On donne le nom de *force* à toute cause, inconnue dans sa nature, mais appréciable dans ses effets, qui produit ou tend à produire le mouvement.

Les forces naturelles, qui sont le plus souvent utilisées dans l'industrie, sont : La force musculaire, les forces moléculaires, la force du calorique, celle de la pesanteur, etc. Souvent on donne le nom de force à l'effet d'une des causes naturelles de mouvement que nous venons d'énoncer ; c'est ainsi que la force d'un courant d'eau, résultant de la tendance des liquides à s'établir de niveau, est due à l'action de la pesanteur ; la force expansive des gaz et des vapeurs est due au calorique ; la force du vent est souvent produite par un changement accidentel dans la température d'un lieu.

§ 4. *Mécanique ; ses subdivisions.* — La *mécanique* est la science qui traite de tous les phénomènes résultant de l'action des forces sur les corps. Toutes ces forces paraissent devoir se résumer en une seule toujours active, qui fait réagir entre eux, et à distance les unes des autres, les systèmes de molécules matérielles que la nature nous présente, soit qu'on la suppose agissant sur les corps terrestres ou animant ceux qui composent notre système planétaire. On donne à cette cause générale de mouvement le nom de *gravitation universelle.*

La mécanique se divise en deux parties : la *mécanique proprement dite,* qui traite de l'action des forces sur les corps solides de notre globe, et la *mécanique hydraulique,* qui s'occupe de l'action des forces sur les fluides. Chacune de ces deux parties se divise elle-même en deux autres : la première en *dynamique* et *statique*, la deuxième en *hydrostatique* et *hydrodynamique.* La dynamique traite du mouvement des solides, la statique de leur équilibre. L'hydrodynamique traite du mouvement des fluides, et l'hydrostatique de leur équilibre.

DYNAMIQUE.

DÉFINITIONS.

§ 5. *Durée; unité de durée.* — La première propriété que nous reconnaissons au mouvement est celle d'avoir une *durée.* La durée d'un mouvement est la succession des impressions qu'il nous fait éprouver. En passant par les divers points de la ligne qu'il parcourt, le mobile nous donne successivement la sensation de sa présence en ces points, et c'est la succession de ces sensations qui constitue la durée.

La durée peut être plus ou moins grande, suivant que les impressions sont plus ou moins nombreuses. C'est donc une quantité mathématique susceptible d'être exprimée en nombres, en lignes, ou enfin de pouvoir être mesurée. Or, pour mesurer une quantité, on est convenu d'en prendre une certaine portion qu'on appelle *unité.* L'unité de durée peut être arbitraire dans sa grandeur, mais elle doit être constante.

On a choisi pour unité la durée qui s'écoule entre deux passages successifs du centre du soleil à la même partie du méridien. Cette unité offre, non pas la constance qui doit être le caractère d'une unité de mesure, mais une invariabilité approximative très-suffisante pour le plus grand nombre des besoins de la vie. On a apppelé *jour* cette unité de durée, et l'on a divisé le jour en 24 heures, l'heure en 60 minutes, et la minute en 60 secondes; tout le monde connaît enfin les multiples du jour appelés *semaine*, *mois*, *année*.

§ 6. *Epoque d'un phénomène.* — L'*époque d'un phénomène* est le nombre d'unités de durée qui se sont écoulées depuis une origine convenue jusqu'au moment de l'observation du phénomène.

§ 7. *Temps; instant.* — Le *temps* est l'expression numérique en heures, minutes..... de la durée qui s'est écoulée pendant la production d'un phénomène ou entre deux phénomènes différents; le temps est donc la durée mesurée.

Un intervalle de temps infiniment petit est un *instant*, un *moment*.

§ 8. *Jour solaire; jour moyen.* — Le jour n'a pas la même valeur pendant toute une année; il est aisé de s'en assurer. Aussi, comme dans les sciences et les besoins de la vie, on était obligé d'avoir une unité de durée qui fût réellement toujours la même, on chercha une moyenne entre tous les jours d'une année, on l'appela *jour moyen*; et l'on appelle *jour solaire* celui qui est marqué par le passage du centre du soleil au méridien. De là *temps solaire* et *temps moyen*. Un grand nombre de machines, appelées *chronomètres*, ont été construites pour mesurer le temps moyen : on les nomme *horloges*, *pendules*, *montres*, *gardes-temps*. Les *cadrans solaires* sont des appareils destinés à donner le temps vrai ou solaire. On voit que ces deux sortes de machines ne sont pas généralement d'accord : on ne peut les régler l'une sur l'autre qu'à certaines époques où le jour solaire a la même valeur que le jour moyen (vers le 15 avril, le 16 juin, le 31 août et le 25 novembre).

§ 9. *Éléments qui suffisent pour déterminer une force.* — On distingue dans une force : son *intensité*, qui exprime son rapport avec une autre prise pour unité ; son *point d'application*, qui est celui sur lequel elle exerce immédiatement son action ; sa *direction*, qui est la droite qu'elle tend à lui faire décrire. Cette direction est droite, parce qu'on ne conçoit pas qu'un corps puisse de lui-même s'écarter du prolongement de l'élément linéaire infiniment petit qu'il a commencé à parcourir à l'origine de son mouvement. Enfin on distingue encore dans une force son *sens*, c'est-à-dire l'un des deux chemins que peut parcourir le corps de part et d'autre de son point d'application.

Les forces étant de nature à être mesurées à l'aide d'une unité, peuvent être représentées par des nombres et par des portions de lignes droites.

§ 10. *Diverses formes de trajectoires.* — D'après nos propres observations, nous reconnaissons à un mouvement la propriété de s'effectuer sur une ligne d'une nature particulière, qui peut ne pas être la ligne droite, comme il arrive lorsque le corps est sollicité par une force unique. Cette ligne s'appelle en général *trajectoire ;* si elle est droite, le mouvement est *rectiligne ;* si elle est composée de lignes droites finies, il est *polygonal ;* enfin si elle est courbe, le mouvement est *curviligne.*

§ 11. *Espace parcouru dans un temps donné.* — L'espace parcouru par un corps dans un temps donné est le nombre d'unités linéaires décrites par le mobile dans un nombre connu d'unités de temps dont l'origine est fixée.

§ 12. *Divers effets des forces.* — Il y a plusieurs manières de faire entrer les forces dans les calculs, suivant la nature de l'effet qu'elles sont destinées à produire. Ainsi, lorsque nous nous occuperons de déterminer la nature du mouvement que prend un corps sollicité par une ou plusieurs forces, nous exprimerons ces dernières en mètres, en fonction de certains espaces parcourus dans des circonstances convenues. Si les forces sont destinées à produire l'équilibre, leur effet se réduira, soit à une *pression*, soit à une *traction*, équilibrée dans un autre sens, et elles seront alors mesurables en poids, le kilogramme étant pris pour unité, parce qu'on pourra toujours comparer leur effet, dans ce cas, à celui que produirait un poids en kilogrammes. Enfin, s'il s'agit de mesurer leur effet sur les machines en mouvement, nous ferons entrer dans l'expression de cet effet l'effort employé, mesuré en kilogrammes, et l'espace parcouru. Nous reviendrons sur ces idées à mesure que l'occasion s'en présentera. Ce n'est pas le seul cas dans les sciences où la même cause physique soit mesurée par des effets d'une nature différente : le calorique nous en offre encore des exemples. Cela tient à ce que les causes de tous les phénomènes nous sont parfaitement inconnues dans leur nature intime, à ce qu'on n'a pour objet que d'en mesurer les effets, et que ces effets étant différents, il n'est possible de mesurer chacun d'eux qu'avec un effet de la même espèce.

§ 13. *Diverses espèces de mouvements.* — Le *mouvement uniforme* est celui dans lequel le mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux très-petits; le *mouvement varié* est celui dans lequel cette circonstance n'a pas lieu. Il arrive quelquefois dans la pratique que les espaces parcourus pendant des temps infiniment petits sont inégaux, quoique, pendant de certains temps égaux plus considérables, les espaces parcourus deviennent égaux. Tels sont en particulier les *mouvements alternatifs* ou de *va et vient* : de semblables mouvements sont dits *périodiques*, et on les remplace, pour la simplicité des calculs, par des mouvements uniformes qui s'exécuteraient dans le même temps.

§ 14. *Force instantanée; elle produit un mouvement uniforme.* — On appelle *force instantanée* une force qui n'agit sur un mobile que pendant un instant infiniment court, qui cesse d'agir, en quelque sorte, en même temps qu'elle commence. Les mouvements produits par des explosions, des chocs... peuvent être attribués à des forces qui satisfont sensiblement à cette définition.

Lorsqu'un mobile est soumis à l'action d'une pareille force, il reste abandonné à lui-même aussitôt qu'elle a cessé son action. Dès-lors, en vertu de son inertie, § 2, on ne comprendrait pas qu'il pût de lui-même altérer le mouvement qui lui a été imprimé, ni le faire cesser. Ainsi, ce mouvement doit être essentiellement rectiligne, car le mobile ayant parcouru dans le premier instant un élément linéaire infiniment petit, il n'y a pas de raison pour qu'il s'écarte de cet élément; il en suivra donc le prolongement rectiligne. De plus, ce mouvement devra être uniforme, car le mobile ne saurait encore de lui-même altérer le mouvement qu'il a reçu de la force instantanée pendant le premier instant : pendant les instants égaux qui suivront, il devra donc parcourir des espaces égaux. Enfin, le mouvement imprimé au mobile doit être perpétuel, par une raison tout-à-fait analogue, et qu'il tire encore de son inertie.

On peut donc résumer ce qui précède en disant que le mouvement imprimé à un mobile par une force instantanée, est rectiligne, uniforme et perpétuel.

Il est même possible d'affirmer dès à présent que si un mobile a reçu une impulsion quelconque par l'effet combiné de plusieurs forces, et si l'action de ces forces vient à être suspendue à une certaine époque de son mouvement, à partir de cet instant, le mobile étant abandonné à lui-même, ne continuera plus de se mouvoir qu'en vertu de son inertie : son mouvement deviendra donc rectiligne, uniforme et perpétuel, et il s'exécutera sur le prolongement de l'élément linéaire infiniment petit qu'il parcourait à l'instant où l'action des forces a été suspendue, c'est-à-dire sur la tangente à la trajectoire de son mouvement au point qu'il occupait à l'instant dont il est question. On exprime ordinairement cette circonstance en disant que *le mobile s'échappe par la tangente à la trajectoire.* Il se trouve alors dans la position d'un corps qui a été soumis à l'action d'une force instantanée.

§ 15. *Forces accélératrices ; elles produisent des mouvements variés.* — On appelle *forces accélératrices* des forces qui répètent sans cesse leur action sur les mobiles. Il est aisé de comprendre que les seuls mouvements qu'elles soient susceptibles de produire sont des mouvements variés. Cela est évident d'abord pour les forces *variables* d'intensité, car les causes de mouvement étant inégales dans des temps égaux, les espaces parcourus pendant ces mêmes temps doivent aussi être inégaux. S'il s'agit d'une force accélératrice *constante*, on conçoit également que l'espace parcouru pendant le second instant soit différent de l'espace parcouru pendant le premier, puisque cet espace se compose nécessairement de l'effet essentiellement *constant* produit par la force constante pendant le deuxième instant, augmenté de celui qui résulte de l'action de la force pendant le premier instant. Or, ce dernier effet, dû à l'inertie de la matière, ne saurait être anéanti. De même, l'espace parcouru par le mobile, pendant le troisième instant, se compose du même effet constant produit par la force pendant cet instant, augmenté de l'effet produit par les impulsions reçues pendant les deux premiers instants. Or, ces impulsions ont été plus nombreuses pendant deux instants que pendant un seul ; l'espace total parcouru pendant le troisième instant est donc différent de celui qui a été parcouru pendant le deuxième, et ainsi des autres. Le mouvement produit par une force accélératrice est donc un mouvement varié. Si la force qui produit le mouvement varié accélère réellement le mouvement, c'est-à-dire si les espaces parcourus dans des temps égaux consécutifs sont de plus en plus grands, cette force est alors véritablement *accélératrice*, et le mouvement est dit *accéléré*. Il est *retardé* si les espaces deviennent de plus en plus petits, et la force prend le nom de force *retardatrice*. Sur notre globe, un corps en tombant dans le vide, étant à chaque instant de son mouvement sous la puissance d'une force qui l'attire vers la terre, cette force est accélératrice ; en tombant dans l'eau, ce fluide agit sur lui comme force retardatrice.

Nous avons vu qu'une seule force instantanée ne pouvait produire qu'un mouvement rectiligne et uniforme; plusieurs forces instantanées, agissant à des époques et dans des directions différentes, produiront un mouvement polygonal. Pour la production d'un mouvement curviligne, il est nécessaire que le mobile soit soumis au moins à deux forces dont les directions soient différentes, et dont l'une soit accélératrice; l'autre peut ne pas l'être.

§ 16. *Le mouvement varié devient uniforme quand l'action des forces est suspendue.* — Si, à une époque quelconque d'un mouvement varié, on suppose l'action des forces suspendue, et le mobile abandonné à lui-même, le mouvement de ce mobile ne peut plus s'exécuter sur la trajectoire primitive, car son inertie est telle qu'il n'est plus susceptible d'altérer de lui-même le dernier état dans lequel l'ont laissé les forces. Il doit donc décrire le prolongement du dernier élément linéaire qu'il parcourait à l'instant où l'action des forces a été suspendue, car il n'y a aucune raison pour qu'il s'en écarte; comme aussi son mouvement ne saurait être accéléré ni retardé, puisqu'il ne se meut que parce qu'il ne saurait s'arrêter sans cause : il faudrait une cause pour accélérer ou retarder le mouvement, et comme cette cause n'existe pas, le mouvement devient donc uniforme.

Ainsi, concluons de là, qu'un mouvement varié est toujours suivi d'un mouvement uniforme, quand on vient à suspendre l'action des forces qui produisaient le mouvement varié, et que ce nouveau mouvement s'exécute sur la tangente à la trajectoire décrite par le mobile dans le mouvement varié, au point de cette trajectoire que le mobile occupait à l'instant de la suspension des forces.

Sans même suspendre physiquement l'action des forces, il sera toujours facile de concevoir par la pensée que cette suspension est effectuée, et de se représenter le mouvement uniforme qui aurait lieu, sans pour cela qu'il existe réellement.

Toutes ces considérations peuvent nous faire prévoir déjà que les divers mouvements uniformes qui succèdent à un mouvement varié qui s'est exécuté pendant des temps différents, sont eux-mêmes dissemblables, et que la variation de ces mouvements peut servir à caractériser le mouvement varié lui-même. Nous développerons bientôt cette idée.

MOUVEMENT UNIFORME.

§ 17. *Vitesse dans le mouvement uniforme et équation de ce mouvement.* — On appelle *vitesse* dans cette espèce de mouvement l'espace parcouru pendant une unité de temps, une seconde par exemple. D'après la définition de ce mouvement, la valeur de la vitesse reste constante pendant toute la durée du mouvement. La constance de la vitesse est donc ce qui caractérise un mouvement uniforme. Si l'on désigne par a le nombre d'unités linéaires contenues dans la vitesse, $2a$, $3a$....., seront les espaces parcourus dans 2, 3,..... secondes; de sorte que, en général, at sera l'espace parcouru pendant un nombre de secondes représenté par t. Si l'on appelle e cet espace, on aura la relation

$$e = at$$

ou, *l'espace égale la vitesse multipliée par le temps* : ce qui fait voir que l'espace parcouru dans un mouvement uniforme pendant un temps t, et avec une vitesse égale à a, peut être représenté par la surface d'un rectangle dont t serait la base et a la hauteur, ou en d'autres termes que, si l'on construit un rectangle dont la hauteur soit égale à a, et dont la base contienne autant d'unités de ligne que t contient d'unités de temps, ce rectangle renfermera autant d'unités de surface qu'il y aura d'unités de ligne dans l'espace parcouru; explication nécessaire pour comprendre l'interprétation géométrique résumée par la formule, $e = at$. (Alg. § 88).

§ 18. *Loi du mouvement uniforme.* — En faisant t double, triple, quadruple.... a restant constant, e devient aussi double, triple, quadruple.... ce qui fait voir que *les espaces parcourus dans un mouvement uniforme sont proportionnels aux temps employés à la parcourir.* (Arith. § 207).

§ 19. *Vitesse moyenne dans le mouvement régulier périodique.* — Comme nous l'avons déjà dit, il arrive dans la pratique que la vitesse ne reste pas constante pendant toute la durée du mouvement, et qu'elle éprouve des variations régulières, croissantes et décroissantes, qui permettent de remplacer ces mouvements par des mouvements uniformes qui s'exécuteraient dans le même temps. On en trouve des exemples dans les mouvements alternatifs ou de va et vient, et même dans le mouvement circulaire des roues hydrauliques, des roues d'engrenage, etc., lorsque les résistances éprouvent aussi des variations croissantes et décroissantes. On appelle alors *vitesse moyenne* dans un mouvement de cette espèce, celle du mouvement uniforme dans lequel l'espace parcouru dans un temps déterminé serait le même que celui parcouru pendant le même temps dans le mouvement proposé.

§ 20. *Application des lois du mouvement uniforme; vitesse d'un projectile.* — L'équation $e = at$ renfermant trois quantités, deux d'entre elles étant connues, il est possible d'en déduire la troisième; ce qui conduit à trois équations donnant lieu à trois problèmes différents, et dont nous allons donner quelques exemples.

1° Un point de la circonférence d'une roue hydraulique a une vitesse de 1^m, 36 par seconde; on demande l'espace parcouru par ce point en 8' 42".

L'équation $e = at$ donne immédiatement :

$$e = 1^m, 36 \times 8' \; 42";$$

ou, en réduisant le second facteur en secondes :

$$e = 1^m, 36 \times 522 = 709^m, 92.$$

2° Le rayon d'une des roues d'engrenage d'une machine étant $r = 0^m, 24$; le nombre de tours par minutes n étant 65,4; on demande l'espace parcouru par un point de la circonférence de la roue pendant un temps égal à 5' 22".

La circonférence de la roue égale $2\pi r$; l'espace parcouru dans 1' est donc : $2\pi rn$; en divisant par 60, on a la vitesse par seconde, ou

$$a = \frac{2\pi r.n.}{60}.$$

L'équation $e = at$ donne donc

$$e = \frac{2\pi r.n.t.}{60}.$$

Réduisant t en secondes, et substituant à la place des lettres leurs valeurs numériques, il vient :

$$e = \frac{2\pi \times 0,24 \times 65,4 \times 322}{60} = 529^m, 275.$$

3° Le rayon d'une roue $r = 1^m, 45$; cette roue fait 270 tours en 4' 48"; trouver la vitesse par seconde d'un point de sa circonférence.

L'espace parcouru pendant le temps 4' 48" est ici égal à $2\pi r.270 = e$. L'équation $e = at$ qui fournit $a = \frac{e}{t}$ donne en substituant :

$$a = \frac{2\pi r.270}{288} = 85^m, 41.$$

4° Le rayon d'une roue $= 0^m, 56$; le nombre de tours $n = 48$, pendant le temps $t = 3' 16"$. Trouver la vitesse par minute d'un point de sa circonférence.

Ici, $e = 2\pi r.n$; $t = \frac{196}{60}$; d'où

$$a = \frac{e}{t} = \frac{2\pi r.n.60}{196} = 517^m, 01.$$

5° Le rayon d'une roue $r=1^m,96$; le nombre de tours n par minute $=36$; trouver en secondes le temps qu'un point de la circonférence de la roue a mis à parcourir un espace de 100 mètres :

$$\text{Ici, } e=100;\ a=\frac{2\pi r.n.}{60};\ t=\frac{e}{a}=\frac{60e}{2\pi r.n.}=13'',53.$$

6° Le rayon d'une roue $r=0^m,34$; le nombre de tours par minute $n=70$; trouver en minutes le temps qu'un point de la circonférence de la roue a mis à parcourir un espace de $7^m,64$:

On a

$$e=7{,}64;\ a=2\pi r.n;\ \text{et } t=\frac{e}{a}=\frac{e}{2\pi r.n.}=0',05109=3''.$$

7° On peut, à l'aide de l'équation du mouvement uniforme, déterminer la vitesse initiale d'un projectile à sa sortie de la bouche à feu. On se sert pour cela de l'appareil suivant (*fig.* 1) : ab, $a'b'$, sont deux axes auxquels on imprime un mouvement de rotation commun et uniforme au moyen de roues dentées, comme l'indique la figure. Les extrémités a et a' de ces deux axes portent deux cartons circulaires. L'arme est placée parallèlement à l'axe assez près de la circonférence des cartons, et à une distance de 5^m. Lorsqu'on veut faire une expérience, on imprime au tambour un mouvement de rotation rapide, et l'on détermine le nombre de tours qu'il fait par seconde. On décharge la bouche à feu pendant qu'il est en mouvement, et le projectile fait deux trous dans les cartons circulaires. Ces deux trous ne sont pas sur une même parallèle à l'axe de rotation, et si l'on abaisse du centre de l'un des cartons une perpendiculaire sur l'autre, l'arc de cercle compris entre le pied de cette perpendiculaire et le centre de l'autre trou mesurera l'angle dont le tambour aura tourné. Connaissant alors la distance des deux cartons, on aura tous les éléments nécessaires pour résoudre la question. En effet, soit n le nombre de tours du tambour par seconde; $\frac{1}{n}$ sera le temps employé à faire un tour; soit d le nombre de degrés compris dans l'angle dont le tambour a tourné, on aura le temps qu'a mis le tambour à tourner de cette quantité en établissant la proportion $\frac{360}{d} = \frac{\frac{1}{n}}{t}$; d'où l'on tire :

$$t = \frac{d}{360\,n}.$$

Cette valeur de t représente le temps que le projectile a mis pour aller d'un fond à l'autre du tambour. Cette distance peut être connue en la mesurant, et la vitesse du projectile sera déterminée par la formule $e = a\,t$, car le mouvement peut être supposé uniforme pendant le temps très-petit que le projectile a mis à traverser le tambour. On aura donc $a = \frac{e}{t}$, ou, en mettant pour t sa valeur :

$$a = \frac{360\,n\,e}{d}.$$

En répétant plusieurs fois la même expérience, et calculant les diverses valeurs de a, on pourra prendre une moyenne entre elles, et l'on aura pour la vitesse du projectile une valeur suffisamment approchée.

Soit $e = 10^{m}$; $n = 10$; $d = 72°$. L'équation précédente donnera :

$$a = \frac{360 \times 10 \times 10}{72} = 500^{m}.$$

§ 21. *Mesure d'une force instantanée.* — Une force instantanée qui produit un mouvement uniforme ne nous est pas connue dans sa nature intime; elle ne se manifeste à nous que par l'effet qu'elle produit : celui de communiquer une certaine vitesse au mobile qu'elle sollicite. Il est naturel de supposer que la force est plus grande ou plus petite, selon que la vitesse communiquée au même mobile est elle-même plus grande ou plus petite. Cette remarque nous conduit à admettre que les forces sont proportionnelles aux vitesses qu'elles peuvent imprimer à un même corps. Cette hypothèse, qui peut passer pour un axiome, n'est contredite par aucun des résultats de l'expérience. Cette proportionnalité fait voir que la vitesse peut être prise pour mesure de la force dans le cas où cette force ayant des intensités différentes sollicite le même mobile.

§ 22. *Vitesse angulaire ; sa mesure.* — On appelle *vitesse angulaire* d'un corps qui tourne autour d'un axe d'un mouvement uniforme, la vitesse d'un point de ce corps distant de l'axe de l'unité de longueur, du mètre, par exemple. Il est facile d'avoir sa valeur, lorsqu'on connaît le nombre de révolutions du corps par minute. En effet, si n désigne ce nombre, 2π représentera le chemin parcouru dans une révolution par un point distant de l'axe d'un mètre, et $2\pi n$ sera l'espace parcouru par le même point pendant une minute. Pour avoir l'espace parcouru par le point pendant une seconde, il suffit de diviser $2\pi n$ par 60, ce qui donne, en désignant la vitesse angulaire par V_1 :

$$V_1 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Telle est l'expression de la vitesse angulaire d'un corps qui tourne autour d'un axe.

Comme on le voit, la vitesse angulaire d'un corps qui tourne autour d'un axe ne dépend que du nombre de révolutions de ce corps autour de l'axe. Ce dernier nombre étant donné, on peut trouver la vitesse angulaire, et réciproquement.

§ 23. *Usage de la vitesse angulaire pour trouver celle d'un point quelconque. — Remarque.* — Lorsqu'on connaît la vitesse angulaire d'un corps qui tourne autour d'un axe, il est aisé d'en déduire celle d'un point quelconque de ce corps dont la distance à l'axe est donnée, et inversement; car (*fig.* 2), soit M un point du corps, A l'axe autour duquel il tourne, MA sera la distance à l'axe $= R$. Soit m le point dont la distance à l'axe est égale à un mètre. Soit mm' la vitesse angulaire $= V_1$; MM' compris entre les deux rayons MA et $M'A'$ sera la vitesse cherchée du point $M = V$. Les arcs semblables sont entre eux comme les rayons : on aura donc

$$\frac{MM'}{mm'} = \frac{MA}{mA'};\ \text{ou}\ \frac{V}{V_1} = \frac{R}{1};\ \text{d'où}$$

$$V = V_1 \times R \ \text{et}\ V_1 = \frac{V}{R}$$

Ainsi, la vitesse d'un point quelconque est égale à la vitesse angulaire multipliée par la distance de ce point à l'axe de rotation, et la vitesse angulaire est égale à celle d'un point quelconque divisée par la distance de ce point à l'axe de rotation.

Soit $V_1 = 2^m, 3$; $R = 1^m, 45$; on trouve

$$V = V_1 \times R = 2,3 \times 1,45 = 3^m, 335.$$

Soit $V = 5^m, 2$; $R = 2^m, 5$; on trouve

$$V_1 = \frac{V}{R} = \frac{5,2}{2,5} = 2^m, 08.$$

L'égalité $V = V_1 \times R$ nous fait voir que la vitesse d'un point du corps qui tourne autour d'un axe, est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe. Divers points sont donc animés de vitesses différentes, qui vont en croissant à mesure qu'ils s'éloignent de l'axe.

MOUVEMENT VARIÉ.

§ 24. *Manière de comprendre ce qu'on entend par vitesse dans le mouvement varié.* — Supposons que soumis à l'influence d'une ou de plusieurs forces accélératrices (*fig.* 3), un point mobile a soit obligé de décrire la ligne amb, droite ou courbe, d'un mouvement varié, et qu'au bout de la première seconde, il soit parvenu en m. Par suite des impressions reçues de la part des forces, il aura parcouru un certain espace am. Imaginons qu'à cet instant on suspende l'action des forces qui rendent son mouvement varié : il n'en continuera pas moins à se mouvoir; car, en vertu de son inertie, il doit obéir aux impulsions qu'il a reçues primitivement, jusqu'à ce que d'autres causes viennent changer son état. Mais son mouvement ne sera plus varié, il deviendra uniforme, car ce mobile sera, après la suppression des forces accélératrices, comme soumis à l'action d'une force instantanée, puisqu'il n'aura de mouvement qu'en vertu de la somme des impressions reçues jusqu'à l'instant où il a été abandonné à lui-même. De plus, comme il n'y a pas de raison pour qu'il quitte le dernier élément de la trajectoire qu'il a parcourue, il décrira la tangente mk à la trajectoire au point m. Ce mouvement uniforme s'effectuera avec une vitesse v dont la grandeur dépendra du nombre, de la nature, et de la grandeur des forces qui produisaient le mouvement varié. Si l'on ne suspend l'action des forces qu'au bout de deux secondes, le mobile sera arrivé en m', par exemple, car il aura reçu plus d'impulsions de la part des forces accélératrices pendant deux secondes que pendant une seule. Alors, les mêmes phénomènes se reproduiront; le mouvement, de varié qu'il était, deviendra uniforme, par les raisons données précédemment, et il s'effectuera sur une trajectoire rectiligne qui sera la tangente à la trajectoire du mouvement varié, au point où se trouvait le mobile à l'instant où l'action des forces a été suspendue. La vitesse de ce nouveau mouvement uniforme sera autre que celle du mouvement qui a eu lieu au bout de la première seconde. On raisonnerait de la même manière pour rendre compte de ce qui se passerait si l'action des forces n'était suspendue qu'au bout de 3, de 4, de...... secondes. On voit qu'il en résulterait toujours un mouvement uniforme et rectiligne, dans lequel la vitesse du mobile aurait une valeur dépendante du temps qu'aurait duré le mouvement varié ; c'est la vitesse de ce mouvement uniforme qui succède au mouvement varié après la suppression des forces, qui constitue ce qu'on doit entendre par vitesse dans le mouvement varié. Pour bien la concevoir, il faut donc toujours imaginer qu'à un certain instant du mouvement varié qu'effectue le mobile, l'action des forces accélératrices est suspendue, et que le mobile continue à se mouvoir, mais d'une manière uniforme, sur la tangente à la trajectoire qu'il décrivait, menée au point où il se trouvait lorsque les forces ont été supposées anéanties. La vitesse de ce mouvement uniforme est ce qu'on nomme la vitesse du mobile au bout du temps pendant lequel le mouvement varié s'est exécuté.

D'après ce qui précède, il est aisé de voir qu'on ne peut pas dire dans un mouvement varié : *Vitesse du mobile*, d'une manière absolue, mais bien : *Vitesse au bout d'une, de deux,..... secondes*, puisque cette vitesse varie avec le temps qu'a duré le mouvement varié. Ainsi, on appellera vitesse au bout d'une seconde, la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié, si au bout d'une seconde de ce mouvement, on venait à suspendre l'action des forces. On appellera vitesse au bout de deux secondes, celle du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié qui aurait lieu pendant deux secondes, et ainsi de suite.

§ 25. *Vitesse au bout d'un temps donné dans le mouvement varié.* — On appelle donc *vitesse au bout d'un temps t* dans le mouvement varié, celle du mouvement uniforme qui succède au mouvement varié qui s'est effectué pendant le temps t, quand après ce temps les forces accélératrices ont cessé d'agir.

§ 26. *Ce qui sert à caractériser un mouvement varié.* — De même que la constance de la vitesse peut servir à caractériser un mouvement uniforme, on conçoit également qu'un mouvement varié soit parfaitement caractérisé par la loi suivant laquelle la vitesse varie au bout de chaque unité de temps. La variation de la vitesse au bout des secondes successives pourra donc servir à caractériser les mouvements variés et à les faire distinguer les uns des autres.

§ 27. *Mouvement uniformément varié, accéléré ou retardé.* — Par exemple, supposons un corps sollicité par une force accélératrice : son mouvement sera rectiligne, mais varié. Supposons de plus que la vitesse varie uniformément, de telle sorte qu'elle augmente ou diminue de la même quantité au bout de chaque seconde; on dit alors que *les variations de la vitesse sont proportionnelles aux temps pendant lesquels le mouvement varié s'est effectué.* Cette variation de la vitesse suffit pour caractériser cette espèce de mouvement, comme la constance de la vitesse caractérise le mouvement uniforme. Le *mouvement uniformément varié* est donc celui dans lequel la vitesse varie proportionnellement au temps. Si la vitesse *croît* d'une quantité proportionnelle au temps, ou, ce qui est la même chose, d'une quantité constante pour chaque seconde, le mouvement est *uniformément accéléré*, et si la vitesse décroît d'une quantité constante, le mouvement est *uniformément retardé.*

§ 28. *Force accélératrice constante; sa mesure.* — Le mouvement uniforme qui succède au mouvement varié qui s'est effectué pendant un temps donné, lorsqu'on a suspendu l'action de la force accélératrice, étant produit par les actions répétées de cette force pendant le temps donné, il est naturel de supposer que, si la variation de la vitesse est constante au bout de chaque seconde de mouvement varié, la force qui produit cet effet est également constante. Aussi, dit-on qu'une *force accélératrice constante* ne peut produire qu'un mouvement uniformément varié. Nous démontrerons bientôt cette proposition plus rigoureusement.

Les forces ne peuvent être comparées entre elles que par les effets qu'elles produisent. Or, l'accroissement de vitesse communiqué pendant l'unité de temps est visiblement proportionnel à l'intensité des impulsions qui ont lieu à chaque instant, et par suite à celle de la force. Cet accroissement peut donc être pris pour la mesure d'une force accélératrice constante. Ainsi, dans un mouvement uniformément varié, la force qui le produit est mesurée par la quantité dont varie la vitesse au bout de chaque seconde de mouvement.

§ 29. *Mesure des forces accélératrices dans le mouvement varié en général.* — Lorsqu'une force accélératrice est variable, la variation de la vitesse pour chaque unité de temps n'est plus constante, mais sa grandeur à un instant donné fait encore connaître l'intensité de la force. Pour en avoir l'expression, on la compare à une force accélératrice constante : ces forces sont proportionnelles aux changements infiniment petits de vitesse qu'elles communiqueraient chacune en particulier au mobile à l'instant que l'on considère, ou aux vitesses finies qui résulteraient de ces changements, en supposant qu'ils eussent lieu d'une manière constante pendant une seconde. Par cette considération, les forces accélératrices variables se trouvent mesurées au moyen de celles qui sont constantes, dont l'appréciation sera nécessairement plus facile, puisque leur manière d'agir est plus simple.

MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ.

§ 30. *Equation fondamentale du mouvement uniformément varié.* — L'équation fondamentale de ce mouvement se déduit aisément de sa définition. En effet, prenons le cas où une seule force accélératrice constante sollicite un mobile : elle lui communiquera un mouvement rectiligne. Mais, pour plus de généralité, supposons que le mobile, avant d'être soumis à l'action de cette force, ait été mis en mouvement par une autre force instantanée, dont l'effet a été de communiquer au mobile, en vertu de son inertie, un mouvement rectiligne, uniforme et perpétuel. Soit b la vitesse communiquée au mobile par cette force à l'instant où la force accélératrice s'en empare, et le sollicite dans la même direction, sinon dans le même sens. Son effet s'ajoute à celui de la force instantanée, ou s'en retranche, suivant qu'elle agit dans le même sens ou dans le sens contraire. Or, l'effet de la force instantanée consiste à communiquer au mobile une vitesse de b^m par seconde. Celui de la force accélératrice consiste à faire varier la vitesse d'une quantité constante pour chaque seconde. Il en résulte donc que, si au bout d'une seconde pendant laquelle la force accélératrice a agi sur le mobile, on suppose l'action de cette force suspendue, le mouvement, de varié qu'il était, redeviendra uniforme, et la vitesse dans ce nouveau mouvement se composera de la vitesse initiale b du mobile, augmentée ou diminuée de la variation de vitesse communiquée au mobile par la force accélératrice pour chaque seconde. Si l'on désigne par a cette variation pour une seconde de mouvement varié, la vitesse du mobile dans le mouvement uniforme qui succède au mouvement varié, ou ce que nous avons appelé la vitesse du mobile au bout d'une seconde, aura pour valeur $b \pm a$; et comme la force accélératrice a pour effet d'augmenter ou de diminuer cette vitesse de a pour chaque seconde, la vitesse du mouvement uniforme qui succédera au mouvement varié, qui se sera exécuté pendant 2, 3,.... secondes, ou enfin la vitesse du mobile au bout de 2, 3,... secondes, sera $b \pm 2a$, $b \pm 3a$...., de sorte qu'au bout d'un temps t de mouvement varié, la vitesse du mobile sera $b \pm at$; $b + at$, si la force est accélératrice, $b - at$, si elle est retardatrice. Si l'on désigne par v cette vitesse qu'acquiert ainsi le mobile au bout du temps t de mouvement varié, on aura l'équation

$$v = b \pm at.$$

C'est l'équation fondamentale du mouvement uniformément varié, le signe + appartenant au mouvement uniformément accéléré, et le signe — au mouvement uniformément retardé. La valeur de v obtenue par l'équation précédente doit être considérée comme la vitesse acquise par le mobile au bout du temps t, pendant lequel le mouvement a été varié, ou, pour le répéter encore, c'est la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié, si, au bout de ce temps t, on venait à suspendre l'action de la force accélératrice.

§ 31. *Valeur de l'espace parcouru pendant un temps donné dans le mouvement uniformément accéléré.* — L'équation précédente va nous fournir le moyen de trouver l'espace parcouru par un mobile dans le mouvement uniformément varié pendant le temps t, au bout duquel la vitesse acquise est $b \pm at$. Prenons d'abord le cas où le mouvement est accéléré, et représentons le temps t par la ligne AB (*fig.* 4), c'est-à-dire prenons sur AB autant d'unités de ligne qu'il y a dans t d'unités de temps. Au point A, élevons une perpendiculaire AC sur AB, égale à b, ou à la vitesse initiale du mobile, lorsqu'il n'a encore été sollicité que par la force instantanée. Au point B, élevons une autre perpendiculaire BD, égale à $b+at$, c'est-à-dire à la vitesse acquise par le mobile au bout du temps t de mouvement varié. Menons CD. La surface du trapèze $ABDC$ représentera l'espace parcouru par le mobile pendant le temps t, c'est-à-dire qu'il y aura dans ce trapèze autant d'unités de surface qu'il y a d'unités de longueur dans l'espace parcouru. Pour le démontrer, prouvons d'abord que, si Ax représente un temps t' quelconque pendant lequel le mouvement est accéléré, la perpendiculaire xy à AB, menée jusqu'à la rencontre de CD, représentera la vitesse du mobile au bout de ce temps t'. Il suffit de faire voir pour cela que xy satisfait à l'expression générale de la vitesse au bout du temps t', qui serait $v' = b + at'$. Or, on a :

$$xy = xk + ky = AC + ky = b + ky; \text{ et}$$
$$ky : ID :: CK : CI; \text{ ou } ky : at :: t' : t; \text{ d'où}$$
$$ky = at'; \text{ et } xy = b + at'.$$

Maintenant, supposons le temps t ou AB partagé en un nombre infini d'instants infiniment petits, tels que xx'. Le mouvement, pendant l'un de ces instants, pourra être considéré comme étant uniforme, et s'effectuant avec une vitesse égale à xy, qui est celle que le mobile possède à l'origine de ce mouvement partiel. L'espace parcouru pendant cet instant sera égal à la vitesse multipliée par le temps, ou à $xx' \times xy$, ou enfin à la surface du petit rectangle $xyz'x'$. En raisonnant de même pour un autre instant $x'x''$, on voit que l'espace parcouru pendant cet instant serait représenté par la surface du petit rectangle $x'y'z''x''$; et ainsi de suite. La somme de tous ces petits rectangles pourra donc représenter l'espace total parcouru pendant le temps t. Or, plus nous supposerons grand le nombre des divisions de t ou de AB, plus l'hypothèse dont nous sommes partis sera vraie : nous voulons parler de la constance de la vitesse avec laquelle s'effectue chaque mouvement uniforme partiel; car, les deux lignes xy, $x'y'$, qui sont la vitesse à l'origine et à la fin du mouvement, approcheront d'autant plus de l'égalité. En même temps, il est facile de voir que les triangles $yy'z'$, $y'y''z''$, etc., deviendront de plus en plus petits, et qu'ainsi la somme des petits rectangles se rapprochera d'autant plus du trapèze total. En effet, il est aisé de voir qu'en divisant en deux parties égales les instants xx', $x'x''$....., cette division, pour chaque instant, réduira chaque triangle $y''z'''y'''$ à deux autres petits triangles dont la somme sera la moitié du triangle total. On peut donc en conclure qu'à la limite, c'est-à-dire lorsque le nombre des divisions de AB sera infiniment grand, la somme des rectangles se confondra avec la surface du trapèze $ABDC$. Or, ce trapèze égale le *rectangle* $ABIC$ plus le *triangle* CDI; *rectangle* $ABIC = bt$; *triangle* $CDI = CI \times \frac{DI}{2} = \frac{t.at}{2} = \frac{at^2}{2}$. Donc, si e représente l'espace parcouru pendant le temps t, on aura :

$$e = bt + \frac{at^2}{2}.$$

§ 32. *Prouver directement qu'une force accélératrice constante produit un mouvement uniformément accéléré.* — Pour arriver aux formules précédentes qui donnent, l'une, la vitesse du mobile au bout d'un temps t de mouvement uniformément varié; l'autre, l'espace que le mobile a dû parcourir pendant ce temps pour acquérir cette vitesse, nous sommes partis de la définition du mouvement uniformément varié, § 27, et de l'hypothèse que ce mouvement était produit par une force accélératrice constante. On peut donner une démonstration plus rigoureuse des équations de ce mouvement par la seule considération du mouvement uniforme, en opérant comme l'a fait M. Lacroix dans son *Traité de calcul différentiel et intégral.*

La question que nous nous proposerons donc ici sera renversée. Elle consistera à déterminer la nature du mouvement produit par une force accélératrice constante. Pour cela, nous supposerons que son action sur le mobile est remplacée par celle d'une force instantanée, égale en intensité à cette force même, et agissant à des intervalles aussi rapprochés que nous le voudrons; ce qui ne peut atténuer la rigueur de la démonstration, puisque nous supposerons en dernier lieu que les intervalles sont annulés, et qu'ainsi la loi de continuité est rétablie.

Au lieu donc de supposer que la force accélératrice agit constamment, concevons que ses actions, toujours égales, soient instantanées comme celles de l'impulsion, et qu'elles se répètent à des intervalles marqués par une fraction $\frac{1}{m}$ de la seconde prise pour unité de temps. Le mobile recevra donc pendant l'unité de temps un nombre m de ces actions, dont les effets, s'ajoutant entre eux, lui imprimeront, au bout de ce temps, une vitesse totale que nous représenterons par a. La vitesse qui résulterait d'une seule action serait donc $\frac{a}{m}$, toujours pour l'unité de temps. Ainsi, pendant la fraction $\frac{1}{m}$, le mobile ne parcourrait que l'espace

$$\frac{a}{m}\times\frac{1}{m}=\frac{a}{m^2}.$$

Au commencement du deuxième intervalle, la vitesse serait $\frac{2a}{m}$, et l'espace parcouru pendant cet intervalle, $\frac{2a}{m^2}$; et ainsi de suite. On pourra donc établir la correspondance suivante entre les diverses époques des impulsions, les vitesses effectives qui ont lieu au commencement de ces impulsions, ou à chaque nouvelle époque, et les espaces parcourus dans les intervalles consécutifs compris entre ces époques.

Époques : o, $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$, . . . $\frac{n-1}{m}$, $\frac{n}{m}$;

vitesses : $\frac{a}{m}$, $\frac{2a}{m}$, $\frac{3a}{m}$, $\frac{4a}{m}$, . . . $\frac{na}{m}$;

espaces : $\frac{a}{m^2}$, $\frac{2a}{m^2}$, $\frac{3a}{m^2}$, ... $\frac{na}{m^2}$.

La somme de tous ces espaces dont le nombre est n, sera, par la formule relative aux progressions par différence,

$$\left(\frac{a}{m^2}+\frac{na}{m^2}\right)\frac{n}{2}=\frac{a}{2}\left(\frac{n}{m^2}+\frac{n^2}{m^2}\right).$$

Maintenant, si l'on observe qu'un nombre quelconque de secondes, désigné par t, contient un nombre mt d'intervalles égaux à $\frac{1''}{m}$, et qu'on fasse $n=mt$, l'expression précédente deviendra

$$\frac{a}{2}\left(\frac{n}{m^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)=\frac{at}{2}\left(\frac{1}{m}+t\right),$$

qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$e=\frac{at}{2}\left(\frac{1}{m}+t\right)=\frac{at^2}{2}+\frac{at}{2m},$$

en désignant par e l'espace parcouru pendant le temps t.

Cette valeur de e se compose d'une partie $\frac{at^2}{2}$ indépendante de m, et par conséquent de l'intervalle qui sépare les actions instantanées de la force constante impulsive; donc, cette première partie sera toujours constante, quel que soit le nombre des intervalles compris dans une seconde, et par conséquent celui des actions impulsives. La seconde partie $\frac{at}{2m}$ diminue dans le même rapport que le nombre m augmente. Si donc les impulsions se succèdent à des intervalles de plus en plus resserrés, la fraction $\frac{1}{m}$ devenant de plus en plus petite, la seconde partie de la valeur de e diminuera elle-même de plus en plus, de sorte que la valeur de e différera de moins en moins de son premier terme $\frac{at^2}{2}$. Si donc, pour rétablir la loi de continuité, on imagine que les intervalles qui séparent les impulsions consécutives instantanées sont nuls ou infiniment petits, il faudra faire m égal à l'infini dans la formule, ce qui anéantit la fraction $\frac{1}{m}$ et par conséquent aussi le terme $\frac{at}{2m}$, et conduit rigoureusement à une limite dont on a pu s'approcher par degrés insensibles. La valeur de e sera donc rigoureusement égale à

$$e=\frac{at^2}{2}.$$

Si enfin nous désignons par v la vitesse résultante des actions exercées par la force, au commencement du n.ième ou du dernier intervalle de temps, on aura

$$v=\frac{na}{m};$$

remplaçant n par sa valeur mt, on a

$$v=\frac{mta}{m}=at.$$

Les deux équations $e=\frac{at^2}{2}$, $v=at$, supposent que le mobile est parti du repos. Si le corps avait reçu une impulsion instantanée avant d'être sollicité par la force accélératrice, l'effet constant de cette force ne saurait s'altérer, et ne peut que s'ajouter à celui de la force accélératrice. Ainsi, pour avoir la vitesse effective du mobile, il suffit d'ajouter la vitesse b communiquée par la force instantanée, à la vitesse at imprimée par la force accélératrice, ce qui donne pour v,

$$v=b+at.$$

Pour avoir l'espace parcouru, il faut remarquer encore qu'il se compose d'une partie due à la force instantanée, et dont l'expression est bt, plus de celle due à la force accélératrice, et dont l'expression a été trouvée égale à $\frac{at^2}{2}$. Il vient donc

$$e=bt+\frac{at^2}{2}.$$

Ces deux formules sont celles auxquelles nous sommes déjà parvenus.

§ 33. *Des formules qui donnent l'espace parcouru pendant un temps donné, et la vitesse acquise au bout de ce temps, on en déduit une troisième.* — Les formules

$$v=b+at\ldots(1),\quad e=bt+\frac{at^2}{2}\ldots(2)$$

faisant connaître, l'équation (2), l'espace parcouru pendant le temps t dans le mouvement uniformément accéléré, et l'équation (1), la vitesse acquise par le mobile au bout de ce même temps t, suffisent pour résoudre toutes les questions que l'on peut se proposer sur ce mouvement. En éliminant t, par exemple, entre (1) et (2), et cherchant la valeur de v, on trouve

$$v^2 = b^2 + 2\,a\,e \ldots\ldots (3);$$

ce qui ne donne plus, comme (1), la vitesse acquise au bout du temps t de mouvement uniformément accéléré, mais celle acquise par le mobile après avoir parcouru l'espace e d'un même mouvement. C'est donc la vitesse en fonction de l'espace que le mobile a dû parcourir pour acquérir cette vitesse.

§ 34. *Formules du mouvement uniformément accéléré lorsque la vitesse initiale est nulle, et lois que l'on en déduit.* — Si la vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire si le mobile part du repos, il n'est plus soumis qu'à l'action de la force accélératrice constante. Alors, les équations (1), (2) et (3) se simplifient, et donnent, en faisant $b = o$:

$$v = a\,t \ldots (4);\quad e = \frac{a\,t^2}{2} \ldots (5);\quad v^2 = 2\,a\,e \ldots (6).$$

La première, l'équation (4), est la traduction algébrique de cette loi : *Les vitesses, à des époques quelconques du mouvement, sont proportionnelles aux temps écoulés depuis l'origine de ce mouvement.* La seconde, l'équation (5), peut s'énoncer ainsi : *L'espace parcouru pendant un temps quelconque est proportionnel au carré de ce temps;* et la troisième, l'équation (6) : *Le carré de la vitesse acquise après un certain espace parcouru, est proportionnel à cet espace.* On voit en effet, dans la première, que a étant une quantité constante, si le temps t qui entre au second membre devient successivement 1, 2, 3,..... t, la valeur de v fournira le tableau suivant :

	Temps.		Vitesses.
Vitesse acquise au bout de..	1" de mouvement	accéléré..	1. a
id.	2"	*id.*	2. a
id.	3"	*id.*	3. a
id.	. . . .	. . . .	. . .
id.	. . . .	. . . .	. . .
id.	t"	*id.*	t. a

Les nombres renfermés dans la colonne des vitesses sont entre eux comme les temps pendant lesquels le mobile s'est mû d'un mouvement accéléré. On voit également dans la seconde que, $\frac{a}{2}$ étant une quantité constante, si le temps t devient successivement 1, 2, 3.... t, la valeur de e fournira le tableau suivant :

	Temps.	Espaces.
Espace parcouru pendant	1 seconde. . . .	$\frac{a}{2} \times 1$
Id.	2 secondes . . .	$\frac{a}{2} \times 4$
Id.	3 secondes . . .	$\frac{a}{2} \times 9$
Id.	. . . .	
Id.	. . . .	
Id.	t secondes.. . .	$\frac{a}{2} \times t^2$

Les nombres renfermés dans la colonne des espaces sont entre eux comme les nombres 1, 4, 9..... carrés des nombres 1, 2, 3..... qui expriment les temps pendant lesquels le mouvement uniformément accéléré a eu lieu. Enfin, dans la troisième équation, 2 a étant une quantité constante, lorsque e devient successivement double, triple, quadruple... la valeur v^2 devient successivement quatre fois, neuf fois, seize fois.... plus grande, ce qui justifie la loi énoncée que : *Les espaces parcourus sont entre eux comme les carrés des vitesses.*

On pourrait encore tracer un tableau analogue aux précédents, en tirant de l'équation (6) la valeur de e, ce qui donne

$$e = \frac{v^2}{2\,a},$$

et en faisant la vitesse v successivement égale à 1^m, 2^m, 3^m..... v^m. On a ainsi :

Espace parcouru pour acquérir une vitesse de.. 1^m.. $\frac{1}{2a} \times 1^2$

Id. . . . . 2^m.. $\frac{1}{2a} \times 2^2$

Id. . . . . 3^m.. $\frac{1}{2a} \times 3^2$

Id. . . . .

Id. . . . . v^m.. $\frac{1}{2a} \times v^2$

On parviendrait également à justifier l'énoncé de ces trois lois en désignant, en général, par e et e' deux espaces parcourus pendant les temps t et t', et par v et v' les vitesses acquises au bout de ces temps. On aurait alors les deux séries d'équations suivantes :

$$v = at;\ e = \frac{at^2}{2};\ v^2 = 2ae;$$

$$v' = at';\ e' = \frac{at'^2}{2};\ v'^2 = 2ae'.$$

Divisant membre à membre dans les équations correspondantes, il vient :

$$\frac{v}{v'} = \frac{t}{t'};\ \frac{e}{e'} = \frac{t^2}{t'^2};\ \frac{v^2}{v'^2} = \frac{e}{e'}.$$

§ 35. *Vitesse acquise au bout d'une seconde.* — En faisant $t = 1$ dans l'équation (5), on trouve $e = \frac{1}{2}a$; ce qui fait voir que l'espace parcouru pendant la première seconde est égal à la moitié de la vitesse acquise au bout de ce temps, et que, par conséquent, la vitesse acquise au bout de la première seconde est double de l'espace parcouru pendant ce temps. Ainsi, quand l'action de la force a été suspendue après la première seconde, l'espace parcouru pendant la seconde qui suit, dans le mouvement uniforme qui succède au premier, est double de celui qui a été parcouru pendant la première seconde. Nous allons reconnaître que cette circonstance n'est pas particulière au temps exprimé par une seconde.

§ 36. *Rapport qui existe entre les espaces parcourus pendant le même temps dans le mouvement uniformément accéléré et dans le mouvement uniforme qui lui succède.* — En effet, au bout du temps t, l'espace parcouru est $\frac{1}{2}at^2$. La vitesse au bout de ce temps étant at, si on laisse mouvoir le mobile d'un mouvement uniforme pendant un temps équivalent t, il décrirait un espace égal à $at \times t$ ou at^2. Cette quantité est double de $\frac{1}{2}at^2$, valeur de l'espace qu'il a déjà parcouru d'un mouvement uniformément accéléré. On peut conclure de là que : *Si au bout d'un temps quelconque pendant lequel un mobile s'est mû d'un mouvement uniformément accéléré, on suppose l'action de la force accélératrice suspendue, le mouvement devenant uniforme, pendant un temps égal, le mobile parcourra un espace double de celui qu'il a parcouru durant la première espèce de mouvement.*

On peut se rendre compte de ce dernier résultat par une figure. En effet (*fig.* 5), le trapèze $ABCD$ représentant l'espace parcouru pendant le temps AB, lorsque la vitesse initiale n'est pas nulle, si l'on fait partir le mobile du repos, il faut retrancher de la figure la partie $ABIC$ qui représente l'espace parcouru en vertu de la force instantanée. Il reste alors le triangle CDI pour expression de l'espace parcouru lorsque le mobile part du repos, pendant le même temps AB. Si, après ce temps, l'action de la force accélératrice est suspendue, le mouvement devient uniforme, et comme la vitesse acquise au bout du temps AB est DI, l'espace parcouru dans le mouvement uniforme qui succède au mouvement varié est alors représenté par l'aire du rectangle $DIEF$ dont la base est AB. Or, l'aire de ce rectangle est double de celle du triangle CDI; donc, pendant le même temps, l'espace parcouru dans le mouvement uniforme est double de celui qui a été déjà parcouru dans le mouvement varié.

§ 37. *Espaces parcourus pendant les secondes successives.* — En nommant e' l'espace parcouru pendant un nombre de secondes représenté par $t + 1$, on aura par la formule (5), $e' = \frac{a}{2}(t+1)^2$, ou $e' = \frac{a}{2}(t^2+2t+1)$. Si de cette équation on soustrait membre à membre $e = \frac{a}{2}t^2$, qui donne l'espace parcouru pendant t secondes, la différence $e' - e$ donnera l'espace parcouru pendant la seconde qui suit t, ou, $e' - e = \frac{a}{2}(2t+1)$. Si dans cette formule on fait successivement t égal à 0, 1, 2....., les valeurs de $e' - e$ seront celles des espaces parcourus pendant la première seconde, pendant la deuxième, la troisième........ on tracera ainsi le tableau suivant :

	Temps.	*Espaces.*
$t = 0$; espace parcouru pendant la	1re seconde.....	$\frac{a}{2}$ 1
$t = 1$; . . . . . *id.*	2e *id.*........	$\frac{a}{2}$ 3
$t = 2$; . . . . . *id.*	3e *id.*........	$\frac{a}{2}$ 5
$t = 3$; . . . . . *id.*	4e *id.*........	$\frac{a}{2}$ 7
. . . .	. . . . .	. . .

On voit que les nombres de la colonne des espaces sont entre eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7......; et comme les espaces parcourus pendant la première seconde, pendant la deuxième, la troisième........., sont respectivement proportionnels au premier nombre impair, au deuxième, au troisième........, on peut en conclure que les *espaces par-*

courus pendant les secondes successives sont proportionnels à la suite naturelle des nombres impairs de même rang.

§ 38. *Formules du mouvement uniformément retardé.* — Les formules du mouvement uniformément retardé se déduiront de celles du mouvement accéléré, en changeant le signe de a. Il vient alors :

$$v = b - a\,;\ e = bt - \frac{a t^2}{2}\,;$$

a désignant le décroissement de la vitesse au bout de chaque seconde, et pouvant servir de mesure à la force retardatrice.

Il est également possible d'arriver à ces deux formules par des considérations géométriques analogues à celles relatives au mouvement accéléré. L'effet de la force retardatrice constante étant de faire décroître la vitesse initiale de la quantité a pour chaque seconde, la vitesse du mobile, au bout du temps t, sera égale à la vitesse initiale moins autant de fois la quantité a qu'il y a d'unités dans t; ce qui conduit à l'équation fondamentale $v = b - a\,t$. Pour déduire de là la valeur de l'espace parcouru pendant le temps t, nous ferons une figure analogue à la première, dans laquelle le temps sera toujours représenté par $A\,B$, (*fig.* 6), la vitesse initiale par $A\,C$ et la vitesse finale $b - a\,t$ par $B\,D$. On démontrera d'une manière tout à fait analogue que l'espace parcouru pendant le temps t ou $A\,B$ est représenté par la surface du trapèze $A\,B\,D\,C$. En évaluant cette surface, on la trouve égale au rectangle $A\,B\,K\,C$, moins le triangle $C\,K\,D$; ou, en définitive $e = bt - \frac{a}{2}\,t^2$. Cette équation a déjà été trouvée par le simple changement de signe de a dans l'équation (2). La troisième équation se déduit des deux premières par l'élimination de t, ou de l'équation (3) par le changement de signe de a. On a ainsi $v^2 = b^2 - 2\,a\,e$. Les équations du mouvement uniformément retardé sont donc :

$$v = b - a\,t\ldots.;\ e = bt - \frac{a\,t^2}{2}\ldots.,\ v^2 = b^2 - 2\,a\,e.$$

§ 39. *Problème sur le mouvement uniformément retardé, et théorème que l'on en déduit.* — Les équations de ce nouveau mouvement conduisent à la solution du problème suivant : *Après combien de temps la force retardatrice aura-t-elle réduit la vitesse initiale à zéro, et quel sera l'espace parcouru à cette époque?*

La première condition donne $v=0$, ou $b-at=0$; d'où $t=\frac{b}{a}$; c'est le temps cherché. Cette valeur étant substituée dans l'équation qui donne l'espace, on aura, toutes réductions faites : $e=\frac{b^2}{2a}$; mais on a trouvé, lorsque le mouvement était accéléré, $e=\frac{v^2}{2a}$; cette équation, rapprochée de la précédente, fait voir que, si l'on suppose dans les questions qui les ont fournies, les espaces parcourus égaux, les vitesses b et v seront égales aussi; d'où l'on déduit ce théorème :

Lorsqu'un corps est soumis à l'action d'une force accélératrice constante, la vitesse qu'il acquiert en décrivant un certain espace, est égale à celle qu'il faudrait lui communiquer instantanément pour qu'il parvînt au repos après avoir décrit un espace égal, en le supposant sollicité dans ce nouveau mouvement par une force retardatrice de même intensité que la force accélératrice.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES VITESSES.

§ 40. *Cas où un corps serait soumis à l'action simultanée de plusieurs forces.* — Nous avons supposé jusqu'ici que le mobile était soumis à l'action d'une seule force. Il peut arriver que plusieurs forces d'intensités et de directions différentes agissent sur lui. Alors la forme de la trajectoire et la grandeur de la vitesse éprouveront des variations dépendantes des directions et des intensités des forces; ou, ce qui est la même chose, des vitesses qu'elles tendraient à imprimer au mobile, si elles agissaient seules sur lui.

§ 41. *Résultantes de plusieurs vitesses et composantes d'une vitesse donnée.* — Lorsqu'on imprime à un corps plusieurs vitesses de grandeurs et de directions diverses, il prend un mouvement qui s'exécute avec une vitesse qui s'appelle leur *résultante;* et les vitesses dont l'action combinée est représentée par la résultante, en sont les *composantes.*

§ 42. *Vitesse résultante de plusieurs vitesses de même direction.* — Les théorêmes suivants peuvent être admis sans démonstration, car lorsqu'on imprime à un corps des vitesses dans la même direction, celles qui agissent dans le même sens s'ajoutent entre elles, et s'il en existe agissant dans le sens contraire, elles sont anéanties en tout ou en partie par les premières, de telle sorte que la résultante n'est plus alors que la différence entre les unes et les autres. Ainsi : la vitesse résultante de plusieurs vitesses de même sens et de même direction, est égale à leur somme, et elle a le même sens et la même direction.

La vitesse résultante de deux vitesses directement opposées est égale à la différence de ces mêmes vitesses, et elle a le même sens que la plus grande.

La vitesse résultante de plusieurs vitesses de même direction et de sens quelconque est égale à la somme des vitesses qui ont lieu dans un sens moins la somme de celles qui ont lieu dans l'autre, et elle a le sens des vitesses dont la somme est la plus grande.

§ 43. *Résultante de deux vitesses de grandeurs et de directions différentes, ou théorême connu sous le nom de parallélogramme des vitesses. Indépendance des vitesses simultanées dans un même corps.* — Si deux vitesses sont représentées en grandeur et en direction par les deux côtés d'un parallélogramme, leur vitesse résultante sera aussi représentée en grandeur et en direction par la diagonale de ce parallélogramme.

Avant d'entreprendre la démonstration de ce théorème, nous allons d'abord faire voir que lorsqu'un corps a plusieurs mouvements simultanés, le véritable mouvement est le même que si le corps recevait l'une après l'autre toutes les vitesses qu'on lui imprime en même temps. Supposez que pendant qu'un bateau chemine sur une rivière, un homme se dirige d'un bord à l'autre de ce bateau, et que partant de A, (*fig.* 7), par exemple, il soit arrivé en B au moment où le bateau est parvenu dans une position telle que le point A soit en A' et le point B en B'. Quoique l'homme n'ait parcouru que le chemin AB sur le bateau, le chemin qu'il a décrit par rapport aux rives n'est pas AB, mais bien Ab'. Car, supposons que le bateau se soit avancé de Aa pendant que l'homme, quittant les flancs du bateau, s'en est éloigné de Ab. Après le transport, cet homme ne se trouve pas en b, mais en b' à la même distance $b'a$ des flancs du bateau. S'il laissait sa trace sur le fleuve à chaque instant de son mouvement, la série des points b', b''... formerait sa trajectoire, que nous démontrerons tout à l'heure être la diagonale AB'. Maintenant, l'homme sera également arrivé en B', si le bateau marche d'abord de A en A', et si l'homme se transporte ensuite de A' en B'; ou, si le bateau s'arrête pendant que l'homme va de A en B, et qu'ensuite, l'homme demeurant au repos en B, le bateau s'avance de A en A'. Le même mouvement a donc eu lieu, soit que les vitesses aient agi simultanément, soit qu'elles aient agi séparément.

Maintenant (*fig.* 8), soient v et v', les deux vitesses sollicitant le point m; mf et mf' des quantités proportionnelles à leur grandeur. D'après ce que nous venons de dire, l'effet particulier de chaque vitesse sur le mobile ne peut être altéré, soit que ces vitesses agissent simultanément, soit qu'elles agissent séparément. Or, si le mobile n'était soumis qu'à la seule action de la vitesse v, il occuperait successivement les points a, b, f; si, au contraire, il n'obéissait qu'à la seule action de la vitesse v', il occuperait dans les mêmes temps les points a', b', f', tels que ma', $a'b'$, $b'f'$, aient avec mf' les mêmes rapports que ma, ab, bf, ont avec mf. Cela posé, supposons qu'on soumette à l'action de v' le mobile arrivé en a. Cette action sera capable dans le même temps de l'amener en m' sur am' parallèle à mv', et telle que $am' = ma'$. Opérons en b sur le mobile d'une manière analogue, et ainsi de suite pour les autres points. Par l'effet combiné des deux vitesses, le mobile occupera donc successivement les points m', m'', m''', sommets des parallélogrammes $mam'a'$, $mbm''b'$, $mfm'''f'$. Donc la résultante passera par tous ces points.

Pour prouver que ces points sont en ligne droite, remarquons que les triangles mam', mfm''' sont semblables, comme ayant un angle $a = f$ compris entre côtés proportionnels, car $ma : mf :: ma' : mf'$ ou, $:: am' : fm'''$. Alors les angles amm', fmm''' sont égaux, et les côtés mm', mm''' se confondent, ce qui place les trois points m, m', m''' sur une même ligne droite. On démontrerait de la même manière que les autres positions qu'atteindrait le mobile sont sur la même droite mm'''. Enfin, comme le mobile met pour arriver en m', m'', m''', le même temps que pour arriver aux points a, b, f ou a', b', f', quand il est soumis à l'action de l'une ou de l'autre vitesse, il s'ensuit que mm''' représentera en grandeur, aussi bien qu'en direction, la vitesse résultante. Mais cette ligne est la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes mf, mf' qui représentent les deux vitesses v et v'. Donc, etc.

§ 44. *La résultante est moindre que la somme des composantes et plus grande que leur différence.* — La vitesse résultante est moindre que la somme des vitesses composantes et plus grande que leur différence : car, dans le triangle mvr, (*fig.* 9), un côté quelconque mr est toujours plus petit que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence.

§ 45. *Trouver les rapports qui existent entre trois vitesses concourantes, lorsque l'une d'entre elles est la résultante des deux autres.* — On peut conclure aussi de ce qui précède que si trois vitesses v, v', r, (*fig.* 10), agissant sur un mobile, sont telles que l'une d'elles soit la résultante des deux autres, en prenant un point r sur cette résultante, et menant par ce point des parallèles aux deux autres vitesses, les parties interceptées mv, mv', seront proportionnelles à ces vitesses, lorsque la résultante le sera à la ligne mr.

Le point pourrait être pris également sur le prolongement de la résultante, en r' par exemple, et les trois droites mr', mr'', mv'' auraient encore entre elles les mêmes rapports que les trois vitesses r, v, v'; car les triangles semblables mrv', $mr'v''$ nous donnent la suite de rapports égaux :

$$\frac{mr'}{mr} = \frac{r'v''}{rv'} = \frac{mv''}{mv'}; \text{ ou, } \frac{mr'}{r} = \frac{r'v''}{v} = \frac{mv''}{v'}.$$

On prouverait de la même manière que si le point était pris sur l'une quelconque des trois vitesses ou sur leur prolongement, comme en r'', par exemple, ou en r''', on obtiendrait de la même manière les rapports des trois vitesses entre elles.

§ 46. *Rapports qui existent entre les trois vitesses et les angles qu'elles forment entre elles, lorsqu'elles maintiennent le mobile en équilibre.* — Si, pendant que le mobile est soumis à l'action des vitesses v et v', on lui imprime en même temps une vitesse mr' (*fig.* 11), égale à la vitesse résultante mr, et dans un sens directement opposé, on voit que le mobile reste en équilibre, en vertu de l'effet produit par les trois vitesses v, v', r'.

Le triangle mvr a pour côté les lignes mv, vr, mr, proportionnelles aux trois vitesses v, v', r', et ses angles sont les suppléments de ceux formés par les vitesses, lorsqu'elles se font équilibre : car vmr est supplément de V', mvr supplément de R, et $vrm = rmv'$ supplément de V. Or, comme les trois côtés d'un triangle sont proportionnels aux sinus des angles opposés, et que les angles du triangle ont le même sinus que leurs suppléments, nous aurons, entre les grandeurs des vitesses et les angles qu'elles font entre elles pour l'équilibre, la relation

$$v : v' : r :: sin.\, vrm : sin.\, vmr : sin.\, mvr ;\ \text{ou}$$

$$:: sin.\, V : sin.\, V' : sin.\, R.$$

Ces considérations suffisent pour faire voir que les quatre cas de la résolution des triangles rectilignes trouveront ici leur application, et qu'ils renfermeront la solution algébrique des diverses questions que l'on pourra se proposer sur les vitesses concourantes.

§ 47. *Première application trigonométrique du parallélogramme des vitesses.* — Nous pouvons, par exemple, résoudre trigonométriquement le problème de la composition de deux vitesses concourantes. Car (*fig.* 12), les grandeurs des vitesses v et v' étant données en nombres, ainsi que l'angle vmv' qu'elles font entre elles, si l'on se propose de trouver la grandeur et la direction de la vitesse résultante, on connaîtra, dans le triangle mvr, deux côtés et l'angle compris; car on connaîtra l'angle v, supplément de l'angle vmv'. Ces données suffisent pour déterminer les autres parties du triangle, c'est-à-dire les autres angles, qui donnent la direction de la résultante, et le troisième côté, qui donne sa grandeur.

Application : soient $v = 5^m,2$; $v' = 7^m$; et angle $vmv' = 84° 29' 50''$. On doit trouver $v'mr = 34° 37' 10''$; $vmr = 49° 52' 40''$; et $mr = 9^m, 11$.

§ 48. *Conditions géométriques et algébriques de l'équilibre de trois vitesses concourantes.* — D'après tout ce qui précède, il est aisé d'établir les conditions géométriques et algébriques de l'équilibre de trois vitesses agissant sur un mobile. Géométriquement, *les trois vitesses doivent être dans un même plan, et chacune d'elles doit être égale en grandeur à la diagonale du parallélogramme construit sur* *les lignes qui représentent les deux autres, et directement opposée à cette diagonale.* Algèbriquement, *la condition pour les vitesses d'être dans un même plan reste la même, et chacune d'elles doit être proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

§ 49. *Seconde application trigonométrique sur le parallélogramme des vitesses.* — Un second cas de la résolution des triangles trouve ici son application : *Un mobile étant soumis à l'action de trois vitesses d'une grandeur donnée, trouver les directions que doivent avoir entre elles ces trois vitesses pour que le mobile reste en équilibre.* Pour résoudre la question géométriquement (*fig.* 13), il suffit de construire un triangle vmr dont les trois côtés soient égaux aux vitesses données, et achevant le parallélogramme $vmv'r$, de prolonger sa diagonale d'une quantité égale mr'. Alors, si l'on imprime au mobile m trois vitesses égales aux trois lignes mv, mv', mr', et dans leurs directions respectives, le mobile restera en équilibre sous l'action combinée de ces trois vitesses.

Pour résoudre la question trigonométriquement, on remarquera que les trois côtés du triangle vmr étant donnés, on peut parvenir, à l'aide des formules employées dans ce cas, à la connaissance des trois angles, dont les suppléments seront les angles que doivent faire entre elles les trois vitesses pour l'équilibre.

Application : soient $v = 1^m,35$; $v' = 6^m,4$; $r = 7^m$. On trouve :

$$vrm = 10°21'56''; \quad vmr = 58°32'44''; \quad mvr = 111°5'20'',$$

dont les suppléments V, V', R sont :

$$V = 169°38'4''; \quad V' = 121°27'16''; \quad R = 68°54'40''.$$

§ 50. *Composition d'un nombre quelconque de vitesses concourantes.* — Quand on sait composer deux vitesses en une seule, il est aisé d'en composer un nombre quelconque : il suffit pour cela de chercher la résultante de deux d'entre elles, et de la composer avec la troisième, puis cette dernière résultante avec la quatrième vitesse, et ainsi de suite jusqu'à la dernière. La dernière résultante donnera la grandeur et la direction de la résultante générale.

En composant l'avant-dernière vitesse avec la résultante de la composition précédente, si l'on obtient une vitesse égale et directement opposée à la dernière, il y a alors équilibre entre toutes les vitesses.

§ 51. *Procédé rapide pour trouver la résultante de plusieurs vitesses concourantes.* — Si l'on suit avec attention sur la figure la construction géométrique qui conduit à la détermination de la résultante R (*fig.* 14), des vitesses v, v', v'', v''', v^{IV}, on remarquera que la première vitesse mv, la parallèle vr menée à la seconde vitesse mv', la parallèle rr' menée à la troisième vitesse mv'', etc., forment un polygone qui se trouve fermé par la résultante R, et que si l'avant-dernière résultante mr'' s'était trouvée égale et directement opposée à la dernière vitesse mv^{IV}, l'équilibre aurait eu lieu entre toutes les vitesses, et le polygone se serait trouvé *fermé* par la dernière parallèle $r''m$ menée à la dernière vitesse mv^{IV}. De cette remarque curieuse on déduit un procédé géométrique pour trouver rapidement la résultante d'autant de vitesses concourantes que l'on voudra. On prendra un point A quelconque (*fig.* 15), et par ce point on mènera une ligne AB égale et parallèle à la première vitesse v; par le point B, une ligne BC égale et parallèle à la seconde vitesse v', et ainsi de suite, jusqu'à la dernière vitesse. Si le polygone se trouve fermé, on en conclura que les vitesses se font équilibre; sinon, le dernier côté que l'on obtiendra en le fermant, représentera en grandeur et en direction la résultante générale de toutes les vitesses.

§ 52. *Composition de deux vitesses rectangulaires.* — Lorsque les deux vitesses composantes v et v' (*fig.* 16), sont perpendiculaires entre elles, le parallélogramme des vitesses est un rectangle, et le triangle des vitesses un triangle rectangle. La détermination de la résultante éprouve

des modifications, et devient plus facile. En effet, le triangle rectangle mvr donne

$$mr \text{ ou } r = \sqrt{v^2 + v'^2}, \text{ et tang. } vmr = \frac{v'}{v}.$$

Application : soient $v = 2^m, 28$; $v' = 5^m, 4$; on trouve :

$$r = 5^m, 86 \text{ et angle } vmr = 67^\circ\ 6'\ 34''.$$

§ 53. *Décomposition d'une vitesse en deux autres dont les directions sont données.* — La décomposition d'une vitesse se déduira aisément de leur composition. Soit une vitesse r, (*fig.* 17), à décomposer en deux autres agissant suivant les directions données ma et mb. Si par le point r on mène des parallèles à ces directions, elles intercepteront des parties mv, mv', qui représenteront en grandeur et en direction les vitesses composantes.

§ 54. *Troisième application trigonométrique sur le parallélogramme des vitesses.* — Si la grandeur de la résultante est donnée en nombre, ainsi que sa direction, c'est-à-dire les angles qu'elle fait avec les directions données, le problème conduira à la résolution du triangle mvr, dans lequel on connaîtra le côté mr ainsi que les trois angles.

Application : soients $vmr = 65^\circ\ 6', 36''$; $v'mr$ ou son égal

$$vrm = 15^\circ\ 54'\ 10'' \text{ ; et } mr = 5^m, 25. \text{ On trouve :}$$

$$v = 1^m, 456 \text{ ; et } v' = 4^m, 821.$$

§ 55. ***Décomposition d'une vitesse donnée en deux autres rectangulaires dont les directions sont données.*** — **S'il fallait décomposer la vitesse r (*fig.* 18), en deux autres vitesses rectangulaires entre elles, dont les directions fussent ma et mb, le triangle rectangle mvr donnerait :**

$$v = r \cos.\, vmr \text{ ; } v' = r \sin.\, vmr.$$

Application : soient $r = 9^m, 81$ et angle $vmr = 54^\circ\ 38'\ 20''$. On trouve :

$$v = 5^m, 682 \text{ ; } v' = 7^m, 997.$$

§ 56. *Composition de plusieurs vitesses non situées dans un même plan.* — Pour trouver la résultante de plusieurs vitesses non situées dans un même plan, cherchons d'abord celle des trois vitesses v, v', v'' (*fig.* 19). En construisant le parallélogramme sur les deux premières, la diagonale mk représente leur résultante; et en construisant un nouveau parallélogramme sur cette résultante et la troisième vitesse, la diagonale mr de ce parallélogramme représentera en grandeur et en direction la résultante des trois vitesses. Il est aisé de voir que cette ligne est la diagonale du parallélipipède construit sur les trois lignes mv, mv', mv'', qui représentent les vitesses; ce qui fournit ce théorême :

La résultante de trois vitesses de grandeurs et de directions données agissant sur un mobile est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur les trois lignes qui représentent ces vitesses.

On trouvera d'une manière analogue à celle employée pour la composition d'un nombre quelconque de vitesses situées dans un plan, la résultante d'un nombre quelconque de vitesses non situées dans un même plan et agissant sur un mobile.

§ 57. *Composition de trois vitesses rectangulaires entre elles.* — Si trois vitesses sont rectangulaires entre elles, le parallélipipède des vitesses deviendra un parallélipipède rectangle (*fig.* 20), et dans le triangle mrk on aura $mr^2 = rk^2 + mk^2$, ou $r^2 = v''^2 + mk^2$. Mais le triangle rectangle mkv' donne $mk^2 = mv'^2 + v'k^2 = v'^2 + v^2$. Substituant à la place de mk^2 sa valeur dans celle de r^2, on aura

$$r^2 = v^2 + v'^2 + v''^2.$$

D'où l'on conclut que la résultante égale la racine carrée de la somme des carrés des trois vitesses. Sa direction se déterminera par la connaissance des angles qu'elle fait avec les trois vitesses, au moyen des équations

$$\cos. V = \frac{v}{r},\ \cos. V' = \frac{v'}{r},\ \cos. V'' = \frac{v''}{r}.$$

que fournissent les triangles rectangles rmv, rmv' et rmv''; en appelant V, V', V'' les angles de la résultante avec les trois vitesses.

Application : soient $v = 4^m, 38$; $v' = 9^m, 81$; $v'' = 10^m, 95$.

On trouve $r = 15^m, 34$; $V = 73° 24' 35''$; $V' = 50° 14' 44''$; $V'' = 44° 27' 15''$.

§ 58. *Décomposition d'une vitesse en trois autres rectangulaires. Condition pour que le problème soit possible.*— La décomposition d'une vitesse en trois autres vitesses rectangulaires entre elles, et dont la position par rapport à la résultante est donnée, s'obtiendra au moyen des mêmes équations, car on en tire

$$v = r \cos V \ldots (1); \; v' = r \cos V' \ldots (2); \; v'' = r \cos V'' \ldots (3);$$

ce qui fait connaître les vitesses composantes, quand on donne la résultante et les angles qu'elle fait avec les directions données.

En élevant au carré dans chacune des équations précédentes, et ajoutant membre à membre, il vient :

$$v^2 + v'^2 + v''^2 = r^2 (\cos.^2 V + \cos.^2 V' + \cos.^2 V'').$$

Et, comme on a : $r^2 = v^2 + v'^2 + v''^2$, il en résulte

$$\cos.^2 V + \cos.^2 V' + \cos.^2 V'' = 1 \ldots. (4),$$

condition qui doit exister entre les trois angles donnés pour que le problème soit possible. Il était visible, en effet, que le problème conduisait à quatre équations entre trois inconnues, ce qui devait donner une équation de condition entre les quantités connues.

Pour faire une application, il ne faut donc se donner que la résultante r et deux des angles qu'elle fait avec les composantes cherchées. L'équation (4) fera connaître la valeur du troisième angle, et les équations (1), (2) et (3), celles des trois vitesses.

Application : soient $r = 9^m, 81$; angle $V = 48° 58' 20''$;

angle $V' = 69° 40' 28''$. On trouve d'abord : angle $V'' = 47° 57' 30''$; puis :

$$v = 6^m, 4396 ; v' = 3^m, 4075 ; v'' = 6^m, 5694.$$

Pour vérification, la somme des carrés de ces trois vitesses doit donner le carré de r, et dans l'application du § 57, la somme des carrés des cosinus des trois angles trouvés doit être égale à l'unité.

§ 59. *Application de la composition et de la décomposition des vitesses à quelques exemples.* — La composition et la décomposition des vitesses trouvent à chaque instant leur application dans le jeu de nos membres et le mouvement de nos machines : les hommes ou les chevaux de halage qui font remonter ou descendre le courant d'une rivière à un bateau de transport, lui impriment une vitesse dans une direction qui l'amènerait promptement vers la rive, si la réaction de l'eau contre le gouvernail dirigé convenablement ne tendait pas constamment à maintenir le bateau dans le sens du courant. En effet, cette vitesse se décompose en deux autres, dont l'une, conspirant avec ce courant, produit seule l'action, et dont l'autre, agissant perpendiculairement, se trouve détruite par la résistance qu'offre la grande masse d'eau que seraient obligés de déplacer les flancs du bateau.

Lorsqu'une personne effrayée par le mouvement trop rapide d'une voiture s'élance par la portière, elle est animée de deux vitesses, l'une horizontale produite par le mouvement de la voiture, et l'autre verticale due à l'action de la pesanteur. La résultante de ces deux vitesses étant située dans l'angle qu'elles forment entre elles, cette résultante agit obliquement sur le corps de la personne, et tend à la précipiter vers la terre, si elle n'a pas le soin de s'imprimer, en sautant, un mouvement dans un sens contraire à cette résultante, c'est-à-dire en se jetant du côté d'où la voiture vient. On évitera ainsi les accidents qui peuvent être très graves, et qui le seraient d'autant plus que la vitesse de la voiture serait plus grande.

Dans les oiseaux, les ailes, qui sont symétriques au plan vertical qui passe par la tête et la queue, en frappant l'air, le font réagir sur elles-mêmes. Ces réactions impriment à ces animaux des vitesses obliques au plan dont nous venons de parler, mais dont la résultante passe par ce plan, si elles sont égales, ou lui est oblique, si elles ne le sont pas; ce qui arrive lorsque l'oiseau veut changer de direction, parce que dans ce cas il lui faut une résultante oblique pour faire varier son mouvement. Cette explication conviendra également à l'usage que les poissons font de leurs nageoires, et en général à celui que tous les animaux font de leurs membres pour nager dans un liquide. La navigation, soit sur un navire, soit sur un bateau, est une application de la composition et de la décomposition des vitesses, ainsi que les moulins à vent, l'arme de jet des anciens, le jeu de la harpe, etc.

On trouve un exemple de la décomposition d'une vitesse en deux autres dans la manivelle à pédale. L'effort moteur étant supposé produit dans la direction de la bielle ae (*fig.* 21), et étant représenté par ab, comme la manivelle ne peut obéir qu'à une action qui lui soit normale, il en résulte que la vitesse ab doit se décomposer en deux autres ac et ad, la première agissant tangentiellement au cercle décrit par l'extrémité de la manivelle, la deuxième agissant dans la direction du centre et étant détruite par ce point fixe.

Dans la transmission de la force motrice à l'extrémité du balancier d'une machine à vapeur (*fig.* 22), il y a un exemple de plusieurs décompositions de vitesses. En effet, l'effort moteur agit dans la direction ab de la tige du piston, et cet effort se décompose en deux autres, l'un agissant dans la direction du côté ad du parallélogramme, et l'autre dans la direction de l'autre côté ac. Chacun de ces deux efforts se décompose lui-même en deux autres : l'effort ad, suivant le balancier et sa normale en d, l'effort ac suivant la bride ce et sa normale en c. Les deux efforts moteurs deviennent alors la composante normale au balancier en d

et la composante normale à la bride en *c*. Les autres composantes sont détruites par la résistance du centre du balancier et du point d'attache *e* de la bride. Dans certaines positions, ces dernières composantes refoulent ces axes sur leurs appuis; dans d'autres, elles tendent à les arracher.

L'échappement à ancre (*fig.* 23), qui sert à régulariser le mouvement du pendule dans une horloge à poids offre encore un exemple d'une décomposition de vitesse. L'effort transmis par la goupille s'exerçant tangentiellement au cercle qu'elle décrit, cet effort se décompose en deux, l'un tangent au cercle que décrit l'ancre, et l'autre, dans la direction du plan incliné, et faisant glisser la goupille sur ce plan. Ces divers exemples sont familiers aux élèves, car ils les ont sans cesse sous les yeux dans leurs ateliers. Nous aurons occasion dans la suite du cours d'en donner de nouveaux.

CHUTE DES CORPS.

§ 60. *Pesanteur ou gravité; corps pesants.* — Tous les corps abandonnés à eux-mêmes se rapprochent de la surface de la terre. On attribue cette tendance de la matière à une force attractive que le système des molécules terrestres a la propriété d'exercer sur les *corps qui n'en font pas partie*; il est d'ailleurs évident que ce pouvoir doit s'étendre aux particules du globe elles-mêmes, qui réagissent les unes sur les autres. La terre est à peu près sphérique; chacune des parties de sa masse exerce une action attractive sur chaque particule du corps qui tombe; toutes ces actions se combinent de manière à se réunir en une seule qui passe très-près du centre de la terre. Sa direction est infiniment voisine de celle du rayon terrestre qui contient la molécule que l'on considère, et son intensité est sensiblement égale à ce qu'elle serait, si toute la masse du globe était réunie à son centre.

On donne à cette attraction le nom de *pesanteur* ou de *gravité*. Tous les corps de la nature étant soumis à son action, on dit alors qu'ils sont *pesants*.

§ 61. *La pesanteur imprime le même mouvement à tous les corps ; explication de la différence qui se fait remarquer dans le temps de la chute des différents corps.* — Mais il est aisé de s'assurer que tous les corps abandonnés à eux-mêmes de la même hauteur n'arrivent pas au sol en même temps. Les corps que l'on dit *légers*, tels que le papier, le duvet, le coton, etc., y arrivent plus tard que le plomb, l'argent, etc. On serait tenté de croire que la pesanteur exerce sur eux une action différente ; mais plusieurs expériences nous prouvent que c'est l'air, qui, par la résistance qu'il offre à leur mouvement, résistance qui se trouve être la même pour tous les corps ayant le même volume, mais des masses différentes, a plus d'action comparativement sur la vitesse de ceux qui ont la plus petite masse. En laissant tomber une balle de plomb d'une même hauteur dans l'air et dans l'eau, on remarque une différence très marquée dans le temps de la chute ; ce qui prouve que les milieux offrent une résistance aux corps qui les traversent.

En plaçant une rondelle de papier sur un disque métallique d'un diamètre égal, et laissant tomber ce système après l'avoir placé horizontalement, on observera que ces deux corps arriveront en même temps à la surface terrestre ; la même chose n'aurait pas lieu, si on laissait tomber les corps isolément de la même hauteur. Dans le premier cas, la résistance que l'air oppose au mouvement du papier est la même que celle qu'il oppose au disque ; aussi ces deux corps tombent-ils avec la même vitesse, et ils arrivent ensemble à la surface de la terre, tandis qu'ils devraient se séparer, comme dans le deuxième cas, si l'action de la pesanteur n'était pas la même pour chacun d'eux, et si elle était plus grande pour le métal que pour le papier. Enfin, si dans un long tube qui renferme du plomb, du papier, du duvet, etc., on vient à faire le vide, c'est-à-dire à enlever l'air qui s'y trouve, on ne remarquera pas la moindre différence dans le temps de la chute de tous ces corps.

Nous pouvons donc regarder comme démontré le principe suivant, qui sert de base à la théorie de la chute des corps : *En livrant un corps quelconque à l'action de la pesanteur, il prend vers la terre le même mouvement, quels que soient sa nature, son volume, en faisant abstraction des causes qui peuvent influencer l'action de la force à laquelle il est soumis.*

§ 62. *La pesanteur est une force accélératrice constante; le mouvement des corps à la surface de la terre et dans le vide est uniformément varié.* — Quoique la pesanteur ait des valeurs différentes pour tous les points d'une même verticale, les distances que nous pouvons faire parcourir aux corps sont tellement petites par rapport au rayon de la terre, que nous pouvons admettre sans erreur sensible que l'action de la pesanteur est celle d'une force accélératrice constante, et que par conséquent le mouvement des corps à des distances peu considérables de la surface de la terre est uniformément varié. De sorte que toutes les conclusions auxquelles nous sommes parvenus en exposant les lois de ce mouvement trouveront leur application dans la chute libre des corps dans le vide. Les équations obtenues alors vont nous servir à résoudre toutes les questions que l'on peut se proposer sur le mouvement des corps dans la verticale qu'ils décrivent.

Il est aisé de démontrer que la gravité décroît de quantités tout-à-fait inappréciables pour des distances au centre de la terre qui diffèrent entre elles de quantités très petites relativement au rayon terrestre. En effet, on a reconnu que l'attraction terrestre s'exerce en raison inverse du carré de la distance, de sorte que m désignant cette attraction à la distance 1, et g celle qui a lieu à l'extrémité du rayon r de la terre, on a

$$\frac{m}{g}=\frac{r^2}{1};\text{ d'où } g=\frac{m}{r^2}.$$

Or, si h est la hauteur d'un point au-dessus de celui que nous venons de considérer, et si g' désigne l'intensité de l'attraction à cette hauteur, on aura ainsi

$$g' = \frac{m}{(r+h)^2}.$$

En mettant cette dernière expression sous cette forme

$$g' = m\,(r+h)^{-2} \text{ (Al. § 14)},$$

et développant d'après la formule du binome, à laquelle on peut appliquer les exposants négatifs (Al. § 93), il vient

$$g' = m\,(r^{-2} - 2hr^{-3} + 3h^2r^{-4} - 4h^3r^{-5} + \ldots..$$

Or, comme h est très petit, on peut, dans ce développement, négliger les termes en h^2, h^3..., on a donc

$$g' = m\,(r^{-2} - 2hr^{-3}) = \frac{m}{r^2} - \frac{2hm}{r^3}, \text{ ou}$$

$$g' = g - \frac{2gh}{r}.$$

On voit que la quantité $\frac{2hm}{r^3}$ ou $\frac{2gh}{r}$ dont la gravité a diminué, est absolument inappréciable.

§ 63. *Valeur en mètres de la pesanteur à la latitude de l'observatoire de Paris.* — La quantité constante a, qui représente la vitesse acquise au bout d'une seconde, est appelée g pour la gravité. Des observations précises faites au niveau de la mer, sur la latitude de l'observatoire de Paris, ont donné pour cette quantité le nombre 9^{m}, 8088 ou 9^{m}, 81 environ; c'est le nombre qui, d'après ce que nous avons dit, sert aussi de mesure à la force accélératrice. Ce nombre est donc l'intensité de la pesanteur à Paris.

§ 64. *Formules relatives à la chute des corps dans le vide.* Si, dans les équations (1), (2) et (3) du § 33, on remplace a par g, on aura les équations relatives à la chute des corps dans la verticale, lancés dans le vide de haut en bas avec une vitesse initiale b, et soumis à l'action de la gravité. Ces équations sont :

$$v = b + gt \ldots (1) ; \; e = bt + \frac{1}{2} gt^2 \ldots (2) ; \; v^2 = b^2 + 2\,ge \ldots (3).$$

Lorsqu'un corps pesant, partant du repos, sera abandonné à lui-même dans le vide, les diverses circonstances de son mouvement seront données par les équations (4), (5) et (6) du § 34, en faisant $a = g$; ce qui donne :

$$v = gt \ldots (4) ; \; e = \frac{1}{2} gt^2 \ldots (5) ; \; v^2 = 2\,ge \ldots (6).$$

Pour un corps lancé de bas en haut avec une vitesse initiale b, les trois formules du § 38 donnent, par la substitution de g à la place de a :

$$v = b - gt \ldots (7) ; \; e = bt - \frac{1}{2} gt^2 \ldots (8) ; \; v^2 = b^2 - 2\,ge \ldots (9).$$

Les formules que nous venons de déduire ainsi de celles du mouvement uniformément varié en général, conduisent aux mêmes lois et aux mêmes conséquences ; seulement, la force accélératrice ou la force retardatrice y a pris une valeur particulière. N'oublions pas que cette valeur de g est :

$$g = 9^{m}, 81.$$

La formule (6) est d'un usage fréquent en mécanique. Dans le cas de la chute des corps, e représente une hauteur de chute, et l'on désigne souvent cette hauteur par h dans la formule. Alors la vitesse v prend le nom de *vitesse due à la hauteur h*, et h celui de *hauteur correspondante à la vitesse v*. On construit même des tables qui donnent les vitesses pour des hauteurs données de centimètre en centimètre.

§ 65. *Influence de la résistance de l'air.* — Les solutions fournies par les équations précédentes ne tiennent aucun compte de la résistance de l'air, et supposent que le mobile se meut dans le vide. Les observations paraissent établir que cette résistance est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile. On conçoit donc qu'elle sera rendue rapidement plus petite, lorsque cette vitesse le sera devenue elle-même. De plus, on peut admettre aisément que les vitesses imprimées par la même force à des masses différentes sont inversement proportionnelles à ces masses, c'est-à-dire que si une force communique à une masse d'un gramme une vitesse de 30^m, cette vitesse ne serait que de 15^m, si on faisait agir la force sur une masse de 2 grammes; de 10^m, sur une masse de 3 grammes.....

§ 66. *Machine d'*ATWOOD, *servant à vérifier les lois de la chute des corps.* — Cette observation et la précédente peuvent nous donner le moyen d'établir les principales lois de la chute des corps d'une manière expérimentale. L'observation directe ne peut être d'aucun secours pour cet objet, puisque le temps de la chute est toujours très-petit, et par suite difficile à connaître avec exactitude, et que, la vitesse du mouvement étant très-grande, la présence de l'air a dans ce cas une influence considérable. Il faut donc chercher à augmenter la première de ces quantités et à diminuer la seconde. On y parvient à l'aide d'un appareil construit sur le principe suivant : Imaginons que *ck* (*fig.* 24), soit une poulie très mobile sur son axe *k* retenu par un obstacle fixe sur lequel il tourne librement; dans la gorge de la poulie passe un fil de soie d'un poids très peu considérable, aux extrémités duquel sont attachés deux plateaux *a* et *b*, égaux en poids, de telle sorte que le système reste en équilibre de lui-même dans quelque position que se trouvent les bassins, le poids du fil étant fort petit.

Représentons par M la somme des masses des deux plateaux; en ajoutant une masse m à l'un d'eux, l'équilibre sera rompu, et le système se mouvra évidemment d'un mouvement uniformément varié. Pour connaître l'intensité de la force qui le produit, nous remarquerons que c'est la même force qui sollicite la masse m lorsqu'elle est libre, et le système des deux masses $M+m$. Dans ce dernier cas, la masse étant plus considérable, la vitesse imprimée sera plus petite; or, nous savons que les vitesses imprimées par une même force à des masses différentes, sont inversement proportionnelles à ces masses. En désignant donc par g' la vitesse imprimée à la masse $M+m$ et par g la gravité, on aura :

$$\frac{g'}{g}=\frac{m}{M+m};\ \text{d'où l'on tire}\ g'=\frac{m}{M+m}g.$$

Cette équation montre que g' sera d'autant plus petit par rapport à g que m le sera lui-même par rapport à $M+m$, par exemple, si $M=99^{gr}$, et $m=1^{gr}$; on aura $g'=\frac{1}{100}g$. Et si l'on substitue pour g sa valeur $9^{m}, 81$ pour la latitude de Paris, on aura $g'=0^{m}, 0981$: ce qui ferait voir que dans un pareil système la vitesse acquise au bout du temps t serait égale à $\frac{100}{g\,t}$. On voit donc qu'elle serait devenue fort petite, et que par suite le temps qu'il faudrait pour parcourir un espace un peu grand serait lui-même considérable ; le système dont il s'agit remplit donc les conditions énoncées plus haut.

§ 67. *Manière d'opérer pour vérifier les lois de la chute des corps.* — Pour vérifier avec cet appareil les lois de la chute des corps, on dispose parallèlement au fil qui soutient le bassin sur lequel on place la masse m, une échelle divisée en centimètres, millimètres, par exemple, le zéro étant placé au point o. Un mouvement d'horloge placé à côté et une sonnerie permettent de mesurer le temps de la chute. Pour vérifier la loi des espaces parcourus, on amène le bassin b, sur lequel on place le poids additionnel, à zéro de l'échelle f. Puis, en l'abandonnant à lui-même, après quelques essais, on trouve les points où il faut placer successivement un disque plein r qui le reçoit, pour que le bassin arrive à ce disque en 1, 2, 3.... secondes. On note ces points, ainsi que leurs distances au zéro de l'échelle, et en comparant ces distances, on les trouve entre-elles comme les carrés des temps employés à les parcourir.

Pour vérifier la seconde loi, pour trouver, par exemple, la vitesse acquise au bout de deux secondes, on donne à la masse m la forme d'un petit barreau dont la longueur soit plus considérable que celle du diamètre intérieur d'un anneau assez grand pour laisser passer librement le bassin, et pouvant se fixer à diverses hauteurs sur la règle. On placera cet anneau au point de l'échelle où le barreau doit arriver en 2''. Ce point a été déterminé d'avance par les expériences précédentes. Lorsque le bassin arrivera en ce point, le poids additionnel restera sur l'anneau, et le bassin continuera à se mouvoir en vertu des impulsions reçues, ou de la vitesse acquise; mais le mouvement sera devenu uniforme, puisque les bassins ont la même masse et se font équilibre d'eux-mêmes. Le disque r étant placé sous l'anneau, après quelques tâtonnements, on trouvera le point où le bassin y arrivera une seconde après avoir abandonné le barreau, et la distance des deux disques donnera la vitesse au bout de deux secondes. On opérera ainsi pour les espaces parcourus en 3, 4..... secondes; et les vitesses qui en résulteront devront être proportionnelles aux temps respectifs pendant lesquels le mouvement accéléré a eu lieu.

§ 68. *La machine offre le moyen de trouver la gravité.*— Nous ferons remarquer que notre machine donne un moyen de trouver d'une manière assez exacte la quantité que nous avons représentée par g, ou l'intensité de la pesanteur; car, de l'équation $\frac{g'}{g} = \frac{m}{M+m}$ on tire $g = \frac{M+m}{m} \times g'$. Mais, dans la machine, le temps t et l'espace e sont liés par l'équation $e = \frac{1}{2} g' t^2$; d'où l'on tire $g' = \frac{2e}{t^2}$. Une observation fera connaître les deux nombres e et t qui se correspondent, et par conséquent la valeur de g' qui convient à la machine sera connue. Alors dans l'équation qui donne celle de g, les quantités du deuxième membre seront déterminées, et par suite on aura g. Mais dans les calculs on tiendra compte de l'inertie de la machine dont la valeur devra s'obtenir par un essai préliminaire, en plaçant sur l'un des plateaux un poids seulement suffisant pour rompre l'équilibre.

§ 69. *Applications des formules relatives à la chute des corps dans le vide.*— 1°. De quelle hauteur devrait tomber un corps pour acquérir une vitesse de 600^m? L'équation (6) du § 64 donne $e=\frac{v^2}{2g}$; $v=600^m$; $g=9^m,81$. En substituant, il vient $e=18349^m$.

2° Quel serait l'espace parcouru par un corps en 5''? La formule (5) du § 64 donne $e=\frac{1}{2}gt^2$. En substituant, il vient $e=122^m,50$. On pourrait se servir de ce calcul pour avoir la hauteur d'un édifice; mais l'expérience serait difficile à faire, et la résistance de l'air altérerait beaucoup le résultat.

3° Quelle vitesse aurait un corps, après avoir parcouru verticalement un espace de 100^m? L'équation (6) du § 64 donne $v=\sqrt{2ge}$; donc $v=\sqrt{2\times 9,81\times 100}=44^m,3$.

4° Quel temps mettrait un corps pour tomber d'une hauteur de 100^m? L'équation (5) du § 64 donne $t=\sqrt{\frac{2e}{g}}=\sqrt{\frac{2.100}{9,81}}=4''\,51$.

5° A combien de mètres s'élèverait un mobile auquel on imprimerait verticalement, en sens contraire de la pesanteur, une vitesse de 250^m, et quel est le temps qu'il mettrait à monter? Le § 39 nous donne pour t et e les valeurs suivantes, en remplaçant a par g : $t=\frac{b}{g}$; $e=\frac{b^2}{2g}$, qui donnent :

$$t=\frac{250}{9,81}=25'',5;\ e=\frac{250^2}{2\times 9,81}=3185^m.$$

MOUVEMENT D'UN CORPS SUR UN PLAN INCLINÉ.

§ 70. *Vitesse imprimée à un corps normalement à un plan.* — Lorsqu'on imprime à un corps une vitesse dans une direction normale à un plan supposé susceptible d'une résistance indéfinie, ce corps ne doit prendre aucun mouvement, car si l'on admettait qu'il pût avoir une vitesse dans une certaine direction, cette hypothèse pourrait être également admise pour une autre direction symétrique par rapport à la normale au plan. Le corps pourrait donc se mouvoir dans deux directions différentes, ce qui est absurde.

§ 71. *Vitesse imprimée à un corps obliquement à un plan.* — Si l'on imprime à un corps une vitesse dans une direction oblique à un plan, ce corps doit glisser le long du plan, si la vitesse imprimée le dirige vers ce plan et ne l'en éloigne pas, car dans ce cas on pourra toujours supposer cette vitesse décomposée en deux autres, l'une normale au plan et dont l'action sera détruite par sa résistance, l'autre agissant dans le sens du plan et produisant seule le mouvement.

§ 72. *Le mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné est uniformément accéléré.* — Si donc un corps pesant est abandonné à lui-même sur un plan incliné à l'horizon, la vitesse que lui imprimerait la pesanteur dans une direction verticale, s'il était libre, sera décomposée en deux autres, l'une normale au plan et qui est détruite par sa résistance, l'autre agissant parallèlement au plan et produisant seule l'action. Cette dernière est donc celle qu'il faut déterminer pour avoir une idée exacte de la nature du mouvement. Soit AB (*fig.* 25), une section faite dans ce plan incliné par un plan vertical et perpendiculaire à ce plan incliné. Soit toujours g la vitesse communiquée au corps par la pesanteur en 1'', et désignons par g' la vitesse acquise par le mobile au bout d'une seconde dans le nouveau mouvement qu'il est obligé d'effectuer. La grandeur géométrique og' ou g' de cette dernière vitesse est déterminée par la décomposition de la vitesse g ou og qui est supposée la représenter, en deux autres rectangulaires g' et r. Nous remarquerons d'abord que si OG représentait la vitesse du mobile dans la verticale au bout d'un temps quelconque de mouvement, la ligne OG' obtenue par une décomposition analogue à la précédente, représenterait la vitesse correspondante du mobile dans le nouveau mouvement au bout du même temps; et en comparant les triangles semblables $og'g$, $OG'G$, on voit aisément que les différentes valeurs de g' seraient proportionnelles aux valeurs correspondantes de g. Or ces dernières sont proportionnelles au temps; celles de g' le seront donc aussi, et le mouvement sur le plan incliné sera uniformément accéléré.

§ 73. *Valeur de la force accélératrice qui fait descendre un corps pesant sur un plan incliné.* — Proposons-nous maintenant de trouver la valeur de la force accélératrice constante qui sollicite un corps pesant abandonné à lui-même sur un plan incliné, ou bien celle de la vitesse g' acquise par le mobile au bout d'une seconde. En comparant les triangles semblables ogg' et ABC, (*fig.* 25), on a $\frac{g'}{g}=\frac{AC}{AB}$ ou $=\frac{H}{L}$, en désignant par L la longueur AB du plan incliné, et par H sa hauteur AC. On tire de cette proportion

$$g'=\frac{H}{L}g.$$

Telle est l'expression de la quantité que nous avons représentée par a dans les formules des §§ 33, 34 et 38. Si l'on voulait faire une application de ces formules pour un corps qui descend le long d'un plan incliné, il faudrait donc y remplacer a par $\frac{H}{L}g$, dont la valeur numérique serait connue par celles de H et de L, et par celle de $g=9^{m},81$.

§ 74. *Vitesse acquise par un corps pesant en descendant le long d'un plan incliné, après en avoir parcouru la longueur.* — Par exemple, proposons-nous de trouver la vitesse acquise par le mobile après avoir parcouru la longueur L ou AB du plan incliné (*fig.* 25), il faudra prendre l'équation générale du § 33 qui donne la vitesse au moyen de l'espace : $v^2 = b^2 + 2ae$, dans laquelle $a = g' = \frac{H}{L} \cdot g$ et $e = L$. Substituant et réduisant, il vient

$$v^2 = b^2 + 2gH.$$

Mais en laissant tomber le corps en chute libre de la hauteur H avec la même vitesse initiale, la vitesse acquise après avoir parcouru cette hauteur est, § 64 : $v^2 = b^2 + 2gH$, équation identique à la précédente. Nous pouvons donc conclure de là que : *Un corps, en glissant le long d'un plan incliné, acquiert, en arrivant au plan horizontal, une vitesse qui est la même que celle qu'il aurait acquise en tombant en chute libre de la hauteur du plan incliné.* Et comme la valeur de la vitesse ne dépend que de la hauteur du plan, elle sera la même pour toutes les inclinaisons AB, AB', AB'' (*fig.* 26)...., du plan correspondant à la même hauteur AC.

§ 75. *Vitesse acquise par un corps pesant descendant le long d'une courbe.* — Si un corps pesant abandonné à lui-même glisse le long d'une courbe AB (*fig.* 27), sa vitesse en arrivant au plan horizontal sera égale à celle qu'il aurait acquise en tombant en chute libre de la même hauteur verticale AH. En effet, en partageant la courbe AB en éléments linéaires infiniment petits, AA', $A'A''$, $A''A'''$, $A'''B$, le mobile en parcourant la courbe glissera sur une suite de plans inclinés dont les hauteurs seront AH', $H'H''$, $H''H'''$, $H'''H$, et les vitesses acquises par le mobile en arrivant en A', A'', A''', B seront égales à celles qu'il acquerrait en tombant en chute libre jusqu'aux points H', H'', H''', H. Donc, etc.

§ 76. *Temps que met un corps pesant à parcourir le diamètre vertical d'un cercle. Lorsqu'un corps pesant, placé à l'extrémité D d'un diamètre vertical d'un cercle (fig. 28), est abandonné à lui-même sur un plan incliné dont la longueur est représentée par la corde D C, le temps que met ce corps pour atteindre la circonférence est le même pour toutes les cordes partant du point D, et par conséquent aussi pour le diamètre D D'.* — Il suffit, pour le démontrer, de faire voir que le temps que le mobile met à parcourir une de ces cordes considérée comme un plan incliné est une quantité constante. La formule (5) du § 34 nous donne le temps au moyen de l'espace parcouru. Cet espace est ici l'une des cordes DC. La valeur de a est $\frac{H}{L} \cdot g$, dans laquelle $H = DI$ et $L = DC$. En remplaçant, dans la formule $e = \frac{1}{2} a t^2$, e par L et a par $\frac{H}{L} \cdot g$, il vient $L = \frac{1}{2} \frac{H}{L} \cdot g \cdot t^2$. Tirant de là la valeur de t, toutes réductions faites, et faisant remarquer que $L^2 = 2 R H$, il vient

$$t = \sqrt{\frac{4R}{g}},$$

quantité constante pour toutes les cordes, puisque leur longueur n'en fait pas partie ; ce qui démontre le théorème énoncé.

§ 77. *Diverses applications du plan incliné.* — C'est en vertu de l'action de la pesanteur que les eaux d'un fleuve descendent de sa source jusqu'à son embouchure comme sur un plan incliné. Le mouvement de ces eaux n'est rendu sensiblement uniforme dans une étendue très limitée que parce que leur frottement sur le lit du fleuve absorbe la force motrice, et que le mouvement se continue par l'effet de l'inertie.

Les navires sont construits sur des plans inclinés, où ils sont ensuite abandonnés à eux-mêmes lorsqu'on veut les lancer à la mer.

On se sert des plans inclinés pour diminuer la force motrice nécessaire pour élever des fardeaux à de grandes hauteurs, aux dépens de l'espace parcouru. C'est ainsi qu'on transporte le plus souvent le minerai et les substances propres à déterminer sa fusion dans les hauts-fourneaux, du sol jusqu'au gueulard.

Nous trouverons plus loin d'autres applications du plan incliné.

MOUVEMENT DES PROJECTILES.

§ 78. *Vitesse du mobile à une époque quelconque de son mouvement.* — Supposons (*fig.* 29), qu'un corps pesant soit lancé dans une direction mb avec une vitesse a due à une force instantanée faisant avec l'horizontale un angle que nous désignerons par α. Il s'agit de déterminer les circonstances de son mouvement.

La vitesse a peut être décomposée en deux autres agissant suivant les lignes mx, my perpendiculaires entre elles, et peut être remplacée par ces deux vitesses, dont la valeur est $a \cos. \alpha$ pour la vitesse horizontale et $a \sin. \alpha$ pour la vitesse verticale. L'action de la pesanteur, dont la direction est verticale, n'altérera pas la vitesse horizontale, mais diminuera à chaque seconde la vitesse verticale de la quantité g. Au bout du temps t le mobile aura donc la vitesse verticale primitive moins celle acquise par le mobile en tombant pendant le temps t. En désignant par v cette vitesse verticale résultante au bout de ce temps, on aura donc $v = a \sin. \alpha - gt$, et la vitesse horizontale $h = a \cos. \alpha$, puisqu'elle n'a pas changé de valeur. La résultante de ces deux vitesses est la tangente à la trajectoire au point où se trouve alors le mobile. Sa position est caractérisée par la valeur des vitesses qui le sollicitent. La résultante s'obtiendra par l'équation $r^2 = v^2 + h^2 = (a \sin \alpha. - gt)^2 + a^2 \cos^2 \alpha.$

§ 79. *Hauteur du jet.* — Pour connaître la plus grande élévation qu'atteindra le mobile, il faut considérer l'époque à laquelle la vitesse verticale sera complétement détruite par l'action de la pesanteur. Alors on aura $v = o$ ou $a \sin \alpha = gt$. D'où

$$t = \frac{a \sin. \alpha}{g}.$$

C'est au bout de ce temps que le mobile atteindra sa plus grande élévation. Pour connaître cette dernière quantité, on remarquera que le mobile peut être considéré comme ayant été lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale $a \sin \alpha$, et qu'on a, pour déterminer l'espace qu'il parcourt jusqu'à son point de repos, l'équation $e = \frac{b^2}{2g}$, qu'on déduit de la formule (6) du § 64, b étant la vitesse initiale dont la valeur est ici : $a \sin. \alpha$. Donc on a e ou

$$GH = \frac{a^2 \sin.^2 \alpha}{2g}.$$

Cette quantité est ce qu'on appelle la hauteur du jet.

§ 80. *Amplitude du jet.* — La vitesse horizontale existant toujours jusqu'à la fin du mouvement, la gravité se combinera de nouveau avec elle, mais comme force accélératrice, et fera parcourir au mobile, à partir du point H, une trajectoire symétrique à la première par rapport à GH, et la vitesse verticale redeviendra $a \sin. \alpha$ ce qu'elle était au départ.

Comme la vitesse horizontale est constante, elle communique horizontalement au mobile un mouvement uniforme. L'espace mp sera parcouru dans un temps double de celui que le mobile met à arriver en H. Ce dernier $= \frac{a \sin. \alpha}{g}$, § 79. Donc mp, qui égale la vitesse multipliée par le temps,

$$mp = a \cos. \alpha \times \frac{2 a \sin. \alpha}{g} = \frac{a^2}{g} \times 2 \sin. \alpha \cos. \alpha = \frac{a^2}{g}. \sin. 2\alpha.$$

Cette valeur de mp est ce qu'on nomme l'amplitude du jet.

Cette valeur devient la plus grande possible, lorsque *sin.* 2α est le plus grand possible, ce qui arrive lorsque $\alpha = 45°$ Alors l'amplitude est égale à $\frac{a^2}{g}$, ou au double de l'espace parcouru par le mobile lancé verticalement de bas en haut avec la même vitesse. La hauteur du jet devient dans la même hypothèse $GH = \frac{a^2}{4g}$ = le quart de l'amplitude.

§ 81. *Détermination d'une position quelconque du mobile.* — Une position du mobile en un point quelconque de la courbe pourra être déterminée par ses distances aux lignes mx, my, connaissant le temps du mouvement et la valeur de l'angle α. La distance horizontale à l'axe my sera l'expression de l'espace parcouru d'un mouvement uniforme avec la vitesse $a \cos. \alpha$, ou, $x = a\, t. \cos. \alpha$. La distance à l'axe mx se composera de l'espace parcouru d'un mouvement uniforme de bas en haut avec la vitesse $a \sin. \alpha$ pendant le temps t, moins celui parcouru de haut en bas en vertu de l'action de la pesanteur pendant le même temps, ou enfin $y = at. \sin. \alpha - \frac{1}{2} g t^2$.

§ 82. *La trajectoire est une parabole.* — m', m''... (*fig.* 30), étant des positions quelconques du mobile, et le mouvement étant uniforme sur la ligne mb, les espaces mb', mb''..... sont entre eux comme les temps t', t''..... mais les lignes $b'm'$, $b''m''$.... représentent les quantités dont le mobile tombe au bout des temps t', t''.... en vertu de la gravité, et sont entre elles comme les carrés de ces temps; donc ces mêmes lignes seront entre elles comme les carrés des distances mb', mb''..... Cette propriété appartient à une courbe qu'on appelle la *parabole*. C'est là trajectoire d'un projectile lancé obliquement à l'horizon et dans le vide. La résistance de l'air modifie cette courbe et lui donne une forme comme mop.

PENDULE.

§ 83. *Définition. Mouvement oscillatoire; idée générale de ce mouvement.* — Un pendule est un corps solide pesant, suspendu à l'extrémité d'un axe dont l'autre extrémité, liée à un point fixe, peut tourner librement autour de ce point.

Lorsque le pendule est dans la position m (*fig.* 31), il est en équilibre. En amenant la masse m en m', et l'abandonnant à elle-même, à cause de sa liaison avec l'axe, elle descendra le long de l'arc de cercle $m'm$, et sa vitesse tangentiellement à cet arc en un point quelconque a, sera celle due à la hauteur dont elle sera tombée depuis la position extrême m', § 75. Cette vitesse sera fournie par l'équation $v^2 = 2gh$, § 64. En m la masse aura toute la vitesse acquise due à la hauteur totale dont elle sera descendue, et en vertu de cette vitesse elle sera transportée jusqu'à une autre position extrême m'', où cette vitesse aura été éteinte, et qui sera à la même hauteur que m'. Arrivée à ce point de repos, elle redescendra, et exécutera ainsi le même mouvement pendant un temps infini, si l'on pouvait considérer comme nuls la résistance de l'air et le frottement de l'axe sur le point fixe. Ce mouvement est le *mouvement oscillatoire.*

§ 84. *Oscillation. Pendule simple et pendule composé.* — On appelle *oscillation* le passage du pendule par les deux positions extrêmes $m'f$ et $m''f$, et *temps d'une oscillation* celui qu'il met à aller d'une position à l'autre.

Pour trouver ce temps et comparer la durée des oscillations de deux pendules différents, on imagine un pendule *mathématique* composé d'une tige rigide, inflexible et sans pesanteur, à l'extrémité de laquelle est fixée une molécule pesante. Ce pendule se nomme un *pendule simple;* par opposition à tous les autres qui sont des *pendules composés.*

§ 85. *Valeur du temps de l'oscillation d'une pendule simple dont l'amplitude est très petite.* — La théorie du pendule simple et la recherche du temps d'une oscillation reposent sur les théorêmes suivants :

1° ab étant un arc très petit (*fig.* 32), pourra être considéré comme une ligne droite. En le projetant en pq, prenant son milieu m, et menant bc et my l'une parallèle et l'autre perpendiculaire au rayon vertical or, les triangles oym et abc donnent $ab : om :: bc : my$. Faisant $ab = a$; $om = r$; $bc = pq = q$; $my = y$; la proportion précédente devient $a : r :: p : y$; d'où

$$a = \frac{pr}{y}$$

2° Supposons que la flèche fr (*fig* 33), soit très petite par rapport au diamètre du cercle o. Considérons un arc infiniment petit ab, et projetons-le sur or en pq, il y aura un arc correspondant $a'b' = a'$ intercepté sur la petite circonférence du diamètre fr. D'après ce qui précède, nous aurons, en désignant par r le rayon du grand cercle, par r' celui du petit, par a' l'arc $a'b'$, par y' la ligne $m'y$, par f la flèche fr, par h la ligne fy, et conservant les autres dénominations :

$$a = \frac{pr}{y} \text{ et } a' = \frac{pr'}{y'}; \text{ mais } r' = \frac{f}{2};$$

donc, toutes substitutions faites,

$$\frac{a}{a'} = \frac{2r}{f} \times \frac{y'}{y} \text{ ou } \frac{a^2}{a'^2} = \frac{4r^2}{f^2} \times \frac{y'^2}{y^2}.$$

Or les perpendiculaires y et y' sont moyennes proportionnelles entre les deux segments de leurs diamètres respectifs. yr est très petit par rapport à dy ; on peut donc prendre pour cette dernière ligne le diamètre dr. Alors $y^2 = 2r.yr$ et $y'^2 = h.yr$. Divisant ces égalités membre à membre

$\frac{y'^2}{y^2} = \frac{h}{2r}$. Reprenant l'équation $\frac{a^2}{a'^2}=$....... en substituant, il vient

$$\frac{a^2}{a'^2}=\frac{2rh}{f^2}.$$

toutes réductions faites.

Concevons maintenant un pendule simple *AM* (*fig.* 34), et cherchons le temps que met à s'effectuer une de ses oscillations, en supposant qu'elle soit d'une très petite amplitude ; car la formule que nous allons trouver n'est vraie que dans le cas où les amplitudes ne dépassent pas 15°. Plaçons la molécule matérielle en *M'* et abandonnons-la à elle-même. Au bout d'un certain temps elle arrivera en *a*, ayant acquis une vitesse due à la hauteur *h* dont elle est descendue, et donnée par la formule $v^2=2gh$. Soit *a* un très petit arc parcouru dans l'instant qui suit immédiatement le temps que l'on considère. On pourra supposer pendant cet instant le mouvement uniforme; alors $a=vt$ et $t=\frac{a}{v}$, t étant la grandeur de l'instant. Elevant au carré, il vient $t^2=\frac{a^2}{v^2}$. Mais on a eu précédemment

$$\frac{a^2}{a'^2}=\frac{2rh}{f^2}, \text{ d'où } a^2=\frac{2rha'^2}{f^2}.$$

Substituant, il vient

$$t^2=\frac{2rha'^2}{v^2f^2}=\frac{2rha'^2}{2ghf^2}=\frac{ra'^2}{gf_2}, \text{ et } t=\frac{a'}{f}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Mais pour un autre petit arc b' et un autre instant correspondant t', nous aurions

$$t'=\frac{b'}{f}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

En continuant ainsi depuis *M'* jusqu'en *M''* on trouverait les temps que met le pendule à parcourir tous les petits arcs qui composent $M'MM''$. En ajoutant tous ces temps on aura celui de l'oscillation totale. En faisant cette somme, on a

$$t=\sqrt{\frac{r}{g}}\left(\frac{a'}{f}+\frac{b'}{f}+\frac{c'}{f}+\ldots\ldots\right)=\sqrt{\frac{r}{g}}\left(\frac{a'+b'+\ldots}{f}\right)$$

Or $a'+b'+c'\ldots$, c'est la longueur de la petite circonférence qui a la flèche pour diamètre, dont la grandeur est πf.

$$\text{Donc } t=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Mais $r=l$ ou la longueur du pendule ; donc enfin

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ldots\ldots(1).$$

C'est l'expression du temps de l'oscillation d'un pendule simple dont l'amplitude est très petite.

§ 86. *Oscillations isochrones.* — Cette formule nous fait voir que la longueur du pendule est proportionnelle au carré du temps d'une oscillation ; et comme la valeur de t est indépendante de l'amplitude, on voit que les oscillations seront de même durée, quelle que soit leur amplitude, *pourvu qu'elles soient très petites.* On dit alors qu'elles sont *isochrones.*

§ 87. *Lois que l'on déduit de l'équation fondamentale de la théorie du pendule simple.* — Pour déduire toutes les conséquences de l'équation fondamentale (1) du § 85, supposons qu'on fasse osciller le pendule pendant un temps T et qu'il exécute n oscillations. Il mettra un temps $\frac{T}{n}$ à en exécuter une, alors on aura

$$\frac{T}{n}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\text{ ; d'où } l=\frac{gT^2}{\pi^2n^2}.$$

Pour un autre pendule que l'on ferait osciller pendant le même temps T, on aurait

$$\frac{T}{n'}=\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}\text{ et } l'=\frac{gT^2}{\pi^2n'^2}.$$

Divisant l par l' on a

$$\frac{l}{l'}=\frac{n'^2}{n^2},$$

ce qui présente la loi du paragraphe précédent sous une autre forme : *Les longueurs de deux pendules sont réciproquement proportionnelles aux carrés des nombres d'oscillations qu'ils exécutent pendant le même temps.* Cette loi peut servir à la détermination de la hauteur d'une voûte, d'un édifice, etc.....

En faisant osciller le même pendule dans deux lieux différents de la terre qui aient une latitude différente, on remarque que les oscillations ne s'effectuent plus dans le même temps, ce qui ne peut tenir qu'à la variation de la quantité g qui est avec l la seule quantité variable dans la formule. Alors, en faisant battre le même pendule dans les deux lieux, nous aurions pour l'un :

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

et pour l'autre :

$$t'=\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

En appelant T comme précédemment le temps que met ce pendule à effectuer n oscillations dans l'un des lieux, et n' oscillations dans l'autre, on aura comme précédemment :

$$\frac{T}{n}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}};\text{et}\ \frac{T}{n'}=\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

Divisant membre à membre et réduisant, il vient :

$$\frac{g}{g'}=\frac{n^2}{n'^2};$$

ce qui fait voir que *les intensités de la gravité dans deux lieux différents du globe sont directement proportionnelles aux carrés des nombres d'oscillations que le même pendule y exécute pendant le même temps.*

L'équation $\frac{g}{g'} = \frac{n^2_{\prime}}{n'^2}$ pourrait faire connaître l'intensité de la gravité dans un lieu du globe, connaissant sa valeur dans un autre lieu et les nombres d'oscillations que battrait le même pendule dans ces lieux ; car on en tire :

$$g' = g.\frac{n'^2}{n^2}.$$

On construit ordinairement les pendules en employant une tige métallique. A une de ses extrémités on adapte une masse d'un poids considérable, afin que l'influence de la résistance de l'air soit affaiblie, et on lui donne la forme d'une lentille par la même raison. On nomme ces pendules des *pendules composés.*

§ 88. *Centre d'oscillation d'un pendule composé. — Mode de suspension.* — La théorie des mouvements d'un pendule composé est compliquée; on peut déterminer par le calcul la longueur du pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même temps qu'un pendule composé donné. En portant sur ce dernier, et verticalement, cette longueur, à partir du point de suspension, on obtient le point du pendule donné qui oscille comme s'il était libre. Ce point porte le nom de *centre d'oscillation.* Sa distance au centre de suspension mesure ce qu'on entend par *longueur* du pendule composé auquel il appartient. Lorsqu'un pendule sera composé d'une masse oscillante très-pesante, il pourra être considéré approximativement comme pendule simple.

Pour se rendre compte de la position du centre d'oscillation dans un pendule composé, nous remarquerons que, lorsqu'un de ces pendules oscille, les points les plus éloignés des points de suspension, ont des vitesses plus grandes que celles des points qui en sont les plus rapprochés. Cela résulte de la remarque faite au § 23. Or, l'équation $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ fait voir au contraire que si chacun de ces points du pendule était considéré isolément, comme s'il était libre, et qu'il oscillât comme un pendule simple, les vitesses de ces points iraient en décroissant à mesure qu'ils s'éloigneraient de l'axe de suspension. C'est donc la liaison de tous ces points qui les oblige à altérer ainsi leurs vitesses respectives. Les points les plus rapprochés de l'axe de rotation vont plus lentement que s'ils étaient seuls, et les points les plus éloignés vont plus vite. Il résulte naturellement de cet état de choses, que parmi tous les points de la verticale du point de suspension, il doit en exister un qui oscille comme s'il était libre, qui n'éprouve ni avance ni retard par sa liaison avec les autres: c'est ce point qui est le centre d'oscillation.

Ce point est placé sur la ligne qui joint le point de suspension au centre de gravité, au-dessous de ce dernier point, et très près de lui.

Un pendule simple formé d'une boule métallique et d'un fil très fin, et dont la longueur serait égale à la distance du point de suspension au centre d'oscillation, exécuterait ses oscillations pendant le même temps que le pendule composé donné. Les horlogers prennent ordinairement le centre de gravité pour le centre d'oscillation, parce qu'ils ont le moyen de corriger l'erreur en réglant la marche de l'horloge, à l'aide d'une vis de rappel qui élève ou abaisse la lentille de quantités aussi petites qu'on le veut.

Le centre d'oscillation jouit de la propriété d'être réciproque du centre de suspension. Cela veut dire qu'en suspendant le corps par son centre d'oscillation, la durée de ses oscillations reste la même.

Les pendules composés sont suspendus, soit à l'aide de couteaux, soit à l'aide de lames d'acier très minces, et saisies par leurs extrémités. Ce dernier mode paraît être adopté de préférence.

§ 89. *Détermination de la longueur du pendule simple qui bat les secondes ou un nombre de secondes ou de fractions de secondes, par le calcul et par l'expérience. Problème. Corrections relatives à la hauteur et à la latitude. Manière de régler un pendule.* — La longueur du pendule simple qui bat les secondes peut être déterminée par le calcul et par l'expérience. De l'équation $t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ on tire, en faisant $t=1$,

$$l=0^{m},994.$$

C'est à peu près la longueur du pendule qui bat les secondes pour la latitude de l'observatoire de Paris. Par l'expérience, il faudrait prendre un pendule, le faire osciller pendant un certain temps, et employer la formule $\frac{l}{l'}=\frac{n'^2}{n^2}$, dans laquelle l désignerait la longueur de ce pendule, l' la longueur cherchée, n le nombre d'oscillations de l pendant le temps de l'expérience, et n' le nombre de secondes contenues dans ce temps. On trouverait pour la valeur de l' le même nombre $0^{m},944$. Si un pendule devait battre une demi-seconde, il faudrait remplacer t par $\frac{1}{2}$ dans la formule $t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, et tirer la valeur de l. On trouverait $l=0^{m},2485$. Par l'expérience, on agirait comme dans l'exemple précédent, en employant la formule $\frac{l}{l'}=\frac{n'^2}{n^2}$.

Soit proposé de trouver le nombre d'oscillations exécutées dans une heure par un pendule d'une longueur de $1^{m}20$. Pour cette hypothèse, on aura, dans la formule $\frac{l}{l'}=\frac{n'^2}{n^2}$, $l'=1^{m}20$, $l=0^{m}994$ pour Paris, et $n=3600$. On en tire $n'=3276$.

Le nombre des vibrations d'un pendule pendant une heure étant donné, trouver la longueur de ce pendule. La même formule donne $l'=\frac{ln^2}{n'^2}$. Soit $l=0^{m},994$ à Paris, $n=3600$, $n'=4000$, on a $l'=0^{m},805$.

En se transportant dans la verticale d'un lieu, à une certaine distance du niveau de la mer, la gravité change de valeur, et par suite aussi la longueur du pendule qui bat les secondes.

En désignant par g la gravité au niveau des mers, et par l la longueur du pendule à secondes, l'intensité g' de la gravité à une hauteur h, et la longueur l' du pendule à secondes, à cette même hauteur, sont données par les formules

$$g'=g-\frac{2\,gh}{r}\ldots(1),\quad \text{et } l'=l-\frac{2\,lh}{r}\ldots(2).$$

La première a été trouvée § 62. La seconde se déduit de la première, en remarquant que si l'on fait $t=1$ dans la formule $t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, on en tire $g=\pi^2 l$ ou $l=\frac{g}{\pi^2}$. On aurait donc pour le pendule à secondes l',

$$l'=\frac{g'}{\pi^2}.$$

Mettant à la place de g' sa valeur, il vient

$$l'=\frac{g-\frac{2\,gh}{r}}{\pi^2}=\frac{g}{\pi^2}-\frac{g}{\pi^2}\cdot\frac{2\,h}{r}\text{ ou } l'=l-\frac{2\,lh}{r}.$$

Dans les formules (1) et (2), r est le rayon moyen de la terre en mètres : il est égal à 6367000 mètres.

Ces corrections sont souvent inutiles, à cause de la grandeur de r et de la petitesse de h par rapport à r.

Lorsqu'on change de latitude, la gravité change aussi de valeur, ainsi que la longueur du pendule à secondes. Le calcul démontre que la pesanteur varie proportionnellement au sinus de la latitude du lieu que l'on considère. Or, comme on a $g=\pi^2 l$, il s'ensuit que l varie aussi comme la pesanteur. On a, pour déterminer ces deux valeurs, les deux formules suivantes, dans lesquelles a est la latitude du lieu, c'est-à-dire la distance de ce lieu à l'équateur, mesurée sur le méridien :

$$l=0^{\mathrm{m}},990926+0,005152815\,\sin.^2 a.$$

$$g=9^{\mathrm{m}},780044+0,050856230\,\sin.^2 a.$$

a étant nul sous l'équateur, on voit que sous cette ligne la gravité est égale à $9^{m},780$, et le pendule à secondes a pour longueur $0^{m},991$.

A l'aide des formules précédentes, on pourra calculer les variations de longueur qu'éprouve le pendule à secondes, lorsqu'on se transporte d'un lieu à un autre, ainsi que le nombre d'oscillations que fait un même pendule pendant le même temps dans divers lieux, l'avance ou le retard d'une horloge réglée en un lieu, lorsqu'on l'établit ailleurs, etc.

Lorsqu'une horloge est construite, et qu'on veut s'assurer si le pendule est réglé, on le fait osciller pendant un temps donné par une bonne montre. Ce pendule fera alors un nombre d'oscillations plus grand ou plus petit que celui qui est nécessaire. Proposons-nous de trouver la correction à apporter à la longueur du pendule dans ce cas.

Soit l' la longueur de ce pendule faisant $n+d$ oscillations dans un temps donné, tandis qu'il ne devrait en faire que n ayant une longueur l. La loi énoncée § 87 nous donne

$$\frac{l}{l'}=\frac{(n+d)^2}{n^2} \text{ ou } l\,n^2=l'\,(n^2+2\,nd+d^2),$$

d'où $(l-l')\,n^2=l'\,(2\,nd+d^2)$, et

$$l-l'=l'\left(\frac{2d}{n}+\frac{d^2}{n^2}\right).$$

Telle est la correction à faire à la longueur de ce pendule.

On peut négliger le dernier terme $\frac{d^2}{n^2}$, parce que d est très petit par rapport à n, et remplacer l' par l, ces deux quantités étant à peu près égales, et n étant très grand. La correction devient

$$l-l'=\frac{2ld}{n}.$$

Supposons qu'un pendule à secondes avance de 1' ou de 60'' par jour. Pour cette hypothèse on a $n=86400$, nombre de secondes en 24 heures; $d = 60$. La correction devient

$$l - l' = \frac{l}{720}.$$

La longueur du pendule à Paris étant de $0^m,994$, il vient

$$l - l' = \frac{0^m,994}{720} = 0^m,00138.$$

Telle est la quantité dont il faudra allonger le pendule qui avance de 60" par jour pour qu'il batte la seconde exactement.

En général, on trouve que si le pendule à secondes varie de 1" par jour, sa longueur doit changer de $0^m,000023$. Pour le pendule à demi-seconde, la correction serait d'un quart, etc. Pour deux secondes, trois secondes, ... d'avance ou de retard, il faudra nécessairement doubler, tripler, ... la variation. Ces changements de longueur s'effectuent avec la vis de rappel dont le pas permet de mesurer la marche.

§ 90. *Usages du pendule. Des horloges.* — On sait que les pendules sont employés dans les horloges à poids ou à ressort pour régulariser leur mouvement.

Nous saisirons cette occasion pour donner une idée de la construction des horloges et de leur marche.

Les parties principales d'une horloge sont : le *moteur*, les *rouages* et *l'échappement*. Dans cette dernière partie se trouve le pendule. Le moteur peut être un poids ou un ressort. Nous considérerons particulièrement le cas où l'horloge est mise en mouvement par un poids. Ce dernier est placé à l'extrémité d'une corde qui s'enroule sur un tambour, le poids en descendant, imprime un mouvement à ce tambour, et ce dernier entraîne tout le reste du système. Mais le mouvement ainsi imprimé serait uniformément accéléré, tandis qu'il doit être uniforme. L'échappement et le pendule ont pour but de régulariser le mouvement; aussi donne-t-on à cette partie de l'horloge le nom de *régulateur*.

Voici de quelle manière l'échappement régularise l'action motrice. L'arbre du tambour transmet son mouvement, par une série d'engrenages dont nous indiquerons bientôt l'usage, à une dernière roue à laquelle on donne le nom de *roue* d'échappement. Cette roue, comme le reste du système, ne serait pas propre à mesurer des durées égales, mais on y place un obstacle qui permet et défend alternativement la rotation, et cela se faisant d'une manière régulière, les mouvements du rouage pourront devenir propres à mesurer des durées égales. C'est le pendule qui présente cet obstacle dans les horloges. Son mouvement ne tarderait pas à être éteint par le frottement de l'axe et la résistance de l'air, si la force motrice de l'horloge ne le rétablissait sans cesse. La pièce qui communique à ce régulateur la force propre à réparer ses pertes, est l'*échappement.* Il y en a de deux espèces : dans la première dite *échappement à recul,* la roue animée par le moteur, pousse le régulateur de manière à lui imprimer un mouvement trop étendu. Cette roue est alors forcée à céder lorsque le régulateur revient à son état primitif. Elle retourne en arrière avant que de pouvoir à son tour imprimer un mouvement; il y a un temps de recul à chaque vibration, ce qui produit des pertes de force et de durée, des frottements inutiles, etc. Dans le deuxième *échappement à repos,* le régulateur, en revenant à sa première position, au lieu de trouver une dent qui lui résiste, comme dans le cas précédent, ne rencontre qu'un arc concentrique à ses excursions, sur lequel il se meut sans trouver de résistance, jusqu'à ce qu'il ait rencontré la dent qui doit le pousser pour réparer ses pertes. L'échappement à repos est, sans contredit, le meilleur, mais il est le plus coûteux et le plus difficile à exécuter.

L'*échappement à ancre* est un des plus usités. La dernière roue est une roue à rochet *a, fig.* 35, qui est arrêtée par la branche *d f* de la pièce *b c d,* nommée *ancre,* laquelle est fixée au pendule. Lorsque celui-ci, dans son mouvement d'oscillation, passera de l'autre côté de la verticale, la branche *d f* se lèvera, et laissera passer la dent *f*, qu'elle ne retiendra plus. Mais l'autre branche *b e* de l'ancre s'abaissera en même temps, et rencontrant une autre dent *e* de la roue, arrêtera à son tour le mouvement. Puis cette branche *b e* s'élèvera entraînée par le pendule, et laissera *échapper* la dent *e* qu'elle retenait, tandis que la branche *d f* se présentera à la dent suivante *f*. Il en résulte qu'à chaque double oscillation il ne passe qu'une seule dent de la roue d'échappement *a*, et que la pression que celle-ci exerce, sous l'influence du moteur contre les extrémités *e* de l'ancre, restituent au pendule les pertes qu'il éprouve par les résistances; en sorte que le mouvement se continue tant que le moteur agit, et avec uniformité, pourvu qu'il y ait une égalité parfaite dans les amplitudes de l'oscillation.

Cet échappement est à recul. Graham l'a perfectionné en supprimant le recul. Il a formé les palettes *a b* de l'ancre en arc de cercle, *fig.* 36, et elles correspondent aux plans inclinés *c d*, qui produisent l'impulsion sur le pendule. Ainsi construit, cet échappement devient à repos, et ses oscillations sont isochrones.

L'*échappement à chevilles, fig.* 37, se compose d'une roue *a*, sans dents, portant des chevilles plantées perpendiculairement à son plan. La tige du pendule tient à deux bras *b c*, *d c*; les oscillations font successivement élever et abaisser ces bras, et ces choses sont disposées de manière que quand le bras *c d* est arrêté et pressé par une cheville, l'autre bras est libre; mais bientôt le pendule entraîne le premier, et la branche *b c* sera de suite saisie par une cheville, dès que *c d* aura quitté la sienne. Quand la cheville est rendue libre, la roue tourne par l'effet du moteur, et la palette reçoit le choc, puis s'enfonce en glissant sous la cheville, tandis que la roue demeure immobile. Cet échappement est à repos.

Voyons maintenant quel est le mécanisme qui sert à lier la force motrice au régulateur. C'est toujours une sérié de roues dentées dont le nombre de dents est indéterminé , tout en étant soumis à de certaines conditions que nous allons établir.

Le problème de la détermination du nombre de dents des roues est en partie fondé sur ce principe que les nombres de dents de deux roues qui se conduisent sont en raison inverse de leurs vitesses de rotation : c'est-à-dire, par exemple, que si le pignon a trois fois moins de dents que la roue qui le conduit, il fera trois fois plus de tours pendant le même temps. On voit donc que le rapport des nombres de dents étant n, celui des vitesses de rotation est $\frac{1}{n}$. Ou bien, A étant le nombre des dents d'une roue et a celui du pignon qu'elle conduit, ou qui la conduit, le pignon fera $\frac{A}{a}$ tours pendant que la roue en fera un, ou la roue fera $\frac{a}{A}$ tours pendant que le pignon en fera un, ou bien aussi le pignon fera A tours pendant que la roue en fera a.

Lorsqu'il y a deux roues et deux pignons, *fig.* 38, le premier pignon faisant $\frac{A}{a}$ tours pendant que la roue en fait un, et le second pignon en faisant $\frac{B}{b}$ pendant que la deuxième roue en fait un, comme cette deuxième roue fait autant de tours que le premier pignon qui est monté sur son axe, et que celui-ci en fait $\frac{A}{a}$, il s'ensuit que le deuxième pignon fera $\frac{A}{a}\times\frac{B}{b}$ tours pendant que la première roue en fera un.

En général, *pour avoir le rapport des nombres de tours, dans ce système d'engrenage, de la première roue et du dernier pignon, il faut multiplier entre eux les nombres de dents des roues qui commandent, puis les nombres de dents des roues commandées, et diviser ces deux produits l'un par l'autre.*

Supposons maintenant que le pendule destiné à régulariser l'horloge ait la longueur du pendule à secondes, et que la roue d'échappement A ait 30 dents, *fig.* 39. Puisqu'il n'échappe qu'une dent à chaque oscillation double, la roue A n'aura exécuté un tour entier qu'au bout de 60 secondes ou une minute. Voilà déjà le moyen de marquer les secondes en plaçant une aiguille sur l'axe de la roue A, et lui faisant ainsi tracer les divisions d'un cadran divisé en 60 parties égales.

Le mouvement de la roue A lui est transmis par une roue B, à l'aide d'un pignon *b* monté sur l'axe de A. Cette seconde roue porte le nom de *petite roue moyenne*. Si on lui suppose 75 dents et 10 au pignon *b*, pendant que le pignon *b* fera 75 tours elle en fera 10, ou bien le rapport des vitesses de rotation sera 7,5 : c'est-à-dire que B fera un tour pendant que *b* ou A en fera 7,5. Or un tour de A est exécuté en 60 secondes, donc il faudra 7,5 fois 60 secondes ou 450 secondes à la roue B pour faire un tour. Si cette seconde roue est conduite par une troisième C à l'aide d'un pignon *c*, et si l'on donne 80 dents à la roue et 10 au pignon, le rapport étant 8, la roue C mettra 8 fois plus de temps que la roue B ou son pignon à faire un tour, c'est-à-dire 8 fois 450 secondes ou une heure. Une aiguille montée sur le centre de cette roue pourra donc marquer les minutes. La roue C porte le nom de *roue des minutes* ou de *grande roue moyenne*. On voit que cette roue doit toujours accomplir sa révolution en une heure. C'est d'après cette condition et la longueur du pendule que les nombres des dents des autres roues sont calculés. En mettant un pignon sur l'axe de la roue C et le faisant conduire par une autre roue D, si l'on donne 7 dents au pignon et 84 à la roue, le rapport est 12, et cette roue D ferait sa révolution en 12 fois plus de temps que n'en met la roue C pour acccomplir la sienne, donc la roue D sera susceptible de marquer les heures. Le pignon de cette roue D est conduit par la roue E montée sur l'axe du tambour, et que pour cette raison on nomme *roue de tambour*. En donnant 12 dents à ce pignon et 84 à la roue, cette dernière roue et le tambour accompliront leur révolution en $\frac{84}{12}$ ou 7 fois 12 heures ou 84 heures. On peut ainsi déterminer aisément la longueur que doit avoir la corde du poids, connaissant le diamètre du tambour.

On voit donc bien comment s'exécute le mouvement de cette machine. Lorsque l'échappement a lieu, le poids entraîne tout le système, la roue de cylindre ou de tambour E conduit le pignon *e* qui entraîne la roue des heures D avec lui. Cette dernière fait tourner le pignon *d* de la roue des minutes C, qui transmet le mouvement à la petite roue moyenne ou *roue de champ* B par le moyen du pignon *c*. Enfin la roue B conduit le pignon de la roue d'échappement qui laisse passer une dent à chaque oscillation double du pendule.

La roue des minutes *c* mène le pignon de la petite moyenne B, et celle-ci mène à son tour le pignon de la roue d'échappement. Ces dentures une fois fixées, comme la première de ces roues fait toujours son tour en une heure, la vitesse de la dernière s'ensuit, et l'on doit calculer combien elle accomplit de révolutions en une heure. Si la longueur du pendule est prise à volonté, on sait aussi combien il fait d'oscillations par heure. Il s'agit donc de denter la roue d'échappement de manière à satisfaire à ces deux conditions. Soit C le nombre des dents de la grande roue moyenne, qui fait son tour en une heure; B celui de la roue de champ; *c* celui du pignon de celle-ci, et *b* celui du pignon de la roue d'échappement; en une heure la roue de champ fait $\frac{C}{c}$ tours; de même, pour un tour de cette dernière, la roue d'échappement en fait $\frac{B}{b}$. Celle-ci fait donc $\frac{CB}{cb}$ tours par heure. Tel est le nombre de tours de la roue d'échappement. D'un autre côté, si x est le nombre de dents de la roue d'échappement, comme le passage d'une seule dent répond à deux oscillations, un tour entier fait $2x$ oscillations, et les $\frac{CB}{cb}$ tours font $\frac{2x\,CB}{cb}$ oscillations. Si donc N désigne le nombre d'oscillations du pendule par heure, on aura

$$\frac{2x\,CB}{cb} = N, \text{ d'où } x = \frac{cbN}{2CB}.$$

Cette dernière expression fait connaître le nombre de dents de la roue d'échappement pour que la roue des minutes fasse son tour en une heure, eu égard au pendule que l'on considère.

Si, au contraire, la roue d'échappement était construite, ce serait alors le pendule qui serait à déterminer, et la même équation ferait trouver N ou le nombre des oscillations du pendule par heure, d'où l'on déduirait sa longueur, comme il a été dit plus haut, on aurait ici

$$N = \frac{2CBx}{cb}.$$

Soit $C = 84$ dents, $B = 70$, $c = 7$, $b = 7$. Si le pendule bat la seconde, $N = 3600$. On trouve $x = 15$. La roue d'échappement aura 15 dents.

Soit, au contraire, avec les mêmes roues, une roue d'échappement ayant 25 dents. On trouve $N = 6000$, nombre d'oscillations d'un pendule dont la longueur est de $0^m,35778$.

Nous donnons ici le tableau de la longueur du pendule, à Paris, et du nombre d'oscillations correspondant, par heure, dans le vide, et suivant un arc infiniment petit.

NOMBRE D'OSCILLATIONS.	LONGUEUR DU PENDULE en millimètres.	NOMBRE D'OSCILLATIONS.	LONGUEUR DU PENDULE en millimètres.
3600	993,827	7900	206,38
3700	940,83	8000	201,25
3800	891,96	8100	196,31
3900	846,81	8200	191,55
4000	805,00	8300	186,96
4100	766,30	8400	182,54
4200	730,16	8500	178,27
4300	696,59	8600	174,14
4400	665,29	8700	170,17
4500	636,05	8800	166,32
4600	608,70	8900	162,61
4700	583,07	9000	159,01
4800	559,03	9100	155,54
4900	536,44	9200	152,17
5000	515,20	9300	148,92
5100	495,19	9400	145,77
5200	476,33	9500	142,71
5300	458,53	9600	139,76
5400	441,70	9700	136,89
5500	425,79	9800	134,11
5600	410,71	9900	131,42
5700	396,43	10000	128,80
5800	382,00	10100	126,26
5900	370,01	10200	123,80
6000	357,78	10300	121,41
6100	346,14	10400	119,08
6200	335,07	10500	116,83
6300	324,51	10600	114,63
6400	314,45	10700	112,50
6500	304,85	10800	110,43
6600	295,68	10900	108,41
6700	286,92	11000	106,45
6800	278,55	11100	104,54
6900	270,53	11200	102,68
7000	262,80	11300	100,87
7100	255,50	11400	99,11
7200	248,46	11500	97,39
7300	241,70	11600	95,72
7400	235,21	11700	94,09
7500	228,98	11800	92,50
7600	222,99	11900	90,95
7700	217,24	12000	89,44
7800	211,70		

Il arrive ordinairement que le quotient de la valeur de x n'est pas exact, et comme la roue d'échappement doit avoir un nombre de dents entier, on prend pour ce nombre le plus approché du quotient. Il est vrai qu'alors le pendule ne bat plus le nombre d'oscillations qu'on avait adopté, et qu'il est d'une autre longueur peu différente : on corrige cette erreur en réglant le pendule comme il a été dit plus haut.

Par exemple, si la grande roue moyenne a 72 dents, celle de champ 60, les pignons 6 et 8, que la longueur du pendule réponde à 6800 oscillations, la valeur de x est égale à $37\frac{7}{9}$: en prenant 38 on voit qu'on peut donner 38 dents à la roue d'échappement, ce qui forcera d'allonger un peu le pendule.

On varie beaucoup les nombres de dents des roues et des pignons, puisque ces nombres sont indéterminés, et qu'ils ne sont assujettis qu'à la condition de satisfaire à l'équation précédente dans laquelle il entre 6 quantités variables. Seulement, pour que les mouvements soient plus faciles, on a coutume, autant que cela est possible, de donner au nombre de dents d'une roue et à celui du pignon qu'elle mène des valeurs multiples l'une de l'autre. C'est ce qu'on nomme des nombres *rentrants*. Les mêmes dents se trouvent ainsi en reprise à chaque tour.

Tels sont les principes sur lesquels les horloges sont fondées. Nous n'entrerons ici dans aucun détail sur les différentes pièces, cela nous conduirait trop loin.

FORCE CENTRIFUGE.

§ 91. *De la force centrifuge dans le mouvement circulaire. Sa valeur en fonction de la vitesse du mobile et de* *rayon du cercle qu'il décrit.* — Pour donner une idée de la nature de cette force, considérons un fil inextensible, inflexible et sans masse, fixé invariablement au point c (*fig.* 40); appliquons au point a perpendiculairement à ca, une force instantanée qui lui communiquerait, dans le sens ab, une vitesse constante, si ce point était libre. En vertu de sa liaison avec le centre c par le moyen du fil, le point a décrira le cercle afk. Au bout d'un temps infiniment petit, dont nous représenterons la durée par θ, le point mobile sera parvenu en m, après avoir décrit l'arc infiniment petit am. On peut considérer, sans erreur sensible, la nouvelle position du fil comme parallèle à la première; par conséquent, en passant de a en m, le point mobile s'est rapproché du centre c d'une quantité équivalente à ad déterminée par la perpendiculaire md abaissée du point m sur ac; donc, s'il eût été libre, il se fût éloigné du centre de la même quantité dans le même temps. On appelle *force centrifuge* cette tendance du point mobile à s'éloigner du centre autour duquel il est assujetti à tourner. C'est à chaque instant l'effort qu'il fait pour rompre le fil; cette force exerce donc sans cesse son action sur le mobile, elle est donc accélératrice, et sa direction est celle du rayon du cercle que décrit le mobile; seulement son action est à chaque instant détruite par la résistance du point fixe. Or, comme cette force est toujours normale au petit élément que décrit le mobile à une époque quelconque de son mouvement, la vitesse qu'elle tendrait à lui imprimer dans sa direction ne saurait modifier celle qu'il a reçue de la force instantanée; il s'ensuit donc que cette dernière vitesse reste constante, et que le mouvement du mobile dans le cercle est uniforme.

Pour déterminer la valeur de la force centrifuge, on observera que pendant la durée θ de l'instant que nous avons considéré d'abord, son intensité peut être supposée constante; et par conséquent, en l'appelant f, les formules du mouvement uniformément accéléré lui deviennent applicables. On aura donc, en employant la formule $e = \frac{1}{2} a t^2$, dans laquelle $a = f$, $da = e$, $t = i$:

$$f = \frac{2\,da}{i^2}.$$

Mais, en nommant r le rayon ca, on a, par un théorême de géométrie, l'arc am pouvant être remplacé par la corde qui le sous-tend à cause de sa petitesse : $da \times 2r = am^2$; d'où l'on tire $da = \frac{am^2}{2r}$; et en substituant : $f = \frac{am^2}{i^2 r}$. Le mouvement du point a dans le cercle étant uniforme, on a $am = iv$ qui donne $am^2 = i^2 v^2$. Substituant encore, on trouve enfin :

$$f = \frac{v^2}{r} \ldots\ldots\ (1).$$

Ce résultat donne la valeur de la force centrifuge dans le cercle. Il exprime que, le rayon étant constant, *l'intensité de cette force est proportionnelle au carré de la vitesse que possède le mobile à l'instant où on le considère, et inversement proportionnelle au rayon du cercle qu'il décrit avec la même vitesse;* et qu'en général *elle varie directement comme le quotient du carré de la vitesse divisé par le rayon.* Il sera ainsi facile de comparer celles qui ont lieu sur des cercles donnés, décrits avec des vitesses connues; mais il ne faut pas oublier que nous avons supposé ce point a sans pesanteur : s'il en était autrement, l'intensité de la force centrifuge recevrait des modifications.

§ 92. *Ce qu'on entend quand on dit que la force centrifuge est égale à un certain nombre de mètres.* — La valeur de f dans l'équation (1) du paragraphe précédent sera toujours exprimée en mètres, car le quotient d'une surface v^2 par une ligne r exprime des unités de longueur. Cette valeur ne doit être considerée, en effet, que comme l'accélération de vitesse qui serait communiquée à un mobile au bout de chaque seconde, s'il était soumis à l'action de cette force, et qu'elle produisît le mouvement. Cette explication était nécessaire, car la force centrifuge ne manifeste son action sur le mobile qu'en s'opposant à l'action de la force centrale, et en équilibrant même cette force qui la maintient dans le cercle qu'il décrit; soit par l'effet d'une force naturelle, comme cela a lieu dans notre système planétaire; soit par l'effet d'une cause toute matérielle, comme dans un volant dont toutes les parties sont liées au centre d'une manière invariable; soit enfin par l'effet de notre volonté, comme lorsque nous nous assujettissons à tourner nous-mêmes autour d'un point.

Il peut cependant arriver que la force centrifuge manifeste son action autrement que par des effets cachés. Ce serait dans le cas où la force centrale serait anéantie. Le mobile s'échapperait alors suivant la tangente au cercle qu'il décrivait au point où il se trouvait lorsque la force centrale a cessé son action, avec une vitesse acquise dont la valeur serait donnée pour cet instant par la vitesse dans le mouvement circulaire et le rayon du cercle décrit.

§ 93. *Autre valeur de la force centrifuge.* — Le mouvement sur le cercle afk étant uniforme, si l'on désigne par T le temps employé par le mobile pour le parcourir, vT sera égal à la circonférence entière dont la valeur est encore $2\pi r$. Donc $vT = 2\pi r$; d'où l'on tire

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \text{ et } v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2},$$

et par conséquent

$$f = \frac{4\pi^2 r}{T^2};$$

d'où l'on conclut que la force centrifuge est en même temps proportionnelle au rayon du cercle décrit et inverse au carré du temps employé à le décrire.

§ 94. *Exemples de quelques mouvements dans lesquels on peut remarquer l'action de la force centrifuge.* — On peut prendre une idée de cette force et des résultats généraux auxquels nous venons de parvenir, par le mouvement que prend une fronde. La force centrifuge est égale à l'effort qu'il faut faire pour retenir le projectile, et peut détruire sa tendance à tomber.

En faisant ainsi tourner un corps auquel on imprimerait une vitesse croissante, on conçoit qu'il serait possible de l'augmenter assez pour qu'elle devînt plus grande que la force de cohésion du corps; alors ses diverses parties pourraient se séparer, et s'échapper par la tangente au cercle qu'elles décrivaient. C'est ce qui arrive à la boue qu'entraînent avec elles les roues d'un équipage qui roule avec rapidité.

De deux corps auxquels on imprime la même force centrifuge, celui qui a le plus de masse doit exercer sur le fil de suspension un effort plus considérable. Tel fil peut rompre lorsque le projectile sera une balle de plomb qui ne se brisera pas s'il est une boule d'ivoire.

On conçoit que la force centrifuge peut être plus petite, plus grande, ou égale à la pesanteur.

Lorsqu'un cheval tourne librement dans un manége fermé, il n'est maintenu dans le cercle que par la barrière qui l'empêche d'en sortir; et cet obstacle remplace la force centrale, qui dans d'autres circonstances, serait représentée par la tension d'une longe ou celle d'un fil, etc. La force centrifuge dont il est animé ne lui permet pas de se maintenir dans la verticale; et pour résister à la tendance qu'il éprouve à fuir le centre, il penche le corps vers ce centre d'une quantité qui dépend de sa vitesse, et du rayon du cercle qu'il décrit. Le sauteur exécute le même mouvement pour conserver son équilibre.

Dans les tournants courts, un bon cavalier a soin de ralentir la course de son cheval, ou il risque d'être renversé par la force centrifuge.

Quand une voiture tourne sur une route, elle acquiert une force centrifuge qui tend à la renverser du dedans au dehors du tournant. On préviendrait cet accident, en faisant des raccordements dont les rayons fussent très-grands. Il serait également utile de donner à ces raccordements une seule pente vers le centre du tournant; car lorsque deux voitures se rencontrent sur une route dont la surface est courbe, la force centrifuge de la voiture qui roule sur le versant extérieur se joint à la tendance qu'elle a déjà à tomber comme étant placée sur un plan incliné, tandis que cette force favorise l'équilibre de la voiture qui roule sur le versant intérieur.

§ 95. *Variations de la force centrifuge à la surface de la terre; explication de l'aplatissement de cette dernière.* — La lune en tournant autour de la terre et les planètes autour du soleil sont soumises à l'action d'une force centrifuge résultante de leur mouvement, et qui lutte sans cesse avec la force centrale qui les précipiterait vers le centre autour duquel elles tournent, si, en partant du repos, elles n'eussent reçu une impulsion primitive à l'origine des choses. Toutes ces planètes en tournant autour de leur axe, et en particulier la terre, qui exécute ce mouvement en 24 heures, communique par cela même aux corps qui la recouvrent et à toutes les parties de sa masse, une force centrifuge dont l'effet doit être de diminuer l'intensité de la pesanteur. Or, si nous nous rappelons une des lois précédentes qui établit que la force centrifuge est en même temps proportionnelle au rayon du cercle, et inverse au carré du temps employé à le décrire; comme le temps que mettent les parties de la terre à exécuter leur révolution diurne est le même pour tous les points, que l'on en prenne vers l'équateur ou vers les régions polaires, il s'ensuit que pour notre globe la force centrifuge est plus grande à l'équateur dont le rayon est le plus grand possible, que vers les régions polaires où les cercles décrits sont plus petits. Il résulte de là que la pesanteur doit être moindre à l'équateur qu'aux pôles où il n'existe pas de force centrifuge. Connaissant la vitesse d'un point de l'équateur et le rayon de ce cercle, il est aisé de trouver la valeur de la force centrifuge à l'équateur pour ce point : on la trouve égale au 289e de la pesanteur, ce qui la diminue dans le même rapport. Ce rapport s'approcherait de l'unité, si la rotation de la terre s'accélérait, et il croîtrait comme le carré de la vitesse. Donc, puisque 289 est le carré de 17, on voit que si la vitesse de circulation devenait 17 fois plus rapide, la force centrifuge à l'équateur égalerait la gravité, et que les corps placés en cette partie de la terre cesseraient de peser sur sa surface. En supposant que les corps célestes aient été primitivement fluides, comme un grand nombre de phénomènes portent à le supposer, l'attraction mutuelle de leurs parties leur aurait fait prendre une forme parfaitement sphérique, si aucune autre force n'eût agi sur eux. Mais, comme ils sont tous doués d'un mouvement de rotation autour d'un axe, la force centrifuge de ce mouvement a dû rendre les parties situées près de l'équateur moins pesantes, ce qui a dû déterminer en cet endroit une plus grande accumulation de matière. Aussi, observe-t-on que tous les corps célestes sont renflés à leur équateur, et aplatis à leurs pôles de rotation.

On peut rendre ce phénomène sensible, au moyen de deux ressorts d'acier elliptiques ou circulaires, qui sont traversés suivant leur axe par une tige métallique à laquelle on peut imprimer un mouvement de rotation. Les deux ressorts sont fixés à cette tige par une de ses extrémités, et peuvent se mouvoir librement par l'autre. Lorsqu'on imprime à la tige un mouvement de rotation, les ressorts le partagent; et comme leurs divers points éprouvent des forces centrifuges dont les valeurs sont différentes, celles de l'équateur étant les plus considérables, la flexibilité des ressorts leur permet d'obéir à cette action inégalement répartie, comme le ferait une masse fluide, et le pôle mobile se rapproche alors du pôle fixe d'une quantité d'autant plus grande que le mouvement de rotation est plus rapide.

§ 96. *Remarque sur les machines qui contiennent des parties tournantes sur des axes.* — Dans les machines qui contiennent des parties tournantes sur des axes, telles que des roues, des volants....., il est important de donner à ces parties une solidité dépendante de la vitesse qu'elles sont destinées à prendre, au risque de les voir se désunir. Il est, de plus, indispensable que leur masse soit également distribuée autour de l'axe de rotation; de cette manière les forces centrifuges ne tendent pas à déplacer cet axe. Nous reviendrons sur les applications de cette force, lorsque nous pourrons calculer ses effets comme force de pression.

THÉORIE DU TRAVAIL DES FORCES.

§ 97. *Travail d'une force. Unité de travail ou kilogrammètre. Travail d'une force constante, et dont le point d'application parcourt sa direction.* — Comme nous l'avons déjà fait pressentir au § 12, les effets des forces ne se réduisent pas à ce que nous en avons étudié jusqu'ici. L'un de ces effets consistait, comme nous venons de le voir, à imprimer aux corps des mouvements dont nous avons déterminé toutes les circonstances, et toutes ces forces ont pu être comparées entre elles, en leur donnant pour mesure la vitesse qu'elles imprimaient à ces corps au bout d'une seconde.

Dans les arts industriels, les effets des forces doivent être appréciés sous un autre point de vue. En effet, en considérant d'abord l'état de mouvement, cet état n'est obtenu qu'à l'aide d'une force, nommée *pression* ou *traction*, assimilable à un poids inerte, qui présenterait à cette force une résistance égale, et pouvant par conséquent se mesurer en kilogoammes, appliqué à un certain point du corps et déterminant son mouvement, c'est-à-dire, faisant parcourir à ce point un certain espace dans un temps donné. Ici, l'effet à mesurer est d'une nature complexe : il participe de l'effort produit, et du chemin parcouru par le point qui est soumis à l'action de la force.

Toutefois cette même force de pression, ou de traction, au lieu de déterminer le mouvement, pourrait être en lutte avec d'autres résistances dont l'action maintiendrait le corps en repos; dans ce cas, l'effet produit ne peut plus être comparé qu'à son poids, et sa valeur mesurée en kilogrammes.

La distinction que nous venons d'établir entre une force qui détermine le mouvement et une autre qui ne le détermine pas, a fait partager les forces en *forces vives* et *forces mortes*. Nous reviendrons bientôt sur cette première dénomination qui s'applique à toutes les forces motrices, en général, et nous trouverons un moyen de les mesurer à l'aide du poids des masses mises en mouvement et des vitesses qui leur sont imprimées. À l'égard des forces mortes, leur effet se réduisant à produire une pression qui est à chaque instant détruite par d'autres résistances, et cet effet pouvant être produit identiquement par un corps inerte, la mesure de ces effets sera évaluée en kilogrammes.

Nous nous occuperons dès à présent de la mesure des effets des forces motrices, eu égard à cette double considération qu'elles donnent lieu à une pression mesurable en poids et à un chemin parcouru qu'on peut évaluer en mètres, c'est ce que nous appellerons désormais *travailler*. En effet, qu'est-ce que *travailler*, si ce n'est vaincre ou détruire pour le besoin des arts des résistances telles que la force de cohésion des molécules des corps, comme on le fait sans cesse dans l'ajustage, la menuiserie, etc., la pesanteur, lorsqu'on soulève des fardeaux, lorsqu'on fait manœuvrer des pompes, etc. Or, il est facile de voir que dans tous ces exemples, le travail ne suppose pas seulement une résistance vaincue, mais une résistance reproduite le long d'un chemin parcouru par le point où s'exerce cette résistance, et dans sa propre direction. Pour enlever une parcelle de matière avec un outil, par exemple, non-seulement il faut un effort directement opposé à la résistance présentée par cette parcelle, mais encore il faut faire avancer le point d'action de l'outil dans la direction de la résistance. Plus cet avancement sera grand, plus la parcelle enlevée aura de longueur; d'un autre côté, plus sera grande l'épaisseur ou la largeur de cette parcelle, plus l'effort nécessaire pour l'enlever sera considérable. L'effet produit à chaque instant croît donc avec l'intensité de la force employée, qui est mesurée dans ce cas par la résistance à vaincre, et aussi avec la longueur du chemin parcouru dans la direction de cette force. Un raisonnement analogue est applicable à tous les travaux industriels.

On appelle *travail d'une force* pendant un temps quelconque toute résistance vaincue par cette force le long d'un chemin parcouru pendant ce temps par son point d'application dans sa propre direction. La force employée, ou la résistance équivalente qu'elle détruit, se mesure en kilogrammes, l'espace parcouru en mètres, et le temps en secondes, minutes, heures, etc. L'unité de travail est une résistance d'un kilogramme vaincue sur un mètre de longueur et pendant une seconde. Cette unité porte le nom de *kilogrammètre*. Il est aisé de déduire de là l'expression du travail d'une force.

Si cette force est constante, ainsi que la résistance qui lui est égale et directement opposée, il est clair que le travail sera proportionnel au chemin parcouru. En effet, si la même résistance est vaincue sur un chemin deux fois plus grand, trois fois plus grand....., c'est comme si l'on détruisait cette résistance deux fois, trois fois..... sur le même chemin; l'effet produit sera donc deux fois, trois fois..... plus grand. D'un autre côté, si une résistance constante, mais successivement double, triple,..... était successivement vaincue sur le même chemin, le travail serait évidemment proportionnel à cette résistance ou à la force équivalente qui la détruit, car c'est comme si l'on détruisait cette résistance simple deux fois, trois fois..... sur le même chemin, ce qui exige évidemment un travail deux fois, trois fois..... plus grand. Alors si l'on désigne par F en kilogrammes la force constante employée pour vaincre une résistance équivalente, et par E le chemin en mètres parcouru pendant une seconde par le point d'application de la force F sur la direction de cette force, le travail développé par la force F dans une seconde pourra être exprimé par $F \times E$ ou FE. En effet, si une force détruit une résistance de 20^k sur trois mètres de longueur dans l'unité de temps, cela revient à détruire une résistance de 3×20^k sur un mètre ou une résistance de 1^k sur 20×3^m; et dans ces deux cas, c'est toujours une résistance de 1^k vaincue 60 fois sur un mètre de distance et pendant l'unité de temps, ou 60 kilogrammètres. Donc enfin, pour mesurer le travail d'une force constante dont le point d'application parcourt sa direction, il faut multiplier cette force exprimée en kilogrammes par le chemin parcouru exprimé en mètres. Le produit donne des kilagrammètres et s'écrit ainsi : $60^k \times {}^m$ ou 60^{km}. Pour éviter les nombres trop grands, c'est le travail développé en une seconde que nous évaluerons généralement à moins que nous n'avertissions du contraire.

§ 98. *Travail d'une force variable ; valeur de l'effort moyen.*— Si la force était variable, le travail ne pourrait plus s'évaluer comme il vient d'être dit; mais comme, pour chacun des espaces décrits par le point d'application, la force peut être censée constante, le travail correspondant devra encore se mesurer par le produit de cette force par le petit chemin dont il s'agit. Le travail total se composant de la somme des travaux partiels, sera mesuré également par la somme de tous les petits produits qui leur correspondent.

On pourrait, à l'aide d'une construction géométrique, trouvér l'expression de ce travail. Il suffirait de connaître la loi de variation de la résistance, et les chemins élémentaires décrits par le point d'application, correspondant à quelques valeurs de la résistance. Prenant alors une ligne AB, et sur cette ligne des longueurs égales aux petits chemins élémentaires, on élèvera à l'origine de chacun d'eux une perpendiculaire égale à la valeur correspondante de la résistance, et la somme des petits rectangles ayant pour base les chemins décrits et pour hauteurs les différentes valeurs de la résistance, représentera le travail total. On en trouvera l'expression au moyen du théorême qui fait déterminer l'aire comprise entre une courbe, une base et deux perpendiculaires à cette base. Cette formule est :

$$A=\frac{l}{n}\left\{\frac{p+p'}{2}+a+b+c+\ldots.\right\}$$

en appelant l la longueur de la base, n le nombre de ses parties, p et p' les perpendiculaires extrêmes, et a, b, c.... les perpendiculaires intermédiaires menées aux points de division de la base partagée en parties égales.

On a une valeur plus approchée en employant la formule :

$$A=\frac{1}{3}\left\{p+p'+2\,(p_1+q_1+\ldots.)+4\,(p_2+q_2+r_2+\ldots.\right\}\frac{l}{n}$$

qui suppose que la base est divisée en un nombre pair de parties égales, et dans laquelle p et p' représentent les perpendiculaires extrêmes, p_1, q_1,..... les autres perpendiculaires de rangs impairs, p_2, q_2, les autres perpendiculaires de rangs pairs, l la longueur de la base et n le nombre des parties.

Application : Supposons 7 valeurs de la force, égales aux nombres 50^k, 52^k, 53^k, 55^k, 58^k, 59^k, 60^k. Supposons l'espace élémentaire correspondant à chaque valeur de la force, égal à $0^m,15$, de sorte que l'espace total parcouru soit $6 \times 0^m,15 = 0^m,9$, au bout duquel l'intensité de la force serait de 60^k.

On aura $p=50$; $p'=60$; $p_1=53$; $q=58$; $p_2=52$; $q_2=55$; $r_2=59$; $l=0^m,9$, et $n=6$. Substituant et effectuant, il vient :

$$A=49,8;$$

ce qui représente 49 kilogrammètres, plus 0,8, ou un effort de $49^k,8$ vaincu sur un mètre de chemin parcouru.

Si l'on divise le travail ainsi obtenu par l'espace parcouru par le point d'application de la force, le quotient exprime ce que l'on entend par *effort moyen*. Ce serait l'effort constant qui, répété le long du même chemin, reproduirait la même quantité de travail, car nous avons vu que pour une force constante, le travail s'évaluait par le produit de cette force et du chemin parcouru.

§ 99. *Travail d'une force constante dont le point d'application parcourt un chemin oblique à la direction de la force.* — Pour trouver le travail d'une force constante dont la direction est oblique au chemin parcouru par son point d'application (*fig.* 41), nous ferons remarquer que cette force F décompose son action en deux autres, l'une normale au chemin et qui ne produit aucun travail, puisqu'elle est détruite, et l'autre agissant dans le sens du chemin, et produisant seule le travail. Si donc AB représente l'espace parcouru par le point d'application de la force F, le travail de cette force sera représenté par celui de sa composante AC agissant dans la direction de AB, c'est-à-dire par le produit de AC en kilogrammes par AB en mètres, ou $AC.AB$. Mais si nous projetons AB sur la direction de la force, les deux triangles semblables ABD et ACE donneront : $AC : AD : AE : AB$: d'où $AC.\ AB = AD.\ AE$; ce qui fait voir que le travail de la force F, primitivement exprimé par $AC.\ AB$, peut aussi s'exprimer par $AE.\ AD$, ou $F.\ AD$. Le travail d'une force constante oblique au chemin parcouru par son point d'application est donc mesuré par le produit de cette force par la projection du chemin parcouru sur sa direction.

§ 100. *Réflexions générales sur les machines.* — Nous aurons bientôt de nombreuses occasions de remarquer que, lorsqu'une machine est en repos, mais sous l'action de forces qui s'entre-détruisent, la force employée pour vaincre la résistance peut être beaucoup plus petite que cette résistance. Mais en augmentant ainsi l'effet d'une puissance dans l'état d'équilibre, on tombe, lorsqu'il y a mouvement, dans un inconvénient inévitable. En effet, la théorie et l'expérience sont d'accord sur ce point que, dans toutes les machines, *on perd du côté du temps ou de l'espace parcouru ce qu'on gagne du côté de la puissance.* On peut bien faire, par exemple, qu'un seul homme élève le même poids que trente; mais il sera aussi trente fois plus de temps à l'élever d'une même hauteur, ou, ce qui revient au même comme nous allons le faire voir, son point d'action parcourra un espace trente fois plus considérable. Cette vérité est manifeste dans le levier, où les arcs décrits par les points d'action de la puissance et de la résistance sont proportionnels aux bras du levier, qui sont eux-mêmes inversement proportionnels aux deux forces, comme on le verra bientôt. Il serait facile de démontrer ce principe pour la poulie mobile, ainsi que pour le tour et la vis.

En effet, dans l'équilibre du tour, on trouvera, § 246, que la puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue, ou comme la circonférence du cylindre est à celle de la roue. Mais lorsqu'il y a mouvement, la puissance fait évidemment le tour de la roue, tandis que la corde, en s'enveloppant autour du cylindre, ne fait monter le poids que d'une hauteur égale à la circonférence de ce cylindre. Si donc le rayon de la roue est m fois celui du cylindre, la puissance qui sera m fois plus petite que la résistance parcourra m fois plus de chemin que cette résistance.

Quand une vis tourne dans l'écrou, pour une révolution entière, elle n'avance dans le sens de son axe que d'une longueur égale au pas. Mais, pour produire cet effet, la puissance a décrit une circonférence d'un rayon l égal au bras du levier employé. Or, les conditions d'équilibre de la vis donnent

$$\frac{P}{R}=\frac{h}{2\pi l},$$

ou la puissance est à la résistance comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire la puissance. Si donc la puissance est m fois plus petite que la résistance, l'espace

$2\pi l$ parcouru par son point d'application sera m fois plus grand que celui parcouru par le point d'application de la résistance.

§ 101. *Principes des travaux élémentaires.* — Rien n'est plus commode pour juger si une machine peut produire les effets dont on la suppose capable, que de concevoir que le système prend un petit mouvement, et de comparer entre eux les espaces parcourus par la puissance et par la résistance ; car il faut toujours que la puissance multipliée par l'espace décrit donne le même produit que la résistance multipliée par le chemin qu'elle a parcouru, pourvu toutefois que ces espaces aient été parcourus sur la direction des forces. C'est cette proposition qui constitue ce que l'on nomme en mécanique le *principe des vitesses virtuelles,* et ce que nous nommerons le *principe des travaux élémentaires*, à cause des dénominations déjà acceptées pour les effets des forces. On appelle *travail élémentaire d'une force* le produit de cette force par la projection, sur sa direction, de l'espace infiniment petit parcouru par son point d'application. Voici l'énoncé général de cette proposition que nous n'entreprendrons pas de démontrer :

Si une machine ou un système quelconque est mis en équilibre sous l'action de puissances P, P', P''..... et de résistances R, R', R''..... et qu'on lui fasse prendre un petit mouvement quelconque, mais compatible avec les conditions auxquelles le système est assujetti, les points d'application A, A', A''..... des puissances et les points d'application B, B', B''..... des résistances décriront de petits espaces ; et si, l'on projette tous ces espaces sur les directions respertives des forces, la somme des produits des puissances par les projections correspondantes des petits espaces, sera égale à la somme des produits des résistances par les projections correspondantes ou, en d'autres termes, la somme des travaux des puissances sera égale à la somme des travaux des résistances ; ou enfin, on aura :

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots = Rr + R'r' + R''r'' + \ldots\ldots$$

La réciproque de cette proposition a également lieu, c'est-à-dire que, *si l'on donne un petit mouvement à un système sollicité par des puissances et des résistances, et que la somme des travaux élémentaires des puissances soit égale à la somme des travaux élémentaires des résistances, toutes ces forces étaient en équilibre dans le système à l'origine du mouvement.*

§ 102. *Usage du principe des travaux élémentaires.* — Ce principe peut servir à déterminer les conditions d'équilibre dans une machine quelconque. Voici le procédé général à employer dans les recherches de ce genre. Un système sur lequel agissent des forces est donné; on veut exprimer que tout reste en repos : on suppose que le système reçoit un petit mouvement, en vertu duquel chaque point d'application est déplacé; on projette l'espace parcouru sur la direction de chaque force; on multiplie ces projections par les forces respectives; et on égale la somme des travaux des puissances à celle des travaux des résistances, ce qui donne la condition d'équilibre, que l'on modifie convenablement en y introduisant les éléments matériels du système; nous trouverons bientôt l'occasion d'appliquer ce principe.

§ 103. *Travail consistant à élever des poids dans la verticale.* — Le travail le plus simple que l'on puisse considérer est celui qui consiste à élever verticalement des fardeaux; car le chemin est parcouru sur la direction de la force. Si donc on désigne le poids du fardeau par P, et la hauteur à laquelle il a été élevé par H, le travail développé dans cette circonstance peut être exprimé par PH. La simplicité de ce procédé est ce qui a déterminé son choix, car on pourrait tout aussi bien mesurer le travail par la quantité d'ouvrage fait. Par exemple, on pourrait dire que telle force est capable de moudre 1, 2, 3 kilogrammes de blé, de débiter telle quantité de bois, etc., et l'on pourrait ainsi établir la valeur comparative des usines, des cours d'eau, etc. Mais on tomberait ainsi dans de graves erreurs, parce qu'avec une même force motrice, les quantités d'ouvrage pourraient être très-différentes, puisqu'elles dépendraient de la qualité du blé, de la dureté du bois, du genre et de la qualité des outils et des machines employés. On conçoit donc l'avantage d'une mesure commune pour comparer tous ces effets. Il restera à savoir combien chaque unité de travail, telle que nous l'avons définie, sera capable de moudre de kilogrammes de blé, de scier de mètres carrés de planches, etc. L'essentiel est surtout qu'il n'y ait rien d'arbitraire dans la manière d'évaluer le travail. Ainsi, en résumé, le plus généralement à l'avenir, c'est à l'élévation verticale des poids que nous comparerons tous les travaux des forces, et l'expression de *kilogrammètre* s'appliquera à un kilogramme transporté à un mètre de hauteur pendant l'unité de temps, la seconde.

§ 104. *Des moteurs.* — On appelle *moteurs* des agents mécaniques mis en mouvement par des forces naturelles, qui servent de réservoirs à ces forces pour transmettre leur action aux machines, et exécuter avec leur secours tous les travaux des arts mécaniques. Les moteurs le plus généralement employés sont les animaux, l'air, l'eau, la vapeur ou les fluides élastiques, et les ressorts. Il faut distinguer le moteur de la cause qui lui donne les qualités qu'il possède, et sans laquelle il ne les posséderait pas. Ainsi, l'eau ne devient un moteur qu'autant qu'on lui offre une différence de niveau; l'air ne se met en mouvement que lorsqu'il a été raréfié dans un lieu par une cause quelconque; enfin les animaux n'agissent comme moteur qu'avec le secours de leur force musculaire.

Quelle que soit la cause qui les met en mouvement, les moteurs agissent à leur tour comme de véritables forces, peuvent produire du travail, et ce travail peut être évalué en kilogrammètres. En effet, on peut toujours supposer qu'un cours d'eau frappe les palettes d'une roue, et qu'à la circonférence de cette roue est appliquée une corde qui supporte un poids. Le choc de l'eau fait tourner la roue et monter le poids. Le produit de ce poids par le chemin qu'il parcourt dans un temps donné peut très bien servir à représenter la force du cours d'eau pendant ce temps. On peut de même supposer que les ailes d'un moulin n'ont aucune résistance à vaincre à l'intérieur, et qu'elles ne sont destinées qu'à faire monter un poids placé à la circonférence d'une roue qui aurait le même centre de rotation. Le produit de ce poids par l'espace parcouru donnerait encore le travail dont est capable le courant d'air qui sert de moteur. Nous reviendrons bientôt sur ces idées et surtout sur ce mode d'estimation du travail appliqué aux moteurs animés.

§ 105. *Distinction entre le travail développé par le moteur et l'ouvrage ou l'effet utile produit.* — Il faut bien se garder de confondre le travail du moteur avec celui qui représente l'ouvrage fait. Ces deux quantités peuvent être très différentes, parce qu'on conçoit qu'une partie du premier travail peut être détruite par des résistances autres que l'ouvrage, et c'est ce que développera d'une manière plus claire la suite du cours. Contentons-nous pour l'instant de dire que, lorsqu'il sera question de travail, on devra entendre l'effet d'une force sur une résistance qui lui est directement opposée, et qu'elle détruit continuellement en faisant parcourir un certain chemin au point d'action de cette résistance.

§ 106. *Force de cheval.* — Depuis l'invention des machines à vapeur on a généralement adopté une unité de travail qu'on a nommée *force de cheval*, ou *cheval-vapeur*. Elle paraît correspondre d'une manière approximative au travail qui représente 75^k élevés à un mètre de hauteur, ou 75^{km}, ce travail étant supposé produit pendant une seconde. Connaissant donc le travail d'un moteur ou d'une machine en une seconde, on l'estimera en chevaux de force en divisant ce travail par 75.

§ 107. *Erreur que l'on commettrait en appréciant la force des moteurs par leur plus grand effort ou leur plus grande vitesse.* — Il est facile de comprendre maintenant l'erreur que l'on commettrait si, pour évaluer le pouvoir productif d'un moteur ou d'une machine, on se contentait simplement de mesurer l'effort absolu dont ils sont capables, sans considérer le chemin qu'ils font parcourir au point d'application de cet effort, dans un certain temps; si l'on se bornait, par exemple, à estimer la force d'un homme par la grandeur du fardeau qu'il peut soulever ou soutenir en équilibre contre l'action de la pesanteur; ou si, faisant tirer un cheval contre un obstacle fixe, et mesurant le plus grand effort qu'il peut exercer, on prétendait de cette seule donnée conclure la valeur de la force industrielle. Il est évident qu'il faut, en outre, savoir combien de temps le moteur soutiendrait cet effort, et quel chemin il pourrait parcourir en l'exerçant d'une manière continue. Il est tellement vrai qu'exercer un effort ou supporter un fardeau, ce n'est pas travailler utilement, qu'on peut toujours alors remplacer un moteur par un corps inerte.

Pareillement il ne serait pas moins absurde de ne tenir compte que du chemin parcouru par le point d'action d'un moteur, sans avoir égard à l'effort qu'il exerce à chaque instant; il est évident, par exemple, qu'un coureur, qu'un cheval qui galope sans exercer d'effort, ne produisent aucun travail effectif et extérieur, et que ce serait mal juger de la quantité d'ouvrage qu'ils pourraient produire que de se borner à mesurer la plus grande vitesse qu'ils sont capables de s'imprimer. En un mot, on doit être bien convaincu que le pouvoir productif des moteurs doit se mesurer à chaque instant, dans tous les cas, par le produit de l'effort et du chemin parcouru dans la direction de cet effort ou de la résistance qui lui est égale et directement contraire, de sorte que si l'effort ou le chemin parcouru est nul, le produit le sera pareillement, et par conséquent aussi le travail.

§ 108. *Des moteurs animés. Action journalière; fatigue journalière.* — Les moteurs animés qu'on emploie le plus souvent sont l'homme et le cheval. Ces moteurs diffèrent des moteurs uniquement soumis aux lois de la physique, en ce qu'ils ne peuvent agir d'une manière continue, qu'ils sont susceptibles de se fatiguer au bout d'un certain temps de travail, et forcés de prendre un repos plus ou moins long. On *appelle action journalière* ou *travail journalier* d'un moteur animé, le travail qui se fait en un jour de 24 heures. Mais la durée du travail effectif n'est que d'une partie du jour.

La conservation des animaux dépend principalement de la régularité et de la modération du travail journalier. Quelle que soit la machine qu'ils font mouvoir, ce travail doit être réglé de manière à ne consommer que l'action naturelle et propre à chaque moteur animé. La limite de cette action est indiquée par la fatigue que le moteur éprouve, et qu'on peut appeler *fatigue journalière.*

§ 109. *Difficulté d'apprécier le travail des moteurs animés.* — Nous avons déjà vu comment on pouvait évaluer le travail d'un moteur inanimé; mais à l'égard des animaux, il y a un élément de plus à considérer qui est le nombre d'heures de la journée pendant lesquelles on les fera travailler. On n'a aucun moyen de mesurer d'une manière absolue les forces vitales des moteurs animés, ni la loi de décroissement de ces forces, suivant le genre et la durée du travail. La résistance surmontée à chaque instant par un moteur animé n'est déterminée et mesurable que lorsque cette résistance est en dehors du moteur. Dans ce cas, le moteur ne produit qu'un effet équivalent à celui d'un poids. L'homme qui marche chargé ou non chargé par exemple, exerce deux espèces d'effort; l'un de ces efforts consiste à élever son centre de gravité au-dessus du sol, à chaque pas qu'il fait, d'une certaine hauteur, et cet effet pourrait être estimé en kilogrammètres. L'autre effort le transporte en avant, et l'on ignore complétement la valeur de ce dernier; d'où il suit qu'il n'y a aucune mesure absolue de l'action journalière des moteurs animés, et elle diffère essentiellement des actions journalières dans lesquelles on ne considère que l'effort exercé sur un objet extérieur. C'est ce qui explique les différences que l'on remarque dans les travaux des moteurs animés suivant leur mode d'action, et la manière de les évaluer, ce dont nous allons nous occuper.

§ 110. *Diverses manières d'employer les moteurs animés. Comment on évalue leur travail.* — Il y a deux manières d'employer les moteurs animés. L'une consiste à les faire marcher avec ou sans une charge; l'autre à les attacher à une partie de la machine sur laquelle ils tirent ou pressent. Dans le premier cas, on mesure leur travail par l'effet produit lui-même. Ainsi, le travail d'un homme qui monte un poids au haut d'une rampe ou d'un escalier se mesurera par le produit du poids élevé par la hauteur à laquelle il a été élevé; mais, comme on le voit, on n'a ainsi aucune idée de l'effort musculaire que l'homme a fait dans cette circonstance, et si cet effet était comparé à celui du même homme employé à un autre travail, comme, par exemple, au mouton propre à enfoncer les pieux, on le trouverait sensiblement différent. Lorsque le moteur animé agit sur une machine en tirant ou en poussant, il faut alors multiplier l'effort exercé exprimé en kilogrammes, par le chemin parcouru par le point d'action, pourvu que ce chemin soit parcouru dans la direction de l'effort. Les forces de traction et de pression des moteurs animés se mesurent au moyen d'un instrument appelé *dynamomètre*.

§ 111. *Description du dynamomètre de Régnier.* — La partie principale de cet instrument est un ressort d'acier *AA' BB'* (*fig.* 42), formé de deux arcs ou de deux lames égales et opposées, qui sont réunies par deux demi-anneaux arrondis. On fait varier les dimensions de ce ressort suivant la tension qu'il doit supporter, ou le poids qui produit cette tension. Le dynamomètre de Régnier a une longueur totale de 31 à 32 centimètres.

Il y a deux manières de tendre ce ressort, ou en le pressant dans le sens de la droite qui joint les points milieux des deux arcs dont il est formé, ou en le tirant par ses deux anneaux, perpendiculairement à cette droite. On indique ces deux espèces de tension par deux échelles circulaires tracées sur le même limbe, qu'on appelle *échelles de pression et de tirage*. Le limbe en cuivre sur lequel on a tracé les échelles, est fixé sur le milieu de l'arc *A' B'* du ressort, et l'arc opposé *A B* porte un repoussoir *a b*; l'extremité *b* de ce repoussoir agit sur la petite branche *b H* d'un levier coudé *b H c*, dont l'autre branche *H c* est une aiguille. Au-dessous de l'index de cette aiguille est un pied qui lui sert de soutien lorsqu'elle tourne sur le centre *H* parallèlement au limbe. Cette première aiguille *H c*, en tournant, communique le mouvement de rotation autour du centre *K*, à une autre aiguille *K d d'* morte, c'est-à-dire qui tourne sur la partie lisse d'une vis *K*, et s'appuie sur le limbe par une patte *G* garnie d'une rondelle de drap, pour rendre le frottement plus doux. Cette seconde aiguille a deux index *d* et *d'* pour marquer, l'un les pressions, et l'autre les tirages; elle est poussée par le pied de la première aiguille *Hc*. Aussitôt que le ressort n'est plus tendu, l'aiguille *Hc* reprend sa position primitive, et l'aiguille *K dd'* des échelles reste sur la division où elle avait été amenée par la tension du ressort; d'où l'on voit que le système des deux aiguilles donne le moyen de conserver la mesure d'une tension, lorsque la force qui a produit cette tension n'agit plus.

Pour graduer cet instrument, et lui faire indiquer d'abord les pressions, on place les deux arcs du ressort dans un plan vertical, et on les charge, le plus près possible du limbe, de poids successifs de 5, 10,..... kilogrammes, en ayant soin de noter les points où s'arrête l'aiguille, et l'on cote ces points : 5, 10,..... kilogrammes. Pour graduer l'échelle de tirage, on suspend le dynamomètre par l'une de ses extrémités, et on le charge par l'autre de poids de plus en plus grands, en cotant les points où s'arrête l'aiguille du nombre de kilogrammes correspondant.

Pour s'en servir, on applique les forces que l'on veut mesurer aux mêmes points où l'on a appliqué les poids pour le graduer. La puissance de cet instrument est très limitée, puisque l'échelle de tirage n'indique qu'une tension de 1000 kilogrammes, laquelle, quoique de moitié trop grande pour mesurer le plus grand effort d'un cheval, est néanmoins trop faible dans un grand nombre de cas. On pourra multiplier cette puissance au moyen d'un système de poulies, en appliquant la force que l'on veut mesurer à la chape de la dernière poulie, et en attachant le dynamomètre d'une part à un point fixe, et de l'autre au premier cordon. De cette façon le rapport de la tension du dynamomètre à la charge de la chape sera connu, et par suite il sera facile de déterminer cette charge.

§ 112. *Manière d'opérer pour mesurer le travail des moteurs animés. Expression générale de ce travail. Remarque.* — Il est facile de comprendre maintenant comment il faudrait opérer, dans chaque cas particulier, pour trouver le travail journalier d'un moteur animé. S'il est employé à soulever des poids, il suffira de connaître le poids élevé ainsi que la hauteur à laquelle il a été élevé pendant une seconde. Le produit de ces deux quantités donnera en kilogrammètres le travail par seconde. En multipliant ce produit par le temps en secondes du travail effectif, on aura le travail journalier. On opérera de la même manière pour évaluer le travail d'un moteur animé sollicitant la barre d'un manège, les chevilles d'un treuil, etc., en remplaçant ici le poids élevé par l'effort de tirage ou de pression qui se mesurera au moyen du dynamomètre. La hauteur à laquelle on élève le poids sera remplacée par la vitesse du point d'application du moteur. Soient donc, en général, P l'effort moyen en kilogrammes que le moteur exerce, V la vitesse moyenne en mètres du point d'application de ce moteur, ou le chemin décrit uniformément dans chaque seconde et estimé dans la direction de la force, enfin T la durée totale en secondes de l'action journalière qui peut être ou continue ou coupée par des repos plus ou moins fréquents, nommés *relais* ou *haltes*, et dont la durée n'est pas comprise dans T, l'expression du travail journalier sera PVT. Rappelons toutefois encore que, d'après les principes exposés jusqu'ici, le travail peut se mesurer en un point quelconque de la transmission du mouvement, pourvu que l'effet soit estimé dans le sens de ce mouvement, ou que le chemin décrit soit estimé dans le sens de l'effort, et pourvu encore que le travail des résistances autres que celles que le moteur a pour but de vaincre principalement, puisse être négligé relativement à celui où le moteur opère réellement, ainsi qu'il arrive dans beaucoup de circonstances.

Pour donner une idée de ces résistances, nous prendrons pour exemple le travail du limeur : il faut 1° qu'il appuie pour faire mordre ou enfoncer sa lime; 2° qu'il supporte continuellement le poids de l'outil; 3° qu'il exerce un effort pour faire glisser la lime le long du corps; 4° qu'il promène cette lime avec une certaine vitesse en avant et en arrière, et que par conséquent il vainque l'inertie de la matière de cette lime. La quantité d'ouvrage faite est le résultat de ces diverses circonstances; mais on fait disparaître toute cette complication en séparant du résultat du travail tout ce qui n'y est pas indispensable, et en ne considérant que ce qui se passe à l'endroit même où la matière du métal est enlevée par la lime. Là on n'aperçoit qu'une résistance qui suppose un effort égal et contraire dans la direction même du chemin que décrit le point d'action de la lime, et dont la quantité de travail se mesure ainsi que nous l'avons dit. Le travail du moteur peut même être réduit à n'être que cela, en supposant la lime mise à plat sur une barre de niveau chargée d'un certain poids, et que le moteur soit uniquement employé à tirer régulièrement cette lime dans le sens de sa longueur.

§ 113. *Conditions pour lesquelles le travail est le plus avantageux.* — Le produit PVT, qui exprime le travail journalier d'un moteur animé, reste-t-il constant, lorsqu'à égalité de fatigue journalière, on fait varier les facteurs de ce produit pour le même moteur? quelques auteurs ont résolu cette question par l'affirmative. Ils ont pensé que pourvu qu'on n'outrepassât point les forces naturelles des animaux on pouvait faire varier à volonté l'effort, la vitesse et la durée de leur action, et qu'une même quantité d'action exercée dans un jour produisait toujours un même degré de fatigue; ou en d'autres termes, qu'un homme, à quelque genre de travaux qu'on l'employât, ressentait toujours la même fatigue, quand son travail représentait la même quantité d'action. Des recherches plus exactes de *Coulomb* ont obligé à rejeter ces notions systématiques, et montré clairement que la fatigue des animaux, la quantité d'action produite demeurant la même, variait considérablement suivant la nature du travail auquel ils étaient employés. Coulomb fait voir, par exemple, qu'un homme dont le travail consiste à élever le poids de son corps au haut d'une rampe ou d'un escalier, peut produire dans un jour une quantité de travail représentée par 205000^{km}, tandis que le même homme employé à élever des poids au moyen d'une corde passant sur une poulie, ne produira que 71000^{km}.

Si le produit PVT est variable pour le même moteur dans les différents travaux auxquels il peut être employé, il est également variable pour le même travail, et est susceptible par conséquent d'acquérir un maximum, à égalité de fatigue journalière. En effet, si l'on prend pour exemple l'homme agissant sur une manivelle, on voit que la plus grande pression P qu'il puisse exercer aura lieu quand la manivelle sera en repos, ou quand V sera zéro, et alors la quantité de travail développée est nulle. A mesure que la vitesse V augmente, l'homme est obligé d'employer une partie de sa force à suivre le mouvement du point sur lequel il agit, et la pression diminue, en sorte que la vitesse V atteindrait bientôt un terme où l'homme ne pourrait plus exercer aucune pression, et où toute sa force serait employée à suivre le mouvement de ce point : alors on aurait $P = o$, et la quantité d'action serait encore nulle.

Entre ces deux limites où le produit est nul, il y a nécessairement un terme où les valeurs de P et de V sont telles que PV est un maximum. En ayant égard maintenant à la durée du travail, on voit que si T était très-petit, l'homme pourrait exercer une grande pression et prendre une grande vitesse, mais que la quantité d'action PVT n'en serait pas moins fort petite. A mesure que l'homme travaillera plus longtemps dans la journée, l'effort et la vitesse dont il est capable diminueront nécessairemeent, et si l'on voulait, par exemple, le faire agir les vingt-quatre heures entières, il ne serait capable d'aucun travail, et la quantité d'action serait encore nulle. Il y a donc entre ces deux limites où $T=o$ et où T est assez grand pour que $PV=o$, une valeur de T propre à rendre PVT le plus grand possible, qui est celle qu'on doit employer.

De nombreuses expériences peuvent seules conduire à la détermination de ce maximum; mais dans aucun cas on ne peut faire travailler le moteur sous un effort et une vitesse qui excèdent les limites données également par l'expérience; et il n'est pas non plus possible d'augmenter la durée T du travail journalier au-delà d'un certain terme, quelque faible que soit d'ailleurs le travail PV livré dans chaque seconde. Cette durée limite paraît être de 18 heures au plus par jour, ou environ le double de la durée ordinaire et la plus avantageuse du travail. Quant à la limite de l'effort, il varie entre le triple et le quintuple de l'effort qui convient au maximum d'effet, selon les circonstances ou la durée plus ou moins prolongée de cet effort; enfin la vitesse limite paraît varier aussi en raison de la durée totale du mouvement, et être comprise entre quatre fois et dix fois la vitesse la plus convenable au travail. Du reste, entre ces limites extrêmes, les moteurs animés ont la faculté de faire varier, pour ainsi dire arbitrairement, leur effort et leur vitesse, pourvu que, quand l'un augmente, l'autre diminue, et que si l'un et l'autre excèdent l'effort et la vitesse les plus convenables, la durée T du travail journalier soit moindre. En effet, le produit $P V T$, dans de telles circonstances, ne peut jamais atteindre sa valeur maximum sans que la fatigue journalière de l'animal ne soit augmentée, et sans que sa santé ne soit compromise, si ce travail doit être renouvelé plusieurs jours de suite. Cette faculté qu'ont les animaux de pouvoir accroître jusqu'à un certain point la quantité de travail $P V$ qu'ils livrent dans chaque seconde, est souvent précieuse dans l'industrie manufacturière. Mais il ne faut pas oublier que la durée entière du travail doit être coupée par de fréquents repos, et qu'enfin l'effet utile journalier $P V T$ qu'on pourra espérer d'un semblable emploi du moteur, sera moindre que celui que l'on obtiendrait d'un travail mieux réglé.

§ 114. *Avantages du mode continu d'action des moteurs animés sur le mode d'action intermittente.* — Quelques auteurs, il est vrai, et *Coulomb* entr'autres, pensent que dans certains genres de travaux, tels que celui qui consiste à battre des pieux, à sonner une cloche, etc., le mode intermittent dont il s'agit présente des avantages particuliers, et est susceptible d'un effet journalier plus considérable que si le moteur agissait avec plus de continuité et sous de moindres efforts ou vitesses. Mais quoique ce mode d'opérer soit souvent nécessité par des circonstances particulières où l'on tient à accélérer le travail tout en diminuant le nombre des moteurs qui y sont à la fois appliqués, l'augmentation du travail journalier n'en paraît pas moins douteuse. Il y a lieu de croire, par exemple, que les hommes qui sont appliqués à une sonnette en exerçant un effort de 18 kilogrammes, et dont le travail est interrompu par de fréquents repos, développent un effet utile journalier sensiblement moindre que les scieurs de long qui agissent avec un effort égal au plus à 10 kilogrammes. Des expériences très-suivies ont été faites à l'arsenal de Rochefort, et elles ont appris que les quantités de travail journalières developpées par des forgerons qui frappent jusqu'à 2560 coups avec des marteaux de $7^{k},065$ mus en avant, s'élevaient environ à 67000^{km}, ce qui est un peu moins que le travail du sonneur, parce que la vitesse imprimée au marteau est très-grande. Or il résulte d'autres observations, que le travail augmente sensiblement à mesure que le poids du marteau diminue, et il paraît que le marteau des cloutiers est celui qui permet le plus de travail journalier à égalité de fatigue. C'est qu'en effet ici l'action est plus continue et le travail par seconde moindre. On peut admettre, sans risque de se tromper, que dans cette circonstance comme dans celle du sciage de long, le travail journalier fourni par des hommes exercés peut s'élever à 160000^{km}, ou plus du double du travail ci-dessus, sans qu'il en résulte un excès de fatigue.

§ 115. *Valeur du travail mécanique des moteurs animés.* — Le tableau qui suit renferme quelques résultats d'expériences pour plusieurs genres et plusieurs modes d'action du moteur. Nous ferons remarquer que les données de ce tableau concernent les valeurs de la vitesse, de l'effort ou du temps qui paraissent les plus avantageuses dans chaque cas spécial, et les résultats ne doivent être regardés que comme des termes moyens qui peuvent s'écarter, en plus ou en moins, du quart au tiers du travail effectif, suivant l'âge, la vigueur des individus, leur genre de nourriture et le climat qu'ils habitent. Ces observations appartiennent à divers auteurs et notamment à Coulomb. Il faut aussi observer que, d'après ce qui précède, on peut sans craindre une diminution sensible de l'effet utile journalier, faire varier de quelque chose la vitesse et l'effort indiqués au tableau, pourvu que leur produit ne soit pas trop changé, et que la durée journalière du travail soit établie en conséquence.

On a cherché à déterminer l'effort et la vitesse les plus convenables, au moyen de formules analytiques. Celle qui paraît s'accorder le mieux avec les expériences est la suivante. Nommant v la vitesse dont l'homme est capable quand il n'exerce aucun effort, V la vitesse avec laquelle il travaille, p l'effort qu'il peut exercer quand il ne prend aucune vitesse, P l'effort qu'il exerce en travaillant, on suppose

$$P=p\left\{1-\frac{V}{v}\right\}^2.$$

La quantité de travail est

$$PV=p\left\{1-\frac{V}{v}\right\}^2 V.$$

Le maximum de cette quantité s'obtient lorsque

$$V=\frac{1}{3}v;$$

et si l'on substitue cette valeur de V dans la formule, on obtient pour la valeur de P, dans le cas du maximum d'action :

$$P=\frac{4}{9}p.$$

TABLEAU

DES QUANTITÉS DE TRAVAIL QUE PEUVENT FOURNIR MOYENNEMENT L'HOMME ET D'AUTRES ANIMAUX DANS DIFFÉRENTES CIRCONSTANCES.

NUMÉROS d'ordre.	NATURE DU TRAVAIL.	Poids élevé ou eff. moyen exercé	Vitesses ou chemins p seconde.	Travail par seconde.	Durée du travail journalier.	Quantité de travail journalier.
	1° ÉLÉVATION VERTICALE DES POIDS.	kil.	mètr.	k × m	h^res.	k × m
1	Un homme montant une rampe douce ou un escalier sans fardeau, son travail consistant dans l'élévation du poids de son corps..........................	65	0, 15	9, 75	8	280800
2	Un manœuvre élevant des poids avec une corde et une poulie, ce qui l'oblige à faire descendre la corde à vide.......	18	0, 20	3, 60	6	77760
3	Un manœuvre élevant des poids en les soulevant avec la main................	20	0, 17	3, 40	6	73440
4	Un manœuvre élevant des poids et les portant sur son dos au haut d'une rampe douce, ou d'un escalier, et revenant à vide..........................	65	0, 04	2, 60	6	56160
5	Un manœuvre élevant des matériaux avec une brouette et montant une rampe au $\frac{1}{12}$ et revenant à vide............	60	0, 02	1, 20	10	43200
6	Un manœuvre élevant des terres à la pelle à la hauteur moyenne de 1^m, 60...	27	0, 40	1, 08	10	38880
	2° ACTION SUR LES MACHINES.					
	Un manœuvre agissant sur une roue à chevilles ou à tambour :					
1	1° Au niveau de l'axe de la roue......	60	0, 15	9	8	259200
2	2° Vers le bas de la roue ou à 24°.....	12	0, 70	8, 4	8	251120
3	Un manœuvre marchant et poussant ou tirant horizontalement............	12	0, 60	7, 2	8	207360
4	Un manœuvre agissant sur une manivelle............................	8	0, 75	6	8	172800
	Un manœuvre exercé poussant et tirant alternativement dans le sens vertical...	5	1, 1	5, 5	8	158400
6	Un homme de halage tirant un bateau à la bricole........................	10	0, 3	3	10	110000
7	Un cheval attelé à une voiture ordinaire et allant au pas................	70	0, 9	63	10	2168000
8	Un cheval attelé à un manége et allant au pas..............................	45	0, 9	40, 5	8	1166400
9	*Id. id.* et allant au trot..............	30	2, 0	60	4, 5	972400
10	Un bœuf attelé à un manège et allant au pas................................	65	0, 6	39	8	1123200
11	Un mulet *id. id.*..........................	30	0, 9	27	8	777600
12	Un âne *id. id.*............................	14	0, 8	11, 6	8	334080

§ 116. *Différence entre le travail du transport horizontal et le travail des moteurs.* — Le travail des moteurs animés qui consiste à élever un poids, et que nous avons mesuré en multipliant ce poids par la hauteur à laquelle on l'élève, et en prenant cet effet même pour la mesure du travail; celui qu'ils développent en tirant ou poussant sur une roue à chevilles, les barres d'un manége, etc., ne sont pas les seuls effets que l'on puisse mesurer dans ces moteurs. Des observateurs habiles en tête desquels nous devons placer Coulomb, ont fait aussi des expériences sur le genre de travail qui consiste à transporter horizontalement des fardeaux. Il est bien essentiel de faire remarquer ici la différence qui existe entre ce nouveau genre de travail et les précédents. Prenons pour exemple l'homme qui marche sur un plan horizontal, et dont le travail consiste dans le transport du poids de son corps. On obtiendra ici deux résultats différents, selon que l'on considérera le travail que fait l'homme en élevant son poids à l'aide de ses muscles à une certaine hauteur pour chaque pas qu'il fait, ou bien le travail qu'il développe en transportant son corps horizontalement. La même unité de mesure ne saurait convenir à ces deux genres d'effet, car le dernier ne peut représenter une résistance vaincue sur le chemin parcouru. Prenons un autre exemple: l'homme qui transporte des terres avec une brouette produit trois genres de travaux. En suspendant un dynamomètre aux deux bras de cette brouette, il indique généralement une pression de 18 à 20^k; c'est un premier travail développé par le moteur. On évalue de même à 3^k environ l'effort de tirage nécessaire soit pour pousser la brouette en avant, soit pour l'attirer. Cet effort exercé sans cesse sur le chemin parcouru dans un jour représente un autre travail. Enfin la masse transportée est la troisième espèce de travail. Dans ces diverses circonstances, on pourrait donner le nom de *travail mécanique* à celui qui est réellement développé par le moteur, et celui de *travail utile* à celui qui représente le transport horizontal des fardeaux. L'un ne saurait évidemment être confondu avec l'autre. L'unité qui a été adoptée pour la mesure du transport horizontal, quoique analogue à celle du travail mécanique, en est dans le fond fort différente, puisque, ainsi que nous l'avons déjà dit, il ne s'agit pas ici de résistance vaincue dans le sens propre du chemin parcouru. Sans aucun doute le transport horizontal, tout au moins de la part du moteur, est un travail mécanique intérieurement développé, d'où résulte un degré plus ou moins grand de fatigue; mais comme on substitue ici, dans la mesure du travail utile, le poids propre du fardeau à la résistance que ce fardeau oppose au mouvement, et que cette résistance, non seulement varie dans chaque cas, mais encore peut en quelque sorte devenir aussi petite qu'on le veut sans que l'effet utile soit amoindri, il est évident qu'on ne doit pas attacher la même idée à la mesure de ce travail utile et à celle du travail mécanique qui dans certains cas serait employé à le produire, comme par exemple, quand le fardeau est posé sur une voiture, sur un bateau, ou quand il est simplement traîné à terre ou porté sur un traîneau.

§ 117. *Manière d'estimer le travail du transport horizontal.* — A cela près il est aisé de s'apercevoir que si l'on considère un même mode de transport, la fatigue ou la quantité de travail effectivement développée, doit croître proportionnellement au poids du fardeau et à la distance parcourue, ou au produit du nombre de kilogrammes que pèse le fardeau, multiplié par le nombre de mètres du chemin parcouru; ce qui revient à prendre pour l'unité propre à mesurer le travail de transport, l'unité de poids transportée à l'unité de distance. Mais on remarquera que si la circonstance du transport, ou si seulement la viabilité de la route parcourue, ou même encore la vitesse, viennent à changer, l'effet utile restant le même, le travail mécanique ou le degré de fatigue que ce transport suppose peut être très différent.

§ 118. *Changements occasionnés dans le travail des trans-*

ports horizontaux, par la différence des communications.— A ce sujet nous ferons observer que les transports inscrits dans le tableau suivant, et qui sont effectués avec des voitures, des brouettes, etc., supposent des chemins d'une viabilité ordinaire, et que pour des routes parfaitement unies l'effet utile augmenterait à égalité de travail mécanique, comme il diminuerait pour des routes en mauvais état. Voici au reste quelques-uns des résultats que l'expérience a fait connaître à l'égard des voitures ordinaires. Pour un terrain horizontal ferme et uni, ou pour les chaussées pavées, la force du tirage des chevaux allant au pas est du 20^e^ au 30^e^ de la charge totale, voiture comprise, ou moyennement $\frac{1}{25}$. Elle est de $\frac{1}{14}$ de la charge sur une voiture suspendue allant au grand trot sur une chaussée pavée, c'est-à-dire que, pour le pavé, la traction croît avec la vitesse. Enfin elle est le 8^e^ de la charge totale pour un terrain sablonneux ou sur des cailloux nouvellement placés, soit au pas, soit au trot. Quant aux chemins en fer à ornières saillantes, l'effort de tirage varie du 80^e^ au 100^e^ de la charge totale.

TABLEAU

DES EFFETS UTILES QUE PEUVENT PRODUIRE L'HOMME ET LES ANIMAUX DANS LE TRANSPORT HORIZONTAL DES FARDEAUX CONSIDÉRÉ EN DIVERSES CIRCONSTANCES.

NUMÉROS d'ordre.	NATURE DU TRANSPORT.	Poids transporté.	Vitesses ou chemins par seconde.	Effet utile par seconde exprimé en k. transporté à 1 m.	Durée de l'action journalière.	Travail utile par jour.
1	Un homme marchant sur un chemin horizontal sans fardeau, son travail consistant dans le transport du poids de son corps	65	1, 50	97, 5	10	3510000
2	Un manœuvre transportant des matériaux dans une petite charrette ou sur un camion à deux roues et revenant à vide.	100	0, 50	50	10	1800000
3	Un manœuvre transportant des matériaux dans une brouette et revenant à vide chercher de nouvelles charges.	60	0, 50	30	10	1030000
4	Un homme voyageant en portant des fardeaux sur le dos.	40	0, 75	30	7	756000
5	Un manœuvre transportant des matériaux sur son dos et revenant à vide chercher de nouvelles charges.	65	0, 50	32, 5	6	702000
6	Un manœuvre transportant des fardeaux sur une civière et revenant à vide chercher de nouvelles charges	50	0, 33	16, 5	10	594000
7	Un cheval transportant des matériaux sur une charrette et marchant au pas continuellement chargé. . .	700	1, 10	770	10	27720000
8	Un cheval attelé à une voiture et marchant au trot continuellement chargé.	350	2, 20	770	4, 5	12474000
9	Un cheval transportant des fardeaux sur une charette, et revenant à vide chercher de nouvelles charges	700	0, 60	420	10	15120000
10	Un cheval chargé sur le dos et allant au pas.	120	1, 1	132	10	4752000
11	Un cheval chargé sur le dos et allant au trot	80	2, 2	176	7	4435000
12	Un homme de halage.	...	....	......	...	500000000
13	Un cheval de halage	...	....	......	...	1200000000

STATIQUE.

COMPOSITION DES FORCES.

119. *Définition.* — La statique est la partie de la mécanique qui traite de l'équilibre des forces appliquées aux corps solides.

§ 120. *Manière d'agir des forces dans le cas d'équilibre.* — Nous reconnaîtrons plus loin, en étudiant particulièrement le jeu des machines en général, que, lorsque plusieurs forces ne changent pas l'état d'une machine, on peut en conclure qu'elles se font équilibre. Cela est évident pour une machine en repos. Nous ferons voir également que si une machine est en mouvement uniforme, et si des forces appliquées à cette machine maintiennent l'uniformité de son mouvement sans changer sa vitesse, ces forces se détruisent également, c'est-à-dire qu'elles se feraient équilibre, si la machine était en repos. Cette espèce d'équilibre d'une machine en mouvement a reçu le nom *d'équilibre dynamique,* par opposition au premier qui est *l'équilibre statique.*

Puisque, pour arriver à produire ce mouvement uniforme des machines, résultat auquel on doit toujours tendre, il faut faire agir sur elles des forces qui se fassent équilibre, nous allons rechercher dans quelles conditions doivent se présenter les forces pour produire cet équilibre, quand on les appliquera à telle ou telle machine, et comme les machines les plus compliquées sont toujours des combinaisons plus ou moins variées de machines dites *simples* dont le nombre est très restreint, c'est sur ces machines simples que nous fixerons d'abord notre attention.

Mais, avant de faire agir des forces sur des éléments de machines par l'intermédiaire de points fixes comme il en existe toujours dans ces appareils, nous supposerons d'abord l'absence de tout point fixe, et nous étudierons l'action des forces sur un système libre quelconque. Or, nous répéterons ici ce que nous avons déjà dit sur les effets différents des forces, ce n'est plus sous le point de vue de la nature du mouvement qu'elles peuvent produire que nous allons les considérer ici. Nous ne les ferons plus agir sur des points matériels, et nous rendrons aux corps leur véritable étendue physique et leur masse réelle. Les forces ne pourront plus alors être représentées par des vitesses, puisqu'il n'y aura plus d'espace parcouru; mais en remarquant que leur effet, dans ce cas, peut être assimilé à celui de pressions opérées par des poids mesurés en kilogrammes, on pourra, comme précédemment, les faire entrer dans les calculs, ou les représenter géométriquement, puisqu'elles pourront être mesurées en nombres ou en lignes. Ce sera donc par une pression équivalente mesurée en kilogrammes que nous représenterons une force en statique.

§ 121. *Les théorèmes relatifs à la composition des forces concourantes sont les mêmes que ceux relatifs aux vitesses.* — Les forces peuvent agir sur les corps dans des directions quelconques. Nous ne nous arrêterons pas à donner les circonstances de l'équilibre des forces concourantes situées dans le même plan ou d'une manière quelconque dans l'espace; nous reproduirions des théorèmes analogues à ceux que nous avons déjà développés dans la composition et la décomposition des vitesses. Il nous reste à examiner la composition et la décomposition des forces parallèles.

§ 122. *Toute force appliquée à un corps en un de ses points peut être appliquée en un autre point quelconque de sa direction.* — Toute force F (*fig.* 43), appliquée en un point A d'un corps peut être appliquée en un point quelconque B de sa direction, pourvu que ce point soit lié invariablement au premier. En effet, appliquons en B deux forces égales à F, de même direction et de sens contraires.

Ces deux forces ne produiront aucun changement dans la position du corps. Or, les deux forces F, F'', agissant aux deux extrémités d'une droite rigide AB et dans sa direction, se font équilibre, et peuvent se supprimer. Il ne reste donc plus que la force F', qui n'est autre chose que la force F, mais transportée en B.

§ 123. *Composition de deux forces parallèles et de même sens, appliquées en deux points liés entre eux d'une manière invariable.* — Trouver la résultante de deux forces parallèles et de même sens F, F' (*fig.* 44), appliquées aux deux extrémités d'une droite rigide et inextensible AB.

Appliquons aux points A et B, dans la direction de AB, et dans des sens contraires, deux forces M et M' égales entre elles. La droite AB sera sollicitée par les quatre forces M, F, F', M', comme elle le serait par les deux forces F et F', puisque les deux autres se détruisent mutuellement. Donc la résultante de ces quatre forces sera la même que celle des deux forces F et F'. Les deux premières étant composées par la théorie du parallélogramme des forces, donneront une résultante S, et les deux autres F' et M' donneront une résultante S'; de telle sorte que la résultante des deux forces S et S' sera aussi celle des deux forces F et F'. Or, si l'on prolonge jusqu'en O les directions des forces S et S', et si on les y suppose appliquées, on pourra décomposer en ce point ce qu'on a composé en A et B, c'est-à-dire remplacer S par des composantes m et f égales et parallèles à M et F, et S' par des composantes m' et f' égales et parallèles à M' et F'. Les deux forces m et m' se détruisent, il ne reste donc plus pour solliciter la droite AB que la somme des forces f et f' que nous pourrons supposer appliquée en C. Cette somme représente la grandeur et la direction de la résultante, car elle produit sur la droite AB le même effet que les deux forces S et S', et celles-ci le même effet que les deux forces F et F'; d'où il suit que la *résultante de deux forces parallèles et de même sens est parallèle à ces forces, agit dans le même sens qu'elles, et est appliquée* *en un point de la droite qui joint leurs points d'application.* Pour déterminer la position de ce point, nous ferons remarquer que les triangles semblables AOC et ASF donnent la proportion $OC : AC :: AF : SF$ ou $:: F : M$; et les triangles OBC et $BF'S'$ la suivante : $OC : BC :: BF' : F'S'$ ou $:: F' : M'$. Les extrêmes étant égaux dans ces proportions, le produit des moyens sera égal de part et d'autre, et il viendra : $AC.\,F = BC.\,F'$; d'où l'on tire la proportion

$$F : F' :: BC : AC;$$

ce qui nous apprend que *le point d'application de la résultante partage la droite AB en parties inversement proportionnelles aux forces F et F'.*

§ 124. *Trouver géométriquement et par le calcul la position du point d'application de la résultante. Rapports entre les trois forces et les distances de leurs points d'application.* — Pour trouver ce point géométriquement (*fig.* 45), il suffit de porter F sur le prolongement de F' jusqu'en O; de joindre AO, et de mener par le point F' une parallèle $F'C'$ à cette droite. La ligne AC', étant portée de B en C, déterminera la position du point C d'application de la résultante.

Pour déterminer la position de ce point par le calcul, la proportion finale du § 123 ne convient pas immédiatement; mais, si on la transforme ainsi : $F + F' : F :: BC + AC : BC$ ou $R : F :: AB : BC$; tout est connu dans cette dernière proportion, excepté BC, dont la valeur s'en déduit; ce qui donne :

$$BC = \frac{F.\,AB}{R};$$

la dernière proportion, rapprochée de celle du § 123, fait voir que les trois forces F, F' et R sont proportionnelles aux trois lignes BC, AC et AB, ou que *chacune d'elles est proportionnelle à la ligne qui joint les points d'application des deux autres;* ce qui donne une relation analogue à celle qui existe entre trois forces concourantes et les sinus des angles qu'elles forment entre elles. Cette relation présentée sous cette forme sera d'un usage plus commode dans la pratique; nous l'emploierons de préférence aux précédentes proportions, autant qu'il sera possible.

Soient $F = 15^{kil.}$; $F' = 20^{kil.}$; $AB = 0^{m}, 65$.

On trouve $R = 35^{k}$; $BC = 0^{m}, 2785$; $AC = 0^{m}, 3715$.

§ 125. *Mettre les deux forces en équilibre au moyen d'une force unique.* — Il n'est pas difficile maintenant de mettre les forces F et F' en équilibre. Il suffit d'appliquer en C une force égale à leur somme, de même direction qu'elles et de sens contraire.

§ 126. *Décomposition d'une force en deux autres parallèles et agissant aux deux extrémités d'une droite donnée.* — La décomposition d'une force R (*fig.* 46), appliquée en un point C d'une droite, en deux autres dont les points d'application A et B sont donnés sur cette droite, se déduira aisément des considérations précédentes, car les forces F et F' étant alors inconnues, on trouvera leur valeur par les proportions suivantes, que nous fournit notre principe général :

$$\frac{F}{R} = \frac{BC}{AB}, \text{ et } \frac{F'}{R} = \frac{AC}{AB}; \text{ d'où } F = \frac{R.BC}{AB}, \text{ et } F' = \frac{R.AC}{AB}.$$

Soient $R = 40^{k}$; $AC = 1^{m}, 2$; $BC = 0^{m}, 55$.

On trouve $F = 12^{k}, 57$; $F' = 27^{k}, 43$.

§ 127. *Trouver l'une des composantes et son point d'application, quand on connaît la résultante et l'autre composante.* — On peut encore se proposer de trouver la seconde composante et son point d'application, lorsque la résultante R et l'une des composantes F sont données, ainsi que leurs points d'application. La valeur de F' se trouvera en prenant la différence $R - F$; la distance BC sera déterminée par la proportion

$$\frac{BC}{AC}=\frac{F}{R-F}.$$

§ 128. *Composition de deux forces parallèles et de sens contraire.* — Le paragraphe précédent fait connaître la résultante de deux forces parallèles et de sens contraire F et F' appliquées aux deux extrémités d'une droite AB (*fig.* 47). Mais on peut la trouver directement. Soit F la plus grande des deux forces. Décomposons-la en deux : l'une f' égale à F', et l'autre R égale à l'excès de la force F sur la force F', et appliquée en un point C que l'on déterminera par la proportion suivante fournie par notre principe :

$$\frac{AC}{AB}=\frac{F'}{F-F'}; \text{ d'où}$$

$$AC=\frac{F'.AB}{F-F'}.$$

Le point C est le point d'application de la résultante dont la valeur est R ou $F-F'$. En effet, puisque F est la résultante des forces f' et R, on peut la remplacer par ses deux composantes. La droite AB sera donc sollicitée par les trois forces F', f' et R. Les deux premières étant égales et directement opposées, se détruisent. Il reste la force R pour résultante des forces F et F'. Ainsi *la résultante de deux forces parallèles et de sens contraire est parallèle à ces forces, égale à leur différence, agit dans le sens de la plus grande, et son point d'application, situé du côté de cette plus grande force, est déterminé par une proportion que fournit le principe général dont nous avons déjà parlé plusieurs fois.*

Soient $AB=1^m,25$; $F=60^k$; $F'=40^k$.

On trouve : $R=20^k$; $AC=2^m,50$.

§ 129. *On ne peut faire équilibre à un couple au moyen d'une force unique. On peut lui faire équilibre avec deux* *forces aussi petites qu'on le voudra.* — Si dans l'expression précédente

$$CA = \frac{F'.AB}{F - F'},$$

on suppose AB et F' constants, en faisant décroître F sans pour cela la rendre égale à F' ou plus petite, on remarquera que, le dénominateur diminuant, la valeur de CA augmentera, et deviendra d'autant plus grande que la différence entre F et F' sera plus petite; en sorte que cette différence devenant plus petite que toute quantité donnée, ou nulle, la valeur de CA deviendra à son tour plus grande que toute quantité donnée, ou infiniment grande. Ce résultat nous apprend qu'il est impossible de trouver à ces deux forces une résultante unique; par conséquent de faire équilibre au moyen d'une seule force à deux forces égales, parallèles, de sens contraire, appliquées aux deux extrémités d'une droite. L'ensemble de deux forces semblables s'appelle *un couple.*

Pour démontrer la seconde partie de la proposition, prenons un couple F, F', *fig.* 48, et appliquons sur la droite AB, aux points C et D également éloignés de A et B, deux petites forces f et f' égales, l'une f située du côté de F' et en sens contraire, l'autre f' située du côté de F et également en sens contraire. Il sera toujours possible de choisir les points d'applications C et D de ces petites forces, de manière que les résultantes des forces F et f passe en O milieu de AB, car il suffit que l'on ait pour cela

$$\mathrm{OD} : \mathrm{AO} :: \mathrm{F} : f.$$

Par suite, comme AD = BC, la résultante de F' et f' sera également appliquée en O, et ces deux résultantes étant égales et directement opposées, se feront équilibre. Ce résultat sera obtenu, quelle que soit la petitesse des forces f et f'.

§ 130. *Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles, appliquées en des points liés entre eux d'une ma-*

nière invariable. — Lorsqu'on sait déterminer la résultante de deux forces parallèles, il est aisé de trouver celle d'un aussi grand nombre de forces qu'on voudra F, F'..... (*fig.* 49), parallèles et de même sens, appliquées en des points A, A'.... liés entre eux d'une manière invariable. On en composera deux quelconques F et F', en joignant leurs points d'application par la droite AA', et partageant cette droite en parties inversement proportionnelles aux deux forces. La résultante sera appliquée au point de division B, et sera égale à la somme des forces F et F'. On joindra B avec le point d'application A'' d'une troisième force F'', et l'on composera la première résultante avec cette troisième force, ce qui donnera une nouvelle résultante et un nouveau point d'application. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait trouvé la résultante générale R qui sera égale à la somme de toutes les forces, agira dans la même direction et dans le même sens qu'elles, et sera appliquée en un point déterminé par la série des compositions successives.

S'il y a des forces agissant dans un sens, et d'autres agissant dans le sens contraire, on cherchera la résultante des premières, puis celle des secondes, ce qui conduira à deux résultantes partielles agissant en sens contraires. Ces deux résultantes auront, ou le même point d'application, ou deux points d'application différents. Dans le premier cas, la résultante générale aura le même point d'application, et sera égale à l'excès de l'une des résultantes sur l'autre, à moins qu'elles ne soient égales, auquel cas l'équilibre aura lieu. Dans le second cas, la résultante sera encore égale à la différence des deux résultantes partielles, mais son point d'application se déterminera comme il a été dit plus haut pour deux forces de sens contraires; et si les deux résultantes sont égales, le système pourra être remplacé par un couple, et n'aura pas de résultante unique.

§ 131. *Centre des forces parallèles.* — En examinant la manière de composer ces forces, on remarque aisément que si l'on change la direction des forces sans changer, ni leur parallélisme, ni leur grandeur, ni leurs points d'application, le point d'application de la résultante générale ne change pas. Ce point, à cause de cette propriété, prend le nom de *centre des forces parallèles.*

THÉORIE DES MOMENTS.

§ 132. *Moment d'une force par rapport à un plan.* — On appelle *moment d'une force par rapport à un plan*, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan.

§ 133. *Moment de la résultante de deux forces parallèles.* — Le moment de la résultante de deux forces parallèles, de même sens, appliquées aux deux extrémités d'une droite, par rapport à un plan, est égal à la somme des moments de ces deux forces par rapport au même plan.

Soient F et F' ces deux forces (*fig.* 50), R leur résultante; désignons par f, f' et r les perpendiculaires abaissées des points d'application de ces trois forces sur le plan des moments; et menons par le point C une droite GH parallèle à la projection DK de la ligne AB sur le plan. On a entre les trois forces la relation : $R = F + F'$. Multipliant les deux membres de l'égalité par r, il vient $Rr = Fr + F'r$. Mais r, d'une part, et pour ce qui regarde la première partie Fr du deuxième membre, peut être remplacé par $f + GA$; de l'autre, et pour ce qui regarde la deuxième partie $F'r$ du deuxième membre, par $f' - BH$. En faisant ces substitutions dans l'équation précédente, on a :

$$Rr = Ff + F.GA + F'f' - F'.BH \ldots\ldots (1).$$

Mais la comparaison des triangles semblables CAG, CBH, donne $BH : GA :: BC : AC$. En rapprochant cette proportion de celle $F : F' :: BC : AC$ que fournit la composition des forces, on a : $F : F' :: BH : GA$; d'où $F.GA = F'.BH$, ce qui réduit l'équation (1) à

$$Rr = Ff + F'f' \ldots\ldots (2),$$

qui démontre le théorème énoncé.

§ 134. *Remarque sur le résultat du paragraphe précédent.* — Dans l'équation (2) du paragraphe précédent, le deuxième membre étant composé de quantités additives, paraîtrait devoir être toujours positif; et cependant si r devenait nul, ce qui arriverait si l'on prenait un plan qui passât par le point d'application de la résultante, le produit Rr serait nul, et l'on aurait : $Ff + F'f' = 0$. Ce deuxième membre de l'équation (2) ne peut devenir nul, qu'autant que certaines quantités qui entrent dans son expression seront négatives ; et comme F et F' sont des quantités essentiellement positives, il faut donc que des deux perpendiculaires f et f', l'une soit positive, et l'autre négative; ce qui s'accorde très bien avec cette convention généralement établie dans l'analyse, de représenter le changement de direction des lignes par un changement de signe. C'est qu'en effet ici l'une f des perpendiculaires au plan sera abaissée dans un sens, et l'autre f' le sera dans le sens contraire.

Il sera même aisé d'établir, en choisissant un plan des moments qui coupe la droite AB, soit entre A et C, soit entre C et B, que l'équation des moments devient dans ces deux cas : $Rr = F'f' - Ff$ et $Rr = Ff - F'f'$; et qu'ainsi le moment de la résultante n'est plus égal à la somme, mais à la différence des moments des composantes; résultats que nous aurions obtenus sans le secours de la figure, par le simple changement de signe, soit de f, soit de f'. On voit également que si la valeur de r, tirée de l'une de ces équations, est positive ou négative, le point d'application de la résultante est situé du côté du plan pour lequel la perpendiculaire abaissée du point d'application de l'une des composantes a été considérée comme positive ou comme négative.

§ 135. *Moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles de même sens.* — Le théorème du § 133, relatif à deux forces, a également lieu pour un plus grand nombre; car F, F', F''.... étant ces forces, et f, f', f''.... les perpendiculaires au plan des moments, en composant les deux premières, et désignant par X leur résultante et x la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur le plan, on aura entre cette résultante, la troisième force F'', et leur résultante R', la relation : $R'r' = Xx + F''f''$. Et comme $Xx = Ff + F'f'$, il viendra :

$$R'r' = Ff + F'f' + F''f''.$$

On raisonnerait de la même manière jusqu'à la dernière force, de sorte qu'on peut écrire :

$$Rr = Ff + F'f' + F''f'' + \ldots\ldots \quad (1);$$

ce qui signifie que *le moment de la résultante d'autant de forces parallèles qu'on voudra, de même sens, par rapport à un plan, égale la somme des moments des composantes par rapport au même plan.*

Nous ferons ici une remarque analogue à celle du paragraphe précédent, relativement aux signes des perpendiculaires f, f', f''......., en considérant comme positives celles qui sont abaissées d'un même côté du plan, et comme négatives celles qui sont abaissées de l'autre côté; de sorte que certaines parties du second membre de l'équation (1) pourront être soustractives. Le signe de la perpendiculaire r fera encore connaître de quel côté du plan est situé le point d'application de la résultante.

§ 136. *Moment de la résultante de deux forces parallèles et de sens contraire.* — Une figure et une démonstration tout-à-fait analogues à celles du § 133 nous feront voir que *le moment de la résultante de deux forces parallèles et de sens contraire, est égal à la différence des moments de ces forces* (*fig.* 51). On posera l'équation analogue $R = F - F'$; on multipliera également par r, et l'on remplacera r dans

Fr par $f - AG$, et dans $F'r$ par $f' - BH$. Enfin la comparaison des triangles ACG, BCH, amènera les mêmes simplifications, et le résultat définitif sera :

$$Rr = Ff - F'f'$$

qui justifie notre énoncé.

§ 137. *Même remarque qu'au § 134. Formule unique pour deux forces de même sens et deux forces de sens contraire.* — Même remarque encore relativement aux signes des perpendiculaires f et f'. Le second membre de l'équation précédente pourrait devenir une somme, si le plan des moments coupait la droite AB de manière que les lignes f et f' fussent de sens contraire. Alors l'équation des moments pourrait donner dans ce cas, *le moment de la résultante égal à la somme des moments des composantes;* résultat auquel on arriverait également si, considérant comme positives les perpendiculaires abaissées d'un côté du plan, on considérait comme négatives celles qui seraient abaissées de l'autre côté. Le signe de la perpendiculaire r fera encore connaître, comme nous avons déjà eu l'occasion de le remarquer, de quel côté du plan est situé le point d'application de la résultante.

Nous pouvons de plus ajouter ici, en conservant au plan la position qu'il avait au commencement de ce paragraphe, que nous eussions obtenu également l'équation $Rr = Ff - F'f'$, en la déduisant de l'équation (2), § 133, par le simple changement de signe de la force F' ; en considérant comme positives toutes les forces qui agissent dans un sens convenu, et comme négatives toutes celles qui agissent dans le sens opposé. Alors l'équation (2) du § 133 renferme le cas de deux forces parallèles de même sens et celui de deux forces parallèles de sens contraire, en supposant que les quantités F, F', f, f', peuvent y avoir le signe —.

§ 138. *Théorème général sur les moments des forces parallèles.* — Si l'on avait plusieurs forces parallèles agissant dans un sens, et d'autres agissant dans le sens contraire, on voit qu'il serait aisé de trouver l'expression du moment de la résultante. Il serait égal à la somme des moments des forces agissant dans un sens, moins celle des moments des forces agissant dans le sens contraire; mais comme, dans cette expression, certaines quantités additives pourraient devenir soustractives, et réciproquement, par l'opposition de signe des perpendiculaires, nous renfermerons tous les cas possibles dans l'équation générale du § 135.

$$Rr = Ff + F'f' + F''f'' + \ldots\ldots \quad (1),$$

qui exprime que *le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles de même sens ou de sens contraire, par rapport à un plan, est égal à la somme* ALGÉBRIQUE *des moments des composantes par rapport au même plan;* les quantités F, F', F''...... f, f', f''....... pouvant être dans cette équation, positives ou négatives. La valeur de R sera la somme *algébrique* de toutes les forces, c'est-à-dire qu'elle sera égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens sur celle des forces qui agissent dans le sens contraire, et elle aura le sens des forces dont la somme est la plus grande. Quant à la position du point d'application de la résultante, elle sera déterminée par le signe de la valeur de r déduite de l'équation (1) : si ce signe est positif, le point d'application se trouvera du côté du plan pour lequel les perpendiculaires auront été considérées comme positives, et s'il est négatif, il sera situé de l'autre côté.

§ 139. *Usage du théorême sur les moments des forces.* — Pour concevoir l'utilité de la formule (1) § 138, tirons de cette équation la valeur de r, en remarquant que

$$R = F + F' + F'' + \ldots\ldots.$$

on aura :

$$r = \frac{Ff + F'f' + F''f'' + \ldots\ldots\ldots}{F + F' + F'' + \ldots\ldots\ldots}.$$

Si l'on prenait successivement deux autres plans pour plan des moments, en désignant par p, p', p''.... et q, q', q'',....

les perpendiculaires abaissées respectivement sur ces deux plans, on pourrait écrire deux équations analogues à la précédente :

$$r' = \frac{Fp + F'p' + F''p'' + \ldots\ldots}{F + F' + F'' + \ldots\ldots};$$

$$r'' = \frac{Fq + F'q' + F''q'' + \ldots\ldots}{F + F' + F'' + \ldots\ldots};$$

les trois valeurs de r, de r' et de r'' représenteraient les distances du point d'application de la résultante aux trois plans. On voit donc que si l'on donnait la grandeur des forces et les distances de leurs points d'application à trois plans donnés de position, la connaissance des trois distances r, r', r'' du point d'application de la résultante à ces trois plans, déterminerait la position de ce point; ce qui fournit un nouveau moyen de composer les forces parallèles.

§ 140. *Condition pour que le plan des moments passe par le point d'application de la résultante. Cas d'équilibre.* — Reprenons maintenant l'équation

$$Rr = Ff + F'f' + \ldots\ldots$$

Le premier membre étant composé de deux facteurs pourrait devenir nul de deux manières. Or si nous supposons d'abord que les forces aient le même sens, leur résultante ne peut être nulle, et le premier membre Rr ne pourra être réduit à zéro qu'en faisant $r = 0$, ce qui fera passer le plan par le point d'application de la résultante, et donnera la condition algébrique suivante pour que cette particularité ait lieu :

$$Ff + F'f' + \ldots\ldots = 0,$$

et comme cette somme n'est réduite à zéro qu'en vertu de l'opposition de direction des perpendiculaires, nous pouvons conclure que, *lorsque le plan des moments passe par le point d'application de la résultante, la somme des moments des forces dont les points d'application sont d'un côté du plan est égale à celle des moments des forces dont les points d'ap-*

plication sont situés de l'autre côté, et la réciproque a également lieu. Les mêmes conséquences se déduisent de la formule générale, quand les forces sont de sens contraire, lorsqu'il y aura une résultante, mais comme l'équilibre peut avoir lieu, nous ajouterons à ce qui précède, pour ce nouveau cas que, *lorsque la résultante sera nulle, la somme des moments de toutes les forces par rapport à un plan quelconque sera toujours nulle.* Ainsi, l'équilibre ne saurait avoir lieu, si la somme des moments des forces par rapport à un plan quelconque n'est pas nulle.

§ 141. *Cas où toutes les forces sont égales.* — Si, dans la même formule, on suppose les forces égales, elle se transformera en

$$Rr = F\,(f+f'+\ldots.),\ \text{d'où}\ r = \frac{F\,(f+f'+\ldots.)}{nF},$$

n étant le nombre des forces. Réduisant, il vient :

$$r = \frac{f+f'+f''+\ldots\ldots}{n},$$

ce qui fait voir que dans le cas d'égalité des forces, la perpendiculaire abaissée du point d'application de la résultante est la moyenne arithmétique entre toutes les autres.

§ 142. *Moment d'une force par rapport à un point; centre des moments.* — On appelle *moment d'une force par rapport à un point,* le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur la direction de la force. On appelle ce point *centre des moments.*

§ 143. *Égalité des moments de deux forces concourantes par rapport à un point de leur résultante.* — Les moments de deux forces concourantes par rapport à un point quelconque D pris sur leur résultante sont égaux (*fig.* 52). En effet, on a

$$F : F' :: BD : AD.$$

Mais les triangles semblables ADG, BDC donnent la proportion

$$BD : AD :: DC : GD \text{ ou } :: f' : f,$$

en représentant par f la perpendiculaire abaissée du point D sur F, et par f' la perpendiculaire abaissée du même point sur F'. Rapprochant les deux proportions précédentes, il en résulte

$$F : F' :: f' : f; \text{ ou } Ff = F'f'.$$

§ 144. *Généralisation du théorème précédent.* — Quand trois forces sont en équilibre autour d'un point, l'une d'elles est égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Il suit de là que le théorême précédent peut être généralisé de la manière suivante : *Lorsque trois forces seront telles que l'une d'elles fera équilibre aux deux autres, ou sera égale à leur résultante, les moments de deux de ces forces par rapport à un point pris sur la troisième seront égaux.*

§ 145. *Moment de la résultante de deux forces concourantes.*—Le moment de la résultante de deux forces concourantes F et F' (*fig.* 53 et 54), par rapport à un point D pris dans le plan de ces deux forces, est égal à la somme ou à la différence des moments de ces deux forces, selon que le point D est pris au dehors ou au dedans de l'angle FMF' formé par les directions de ces forces.

Soient f, f' et r les perpendiculaires DI, DO, DK abaissées du point D sur les deux forces F et F', et sur leur résultante. Décomposons la force F en deux autres p et p' agissant suivant les directions MF' et MD. La force R pourra être considérée comme étant la résultante des trois forces p', p, F', ou ce qui est la même chose, des deux forces p' et $F'+p$ pour la (*fig.* 53), et des deux forces p' et $F'-p$ pour la (*fig.* 54). Cela posé, d'aprés le paragraphe précédent, les moments des deux forces R et $F'+p$ (*fig.* 53), ou R et $F'-p$ (*fig.* 54), par rapport au point D pris sur la direction de la troisième force p', seront égaux, et l'on aura

$$(\textit{fig. } 53)\ldots\ldots Rr = (F'+p)f' = F'f' + pf';$$
$$(\textit{fig. } 54)\ldots\ldots Rr = (F'-p)f' = F'f' - pf'.$$

Mais le moment de la force p est égal à celui de la force F

dont elle est une composante, par rapport au point D pris sur l'autre composante p'. Donc on a $pf'=Ff$. Substituant dans les équations précédentes, il vient :

$$(\textit{fig. } 53)\ldots\ldots Rr=F'f'+Ff;$$
$$(\textit{fig. } 54)\ldots\ldots Rr=F'f'-Ff.$$

§ 146. *Remarque* — Si l'on suppose la droite MD inflexible et le point D immobile, on voit aisément que dans le cas de la (*fig.* 53), les deux forces F et F' tendent à faire tourner le point A dans le même sens autour du point D, et que dans le cas de la (*fig.* 54), elles tendent à le faire tourner dans le sens opposé.

Il suit de là que le théorême précédent peut être traduit de cette manière : Le moment de la résultante de deux forces concourantes par rapport à un point pris dans leur plan, est égale à la somme ou à la différence des moments de ces forces, suivant que les deux forces tendent à faire tourner le point d'application dans le même sens ou dans des sens contraires; et dans tous les cas la résultante tend à faire tourner son point d'application dans le même sens que celle des deux forces dont le moment est le plus grand.

Cette remarque a de l'analogie avec celles des §§ 134 et 137.

§ 147. *Théorême général.* — On démontrerait d'une manière tout-à-fait semblable à celle du § 135 que le moment de la résultante de plusieurs forces est égale à la somme des moments de ces forces, quand elles tendent à faire tourner le point d'application dans le même sens, et à l'excès de la somme de celles qui tendent à faire tourner dans un sens sur la somme de celles qui tendent à faire tourner dans le sens opposé, lorsque toutes les forces ne font pas tourner leur point d'application dans le même sens.

On pourrait encore dire comme au § 138 que, dans tous les cas, le moment de la résultante est égal à la somme *algébrique* des moments des composantes, en considérant comme positives les forces qui tendent à faire tourner le point d'application dans un sens, et comme négatives celles qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé.

§ 148. *Condition pour que le centre des moments soit situé sur la résultante; cas d'équilibre.* — Enfin, nous pouvons établir ici deux théorèmes analogues à ceux du § 140. Prenons l'équation générale des moments

$$Rr = Ff + F'f' + F''f'' + \ldots\ldots$$

telle qu'elle se traduit d'après le paragraphe précédent. Si nous supposons d'abord que les forces ont une résultante, son moment Rr ne pourra devenir nul qu'en faisant $r=0$, ce qui place le centre des moments sur la direction de la résultante, et donne la condition suivante entre les forces et les perpendiculaires pour que cette particularité ait lieu :

$$Ff + F'f' + F''f'' + \ldots\ldots = 0.$$

Et comme cette somme n'est réduite à zéro qu'en vertu de l'opposition de signe des forces, nous pouvons conclure de là que, *lorsque le centre des moments est pris sur la direction de la résultante, la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner le point d'application dans un sens est égale à celle des moments des forces qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé. La réciproque a également lieu.*

La même condition aurait encore lieu si $R=0$, c'est-à-dire s'il y a équilibre entre toutes les forces; mais alors, dans ce cas, *c'est par rapport à un point quelconque pris pour centre des moments, que la somme des moments des forces sera toujours nulle.*

Ainsi, en général, l'équilibre ne saurait avoir lieu, si la somme des moments des forces par rapport à un point quelconque n'est pas nulle.

ÉQUILIBRE DES CORPS PESANTS.

§ 149. *Poids et centre de gravité d'un corps.* — Nous avons défini précédemment la pesanteur. Cette force va nous fournir immédiatement les moyens d'appliquer tout ce que nous venons de dire sur les forces parallèles. En effet, tous les corps de la nature jouissant de la propriété d'avoir à chaque instant toutes leurs particules soumises à l'action de la pesanteur, ou, comme on l'a déjà dit, d'être *pesants*, quoique le nombre de ces particules soit infiniment grand, on conçoit néanmoins qu'un corps peut être considéré comme soumis à l'action d'un très-grand nombre de forces parallèles dont la résultante aura une certaine intensité, un point d'application, et une direction particulière qui sera celle de la pesanteur indiquée par la verticale, c'est-à-dire par la perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles. La valeur de cette résultante est le *poids* du corps; il a pour mesure l'effort qu'il faut faire pour l'empêcher de tomber. Son point d'application, que précédemment nous avons appelé centre des forces parallèles, prend ici le nom de *centre de gravité*. Si l'on se rappelle les propriétés de ce dernier point, on voit qu'il ne changera pas de position, lorsqu'on changera celle du corps par rapport au sol, de sorte que, si par un moyen quelconque on vient à rendre immobile le centre de gravité, on pourra faire tourner librement le corps autour de ce point, sans pour cela troubler son repos d'équilibre.

§ 150. *Trouver par l'expérience le centre de gravité d'un corps.* — Pour trouver par l'expérience le centre de gravité d'un corps, on le suspend à un fil par un de ses points; et comme il se maintient en équilibre, il faut que son poids soit détruit par la résistance du point fixe, ce qui exige que la direction du fil passe par le centre de gravité du corps. Répétant la même expérience en suspendant le corps par un autre de ses points, les deux directions du fil étant prolongées dans l'intérieur du corps, se couperont au centre de gravité. Lorsque le poids du corps est trop considérable, on le place en équilibre sur l'arête horizontale d'un prisme, et alors le plan vertical qui passe par cette arête coupe le corps suivant une section qui contient son centre de gravité. Si le corps était flexible, comme celui d'un homme, on placerait d'abord une planche en équilibre sur l'arête, et l'on ferait glisser l'homme sur cette planche maintenue ainsi fixement, jusqu'à ce que l'équilibre eût lieu. On découvre ainsi que le centre de gravité du corps de l'homme est situé entre les hanches.

§ 151. *Conditions d'équilibre d'un corps pesant reposant sur un plan horizontal par un seul point.* — Lorsqu'un point matériel pesant repose sur un plan horizontal capable d'une résistance indéfinie, il y opère une pression dans un sens perpendiculaire, qui est détruite par la réaction du plan. Cette dernière, agissant au point d'appui, pourra toujours être assimilée à une force, et si un corps a plusieurs points d'appui sur ce plan, les réactions opérées sur chacun d'eux pourront être considérées comme autant de forces agissant de bas en haut, et détruisant ou mettant en équilibre, en tout ou en partie, le poids du corps qui repose sur le plan, et les forces étrangères qu'on peut faire intervenir. Si donc un corps pesant, de dimensions finies, repose sur un plan horizontal par un seul point A (*fig.* 55), il faudra, pour qu'il s'y maintienne en équilibre, que la verticale de son centre de gravité G passe par ce point d'appui, car autrement on aurait deux forces GP, AB, appliquées aux deux extrémités d'une droite AG et qui ne pourraient se faire mutuellement équilibre. De plus, si d'autres forces sollicitaient le corps, il faudrait encore, pour l'équilibre, que leur résultante passât par le point d'appui, mais aussi que sa direction fût verticale et qu'elle agît de haut en bas; car, si elle était oblique au plan, on pourrait toujours la supposer décomposée en deux, l'une normale au plan et détruite par sa résistance, et l'autre agissant parallèlement au plan, et faisant glisser le corps sur le plan.

§ 152. *Conditions d'équilibre d'un corps pesant reposant par deux points sur un plan horizontal.* — Si le corps reposait sur le plan par deux points *A* et *B* (*fig.* 56), il suffirait, pour l'équilibre, que la résultante des forces qui sollicitent le corps passât par l'un des points de la droite *A B*, fût toujours verticale, et agissant de haut en bas : car, la réaction du plan sur chacun des appuis représentant toujours une force verticale et agissant de bas en haut, pour qu'elle serve à détruire une partie de la résultante des forces qui sollicitent le corps, il faut supposer celle-ci décomposée en deux autres, parallèles, agissant aux points *A* et *B*, ce qui exige qu'elle passe par l'un des points de la droite *A B* entre *A* et *B*, qu'elle soit verticale, et enfin qu'elle agisse de haut en bas. Dans le cas où le corps n'est sollicité que par son poids, il suffit, pour l'équilibre, que la verticale qui passe par son centre de gravité passe par l'un des points de la droite qui joint les deux points d'appui.

§ 153. *Conditions d'équilibre d'un corps pesant reposant sur un plan horizontal par trois ou un plus grand nombre de points, ou enfin par une base finie.* — Enfin, supposons que le corps repose par trois points sur le plan horizontal. Il faudra dans ce cas, pour que l'équilibre ait lieu, que la résultante des forces qui sollicitent le corps passe dans l'intérieur du triangle formé par les appuis, qu'elle soit encore verticale, et qu'elle agisse de haut en bas. En effet, il faudra que cette résultante se décompose en trois autres forces agissant aux trois points d'appui *A*, *B* et *C* (*fig.* 57), ce qui ne peut se faire qu'autant que le point d'application de cette résultante sera situé dans l'intérieur du triangle *A B C*; la construction employée pour la composition de trois forces parallèles nous l'indique suffisamment. Les mêmes conclusions seraient admises si le corps reposait par un plus grand nombre de points, ou enfin par une base finie; et si le corps n'était sollicité que par son propre poids, il suffirait, pour l'equilibre, que la verticale passant par le centre de gravité passât par un des points de la surface du polygone formé par tous les points d'appui. Si, dans ce dernier cas, cette circonstance n'avait pas lieu, le corps tendrait à tourner autour de la tangente la plus voisine de la projection du centre de gravité.

Ainsi, le parallélipipède oblique, représenté (*fig.* 58), en projections horizontale et verticale, sera en équilibre, parce que la projection horizontale de son centre de gravité tombe dans l'intérieur de la face *abcd* par laquelle il repose sur le plan horizontal. Si elle tombait au-dehors, comme en g' (*fig.* 59), le corps tournerait autour de l'arête *b' c'*, et se renverserait sur le plan horizontal. Il en serait de même pour un cylindre, etc.

§ 154. *Equilibre stable et équilibre instantané. Le centre de gravité d'un corps tend toujours à se rapprocher du plan horizontal.* — Un corps pesant, placé sur un plan horizontal, y est en équilibre *stable* lorsque, dérangé un peu de sa position initiale, il tend à y revenir de lui-même, et l'équilibre est *instantané*, lorsque le contraire a lieu. Une circonstance particulière accompagne toujours ces états d'équilibre. Dans le premier cas, le centre de gravité du corps est le plus près possible du plan, et dans le second il est le plus élevé possible, ou du moins pourrait s'abaisser. C'est ainsi qu'on peut parvenir à mettre un œuf en équilibre sur son grand axe, mais en équilibre instantané, auquel cas sa distance au plan est la plus grande possible; tandis que l'équilibre est stable lorsque cet ellipsoïde est couché sur son petit axe, et alors sa distance au plan est la plus petite possible. En général, le centre de gravité d'un corps tend toujours à tomber, et ce fait explique une foule de petits appareils de physique, tels que les culbuteurs chinois, le liége lesté de plomb, les corps qui remontent un plan incliné, etc. Il s'applique également au cas où le corps serait suspendu au lieu d'être soutenu, et pour la stabilité de l'équilibre, il faudrait que le centre de gravité fût toujours au-dessous de l'appui ou du point de suspension, car s'il était au-dessus, comme en G (*fig.* 60), l'équilibre ayant lieu, en le dérangeant un peu, le centre de gravité tomberait, et ne pourrait plus remonter; car le poids P ferait tourner le corps autour du point F; tandis que s'il était au-dessous, comme en g, on ne pourrait le déranger qu'en l'élevant, et il reviendrait alors après quelques oscillations à sa position primitive, en tournant encore autour du point f.

§ 155. *Divers degrés de stabilité d'équilibre. Divers exemples relatifs aux paragraphes précédents.* — Il y a plusieurs degrés de stabilité dans l'équilibre d'un corps pesant reposant sur un plan horizontal, et ils sont toujours exprimés par la distance plus ou moins grande du centre de gravité au plan. Ainsi, un parallélipipède rectangle ayant ses trois arêtes inégales, comme une règle, aura l'équilibre le moins stable, lorsqu'il reposera sur sa plus petite face comme en P (*fig.* 61); et la distance du centre de gravité au plan sera mesurée par la moitié de la plus grande arête, et sera la plus grande possible. L'équilibre sera plus stable, lorsqu'il reposera sur sa face moyenne, comme en P', et la hauteur du centre de gravité ne sera plus égale qu'à la moitié de l'arête moyenne. Enfin si l'on place la règle à plat, comme en P'', l'équilibre sera le plus stable possible, et en même temps le centre de gravité sera le plus près possible du plan, puisque sa distance ne sera plus égale qu'à la moitié de la plus petite arête. Il ne peut plus tomber davantage.

La position des ailes des oiseaux et des insectes au-dessus du centre de gravité de ces animaux assure leur stabilité dans l'action de leur vol.

La stabilité d'un homme à cheval est d'autant plus grande, toutes choses égales d'ailleurs, que ses jambes sont plus longues, parce que le centre de gravité est alors plus près de la selle.

Le centre de gravité des danseurs de corde est très-élevé au-dessus des points fixes dont le nombre est petit. Aussi leur équilibre est-il peu stable. Ils parviennent à le maintenir, c'est-à-dire à faire passer la verticale du centre de gravité par les points fixes, soit au moyen de balanciers, dont ils reportent le poids à droite ou à gauche, lorsqu'ils menacent de tomber à gauche ou à droite, soit même au moyen de leurs propres mouvements.

Dans le chargement des voitures, on dispose les objets de manière que la verticale passant par le centre de gravité coupe l'essieu : souvent même on les charge au-dessous de l'essieu.

Dans l'armement d'un navire, les pièces de plus gros calibre sont toujours placées à la partie inférieure; elles sont presque à fleur d'eau.

La verticale passant par le centre de gravité d'un homme, lorsqu'il est debout, tombe entre ses deux pieds. Dans la marche, l'un des pieds abandonnant le sol, c'est l'autre qui doit détruire le poids, qui se reporte vers lui en entraînant la verticale du centre de gravité; ceci explique les mouvements de notre corps vers la droite ou vers la gauche, mouvements qui rendent très pénible la marche de deux personnes qui se donnent le bras, si elles ne vont pas au pas.

Si l'homme était chargé d'un poids dans une seule partie de son corps, son centre de gravité se déplacerait pour se reporter du côté du fardeau, d'une quantité plus ou moins considérable. Aussi, pour ramener le centre dans la verticale des points fixes, est-il obligé de porter son corps du côté opposé au fardeau. Un homme chargé d'embonpoint porte toujours le haut du corps en arrière, le soldat chargé de son sac le haut du corps en avant.

§ 156. *Masse d'un corps; corps homogène, corps hétérogène.* — On appelle *masse d'un corps* la quantité de matière ou de molécules matérielles qu'il contient. Un corps d'une nature donnée sera *homogène,* lorsqu'il sera tel qu'un même volume pris dans une partie quelconque de sa masse aura le même poids et les mêmes propriétés; un corps sera *hétérogène,* lorsque cette circonstance n'aura pas lieu.

§ 157. *Le poids d'un corps est proportionnel à sa masse et à son volume. Les poids des corps sont proportionnels à leurs masses, quelle que soit leur nature.* — Il n'est pas difficile de concevoir, d'après ce qui précède, que le poids d'un corps homogène est proportionnel à sa masse, et par conséquent à son volume ; c'est-à-dire que si, pour soutenir un centimètre cube de fer, il faut un effort a, il faudra des efforts $2a$, $3a$..... pour soutenir 2, 3..... centimètres cubes de la même substance.

Il y a plus, c'est qu'il est impossible de ne pas admettre qu'en général les poids des corps sont proportionnels à leurs masses, quelle que soit leur nature ; c'est une conséquence de la manière d'agir de la pesanteur à l'égard des molécules de tous les corps, puisqu'elle les sollicite toutes de la même manière. Le poids sera donc proportionnel au nombre de molécules de quelque nature qu'elles soient.

§ 158. *Principes sur lesquels on s'appuie dans la recherche du centre de gravité des corps.* — La détermination mathématique du centre de gravité d'un corps repose entièrement sur la théorie des forces parallèles et sur celle des moments. Nous allons exposer quelques principes qui complètent les connaissances nécessaires à cette détermination.

Un corps est coupé en parties symétriques par un plan, lorsqu'en isolant par la pensée une molécule située d'un côté de ce plan, il en existe une autre de l'autre côté, placée exactement de la même manière par rapport au plan.

Lorsqu'un plan coupe un corps homogène en parties symétriques, ce plan renferme le centre de gravité. En effet, prenant deux éléments matériels du corps, s'ils remplissent la condition de symétrie, leurs distances au plan considéré comme plan des moments seront égales, et leurs moments seront aussi égaux. Mais, à cause de l'opposition de signe de ces distances, ces moments se détruiront en s'ajoutant, et la distance du point d'application de la résultante au plan sera réduite à zéro. Donc le plan contiendra le centre de gravité de ces deux éléments, § 140. Comme on pourrait raisonner ainsi pour tous les autres, il résulte de là que le plan contenant le centre de gravité de tous les éléments considérés deux à deux, contiendra aussi le centre de gravité de leur système; car, lorsque les points d'application de plusieurs forces sont situés dans un même plan, le point d'application de la résultante est aussi situé dans ce plan.

§ 159. *Centre de gravité d'une droite, d'un cercle, d'un parallélogramme.* — Il résulte immédiatement de ce qui précède que le centre de gravité d'une droite homogène est au milieu de sa longueur; car le plan qui passerait par le point milieu de cette droite la couperait en parties symétriques, et contiendrait le centre de gravité, qui doit d'ailleurs se trouver sur cette ligne. Ainsi, le centre de gravité de la circonférence d'un cercle ou de sa surface est situé au centre.

Le centre de gravité du contour ou de la surface d'un parallélogramme homogène est situé à l'intersection des diagonales. En effet, chacune d'elles partage le parallélogramme en triangles parfaitement égaux en superficie, en contour, et exactement symétriques; donc, en considérant ces diagonales comme les traces de plans des moments supposés perpendiculaires à la surface du parallélogramme, ces plans contiennent le centre de gravité, qui doit d'ailleurs se trouver dans le plan du parallélogramme.

Il est bien entendu que ces lignes ou surfaces n'ont pas l'étendue mathématique que nous leur donnons ordinairement. Nous ne savons pas si la pesanteur s'attacherait physiquement à de pareils corps; mais nous leur supposons l'infiniment petite étendue nécessaire pour que l'action de cette force ait lieu.

§ 160. *Trouver le centre de gravité du contour d'un triangle supposé formé de lignes homogènes.* — Soit ABC, (*fig.* 62), le triangle donné; a, b, c, ses côtés. Le poids d'un corps homogène étant proportionnel à sa masse ou à son volume, les poids des côtés seront proportionnels à leurs longueurs, pourront être représentés par elles, et supposés appliqués en leurs points milieux D, I, K. Si l'on compose deux de ces côtés, a et b par exemple, le point d'application O de la résultante partagera la ligne DI en deux parties DO et OI inversement proportionnelles à a et b. Cette résultante se composera avec le troisième côté supposé appliqué en K; donc la résultante générale aura son point d'application sur la ligne KO. Si l'on avait composé d'abord les côtés b et c au lieu de a et b, le point d'application de leur résultante eût été en O' partageant KI en parties inversement proportionnelles à b et c; et l'on conclurait, comme précédemment, que le point d'application de la résultante générale est sur la ligne DO'. Le centre de gravité se trouve donc à l'intersection des deux lignes KO et DO' au point G. Caractérisons la position de ce point. Pour cela, reprenons la proportion fournie par les forces a et b :

$$DO : OI :: b : a;$$

et remarquons que les points D, I, K, divisant les côtés en parties égales, les divisent en parties proportionnelles. Les lignes DK, DI, KI sont alors parallèles aux trois côtés du triangle ABC, et de plus sont égales à leurs moitiés. Alors la proportion précédente devient :

$$DO : OI :: \frac{b}{2} : \frac{a}{2} \text{ ou} :: DK : KI :$$

ce qui fait voir que la ligne KO, qui divise la base du triangle DIK en parties proportionnelles aux côtés DK, KI, divise l'angle K du sommet en deux parties égales, et par conséquent passe par le centre du cercle inscrit au triangle DIK. Or le centre de gravité du triangle ABC devait se trouver sur cette ligne; et comme on démontrerait de la même manière que la ligne DO' passe par le centre du cercle inscrit, et qu'elle contient aussi le centre de gravité, il s'ensuit que ce point est situé à l'intersection de ces deux lignes, c'est-à-dire au centre même du cercle; d'où l'on peut donc conclure que le *centre de gravité du contour d'un* *triangle est situé au centre du cercle inscrit au triangle que l'on forme en joignant les milieux des trois côtés.*

§ 161. *Trouver le centre de gravité d'un arc de circonférence de cercle.* — Soit AB (*fig.* 63), cet arc $= a$; sa corde $= c$; le rayon $cz = r$. Partageons l'arc en un grand nombre d'éléments linéaires; soit ab un de ces éléments et z son milieu. Abaissons les perpendiculaires am, bn, zy sur la corde AB; menons la parallèle ao à cette corde, et joignons cz. Si nous prenons pour plan des moments un plan passant par le centre, parallèle à la corde AB, et perpendiculaire au plan du cercle, le moment de l'arc ab sera $ab \times zy$. Mais les triangles semblables bao, czy donnent

$$ab : cz :: ao : zy; \text{ d'où } ab \times zy = cz \times ao = r \times pq;$$

Le moment $ab \times zy$ pourra donc être remplacé par $r \times pq$. Pour un autre arc $a'b'$, nous aurions pour son moment, $r \times p'q'$, etc. Or, si nous désignons par x la distance inconnue GC du centre de gravité de l'arc AB au centre du cercle, le moment de cet arc sera $a \times x$, et sera égal à la somme des moments de tous les petits arcs ab, $a'b'$..... d'où

$$a \times x = r.\, pq + r.\, p'q' + \ldots\ldots = r\,(pq + p'q' + \ldots\ldots).$$

Ce dernier facteur est la somme des projections des petits arcs sur la corde AB, et est égal à cette corde; donc nous aurons

$$a \times x = r \times c, \text{ d'où } x = \frac{rc}{a}:$$

ou, *la distance du centre de gravité au centre du cercle égale une quatrième proportionnelle au rayon, à la corde, et à la longueur de l'arc développé.*

Si l'arc AB égale une demi-circonférence,

$$a = \pi r;\ c = 2r;\ \text{et } x = \frac{2r}{\pi} = \frac{2}{3}.\, r \text{ environ.}$$

§ 162. *Centre de gravité du contour d'un polygone quelconque.* — Pour trouver le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque, il faudrait supposer le poids de chacun des côtés concentré au milieu de sa longueur, et proportionnel à cette longueur. En composant tous ces poids, soit par la théorie des forces parallèles, soit par celle des moments, le point d'application de la résultante trouvé par l'une ou l'autre des deux méthodes, serait le centre de gravité.

§ 163. *Trouver le centre de gravité de la surface d'un triangle supposé homogène.* — Soit ABC le triangle proposé (*fig.* 64). Joignons le sommet B au milieu du côté opposé AC. La ligne BD divise le triangle en deux parties ABD, BDC, parfaitement équivalentes en surface, et de plus symétriques; car, si l'on mène une série de sections parallèles à la base, elles seront coupées en deux parties égales par la ligne BD; et, en considérant ces sections comme infiniment minces, mais matérielles cependant, il y aurait autant d'éléments d'un côté de cette ligne que de l'autre; et ils seraient pareillement placés par rapport à un plan perpendiculaire au triangle, et passant par la ligne BD. Donc cette ligne contient le centre de gravité du triangle. En joignant le sommet A au milieu E du côté BC, on prouverait de la même manière que la ligne AE contient ce même centre de gravité; donc il se trouvera à l'intersection G des deux lignes BD et AE.

On pourrait démontrer d'une manière plus rigoureuse, que le centre de gravité est placé sur la ligne BD. Pour cela, concevons cette ligne partagée en un certain nombre de parties égales; et par les points de division D, O,..... (*fig.* 65), menons des parallèles à AC. Enfin, par les extrémités C, K,... de toutes ces lignes, menons des parallèles au côté AB, qui formeront des parallélogrammes $AHKP$,.... intérieurs au triangle; et d'autres extérieurs $APIC$..... Considérons successivement, dans chacune de ces séries, un des parallélogrammes. Le premier $APKH$ a son centre de gravité sur la ligne MO, menée parallèlement aux côtés AP, KH, et par le milieu O de la base PK. De plus, le petit triangle KHC a son centre de gravité situé sur sa surface. Donc le petit trapèze $APKC$, qui est la somme du parallélogramme et du triangle, aura son centre de gravité à droite de la ligne MO, c'est-à-dire dans l'espace $OMCK$. Le deuxième parallelogramme $APIC$ a son centre de gravité situé sur DL menée parallèlement à AP par le point D milieu de AC. En retranchant de ce parallélogramme le petit triangle KIC, nous aurions le même trapèze $APKC$ dont nous nous sommes déjà occupés. Or ce petit triangle a aussi son centre de gravité sur sa surface, et en le composant avec le parallélogramme $APIC$, pour avoir le trapèze $APKC$, ce qui donnerait deux forces parallèles et de sens contraires, le point d'application de la résultante ou le centre de gravité du petit trapèze sera nécessairement situé à la gauche de DL, qui contient le centre de gravité du parallélogramme, ou enfin dans la région $APLD$. Mais nous avons trouvé tout à l'heure que ce centre devait être situé dans la région $MOKH$; donc il se trouvera entre les parallèles MO et LD. Les mêmes considérations étant appliquées aux autres parallélogrammes intérieurs et extérieurs, il est aisé de voir que tous les points L.... et les points M.... seront situés sur deux parallèles MX et LY à la ligne BD; que, par conséquent, le centre de gravité de chacun des trapèzes qui composent le triangle donné, sera situé entre ces deux lignes, et que par suite enfin le centre de gravité du triangle s'y trouvera également situé. Or, nous n'avons pas limité le nombre des divisions de la ligne BD. Plus il sera grand, et plus les lignes MX, LY, se rapprocheront de la ligne BD, avec laquelle enfin elles se confondront sensiblement, lorsque le nombre des divisions deviendra infiniment grand. Et si l'on disait que le centre de gravité du triangle pût se trouver hors de la ligne BD, à une distance de cette ligne aussi petite qu'on voudra, aussitôt on trouverait le moyen de partager BD en un nombre de parties assez grand pour que les deux parallèles ne continssent pas le point donné, et il faudrait que le centre de gravité fût contenu entre ces deux lignes, et par hypothèse il se trouverait au dehors. Donc enfin la ligne BD contient le centre de gravité du triangle.

La position du point G étant déterminée comme nous l'avons fait précédemment, il s'agit de la caractériser par rapport à l'un des côtés du triangle. Or, si nous menons DE, cette ligne, divisant les côtés en parties proportionnelles, est parallèle à AB, est la moitié de cette ligne, et les triangles ABG, DGE, qui sont alors semblables, fournissent la proportion :

$$DG : GB :: DE : AB; \text{ or } DE = \frac{1}{2} AB;$$

$$\text{donc } DG = \frac{1}{2} GB = \frac{1}{3} BD,$$

ce qui nous apprend que le *centre de gravité de la surface d'un triangle est situé sur la ligne menée de l'un des sommets au milieu de la base opposée, au tiers de cette ligne à partir de la base et aux deux tiers à partir du sommet.*

§ 164. *Si l'on suppose trois masses égales placées aux trois sommets d'un triangle, leur centre de gravité se confondra avec celui du triangle.* — Car la résultante des deux premières A et C (*fig.* 66), serait située au milieu D de AC, et serait double de l'une d'elles; et en composant cette résultante avec la troisième B, il faudrait partager la ligne BD en deux parties inversement proportionnelles aux masses B et D, ou aux nombres 1 et 2, ce qui donnerait le point G situé de la même manière sur la ligne BD.

§ 165. *Autre procédé pour trouver le centre de gravité d'un triangle.* — Nous avons vu, § 141, que lorsque les forces étaient égales, la distance du point d'application de la résultante au plan des moments était une moyenne arithmétique entre les distances des points d'application des composantes. Ici la distance du centre de gravité des masses, ou, ce qui est la même chose, celle du centre de gravité du triangle à un plan quelconque, sera donc le tiers de la somme des perpendiculaires abaissées des trois sommets du triangle, ce qui fournit un nouveau moyen de connaître le centre de gravité d'un triangle en se donnant les distances des trois sommets à deux plans quelconques.

§ 166. *Trouver le centre de gravité de la surface d'un trapèze $ABCD$, (fig. 67).* — On démontrera de la même manière que pour le triangle que le centre de gravité se trouve placé sur la ligne MM' qui joint les milieux des bases parallèles. D'un autre côté, menant la diagonale AC, le trapèze est partagé en deux triangles CAD, ACB dont les centres de gravité g et g' sont aisés à déterminer. La ligne qui joint ces deux points doit contenir le centre de gravité du trapèze : il se trouvera donc à l'intersection G de cette ligne et de la ligne MM'. Cherchons la distance GM' de ce point à la base AB. Menons go, $g'o'$, parallèles aux bases ; la ligne MM' sera divisée aux points o et o' en trois parties égales. En effet, $M'g'$ étant le tiers de $M'C$, $M'o'$ est le tiers de MM'. Il en est de même de Mo ; donc le reste oo' est aussi le tiers de MM'. Maintenant les triangles semblables Gog, $Go'g'$ donnent

$$Go' : Go :: o'g' : og.$$

Mais $og = \frac{1}{3} AM' = \frac{1}{6} AB = \frac{1}{6} a$; $o'g' = \frac{1}{3} MC = \frac{1}{6} CD = \frac{1}{6} b$;

$$\text{donc } Go' : Go :: \frac{1}{6} b : \frac{1}{6} a :: b : a ;$$

d'où l'on tire encore

$$Go' + Go : Go' :: a+b : b, \text{ ou } \frac{m}{3} : Go' :: a+b : b.$$

$$\text{D'où } Go' = \frac{m}{3} \cdot \frac{b}{a+b}.$$

Ajoutant $o'M' = \frac{1}{3} m$, et réduisant, il vient :

$$GM' = \frac{m}{3} \cdot \frac{2b+a}{a+b}.$$

§ 167. *Centre de gravité d'un polygone quelconque.* — La détermination du centre de gravité d'un polygone se déduira aisément de celle du triangle; car il suffira de diviser ce polygone en triangles, de supposer le poids de chacun d'eux concentré à son centre de gravité, et proportionnel à sa surface, et de composer toutes ces forces, soit par la théorie des forces parallèles, soit par celle des moments.

§ 168. *Trouver le centre de gravité d'un secteur de cercle ACB (fig. 68).* — Partageons ce secteur en une infinité de petits secteurs aCb, $a'Cb'$.... Le centre de gravité de chacun d'eux considéré comme un triangle sera situé sur un rayon tel que Cg mené du centre C au milieu de l'arc ab, et à une distance Cg du centre égale aux deux tiers du rayon. On en dira autant de tout autre triangle, et si l'on suppose alors le poids de chacun d'eux concentré à son centre de gravité, tous ces centres se trouveront placés sur un arc $A'B'$ concentrique au premier AB. En considérant ce dernier comme un arc pesant, sur lequel le poids du secteur aurait été également réparti, le centre de gravité de cet arc serait le même que celui du secteur. Or nous avons vu que la distance GC du centre de gravité d'un arc au centre $=\frac{R'C'}{A'}$. Les cordes des arcs concentriques sont entre elles comme ces arcs : donc $\frac{C}{A}=\frac{C'}{A'}$; de plus, $R'=\frac{2}{3}R$; donc, substituant, il vient :

$$GC=\frac{2}{3}\cdot\frac{R.C}{A}.$$

Telle est la distance du centre de gravité du secteur au centre du cercle.

Si le secteur est un demi-cercle, on aura

$$A=\pi R;\ C=2R;\ GC=\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}=\frac{4}{9}R \text{ environ.}$$

Il est aisé de trouver maintenant le centre de gravité d'un segment de cercle AOB. En effet, ce segment étant la différence du secteur ACB et du triangle ACB, son moment sera égal à la différence des moments du secteur et du triangle, ce qui donne, en désignant par x la distance du centre de gravité du segment à un plan des moments passant par le centre du cercle, parallèle à la corde, et perpendiculaire au plan du cercle : *segment* $\times x =$ *secteur* $\times GC$ — *triangle* $\times G'C$, G' étant le centre de gravité du triangle. En désignant le segment par s, l'arc AB par A, le rayon par R, la corde AB par C, et mettant à la place des quantités qui entrent dans la formule leur valeur, il vient :

$$sx = \frac{A.R}{2} \times \frac{2}{3}\frac{R.C}{A} - \frac{C}{2}\sqrt{R^2 - \frac{C^2}{4}} \times \frac{2}{3}\sqrt{R^2 - \frac{C^2}{4}}.$$

Effectuant et réduisant, il vient :

$$sx = \frac{C^3}{12};\ \text{d'où}\ x = \frac{C^3}{12\,s}.$$

§ 169. *Centre de gravité de la surface d'un cylindre.* — Le centre de gravité de la surface convexe d'un cylindre droit à base circulaire se trouve sur tous les plans passant par l'axe, ces plans partageant le cylindre en parties symétriques ; donc il se trouvera sur l'axe. Mais le plan parallèle aux bases, mené à égale distance de ces bases, partage aussi la surface en parties symétriques ; donc il contient aussi le centre de gravité ; donc *ce centre se trouve au milieu de l'axe.*

§ 170. *Centre de gravité de la surface d'un cône droit.* — Le centre de gravité de la surface d'un cône droit est situé sur l'axe. De plus, en supposant cette surface partagée en un grand nombre de triangles, leur centre de gravité serait au tiers de la génératrice, à partir de la base, et le centre de gravité de leur système serait au centre de la section menée au tiers de l'axe ; donc *le centre de gravité de la surface d'un cône droit est situé au tiers de l'axe à partir de la base.*

La théorie des moments fera connaître d'une manière très-simple le centre de gravité de la surface d'un tronc de cône, en raisonnant comme au § 168.

§ 171. *Le centre de gravité d'une zône AMB* (*fig.* 69), *se trouve sur l'axe MC, au milieu de la hauteur de la zône:* — Partageons cette zône en un grand nombre de zônes de même hauteur. Elles seront toutes équivalentes en surface, et auront chacune leur centre de gravité au milieu de leur hauteur. En supposant donc leur poids concentré respectivement à ce centre de gravité, la hauteur *MP* pourra être regardée comme uniformément pesante, et son centre de gravité se trouvera à son milieu, qui sera aussi par conséquent la position du centre de gravité de la zône; donc, etc.

§ 172. *Trouver le centre de gravité d'un parallélipipède.* — Tout plan passant par deux arêtes opposées d'un parallélipipède le divisant en deux parties symétriques, le centre de gravité se trouvera à la fois sur le plan *BDFH*, (*fig.* 70), et sur le plan *ABOF*, et par conséquent sera un des points de leur intersection commune *BF*, qui est une diagonale du parallélipipède. Comme on peut en dire autant de toute autre diagonale, *le centre de gravité sera donc situé à l'intersection G de ces diagonales, ou au milieu de l'une d'elles.*

§ 173. *Trouver le centre de gravité d'un prisme terminé par des bases parallèles.* — Soient *K* et *K'*, (*fig.* 71), les centres de gravité des bases. Si l'on mène une section quelconque parallèle aux bases, elle aura son centre de gravité situé sur la ligne *KK'*. Donc, en considérant toutes ces sections comme infiniment minces, mais matérielles, les centres de gravité de tous les éléments du prisme se trouveront sur la ligne *KK'*, et la matière étant également répartie sur cette ligne, *le centre de gravité de leur système ou du prisme donné sera au milieu G de cette ligne.*

Ce qu'on vient de dire d'un prisme quelconque s'appliquera également à la solidité d'un cylindre quelconque à bases parallèles.

§ 174. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire SABC*, (*fig.* 72). — Soit *O* le centre de gravité de la face ABC. Il serait aisé de démontrer que la ligne SO passe par le centre de gravité de toutes les sections parallèles à la face ABC. En considérant donc ces sections comme infiniment minces, mais matérielles, nous pourrons supposer leur poids concentré à leur centre de gravité, ce qui nous amènera à conclure que le centre de gravité de leur système ou celui de la pyramide, est situé sur la ligne SO. Mais ici la matière n'est pas également répartie sur cette ligne, ce qui ne nous permet pas de placer son centre de gravité en son point milieu. Or ce que nous venons de dire de la ligne SO qui joint le sommet S au centre de gravité de la face ABC, pourra se dire également de la ligne AO' qui joint le sommet A au centre de gravité O' de la face BSC. Le centre de gravité de la pyramide se trouvant donc à la fois sur les deux lignes SO et AO' situées dans le même plan ASD, sera situé au point G de leur intersection. Les points O et O' partageant les lignes AD et SD en parties proportionnelles, la ligne OO' est parallèle à AS, et est le tiers de cette ligne, comme OD est le tiers de AD; et les triangles AGS, GOO' donnent la proportion :

$$OG : GS :: OO' : AS; \text{ mais } OO' = \frac{1}{3} AS;$$

$$\text{Donc : } OG = \frac{1}{3} GS = \frac{1}{4} SO;$$

ce qui nous apprend que *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est situé sur la ligne qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée, au quart de cette ligne à partir de la face, ou aux trois quarts à partir du sommet.*

§ 175. *Si l'on suppose quatre masses égales placées aux quatre sommets de la pyramide, leur centre de gravité sera le même que celui de la pyramide.* — En effet, les trois masses A, B, C (*fig.* 73), auront pour centre de gravité celui du triangle ABC; et pour composer leur résultante avec la quatrième masse S, il faudra partager SO en deux parties $S\,G$ et $G\,O$ qui soient entre elles réciproquement comme ces deux forces, c'est-à-dire comme 3 et 1, ce qui donne le centre de gravité G de la pyramide, déjà déterminé.

§ 176. *Second procédé pour trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire.* — On voit aussi qu'en composant ces quatre forces 2 à 2, la ligne $D\,D'$ qui joint les milieux des arêtes $A\,S$ et $B\,C$ devra contenir le centre de gravité, ainsi que celle qui joint les milieux des arêtes $A\,B$ et $S\,C$. Donc le centre de gravité d'une pyramide triangulaire se trouve aussi à l'intersection des lignes qui joignent les milieux des arêtes opposées.

§ 177. *Troisième procédé pour trouver le centre de gravité d'une pyramide triangulaire.* — On conclurait de tout ce qui précède, d'une manière analogue au triangle, § 165, que la distance du centre de gravité d'une pyramide triangulaire à un plan est le quart de la somme des perpendiculaires abaissées des quatre sommets sur ce plan; ce qui fournit également un nouveau procédé pour trouver ce centre de gravité.

§ 178. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide quelconque* (*fig.* 74). — Soit K le centre de gravité de la base. Joignons $S\,K$. Il est aisé de démontrer que toutes les sections parallèles à la base auront leur centre de gravité sur cette ligne, et que par conséquent elle contient le centre de gravité de la pyramide. Or si l'on décomposait cette pyramide en pyramides triangulaires, elles auraient leur centre de gravité dans un même plan parallèle à la base et mené à une distance de cette base égale au quart de la ligne $S\,K$. Le centre de gravité de la pyramide se trouvera donc également dans ce plan, et par conséquent à son intersection avec la ligne $S\,K$, au quart de cette ligne à partir de la base, ou au trois quarts à partir du sommet.

§ 179. *Centre de gravité d'un cône.* — En considérant un cône comme une pyramide dont le nombre des côtés de la base est infiniment grand, nous conclurons de ce qui précède que le *centre de gravité d'un cône est situé sur la ligne qui* *joint le sommet ou centre de gravité de la base, au quart de cette ligne à partir de la base et aux trois quarts à partir du sommet.*

Il est facile de voir comment il faudrait s'y prendre pour trouver le centre de gravité d'un tronc de cône ou celui d'un tronc de pyramide. La théorie des moments, employée déjà si fréquemment, conduirait aisément au résultat, en raisonnant comme au § 168.

§ 180. *Trouver le centre de gravité d'un secteur sphérique ABC (fig. 75).* — En supposant ce secteur partagé en un grand nombre de pyramides, et le poids de chacune d'elles concentré à son centre de gravité, tous ces centres, placés à une distance du centre de la sphère égale aux $\frac{3}{4}$ du rayon, seront situés sur une zône sphérique $A'B'$ dont le rayon sera les $\frac{3}{4}$ du premier. En donnant à cette zône le poids du secteur, son centre de gravité, qui est situé au milieu G de sa hauteur, sera aussi celui du secteur; *donc le centre de gravité d'un secteur sphérique se trouve sur son axe, à une distance du centre de la sphère égale aux trois quarts du rayon, moins la moitié de la hauteur de la zône menée dans ce secteur à la même distance du centre.*

§ 181. *Trouver l'expression de la surface de révolution engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe situé dans son plan (fig. 76).* — Soit S la longueur développée de la génératrice; soient s, s', s''...... des arcs de cette courbe infiniment petits, et considérés comme linéaires; et x, x', x''...... les perpendiculaires abaissées des centres de gravité de ces petits arcs sur l'axe de révolution, ou, ce qui est la même chose, sur un plan passant par cet axe, perpendiculaire au plan de la courbe, et considéré comme plan des moments. La surface engendrée par l'arc ab ou s est un tronc de cône, dont la surface est égale à son côté s multiplié par la circonférence menée à égales distances des bases ou à $2\pi x$. Cette surface est donc égale à

$$s.\, 2\,\pi\, x = 2\,\pi\, s\, x.$$

On trouverait de la même manière que la surface engendrée par $a'\,b' = 2\,\pi\, s'\, x'$, etc. Ajoutant toutes ces surfaces, nous aurons la surface totale de révolution. En la désignant par A, nous aurons donc :

$$A = 2\,\pi\, sx + 2\,\pi\, s'x' + \ldots\ldots\ldots = 2\,\pi\,(sx + s'\,x' + \ldots\ldots\ldots).$$

Le facteur renfermé dans la parenthèse est la somme des moments des éléments de la génératrice, et est égale au moment de cette génératrice, dont l'expression est SX, en appelant X la distance du centre de gravité G à l'axe. Donc enfin, en substituant, il vient :

$$A = 2\,\pi\, XS \ldots\ldots\ldots (1).$$

Formule qui peut s'énoncer ainsi : *La surface de révolution est égale à la longueur de la génératrice multipliée par la circonférence du cercle décrite par le centre de gravité de cette génératrice.*

On peut faire immédiatement l'application de cette formule à la sphère, dont la surface est engendrée par une demi-circonférence de cercle. Le § 161 nous donne

$$X = \frac{2\,R}{\pi};$$

la demi-circonférence ou $S = \pi R$. Substituant dans (1), il vient

$$A = 4\,\pi\, R^2.$$

Soit encore à trouver la surface d'un tore engendré par un cercle dont le centre est éloigné de l'axe de rotation de trois fois son rayon. On a ici :

$$X = 3\,R\,;\; S = 2\,\pi\, R.$$

En substituant, il vient :

$$A = 12\,\pi^2\, R^2.$$

§ 182. *Trouver l'expression du solide de révolution en-*

gendré par une surface plane tournant autour d'un axe situé dans son plan (*fig.* 77). — Partageons la surface ABC de la génératrice en un nombre infini de petits rectangles tels que $abcd$, dont les côtés soient parallèles et perpendiculaires à l'axe. Le volume engendré par $bmnc$ est égale à $\pi \overline{nc}^2 . mn$. Le volume engendré par $amnd$ est égal à $\pi \overline{n d}^2 . mn$. La différence de ces deux volumes, ou le volume engendré par le petit rectangle $abcd$ est donc égal à

$$\pi \overline{nc}^2 \times mn - \pi \overline{nd}^2 \times mn = \pi mn (\overline{nc}^2 - \overline{nd}^2) = \pi mn \\ (nc + nd)(nc - nd) = \pi mn \, 2x . dc = 2\pi x . mn . dc.$$

Or, $mn . dc =$ la surface du petit rectangle $abcd$ que nous désignerons par s. L'expression précédente devient $2\pi x s$. Pour un autre rectangle nous aurions $2\pi x' s'$, etc. Faisant la somme de tous ces volumes élémentaires, nous aurons le volume total V qui sera égal à

$$2\pi x s + 2\pi x' s' + \ldots\ldots \text{ ou}$$

$$V = 2\pi (sx + s'x' + \ldots\ldots).$$

Le deuxième facteur est la somme des moments des éléments de la surface de la génératrice, et est égal au moment de cette surface ou à SX, en désignant par S la surface de la génératrice et par X la distance du centre de gravité de cette surface à l'axe. Substituons, il vient

$$V = 2\pi SX, \text{ ou}$$

$$V = S . 2\pi X \ldots\ldots \; (2);$$

ce qui fait voir que *le solide de révolution est égal à la surface de la courbe génératrice multipliée par la circonférence décrite par le centre de gravité de cette surface.*

On peut appliquer cette formule à la recherche de la solidité de la sphère, qui est engendrée par un demi-cercle tournant autour de son diamètre. Le § 168 nous donne

$$X = \frac{4R}{3\pi};$$

le demi-cercle ou

$$S=\frac{\pi R^2}{2}.$$

Substituant dans (2), il vient :

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Soit encore à trouver le volume du tore du paragraphe précédent ; on aura

$$X=3R;\ S=\pi R^2.$$

En substituant, il vient :

$$V=6\pi^2 R^3.$$

§ 183. *Unité de poids, ses multiples et ses subdivisions.* — Les poids des corps de même nature ou de nature différente étant susceptibles d'être comparés entre eux, une unité de mesure devient nécessaire pour que cette comparaison puisse s'établir ; la grandeur de cette unité est entièrement arbitraire. Celle qui est adoptée en France est le poids d'un centimètre cube d'eau dans son plus grand état de pureté, et prise dans certaines circonstances physiques constantes, déterminées, et convenues, afin qu'elles puissent toujours être reproduites avec exactitude, et que ce poids soit réellement invariable. On l'appelle *Gramme.* Ses multiples sont : *le Décagramme, l'Hectogramme, le Kilogramme*, etc., qui signifient 10, 100, 1000, etc., etc., grammes. Ses subdivisions sont : le *Décigramme, le Centigramme......*

§ 184. *Unité de masse ; valeur de la masse d'un corps en fonction de son poids.* — Nous avons défini ailleurs § 156, la *masse* d'un corps, la quantité de matière ou de molécules matérielles renfermées dans ce corps. Mais, de même que nous avons choisi le *Gramme* pour unité de poids, de même aussi nous devons faire choix d'une unité de mesure pour la masse. Cette unité doit être de même nature que la quantité qu'elle est destinée à mesurer. Or rappelons-nous, § 61

§ 156, que la pesanteur agit avec la même intensité sur les molécules de tous les corps, de quelque nature qu'ils soient, de sorte que ce n'est que par le nombre des molécules matérielles qu'ils contiennent sous le même volume que les différents corps se distinguent sous le rapport de leurs poids. Ainsi, lorsqu'un corps pèse sous le même volume trois fois plus qu'un autre corps, nous en concluons qu'il contient trois fois plus de molécules; nous faisons abstraction de la nature de ces molécules.

D'après ce qui précède, nous pouvons donc prendre pour unité de masse la quantité de matière renfermée dans un nombre convenablement choisi de kilogrammes d'un corps quelconque. Soit a ce nombre. Alors si l'on désigne par P le poids d'un certain volume de ce corps, ou de tout autre, par M sa masse, ou le nombre d'unités de masse qu'elle contient, nous aurons l'égalité $P^{\mathrm{k}} = M \times a^{\mathrm{k}}$. D'où l'on tire :

$$M = \frac{P^{\mathrm{k}}}{a^{\mathrm{k}}}.$$

Prouvons maintenant qu'il n'est pas possible de faire choix pour a d'un nombre arbitraire. En effet, comme la pesanteur varie d'intensité, soit dans la même verticale, soit pour des latitudes différentes, et qu'ainsi le poids d'un corps est également variable pour le même volume et par conséquent pour le même nombre de molécules, il s'ensuit que le quotient précédent $\frac{P}{a}$, qui exprime la masse du corps, ne serait plus constant pour le même lieu du globe, ce qui est absurde. Cependant il deviendrait constant, si l'on connaissait la valeur que prendrait a dans les différents lieux. Or l'expérience nous apprend que lorsque l'intensité de la pesanteur varie, elle reste proportionnelle à la vitesse communiquée aux corps pesants au bout d'une seconde de chute; de sorte que, en désignant par P et P' les poids de deux corps, sous le même volume et dans deux lieux différents pour lesquels les intensités de la gravité fussent respectivement g et g', on aurait

$$\frac{P}{P'}=\frac{g}{g'}; \text{ d'où } \frac{P}{g}=\frac{P'}{g'};$$

c'est-à-dire que le rapport du nombre abstrait de kilogrammes renfermés dans le poids d'un corps au nombre abstrait de mètres renfermés dans la valeur de la gravité est constant pour tous les lieux. Si donc nous prenons pour unité de masse la masse renfermée dans un nombre de kilogrammes de matière représenté par le nombre abstrait g variable pour les différents lieux, le rapport $\frac{P}{g}$ qui remplacera le précédent $\frac{P}{a}$ sera constant pour tous ces lieux, et nous aurons ce rapport pour expression de la masse ; ou

$$M=\frac{P}{g}; \text{ d'où } P=Mg.$$

Nous savons que par la latitude de l'Observatoire de Paris, la valeur de g est 9,81 environ.

§ 185. *Densité d'un corps, son poids spécifique; usage de ces quantités.* — La quantité de masse renfermée dans l'unité de volume d'un corps homogène est ce qu'on appelle sa densité. Si l'on désigne par v le volume de ce corps, ou le nombre d'*unités* de volume qu'il contient ; par m sa masse et par d sa densité, on aura donc : $m=vd$, ou *la masse égale le volume multiplié par la densité.* Cette valeur étant substituée à la place de m dans celle du poids, on a $P=vdg$. Mais si l'on remarque qu'une masse multipliée par g donne le poids de cette masse, dg sera le poids de l'unité de volume du corps. En désignant ce poids par p on aura :

$$P=Vp\ldots.\ (1);$$

ou *le poids égale le volume multiplié par le poids de l'unité de volume.* Le poids de l'unité de volume est ce qu'on nomme le *poids spécifique du corps.*

§ 186. *Remarque sur la nature des quantités qui entrent dans les égalités précédentes.* — Les quantités auxquelles se rapportent les lettres v, m, d, P, p, étant de natures différentes, elles doivent désigner dans les équations précédentes les rapports de ces quantités à celles de même nature que l'on prend pour unité, et par conséquent des nombres abstraits; elles sont d'ailleurs liées l'une à l'autre. Par exemple, si l'unité de poids est le gramme, celle du volume sera le centimètre cube; au kilogramme correspondrait le décimètre cube.... en général, l'unité de volume est le volume de l'eau qui pèse l'unité de poids.

§ 187. *Théorème sur deux corps de poids égaux.* — Si l'on a pour un corps : $P = vp$, § 185, pour un autre, dont le poids serait égal, on trouverait : $P = v'p'$, et par suite $vp = v'p'$; ce qui fournit ce théorême : *lorsque les poids de deux corps homogènes sont égaux, leurs volumes sont réciproques à leurs poids spécifiques.*

§ 188. *Nouvelle manière d'envisager les poids spécifiques des corps.* — L'unité de poids étant le gramme, ou le poids d'un centimètre cube d'eau, le poids spécifique d'un corps, d'après ce qui précède, sera donc le poids d'un centimètre cube de ce corps exprimé en grammes. Ainsi, lorsqu'on dit : le poids spécifique du fer est égal à 7, cela veut dire qu'un centimètre cube de fer pèse 7 grammes, ou ce qui est la même chose, 7 fois autant qu'un centimètre cube d'eau. Or, si l'on prenait 10 centimètres cubes de fer, leur poids serait de même 7 fois aussi grand qu'un pareil volume d'eau. Comme on le voit, le poids spécifique d'un corps, considéré comme un nombre abstrait, est égal au rapport du poids de ce corps sous un certain volume au poids d'un pareil volume d'un autre corps pris pour terme de comparaison, de l'eau par exemple, puisque c'est à elle que nous avons emprunté la manière de représenter l'unité de poids. On aurait bien pu comparer tous les corps entre eux, et dire : le cuivre pèse 3 fois plus que le marbre, ou le poids spécifique du cuivre par rapport au marbre est 3, celui du platine par rapport à l'argent est 2, etc. Mais l'avantage d'un terme de comparaison est incontestable. Cependant comme les gaz pèsent beaucoup moins que les solides et les liquides, et que cette différence très marquée rendrait très petits les nombres qui expriment les poids spécifiques des gaz, on les a comparés à un corps de la même nature. Ainsi, c'est à l'eau que l'on rapporte les poids spécifiques des solides et des liquides, ceux des gaz sont rapportés à l'air atmosphérique. On a choisi l'eau et l'air pour servir de termes de comparaison, parce que ces corps sont les plus faciles à ramener à des états constants de constitution physique ou chimique pour toutes les contrées de la terre.

§ 189. *Remarque sur l'identité de la densité et du poids spécifique.* — Cette nouvelle manière d'envisager les poids spécifiques des corps comme les rapports de leurs poids sous le même volume, nous conduit à cette remarque que la densité et le poids spécifique d'un corps sont exprimés par le même nombre abstrait. En effet, quand on dit que le poids spécifique d'un corps est 7, cela veut dire, ou qu'un centimètre cube de cette substance pèse 7 grammes, ou que ce corps pèse 7 fois autant que l'eau sous le même volume; et d'après ce que nous avons dit, § 188, il s'ensuit qu'il y a 7 fois plus de particules matérielles dans ce corps que dans un volume d'eau égal au sien. Dès lors, la densité de ce corps par rapport à l'eau est 7 en prenant celle de l'eau pour unité. On voit donc que la densité et le poids spécifique d'un corps sont exprimés par le même nombre. C'est ce qui explique pourquoi l'on dit souvent : *le poids d'un corps est égal à son volume multiplié par sa densité,* au lieu de dire : *multiplié par son poids spécifique.*

§ 190. *La recherche des poids spécifiques des corps est du ressort de la physique.* — Nous nous bornerons ici à donner le tableau des poids spécifiques de quelques corps.

TABLEAU

DES POIDS SPÉCIFIQUES DE QUELQUES SUBSTANCES.

NOMS DES CORPS.	POIDS spécifiques.	NOMS DES CORPS.	POIDS spécifiques.
Platine laminé	22,0690	Tilleul	0,6040
Platine forgé	20,3366	Peuplier ordinaire	0,3830
Or forgé	19,3617	Liége	0,2400
Mercure	13,5980	*Liquides.*	
Cuivre jaune fondu	12,6740	Acide sulfurique	1,8409
Plomb fondu	11,3523	Acide nitrique	1,2175
Argent fondu	10,4743	Eau de la mer	1,0263
Cuivre fondu	8,7880	Eau distillée	1,0000
Acier non écroui	7,8163	Huile d'olive	0,9153
Fer en barre	7,7880	Alcool absolu	0,7[illegible]20
Fer fondu	7,2070	Ether sulfurique	0,7155
Etain fondu	7,2914	*Gaz.*	
Zinc fondu	6,8610	Air	1,0000
Flint-Glass	3,3293	Chlore	2,4700
Soufre natif	2,0332	Acide sulfureux	2,1004
Laitier vitreux	1,4570	Acide carbonique	1,5240
Sable fin et sec	1,4140	Acide chlorhydrique	1,2474
Ivoire	1,9170	Acide sulfhydrique	1,1912
Houille	1,1350	Oxigène	1,1026
Glace	0,9300	Bicarbure d'hydrogène	0,9780
Machefer, scorie de forge	0,8780	Azote	0,9760
Hêtre	0,8520	Vapeur d'eau	0,6235
Chêne	0,8500	Ammoniaque	0,5967
Frêne	0,8450	Protocarbure d'hydrogène	0,5550
Orme	0,8000	Hydrogène	0,0688

§ 191. *Problèmes sur les poids spécifiques.* — Voici quelques problèmes dont la solution dépend de la connaissance des poids spécifiques des corps.

1° *Quel serait, en grammes, le poids d'un boulet sphérique, formé avec une substance dont le poids spécifique serait* d, *et dont le rayon contiendrait* r *centimètres?*

Nous avons la relation $p = vd$, § 185, en appelant d la densité ou le poids spécifique, que nous avons appelé d'abord p. Le volume de la sphère $= \frac{4}{3}\pi r^3$ exprimé en centimètres cubes. La densité exprime en grammes le poids de l'unité de volume du corps. Le poids en grammes du boulet sera donc

$$p = \frac{4}{3}\pi r^3 d.$$

Exemple : Si le boulet est en fer fondu, $d = 7,207$, et si l'on suppose $r = 0^m,032$, on aura, en réduisant r en centimètres :

$$p = \frac{4}{3}\pi . 3,2^3 . 7,207 = 2968^{gr.}6 = 2^{k.},9686.$$

2° Réciproque : *Quel rayon devrait avoir un boulet sphérique dont le poids serait* p, *et qui serait formé d'une substance dont le poids spécifique serait* d.

$$\text{On aurait : } r = \sqrt[3]{\frac{3p}{4\pi d}}.$$

Exemple : Si le boulet doit être en fer fondu, $d = 7,207$; et si l'on suppose $p = 6^k,34$, la valeur de r sera obtenue en décimètres, et l'on aura :

$$r = \sqrt[3]{\frac{3.\ 6,34}{4.\ \pi.\ 7,207}} = 0^d,5944 = 0^m,05944.$$

3° En général lorsqu'on connaîtra l'expression algébrique du volume d'un corps, il sera aisé de résoudre des problèmes analogues au précédent. L'équation $p = vd$ détermine l'une des quantités p, v, d, lorsqu'on connaît les deux autres.

4° Si dans cette relation on suppose $d=1$, auquel cas le corps que l'on considère est l'eau, ou une substance de même densité que l'eau, il vient $p=v$; ce qui fait voir que le nombre de grammes contenu dans le poids de ce corps est égal au nombre de centimètres cubes que son volume contient. Ainsi un volume d'eau qui pèserait 5gr., 367, serait égal à 5 centimètres cubes plus 367 millièmes.

5° *Trouver le volume d'une capacité n'ayant pas de forme géométrique déterminée, telle que la boule soufflée à l'extrémité d'un tube, une fiole quelconque*, etc.

On pèsera d'abord la capacité vide, puis pleine d'un liquide dont on connaîtra le poids spécifique, de mercure par exemple. La différence des deux poids donnera celui du mercure renfermé dans la capacité. Alors, au moyen de l'équation $p=vd$, d'où l'on tire :

$$v=\frac{p}{d},$$

on déterminera v, puisqu'on connaît p et d.

Soit $p=1$ gr., 375;

la densité du mercure est 13, 598.

On trouve $v=0,10112$ cent. cubes.

6° *Trouver le rayon de la section transversale d'un fil de fer dont une longueur d'un mètre pèse* 0gr., 238; ce fil est un cylindre dont le volume est exprimé par $\pi r^2 l$. L'équation $p=vd$ donne donc :

$$p=\pi r^2 l d;\ \text{d'où}\ r=\sqrt{\frac{p}{\pi l d}}.$$

Ici $p=0,238$ gr., $l=100$ cent., et $d=7,788$.

Substituant et effectuant, on a

$$r=0,009863 \text{ centim.}$$

7° *Trouver le rayon de la capacité intérieure d'un tube très étroit supposée cylindrique.*

On pèserait ce tube vide, puis on y introduirait une petite colonne de mercure; on le pèserait de nouveau et la différence des poids donnerait celui du mercure introduit. Ayant mesuré la longueur de la colonne de mercure, on connaîtrait alors le poids d'un cylindre de mercure et sa longueur, et le problême s'achèverait comme le précédent.

8° Deux substances dont les poids sont p et p' et les densités d et d' étant mêlées ou combinées, si l'on suppose que dans l'acte de la combinaison il n'y a eu ni contraction, ni dilatation, ou s'il en résulte un composé dont le volume soit égal à la somme de ceux des substances données, alors, soit P le poids du composé, on aura : $P=p+p'$. Et soit D sa densité, on aura : le volume du composé ou $\frac{P}{D}$ égale la somme de ceux des substances données ou $\frac{p}{d}+\frac{p'}{d'}$.

Tirant des deux équations

$$P=p+p' \text{ et } \frac{P}{D}=\frac{p}{d}+\frac{p'}{d'}$$

les valeurs de p et p', il vient :

$$p=\frac{Pd\,(D-d')}{D\,(d-d')};\ p'=\frac{Pd'\,(d-D)}{D\,(d-d')}.$$

Ces formules donneront le moyen de faire l'analyse d'un alliage quelconque qui n'aurait éprouvé ni contraction ni dilatation dans l'acte de la combinaison. Soit, par exemple, à déterminer le titre d'un lingot composé d'or et d'argent. On le pèsera, ce qui donnera P, et l'on déterminera son poids spécifique, ce qui fournira D. Les densités de ces deux substances sont d'ailleurs connues. Les valeurs précédentes de p et de p' feront connaître les quantités d'or et d'argent qui entrent dans le lingot.

9° La seconde des équations fondamentales du calcul précédent donne

$$D = \frac{P}{\frac{p}{d} + \frac{p'}{d'}},$$

qui fait connaître la densité du composé. Ainsi, quelle est la densité du bronze sachant que pour le former on emploie 100 de cuivre et 11 d'étain. On a ici :

$$P = 111;\ p = 100;\ p' = 11;\ d = 8{,}7880;\ d' = 7{,}2914.$$

Substituant, on trouve :

$$D = 8{,}612.$$

10° Si, en se combinant, les deux substances éprouvaient une contraction ou une dilatation, et si l'on donnait le rapport n de la somme des volumes des substances à celui du composé, on aurait :

$$\frac{\frac{p}{d} + \frac{p'}{d'}}{\frac{P}{D}} = n.$$

On tire de là :

$$D = \frac{P n}{\frac{p}{d} + \frac{p'}{d'}};\ \text{ou}\ D = \frac{P n}{v + v'}.$$

Cette formule est surtout applicable au cas où les substances combinées et leur combinaison sont gazeuses ; parce qu'alors n est susceptible d'être déterminé avec beaucoup d'exactitude, et qu'il a toujours une valeur très simple. Par exemple, l'ammoniaque est une substance gazeuse formée de trois volumes d'hydrogène et d'un volume d'azote, le tout condensé en deux volumes. On aura donc :

$$p = 3 \times 0{,}0688 = 0{,}2064;$$
$$p' = 1 \times 0{,}9760 = 0{,}9760;$$
$$P = p + p' = 1{,}1824$$
$$v = 3;\quad v' = 1;\ n = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Substituant, il vient :

$$D = 0,5912$$

nombre probablement plus exact que celui déterminé directement.

DES RÉSISTANCES NUISIBLES.

—

DU FROTTEMENT.

§ 192. *Adhérence et frottement. Deux espèces de frottement.* — Lorsqu'on fait glisser deux corps l'un sur l'autre tangentiellement à leur surface, c'est-à-dire sans rouler, il se développe, en leurs différents points de contact, des résistances dirigées dans le sens du chemin que ces points décrivent, résistances dues à ce que les parties saillantes de l'un des corps s'engagent dans les parties rentrantes de l'autre; or, les corps les mieux polis ne sont pas exempts de ces petites inégalités. La force nécessaire pour vaincre ces résistances est ce qui constitue le *frottement.* Mais cette résistance doit être, selon les cas, considérée comme composée de deux autres. La première est l'*adhérence*, qui est la résistance que les corps présentent à leur séparation lorsqu'ils sont recouverts d'un corps gras. Cette résistance ne dépend nullement du poids du corps, mais seulement du nombre de points en contact : elle doit donc être proportionnelle à la surface en contact. La seconde partie de la résistance, le dégagement des parties saillantes, est ce qui constitue le frottement proprement dit, et la force qui doit être employée pour le vaincre lui servira de mesure. Ce qui distingue particulièrement le frottement de l'adhérence, c'est que le frottement ne dépend pas, comme l'adhérence, de l'étendue des surfaces en contact, le poids du corps restant le même. Ce principe attesté par l'expérience, paraît d'abord singulier; cependant on peut observer que si l'on traîne un polyèdre sur un plan et que les faces, d'un égal poli, soient d'inégale étendue, suivant qu'on fera frotter une face ou une autre les points de contact seront plus ou moins nombreux, chacun d'eux portera un poids moins ou plus considérable, et il paraît qu'il y a compensation entre ces deux causes. Enfin, si l'adhérence ne dépend nullement du poids des corps, le frottement est au contraire proportionnel à la pression normale qui s'exerce entre les deux surfaces en contact, pression qui dépend évidemment du poids des corps qui se touchent.

Il y a deux espèces de frottement : le frottement par *glissement* et le frottement par *roulement*. Le premier a lieu lorsqu'un corps glisse sur un autre; le second, lorsqu'une des deux surfaces roule sur l'autre. Ce dernier frottement est beaucoup moindre que le premier, car on voit que le mouvement de rotation contribue en partie à dégager les aspérités.

§ 193. *Mesure du frottement par glissement. Tableaux.*— Le frottement étant mesuré par l'effort nécessaire pour le détruire, nous allons voir comment on est parvenu à le déterminer pour un corps quelconque et dans quelques circonstances particulières. Soit d'abord à mesurer le frottement de ce corps glissant sur un plan horizontal. On fixe le dynamomètre déjà décrit au corps chargé ou non chargé d'un poids quelconque, puis on le tire sur le plan en le faisant marcher d'un mouvement uniforme. La division du limbe sur laquelle l'aiguille s'arrêtera, indiquera *en poids* la résistance occasionnée par le frottement du corps sous la charge donnée contre le plan. On peut encore obtenir ce frottement au moyen du plan incliné. En effet, si l'on décompose le poids P du corps en deux forces, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle au plan, cette dernière a pour valeur comme nous le verrons plus loin :

$$P\frac{BC}{AB}, (Fig. 78).$$

De plus, tant que cette composante sera inférieure à la résistance ou au frottement, le corps demeurera en repos, et il ne prendra de mouvement qu'à l'instant où le plan aura reçu une inclinaison telle que la composante parallèle au plan soit devenue égale à la résistance cherchée F. A cet instant on aura donc :

$$F = P.\frac{BC}{AB}.$$

C'est par de semblables procédés ou d'autres analogues que l'on est parvenu à déterminer les lois du frottement. C'est ainsi qu'on a trouvé que le frottement est 1° *indépendant de la grandeur des surfaces en contact;* 2° *indépendant de la vitesse du mouvement;* 3° *proportionnel à la charge du corps qui glisse, ou plutôt à l'effort perpendiculaire à la surface sur laquelle il frotte.* Le rapport du frottement à la pression, qu'on nomme aussi *coëfficient du frottement*, et qu'on désigne par f, est donc un nombre constant, du moins entre les limites pour lesquelles les surfaces des corps n'éprouvent pas des altérations trop grandes par suite de leur compression réciproque. Il suit de là que, lorsqu'on aura déterminé la pression opérée par un corps normalement à une surface, pour avoir le frottement, il suffira de multiplier cette pression par le rapport relatif aux substances que l'on considère; et pour avoir le *travail du frottement*, il faudra multiplier ce dernier produit par la vitesse des corps en contact. Le travail du frottement est donc proportionnel à la vitesse du mouvement, résultat qui n'est pas en contradiction avec celui qui établit que le frottement est indépendant de cette vitesse; car l'intensité de la force peut rester constante et la quantité de travail qu'elle développe peut varier avec l'autre facteur de ce travail, c'est-à-dire avec la vitesse du point d'application de la force.

On a dressé des tableaux des coëfficients du frotement pour un grand nombre de substances placées dans des circonstances particulières, car ces rapports varient avec le poli des surfaces, le sens de leur juxta-position, leur nature homogène ou hétérogène, et dans ce dernier cas, avec la durée du repos qui a précédé le mouvement. Car, par exemple, lorsque du fer a reposé longtemps sur du bois, le frottement augmentera ensuite avec la durée du repos parce que la compressibilité du bois permet au fer de s'y engrener davantage; c'est environ au bout de 5 à 6 jours que le frottement arrive à sa plus grande limite; il devient triple ou quadruple de celui qui a lieu lorsque les corps sont en mouvement continuel. Les vannes qui sont restées longtemps fermées et que l'eau a pressées contre leurs feuillures, opposent, quand on les lève, un très-grand frottement qui diminue lorsque le mouvement est établi. Il faut donc distinguer les frottements selon deux circonstances principales : voilà pourquoi nous présenterons ici deux tableaux différents. Dans le premier, les surfaces planes sont supposées être restées en contact assez longtemps pour que le frottement ait atteint toute sa valeur; le deuxième est relatif au frottement de surfaces dans la supposition où le mouvement est établi depuis un certain temps.

1. TABLE *des rapports du frottement à la pression, pour les surfaces planes, au moment du départ et après un certain temps de repos.*

INDICATION des SURFACES.		ÉTAT DES SURFACES ET NATURE DE L'ENDUIT. à sec.	mouillées d'eau.	huile d'olives.	saindoux.	suif.	savon sec.	onctueuses et polies.	onctueuses et mouillées.
Bois sur bois.........	minimum...	0, 30	0, 65	......	....	0, 14	0, 22	0, 30	
	moyen	0, 50	0, 68	......	0, 21	0, 19	0, 36	0, 36	
	maximum ..	0, 70	0, 71	......	....	0, 25	0, 44	0, 40	
Bois et métaux....................		0, 60	0, 65	0, 10	0, 12	0, 12	......	0, 10	
Chanvre en brins, cordes ou sangles sur bois..............	minimum...	0, 50							
	moyen	0, 63	0, 87						
	maximum ..	0, 80							
Cuir fort de semelles et pistons sur bois ou fonte	de champ... ou à plat......	0, 43 à 0, 62	0, 62 à 0, 80	0, 12 à 0, 13	....	......	......	....	0, 27
Courroie en cuir noir sur tambour en.....	bois	0, 47							
	fonte.......	0, 54	......	......	....	......	......	0, 28	0, 38
Métaux sur métaux....	minimum...	0, 15	......	0, 11	....	......	......	0, 12 à 0, 17	
	moyen	0, 18	......	0, 12	0, 10	0, 11	......		
	maximum ..	0, 24	......	0, 16	....	......	......		

2. **Table** *des rapports du frottement à la pression, des surfaces planes en mouvement les unes sur les autres.*

INDICATION des SURFACES.		ÉTAT DES SURFACES ET NATURE DE L'ENDUIT.								
		à sec.	mouillées d'eau.	huile d'olive.	saindoux.	suif.	saindoux et plombagine	cambouis purifié.	savon sec.	onctueuses de graisse.
Bois sur bois..........	minimum...	0,20	......	......	0,06	0,06	......	......	0,14	0,08
	moyen.....	0,36	0,25	......	0,07	0,07	......	......	0,14	0,12
	maximum ..	0,48	......	......	0,07	0,08	......	......	0,16	0,15
Bois et métaux........	minimum...	0,20	......	0,05	0,07	0,06	......	......	......	0,10
	moyen.....	0,42	0,24	0,06	0,07	0,08	0,08	0,10	0,20	0,14
	maximum ..	0,62	......	0,08	0,08	0,10	......	......	......	0,16
Chanvre en brins (cordes, sangles, etc.), sur	chêne......	0,45	0,332							
	fonte.......	......	......	0,15	......	0,19				
Cuir fort, à plat, sur bois ou métal, le cuir étant.............	brut	0,54	0,36	0,16	......	0,20				
	battu	0,30								
	gras	......	0,25							
Id. de champ (garnitures de pistons sur *id.*	à sec.......	0,34	0,31	0,14	......	0,14				
	graissé.....	......	0,24							
Métaux sur *idem*.....	minimum...	0,15	......	0,06	0,07	0,07	0,06	0,12	......	0,11
	moyen.....	0,18	0,31	0,07	0,09	0,09	0,08	0,15	0,20	0,13
	maximum ..	0,24	......	0,08	0,11	0,11	0,09	0,17	......	0,17

§ 194. *Observations sur les tableaux du frottement de deux surfaces.* — Les tableaux précédents ont pour but de donner les rapports du frottement aux pressions correspondantes, et cela quelle que soit la grandeur des surfaces frottantes et la vitesse du mouvement. Pour le répéter encore, il n'y a que la nature de leurs substances qui puissent influer sur ces rapports, et l'étendue des surfaces frottantes n'y est pour rien. Cela n'a lieu que pour l'adhérence; encore arrive-t-il souvent qu'elle soit négligeable, attendu la petitesse des surfaces en contact, ou le peu de tenacité des matières molles dont on a coutume de les enduire. En examinant ces tableaux, on peut remarquer qu'on n'y a pas établi de distinction entre les résultats qui se rapportent aux différentes espèces de bois ou de métaux, et à la direction des fibres, par rapport au sens du glissement, parce que ces résultats offrent, par eux-mêmes, trop de contradictions, pour qu'on puisse démêler dans chaque cas, la part d'influence qui peut être due à ces circonstances. Cependant, on s'accorde généralement à regarder le frottement des bois debout, et de ceux dont les fibres sont croisées, comme moindre que le frottement des mêmes bois, glissant simplement dans le sens des fibres, et l'on admet généralement encore que les corps homogènes, glissant les uns sur les autres, offrent, à circonstances égales, une plus grande résistance que les corps hétérogènes. Cependant quelques observateurs pensent que cette opinion n'a aucun fondement réel, et que, si l'on choisit le fer ou l'acier pour des tourillons, par exemple, et le cuivre pour leurs coussinets, comme nous le verrons, lorsque nous traiterons du frottement des axes, c'est afin d'éviter que les premiers ne s'usent trop promptement, et qu'on ne soit obligé de les remplacer souvent, ce qui aurait plus d'inconvénients pour les axes que pour les coussinets. Néanmoins, il serait bon que de nouvelles expériences vinssent lever entièrement les doutes à cet égard.

§ 195. *Frottement produit par le roulement les pièces* *qui tournent sur elles-mêmes.* — Les pièces de rotation qui tournent sur d'autres pièces, occasionnent dans leur mouvement des frottements auxquels on doit avoir égard dans le calcul des machines, et dont la nature est différente, selon que ces roues portent sur leurs appuis par des tourillons ou par des pivots. On nomme tourillons des cylindres a, a', (*fig.* 79), dont le diamètre est le plus petit possible, et qui sont fixés perpendiculairement au plan de la roue, dans le prolongement de l'axe de cette dernière, et aux extrémités de l'*arbre de couche*. Ce dernier consiste d'ailleurs dans un cylindre AB, beaucoup plus gros que les tourillons, et qui traverse la roue à son milieu et dans le sens de l'axe de son mouvement. Ces tourillons reposent dans une boîte CMD de forme cylindrique concave, par une arête perpendiculaire à leur circonférence. Le pivot a une forme analogue à celle du tourillon, si ce n'est qu'il appuie par le cercle qui termine sa tête contre le fond d'une crapaudine $EFGHIK$, (*fig.* 80). Le frottement d'un pivot sur le fond de sa crapaudine est de la même nature que celui qui s'exerce entre deux surfaces, et le rapport du frottement à la pression s'évalue au moyen des tableaux précédents. Quant au frottement produit par les tourillons dans leurs boîtes, Coulomb a fait des expériences qui démontrent que ce frottement est de beaucoup inférieur au premier, de sorte que nous donnerons un troisième tableau pour ce genre de frottement.

§ 196. *Frottement d'un pivot contre sa crapaudine.* — Supposons qu'un pivot soit pressé contre sa crapaudine par une force N, passant par le centre du pivot, et perpendiculaire au plan du cercle du pivot qui frotte sur la crapaudine. Si f est le rapport du frottement à la pression, le frottement aura pour valeur fN. Or, cette pression N peut être supposée également répartie sur tous les points de la base du pivot, et y exercer un frottement égal sur chacun d'eux. Concevons un secteur infiniment mince aob de cette base, (*fig.* 81). Tous les petits frottements égaux exercés sur les points du secteur pourront être considérés comme autant de forces parallèles, car elles agissent perpendiculairement au rayon oc, à cause du peu de largeur du secteur. La résultante de toutes ces petites forces est donc appliquée au centre de gravité de ce petit secteur ou triangle, c'est-à-dire aux $\frac{2}{3}$ de oc; ce qui fait voir que le frottement total peut être supposé concentré sur les points d'une circonférence de cercle dont le rayon serait les deux tiers de celui de la base du pivot. Ce rayon est ce qu'on nomme le *bras de levier moyen du frottement*. Donc pour avoir le travail de ce frottement, pendant une révolution du pivot, il suffit de multiplier ce frottement par la circonférence du cercle décrit par le bras de levier moyen, puisque le frottement agit suivant cette circonférence. On a ainsi pour le travail du frottement, pour une circonférence entière du pivot :

$$T = fN.\, 2\pi \frac{2}{3} r = \frac{4}{3} \pi f r N.$$

Exemple : Quelle est la quantité de travail consommée, pendant une révolution, par le frottement du pivot d'un arbre vertical, soumis à une pression de 3400 kilog., le rayon du pivot en acier, sur crapaudine en bronze, étant de $0^m,03$? Dans cet exemple,

$$f = 0,07 ;\ N = 3400^k ;\ r = 0^m,03.$$

Substituant dans la formule, il vient :

$$T = 29^{km},92.$$

Si l'on voulait trouver le travail pour 1", il faudrait multiplier la valeur de T par n le nombre de tours par secondes.

A l'inspection de la formule précédente, on voit que le travail du frottement augmente avec le rayon du cercle du pivot, et que, par conséquent, il y a de l'avantage à diminuer autant que possible ce rayon ; mais cette limite est elle-même relative à la solidité du pivot. Au reste, c'est dans ce but que l'on amincit quelquefois les pivots en forme conique. Souvent encore on termine leur extrémité inférieure par une surface convexe ainsi que le fond de la crapaudine; il faut alors prendre pour r le rayon du petit cercle de contact qui a toujours une certaine étendue par suite de la compression et de l'user.

§ 197. *Frottement d'un tourillon dans un palier ou boîte.* — Nous avons vu que le tourillon était un cylindre posé sur un autre cylindre, et le touchant par une arête; on a le soin de leur donner peu de jeu, c'est-à-dire une très faible différence entre leurs rayons, afin d'éviter toute espèce d'emboîtement, lorsque la pièce qui s'appuie sur ce tourillon est mise en mouvement. Mais comme le frottement qui en résulte a été reconnu, par Coulomb, bien inférieur à ceux pour lesquels nous avons tracé les deux premiers tableaux, nous donnerons ici celui qui est relatif aux pièces de rotation.

Des expériences plus récentes, entreprises par M. Morin, donnent des résultats qui sont en désaccord avec ceux obtenus par Coulomb, et pour les expliquer il faut admettre que, dans les expériences de M. Morin, l'enduit n'était pas sans cesse renouvelé, comme dans celles de Coulomb, et que les tourillons n'avaient point encore acquis, sous l'influence de la pression et du mouvement, le degré de poli et d'écrouissage qu'on observe dans les machines déjà anciennes, et que possédaient probablement les tourillons et chapes de poulies, mis en œuvre par Coulomb. Nous donnerons les résultats des deux expérimentateurs.

3. **Tables** *des rapports du frottement à la pression, pour les tourillons en mouvement dans des boîtes ou coussinets.*

1° D'après les expériences de M. Morin.

INDICATION des SURFACES.	ÉTAT DES SURFACES ET NATURE DE L'ENDUIT: à sec ou très peu onctueuses.	onctueuses et mouillées d'eau.	graissées et mouillées d'eau.	huile, suif ou saindoux: entretenues à la man. ord. ou très onct.	huile, suif ou saindoux: l'enduit sans cesse renouvelé.	cambouis très mou et purifié.	saindoux et plombagine.	ontueuses très douces au toucher.
Bronze sur bronze...	.....	.....	.....	0,097				
Id. sur fonte.....	.....	.....	.....	.....	0,049			
Fer sur bronze......	0,251	0,189	.....	0,075	0,054	,0090	0,111	
Id. sur fonte........	.....	.....	.....	0,075	0,054			
Fonte sur fonte......	.....	0,137	0,079	0,075	0,054	.....	.....	0,137
Id. sur bronze....	0,194	0,161	.....	0,075	0,054	0,065	.....	0,166
Fer sur gayac.......	0,188	.....	.....	0,125				
Fonte sur *id.*.......	0,185	.....	.....	0,100	0,092	.....	0,109	0,140
Gayac sur fonte.....	.....	.....	.....	0,116	.....	.....	.....	0,153
Id. sur gayac.....	.....	.....	.....	.....	0,070			

2° D'après les expériences de Coulomb.

INDICATION des SURFACES.	ÉTAT DES SURFACES ET NATURE DE L'ENDUIT: à sec.	huile d'olives.	saindoux.	suif.	onctueuse	anciennement enduites.	OBSERVATION.
Fer sur cuivre......	0,155	0,130	0,120	0,085	0,127	0,133	Le nombre relatif au frottement du fer sur bois se rapporte à une poulie d'épreuve dont l'enduit et la nature des coussinets ne sont point indiqués par Coulomb.
Fer sur bois........	.....	.....	.....	0,050			
Chêne vert sur gayac.	.....	.....	.....	0,038	0,060	0,070	
Id. *id.* sur orme...	.....	.....	.....	0,030	0,050		
Buis sur gayac......	.....	.....	.....	0,043	0,070		
Buis sur orme.......	.....	.....	.....	0,035	0,050		

Cherchons maintenant la valeur du frottement d'un tourrillon A contre sa boîte pmq, (*fig.* 82). Si le tourillon n'était sollicité que par une force N verticale, et passant par le centre A, le frottement serait mesuré par le produit fN. Mais le plus souvent le tourillon est sollicité par des forces latérales, qui se joignent au poids des pièces, et, par l'effet de ces forces combinées, il remonte dans sa boîte jusqu'à ce que le frottement soit détruit par les efforts moteurs. Si l'équilibre a lieu, lorsque le contact est en m, par exemple, c'est que la résultante de toutes les forces qui sollicitent le tourillon, y compris le frottement, est normale à la boîte au point m. Soit N la résultante des forces étrangères au frottement; cette force étant décomposée en deux, am, bm rectangulaires, la composante am représentera la véritable pression sur l'axe, et bm sera la composante qui détruit le frottement. Si $md=1$, la composante normale aura pour valeur $N.ma$, et le frottement sera : $fN.ma$. Dans la même hypothèse, la composante dirigée suivant la tangente, opposée et égale au frottement, sera : $N.mb$. On aura donc :

$$f.N.ma=N.mb;\ \text{d'où}\ f=\frac{mb}{ma}=\cot.\varphi,$$

en appelant φ l'angle de la résultante des forces avec la tangente au point de contact sur le coussinet. Ainsi ce point de contact m sera déterminé par la tangente au coussinet qui fera avec la force N un angle dont la cotangente sera représentée par le rapport du frottement à la pression. La valeur $f.N.ma$ du frottement devient, en cherchant la valeur de ma dans le triangle rectangle amd,

$$fN.ma=N\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Telle est donc la valeur du frottement autour du tourillon. Lorsque f est moindre que $\frac{1}{3}$, la valeur de f^2 peut être négligée, et alors le frottement se réduit à fN, ce qu'il est lorsque la pression passe par le centre. C'est même ainsi que l'on opère dans la pratique. On évalue rigoureusement toutes les pressions qui s'ajoutent ou se retranchent, et la résultante étant multipliée par f, on a la valeur du frottement. Pour obtenir le travail de ce frottement, il suffit alors de le multiplier par la circonférence du tourillon; ce qui donne :

$$2\pi rfN, \text{ ou} : 2\pi rN\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$$

dans le cas général, pour le travail exercé dans un tour.

§ 198. *Cas où le tourillon reste fixe; application.* — Lorsque le tourillon reste fixe, et ne fait pas corps avec la roue, la roue tourne alors de manière que c'est son propre centre A qui demeure fixe, (*fig.* 83). La circonférence décrite par le frottement n'est plus alors celle du tourillon, mais bien celle de la roue. C'est ce qui arrive pour les roues des voitures. Alors le rayon r de l'expression précédente devient plus grand, car il y a toujours un peu de jeu entre le tourillon et l'œil de la roue, et le travail absorbé par le frottement est plus considérable. Ainsi, toutes choses égales, il y a du désavantage à ne pas rendre le tourillon mobile. Quant à la longueur de ce tourillon, on voit qu'elle n'entre pas dans l'expression du travail du frottement; par conséquent, ce travail est indépendant de cette longueur.

Application : Quelle est la quantité de travail consommée en un tour par le frottement des tourillons d'une roue hydraulique soumise à une pression de 12000 kilogrammes?

Le rayon des tourillons est : $r = 0^m, 10$; ils sont en fonte et reposent sur des coussinets de bronze enduits de saindoux. La roue fait cinq tours en 1', en supposant qu'on veuille déterminer le travail par seconde.

On a donc $N = 12000^k$; le troisième tableau donne : $f = 0,075$; $r = 0^m, 10$. Substituant dans la formule : $2\pi rfN$, il vient : 565^{km} pour le travail du frottement dans un tour. Pour avoir le travail dans une seconde, il faut multiplier par le nombre de tours par seconde, ou $\frac{5}{60}$, ce qui donne 47^{km}.

§ 199. *Remarque sur les dimension des tourillons; avantage des couteaux.* — Le frottement d'un tourillon sur son coussinet étant proportionnel au rayon de ce tourillon, on comprend l'avantage qu'il y aura à diminuer ce dernier; on construit alors le tourillon en substance très dure, en acier, par exemple. Il est aisé de concevoir maintenant comment l'emploi des couteaux est avantageux pour diminuer le frottement. On voit que les couteaux ne sont que des espèces de coins qui supportent l'axe, et dont les pointes sont arrondies en cercle fort petit. Le mouvement s'opérant autour du centre de ce petit cercle, pour des efforts même considérables, le travail du frottement est peu appréciable, attendu la petitesse du rayon r. L'emploi de ces couteaux est d'ailleurs limité aux cas où l'on ne doit faire exécuter à l'axe que de petites oscillations. C'est en terminant son axe de suspension par des couteaux qu'une balance est rendue sensible.

§ 200. *Autres exemples; dents des roues.* — Pour le frottement des pilons contre leurs prisons, en désignant par F l'effort appliqué au mentonnet, par P la pression exercée par le pilon contre chaque prison, par l la longueur du mentonnet, et par h l'intervalle des prisons, on a

$$P = \frac{Fl}{h}.$$

On donne la règle suivante pour calculer la résistance du frottemenut pour les pistons des machines à colonne d'eau et pour les machines à vapeur: h étant la charge du piston exprimée en mètres d'eau, et r le rayon du cylindre où se meut le piston, cette résistance est $300\,r\,h$. D'où il suit qu'elle est proportionnelle à la charge du piston et à son diamètre.

Quant au frottement des dents des roues, sa véritable théorie ne pourrait être entendue avant d'avoir déterminé la forme de ces dents. Mais, nous pouvons dès à présent, faire une remarque sur la nature de ce frottement, qui permet, dans la plupart des cas, de n'en pas tenir compte dans le calcul des machines.

Lorsque les rayons des deux roues qui engrènent l'une dans l'autre, sont à peu près égaux, il y a peu de différence entre la longueur développée de la courbe d'une dent, et la longueur du flanc de la dent opposée que cette courbe conduit; d'où il suit que dans ce cas la dent et le flanc rouleront l'un sur l'autre, sans qu'il y ait presque aucun glissement. Leur frottement sera alors un frottement de seconde espèce, ou un frottement de roulement. Or, ces frottements sont très peu sensibles, et peuvent être négligés.

Dans d'autres cas, au contraire, comme par exemple, lorsqu'une came soulève un pilon, un seul point de sa base se trouve successivement en contact avec différents points de la surface de la came, et glisse le long de cette surface, de manière que le frottement est absolument de même nature que celui qu'on nomme frottement de première espèce, auquel se rapportent les résultats donnés par les tableaux (1) et (2).

Entre ces deux cas extrêmes qu'on vient d'indiquer se trouvent une infinité de cas intermédiaires, dans lesquels le mouvement des dents l'une contre l'autre participe plus ou moins du glissement ou de la rotation, suivant que la roue conduite à un plus ou moins grand diamètre par rapport à celle qui conduit. On ne doit donc pas considérer en général le frottement des dents comme de même nature que celui des surfaces planes ou des axes des machines, et employer pour f les valeurs fixées par les tableaux (1) et (2). On peut adopter la règle empirique suivante : n étant le rapport de la longueur de la courbe d'une dent à celle du flanc qu'elle mène, et F le coëfficient du frottement tel qu'il est donné par les tableaux (1) et (2), on peut faire

$$f=F\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

En désignant par P la force transmise par une roue à celle qu'elle conduit, par m et m' les nombres de dents des deux roues, le frottement est donné par l'expression

$$f\pi P\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right),$$

et le travail de ce frottement dans une seconde par

$$f\pi P\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)V,$$

en appelant V la vitesse commune des deux roues.

§ 201. *Frottement produit par le roulement de deux surfaces.* — Nous avons déjà défini le frottement de roulement, celui qui résulte du contact de deux surfaces qui roulent l'une sur l'autre. Mais ici comme les parties de ces surfaces s'appliquent entre elles une à une, et qu'elles se détachent les unes des autres perpendiculairement à la direction du mouvement qui est celle de la tangente commune, il n'y a point, à proprement parler, de frottement dans ce mouvement, ou, du moins, il est assez faible pour être négligeable. Quand un rouleau chemine en roulant sur un plan, les arcs des divers points de sa surface se développent sur e terrain, et le frottement n'existe pour ainsi dire pas, surtout si ce rouleau est bien cylindrique, et sa surface unie. En général ce frottement est d'autant moindre que le diamètre du cylindre mobile est plus petit. Une roue de $0^m,65$ de diamètre, qui roule sur un terrain, et qui est chargée d'un poids de 100 kilog. donne lieu à une résistance qui ne dépasse pas $\frac{1}{30}$ de la pression. Cette résistance augmente avec l'inégalité de la surface; mais en général, lorsque la surface sur laquelle un corps chemine en roulant reste plane et la même sur une certaine étendue, on peut regarder le frottement de roulement comme très petit. Son peu de résistance explique l'emploi des rouleaux dans le transport des blocs de pierre, ou des plus lourds fardeaux. Le frottement consomme beaucoup moins de travail que si le fardeau était traîné sur la surface même du terrain.

DE LA ROIDEUR ET DE LA FORCE DES CORDES.

§ 202. ***Mesure de la résistance d'une corde à la flexion.*** — Les cordes se composent de trois *torons* ou cordes moins grosses entrelacées et tordues; les torons sont formés eux-mêmes d'un certain nombre de ficelles ou *brins*, qu'on nomme *fils de caret.*

Lorsqu'une corde est enroulée sur un axe ou sur une poulie; que l'une des extrémités de cet corde est sollicitée par une puissance F qui met en équilibre ou fait mouvoir une résistance P appliquée à l'autre extrémité, on observe que la partie de la corde située du côté de la résistance, sollicitée par la roideur, s'écarte de la direction de cette résistance, de sorte que le bras de levier de cette force est augmenté. Au contraire, la partie de la corde située du côté de la puissance, conserve la direction de cette force, attendu que le ressort de la corde tend plutôt à favoriser le déroulement qu'à l'empêcher; et il en résulte que l'enroulement produit du côté de la résistance est le seul excès de résistance qu'a à vaincre la puissance F.

Les expériences de Coulomb ont appris d'abord que la résistance due à la roideur des cordes était inversement proportionnelle au rayon de la poulie ou de l'arbre sur lequel cette corde s'enroulait; et qu'elle était directement proportionnelle à une certaine puissance du diamètre de la corde et à l'intensité de la force située du côté de l'enroulement.

On a ensuite observé que dans la fabrication des cordes chaque fil de caret dont elles sont composées se trouvait soumis à une certaine tension qu'il conservait dans l'ourdissage; d'où il suit que la tension d'une corde, dans une machine, doit toujours être considérée comme composée d'une partie constante et indépendante de l'effort qu'elle fait et de cet effort lui-même. D'après cela la résistance provenant de la roideur, doit être représentée par la formule suivante :

$$R = \frac{d^e}{D}(a + bP),$$

dans laquelle d et D sont les diamètres respectifs de la corde et de la poulie, exprimés en mètres, P la résistance exprimée en kilogrammes, a un poids constant qui se rapporte à la roideur naturelle de la corde, et qui provient du degré plus ou moins grand de tension ou de torsion des fils simples dont elle se compose, b un nombre également constant et uniquement relatif à l'augmentation de roideur due à la tension étrangère P; enfin e un autre nombre qui varie essentiellement avec l'état de la corde. Ces quantités constantes sont données par l'expérience.

Pour les cordes blanches ordinaires, la valeur de e varie entre les limites $e = 2$, et $e = 1$, selon le degré plus ou moins grand d'user ou de flexibilité naturelle : on a $e = 2$ pour les grosses cordes neuves, $e = 1,5 = \frac{3}{2}$ pour les cordes plus qu'à demi usées, et enfin $e = 1$ pour les ficelles très petites et très flexibles; ce qui donne pour ces trois cas

$$R = \frac{d^2}{D}(a + bP);\ R = \frac{\sqrt{d^3}}{D}(a + bP);\ R = \frac{d}{D}(a + bP).$$

Pour les cordes goudronnées, il paraît qu'au lieu de supposer la roideur proportionnelle à la puissance d^e du diamètre de la corde, il est plus exact de la supposer proportionnelle au nombre de fils de caret dont la corde est composée, d'autant mieux que l'expérience a prouvé que l'exposant e ne variait pas sensiblement pour les cordes goudronnées par leur degré d'user. On a donc pour le cas des cordes goudronnées

$$R = \frac{n}{D}(a + bP).$$

La vitesse du mouvement augmente aussi la roideur, mais cette augmentation est trop peu sensible pour qu'il soit nécessaire d'y avoir égard dans la pratique.

§ 203. *Résultats des expériences et applications.*—Les résultats des expériences de Coulomb pour déterminer les valeurs des quantités $d^e a$ ou $n\,a$, $d^e b$ ou $n\,b$, dont la première exprime la roideur constante d'une corde d'espèce et de diamètre donnés, et la seconde sa roideur par kilogramme de la charge ou tension P, sont consignés dans le tableau suivant :

TABLEAU *des poids nécessaires pour plier différentes cordes autour d'un arbre d'un mètre de diamètre.*

INDICATION DES CORDES.	diamèt. des cordes ou d.	poids des cordes par mètre de longueur.	roideur constante ou $d^e\,a$.	roideur par kilog. de charge ou $d^e\,b$.
	mètre.	kilogr.	kilogramm.	
Corde blanche de 30 fils de caret...	0,0200	0,2834	0,2224600	0,0097382
Corde blanche de 15 fils de caret...	0,0144	0,1448	0,0635140	0,0055182
Corde blanche de 6 fils de caret...	0,0088	0,0522	0,0106038	0,0023804
Corde goudronnée de 30 fils de caret.	0,0236	0,3326	0,3496000	0,0125514
Corde goudronnée de 15 fils de caret.	0,0168	0,1632	0,1059280	0,0060592
Corde goudronnée de 6 fils de caret.	0,0096	0,0693	0,2120800	0,0025968

Nous ajouterons que les expériences ont appris que les cordes blanches imbibées d'eau avaient une roideur sensiblement plus grande que les sèches, surtout quand elles étaient un peu grosses. L'augmentation porte principalement sur la partie constante d^e de l'expression de la roideur, et l'on aura égard à cette circonstance pour les cordes de $0^m,02$ et au-dessus en doublant dans le tableau les nombres qui représentent cette partie constante. La roideur des cordages goudronnés augmente un peu quand la température descend au-dessous de la glace fondante, et l'augmentation porte encore sur la partie constante. On a observé aussi que quand une corde venait d'être fléchie sur une poulie, elle avait besoin d'un certain temps pour reprendre toute la roideur dont elle était susceptible, et qu'elle avait d'abord manifestée; et que si des cordes passent sur des poulies consécutives, leur résistance est au-dessous de celles que leur assignent les nombres du tableau ci-dessus. On diminue d'ailleurs beaucoup la roideur des cordages, en les imprégnant d'un corps gras, ou en les frottant avec du savon.

Pour faire usage du tableau précédent dans la pratique, il faut commencer par calculer la roideur de celle des cordes comprises dans le tableau ci-dessus qui se rapproche le plus par sa composition et sa grosseur de celle qu'on aura en vue, en donnant à D et à P les valeurs qui ont lieu dans les machines qu'on veut calculer. Puis, remarquant que si l'on désigne par x la roideur cherchée, par R celle qui vient d'être calculée, et par d' le diamètre de la corde donnée, on doit avoir

$$x : R :: d'^e : d^e,$$

on en tire

$$x = R.\frac{d'^e}{d^e} = R\left(\frac{d'}{d}\right)^e;$$

ce qui fait voir qu'il faut multiplier le résultat précédemment calculé par $\left(\frac{d'}{d}\right)^e$. S'il s'agit d'une corde goudronnée, il faut multiplier par le rapport du nombre des fils de caret de cette corde au nombre de fils de caret de la corde du tableau à laquelle on l'aura comparée.

Soit une corde neuve d'un diamètre $d' = 0^m,04$, s'enroulant sur une poulie d'un diamètre $D = 0^m,45$, et supportant une résistance $P = 5000^k$. On la comparera à la première corde du tableau, dont le diamètre $d = 0^m,02$, et qui s'enroulait sur un arbre de 1^m de diamètre; en sorte que sa roideur sera exprimée par

$$\frac{1}{0,45}(0,222 + 0,00974 . 5000)\left(\frac{0,04}{0,02}\right)^e,$$

où l'on fera $e = 2$, puisqu'il s'agit d'une corde neuve: on trouvera 435 kil. pour l'excédant de force à employer par l'effet de la roideur.

Pour second exemple, on calculera la roideur d'un câble de 120 fils de caret, s'enroulant sur un arbre d'un diamètre $D = 0^m,54$, et faisant un effort $P = 3916$ kil. En comparant ce câble à celui de 30 fils de caret du tableau, sa roideur se trouvera représentée par

$$\frac{1}{0,54}(0,35 + 0,01255 \times 3916)\frac{120}{30} = 367 \text{ kil.},$$

qui expriment la roideur cherchée.

§ 204. *De la roideur des chaînes.* — La résistance qu'une chaîne présente à l'enroulement et au déroulement est l'effet du frottement qu'éprouvent les chaînons en tournant sur leur axe. Soit Q la force qui tend la chaîne, f le rapport du frottement à la pression, le frottement sera fQ. Cela posé, nommons p la force qu'il faut ajouter à celle qui tire la chaîne pour surmonter le frottement. Il est facile de voir que tandis que la poulie décrit un petit angle autour de son axe, le chaînon qui s'enroule décrit sur le sien un angle parfaitement égal, d'où il suit que les petits espaces parcourus en même temps par les points d'application des forces p et fQ sont entre eux comme le rayon de la poulie, qu'on nommera R, est au rayon de l'axe du chaînon, qu'on nommera r. Donc, d'après le principe des travaux élémentaires, on exprimera que p fait équilibre à fQ en écrivant

$$p . R = fQ . r, \text{ d'où } p = \frac{r}{R} fQ;$$

et comme en négligeant, pour plus de simplicité, la différence des tensions de la chaîne qui ont lieu des deux côtés de la poulie, une résistance égale se produit au point où la chaîne se déroule, sa roideur se trouvera exprimée en totalité par

$$2\frac{r}{R}fQ.$$

§ 205. *De la force des cordages.* — La force des cordages varie beaucoup d'après la qualité du chanvre et les circonstances de la fabrication. En rapprochant les nombreuses expériences qui ont été faites à ce sujet, il paraît que la résistance des cordes blanches est à peu près proportionnelle au carré de leur diamètre, mais qu'elle augmente dans un rapport un peu plus grand que leur poids et le nombre de fils de caret dont elles sont composées. On peut admettre que la tension nécessaire pour rompre une corde blanche neuve de $0^m,08$ de circonférence varie entre 2000 et 3000 kil.; d'où il suit qu'en appelant d le diamètre d'une corde exprimé en centimètres, la force nécessaire pour la rompre exprimée en kilogrammes sera représentée à peu près par :

$$x = 2500.\frac{d^2.\pi^2}{8^2},$$

tirée de la proportion :

$$x : 2500 :: d^2 : \frac{8^2}{\pi^2}.$$

En réduisant, il vient $x = 400\,d^2$ environ, valeur qui peut varier de $\frac{1}{5}$ en plus ou en moins. Coulomb avertit qu'il ne faut jamais charger les cordes de plus de 40 kil. par fil de caret, quoiqu'elles puissent supporter sans se rompre de 50 à 60 kil. Les cordes mouillées perdent près du tiers de leur force.

Quant aux cordes goudronnées, leur résistance est aussi à peu près proportionnelle à leur diamètre; mais le goudron les affaiblit beaucoup, et cette résistance, à diamètre égal, n'est guères que les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ de celle des cordes blanches.

Pour connaître le poids d'un cordage d'après sa grosseur, la formule qui est en usage est la suivante :

$$0,00826\ c^2 \text{ kil.}$$

Cette expression donne le poids du mètre courant d'un cordage, c étant en centimètres l'expression de sa circonférence.

DE L'ÉQUILIBRE DANS LES MACHINES.

DÉFINITIONS.

§ 206. *Puissances, résistances, machines.* — Jusqu'ici nous n'avons considéré les forces que comme agissant sur des corps libres, et nous avons pu remarquer qu'en général il fallait toujours employer pour les mettre en équilibre une autre force qui fût égale et directement opposée à leur résultante. Dans les applications de la statique on désigne ordinairement par le nom de *puissances*, celle ou celles des forces dont on peut disposer pour tenir ainsi en équilibre les autres forces que l'on veut vaincre et que l'on nomme *résistances*.

Les conditions d'équilibre précédemment étudiées entre les puissances et les résistances se modifient lorsqu'on fait intervenir des obstacles fixes dont l'effet peut être assimilé à celui que produiraient des forces dont la grandeur pourrait être supposée indéfinie. Par exemple, si nous supposons que la ligne AB (*fig.* 84), soit une verge rigide dont le point C soit fixe, de telle sorte qu'on puisse la faire tourner librement autour de ce point; en appliquant deux forces parallèles F et F' à ses deux extrémités, il suffira, pour qu'elles se fassent mutuellement équilibre, que leur résultante passe par le point C, si ce point est susceptible d'une résistance indéfinie.

Les machines sont des appareils composés ainsi en partie d'obstacles, complétement ou incomplétement fixes, que l'on interpose entre les puissances dont on dispose et les résistances que l'on veut vaincre, soit pour changer seulement la direction de la puissance de manière à transmettre son action aux points où les résistances s'appliquent, soit pour combattre ces dernières avec moins de dépense de force qu'on ne pourrait le faire par une opposition directe, soit enfin pour obtenir ces deux avantages à la fois.

§ 207. *Machines simples.* — On conçoit que de tels appareils peuvent être variés d'une infinité de manières selon la nature des résistances, leur mode d'action, la forme des systèmes matériels auxquels elles s'appliquent, et aussi selon toutes les particularités analogues que peuvent offrir les puissances que l'on veut leur opposer. Toutefois, les plus compliqués de ces appareils peuvent toujours se ramener, plus ou moins immédiatement, à un petit nombre d'éléments constitutifs dont ils sont seulement des combinaisons et des assemblages, et que l'on appelle par cette raison, *machines simples.*

Dans les arts industriels, la plupart des machines doivent être considérées dans l'état de mouvement. Mais comme, dans cet état même, pour la plupart des cas, les conditions d'équilibre entre les puissances et les résistances existent toujours, ainsi que nous aurons l'occasion de le faire remarquer dans la suite, nous nous occuperons préalablement de l'action des forces sur les machines pour produire leur équilibre, et les machines simples seront les seules que nous considérerons ici.

DU LEVIER.

§ 208. *Conditions d'équilibre dans le levier.* — Le *levier* est une barre droite ou courbe, rigide et inflexible, sollicitée par un certain nombre de forces, et supportée par un de ses points supposé fixe appelé *point d'appui*, autour duquel elle peut tourner librement. Tantôt le levier tourne autour d'un tourillon, tantôt il repose sur un couteau comme nous l'avons vu, en traitant du frottement, la dernière disposition est la plus avantageuse. Nous examinerons seulement ici le cas où le levier n'est sollicité que par deux forces P et R (*fig.* 85), dont l'une est la puissance, et l'autre la résistance ou l'obstacle que l'on veut vaincre. Il s'agit d'établir les conditions d'équilibre entre ces deux forces. Soit C le point d'appui ; l'équilibre ne peut avoir lieu si la résultante des deux forces P et R ne passe pas par ce point, car pour l'équilibre il faut qu'elle soit détruite. Il faut donc que ces deux forces aient une résultante unique, ce qui exige que leurs directions soient placées dans un même plan ; et comme la résultante doit passer par le point fixe, ce point doit également se trouver dans ce plan. Alors les conditions d'équilibre sont faciles à établir, car, § 126, en prenant le point C pour centre des moments, les deux forces P et R devront tendre à faire tourner le levier autour du point d'appui dans des sens opposés, et leurs moments par rapport à ce point devront être égaux, ce qui conduit à la condition d'équilibre :

$$Pp = Rr,$$

en appelant p et r les perpendiculaires Cq, Cq', abaissées du point d'appui sur les deux forces P et R.

Cette relation d'équilibre peut également être obtenue d'une autre manière : soit O le point de concours des directions des deux forces. La direction de la résultante se trouve déterminée, puisqu'elle doit passer à la fois par le point O

et par le point C. C'est donc la ligne $O\,C$. Mais nous avons vu, § 45, qu'en prenant un point C sur la résultante, et menant des parallèles $C\,p$, $C\,p'$ aux composantes, les parties interceptées $O\,p$, $O\,p'$ étaient proportionnelles à ces composantes. On aura donc :

$$\frac{P}{R} = \frac{O\,p}{O\,p'}.$$

Mais les triangles semblables $C\,p\,q$, $C\,p'\,q'$ donnent la proportion :

$$\frac{C\,q'}{C\,q} = \frac{C\,p'}{C\,p} = \frac{O\,p}{O\,p'}.$$

Cette proportion comparée à la précédente donne

$$\frac{P}{R} = \frac{C\,q'}{C\,q}; \text{ ou } \frac{P}{R} = \frac{r}{p} \ldots\ldots (1),$$

relation identique à la précédente. Chacune des perpendiculaires p et r prend le nom de *bras de levier* de la force sur la direction de laquelle elle est abaissée.

On aurait encore pu trouver ces conditions d'équilibre à l'aide du principe des travaux élémentaires.

L'équation (1) exprimant le rapport que les forces P et R doivent avoir entre elles pour que leur résultante passe par le point fixe, est la condition d'équilibre dans le levier. En la traduisant en langage ordinaire, on peut dire que pour l'équilibre d'un levier sollicité par deux forces, il faut que *ces deux forces soient situées avec le point d'appui dans le même plan, et que leurs intensités soient inversement proportionnelles à leurs bras de levier, et qu'elles tendent à faire tourner ce levier dans des sens opposés.*

De l'équation (1) on tire $P = R.\frac{r}{p}$, ce qui donne la valeur de la puissance nécessaire pour vaincre une résistance donnée R, connaissant les bras de levier à employer. La valeur de R, $R = P.\frac{p}{r}$, tirée de la même équation, donnerait l'intensité de l'effort exercé en un point donné d'un levier, par un autre effort qui aurait été produit en un autre point.

§ 209. *Trois genres de leviers.* — Il existe trois genres de leviers qui se distinguent par la position du point d'appui, le levier du premier genre est celui dans lequel ce point est placé entre la puissance et la résistance; dans les leviers du second genre, la résistance est située entre le point d'appui et la puissance; et enfin dans les leviers du troisième genre, la puissance est entre le point d'appui et la résistance. Les conditions d'équilibre sont d'ailleurs les mêmes pour ces trois genres de leviers. On pourrait s'en assurer en appliquant à chacun d'eux les raisonnements du paragraphe précédent.

§ 210. *Avantage de la puissance. Comparaison des trois genres de leviers.* — On dit dans l'équilibre d'une machine que *la puissance a avantage sur la résistance*, lorsqu'on fait équilibre à une résistance avec une puissance plus petite qu'elle.

En reprenant l'équation (1) $\frac{P}{R} = \frac{r}{p}$, il est aisé de voir qu'au plus grand bras de levier correspondra la plus petite force et réciproquement: car, si r est plus petit que p, P sera plus petit que R. Pour que la puissance ait avantage dans les leviers du premier genre (*fig.* 86), il faut donc que son bras de levier soit plus grand que celui de la résistance, et l'avantage sera d'autant plus considérable que cette différence sera plus grande. Dans les leviers du second genre, (*fig.* 87), il arrivera presque toujours que la puissance aura avantage, car son bras de levier sera généralement plus grand que celui de la résistance. Enfin dans les leviers du troisième genre, (*fig.* 88), le contraire aura lieu.

§ 211. *Remarque importante sur les espaces décrits par les points d'applications de la puissance et de la résistance.* — Il est bon d'appeler dès à présent l'attention sur un fait dont les conséquences sont d'une grande importance, lorsqu'on considère les machines en mouvement. On peut remarquer que, des deux forces qui agissent l'une contre l'autre dans chacun des trois genres de leviers, celle qui a le plus long bras de levier, et dont l'effort se trouve ainsi favorisé par la machine, serait aussi celle qui parcourrait le plus de chemin, ou dont le point d'application serait le plus déplacé, si l'autre cédait ou s'il y avait mouvement. Lors donc que l'on veut économiser l'intensité de la puissance, comme cela est nécessaire dans presque toutes les applications mécaniques, il faut lui donner les plus grands espaces à décrire, ce qui fait faire à la résistance de plus petits déplacements; et au contraire, si l'on avait une grande intensité de puissance à sa disposition, et que l'on voulût la faire servir à produire de grands déplacements sur des résistances plus faibles, il faudrait appliquer la puissance le plus près possible du centre de rotation. On remarque une disposition pareille dans le mode d'application des muscles qui font mouvoir, les unes autour des autres, plusieurs parties des membres des êtres vivants, par exemple la main et l'avant-bras de l'homme.

§ 212. *De l'équilibre dans le levier, en tenant compte des frottements. Travail du levier en supposant le mouvement.* — Si l'axe du levier est un tourillon tournant dans son palier, les conditions d'équilibre ne sont plus aussi simples, car, dans ce cas, la puissance doit détruire la résistance et le frottement des tourillons. Ce dernier a été calculé, § 197, et sa valeur est égale à la pression exercée sur le palier multiplié par le rapport du frottement à la pression relatif aux surfaces en contact.

Soit N la résultante des forces qui agissent sur le levier, qu'elles soient parallèles ou concourantes; soit f le coëfficient du frottement; fN sera la valeur du frottement en kilogrammes. Le moment de la puissance P ou Pp sera donc égal, pour l'équilibre, à celui de la résistance Q ou Qq, augmenté de celui du frottement ou de fNr, en désignant par

r le rayon du tourillon. On aura donc pour les conditions d'équilibre

$$Pp = Qq + rfN.$$

Pour considérer le levier en état de mouvement, nous désignerons par V_1 la vitesse angulaire, § 22; puis multipliant les termes de l'équation précédente par V_1, nous aurons

$$PpV_1 = QqV_1 + rfNV_1.$$

Or, pV_1 est, § 23, l'espace parcouru en une seconde par le point d'application q de la puissance, (*fig.* 85), qV_1 est l'espace parcouru par le point d'application q' de la résistance; rV_1 est également le chemin parcouru par le point d'application du frottement, et comme ces divers chemins sont parcourus sur les directions respectives des forces, il s'ensuit que PpV_1 représente le travail de la puissance, $Qq V_1$ celui de la résistance, et enfin $rfNV_1$ celui du frottement. Donc enfin, *dans le levier, le travail de la puissance égale celui de la résistance augmenté de celui du frottement.*

Comme le levier n'est pas destiné à un mouvement de rotation continu, et qu'il a ordinairement pour but de soulever de lourds fardeaux à de petites hauteurs, il n'est pas nécessaire de le faire tourner autour d'un tourillon; cette disposition serait même désavantageuse, en ce sens que la charge étant trés forte, le tourillon devrait être gros, et que le travail de son frottement serait très considérable. Il convient alors que le levier pose sur un simple couteau, ou sur l'arête tranchante d'un corps très dur. Dans ce cas, le travail du frottement devient négligeable, et l'on a simplement

$$PpV_1 = QqV_1.$$

Ainsi le travail de la puissance est égal à celui de la résistance.

Cette machine transmet donc intégralement tout le travail qu'on lui confie.

Pour se rendre compte du temps nécessaire à ces leviers pour soulever un grand fardeau à une hauteur même médiocre, supposons que ce fardeau soit de 100000 kil. et qu'il faille l'élever à $1^m,20$. Si nous appliquons à ce levier l'effort d'un homme supposé égal à son poids 75^k, le chemin que devra parcourir cet homme sera égal au travail dépensé par la puissance, divisé par l'effort, ou

$$\frac{100000.\ 1,20}{75} = 1600 \text{ mètres.}$$

Si la vitesse de son point d'application est seulement de $0^m,05$ par seconde, le temps du travail sera égal à 1600 divisé par 0,05 ou 9 heures environ. Cet exemple montre que les leviers sont seulement utiles pour les efforts momentanés, ou, quand des fardeaux sont très considérables, pour les élever à de très petites hauteurs.

§ 213. *De la balance.* — Il existe un grand nombre de leviers du premier genre, et ils sont en général très répandus dans les machines industrielles. Le plus simple de tous est la *balance*. Elle sert à constater l'égalité de deux poids. C'est un levier droit à bras égaux, qui porte le nom de *fléau*, et qui est composé de deux parties parfaitement symétriques par rapport au point d'appui. L'équation $\frac{P}{R}=\frac{r}{p}$ nous fait voir en effet que si les forces P et R deviennent égales, les bras de levier doivent être égaux. Aux deux extrémités de ce fléau sont appliquées des tiges supportant des plateaux d'égal poids, de telle sorte que le fléau doit être horizontal, lorsque l'appareil est en repos. Alors, si l'on veut connaître le poids d'un corps, on le place dans un des plateaux, puis on met dans l'autre les étalons de poids, c'est-à-dire les kilogrammes et parties de kilogrammes nécessaires pour ramener le fléau à l'horizontalité. A cet effet, une aiguille verticale ab, (*fig.* 89), fixée au fléau, parcourt une graduation dont le zéro correspond à l'état d'équilibre de la machine. D'après ce que nous avons dit, les distances des forces au point fixe devant être égales, le point d'appui et les points de suspension des plateaux devront être invariables. On y parvient en donnant au fléau, à l'endroit où il repose sur l'appui, la forme d'un prisme dont l'arête horizontale C s'applique sur un plan d'agate parfaitement poli M. On donne aussi aux points de suspension des plateaux n et n' une forme angulaire N. Les corps servant d'appui devront être formés de substances très dures, difficiles à entamer, telles que l'agate et l'acier fortement trempé. Enfin la forme du fléau n'est pas indifférente, puisqu'elle détermine la position du centre de gravité de la balance par rapport au point d'appui, et que, suivant que ce centre est placé au-dessous ou au-dessus du point d'appui, l'équilibre est stable ou instantané, § 154. La balance est dite *sourde*, lorsque le centre de gravité est au-dessous du point d'appui, parce que l'équilibre est stable; s'il est au-dessus, la balance est *folle*, parce que l'équilibre est instantané; enfin, la balance est *paresseuse*, lorsque son centre de gravité et le point d'appui se confondent. Les bonnes balances sont celles dont le centre de gravité est placé au-dessous du point d'appui sans en être ni trop près ni trop loin.

§ 214. *Conditions auxquelles une bonne balance doit satisfaire.* — Toutes ces précautions prises, voici à quelles conditions une bonne balance doit satisfaire : 1° Elle doit se faire équilibre d'elle-même; 2° l'équilibre doit se conserver, lorsqu'on mettra dans les deux plateaux deux poids reconnus égaux, deux grammes, par exemple. Si, en effet, l'équilibre était rompu, cela prouverait que l'égalité $\frac{P}{R}=\frac{r}{p}$ n'est pas satisfaite; et, comme les forces sont égales, il faudrait en conclure que ce sont les bras de levier qui ne sont pas égaux. De même, si l'on place dans les deux plateaux deux corps qui se fassent équilibre, lorsqu'on les changera de plateaux, l'équilibre ne devra pas être rompu. L'équilibre pourrait en effet exister d'abord, et les poids ne pas être égaux; car il suffirait qu'ils fussent en raison inverse des bras du fléau. Mais alors, en les changeant de plateaux, ils ont changé de bras de levier, l'équation n'est plus satisfaite, et l'équilibre doit être rompu. 3° Elle doit être sensible, c'est-à-dire trébucher au moindre poids, à un demi-milligramme par exemple.

§ 215. *Méthodes des doubles pesées.* — Une balance peut ne remplir que la dernière condition, et cependant servir à faire une pesée exacte. Pour cela, on place le corps que l'on veut peser dans l'un des plateaux de la balance, et dans l'autre on lui fait équilibre avec des corps quelconques; puis, retirant le corps, on le remplace par des poids numérotés, avec lesquels on rétablit l'équilibre. Ce dernier poids donne le poids du corps. Cette méthode est connue sous le nom de *pesée par tare*, et l'on appelle *tare* les poids quelconques qui ont servi à établir primitivement l'équilibre.

§ 216 *Balance romaine.* — La *balance romaine* ou la *romaine* est un levier du premier genre AB, (*fig.* 90), dont les bras sont inégaux. Ce levier est massif d'un côté et effilé de l'autre; à l'extrémité massive A est suspendu un plateau de balance. Le long de la partie effilée glisse, au moyen d'un anneau, un poids invariable p, lequel peut ainsi se rapprocher ou s'éloigner du point fixe C qui sépare la partie massive de la partie effilée, ou le petit bras de levier du grand. Lorsqu'on placera un corps dans le plateau, on pourra lui faire équilibre au moyen du poids invariable, en augmentant ou diminuant convenablement sa distance au point fixe, et sa position pourra déterminer le poids du corps par une simple lecture sur l'appareil.

Il s'agit donc de graduer cet instrument, et de le rendre ainsi propre aux pesées. Soit G le centre de gravité du fléau dégagé du poids p et de la chappe S; soit C le point de suspension de l'appareil, et O celui où il faut placer le poids p pour faire équilibre au fléau. Désignant par Q le poids du fléau, et prenant pour plan des moments un plan passant par le point fixe C et normal au levier, la somme des moments des forces Q et p doit être nulle pour l'équilibre, et ces moments doivent avoir des signes différents. On aura donc $p. OC = Q. GC$. Si maintenant on place un poids P dans le plateau, il faudra reculer p en X pour maintenir l'équilibre. Nous aurons alors $p. CX = P. AC + Q. GC$ ou $p. CO + p. OX = P. AC + Q. GC$. Mais $p. OC = Q. GC$ donc $p. OX = P. AC$.

$$\text{D'ou } OX = \frac{P.AC}{p} = \frac{AC}{p}.P.$$

Or AC et p sont invariables; OX est donc proportionnel à P. On déduit de là la manière de graduer l'appareil. Le point O déterminé en équilibrant la balance au moyen de p sans rien mettre dans le plateau, donnera le point zéro. En mettant un kilogramme dans le plateau, et l'équilibrant de la même manière, la position de p donnera le point 1 de l'instrument; et comme les distances des positions de p au point O sont proportionnelles à P, il suffira de porter la distance 0 1 de 1 à 2, de 2 à 3...... ce qui donnera les positions de p pour que le poids P pèse 2, 3.... kilogrammes.

§ 217. *Balance suédoise.* — La *balance suédoise*, (*fig.* 91), est aussi un levier du premier genre, mais dont le point de suspension est mobile, au lieu d'être fixe comme dans la romaine. A l'une des extrémités est une masse très pesante m, à l'autre est suspendu un plateau de balance destiné à recevoir le corps à peser; la position de la chape C sur le levier devra indiquer le poids du corps par une simple lecture. Pour remplir ce but, il faut chercher la manière de graduer l'appareil.

Soit G le centre de gravité du levier, Q son poids, et G' le point où il faut placer la chape pour équilibrer un poids P que l'on a mis dans le plateau. Soit $AG = l$; $GG' = x$; d'où $AG' = l - x$. L'équilibre ayant lieu, on aura

$$P.\ AG' = Q.\ GG'; \text{ ou } P\ (l - x) = Qx;$$

$$\text{d'où } x = \frac{Pl}{P+Q} = \frac{P}{P+Q}.\ l.$$

Supposons que le poids Q du levier soit égal à un kilog., et faisons $P = 1, 2, 3, 4$........ kilogrammes. Nous aurons

$$x = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots \text{de } l.$$

Ainsi, pour placer le point zéro, nous mettrons la balance seule en équilibre, et le centre de gravité G correspondra au zéro. Le poids du levier étant d'un kilogramme, on prendra successivement la moitié, les $\frac{2}{3}$, les $\frac{3}{4}$, les $\frac{4}{5}$.... de AO, ce qui donnera les positions 1, 2, 3, 4......, points auxquels la chape devra être placée pour l'équilibre, lorsque le poids P aura pour valeur 1, 2, 3, 4....... kilogrammes. Si le poids du levier était quelconque, on voit que les fractions $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$..... auraient pour numérateur la suite naturelle des nombres, et pour dénominateur la même suite augmentée du poids de la balance.

218. *Peson.* — Le *peson* est composé d'un montant vertical BC (*fig.* 92), auquel sont assemblés une potence horizontale AB et un arc de cercle vertical AC. Dans le plan de l'arc est située une tringle MN, qui tourne autour de son centre de gravité B, afin que cette tringle soit toujours en équilibre dans une position quelconque. Elle porte une aiguille pesante BO qui, dans l'état d'équilibre, se place dans la direction du montant BC. Mais lorsqu'on suspend un corps à l'extrémité N de la tringle, l'aiguille s'écarte de la verticale d'une quantité qui dépend évidemment de la grandeur du poids du corps. Pour rendre cet appareil propre aux pesées, il faut donc graduer l'arc de cercle de telle sorte qu'une simple lecture y fasse connaître le poids en kilogrammes du corps placé en N. Soit P le poids de ce corps faisant équilibre au poids Q de l'aiguille, poids qui sollicite son centre de gravité G. La résultante de ces deux forces passe en B, et leurs moments sont égaux par rapport à un plan perpendiculaire au plan ABC et passant par

le montant $B\,C$. Nous aurions donc : $P.\,BI = Q.\,BK$. Soit $BN = b$; $BG = l$; et soit α l'angle OBC formé par l'aiguille et la verticale dans la position où nous l'avons placée. Les triangles rectangles BIN et BKG donnent $BI = BN.\cos\alpha$, et $BK = BG.\sin\alpha$; ou $BI = b\cos\alpha$, et $BK = l\sin\alpha$. Substituant ces valeurs de BI et de BK dans la première équation $P.\,BI = Q.\,BK$, il vient :

$$P.\,b.\cos\alpha = Q.\,l.\sin\alpha.$$

$$\text{D'où } \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} = \text{tang.}\,\alpha = \frac{P.\,b}{Q.\,l} = \frac{b}{Q.\,l}.\,P.$$

Les quantités b, Q, l étant constantes, on voit, à cause de $\text{tang.}\,\alpha = \frac{b}{Q.\,l}.\,P$, que la tangente de l'angle que fait l'aiguille avec la verticale est proportionnelle au poids P que l'on suspend à l'extrémité N; car, lorsque ce poids devient double, triple, etc., la tangente devient aussi double, triple, etc. On déduit de là le procédé pour graduer l'instrument. Le point C sera le zéro (*fig.* 93). En ce point on mènera une tangente $C\,T$, et suspendant un kilogramme en N, on remarquera le point a où l'aiguille se placera. Portant sur $C\,T$ des distances aa', $a'a''$..... égales à Ca, et joignant le point B à ces points de division, les points 1, 2, 3, 4..... seront ceux où se placera successivement l'aiguille lorsqu'on suspendra 1, 2, 3, 4.... kilogrammes à l'extrémité N.

Dans l'équation précédente $\text{tang.}\,\alpha = \frac{b}{Ql}.\,P$, on voit que P peut être aussi grand qu'on le voudra, puisqu'une tangente peut passer par tous les états de grandeur. Cet appareil n'est donc pas limité, et quel que soit le poids P, celui Q de l'aiguille lui fera toujours équilibre. Il faut remarquer toutefois que si la tangente croît de quantités égales, il n'en est pas de même de l'arc; aussi, plus P sera grand, et plus les divisions de l'arc seront petites, et par suite difficiles à tracer avec exactitude. Pour peser de lourds fardeaux, on augmente quelquefois le poids de l'aiguille, afin qu'elle reste dans la partie moyenne du quart de cercle. Cet appareil est employé dans les filatures pour peser les écheveaux de coton.

§ 219. *Ponts à bascules.* — En employant plusieurs leviers mobiles et appuyés les uns sur les autres, on parvient à faire équilibre à de grandes résistances au moyen de puissances très petites. C'est ainsi que sont construits les appareils propres à la pesée des voitures, appelés *ponts à bascules.* Un tablier TT' (*fig.* 94), porte par ses quatre pieds sur quatre leviers horizontaux et égaux ao, bo, co, do, mobiles autour des points fixes a, b, c, d. Ces mêmes leviers s'appuient par leurs extrémités o sur un levier eo, placé lui-même en C sur un levier AB mobile autour du point A, et le levier AB est fixé a un dernier levier GD mobile autour du point H.

Connaissant les rapports des distances aa' et ao, bb' et bo,..... qui peuvent être égaux, ainsi que les rapports de AC à AB et de GH à DH, il est possible de trouver le rapport du poids placé dans le plateau M et de celui de la voiture pour l'équilibre. Soit P le poids de la voiture, et p, p', p'', p''', les efforts résultant de ce poids sur les points a', b', c', d', et dont la somme $p+p'+p''+p'''=P$. Ces efforts produiront en o des pressions dont les valeurs sont, § 208,

$$\frac{aa'}{ao}.p,\ \frac{bb'}{bo}.p',\ \frac{cc'}{co}.\ p'',\ \frac{dd'}{do}.\ p''',$$

et comme les rapports $\frac{aa'}{ao}$, $\frac{bb'}{bo}$...... sont égaux,

ces valeurs deviennent :

$$\frac{aa'}{ao}.\ p,\ \frac{aa'}{ao}.\ p',\ \frac{aa'}{ao}.\ p'',\ \frac{aa'}{ao}.\ p'''.$$

Ces mêmes efforts se transmettront en C sans altération, et produiront en B d'autres pressions dépendantes du rapport de AC à AB, et s'exprimant par

$$\frac{AC}{AB}\cdot\frac{aa'}{ao}\cdot p,\ \frac{AC}{AB}\cdot\frac{aa'}{ao}\cdot p',\ \frac{AC}{AB}\cdot\frac{aa'}{ao}\cdot p'',\ \frac{AC}{AB}\cdot\frac{aa'}{ao}\cdot p'''.$$

Ces quatre pressions agissant au point B seront enfin mises en équilibre par un poids Q placé en D et tel qu'on aura :

$$Q.DH = HG.\frac{AC}{AB}\cdot\frac{aa'}{ao}\,(p+p'+p''+p'''),$$

ou enfin

$$Q = \frac{HG}{DH}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{aa'}{ao}\cdot P.$$

Soient $DH = 10\,HG$; $AB = 2\,AC$; $ao = 10\,aa'$; on aura

$$Q = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot P = \frac{1}{200}\,P.$$

Ainsi le tablier étant chargé en un point quelconque, on fera équilibre à sa charge avec un poids 200 fois plus petit. Pour connaître une charge quelconque, il suffira donc de multiplier par 200 le poids qu'il est nécessaire de mettre dans le plateau M pour faire équilibre à cette charge.

On trouvera dans la *fig.* 95 les détails de construction d'une de ces machines qui a été construite à l'Ecole d'Angers.

Le poids du tablier se porte sur les quatre points a, a'. La pression exercée en a se transmet au 10^e^ sur le point b, parce que 10 est le rapport des deux leviers bf, af. Cette pression se transmet sans altération en o par l'intermédiaire du communicateur à bras égaux gh, et de o en d par le levier cd. Il y a donc en o une pression dix fois plus petite que celle qui agit en a; et comme son bras de levier of'' est dix fois plus petit que le bras $f''p$, on fait équilibre en p à la pression exercée en a avec une force cent fois plus petite La même transmission aura lieu pour l'effort exercé en a'. On fait donc équilibre en p au poids placé sur le tablier, au moyen d'un poids cent fois plus petit.

Le système r est une crémaillère destinée à interrompre momentanément la communication entre les leviers et le tablier. Ce dernier peut alors reposer sur des appuis, jusqu'à ce que la charge soit solidement établie sur lui.

On se sert dans le commerce, pour peser les petits fardeaux, comme les malles, les caisses, les ballots des diligences, d'une balance fondée sur les mêmes principes. Elle se compose d'un tablier AB (*fig.* 96), sur lequel est placé le corps à peser. Son extrémité B s'appuie en C sur un levier DE mobile autour du point D, et son extrémité A est liée au point G d'un levier IF mobile autour d'un point H. L'extrémité E du levier DE est fixée en F au levier IF, et au point I se trouve un plateau de balance. Cela posé, plaçons un poids P en un point quelconque du tablier. Cet effort se décomposera en deux autres agissant aux points A et B, et en désignant par m et n les distances du centre de gravité du poids P aux points A et B, la charge du point C sera $P\frac{m}{m+n}$, et la charge du point A, $P\frac{n}{m+n}$. Mais la charge du point C produit en E un effort dont la valeur est $P\frac{m}{m+n}.\frac{CD}{ED}$. Cette charge se transmet en F sur le levier IF, ainsi que la charge du point A en G sur le même levier, et l'on met ces deux efforts en équilibre au moyen d'un poids P' placé dans le plateau de balance en I. L'équation d'équilibre sera donc

$$P' \times IH = P\frac{n}{m+n}.HG + P.\frac{mmn}{+}.\frac{CD}{ED}.HF.$$

On simplifiera beaucoup cette équation d'équilibre en posant

$$HG = \frac{CD}{ED}.HF, \text{ ou } HG : HF :: CD : ED,$$

car il vient :

$$P'.IH = P\frac{n}{m+n}.HG + P\frac{m}{m+n}.HG = P.HG\frac{m+n}{m+n} = P.HG;$$

d'où l'on tire enfin

$$P' : P :: HG : IH ; \text{ d'où } P = P' . \frac{IH}{HG},$$

qui fera connaître le poids P placé sur le tablier lorsqu'on connaîtra le poids P' et que la machine sera construite de telle sorte que HG soit à HF comme CD est à ED.

Ce dernier résultat étant indépendant de m et de n, on voit qu'il subsistera quelle que soit la position du poids P' sur le tablier.

§ 220. *Autres applications du levier.* — On emploie souvent dans les arts mécaniques des leviers coudés dont les bras font un angle, tel que ABC (*fig.* 97), lorsqu'il s'agit, par exemple, de transmettre l'action d'une force ayant la direction CP dans une autre direction AQ, comme dans les cordons de sonnette. On emploie le même appareil dans les machines à vapeur pour transmettre le mouvement de l'excentrique aux distributeurs de la vapeur.

Lorsque CP est une corde que l'on veut maintenir verticale, on donne au bras BC, vers son extrémité C, la forme d'un arc auquel la corde CP reste toujours tangente.

On emploie avec succès le levier coudé dans l'opération du sciage de long par la mécanique.

Le gouvernail des navires est encore une application du levier du premier genre, dans lequel la puissance est plus petite que la résistance. Les ciseaux, les pinces, sont des leviers doubles du premier genre.

Le maçon qui veut soulever et renverser la masse M (*fig.* 98), engage sous cette masse l'extrémité A d'une pince de fer qu'il fait poser en C sur un talon un peu élevé au-dessus du sol ; et il presse en B de tout son poids jusqu'à ce que la masse M soit soulevée. La puissance exercée en A est d'autant plus favorisée par la machine que le rapport de CB à CA est plus considérable. La même manœuvre est employée pour décaler les mâts de leurs encastrements.

D'autres fois c'est le sol même qui sert de point d'appui.

Alors la masse à soulever pèse en *A* (*fig.* 99), et la force musculaire de l'homme appliquée en *B* pousse en sens contraire. Cette dernière disposition appartient aux leviers du deuxième genre. On ne fait usage de ces derniers que lorsque la puissance est plus petite que la résistance, et qu'on n'a que de petites distances à faire parcourir à celle-ci. La *brouette*, la *rame*..... sont des leviers du second genre.

Dans les leviers du troisième genre, la puissance étant placée entre le point d'appui et la résistance, a toujours désavantage. On ne se servira donc de ces leviers que lorsqu'on pourra disposer d'une puissance supérieure à la résistance. La *pincette* est un levier double du troisième genre. Nous employons, pour écrire, un levier du troisième genre, dans lequel les caractères à tracer représentent les résistances, la puissance est placée entre les trois doigts qui font manœuvrer la plume. Enfin le point fixe est placé sur la première phalange de l'index. Nos mouvements les plus simples sont dûs à l'action d'une multitude de leviers dont nos organes sont composés. La combinaison de ces leviers avec notre système musculaire est ce qui nous rend supérieurs à tous les animaux dans les opérations délicates qui exigent de l'adresse et de la facilité dans les mouvements. La structure plus simple des animaux présente moins de cordes et de leviers.

Le levier est une machine simple qui se reproduit sous toutes les formes dans tous les procédés des arts mécaniques. Les clefs dont on se sert pour serrer ou desserrer les vis ou les écrous, le tourne-à-gauche qui sert à tarauder un cylindre creux ou à fileter une vis, le tourne-vis, les marteaux, etc., sont des leviers ou simples ou doubles. Partout enfin où l'on fait agir une force autour d'un centre ou d'un axe fixe, on fait usage d'un levier.

DES CORDES.

§ 221. *Comment on considère les cordes en statique.* — Les *cordes*, telles qu'on les emploie dans les arts mécaniques, sont formées par l'assemblage des fibres végétales réunies ensemble par la torsion. Or, la fibre la plus fine du lin ou du chanvre n'est jamais complètement flexible; et elle acquiert encore plus de roideur, lorsque plusieurs de ces brins sont tordus ensemble pour former des fils; puis, ces fils réunis en grand nombre, et tordus ensemble pour former des cordes. La résistance à la flexion devient alors considérable, et d'autant plus grande que la corde est plus grosse; en sorte que, dans les cordes d'un grand diamètre qu'on nomme *câbles*, cette résistance, absorbant une portion de la force dont on dispose, doit entrer comme élément dans les calculs. Comme cette considération les complique beaucoup, nous nous contenterons pour l'instant, dans ce que nous aurons à dire sur les cordes, de les supposer sans pesanteur, à moins que nous n'en avertissions; parfaitement flexibles dans le sens transversal, et inextensibles dans le sens longitudinal. Cette dernière hypothèse peut toujours se réaliser dans la pratique; car une corde, après qu'elle s'est allongée sous l'effort qu'elle supporte, ne dépasse plus un certain point, et peut dès-lors être considérée comme inextensible. Les résultats auxquels nous arriverons avec ces hypothèses devront être regardés comme les limites de ceux que l'on obtient dans la pratique.

§ 222. *Tension d'une corde dans diverses circonstances.* — On appelle *tension* d'une corde ou d'un cordon, la force appliquée à l'une des extrémités de ce cordon, lorsque l'autre est fixe. On déduit de là que, lorsqu'un cordon est mis en équilibre par deux forces égales et directement opposées sollicitant ses extrémités, la tension de ce cordon est égale à l'une des deux forces ; car, l'équilibre ayant lieu, on pourrait supposer fixe l'une des extrémités du cordon, et alors la tension serait égale à la force appliquée à l'autre extrémité.

Si les deux forces étaient inégales, la tension serait égale à la plus petite ; car l'excès de la plus grande sur la plus petite, ou la résultante, ne sert qu'à produire le mouvement, et n'influe en aucune manière sur la tension du cordon : elle sera donc la même que si le cordon était sollicité par deux forces égales à la plus petite.

Ce qui précède nous apprend aussi que, lorsqu'un cordon BC (*fig.* 100), sera mis en équilibre d'une manière quelconque, sa tension pourra être mesurée de deux manières : soit par l'une des forces qui le sollicitent, agissant en B dans la direction BC, soit par l'autre, agissant à l'extrémité C dans le sens contraire CB.

§ 223. *Conditions d'équilibre de plusieurs forces appliquées à des cordes et sollicitant un mobile ; cas particulier.* — Les conditions d'équilibre entre trois ou un plus grand nombre de forces agissant à l'extrémité de cordons, et sollicitant un point matériel, étant les mêmes que celles que nous avons données, lorsqu'il a été question des vitesses ou des forces, nous n'y reviendrons pas. Nous nous proposerons seulement le problème suivant, comme exercice de ce cas d'équilibre :

Trouver les conditions d'équilibre d'un corps pesant P, (fig. 101), assujetti à glisser le long d'une corde ACB fixée à ses deux extrémités A et B.

Si l'on fait mouvoir le point C de manière que la corde reste toujours tendue, il décrira une ellipse dont les foyers seront aux points A et B. Mais l'équilibre du corps P ne peut être stable, qu'autant que son centre de gravité sera le plus près possible du plan horizontal : et cette circonstance n'aura lieu que pour le point C de l'ellipse pour lequel la tangente est horizontale. Alors, la verticale CR passant par le centre de gravité du poids P, et qui peut être considérée comme la résultante des deux tensions CA et CB, sera normale à la courbe, et divisera l'angle des deux rayons vecteurs CA et CB en deux parties égales. Maintenant, puisqu'il y a équilibre, en prenant un point R sur la résultante, et menant des parallèles aux composantes, les parties interceptées représenteront, § 45, des lignes proportionnelles aux tensions des cordons CA et CB. Et comme les angles ACR et RCB sont égaux, il s'ensuit que ces deux tensions sont égales. Ainsi, lorsque l'équilibre aura lieu, la verticale passant par le point de suspension divisera l'angle des deux cordons en deux parties égales, et les tensions des cordons seront égales.

Si l'on demandait la position du point C, ou sa distance à l'un des points A ou B, il serait aisé de la déterminer géométriquement, en remarquant que, si l'on mène la verticale BB', et si l'on prolonge AC, la ligne CB' sera égale à la ligne CB, et par conséquent la ligne AB sera égale à la longueur de la corde. Alors, la position des points A et B étant donnée en a et b (*fig.* 102), ainsi que la longueur de la corde ACB, du point a comme centre, avec un rayon ab' égal à la corde c, nous décrirons un arc de cercle qui coupera la verticale bb' en b'. Prenant la moitié de bb' en t', et menant ct' horizontalement, cette ligne rencontrera ab' en c qui sera le point demandé.

§ 224. *Equilibre dans le polygone funiculaire.* — Proposons-nous de trouver les conditions d'équilibre d'une corde sollicitée en quelques-uns de ses points appelés *nœuds*, par plusieurs forces, et pour plus de simplicité, supposons qu'en chaque nœud on ait trouvé la résultante partielle de toutes les forces qui y sont appliquées, de telle sorte que la corde puisse être supposée sollicitée aux nœuds N, N', N'', (*fig.* 103), par les forces uniques P, P', P''. Supposons enfin qu'aux extrémités de la corde soient appliquées deux forces F et F'' dans le prolongement des derniers éléments de cette corde. Examinons d'abord comment se transmettent les actions des forces sur toutes les parties de la corde. Le nœud N', par exemple, est sollicité par la force P', et il l'est encore par les tractions qu'exercent les autres forces qui sollicitent la corde, à l'aide des cordons adjacents NN', $N'N''$. Et, comme ces cordons sont la seule communication matérielle qui établisse la liaison du nœud N' avec les autres parties du système, l'équilibre de ce nœud ne peut résulter que de l'action réciproque de la force P' et des tensions T et T' des cordons NN', $N'N''$. L'équilibre ayant donc lieu dans tout le système, il faudra qu'il existe pour chaque nœud en particulier, ce qui donnera les conditions suivantes d'équilibre pour chaque nœud : *Chaque force P, P', P'', devra être située dans un même plan avec les cordons adjacents, et l'une quelconque des trois forces qui sollicitent chaque nœud devra être égale et directement opposée à la résultante des deux autres.*

A l'égard des cordons, si l'on considère un de leurs points M auquel nous ne supposerons aucune force spécialement appliquée, l'équilibre de ce point ne pourra résulter que de l'équilibre des forces qui lui sont transmises du reste du système par l'intermédiaire des parties NM, MN' du cordon par lesquelles il communique avec les autres.

Il faudra donc que ces tensions soient contraires et égales entre elles, pour que le point où elles se joignent reste en équilibre. Ainsi, dans l'état d'équilibre, la tension du cordon NN' agissant de N en N' et sollicitant le nœud N, sera égale à celle du même cordon agissant de N' en N, et sollicitant le nœud N'.

Ces conditions d'équilibre peuvent se traduire par les proportions suivantes, § 46 :

$$
\begin{aligned}
F &: P :: \sin.\, PNN' : \sin.\, FNN'; \\
P &: T :: \sin.\, FNN' : \sin.\, FNP; \\
T &: P' :: \sin.\, P'N'N'' : \sin.\, NN'N''; \\
P' &: T' :: \sin.\, NN'N'' : \sin.\, NN'P'; \\
T' &: P'' :: \sin.\, F''N''P'' : \sin.\, N'N''F''; \\
P'' &: F'' :: \sin.\, N'N''F'' : \sin.\, N'N''P''.
\end{aligned}
$$

§ 225. *Conditions d'équilibre modifiées.* — Ces conditions suffisent pour construire le polygone funiculaire, lorsqu'on donne les directions ainsi que les intensités des forces, et la grandeur des cordons par lesquels les nœuds sont liés les uns aux autres. Car, ayant pris un point N, et ayant appliqué en ce point les forces données F et P, dans leurs directions données, la direction de la résultante sera celle du cordon NN', et comme sa grandeur est donnée, la position du nœud N est déterminée ; et ainsi des autres.

Ces conditions suffisent encore pour déterminer le rapport de deux quelconques des forces ou tensions entre elles. Pour s'en assurer, il suffit de multiplier deux ou plusieurs des proportions du paragraphe précédent terme à terme.

On voit que la longueur des cordons n'entre pas dans les conditions d'équilibre du polygone funiculaire. Elles sont donc indépendantes de cette longueur, et doivent rester les mêmes quand elle est réduite à zéro, ce qui fait appliquer toutes les forces et les tensions au même point. Et comme les tensions sont égales deux à deux, et de sens contraires, les conditions d'équilibre se réduisent donc à exiger que *toutes les forces qui sollicitent le polygone funiculaire, soient telles qu'elles se fassent mutuellement équilibre, lorsqu'on les applique en un même point de l'espace.*

On peut arriver à la même conclusion par un moyen plus direct. En effet, l'équilibre du nœud N' ayant lieu par les réactions mutuelles des tensions T et T' et de la force P', la tension T peut être remplacée par les deux forces F et P dont elle représente la résultante ; de telle sorte que la tension T' qui met en équilibre la force P' et la tension T, met en équilibre les trois forces F, P et P'. Faisant au nœud N'' une substitution analogue de ces trois forces à la tension T' qui les met en équilibre, on aura réuni en ce nœud toutes les forces qui sollicitent la corde, et comme elles doivent être en équilibre, lorsqu'elles sont appliquées à ce nœud ; cette condition est aussi celle qui détermine leurs rapports de position lorsqu'on les applique au polygone funiculaire.

§ 226. *Corde supportant des poids.* — Lorsque les forces P, P'....., sont parallèles, toutes les parties du polygone funiculaire sont dans le même plan, car le plan des deux forces P et T qui doit contenir la force F, est le même que le plan des deux forces P' et T qui contient la force T'; et ainsi de suite.

Lorsque toutes les forces P, P'..... (*fig.* 104), sont des poids suspendus à la corde, le plan du polygone est vertical, et les tensions extrêmes des cordons FN, $F''N''$ ont un rapport très simple. On le déduit des proportions du § 224, en les multipliant toutes entre elles terme à terme, et remarquant que dans le cas de la verticalité des forces P, P'....., les angles PNN', $NN'P'$ sont suppléments l'un de l'autre et ont le même sinus, ainsi que les angles $P'N'N''$, $N'N''P''$. omettant donc les facteurs communs, on aura :

$$F : F''' :: \sin.\ F'''N'''P'' : \sin.\ FNP;$$

c'est-à-dire que, dans le cas d'une corde supportant des poids : *les tensions extrêmes de la corde sont entre elles réciproquement comme les sinus des angles qu'elles font avec la verticale.*

Si la corde était attachée à deux points fixes par ses deux extrémités, cette proportion donnerait le rapport des efforts exercés à ces deux points fixes.

Enfin, la verticale menée par le point de concours G des prolongements des deux parties extrêmes de la corde, passe par le centre de gravité du système de tous les poids P, P'....., car les deux parties extrêmes étant dans le même plan, leurs tensions ont une résultante dont la direction passe par le point G; de plus, ces tensions supportant le système des poids P, P'....., leur résultante doit être verticale, et doit passer par le centre de gravité de ces poids; donc le point G et le centre de gravité de ces poids sont dans une même verticale.

§ 227. *Cas d'une corde pesante.* — En considérant une corde pesante suspendue en équilibre à deux points fixes A et B (*fig.* 105), on pourra regarder son axe comme un fil sans pesanteur, chargé de poids distribués dans toute son étendue; donc dans cette position d'équilibre : 1° La corde est dans le plan vertical mené par les deux points de suspension; 2° si l'on mène les tangentes à la corde aux points A et B, le centre de gravité de la corde sera dans la verticale passant par le point de concours G de ces deux tangentes; 3° les tensions aux points A et B seront entre elles en raison inverse des sinus des angles AGP, BGP, et l'on trouvera la valeur de ces tensions en les comparant au poids P de la corde; ce qui donnera :

$$T : P :: \sin. PGB : \sin. AGB.$$
$$T' : P :: \sin. PGA : \sin. AGB.$$

§ 228. *Déterminer la valeur des tensions.* — Les diverses parties de la corde sont inégalemennt tendues; on s'en assurerait aisément, à l'aide des proportions du § 224. Mais il est possible de déterminer graphiquement les rapports de ces tensions entre elles. Il suffit pour cela de remarquer (*fig.* 106), que le nœud N étant en équilibre, les trois côtés du triangle Ncb sont proportionnels aux trois forces qui sont appliquées à ce nœud. Si maintenant on prend sur une horizontale AD une longueur AB proportionnelle au poids P, et si l'on mène la droite AS perpendiculaire à FN, et proportionnelle à cette force, la ligne SB sera perpendiculaire et proportionnelle à la tension du cordon NN'; car les triangles ABS, Ncb, sont semblables comme ayant un angle égal $cNb = BAS$, compris entre côtés proportionnels, puisque l'on a pris AB et AS proportionnels aux lignes Nc et Nb. Par la même raison, si l'on prend BC proportionnel à P', comme SB est proportionnel à la tension du cordon NN', SC sera perpendiculaire et proportionnel à la tension du cordon $N'N''$; et ainsi de suite pour un nombre quelconque de cordons. Il est facile de conclure de là un moyen de trouver les rapports des tensions des cordons, ou la valeur absolue de ces tensions, lorsqu'on connaîtra celle des poids P, P'..... *On prendra une horizontale sur laquelle on portera des divisions proportionnelles aux poids qui sollicitent la corde; on abaissera de chaque point de division une perpendiculaire sur chaque côté du polygone; ces perpendiculaires concourront au même point, et les grandeurs de ces lignes concourantes, comprises entre l'horizontale et leur point de concours, seront proportionnelles aux tensions des côtés du polygone auxquels ces lignes sont perpendiculaires.*

§ 229. *Application à la courbe appelée chaînette.* — On peut appliquer ce procédé à une chaîne pesante suspendue librement par ses deux extrémités, car elle peut être considérée comme un polygone pesant d'un nombre infini de côtés. On donne à la courbe ainsi formée le nom de *Chaînette.* D'après le paragraphe précédent, on voit qu'il sera aisé de déterminer la tension de la chaînette en un quelconque de ses points. Pour cela, on prendra une ligne AB (*fig.* 107), qui représente le poids total de la chaîne entre ses deux points fixes. On divisera cette ligne et la courbe en un même nombre de parties égales. Alors, il existera un point C tel qu'en le joignant à l'un des points de division 4' de la ligne AB, la ligne C 4' représentera la tension de la courbe au point 4.

Pour obtenir le point C, si la courbe est construite, il suffit de connaître le poids de la corde; car, § 227 et (*fig.* 105), si l'on mène les deux tangentes aux points A et B, et la verticale en G; puis, si l'on prend sur cette verticale une longueur proportionnelle au poids de la chaînette, en construisant le parallélogramme des forces, les parties interceptées sur les tangentes seront proportionnelles aux tensions de la chaînette aux points A et B. On y parviendrait encore par le calcul, à l'aide des proportions du § 227.

§ 230. *Construction de la chaînette.* — Il résulte de ce qui précède que, des tensions des diverses parties de la chaînette, la plus petite est celle qui est horizontale, car cette dernière correspond à la ligne $C5'$, perpendiculaire à AB, (*fig.* 107); que les plus grandes tensions sont celles AC et CB des points d'attache, et enfin, qu'elles vont en décroissant d'intensité jusqu'au point le plus bas 5 de la chaînette. De plus, les divisions égales de la droite AB représentant des poids de parties égales de la chaînette, deux tensions $C3'$, $C7'$ placées symétriquement par rapport à $C5'$, correspondront à des points 3 et 7 de la chaînette, symétriques par rapport à la verticale menée par le point le plus bas 5. Ces points seront donc placés sur une horizontale divisée en deux parties égales par la verticale du point 5. La chaînette sera donc une courbe symétrique par rapport à la verticale passant par le point le plus bas.

Pour la construire, lorsqu'on donne son poids, sa longueur, et le rapport des tensions extrêmes au poids, ou le point de concours de ces tensions, on prendra une ligne AB, (*fig.* 108), représentant le poids, et l'on divisera cette ligne et la longueur de la chaînette en un même grand nombre de parties égales. D'un point A' quelconque, on abaissera une perpendiculaire sur la ligne AC, et l'on prendra sur cette perpendiculaire une longueur $A'\,1'$ égale à l'une des divisions de la longueur de la chaînette. Du point $1'$ on abaissera une perpendiculaire sur la ligne $C2$, et sur cette perpendiculaire on prendra une longueur égale à l'une des divisions de la chaînette. En continuant ainsi pour tous les points de division, la série des élements linéaires A', $1'2'$, $2'3'$,...... formera une courbe continue dont la forme sera celle de la chaînette demandée.

La détermination précédente suppose qu'on sait trouver le point de concours des tensions extrêmes. Pour déterminer ce point, lorsqu'on ne donne que la longueur de la chaînette, son poids, et les deux points d'attache A et B, on prendra une petite chaîne que l'on fixera en deux points a et b situés sur une ligne ab parallèle à AB, et tels que le rapport des lignes AB et ab soit le même que celui des longueurs des deux chaînes. Les efforts produits par cette petite chaînette sur les deux points a et b seront à ceux produits en A et B dans le rapport des poids de ces deux chaînes. Les efforts produits en a et b pourront être déterminés à l'aide d'un dynamomètre : les efforts produits en A et B seront donc connus, et par suite le point de concours de toutes les tensions.

231. *Tension en un point quelconque de la chaînette.* — La valeur de la tension en un point quelconque de la chaînette présente une décomposition remarquable. Soient A et B les points fixes, (*fig.* 109), et soit C un point quelconque de la chaînette. L'équilibre de cette courbe ayant lieu, il ne sera pas troublé si nous supposons le point C fixe et la chaîne suspendue à ce point, en ne tenant plus compte de la partie AC. De même, en considérant le point le plus bas D, nous pourrons supposer que ce point est fixe, et faire abstraction de la partie DB. Alors, l'équilibre ayant lieu dans la chaînette CD, si l'on mène les tangentes aux points extrêmes C et D, elles devront se couper sur la verticale passant par le centre de gravité de la portion de chaîne CD, et les tensions mesurées sur ces tangentes, devront faire équilibre au poids de cette partie de chaîne, § 227. Le point O est donc mis en équilibre par la tension de la corde en C, agissant suivant OC, la tension de la corde en D, agissant suivant OD, et le poids OP de la corde ; d'où il suit que *la tension en un point quelconque C a pour composante horizontale la tension du point le plus bas D, et pour composante verticale le poids de la portion de chaîne comprise entre le point le plus bas et celui que l'on considère.*

On arriverait à la même conclusion à l'aide de la figure 107. En effet, si l'on veut connaître la tension au point 3, par exemple, on voit qu'elle est déterminée par l'hyothénuse $C3'$ du triangle rectangle $C3'5'$ dont un côté $C5'$ représente la tension au point le plus bas, et dont l'autre $3'5'$ est le poids de la portion de corde comprise entre le point 3 que l'on considère et le point le plus bas 5 de la chaînette. Or, la figure 109 fait voir en effet que la tension en C est l'hypothénuse de ce même triangle rectangle.

§ 232. *Ponts suspendus.* — Les ponts suspendus à des chaînes offrent un exemple de l'utilité de la chaînette dans les arts; et l'on peut leur appliquer tout ce qui vient d'être dit sur cette courbe. On voit, par exemple, que la tension en un point quelconque de la chaîne, aura pour composante horizontale, la tension au point le plus bas et pour composante verticale la portion de la charge du pont comprise entre le point le plus bas et celui que l'on considère. Si ce dernier était un pilier, la charge verticale tendrait à asseoir ce pilier sur sa base, mais la composante horizontale tendrait à le renverser, et avec une intensité qui serait mesurée par la tension du point le plus bas, ou la plus petite tension de la chaîne.

Mais les ponts portés par des chaines ont un inconvénient résultant de ce que les chaînes ne peuvent jamais être tendues en ligne droite, et qu'ils ont alors peu de stabilité. On préfère les remplacer par des ponts suspendus à deux chaînes supérieures $abcd$,... (*fig.* 110), portant des suspensoires verticales en fer aa', bb', cc',..... qui se correspondent sur les deux chaînes. Chaque couple de suspensoires est réuni par des traverses horizontales dans lesquelles ces suspensoires sont boulonnées par le bas, et qui reçoivent des poutrelles qu'on recouvre de madriers. Soient donc a et v les points de suspension de la chaîne. Le poids du pont et de la charge qu'il est destiné à porter est supposé connu. C'est ordinairement le poids d'un homme par mètre carré de surface. Ce poids étant donné, ainsi que le nombre de suspensoires, nous verrons plus loin, à la résistance des matériaux, le moyen de calculer la force des fers à employer.

Cela posé, traçons une ligne horizontale $a'v'$, et un point s' tel que $a's'$ soit perpendiculaire au premier élément a de la chaîne. Si nous prenons sur cette ligne des parties $a'b'$, $b'c'$,.... proportionnelles aux parties du poids du pont supportées par les points a, b, c,.... nous avons vu, § 228, que les lignes $a's'$, $b's'$, $c's'$,.... représentaient les tensions de la chaîne aux points a, b, c..... et la verticale $s'd'$ du point s' la tension du côté horizontal ou du point le plus bas. Pour construire la forme de la chaîne, il faut trouver la hauteur d'un angle a au-dessus du suivant b. Si nous menons l'horizontale bd, le triangle abd est semblable au triangle $a'd's'$, comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires; donc :

$$ad : a'd' :: bd : s'd'; \text{ d'où } ad = \frac{a'd' \times bd}{s'd'}.$$

Si les suspensoires sont équidistantes, la ligne bd est constante, et égale à la longueur d'une travée. Puis la quantité $a'd'$ représente le poids de la portion du pont AD, ou $\pi . AD$, si π est le poids de l'unité de longueur. Enfin $s'd'$ est la tension t du point le plus bas de la chaîne.

$$\text{On a donc } ad = \frac{bd . \pi . AD}{t}.$$

Mais πbd n'est autre chose que le poids d'une travée, ou p; donc enfin $ad = \frac{p}{t} . AD$. En désignant par k le rapport $\frac{p}{t}$, l'équation devient : $ad = k . AD$, formule qui nous apprend que la hauteur d'un point d'attache au-dessus de son consécutif est égale au rapport constant k du poids d'une travée à la tension horizontale, multiplié par la distance du point d'attache que l'on considère au point le plus bas. Si l'on appelle l la longueur d'une travée, les distances des points d'attache au premier point d'attache du côté horizontal, seront : l, $2l$, $3l$.... nl et les valeurs correspondantes de ad seront kl, $2k.l$, $3kl$..... nkl. Donc les hauteurs des divers points d'attache au-dessus du point le plus bas, seront :

$$kl,\ kl + 2kl,\ kl + 2kl + 3kl \ldots\ldots\ kl(1 + 2 + 3 \ldots\ldots + n)$$

ou, en général, la hauteur d'un sommet au-dessus du plus bas, sera :

$$\frac{kl(n+1)n}{2}.$$

En faisant successivement dans cette valeur $n=1, n=2, \ldots$ on aura les distances verticales des points d'attache à la tangente horizontale. Ces valeurs sont :

$$kl,\ 3kl,\ 6kl,\ 10kl,\ 15kl\ldots\ldots$$

Les points qui jouissent de la propriété d'être distants de ces quantités d'un axe fixe, appartiennent à une parabole dont l'axe est vertical, et passe par le milieu du côté horizontal (1). La courbe déterminée par les points d'attache est donc ici une parabole. Pour trouver son axe et son sommet, nous nous servirons d'une nouvelle propriété de cette courbe. Lorsqu'une droite av, (*fig.* 111), coupe l'axe en un point o, la distance ok de ce point au sommet est moyenne proportionnelle entre les abscisses am et vn des points où cette droite coupe la parabole. On doit d'ailleurs connaître ici la hauteur du pont au-dessus de la rivière, et celle au-dessus du pont du côté le plus bas du polygone funiculaire. Donc la droite mn est donnée de position, et les hauteurs am et vn des points de suspension extrêmes sont connues. Pour trouver le point o et par suite le point k, portons am de n en p'. Décrivons sur $p'v$ comme diamètre une demi-circonférence ; menons une tangente nt qui sera la moyenne proportionnelle entre am et vn. Portons nt de n en t'. Par le point t' menons $t'o$ parallèle à mn, le point o sera déterminé et par suite le point k le plus bas de la courbe. A partir de ce point on portera des distances égales à

$$kl,\ 3kl,\ 6kl\ldots\frac{n(n+1)}{2}kl.$$

Si cette dernière quantité appartient au point de suspension v, il est évident que cette quantité doit être égale à h hauteur de ce point au-dessus de mn; ce qui donne le moyen de trouver k, car on aura

(1) La démonstration de cette propriété et de la suivante se trouvent dans les leçons de M. Poncelet, rédigées par M. Gosselin, d'où ces notions sont en partie extraites.

$$\frac{n(n+1)}{2}kl=h;\quad \text{d'où } k=\frac{2h}{n(n+1)l}.$$

Ainsi les longueurs successives des suspensoires, kl, $3kl$, $6kl$,.... seront elles-mêmes déterminées.

Le rapport k étant égal à $\frac{p}{t}$, on aura $t=\frac{p}{k}$. En mettant à la place de k sa valeur,

$$t=\frac{n(n+1)lp}{2h}.$$

telle est la valeur de la tension du côté horizontal. Celles des suivants seront :

$$\sqrt{t^2+p^2},\ \sqrt{t^2+(2p)^2},\ \sqrt{t^2+(3p)_2}\ldots.\ \sqrt{t^2+(np)^2}.$$

Si les points de suspension a et v sont à même hauteur, la courbe devient symétrique par rapport à ok, on n'a plus à chercher la hauteur du point o, il ne reste qu'à calculer le rapport k d'après la hauteur des points de suspension au-dessus du côté le plus bas du polygone.

Des Poulies.

§ 233. *Poulie fixe; poulie mobile.* — On appelle *poulie*, (*fig.* 112 et 113), un cercle en bois ou en métal, creusé en gorge à sa circonférence, et susceptible par conséquent de recevoir sur son contour une corde ou une chaîne aux extrémités de laquelle sont appliquées des forces ou des points fixes. Le centre de la poulie est traversé par un axe autour duquel elle peut tourner librement. Si l'axe est fixe, la poulie est nommée *poulie fixe*, et si l'axe se meut en même temps que la poulie tourne autour de lui, la poulie est *mobile*. A l'axe est fixé un appareil appelé *chape*, composé de deux lames métalliques parallèles, plus longues que le rayon de la poulie, qui se rejoignent à l'extérieur, et entre lesquelles la poulie tourne. C'est au crochet de cette chape qu'est situé le point fixe dans la poulie fixe. Dans la poulie mobile, la chape reçoit la résistance. Nous allons examiner successivement les conditions d'équilibre dans l'un et dans l'autre système; mais nous ferons abstraction du poids et de la raideur de la corde, et nous la considérerons pour l'instant comme un simple fil flexible et inextensible, susceptible de glisser dans la gorge de la poulie sans aucun frottement.

§ 234. *Conditions d'équilibre dans la poulie fixe.* — Soit C le centre de la poulie, (*fig.* 114); AC son rayon; P la puissance et R la résistance, appliquées aux extrémités de la corde $PAmBR$. Il faudra, pour l'équilibre, que la résultante des forces P et R passe par le point fixe. Donc aC est la direction de la résultante. Mais les forces P et R peuvent être supposées appliquées aux points A et B liés entre eux d'une manière invariable. Alors cet appareil n'est autre chose qu'un levier dont les bras sont AC pour la puissance, et BC pour la résistance. Or, on a pour l'équilibre dans le levier, § 208 :

$$\frac{P}{R}=\frac{CB}{AC}.\ \text{Mais}\ AC=BC\,;\ \text{donc}\ P=R.$$

Ce qui fait voir que dans la poulie fixe : *la puissance doit être égale à la résistance pour l'équilibre.* Si l'on voulait se proposer de trouver la charge que supporte le point fixe, par suite de l'action simultanée des forces P et R sur la poulie, il faudrait chercher la valeur de la résultante qui exprime cette charge. Or, puisque ac est la résultante, en prenant un point b sur cette ligne, et menant les parallèles bc et bd, les triangles abc, ABC, semblables comme ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, donneront :

$$ab:ac::AB:AC\ \text{ou},\ S:R::c:r.\ \text{D'où}\ S=\frac{R.c}{r}.$$

§ 235. *Conditions d'équilibre dans la poulie fixe, en te-*

nant compte du frottement et de la raideur de la corde. Travail de cette machine. — Lorsqu'on tient compte du frottement du tourillon de l'axe et de la raideur de la corde, alors les deux forces P et R ne peuvent plus être égales, la force P devant faire équilibre à ces deux résistances et à la force R. Or, on sait calculer le frottement d'un tourillon et la raideur d'une corde. Cette première résistance est exprimée par la pression exercée sur l'axe multipliée par le coëfficient f du frottement relatif aux surfaces en contact. On a trouvé pour la charge de l'axe $\frac{R.c}{r}$. La seconde résistance est exprimée par $\frac{d^e}{D}(a+bR)$, § 202, en se conformant, pour les applications, aux observations du § 203. En désignant donc par r le rayon de la poulie et par r' celui du tourillon de l'axe, on écrira que le moment de la puissance égale la somme des moments des résistances, ou

$$Pr = Rr + r\frac{d^e}{D}(a+bR) + \frac{r'fRc}{r}.$$

Telle est la condition d'équilibre dans la poulie fixe, en tenant compte du frottement et de la raideur de la corde.

Dans cette formule, on a pris pour valeur de la charge sur l'appui celle de la résultante des deux forces P et R en les supposant égales, tandis qu'il eût fallu avoir celle de la résistance R et de la valeur inconnue, mais approchée, de la puissance, en tenant compte des autres résistances. Mais l'erreur commise peut être négligée, surtout quand le rayon du tourillon est assez petit par rapport à celui de la poulie.

Pour faire une application de cette formule, faisons la résistance $R = 5000^k$. Supposons la poulie d'un diamètre $D = 0^m,45$ ou d'un rayon $r = 0^m,225$; la corde a $0^m,04$ de diamètre $= d'$, § 203. Les cordons sont parallèles ou $c = 2r$, le rayon du tourillon $r' = 0^m,05$; $f = 0,1$. On trouve $P = 6546^k$: tel est le poids nécessaire pour équilibrer les 5000^k.

Pour avoir le travail dans cette machine, il faut multiplier la puissance P par le chemin parcouru. Or, si V_1 désigne la vitesse angulaire de la poulie, $r V_1$ sera la vitesse d'un point de la circonférence, et $P r V_1$ sera le travail effectué par la puissance. Si donc nous multiplions par V_1 l'un ou l'autre membre de l'égalité précédente, nous aurons la valeur du travail en une seconde.

§ 236. *Conditions d'équilibre dans la poulie mobile.* — Dans cette poulie, (*fig.* 115), l'une des extrémités de la corde $P A m B F$ est fixée en F; l'autre extrémité reçoit la puissance P; à la chape de la poulie est appliquée la résistance R. Il est clair que les conditions d'équilibre dans cette poulie seront les mêmes que dans la poulie précédente; seulement, les éléments changeront de nom. Ainsi, il faudra toujours qu'à la chape soit appliquée une force qui soit la résultante de la force P et de la tension du cordon BF. Ces deux dernières forces doivent être égales, et de plus, il y aura entre la puissance P et la résultante R les mêmes relations qui, dans le paragraphe précédent, existaient entre le poids P et la charge S du point fixe. Donc, nous aurons encore :

$$P : R :: r : c,$$

ce qui fait voir que dans la poulie mobile, *la puissance est à la résistance comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.* La charge F du point fixe $= P$.

§ 237. *Conditions d'équilibre dans la poulie mobile en tenant compte des résistances nuisibles.* — Pour le cas de la poulie mobile il n'y a rien à ajouter à ce qui a été dit au § 235. Le moment de la puissance P, (*fig.* 115), sera encore égal à celui de la composante F qui n'est plus ici la résistance, augmenté du moment de la raideur de la corde, et de celui du frottement exercé par la résistance R sur le tourillon de l'axe de la poulie. Le moment de la résistance est ici nul, comme l'est aussi, dans la poulie fixe, le moment de la charge, ces deux forces passant par le centre des moments. Le moment de la force P est encore Pr. Pour la force F, dont la valeur est $\frac{Rr}{c}$, son moment est $\frac{Rr^2}{c}$. Celui de la raideur devient $r\frac{d^e}{D}\left(a+b\frac{Rr}{c}\right)$, en mettant pour la charge qui a déterminé la flexion, la valeur de F ou $\frac{Rr}{\rho}$. Enfin, le moment du frottement du tourillon est $r'fR$. Donc enfin, l'équation d'équilibre est

$$Pr=\frac{Rr^2}{c}+r\frac{d^e}{D}\left(a+b\frac{Rr}{c}\right)+r'fR,$$

d'où l'on peut tirer la valeur de P.

On trouvera le travail en multipliant l'un ou l'autre membre par la vitesse angulaire de la poulie.

En appliquant cette formule aux mêmes données du § 235, nous ferons

$R=5000^k$; $c=2r=D=0^m,45$; $d'=0^m,04$; $r'=0^m,05$; $f=0,1$.

En divisant par r, et remplaçant c et D par leurs valeurs, celle de P prend la forme

$$P=\frac{R}{2}+\frac{d^e}{2r}\left(a+b\frac{R}{2}\right)+\frac{r'fR}{r}.$$

Substituant, il vient, tous calculs faits, $P=2830$ kil.

§ 238. *Conditions pour que la puissance ait avantage sur la résistance. Comparaison des deux systèmes de poulies sous le rapport du travail consommé et de l'effet produit.* — Il est aisé de voir que dans la poulie mobile, la puissance aura avantage sur la résistance, lorsque la sous-tendante sera plus grande que le rayon, ou que l'arc embrassé excédera 60°. L'avantage croîtra de cette valeur de l'arc jusqu'à celle qui donne la plus grande sous-tendante, c'est-à-dire jusqu'à 180°. Lorsque l'arc embrassé aura cette dernière valeur, l'avantage sera le plus grand possible, la sous-tendante sera égale au diamètre, et la puissance sera la moitié de la résistance, si l'on ne tient pas compte des résistances nuisibles. L'appareil est alors représenté dans la (*fig.* 116). Dans les mêmes circonstances, la charge du point fixe dans la poulie fixe, serait double de la puissance.

Dans les applications qui précèdent, on a vu que pour la poulie fixe, la puissance 6546^k était plus grande que la résistance 5000, et cela aura toujours lieu; dans la poulie mobile, la puissance 2830^k à cause des résistances nuisibles, surpasse la moitié 2500^k de la résistance, de 330 kil. elle devrait être égale à cette moitié, si les résistances nuisibles n'existaient pas, ou plutôt n'étaient pas mises en compte.

A l'égard du travail employé pour produire le mouvement, il est bien différent dans les deux appareils, mais l'effet produit est aussi essentiellement différent. En effet, pour avoir le travail, dans la poulie fixe, nous multiplierons la force P ou 6546^k par r ou 0^m,225 et par la vitesse angulaire que nous supposerons égale à 0^m,2. Ce produit donne 295 kilogrammètres, ou environ quatre chevaux. Dans la poulie mobile le même produit effectué ne donne que 127 kilogrammètres, ou environ 1^{ch},7. Ainsi le travail employé pour monter le même poids 5000^k est plus de moitié plus petit dans la poulie mobile, mais aussi le poids n'est élevé qu'à une hauteur qui n'est que la moitié du chemin parcouru par la puissance, comme nous le ferons voir au paragraphe suivant.

§ 239. *Application du principe des travaux élémentaires à la recherche des conditions d'équilibre dans une poulie mobile à cordons parallèles.* — Les conditions d'équilibre dans une poulie à cordons parallèles peuvent être trouvées directement à l'aide du principe des travaux élémentaires énoncé § 101. Soit P la puissance, et R la résistance, (*fig.* 117). Donnons un petit mouvement à la machine, § 101. La puissance P aura parcouru un petit chemin PP' qui est sa propre projection sur la direction de la puissance. Soit p ce chemin. La résistance R s'est élevée d'une quantité qui est représentée par le chemin cc' parcouru par le centre de la poulie. Soit r ce chemin; on aura donc, en vertu du principe :

$$Pp = Rr \ldots\ldots (1).$$

Mais la corde dont la longueur primitive était $PambF$ n'a pas changé de longueur pour être devenue $P'a'm'b'F$. Si de ces deux lignes égales nous retranchons les parties qui leur sont communes Pa' d'une part, la demi-circonférence de la poulie de l'autre, et enfin $b'F$, les restes seront égaux. Or, le premier reste donne $aa' + bb' = 2cc'$; le deuxième reste donne PP'; donc $PP' = 2cc'$. Mais $PP' = p$; $cc' = r$; donc $p = 2r$. Substituant dans (1), il vient $P = \frac{R}{2}$. C'est la condition d'équilibre déjà déterminée, et l'on voit évidemment que le point d'application de la puissance parcourt deux fois autant de chemin que celui de la résistance.

§ 240. *Influence du poids de la corde dans la poulie fixe et du poids de la poulie dans la poulie mobile.* — Si, dans la poulie fixe, on suppose la corde pesante, une portion du poids de la corde s'ajoutera à la puissance d'un côté, et l'autre portion à la résistance. Dans la pratique, il faudra donc tenir compte de ces poids lorsqu'on produira, soit l'équilibre, soit le mouvement. Dans les poulies mobiles, le poids de la poulie doit s'ajouter à la résistance.

§ 241. *Usages des poulies.* — Les poulies fixes ne servent qu'à changer la direction des forces; aussi les appelle-t-on *poulies de renvoi*. Lorsqu'on veut changer la direction d'une force P, (*fig.* 118), en une autre BQ, qui n'est pas située dans un même plan avec la première direction AP, on prend deux points A et B sur ces directions, on les unit par une corde AB, et l'on place une poulie fixe dans l'angle PAB, et une autre dans l'angle ABQ.

On combine souvent la poulie fixe avec la poulie mobile, comme on le voit dans les réverbères.

Souvent on substitue des chaînes aux cordes, comme on le voit dans les figures 119, 120 et 121.

(*d*) est une chaîne de Vaucanson. La figure 119 en est une autre projection.

§ 242. *Conditions d'équilibre dans un système de poulies mobiles.* — On combine souvent plusieurs poulies mobiles, de manière que la puissance pour une poulie serve de résistance pour la poulie suivante, (*fig.* 122). Pour trouver les conditions d'équilibre dans un pareil système, on remarquera que, si cet équilibre existe, il doit exister pour chaque poulie en particulier. Alors, si l'on désigne par r, r', r''..... les rayons des poulies, et par c, c', c''...... les sous-tendantes des arcs embrassés par les cordes, et si l'on remarque que la tension t du cordon appliqué à la chape de la première poulie représente la résistance mise en équilibre au moyen de cette poulie par l'action combinée de la puissance P et de la tension Q du cordon AB, on aura pour les conditions d'équilibre de cette poulie :

$$Q=P, \text{ et } \frac{P}{t}=\frac{r}{c} \text{.... (1).}$$

Mais le cordon CD est tendu par deux forces égales, dont l'une, agissant de C en D, est celle que nous venons de considérer, et l'autre, agissant de D en C, met en équilibre toutes les autres parties du système. Cette dernière force sert de puissance à la poulie suivante, pour laquelle on aura, comme pour la première poulie :

$$\frac{t}{t'}=\frac{r'}{c'} \text{.... (2).}$$

En raisonnant de même pour la troisième poulie, on trouve une troisième équation d'équilibre

$$\frac{t'}{R}=\frac{r''}{c''} \text{.... (3).}$$

Multipliant (1), (2) et (3) terme à terme, il vient :

$$\frac{P.t.t'}{R.t.t'}=\frac{r.r'.r''}{c.c'.c''} \text{ ou } \frac{P}{R}=\frac{rr'r''}{cc'c''};$$

c'est-à-dire que, dans un système de poulies mobiles, *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des poulies est au produit des sous-tendantes.*

§ 243. *Des poulies à cordons parallèles.* — Lorsque les cordons deviennent parallèles, *fig.* 123, les sous-tendantes sont égales aux diamètres, et le rapport précédent devient :

$$\frac{P}{R}=\frac{r}{2r}\cdot\frac{r'}{2r'}\cdot\frac{r''}{2r''}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{2^n},$$

en désignant par n le nombre des poulies. D'où,

$$R=P.\,2^n.$$

On peut trouver cette expression directement en cherchant les conditions d'équilibre dans chaque poulie mobile; c'est ce qu'indique la figure. L'avantage dans un pareil système de poulies croît donc beaucoup avec le nombre des poulies, mais cet accroissement donné par la théorie, se trouve fort diminué dans la pratique, par la résistance que la roideur des cordes oppose à leur ploiement autour des poulies combinées, surtout pour les dernières qui, ayant à soutenir une résistance plus considérable, exigent de plus gros cordons pour les supporter.

L'équation $R=P.\,2^n$, que nous venons de trouver, renfermant trois quantités R, P et n, deux d'entre elles étant données, il est possible de déterminer la troisième. Soit, par exemple, à trouver le nombre de poulies nécessaire pour mettre en équilibre un poids de 320 kil. avec un autre de 10 kil. On aura dans cet exemple : $R=320$; $P=10$, substituant, on a : $320=10.\,2^n$. D'où, prenant les logarithmes, il vient :

$$\log.\,320=\log.\,10+n.\,\mathrm{Log}.\,2;\ \text{d'où}\ n=\frac{\log.\,320-\log.\,10}{\log.\,2}=5.$$

Il faut donc cinq poulies pour mettre les deux poids en équilibre.

§ 244. *Des moufles.* — Les figures 124 représentent d'autres assemblages de poulies qui ont également la propriété de multiplier la force primitive P qu'on y applique, en l'aidant par la résistance des points fixes. Mais, dans ces systèmes qu'on appelle *moufles*, une même corde embrasse toutes les poulies combinées.

Chacun de ces appareils se compose, en général, de deux systèmes de poulies, l'un fixe, nommé le *moufle fixe*, et l'autre mobile, nommé *moufle mobile*; c'est à ce dernier qu'est appliquée la résistance. Les poulies de chaque système sont assemblées dans la même chape, mais elles peuvent avoir des axes différents comme dans les *fig.* (*a*) et (*b*), ou le même axe, comme dans la *fig.* (*c*). Il est aisé de trouver les conditions d'équilibre dans l'un quelconque de ces appareils en remarquant, comme précédemment, que l'équilibre doit avoir lieu pour chaque poulie en particulier, et qu'alors les tensions des cordons doivent être toutes égales. En supposant tous les cordons parallèles, ce qui a à peu près lieu, on remarquera que la force P, agissant sur l'extrémité libre de la corde, se transmet tout entière à tous les éléments qui la composent, soit directement dans les parties rectilignes des cordons, soit circulairement dans les portions enroulées autour des poulies; de sorte que le premier et le dernier point de la corde se trouvent également sollicités par cette force. Mais, dans les portions rectilignes des cordons, la transmission de la force P s'opère directement, sans produire aucune pression latérale; au lieu que, dans les portions enroulées, la transmission circulaire produit sur toutes les circonférences des poulies, soit fixes, soit mobiles, une pression normale qui se transmet à leur centre, et y forme une résultante double de la traction P. Ainsi, il y a autant de ces doubles forces qu'il y a de poulies enroulées. Or, celles d'entre elles qui s'exercent sur le système des poulies fixes, sont détruites par la résistance du point fixe auquel ce système est suspendu, et ainsi leur effort de haut en bas est anéanti; mais celles qui agissent de bas en haut sur les centres des poulies inférieures subsistent, et tendent à les soulever; de sorte que leur effort total est celui qui combat la résultante R attachée au bas du système mobile. Ainsi, dans la *fig.* (*a*), la force $2P$ se trouve triplée, ce qui donne $R = 6P$. La figure (*b*) donne $R = 5P$, parce qu'il y a d'abord deux poulies mobiles enroulées, et que la poulie la plus voisine du système fixe se trouve encore tirée de bas en haut par la force P, par l'extrémité de la corde qui s'y attache immédiatement. En général,

$$R = P . n,$$

c'est-à-dire que la résistance égale la puissance multipliée par le nombre des poulies, tant fixes que mobiles; ou, *la puissance est à la résistance comme l'unité est au nombre des poulies.*

Lorsqu'il s'agit d'élever des fardeaux à une grande hauteur, le système de la *fig.* (*c*) est préférable, parce que le système de la *fig.* (*a*) tient trop de place. Mais celui-là a l'inconvénient, surtout lorsque les deux moufles sont très rapprochés, de détruire le parallélisme sensible des cordons, en obligeant les rouets à s'incliner, ce qui déforme l'œil de ces rouets, et tend à déformer aussi les essieux, en augmentant le frottement.

L'équation $R = P . n$ renferme trois quantités. Deux d'entre elles étant données, on peut se proposer de déterminer la troisième. Soit proposé de trouver le nombre de poulies nécessaire pour mettre en équilibre un poids R avec un autre poids P, par le moyen de moufles. On aura: $n = \frac{R}{P}$; ce qui fera connaître le nombre de poulies, tant du moufle fixe que du moufle mobile.

§ 245. *Frottement d'une corde qui glisse sur un rouleau fixe.* — Lorsqu'une corde s'enroule sur une poulie qui cède au mouvement qu'elle lui imprime, de sorte que les parties en contact se démasquent successivement, il n'y a pas là de frottement produit, puisque la corde ne glisse pas sur la poulie. Il n'en serait pas de même si la corde était enroulée sur un rouleau fixe, et qu'elle supportât un poids P entraîné par la puissance F, (*fig.* 125). Partageons l'arc enveloppé en un certain nombre de parties égales, très petites, et menons par les points de division des tangentes qui se coupent deux à deux. La tension de la corde sur la tangente ab est égale à P. Soit t_1 la tension qui agit sur la deuxième tangente bb'. Cette tension doit vaincre le poids P et le frottement exercé sur l'arc élémentaire at_1. Appelons p la pression exercée sur cet élément, et f le coëfficient du frottement. La valeur du frottement sera fp. On aura donc :

$$t_1 = P + fp.$$

Pour trouver p, nous remarquerons que les deux tangentes ab et bt_1 sont égales, et que si ab représente la force P, bt_1 sera aussi égal à cette force. La diagonale bm du losange amt_1b sera donc la résultante de ces deux forces ou la pression exercée normalement au rouleau : c'est la valeur de p. Les triangles oat_1 et mab sont semblables comme isoscèles et ayant les angles oat_1 et mab égaux comme suppléments du même angle abt_1. On aura donc

$$mb : at_1 :: ab : oa, \text{ ou } p : s :: P : r,$$

en désignant par s l'arc élémentaire at_1 et par r le rayon du rouleau. On tire de là :

$$p = \frac{s}{r}.P. \text{ Donc } t_1 = P + f\frac{s}{r}P \text{ ou } t_1 = P\left(1 + \frac{fs}{r}\right).$$

En appelant t_2 la tension qui agit sur la troisième tangente $b''t_2$, au point t_2 de division de l'arc total à partir de a, on verra que cette tension a à vaincre la tension t_1 et le frottement sur l'arc élémentaire t_1t_2, donc enfin t_2 sera par rapport à t_1 ce que t_1 est par rapport à P, c'est-à-dire qu'on aura :

$$t_2 = t_1\left(1 + \frac{fs}{r}\right) = P\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^2$$

On trouverait également

$$t_3 = P\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^3$$

et enfin

$$t_n = P\left(1+\frac{fs}{r}\right)^n.$$

Or cette dernière tension $t_n = F$: donc

$$F = P\left(1+\frac{fs}{r}\right)^n.$$

Le rapport de la puissance à la résistance croît donc très rapidement, à mesure que l'arc enveloppé est plus grand, ou contient plus d'arcs élémentaires. Supposons, par exemple, qu'une corde soit enroulée trois fois autour d'un rouleau cylindrique de 0^m, 1 de rayon. L'arc enveloppé est égal à $6\pi r = 1^m$, 885. Le coëfficient du frottement sur du bois ou sur une substance quelconque est environ $\frac{1}{3} = f$. En faisant l'arc élémentaire égal au rayon $r = s$, la valeur de F devient :

$$F = P\left(1+\frac{1}{3}\right)^n. \qquad n = \frac{1,885}{0,1} = 19 \text{ environ},$$

$$\text{d'où } F = P\left(1+\frac{1}{3}\right)^{19} = 236,5\ P.$$

Par conséquent, la force capable de faire glisser la corde autour du cylindre est 286 fois plus grande que celle qui l'y retient. Réciproquement, si un très grand effort agit à l'extrémité d'une corde enroulée autour d'un rouleau semblable au précédent, il suffira d'une force 236 fois moindre à l'autre extrémité pour s'opposer à ce même effort. De là les moyens employés pour amarrer un vaisseau à l'aide d'une corde enroulée plusieurs fois autour d'une pierre. De là la facilité que l'on éprouve dans la manœuvre du cabestan, de la chèvre, de la grue, etc., lorsque la corde est enroulée plusieurs fois autour de l'arbre. On explique de la même manière la facilité que l'on éprouve à descendre une pièce de vin dans une cave. Deux hommes saisissent les deux extrémités d'une corde qui retient la pièce et qui est enroulée sur deux pieux verticaux. L'effort produit par ces hommes est d'autant plus faible que le nombre des enroulements est plus considérable.

DU TOUR ET DES ROUES.

§ 246. *Conditions d'équilibre dans le tour.* — Le tour est une machine composée d'un arbre cylindrique *AB* (*fig.* 126), terminé par deux tourillons également cylindriques, lesquels ont le même axe, et sont ordinairement métalliques. Ces tourillons reposent sur deux supports fixes, également élevés au-dessus du sol, de manière que le cylindre soit horizontal, et puisse seulement tourner sur lui-même. Une roue *OHL*, d'un diamètre plus grand que celui de l'arbre, est fixée à celui-ci, dans un plan perpendiculaire à sa longueur. C'est à la circonférence de cette roue que l'on applique la puissance dont on dispose, puissance que nous supposerons, pour plus de simplicité, dirigée dans le plan même de la roue, suivant *OF*, tangentiellement à la circonférence. La résistance est ordinairement un poids *P* suspendu à une corde dont l'extrémité est primitivement fixée au contour de l'arbre, mais qui l'enveloppe généralement d'un certain nombre de tours, de sorte que le poids *P* peut être censé agir suivant une direction verticale tangente à la circonférence même de l'arbre, au point *K* où la corde commence à se développer. Cet appareil a des dispositions très variées (*fig.* 127, 128, 129); mais, lorsque son axe est horizontal, il porte ordinairement le nom de *tour* ou *treuil*. Lorsque l'axe est vertical, cet appareil reçoit le nom de *cabestan*, dans lequel la roue est remplacée par des leviers horizontaux, dont les extrémités sont poussées par des hommes. La puissance, dans ces diverses machines, admet plusieurs autres modes d'application, mais ils reviennent tous, plus ou moins, au premier que nous avons expliqué : tantôt c'est une corde, tantôt une roue à chevilles, à tambour, etc. Mais de quelque manière qu'on applique les forces à cette machine, les conditions de leur équilibre y seront toujours les mêmes. Aussi prendrons-nous le cas le plus simple. Par le point D, centre de la section faite normalement au cylindre par la corde qui supporte le poids P, menons un rayon au point de contact K de la corde avec le cylindre; ce rayon sera horizontal. Par le point C, centre de la roue, menons un rayon CI parallèle au premier DK, et dans un sens contraire. Cela fait, appliquons au point I et dans des sens opposés, deux forces P', P'', égales à P. L'équilibre, s'il existe, n'en sera pas troublé. Nous aurons alors à considérer les quatre forces F, P, P', P''. Les deux forces égales et parallèles P et P'', agissant aux deux extrémités de la droite KI, auront pour résultante une force $2P$ appliquée au milieu G de la droite KI, point qui se trouve placé sur l'axe du cylindre, à cause de l'égalité des triangles KDG, GCI. L'effet de cette force $2P$ à seulement pour résultat de charger l'axe, et par conséquent les appuis, et n'a aucune influence sur l'équilibre, puisqu'elle est détruite par la résistance de l'axe supposée indéfinie. Il reste donc à considérer les deux forces F et P' situées dans le même plan, où se trouve également un point fixe C. Ceci revient évidemment au cas du levier, et les conditions de l'équilibre seront les mêmes. Or, les bras de levier de ces deux forces sont CO et CI, rayons de la roue et du cylindre. On aura donc :

$$\frac{F}{P}=\frac{CI}{CO}=\frac{r}{R}$$

ce qui donne la relation entre les grandeurs des forces F et P pour l'équilibre : *La puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.*

Ici, la puissance a toujours avantage sur la résistance, puisque le rayon du cylindre est toujours plus petit que le rayon de la roue.

La condition d'équilibre étant remplie, la résultante des forces F et R' passe par le point C, et opère sur l'axe une traction qui se transmet aux appuis. Pour avoir la charge de ces appuis, il faudrait d'abord décomposer la force $2P$ en deux autres parallèles, et agissant aux points d'appui, décomposer également la résultante des forces P' et F, et composer à chaque point d'appui les deux composantes partielles ainsi obtenues.

§ 247. *Conditions d'équilibre dans un système de tours.* — Pour trouver les conditions d'équilibre dans un système de tours (*fig.* 130), on remarquerait que les tensions t et t' des cordons qui lient les cylindres aux roues suivantes, servent de résistances pour les premiers, et de puissances pour les seconds ; de sorte que, l'équilibre devant avoir lieu pour chaque tour en particulier, on aurait pour le premier : $\frac{F}{t}=\frac{r}{R}$; pour le second : $\frac{t}{t'}=\frac{r'}{R'}$; et pour le troisième : $\frac{t'}{P}=\frac{r''}{R''}$. Multipliant toutes ces proportions terme à terme, il vient :

$$\frac{F\,t\,t'}{t\,t'\,P}=\frac{r\,r'\,r''}{R\,R'\,R''};\ \text{ou}\ \frac{F}{P}=\frac{r\,r'\,r''}{R\,R'\,R''}.$$

La puissance est à la résistance comme le produit des rayons des cylindres est au produit des rayons des roues.

§ 248. *Roues dentées.* — Les roues dentées reviennent à un système de tours (*fig.* 131), si l'on remplace les cordons t, t', par des dents pratiquées à la circonférence des cylindres et des roues, excepté à la première roue et au dernier cylindre : du reste, les conditions d'équilibre sont les mêmes, car les tensions des cordons t, t', qui représentent chacune deux forces, sont ici remplacées par les pressions réciproques qu'exercent les dents des roues et des cylindres, et qui peuvent être assimilées à des forces agissant tangentiellement aux roues et aux cylindres. Ces derniers s'appellent ici des *pignons*. *Dans un système de roues dentées, la puis-*

sance est donc à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.

L'équation $\frac{F}{P}=\frac{r.r'r''...}{R.R'R''...}$, qui exprime les conditions d'équilibre dans un système de roues dentées, donne le moyen de mettre un poids considérable en équilibre à l'aide d'une force beaucoup moindre. En se donnant ces deux forces, les inconnues du problème sont les rayons des roues et ceux des pignons. Il est donc possible d'arriver à ce résultat d'un grand nombre de manières. Si, par exemple, $P=30000^k$, et $F=60^k$, on trouve $\frac{RR'...}{rr'...}=500$. Le problème est indéterminé, mais si l'on partage 500 en divers facteurs tels que 4, 5, 5 et 5, ils pourront exprimer respectivement le rapport du rayon d'une roue à celui du pignon qui a le même axe qu'elle, en prenant ce dernier pour unité, car on aura: $\frac{R}{r}.\frac{R'}{r'}.\frac{R''}{r''}.\frac{R'''}{r'''}=\frac{4}{1}.\frac{5}{1}.\frac{5}{1}.\frac{5}{1}=500.$ On pourra donc, entre autres manières d'établir l'équilibre, prendre quatre roues, dans l'une desquelles le rayon du pignon sera le quart de celui de la roue; il sera le cinquième dans les trois autres.

§ 249. *Du frottement dans le tour.* — Soit r le rayon de la roue d'un tour; soient r' celui de l'arbre et r'' celui des tourillons. Nommons Q le poids à soulever, P la puissance qui l'élève en surmontant le frottement, et M le poids du tour et des cordages dont le centre de gravité sera, pour plus de simplicité, supposé dans le plan vertical qui contient l'axe du tour. Supposons également que la puissance P soit verticale. La résultante de toutes les pressions sur l'axe, sera donc $P+Q+M$. Pour avoir le frottement sur les tourillons, il suffit de multiplier cette résultante par $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}=f'$ § 197, ce qui donne $f'(P+Q+M)$. Or, la puissance P doit vaincre le poids à soulever et le frottement; son moment, par rapport à l'axe, sera donc égal à la somme des moments de ces deux forces, pour l'équilibre. On aura donc :

$$Pr = Qr' + f'r''(P+Q+M);$$

d'où l'on tire :

$$P = \frac{Qr' + f'r''(Q+M)}{r - f'r''} \dots\dots (1);$$

et si l'on veut négliger le poids du tour,

$$P = Q\frac{r' + f'r''}{r - f'r''}.$$

Si, au lieu d'un tour, on avait une poulie, on ferait $r' = r$ dans les formules précédentes.

Dans les applications, on peut faire $f' = f$.

Soient $r = 0^{m}, 5$; $r' = 0^{m}, 1$; $r'' = 0^{m}, 02$; les tourillons sont en fer et les coussinets en bronze ; le poids $Q = 500^{k}$; on trouve $P = 102^{k}$.

§ 250. *Du frottement dans les moufles.* — Supposons que les poulies aient des diamètres égaux, et considérons les cordons comme parallèles. En appelant r'' les rayons des trous des poulies, r' celui de leurs gorges, le coëfficient de Q, dans la valeur de P du paragraphe précédent sera, en faisant $r = r'$,

$$\frac{r' + f'r''}{r' - f'r''} = B,$$

pour abréger. En désignant par $T, T_1, T_2, \dots T_n$, les tensions des cordons à partir de celui qui est fixé à la chape fixe, nous aurons entre ces tensions les relations suivantes :

$$T_1 = TB;\ T_2 = T_1B = TB^2 \dots\dots T_n = T_{n-1}B = TB^n = P,$$

en nommant n le nombre des cordons aboutissant au moufle mobile. Or, Q est égal à la somme des tensions des n cordons, ou

$$Q = T(1 + B + B^2 + \dots B^{n-1}).$$

Le second facteur du second membre est le développement du quotient de $B^n - 1$ par $B - 1$; donc

$$Q = T\,\frac{B^n - 1}{B - 1};\ \text{d'où}\ T = Q\,\frac{B - 1}{B^n - 1}.$$

Substituant cette valeur de T dans celle de $P = TB^n$, il vient :

$$P = Q\,\frac{B^{n+1} - B^n}{B^n - 1}.$$

§ 251. *Equilibre dans le tour et dans les moufles, en tenant compte de la roideur des cordes.* — Nous pouvons compléter ce qui vient d'être dit sur les conditions d'équilibre dans le tour et les moufles, en tenant compte de la roideur des cordes. Dans le § 249, on augmentera le facteur $Q + M$ de la formule (1) de la roideur de la corde, parce que la force nécessaire pour la vaincre augmente le frottement, tandis que le frottement n'a aucune influence sur cette roideur. A l'égard du § 250, la relation $T_1 = TB$ deviendra, en tenant compte de la roideur de la corde,

$$T_1 = TB + \frac{1}{2r'}(d^e a + d^e b T)\left(\frac{d'}{d}\right)^e = \frac{d^e a}{2r'}\left(\frac{d'}{d}\right)^e + T\left\{B + \frac{d^e b}{2r'}\left(\frac{d'}{d}\right)^e\right\}.$$

Faisant $\frac{d^e a}{2r'}\left(\frac{d'}{d}\right)^e = \alpha$, et $B + \frac{d^e b}{2r'}\left(\frac{d'}{d}\right)^e = \beta$, il vient :

$$T_1 = \alpha + T\beta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

On aurait ensuite $T_2 = \alpha + \beta T_1$. ou

$$T_2 = \alpha(1 + \beta) + \beta^2 T. \quad \ldots\ldots\ldots (2);$$

puis, $T_3 = \alpha(1 + \beta + \beta^2) + \beta^3 T. \quad \ldots\ldots (3).$

. . . . , ...

. . . .

$$T_{n-1} = \alpha(1 + \beta + \ldots + \beta^{n-2}) + \beta^{n-1} T \ldots\ldots (n-1)$$

$$T_n = \alpha(1 + \beta + \ldots + \beta^{n-1}) + \beta^n T = P \ldots\ldots (n);$$

d'où $Q=T+T_1+\ldots+T_{n-1}=T+\alpha+\beta T+\alpha(1+\beta)$ $+\beta^2 T\ldots+\alpha(1+\beta+\ldots+\beta^{n-2})+\beta^{n-1})T=\alpha\left\{1+\right.$ $\left.(1+\beta)+(1+\beta+\beta^2)\ldots+(1+\beta\ldots+\beta^{n-2})\right\}+T$ $\left\{1+\beta+\beta^2\ldots+\beta^{n-1}\right\}=\alpha\left\{\frac{\beta-1}{\beta-1}+\frac{\beta^2-1}{\beta-1}+\ldots+\right.$ $\left.\frac{\beta^{n-1}-1}{\beta-1}\right\}+T\frac{\beta^n-1}{\beta-1}=\alpha\left\{\frac{\beta^n-\beta n+n-1}{(\beta-1)^2}\right\}+T\frac{\beta^n-1}{\beta-1}.$

Tirant de là la valeur de T, et la substituant dans celle de P, (n), on a

$$P=\alpha\frac{\beta^n-1}{\beta-1}+\beta^n\left\{Q\frac{\beta-1}{\beta^n-1}-\alpha\frac{\beta^n-1-n(\beta-1)}{(\beta^n-1)(\beta-1)}\right\};$$

et, en réduisant,

$$P=\alpha\left\{\frac{\beta^n-1}{\beta-1}-\frac{\beta^n(\beta^n-1-n(\beta-1))}{(\beta^n-1)(\beta-1)}\right\}+Q\frac{\beta^n(\beta-1)}{\beta^n-1}.$$

§ 252. *Chèvre*. — La *chèvre* (*fig*. 132), est une machine qu'il faut rapporter au treuil. Elle se compose d'un arbre horizontal établi près de la base d'un triangle formé par une traverse horizontale et par deux montants obliques. Une poulie est fixée au sommet où se joignent les montants. Enfin, le triangle que nous venons de décrire, et qui pose à terre par sa base, est retenu à son sommet par une troisième jambe inclinée en sens opposé aux deux premières. Lorsqu'il s'agit d'élever un fardeau, on le place dans les trois jambes de la machine. Un cordage passé entre la poulie fixe sert d'un bout à saisir le fardeau; l'autre bout vient s'enrouler sur l'arbre du treuil que l'on met en mouvement par un procédé quelconque.

§ 253. *Grue*. La *grue* — (*fig*. 133), est encore une application du treuil. Elle a pour but à la fois de monter ou de descendre un fardeau, et de le transporter circulairement dans une verticale autre que celle où il se trouvait d'abord.

Elle se compose d'une potence, qui tourne autour d'un arbre vertical. Le bout supérieur de cette potence porte une poulie fixe ; le bout inférieur porte l'arbre d'un treuil. La corde qui supporte le fardeau passe sur la poulie, et vient s'enrouler sur le treuil, qui est mis en mouvement, soit par une roue à chevilles, soit par une manivelle mue elle-même par des hommes ou par la vapeur.

§ 254. *Remarque analogue à celle du* § 211. — Nous ferons ici sur les poulies et les roues une remarque analogue à celle que nous avons eu occasion de faire au § 211 sur le levier. A mesure que l'avantage de la puissance sur la résistance augmente dans l'une de ces machines, le chemin que le point d'application de la puissance parcourt, en supposant le mouvement, devient de plus en plus grand, et celui de la résistance de plus en plus petit. Ces machines ne sauraient donc être employées que dans le but d'économiser l'action motrice, et dans tous les cas, l'avantage que l'on trouve du côté de la puissance est compensé par le chemin que son point d'application est obligé de parcourir. Cet avantage est en effet illusoire dans les machines en mouvement, lorsqu'il s'agit d'évaluer leur véritable utilité pratique, c'est-à-dire leur produit en argent.

Cette vérité peut être mise en évidence en cherchant les conditions d'équilibre dans un système de roues dentées, en y appliquant le principe des travaux élémentaires.

Supposons trois roues et trois pignons, et donnons un petit mouvement à la machine. On aura :

$$Pp = Qq \dots (1),$$

en appelant P la puissance, Q la résistance, p et q les chemins parcourus par ces deux forces. Mais la quantité p est la grandeur rectifiée de l'arc parcouru par un point de la circonférence de la première roue. En divisant cette quantité par le rayon R de la roue, on aura $\frac{p}{R}$, ou la vitesse angulaire de cette roue, § 23. Multipliant cette vitesse angulaire par r le rayon du premier pignon, le produit $\frac{pr}{R}$ donne la vitesse d'un point de ce pignon qui est invariablement lié à la roue, et qui a par conséquent la même vitesse angulaire. Cette même quantité $\frac{pr}{R}$ représente aussi l'arc parcouru par un point de la deuxième roue qui engrène avec le premier pignon et le quotient $\frac{RR'}{pr}$, de cette quantité par R' le rayon de cette deuxième roue donne sa vitesse augulaire. En continuant ainsi jusqu'à la résistance, on trouve que l'arc parcouru par le dernier cylindre est égal à

$$\frac{prr'r''}{RR'R''}.$$

Or, q exprime aussi cette quantité. On aura donc :

$$q=\frac{prr'r''}{RR'R''}.$$

Substituant dans (1), il vient :

$$\frac{P}{Q}=\frac{rr'r''}{RR'R''},$$

ce qui a déjà été trouvé, § 248.

DU PLAN.

§ 255. *Considérations préliminaires.* — Nous avons déjà vu, en traitant du mouvement d'un corps pesant abandonné à lui-même sur un plan incliné, que ce corps ne pouvait pas s'y maintenir en équilibre. Nous ajouterons ici que, si ce corps est sollicité par une ou plusieurs forces, l'équilibre pourra avoir lieu. Recherchons les conditions de cet équilibre,

Lorsqu'un corps est pressé contre un plan inébranlable et inflexible, par une force normale à ce plan, ce corps doit rester en équilibre; car il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve dans le plan, d'un côté plutôt que de l'autre, puisque toutes les directions qu'il pourrait prendre font un même angle droit avec la direction de la force, et d'ailleurs il ne peut se mouvoir à travers le plan supposé parfaitement inflexible.

Réciproquement, le corps dont il s'agit ne pourra être en équilibre, à moins que la force qui le presse ne soit normale au plan. D'où il résulte que, si le corps est sollicité par un certain nombre de forces, il faut pour l'équilibre : 1° Que toutes les forces aient une résultante unique; 2° que cette résultante soit normale au plan; 3° qu'elle passe au point de contact.

§ 256. *Conditions d'équilibre d'un corps pesant placé sur un plan incliné et sollicité par une seule force.* — Examinons le cas particulier où l'on aurait un corps pesant P (*fig.* 134), retenu par une force F quelconque, et supposons que la direction de cette force passe par le centre de gravité du corps, de sorte que les deux forces P et F y soient supposées appliquées. Coupons le corps et le plan incliné par un plan vertical et perpendiculaire au plan incliné. D'après ce que nous avons dit, pour que l'équilibre ait lieu entre les forces F et P, il faut que leur résultante R ait la direction OR perpendiculaire au plan incliné. Cette condition suffit pour déterminer le rapport des forces F et P; car, si par un point quelconque R de la résultante nous menons des parallèles aux directions des composantes, § 45, les parties interceptées OF, OP, auront entre elles le rapport des forces F et P pour que OR soit leur résultante, c'est-à-dire pour qu'il y ait équilibre. Or, si l'on désigne par φ l'angle de la force F avec la verticale, et par i celui du plan incliné avec l'horizon, on aura :

$$\frac{F}{P}=\frac{\sin. POR}{\sin. FOR};$$

$$\text{ou } \frac{F}{P} = \frac{\sin. i}{\sin. (\varphi - i)}, \text{ et } \frac{R}{P} = \frac{\sin. \varphi}{\sin. (\varphi - i)} \ldots (1).$$

La force F sera d'autant plus petite, relativement à P, que $\sin. i$ sera plus petit relativement à $\sin. (\varphi - i)$. En supposant l'angle i invariable, puisque nous considérons le même plan incliné, c'est donc la valeur de φ qui modifiera le rapport entre F et P. Pour éprouver toutes les directions possibles de F, rendons d'abord l'angle φ nul, ce qui fera coïncider OF avec la verticale OP; puis, faisons graduellement croître cet angle jusqu'à une circonférence entière. Nous aurons d'abord, φ étant nul,

$$F = \frac{P \sin. i}{\sin. - i} = -P; \text{ et } R = 0.$$

C'est-à-dire que la force F qui retient le corps doit être égale à son poids total, mais dirigée en sens contraire; ce qui, en effet, est évidemment indispensable pour l'équilibre dans cette position. En outre, nous trouvons que, dans ce cas, la résultante R est nulle; ce qui doit être encore, puisqu'on peut supposer qu'il n'y a pas de plan incliné.

L'angle φ n'étant plus nul, mais moindre que i, le dénominateur $\sin. (\varphi - i)$ reste négatif. Alors les équations (1) montrent que la force F doit, pour l'équilibre, rester négative, c'est-à-dire avoir une direction contraire à celle que nous avons primitivement supposée dans la figure sur laquelle nos formules sont établies. Cette nouvelle construction se trouve effectuée dans la *fig.* 135. Dans cette même supposition, R se trouve aussi négatif, c'est-à-dire que sa direction est également intervertie. Avec ces modifications, le triangle des forces est donc possible. Cependant, l'équilibre ne peut avoir lieu physiquement, si le corps pose sur le plan; car le signe négatif de R indique que cette résultante ne le presse pas contre le plan, vers l'horizon, mais au contraire le tire de bas en haut. Pour que l'équilibre fût physiquement possible avec ces valeurs, il faudrait que le corps pesant fût placé sous le plan; car alors la résistance de celui-ci pourrait anéantir la résultante négative R.

Ce genre de solution subsiste tant que φ est $< i$. Lorsque $\varphi = i$, la force F se dirige perpendiculairement au plan incliné, par conséquent suivant la normale même, qui doit être ainsi la direction de la résistance commune des deux forces P et F. Cette dernière condition devient donc alors impossible à remplir, à moins que la force P ne soit nulle, c'est-à-dire à moins que le corps n'ait aucun poids. C'est aussi ce qu'indique l'expression générale de F; car, pour cette circonstance, elle donne F infini, comparativement à P; relation qui ne peut se réaliser physiquement à moins que P ne soit nul.

Lorsque φ est $> i$, les valeurs de F et de R deviennent positives : l'équilibre est donc possible avec la direction des forces primitivement adoptées. Puisque i est constant, la plus petite valeur que F puisse avoir répond à la plus grande valeur que le dénominateur puisse prendre, ce qui arrive lorsque $\varphi - i = 90^\circ$, d'où $sin.\ (\varphi - i) = 1$; c'est la plus grande valeur positive que puisse prendre un sinus. Cette valeur donnant $\varphi = 90^\circ + i$, et i étant l'angle POR (*fig.* 136), on voit qu'elle rend OF perpendiculaire à la normale OR, par conséquent parallèle au plan incliné. Dans ce cas, la valeur de la résultante OR devient égale à $P\ cos.\ i$; ce qui est pareillement évident, puisque l'angle ORP se trouve droit.

Il serait facile de pousser la discussion plus loin, mais ce qui précède suffira pour mettre sur la voie de ce qui reste à faire. Nous nous contenterons d'indiquer la limite de la valeur de F à partir de laquelle son avantage croît sans cesse, jusqu'à l'autre limite qui donne sa plus petite valeur. Cette valeur de F correspond à $\varphi = 2i$, et cette substitution donne :

$$F = P \frac{sin.\ i}{sin.\ i} = P.$$

Toute valeur de φ, comprise entre i et $2i$, donne $F > P$.

Entre $\varphi = 2\,i$ et $\varphi = 90^\circ + i$, la force F est $< P$. A cette dernière limite F est le plus petit possible. Nous ferons enfin remarquer le cas où l'angle φ devient égal à 180°, ce qui rend la force OF verticale, comme l'action du poids P lui-même; alors, les formules générales donnent :

$$F = P;\ R = O;$$

c'est-à-dire que la force F doit être totalement égale au poids P qu'elle soutient tout entier à elle seule, sans que la résistance du plan y contribue en aucune manière. Et c'est pourquoi la valeur de R, qui exprime généralement la pression que le plan supporte, se trouve alors égale à zéro.

Les conditions d'équilibre, lorsque la force F est parallèle au plan, ou bien horizontale, peuvent prendre une autre forme (*fig.* 137 et 138). Construisons le triangle rectangle ABC, dans lequel $AB = L$ est appelée la longueur du plan incliné; $BC = H$ la hauteur; AC la base $= B$. Lorsque OF est parallèle au plan incliné (*fig.* 137), les triangles OFR et ABC sont semblables, et donnent

$$\frac{F}{P} = \frac{H}{L},$$

ou, *la force parallèle au plan est au poids du corps qu'elle maintient en équilibre comme la hauteur du plan est à sa longueur.* Lorsque la force F est horizontale (*fig.* 138), les deux triangles OFR, ABC, sont encore semblables et donnent

$$\frac{F}{P} = \frac{H}{B},$$

ou *la force horizontale est au poids du corps comme la hauteur du plan incliné est à la base.* Il y aurait encore à examiner ici dans quel cas l'avantage appartiendra à la puissance. Ces rapports peuvent être aisément déduits de la formule générale.

§ 257. *Mesure du travail sur le plan incliné.* — Nous pouvons répéter ici ce qui a été déjà dit plusieurs fois dans les mêmes circonstances sur l'avantage que présente la puissance dans l'état d'équilibre, avantage qui disparaît dans celui du mouvement.

Soit encore proposé, à l'aide du principe des travaux élémentaires, de trouver les conditions d'équilibre d'un corps pesant P (*fig.* 139), placé sur un plan incliné et retenu par une force F parallèle à ce plan. Donnons un petit mouvement au corps pesant, et amenons-le de G en G'. Le chemin parcouru par F est GG' sur sa direction ; le même chemin est parcouru par le point d'application de P, mais doit être projeté sur cette force en $G'O$. On aura donc :

$$Ff = Pp\ldots. \quad (1).$$

Mais les triangles semblables $GG'O$, BAC, donnent :

$$\frac{GG'}{G'O} = \frac{AB}{AC}, \text{ ou } \frac{f}{p} = \frac{L}{H}.$$

Substituant dans (1), il vient :

$$\frac{F}{P} = \frac{H}{L};$$

ce qui a été trouvé à la fin du § 256. On voit encore ici que le travail est le même, soit qu'on élève le corps directement, ou le long d'un plan incliné, puisque le travail FL de la force F est égal au travail PH de la force P. Le plan incliné n'a d'autre but que de faciliter l'élévation du corps par la diminution de la force motrice.

§ 258. *Frottement sur un plan.* — Lorsqu'un corps pesant repose sur un plan horizontal, pour mesurer le frottement, nous avons vu qu'il suffisait de multiplier le poids de ce corps par le coëfficient du frottement correspondant aux surfaces en contact, et donné par les tableaux. Ce produit donne donc l'intensité de la force horizontale qui mettrait ce frottement en équilibre. Cherchons maintenant l'intensité de la force, lorsqu'elle est inclinée par rapport au plan, et supposons encore le plan horizontal. Considérons donc un plan horizontal et indéfini MN (fig. 140), sur lequel est posé, par l'une de ses faces, un corps du poids P, tiré par une force quelconque F, dirigée de bas en haut, et dont ab représente l'intensité en kilogrammes. Proposons-nous de trouver les conditions d'équilibre entre cette force et le frottement, c'est-à-dire la valeur de cette force pour qu'elle fasse équilibre au frottement. Décomposons la force F en deux autres, l'une horizontale ac qui produit le mouvement, et l'autre verticale bc qui tend à soulever le corps, et par conséquent à diminuer sa pression sur le plan. Si cette composante verticale n'existait pas, le corps presserait de tout son poids sur le plan, et son frottement, qui est toujours proportionnel à la pression, serait fP. Appelons p la composante horizontale de F, et q sa composante verticale. $P-q$ sera la pression réelle du corps contre le plan, et $fP-fq$ sera la valeur véritable du frottement. Puisque ce frottement doit faire équilibre à la composante horizontale, nous aurons donc, pour l'équilibre du corps sur le plan,

$$p=fP-fq;$$

remplaçons p et q par leurs valeurs tirées des proportions

$$p:F::ac:ab \text{ et } q:F::bc:ab,$$

il vient :

$$\frac{F.ac}{ab}=fP-\frac{fF.bc}{ab}.$$

Tirant la valeur de F, on a

$$F=\frac{fP}{\frac{ac}{ab}+\frac{f.bc}{ab}}.$$

Le rapport f est donné par les tableaux; quant aux grandeurs ac et bc, elles seront immédiatement données par l'inclinaison et la grandeur ab de la force F. Si donc nous prenons ab pour unité, ac et bc ne seront plus que des fractions qui exprimeront les rapports des composantes avec la force F elle-même. D'après cette hypothèse, on aura donc :

$$F = \frac{fP}{ac + f.\,bc}.$$

Si la force F est horizontale, $bc = 0$, et $ac = 1$; la valeur de F devient $F = fP$, ce que nous savions déjà.

On peut remarquer que, dans la valeur générale de F, bc représente le sinus de l'inclinaison de la force F sur le plan, et ac le cosinus du même angle, ce qui donne le choix des valeurs à employer pour bc et ac dans les applications. En admettant ces nouvelles données, il vient

$$F = \frac{fP}{\cos.\,\alpha + f \sin.\,\alpha}.$$

Pour avoir le travail de la force F, ou celui du frottement, il faut, ou multiplier ce dernier, dont la valeur est $fP - fq$, par le chemin parcouru $ae = e$, ou bien multiplier F, ou sa valeur, par la projection ad de ae, sur la direction de F, ce qui donne pour ce travail

$$\frac{f.\,P.\,eac}{ac + f.\,bc},$$

car on a $ad = e.\,ac$.

§ 259. *Conditions pour que la force qui met le frottement en équilibre soit un minimum.* — Si l'on veut déterminer la position la plus avantageuse de la force F, pour qu'elle fasse équilibre au frottement, il faut chercher les conditions qui rendent sa valeur la plus petite possible. Or, comme le numérateur est constant pour les mêmes substances frottantes et le même poids du corps à tirer, ce minimum sera donné par le dénominateur. Cherchons donc les conditions qui rendent ce dénominateur le plus grand possible pour une valeur donnée de f. Prenons sur la direction de F une partie ab, (*fig.* 141), égale à l'unité. Sa projection sur l'horizontale MN sera la valeur de ac de la formule précédente, et la projetante verticale du point b sera la valeur de bc. Si nous prenons sur ab une longueur ad égale à $f.\ ab$. la verticale dg aura pour valeur : $f.\ bc$, et l'horizontale ag, $f.\ ac$, à cause des triangles semblables abc, adg. Menons ae perpendiculaire sur aF, prenons $ad' = ad$, et abaissons la verticale $d'g'$. Les triangles adg, $ad'g'$ seront égaux, et nous aurons :

$$ag' = dg = f.\ bc;\ d'g' = ag = f.\ ac.$$

Le dénominateur de la valeur F trouvée dans le paragraphe précédent, étant égal à $ac + f.\ bc$. aura pour valeur :

$$ac + ag' \text{ ou } g'c.$$

Cette dernière ligne est précisément la projection sur MN de la ligne bd' qui est invariable, puisque le point b est déterminé par $ab = 1$, et le point d' par $ad' = f.\ ab$. Quand cette projection sera la plus grande possible, le dénominateur de F sera le plus grand possible, et la valeur de cette force la plus petite possible. Cette circonstance aura lieu lorsque $d'b$ sera parallèle à MN, ou que l'on aura :

$$d'g' = bc;\ \text{mais } d'g' = ag = f.\ ac;$$

donc enfin il faut que l'on ait $f.\ ac = bc$;

$$\text{d'où } f = \frac{bc}{ac} = tang.\ \varphi,$$

l'angle φ étant celui sous lequel la force F exerce le tirage. L'inclinaison la plus avantageuse pour une force qui tire un corps placé sur un plan horizontal est donc celle dont la tangente est représentée par le rapport du frottement à la pression. Dans cette dernière hypothèse, la force F a pour valeur

$$F = P.\ bc = P \sin \alpha.$$

Il est facile de se convaincre que les mêmes conditions ont lieu aussi sur un plan incliné, c'est-à-dire que la force qui tire un fardeau sur un plan incliné doit faire avec ce plan un angle dont la tangente soit représentée par f, pour que cette force soit la plus petite possible. Cette conclusion pourra être déduite du paragraphe suivant.

§ 260. *Du frottement sur un plan incliné.* — Cherchons les conditions d'équilibre d'un corps pesant, placé sur un plan incliné et retenu par une force quelconque, en tenant compte du frottement. Soit F la force, (*fig.* 142), et P le poids du corps; soient α l'angle de la force avec le plan incliné, et φ celui du plan incliné avec l'horizon. Décomposons la force F en deux autres n et s, l'une normale au plan incliné et l'autre agissant dans le sens de ce plan. Opérons une décomposition analogue du poids P. Les deux composantes n' et n tendront, l'une à presser le corps sur le plan, l'autre à le soulever; la véritable pression éprouvée par le corps normalement au plan sera donc $n'-n$ et le frottement entièrement dû à cette pression, sera $(n'-n)f$. Ce frottement agissant dans le sens os' s'ajoutera à la composante s' de P, agissant dans le même sens, et pour établir les conditions d'équilibre, il suffira d'écrire que cette somme est égale à la composante s. On aura donc

$$s=s'+(n'-n)f.$$

Mais on a :

$$s=F\cos.\alpha\,;\ s'=P\sin.\varphi\,;\ n'=P\cos.\varphi\,;\ n=F\sin.\alpha.$$

Substituant, il vient

$$F\cos.\alpha=P\sin.\varphi+(P\cos.\varphi-F\sin.\alpha)f.$$

Tirant la valeur de F, on a :

$$F=P\frac{\sin.\varphi+f.\cos.\varphi}{\cos.\alpha+f.\sin.\alpha}\ldots.(1).$$

Le numérateur de cette expression restant constant pour les mêmes substances, le même poids P et le même angle φ, le dénominateur admettra les mêmes conditions pour le maximum qu'au § 259; d'où il suit que la position la plus avantageuse de la force F est encore celle qui donne à la tangente de son inclinaison sur le plan incliné une valeur égale au coëfficient du frottement. Si l'on admet cette inclinaison, la force F devient

$$F = P\ sin.\ (\alpha + \varphi).$$

Lorsque la force F est parallèle au plan incliné, $\alpha = o$, et l'équation (1) devient $F = P\ (sin.\ \varphi + f.\ cos.\ \varphi)$, valeur qu'on pourrait trouver directement, en remarquant que dans ce cas la force F fait équilibre, d'une part, à la composante s' de P dont la valeur est $P\ sin.\ \varphi$, et de l'autre au frottement dont la valeur est ici la composante n' ou $P\ cos.\ \varphi$ multipliée par f, ou enfin $P f cos.\ \varphi$.

Si la force F se rapproche de l'horizon comme en F', il est facile de voir que sa composante n normale au plan tend alors à presser le corps contre le plan. Il faut donc changer son signe dans l'équation d'équilibre, ce qui donne pour ce cas :

$$F = P \frac{sin.\ \varphi + f.\ cos.\ \varphi}{cos.\ \alpha - f.\ sin.\ \alpha} \dots (2).$$

Lorsque la force F est horizontale, on a $\alpha = \varphi$ et

$$F = P \frac{sin.\ \varphi + f.\ cos.\ \varphi}{cos.\ \varphi - f.\ sin.\ \varphi} \dots (3).$$

Si dans l'équation (3), on se donnait l'inclinaison φ par la hauteur du plan incliné et sa base, la longueur du plan étant prise pour unité, il est facile de voir que l'on a dans cette hypothèse,

$$sin.\ \varphi = h\text{, et } cos.\ \varphi = b\ ,$$

de sorte que l'équation (3) devient

$$F = P \frac{h + f.\ b}{b - f.\ h} \dots (4).$$

Pour avoir le travail, il faut multiplier par la projection od du chemin parcouru oe ou e sur la direction de la force, ce qui donne

$$F.od = P.od \frac{h + f\ b}{b - f.\ h}.\ \text{Or } od = b.e;$$

donc $F.od = P\,b.e\dfrac{h+f.b}{b-f.h} = \dfrac{P.b.e.h + P.b.^2e.f}{b-f.h} = P.e.h$

$$\frac{b}{b-f.h} + \frac{P.b.^2e.f}{b-f.h} = P.e.h\left\{1 - \frac{b-f.h-b}{b-f.h}\right\} +$$

$$\frac{P.b.^2e.f}{b-f.h} = P.e.h + \frac{P.e.f}{b-f.h}.$$

toutes réductions faites. Or, $P.e.h$ est la valeur du travail utile, car $ed = h.e$, donc le travail du frottement est

$$\frac{P.e.f}{b-f.h}.$$

Si l'on fait des applications de cette formule, on trouve que le travail

$$\frac{P.e.f}{b-f.h},$$

absorbé par le frottement, est d'autant plus grand que l'inclinaison du plan sur l'horizon est plus petite, et même que ce travail peut égaler plusieurs fois le travail utile. Enfin, quand $h=o$, $b=1$, le travail utile devient nul, et le travail total de la puissance se réduit au travail du frottement qui dans ce cas est exprimé par $P.e.f$ comme on devait s'y attendre.

DE LA VIS.

§ 261. *Conditions d'équilibre.* — La machine appelée *vis*, n'est autre chose qu'un plan incliné tournant en spirale autour d'un axe rectiligne : c'est ce que l'on comprendra aisément d'après sa génération.

Soit $ABA'B'$, (*fig.* 143), un cylindre droit à base circulaire, dont le rayon soit r, et la hauteur quelconque. Par les centres C et C' de ses bases, menons deux diamètres AB, $A'B'$, parallèles entre eux, et prolongeons-les hors du cylindre, d'une quantité égale au développement des bases, ou à $2\pi r$. Si l'on joint les points extrêmes de ces prolongements par une ligne droite HH', cette ligne sera la hauteur du cylindre. Divisons-la en un certain nombre de parties égales, dont h soit la hauteur commune, et prenant les mêmes divisions sur l'arête BB', menons autant de parallèles $M_1 m_1$, $M_2 m_2$...... à la base BH. Enfin, menons aussi les diagonales BM_1, $m_1 M_2$, $m_2 M_3$....... de chaque division de BB' à celle de HH' qui lui est immédiatement supérieure. Toutes ces diagonales seront évidemment parallèles entre elles; et leur inclinaison commune sur l'horizontale BH étant désignée par i, on aura pour toutes

$$\text{tang. } i = \frac{h}{2\pi r}.$$

De sorte que l'inclinaison i sera connue.

D'après cette construction, le plan rectangulaire $BHH'B'$ est le développement de la surface latérale du cylindre. Si on l'enroule sur cette surface, en le faisant tourner autour de l'arête BB', on sait que chaque diagonale BM_1, $m_1 M_2$....... décrit une portion d'une courbe appelée *hélice*, dont la partie décrite par chaque diagonale, porte le nom de *spire*, et chaque élément de cette courbe fait avec le plan horizontal un angle constant i. Conséquemment, si l'on suppose qu'un point matériel pesant M y soit posé et abandonné à lui-même, il devra descendre le long de l'hélice, par l'effort de la pesanteur; et si son poids est P, et qu'on veuille le retenir par une force F, dirigée dans le plan vertical de l'élément curviligne, sur lequel le poids P repose, en supposant que cette force fasse un angle φ avec la verticale, la condition d'équilibre sera, § 256.

$$\frac{F}{P} = \frac{\sin. i}{\sin. (\varphi - i)}.$$

Mais l'angle i est donné en fonction du contour du cylindre, et de la hauteur des divisions de l'axe, hauteur que l'on appelle le *pas de l'hélice*, au moyen de la formule déjà trouvée

$$tang.\, i = \frac{h}{2\,\pi\, r}.$$

Dans les usages pratiques, F est horizontale. Nous considérerons donc spécialement ce cas. Alors

$$\varphi = 90^{\circ}, \text{ et } F = P.\, tang.\, i = \frac{P\,h}{2\,\pi\, r};$$

$$\text{ou } \frac{F}{P} = \frac{h}{2\,\pi\, r} \dots \text{ (1)}.$$

En outre, la force ou puissance dont on dispose ne se trouve jamais appliquée immédiatement au point M de l'hélice. On la fait presque toujours agir sur ce point par l'intermédiaire d'un levier LO dont le point d'appui est placé en O sur l'axe du cylindre, la puissance F' étant appliquée horizontalement à l'extrémité L du levier. Alors la condition d'équilibre du levier donnant :

$$\frac{F'}{F} = \frac{r}{l} \dots \text{ (2)}.$$

Multipliant (1) et (2), il vient :

$$\frac{F'}{P} = \frac{h}{2\,\pi\, l}.$$

C'est-à-dire *que la puissance horizontale F' est au poids P qu'elle doit retenir, comme la hauteur h du pas de la vis est à la circonférence $2\,\pi\, l$ que la puissance F' tend à décrire.* Cette condition définitive est donc la même que si le poids P était posé sur une hélice de même pas que l'hélice primitive, mais décrite sur un cylindre d'un rayon l, ou encore sur une hélice dont l'inclinaison à l'horizon aurait pour tangente :

$$\frac{h}{2\,\pi\, l}.$$

§ 262. *Tracé du filet de la vis. Construction de l'écrou.*

Usages de la vis et de son écrou. — Maintenant, concevons un triangle quelconque abc (*fig.* 144), dont la base ac soit égale à la hauteur h du pas de l'hélice, et plaçons-le verticalement dans un plan mené par l'axe du cylindre, de manière que sa base ac coïncide avec une des arêtes génératrices. Puis, faisons tourner le plan diamétral avec le triangle autour du cylindre, en assujettissant les points a et b à monter sur sa surface suivant l'hélice décrite par les diagonales BM_1, $m_1 M_2$..... Dans ce mouvement tous les points du triangle décriront évidemment des hélices de pas égal, qui pourront être considérées comme tracées sur autant de cylindres de différents diamètres, ayant tous CC' pour *axe*. Cette construction engendrera l'espèce de surface courbe que l'on nomme une *vis triangulaire*, et le triangle générateur en est ce que l'on appelle le *filet*. Quelquefois ce triangle est remplacé par un rectangle $abcd$, situé de même dans un plan diamétral, et mû de la même manière. La surface ainsi engendrée s'appelle alors une *vis rectangulaire*. Généralement, sa dénomination est établie d'après la forme du filet générateur.

Au lieu du cylindre plein $ABCA'B'C'$, concevons un cylindre creux de même diamètre intérieur, qui lui soit concentrique; puis, ayant placé le filet générateur autour de $ABCA'B'C'$, pour lui faire engendrer la vis, supposons qu'en même temps ce filet creuse sa trace dans le cylindre plein extérieur. Il y formera une empreinte qui offrira en creux la même surface que la vis offre en relief. Cette surface enveloppante est ce que l'on nomme l'*écrou*. Nous en verrons tout à l'heure les usages. Pour le moment, nous nous bornerons à dire que, en général, on donne à l'écrou une hauteur totale moindre qu'à la vis, qu'il enveloppe seulement dans un petit nombre de tours. Alors, on peut faire parcourir à l'écrou toute la longueur de la vis, en le faisant tourner autour de son axe; et il monte ainsi ou descend, selon qu'on le tourne dans le sens qui lui fait décrire l'hélice en montant ou en descendant sur elle.

Maintenant, laissant toujours la vis verticale, concevons que la matière de l'écrou soit pesante, et ajoutons-y même un poids additionnel également vertical. Le poids total, que nous exprimerons par P, se répartira sur tous les points de contact par lesquels la surface creuse de l'écrou repose sur la surface saillante des filets; et ainsi, chaque élément superficiel des filets se trouvera pressé verticalement par une force p qui représentera la portion correspondante du poids P. Conséquemment, si l'on veut faire équilibre à ce poids partiel à l'aide d'une force horizontale appliquée à l'extrémité d'un levier de la longueur l, l'intensité de cette force ou puissance devra être égale à $\frac{p\,h}{2\,\pi\,l}$, h étant la hauteur du pas de l'hélice génératrice. Or, cette hauteur est la même pour tous les points des filets saillants ou creux. Ainsi, en supposant tous les poids partiels retenus par autant de bras de levier de la longueur l, l'expression de la puissance propre à chacun d'eux, conservera toujours le rapport $\frac{h}{2\,\pi\,l}$ comme facteur constant. Mais l'écrou étant solide, l'effort de chacune de ces puissances pour le faire tourner restera le même, quel que soit le point de son contour où l'on insère le levier, pourvu que la longueur du bras reste la même, ainsi que l'intensité de la puissance, et la direction relative de son action sur le contour du cylindre. Transportant donc ainsi tous les leviers partiels sur une même ligne diamétrale, les forces ou puissances horizontales qui les sollicitent perpendiculairement se réuniront en une seule résultante égale à leur somme, c'est-à-dire à la somme de toutes les quantités $\frac{p\,h}{2\,\pi\,l}$, laquelle deviendra ainsi $\frac{P\,h}{2\,\pi\,l}$, P étant le poids total de l'écrou et de la charge verticale qui y est ajoutée.

Nous venons de supposer la vis fixe, et l'écrou libre de se mouvoir autour d'elle. Mais, si l'on voulait supposer au contraire l'écrou fixe et la vis mobile, avec l'addition d'une force qui la sollicitérait dans le sens de son axe, il est évident que les relations de cette force à la puissance horizontale, nécessaires pour lui faire équilibre, seraient exactement les mêmes.

On voit, par ce qui précède, qu'une force médiocre F appliquée à l'extrémité du levier l, peut exercer dans le sens de l'axe de la vis un effort P très considérable, d'autant plus considérable que le levier est plus long, et la hauteur du pas de vis moindre. Cette propriété rend la vis d'une utilité continuelle dans les arts mécaniques.

Par exemple, veut-on presser avec beaucoup de force des corps mous, tels que des papiers, du linge ou des plantes? On construit avec des pièces de bois un châssis solide $ABSS$, (*fig.* 145), dans lequel AB représente une table épaisse capable d'une grande résistance. TT est une autre table pareille, mais mobile verticalement entre les supports SA, SB. La pièce supérieure est une barre épaisse, percée en son milieu d'un écrou qui se trouve ainsi faire corps avec les supports. Dans cet écrou entre une vis OV dont la tête O terminée par un tourillon métallique t, tourne librement dans un trou percé sur la planche mobile TT.

Maintenant, si l'on fait tourner la vis autour de son axe par le moyen d'une force ou puissance horizontale, appliquée perpendiculairement à l'extrémité du levier OL, il est clair que selon le sens de cette rotation, la vis montera ou descendra dans son écrou, entraînant ou poussant la table mobile TT. Donc, dans ce dernier cas, s'il existe des corps compressibles dans l'espace $ABTT$, la force F' appliquée au levier l produira sur eux une pression P, dont la relation avec F' sera comme tout-à-l'heure :

$$F' = \frac{Ph}{2\pi l}; \text{ d'où } P = \frac{2\pi F' l}{h}.$$

Si la longueur l du bras de levier est très grande par rapport à la hauteur h du pas de la vis, la pression ainsi exercée par une force médiocre F' pourra devenir énorme. Les presses d'imprimerie, les balanciers qui servent à frapper les monnaies, et une foule d'autres applications mécaniques sont fondées sur ce procédé.

Mais la vis accompagnée de son écrou a encore un autre genre d'utilité dont nous n'avons pas dû parler jusqu'ici, parce qu'il est fondé sur l'adhérence physique qui s'établit entre les surfaces en contact de l'écrou, de la vis et des corps auxquels on les applique, lorsqu'on les serre fortement. Par exemple, veut-on fixer l'une à l'autre deux pièces de bois ou de métal *A*, *B*, (*fig.* 146)? On les perce toutes deux d'un trou circulaire, dans lequel on fait passer la pièce métallique *VV'* appelée *boulon*, dont l'extrémité *V'* est travaillée en forme de vis. Après que cette extrémité est sortie de *B*, on y place l'écrou par le bout *V'*; puis on le tourne à la main jusqu'à ce qu'il arrive au contact de la pièce *B*, en ayant soin de maintenir la tête de la vis fixe, pour que le boulon ne tourne point sous le frottement de l'écrou. Quand la tête *V*, ainsi que l'écrou *E*, sont arrivés au contact avec *A* et *B*, on continue de faire marcher l'écrou autant que possible, en le tournant par force avec la pièce *CC'* qui est un véritable levier et que l'on appelle une *clef*. L'effort *F*, ainsi exercé sur l'écrou, produit dans le sens de l'axe de la vis une pression énergique *P* qui comprime momentanément les pièces *A* et *B* et les serre l'une contre l'autre. A la vérité, lorsqu'on cesse de tourner le levier, la réaction élastique des deux pièces reproduit le même effort *P* en sens contraire; c'est-à-dire qu'elle tend à faire glisser obliquement les filets de l'écrou sur le plan incliné que forment les filets de la vis avec lesquels ils sont en contact, ce qui aurait pour effet de détourner l'écrou et de détruire le serrage. Mais la friction qui s'est établie sous la pression *P*, entre les surfaces de l'écrou et du boulon, jointe à celle qui s'opère également entre la surface plate de la tête de l'écrou et la pièce *B*, s'opposent à ce que l'écrou se tourne et empêche l'écart des deux pièces, qui demeurent ainsi fixées l'une à l'autre avec une grande énergie.

Dans cette opération, l'écrou est mobile et la vis fixe; mais on peut également employer la disposition inverse, comme on le voit, (*fig.* 147). Pour cela, on commence par percer la pièce *A* d'un trou cylindrique qui traverse toute son épaisseur, et qui est destiné à laisser passer le boulon *VV'*. On prolonge ce trou dans une partie de l'épaisseur de *B*, du côté de la face *ba* qui doit être en contact avec *A*, et l'on donne à ce prolongement assez de profondeur pour que le boulon *VV'* puisse se loger tout entier dans les deux pièces. Il ne reste plus qu'à fixer l'écrou *EE* dans la pièce *B*; pour cela on agrandit carrément le trou cylindrique fait dans cette pièce, de manière à lui donner précisément la largeur nécessaire pour recevoir l'écrou à une certaine profondeur, en conservant son axe dans l'axe du cylindre. Au-delà de cette profondeur, on laisse au trou cylindrique ses premières dimensions. Quand l'écrou est logé dans l'ouverture carrée ainsi pratiquée pour le recevoir, on l'y retient en le bouchant au dehors, par l'introduction d'un morceau de bois ou de métal, de même dimension, que l'on y fait entrer par force, en pratiquant ou réservant à son centre le trou cylindrique nécessaire pour laisser passer le boulon. Cela fait, on replace les pièces *A* et *B* l'une contre l'autre, et l'on introduit le boulon *VV'* par la première, jusqu'à ce qu'il rencontre l'écrou *EE*; alors on l'y engage en le tournant, d'abord à la main, en retenant les pièces *A* et *B*. Mais lorsqu'il est assez enfoncé pour que sa tête *V* touche la pièce *A* et y fasse naître une friction qui rend ce mouvement plus difficile, on le continue en agissant sur la tête *V* de l'écrou par le moyen d'une clef qui s'y emboîte parfaitement, ce qui donne ainsi à la main l'avantage du levier. On oblige ainsi les filets du boulon en *V'* à s'engager de plus en plus dans l'écrou, et à le traverser totalement, en produisant une pression *P* très énergique dans le sens de l'axe, ce qui serre fortement les pièces *A* et *B* l'une contre l'autre. Quand on cesse d'agir ainsi sur la tête *V* du boulon, c'est le frottement de cette tête contre la pièce *A*, aussi bien que celui des filets de l'écrou et de la vis entre leurs mutuelles surfaces, qui empêchent la réaction élastique des deux pièces de détourner le boulon et de détruire le serrage. La vis employée de cette manière s'appelle *boulon à écrou perdu.*

Lorsque la pièce *A*, (*fig.* 148), n'a que peu d'épaisseur, par exemple, lorsqu'on veut fixer une simple planche de bois ou une plaque métallique sur la pièce *B*, on creuse l'écrou dans le corps même de cette pièce, et si elle est en bois, on fait cette opération avec la vis même. Alors on emploie les vis à filets triangulaires, et que l'on appelle *vis à bois.* On leur donne un filet très-mince et un peu coupant, pour qu'elles puissent creuser plus aisément leur place. Par le même motif on leur donne une forme légèrement conique; enfin, leurs filets sont très espacés, pour que l'assemblage des fibres du bois comprises entre deux filets consécutifs, ait assez de consistance pour résister à l'effort que la réaction élastique des deux pièces fait pour les briser.

On emploie encore les vis à écrou stationnaire, lorsque la pièce *B* est elle-même métallique; mais alors la dureté du métal ne permet plus de leur faire creuser leur écrou elles-mêmes. Dans ce cas on commence encore par pratiquer dans la pièce *B*, au moyen d'un *foret*, un trou cylindrique d'un diamètre un peu plus grand que le diamètre intérieur de la vis. Puis on y introduit une vis conique de même pas en acier, dont les filets ont été échancrés à la lime, de distance en distance, et ensuite trempés fortement. Cette vis, ainsi disposée, se nomme un *taraud.* Il est facile de se rendre raison de la disposition des entailles pratiquées dans ses filets. Elle a pour but de mettre à nu ces filets. De plus elle les rend assez coupants pour qu'ils puissent creuser leur trace dans le trou cylindrique et enlever toute la portion de métal qui s'oppose à l'entrée du taraud dans ce trou. Pour vaincre la résistance qu'offre la cohésion des molécules du métal, on introduit la tête du taraud dans un trou percé au centre d'un levier à bras très longs, nommé *tourne-à-gauche.* Puis, en appuyant fortement sur les bras de ce levier, et les faisant tourner alternativement à droite et à gauche, on force le taraud à tracer d'abord une hélice sur la surface intérieure du trou cylindrique. En répétant la même manœuvre, et engageant de plus en plus le taraud dans le cylindre creux, on approfondit cette première trace, et l'on parvient enfin à reproduire en creux, dans la pièce *B*, le même filet que celui du taraud. Or, comme nous avons supposé que ce filet était le même que celui de la vis que l'on veut employer, il s'ensuit que la pièce *B* peut servir d'écrou à cette vis. Par conséquent, si la pièce *A* est percée d'un trou assez grand pour que la partie cylindrique de la vis puisse y passer librement, on peut en engageant le filet de celle-ci dans le filet creux de *B*, et ensuite les tournant autant que possible, faire adhérer les deux pièces métalliques *A* et *B*.

La vis est d'un usage continuel dans les ateliers où l'on travaille le bois et les métaux. C'est à l'aide d'une vis et de son écrou qu'on rapproche les mâchoires d'un étau, et qu'on parvient à saisir fortement la pièce que l'on veut travailler.

La poupée mobile, dans le tour à pointes, est traversée par un cylindre creux terminé en pointe, et qui est destiné à fixer la pièce à tourner. Ce cylindre creux est taraudé à l'intérieur, et porte à l'extérieur une cannelure pratiquée suivant une génératrice. Un bouton ou arrêt, appelé *argot*, placé à la surface intérieure de la poupée, est logé dans cette cannelure, et ne permet au cylindre creux qu'un mouvement rectiligne de va et vient. Ce mouvement lui est imprimé par une vis de même pas que l'écrou, dont la tête est fixée dans une boîte, et qui reçoit un mouvement de rotation d'une manivelle ou d'un petit volant, ce dernier étant préféré pour éviter que le poids de la manivelle ne détruise en partie le serrage. A l'aide du mouvement circulaire de la vis, on produit donc le mouvement rectiligne de la pointe pour serrer ou desserrer la pièce à tourner, et cela par des mouvements doux; car, pour un tour entier de la manivelle ou pour une révolution totale de la vis, l'écrou n'avance ou ne recule que d'une quantité égale au pas de la vis.

Dans le même appareil on fait encore un usage plus remarquable de la vis. Lorsqu'on veut fileter une vis au peigne droit, c'est-à-dire tracer des filets d'un pas donné sur la surface extérieure d'un cylindre, on dispose à la gauche de la poupée fixe un demi-cylindre creux taraudé appelé clef, et dont le pas est égal à celui de la vis que l'on veut faire. Une *mère*, ou vis propre à servir de modèle, et dont l'axe est le même que celui du cylindre à fileter, a un mouvement de rotation qui lui est imprimé par une manivelle à main. Dans ce mouvement, la pièce cylindrique se meut horizontalement, et en lui présentant le peigne maintenu fixement sur la chaise du tour, cet outil trace d'abord l'hélice de pas donné sur la surface extérieure du cylindre, approfondit peu à peu cette trace, et finit enfin par achever les filets, et leur donner une profondeur convenable. On fait revenir la mère sur elle-même à l'aide de la manivelle, chaque fois qu'elle a achevé de parcourir sa course sur la clef.

La vis est d'un usage non moins important dans la machine à alléser. Le mode d'action de cette machine est fondé sur ce que, lorsqu'on imprime à une vis et à son écrou deux vitesses différentes autour de leur axe commun, l'écrou se meut sur la vis ou la vis dans l'écrou, d'une quantité qui, pour une révolution de l'écrou, par exemple, est une partie du pas de la vis que l'on peut exprimer en fonction des vitesses de l'écrou et de la vis. En effet, si l'on imprimait à l'écrou et à la vis deux vitesses qui fussent égales, l'écrou ne cesserait pas d'être en contact avec les mêmes points du filet de la vis. Si, au contraire, l'écrou fait deux révolutions, par exemple, pendant que la vis n'en fait qu'une, pendant ces deux révolutions l'écrou n'avancera que d'un pas de la vis, et dans une de ces révolutions d'un demi-pas; car, si la vis était restée fixe, l'écrou eût parcouru deux pas pendant ses deux révolutions; mais, à cause du mouvement simultané de la vis, l'écrou n'a réellement avancé que de la différence des chemins parcourus simultanément, c'est-à-dire d'un pas, et dans une de ses révolutions d'un demi-pas. De même, si l'écrou faisait trois tours pendant que la vis n'en fait qu'un, l'écrou n'avancerait que de deux pas pendant ces trois révolutions, et de $\frac{2}{3}$ de pas pendant une seule. En général, si n est le nombre de tours de l'écrou et n' celui de la vis pendant le même temps, la quantité dont avancera l'écrou pendant ses n révolutions sera égale à $(n - n')\,h$, en désignant le pas par h, et pendant une révolution à

$$\frac{n-n'}{n}\,h.$$

Voici maintenant de quelle manière les vitesses sont imprimées à la vis et à l'écrou dans la machine à alléser. La vis est placée sur l'axe du cylindre à allésér et est enveloppée dans toute sa longueur par un cylindre creux auquel est fixé l'écrou intérieurement. C'est l'écrou qui porte l'outil destiné à creuser intérieurement le cylindre, en traçant une hélice continue sur sa surface. La force motrice est appliquée à l'écrou, qui tourne ainsi librement et indépendant de la vis, et son mouvement se transmet à la roue b armée d'un certain nombre de dents. Le mouvement de cette roue se communique à la roue a, (*fig.* 149), dont le nombre de dents est plus grand, par les roues c qui ont autant de dents que la roue a. De cette manière, lorsque le mouvement est imprimé à l'écrou, si n est le nombre de dents de la roue a, et n' celui de la roue b, la roue b fera n tours pendant que a en fera n', et l'outil, pour une révolution de l'écrou qui le porte, avancera dans le sens de l'axe de la vis d'une quantité égale à

$$\frac{n-n'}{n}\,h.$$

Par exemple, dans la machine à allèser de l'Ecole d'Angers, la vis a un pas de $0^m,009$, la roue b a 39 dents et la roue a en a 40. La quantité dont avance l'outil dans une de ses révolutions est donc égale à

$$\frac{40-39}{40}\,0^m,009=0^m,000225.$$

§ 263. *Du frottement dans la vis.* — Les considérations du § 260 nous conduisent immédiatement aux conditions d'équilibre dans la vis, en tenant compte du frottement; et l'on aura, en désignant par h le pas de la vis et par r le rayon du cylindre sur lequel est tracée l'hélice moyenne, la force horizontale F', équation (4), agissant tangentiellement au cylindre,

$$F'=P\,\frac{h+f.2\pi r}{2\pi r-fh};$$

et si l est le bras de levier de la puissance F, on aura

$$F=\frac{r}{l}P\,\frac{h+f.2\pi r}{2\pi r-f.h}.$$

Pour avoir le travail dans un tour, il faut multiplier F par le chemin parcouru $2\pi l$, ce qui donne

$$2\pi l F=2\pi r P\,\frac{h+f.2\pi r}{2\pi r-f.h}=P\,\frac{h+f.2\pi r}{1-\frac{f.h}{2\pi r}}=\frac{Ph}{1-\frac{f.h}{2\pi r}}+$$

$$\frac{Pf.2\pi r}{1-\frac{f.h}{2\pi r}}=Ph\left\{1+\frac{1-\frac{f.h}{2\pi r}-1}{1-\frac{f.h}{2\pi r}}\right\}+\frac{P.f.2\pi r}{1-\frac{f.h}{2\pi r}},$$

et, en réduisant,

$$2\pi l.F=P.h+P.f\left\{\frac{h^2+4\pi^2r^2}{2\pi r-f.h}\right\}. \quad . \quad . \quad (1).$$

On aurait pu déduire immédiatement ce résultat de celui du § 260, qui donne:

$$F.od.=Pek+\frac{Pef}{b-fk},$$

Dans lequel on aurait fait :

$$od=2\pi l, e=\sqrt{h^2+4\pi^2r^2}, b=\frac{2\pi r}{\sqrt{h^2+4\pi^2r^2}}, \text{ et}$$

$$h=\frac{h}{\sqrt{h^2+4\pi^2r^2}},$$

car il ne faut pas oublier que, dans l'expression du § 260, les quantités b et h représentaient les rapports de la base et de la hauteur du plan incliné, à la longueur prise pour unité. Dans l'équation précédente (1), h et r sont donc exprimés en mètres.

Cette équation nous fait voir que le travail de la puissance, dans une révolution, est égal au travail utile Ph, augmenté du travail du frottement

$$Pf\left\{\frac{h^2+4\pi^2r^2}{2\pi r-f.h}\right\}.$$

§ 264. *Dimensions des vis à filets carrés ; travail de ces vis en tenant compte du frottement.* — En examinant la valeur précédente du travail de la vis, on reconnaîtra sans peine que le numérateur croît beaucoup plus vite que le dénominateur, par l'accroissement de r ou du rayon de l'hélice moyenne ; car le rayon entre au carré dans le numérateur. Il est donc nécessaire de régler les dimensions du noyau et des filets sur la charge que la vis doit supporter.

Dans les vis simples (*G D* § 119), on fait le vide égal au plein et égal à la saillie du filet. Cette dernière est égale à la moitié du pas. Dans la vis à deux filets, la saillie est le quart du pas....

On admet qu'il ne faut pas charger les vis carrées de plus de 2 k. 8 par chaque millimètre carré de section de noyau. Si donc d est le diamètre de ce noyau, en appelant P la charge de la vis dans le sens de son axe, on devra avoir

$$2{,}8\,\frac{\pi d^2}{4}=P.$$

D'où l'on tire :

$$d=\sqrt{\frac{4P}{2,8\pi}}, \text{ ou}$$

$$d=0,674\sqrt{P}.$$

d est ici trouvé en millimètres.

Pour déduire de cette donnée les autres dimensions des vis, nous remarquerons qu'en donnant à l'écrou une épaisseur égale à trois filets successifs, cette épaisseur sera égale à 6 fois la saillie s ou à 6 s. Alors la surface de charge sur cet écrou, ou surface de rupture, sera

$$\frac{6s.\pi d}{2},$$

le plein étant égal au vide; et comme la charge pourrait agir à l'extrémité des filets, et qu'elle aurait ainsi un bras de levier double, on ne donne que la moitié de cette valeur, ou

$$\frac{3}{2}s\pi d$$

à cette surface de rupture. Les résistances du fer et du bronze étant à peu près égales, nous pouvons égaler les deux surfaces de rupture, et nous aurons

$$\frac{3}{2}s\pi d=\frac{\pi d^2}{4}, \text{ ou}$$

$$s=\frac{1}{6}d=0,112\sqrt{P}.$$

On en déduit le pas égal à 2 fois la saillie, ou

$$h=\frac{d}{3}=0,224\sqrt{P}.$$

Ces valeurs ne sont point absolues, et sont peut-être exagérées. M. A. Morin assigne 0,1 d à la saillie des filets, et

$\frac{1}{5}d$ au pas.

Il est aisé maintenant d'appliquer le résultat du § 263. Le rayon du noyau étant $3s$ et celui du cylindre extérieur $4s$, le rayon de l'hélice moyenne est

$$\frac{3s+4s}{2}=\frac{7}{2}s=\frac{7}{4}h.$$

Faisant

$$f=0{,}17 \text{ et } r=\frac{7}{4}h$$

dans la valeur du travail du frottement qui est

$$Pf\left\{\frac{h^2+4\pi^2r^2}{2\pi r-fh}\right\},$$

on trouve :

$$1{,}914\,Ph;$$

ce qui nous apprend que le travail du frottement, pour le cas que nous considérons, est presque double du travail utile Ph. L'équation du travail devient

$$2\pi lF=Ph+1{,}914Ph.$$

Dans ce qui précède nous avons supposé la vis ou l'écrou tout-à-fait libre, tandis que l'écrou ou la vis reste fixe, et nous n'avons tenu compte que de la charge qui repose sur les filets.

Si l'une des extrémités de la vis était appuyée contre un obstacle, et qu'on voulût avoir égard au frottement qui s'y fait, P' étant la pression qui s'exerce contre cet appui, et r' le rayon du cercle qui frotte, la résistance du frottement sera $f.P'$, et son bras de levier, § 196, $\frac{2}{3}r'$. On aura donc pour la valeur complète du travail de la puissance

$$2\pi l.F=Ph+P.f.\left\{\frac{h^2+4\pi^2r^2}{2\pi r-f.h}\right\}+2\pi f.P'.\frac{2}{3}r'.$$

Enfin, on peut supposer que l'écrou tourne autour de la vis en restant à la même hauteur, la vis s'élevant verticalement en entraînant la charge. On aura ici à considérer la résistance due à la charge, le frottement des filets, et enfin celui de l'écrou contre la base qui le supporte. On en voit des exemples dans la manœuvre des vannes, des grilles de pont. L'écrou frotte suivant une couronne qui glisse dans une rainure, et est mis en mouvement par des leviers posés dans ses faces. P étant toujours la charge, si r' est le rayon moyen de l'anneau, fP sera le frottement et $2\pi r' fP$ le travail de ce frottement, de sorte que le travail total sera

$$2\pi l F' = Ph + Pf\left\{\frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh}\right\} + 2\pi r' fP.$$

Soit par exemple

$$P = 300^{k},\ f = 0{,}1,\ r' = 0^{m}{,}50.$$

Le travail seul dépensé par le frottement de l'écrou sera

$$2\pi r' fP = 94^{km}{,}2,$$

dans un tour, et s'il faut par exemple trois secondes pour faire deux tours, en une seconde le travail dépensé sera

$$\frac{2}{3}\,94^{km} = 63^{km}.$$

Le travail d'un homme étant d'environ 6^{km}, il faudra donc dix hommes de plus pour manœuvrer le système, en ayant égard au simple frottement de l'écrou. On doit donc éviter toutes les dispositions dans lesquelles c'est l'écrou qui tourne. La meilleure manière est d'appuyer la vis sur des pivots tournants, et de faire monter l'écrou dans le sens de son axe. C'est ce qu'on fait pour la plupart des pressoirs, dans lesquels les vis reçoivent leur mouvement de roues fixées aux têtes des vis.

§ 265. *Du frottement des vis triangulaires, leurs dimensions.* — Les considérations qui conduisent à la mesure du travail du frottement dans ces vis ne sont plus aussi simples que dans le cas précédent, mais il s'exprime de la même manière, si ce n'est que le coëfficient du frottement f est divisé par m, ou par le rapport de la hauteur du triangle générateur à son côté; de sorte qu'on a

$$2\pi l F = Ph + \frac{f}{m} p \left\{ \frac{h^2 + 4\pi^2 r^2}{2\pi r - fh} \right\}.$$

m étant toujours une fraction, on voit que dans cette vis le frottement est plus grand que dans la vis à filet carré.

Appliquons cette formule à un exemple. Supposons que le triangle générateur soit équilatéral, et que la hauteur de ce triangle, (*fig.* 144), ou la saillie du filet, soit le tiers du rayon du noyau. Le rayon moyen sera encore

$$\frac{3s + 4s}{2} \text{ ou } \frac{7}{2} s.$$

Or, la hauteur du triangle équilatéral en fonction de son côté ou du pas de la vis h est égale à

$$\frac{h}{2}\sqrt{3} = 0{,}866 . h . = s.$$

Donc le rayon moyen est égal à

$$\frac{7}{2} . 0{,}866\, h = 3{,}031\, h.$$

La quantité m est

$$m = \frac{s}{h} = \frac{0{,}866\, h}{h} = 0{,}866.$$

Substituant dans la formule, et faisant $f = 0{,}17$, on trouve, tous calculs faits,

$$2\pi l F = P h + 3{,}78 P h.$$

C'est-à-dire que le travail absorbé par le frottement est dans ce cas près de quatre fois le travail utile.

Les dimensions des vis à bois qui sont généralement triangulaires s'établissent d'après cette condition qu'elles ne doivent porter que $0^k{,}8$ sur un millimètre carré de section du noyau, ce qui donne la formule

$$0{,}8 \frac{\pi d^2}{4} = P, \text{ d'où } P = 1{,}26\sqrt{P}.$$

Les autres dimensions se détermineront comme pour les vis à filet carré, et d'après la forme du triangle générateur.

§ 266. *Procédé général pour trouver les conditions d'équilibre dans une machine composée.* — La similitude des procédés employés pour arriver à la condition définitive de l'équilibre entre la puissance et la résistance dans une machine composée des éléments simples, levier, poulie...... nous conduit à établir d'une manière assez générale le moyen de trouver le rapport de la puissance à la résistance. Il suffit pour cela d'écrire les conditions d'équilibre de chaque élément simple en particulier, ce qui donne une série de proportions qu'on multiplie ensuite terme à terme. En effet, en considérant la première machine à laquelle est appliquée la puissance, cette machine est liée à la suivante par quelques-uns de ces points qui supportent une pression quelconque dont l'action met en équilibre la puissance, et qui peut être ainsi considérée comme la résistance dans cette première machine. En désignant cette pression par p et la puissance par P, on aura donc pour les conditions d'équilibre de cette machine : $P : p :: a : b$, en désignant par a et b des quantités inhérentes à cette machine, et données par les conditions d'équilibre précédemment établies. Présentement, si nous considérons la seconde machine, la pression p, qui était une résistance pour la première, devient une puissance pour celle-ci, et elle est équilibrée par une pression opérée par la troisième machine aux points par lesquels elles se communiquent entre elles. En désignant cette nouvelle pression par p_1, on aura donc pour l'équilibre dans cette deuxième machine, $p : p_1 :: a_1 : b_1$. En continuant ainsi jusqu'à la dernière machine à laquelle est appliquée la véritable résistance, on aura pour cette dernière $p_n : R :: a_n : b_n$. Multipliant toutes ces proportions terme à terme, il vient :

$$P.\ p.\ p_1 .. p_n : p.\ p_1.\ p_2 .. p_n.\ R :: a.\ a_1.\ a_2 .. a_n : b.\ b_1.\ b_2 .. b_n.$$

En supprimant les facteurs communs aux deux termes du premier rapport, il vient, en définitive :

$$P : R :: a.\ a_1.\ a_2 \ldots a_n : b.\ b_1.\ b_2 \ldots b_n.$$

Le rapport de la puissance à la résistance sera donc connu, puisqu'il est exprimé par des quantités a, a_1.... b, b_1.... qui sont des éléments de la machine proposée. En procédant ainsi, on trouvera avec la plus grande facilité les conditions d'équilibre dans un treuil réuni à un système de moufles, dans le cric, etc.

§ 267. *Conditions d'équilibre dans la vis sans fin.* — Par exemple, on emploie quelquefois la vis pour communiquer à une roue dentée un mouvement de rotation sur son arbre. Pour cela, (*fig.* 150), après avoir donné à la vis une hauteur de pas égale à une des divisions de la roue dentée, on la dispose de manière que son axe soit dans le plan de la roue, et que son filet engrène avec les dents. Cela posé, lorsqu'une puissance F fait tourner la vis sur son axe, au moyen d'une manivelle, le filet entraîne les dents, et exerce sur elles une pression dans le sens de l'axe de la vis. Cette pression met en équilibre la résistance P appliquée à l'arbre de la roue.

Lorsqu'on emploie la vis à cet usage, on la nomme *vis sans fin.*

Pour trouver le rapport de la puissance à la résistance, il suffit d'établir les conditions d'équilibre de chaque machine en particulier. Si nous désignons par p la pression exercée sur les dents de la roue, nous aurons pour la vis

$$F : p :: h : 2\pi l$$

et pour la roue dentée

$$p : P :: r : R.$$

Multipliant terme à terme, il vient

$$F : P :: hr : 2\pi lR.$$

L'avantage que paraît présenter cette machine n'existe pas réellement, si l'on tient compte des frottements, et qu'on y applique la théorie du travail. En effet, les deux tiers du travail de la puissance sont déjà absorbés soit par le frottement des filets de la vis, soit même par le frottement de ses tourillons et de ses pivots. Enfin l'autre tiers est encore en partie absorbé par le frottement des dents de la roue et celui du tourillon de cette roue. Une très petite quantité de ce travail est donc appliquée à soulever le poids P.

§ 268. *Conditions d'équilibre dans le coin.* — Le *coin* est un prisme triangulaire de matière très dure, qui est destiné à séparer les parties d'un corps ou à produire de grandes pressions.

L'arête BC, (*fig.* 151), par laquelle on l'introduit dans la substance à diviser, se nomme le *tranchant* du coin; les deux faces parallélogrammiques $ABCD$ et $BCEF$ en sont les *côtés*, et la face $ADEF$ la *tête*.

Nous supposerons que la force employée pour enfoncer le coin agit normalement à la tête, car si cela n'avait pas lieu, on pourrait toujours supposer cette force décomposée en deux, l'une agissant normalement à la tête du coin et produisant seule l'action, et l'autre parallèlement à cette face et ne produisant aucun effet sur le coin.

Par la direction de la puissance P, (*fig.* 152), et perpendiculairement aux arêtes du coin, faisons passer une section ABD; la ligne AB pourra représenter la tête du coin, et les deux lignes AD, BD, les deux côtés. La résistance que la substance donnée offre à la séparation de ses parties peut être representée par deux forces R et R' agissant normalement aux faces AD et BD du coin, et ces deux forces doivent faire équilibre à la puissance P. Ou autrement, la puissance P, en exerçant son action sur la tête du coin, transmet cet action aux faces suivant des normales à ces faces; et, de quelque manière que l'on envisage le fait, nous aurons toujours à considérer ici trois forces P, R et R' respectivement normales au trois lignes AB, AD, BD, et qui doivent se faire équilibre. Si donc d'un point quelconque O de la direction de la puissance nous abaissons des perpendiculaires OR, OR', sur les deux faces ; et si, prenant une longueur OM pour représenter la puissance, nous menons par ce point des parallèles MR', MR, aux directions OR, OR'; les trois côtés OM, OR, RM, du triangle MOR, seront respectivement proportionnels aux trois forces P, R, R'; de sorte qu'on aura la suite

$$P : R : R' :: OM : OR : RM.$$

Mais le triangle MOR est semblable au triangle ABD, comme ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de ce dernier triangle; donc on aura $OM : OR : RM ::$ $AB : AD : BD$. Donc alors,

$$P : R : R' :: AB : AD : BD;$$

c'est-à-dire que, si la puissance est représentée par la tête du coin, les résistances éprouvées sur les faces seront représentées par les côtés du coin ; et comme dans la pratique, les deux côtés sont toujours égaux, la suite de rapports qui précède se simplifie, car on a $AD = BD$, et par suite $R = R'$; les conditions d'équilibre deviennent alors,

$$P : R :: AB : AD.$$

On voit aisément que dans le coin, la puissance P aura d'autant plus d'avantage sur la résistance R, que la tête du coin sera plus petite relativement à son côté. Il sera donc avantageux de se servir de coins très aigus.

§ 269. *Formes diverses du coin et son application aux outils.* — La forme prismatique n'est pas toujours celle que l'on donne au coin. Tantôt c'est une pyramide à trois ou quatre faces, tantôt c'est un prisme tronqué ; souvent enfin c'est un cône terminé par un cylindre, (*fig.* 153).

Presque tous les outils des arts se rapportent au coin. Tels sont les divers ciseaux, les couteaux, les clous, les limes, les haches, les poinçons, les dents, les griffes, etc. Les limes sont des prismes méplats dont les surfaces sont striées d'entailles faites au ciseau. Ces entailles, pratiquées sous un certain angle, sont recroisées par d'autres faites sous un angle différent, de manière à former de petites pyramides, ou un grand nombre de coins dont les pointes ou tranchants arrachent la matière.

Les scies sont un assemblage de coins (*fig.* 154), dont la face intérieure *a b* est légèrement inclinée en se dirigeant vers le tranchant. Ce dernier, dans le sens de l'épaisseur de la lame, s'incline alternativement d'une dent à l'autre, tantôt à gauche, tantôt à droite, comme en *d* et en *c*. Enfin ces dents sont dévoyées de part et d'autre du plan de la lame, de manière à former ce qu'on nomme la *voie*, afin que l'ouverture faite dans le bois soit plus large que l'épaisseur de la scie, et que celle-ci puisse jouer plus librement. Tous les coins, quels qu'ils soient, sont toujours destinés à agir par leur tranchant ou par leurs extrémités pointues. Il y a donc, pour chaque outil, un angle convenable selon lequel il convient de le déterminer. Trop aigu, il pourrait se rompre; il ne saurait s'enfoncer, au contraire, s'il était trop obtus. Pour avoir la limite des inclinaisons des faces qui aboutissent au tranchant de chaque outil, il faudrait étudier parmi les outils destinés au même usage, celui qui marche le mieux; cette étude est du plus haut intérêt pour l'ouvrier. Quoiqu'il en soit, on voit qu'il y a une relation nécessaire entre l'angle du coin et la résistance des matières à diviser. Si cette matière est très dure, comme du fer percé à froid, l'angle du biseau sera de 90°; les emporte-pièces, les burins, sont de ce genre. Pour des matières moins dures, l'angle n'a pas besoin d'être aussi ouvert. Les ciseaux des varlopes, par exemple, sont terminés par des angles réduits à 30°. Remarquez que ces ciseaux taillent le bois dans la longueur de ses fibres, et que ces dernières offrent une résistance beaucoup plus forte perpendiculairement à leur longueur; aussi donne-t-on un angle plus obtus à la *bisaigüe*, laquelle est destinée à travailler le bois dans un sens perpendiculaire à ses fibres. Cet angle devient, au contraire, extrêmement aigu pour l'instrument avec lequel on coupe les substances molles, telles que les viandes et le pain. Il en est de même à l'égard des rasoirs, parce que les poils, quoique durs, ne sont pas, à cause de leur isolement sur la peau, susceptibles d'une grande résistance.

Quoique d'un usage très fréquent dans les arts mécaniques, le coin dépense en frottements une portion très considérable de la force motrice, comparativement à celle qui est utilisée, comme cela a lieu aussi pour la plupart des outils. On évite en partie cette perte de force en les polissant, et en frottant fréquemment leurs tranchants avec des matières grasses, et parmi ces dernières on préfère le suif au vieux oing.

L'inclinaison sous laquelle on présente l'outil à la matière n'est pas non plus indifférente. Soit un ciseau *A B C D*, (*fig.* 155), terminé par le plan incliné *C D*, et chassé perpendiculairement à la surface *L M* de la matière par la force *F*. Si le tranchant *C* se trouve à l'extrémité de la force *A C* parallèle à la force *F*, il est évident que la résistance *R* contre cette face est bien moindre que la résistance *R'* exercée contre la face inclinée *C D*. Car, d'après la théorie du coin, l'une est proportionnelle à *O C*, tandis que l'autre est proportionnelle à *C D*. Il résulte de là que le ciseau tendra à marcher vers la gauche, plutôt que vers la droite, et qu'après un petit enfoncement *O C* il cessera de s'avancer. Mais alors l'ouvrier ne manque pas de retourner l'instrument, la face *C D* en avant, et la face *A C* en arrière ; puis il enlève la partie *O C D*, en inclinant légèrement et en faisant mordre le tranchant de façon que la nouvelle face inférieure éprouve à son tour une résistance moindre. Ces deux opérations seront continuées alternativement jusqu'au fond du trou ou de la mortaise que l'on veut pratiquer en *L M*. Dans le rabot (*fig.* 156), le ciseau est couché, et le fer tendrait à s'enfoncer de plus en plus, si l'instrument, appuyé sur la face du bois qu'on veut aplanir, ne s'y opposait, et si d'ailleurs la face inférieure du fer, par sa grande résistance, ne tendait à relever l'instrument. Aussi le fer a-t-il deux positions distinctes, selon qu'on veut enlever de minces copeaux, ou faire des rainures dans le bois. Pour le premier objet, le tranchant est en avant, et la face inférieure couchée en arrière. Dans le deuxième cas, l'outil est retourné, et cette face occupe une position antérieure et verticale. Ces exemples montrent donc bien le rôle que joue l'inclinaison des faces dans l'effet des outils.

DES FORCES MOTRICES ET DE LEUR MESURE.

§ 270. *Force d'inertie ; sa mesure.* — Nous avons déjà défini l'inertie, § 2, l'indifférence que la matière éprouve soit pour le repos, soit pour le mouvement. Lorsqu'un corps est en repos, il faut une force pour l'en faire sortir, et une fois mis en mouvement, il faut une nouvelle force pour détruire ce mouvement, sans quoi le corps persisterait indéfiniment dans ce nouvel état.

Dans ces deux cas, soit que la force qui le sollicite lui imprime un mouvement, ou qu'elle détruise celui qu'il possède, ce corps réagit ou oppose une résistance égale à la force, car c'est un axiôme de mécanique que la *réaction est toujours égale et contraire à l'action.* C'est cette résistance qui mesure l'inertie de la matière du corps. C'est par conséquent aussi la mesure de la force motrice. Soit M la masse du corps mis en mouvement par une force F, ou soit F la résistance ou la force d'inertie opposée par la masse M au mouvement; cette force imprimera à la masse M, au bout d'une seconde, une vitesse φ. Mais si cette masse, dont le poids est $M g$, § 184, était abandonnée à l'action de la pesanteur, cette force lui imprimerait au bout d'une seconde une vitesse g. Or, par un autre axiôme de mécanique, les forces sont entr'elles comme les vitesses qu'elle communiquent aux corps dans le même temps. On aura donc

$$F : Mg :: \varphi : g;\ \text{d'où}\ F = M\varphi.$$

On conclut de là qu'une force motrice qui met une masse M en mouvement, ou, ce qui revient au même, la force d'inertie d'une masse M est mesurée par le produit de cette masse par la vitesse qui lui a été imprimée au bout d'une seconde.

§ 271. *Force vive. Mesure du travail au moyen de la force vive.* — On appelle *force vive* d'un corps en mouvement le produit de sa masse par le carré de sa vitesse; soit donc V la vitesse communiquée à la masse M, l'expression de la force vive sera MV^2. Cherchons au moyen de cette nouvelle quantité l'expression du travail développé par la force F pour communiquer à la masse M cette vitesse V. Puisque cette force agit sans cesse sur la masse M, elle est accélératrice, et la valeur de la vitesse en fonction de l'espace parcouru sera donnée par l'équation $V^2 = 2\varphi E$, en désignant par φ la vitesse communiquée au bout d'une seconde. Si nous multiplions les deux membres de cette égalité par M, il vient $MV^2 = 2M\varphi E$. Or, d'après le paragraphe précédent, le produit de la masse M par la vitesse φ, communiquée au bout d'une seconde, est la mesure de la force motrice F. On aura donc $MV^2 = 2FE$; d'où

$$FE = \frac{MV^2}{2}.$$

Mais FE, produit de la force motrice par l'espace parcouru, est le travail de cette force; donc le travail effectué par une force motrice pour communiquer à une masse M une vitesse V, a pour mesure la moitié de la force vive que possède cette masse animée de cette vitesse.

§ 272. *Mesure du travail développé par la pesanteur.* — Il est facile d'appliquer ce que nous venons de dire au travail développé par la pesanteur : car le travail PH, que l'on produit en élevant un poids P à la hauteur H, est identiquement égal à celui que produit le même poids en descendant de la même hauteur. En effet, c'est toujours la même résistance qui est vaincue dans les deux cas sur le même chemin. Mais la hauteur H peut être remplacée par sa valeur $\frac{V^2}{2g}$ en fonction de la vitesse acquise. Le poids P peut être remplacé par sa valeur Mg. En faisant ces substitutions, il vient :

$$PH = \frac{MV^2}{2}, \text{ comme précédemment.}$$

§ 273. *Mesure du travail consommé par une force opposée au mouvement d'un corps.* — Les raisonnements du § 271 seraient absolument les mêmes si, au lieu de supposer la masse M mise en mouvement par la force F, on employait cette force à détruire le mouvement qu'elle posséderait déjà ; elle agirait alors comme une véritable résistance, et son travail s'évaluerait de même par la moitié de la force vive perdue ou détruite par la masse M, comme dans le premier cas elle était mesurée par la moitié de la force vive gagnée. Ainsi, de même que le travail développé par la pesanteur pour imprimer une certaine vitesse à un corps est égal à la moitié de la force vive que cette pesanteur lui communique, de même aussi, lorsque le corps est lancé de bas en haut avec une certaine vitesse, la pesanteur est employée à détruire cette vitesse, et son travail dans cette circonstance est encore égal à la moitié de la force vive détruite.

274. *Observations sur la force vive et d'autres dénominations.* — Comme l'expression de *force vive*, employée pour désigner le produit MV^2, pourrait induire en erreur, il est bon de remarquer ici que ce n'est pas une force proprement dite, pas plus que PH. C'est une simple convention pour désigner l'effet dynamique produit par une force motrice, et elle est de même nature que ce que nous avons

appelé *travail*, puisqu'elle représente le double du travail développé par une force motrice donnée.

Le produit MV de la masse d'un corps, par la simple vitesse qui lui a été communiquée, produit qui nous a servi à mesurer une force motrice, a reçu des mécaniciens le nom de *quantité de mouvement*. On voit que cette quantité est très différente de la force vive, et aussi de ce que nous avons appelé travail.

Une force morte, c'est-à-dire une force qui ne produit qu'une pression exprimée en kilogrammes, et une force motrice qui engendre une vitesse, ne sauraient être regardées comme étant de même nature, et par conséquent ne sont pas susceptibles de se mesurer à l'aide de la même unité.

D'après cette distinction, on explique pourquoi un médiocre coup de marteau fait enfoncer un clou, tandis qu'un poids considérable, privé de mouvement et agissant seulement par sa pesanteur sur la tête du clou, ne produit aucun enfoncement sensible. Le coup de marteau est une force finie qui s'évalue par le produit d'une masse finie par une vitesse finie, au lieu que le poids destitué de mouvement local, est une force infiniment petite, qui s'évalue par le produit d'une masse finie par une vitesse infiniment petite. De sorte que, si l'on voulait comparer les effets de ces deux forces, on pourrait encore le faire, mais alors il faudrait tenir compte de l'enfoncement infiniment petit, produit par la force de pression, et faire entrer ce chemin parcouru dans l'expression de l'effet. Prenons un exemple : Un corps d'un poids P, tombe d'une hauteur h sur un corps quelconque, et y produit un enfoncement que nous désignerons par e. Le travail effectué sera le produit du poids P par la hauteur totale $h + e$ dont il est descendu, ou $P\ (h + e)$. Si maintenant on veut produire un effet identique avec une force morte, avec un simple poids posé sur le corps, il s'agit de déterminer le poids qui, multiplié par l'enfoncement, donnera le même produit $P\ (h + e)$. On aura donc en désignant ce poids par x,

$$xe = P(h+e) \text{ d'où } x = \frac{P(h+e)}{e},$$

telle serait la valeur du poids produisant le même effet. Il est facile de se convaincre, par une application, que ce poids serait beaucoup plus grand que P. Soient

$$h = 1^m, 5;\ e = 0^m, 02;\ P = 200^k.$$

On obtient :

$$x = \frac{200\,(1,5 + 0,02)}{0,02} = 15\,200.$$

Il faudrait donc un poids 76 fois plus grand pour produire le même effet, en agissant sans vitesse à l'origine de l'action.

Les forces de pression sont donc infiniment petites à l'égard des forces vives. Ce sont deux ordres de puissance différentes. Il convient cependant d'ajouter que les moteurs n'agissent que par des pressions, dont la continuité produit des vitesses finies ; et quoique le temps qui sépare le premier acte d'une pression de celui où la machine entre en jeu, soit fort petit, cependant ce temps est réel et assignable. L'homme qui met une manivelle en mouvement, ne lui fait atteindre celui qu'elle doit conserver qu'en passant par tous les degrés de vitesse depuis zéro. La pression est d'abord très forte, puis elle diminue, à mesure que la vitesse augmente, jusqu'à l'instant où le mouvement devient uniforme sous une pression et une vitesse constante ; de même, l'eau qui fait mouvoir une roue hydraulique ne détermine le mouvement que peu à peu, et lui communique une certaine quantité de force vive. Il en est encore de même du piston d'une pompe et de tous les cas où les corps cèdent à la pression ; celle-ci n'est comparable qu'à un poids quand elle est détruite ; elle l'est à une force vive, quand elle surmonte l'obstacle, puisque chaque pression partielle engendre une vitesse fort petite, et ces vitesses, en s'ajoutant, acquièrent une valeur finie.

§ 275. *Applications de la force vive.* — Soit proposé de trouver le travail nécessaire pour vaincre l'inertie d'une voiture chargée et cheminant sur un chemin horizontal. Il s'agit seulement de mettre la voiture en mouvement, sans tenir compte des autres résistances, et de lui imprimer une vitesse de 1^m, par exemple, qu'elle conservera ensuite. Le poids de la voiture est supposé de 8000^k. La force vive imprimée à la voiture sera égale à

$$MV^2 = \frac{P}{g}V^2 = \frac{8000}{9,81}.\ 1^2 = 816 \text{ kilogrammètres environ},$$

et le travail dépensé, pour vaincre l'inertie dans les premiers instants, sera égal à la moitié de 816 ou 408^{km}. Or, un cheval peut faire 70^{km} par seconde, dans son allure ordinaire; donc sept chevaux feront 490^{km}, et le travail sera plus que suffisant pour mettre la voiture en mouvement.

Si la voiture devait aller au trot, avec une vitesse de 2^m par seconde, le travail dépensé serait quatre fois plus grand, ou 1632^{km}; au galop de 4^m, le travail serait 16 fois plus grand. Dans ces deux derniers cas, les chevaux feraient d'abord un plus grand effort, ou mettraient plus de temps pour atteindre le mouvement désiré; mais on voit, par ces résultats, le peu d'influence que l'inertie exerce, comme résistance au mouvement.

On s'en assurera encore aisément dans l'exemple suivant: Soit proposé d'élever un fardeau de 5000^k, soit directement, soit à l'aide d'une machine quelconque, avec une vitesse de 0^m 2 par seconde. Le travail dépensé pour vaincre l'inertie du fardeau, sera

$$\frac{5000}{2.9,81}.\ 0,2^2 = 10 \text{ kilogrammètres}.$$

Si le fardeau doit être élevé seulement à 1^m, le travail développé pour obtenir ce résultat, sera $5000.\ 1^m = 5000^{km}$, c'est-à-dire un travail 500 fois plus grand que celui qui précède : ce dernier est donc négligeable.

Supposons un cours d'eau circulant librement sur son lit, sans chute, et fournissant 300 litres par seconde, avec une vitesse de 0^m 80. Si l'on voulait connaître la quantité de travail que renferme cette eau, et dont on pourrait disposer pour faire marcher une roue, par exemple ; il suffit encore de calculer la force vive de cette eau en mouvement, et d'en prendre la moitié ; on aura

$$\frac{300}{2.9,81}\, 0,80^2 = 9,77^{km} = 0,13 \text{ de cheval-vapeur environ.}$$

Si, au contraire, on établit un barrage sur ce cours d'eau, et si on donne à l'eau seulement un mètre de chute, le travail disponible renfermé dans 300 litres d'eau, tombant de la hauteur d'un mètre, sera égal à $300^k . 1^m = 300^{km} = 4$ chevaux, ou 30 fois plus de travail.

§ 276. *Quantité de travail pour passer d'une vitesse à une autre ; principe des forces vives. Remarque.* — Pour trouver la quantité de travail nécessaire pour faire passer une masse M d'une vitesse V à une vitesse V', nous supposerons d'abord que la masse M passe d'une vitesse nulle à la vitesse V. Alors, le travail développé pour produire cet effet sera $\frac{MV^2}{2}$. Il serait $\frac{MV'^2}{2}$ pour passer de zéro à V'. Donc pour avoir le travail nécessaire pour faire passer la masse M de la vitesse V à la vitesse V', il faut, du travail $\frac{MV'^2}{2}$ retrancher le travail déjà fait $\frac{MV^2}{2}$ pour communiquer la vitesse V ; ce qui donne $\frac{MV'^2 - MV^2}{2}$. D'où l'on voit que *le travail nécessaire pour faire passer une masse M d'une vitesse à une autre, est mesuré par la moitié de la force vive acquise.* Et comme les raisonnements seraient les mêmes si la vitesse, au lieu de s'accroître, diminuait, on peut en conclure ce théorême général connu sous le nom de *principe des forces vives* ou *principe de la transmission du travail,* que *le travail nécessaire pour accélérer le mouvement* *d'un système, ou pour détruire en tout ou en partie celui qu'il possède, est toujours égal à la moitié de la force vive acquise ou détruite.*

D'où il suit que lorsqu'une machine est en mouvement, et que ce mouvement est uniforme, le travail des puissances est parfaitement égal au travail des résistances; car si cela n'avait pas lieu, l'excès de l'un sur l'autre serait employé à accélérer le mouvement en déposant de la vitesse dans les pièces de la machine, ou à le retarder en détruisant une partie de celle qu'elles possèdent déjà. Et comme, lorsque le travail des puissances est égal au travail des résistances, toutes ces forces se maintiendraient en équilibre si ce mouvement n'était pas déjà produit, et s'il ne se continuait en vertu de l'inertie des masses; on voit donc que, lorsque le mouvement d'une machine est uniforme, les puissances et les résistances ont des valeurs telles qu'elles se feraient équilibre sur la machine en repos. On dit alors que l'équilibre est *dynamique* par opposition à l'équilibre *statique* correspondant au repos absolu.

§ 277. *L'inertie de la matière sert à transformer le travail en force vive et la force vive en travail.* — Il est facile de voir maintenant comment, en général, l'inertie de la matière sert à transformer le travail en force vive et la force vive en travail. En effet, la vitesse communiquée à une masse exige, pour être produite, un certain travail de la part d'une force, et ce travail étant ainsi accumulé dans cette masse, pourra à son tour communiquer le mouvement à d'autres corps, vaincre d'autres résistances. L'inertie a donc, dans cette circonstance, *emmagasiné* du travail qu'elle a restitué ensuite.

Les arts industriels nous offrent une infinité de circonstances où ces transformations successives s'opèrent par le moyen des machines, des outils, etc. L'eau renfermée dans les réservoirs des moulins, représente une certaine quantité d'action ou de travail disponible, qui se change en force vive quand on ouvre la vanne ou l'écluse ; à son tour la force vive acquise par cette eau, en vertu de sa chute du réservoir, se change en une certaine quantité de travail quand elle agit contre la roue du moulin, et celle-ci transmet le travail aux meules qui confectionnent l'ouvrage. La même transformation s'observe dans les machines à vapeur, etc.

§ 278. *Objet de la mécanique industrielle.* L'objet de la mécanique industrielle consiste principalement à étudier les diverses transformations ou métamorphoses que peut subir le travail des moteurs par le moyen des machines ou des outils, à comparer entr'elles les quantités de ce travail, à les évaluer en argent, ou en ouvrage de telle espèce, etc.

§ 279. *Elasticité.* — On appelle *élasticité* la propriété dont jouissent les corps de revenir plus ou moins à leur forme et à leur volume primitifs, lorsqu'on les en a fait changer par une cause quelconque. L'élasticité est de *forme* ou de *volume*, suivant que le corps change de forme comme un ressort d'acier, ou de volume comme les liquides ou les gaz.

Ces derniers jouissent d'une élasticité parfaite, c'est-à-dire qu'ils reviennent exactement à leur volume primitif lorsqu'ils ont été comprimés. Il n'en est pas de même des solides, et sous ce rapport ils présentent des différences sensibles, depuis le caoutchouc, qui est le corps solide le plus élastique, jusqu'à ceux qui le sont le moins, comme le plomb, par exemple, qui n'est pourtant pas complétement dépourvu d'élasticité.

§ 280. *Choc des corps.* — La théorie du choc des corps étant susceptible d'applications importantes à la pratique, et de plus, les chocs jouant un grand rôle dans les machines industrielles comme résistances nuisibles, nous allons entrer dans quelques développements sur cette circonstance du mouvement des corps. Mais, comme il est facile de le comprendre, la nature des corps doit être prise ici en considération, car les résultats seront différents selon les degrés divers de leur dureté et de leur élasticité, et comme il est difficile d'apprécier exactement le degré d'élasticité des corps, nous les supposerons d'abord parfaitement durs ou mous, ce qui donnera évidemment lieu aux mêmes phénomènes, puisque dans l'un et l'autre cas les corps ne pourront réagir l'un sur l'autre; ou bien nous les supposerons parfaitement élastiques, c'est-à-dire susceptibles de reprendre leur forme après le choc, avec une vitesse égale à celle qui les a déformés. Pour simplifier les questions, nous supposerons de plus que les corps sont de forme sphérique, et qu'ils se meuvent sur la ligne qui joint leurs centres.

§ 281. *Circonstances du choc.* — Supposons donc deux sphères animées d'une certaine vitesse, et qui viennent à se rencontrer, le mouvement ayant lieu dans le même sens. L'effet du choc sera de déplacer les molécules des deux corps au point de contact et dans les points voisins, et il se formera à leur surface un enfoncement, ou *impression*. Par suite de la résistance que les molécules opposent à leur déplacement, le mouvement des deux corps changera; celui qui se meut le plus vite perdra de sa vitesse, tandis que l'autre en gagnera, en sorte qu'au bout d'un certain temps les vitesses des deux corps seront égales, et alors l'impression aura acquis sa plus grande valeur. Après ce moment, si les corps sont dépourvus d'élasticité, en sorte que l'impression demeure telle qu'elle a été faite, ils cesseront d'avoir aucune action l'un sur l'autre, et se mouvront en contact d'un mouvement commun. Mais si les corps sont élastiques, c'est-à-dire si leurs molécules déplacées tendent à reprendre leurs premières situations, en sorte que les impressions formées doivent disparaître en tout ou en partie, les corps s'éloigneront l'un de l'autre jusqu'à ce que ces impressions aient été détruites autant qu'elles doivent l'être, et qu'ils cessent d'exercer l'un contre l'autre aucun effort. Après cela ils se mouvront avec des vitesses différentes, celle du corps choquant étant plus petite, et celle du corps choqué plus grande qu'au moment où l'impression avait atteint son maximum.

§ 282. *Choc des corps parfaitement durs ou mous.* — Dans le premier cas, soient m et m' les masses des deux sphères,

v et v' les vitesses qui leur ont été imprimées par deux forces instantanées. La valeur de ces deux forces motrices, qui ont mis les masses m et m' en mouvement, est mv pour l'une et $m'v'$ pour l'autre. Or, l'effet du choc ne peut avoir fait subir aucune altération à la somme de ces forces, lorsque les corps se seront rencontrés, et que leur mouvement sera devenu commun, leur masse sera $m + m'$, et ils auront pris une vitesse commune V. La force motrice aura pour valeur $(m +') V$, et l'on pourra écrire l'égalité

$$(m+m') V = m v + m' v';$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{m v + m' v'}{m+m'},$$

qui fait connaître la vitesse commune après le choc.

Dans le cas où les deux mobiles, au lieu de se mouvoir dans le même sens, vont à la rencontre l'un de l'autre, il suffit de changer le signe de l'une des vitesses, ce qui donne

$$V = \frac{m v - m' v'}{m + m'}$$

et le mouvement des deux masses réunies aura lieu, après le choc, dans le sens du mouvement de m, ou dans celui du mouvement de m' avant le choc, selon qu'on aura $m v > m' v'$ ou $m' v' > m v$.

Si la masse m' était en repos, on aurait $v' = o$, et la valeur de V deviendrait

$$V = \frac{m v}{m + m'}.$$

Si la masse m' était infiniment grande par rapport à m, on aurait $V = o$, c'est-à-dire que le système des deux corps ne prendrait aucun mouvement. C'est le cas d'un corps de dimensions finies qui vient choquer la terre.

§ 283. *Perte de force vive dans le choc des corps durs ou mous.* — Il est aisé de prouver que dans le choc des corps durs ou mous il y a perte de force vive, et de trouver la valeur de cette perte. En effet, la force vive des deux masses, avant le choc, est $mv^2 + m'v'^2$, et après le choc, $(m+m')V^2$. La différence de ces deux quantités donne, en la désignant par p,

$$p = mv^2 + m'v'^2 - (m+m')V^2.$$

Ajoutant au second membre et retranchant $(m+m')V^2$, il vient

$$p = mv^2 + m'v'^2 + (m+m')V^2 - 2(m+m')V^2,$$

ou, en mettant à la place de V sa valeur dans le dernier terme du 2^e membre, et conservant l'autre facteur V,

$$p = mv^2 + m'v'^2 + (m+m')V^2 - 2(m+m')V\frac{mv+m'v'}{m+m'}.$$

Réduisant,

$$p = m(v-V)^2 + m'(V-v')^2 \ldots (1).$$

Or, $v - V$ est la vitesse perdue par la masse m, et $V - v'$ est la vitesse gagnée par la masse m'. Les deux termes qui composent la valeur de p, essentiellement positifs, sont les forces vives dues à ces vitesses gagnées et perdues. Cette valeur de p justifie donc ce théorème que l'on doit à Carnot : *Dans le choc de deux corps durs, la perte de force vive est égale à la somme des forces vives dues aux vitesses perdues ou gagnées par les mobiles.*

Si les deux corps allaient à la rencontre l'un de l'autre, on aurait

$$p = m(v-V)^2 + m'(V+v')^2 \ldots (2).$$

En remplaçant V par sa valeur dans (1) et (2), et réduisant, il vient

$$p = \frac{mm'(v-v')^2}{m+m'},$$

pour le cas où les corps vont dans le même sens, et

$$p = \frac{mm'(v+v')^2}{m+m'},$$

pour le cas où les corps se meuvent en sens contraires.

La perte de force vive dans le dernier cas est, comme on le voit, beaucoup plus grande que dans le second; ce qui apprend combien il est important dans les machines industrielles d'éviter que des corps se choquent inutilement avec des vitesses contraires; car cette perte de force vive, § 271, représente une quantité de travail égale à la moitié de cette force vive.

Dans le cas où l'une des masses est en repos, $v' = o$, et la perte de force vive devient

$$p=\frac{mm'v^2}{m+m'},$$

qu'on peut mettre sous cette forme :

$$p=\frac{m'}{m+m'}mv^2.$$

Si la masse m' du corps était très petite par rapport à celle m du corps choquant, on voit que la perte de force vive serait une très petite fraction $\frac{m'}{m+m'}$, de mv^2 ou de la force vive totale communiquée au système. D'où il suit qu'on pourra négliger de telles pertes dans le calcul des résistances d'une machine, pourvu qu'elles ne soient pas fréquemment répétées. Si au contraire la masse m' du corps en repos était très grande par rapport à celle du corps en mouvement, il est facile de voir que le coëfficient de mv^2 approcherait de l'unité, et que la perte de force vive appprocherait de la force vive totale. Car en divisant les deux termes du coëfficient par m', on a $\frac{1}{\frac{m}{m'}+1}$, quantité qui approche d'autant plus de l'unité que m' est plus grand par rapport à m. Si même les deux masses étaient très comparables en poids, il est aisé de voir que la perte serait encore considérable; car si nous supposons seulement $m=m'$, la perte devient égale à $\frac{mv^2}{2}$, c'est-à-dire à la moitié de la force vive communiquée. On voit donc qu'il est important d'éviter, dans la construction des machines, qu'un corps vienne inutilement en choquer un autre en repos.

§ 284. *Choc des corps parfaitement élastiques.*— Considérons maintenant le cas où les sphères sont parfaitement élastiques. Après qu'elles seront parvenues au contact, elles se comprimeront jusqu'à une certaine limite, après laquelle reprenant leur volume primitif, en vertu de leur élasticité, les vitesses gagnées ou perdues dans un sens par le phénomène de la compression leur seront imprimées dans le sens contraire, et il en résultera deux vitesses u et u' que nous allons déterminer.

Pour cela, nous diviserons le temps très court pendant lequel le phénomène se produit, en deux époques : la première sera celle de la compression des corps, et la seconde celle de leur retour à la forme primitive. Pendant le premier intervalle, les corps se comportent comme s'il étaient parfaitement mous, et leur vitesse commune est donnée par la formule

$$V=\frac{mv+m'v'}{m+m'}.$$

La première masse aura perdu par le choc une vitesse égale à $v-V$, et la deuxième aura gagné $V-v'$. La réaction ayant lieu, la masse reviendra en arrière, et perdra encore $v-V$, tandis que l'autre gagnera $V-v'$. Les vitesses u et u' de ces deux masses, après le choc et la réaction, seront donc :

$$u=V-(v-V) \text{ ou } u=2V-v\,;$$

$$u'=V+V-v' \text{ ou } u'=2V-u'\,;$$

mettant à la place de V sa valeur,

$$u=\frac{mv+m'(2v'-v)}{m+m'};\quad u'=\frac{m'v'+m(2v-v')}{m+m'}.$$

Dans le cas où les masses iraient à la rencontre l'une de l'autre, il suffirait de changer le signe de v' dans les valeurs de u et de u'.

§ 285. *Conséquences de ces formules.* — Si l'on suppose $m = m'$, les valeurs précédentes donnent :

$$u = v', \; u' = v;$$

ainsi, dans le cas particulier où les deux masses sont égales, elles échangent leurs vitesses.

Si l'une des masses est en repos, $v' = o$, et si en même temps $m = m'$, on a :

$$u = o, \; u' = v,$$

c'est-à-dire que le corps choquant reste en repos et communique sa vitesse au corps choqué.

La masse m' étant toujours en repos, si cette masse est très grande par rapport à m, les valeurs de u et de u', qui deviennent dans le cas de $v' = o$,

$$u = \frac{(m - m')v}{m + m'}, \; u' = \frac{2mv}{m + m'},$$

peuvent être mises sous cette forme, en divisant par m' :

$$u = \frac{\left(\frac{m}{m'} - 1\right)v}{\frac{m}{m'} + 1}, \; u' = \frac{\frac{2mv}{m'}}{\frac{m}{m'} + 1}.$$

Lorsque m' est très grand par rapport à m, ces deux valeurs approchent de

$$u = -v \text{ et } u' = o;$$

ce qui nous apprend que, dans ce cas, la vitesse du corps choquant lui est restituée en sens contraire, et celle du corps choqué est infiniment petite.

Ceci explique pourquoi l'on place des corps élastiques audessous de ceux que l'on veut soumettre à un choc quelconque. Les enclumes des forgerons sont placées sur des madriers en bois dont l'office est de restituer au marteau en sens contraire, la vitesse qu'on lui a imprimée dans sa descente; la même explication serait donnée pour expliquer le peu de danger qu'il y a à frapper de grands coups sur une enclume placée sur le corps d'un homme.

Enfin, les valeurs générales de u et de u',

$$u=2V-v, \; u'=2V-v',$$

$$\text{donnent } V-V'=v'-v=-(v-v');$$

ce qui signifie que dans tous les cas la vitesse relative des deux corps après le choc, est égale et de signe contraire à leur vitesse relative avant le choc. On entend en général par *vitesse relative* de deux mobiles, la différence de leurs vitesses absolues.

§ 286. *Force vive après le choc des corps parfaitement élastiques*—Si l'on cherche la force vive des deux sphères après le choc, on la trouve égale à

$$mu^2+m'u'^2=m(2V-v)^2+m'(2V-v')^2=mv^2+m'v'^2,$$

toutes réductions faites, et après avoir mis pour V sa valeur; c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte de force vive dans le choc des corps parfaitement élastiques.

§ 287. *Cas où les corps sont imparfaitement élastiques.*—Supposons maintenant que les sphères jouissent d'un certain degré d'élasticité, et estimons ce degré par la portion n de leur vitesse qui leur serait restituée en sens contraire si elles venaient frapper un plan immobile parfaitement dur. A l'instant du choc, l'un des corps perdra la portion de vitesse $v-V$, et l'autre gagnera $V-v'$. Mais la force d'élasticité faisant revenir la masse m en arrière, lui enlèvera encore la portion de vitesse $n(v-V)$, tandis qu'elle fera gagner à m', $n(V-v')$. Les vitesses après le choc seront donc :

$$u=V-n(v-V), \; u'=V+n(V-v').$$

Mettant à la place de $\dot{V}$ sa valeur,

$$u=\frac{(m-nm')v+(1+n)m'v'}{m+m'},$$

$$u'=\frac{(m'-nm)v'+(1+n)mv}{m+m'}.$$

En faisant $n=1$ dans ces formules, on retombe sur celles de § 284.

La perte de force vive dans ce cas serait,

$$p=\frac{(1-n^2)mm'(v-v')^2}{m+m'},$$

quantité qui devient nulle, quand $n=1$, c'est-à-dire lorsque les corps sont parfaitement élastiques.

§ 288. *Conséquence de ce qui précède sur la théorie du choc des corps.* — Nous pouvons conclure de ce qui précède que, dans leur retour à la forme primitive, les corps parfaitement élastiques restituent tout le travail qu'ils avaient absorbé pour se comprimer, car il n'y a pas de force vive perdue, et par conséquent pas de travail perdu. Que si au contraire, les corps sont durs ou mous, ou imparfaitement élastiques, le travail restitué sera nul ou moindre que celui qui a été d'abord dépensé; il y aura donc eu une certaine quantité de travail perdue, et cette perte de travail est mesurée par la moitié de la force vive détruite. Si les chocs sont violents, cette perte peut être très considérable. On sent donc déjà la nécessité d'éviter les chocs dans les machines industrielles.

§ 289. *Utilité des corps élastiques comme réservoirs de travail.* — Ces considérations font voir de quelle utilité pour les arts sont les corps élastiques comme réservoirs d'action ou de travail. En effet, si l'on emploie un certain travail pour les comprimer jusqu'à un certain terme, ils auront *emmagasiné* ce travail pour le restituer ensuite intégralement lorsqu'ils seront abandonnés à eux-mêmes. C'est ainsi que le calorique développe du travail dans la vapeur d'eau, et que ce travail se trouve ensuite transmis au moyen de machines convenables aux appareils destinés à confectionner l'ouvrage. L'élasticité permet donc d'enfermer dans des corps inertes une force capable de les faire travailler à la manière des moteurs animés, tels que l'homme et le cheval. C'est par desemblables moyens que les montres, les pendules reçoivent le mouvement pendant des jours, des mois entiers.

§ 290. *Une partie du travail des forces peut être absorbée par la déformation des corps.* — Si les corps ne sont pas parfaitement élastiques, que devient alors l'excès de la force qui n'a pas été restituée? elle est employée uniquement à déformer le corps et n'a produit aucun effet utile. Comme tous les corps solides sont imparfaitement élastiques, cette perte de force aura donc toujours lieu, et l'on conçoit même qu'elle puisse devenir très notable, et très comparable au travail total dans une machine, si la résistance éprouve de fréquentes alternatives, étant tantôt plus forte, tantôt plus faible, ce qui aurait pour effet de comprimer plus ou moins les éléments de la machine, de les détendre ensuite plus ou moins, et par conséquent de produire une perte de travail à chaque changement de vitesse.

Enfin cette absorption de travail aurait également lieu, et l'absorption serait alors complète, si les forces étaient employées à diviser les corps, à les polir, etc., enfin à détruire la force d'agrégation de leurs molécules.

§ 291. *La pesanteur est également susceptible d'emmagasiner du travail.* — Nous voyons donc par ce qui précède, que l'inertie ainsi que les corps parfaitement élastiques ont la propriété de restituer le travail qu'ils ont d'abord dépensé. La pesanteur jouit aussi de cette propriété d'emmagasiner le travail, et de le rendre disponible au besoin.

En effet, quand un moteur a élevé un corps à une certaine hauteur, en dépensant une certaine quantité de travail, mesurée par le produit du poids de ce corps et de la hauteur à laquelle il a été porté, ce corps, employé ensuite à vaincre des résistances, soit directement, soit au moyen de machines, pourra restituer, dans sa descente, précisément la même quantité de travail que celle qui avait été dépensée primitivement. C'est ainsi que le mouvement est communiqué aux grandes horloges, aux tourne-broches, etc. La chute d'eau qui alimente une usine, en tombant sur une roue, restitue ainsi le travail qui a été produit par le calorique en vaporisant cette eau à la surface de la terre, d'où s'élevant dans les nuages, elle retombe sous la forme de pluie, et des parties les plus élevées du sol gagne peu à peu les plus basses, jusqu'à ce qu'elle soit arrivée au point le plus bas, le niveau des mers.

§ 292. *Examen de ce qui se passe dans les mouvements alternatifs ou périodiques.* — Nous venons de faire voir par des exemples comment une certaine quantité de travail peut être transformée alternativement en force vive et la force vive en travail par le moyen des ressorts et des machines qui les emmagasinent et les restituent successivement. Ces transformations se présentent, en général, toutes les fois que le mouvement d'un corps sollicité par une puissance motrice varie par degrés insensibles, de manière à être tantôt accéleré et tantôt retardé. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans les mouvements périodiques, et en général dans tous ceux de *va et vient*, qu'on nomme *alternatifs*, et où la vitesse devient même nulle de temps en temps. Les mouvements oscillatoires des pendules ou des fils à plomb sont évidemment de ce dernier genre ; plus tard nous mettrons au même rang les pistons de pompes, les balanciers, etc. Or, lorsque la vitesse du corps augmente, c'est un signe qu'une certaine portion du travail du moteur agit dans le sens du mouvement pour accroître la force vive du corps d'une quantité égale au double de cette portion, le surplus du travail ayant été absorbé par les autres résistances; si, au contraire, la vitesse du corps vient à diminuer, malgré l'action de la puissance toujours exercée dans le sens du mouvement, c'est qu'une portion de la force vive acquise a été dépensée contre les mêmes résistances, pour augmenter le travail du moteur d'une quantité égale à la moitié de cette portion, et ainsi de suite selon le nombre des alternatives du mouvement.

On voit d'après cela que, lorsque la vitesse ou la force vive d'un corps oscille dans de certaines limites, c'est une preuve que l'inertie a successivement absorbé et restitué des portions de travail du moteur qui sont égales pour tous les instants où la vitesse est redevenue la même, c'est-à-dire que, dans l'intervalle de ces instants, il n'y a eu rien de perdu ni de gagné, et que la puissance doit être considérée comme ayant été entièrement employée à vaincre les résistances autres que l'inertie. Mais si, dans un intervalle de temps quelconque, la vitesse après avoir subi également des alternatives de grandeur, ne redevient pas ce qu'elle était d'abord, la moitié de la différence des forces vives qui répondent à la fin et au commencement de cet intervalle, mesure la quantité de travail qui a été réellement consommée ou restituée par l'inertie du corps. Par conséquent, si le corps était parti du repos, le travail consommé par l'inertie, à un instant quelconque, serait mesuré seulement par la moitié de la force vive acquise à cet instant.

§ 293. *Ces réflexions s'appliquent aussi bien à la pesanteur qu'à l'inertie. Nouveaux exemples du rôle que joue l'inertie des corps dans les divers procédés des arts.* — Les mêmes réflexions sont applicables à l'action de la pesanteur sur une voiture qui monte ou descend une côte, aussi bien qu'à la seule action des chevaux pour vaincre l'inertie de la voiture sur un chemin horizontal. Le travail employé dans la montée pour vaincre la pesanteur, sera restitué dans la descente, pourvu que celle-ci ne soit pas trop raide et ne force pas à *enrayer* ou à *retenir*, et à perdre inutilement cette quantité de travail. On voit par là aussi l'un des avantages des routes à pentes douces sur les autres, et c'est pour cela que, de nos jours, on a fixé la limite des pentes du 20^e au 30^e. Les mêmes restitutions s'observent sur un chemin horizontal; seulement elles sont dues à l'inertie même des masses transportées. D'abord les chevaux dépensent une certaine quantité de travail pour mettre la voiture au pas ou au trot. Puis, lorsque la vitesse de la voiture vient à se ralentir par suite de l'augmentation des résistances, ou de la diminution d'action des chevaux, cette même inertie développe contre ces résistances une portion du travail qu'elle avait d'abord absorbé, et qui est égale à la moitié de la diminution de la force vive, et les choses continuent ainsi alternativement; de sorte que, lorsque la voiture est remise au repos, le travail restitué par l'inertie est précisément égal au travail qu'elle a consommé, et en réalité, il n'y a rien eu de perdu. Il est entendu d'ailleurs que les diminutions de vitesse éprouvées par la voiture ne proviennent pas de ce que les chevaux retiennent, ou de ce qu'on aurait enrayé, puisqu'alors ces chevaux et l'enrayage auraient servi à augmenter les véritables résistances, et à consommer la force vive acquise, sans utilité immédiate pour l'objet du transport.

Lorsqu'un moteur est employé à élever verticalement des fardeaux, il prend le corps au repos; de là une consommation de travail pour vaincre l'inertie du corps; arrivé à la hauteur voulue, le moteur ralentit son mouvement pour remettre de nouveau le corps au repos; dans ce ralentissement, la force vive acquise est employée à détruire une portion de l'effet de la pesanteur sur les corps, et l'inertie n'a rien absorbé. Les mêmes choses peuvent se dire encore du travail du limeur, du scieur, etc., puisqu'à la fin de chaque oscillation de l'outil, la vitesse devient nulle en variant par degrés insensibles; il est évident que cela n'aurait plus lieu si le mouvement changeait brusquement, ou qu'il y eût des chocs ou des secousses entre corps non parfaitement élastiques; une portion de la force vive serait employée alors à détruire les ressorts moléculaires des corps qui se choquent.

Pour faire sortir le ciseau en fer d'une varlope, l'ouvrier frappe le bois sur le derrière : en lui imprimant brusquement de la vitesse, le ciseau et son coin, qui ne sont pas liés invariablement à l'outil, résistent par leur inertie, ne se meuvent pas avec lui ou ne cèdent qu'en partie au mouvement.

On emmanche souvent un outil, par exemple un marteau, en frappant la queue du manche dans le sens de sa longueur. Ce manche chemine, et l'inertie de la matière du marteau résiste au mouvement imprimé. Ou bien on frappe le manche du marteau sur un plan résistant; ce manche s'arrête, mais le marteau, ayant une vitesse acquise, chemine encore en vertu de son inertie.

C'est par l'effet de l'inertie qu'on parvient à lancer, avec une grande vitesse, des pierres à l'aide de la *fronde;* car on accumule de la force vive dans cette pierre, en lui faisant faire plusieurs révolutions successives, et de plus en plus rapides. La *toupie*, lancée à terre, tourne et chemine en vertu de la force vive qui a été primitivement accumulée par le déroulement accéléré de la ficelle. Le *diable* est un autre exemple du moyen qu'on peut employer pour accumuler la force vive dans un corps mobile autour d'un axe. On se sert avec avantage dans les arts du *tour à pédale et à ressort* pour les petites pièces légères, parce que l'inertie exerce alors peu d'influence, malgré les variations, les alternatives de la vitesse; mais son emploi aurait des inconvénients pour les grosses pièces ou les pièces de métal, c'est pourquoi on y substitue le *tour à mouvement de rotation continue*. Enfin nous retrouverons plus tard d'autres exemples, et notamment quand nous traiterons du volant, du rôle puissant que joue l'inertie dans les arts mécaniques. Nous ferons remarquer même que la plupart des exemples que nous avons cités sont principalement relatifs au mouvement de rotation, et que nous n'avons encore rien dit de ce mouvement. Nous verrons bientôt que nous ne nous sommes pas avancés, et que l'inertie s'y comporte de la même manière. Nous avons voulu seulement ici faire comprendre comment l'inertie de la matière se comporte tantôt comme une simple résistance, tantôt comme une véritable force motrice, absolument de la même manière que la pesanteur et les corps parfaitement élastiques.

§ 294. *Force vive d'un corps dans le mouvement de rotation. Extension du principe des forces vives.* — Lorsqu'un corps est mis en mouvement autour d'un axe par une force motrice, la force vive de ce corps ne peut se calculer par le produit de la masse par le carré de la vitesse, puisque la vitesse est variable pour les différentes parties de cette masse. Si nous désignons alors par m, m', m''.... les masses élémentaires de la masse M, et par v, v', v''..... leurs vitesses respectives, la force vive du corps dans ce cas sera représentée par la somme des forces vives des masses élémentaires. On aura donc :

$$\textit{force vive} = m v^2 + m' v'^2 + m'' v''^2 + \ldots\ldots$$

nous pourrions répéter ici ce que nous avons déjà dit sur la force vive dans le mouvement de translation, et l'on comprendrait aisément comment l'inertie joue ici un rôle analogue, en absorbant de la force vive au moyen de l'accélération de la vitesse communiquée aux masses, et se joignant ainsi aux résistances, puis restituant cette force vive lorsque cela devient nécessaire, à toutes les parties du système, en se joignant aux puissances lorsque les résistances deviennent à leur tour prépondérantes. Si donc nous voulons étendre le principe général des forces vives au mouvement de rotation, il faut trouver le moyen de calculer la force vive d'un corps quelconque d'une manière moins générale que celle que nous venons d'employer pour la désigner. Les éléments des machines employées dans l'industrie ayant tous une forme approchant beaucoup d'une forme géométrique quelconque, il suffira de calculer cette force vive pour quelques cas particuliers. Nous allons d'abord transformer l'expression générale $mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \ldots$ en une autre.

§ 295. *Moment d'inertie d'un corps. Force vive d'un corps au moyen du moment d'inertie.* — Soient m, m', m''..., (*fig.* 157), les masses élémentaires de la masse M d'un corps ABC qui tourne autour d'un axe xy. Soient r, r', r''....., les distances respectives de ces petites masses à l'axe de rotation. Désignons par V_1 la vitesse angulaire de ce corps. On aura entre les vitesses respectives des petites masses m, m', m''..., leurs distances à l'axe, et la vitesse angulaire, les équations suivantes, § 23 :

$$v = V_1 r ; \; v' = V_1 r' ; \; v'' = V_1 r'' ...$$

et en élevant au carré :

$$v^2 = V_1^2 r ; \; v'^2 = V_1^2 r'^2 ; \; v''^2 = V_1^2 r''^2 .... ;$$

faisant ces substitutions dans l'expression de la force vive, et mettant V_1^2 en facteur commun, on aura :

$$V_1^2 (m r^2 + m' r'^2 + m'' r''^2 + ...).$$

Or, ce dernier facteur $m r^2 + m' r'^2 + m'' r''^2 + ...$ a reçu des mécaniciens le nom de *moment d'inertie*; il exprime, comme on le voit, la somme des produits des molécules du corps par les carrés de leurs distances respectives à l'axe de rotation. En désignant ce moment par I, l'expression de la force vive devient : $I V_1^2$. Donc, *la force vive d'un corps qui tourne autour d'un axe est égale à son moment d'inertie multiplié par le carré de sa vitesse angulaire.* Si maintenant nous supposons une accélération dans le mouvement, la vitesse angulaire sera devenue V'_1, et la force vive du corps à cet instant sera $I V_1'^2$, puisque I ne dépend nullement de la vitesse. On aura donc $I (V_1'^2 - V_1^2)$ pour l'accroissement de force vive produit pendant cet intervalle, lequel accroissement doit être égal au double du travail développé par la puissance. Soit F la force motrice dont on dispose et E l'espace parcouru par son point d'application estimé suivant sa direction, on aura :

$$I (V_1'^2 - V_1^2) = 2 F E.$$

§ 296. *Usage de cette formule.* — En tirant de cette formule la valeur de F, on aura la valeur de la force motrice qui fait tourner un corps, quand on connaîtra la vitesse angulaire de ce corps à deux instants et le chemin décrit par le point d'application de la force pendant l'intervalle qui sépare ces instants; et réciproquement, on pourra déterminer aussi l'accélération de la vitesse angulaire. Soit par exemple, une roue montée sur un arbre horizontal et qui tourne autour de son centre. Soit P un poids suspendu à une corde enroulée autour de l'arbre. Si l'on demande la vitesse que prendra la roue, lorsqu'à partir du repos, le poids P sera descendu de la hauteur H, il faudra faire dans l'expression ci-dessus

$$V_1=o\,;\ F=P\,;\ E=H$$

et tirer la valeur de V_1'. Il vient ainsi :

$$V_1'=\sqrt{\frac{2\,PH}{I}}.$$

§ 297. *Application aux volants.* — Un *volant* consiste dans une roue qui tourne autour d'un arbre horizontal, et dont les jantes en fonte, tenues à une assez grande distance de l'axe de rotation, sont liées par des bras à ce dernier. Supposons que des forces soient appliquées à cette roue entre deux instants pour lesquels la vitesse angulaire du mouvement soit succesivement V_1 et V_1'. Il faudra que l'accroissement de la force vive de la masse du volant soit égal au double du travail total des forces, ou que l'on ait :

$$I\,(V_1'^2-V_1^2)=2\,FE\,;\ \text{d'où}\ V_1'^2-V_1^2=\frac{2\,FE}{I};$$

ce qui donne la différence entre les carrés des vitesses. Si le travail développé par les forces demeure le même pour l'intervalle de temps compris entre les instants où la vitesse angulaire du volant est V_1 et V_1', et que l'on augmente son moment d'inertie I, la fraction $\frac{2\,FE}{I}$ diminuera, et par conséquent ces vitesses angulaires différeront d'autant moins. Et comme le moment d'inertie est exprimé en fonction de la masse du volant et de la distance à laquelle cette masse est rejetée loin de cet axe, on voit qu'il est toujours possible, soit en augmentant la masse d'un volant, soit en rejetont cette masse loin de l'axe, de disposer ce volant de manière que le mouvement soit très peu irrégulier, lors même que le travail développé par les puissances serait très grand. Remarquons encore que si les puissances agissent entre elles de manière qu'elles accélèrent le mouvement, cet excédant de travail devient une force vive qu'emmagasine le volant. Si, au contraire, de nouvelles résistances surviennent, et que le mouvement se ralentisse, l'inertie du volant s'ajoutera au travail des forces qui favorisent le mouvement pour vaincre ces résistances. Ainsi, l'utilité du volant consiste à absorber l'excès du travail de la puissance sur la résistance pour le restituer ensuite à la puissance, quand le travail de celle-ci devient inférieur. Aussi existe-t-il des machines où, sans un volant, le moteur ne saurait faire marcher l'outil. Si, par exemple, un moteur est destiné à faire marcher une scie, il est évident que le travail de cette dernière n'est pas le même pendant sa montée et sa descente, parce que la scie ne mord dans le bois que lorsqu'elle descend. Le travail du moteur, supérieur à celui de l'outil pendant une demi-oscillation, doit donc lui devenir inférieur pendant la demi-oscillation contraire. Dans le premier cas, le volant s'accélère et absorbe de la force vive, dans l'autre cas au contraire, cette force vive est restituée et ajoutée à celle du moteur pour vaincre le travail de la résistance devenu alors plus grand.

§ 298. *Théorème sur le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque.* — Il devient maintenant nécessaire de savoir déterminer le moment d'inertie d'un corps quelconque. Voici d'abord un théorème dont nous ferons usage dans cette recherche. Le *moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie de ce corps par rapport à un axe parallèle au pre-*

mier et passant par le centre de gravité, augmenté de la masse du corps multipliée par le carré de la distance des deux axes.

Soient (*fig.* 158), $A'B'$ l'axe quelconque; AB l'axe passant par le centre de gravité du corps; m, m', m''...... les molécules ou masses élémentaires de la masse M; r, r', r''..... les distances de ces molécules à l'axe AB, et R, R', R''..... celles des mêmes molécules à l'axe $A'B'$; soit I le moment d'inertie par rapport à l'axe AB, et I' le moment d'inertie par rapport à l'axe $A'B'$. On aura $I = mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + ...$ et $I' = mR^2 + m'R'^2 + m''R''^2 + ...$ Par une molécule m faisons passer un plan perpendiculaire aux deux axes, et menons les droites mK et mK' aux points d'intersection de ce plan avec les deux axes. Soit D la distance KK' des deux axes. Menons mz perpendiculaire sur KK'. Le triangle mKK' donne $mK'^2 = mK^2 + D^2 - 2Dx$ en désignant par x la projection Kz du côté mK sur le côté KK'. Or, $mK' = R$; $mK = r$; on aura en substituant: $R^2 = r^2 + D^2 - 2Dx$. Pour un autre point du corps, on aurait également : $R'^2 = r'^2 + D^2 - 2Dx'$; et ainsi de suite. Multipliant toutes ces égalités respectivement par les masses m, m', m''...... et les ajoutant membre à membre, il vient :

$$mR^2 + m'R'^2 + ... = mr^2 + m'r'^2 + ... + MD^2 - 2D(mx + m'x' + ...)$$

$$\text{ou } I' = I + MD - 2D(mx + m'x' + ...)$$

Or, si nous concevons par l'axe AB qui passe par le centre de gravité du corps un plan des moments perpendiculaire au plan des deux axes, la quantité $mx + m'x'$...... représentera la somme des moments des éléments du corps par rapport à ce plan, et cette somme sera égale au moment de la masse totale qui est nul, puisque le plan passe par le centre de gravité, § 140. Donc le dernier terme de l'équation précédente est nul, et il vient :

$$I' = I + M D^2,$$

ce qui démontre le théorême énoncé.

§ 299. *Moment d'inertie d'une droite.* — Soit à déterminer le moment d'inertie d'une droite AB, (*fig.* 159). par rapport à un axe XY perpendiculaire à cette droite et passant par son extrémité A. Soit m la masse de l'unité de longueur; $AB = l$; soit M la masse totale de la barre. On aura évidemment $M = ml$. Si nous considérons un petit élément pp' de cette barre, sa masse sera $m \times pp'$ et son moment d'inertie sera $m \times pp' \times A\,p^2$. Elevons au point B sur AB la perpendiculaire $BD = AB$, et joignons AD. Il en résultera $Ap = pK$, et le moment d'inertie de l'élément pp' deviendra:

$$m \times pp' \times pK^2.$$

Multipliant et divisant par π, il vient:

$$\frac{m}{\pi} \times \pi \times \overline{pK}^2 \times pp'.$$

Or, $\pi\, \overline{Kp}^2$ est l'aire du cercle du rayon pK, et $\pi\, \overline{pK}^2 \times pp'$ est le volume du cylindre qui serait engendré par le rectangle $Kpp'K'$ autour de AB. Mais pour un autre élément qq', nous aurions:

$$\frac{m}{\pi} \times \pi \times \overline{oq}^2 \times qq'.$$

En ajoutant tous ces moments d'inertie, nous aurons celui de la droite AB. Si nous faisons cette somme, il viendra: $\frac{m}{\pi}$ multiplié par la somme de tous les petits cylindres engendrés autour de AB et qui forment le cône dont AB serait à la fois le rayon de la base et la hauteur. Le moment d'inertie de la droite AB devient donc

$$\frac{m}{\pi} \times \pi\, \overline{AB}^2 \times \frac{1}{3} AB = \frac{m\, \overline{AB}^3}{3} = \frac{ml^3}{3}.$$

Et comme $M = ml$, on aura enfin :

$$I = \frac{M l^2}{3}.$$

Dans les applications, on remplace M par $\frac{P}{g}$, § 184.

Ayant le moment d'inertie d'une droite par rapport à un axe passant par l'une de ses extrémités, il est facile de l'obtenir par rapport à un axe passant par son centre de gravité, c'est-à-dire par son milieu. Soit x ce moment d'inertie cherché. D'après le § 298, ce moment d'inertie augmenté de la masse M multipliée par le carré $\frac{l^2}{4}$ de la distance $\frac{l}{2}$ des deux axes, doit être égal au moment d'inertie $\frac{M l^2}{3}$ déjà trouvé par rapport à l'axe XY. On aura donc l'équation :

$$\frac{M l^2}{3} = x + \frac{M l^2}{4}.$$

D'où l'on tire :

$$x = \frac{M l^2}{3} - \frac{M l^2}{4} = \frac{M l^2}{12}.$$

§ 300. *Moment d'inertie d'un rectangle.* — Trouver le moment d'inertie d'un rectangle $ABCD$, (*fig.* 160), par rapport à un axe perpendiculaire à son plan projeté au centre O de ce rectangle. Partageons ce rectangle en tranches infiniment minces, de manière que ces tranches puissent être considérées comme des lignes matérielles. Soient ab une de ces lignes et m sa masse. Son moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre de gravité K sera : $\frac{m l^2}{12}$. Faisant $\frac{1}{2} l = a$ ou $l = 2a$, d'où $l^2 = 4a^2$, il vient, en substituant, $\frac{m a^2}{3}$. Pour avoir le moment par rapport à l'axe O, il faut ajouter à $\frac{ma^2}{3}$ le produit de la masse par le carré $\overline{OK}^2$ de la distance des deux axes, ce qui donne enfin $\frac{ma^2}{3} + m\overline{OK}^2$. Mais pour une autre tranche infiniment mince, on aurait aussi $\frac{m'a^2}{3} + m'\overline{OK}'^2$; et ainsi de suite. En ajoutant tous ces moments d'inertie, nous aurons celui du rectangle. Remarquons, avant de faire cette somme, que toutes ces lignes matérielles peuvent être réduites à de petites sphères situées à leur centre de gravité, et que toutes ces petites sphères accumulées formeraient la ligne matérielle EE'. Alors les termes $m\,\overline{OK}^2$, $m'\,\overline{OK}'^2$.... représenteront les moments d'inertie de toutes ces petites sphères. En désignant donc par I le moment d'inertie du rectangle, et faisant la somme de toutes les expressions

$$\frac{ma^2}{3} + m\overline{OK}^2,\ \frac{m'a^2}{3} + m'\overline{OK}'^2....$$

on aura

$$I = \frac{a^2}{3}(m + m' + ...) + m\overline{OK}^2 + m'\,OK'^2 + ...$$

La seconde partie $m\,\overline{OK}^2 + m'\,\overline{OK}'^2 + ...$ de ce 2^e membre représente le moment d'inertie de la droite EE' dont la valeur est $\frac{Ml'^2}{12}$. Donc $I = \frac{a^2}{3}\cdot M + \frac{Ml'^2}{12}$. Faisons $\frac{1}{2}\,l' = b$, d'où $l' = 2b$ et $l'^2 = 4b^2$; on a enfin

$$I = \frac{Ma^2}{3} + \frac{Mb^2}{3} = \frac{M\,(a^2 + b^2)}{3}.$$

Telle est la valeur du moment d'inertie du rectangle $ABCD$.

Le rectangle $AFOE$ étant le quart du rectangle total, son moment d'inertie sera

$$\frac{M}{4}\cdot\frac{a^2 + b^2}{3};$$

et comme $\frac{M}{4}$ est la masse de ce rectangle, en la désignant par m, son moment d'inertie deviendra :

$$m\,\frac{a^2+b^2}{3}.$$

Or a^2+b^2 est le carré de la diagonale d de ce rectangle, on aura donc :

$$I=\frac{m\,d^2}{3}.$$

Ainsi, *le moment d'inertie d'un rectangle par rapport à un axe passant par l'un de ses sommets est égal à sa masse multipliée par le tiers du carré de sa diagonale.*

§ 301. *Moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle.* — Soit AB (*fig.* 161), l'arête par rapport à laquelle il s'agit de trouver le moment d'inertie du parallélipipède. Partageons ce parallélipipède en tranches infiniment minces qui puissent être considérées comme des rectangles. Le moment d'inertie de l'un d'eux par rapport à un axe AB passant par un de ses sommets vient d'être trouvé égal à $\frac{m\,d^2}{3}$. Pour un autre rectangle, on aurait $\frac{m'\,d^2}{3}$, et ainsi de suite. En faisant la somme de tous ces moments d'inertie, nous aurons pour le moment d'inertie du parallélipipède :

$$I=\frac{m\,d^2}{3}+\frac{m'\,d^2}{3}+\ldots \text{ ou } I=\frac{d^2}{3}\,(m+m'+\ldots)$$

ou enfin

$$I=\frac{M\,d^2}{3}.$$

Ainsi, *le moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle par rapport à une de ses arêtes est égal à sa masse multipliée par le tiers du carré de la diagonale de sa base.*

Le moment d'inertie du parallélipipède rectangle, en le prenant par rapport à la parallèle à AB passant par son centre de gravité, devient :

$$\frac{Md^2}{3}-\frac{Md^2}{4},$$

car il faut retrancher la masse multipliée par le carré de la distance des deux axes, du moment d'inertie précédemment trouvé. En réduisant, on a

$$I=\frac{1}{12}Md^2=\frac{1}{12}M(b^2+c^2),$$

en désignant par b et c les arêtes de la base. Enfin ce moment devient :

$$I=\frac{1}{12}M(b^2+4c^2),$$

par rapport à un axe parallèle à AB et divisant en deux parties égales la face qui a pour côtés les arêtes AB et b.

§ 302. *Moment d'inertie d'un prisme rectangulaire.* — Soit le prisme PSQ (*fig.* 162), rectangulaire en Q, dont il s'agit de trouver le moment d'inertie par rapport à l'une de ses arêtes projetée en Q. Achevons le parallélipipède $PQST$. Si l'on désigne la masse du prisme par M, celle du parallélipipède sera $2M$; le moment d'inertie de ce dernier par rapport à l'arête Q sera

$$\frac{2Md^2}{3},$$

et sera égal au moment d'inertie I du prisme PQS augmenté de celui du prisme PTS, tous deux par rapport à la même arête Q. Or, le moment d'inertie du prisme PTS par rapport à l'arête T est aussi I comme celui de PQS par rapport à l'arête Q. Si nous voulons avoir ce moment par rapport à un axe K passant par le centre de gravité du prisme, il faudra retrancher de I la masse M du prisme multipliée par le carré de la distance TK des deux axes. Cette distance

$$=\frac{2}{3}TR=\frac{1}{3}TQ=\frac{d}{3}.$$

Le moment d'inertie du prisme PTS par rapport à l'axe K sera donc

$$I-\frac{M d^2}{9}.$$

Transformant ce nouveau moment d'inertie en un autre par rapport à l'axe Q, il faudra pour cela ajouter à la dernière expression la masse du prisme multipliée par le carré de la distance QK des deux axes. Cette distance

$$=\frac{2}{3}\,TQ=\frac{2}{3}\,d.$$

Le moment d'inertie du prisme PTS par rapport à l'axe Q sera donc enfin

$$I-\frac{M d^2}{9}+\frac{4\,M d^2}{9}=I+\frac{3\,M d^2}{9}=I+\frac{M d^2}{3}.$$

Ce moment, ajouté à I moment d'inertie cherché du prisme PQS par rapport à la même arête Q, donnera le moment d'inertie $\frac{2\,M d^2}{3}$ du parallélipipède. On aura donc

$$\frac{2\,M d^2}{3}=I+I+\frac{M d^2}{3}.$$

D'où l'on tire

$$I=\frac{M d^2}{6},$$

d étant la longueur de l'arête $PS=TQ$. Ainsi, *le moment d'inertie d'un prisme rectangulaire par rapport à l'arête de l'angle droit est égal au sixième de sa masse multipliée par le carré de l'hypothénuse de sa base.*

§ 303. *Moment d'inertie d'un prisme isoscèle.* — Du moment d'inertie d'un prisme rectangulaire on déduit facilement celui d'un prisme isoscèle BCA (*fig.* 163), car ce dernier peut être décomposé en deux prismes rectangulaires BCX, ACX. Soit M la masse du prisme total, et $d\,d$ les côtés égaux BC, AC, de sa base. Le moment d'inertie du prisme BCX par rapport à l'axe X est

$$\frac{M}{2}\cdot\frac{d^2}{6}=\frac{Md^2}{12}.$$

Le double $\frac{Md^2}{6}$ de cette quantité donne le moment d'inertie du prisme total par rapport au même axe. Pour obtenir le moment d'inertie par rapport à l'axe K passant par le centre de gravité, il faut retrancher du premier la masse M multipliée par le carré $\overline{KX}^2$ de la distance des deux axes. Or

$$KX=\frac{CX}{3}, \text{ et } \overline{KX}^2=\frac{\overline{CX}^2}{9}=\frac{H^2}{9},$$

donc le moment par rapport à l'axe

$$K=\frac{Md^2}{6}-\frac{MH^2}{9}.$$

Enfin, pour obtenir le moment I par rapport à l'axe C, il faut ajouter à cette expression $M\,\overline{CK}^2$. Or,

$$CK=\frac{2}{3}H, \text{ et } CK^2=\frac{4}{9}H. \text{ Donc}$$

$$I=\frac{Md^2}{6}-\frac{MH^2}{9}+\frac{4}{9}MH^2=M\left(\frac{d^2}{6}+\frac{H^2}{3}\right).$$

§ 304. *Moment d'inertie d'un prisme régulier et d'un cylindre.* — De là il est aisé de conclure le moment d'inertie d'un prisme régulier par rapport à son axe projeté en O (*fig.* 164). Soit M la masse du prisme et n le nombre des faces latérales. On pourra décomposer le prisme en autant de prismes isoscèles égaux qu'il y a de faces, en menant des plans par l'axe et chacune des génératrices. Représentons par R le rayon OA du cercle circonscrit à la base, et par r le rayon OC du cercle inscrit. Si m est la masse d'un des prismes isoscèles, son moment d'inertie par rapport à l'axe O sera § 303 :

$$m\left(\frac{R^2}{6}+\frac{r^2}{3}\right).$$

Pour le moment de tous les prismes, on aura donc

$$I=mn\left(\frac{R^2}{6}+\frac{r^2}{3}\right)=M\left(\frac{R^2}{6}+\frac{r^2}{3}\right).$$

Pour un cylindre, $R=r$; alors on a :

$$I=\frac{MR^2}{2}.$$

Donc *le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe est égal à sa masse multipliée par la moitié du carré de son rayon.*

Si l'on veut exprimer le moment d'inertie en fonction du volume, il faut substituer à la masse sa valeur en fonction du poids, § 184, et substituer au poids son expression en fonction du volume et de la densité, § 185, ce qui donnera $\frac{PR^2}{2g}$ d'une part, et en nommant φ la densité : $\frac{\pi R^2 . H . R^2 . \varphi}{2g}$; et enfin, en réduisant : $I=\frac{\pi\varphi R^4 H}{2g}$. Il serait aisé d'exprimer tous les moments d'inertie précédemment calculés, comme nous venons de le faire pour le cylindre, en fonction des dimensions de ces divers corps, en remplaçant la masse par le volume multiplié par le poids spécifique et divisé par g.

§ 305. *Moment d'inertie d'un volant.* — Le moment d'inertie d'un volant par rapport à son axe projeté au centre est égal à la différence des moments d'inertie de deux cylindres dont les rayons des bases sont les rayons des circonférences intérieure et extérieure du volant. Nous venons de trouver le moment d'inertie d'un cylindre $=\frac{\varphi\pi R^4 H}{2g}$, pour le rayon R, et $\frac{\varphi\pi r^4 H}{2g}$ pour le rayon r. Désignant par I le moment d'inertie du volant, nous aurons donc :

$$I = \frac{\varphi \pi H}{2g}(R^4 - r^4) = \frac{\varphi \pi H}{2g}(R^2 + r^2)(R^2 - r^2).$$

Or, le volume du volant $= \pi H (R^2 - r^2)$. Multipliant par la densité φ, et divisant par g, nous aurons la masse M de ce volant. En substituant dans la valeur de I, il vient :

$$I = M\left(\frac{R^2 + r^2}{2}\right).$$

Faisons le rayon moyen du volant $= l$; la largeur de la jante $= e$. Nous aurons

$$R + r = 2l, \text{ et } R - r = e.$$

Élevant au carré les deux membres de chacune de ces égalités, et les ajoutant membre à membre, il viendra :

$$2(R^2 + r^2) = 4l^2 + e^2; \text{ d'où } \frac{R^2 + r^2}{2} = l^2 + \frac{e^2}{4}.$$

Substituant dans la valeur de I, on a enfin

$$I = M\left\{l^2 + \frac{e^2}{4}\right\}, \text{ ou } I = M l^2,$$

quand e est moindre que $\frac{1}{5}l$. Le rayon moyen étant désigné par R, le moment du volant devient dans cette dernière hypothèse $I = M R^2$.

Si h désigne l'épaisseur du volant dans le sens de l'axe, nous allons pouvoir exprimer le moment d'inertie en fonction de toutes les dimensions linéaires du volant. En effet, le volume du volant $= \pi h (R^2 - r^2) = 2\pi h l e$. Multipliant par la densité φ et divisant par g, nous aurons la masse

$$M = \frac{2\varphi\pi l e h}{g}.$$

Substituant cette valeur de M dans la dernière valeur de I, il vient :

$$I = \frac{2\,\varphi\pi leh}{g}\left(l^2 + \frac{e^2}{4}\right),\ \text{et}\ I = \frac{2\,\varphi\pi l^3 eh}{g}$$

à $\frac{1}{100}$ près, lorsque e est moindre que $\frac{1}{5}l$.

§ 306. *Moments d'inertie de plusieurs autres corps.* — Voici encore les moments d'inertie de quelques corps qui sont tout calculés :

1° Le moment d'inertie d'un segment sphérique par rapport au diamètre passant par le milieu de ce segment, r étant le rayon de la sphère et f la flèche du segment, est :

$$I = \frac{\varphi\pi f^3}{g}\left\{\frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{2}fr + \frac{1}{10}f^2\right\}.$$

2° Le moment d'inertie de la sphère par rapport à l'un de ses diamètres est :

$$I = \frac{8}{15}\cdot\frac{\varphi\pi r^5}{g}.$$

3° Le moment d'inertie d'un cône droit à base circulaire dont r est le rayon de la base et h la hauteur est :

$$I = \frac{\varphi\pi h r^4}{10\,g}.$$

4° Le moment d'inertie d'un tronc de cône droit dont h est la hauteur, r et r' les rayons des bases, par rapport à l'axe, est :

$$I = \frac{\varphi\pi}{10\,g} \times h \times \frac{r^5 - r'^5}{r - r'}.$$

5° Le moment d'inertie d'un ellipsoïde, en nommant a, b, c, ses trois axes, et E son volume, par rapport à l'axe a, est :

$$I = \frac{\varphi E}{3\,g}(b^2 + c^2).\ \text{Le volume}\ E = \frac{4}{3}\pi abc.$$

§ 307. *Application des moments d'inertie.* — Les moments d'inertie précédemment calculés trouveront leur application lorsque l'on voudra déterminer la force vive qui réside dans un corps qui tourne autour d'un axe, dans un instant pour lequel la vitesse angulaire sera donnée. En effet, nous avons vu, § 295, que cette force vive était mesurée par le moment d'inertie multiplié par le carré de la vitesse angulaire. Cette dernière est facile à déterminer au moyen du procédé indiqué § 22. Cette quantité de force vive représente toujours, comme on sait, § 271, le double du travail qui a été développé par le moteur pour produire la vitesse du corps. Ce travail, absorbé par l'inertie, est ensuite restitué lorsque cela devient nécessaire. C'est ainsi qu'on trouverait le travail absorbé par un martinet, et qu'il restitue immédiatement.

Supposons qu'on veuille calculer le travail que possède un volant qui a une vitesse angulaire donnée. Il suffira de multiplier son moment d'inertie $\frac{2\varphi\pi l e h}{g}\left(l^2+\frac{e^2}{4}\right)$ par le carré de la vitesse angulaire. Si l'on simplifie le moment d'inertie, en le faisant égal à $\frac{PR^2}{g}$, R étant le rayon moyen du volant, $\frac{PR^2V_1^2}{g}$ sera la force vive de ce volant. Soit

$$P=2000^{\mathrm{k}};\ R=2^{\mathrm{m}};\ V_1=3^{\mathrm{m}}.$$

En substituant, il vient : force vive $=7340$, dont la moitié $3670^{\mathrm{k.m.}}$ représente le travail absorbé par l'inertie du volant, et restitué ensuite, soit lorsque la résistance l'exigera, soit lorsque la puissance cessera entièrement d'agir.

§ 308. *Valeur en poids de la force centrifuge dans le mouvement circulaire.* — Il est aisé maintenant de se faire une idée complète de la force centrifuge. Nous avons vu, § 91, que cette force avait pour valeur le carré de la vitesse divisé par le rayon, ou $f=\frac{v^2}{r}$. Dans cette formule, f représentait la vitesse acquise, au bout d'une seconde, par un corps qui aurait été soumis librement et en ligne droite à l'action de cette force. Si nous multiplions les deux membres de cette égalité par M la masse du corps, nous aurons

$$Mf=\frac{Mv^2}{r}.$$

Mais le premier membre est l'expression de la force motrice, § 270; on conclut donc de là que *la force centrifuge d'un corps de petites dimensions comparativement à sa distance au centre autour duquel il tourne, est égale à la force vive imprimée à ce corps dans le cercle que décrit son centre de gravité, à l'instant où on le considère, divisé par le rayon de ce cercle.* C'est la mesure en kilogrammes de l'effort que fait le mobile pour s'écarter du centre, effort qui est détruit à chaque instant par une résistance égale et contraire et dont la direction va de la circonférence au centre. Soit P le poids du corps$=Mg=100^k$; soit $r=1^m$, et $v=4^m$; on aura

$$F=\frac{Pv^2}{gr}=\frac{100.16}{9{,}81.1}=163^k.$$

Le corps exerce donc à chaque instant, si le mouvement se conserve uniforme, un effort de 163^k sur ce qui établit sa liaison avec le centre, en le maintenant dans le mouvement circulaire.

DE LA RÉSISTANCE DES BOIS ET DES MÉTAUX (*).

§ 309. *Notions préliminaires.* — Lorsqu'un corps solide est soumis à un effort extérieur en un ou plusieurs de ses

(*) L'étendue déjà donnée à ces éléments, et ce qui reste à étudier pour compléter le programme du cours de la troisième année, ne nous permettent pas de donner de grands développements à ce chapitre. Nous nous contenterons de consigner les résultats de l'expérience sur la résistance des bois et des métaux, et de faire de ces données les applications les plus usuelles et qui soient en rapport avec les travaux que les élèves ont à exécuter dans leurs diverses professions.

points, il est susceptible d'éprouver des déformations dans quelques parties de sa masse, altérations qui dépendent de l'intensité de l'effort, de sa direction, du point où il est appliqué, etc. Il est de la plus haute importance pour les constructeurs de machines de pouvoir apprécier l'étendue de ces déformations, et déterminer la limite des efforts au-delà desquels elles ne sauraient avoir lieu, ou du moins pour lesquels elles seraient sans inconvénient pour la solidité de la machine.

S'il s'agit d'un corps prismatique, l'effort peut agir sur lui de quatre manières différentes. Ou cet effort agit sur les molécules dans le sens de l'axe du corps, soit en les *refoulant*, soit en les *écartant*, ou il agit perpendiculairement à l'axe, soit en faisant *fléchir* le prisme transversalement, soit en le *tordant* autour de son axe. Nous distinguerons donc des forces de *compression*, de *traction*, de *flexion* et de *torsion*. Lorsque l'effet de ces forces se réduira à altérer la constitution physique des corps en les allongeant ou les accourcissant d'une petite quantité, la résistance que ces corps opposeront prendra le nom de *résistance élastique*. Elle deviendra la *résistance à la rupture* lorsqu'on parlera des efforts nécessaires pour séparer les parties des corps, en agissant par extension ou par compression.

La connaissance de la résistance élastique donne les moyens de calculer la quantité dont une pièce peut se comprimer, s'allonger, se fléchir ou se tordre sous une charge donnée. La connaissance de la résistance à la rupture permet de déterminer la limite des poids qu'une pièce peut supporter. Mais cela ne suffit pas pour l'établissement des constructions, parce qu'il s'agit de connaître, non pas le poids qui rompt une pièce, mais le poids dont on peut la charger sans que l'altération qu'elle subit augmente avec le temps. La recherche de cette dernière limite, qui est de la plus grande importance, peut être rarement l'objet d'expériences directes; mais on peut ici se servir avec avantage des exemples fournis par les constructions existantes. Ainsi, nous remarquons qu'en cédant aux efforts auxquels elles sont exposées, les parties des pièces s'accourcissent ou s'allongent, et nous prenons la proportion de cette variation de longueur pour la mesure du degré d'altération de ces parties. Connaissant donc quelle est, dans les constructions dont l'expérience constate la solidité, la quantité dont les fibres qui subissent les plus grandes variations de longueur sont allongées ou accourcies, nous regardons ces variatons comme des limites que l'on peut atteindre, et qui ne peuvent être dépassées sans danger. A ces variations de longueur correspondent des efforts qui seraient capables de les produire, en agissant directement par extension ou par compression. Ces efforts sont regardés comme les plus grands que les fibres puissent supporter; et la pièce, pour une nouvelle construction, est censée prête à rompre quand ces efforts ont lieu.

Les données d'expériences se composeront, 1° de celles qui feront déterminer les allongements et les accroissements des pièces ; 2° des charges qui n'altèreront pas l'élasticité naturelle des pièces, c'est-à-dire, telles que ces pièces reviendront exactement à leur forme primitive, lorsqu'on les aura soustraites à l'action de ces charges, de telle sorte que ces dernières puissent être considérées comme les limites de celles qu'on peut faire subir à ces pièces dans la pratique; 3° enfin, des charges qui détermineront la rupture.

§ 310. *Coëfficient d'élasticité ; son usage ; sa valeur pour quelques substances.* — Les expériences constatent que, dans les limites où l'élasticité n'est pas altérée, la résistance qu'un prisme offre à la traction, 1° est proportionnelle à l'aire de sa section transversale A ; 2° est proportionnelle à l'allongement de l'unité linéaire, le mètre, ou au rapport de l'allongement l^m d'une longueur L^m de ce prisme à cette longueur. Si donc nous désignons par E la charge nécessaire pour produire un allongement d'un mètre, sur un prisme d'un mètre de longueur et d'un mètre carré de base, en admettant que cette hypothèse puisse se réaliser physiquement, la charge P nécessaire pour produire l'allongement l sera exprimée par

$$P = E.A.\frac{l}{L} \dots (1)$$

Si, au lieu de soumettre le prisme à un effort de traction, on lui en appliquait un de compression, et qui fût incapable de le faire plier ou fléchir transversalement, cet effort serait encore mesuré de la même manière, et la valeur de E est la même pour les deux cas.

On donne à E le nom de coëfficient d'élasticité. Cette valeur de E a été déterminée par le calcul, en la déduisant d'observations faites sur de petits allongements produits par des efforts donnés et appliqués à des prismes de dimensions connues. Mais ce n'est pas par l'observation directe que l'on est parvenu à cette détermination, à cause de la petitesse des allongements ou des accourcissements; c'est par des expériences qui se rapportent à la flexion des corps.

On a trouvé pour le bois, le fer forgé et la fonte, les valeurs moyennes suivantes:

	Coëfficient d'élasticité ou E.
Bois de chêne	1200000000
Bois de sapin jaune ou blanc. . . .	1300000000
Bois de sapin rouge ou pin	1530000000
Fer forgé.	20000000000
Fonte	11000000000

Ces valeurs de E substituées dans la formule (1) pour les substances que l'on considère, donneront le moyen de trouver l'une des quantités P, A, l, L, quand on connaîtra les trois autres.

§ 311. *Des coëfficients de résistance à la traction et à la compression.* — Quant aux charges qui correspondent à la limite de l'élasticité naturelle de ces substances, des expériences ont constaté que pour le bois de chêne on ne pouvait admettre qu'un allongement de $0^{m},0005$ par mètre pour les constructions durables, quoique ce nombre ne fût pas même le tiers de celui qui correspond à la limite d'élasticité naturelle. Cette valeur de $l = 0^m,0005$ étant substituée dans l'équation $P = E.A\frac{l}{L}$, donne pour la charge correspondante à cet allongement 600000. Ce dernier nombre s'appelle le *coëfficient de résistance à la traction* pour le bois de chêne. Nous le désignerons par Tr. Pour le sapin, quelle que soit son espèce, on a trouvé pour son coëfficient le nombre 850000, qui, étant substitué pour P dans la formule (1), donne pour les allongements relatifs au sapin blanc et au sapin rouge 0,00065 et 0,00057. Pour le fer forgé, on admet qu'il serait altéré si les fibres étaient allongées des 0,0005 de leur longueur, ce qui donne pour la valeur de Tr, 10000000^k. Pour la fonte grise qui ne doit pas être soumise à des chocs, on trouve le nombre 5000000^k. Ainsi l'on a le tableau suivant des charges qu'on peut faire subir aux prismes avec sécurité par mètre carré de section transversale.

	Coëfficient de résistance à la traction ou T_r.
Bois de chêne	600000
Bois de sapin	850000
Fer forgé	10000000
Chaîne en fer.	20000000
Fonte	5000000

Il faut moyennement multiplier ces coëfficients par 5 pour les bois, et par 6 pour les métaux, quand on veut avoir les poids qui déterminent la rupture.

On a cherché également les *coëfficients de résistance à la compression C*; mais il a fallu tenir compte de la longueur du prisme relativement au côté de sa base.

Selon que le rapport entre la hauteur et le côté de la base est au-dessous de 12, ou égal à 12, ou égal à 24, on a trouvé que l'on pouvait établir le tableau suivant des charges qu'on peut faire supporter aux prismes avec sécurité par chaque mètre carré de la section transversale.

	Coëfficient de résistance à la compression ou C. Le rapport de la longueur au côté de la base étant au-dessous de 12	12	24
Chêne fort	300000	250000	150000
Chêne faible.	190000	84000	56000
Sapin jaune ou rouge. .	375000	310000	187000
Sapin blanc	97000	82000	49000
Fer forgé	10000000	8350000	5000000
Fonte	20000000	16700000	10000000

On multipliera ces nombres par 10 pour le bois, par 4 pour le fer, et par 5 pour la fonte, quand on voudra connaître le coëfficient de la rupture.

§ 312. *Application des coëfficients* E, T_r *et* C. — 1° Une pièce de bois, dont la section est un carré, a $2^m,05$ de hauteur, et doit supporter une charge $P=50000^k$. On demande quelle est la longueur x du côté de sa base.

D'après le tableau du § 311, la charge qu'on peut faire subir à une pièce de bois sans altérer son élasticité étant $C=300000^k$ par mètre carré, on aura la surface de la section, ou x^2, en divisant la charge 50000^k correspondant à cette surface par la charge sur un mètre carré, ce qui donnera

$$x^2=\frac{50000}{300000}=0^{mc.},1666.... \text{ d'où } x=0^m,4082.$$

Si le rapport de la hauteur $2^m,5$ à x était 12 ou plus grand que 12, on recommencerait alors le calcul, en prenant pour C les autres nombres du tableau.

Si l'on veut calculer la quantité dont la pièce s'accourcit, il faut alors se servir de la formule (1) du § 310, qui donne

$$l=P.\frac{L}{E.A}$$

dans laquelle

$$L = 2^{m},5;\ A = \frac{P}{C};\ E = 1200000000;\ C = 300000.$$

On trouve,

$$l = 0^{m},000625,$$

quantité trop petite pour qu'on puisse s'en inquiéter.

2° Une tige de pompe en bois de chêne doit soulever un poids de 5000^{k}, quel sera le côté de sa section carrée? On a

$$x^2 = \frac{P}{T_r};\ P = 5000^{k};\ T_r = 600000,\ \S\ 311.\ \text{Donc}$$

$$x^2 = \frac{5000}{600000},\ \text{et}\ x = 0^{m},0916.$$

3° Une chaîne doit suppporter une tension de 1500^{k}, quel sera le diamètre du fer rond dont elle sera formée? On a

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{T_r}.\ \text{D'où}\ d = \sqrt{\frac{4P}{\pi T_r}}.\ \text{Or,}$$

$$P = 1500^{k};\ T_r = 20000000,\ \S\ 311.\ \text{Donc}\ d = 0^{m},0098.$$

§ 313. *Résistance des vis à bois.* — Les vis à bois de 0^{m},050 de longueur, de 0^{m},0056 de diamètre en dehors des filets, et de 0^{m},0028 au noyau, engagées par douze filets dans des planches de 0,027 d'épaisseur, peuvent être chargée avec sécurité dans du

Sapin, de.	35^{k}
Chêne, de.	68
Frène sec, de	71
Orme, de.	59

§ 314. *Du coëfficient de résistance à la flexion.* — Lorsqu'une pièce est solidement encastrée par l'une de ses extrémité, la limite de la charge à laquelle elle peut être exposée doit être déterminée par la condition que la flexion causée par cette charge et les allongements et accourcissements des fibres longitudinales qui en résultent, ne soient point capables d'altérer la constitution physique des substances; en sorte que la pièce étant déchargée, reprenne sa forme naturelle. Voici le tableau des plus grands efforts qu'on peut faire supporter aux pièces de bois, de fer et de fonte par chaque mètre carré de section, ou des coëfficients de flexion que nous nommerons F.

	Coëfficient de resistance à la flexion ou F.
Bois de chêne ou de sapin	600000
Fer forgé	6000000
Fonte	7500000

Quoique la résistance du fer à la flexion soit plus petite que celle de la fonte, néanmoins on devra toujours préférer le fer à la fonte dans les pièces qui sont exposées à des chocs.

Ces coëfficients deviennent des coëfficients de rupture en les multipliant par 10 pour le bois, par 3 pour le fer et par 4 pour la fonte.

§ 315. *Calcul de la résistance d'une pièce à la flexion; applications.* — Considérons un solide prismatique horizontal, encastré solidement par une de ses extrémités, et cherchons la force P qui, appliquée à son autre extrémité perpendiculairement à sa longueur, n'altère pas l'élasticité de la pièce. Or, quand un corps prismatique fléchit, les fibres situées du côté de la face convexe sont allongées; les fibres situées du côté de la face concave sont accourcies; certaines fibres, situées dans l'intérieur du corps, sont invariables. En désignant par f la distance verticale de la fibre la plus éloignée à la fibre invariable, par L la longueur du prisme, depuis son point d'encastrement, et par I le moment d'inertie de la section faite dans la pièce normalement à sa longueur, on trouve que la résistance à la flexion est proportionnelle à I, et inversement proportionnelle à f et à L. D'où il suit que cette résistance P peut être mesurée par le quotient de I par le produit $L.f$, en donnant pour coëfficient à ce quotient le coëfficient F de résistance pour un mètre carré de section. Donc on a

$$P = \frac{F.I}{L.f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Lorsque la section est rectangulaire, soient a et b la base et la hauteur de la section, on aura

$$f = \frac{b}{2}; \; I = \frac{a\,b^3}{12}.$$

$$P = F\frac{a\,b^2}{6\,L}. \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Si la section est carrée, $a = b$ et

$$P = F.\,\frac{b^3}{6\,L}. \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Si, la section étant carrée, la diagonale est horizontale, on a

$$f = \frac{1}{2}\,b\,\sqrt{2}; \; I = \frac{b^4}{12}.$$

Substituant dans (1),

$$P = F\,\frac{b^3}{6\,L\,\sqrt{2}}. \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

quantité plus petite que (3), et qui nous apprend que la pièce posée sur sa diagonale est susceptible d'une résistance moindre que celle qu'elle aurait si elle était posée sur sa face, et qu'elle est à cette dernière comme 1 est à $\sqrt{2}$.

Si la section est circulaire,

$$f = r; \; I = \frac{\pi\,r^4}{4}, \text{ et}$$

$$P = F\,\frac{\pi\,r^3}{4\,L}. \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Si l'on substitue pour F ses valeurs correspondantes au bois, au fer et à la fonte, dans les formules (2), (3), (4) et (5), on trouve,

Pour le cas des sections rectangulaires, et pour

le bois. . . . . $a\,b^2 = \frac{P\,L}{100000}$ ..... (6)

le fer . . . . . . $a\,b^2 = \frac{P\,L}{1000000}$ .... (7)

la fonte . . . . . $a\,b^2 = \frac{P\,L}{1250000}$ .... (8)

Pour le cas des sections carrées et pour

le bois. . . . . $b^3 = \frac{P\,L}{100000}$ ...... (9)

le fer . . . . . . $b^3 = \frac{P\,L}{1000000}$ .... (10)

la fonte . . . . . $b^3 = \frac{P\,L}{1250000}$ ..... (11)

Pour le cas des sections carrées dont la diagonale est horizontale, et pour

le bois. . . . . $b^3 = \frac{P\,L.\sqrt{2}}{100000}$ ..... (12)

le fer . . . . . . $b^3 = \frac{P\,L.\sqrt{2}}{1000000}$ ..... (13)

la fonte. . . . . $b^3 = \frac{P\,L.\sqrt{2}}{1250000}$ ..... (14)

Pour le cas des sections circulaires et pour

le bois. . . . . $d^3 = \frac{P\,L}{58905}$ .... (15)

le fer . . . . . . $d^3 = \frac{P\,L}{589050}$ ...... (16)

la fonte . . . . . $d^3 = \frac{P\,L}{736310}$ ...... (17).

Lorsque la charge est uniformément répartie sur la longueur, elle peut être considérée comme agissant au point milieu, et la résistance à la flexion devient alors double de celles précédemment calculées, et comme, en désignant par p la charge par mètre de la substance, la charge totale $P = p\,L$; substituant dans (6), (7) et (8), on a pour ce cas et pour

le bois. . . . . $a\,b^2 = \frac{p\,L^2}{200000}$..(18)

le fer . . . . . $a\,b^2 = \frac{p\,L^2}{2000000}$..(19)

la fonte . . . . . $a\,b^2 = \frac{p\,L^2}{2500000}$..(20)

Les résultats précédents ont été disposés ainsi pour faciliter le calcul des dimensions des pièces qui doivent supporter un effort donné. On voit que cet effort, qui mesure aussi la résistance à la flexion, croît beaucoup plus par la hauteur de la pièce que par sa largeur, puisqu'il est proportionnel au carré de cette hauteur, et simplement proportionnel à la largeur. C'est pour cela qu'on fait toujours reposer les prismes par leur plus petite face, pourvu toutefois qu'on ne craigne pas leur renversement.

On a coutume d'établir, pour les pièces de charpente en bois, un rapport entre la hauteur et la largeur, et l'on fait ce rapport égal à $\frac{7}{5}$. Quelquefois, par économie, on refend les pièces de bois en deux; il faut alors faire $a = \frac{1}{2}\,b$ dans la formule.

Appliquons ces formules à quelques exemples :

1° Quelles doivent être les dimensions d'une pièce de bois de chêne encastrée par une de ses extrémités, et qui doit supporter une charge de 1000 k. à l'autre extrémité, éloignée de 1m,50 du point d'encastrement.

On fera dans la formule (6),

$$a=\frac{5}{7}b;\ L=1,50;\ P=1000;$$

et l'on trouvera

$$b=0^m,27589,\ \text{et}\ a=\frac{5}{7}b=0^m,19706.$$

2° Quel doit être l'équarrissage d'une pièce de bois chargée d'un poids de 1500 kil. appliqué à l'une de ses extrémités, lorsque l'autre est encastrée ; la longueur de la pièce est de $1^m,5$.

La formule (9), en y faisant

$$L=1,5,\ P=1500,$$

donne

$$b=0^m,28231.$$

3° Quel doit être le diamètre d'un boulon en fer exposé à un effort de 500 kil. à une distance de $0^m,05$ du point d'encastrement.

La formule (16), en y faisant

$$L=0^m,05,\ P=500,$$

donne

$$d=\sqrt[3]{\frac{PL}{589050}}=0^m,034882.$$

§ 316. *Tourillons des roues hydrauliques et des arbres.* — Comme ces tourillons, souvent mouillés d'eau, sont facilement usés par le frottement du sable, on leur donne une force double, c'est-à-dire qu'on divise par 2 le coëfficient numérique de la valeur de P ; et comme ils sont ordinairement en fonte, l'équation (17) devient

$$d^3=\frac{PL}{368155}.$$

Application : Une roue hydraulique pèse 30000 kil. La longueur des tourillons est égale à leur diamètre. On trouve

$$d^3 = \frac{P d}{368155}, \text{ d'où } d^2 = \frac{15000}{368155}, \text{ et } d = 0^m,20185.$$

Les formules (15), (16) et (17) s'appliquent aux arbres de communication qui sont bien graissés.

§ 317. *Solide d'égale résistance.* — Lorsqu'un solide est encastré par une de ses extrémités, l'énergie de la force qui est appliquée à l'autre extrémité, et qui tend à déterminer la rupture de la pièce, est évidemment proportionnelle à la longueur de cette pièce. La plus grande action de cette force a donc lieu au point d'encastrement, et c'est à ce point que la rupture tend à se produire. Cherchons quelle serait la forme d'un solide qui présenterait à chacune de ses sections verticales la même résistance à la rupture : c'est ce qu'on nomme un *solide d'égale résistance.* Si nous considérons comme constante la largeur a de toutes ses sections verticales, il faudra, pour satisfaire à la condition demandée, faire également P constant dans la formule $P = F \frac{a b^2}{6 L}$. La relation $b^2 = \frac{6 P}{F a} L$, qu'on en tire entre b et L, donnera la hauteur b correspondant à une longueur donnée L. Ainsi, pour une section $h' h'$ (*fig.* 165), encastrée en o', pour que la résistance à la flexion y fût la même qu'en o sous l'influence de la même force P appliquée en l, il faudrait qu'on eût $h' h'^2$ ou $b'^2 = \frac{6 P}{F a} L'$, en supposant $o' l = L'$. On aura donc toujours entre les hauteurs b et les longueurs L, la relation $\frac{b^2}{b'^2} = \frac{L}{L'}$. Cette propriété des points h, h',.... extrémités des hauteurs de la pièce aux divers points de sa longueur, appartient à une parabole dont le sommet est en l, et dont l'axe est la ligne $o l$. Pour construire cette courbe, on détermine d'abord la hauteur $h h$ ou $b = \sqrt{\frac{6 P}{F a} \cdot L}$ correspondant à la longueur $o l$ ou L de la pièce ; puis, en se donnant une autre valeur $o' l$ pour L, on pourrait déduire de la même formule la valeur corrrespondante $h'h'$ ou b'. Mais on peut employer aussi le procédé graphique suivant, (*fig.* 166) : ayant calculé la hauteur hh' correspondant à la longueur L ou ol, on divisera ol et oh' en un même nombre de parties égales ; on joindra le point h aux points de division 1, 2, 3..... de ol, et par les points 1', 2', 3'... de oh', on mènera des parallèles à ol qui couperont les lignes $h1$, $h2$, $h3$.... en des points qui appartiendront à la courbe qu'il faudra donner à la pièce pour qu'elle résiste en tous ses points avec la même énergie à l'action de la force P. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que pour un point quelconque m', on aura la relation $\frac{b^2}{b'^2}=\frac{L}{L'}$. Or, désignons par n le nombre des divisions de ol et par m le numéro de la division correspondant à la ligne hm'. Les lignes hh' et mm' seront entre elles comme leurs nombres de division. On aura donc

$$\frac{b}{b'}=\frac{2n}{2m}=\frac{n}{m};\ \text{d'où}$$

$$\frac{b^2}{b'^2}=\frac{n^2}{m^2}\cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (1).$$

Mais les triangles hok, kpm' donnent

$$\frac{ok}{kp}=\frac{oh}{m'p}=\frac{n}{m}.\ \text{Or},\ ok=\frac{n-m}{n}L;\ kp=\frac{m}{n}L-L';$$

donc, en substituant, réduisant, et cherchant le rapport de L à L', on trouve

$$\frac{L}{L'}=\frac{n^2}{m^2}.$$

En rapprochant cette égalité de la précédente (1), on a donc

$$\frac{b^2}{b'^2}=\frac{L}{L'}.$$

§ 318. *Balanciers des machines à vapeur.* — On peut appliquer la construction précédente aux balanciers des machines à vapeur; car ils peuvent être considérés comme encastrés par la section faite suivant leur point d'appui. On les arme de nervures sur la ligne milieu longitudinale, et aussi sur les côtés, afin de compenser l'affaiblissement produit par le percement des trous de boulons pour l'assemblage du parallélogramme et des différentes tiges.

Quoique la forme de ces balanciers doive être parabolique, on est dans l'usage de donner aux extrémités une hauteur égale au tiers de celle du milieu; et l'on fait passer par les points ainsi déterminés des arcs de cercle ou la courbe d'une règle flexible, qui limitent le contour supérieur et inférieur du balancier.

§ 319. *Bras des roues hydrauliques et des roues d'engrenage.* — Les formules (6), (7) et (8) du § 315, sont celles qu'il faut employer pour déterminer la forme de ces bras. Dans ces formules b désignera l'épaisseur qu'il faut leur donner près de l'axe de rotation. A la circonférence, il suffira que l'épaisseur des bras, dans le sens de l'effort exercé, soit les $\frac{4}{5}$ de celle qu'ils auront près de l'axe.

Quant à la largeur a, elle reste la même dans toute l'étendue des bras, et l'on fait

$$a = \frac{1}{5}\,b \text{ ou } a = \frac{1}{6}\,b.$$

§ 320. *Dents d'engrenage.* — Les dents des roues peuvent être considérées comme encastrées à leur naissance sur l'anneau qui les porte. Mais ici, la pression n'est plus normale à la longueur de la pièce, puisque, comme on le verra plus loin, sa direction passe constamment par le point de contact des circonférences primitives. Le bras de levier de cette puissance est donc variable, et sa plus grande énergie pour produire la rupture aura lieu quand les dents seront en prise à la ligne des centres.

a étant la largeur de la dent dans le sens de l'axe, et b son épaisseur mesurée sur la circonférence primitive, on fait généralement, pour les dents bien graissées, et dont le cercle primitif n'aura pas une vitesse de plus de $1^m,50$ par seconde, $a=4\,b$; si la vitesse dépasse $1^m,50$, $a=5\,b$; si l'engrenage est exposé à être habituellement mouillé d'eau $a=6\,b$. La saillie des dents sur l'anneau ne devra jamais dépasser la limite $S=1,5\,b$.

Ces relations établies, l'épaisseur pourrait se calculer pour les divers cas par la formule générale, en prenant le cas le plus favorable à la rupture, celui où $a=6\,b$ et la saillie sur l'anneau la plus grande possible, c'est-à-dire $=1,5\,b$. Mais, comme il est nécessaire de tenir compte de l'usure et des chocs auxquels les dents sont toujours exposées, les formules adoptées pour la fonte en particulier et pour le cuivre, donnent une valeur à peu près double de celle donnée par le calcul. Le bois, à cause de sa grande élasticité, est moins exposé à se rompre par les chocs, et la modification est moins nécessaire. Ces formules sont les suivantes : pour

La fonte. . . . . $b=0,105\sqrt{P}$.... (1)
Le bronze ou le cuivre . . $b=0,131\sqrt{P}$.... (2)
Le bois dur. . . . . . . $b=0,145\sqrt{P}$.... (3)

Ces dimensions seront données en centimètres.

Applications : 1° Une roue hydraulique est de la force de 20 chevaux, § 106. Sur son arbre doit être montée une roue d'engrenage à dents en fonte, de même diamètre. La vitesse à la circonférence est $1^m,5$.

Pour calculer P, on remarquera qu'une force de 20 chevaux équivaut à $20\times75^{\text{k.m.}}$ et que ce travail est égal à $P.\,1^m,5$, c'est-à-dire au produit de l'effort par la vitesse. On aura donc d'abord

$$P=\frac{20.75}{1,5}=1000\text{ kil.};$$

et la formule (1) donne $b=3^{\text{cent.}},32$ et $a=6\,b=19^{\text{cent.}},92$, les dents étant mouillées d'eau.

2° La force d'une roue hydraulique est de 20 chevaux, sa vitesse est de $1^m,50$; son rayon est de 2^m; elle transmet son mouvement à une roue d'engrenage à dents en bois dont le rayon est $1^m, 75$.

L'effort à la circonférence de la roue hydraulique est égal à

$$\frac{20 \times 75}{1,5}.$$

Si cet effort était transmis à une roue d'un rayon ou bras de levier double, triple...., cet effort serait, à la circonférence de cette roue, la moitié, le tiers..... du premier. Pour avoir l'effort transmis à la roue d'engrenage, il faut donc multiplier $\frac{20 \times 75}{1,5}$ par le rapport $\frac{2^m}{1,75}$, ce qui donne

$$P = \frac{20 \times 75}{1,5} \times \frac{2}{1,75} = 1143^{\text{kil.}};$$

et la formule (3) donne

$$b = 4^{\text{cent.}}, 90 \text{ et } a = 4\,b = 19^{\text{cent.}}, 6.$$

3° Une roue d'engrenage à dents en bois transmet une force de 30 chevaux avec une vitesse de $3^m, 5$.

L'effort $P = \frac{30 \times 75}{3,5} = 643^{\text{kil.}}$, et la formule (3) donne

$$b = 3^{\text{cent.}}, 6768 \text{ et } a = 5\,b = 18^{\text{cent.}}, 384.$$

§ 321. *Solides posés librement sur des appuis ; la charge au milieu ; la charge uniformément répartie. Solides encastrés par leurs extrémités.* — Si nous considérons un prisme reposant sur deux appuis A et B (*fig.* 167), et supportant en son point milieu C un poids P, ce poids transmettra en A et B deux pressions égales à $\frac{P}{2}$; de telle sorte qu'il sera indifférent de supposer la charge P sollicitant le milieu C de la barre AB, ou de supposer le point C fixe, la pièce encastrée en C, et les points A et B soumis chacun à une charge $\frac{P}{2}$. En appliquant alors les formules (6), (7) et (8) à cette charge, en nommant L la longueur AB, dont on supposera la moitié AC encastrée par une de ses extrémités C, on aura, pour le bois, par exemple,

$$ab^2 = \frac{\frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2}}{100000} = \frac{PL}{4.100000};$$

et si l'on appliquait la force P, au lieu de la force $\frac{P}{2}$, on aurait

$$ab^2 = \frac{P \cdot \frac{L}{2}}{100000} = \frac{PL}{200000}.$$

D'où l'on tirerait pour P une valeur double de celle qu'on obtiendrait pour une pièce de longueur L et qui serait encastrée par un bout. Ainsi donc la pièce AB, reposant librement sur deux appuis, peut supporter à son milieu une charge double de celle qu'elle supporterait si elle était encastrée par une extrémité. Si donc nous voulons que les formules du § 315 soient applicables à ce cas, il faudra que P y représente la moitié de la charge et L la moitié de la longueur; car, l'équation précédente

$$ab^2 = \frac{\frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2}}{100000},$$

qui donne la relation entre a, b, L et P pour que la barre AB résiste sous l'action de la pression P, deviendra, en y remplaçant $\frac{P}{2}$ par P et $\frac{L}{2}$ par L,

$$ab^2 = \frac{PL}{100000},$$

équation identique à (6).

Lorsque les solides ne sont plus posés librement sur leurs appuis, et qu'ils sont encastrés solidement, la charge devient alors double de celle qui correspond à la pièce de même longueur posée librement sur ses appuis. On peut donc appliquer à ce cas les formules du § 315, en supposant que P y représente la charge totale, L représentant comme ci-dessus la moitié de la longueur de la pièce encastrée.

Applications : 1° Quelle doit être l'épaisseur d'une poutre posée librement sur deux appuis, destinée à supporter, au milieu de sa longueur, une charge de 4000 kil.; la distance des appuis étant de 4^m?

La formule (6), en y faisant

$$a=\frac{5}{7}b, \text{ § 315}, P=2000^k, L=2^m,$$

donne

$$b=0^m,38259.$$

2° Quelle doit être l'épaisseur d'une pièce de bois posée librement sur deux appuis distants de 4^m, supportant une charge de 2500 kilogrammes par mètre.

La formule (18) du § 315, en y faisant

$$a=\frac{5}{7}b, \; p=2500^k, L=2^m,$$

donne

$$b=0^m,41212.$$

§ 322. *La section étant carrée. La charge agissant : 1° au milieu ; 2° à des distances données des points d'appui.* — 1° La charge agissant au milieu, les formules (9), (10) et (11) du § 315 servent pour ce cas, P étant la moitié de la charge et L la moitié de la longueur.

2° Si la charge $2P$ agissait en un point C (*fig.* 168), distant des points A et B de l et de l', la barre pourrait être considérée comme fixée en C, et sollicitée en A et B par l'effort $2P$ transmis en ces deux points, et dont la valeur serait, pour le point A, $2P\,\frac{l'}{l+l'}$, ou $2P\,\frac{l'}{2L}$, ou enfin

$\frac{Pl'}{L}$, et pour le point B, $\frac{Pl}{L}$. La résistance serait alors calculée par les formules (9), (10) et (11) du § 315, en y remplaçant P par $\frac{Pl'}{L}$ et L par l, ou bien P par $\frac{Pl}{L}$ et L par l', ce qui conduit aux résultats suivants : pour

le bois. . . . . . $b^3 = \frac{Pll'}{100000L}$.... (1)

le fer . . . . . . $b^3 = \frac{Pll'}{1000000L}$... (2)

la fonte. . . . . $b^3 = \frac{Pll'}{1250000L}$... (3)

Application : Trouver le côté du carré d'un arbre en fonte d'une longueur $2L = 1^m$, supportant un effort de $2P = 800$ kilogrammes, agissant à des distances $l = 0^m,30$ et $l' = 0^m,70$.

La formule (3) donne $b = 0^m,05122$.

§ 323. *La section étant circulaire. La charge agissant : 1° au milieu ; 2° à des distances données des points d'appui.* — 1° Les formules (15), (16) et (17) du § 315 seront applicables à ce cas, en faisant P égal à la moitié de la charge et L égal à la moitié de la longueur.

2° On trouverait également pour ce cas et pour

le bois. . . . . $d^3 = \frac{Pll'}{58905L}$.... (1)

le fer . . . . . . $d^3 = \frac{Pll'}{589050L}$.... (2)

la fonte. . . . . $d^3 = \frac{Pll'}{736310L}$.... (3)

Application : Trouver le diamètre d'un arbre en fer forgé d'une longueur $2L = 1^m,5$, supportant un effort de $2P = 360$ kil., agissant à des distances $l = 0^m,7$ et $l' = 0^m,8$.

La formule (2) donne $d = 0^m,0611$.

§ 324. *Arbres des roues hydrauliques, des roues d'engrenage, des volants,* etc. — Comme les axes de rotation des machines sont exposés à des secousses, et qu'ils ne doivent éprouver que des flexions très faibles, on calcule leurs dimensions en doublant la résistance. Les formules (1), (2) et (3) des §§ 322 et 323 seront donc applicables à ces axes, en divisant par 2 le dénominateur.

§ 325. *Arbres cylindriques creux en fonte.* — D étant le diamètre extérieur, et d le diamètre intérieur, on emploiera les formules suivantes :

1° *La charge agissant au milieu de la longueur*

$$D^3 - d^3 = \frac{PL}{368000}.$$

2° *La charge agissant à des distances* l *et* l' *des points d'appui*

$$D^3 - d^3 = \frac{Pll'}{368000\,L}.$$

3° *La charge étant répartie par moitié en deux points situés à la même distance* l *des points d'appui*

$$D^3 - d^3 = \frac{Pl}{368000}.$$

4° *La charge étant répartie sur une longueur* 2 c *dont le milieu est aux distances* l *et* l' *des points d'appui*

$$D^3 - d^3 = \frac{P\left(\frac{ll'}{c} - \frac{c'}{2}\right)}{368000}.$$

On fait généralement le diamètre intérieur égal aux $\frac{3}{5}$ du diamètre extérieur, ce qui fixe l'épaisseur à $\frac{1}{5}$ du diamètre extérieur.

§ 326. *Formules pour calculer la flèche de courbure. Solides posés horizontalement sur deux appuis.* — Dans ces formules et les suivantes, P est la moitié de la charge et L la moitié de la longueur. On tient compte du poids du solide qui entre dans P pour les $\frac{3}{8}$ de sa valeur.

La charge agissant au milieu de la longueur, 1° Solides rectangulaires, pour

la fonte . . . . $f=\frac{PL^3}{2750000000\,a\,b^3}$,

le fer forgé. . . $f=\frac{PL^3}{5000000000\,a\,b^3}$,

le bois de chêne ou de sapin . . . $f=\frac{PL^3}{250000000\,a\,b^3}$,

l'acier fondu. . . $f=\frac{PL^3}{8000000000\,a\,b^3}$,

l'acier d'Allemagne. $f=\frac{PL^3}{4000000000\,a\,b^3}$,

2° *Solides cylindriques, circulaires,* pour

la fonte. . . . . $f=\frac{PL^3}{1617000000\,d^4}$,

le fer . . . . . . $f=\frac{PL^3}{3940000000\,d^4}$,

le bois. . . . . $f=\frac{PL^3}{147000000\,d^4}$.

3° *Solides cylindriques, creux,* pour

la fonte. . $f=\frac{PL^3}{1617000000\,(D^4-d^4)}$,

le fer. . . $f=\frac{PL^3}{3940000000\,(D^4-d^4)}$,

le bois. . . $f=\frac{PL^3}{147000000\,(D^4-d^4)}$, *La charge agissant en un point quelconque de la longueur*, pour

la fonte. . . . $f = \frac{P l^2 l'^2}{2750000000\, a b^3 L}$,

le fer . . . . $f = \frac{P l^2 l'^2}{5000000000\, a b^3 L}$,

le bois. . . . $f = \frac{P l^2 l'^2}{250000000\, a b^3 L}$.

§ 327. *Résistance des arbres à la torsion.* — P étant l'effort qui tend à tordre l'arbre, R son bras de levier, b le côté du carré, si cet arbre est carré; d le diamètre, s'il est circulaire, on a pour

un arbre carré. . . . . . . $b^3 = \frac{PR}{127000}$,

un arbre circulaire ou polygonal. $d^3 = \frac{PR}{405000}$.

Application : Trouver le diamètre de l'arbre en fonte d'une roue hydraulique de la force de 50 chevaux, l'engrenage qui transmet son action ayant $0^m,80$ de rayon, et le nombre de tours étant 10 par minute.

La vitesse d'un point de la dent

$$= \frac{2\pi R n}{60} = 0^m,837.$$

L'effort exercé sera égal au travail

$$50 \times 75,\ \text{ou}\ 3750^{km},$$

divisé par la vitesse, ou

$$\frac{3750}{0,837} = 4480^k.$$

La formule donne

$$d^3 = \frac{4480 \cdot 0,8}{405000} = 0,00884938 4.\ \text{D'où}\ d = 0^m,20684.$$

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES MACHINES EN MOUVEMENT.

§ 328. *Idée de la constitution physique des machines; nomenclature générale des pièces d'une machine quelconque.* — Les machines, considérées sous le point de vue industriel, ont pour objet l'exécution de certains travaux des arts, à l'aide des moteurs ou *forces motrices* que présente la nature; tels que les animaux, le vent, l'eau, le calorique. Les machines industrielles se composent, en général, d'une suite de pièces matérielles, qui se communiquent le mouvement de proche en proche, depuis celle qui est immédiatement soumise à l'action du moteur, et que l'on nomme le *récepteur*, parce qu'elle reçoit l'action directe de la force motrice, jusqu'à celle qui opère immédiatement le travail utile, et que l'on nomme l'*opérateur* ou l'*outil*. Les pièces intermédiaires se nomment les *communicateurs*. Souvent aussi on nomme le récepteur *moteur*, parce qu'on considère cette pièce comme donnant l'action aux autres; sous ce rapport, chaque pièce peut être considérée comme le moteur de celle qui la suit du côté de l'outil, mais il ne faut pas confondre ces moteurs secondaires avec les moteurs primitifs, qui sont : la gravité, le calorique, les animaux. Par exemple, dans un moulin à farine, le moteur primitif est le poids de l'eau ou la gravité, l'eau elle-même n'est que moteur secondaire; mais il n'y a pas d'inconvénient à la considérer comme le véritable moteur. La roue hydraulique est donc ici le *moteur secondaire*, ou le *récepteur;* les rouages sont les *communicateurs* du mouvement et du travail; la *meule* est l'*outil*, l'*opérateur*. Des désignations analogues s'appliquent à toutes les machines. Or, on donne toujours à toutes ces pièces un degré de solidité, de rigidité ou d'inextensibilité suffisants pour que, sous les efforts qu'elles ont à supporter, elles conservent une forme sensiblement invariable, et transmettent la vitesse, sans perte appréciable, d'une extrémité à l'autre de la machine, c'est-à-dire par des lois dépendantes uniquement de la constitution géométrique du système.

C'est, en effet, dans cette supposition qu'on envisage ordinairement la théorie des machines, afin d'éviter des difficultés qui seraient souvent insurmontables dans l'état actuel de nos connaissances mécaniques, si l'on voulait tenir compte de toutes les réactions moléculaires et intimes, qui naissent de la compressibilité des corps, même les plus solides. Mais il ne faut pas oublier, pour cela, que cette compressibilité existe, et qu'elle est la cause de certaines pertes de travail, de certaines résistances qu'il n'est pas permis de négliger dans le calcul des effets des machines, et dont on apprécie la valeur d'une manière approximative, soit à l'aide de l'expérience, soit à l'aide du calcul et du raisonnement.

§ 329. *Comment on tient compte des pertes de travail provenant de la réaction des ressorts moléculaires.* — Les frottements, l'adhérence, la raideur des cordages sont des résistances qui tiennent à des causes de cette espèce, et qui sont étrangères au travail utile, car elles supposent des déplacements moléculaires dus, les uns au mouvement tangentiel des corps soumis à des pressions normales, les autres à leur flexion plus ou moins grande et continuellement renouvelée : ces résistances et quelques autres, telles que celles des milieux dans lesquels les corps se meuvent, accompagnent d'une manière constante le mouvement des machines, comme, par exemple, lorsqu'une roue hydraulique est immergée, et il arrive rarement qu'on puisse se dispenser d'en tenir compte.

Quant aux actions moléculaires qui sont mises en jeu par le changement de forme général des pièces solides qui se communiquent le mouvement, c'est-à-dire par la flexion, l'extension, la torsion, etc., que ces pièces éprouvent sous les efforts dus à cette réaction réciproque, l'expérience démontre qu'on peut négliger la considération de leur travail, toutes les fois que l'état de compression reste sensiblement le même pendant la durée active du mouvement, ou qu'il n'éprouve que des variations très faibles.

Mais lorsque ces variations sont fréquemment répétées et suivies de déformations permanentes des corps, lorsque surtout elles sont dues aux forces d'inertie, aux réactions de toute espèce qui se développent dans les changements brusques du mouvement, par suite des chocs dus à la rencontre de corps animés de vitesses contraires ou inégales, il devient indispensable de tenir compte des pertes de travail qui peuvent résulter, tant de ces déformations en elles-mêmes que des mouvements relatifs imprimés aux molécules, mouvements étrangers à celui par lequel s'opère le déplacement général des corps du système. Nous reviendrons plus tard sur ces considérations; il suffit de remarquer, dès à présent, 1° que la durée des chocs, tels qu'en éprouvent les machines, est généralement négligeable par rapport à celle du temps où l'on considère le mouvement de la machine; 2° que les pièces qui subissent ce choc étant constituées de façon que les altérations de forme qu'elles éprouvent, sont en elles-mêmes fort petites, le système se retrouve, après le choc, sensiblement dans les mêmes conditions de liaison géométrique qu'auparavant, l'intensité de la vitesse absolue de chaque point étant seule changée; 3° d'où il suit qu'alors le résultat du choc a été simplement une perte de force vive éprouvée par les différents corps, et qui est mesurée par la différence de celles que le système possède avant et après le choc.

§ 330. *Distribution du travail moteur dans une machine en général.* — Il suit de ce qui précède et de tous les principes que nous avons exposés jusqu'ici relativement au travail des forces et aux réactions de toutes espèces qui se manifestent dans les machines, que le travail moteur s'y distribue d'une manière invariable en plusieurs parties, dont quelques-unes peuvent devenir nulles ou négligeables dans telle ou telle machine, mais qui toutes peuvent se ramener à trois principales : la première est destinée à vaincre les résistances qui constituent le travail utile, celui pour lequel la machine est disposée; la seconde est employée à vaincre les résistances étrangères à l'objet qu'on se propose et qu'on nomme *résistances passives;* et la troisième à communiquer aux pièces de la machine un accroissement de force vive représenté par le double de ce travail. Cette dernière partie devient même nulle dans les machines où le mouvement est parfaitement uniforme, comme cela a lieu dans les moulins à farine. Dans ces machines, l'accroissement de force vive est nul, parce que les forces agissent continuellement et ne cessent de se détruire entr'elles. Ainsi, pour cette circonstance, le travail développé par la puissance à chaque instant ou pendant un intervalle de temps quelconque, est égal au travail utile, plus au travail développé par toutes les résistances nuisibles. Dans la plupart des cas, le mouvement des machines industrielles est simplement périodique ou tel que les vitesses redeviennent les mêmes au bout d'un certain nombre de révolutions. Par conséquent, au bout de cet intervalle, l'accroissement de force vive est encore nul, et le travail du moteur se compose de l'effet utile augmenté du travail absorbé par les résistances nuisibles. Si l'on a bien suivi ce raisonnement, qui appartient à toutes les machines simples ou composées, on doit être convaincu qu'aucune combinaison de pièces ou de rouages ne peut faire que le travail du moteur sur la première pièce soit moindre que le travail opéré par l'outil ou que nécessite l'ouvrage à confectionner.

§ 331. *Transformation du travail moteur dans une machine. La modification des facteurs de ce travail n'est pas arbitraire.* — D'après cela, il est aisé de voir que le but véritable des machines ne saurait être d'augmenter le travail mécanique des moteurs qui y sont appliqués, mais de transformer ce travail en ouvrage ou travail industriel selon des considérations données dans chaque cas spécial. Soit F l'effort du moteur et E le chemin parcouru pendant une seconde par son point d'application, estimé dans la direction de cet effort ; soit de même f et e des quantités correspondantes pour le travail utile. D'après ce que nous venons de dire, une machine nous fournit les moyens de transformer le travail $F\ E$ du moteur en travail utile fe. Ce dernier travail est nécessairement plus petit que le premier, puisque nous ne faisons pas entrer dans la valeur de fe le travail absorbé par les résistances nuisibles. Les machines nous offrent en outre le moyen de faire varier dans de certaines limites les facteurs du travail mécanique et ceux du travail utile. On ne peut pas toutefois les faire varier l'un et l'autre d'une manière arbitraire. Nous l'avons déjà fait voir, § 113, pour les moteurs animés ; il est facile d'étendre cette remarque à tous les moteurs en général. En effet, le travail que peut fournir un moteur pendant un temps donné étant nécessairement limité, il est dans la nature des choses que les quantités F et E aient entr'elles une telle relation, que l'une ne puisse augmenter sans que l'autre ne diminue, et réciproquement. Par exemple, si le moteur est un courant d'eau agissant sur les aubes d'une roue, la pression F exercée sur ces aubes sera la plus grande possible, lorsque la roue sera immobile : alors la vitesse étant nulle, le travail l'est aussi. La roue venant à se mouvoir, et les aubes se dérobant en partie au choc du courant, la pression F diminue à mesure que E augmente, et si E devenait égal à la hauteur du courant, on aurait $F = o$, et le travail imprimé serait encore nul. Or, entre ces deux limites, il y a nécessairement une certaine relation entre les valeurs de F et de E qui rend le produit $F\ E$ un maximum. C'est cette relation qu'il faudra chercher par le calcul ou l'expérience, si l'on veut tirer du moteur le plus grand parti possible.

§ 332. *Les facteurs du travail utile doivent avoir une valeur convenable pour que le travail soit un maximum.* — Ce que nous venons de dire du travail moteur doit également se dire du travail utile. On n'est pas toujours le maître de modifier à volonté les facteurs e et f du travail utile de l'outil, quoique pour des ouvrages différents leur valeur puisse être aussi très différente. C'est ainsi que dans la *machine à diviser,* qui sert à déterminer les contours des dents d'un modèle en bois d'une roue d'engrenage, il faut donner à l'outil une vitesse énorme, sans quoi il se ferait dans le bois des déchirures qui altéreraient la forme des dents. Dans la *machine à alléser,* au contraire, la marche progressive de l'outil est très lente, surtout dans le sens de l'axe du cylindre à alléser, puisqu'elle est déterminée par la grandeur du pas de la vis de la machine, qui n'est parcouru qu'après une révolution totale de l'outil. On voit aisément que si la vitesse de l'outil devenait plus considérable, il risquerait de se briser fréquemment. Dans la fabrication des farines, si les meules marchent trop vite, le grain s'échauffe et se détériore; si leur marche est trop lente, la force centrifuge est insuffisante pour écarter le grain à une certaine distance, il s'accumule près du moyeu de la meule et ne s'écrase plus. Il y a donc, pour chacun de ces cas, une vitesse la plus convenable de l'outil, dont on ne saurait s'éloigner sans nuire à la qualité de l'ouvrage ou à sa quantité.

§ 333. *Objet et avantages réels des machines.* — D'après tout ce qui précède, on voit qu'il faut se borner dans la recherche des meilleures conditions d'établissement des machines, à faire approcher le plus possible le produit fe du produit FE; car, soumises comme elles le sont, d'après leur constitution nécessaire, à une foule de résistances passives, elles ne peuvent que transmettre avec perte le travail qu'on leur confie, et cela à tel point qu'on estime comme excellentes, sous ce rapport, celles qui rendent en effet utile les 0, 50 ou les 0, 60 du travail absolu dépensé par le moteur; il en existe effectivement un grand nombre qui, grâce à la multiplicité ridicule et à la fausse combinaison de leurs rouages, rendent à peine le $\frac{1}{10}$ ou même le $\frac{1}{20}$ de ce travail. L'ancienne machine de Marly, qui servait à élever les eaux de la Seine au moyen de pompes, et qui avait fait longtemps l'admiration de l'Europe, ne rendait que $\frac{1}{50}$ de l'action dépensée par le moteur.

L'avantage des machines consiste essentiellement dans la propriété, bien autrement précieuse que celle de multiplier simplement la puissance du moteur, de modifier cette puissance selon les différents besoins des arts, et suivant des lois telles qu'elle devienne applicable à un genre de travail auquel elle ne pouvait l'être dans son état primitif. C'est ainsi que, par leur secours, on est parvenu à remplacer l'adresse et l'intelligence de l'homme par la force purement physique des animaux et autres agents naturels qui, étant beaucoup moins chère, fournit l'unité de travail à un prix moins élevé. Souvent même l'usage des machines et des outils procure des produits plus beaux, plus parfaits, parce qu'ils sont plus précis dans leur forme et plus réguliers. C'est encore ainsi qu'on parvient à obtenir des moteurs qu'ils impriment aux corps des vitesses plus grandes que celles qu'ils possèdent, comme cela a lieu dans la machine à diviser que nous avons déjà citée, et qu'ils soulèvent des fardeaux ou exercent des efforts qui excèdent l'effort absolu dont ils sont capables, comme dans le travail d'une grue ou celui de la machine à allèser; circonstances qui tiennent simplement à ce que la masse des corps, dans le premier cas, et leur vitesse, dans le second, sont fort petites, de sorte que les quantités de travail correspondantes ont en elles-mêmes des valeurs assez faibles, et qui sont en rapport avec les quantités de travail développées par les moteurs.

§ 334. *Sur le mouvement perpétuel.* — On doit être parfaitement en état de comprendre maintenant combien est grave l'erreur de ceux qui prétendent obtenir des machines des effets merveilleux à l'aide de combinaisons mécaniques. L'erreur provient toujours de ce qu'on n'apprécie l'effet de la machine que par l'un des facteurs du travail utile. Une autre erreur est celle de quelques individus qui dans leur ignorance s'appliquent à trouver les moyens de perpétuer sans fin le mouvement imprimé à des machines, ou d'obtenir le mouvement perpétuel. Elle provient uniquement de ce qu'ils oublient que les pièces des machines sont accompagnées de résistances nuisibles, de sorte que, quand bien même la machine devrait marcher à vide, sans effectuer de travail, la force vive qu'on lui aurait imprimée une fois pour toutes, serait continuellement amoindrie par le travail de ces résistances, et finirait par être complétement éteinte, comme le prouve l'expérience dès le premier essai de ces prétendues inventions. Jamais la nature ne nous offre de moteurs dont l'action s'entretienne sans cesse ou ne s'épuise à la longue. Aussi arrive-t-il toujours que la machine s'arrête d'elle-même, si elle n'est remontée comme le tourne-broche, ou si la nature ne subvient pas à la dépense du travail occasionnée par les résistances. Il existe des machines de ce genre qui sont très-ingénieuses et qui peuvent marcher pendant des années entières, mais le mouvement finit toujours par s'éteindre complétement. Ces réflexions ajoutées aux notions déjà données sur la distribution de la force motrice dans une machine, suffiront sans doute pour prouver l'absurdité de toute recherche de mouvement perpétuel, et faire ranger cette chimère dans la catégorie de la quadrature du cercle et autres impossibilités mathématiques, et la faire considérer, comme l'a dit un célèbre mathématien, comme la preuve d'une ignorance complète des lois de la mécanique, ou celle d'une maladie de l'esprit.

CIRCONSTANCES PRINCIPALES DES MACHINES EN MOUVEMENT.

§ 335. *Nature particulière du mouvement des machines.* — Les machines sont assujetties à exécuter des périodes de mouvement qu'on nomme *tours*, *révolutions*, et au bout desquels la position des différentes masses redevient la même qu'auparavant. Or, toutes les pièces étant *solidaires*, la vitesse se communique, de proche en proche, par des lois purement géométriques, telles que lorsqu'on connaît la vitesse d'une pièce quelconque, il est facile d'en déduire celle de toutes les autres.

§ 336. *Du mouvement des machines à partir du repos.*— Un fait général, et qu'il faut considérer comme un résultat d'observation qui ne souffre aucune exception, est, qu'à l'instant où une machine sort du repos, l'effort du moteur est toujours plus grand, et celui de la résistance plus petit que lorsque la machine travaillera. Alors le mouvement s'accélère, et la vitesse de la machine augmente peu à peu, comme celle d'un corps soumis à l'action d'une force accélératrice. Mais il faut admettre, conformément à l'expérience et à la nature des machines industrielles, que la force vive de la machine ne croît pas indéfiniment, et qu'elle atteindra plus ou moins rapidement un maximum pour lequel l'équilibre dynamique de la machine aura lieu. En effet, si la force vive croissait sans cesse et d'une manière sensible à chaque révolution de la machine, il en résulterait que la vitesse d'une pièce quelconque, par exemple celle du point d'application du moteur, croîtrait également et atteindrait bientôt un terme pour lequel ce moteur ne serait plus capable d'aucun effort, § 331, circonstance qui n'a pas lieu pour les résistances, puisqu'il arrive souvent qu'elles croissent avec la vitesse. Il arrive ainsi ce qui doit arriver à un corps grave qui, tombant dans un milieu, de l'eau par exemple, atteint une vitesse finie et constante par suite de la résistance toujours croissante du milieu qui contrebalance bientôt l'action motrice de la gravité. De même, dans une machine, la vitesse du point d'application du moteur s'accélérant, l'effort diminue, celui de la résistance augmente, et il vient bientôt un terme où ces deux efforts ont des valeurs telles qu'ils se font mutuellement équilibre au moyen de la machine, et que, si dès l'origine ont leur eût donné ces valeurs, il ne se serait produit aucun mouvement. A partir de cet instant, ou le mouvement de la machine se conservera uniforme, et alors l'inertie des pièces n'emmagasinera aucune force vive, et toute l'action motrice sera dépensée par les résistances ; ou la résistance deviendra supérieure à la puissance, et la vitesse décroîtra peu à peu jusqu'à une certaine limite qu'elle ne dépassera pas, et pour laquelle le travail élémentaire des puissances sera encore égal au travail élémentaire des résistances. Ces oscillations se continuent pendant un temps plus ou moins long, et même l'uniformité complète ne s'établit qu'au bout d'un temps infini. Cependant il arrive presque toujours, à cause de la grande prépondérance de la puissance sur les résistances, que les machines acquièrent au bout d'un petit nombre de révolutions, par exemple 8 à 10, une vitesse qui s'approche beaucoup de la vitesse limite. Il est aisé d'après cela de reconnaître l'erreur grave qu'on commettrait, si une minute après la levée de la vanne qui laisse arriver l'eau sur un moulin, on venait à considérer le mouvement comme déjà uniforme, et combien les observations qu'on en déduirait sur le travail de la meule seraient vicieuses.

Il résulte de ces considérations trois choses sur lesquelles il importe de fixer son attention : la première, qu'après un certain temps (qui est toujours très-court et souvent à peine appréciable pour la pratique), le mouvement d'une machine devient toujours uniforme ; la seconde, qu'à cette époque les pressions exercées respectivement par le moteur et par la résistance à leurs points d'application, ont des valeurs telles qu'elles se font mutuellement équilibre, conformément aux lois de la statique ; la troisième enfin qu'alors le travail des puissances est égal à celui des résistances.

§ 337. *Des diverses actions qui se développent sur les machines.* — Avant de parler des avantages du mouvement uniforme, des moyens de le produire, et des inconvénients du mouvement varié, nous allons d'abord parler des différentes actions qui se développent sur les machines, et qui sont susceptibles, ou d'absorber du travail en pure perte, ou de produire des alternatives dans la vitesse. Ces actions sont dues 1° au poids des pièces de la machine; 2° aux résistances nuisibles, telles que le frottement, l'adhérence, la résistance des milieux, des cordages, etc.; 3° la force d'inertie des pièces, véritable résistance quand le mouvement s'accélère, et véritable puissance quand le mouvement se ralentit; 4° les actions moléculaires des corps qui proviennent de leur compression, de leur extension ou de leur flexion pendant le mouvement, et dont l'effet, attendu l'élasticité imparfaite de ces corps, est de produire une certaine déformation qui nécessairement absorbe une portion quelconque du travail du moteur.

§ 338. *Influence de la pesanteur.* — Si le centre de gravité de chaque pièce d'une machine en mouvement reste toujours à la même hauteur, il n'y aura aucun travail développé par la pesanteur; c'est ce qui arrive pour les roues bien *centrées*, pour les *courroies* ou *chaînes sans fin*, pour les charriots ou pièces qui glissent sur des plans horizontaux, etc. Mais toutes ces pièces portant sur des appuis, il ne faudra pas oublier que si le poids de ces pièces n'a aucune influence sur l'action dépensée, il n'en est pas de même des résistances de toute espèce qui en résultent, dont l'influence se fait sentir en engendrant de plus grands frottements dus à de plus grandes pressions, et en augmentant les forces vives du système.

Mettant d'ailleurs de côté le cas où l'un des corps de la machine s'élèverait ou descendrait constamment pendant la durée du mouvement, puisque son poids ferait partie de la résistance utile ou de la force motrice, il restera à examiner celui où il baisserait et monterait alternativement, comme cela aurait lieu pour une roue *non centrée*, ou qui ne tournerait pas *rond*, pour une scie verticale qui recevrait le mouvement d'une manivelle, pour les tiges des pistons, les bielles, etc. Quand ces pièces montent, ce ne peut être qu'aux dépens du moteur dont elles enlèvent une portion du travail, équivalente au produit de leur poids multiplié par la hauteur de leur course. Mais comme elles ne peuvent s'élever indéfiniment, elles finiront par descendre, et leur travail, égal au précédent pendant cette course descendante, s'ajoutera ou sera restitué au travail du moteur. Si donc l'effet du poids de ces pièces a été tel que son travail, tantôt contraire, tantôt favorable à celui du moteur, a augmenté ou diminué tour à tour ce dernier de quantités égales, c'est comme si le travail de ce poids avait été nul. Ainsi il ne faut pas s'occuper de l'action de la pesanteur dans les mouvements alternatifs. Toutefois, si le poids des pièces n'exerce dans ces mouvements aucune influence nuisible sur l'effet utile, il n'en fait pas moins naître des résistances en chargeant les points d'appui, et en altérant la vitesse et la force vive du système.

§ 339. *Examen de ce qui se passe dans les mouvements alternatifs ou périodiques.* — Les mouvements alternatifs ne résultent donc que des variations continuelles qui se manifestent dans la vitesse de la machine, ou ce qui revient au même, des inégalités d'action du moteur et de la résistance. Mais il est important de remarquer ici que, pour que ces variations n'influent en aucune manière sur la grandeur de l'effet utile produit par la machine, il faut que ces variations de vitesse se fassent par degrés insensibles. On le concevra facilement en faisant attention que si, pendant que la vitesse augmente, il y a une portion de la quantité de travail fournie par le moteur employée inutilement à produire cet accroissement de vitesse, cette partie se trouve utilisée lorsque l'action du moteur vient ensuite à décroître, parce que la masse de la machine tendant, en vertu de l'inertie de la matière, à conserver sa vitesse actuelle, la quantité de travail qui est alors fournie au point d'application de la résistance, est plus grande que celle qui est dépensée en même temps par le moteur. D'où il suit qu'il faudra toujours chercher à éteindre peu à peu le mouvement des pièces alternatives.

§ 340. *Dans les variations de la vitesse les roues condui-*

sent et sont conduites alternativement. — Il est utile de remarquer une circonstance particulière qui a lieu dans les machines où les actions du moteur et de la résistance se surmontent ainsi alternativement l'une l'autre. La communication étant établie entre ces deux actions par une suite d'engrenages, ce sont d'abord les roues sur lesquelles le moteur agit immédiatement, et qui sont placées le plus près de son point d'application, qui conduisent les autres, et les poussent dans le sens du mouvement qui doit avoir lieu. Mais si l'action du moteur vient à diminuer, ce sont aussi ces mêmes roues qui s'en ressentent les premières, et qui commencent avant les autres à perdre de leur vitesse. Il arrive donc alors qu'elles sont conduites par les roues voisines du point d'application de la résistance, qu'elles conduisaient auparavant, jusqu'à ce que le moteur ayant repris l'avantage sur la résistance, la vitesse du mouvement, après avoir diminué, augmente de nouveau. Chaque fois que le travail du moteur devient plus grand ou plus petit que celui de la résistance, les dents qui en poussaient d'autres par une de leurs faces sont donc elles-mêmes poussées par la face opposée; ce changement, à raison du jeu qu'il est indispensable de laisser dans les engrenages, ne peut avoir lieu sans une secousse qui est toujours plus ou moins sensible. On voit d'ailleurs par là qu'il est presque toujours indispensable de disposer les engrenages de manière que chaque roue puisse conduire ou être conduite indifféremment.

§ 341. *Influence des résistances passives; des chocs.* — Mais toutes les fois que le changement dans la vitesse se fait brusquement, il y a toujours une certaine quantité de travail perdue, et cette quantité fait partie de ce que nous avons appelé *résistances passives.* Parmi ces résistances, il en est qui agissent d'une manière continue pendant la durée du mouvement, telles que la résistance du milieu, le frottement, etc. Il en est d'autres qui ne se reproduisent que par intervalles et dans des instants excessivement courts, telles que celles que développent les chocs ou changements brusques quelconques de la vitesse des corps du système; les premières opérant à la manière de la pesanteur ou des forces motrices quelconques, on conçoit très bien comment on peut évaluer leurs quantités de travail, dans tous les cas où la loi de leur intensité est connue. Quant aux autres, il faut supposer que, pendant le temps très court où les corps réagissent et se compriment, les forces moléculaires sont mises en jeu de manière à développer en sens contraire du mouvement des quantités de travail qui sont numériquement la moitié de la somme des forces vives détruites pendant l'acte du choc; somme qui est toujours comparable à la force vive totale du système, même quand les corps qui y entrent seraient parfaitement élastiques.

§ 342. *Inconvénients des chocs, même quand ils constituent l'effet utile. Moyen de les éviter.* — On remarquera, au surplus, que si le choc est destiné à produire un effet utile, comme lorsqu'il s'agit de comprimer, d'écraser un corps sous l'action d'un pilon ou d'un marteau, une partie de la force vive perdue par les pièces de la machine doit appartenir au travail absorbé par la résistance. C'est celle qui est strictement nécessaire pour opérer le changement de forme qui a lieu dans la matière à comprimer ou à diviser. On conçoit même que la majeure partie de la force vive du pilon serait utilement employée, si ce dernier était parfaitement raide et élastique, si sa forme et sa constitution physique ne s'altéraient pas dans un même corps ou par la répétition des chocs, et si, enfin, il ne conservait après le choc, ainsi que la matière qui y est soumise, aucune vitesse relative étrangère à l'effet utile; mais, comme il en est tout autrement, comme le mouvement est toujours accompagné de résistances passives, on voit qu'il y a nécessairement une perte notable de la force vive imprimée au pilon, ou du travail que suppose cette force vive, qui est consommée en pure perte. Voilà pourquoi aussi, et indépendamment des autres raisons à alléguer, il vaut mieux produire les effets ci-dessus par de simples pressions, ainsi qu'il arrive dans les machines à cylindres, à meules, etc., que les bons constructeurs substituent avec raison aux pilons et aux marteaux. Si donc il est utile d'éviter les chocs dans le cas actuel, à plus forte raison en est-il ainsi quand ce choc n'est pas indispensable à l'effet qu'on veut produire. C'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque des pièces se quittent et se reprennent brusquement avec des vitesses finies, soit qu'elles abandonnent entièrement la machine, soit que, servant à communiquer le mouvement, elles offrent beaucoup de jeu dans leurs articulations, et éprouvent des changements de vitesse en intensité et en direction, telles que les pièces à mouvement alternatif, etc. On évite en partie ces effets, en diminuant ce jeu le plus qu'il est possible; en employant, pour transformer le mouvement continu en mouvement alternatif, des ressorts, ou ce qui vaut mieux des *manivelles*, des *excentriques*, qui éteignent et restituent graduellement la vitesse au commencement et à la fin de chaque oscillation; enfin en disposant les parties qui transmettent le travail par leur contact, et en général toutes les pièces de la machine, de façon qu'elles soient rigoureusement assujetties, dans leur tracé et leur mouvement, à la loi de continuité.

L'effet des changements brusques quelconques est d'ailleurs de faire éprouver aux machines des secousses qui détériorent leur constitution en fatiguant les assemblages, en désunissant les parties et augmentant le jeu, ce qui a pour résultat inévitable une augmentation progressive des pertes de travail. On peut en dire autant des fortes pressions, en général, lorsqu'elles éprouvent des alternatives fréquentes et longtemps répétées, en direction et en intensité.

§ 343. *Des résistances nuisibles autres que le choc.* — Les frottements dont l'action est, en tout état de choses, contraire au mouvement, diminuent de plus en plus le travail du moteur à mesure que le mouvement s'accélère. Aussi leur rôle est-il influent dans le déchet apporté au travail dépensé. Pour diminuer l'effet de ces résistances nuisibles, il faut diminuer les facteurs du travail qui les représente. Il est représenté en général par le produit d'une pression P, par le rapport f du frottement à la pression et par le chemin parcouru. Les pressions opérées sur les appuis seront diminuées en diminuant autant que possible le poids des pièces; la valeur de f pourra être rendue la plus petite possible en polissant et graissant les surfaces frottantes. Quant au chemin parcouru, comme le frottement le plus ordinaire est celui d'un tourillon sur son coussinet, on a vu, § 199, que le travail de ce frottement était proportionnel au rayon de ce coussinet; pour le diminuer, il suffira donc de faire les tourillons aussi petits qu'il sera possible sans nuire à la solidité de la machine.

§ 344. *Influence de l'inertie des masses.* — Tout ce que nous avons dit de l'inertie et des mouvements alternatifs nous dispense de nous étendre beaucoup en ce moment sur l'influence de l'inertie des masses. Elle n'est mise en jeu que lorsque le mouvement varie. Si dans certains instants le travail des résistances surpasse celui des puissances, le mouvement se ralentit nécessairement; mais alors l'inertie ajoute son travail à celui des puissances pour maintenir le mouvement. Si au contraire le travail des puissances est supérieur à celui des résistances, l'inertie s'oppose à l'accélération du mouvement qui en résulte, et diminue de son travail celui des puissances. Donc entre les instants où la vitesse de la machine par suite d'un mouvement périodique, est redevenue la même, l'inertie n'a en réalité rien consommé du travail du moteur; son rôle est par conséquent le même que celui de la gravité, en sorte que pendant cet intervalle, le travail des puissances égale le travail utile plus celui des résistances nuisibles.

§ 345. *Avantages du mouvement uniforme.* — Nous avons déjà fait connaître § 339, les inconvénients des mouvements alternatifs. Avant de parler de ceux du mouvement varié en général, nous allons signaler les avantages des mouvements uniformes. Dans les machines qui possèdent le mouvement uniforme, et où les puissances et les résistances agissent d'une manière continue et avec la même intensité d'action, les pièces se conduisent toujours de la même manière, et demeurent sans cesse en contact, sans éprouver aucune secousse nuisible, aucun changement brusque de vitesse; et comme les quantités de travail élémentaire reçues et transmises par chacune d'elles, sont égales et constantes, ou qu'il y a équilibre à chaque instant, de même que pour la machine entière, les chances de destruction sont moindres, si l'on peut apprécier, dans chaque cas, les efforts qu'elles supportent, les flexions qu'elles éprouvent, et la solidité *minimum* qui leur convient. Mais ces avantages ne sont pas les plus importants de ceux qui appartiennent à l'uniformité du mouvement; car, puisqu'il existe pour chaque moteur, une vitesse de son point d'application qui rend un *maximum* la quantité de travail qu'il communique à la machine, § 331, et que la qualité et la quantité du travail de l'outil dépendent aussi de sa vitesse, § 332, et surtout de la constance de cette vitesse, on voit que le cas le plus avantageux possible sera celui où les vitesses des pièces extrêmes de la machine seront telles que le réclame chaque genre de moteur et de travail utile, et resteront invariables pendant le mouvement, ainsi que celles des pièces intermédiaires.

§ 346. *Inconvénients du mouvement varié même quand il est assujetti à la loi de continuité.* — Dans les machines dont le mouvement varie à chaque instant d'une manière sensible et suivant des lois d'ailleurs continues, les choses se passent d'une manière tout à fait opposée, sans compter les autres inconvénients qui s'y présentent quelquefois. Ainsi, par exemple, il pourrait arriver que le mouvement ne pût aucunement naître ou s'entretenir, parce que l'action du moteur ou celle des diverses résistances étant intermittentes, il y aurait des instants pour lesquels cette dernière ayant acquis toute son énergie, tandis que l'autre a atteint le *minimum* de la sienne, la force vive possédée par la machine ne serait pas suffisante pour entretenir le mouvement dans ces positions que les praticiens nomment *points morts*, et cela, bien que la quantité de travail que pût fournir le moteur dans une révolution de la machine supposée parvenue à un certain état de mouvement, fût égale et même supérieure à celle que développeraient toutes les résistances réunies. Mais en supposant que le mouvement puisse naître et s'entretenir, il n'en résultera pas moins de son état variable, que la machine ne travaillera pas sous les conditions les plus avantageuses possibles, et que ces différentes pièces éprouveront des secousses, des pressions et des tractions qui altéreront plus ou moins rapidement leur constitution, et absorberont en pure perte une portion du travail moteur.

Remarquons d'ailleurs que si la solidité exige que les pièces d'une machine reçoivent des dimensions proportionnées aux plus grands efforts qu'elles sont destinées à supporter, et que, par ce motif, les pièces d'une machine à mouvement varié soient plus lourdes que pour une machine à mouvement uniforme, n'est-il pas évident que la première aura sur la seconde le désavantage d'être soumise à plus de résistances nuisibles? Or il est facile de concevoir qu'à travail égal dans le même temps, la machine dont le mouvement est varié sera soumise à des efforts plus considérables que celle qui serait douée d'un mouvement uniforme ; car, pour que le travail soit le même dans le premier cas que dans le second, il faut que la diminution de la vitesse soit compensée par l'intensité de l'effort. Les pièces de la première machine devront donc être plus résistantes, partant plus pesantes, et produiront ainsi plus de résistances nuisibles.

§ 347. *Moyen de corriger en partie les inconvénients du mouvement varié. Moyen de rendre le mouvement uniforme.* — Pour éviter les inconvénients du mouvement varié, il faut que le jeu des articulations soit très faible, et que le tracé, la disposition de toutes les parties de la machine soient conformes à la loi de continuité, de sorte que les pièces à mouvement alternatif, inhérentes à la constitution de la machine, éteignent graduellement leur vitesse à la fin et au commencement de chaque oscillation.

On voit qu'il est de la plus haute importance de faire en sorte que le mouvement des machines soit rendu le plus uniforme possible. Il n'y a qu'un seul moyen d'y parvenir, c'est de n'employer pour toutes les pièces dont elles se composent que des roues armées de dents, ou se communiquant le mouvement à l'aide de courroies. Encore faut-il qu'elles marchent uniformément, et qu'elles soient bien centrées, pour que leur centre de gravité ne monte ni ne baisse pendant leurs diverses révolutions. Cette symétrie des roues par rapport à leur axe est d'ailleurs avantageuse, en ce que les forces centrifuges des diverses parties de chaque roue s'entre-détruisent et ne produisent sur l'axe aucune pression.

§ 348. *Nécessité de s'éloigner dans certains cas des conditions de l'uniformité du mouvement. Cas principaux de l'irrégularité du mouvement.* — D'après les inconvénients du mouvement varié que nous venons de signaler, il semblerait qu'on dût en proscrire l'emploi dans toutes les applications à l'industrie, se borner uniquement aux moyens qui permettent l'uniformité rigoureuse du mouvement, à n'employer ainsi, même pour le récepteur et l'outil, que des pièces de rotation continue, et à proscrire toute action intermittente de la part du moteur et des résistances. C'est aussi à quoi tendent tous les efforts des bons constructeurs et des mécaniciens instruits; mais quoiqu'on ait résolu la question, pour plusieurs machines importantes, d'une manière suffisamment approchée, il n'y a pas d'espoir qu'on puisse le faire pour toutes. La nature du moteur et du travail, souvent même des circonstances de localité, et principalement trop de sujétion dans l'exécution matérielle, trop de dépense, s'opposent toujours à ce qu'on atteigne le but d'une manière satisfaisante; du moins on doit chercher à en approcher le plus possible, dans chaque cas particulier, en évitant les principaux inconvénients du mouvement varié que nous avons signalés.

Il n'existe en réalité que trois causes essentielles du mouvement varié des machines, et qui consistent dans l'irrégularité d'action soit du moteur, soit de la résistance utile, soit de l'un et de l'autre réunis. Il n'arrivera donc pareillement que trois circonstances où l'on soit forcé de faire usage de pièces à mouvement alternatif, et dans ces trois circonstances on devra éviter de multiplier inutilement ces pièces.

Ainsi le récepteur devra posséder le mouvement alternatif, et l'opérateur un mouvement de rotation continu, uniforme ; on transformera immédiatement, par un des moyens que nous ferons bientôt connaître, à l'aide de manivelles, d'excentriques, etc., le premier mouvement en un mouvement pareil au second ; toutes les pièces intermédiaires seront ainsi des roues, des courroies, à mouvement continu. On en fera autant quand, au contraire, le récepteur devra posséder une vitesse uniforme, et l'outil un mouvement alternatif ; mais si l'outil et le récepteur doivent à la fois posséder un mouvement alternatif, il y aura à examiner si le premier peut immédiatement s'appliquer au second sans interposition de pièces quelconques, de façon que les oscillations et les alternatives d'action coïncident parfaitement, que la vitesse et la pression s'éteignent par degrés vers la fin et le commencement de chacune d'elles ; car alors il ne pourra y avoir de perte sensible, et la machine travaillera presqu'aussi avantageusement que si elle possédait le mouvement uniforme. Par exemple, lorsqu'une machine à vapeur est destinée à faire mouvoir une pompe à eau, il est ordinairement possible de faire coïncider leurs alternatives. Si cette coïncidence était impossible, il faudrait alors transformer chaque mouvement alternatif en un mouvement circulaire. On a donc toujours le moyen de discerner le cas où les divers modes de mouvement sont nécessaires; et quoique aucun de ces modes ne puisse faire parvenir à une uniformité parfaite, on doit donner la préférence à ceux qui permettent la transformation avec douceur, et mettre de côté tous ceux qui agissent par secousses. Enfin il se peut aussi que dans certaines machines où toutes les pièces sont des roues susceptibles de se mouvoir uniformément, le moteur ou la résistance utile n'agisse pas d'une manière constante. Ainsi, lors même qu'une machine à scier du bois serait munie d'une scie circulaire marchant toujours dans le même sens, les nœuds de la pièce à débiter seront autant de causes qui feront encore varier la résistance.

§ 349. *Moyens généraux de régulariser le mouvement dans les machines.* — Laissant de côté le cas où toutes les pièces ont un mouvement alternatif, il n'y aura plus qu'à s'occuper des autres cas, auxquels on pourra joindre celui où toutes les pièces mobiles auraient un mouvement de rotation continu, quoique la puissance ou la résistance agissent sur la première et la dernière pièce d'une manière intermittente variable. Or, dans tous ces cas, mais surtout dans celui où il est avantageux que l'une de ces pièces extrêmes possède la vitesse uniforme, il paraît convenable de régulariser le plus possible le mouvement de la machine, et ce qui précède nous en indique les moyens principaux. 1° On tracera les parties par lesquelles le mouvement de rotation continu se transmet d'une pièce à l'autre, de façon que la vitesse géométrique reste dans un rapport donné, ce qui constitue véritablement le problème des *engrenages* dans toute sa généralité; 2° On *centrera* exactement les roues; 3° On mettra en équilibre le poids des pièces à mouvement alternatif, ou l'on fera concourir ce poids, s'il y a lieu, à régulariser l'action de la puissance et de la résistance dans chaque position du système; 4° On diminuera autant qu'il est possible la vitesse, l'amplitude du mouvement et la masse de ces mêmes pièces, c'est-à-dire, autant que le permettront la solidité et l'usage qu'on en veut faire; 5° enfin on régularisera l'action même du moteur ou de la résistance par des contre-poids ou par toute autre disposition.

§ 350. *Conditions générales de l'établissement des volants.* — Tous les moyens étant épuisés pour obtenir le mouvement uniforme, il reste une dernière ressource, c'est le volant. Il y aurait de l'inconvénient à faire concourir toutes les pièces de la machine à la régularisation du mouvement, en augmentant leur masse et leur vitesse, parce qu'on ferait ainsi croître les résistances passives. On se contente de le faire avec le volant, qu'on a soin de placer sur un axe à grande vitesse, le plus près possible de la force dont il convient de régulariser l'action. Quelquefois aussi on emploie deux volants lorsque le moteur et la résistance agissent en même temps d'une manière irrégulière; chacun d'eux est alors destiné séparément à rendre uniforme l'action de la puissance près de laquelle on le place. Dans tous les cas, il convient que le volant assure l'uniformité de vitesse de son axe, indépendamment de l'inertie propre des pièces de rotation, qui ne sont pas directement interposées entre lui et la force dont il doit régulariser l'action, condition qui tend d'ailleurs à simplifier le problème d'un établissement.

Le poids des volants occasionnant un surcroît de frottement sur les axes, il convient, en outre, de les rendre aussi légers que possible, tout en leur conservant leur énergie qui est proportionnelle à leur force vive. C'est à quoi l'on parvient en donnant à la matière dont ils se composent une grande densité, et en rejetant leur masse à une certaine distance de l'axe de rotation.

Plus tard nous entrerons dans plus de détails sur la construction et le calcul des volants; nous ferons remarquer ici que leur fonction consiste, comme nous l'avons déjà fait voir, à convertir en force vive, ou à *emmagasiner*, selon l'expression admise, une certaine portion du travail moteur, lorsque l'énergie des puissances surpasse celle de toutes les résistances, ou que la vitesse du mouvement augmente, et à convertir ensuite cette même force vive en travail employé contre les résistances, quand la vitesse vient à diminuer, par suite de la prépondérance de ces dernières sur les puissances. Ce sont les propriétés des volants qui les font appeler quelquefois des réservoirs de force vive ou de travail, et qui sont surtout précieuses quand il pourrait résulter de l'irrégularité du mouvement, des pertes de travail ou d'autres inconvénients quelconques; mais il ne faut pas oublier qu'ils introduisent dans la machine de nouvelles causes de résistances, des pertes de force vive qui doivent les faire proscrire dans bien des circonstances. Par exemple, l'emploi d'un volant, ou en général, tout surcroît donné aux moments d'inertie au-delà de ce qui est strictement nécessaire, serait plus nuisible qu'avantageux dans les machines qui posséderaient, par elles-mêmes, un mouvement uniforme ou suffisamment uniforme; dans celles qui seraient susceptibles de s'arrêter fréquemment et tout à coup; enfin dans toutes celles où la constance de la vitesse serait nuisible ou même dangereuse. Il faudra toujours d'ailleurs faire en sorte de régulariser l'action des puissances indépendamment du volant, et quand bien même on serait finalement obligé d'y avoir recours.

DE L'ÉTABLISSEMENT DES MACHINES INDUSTRIELLES.

§ 351. *La question du meilleur établissement des machines, n'est pas susceptible d'une solution générale; on est obligé de la décomposer.* — Nous avons déjà dit que les conditions essentielles d'un pareil établissement consistent à rendre un *maximum* l'effet utile ou la quantité d'ouvrage confectionné, et un *minimum*, la dépense en travail moteur et en argent; de sorte que l'unité d'ouvrage de chaque espèce soit fournie au moindre prix possible. Pour traiter cette question dans toute sa généralité, il faudrait être à même de faire varier à la fois toutes les données dont elle dépend, dans les relations qui lient l'effet utile à l'effet dépensé; mais, en faisant même abstraction du prix en argent qui change suivant les temps et les localités, on ne peut aborder ainsi la question de l'établissement des machines. On se contente de la décomposer en plusieurs autres distinctes pour les traiter à part : ainsi l'on étudie successivement l'action des moteurs sur les récepteurs, des outils ou opérateurs sur la matière à confectionner, à déplacer, etc., puis l'on en vient aux pièces matérielles qui servent simplement à communiquer le mouvement.

L'expérience et le calcul ont appris que ces dernières pièces exercent en général peu d'influence sur la quantité d'action transmise par elles, dans toutes les machines qui sont bien construites et où elles ne sont pas trop multipliées; en un mot, le travail absorbé par les résistances passives inhérentes à ces pièces, est ordinairement une fraction assez faible de celui qu'elles reçoivent du récepteur. Il n'en est pas ainsi des pertes de travail qui ont lieu sur le récepteur et sur l'outil; elles forment, comme nous le verrons, presque toujours une fraction considérable de la valeur absolue et mécanique du moteur. C'est pourquoi, dans la question de l'établissement d'une machine, ce qui importe le plus, c'est le choix de ces deux pièces extrêmes; et, comme le genre du travail est toujours déterminé, on procède d'abord par le choix de l'opérateur.

§ 352. *Choix de l'opérateur et du récepteur des machines; leurs qualités essentielles.* — L'opérateur et le récepteur devant être considérés comme de véritables machines soumises à une puissance et à des résistances, tout ce que nous avons dit des machines en général leur est immédiatement applicable; ainsi, en mettant de côté le prix même de ces agents, qui doit rarement être pris en considération, attendu qu'il est toujours une assez petite fraction de celui du travail moteur considéré pendant un temps suffisamment long, on pourra à l'avance fixer les conditions essentielles de leur établissement, et motiver, à défaut d'expériences directes, le choix qu'on doit en faire, la préférence qu'on doit accorder aux uns sur les autres. Par exemple, nous avons déjà fait remarquer que le meilleur opérateur et le meilleur récepteur sont ceux où la puissance et la résistance agissent d'une manière continue, uniforme, sans secousses et sans choc, ce qui convient principalement aux pièces à mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe; il faut en outre, pour le récepteur, que tout le travail dont est capable la puissance dans un temps donné, soit complétement absorbé, et pour l'opérateur, que le déchet de la matière soit le moindre possible, que le produit ait le degré de perfection désirable, etc.

Si l'opérateur et le récepteur n'étaient soumis à aucune résistance passive, il résulterait des conditions précédentes, qu'ils utiliseraient de la manière la plus convenable, toute la quantité d'action dépensée par la force motrice qui leur est appliquée, ou qu'ils produiraient le *maximum d'effet absolu*, mais il n'en est jamais ainsi dans la pratique; fort souvent même, comme on l'a déjà expliqué, § 348, on se voit obligé de renoncer aux conditions de l'uniformité du mouvement, etc.; d'où il suit que, ne pouvant faire produire à l'opérateur et au récepteur le maximum d'effet absolu, on se borne à rendre son travail utile *un maximum relatif.* Il faut, en effet, se rappeler que, quelle que soit la constitution d'un pareil agent, ses dimensions, sa forme, sa vitesse exercent une influence notable sur le travail transmis, de sorte que, dans chaque cas, on a à faire la recherche des combinaisons qui offrent le plus d'avantages réunis. L'expérience et le calcul ont déjà conduit à quelques résultats précieux relativement aux divers récepteurs, mais il reste beaucoup à faire pour les outils et les opérateurs.

§ 353. *Idée générale de la manière dont on procède à l'établissement des machines; moyen de régler le travail de l'outil.* — Si l'on connaissait pour chaque moteur, chaque récepteur et chaque outil, les conditions du meilleur effet et le rapport de la quantité de travail transmise à la quantité de travail absolue, en combinant ces données avec celles qui sont étrangères à la mécanique, on serait en état de choisir le récepteur et l'opérateur qui, dans chaque cas particulier et pour chaque localité, sont le plus avantageux possible, et l'établissement des machines ne souffrirait plus dès lors de grandes difficultés. Car la vitesse, la force et les dimensions relatives que doivent recevoir cette première et cette dernière pièce étant réglées, le choix des pièces intermédiaires, leurs rapports de grandeur, de position et de mouvement, seraient presqu'entièrement exempts d'arbitraire, puisqu'on aurait, pour se diriger, les préceptes généraux qui précèdent, et les tableaux des diverses transformations de mouvement.

Il resterait ensuite à régulariser l'action des moteurs et de la résistance utile, c'est-à-dire à en proportionner les effets ou le travail, de manière à assurer la permanence du mouvement et son uniformité, s'il est possible.

Il faut supposer que la quantité de matière à confectionner, ou d'ouvrage quelconque à produire dans un temps donné, soit connue, ainsi que le nombre des révolutions de la machine, et qu'il s'agisse de régler en conséquence la marche des opérations et le travail du moteur. La condition la plus essentielle à remplir, c'est de disposer les choses de façon que des quantités égales de matière soient présentées à l'action de l'outil ou de l'opérateur, sinon à chaque instant et d'une manière continue, ce qui ne convient qu'aux outils de rotation, du moins à chacune de ses diverses révolutions, de sorte qu'il y ait le moins d'intervalle possible entre les chargements et le moins de temps perdu. Il en résultera en effet que, si l'on applique à l'opérateur une puissance capable de vaincre toutes les résistances qui y sont attachées, elle devra développer des quantités de travail égales, sinon à chaque instant, du moins à chaque révolution, de sorte que les variations de la vitesse demeureront elles-mêmes comprises entre des limites resserrées et fixes.

Ces conditions sont ordinairement remplies dans toutes les bonnes machines, soit par les agents préposés à la surveillance et à la direction du travail, soit au moyen de dispositions particulières inhérentes à l'opérateur lui-même, et que font varier la quantité de matière qui lui est soumise proportionnellement à la vitesse ou à l'énergie du moteur. Le *babillard* des moulins qui sert à distribuer le grain à la meule, en fait tomber une quantité plus grande, dès que la machine s'accélère, et augmente ainsi la résistance au fur et à mesure que l'action du moteur est devenue plus puissante. Le *pied de biche*, dans les scieries, est disposé de telle sorte qu'il ne fait avancer la pièce à débiter que de 2 ou 1 millimètre selon la moins ou plus grande épaisseur de cette pièce.

§ 354. *Moyens de calculer et de régler les quantités de travail du moteur.* — Il arrive pourtant quelquefois qu'on ne peut ainsi régulariser l'action de l'opérateur, soit parce que les rechargeurs de matière occasionnent des interruptions plus ou moins fréquentes, plus ou moins longues, soit parce que la résistance opposée à cette matière elle-même n'est pas constante; mais alors, il faut au moins chercher à renfermer les inégalités dans des limites suffisamment étroites, et de façon que les quantités de travail à dépenser dans chaque unité de temps ne s'écartent jamais par trop de la valeur moyenne déduite d'un certain nombre de révolutions de l'opérateur.

Dans tous les cas où il résulterait de cette irrégularité d'action des inconvénients graves pour la machine, on a recours, comme nous l'avons vu, § 350, à l'emploi d'un volant, qu'on place le plus près possible de l'opérateur et qui, par son inertie, sert à maintenir l'uniformité du mouvement de l'axe auquel il est appliqué, pourvu que la puissance qui agit tangentiellement, par hypothèse, à la circonférence de la roue motrice montée sur cet axe, développe contre elle et dans chaque unité de temps, des quantités de travail égales à la moyenne dont il vient d'être parlé ci-dessus, moyenne qui doit être censée donnée par le calcul ou l'expérience, ainsi que la vitesse sensiblement constante du point d'application de la force-motrice. Divisant donc cette quantité de travail par cette vitesse, c'est-à-dire par le chemin que décrit uniformément le point dont il s'agit, on aura aussi la valeur moyenne de l'effort que doit exercer la puissance pour vaincre toutes les résistances qui lui sont opposées, valeur qui, généralement, s'écartera peu de la véritable, et qu'on pourra, sans erreur sensible, lui substituer dans tous les calculs relatifs à l'appréciation des effets de la machine.

Maintenant, si l'on considère, les unes après les autres, les différentes pièces interposées entre le récepteur et l'opérateur, pièces qui, par hypothèse, sont toutes douées d'un mouvement de rotation sensiblement uniforme et où l'influence de l'inertie peut être négligée, de sorte que les puissances et les résistances soient constamment en équilibre; si l'on considère, les unes après les autres, ces pièces ou machines simples, il deviendra facile de calculer de proche en proche les intensités moyennes des forces dont il s'agit, et par suite la quantité de travail qui devra être livrée au récepteur dans chaque révolution ou chaque unité de temps, pour vaincre à la fois toutes les résistances réunies, et en supposant qu'on ait assuré la constance de son mouvement au moyen d'un nouveau volant si cela est nécessaire.

Ainsi, finalement, puisque la théorie des récepteurs et des moteurs est censée faite, on pourra déterminer, à son tour, la quantité de travail absolue que devra dépenser le moteur dans l'unité de temps, ou dans chaque révolution de la machine, et il ne s'agira plus que de régler en conséquence son intensité d'action, ce qui se fera par des moyens analogues à ceux qui servent à régler le travail même de l'opérateur : par exemple, en levant convenablement la *vanne* qui donne l'eau à la roue hydraulique, le *robinet* qui fournit la vapeur aux cylindres des machines à feu, etc. Ces opérations sont encore exécutées ici par des hommes chargés du soin de la machine, et quelquefois on emploie des dispositions particulières pour que l'intensité de la force motrice suive naturellement les variations de la résistance, et maintienne la constance du mouvement : telle est la *soupape de sûreté* des chaudières des machines à vapeur, tel est le *pendule conique* ou *régulateur à force centrifuge* dont nous donnerons plus tard la théorie.

§ 355. *Ce calcul est inutile quand la machine est construite.* — On voit par cette discussion que lorsque la quantité de travail à appliquer à l'outil est donnée, on peut déterminer la force absolue qui convient au moteur, et le régler convenablement; mais cette recherche n'est utile que pour le projet même d'établissement de la machine; car, quand il s'agit de la faire marcher, et qu'elle est toute construite, on peut, par un tâtonnement facile, régler son travail et sa vitesse, en faisant varier la résistance utile ou l'intensité de la force motrice par les moyens indiqués. D'ailleurs si, à l'inverse, la quantité de travail absolue que peut fournir le moteur dans l'unité de temps était donnée, on s'y prendrait d'une manière absolument analogue pour déterminer de proche en proche, la quantité de matière que peut et doit confectionner l'outil.

§ 356. *La solution qui précède est suffisante pour la pratique.* — La solution du problème de l'établissement des machines que nous venons d'esquisser à la hâte, n'est, comme on voit, qu'approchée; mais elle serait impossible par toute autre voie, attendu la multitude des indéterminées dont elle dépend, et elle est suffisamment exacte pour la pratique, où l'on ne saurait jamais prétendre à la rigueur mathématique, et où approcher, même d'une manière grossière, par exemple à $\frac{1}{5}$ ou à $\frac{1}{4}$ près, du résultat le plus avantageux, c'est avoir atteint un degré de perfection aussi précieux qu'il est rare. Il n'arrive malheureusement que trop souvent, en effet, que l'ignorance des constructeurs de machines, si elle ne leur fait pas tout à fait manquer le but, les en éloigne de telle façon que l'effet utile obtenu n'est pas le $\frac{1}{5}$ et quelquefois même le $\frac{1}{10}$ de celui qu'on aurait pu espérer d'une meilleure disposition. Au surplus, si nous insistons sur ce sujet, c'est pour faire sentir la difficulté et l'inutilité, quant à présent, d'une solution rigoureuse des problèmes des machines; c'est pour éviter aux élèves l'idée de tentatives qui souvent seraient sans succès, et pour leur faire apprécier, d'une autre part, le mérite réel des connaissances basées sur les données certaines de la mécanique et de l'expérience; c'est enfin pour les mettre à même d'entrevoir, à l'avance, la nature des ressources qu'il est permis d'espérer de chacune d'elles dans les divers cas.

DES COMMUNICATEURS DU MOUVEMENT.

§ 357. *Division des machines élémentaires en séries d'après le mouvement qu'elles reçoivent et transmettent.* — Les machines élémentaires qui entrent dans la composition des machines sont en grand nombre, si l'on comprend dans ce nombre les différents outils des arts et les récepteurs. Comme l'étude de ces derniers se rattache aux moteurs dont nous traiterons plus loin, et que les opérateurs sont en trop grand nombre, nous nous contenterons d'étudier ici les divers communicateurs en usage pour transmettre le mouvement de la puissance à la résistance, et nous choisirons même parmi eux ceux qui sont le plus fréquemment employés, car le temps et l'espace ne nous permettent pas de les étudier tous. La classification de ces machines est déterminée par la nature du mouvement qu'elles reçoivent et transmettent. On distingue quatre mouvements principaux dans les machines : le mouvement rectiligne continu, le mouvement circulaire continu, le mouvement rectiligne alternatif et le mouvement circulaire alternatif. La transformation de ces mouvements, d'abord en mouvements de même espèce, puis en mouvements d'une autre espèce, s'effectue au moyen de machines qui, par ce moyen, peuvent être rangées en séries. Ainsi, il y a la série des machines qui transforment le mouvement rectiligne continu en mouvement rectiligne continu, la série des machines qui transforment le mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif, etc. Nous donnerons au moins un exemple de chacune de ces transformations.

§ 358. *Transformation du mouvement rectiligne continu en rectiligne continu.* — La plus simple des transformations est celle du mouvement rectiligne continu en mouvement de même espèce. Elle s'effectue au moyen de poulies dont nous avons déjà étudié la théorie, et sur laquelle nous ne reviendrons pas.

§ 359. *Transformation du mouvement rectiligne continu en mouvement circulaire continu et réciproquement.* — Le treuil nous offre un exemple de transformation du mouvement circulaire continu de la manivelle en mouvement rectiligne du poids à soulever. On pourrait également concevoir un poids moteur appliqué à la circonférence de la roue, et par sa chute déterminer la rotation de l'arbre, ce qui serait la transformation inverse.

Nous pouvons ajouter à cet exemple celui d'un treuil qui est destiné à faire monter un poids d'une quantité aussi petite qu'on le veut, ce qui est important lorsqu'on veut ménager la puissance. Cette invention (*fig.* 169), qui paraît venir de la Chine, consiste à composer l'arbre du treuil de deux parties ayant des diamètres différents. On fixe le fardeau à la chape d'une poulie mobile, et les deux extrémités de la corde passant dans la gorge de la poulie, vont s'attacher en sens contraire sur chacune des parties du treuil, de manière qu'en tournant la manivelle, la corde s'enroule sur le grand cylindre et se déroule sur le petit. On voit alors qu'à chaque tour du treuil le fardeau monte d'une quantité égale à la moitié de la différence entre les circonférences des deux cylindres. Soit P la puissance appliquée à la manivelle; Q la résistance ou le poids à soulever. Soit r la longueur de la manivelle; R et R' les rayons des cylindres. Le travail de la puissance sera :

$$2\pi r P,$$

et celui de la résistance

$$\frac{Q\,(2\pi R - 2\pi R')}{2} \text{ ou :}$$

$$Q\,(\pi R - \pi R').$$

On aura donc pour cette machine

$$2\pi r P = Q\,(\pi R - \pi R').$$

On voit que si le travail reste le même, on pourra vaincre des résistances de plus en plus grandes en diminuant la différence des rayons.

Ce treuil, sur l'axe duquel on pourrait placer ainsi des tambours composés de deux parties ayant des diamètres plus ou moins différents, offrirait, avec plus de simplicité et d'avantage, les mêmes ressources que l'emploi des moufles. Ces derniers appareils, dont l'usage ne saurait pourtant être trop recommandé, ont le défaut d'augmenter beaucoup la résistance par l'effet du frottement sur les axes des poulies, et de la roideur de la corde qui se plie dans leurs gorges.

L'engrenage d'une roue et d'une crémaillère offre un autre exemple de cette transformation de mouvement; l'écrou et la vis, etc.

§ 360. *Transformation du mouvement circulaire continu en mouvement de même espèce.* — Pour opérer cette transformation, on se sert de courroies sans fin enroulées sur des couronnes, mais il faut éviter que ces courroies glissent sur la surface des couronnes, car la rotation ne s'effectuerait pas. On y parvient en donnant aux tambours une grande surface, afin que les courroies qui les enveloppent entièrement embrassent aussi une plus grande étendue. Lorsque les tambours doivent être petits, alors on croise les courroies. Enfin si le glissement était encore à craindre, il faudrait faire faire plusieurs tours à la courroie autour des tambours. Lorsque les machines sont puissantes, on a alors recours aux diverses roues dentées, dont la théorie sera donnée plus loin.

§ 361. *Transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif. Bielle mue par une manivelle; excentrique.* — Le moyen le plus convenable pour opérer cette transformation, consiste dans la combinaison du mouvement de rotation d'une manivelle autour d'un axe, avec celui d'une bielle dont l'extrémité supérieure pousse un corps forcé par des prisons ou des coulisses à prendre un mouvement rectiligne alternatif (*fig.* 170). *A* est un arbre tournant sur lui-même et auquel est fixée une manivelle armée d'un bouton *B*. Autour de ce bouton roule librement une bielle *B C* dont l'extrémité *C* transmet le mouvement rectiligne au corps *D* de bas en haut pendant la demi-révolution ascendante *E B F* de la manivelle *A B*, et de haut en bas pendant la demi-révolution descendante *F G E*. Ce qui fait le principal avantage de cette combinaison, c'est que la vitesse et l'action varient par degrés insensibles vers la fin et le commencement de chaque oscillation du corps *D* ou de chaque demi-révolution de la manivelle, et que les pièces ne se quittent pas, et n'éprouvent aucun choc, aucune secousse nuisible. En effet, la vitesse de l'extrémité supérieure *C* de la bielle devient nulle quand le bouton de la manivelle parvient sur la ligne *A C* aux points *E* et *F*, où il décrit des chemins élémentaires perpendiculaires à cette droite; et cette même vitesse est au contraire la plus grande possible pour des positions intermédiaires; ce qui fait que cette vitesse croît et décroît graduellement. Cette variation périodique du mouvement en vertu de laquelle la vitesse redevient la même aux mêmes positions, demeure la même, quelle que soit la grandeur du bouton B de la manivelle; de sorte qu'au lieu d'un petit bouton on peut employer un bouton plus considérable (*fig.* 171). Il suffit que la distance des centres AB reste la même, et il est visible que l'amplitude des mouvements rectilignes alternatifs du corps D n'en sera pas moins toujours égale au double de cette distance du centre. Si le cercle de B (*fig.* 172), s'agrandit au-delà de l'axe fixe A sans que la distance des centres A et B varie, on aura ce qu'on appelle un *excentrique*, ou cercle tournant autour d'un point qui n'est pas le centre de ce cercle. La bielle consiste alors dans une double tringle qui roule avec jeu dans une gorge pratiquée à la circonférence extérieure de l'excentrique, et qui est reliée au-delà de cette circonférence, de distance en distance, par des croisillons destinés à la consolider. L'appareil d'un cercle roulant ainsi avec un axe A qui lui est fixé invariablement, est usité pour ouvrir ou fermer les soupapes des machines à vapeur. Quelquefois quand l'excentrique est trop grand, on le compose d'un simple anneau relié à l'axe fixe A au moyen de bras.

Si la course de la bielle mue par un excentrique ne dépend que de la distance du centre du cercle qui le compose à l'axe avec lequel il tourne, et non de la grandeur de ce cercle, il n'en est pas de même du travail absorbé par le frottement de la bielle sur la gorge de cet excentrique, car ce travail augmente avec la circonférence de ce dernier et peut même devenir un multiple de l'effet utile que la bielle doit transmettre. Nommons en effet F l'effort exercé par la bielle, R la distance AB du centre de l'excentrique au centre de l'arbre qui l'emporte dans son mouvement; l'amplitude d'une oscillation rectiligne étant $2R$, le chemin parcouru par le point d'application supérieure de la bielle sera $4R$ pendant la durée de deux oscillations de va et vient de cette dernière ou d'une révolution complète de l'excentrique. Ainsi le travail transmis par la bielle dans cette même durée sera $4RF$. D'un autre côté, le frottement exercé sur la gorge de l'excentrique est proportionnel à la pression F ou égal à fF, f étant un coëfficient donné par les tables du frottement et dépendant de la nature des substances qui composent la bielle et l'excentrique. Si l'on fait attention que dans l'hypothèse où la bielle demeure sensiblement parallèle à elle-même, le chemin parcouru par le point d'application du frottement sur la gorge de l'excentrique pendant une révolution complète de ce dernier, est égal à sa circonférence, et si nous nommons r le rayon de cet excentrique, $2\pi rfF$ représentera le travail absorbé par le frottement. Divisant ce travail par l'effet utile $4RF$, on aura pour leur rapport le quotient

$$\frac{2\pi r.f.F.}{4RF}=\frac{\pi rf}{2R}.$$

Si par exemple, le coëfficient $f=\frac{1}{6}$, et que le rayon r de l'excentrique soit sextuple de la distance des centres, ce qui arrive souvent, le rapport précédent devient : $\frac{\pi}{2}$ Or $\pi=3,1415$; donc le rapport de l'effet consommé par les frottements à l'effet utile $=1,57$. Par conséquent l'effet transmis à l'arbre fixe est égal à

$$1+1,57=2,57,$$

ou deux fois et demie le travail utile de la bielle. Cet exemple démontre la perte de travail énorme qui résulte de l'emploi de l'excentrique, quand on veut lui faire transmettre de grands efforts. Toutefois ce système est sans inconvénient pour le rôle qu'il joue dans les machines à vapeur, parce que le travail nécessaire au mouvement des soupapes n'est qu'une fraction fort petite du travail total de la machine.

Quelquefois, au lieu d'un bras de manivelle, on se sert d'une roue en fonte armée d'un bouton qui transmet le mouvement à la bielle (*fig.* 173). On a d'ailleurs la précaution de renforcer le bras près de l'endroit où le bouton est adapté. Il n'est pas difficile de reconnaître que cette disposition est tout à fait analogue à celle de la manivelle.

On voit cependant, d'après ce qui précède, que pour bien juger d'une disposition donnée à tel ou tel appareil, il suffit de comparer le travail des frottements qui se produisent avec celui de la puissance.

En général on nomme *excentrique* toute courbe qui tourne avec un arbre, sans être concentrique à cet arbre, et elle peut toujours opérer la transformation de ce mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif. Supposons un triangle équilatéral dont le centre coïncide avec celui d'un arbre A tournant (*fig.* 174), fixé invariablement à ce triangle, et dont les trois côtés soient remplacés par trois arcs de cercle décrits de chaque sommet opposé comme centre. Il est évident que si l'arbre tournant passe au travers d'une pièce verticale $BEFD$ qui repose sur le système des trois arcs de cercle, cette pièce sera tour à tour élevée et abaissée par la révolution du triangle autour de l'axe A. Quant à l'amplitude d'une oscillation, elle sera ici égale à la différence $Ac - Ah$ des parties interceptées par le centre A sur le rayon de l'un des arcs de cercle; de plus, pour une révolution complète de l'arbre A, il y aura eu trois montées et trois descentes de la pièce $BEFD$.

Considérons encore une pièce verticale MN (*fig.* 175), maintenue par des galets gg entre lesquels elle peut glisser, et agissant par son poids sur une bande courbe en forme de cœur qui reçoit son mouvement d'un arbre tournant A auquel cette bande est fixée invariablement. Si l'on imagine que la courbe se meuve de droite à gauche, la pièce MN s'élèvera verticalement jusqu'à ce que la pointe P soit parvenue sur la verticale AN, et elle redescendra pendant une demi-révolution jusqu'à ce que le point de rebroussement Q soit arrivé dans la verticale AN au-dessus de l'arbre tournant A. Dans une révolution complète, la pièce $M N$ aura monté et descendu par degrés insensibles, de quantités égales à la différence $A P - A Q$. Enfin ce mouvement s'opérera de la même manière, quelle qu'ait été la nature de la courbe excentrique. Mais, ordinairement, dans une telle transformation qui, par exemple, s'effectue pour l'ascension et la descente des tiges de piston, et où il faut que le mouvement soit très régulier, le tracé de l'excentrique doit satisfaire à cette condition, que pour les angles égaux décrits par la courbe autour de l'axe A, la tige $M N$ monte ou descende de quantités égales. Cela posé, voici comment le tracé pourra s'effectuer. Soient P et Q (*fig.* 176), la pointe et le point de rebroussement de la courbe en cœur destinée à soulever et à faire baisser pendant sa révolution complète la tige d'un piston; A le centre de l'arbre tournant. Portons $A Q$ de A en 6 sur la droite $Q A P$; et partageons l'amplitude $P 6$ de l'oscillation en un certain nombre de parties égales, en six par exemple. Divisons aussi les deux demi-circonférences arbitraires s'appuyant sur la droite $Q A P$ comme diamètre dans le même nombre 6 de parties. Menant les rayons à ces points de division, décrivons du point A comme centre et avec des rayons successivement égaux à $A P$, $A 1$, $A 2$, $A 3$....., des arcs de cercle dont les intersections avec les rayons de même numéro détermineront autant de points de la courbe cherchée. Il est facile de voir que les diamètres de cette courbe qui passent par le centre A de l'arbre tournant sont tous égaux à la distance $Q P$ de la pointe au point de rebroussement de l'excentrique.

On trouvera plus loin, aux engrenages, les cames et pilons qui offrent encore un autre exemple de cette transformation de mouvement.

§ 362. *Transformation du mouvement circulaire continu en circulaire alternatif.* — De tous les systèmes affectés à cette transformation de mouvement, le plus parfait est sans contredit celui d'une manivelle M, (*fig.* 177), tournant autour de l'arbre A et transmettant, par l'intermédiaire d'une bielle *B*, un mouvement circulaire alternatif à un balancier *CD* mobile autour d'un axe *O*. Ce balancier employé dans les machines à vapeur est une pièce en fonte mince de 5 à 6 centimètres d'épaisseur, renforcée par des côtes. Son objet est de transmettre un mouvement sensiblement rectiligne de va et vient à la tige d'un piston *P*. On verra bientôt comment le parallélogramme *a b c d* remplit ce dernier but. L'appareil de la bielle, de sa manivelle et du balancier n'est qu'une imitation de la pédale des remouleurs ou du tour à filer.

On trouvera, aux engrenages, un autre exemple de cette transformation de mouvement dans les cames et marteaux.

§ 363. *Transformation du mouvement circulaire alternatif en mouvement circulaire continu.* — Le levier dit *à la garousse*, sert à opérer cette transformation. Si une fourche *A*, (*fig.* 178), pousse successivement et toujours dans le même sens les dents crochues en fer d'une roue *B*, celle-ci prendra autour de son axe un mouvement circulaire. Or ce dernier, ainsi que l'effort de la fourche *A* qu'on nomme *pied de biche*, est produit par le mouvement circulaire alternatif d'un levier coudé *C D E* autour d'un axe *C*. Si la puissance *P* s'exerce de haut en bas, le pied de biche fait avancer une dent de la roue *B*. Lorsqu'au contraire la puissance *P* fait mouvoir la branche *CE* du levier de bas en haut, la fourche se désengrène et se porte sur une dent inférieure. Quand ce système est employé à soulever un poids *Q*, on établit un *déclic F* pour empêcher la roue de prendre un mouvement contraire, pendant le désengrènement du pied de biche.

Quelquefois ce système est composé. Il consiste alors dans un levier *A B*, (*fig.* 179), qui a un mouvement circulaire alternatif autour de son axe *C*. Deux crochets *D E* et *F G* suspendus par des articulations à ce levier, engrènent tour-à-tour dans les dents de la roue (*H*). Ainsi, lorsque le point *B* s'abaisse, le crochet *D E* s'élève et fait mouvoir la roue, tandis que le crochet FG se désengrène pour aller saisir une dent inférieure. Lorsque, par une oscillation contraire, le point B s'élève, c'est au tour du crochet FG de tirer la roue, et à celui du crochet DE de se désengrener. On ne peut pas dire à la rigueur que le mouvement de la roue qui prend le nom de *roue à minute* soit continu, car l'action est intermittente, et se transmet par une suite de chocs qui démontrent combien ce système est défectueux, lorsqu'il s'agit de lui faire exécuter immédiatement un grand travail. Toutefois, quand la roue à minute ne se meut qu'avec lenteur, et qu'elle ne transmet pas l'effet utile, dans ce cas son travail est fort petit, ainsi que les pertes qui résultent de cette combinaison. C'est ce qui justifie l'emploi de la roue porte-pièce dans les scieries.

§ 364. *Transformation du mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif.* — Le procédé le plus remarquable employé pour opérer cette transformation de mouvement est dû au célèbre Watt, mécanicien anglais, qui, le premier, a rendu la machine à vapeur susceptible de transmettre le mouvement de rotation continu aux machines industrielles.

Soit BE, (*fig.* 180), un balancier doué d'un mouvement circulaire alternatif autour de son centre de rotation O, ou qui le reçoit de la tige BG du piston G animé d'un mouvement vertical de va et vient. Si le point d'attache supérieur B de la tige BG était fixé à l'extrémité du balancier au moyen d'un tourillon ou d'une articulation, comme le point B ne peut décrire un arc de cercle autour de O, la tige BG serait forcée ou bridée, à moins qu'il n'y eût une autre articulation à sa naissance en G du côté du piston. C'est ce qui a lieu dans quelques machines, mais alors l'action contre le piston de la part de BG se décompose, et le piston presse plus d'un côté que de l'autre; ce qui occasionne des pertes dans les liquides ou les vapeurs contenues dans le cylindre.

§ 366. *Construction du parallélogrmme de Watt.* — Voici le principe sur lequel est fondé le parallélogramme de Watt: soit AO un demi-balancier, (*fig.* 181); O son centre de rotation. Soit $ABCD$ un parallélogramme articulé à ses angles, et dont l'un des côtés AD est situé sur le balancier. Si l'on attache au sommet B la tige BG d'un piston, et si l'on fait décrire un arc de cercle $AA'A''$ à l'extrémité A du balancier, en assujettissant aussi le point C à décrire un certain arc de cercle, le point B entraîné dans ce double mouvement décrira à peu près une ligne droite. Il reste à déterminer le centre K et le rayon KC du cercle que doit décrire le point C.

Soient A, A' A'', trois positions de l'extrémité du balancier. Soit BG la ligne droite à faire parcourir d'un mouvement rectiligne alternatif. Soit $ABCD$ le parallélogramme articulé qui doit servir à la transformation du mouvement. Si l'on veut que le point B sommet de ce parallélogramme décrive la ligne droite BG, pour une autre position $A'O$ du balancier, on aura $A'B'C'D'$ pour la position correspondante du parallélogramme, en décrivant du point A' comme centre avec un rayon AB un arc de cercle qui coupe la ligne BG en B', et achevant le parallélogramme. On construira de même la troisième position $A''B''C''D''$ du parallélogramme. On aura ainsi deux nouvelles positions C' et C'' du point C. Or, d'après ce qui précède, si le point C était assujetti à décrire un arc de cercle, le point B décrirait une ligne sensiblement droite; donc puisque le point B décrit une ligne droite, les trois points C, C', C'' sont sensiblement sur un arc de cercle dont le centre K est facile à déterminer. On voit donc qu'en reliant le point C à une tige rigide CK fixée en K, dans le mouvement du balancier et du parallélogramme, le point B sera assujetti à décrire une ligne droite. Cette solution, il est vrai, n'est pas rigoureuse, car si l'on construisait un grand nombre de positions du parallélogramme d'après la condition que tous les sommets B fussent sur la même verticale BG, on verrait que le sommet C ne reste pas sur un véritable arc de cercle. Donc, réciproquement, en forçant le sommet C à parcourir le cercle dont K est le centre, le sommet B ne restera pas constamment sur la verticale BG. Mais en choisissant des données convenables, on peut faire que les déviations du point B hors de la verticale soient alors très petites, ou ne dépassent pas 3 ou 4 millimètres. Pour obtenir cette déviation, on n'a qu'à imaginer que le sommet B du parallélogramme devienne libre, et qu'à diriger le parallélogramme, en contraignant C à rester sur le cercle $C\,C'\,C''$ trouvé ci-dessus; puis on tracera la ligne qui passe par toutes les positions du sommet B intermédiaires aux positions B, B', B'', qui resteront seules forcément sur la verticale. On trouvera que cette ligne a à peu près la forme d'un S qui coupe la verticale $B\,G$ en B', (*fig.* 182), et qui s'en écarte symétriquement, entre les positions extrêmes B et B'' de quantités $c\,b$, $c'\,b'$ qu'il sera facile de mesurer. On aura d'ailleurs l'attention de construire l'épure de grandeur naturelle, ou même avec des dimensions plus grandes, si l'on veut procéder avec beaucoup de rigueur.

Il y a quelques règles à observer pour que la déviation soit la moindre possible. 1° La direction verticale, (*fig.* 183), $B\,G$ de la tige doit diviser en parties égales la distance $A'\,a$ comprise entre l'arc et la corde de l'arc $A\,A'A''$ décrit par l'extrémité A du balancier; 2° la corde $A\,A''$ qui est à très peu près égale à la course du piston, ne doit pas excéder de beaucoup la moitié ou les deux tiers de la longueur $A\,O$ du balancier, c'est-à-dire que $A\,O$ doit surpasser une fois et demie au moins la longueur de course de la tige; 3° on fera la longueur des côtés du prarallélogramme non parallèles au balancier, (*fig.* 184), de façon que l'extrémité B de la tige soit sur l'horizontale $B\,O$ du centre du balancier, quand celui-ci occupe la position supérieure extrême $A\,O$; 4° l'horizontale $O\,B$ doit partager en deux parties égales l'angle total décrit par le balancier; 5° quant à la longueur du côté $A\,D$, elle est arbitraire, ou plutôt elle dépend de la distance à laquelle on veut placer le centre K, ou de la longueur de la bride; car plus CD se rapproche vers le centre O du balancier, moins l'arc décrit par C sera grand, et plus la bride KC sera courte.

Le point B n'est pas le seul qui dans le mouvement décrive une ligne droite. Si l'on joint le sommet B au centre O du balancier, (*fig.* 184), la ligne BO rencontre CD en un point qui décrit une ligne parallèle à BG. En effet, menons BO, $B'O$, $B''O$, et prouvons d'abord que les points H, H', H'' de rencontre de ces lignes avec les lignes respectives CD, $C'D'$, $C''D''$ sont trois positions du même point. Il suffit de prouver pour cela que les distances DH, $D'H'$, $D''H''$ sont égales. Or, les triangles semblables OAB, ODH donnent : $OA : OD :: AB : DH$. Les triangles $OA'B'$, $OD'H'$ donnent aussi : $OA' : OD' :: A'B' : D'H'$. Dans ces deux proportions, les trois premiers termes sont égaux; donc $DH = D'H'$. On prouverait aussi que $D''H'' = D'H'$. Maintenant, les mêmes triangles donnent aussi les proportions $OA : OD :: OB : OH$ et $OA' : OD' :: OB' : OH'$. Ces deux proportions ont le premier rapport égal de part et d'autre, on aura donc : $OB : OH :: OB' : OH'$; on aurait aussi $:: OB'' : OH''$. Les trois droites OB, OB', OB'' sont donc coupées aux points H, H', H'' en parties proportionnelles; donc les trois points H, H', H'' sont sur une même ligne droite parallèle à $BB'B''$. Il sera donc possible d'attacher en H une tige du piston qui décrive une ligne droite. Il serait aisé de démontrer de la même manière que tous les points de la ligne BO décrivent des lignes droites, de sorte qu'en reliant ces différents points au balancier et au côté CD du parallélogramme, on n'aurait besoin que d'une bride KC pour faire manœuvrer autant de pistons qu'on aurait pris de points sur la ligne BO.

La figure 185 donne une disposition de parallélogramme renversé, dans laquelle AO est le balancier, et les côtés AB et CD sont très longs, parce qu'ici la tige BG est censée fort courte et être placée à une hauteur assez grande au-dessus du balancier.

On pourrait encore simplifier la construction du parallélogramme, en supprimant les côtés $A\ D$, $B\ D$ et $B\ C$, (*fig.* 186), et en se bornant au seul côté $A\ C$ guidé en C par la bride $K\ C$. Le point d'attache de la tige $b\ g$ à mouvoir verticalement se place en b sur le côté conservé $A\ C$ à son point de rencontre avec la ligne menée du centre O du balancier au point B qui serait le sommet d'un véritable parallélogramme. La construction dans ce cas pour obtenir le centre K de la bride est facile; car, $b\ g$ étant la verticale donnée, (*fig.* 187), et A, A', A'' étant trois positions de l'extrémité du balancier, si la longueur $A\ C$ est donnée, ainsi que le point d'attache b de la tige, on trouvera les autres positions C' et C'' du point C en décrivant des point A' et A'' des arcs de cercle avec des rayons égaux à $A\ b$ qui coupent la verticale $b\ g$ en b' et b''; les droites $A'\ b'$, $A''\ b''$ prolongées d'une quantité égale à $b\ c$ donneront les points C' et C''. Par les trois points C, C', C'', nous ferons passer le cercle dont le centre K sera l'une des extrémités de la bride dont l'autre extrémité sera le point C.

Enfin, on se sert quelquefois, pour rendre le mouvement des tiges sensiblement vertical, de balanciers à axes mobiles dont voici la description succincte : BO (*fig.* 188), est un balancier oscillant sur l'axe O placé à l'extrémité d'une forte tige qui tourne autour d'un axe fixe A. $F\ C$ est une double bride embrassant le balancier, et cette bride tourne autour d'un point F. La position du point fixe F est à l'intersection de l'horizontale de l'axe O et de la verticale passant par l'extrémité B du balancier quand cette dernière occupe la position la plus basse. $B\ G$ représente la tige d'un piston dont on veut rendre le mouvement vertical. Les positions extrêmes BO et $B'O$ du balancier sont d'ailleurs toujours symétriques par rapport à sa position horizontale $F'O$. Pour trouver le centre de rotation A de la tige AO qui sert de support au tourillon du balancier en O, on remarquera que $FC = BC$, et que portant $FC + CO$ ou BO de F en I, le point I sera le point où l'axe O parviendra quand le balancier sera horizontal. Ce sera son plus grand éloignement du point F. Si l'on fait passer un cercle par les points O et I, le centre A de ce cercle sera pris pour l'axe du support. Ce point devra être pris le plus loin possible, car on rendra ainsi d'autant plus petits les écarts de la tige BG de la verticale BB' avec laquelle elle a trois points communs B, F, B'. Si l'on ne peut faire OA très-grand, on éloignera le centre O pour que l'angle BOB' devienne plus petit, ou que la différence entre BO et OF soit plus petite.

DES ENGRENAGES.

§ 366. *Condition à laquelle doit satisfaire tout engrenage.* — Nous nous proposerons de réunir dans ce chapitre les procédés employés le plus fréquemment pour transformer le mouvement circulaire en un mouvement de même espèce, ou en un mouvement rectiligne. On appelle *engrenages* les appareils destinés à opérer ces transformations. On pourrait se proposer de déterminer la figure d'un engrenage d'après diverses conditions : on pourrait, par exemple, vouloir que les roues n'éprouvassent aucun frottement dans le mode de transmission de la force motrice de l'une à l'autre, et ne fissent que rouler les unes sur les autres, ce qui les rendrait beaucoup plus durables. Mais cette disposition est impossible à réaliser dans l'exécution, parce qu'elle conduirait à adopter des dents dont la pointe serait tournée vers le centre de la roue. La condition qu'on cherche à remplir est que la puissance appliquée à l'une des roues et la résistance appliquée à l'autre, conservent continuellement les mêmes valeurs et se fassent constamment équilibre.

Cette condition n'est souvent pas moins importante que l'autre, surtout dans les machines où il se transmet de grands efforts. Or, si deux cylindres sont tangents l'un à l'autre, et se communiquent le mouvement par le simple contact, la force appliquée à l'un d'eux se transmettra à l'autre sans altération, en considérant les choses mathématiquement. Si donc toutes les roues pouvaient avoir des dents infiniment petites, leur engrenage, qu'on pourrait regarder comme s'effectuant par le simple contact, satisferait à la condition exigée. Le mode de transmission de la force motrice d'une roue à l'autre, satisfera donc à la condition de rendre les efforts constants, lorsqu'il fera marcher les roues comme si elles se communiquaient le mouvement par le simple contact.

§ 367. *Définitions.* — Lorsque deux roues tournent autour de deux axes parallèles, et que le mouvement de l'une se communique à l'autre, la première porte le nom de *roue* et la seconde celui de *pignon*. Ces dénominations ne sont pas d'ailleurs rigoureuses, puisque nous avons déjà dit, § 340, qu'il arrivait que dans la transmission du mouvement par des roues, elles pouvaient se commander alternativement. Plus généralement, le nom de pignon se donne à la plus petite des deux roues. La droite qui joint le centre de la roue à celui du pignon s'appelle *ligne des centres*. On appelle *dents* les parties saillantes qui, placées à la circonférence des roues, se communiquent le mouvement par la pression. Nous verrons plus loin que si l'on divise la ligne des centres en parties proportionnelles aux nombres des dents de la roue et du pignon, les circonférences décrites des centres de la roue et du pignon comme centres avec ces deux parties pour rayons, doivent se communiquer le mouvement par le simple contact, de la même manière que les deux roues proposées. Ces circonférences, sur lesquelles les parties courbes des dents des deux roues sont en saillie, se nomment leurs *circonférences primitives*, et leurs rayons sont appelés *rayons primitifs*. Les droites tirées des centres de la roue et du pignon à l'extrémité de leurs dents se nomment *rayons vrais de la roue et du pignon.*

Nous verrons plus tard que, dans les pignons qui ont un petit nombre de dents, le rayon vrai doit toujours être plus grand que le rayon primitif; et que dans les pignons qui ont un plus grand nombre de dents, ces rayons peuvent être égaux. Nous verrons aussi que le rayon vrai de la roue doit être plus grand que son rayon primitif; parce que les rayons primitifs sont ceux qu'auraient la roue et le pignon s'ils se communiquaient le mouvement par le simple contact, et que l'engrenage de la roue dans le pignon dût se faire par l'allongement des deux rayons primitifs ou celui de l'un d'eux.

§ 368. *Condition à laquelle doit satisfaire la normale aux courbes des dents en contact.* — Le principe sur lequel nous voulons appuyer la construction des engrenages, étant de rendre constantes les pressions transmises par les roues, nous allons chercher la condition à laquelle tout engrenage devra satisfaire pour qu'on obtienne ce résultat, et nous ferons de cette condition satisfaite la base de tout ce qui va suivre. Soient CC' (*fig.* 189), la ligne des centres, CA et $C'A$ les rayons primitifs d'une roue et d'un pignon. Supposons que le mouvement de la roue se communique au pignon par le contact des deux courbes mn, $m'n'$, de telle sorte que l'effort se transmette au point de contact M suivant la normale commune HH' à ces deux courbes. Soit P l'effort supposé appliqué à la circonférence primitive AC, et soit P' celui qui résulte de la transmission du mouvement opérée de cette manière, effort supposé appliqué également à la circonférence primitive AC'. Abaissons des centres C et C', les perpendiculaires CH, $C'H'$, sur la normale HH'. Comme l'effort moteur agit suivant la normale HH', il faut chercher l'effet produit en H par l'effort P. Il est donné, en le désignant par H, par la proportion

$$P : H :: CH : CA \ldots\ldots (1).$$

Cet effort H est transmis directement en M, mais son effet évalué sur la circonférence $C'A$, et que nous avons désigné par P', serait donné par

$$H : P' :: C'A : C'H' .... (2).$$

Multipliant (1) et (2) terme à terme, il vient

$$P : P' :: CH \times C'A : C'H' \times CA .... (3).$$

Mais les triangles semblables CHK, $C'H'K'$ donnent

$$CH : C'H' :: CK : C'K, \text{ et l'on a}$$

$$C'A : CA :: C'A : CA;$$

Multipliant terme à terme

$$CH \times C'A : C'H' \times CA :: CK \times C'A : C'K \times CA.$$

Cette proportion rapprochée de la proposition (3) donne

$$P : P' :: CK \times C'A : C'K \times CA .... (4).$$

Nous avons supposé que la roue conduisait le pignon. Il est évident que nous arriverions au même résultat, si le pignon conduisait la roue.

La proportion (4) nous apprend que pour que les efforts transmis par les roues soient égaux, et tels par conséquent que si les roues se conduisaient par le simple contact, il faut qu'on ait

$$CK \times C'A = C'K \times CA; \text{ d'où}$$

$$CK : C'K :: CA : C'A;$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que le point K se confondra avec le point A, ou enfin qu'autant que la normale aux courbes des dents passera constamment par le point de contact des circonférences primitives. En effet, si cette proportion pouvait avoir lieu avec la position du point K de la fig. 189, comme on a $CK > CA$ et $C'K < C'A$, on aurait donc : plus grand est à plus petit comme plus petit est à plus grand, ce qui est absurde. C'est donc une condition importante à satisfaire dans l'exécution des engrenages. Dans le cas où le point K se trouverait entre A et C', on aurait $P > P'$, et l'effort transmis serait plus petit; dans le cas où le point K tomberait entre A et C, on aurait $P < P'$, et l'effort transmis serait plus grand. Et comme, en adoptant ce mode d'engrenage, le point K se trouverait tantôt entre A et C', tantôt entre A et C, comme il serait facile de le constater par une construction, il en résulterait une inégalité d'action dans la transmission des efforts moteurs, qu'il faut éviter avec soin. Nous adopterons donc un mode d'engrenage tel que la normale au point de contact des courbes des dents passe constamment par le point de contact des circonférences primitives.

§ 369. *Ce qui résulte de la condition précédente à l'égard du rapport des vitesses.* — Il est aisé de conclure de cette condition satisfaite que les vitesses de rotation des dents seront égales, ainsi que celles des circonférences primitives. En effet, soient V et V' les vitesses des circonférences primitives. En appelant H la vitesse du point H, on aura

$$V : H :: CA : CH.$$

Mais cette vitesse est la même en H', et l'on a

$$H : V' :: C'H' : C'A.$$

Multipliant terme à terme, il vient

$$V : V' :: CA \times C'H' : C'A \times CH.$$

Or, la ligne HH' passant en A, on a

$$CH : C'H' :: CA : C'A. \text{ D'où}$$

$$CH \times C'A = C'H' \times C'A. \text{ Donc } V = V'.$$

Ainsi donc, la condition seule pour la normale commune aux courbes des dents en contact, de passer par le point de contact des circonférences primitives, d'une part rend les efforts transmis par les roues constants à toutes les époques du mouvement, et de l'autre, rend égales les vitesses de rotation des dents et des circonférences primitives.

§ 370. *Détermination des rayons des roues et des dimensions de leurs dents.* — De ce que les vitesses de rotation de la roue et du pignon sont égales, on en conclut que les vitesses angulaires dont les valeurs sont, $\frac{V}{R}$ pour la roue, et $\frac{V'}{R'}$ pour le pignon, §23, sont entre elles en raison inverse des rayons des circonférences primitives; et comme les vitesses angulaires sont entre elles comme les nombres de révolutions de la roue et du pignon pendant le même temps, il s'ensuit que les rayons des circonférences primitives sont en raison inverse des nombres de révolutions de la roue et du pignon, et que, pour obtenir les rayons des cercles primitifs, il faut partager la distance des centres en parties directement proportionnelles aux nombres des dents, ou en parties inversement proportionnelles, soit aux vitesses angulaires, soit aux nombres de tours pendant un même temps.

Il suit de là que si l'on nomme R le rayon de la roue, R' celui du pignon, et n le rapport des nombres de révolutions du pignon et de la roue dans le même temps, on aura

$$R = nR' \ldots\ldots (1).$$

La distance des centres étant d'ailleurs égale à la somme des rayons, en la désignant par d, on aura aussi

$$d = R + R' \ldots. (2).$$

Ces deux équations renfermant quatre quantités, deux d'entre elles étant données, on pourra trouver les deux autres.

Soient donnés, par exemple, la distance d des axes de révolution, et le rapport des nombres de tours, on trouvera

$$R = \frac{nd}{n+1},\ R' = \frac{d}{n+1};$$

ce qui détermine les rayons des circonférences primitives.

L'intervalle d'une dent à l'autre s'appelle *le creux.*

L'*épaisseur des dents* se mesure sur la circonférence primitive.

La *largeur des dents* est leur dimension dans le sens de l'axe de rotation.

La partie des dents qui est en dehors des cercles primitifs se nomme *la face*, celle qui est en dedans se nomme *le flanc.*

La somme de l'épaisseur de la dent et du creux forme ce qu'on nomme le *pas de l'engrenage.* D'après ce que nous avons dit, le pas doit être le même sur l'une et l'autre roue, puisque les vitesses des circonférences primitives doivent être égales. L'épaisseur des dents et leur largeur sont déterminées par le degré de solidité qu'on veut leur donner. On trouvera ces quantités à l'aide des formules du § 320.

Les dents devant être logées dans les creux, elles doivent pouvoir s'y mouvoir librement, ce qui exige qu'on laisse un peu de jeu. On l'évalue à $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{15}$ de l'épaisseur de la dent, suivant le degré de perfection apportée à l'exécution. Si l'on désigne donc par a le pas de l'engrenage, si les dents sont de même matière, on aura

$$a=b+1,1\,b \quad \text{ou} \quad a=b+1,067\,b,$$

selon le degré de perfection; ou bien

$$a=2,1\,b \qquad\qquad a=2,067\,b,$$

et si les dents sont de matières différentes,

$$a=b+1,1\,b' \qquad\qquad a=b+1,067\,b',$$

b étant l'épaisseur de la dent de la roue, et b' celle de la dent du pignon.

On est quelquefois dans l'usage, dans les ateliers, pour éviter un trop grand nombre de modèles, de calculer seulement les dimensions des dents en bois, et de faire les dents en fonte de même épaisseur.

Les nombres de dents de la roue et du pignon devant être entre eux comme les rayons des cercles primitifs, et ceux-ci inversement comme les nombres de révolutions, le nombre des dents de la roue sera d'abord égal à sa circonférence primitive divisée par le pas de l'engrenage, ou

$$m=\frac{2\pi R}{a};\ \text{puis}\ m'=\frac{m}{n}$$

pour le nombre de dents du pignon. Il arrivera presque toujours que ces nombres ne seront pas entiers, et comme il convient d'ailleurs, pour la symétrie et la facilité des assemblages, que le nombre de dents de la roue soit exactement divisible par le nombre de ses bras, quand elle doit être de plusieurs pièces, on devra prendre pour le nombre m le nombre entier inférieur à celui que l'on a trouvé, et qui sera à la fois divisible par le nombre de bras de la roue et par le rapport n des nombres de révolutions du pignon et de la roue, ou le rapport du rayon de la roue à celui du pignon.

Cette modification conduit à prendre le pas un peu plus grand, ou les dents un peu plus fortes que le premier calcul ne l'aurait donné, ce qui n'a aucun inconvénient.

Le nombre m étant choisi, on calculera de nouveau la grandeur a du pas et le nombre m' de dents de la roue à l'aide des deux équations précédentes.

Au contraire, lorsque les roues sont d'une seule pièce, après avoir déterminé le rapport des nombres de dents, s'il est entier, on augmente d'une unité le nombre de dents de la roue, afin que ces nombres soient premiers entre eux. De cette manière chaque dent ne se retrouve en contact avec les mêmes flancs qu'à de très longs intervalles, et l'usure des dents en acquiert plus d'uniformité. Lorsque la machine a travaillé un temps suffisant, les dents finissent par prendre d'elles-mêmes un beau poli.

§ 371. *Détermination de la courbure à donner aux dents des roues ; procédé général.* — Pour déterminer la courbure à donner aux dents des roues et des pignons, nous ferons voir d'abord que l'une de ces courbes peut être choisie arbitrairement, et que l'autre peut être déterminée par cette seule condition à laquelle tout engrenage doit satisfaire, que la normale commune aux dents en contact passe constamment par le point de contact des circonférences primitives. En effet, (*fig.* 190), soit aMB une courbe quelconque destinée à former le contour de la face des dents de la roue, et soit AM le pas de l'engrenage. Prenons $AM' = AM$; il s'agit de trouver la courbe qui passe par le point M', et qui, étant sans cesse en contact avec la courbe aMb, soit conduite par cette dernière d'après les conditions précédemment établies. Or, la normale commune devant toujours passer par le point A, si nous menons la normale At à la courbe aMb, ce qui peut se faire en décrivant une circonférence du point A comme centre avec un rayon tel que cette circonférence coupe la courbe aMb en deux points infiniment voisins, et joignant le point A au milieu de la distance de ces deux points, le point t sera le point de contact des deux courbes. Divisons maintenant le pas AM et le pas AM' en un même nombre de parties égales. Soient 1. 2..... 1' 2'..... les points de division. Lorsque les deux points 1 et 1' des deux circonférences primitives seront arrivés en contact, par l'effet de la rotation des deux cercles, ces points se confondront avec le point A, et la normale à la courbe aMb passant par le point 1 sera aussi la normale à la courbe cherchée et passera par son point de contact avec aMb. Si donc du point 1' comme centre avec un rayon égal à la normale $1t'$ à aMb, nous décrivons un arc de cercle, il sera tangent à la courbe cherchée. En opérant de la même manière pour les autres points de division, il ne restera plus qu'à faire passer une courbe par les points M' et t, et tangente à tous les petits arcs de cercle décrits des points 1', 2'.....

§ 372. *Usage de l'épicycloïde et de la développante du cercle pour le tracé de la courbure des dents.* — Les courbes adoptées généralement sont l'épicycloïde et la développante du cercle. Cherchons, à l'aide de ces courbes, le moyen de transmettre le mouvement du cercle C au cercle C' (*fig.* 191), comme s'ils se conduisaient par le simple contact. Décrivons un cercle qui ait pour diamètre le rayon $A\,C'$ du cercle C', et faisons rouler ce cercle sur le cercle C maintenu fixe. Le point A engendrera une épicycloïde ordinaire $A\,M$. En liant cette épicycloïde au rayon $C\,A$, et en prenant une règle $C'\,A$, mobile autour du point C', si l'on fait tourner le cercle C autour de son centre, l'épicycloïde $A\,M$ qui est invariablement liée au cercle C, entraînera la règle dans son mouvement, et communiquera au point A du cercle C' un mouvement tel que les vitesses de rotation des deux cercles C et C' seront égales, et que la normale aux courbes en contact passera constamment par le point A. Pour le démontrer, supposons que le cercle C ait tourné de l'arc $A\,a$. L'épicycloïde $A\,M$ aura pris la position $a\,m$. La règle, poussée par cette courbe, lui sera toujours restée tangente, et aura pris la position $C'\,a''\,a'$ qui joint le centre C' au point de rencontre a'' de l'épicycloïde $a\,m$ et du cercle O, le point a'' se trouvant par conséquent être le point de contact. En effet, les propriétés de l'épicycloïde nous apprennent que la tangente en un point a'' de cette courbe passe par l'extrémité C' du diamètre du cercle générateur O. Or, l'épicycloïde $a\,m$ serait décrite par le cercle O, s'il était parti du point a, et le point a'' serait alors la position du point décrivant, lorsque le cercle serait arrivé en A. La position de la règle $C'\,a'$ est donc bien la tangente à la courbe $a\,m$ en a''. D'où il suit que la normale commune à la règle et à la courbe passe par le point A, car le triangle $A\,a''\,C'$ est rectangle. On pourrait conclure du théorème général que la condition de vitesse est satisfaite; mais il est facile de le prouver directement. En effet, l'angle C', comme angle au centre du cercle C', a pour mesure l'arc $A\,a'$, et comme angle inscrit dans le cercle O, il a pour mesure la moitié de l'arc $A\,a''$. Et comme ce dernier arc est mesuré sur une circonférence d'un rayon qui est la moitié du premier, il s'ensuit que l'arc $Aa'' = Aa'$. Mais la description de l'épicycloïde donne $A\,a'' = A\,a$. Donc $A\,a = A\,a'$; c'est-à-dire, que les vitesses de rotation des cercles C et C' sont égales, et que par conséquent, le mouvement s'est effectué comme par le simple contact.

Réciproquement la règle $C'\,a'$ peut conduire l'épicycloïde am liée invariablement au rayon Ca, d'après les mêmes conditions, puisqu'elle la touchera toujours en un point qui sera situé sur la circonférence O, la ligne qui joindra ce point au point A devant être sans cesse perpendiculaire à la règle. Mais la règle ne pourra conduire de cette manière l'épicycloïde que jusqu'à la ligne des centres.

On aurait pu d'ailleurs se donner l'une des courbes conductrices, et d'après le § 371, on aurait facilement déterminé l'autre.

Soit maintenant proposé d'employer la développante du cercle pour le tracé de la courbure des dents. Nous allons démontrer que la courbe conduite doit également être une développante de cercle. Soient C et C', (*fig.* 192), les deux centres de rotation, $A\,C$, $C'\,A$ les rayons des cercles primitifs. Par le point A menons une droite quelconque $H\,H'$; des points C et C' abaissons les perpendiculaires $H\,C$, $H'\,C'$, et décrivons des cercles des points C et C' comme centres avec ces lignes comme rayons. Soit $a\,m\,b$ la développante d'une portion du cercle CH. La tangente HH' sera normale à cette courbe en m; ce point sera aussi celui où l'autre courbe devra être touchée par la première. Mais si nous faisons tourner le cercle $C\,H$ autour de son centre, et s'il entraîne avec lui la courbe amb, la ligne $H\,H'$ sera constamment normale à cette courbe dans toutes ses positions, et par conséquent aussi à la courbe conduite dans toutes ses positions et au même point. Or, cette propriété d'une courbe d'avoir ses normales tangentes à un cercle n'appartient qu'à la développante de ce cercle. La courbe conduite sera donc la développante du cercle $C'H'$.

§ 373. *Propriété particulière des dents à développante.* — C'est une propriété particulière aux dents à développante de transmettre la pression sans l'altérer. En effet, si l'on se reporte au § 368, on reconnaîtra que l'on a satisfait à la constance de l'effort quand on le suppose appliqué aux circonférences primitives, mais non aux points de contact des courbes; car les proportions (1) et (2) nous montrent, mais dans l'hypothèse de $P'=P$, (*fig.* 189), que H est à P dans le rapport des deux lignes CH et CA, dont l'une est variable et l'autre constante; d'où il suit que ce rapport est lui-même variable. Mais dans le cas qui nous occupe, le rapport de CH à CA, (*fig.* 192), reste invariable, puisque la ligne HH' est toujours normale aux courbes en contact. Donc la pression transmise d'un cercle à l'autre a toujours la même valeur.

§ 374. *Tracé de la courbure des dents quand elles doivent conduire un seul point.* — Il est encore possible de satisfaire à l'uniformité du mouvement de la manière suivante : en faisant rouler le cercle C sur le cercle C', (*fig.* 193), il engendrera une épicycloïde am; et si l'on imagine une règle ac mobile autour du centre C, et un arrêt sur cette règle en a, l'épicycloïde am étant liée au rayon ac', dans le mouvement de ce dernier, entraînera l'arrêt, et cet appareil satisfera aux conditions exigées. En effet, soit $a'm'$ une nouvelle position de l'épicycloïde; a'' sera la position de l'arrêt, et d'après les propriétés connues de cette courbe, sa normale en a'' passe par le point a, et l'arc $aa''=aa'$.

§ 375. *Engrenage de deux roues cylindriques.* — Soient C le centre de la roue, C' celui du pignon, (*fig.* 194). Ayant déterminé les rayons CA et $C'A$ des cercles primitifs, comme il a été dit, § 370, le pas de l'engrenage et le nombre de dents de la roue et du pignon, divisons chaque circonférence primitive en autant de parties qu'il doit y avoir de dents sur chaque roue, à partir du point A, et marquons l'épaisseur de chaque dent. Soit AB l'épaisseur de la dent de la roue, AB' celle de la dent du pignon. Décrivons deux cercles sur les rayons CA, $C'A$ comme diamètres, et traçons l'épicycloïde AM décrite par le point A du cerle O' en roulant sur le cercle C. Cette courbe détermine la courbure de la dent de la roue qui doit conduire la dent du pignon par son flanc AC', d'après le § 372. De même, si nous traçons l'épicycloïde AN décrite par le point A du cercle O en roulant sur le cercle C', cette courbe sera la forme qu'il faudra donner à la dent du pignon, si l'on voulait lui faire conduire la roue par le flanc AC de la dent AM.

Les dents doivent être symétriques par rapport à un plan passant par le milieu de leur épaisseur, afin que les roues puissent tourner dans les deux sens. Si donc par le milieu de AB et le centre C nous menons une droite, elle limitera en M la courbure de la dent de la roue, et il suffira, pour achever la dent, de tracer l'épicycloïde BM égale à l'épicycloïde AM. On agira de la même manière pour la dent du pignon.

La courbe AM de la dent de la roue est sans cesse en contact avec le rayon $C'A$, et ce point de contact est en même temps situé sur la circonférence O'. Le contact de la dent et du flanc devra donc cesser, lorsque l'extrémité M de cette dent sera devenue le point de contact, ce qui arrivera lorsque le point M sera venu se placer sur la circonférence O'. Si donc nous décrivons du point C comme centre avec le rayon CM une circonférence, le point de rencontre F de cette circonférence et de la circonférence O', déterminera le point où la dent doit quitter le flanc, pour continuer de satisfaire à l'uniformité du mouvement, et c'est à cette époque qu'une nouvelle dent devra venir engrener. La détermination du point F limite aussi la longueur du flanc, car si du point C' comme centre avec le rayon $C'F$ nous décrivons une circonférence, la partie AG' du rayon AC' est celle qui est touchée par la dent jusqu'à la position $C'F$, et cette longueur représente par conséquent la longueur utile du flanc du pignon.

En raisonnant de la même manière pour le flanc de la roue, nous déterminerions aussi la longueur utile AG de ce flanc.

Il resterait à déterminer la forme des creux de la roue et du pignon. Comme chaque creux de l'une des roues doit contenir la dent de l'autre roue dans toutes ses positions, il faudrait, pour résoudre le problème dans toute sa généralité, trouver la courbe que décrit le point M du cercle C sur le plan mobile du cercle C', lorsque ce dernier est entraîné par le cercle C. Mais, comme le tracé exact de la forme du creux n'est pas exécuté dans la pratique, et que d'ailleurs il n'est pas nécessaire qu'il le soit, puisqu'il est indifférent que le creux ait plus ou moins d'étendue, pourvu qu'il puisse loger la dent, nous donnerons la méthode la plus simple de déterminer ce creux, qui est celle que l'on adopte dans la pratique. Comme une dent quelconque est toujours renfermée entre deux flancs consécutifs, et qu'elle ne touche que l'un d'eux, nous limiterons les creux latéralement suivant le prolongement des flancs, et pour tracer le fond des creux, nous prendrons la plus grande saillie DM de la dent de l'autre roue, nous la porterons sur le rayon passant par le milieu du creux à partir de la circonférence primitive, et du point C' comme centre avec le rayon $C'I'$, nous décrirons une circonférence qui par ses intersections avec tous les flancs formera le fond de tous les creux du pignon.

Nous répéterons la même opération pour tracer les creux de la roue.

§ 376. *Méthode abrégée employée dans la pratique.* — Dans la pratique, lorsque les dents sont fort petites, il serait superflu d'employer la forme rigoureuse de l'épicycloïde, et l'on se contente d'opérer de la manière suivante : Après avoir déterminé comme à l'ordinaire le pas de l'engrenage, les rayons des cercles primitifs, ainsi que le nombre de dents de chaque roue et leurs dimensions, et après avoir opéré la division des circonférences primitives, par l'extrémité b, (*fig.* 195), du pas $a\,b$ du pignon on mène un rayon $c'\,b$ qui rencontre en d la circonférence o'. Joignant le point d au premier point de division b' de la roue, on élève une perpendiculaire sur le milieu de cette ligne, qui rencontre la circonférence c en un point h. On prend ce point pour centre d'un arc de cercle décrit avec le rayon $h\,b'$ et qui détermine d'une manière suffisamment exacte la courbure de la dent.

La longueur de la dent est limitée au point d par une circonférence décrite du point c comme centre avec le rayon $c\,d$. Quand une dent sera arrivée en d, une nouvelle devra donc venir engrener à la ligne des centres.

Le flanc de la dent de la roue est toujours déterminé par la ligne $o\,b'$.

La dent devant être symétrique par rapport à $c\,k$ on tracera l'autre face de la dent avec un patron, et l'on mènera le flanc.

On fera une construction tout à fait analogue pour le pignon. Ayant pris un arc $a\,e$ égal au pas, on mènera $c\,e$ qui rencontrera la circonférence o en g. On joindra le point g au point de division e' du pignon, sur le milieu de $g\,e'$ on élèvera une perpendiculaire qui rencontrera la circonférence c' en un point h', duquel comme centre avec le rayon $h'\,e'$ on décrira la courbe de la dent. On la limitera en g par la circonférence $c'\,g$, et l'on achèvera la dent en traçant ses flancs, comme il a été dit pour la roue.

Pour déterminer le creux de chacune des roues, on remarque que le creux du pignon doit être au moins à une distance du centre c égale à $c\,d$. Si donc du point c' comme centre avec la distance $c'\,m'$ du centre c' au point de rencontre m' de circonférence $c\,d$ avec $c'\,a$, on décrit une circonférence, elle formera par ses intersections avec tous les flancs le fond des creux du pignon. On augmentera ce creux pour le jeu d'une quantité qui doit varier nécessairement avec le rayon des roues, mais à laquelle on peut donner $0^m,004$ à $0^m,005$ pour valeur moyenne.

On adoucit par un raccordement curviligne l'intersection des flancs et des creux.

Quelquefois on substitue encore à l'épicycloïde un cercle dont le centre est au point *a*, et dont le rayon est égal à la corde du pas, ou aux $\frac{3}{4}$ de cette corde.

Cette méthode qui se rapproche beaucoup de la précédente, peut sans inconvénients lui être substituée, quand les roues n'ont pas des rayons très différents, et que les dents ne doivent pas être très épaisses. Mais pour de petits pignons à grosses dents, il faudra suivre la première méthode.

Les dents sont conduites autant avant qu'après la ligne des centres.

Le tracé des courbes pourrait être défectueux, en donnant des dents trop minces vers leur extrémité, si le pignon devait être très petit, et les efforts qu'il transmet très grands. Dans ce cas, le tracé l'indiquera, et au lieu de prendre des arcs *a b*, *a b'*, égaux à la longueur du pas, on les prendra égaux aux $\frac{3}{4}$ du pas, et on achèvera la construction de la même manière. Si les dents étaient encore trop minces, et réduites au-delà de la moitié de leur épaisseur à la naissance, on recommencerait le tracé en prenant des arcs égaux à la moitié du pas.

Si, au contraire, le pignon était grand et l'effort à transmettre très faible, il pourrait arriver que les dents fussent trop courtes. Alors on prendrait des arcs égaux à une fois et demie ou deux fois le pas, et l'on achèverait le tracé comme à l'ordinaire.

Dans tous les cas, il ne convient pas que la saillie des dents sur l'anneau qui les porte, excède une fois et demie leur épaisseur mesurée sur le cercle primitif.

§ 377. *Nécessité de faire engrener à la ligne des centres.*

— Revenons à la figure 194. La face BM de la dent de la roue doit conduire le flanc du pignon jusqu'à ce que l'extrémité M de la dent vienne en contact en F' avec l'extrémité utile de ce flanc. Mais, si cette extrémité arrive en F' avant que le flanc de la dent suivante du pignon ne soit arrivé dans la ligne des centres, alors ce sera la face ou la partie courbe de la dent suivante du pignon qui sera en prise par la dent de la roue et non son flanc. Dans ce cas la roue conduira donc le pignon en poussant ses dents tantôt ávant et tantôt après la ligne des centres.

Mais si l'extrémité de la dent n'arrive en F' et ne cesse de pousser le flanc qu'après que le flanc de la dent suivante du pignon sera arrivé dans la ligne des centres, ou aura passé cette ligne, les parties courbes des dents du pignon ne seront pas poussées par les dents de la roue. Ainsi la roue conduira le pignon en poussant ses dents seulement après la ligne des centres. Dans ce dernier cas, si la roue devait toujours conduire le pignon, on pourrait donc se dispenser de donner des faces aux dents de ce dernier. Mais il importe de se rappeler, qu'à raison des inégalités qui ont lieu dans les efforts du moteur ou de la résistance, il arrive dans un grand nombre de cas, que de deux roues qui engrènent ensemble, chacune conduit l'autre et en est conduite alternativement, quoique le mouvement se fasse toujours dans le même sens; circonstance qu'il ne faut pas perdre de vue dans l'établissement des engrenages.

Quand les dents doivent être en prise avant la ligne des centres, elles concourent vers le point de contact des circonférences primitives, et leur frottement est alors beaucoup plus dur que lorsqu'elles se poussent après la ligne des centres en s'éloignant de cette ligne; car on sait que c'est tout autre chose de faire glisser une surface sur une autre en la poussant, ou en la tirant. Dans le dernier cas, s'il y a des inégalités dans les surfaces en contact, elles ne mettent point d'obstacle à leur glissement mutuel; dans le premier il peut se produire des *arcs-boutements* qu'on tâche d'éviter autant que possible dans le mouvement des machines.

Mais, s'il y a de l'avantage à faire conduire les dents seulement après la ligne des centres, il faut remarquer que ce n'est que dans certaines limites que l'on peut parvenir à ce résultat. En effet, pour que cette condition soit remplie, il faut que la dent du pignon ne soit quittée par l'extrémité de celle de la roue, qu'à l'instant où le flanc de la dent suivante du pignon parvient dans la ligne des centres. Or, le nombre des dents du pignon étant donné, ainsi que son rayon primitif et celui de la roue, l'angle compris entre les flancs de deux dents consécutives du pignon le sera également, et si l'on veut satisfaire à la condition précédente, il est facile de s'assurer que la saillie, la grosseur et la grandeur de l'intervalle des dents de la roue se trouvent déterminées en conséquence. Or, il peut se faire que l'intervalle des dents de la roue qu'on trouvera ainsi soit trop petit, pour qu'on puisse donner aux dents du pignon une épaisseur telle qu'elles aient assez de solidité.

§ 378. *Remarque sur un pignon de* 7, *de* 8, *de* 9 *et de* 10 *dents.* — Plus le nombre de dents des roues et des pignons est petit, et plus il est difficile de faire en sorte que les dents soient conduites uniquement après la ligne des centres.

Supposons d'abord une roue de 50 dents et un pignon de 7 dents. Pour que les dents du pignon ne soient poussées qu'après la ligne des centres, il ne faut pas que la dent quitte la roue avant que le flanc $C'A$ (*fig.* 196), de la dent suivante du pignon soit arrivée dans la ligne des centres CC'. Or, la valeur de l'angle $B'C'A$ est de $\frac{360°}{7} = 51°25'43''$.

Faisant le rayon $C'A = 1$, le triangle rectangle $C'AM$, obtenu en menant AM au point de contact de la dent et du flanc, donne

$$C'M = \cos.\ B'C'A = \cos.\ 51°\ 25'\ 43'' = 0,\ 62\ 349.$$

Si le rayon $C'A = 1$, $CA = \frac{50}{7}$, et la ligne $CC' = \frac{57}{7}$. On connaît donc dans le triangle $CC'M$ deux côtés CC' et $C'M$, ainsi que l'angle compris $B'C'A$; il est donc facile de trouver la valeur de l'angle $C'CM$. On trouve $C'CM = 3° 35' 50''$. Maintenant, la roue ayant 50 dents, l'angle ACB, qui doit comprendre le plein et le creux, $= \frac{360}{50} = 7° 12'$. Si de cet angle on retranche $C'CM$, il reste l'angle $BCM = 3° 36' 10''$. Mais les angles BCM, MCD doivent être égaux, puisque la dent est symétrique par rapport à CM. Donc l'angle BCD du plein de la dent de la roue $= 2\,BCM = 7° 12' 20''$. Or, on a trouvé 7° 12' pour la valeur de l'intervalle AB qui doit à la fois renfermer la dent de la roue et son creux. Quand même la dent du pignon n'aurait pas d'épaisseur, il serait donc impossible de tracer la dent de la roue dans cet intervalle qui est plus petit que l'espace qu'elle doit occuper. Donc aussi il est de toute impossibilité de faire conduire uniformément un pignon de 7 dents par une roue de 50, uniquement après la ligne des centres.

Une roue qui aurait moins de 50 dents serait encore moins propre à conduire un pignon de 7 dents; il serait aisé de s'en assurer : et quoique dans une roue qui aurait plus de 50 dents, l'angle qu'on trouverait pour le plein d'une dent pût être moindre que celui qui doit contenir le plein et le creux, ce qu'il y aurait pour le creux serait si petit, qu'il ne suffirait pas pour recevoir la dent du pignon, car il faudrait leur donner du jeu. On peut donc conclure qu'une roue de tant de dents qu'on voudra n'est pas propre à conduire un pignon de 7 dents, uniquement après la ligne des centres. Quand on emploiera deux roues de cette espèce, le pignon sera donc conduit en partie en avant et en partie après la ligne des centres (*fig.* 197).

Si l'on répète les mêmes calculs pour un pignon de 8 dents conduit par une roue de 57, on trouvera pour l'angle ACD, ι° 11' 17'', l'angle du plein étant de 5° 7' 40''. Or, l'angle de ce creux n'est pas assez grand pour recevoir une dent d'une épaisseur raisonnable, avec un jeu convenable; et comme il serait facile de s'assurer que l'angle ne serait pas beaucoup plus grand avec une roue d'un plus grand nombre de dents, on doit conclure comme précédemment, pour un pignon de 8 dents.

Enfin, pour un pignon de 9 dents et une roue de 64, on trouverait l'angle ACD de 1° 51' 48" pour un angle presque double du plein DCB = 3° 45' 42". Il resterait encore là trop peu d'espace pour loger le pignon.

Concluons de là qu'il faut renoncer pour des pignons de 7, de 8 et de 9 dents à les faire conduire uniquement après la ligne des centres, ce qui obligera donc toujours dans ces divers cas de donner des faces aux dents du pignon. Mais, en répétant les calculs précédents pour un pignon de 10 dents et pour une roue qui en aurait au moins 72, on aurait pour le creux ACD, 2° 12' 44", et pour le plein BCD, 2° 47' 16". Il serait donc possible de satisfaire à la condition demandée avec ces deux roues, pourvu qu'on fît les dents du pignon un peu moins épaisses que leur intervalle. Quand le nombre des dents est plus considérable, il n'y a plus de difficulté, pourvu que celui des dents de la roue soit réglé en conséquence.

§ 379. *Engrenage à développante de cercle.* — Lorsqu'une roue doit conduire plusieurs pignons de rayons différents, comme la courbure en épicycloïde de la dent de la roue est déterminée d'après la grandeur du rayon du pignon, on ne pourrait conduire ces pignons avec la même roue, du moins en satisfaisant aux conditions d'uniformité dans le mouvement; on substitue alors à cet engrenage, ou à celui que nous venons d'indiquer, l'engrenage à développante de cercle.

Pour le tracer, nous supposerons qu'on a déterminé comme précédemment le rayon des cercles primitifs, l'épaisseur et la largeur des dents, ainsi que le pas. Soit ab', (*fig.* 198), la grandeur du pas. Si nous joignons $c'b'$, et si du point a nous menons ad' perpendiculaire à $c'b'$, cette perpendiculaire sera la normale commune des dents en contact, et les perpendiculaires *cd*, *c' d'* seront les rayons des circonférences à développer et qui doivent former les courbures des dents; on tracera donc la développante de chacune de ces circonférences, et il suffira de la faire passer par toutes les naissances des dents aux circonférences *cd*, *c' d'*.

Pour déterminer la longueur de la dent de la roue, il faudra du centre *c*, avec un rayon *cd'*, décrire une circonférence qui coupera toutes les développantes et limitera ainsi la longueur des dents. Pour déterminer celle des dents du pignon, on prolongera la développante passant par le point *e*, tel que *ae* est égal au pas, jusqu'à sa rencontre avec la normale *dd'* en *f*; et du centre *c'*, avec un rayon *c' f*, on décrira une circonférence qui limitera les dents du pignon. On prolongera les dents en dedans des circonférences développées d'une quantité égale à $0^m,004$, ou à $0^m,005$, pour donner du jeu aux dents dans leur passage dans les creux; le fond des creux sera déterminé par des circonférences dont les rayons seront les distances des points obtenus aux centres *c* et *c'*.

Dans cette construction, il est facile de voir que les dents se prendront avant et après la ligne des centres, et cela dans une étendue égale au pas. Si cette construction donnait des dents trop minces aux extrémités, ce qui les exposerait à ne pas résister, surtout lorsqu'il y a de grands efforts à transmettre, il faudrait alors faire agir les dents plus près de la ligne des centres, ce qui se ferait en recommençant le tracé précédent, avec une distance *ab'* égale aux trois quarts ou à la moitié du pas.

§ 380. *Engrenage intérieur d'une roue et d'un pignon.* — Soient *c* et *c'*, (*fig.* 199), les centres d'une roue et d'un pignon, ce dernier étant placé dans l'intérieur de la roue. Soit *a* le point de contact des circonférences primitives. Ayant décrit le cercle du diamètre *c' a*, nous tracerons l'épicycloïde décrite par ce cercle en roulant dans l'intérieur du cercle du rayon ca. Cette courbe am donne la forme latérale de la dent de la roue; on la limite comme précédemment, en menant le rayon du centre c au milieu de l'épaisseur de la dent; et si du point c comme centre avec le rayon cm nous décrivons une circonférence, elle coupera la circonférence du diamètre $c'a$ en un point d qui détermine le flanc de la petite roue en ac. Si maintenant nous voulons appliquer les mêmes procédés à la détermination de la face de la dent du pignon et du flanc de la roue, nous trouverons une dent pour le pignon; mais la construction, ou ne donnera point de flancs, parce que les circonférences ne se rencontreront pas, ou en donnera un situé sur le rayon ca, du même côté que la face am, comme on peut s'en assurer par le tracé, soit en prenant un pignon d'un diamètre plus grand que le rayon de la roue, ou d'un diamètre plus petit. Ainsi donc la roue ne peut avoir de flancs, si elle a des faces, et les dents se réduisent à ces dernières. D'où il suit que les dents du pignon ne seraient pas propres à conduire la roue, en remplissant la condition d'uniformité. Si même la roue conduisait le pignon avant la ligne des centres, on voit que ce serait la partie courbe de la dent de la roue qui mènerait la partie courbe de la dent du pignon, et ces deux courbes ne sont pas dans les conditions voulues pour se conduire d'après les données établies. Il faut donc trouver une autre courbe pour le pignon. Si nous traçons l'épicycloïde décrite par le point a du cercle c en roulant extérieurement sur le cercle c', § 374, et si nous la lions au cercle c', cette courbe pourra mener uniformément un point de la circonférence du cercle c. Si donc les dents se prenaient avant la ligne des centres, ce serait sans cesse par ce point unique que la dent de la roue agirait sur le pignon, ce qui la creuserait beaucoup, et d'autant plus que ce genre d'engrenage est ordinairement employé pour transmettre le mouvement des roues hydrauliques, et qu'alors la roue et le pignon sont sans cesse mouillés et exposés a un frottement considérable.

Dans la pratique on remplace l'épicycloïde précédente qui forme la face de la dent du pignon, par un arc de cercle décrit de la naissance d'une dent avec un rayon égal à la corde de l'arc qui mesure le pas sur le cercle primitif du pignon.

Dans le cas où il sera possible de faire engrener seulement à la ligne des centres, on voit qu'il sera possible alors de supprimer totalement les faces des dents du pignon, et le réduire à ses flancs, puisque les flancs seuls seront conduits par la roue. Cela arrivera lorsqu'on ne prendra pas le pignon trop petit, et lorsqu'il n'aura pas de grands efforts à supporter. Voici alors le tracé pratique qu'on substitue au précédent : On prend sur les circonférences primitives des arcs égaux à deux fois le pas. On joint le point *b'* au point *c'*, (*fig.* 200), et l'on joint également le point de rencontre de cette ligne et de la circonférence du diamètre *c'a*, avec le point *b* pris sur la circonférence *c*. Par le milieu de cette ligne on élève une perpendiculaire, et du point où elle rencontre le cercle *c* avec un rayon égal à la distance de ce point au point *b*, on décrit un arc qui forme la courbure de la dent de la roue. Le flanc du pignon est déterminé par deux rayons, et pour limiter les dents, il suffit de décrire une circonférence du rayon *cd*. On a ainsi la longueur utile du flanc. Mais il est nécessaire de le prolonger en dehors du cercle primitif *c'a*, de $0^m,003$ à $0^m,005$ en arrondissant les angles à partir de la circonférence primitive, avec un rayon égal à la corde du pas sur le cercle primitif du pignon.

On mène de même des rayons tangents aux faces de la dent, afin de donner du creux à la saillie dont on vient de parler.

Enfin le creux du pignon se déterminera comme à l'ordinaire, en laissant un jeu de $0^m,004$ à $0^m,005$ entre la dent et le fond du creux.

Si, dans la construction précédente, le pignon était trop faible, ou s'il devait être soumis à de grands efforts, il pourrait arriver que les dents fussent trop minces à l'extrémité ;

alors on ferait conduire les dents pendant seulement un pas et demi ou même un pas, et l'on ferait le tracé comme le précédent.

Les engrenages ainsi tracés ne conviennent qu'au cas où la roue conduit le pignon. Si le pignon devait conduire la roue, ce serait alors cette dernière qui n'aurait pas de faces à ses dents, et qui porterait les flancs. Il est facile, après ce qui précède, d'imaginer le tracé à adopter dans ce cas.

§ 381. *Engrenage d'une roue et d'une crémaillère.* — De l'engrenage d'une roue et d'un pignon, on peut conclure celui d'une roue et d'une crémaillère, car il suffit de supposer le rayon du pignon infini. Sa circonférence primitive se réduit alors à la ligne droite mm', (*fig.* 201), perpendiculaire au rayon ca. L'épicycloïde qui doit former les faces des dents de la roue se changera dans la développante du cercle c, car elle sera tracée par la circonférence d'un rayon infini, c'est-à-dire la ligne droite mm', roulant autour de la circonférence c. La construction générale nous donne pour la limite des flancs de la crémaillère la ligne mm'; et en effet le contact de la dent de la roue et du flanc de la crémaillère se fera toujours sur la normale commune mm'.

Si la roue conduisait avant la ligne des centres, il faudrait alors armer la crémaillère de dents, et la construction générale nous donne alors pour leur courbure une cycloïde décrite par le cercle de diamètre ca en roulant sur la ligne mm', et la limite des flancs de la roue serait donnée par l'intersection de ce même cercle et de la parallèle à mm' menée par l'extrémité des dents de la crémaillère.

Ce serait cette même cycloïde qui conduirait la roue par ses flancs, si la crémaillère devait conduire la roue.

§ 382. *Tracé pratique de l'engrenage d'une roue et d'une crémaillère.* — Pour l'établissement pratique de cet engrenage, on commence par déterminer la hauteur h à laquelle doit s'élever la crémaillère pour un tour de la roue; d'où l'on déduit le rayon r de la roue; car on aura

$$2\pi r = h\,;\ \text{d'où}\ r = \frac{h}{2\pi}.$$

Connaissant la résistance que la crémaillère oppose à la roue, on calcule l'épaisseur de la dent de la roue, d'où l'on conclut le pas; et enfin le nombre des divisions de la roue se trouve par la formule

$$m = \frac{2\pi r}{a}.$$

On prend pour m le nombre entier inférieur le plus voisin.

Ayant tracé la développante du cercle primitif, on construit la courbure des dents de la roue sur les deux faces, et pour les limiter, on décrit du centre c, (*fig.* 202), avec le rayon cb une circonférence qui déterminera la largeur des dents à leur extrémité. Pour la dent de la crémaillère, on remplace la cycloïde par un arc de cercle décrit de la naissance d'une dent comme centre avec un rayon égal au pas, et on limite la saillie des dents de la crémaillère.

Les creux de la roue sont formés par des rayons tangents aux faces de la dent à leur naissance, et on les limite d'après la saillie des dents de la crémaillère. Le creux de la crémaillère est également déterminé par la saillie des dents de la roue au-delà de la circonférence primitive. On donne à ces creux un jeu convenable, comme il a été dit déjà plusieurs fois.

Si, par suite de cette construction, les dents étaient trop minces à leur extrémité, il faudrait recommencer le tracé en diminuant la durée du contact des dents, c'est-à-dire en prenant la ligne $a\,b$ plus petite.

§ 383. *Tracé des cames qui soulèvent un pilon.* — Les cames qui soulèvent un pilon admettent le même tracé pour leur courbure; mais comme il n'y en a qu'un petit nombre dans la circonférence, on peut se donner la condition que chacune d'elles n'agisse que pendant une partie donnée de cette circonférence, et faire en sorte que le pilon ait le temps de retomber avant qu'une autre came soit arrivée pour le relever.

Appelant h la levée du pilon, m le nombre de cames qui agissent sur un même pilon, dans une révolution de l'arbre, n le nombre des révolutions de cet arbre en 1', et r le rayon du cercle primitif que l'on doit développer pour tracer les cames, le temps de la révolution de l'arbre sera $\frac{60''}{n}$, et l'intervalle d'une levée du pilon à une autre $\frac{60''}{mn}$. Mais comme les résistances passives peuvent un peu retarder la descente, on augmente le temps de cette descente d'un sixième de $\frac{60}{mn}$ pour ne pas être exposé à voir les mentonnets choquer les cames en descendant. Le temps de la descente est égal à $\sqrt{\frac{2h}{g}}$. On peut donc établir l'équation suivante, entre 1° le temps $\frac{60}{mn}$ du passage de deux cames consécutives par le même point, 2° le temps x de la montée du pilon, et 3° le temps $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ de la descente augmenté de $\frac{10}{mn}$:

$$\frac{60}{mn}=x+\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{10}{mn};$$

$$\text{d'où } x=\frac{50}{mn}-\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

C'est à la fois le temps de la montée et la durée de l'arc parcouru par la came pendant cette montée. La vitesse du point de contact de la came est

$$\frac{2\pi r.n}{60},$$

et l'espace parcouru est h. Nous aurons donc, le mouvement étant uniforme,

$$\frac{2\pi rn}{60}\left\{\frac{50}{mn}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right\}=h;\ \text{d'où } r=\frac{60h}{2\pi n\left\{\frac{50}{mn}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right\}}.$$

Telle est la formule à l'aide de laquelle on détermine le rayon du cercle primitif. Il n'y a aucun inconvénient à le rendre plus grand. Le rayon que l'on adopte ordinairement est environ le double de cette valeur.

Ce rayon étant déterminé, on limite la longueur de la courbe de la came en prenant sur la tangente au cercle primitif, à partir du point a, (*fig.* 203), une longueur égale à la levée du pilon, et décrivant une circonférence du cercle c avec le rayon cb. On arrondit les cames à leur extrémité, et l'on donne une forme quelconque à l'autre face.

Ce système est défectueux, 1° parce que le mentonnet du pilon, lorsqu'il est entraîné par la came qui a une vitesse acquise, passe subitement d'une vitesse nulle à une vitesse finie, et que ce passage ne peut se faire sans choc, et par conséquent sans perte de travail; 2° par le frottement de la came contre le mentonnet, § 200; 3° par le frottement du pilon contre ses prisons p, p', § 200. On a cherché à éviter le choc aux dépens de la régularité du mouvement, en donnant à la came une courbure tangente à la fois à la circonférence de l'arbre tournant et au mentonnet, à l'instant où elle saisit ce dernier à l'état de repos. Cette disposition, qui avait l'avantage de faire croître la vitesse par degrés, exigeait aussi un plus grand développement de la came, et entraînait plus de frottement. Toutefois, on évite ainsi les secousses qui nuisent toujours à la solidité des machines. Enfin, on a cherché à réduire les frottements en faisant saisir le pilon par son centre de gravité, et en remplaçant le mentonnet par une roulette mobile, mais cette roulette finit par ne plus tourner, ce qui arrive en général aux galets de friction. Toutefois, il sera toujours préférable de substituer les meules tournantes aux pilons.

§ 384. *Tracé des cames dans le cas où elles transforment leur mouvement en mouvement circulaire alternatif.* — Lorsqu'on doit communiquer un mouvement circulaire alternatif à un marteau, on emplóie encore une roue à cames, mais la courbure de la came n'est pas la même que dans le paragraphe précédent, (*fig.* 204); car la ligne $c'b$ du marteau devant être sans cesse en contact avec la came, cette dernière doit être tracée en épicycloïde décrite par le cercle du diamètre $c'a$. Pour déterminer le rayon du cercle primitif de la roue à cames, on se donnera d'abord l'amplitude du mouvement du marteau, ou l'arc ab parcouru sur la circonférence primitive c'. Alors, en adoptant les notations du paragraphe précédent, on pourra appliquer sa formule au cas qui nous occupe, pourvu que la quantité h qui entre au numérateur soit égale à a ou à l'arc parcouru par l'extrémité b du manche, et que la quantité h du dénominateur exprime ici la perpendiculaire abaissée du centre de gravité du marteau sur le rayon $c'a$; quantité qu'il est facile de connaître. En ne tenant pas compte des frottements, la formule devient donc

$$r = \frac{60\,a}{2\pi n\left\{\frac{50}{mn} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right\}}.$$

Le rayon ca étant déterminé, on tracera l'épicycloïde des cames, et pour limiter ces dernières, on décrira une circonférence du point c comme centre avec cb' pour rayon. Pour faciliter le dégagement du manche, on donne à ces cames des flancs dirigés dans le sens du rayon.

Quelquefois le centre de rotation du marteau est placé entre sa tête et la came; quelquefois aussi le marteau est en prise par la came entre la tête du marteau et son centre; et dans ce cas, pour éviter le choc, on peut imaginer une modification analogue à celle du paragraphe précédent.

§ 385. *Engrenage de deux roues d'angle.* — Il reste à examiner le cas où les deux axes dont l'un transmet le mouvement à l'autre, ne sont pas parallèles. Le mouvement se communique alors à l'aide d'un *engrenage conique*, ou de *roues d'angle*. Si ces deux axes sont dans un même plan, on emploie deux roues; et s'ils ne le sont pas, on en emploie trois, dont deux ont pour axes les axes donnés et la troisième une ligne qui coupe à la fois ces deux axes. La solution du premier cas donnera celle du second. La forme des dents de ces roues ne peut plus être cylindrique. On leur donne une forme conique dont le sommet commun se confond avec l'intersection des deux axes. Soient *S H*, *S H'*, (*fig.* 205), les deux axes donnés. Si nous partageons par la droite *S A* l'angle qu'ils forment entre eux en deux parties proportionnelles aux nombres de dents, ou inversement proportionnelles, soit aux vitesses angulaires, soit aux nombres de tours pendant un temps donné, et si nous imaginons deux cônes ayant pour axes les lignes *S H*, *S H'*, et pour génératrice commune la droite *S A*, ces deux cônes, en se communiquant le mouvement par le simple contact, se transmettront les vitesses dans le rapport donné; car les circonférences *AB* et *AB'*, décrites simultanément par un point *A* de la génératrice commune, et qui se transmettent le mouvement par ce point, seront entre elles comme les angles *A S H*, *A SH'*, et par conséquent aussi comme les nombres de dents. Ces cônes sont appelés *cônes primitifs*. C'est dans l'intérieur de leur masse que sont taillés les flancs et les creux, et c'est au-dessus de leur surface que sont placées les saillies des dents. L'épaisseur et la largeur des dents doivent être déterminées comme il a été dit pour les roues cylindriques; cette épaisseur se mesure en *A a* sur la génératrice *A S*; ce qui limite la largeur des couronnes. Ces dernières sont terminées du côté opposé au sommet *S* par d'autres surfaces coniques dont les sommets *H* et *H'*, situés sur les axes des premières, sont déterminés par la perpendiculaire *H H'* menée à *S A* par le point *A*. Ce sont les *surfaces de tête* extérieures de l'engrenage. Les surfaces de tête intérieures seraient déterminées par la perpendiculaire *I I'* menée à *S A* par le point *a*. Ces surfaces coniques ont donc un plan tangent commun suivant les arêtes *A C*, *A C'*. Or, le peu d'étendue qu'occupe sur ces cônes le profil d'une dent et de celle qui la conduit, permet de supposer que la transmission s'opère dans ce plan tangent. Dans cette hypothèse, les profils des dents doivent avoir la forme de ceux des dents des roues cylindriques, et il nous suffit pour les déterminer, de développer les cônes dont les sommets sont H et H', de tracer le développement des bases AB, AB', et de considérer ces développements comme les cercles primitifs de deux roues cylindriques. La forme trouvée pour les dents de la roue et celles du pignon, d'après les principes précédemment exposés, sera celle qu'il faudra dessiner sur les surfaces de tête extérieures des deux roues. La matière est ensuite enlevée suivant ces profils, et dans la direction des génératrices des cônes S. On peut encore tracer les profils sur les surfaces de tête intérieures I, I', en développant ces cônes et leurs bases ab, ab'.

Soient donc R et R' le rayon de la roue et celui du pignon, et n le rapport des nombres de tours du pignon et de la roue. On aura :

$$R = n\,R',$$

d'où l'on déduira l'un des rayons, l'autre étant donné.

Ayant élevé en deux points quelconques M et M' des axes des perpendiculaires MG, $M'G'$ qui soient en raison inverse des nombres de tours, par les points G et G' on mènera des parallèles aux deux axes qui se couperont en O, et la ligne SO sera l'arête de contact des cônes primitifs. On prendra un point A tel que les diamètres AB et AB' soient ceux qu'on veut donner aux roues, et l'on prendra Aa égale au pas a calculé par l'épaisseur et la largeur des dents. Divisant la circonférence $2\pi R$ par a, on aura m ou le nombre de dents de la roue; et comme il sera généralement fractionnaire, on prendra le nombre entier inférieur le plus voisin, divisible à la fois par le nombre des bras de la roue et par le rapport n des nombres de tours, ce qui conduira à une nouvelle valeur du pas égale à $\frac{2\pi R}{m}$. On aura le nombre de dents du pignon m', en divisant m par n. Par le point a on mène aux axes les perpendiculaires ab, ab'. Aux points A et a on élève des perpendiculaires à la ligne SA, qui déterminent les sommets H, H', I, I', des surfaces de tête extérieures et intérieures.

Cela fait, on développe les cônes dont les sommets sont H et H', ainsi que les cercles dont les diamètres sont AB et AB', sur des circonférences décrites des points H et H' avec les rayons HA, $H'A$. Considérant ces développements comme les cercles primitifs de deux roues cylindriques, on trace les dents et les creux de chacune des roues. On découpe une feuille de tôle suivant le profil déterminé, on applique ce profil sur la surface de tête, et l'on en trace les contours avec une pointe. On répète en a les mêmes opérations pour les surfaces de tête intérieures, après avoir eu le soin de faire correspondre les points de division de manière que les lignes qui joignent les points homologues concourent au sommet S.

La saillie de la dent de la roue devra être portée de B en P, ce qui déterminera l'épaisseur DP qu'il faut donner aux couronnes, afin d'y entailler les dents; et la saillie des dents du pignon devra être également portée de B' en P'.

§ 386. *Engrenage d'une vis sans fin conduisant un pignon.* — Nous avons vu que si les deux axes donnés n'étaient pas dans le même plan, il fallait employer trois roues pour transmettre le mouvement. Lorsque l'un des axes de rotation est dans un plan perpendiculaire au second axe, on emploie quelquefois une vis sans fin et un pignon, et l'on fait conduire le pignon par la vis.

Pour tracer l'engrenage, nous supposerons d'abord que le pas de la vis ait été déterminé d'après l'intensité des efforts à transmettre. Ce pas devra être égal à celui du pignon, et comme la vis fera un tour pendant que le pignon tournera d'une quantité égale au pas, si l'on désigne par n le nombre de tours de la vis pour une révolution du pignon, on aura $2\pi R = na$, d'où

$$R = \frac{na}{2\pi},$$

pour le rayon du pignon.

Quant au tracé des dents du pignon, on remarquera qu'il faut que leurs faces aient la même inclinaison sur l'axe de la roue que les filets sur l'axe de la vis. On peut en obtenir le tracé approximatif en décrivant d'abord la développante du cercle primitif. On mènera ensuite par le point *a* (*fig.* 206), une droite *b c* faisant avec la ligne des centres un angle égal à l'inclinaison des filets de la vis sur l'horizontale. Puis, prenant sur la ligne des centres à partir de *a* deux longueurs *am*, *am'*, égales à la moitié de la largeur de la roue, on élèvera à la ligne des centres les perpendiculaires *m n*, *m' n'*. Par les points *n* et *n'* d'intersection de ces perpendiculaires avec la ligne *a b*, on mènera des parallèles à la ligne des centres, et les points *g* et *g'* d'intersection de ces parallèles avec la circonférence primitive du pignon seront les naissances des développantes égales à celle primitivement tracée, qui doivent former la courbe de la dent sur les deux faces de la roue.

Ce procédé ne donne jamais qu'un point du filet en prise par la dent de la roue; de sorte que, pour les machines puissantes, la meilleure manière de tailler les dents de la roue consiste à les faire creuser par les filets mêmes de la vis. Pour cela, on fait une *mère* dont le pas soit le même que celui de la vis donnée, et l'on fait agir son tranchant sur la circonférence de la roue. A mesure que les dents se forment on rapproche la vis de la roue, jusqu'à ce qu'elles se pénètrent de toute la profondeur du filet de la vis, et l'on continue à les faire agir l'une sur l'autre jusqu'à ce que la vis n'ait plus d'action sur les dents qu'elle a taillées.

Les engrenages effectués au moyen des lanternes étant très défectueux à cause des arcs-boutements qui s'opèrent nécessairement dans leur mode d'action, et étant proscrits de toute machine bien entendue, il n'en sera fait aucune mention ici.

DES RÉGULATEURS.

§ 387. *Usage des régulateurs.* — Nous avons vu que les volants étaient propres à régulariser le mouvement d'une machine, dans le cas où l'action de la résistance était intermittente, c'est-à-dire tantôt plus grande et tantôt plus petite que celle du moteur ; mais comme le dernier est susceptible de varier également, il pourrait donc arriver que ce moteur, ayant une fois surmonté la résistance, continuât indéfiniment à fournir une quantité d'action plus grande que celle que la résistance consomme; alors le volant ne remédierait à rien, parce qu'il prendrait, comme le reste du système, un excès de vitesse de plus en plus considérable, et propre à causer de graves accidents, ou même la destruction de la machine. Pour les prévenir, on emploie des dispositions telles qu'aussitôt que la vitesse vient à surpasser la valeur moyenne qu'on lui a fixée, la quantité d'action fournie par le moteur se trouvera diminuée, ou le travail consommé par les résistances augmenté, ce qui ramène aussitôt la vitesse à cette valeur moyenne. On a quelquefois, pour remplir ce but, adapté à la machine des ailes qu'elle fait mouvoir dans l'air, où elles éprouvent une résistance qui croît rapidemment avec la vitesse, ou un *frein* qu'on fait presser contre une roue pour l'arrêter par le frottement. Mais ces moyens, et d'autres qui leur sont analogues, ont l'inconvénient de consommer une partie du travail fourni par le moteur, et l'on emploie plus généralement aujourd'hui les appareils connus sous le nom de *régulateurs*. Nous n'étudierons que le *régulateur à force centrifuge*, ou le *pendule conique*, qui peut, à dire vrai, être considéré comme le régulateur universel.

§ 388. *Etablissement du pendule conique ou régulateur à force centrifuge.* — A l'extrémité supérieure A (*fig.* 207), d'un axe vertical AB sont attachées deux verges AC au moyen d'un boulon horizontal par lequel l'axe et les verges sont traversés, et sur lequel elles peuvent tourner librement. D'autres verges *B D* sont fixées de la même manière aux premières, de manière à former avec elles un losange articulé à ses quatre angles, et supportent à leur extrémité inférieure un manchon embrassant l'axe *A B*, le long duquel il monte ou descend suivant que l'angle *C A B* s'ouvre plus ou moins. Des boules d'égal poids *C C* sont placées à l'extrémité des verges *A C*. Si l'on suppose maintenant cet appareil adapté à une machine dont le mouvement communique à l'axe *A B* et aux verges qu'il porte un mouvement de rotation, il est visible que les poids *C C*, et par suite le manchon *B*, tendront, en vertu de la force centrifuge résultant de ce mouvement, à s'élever d'autant plus que la vitesse sera plus grande. On conçoit que cette ascension verticale du manchon *B* résultant d'une augmentation dans la vitesse, peut être employée à modérer l'action du moteur : par exemple, dans les machines à vapeur, à fermer la soupape qui donne passage à la vapeur; dans les roues hydrauliques, à abaisser la vanne de l'orifice qui fournit l'eau à la roue, etc.

L'établissement d'un régulateur à force centrifuge dépend de deux conditions essentielles, l'une que le manchon *B* occupe une position déterminée pendant que la machine décrit un nombre voulu de révolutions dans un certain temps, l'autre que, quand la vitesse de la machine a acquis un excès fixé à l'avance sur celle que lui assigne la nature du travail, la force centrifuge des boules soit capable de régler l'ouverture de la vanne ou du robinet destiné à modérer l'action du moteur.

Pour plus de simplicité, nous réduirons les diverses parties du losange à des lignes. Si, quand la machine possède la vitesse convenable, le manchon *P* doit occuper une position fixe *A* sur l'axe vertical (*fig.* 208), il résulte que ce manchon ne saurait éprouver aucune action de la part des pièces qui le lient aux vannes ou aux robinets, et qu'ainsi dans la circonstance où cette première condition est satisfaite, le pendule régulateur n'est sollicité que par le poids des boules, et par leur force centrifuge correspondant à la vitesse assignée pour l'axe vertical du régulateur ; il y aura donc équilibre entre le poids des boules et leurs forces centrifuges, ce qui exige que la résultante du poids P de chaque boule, dont l'action est verticale et parallèle à l'axe CA, et de sa force centrifuge dont l'action a lieu selon l'horizontale KI du centre de la boule, que cette résultante, disons-nous, soit dirigée suivant la ligne CI ou passe par le point fixe C. Si donc CI représente la grandeur de cette résultante, les côtés CK et KI seront proportionnels, le premier au poids P d'une boule, et le deuxième à sa force centrifuge que nous nommerons F. D'où l'on conclut

$$\frac{F}{P}=\frac{KI}{CK}.$$

On sait d'ailleurs, § 308, que la force centrifuge d'un corps de petites dimensions comparativement à sa distance au centre autour duquel il tourne, est égal à la force vive imprimée à ce corps, divisée par le rayon du cercle que décrit son centre de gravité. Or, en appelant V_1 la vitesse angulaire du poids P autour de l'axe, lorsque la machine possède la vitesse convenable, et en observant que la vitesse de son centre de gravité est alors $V_1 \times KI$, § 23, la force vive de ce poids P est égale à

$$\frac{P}{g}.V^2_1.KI^2.$$

Divisant cette force vive par le rayon KI le quotient

$$\frac{P}{g}.V_1^2.KI$$

représentera la force centrifuge F de la boule P. Si nous substituons à F cette dernière valeur dans l'égalité

$$\frac{F}{P}=\frac{KI}{CK},$$

on trouvera, après avoir fait les suppressions convenables :

$$C\,K = \frac{g}{V_1^2} \ldots\ldots (1).$$

Nous avons vu, § 22, comment on pouvait déterminer la vitesse angulaire V_1; ainsi la valeur de $C\,K$ sera parfaitement déterminée, c'est-à-dire l'abaissement des boules au-dessous du sommet supérieur C du losange. Or, ce losange ayant reçu des côtés une grandeur jugée convenable, et le sommet inférieur A, c'est-à-dire le manchon, devant avoir une position fixée d'après la constitution du moteur, et d'après ce dont la vanne ou le robinet seront ouverts pour vaincre toutes les résistances nuisibles et utiles de la machine mue avec la vitesse qui correspond à V_1, on voit ainsi que l'ouverture des verges se trouve entièrement déterminée, et par conséquent aussi la position de chaque boule sur les prolongements de ces verges. Car si leur ouverture est l'angle $B\,C\,D$, la perpendiculaire à l'axe menée par le point K, rencontrera les verges aux points I et I' qui seront les centres des boules. On peut encore assigner une autre règle pour la détermination de $C\,K$. Nommons t la durée d'une révolution du régulateur à l'état du régime qu'on veut maintenir dans la machine, $2\,\pi$ est le chemin parcouru pendant ce temps à l'unité de distance de l'axe, et $\frac{2\,\pi}{t}$ est le chemin parcouru à cette même distance, mais pendant l'unité de temps. On aura donc

$$V_1 = \frac{2\,\pi}{t}.$$

Faisant cette substitution dans l'égalité précédente (1), nous aurons :

$$C\,K = \frac{g\,t^2}{4\,\pi^2}.$$

D'où l'on tire

$$t = 2\,\pi \sqrt{\frac{C\,K}{g}}.$$

Si l'on se reporte maintenant à ce qui a été dit, § 85, sur la durée des oscillations du pendule simple, on trouve que cette durée, pour un pendule d'une longueur égale à CK, équivaut à

$$\pi \sqrt{\frac{CK}{g}};$$

ce qui nous apprend que la durée d'une révolution du régulateur est double de celle de l'oscillation du pendule qui aurait pour longueur la distance verticale des boules du régulateur au sommet supérieur de son losange. Si donc on veut trouver cette même distance, il suffira de suspendre une balle de plomb à un fil, et d'allonger ce fil au-dessous de son point de suspension jusqu'à ce que la durée de ses oscillations soit moitié de la durée d'une révolution complète du régulateur; la longueur du fil qui remplira cette condition sera précisément la distance verticale cherchée.

Ce qui précède indique seulement que tant que la machine marche avec la vitesse qu'on s'est donnée, les boules demeureront par rapport au sommet supérieur du losange, à la distance verticale trouvée plus haut; qu'elles ne s'écarteront ni ne se rapprocheront, et qu'en un mot le manchon qui conduit les leviers de manœuvre des vannes, robinets, etc., demeurera dans la même position. Mais si la vitesse venait à se ralentir, ce serait une preuve que les résistances auraient de la prépondérance sur la puissance, et que, cette dernière devant être augmentée, le régulateur aura besoin de faire ouvrir les vannes ou les robinets, pour rétablir la vitesse moyenne qu'on désire maintenir. De même si la vitesse augmente, il faudrait au contraire diminuer l'action du moteur, c'est-à-dire fermer plus ou moins les vannes, et il est évident que le manchon ne saurait opérer ces divers effets, sans éprouver une certaine résistance que nous nommerons p. C'est de cette résistance déterminée à l'avance, et qu'il est facile d'évaluer au moyen de poids capables de faire mouvoir les vannes ou soupapes régulatrices, c'est de cette résistance que nous allons conclure le poids P à donner à chacune des boules. Supposons par exemple qu'une petite accélération de vitesse ait été produite, les boules en s'écartant soulèveront le manchon, en sorte que la résistance p de ce dernier agira de haut en bas, ou dans le même sens que le poids des boules. Cette action ayant lieu précisément sur l'axe vertical CA (*fig.* 209), supposons qu'elle soit représentée par la grandeur Aa. Elle se décomposera en deux autres composantes égales Ab et Ad qui dirigées sur les côtés inférieurs du losange $ABCD$ pourront, à cause de la rigidité des verges, être regardées comme appliquées en B et en D selon les directions $Bb'=Ab$ et $Dd'=Ad$. Décomposons de nouveau la force Dd' en deux autres, l'une hD concourant au point fixe C et l'autre Df verticale, la première de ces deux composantes sera d'un effet nul puisqu'elle passe par le point fixe C. Quant à la deuxième Df, elle redeviendra égale à Aa ou à p, par suite de l'égalité des triangles Ada et $d'Df$. On démontrerait par une décomposition analogue en B, que la force p s'y produira suivant Be. Ainsi cette résistance se répètera aux articulations B et D tout en conservant sa valeur primitive. Mais la force verticale Df ou p peut se décomposer en deux autres forces parallèles appliquées, l'une au sommet invariable C et l'autre au centre I de la boule P, attendu que les trois points C, D et I sont situés sur une même verge rigide CI. La première est évidemment d'un effet nul pour le mouvement; il ne reste que la seconde dont la valeur, § 126, équivaut à

$$Df \times \frac{CD}{CI} \text{ ou à } p \times \frac{CD}{CI},$$

et qui s'ajoute au poids P de la boule. La même chose aurait lieu à l'égard de la boule P'. Dès lors nous retombons dans les mêmes considérations qui ont déterminé l'équilibre dans le cas où le manchon n'éprouvait aucune résistance; seulement ici chaque boule est sollicitée par sa force centrifuge F et par une force verticale

$$P+p \times \frac{CD}{CI}$$

au lieu de la force verticale P. Ainsi au lieu de la relation précédente

$$\frac{F}{p}=\frac{KI}{CK},$$

nous aurons ici cette autre :

$$\frac{F}{P+p.\frac{CD}{CI}}=\frac{KI}{CK}.$$

Si dans cette formule, nous remplaçons F par sa valeur correspondante à la vitesse de régime et que nous avons trouvée égale à

$$\frac{P}{g}.V_1^2.KI,$$

cette égalité deviendra :

$$\frac{\frac{P}{g}.V_1^2.KI}{P+p.\frac{CD}{CI}}=\frac{KI}{KC}.$$

Mais il faut remarquer dès à présent que V_1 n'a pas ici la valeur qu'elle doit avoir, car il est impossible que le régulateur cède instantanément, et il y a nécessairement un intervalle pendant lequel la vitesse augmente avant que les tiges ne prennent de mouvement. Donnons-nous cette limite de vitesse, et supposons que son excès sur la vitesse moyenne V_1 soit de $\frac{1}{10}$ de cette dernière, en sorte que la vitesse sera $\frac{11}{10}V_1$, au moment où la vanne s'ouvrira. Si, avant l'instant où cette vitesse est acquise, le mouvement n'a pas lieu, il est visible que la relation précédente ne sera satisfaite qu'autant que V_1 y sera remplacée par $\frac{11}{10} V_1$, puisque d'après notre hypothèse, c'est seulement pour cette dernière vitesse que la résistance p du manchon se manifeste. En faisant cette substitution, l'égalité devient :

$$\frac{\frac{P}{g} \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 V_1^2 . KI}{P + p . \frac{CD}{CI}} = \frac{KI}{KC}.$$

Supprimant KI et chassant les dénominateurs, il vient :

$$\frac{P}{g} \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 . V_1^2 . CK = P + p . \frac{CD}{CI}.$$

Dans cette relation, CK est connu d'après la formule (1) :

$$CK = \frac{g}{V_1^2}.$$

Substituant et réduisant, on a :

$$P . \left(\frac{11}{10}\right)^2 = P + p . \frac{CD}{CI}.$$

Tirant la valeur de P, il vient, toutes réductions faites,

$$P = \frac{100}{21} . p . \frac{CD}{CI}.$$

Dans les machines à vapeur où la résistance du manchon ou p est très petite, on ne vise pas à donner à P ou au poids de chaque boule une valeur très faible. On fait

$$\frac{CD}{CI} = \frac{2}{3}.$$

On aura :

$$P = \frac{200}{63} . p = 3,17\, p.$$

Tel est le poids de chaque boule. Si, par exemple, la résistance du manchon ou $p=2$ kil., on aura pour le poids de la boule

$$P=9 \text{ kil.}, 51.$$

Si nous revenons à la relation :

$$P=\frac{100}{21}.p.\frac{CD}{CI},$$

nous voyons que plus p sera grand pour une même boule P, et plus le rapport $\frac{CD}{CI}$ sera petit, c'est-à-dire qu'alors plus CI devra être grand par rapport à CD. Voilà pourquoi quand la résistance p devient un peu considérable, on change le système pour le disposer de telle sorte que le manchon se trouve au sommet supérieur du losange, et le point fixe C du régulateur au sommet inférieur, (*fig.* 210). Mais afin que les verges ne puissent fléchir, CI ne dépasse guère 3 à 4 fois CD.

Nous trouvons, dans le recueil des machines rurales et industrielles, la description d'un appareil qui offre une application ingénieuse du pendule régulateur à force centrifuge : c'est le *compteur des moulins*. Cet appareil est destiné à faire connaître au meunier le degré de vitesse des meules en action, et à le prévenir de l'instant où le mouvement est trop faible ou trop rapide, pour qu'il puisse y remédier en donnant aux meules plus ou moins d'écartement.

Cet appareil se compose d'un régulateur ordinaire, (*fig.* 211), au manchon M duquel sont assemblées deux tiges droites verticales T qui s'élèvent, en la traversant, au-dessus de la poulie P recevant le mouvement de l'arbre moteur. Ces tiges portent, à leur extrémité supérieure, un disque à mentonnet D, qu'elles font monter ou descendre suivant le mouvement du manchon. Deux leviers L, tournant autour de leur centre, sont attachés par un fil de fer, à deux manchons m, montés sur un même axe horizontal, et maintenus de chaque côté par une bague en fer qui ne les empêche pas de tourner. Ces manchons portent chacun une sonnette qui se met en vibration, dès que le disque rencontre l'un des deux leviers L. Le manchon M est embrassé par un collier en fer C, composé de deux parties, l'une desquelles fait corps avec une barre double B dentée d'un côté en crémaillère, un pignon p engrène avec cette dernière; son axe porte un index qui indique sur un cadran le nombre correspondant à la vitesse des meules. Ainsi, quand la vitesse augmente ou diminue, les boules s'écartent ou se rapprochent et le pignon fait avancer l'index dans un sens ou dans un autre. Pendant que cet effet se produit, le disque à mentonnet, entraîné par le mouvement du manchon M, fait agiter l'une des deux sonnettes pour appeler le garde moulin qui, en jetant les yeux sur le cadran, reconnaît quel est le degré de vitesse des meules.

Pour graduer le cadran de manière que les divisions portent pour numéros les nombres de tours des meules par minute, il suffit de faire correspondre l'index avec la main, à la position du manchon M déterminée par le calcul. Or, cette dernière est aisée à trouver. En effet, la valeur de la ligne CK, (*fig.* 208), correspondant à la vitesse de régime de l'arbre est égal à $\frac{g}{V_1^2}$.

Pour trouver celle de CA, ou la position du manchon, eu égard à la valeur de CK et par conséquent à la position des boules, nous remarquerons que

$$CA = 2CF, \text{ et que } CF : CK :: CB : CI. \text{ D'où}$$

$$CF = CK.\frac{CB}{CI}, \text{ et } CA = 2\,CK.\frac{CB}{CI}.$$

En faisant ici

$$CK = \frac{g}{V_1^2},$$

la valeur de CA donnera la position normale du manchon, et l'on marquera à l'index le nombre de tours moyen que devront faire les meules, pour cette valeur de CK. En faisant successivement CK égal à

$$\frac{g}{\left(\frac{11}{10}\right)^2 V_1^{\,2}},\ \frac{g}{\left(\frac{9}{10}\right)^2 V_1^{\,2}},\ldots.$$

on aura les valeurs de CA correspondantes, et l'on pourra tracer autant de positions différentes de l'index. On a vu que le rapport $\frac{CB}{CI}$ étant généralement fait égal à $\frac{2}{3}$.

La valeur de V_1 se détermine à l'aide des diamètres des roues qui transmettent le mouvement de l'arbre au régulateur.

La résistance du manchon, ou p, qui sert à déterminer le poids des boules est ici égale au poids du disque D augmenté de la résistance de la crémaillère.

DES MANIVELLES.

§ 389. *Diverses espèces de manivelles.*—On appelle *manivelle* un bras dont les projections sont AB et $A'B'$, (*fig.* 212), fixé à un arbre tournant AE, et l'extrémité B, B' reçoit une bielle qui lui communique le mouvement qu'elle reçoit elle-même d'une force F.

On divise les manivelles en simples et en composées. Les manivelles simples n'ont qu'un bras, ou, si elles en ont deux, ils sont situés dans un même plan passant par l'axe. Les manivelles composées ont plusieurs bras non situés avec l'axe dans le même plan.

Les manivelles, simples ou composées, peuvent être à *simple* ou à *double effet*. Elles sont à simple effet, quand les forces qui sollicitent les bielles n'agissent que pendant une demi-révolution des manivelles. Elles sont à double effet, lorsque les puissances qui sollicitent les bielles dans un sens pendant la première demi-révolution, les sollicitent de nouveau dans le sens contraire pendant l'autre demi-révolution des manivelles.

Nous avons vu, § 361, que toutes les fois qu'il s'agit de transformer un mouvement circulaire continu en rectiligne alternatif ou même en circulaire alternatif, ce qu'il y a de plus avantageux c'est d'employer les manivelles lorsque les machines sont puissantes, ou *l'excentrique* lorsque les efforts ne sont que médiocres. Mais comme le travail élémentaire produit sur une manivelle varie à chaque instant, sous un effort même constant, il est utile d'étudier les lois de cette variation, parce qu'elle nous conduira au principe de l'établissement des volants. Nous comparerons sous ce rapport les manivelles simples et les manivelles composées.

§ 390. *Manivelle simple à simple effet.* — Ordinairement on s'arrange de façon que la direction de la bielle varie très-peu ou ne fasse que des angles fort petits avec la verticale qui passe par le centre de l'arbre, et cela pour qu'après la décomposition de l'effort de la bielle en deux autres, l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à cette verticale, ce dernier soit fort petit et ne produise que peu de frottement. Cette condition est suffisamment remplie, quand la longueur de la bielle est 4 ou 5 fois celle du bras. Ainsi nous admettrons, dans tout ce qui va suivre, que la direction de la bielle et de la force qui la sollicite soit invariable, verticale par exemple, et que cette force soit constante, hypothèse qui facilite beaucoup les considérations du travail. Cela posé, cherchons le travail élémentaire produit par la force F, (*fig.* 213), pendant que le bouton B, c'est-à-dire son point d'application, a décrit le très petit arc de cercle BB'. Ce travail se mesure par le produit de l'effort F multiplié par la projection BB'' du chemin parcouru BB' sur la direction de cet effort, ou par $F \times BB''$, ou bien encore par $F \times bb'$ en projetant ce chemin sur le diamètre vertical EG. Si donc on cherche tous les travaux élémentaires produits pendant un intervalle fini qui sera compris par exemple entre les points E et B, et qu'on en fasse la somme, celle-ci donnera le travail dépensé sur la bielle pendant ce même intervalle. Mais remarquons que dans cette somme l'effort F constant se trouve multiplié par la somme des projections telles que $b\,b'$ sur le diamètre $E\,G$ de tous les petits arcs élémentaires $B\,B'$, c'est-à-dire par la projection $E\,b$ de l'arc total $E\,B$ parcouru par le bouton B de la manivelle. En général, le travail de la bielle pour un arc parcouru quelconque a pour valeur le produit de la projection de cet arc sur le diamètre vertical et de l'effort de la bielle. D'où l'on voit que si cet effort a agi sur le demi-cercle total $E\,C\,G$, le travail pendant cet intervalle équivaut à l'effort F multiplié par le diamètre $E\,G$, ou à $2\,F\,r$, r désignant la longueur $A\,B$ du bras de la manivelle.

Voyons maintenant comment varie le travail élémentaire à chaque instant pour de très petits arcs égaux à BB', travail que nous avons trouvé exprimé par $F \times B\,B''$. Du point B abaissons la perpendiculaire $B\,D$ sur le diamètre horizontal $H\,C$. Les triangles semblables ABD, $B\,B'B''$ donnent la proportion

$$B\,B'' : B\,B' :: A\,D : A\,B.$$

Appelant s l'arc élémentaire $B\,B'$, et r le bras $A\,B$, la proportion devient :

$$B\,B'' : s :: A\,D : r; \text{ d'où } B\,B'' = \frac{s}{r}.\,A\,D.$$

Le travail élémentaire a donc pour expression :

$$t = F.\,\frac{s}{r}.\,A\,D.... \;(1).$$

Si nous supposons la demi-circonférence $G\,C\,E$ partagée en une suite de petits arcs égaux à s, et que des points de division on mène des perpendiculaires au rayon horizontal $A\,C$, les différents travaux élémentaires auront pour facteurs constants F et $\frac{s}{r}$, et pour facteur variable la valeur correspondante de $A\,D$, c'est-à-dire de la projection de la manivelle sur le diamètre horizontal. Donc ces travaux seront proportionnels à la ligne AD. Si le bouton est en E, $AD=0$, et le travail élémentaire est nul pour cette position. A partir de ce point, AD croît successivement pour atteindre bientôt son maximum en C où cette ligne $= r$. Le travail élémentaire a aussi atteint son maximum et est égal à

$$F \times \frac{s}{r} \times r = F.s;$$

et en effet le travail est alors mesuré par l'effort F multiplié par le chemin parcouru lui-même. Enfin au-dessous du point C, la ligne AD décroît de nouveau et devient encore nulle au point le plus bas G. Le travail élémentaire passant par toutes ces variations, on voit combien sont grandes les inégalités qu'il éprouve, puisque de $F \times s$ qu'il se trouve en C, il se réduit à zéro en G et en E.

Cherchons maintenant à quelle distance AX, (*fig.* 213), il faudrait appliquer l'effort F de la bielle pour qu'agissant tangentiellement à une roue de ce rayon AX que nous représenterons par x, elle produise dans un tour le même travail que celui de la bielle dans sa demi-révolution, car elle est supposée à simple effet. Nous avons reconnu que ce dernier était égal à $2\,rF$. Quant au premier, il est évidemment égal à $F \times 2\pi x$, puisque $2\pi x$ est le véritable chemin parcouru par la puissance F dont la direction est successivement celle des arcs parcourus, puisqu'elle est supposée agir tangentiellement à cette circonférence. On aura par conséquent

$$2\,rF = 2\pi x F;\ \text{d'où}\ x = \frac{1}{\pi} r = 0{,}318.\,r = \frac{1}{3} r\ \text{environ.}$$

On nomme cette longueur le *bras de levier moyen* de la manivelle, il est ici le tiers du premier. Les calculs relatifs à la manivelle sont donc susceptibles de simplification, puisque, sans erreur sensible, cette manivelle peut être remplacée par une roue d'un rayon égal à 0,318 r, que sollicite la force F tangentiellement à sa circonférence.

Nous pouvons à présent prendre une idée de l'irrégularité d'action de la manivelle, en comparant les deux travaux élémentaires extrêmes et le travail élémentaire moyen. Le travail élémentaire maximum a été trouvé égal à $F s$, le travail minimum à zéro. Le travail moyen sera représenté par $F.\ 0{,}318\ s$ ou $F.\ \frac{s}{3}$ environ, car pendant que le bouton de la manivelle donnée décrit un arc s, la manivelle x décrit un arc égal à $\frac{s}{3}$, et son travail est égal à $F.\ \frac{s}{3}$. On peut donc ainsi disposer ces trois travaux par ordre de grandeur :

max.	*moy.*	*min.*
$F.\ s$	$F.\ \frac{s}{3}$	0.

En divisant par $F.\ s$, ces trois travaux seront donc proportionnels aux nombres 1, $\frac{1}{3}$, 0, ou, en prenant le travail moyen pour unité, et multipliant alors les trois nombres par 3, ou divisant par $\frac{1}{3}$:

max.	moy.	min.
3	1	0.

Ainsi le travail moyen diffère des deux extrêmes de deux fois et une fois ce travail moyen.

§ 391. *Manivelle simple à double effet.* — Si la manivelle est à double effet, c'est-à-dire si la force F agit dans un sens pendant le premier demi-tour et dans le sens contraire pendant le second demi-tour, le travail total exécuté par la bielle sera alors $4\,r\,F$. En appelant toujours x le bras du levier moyen de la manivelle, $2\pi\,x\,F$ sera toujours le travail exécuté pendant sa révolution entière, et si nous voulons que ces deux travaux soient égaux, nous aurons

$$2\pi x F = 4 r F;\ \text{d'où}\ x = \frac{2}{\pi} r = 0{,}637.\, r = \frac{2}{3} r\ \text{environ.}$$

Le plus grand travail élémentaire sera toujours représenté par Fs, et le plus petit par zéro. Il y aura deux limites aux points H et C pour lesquelles le travail aura atteint son maximum, et deux limites en E et G où il aura atteint son minimum. En comparant, comme précédemment, le travail moyen aux deux travaux extrêmes, on trouve pour le plus grand, le moyen et le plus petit, les trois quantités :

max.	*moy.*	*min.*
Fs	$F.\frac{2}{3}.s$	0.

Prenant aussi le travail moyen pour unité et divisant par $F.\frac{2}{3}.s$, il vient :

max.	*moy.*	*min.*
$\frac{3}{2}$	1	0

Les écarts du travail moyen sur les deux extrêmes sont donc moindres que dans le premier cas, car en rapprochant les résultats, on a pour le premier cas 3, 1 et 0 et pour le deuxième $\frac{3}{2}$, 1 et 0. On obtiendra donc plus de régularité dans l'emploi de la manivelle simple, en la faisant agir à double effet.

§ 392. *Cas où la force agit dans le même sens pendant la révolution complète de la manivelle.* — Pour compléter la question il resterait à examiner le cas où la force, dans le deuxième demi-tour, agirait dans le même sens que dans le premier. Il est évident qu'ici le travail total pendant un tour entier sera nul, et il en sera de même du travail élémentaire moyen, en sorte que les écarts du plus grand travail et du plus petit en dehors du travail moyen seront proportionnels à ces travaux eux-mêmes, ou représentés par 1 et 0 : ces écarts deviendront dans ce cas les plus grands possibles.

Ce dernier cas ne peut être que relatif à l'action de la pesanteur qui agit toujours dans le même sens, et qui ne produit aucun travail pendant une révolution complète. Mais comme cette action se joint toujours à celle d'une autre force qui agit dans la direction de la bielle comme les précédentes, il convient d'examiner son influence dans les inégalités du travail élémentaire.

§ 393. *Manière de régler le poids des équipages de manivelle.* — Nommons p le poids de la bielle et de son équipage qui agit dans la direction de la force F. On observera que le poids p s'ajoute à la force F ou s'en retranche, selon qu'il agit ou non dans le sens de cette force, de telle sorte que la quantité de travail dans un tour entier n'est nullement altérée par ce poids. Par conséquent son influence est également nulle et sur le bras de levier moyen et sur le travail élémentaire moyen, et comme le travail élémentaire de la puissance est toujours nul pour la position verticale du bouton de la manivelle en E et G, on voit que l'effet du poids p se réduira à augmenter ou à diminuer le plus grand travail élémentaire en C et H, selon le sens de la puissance F.

Cela posé, il est aisé de voir que les écarts du plus grand travail élémentaire dû aux forces F et p sur le travail moyen seront, dans le cas où F agirait dans les deux demi-tours, et dans celui où elle n'agirait que dans le premier demi-tour en s'ajoutant à p, plus considérables que dans les cas précédents où l'on faisait $p = 0$: dans ces circonstances donc il sera essentiel de mettre l'équipage en équilibre autour de l'arbre de rotation. Mais il pourra en être tout autrement du cas où F agit seulement dans le premier demi-tour et dans une direction contraire à celle du poids p. En effet, la plus grande valeur du travail élémentaire ayant toujours lieu pour la position horizontale du bras de la manivelle, elle sera proportionnelle à $s\ (F-p)$ pour le premier demi-tour et à sp pour le second. On devra donc prendre la première ou la dernière de ces quantités pour la limite supérieure du travail élémentaire selon qu'on aura

$$F-p > \text{ou} < p,\ \text{ou}\ F > \text{ou} < 2p.$$

Le cas le plus avantageux aura lieu évidemment quand la valeur de p sera telle que $s\ (F-p)$ sera égal à sp, ou que p sera égal à $\frac{F}{2}$; en sorte que le plus grand travail élémentaire réduit ici à la moitié, sera représenté par $\frac{1}{2}.F.s.$ Mais comme le travail moyen reste toujours, comme au § 390, proportionnel à $\frac{1}{3}F.s$ et le plus petit à 0, on aura donc :

max.	*moy.*	*min.*
$\frac{1}{2}F\,s$	$\frac{1}{3}F.s$	0

ou bien, en divisant par $\frac{1}{3}F.s$

max.	*moy.*	*min.*
$\frac{3}{2}$	1	0

C'est-à-dire que l'irrégularité sera la même que dans la manivelle à double effet.

§ 394. *Des manivelles composées. Manivelle double à double effet.*—Souvent on applique deux ou un plus grand nombre de manivelles en divers points d'un même axe, dont les bras sont situés avec cet axe dans des plans différents, afin que la puissance agisse sur une ou plusieurs de ces manivelles dans les instants où elle n'agit pas sur d'autres, ce qui arrive, comme nous l'avons vu, lorsqu'un bras de manivelle est vertical. L'emploi de plusieurs manivelles est donc un moyen de régulariser l'action de la puissance.

Nous allons chercher quelle est la meilleure disposition à donner aux deux bras d'une manivelle double pour qu'elle produise la plus grande régularité possible dans l'action de la puissance.

Soient AB, AB', (*fig.* 214), les projections des deux bras de la manivelle sur un plan perpendiculaire à l'axe A de rotation. Soit F la puissance appliquée à chacune des manivelles et agissant à double effet, c'est-à-dire agissant de haut en bas pendant la course descendante des bielles, et de bas en haut pendant leur course ascendante. Pour trouver l'angle sur lequel les deux bras doivent être placés, cherchons d'abord les limites supérieures et inférieures du travail élémentaire. Les bras AB et AB' pourront être placés de part et d'autre de la verticale EG, comme dans la fig. (a), ou être placés du même côté, comme dans la fig. (b). Dans le premier cas, si l'on représente toujours par s, comme au § 390, un petit arc élémentaire parcouru par le point B et par r le bras AB de la manivelle, le travail élémentaire aura pour expression

$$F \times \frac{s}{r} \times AD.$$

Dans les mêmes circonstances, le travail élémentaire de la manivelle AB' sera

$$F \times \frac{s}{r} \times AD'.$$

Donc le travail élémentaire total sera

$$F \times \frac{s}{r} \times DD'.$$

Or cette quantité deviendra la plus grande possible lorsque DD' sera un maximum; ce qui arrivera quand la corde BB' sera horizontale, car sa projection sur le diamètre sera égale à elle-même. Le travail élémentaire maximum pour cette position sera donc

$$2F. \frac{s}{r}. BI.$$

Dans le cas de la figure (b), le travail total élémentaire sera toujours représenté par

$$F.\frac{s}{r}.AD+F.\frac{s}{r}.AD'=F.\frac{s}{r}(AD+AD').$$

Abaissons du milieu I de la corde DD', la perpendiculaire IK sur le diamètre HC. Le point K est le milieu de DD', car DK et KD' sont les projections de deux parties égales de la corde BB'. Donc

$$AD=AK-DK \text{ et } AD'=AK+DK. \text{ D'où } AD+AD'=2AK.$$

Donc enfin le travail total élémentaire dans cette nouvelle position sera

$$F.\frac{s}{r}.2AK,$$

quantité qui sera la plus grande possible, lorsque AK sera un maximum, c'est-à-dire égale à AI dont elle est la projection. Ce maximum de travail aura donc lieu lorsque la corde BB' sera verticale, et son expression sera alors

$$2F\frac{s}{r}AI.$$

Ainsi, en résumé, c'est lorsque la corde BB' sera horizontale et verticale que les travaux élémentaires auront leur maximum de valeur.

Si cette valeur devient très grande lorsque AI est très grand, la grandeur de BI est alors très petite, ainsi que la première valeur de la limite supérieure du travail élémentaire. Par conséquent, les écarts de ces deux limites en dehors du travail élémentaire moyen, quel que soit ce dernier, seront réduits le plus possible si $AI=BI$, ou si l'angle BAB' est droit. Le triangle rectangle ABI donne alors

$$AI=BI=\frac{AB}{\sqrt{2}},$$

et les limites supérieures du travail élémentaire deviennent l'une et l'autre

$$2\,F.\frac{s}{r}.\ \frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{2\,F s}{\sqrt{2}}=F s.\sqrt{2}.$$

Dans la même hypothèse, la limite inférieure du travail élémentaire est obtenue lorsqu'un bras de la manivelle est vertical, ce qui arrive quatre fois, comme pour les limites supérieures, et sa valeur est $F.\ s$.

Nous trouverons le bras de levier moyen x de la manivelle comme au § 390. Le travail total des deux bielles est

$$2\,F \times 4\,r = 8\,F r.$$

Égalant ce travail à celui $2\,\pi\,x.\,2\,F$ développé par les mêmes forces lorsqu'elles sont appliquées à ce bras de levier moyen, nous aurons

$$2\,\pi x.\ 2.\ F = 8\ F r;\ \text{d'où}\ x = \frac{2\,r}{\pi} = 0{,}637\ r.$$

Le travail élémentaire moyen sera donc représenté par

$$2\,F \times 0,637.\ s.$$

En comparant, comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois dans les paragraphes précédents, les travaux élémentaires maximum, minimum et moyen, nous pourrons juger de la régularité d'action obtenue. On a ainsi :

max.	*moy.*	*min.*
$F.s.\sqrt{2}$	$2\,F.s.\,0{,}637$	$F s$

ou bien, en divisant par $2\,F.s.\ 0,637$, afin de prendre le travail moyen pour unité :

max.	*moy.*	*min.*
1,11	1	0,785.

L'irrégularité sera donc ici bien moindre que dans les manivelles précédentes.

§ 395. *Manivelle triple à double effet ; ses inconvénients.* — On peut faire des calculs analogues pour une manivelle triple dont les bras projetés en AB, AB', AB'', (*fig.* 215), sur un plan perpendiculaire à l'axe A, partagent la circonférence en trois parties égales, et qui soient sollicités par trois forces égales à F, que nous supposerons de suite agir dans un tour entier des manivelles.

Nous allons chercher d'abord quelle est la position des manivelles qui donne le travail élémentaire maximum et le travail élémentaire minimum. Si nous nous rappelons que le travail élémentaire d'une manivelle est toujours représenté par

$$F \times \frac{s}{r} \times AD, \ (fig. 216),$$

AD étant la projection de cette manivelle sur le diamètre horizontal, la somme des trois travaux élémentaires sera

$$F \times \frac{s}{r}(AD + AD' + AD'').$$

La question précédente revient donc à rendre successivement la quantité variable $AD + AD' + AD''$, c'est-à-dire la somme arithmétique des projections des manivelles, la plus grande et la plus petite possible. Nous nous appuierons pour cette recherche sur cette vérité que la somme des projections de plusieurs lignes sur un même axe ne change pas quand on transporte ces lignes dans leur plan, parallèlement à elles-mêmes. Soient donc AB, AB', AB'' les trois manivelles. Traçons l'hexagone régulier inscrit $BbB'b'B''b''$ et le triangle équilatéral inscrit $BB'B''$. Menons par le point A un diamètre quelconque HC, et comme les projections des manivelles sur ce diamètre se superposent, remplaçons la manivelle AB'' par son égale et parallèle $B'b'$ qui se projette en $D'd' = AD''$, de sorte que la ligne continue Dd' est la somme des trois projections. Or, cette somme sera toujours plus petite que le diamètre, tant que les points B et b' ne seront point situés sur cette ligne. Elle deviendra donc la plus grande possible lorsque le point B viendra en H, c'est-à-dire lorsque l'une des manivelles sera horizontale.

Pour trouver la somme la plus petite, menons par le point B une parallèle au diamètre; elle rencontrera la circonférence en I sur le prolongement de $b'd'$, car $BD = b'd'$. D'où il suit que $BI = Dd'$. Mais la corde BI est plus grande que la corde BB' côté du triangle équilatéral, et sera toujours plus grande que cette ligne, car le diamètre aura toujours trois sommets de l'hexagone au-dessus de lui. Donc la limite inférieure de la valeur de BI ou de Dd' est BB'. Lorsque la coïncidence de ces deux lignes a lieu, la limite inférieure est atteinte, et l'une des manivelles est verticale. En résumé, les limites supérieure et inférieure du travail élémentaire ont donc lieu lorsque l'une des manivelles est horizontale et verticale, et leurs valeurs sont proportionnelles, l'une au diamètre et l'autre au côté du triangle équilatéral. La valeur de ce dernier est $r\sqrt{3}$. Le travail élémentaire maximum est donc

$$F \times \frac{s}{r} . 2r = 2Fs,$$

et le travail élémentaire minimum est

$$F \times \frac{s}{r} \times r\sqrt{3} = F.s.\sqrt{3}.$$

Nous trouverons comme précédemment le bras de levier moyen de la manivelle en écrivant l'égalité

$$3F.4r = 3F.2\pi x; \text{ d'où l'on tire } x = \frac{2r}{\pi} = 0{,}637.r.$$

Le travail élémentaire moyen aura donc pour valeur

$$3F.0,637.s.$$

Comparant alors les valeurs des travaux élémentaires maximum et minimum avec ce travail moyen, nous aurons les dispositions suivantes :

max.	*moy.*	*min.*
$2F.s$	$3.F.0{,}637.s$	$F.s.\sqrt{3}$;

ou bien, en divisant par le travail moyen pour exprimer les autres en fonction de ce travail pris pour unité, toutes réductions et calculs faits, nous trouvons que ces trois travaux élémentaires sont proportionnels au nombre :

max.	*moy.*	*min.*
1,045	1	0,906.

d'où l'on peut voir que les écarts des travaux extrêmes hors du travail moyen sont ici très petits, et que l'action est ainsi rendue très-régulière. Mais ces manivelles, (*fig.* 217), sont inexécutables par la difficulté de maintenir en ligne droite les appuis d'un arbre quand il y en a plus de deux. (Et il en faut quatre au moins pour les manivelles triples enarbrées à un seul axe). Toutefois voici comment on a cherché à éviter ce dernier inconvénient. L'arbre des manivelles se compose de deux parties $c\,d$ et $a\,b$, (*fig.* 218), dont la première porte deux manivelles et l'autre une troisième, de manière que les projections de ces manivelles sur un même plan perpendiculaire à l'axe partagent la circonférence en trois parties égales. Un autre arbre $A\,B$ parallèle aux deux parties précédentes reçoit le mouvement du moteur, et le transmet au moyen des deux roues égales C et C' qui engrènent chacune dans deux autres roues D et D' aussi égales entre elles et montées respectivement sur les deux parties $a\,b$ et $c\,d$ de l'arbre de la manivelle triple. Il est évident que les roues C et C' recevront des vitesses égales, et que si, dans le principe, les trois bras de manivelle sont à angles égaux, les choses se passeront comme pour une manivelle triple ordinaire.

THÉORIE ET ÉTABLISSEMENT DES VOLANTS.

§ 396. *Forme ordinaire des volants.* — Il n'est pas toujours possible de régulariser le travail d'un moteur ou d'une résistance par l'emploi des manivelles doubles ou triples, et quand on est réduit à se servir d'une manivelle simple, on a vu, § 390 et 391, que les variations du travail élémentaire ne laissaient pas que d'être assez sensibles. Il en est de même dans toutes les circonstances où tantôt le mouvement alternatif a lieu, tantôt la puissance ou la résistance, ou toutes deux à la fois agissent par intermittences. Le moyen le plus général de satisfaire à la condition de la régularité du travail, est sans contredit le *volant*. Il se compose ordinairement d'un anneau en fonte à section rectangulaire, relié à l'axe au moyen de bras de même matière ou de bois, qui s'assemble sur un noyau ou *moyeu* commun, monté sur la partie carrée de cet axe. Quelquefois aussi on se contente de placer à l'extrémité des bras, des masses métalliques auxquelles on donne, quand elles sont isolées, une forme lenticulaire, dans la vue de diminuer la résistance de l'air, mais ce dernier moyen doit être proscrit à cause des dangers qu'il présente. Nous avons vu, § 307, que pour calculer la force vive d'un volant, il fallait multiplier son poids P par le carré de la vitesse V d'un point de sa circonférence moyenne, et diviser le produit par la gravité. L'expression de la force vive d'un volant est donc

$$\frac{PV^2}{g} \text{ ou } \frac{PV_1{}^2R^2}{g}$$

en désignant par V_1 la vitesse angulaire et se rappelant, § 23, que la vitesse d'un point qui tourne autour d'un axe est égale au produit de la vitesse angulaire par la distance de ce point à l'axe de rotation.

§ 397. *Trouver le poids d'un volant nécessaire pour régulariser l'action d'une manivelle à simple effet.* — Nous commencerons par l'établissement du volant dans le cas le plus fréquent qui se rencontre pour les machines, c'est-à-dire dans le cas d'une manivelle dont le bras AB (*fig.* 219), sollicité de haut en bas par la force F agissant sur une bielle verticale pendant le premier demi-tour EBG, fait tourner l'arbre A ainsi qu'une roue (M) dont la réaction en N en fait mouvoir une autre destinée à vaincre l'effet utile. Appelons Q la résistance de haut en bas que cette dernière roue oppose et qui sera mesurable en poids sans être cependant pour nous un poids véritable à soulever. Dans ce calcul nous ne tiendrons aucun compte de l'inertie de la roue (*M*), parce que son diamètre est peu de chose par rapport à celui du volant dont la grande masse est toujours rejetée le plus loin possible de l'axe de rotation, afin qu'il puisse acquérir une grande force vive. Cela posé, considérons le système à un certain état de mouvement, et observons que, d'après ce qui a été dit, § 390, le travail élémentaire de la puissance *F* sur la bielle est variable; que ce travail croît de *E* en *C*, décroît de *C* en *G* où il devient zéro, et qu'enfin il est nul pendant toute la demi-révolution ascendante *GHE*. Quant au travail élémentaire de *Q*, comme cette résistance est constante, et qu'elle demeure tangente à la circonférence de la roue (*M*), il est nécessairement constant.

Tant que le travail élémentaire de la puissance *F* l'emporte sur celui de *Q*, la vitesse s'accélère; mais elle ne saurait s'accélérer indéfiniment, parce que le travail élémentaire de la puissance finit par diminuer, et qu'il arrivera un moment où il sera devenu égal à celui de la résistance. A cet instant la vitesse aura acquis sa plus grande valeur, ou sera parvenue à son maximum. Le travail élémentaire de la puissance décroissant encore, deviendra moindre que celui de la résistance, et de cette nouvelle égalité contraire à la première, résultera un ralentissement tel que la vitesse diminuera de plus en plus. Mais comme le travail de la puissance ne peut décroître indéfiniment, et qu'il arrive un instant ou il croît de nouveau, on voit que tant qu'il demeure inférieur à celui de la résistance, le ralentissement se continue, mais de moins en moins jusqu'à l'instant où le travail élémentaire de la puissance est devenu égal à celui de la résistance. A ce moment la vitesse a cessé de décroître; mais elle est parvenue à son minimum, car au-delà le travail de la puissance l'emporte de plus en plus sur celui de la résistance; la vitesse augmente alors, et arrive enfin de nouveau à son maximum.

Si maintenant nous supposons sur l'arbre A un volant capable d'une grande force vive, et qu'on se reporte aux deux époques où la vitesse du système est la plus grande et la plus petite, il est évident que la force vive du volant se sera aussi, à ces mêmes époques, accrue ou diminuée, et l'on sait, § 297, que l'accroissement ou la diminution de la force vive de ce volant devra être égale au double de la différence absolue entre le travail dépensé par la puissance et le travail absorbé par la résistance, pendant l'intervalle des deux époques correspondantes au maximum et au minimum de vitesse. Cette relation à établir n'offre aucune difficulté, puisque nous savons calculer les quantités de travail des diverses forces.

Examinons maintenant quel est l'effet du volant. Sa force vive est

$$\frac{P}{g} V^2 \text{ ou } \frac{P}{g} . V_1{}^2 R^2,$$

R étant son rayon moyen et V_1 sa vitesse angulaire, laquelle est proportionnelle au nombre de tours du volant dans un temps déterminé. Nous reconnaissons déjà que pour un même nombre de tours, la force vive du volant croît proportionnellement à son poids, et au carré de son rayon, c'est-à-dire que, pour le même rayon, la force vive serait double, triple, etc., si le poids du volant était double, triple, etc., et que, pour le même poids, lorsque le rayon est double, triple, etc., la force vive est quatre fois, neuf fois, etc., plus grande. D'où il suit que la force vive s'accroît surtout par l'augmentation du rayon. Si nous nous reportons vers les instants où la machine s'accélère, la force vive qu'absorbe le volant est toujours égale au double du travail de la puissance diminué de celui de la résistance, et en supposant que toutes les circonstances de ce travail soient les mêmes, n'est-il pas évident que la vitesse angulaire s'accroîtra d'autant moins que le poids et le rayon du volant seront rendus plus considérables? il y a donc lieu de régler le poids et les dimensions d'un volant de telle façon que sa vitesse angulaire ne dépasse pas une certaine limite, ou pour qu'elle varie seulement de $\frac{1}{n}$ en plus ou en moins. Telle est aussi la marche que nous suivrons dans l'exemple de la manivelle à simple effet. Nous admettons que dans la résistance Q on ait compris celle du frottement, c'est-à-dire que ce frottement déterminé à l'avance par le calcul, sera multiplié par le rapport du rayon du tourillon de la roue (M) au rayon AN, et que ce produit sera ajouté à la résistance variable de l'autre roue. Cette somme sera pour nous ce que nous entendrons désormais par Q.

La première condition à remplir, c'est qu'au bout de chaque révolution, le travail total de la puissance F soit égal à celui de la résistance Q. Car si le premier était plus grand, la vitesse s'accroîtrait de révolution en révolution, et la machine serait mal réglée. Or nous avons vu, § 390, que le travail de F pendant la première demi-révolution FCG est $F \times EG$, ou $F \times 2r$; et comme la puissance ne travaille point pendant l'autre demi-révolution ascendante GHE, il est évident que le produit $F.2r$ représente encore le travail de la puissance pendant une révolution complète. D'ailleurs, le travail de la résistance Q qui ne cesse d'agir pendant toute la durée d'une révolution tangentiellement à la roue (M) dont on représente le rayon par R, ce travail aura pour valeur $2\pi R.Q$; ainsi, en vertu de notre première condition énoncée, on aura

$$F.2r = 2\pi R.Q,$$

et par suite

$$Q = \frac{Fr}{\pi R} \dots\dots (1).$$

Telle est la valeur de la résistance pour que le mouvement puisse se maintenir.

Cherchons actuellement les positions de la manivelle pour lesquelles la vitesse du volant devient la plus grande et la plus petite. A cet effet, nous nous rappellerons que le travail élémentaire de la puissance F en un point quelconque B a été trouvé, § 390, égal à

$$F \times \frac{s}{r} \times AD.$$

Supposons que le bouton de la manivelle soit en E, et que celle-ci tourne de gauche à droite. Il est évident qu'en cette position le travail élémentaire de la puissance est nul, quoique la résistance agisse toujours; toutefois la manivelle tourne, et si la puissance n'agit pas encore avec prépondérance, son travail élémentaire augmente : ainsi la vitesse ne cessera de décroître jusqu'à ce que le bouton soit parvenu dans un point B où le travail élémentaire de la puissance sera devenu égal à celui de la résistance. Mais pendant que le bouton parcourt le petit arc bB que nous avons nommé s, le point d'application de la résistance Q parcourt sur la circonférence de la roue (M) un arc lL semblable à bB et tel qu'on a

$$lL : bB \text{ ou } s :: R : r, \text{ ou bien } lL = \frac{R}{r} \times s.$$

Le point B où les deux travaux élémentaires sont égaux est d'ailleurs celui où la vitesse du volant cesse de décroître, et il sera déterminé par cette relation due à l'égalité des travaux élémentaires de la puissance et de la résistance :

$$F \times \frac{s}{r} \times AD = Q . lL;$$

cette relation se réduit en définitive à

$$F \times AD = QR.$$

Mettons à la place de Q sa valeur donnée (1), on trouve encore

$$F . AD = \frac{Fr}{\pi R} . R \text{ ou } AD = \frac{r}{\pi} = 0,318\, r.$$

Telle est la valeur de AD, c'est-à-dire de la distance au centre A du pied de la perpendiculaire abaissée du point cherché B sur le rayon horizontal AC. Cette distance est, comme on le voit, le tiers environ du rayon de la manivelle. Lorsqu'ensuite le bouton quitte le point B, le travail élémentaire de la puissance l'emporte sur celui de la résistance, et la vitesse s'accélère jusqu'à ce que de nouveau ces deux travaux élémentaires soient devenus égaux ; alors la vitesse du volant a acquis son maximum. Ce point doit être évidemment au-dessous du rayon horizontal AE, parce que sur ce rayon le travail élémentaire de la puissance est le plus grand possible, et qu'il a dû décroître pour redevenir égal à celui de la résistance. Du reste, la position B' de la manivelle pour laquelle la vitesse du volant est un maximum, s'obtient par le même calcul que tout à l'heure, et elle est déterminée par la valeur AD encore égale à $0,318.r$; ce qui prouve que les points B et B' pour lesquels la vitesse du volant est un minimum et un maximum, sont sur une même corde BB' perpendiculaire au rayon horizontal AC, et dont la distance au centre est $0,318.r$. Au-delà du point B', le travail élémentaire de la puissance est plus petit que celui de la résistance, il reste même nul pendant toute la demi-révolution ascendante, de sorte que la vitesse décroît et reprend son premier minimum quand le bouton est parvenu en E. En un mot, l'action de la puissance variant de la même manière à chaque révolution, les vitesses redeviennent les mêmes, quand le bouton arrive aux mêmes positions.

Pour calculer le poids du volant, nous considérerons ce qui se passe dans l'intervalle de la position B à la position B'. Désignons par V la vitesse maximum du volant comptée sur son rayon moyen, et qui a lieu quand le volant est en B'.

$$\frac{P}{g} \times V^2$$

sera la force vive du volant pour cette position de la manivelle, de même

$$\frac{P}{g} \times V'^2$$

sera la force vive du volant à l'instant de la position B de la manivelle, V' représentant la vitesse minimum de ce volant. Ainsi

$$\frac{P}{g} \times V^2 - \frac{P}{g} \times V'^2 \text{ ou } \frac{P}{g}(V^2 - V'^2)$$

exprime l'accroissement de force vive qu'aura absorbée le volant pendant l'intervalle des positions B et B' de la manivelle. Le travail de la puissance F pendant ce même intervalle sera $F \times$ corde BB'. D'ailleurs on a corde

$$BB' = 2\,BD, \text{et } BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{r^2 - (0,318\,r)^2} = 0,948.r.$$

$$\text{D'où } BB' = 2 \times 0,948.r = 1,896.r.$$

Le travail $F \times$ corde BB' deviendra donc $1,896.r.F$. Si nous voulons avoir le travail de la résistance Q pendant l'intervalle dont il s'agit, on remarquera que ce travail n'est autre chose que le produit de Q par l'arc que son point d'application décrit pendant que ce bouton parcourt l'arc BB', ou que ce travail sera égal à

$$Q \times \text{arc } BB' \times \frac{R}{r}.$$

La valeur de l'arc BB' se déduira de celle de l'angle A dont la moitié sera aisée à déterminer dans le triangle ABD où l'on a

$$BD = r \sin. \tfrac{1}{2} BAB' \text{ et } \sin. \tfrac{1}{2} BAB' = \frac{BD}{r}.$$

Il existe d'ailleurs des tables donnant la valeur des arcs correspondants à leurs cordes; et comme $BB' = 1,896.r$, on trouve par l'un ou l'autre de ces procédés :

$$\text{Arc } BB' = 2,4938.r.$$

Par conséquent le travail cherché de la résistance deviendra

$$Q \times 2,4938.r \times \frac{R}{r} = Q \times 2,4938 \times R.$$

Remplaçant, dans cette expression, Q par sa valeur donnée par la condition première, et qui est $\frac{F\,r}{\pi R}$, on trouve que le travail résistant équivaut à

$\frac{F r'}{\pi R} \times 2{,}4938. R$ ou à $F \times \frac{2{,}4938. r}{\pi}$ ou enfin à $0{,}7938.\ F. r.$

L'excès du travail de la puissance sur la résistance en passant de la position B à la position B' est donc $r.\ F\ (1{,}896 = 0{,}7938)$, c'est-à-dire $1{,}102.\ r.\ F$, dont le double $2{,}204.\ r.\ F$ équivaut à l'accroissement de la force vive du volant ou à

$$\frac{P}{g}\left(V^2 - V'^2\right).$$

On aura donc en définitive cette égalité :

$$\frac{P}{g}\left(V^2 - V'^2\right) = 2{,}204.\ r.\ F \ldots (2).$$

Nommons v la vitesse moyenne du volant, c'est-à-dire celle qui correspond au régime voulu pour le système. Si le poids de ce volant doit être tel que sa vitesse ne croisse ni ne décroisse de plus de $\frac{1}{n}$ de la moyenne, il est évident que les vitesses maximum et minimum du volant seront représentées l'une par $v + \frac{v}{n}$ et l'autre par $v - \frac{v}{n}$, de sorte qu'on aura

$$V = v + \frac{v}{n} \text{ et } V' = v - \frac{v}{n}.$$

Ajoutant et soustrayant successivement ces deux équations membre à membre, nous aurons

$$V + V' = 2\,v, \text{ et } V - V' = \frac{2\,v}{n}.$$

Multipliant enfin ces deux dernières égalités membre à membre, il vient

$$V^2 - V'^2 = \frac{4\,v^2}{n}.$$

Substituons cette dernière expression dans la relation (2) du volant, nous trouverons

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{4\,v^2}{n} = 2{,}204.\ r.\ F \text{ et par suite } P = \frac{g.\ n.\ 2{,}204.\ r.\ F}{4\,v^2}.$$

Cette équation fait donc connaître le poids du volant, car la valeur de r est donnée par le nombre de tours qu'il doit faire dans un temps déterminé et par le rayon de son anneau.

On peut parvenir à mettre l'expression de P sous une autre forme et la définir par le nombre des chevaux de force qui constitue le travail des moteurs et par le nombre de tours que doit faire le récepteur dans un temps déterminé, dans une minute par exemple. Si nous appelons en effet m ce dernier nombre, $2\,m.\,r.\,F$ sera le travail du moteur dans une minute, et

$$\frac{2\,m.r.F}{60} \text{ ou } \frac{m.r.F}{30}$$

ce même travail pendant une seconde. Désignant par N le nombre de chevaux-vapeur contenu dans le moteur, dont chacun représente 75 kilogrammètres pendant une seconde, on aura

$$\frac{m.r.F}{30} = 75 \times N, \text{ d'où } rF = \frac{30.75.N}{m} = \frac{2250.N}{m}.$$

Après avoir remplacé $r\ F$ par cette nouvelle valeur dans l'expression de P, on trouve :

$$P = \frac{2{,}204.\ g\,n.\ 2250.\,N}{4\,m\,v^2},$$

ou en effectuant toutes les réductions :

$$P = \frac{12162}{m\,v^2}.\ n.\ N \ldots\ldots (3).$$

Ainsi que nous l'avons dit, le nombre m est relatif à la bielle à laquelle la puissance est appliquée, et non au volant, si ce dernier était, comme cela arrive quelquefois, monté sur un arbre différent de l'axe de la puissance. Il n'y a que le nombre n qui soit arbitraire. A la vérité plus n sera grand, moins sera considérable la variation de la vitesse, et si l'on veut que la vitesse ne varie que de très-peu, ce ne pourra être qu'à l'aide de très grandes valeurs données au poids P du volant. Si $n = 1000$, ou si la vitesse varie seulement de $\frac{1}{1000}$ en plus ou moins, le poids P sera 10 fois plus considérable que quand $n = 100$. Or, les volants coûtent cher, et une augmentation de leur poids produit sur leurs appuis des pressions d'où résultent des frottements capables d'absorber à eux seuls plus de la moitié du travail du moteur. Par exemple, un volant de 20000 kil. éprouvera sur son tourillon un frottement de 2000 kil., en supposant le rapport du frottement à la pression égal à $\frac{1}{10}$. Que ce volant fasse 30 révolutions par minute ou une demi-révolution par seconde, et que son tourillon ait 20 centimètres de diamètre, c'est-à-dire $0^m,60$ environ de circonférence, le travail absorbé par le frottement du volant pendant une seconde équivaudra à

$$2000^k \times \frac{0,60}{2} \text{ ou à } 600^{k.m.}$$

qui correspondent à 8 chevaux-vapeur. Ce frottement absorberait donc à lui seul le travail de 8 chevaux. On ne peut donc arbitrairement choisir le nombre n, et sa détermination dépend de la comparaison qu'il faut faire des avantages et des inconvénients qui y sont inhérents. Au reste, cela dépend du but qu'on veut remplir. Si des machines doivent marcher avec beaucoup de régularité, on fera $n = 30$ ou 40, et l'on réduira ce nombre à 20 quand les machines ne doivent avoir qu'une régularité médiocre. On portera ce nombre jusqu'à 100 ou 120 pour les filatures destinées à filer les numéros très fins.

§ 398. *Trouver le poids d'un volant nécessaire pour régulariser l'action d'une manivelle à double effet.* — Lorsque la manivelle est à double effet, le calcul du volant est analogue, si ce n'est qu'ici le travail de la puissance dans une révolution s'élève à $4\ r.\ F$. Par conséquent, pour que ce travail fût égal à celui de la résistance au bout d'une même révolution, on poserait

$$4\,r.F = 2\,\pi\,R.Q,\ \text{d'où}\ Q = \frac{2\,r.F}{\pi\,R}.$$

Pour avoir les positions de la manivelle pour lesquelles la vitesse est un maximum et un minimum, il faudrait écrire

$$F.\frac{s}{r}.AD = Q.\frac{s}{r}.R = \frac{2\,r.F}{\pi\,R}.\frac{s}{r}.R.\ \text{D'où}\ AD = \frac{2}{\pi}.r = 0{,}637.r.$$

Calculant enfin la corde qui joint, dans une même demi-révolution, la position où une vitesse minimum a lieu à celle qui correspond à une vitesse maximum, ainsi que l'arc sous-tendu par cette corde, on trouve

$$BB' = 1{,}5416.r\ \text{et arc}\ BB' - 1{,}7602.r.$$

On pourra donc trouver, comme précédemment, la différence du travail de la puissance sur la résistance pendant l'intervalle d'une vitesse minimum à une vitesse maximum. Si l'on égale le double de cette différence à l'accroissement de la force vive que le volant a absorbée, on aura

$$\frac{P}{g}(V^2 - V'^2) = 0{,}842.F.r.$$

Si enfin on fait attention que le travail de la puissance pendant une seconde est représenté ici par

$$\frac{4\,r.F.m}{60},$$

on aura, tout calcul fait, pour trouver le poids du volant, la formule :

$$P = \frac{2323.n.N.}{m\,v^2}\ \ldots.\ (4).$$

Maintenant, si l'on compare cette expression à celle qui est relative à la manivelle à simple effet, tout s'y trouve semblable, à l'exception du facteur numérique qui est cinq fois plus considérable pour la manivelle à simple effet que pour la manivelle à double effet. Donc, à vitesse égale, la première exige un volant cinq fois plus grand. Cette conclusion démontre tout l'avantage qu'il y a à régulariser, autant que possible, le mouvement indépendamment de l'emploi du volant.

§ 399. *Trouver les dimensions du volant.* — Les dimensions du volant se déduiront de son poids, car si l'on nomme l la largeur du volant et e son épaisseur, quantités qu'on peut choisir arbitrairement, on trouvera le rayon moyen en se rappelant que l'aire d'une couronne est égale à la circonférence moyenne multipliée par la largeur. Le volume du volant sera alors $2\pi R.l. \times$ son épaisseur ou sa hauteur e, ou enfin $2\pi R.l.e.$ En multipliant par la densité de la fonte D, on aura le poids. Ainsi

$$P = 2\pi R.l.e.D; \text{ d'où } R = \frac{P}{2\pi.l.e D}.$$

N'oublions pas que P étant évalué en kil., l et e devront être évalués en décimètres, et R sera également obtenu en décimètres. En effectuant le produit de 2 fois π ou 2 fois 3,14159 par la densité D de la fonte qui est 7,2, on trouve 45,239, et comme P, l et e doivent être exprimés en décimètres, si l'on veut les faire représenter des mètres, il faudra multiplier par $10 \times 10 \times 10$ ou 1000, ce qui donne enfin

$$P = 45239.l.e.R$$

l, R, e exprimant des mètres et P des kilogrammes, d'où

$$R = \frac{P}{45239.l.e}.$$

Pour simplifier la question de l'établissement du volant, nous avons supposé jusqu'à présent qu'il se réduisait à une couronne. Au poids précédemment déterminé, il faudra donc ajouter le poids des bras pour avoir le poids total, ce qui diminuera encore le nombre n. On donne ordinairement aux volants 8 bras de 60 à 70 kil. chacun, de sorte que le poids total du volant devra être augmenté de 480 à 560^k.

§ 400. *Sur le calcul d'autres volants.* — L'exemple précédent de la manivelle pour lequel nous avons déterminé les dimensions du volant et qui se rapporte aux machines à vapeur, cesse d'être applicable dans une infinité de circonstances. Tout à l'heure la résistance était supposée constante et continue, et la direction de la puissance variait à chaque instant par rapport au bras de la manivelle. Or, il arrive souvent que l'action du moteur demeure constante, et que c'est la résistance qui varie, soit parce que l'outil, comme la scie, est doué d'un mouvement alternatif, soit parce que la direction de la résistance change continuellement, soit encore parce que la résistance éprouve des intermittences. Les calculs sont alors différents les uns des autres pour la détermination du volant nécessaire à la régularisation du mouvement. Il conviendra toujours d'étudier comment les choses se passent dans une révolution ou plutôt dans une période complète, et de rechercher les deux positions d'équilibre, ou celles pour lesquelles le travail élémentaire de la puissance et celui de la résistance sont égaux, parce que ces deux positions correspondent à l'instant où la vitesse est devenue un maximum et un minimum. Si en outre on calcule les quantités de travail dépensées par la puissance et absorbées par la résistance pendant l'intervalle de ces positions, et qu'on égale le double de leur différence absolue à l'augmentation ou la diminution de force vive du volant, cette relation, traitée comme on l'a fait, avec la condition que les plus grandes et plus petites vitesses ne dépassent pas de certaines limites, conduira à l'estimation convenable des dimensions du volant. Mais comme ces calculs doivent être renouvelés autant de fois qu'il y a de cas particuliers, il est impossible d'assigner une règle générale. Nous allons donner quelques exemples qui serviront de guide dans la marche que l'on doit suivre.

§ 401. *Application aux laminoirs.* — Un laminoir consiste dans deux cylindres en fonte tournant chacun sur deux tourillons selon un mouvement convergent du côté où une barre de fer rouge est présentée à leur intervalle, et divergent du côté où cette même barre s'en échappe. Le fer se trouve aplati et allongé par l'effet de ces deux cylindres; mais comme il ne peut être d'une longueur indéfinie, et que la barre, après avoir passé une première fois entre les deux cylindres, doit être replacée au-dessus du cylindre supérieur pour être ramenée à l'ouvrier chargé de la présenter de nouveau, il arrive que le travail du laminage n'est point continu et qu'il éprouve des interruptions. Le moteur continuant à agir pendant la durée de ces intermittences, la vitesse augmente graduellement, et acquiert sa limite supérieure au moment où la barre va être presentée, puis elle diminue parce que le travail élémentaire de la résistance du fer l'emporte sur celui du moteur, et elle se réduit à sa limite inférieure à l'instant où la barre est entièrement sortie du laminoir. La détermination des dimensions du volant est ici fort simple, attendu que la vitesse maximum correspond à l'instant où la barre est présentée, et la vitesse minimum à l'instant où la barre s'est échappée des deux cylindres. Si par l'observation ou par le calcul on pouvait trouver la quantité de travail nécessaire pour faire passer la barre, et qu'on en retranchât celle du moteur dépensée pendant la durée de ce passage, le double de cette différence sera égal à la perte de force vive du volant pendant que sa vitesse descend du maximum au minimum. Nommant donc S la différence absolue de ces deux quantités de travail, parmi lesquelles celle de la résistance du fer est ici la plus grande, V et V' les vitesses maximum et minimum de la circonférence moyenne du volant, P le poids de ce dernier, on aura la relation

$$\frac{P}{g}(V^2-V'^2)=2\,S.$$

Ce volant doit être monté sur l'axe de l'un des cylindres, et comme chacun de ces derniers doit faire environ moyennement 20 tours par minute, on connaîtra la vitesse moyenne v du volant. Si d'ailleurs on se donne pour condition que les vitesses maximum et minimum ne dépassent pas la vitesse de régime ou v de $\frac{v}{n}$ en plus ou en moins, on pourra effectuer le calcul comme pour la manivelle, en faisant $n = 30$ ou 40. On se donnera en outre pour première condition que le travail du moteur dépensé pendant une période complète ou pendant l'intervalle où une barre est présentée deux fois, soit égal au travail de la résistance consommé par la barre augmenté de celui des frottements.

C'est par de telles considérations que M. A. Morin a pu établir la formule pratique qu'il donne pour la détermination des volants appliqués aux laminoirs pour les grandes tôles et l'étirage des fers en barres. Cette formule est

$$P = \frac{130000\,NK}{mV^2},$$

dans laquelle N est le nombre de chevaux de l'arbre du volant, m le nombre de tours des cylindres en 1', V la vitesse moyenne du volant, et K un coëfficient numérique, égal à 20 pour les machines de 80 à 100 chevaux faisant marcher à la fois 6 à 8 équipages de cylindre à tôle, ou pour le fer en barres; égal à 25 pour les machines de 60 chevaux, faisant marcher 4 à 6 équipages de cylindres pour l'étirage des fers; égal à 80, pour les machines de 30 à 40 chevaux, ne faisant marcher à la fois qu'un seul équipage de cylindres à grosses tôles, ou deux équipages de cylindres ébaucheurs et finisseurs pour les petits fers.

§ 402. *Application aux scieries.* — Le volant d'une scierie exige des considérations qui ne ressemblent plus à celles du laminoir. On sait que le mouvement vertical de va et vient est transmis au châssis de la scie par l'intermédiaire d'une bielle, au moyen d'une manivelle enarbrée à un axe qui reçoit son mouvement de la puissance. Dans ce travail la scie ne mord qu'en descendant, et elle remonte à vide. Ainsi le bouton de la manivelle, dans la demi-révolution ascendante, est chargé du poids de la bielle et du châssis, en descendant au contraire, le bouton favorise l'action de la puissance, et est poussé de haut en bas par le poids de la bielle et du châssis, diminué de la résistance de la scie contre le bois. Cette dernière qui augmente avec l'épaisseur et la nature du bois sera supposée d'une valeur moyenne, ou telle qu'elle conviendrait pour une pièce de bois de chêne sans nœuds et d'une longueur donnée d'équarrissage. Cela posé, on examinera de point en point, et pour tous les petits arcs élémentaires égaux décrits par ce bouton, comment varie le travail élémentaire de la puissance et celui de la résistance pendant une révolution complète; les positions où ces travaux deviendront égaux seront évidemment celles où les vitesses sont devenues minimum et maximum. Si l'on calcule ensuite la quantité de travail dépensée par la puissance et les résistances pendant l'intervalle du minimum au maximum de vitesse, et qu'on égale le double de cette différence absolue à l'accroissement de force vive du volant, on déduira encore le poids de ce dernier pour que les vitesses demeurent dans des limites assignées.

§ 403. *Application aux filatures.* — Il y a certaines machines dont toutes les pièces sont douées de mouvements continus et dans lesquelles il s'opère des variations qui rendent leur action fort irrégulière : telles sont les filatures dont tous les métiers sont mûs à la fois par un même moteur, et où quelques-uns d'entre eux sont souvent arrêtés momentanément par leurs ouvriers respectifs sans qu'on puisse immédiatement modifier le travail du moteur. Il serait alors difficile de régler le mouvement, si l'on ne voyait par soi-même ce qui se passe dans l'atelier, et si l'on n'observait moyennement le nombre des métiers dont le mouvement est suspendu ainsi que la durée de cette interruption. Supposons, par exemple, que le travail de tous les métiers réunis soit de 24 chevaux, et qu'il soit réduit à 20 quand on suspend trois ou quatre métiers pendant un nombre moyen de secondes représenté par t. Le travail de la résistance ainsi réduit pendant ce temps équivaut à $20 \times 75 \times t^{\text{km}}$; supposons en outre que le travail du moteur qui fait marcher l'établissement soit de 23 chevaux.

L'excès de ce travail sur celui de la résistance réduite par l'interruption des quatre métiers sera de 23 — 20 ou 3 chevaux; cet excès répété pendant t secondes, équivaudra à $3 \times 75 \times t$, et produira au bout de ce temps sur le volant une vitesse V plus grande que la vitesse v correspondant au régime ordinaire de la machine. Donc

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2)$$

sera l'accroissement de force vive du volant, et il sera égal à

$$2 \times 3 \times 75 \times t.$$

On aura donc :

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2) = 2 \times 3 \times 75 \times t.$$

Imaginons qu'on veuille que la vitesse V n'excède pas v de $\frac{1}{n}$, on posera

$$V = v + \frac{v}{n} = \frac{v(1+n)}{n}, \text{ ou } V^2 = \frac{v^2(n+1)^2}{n^2}. \text{ D'où}$$

$$V^2 - v^2 = \frac{v^2(2n+1)}{n^2} \text{ et } \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2(2n+1)}{n^2} = 450\,t.$$

De cette relation, on tire

$$P = \frac{450.t.n^2 g}{v^2\,(2n+1)}.$$

Il sera bon de prendre pour l'excès de la limite

$$\frac{1}{30} \text{ ou } \frac{1}{40}.$$

Quand, au lieu d'un moteur quelconque, la filature est mue par une machine à vapeur, on détermine le volant de cette dernière, indépendamment de la considération des métiers, et en faisant $n = 60$ pour rendre ce volant un peu puissant. Telle est au moins la méthode des Anglais. On pense, au contraire, qu'il vaut mieux d'abord chercher ce premier volant, en faisant $n = 30$, et calculer ensuite un autre volant pour régulariser la machine filante. Si le poids de ce nouveau volant est plus considérable que celui de la machine à vapeur, c'est une preuve que n doit dépasser 30 et qu'il faut l'augmenter; s'il est moindre, c'est une preuve qu'on doit se borner au premier de la machine à vapeur. La régularisation d'action dans les filatures est d'autant plus essentielle que la perfection du travail en dépend.

S'il s'agit d'un moulin mû par une roue hydraulique, il n'y a point à établir de volant, parce que la meule agit symétriquement sur le grain et qu'elle fait elle-même fonction de cette pièce. Mais si le moulin marche au moyen d'une machine à vapeur, celle-ci n'aura pas besoin d'un volant à beaucoup près aussi puissant, et en général ce genre de machine doit être régularisé indépendamment de l'outil, sauf à régulariser ce dernier, si ses intermittences étaient trop fortes.

§ 404. *Application aux marteaux et martinets.* — M. A. Morin donne les formules pratiques suivantes pour la détermination de certains volants, déduites probablement de considérations analogues aux précédentes.

Volant pour un marteau frontal battant de 70 à 80 coups par minute, le poids du marteau étant de 3000 à 4900 kilogrammes.

Poids de l'anneau, $P=\frac{20000}{R^2}$, pour marteaux de 3000 à 3500^k, avec le manche.

Poids de l'anneau, $P=\frac{30000}{R^2}$, pour marteaux de 4000 à 4900^k, avec le manche.

Volant pour un marteau à l'allemande, battant de 100 à 110 coups par minute, le poids du marteau étant de 600 à 800 kilogrammes.

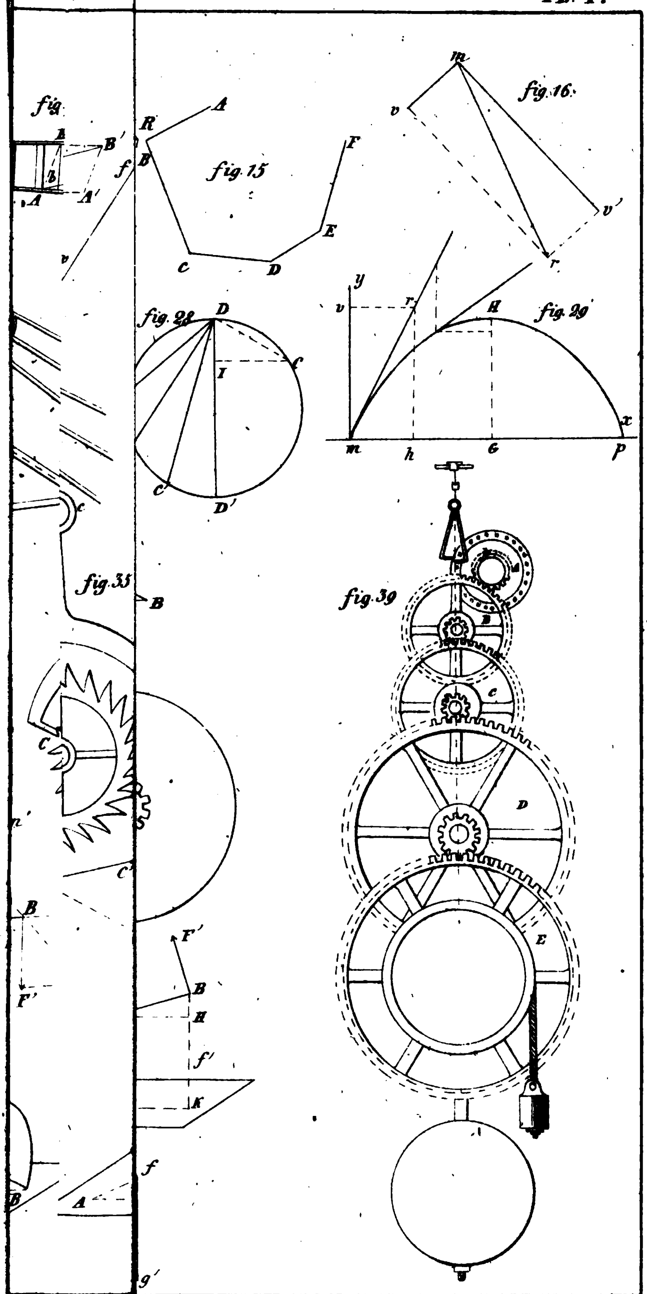
Poids de l'anneau, $P=\frac{15000}{R^2}$.

Volant pour martinet à engrenage, battant de 150 à 200 coups par minute.

$P=\frac{9000}{R^2}$ pour marteaux de 500 kilogrammes.

$P=\frac{6000}{R^2}$, pour marteaux de 360.

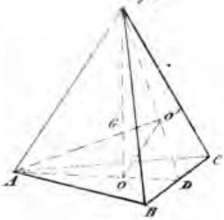
FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

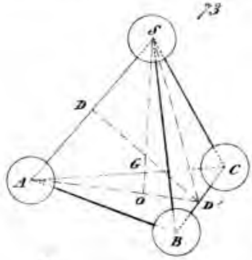


Lith. Cornier et Lachèse, Angers.

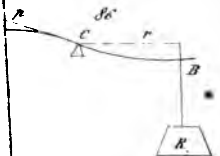
Pl.

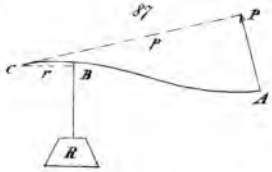
71

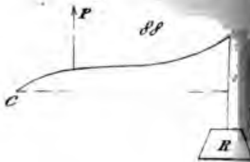

72


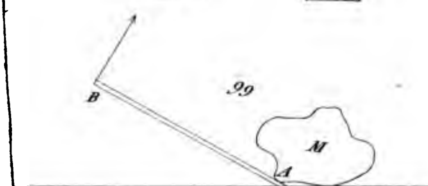
73


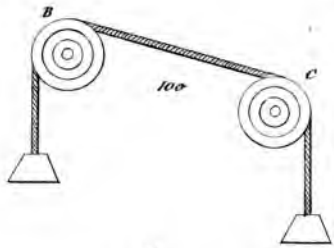
74

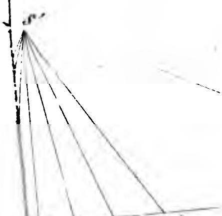

86


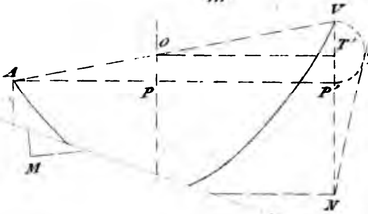
87


88


99


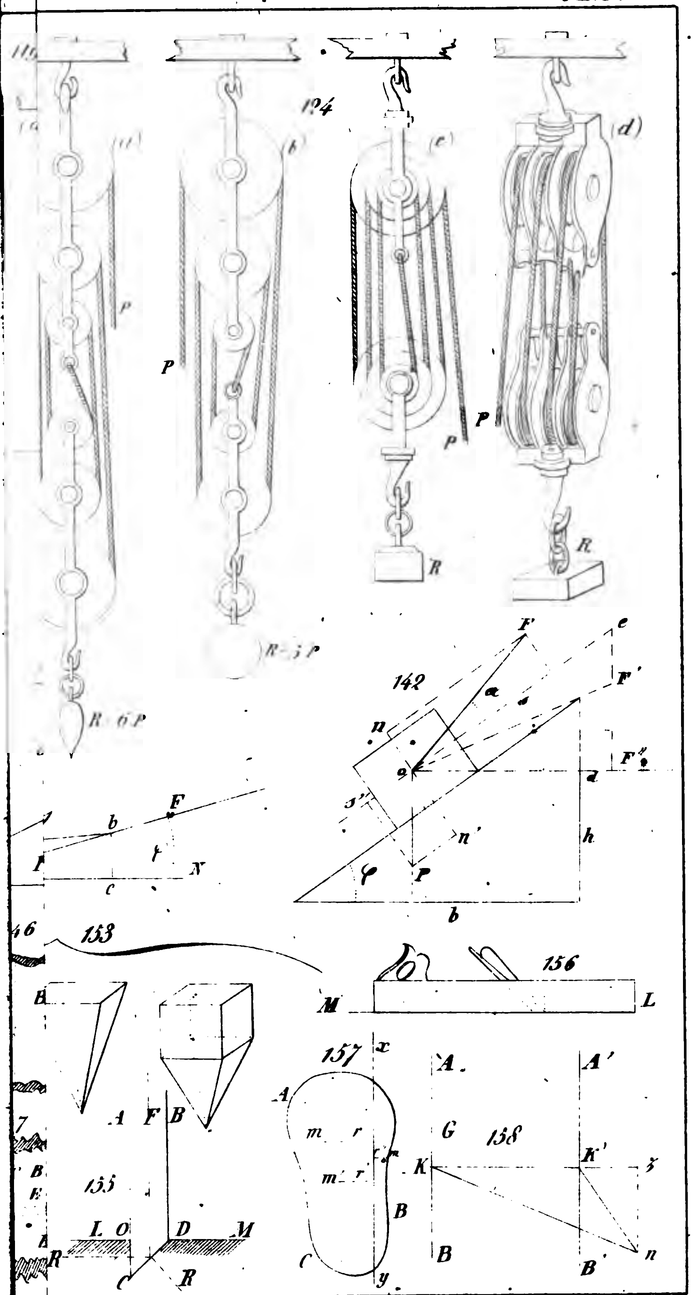
100




111


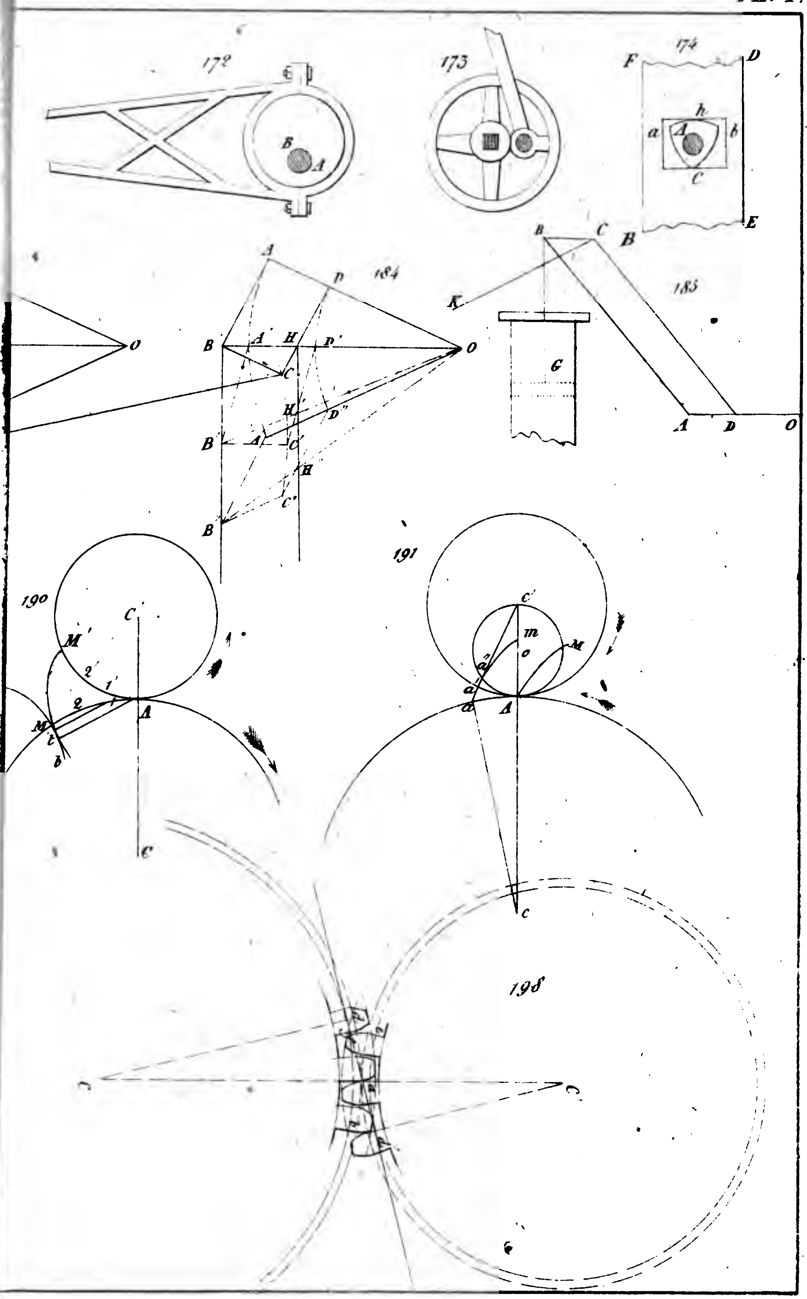
110


Lith. Gerner et Ladure A...



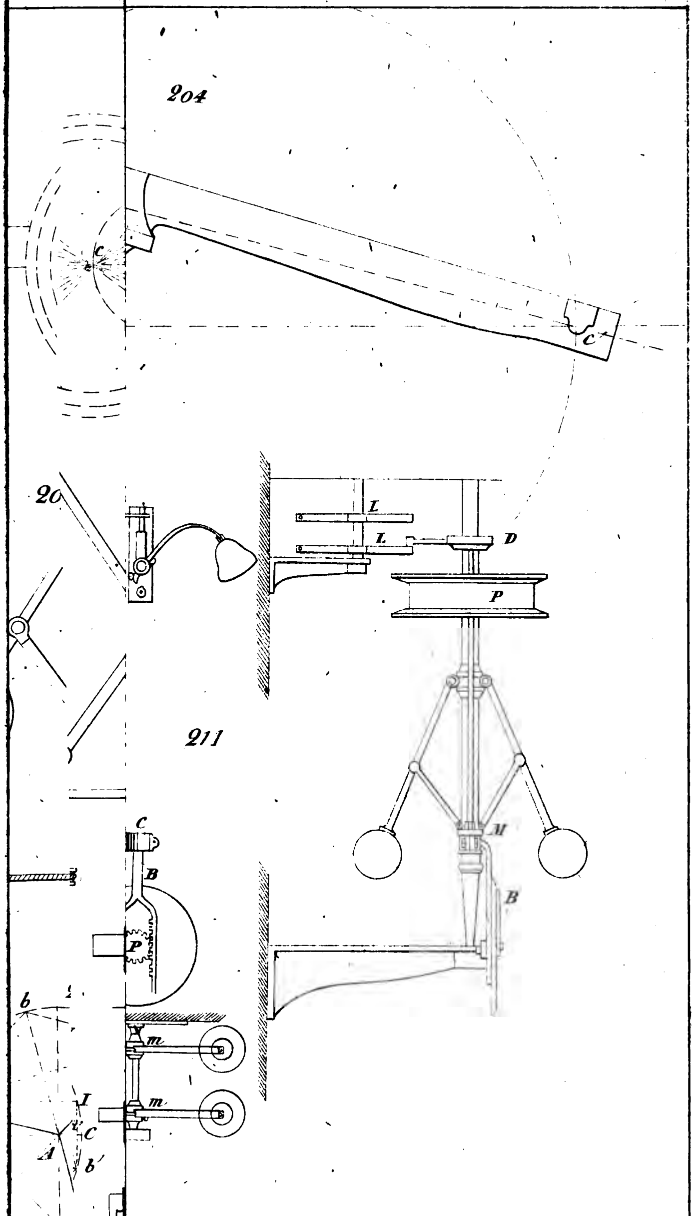
Lith. Cosnier et Lachèse, Angers

PL. 4.



Lith. Cosnier et Lachèse Angers

PL. 5.



Lith. Cosnier et Lachèse, Angers