Sammlung Göschen

Das

Rechnen in der Technik

und seine Hilfsmittel

(Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.)

Von

Joh. Eugen Mayer

Mit 30 Abbildungen

Russell Tracy Crawford

Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen
Einzeldarstellungen

Jede Nummer in eleg. Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Göschen" ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Ein ausführliches Verzeichnis der bisher erschienenen Nummern befindet sich am Schluß dieses Bändchens

Bibliothek zu den Ingenieurwissenschaften

aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden **80 Pfennig.**

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffsbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I: Deutsch-Englisch. Nr. 395.

Dasselbe. II: Englisch-Deutsch. Nr. 396.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Perspektive nebst einem Anhang über Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Oberlehrer an der Baugewerkschule Köln. Mit 88 Abbildungen. Nr. 57.

Schattenkonstruktionen von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Figuren. Nr. 236.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Statik. I: Die Grundlehren der Statik starrer Körper von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 82 Figuren. Nr. 178.

Dasselbe. II: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 56 Figuren. Nr. 288.

Hydraulik von Diplom-Ingenieur W. Hauber. Mit 44 Figuren. Nr. 397.

Technische Wärmelehre (Thermodynamik) von K. Walther und M. Röttinger, Diplom-Ingenieuren. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik der Materialprüfung von K. Memmler, Diplom-Ingenieur. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.

Dasselbe. II: Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Figuren. Nr. 312.

Die Maschinenelemente. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Figuren. Nr. 3.

Die Dampfmaschine. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.

Die Dampfkessel. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.

Wenden!

Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der Königlichen höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit 59 Abbildungen. Nr. 290.

Die Gaskraftmaschinen. Kurzgefaßte Darstellung der wichtigsten Gasmaschinen-Bauarten von Ingenieur Alfred Kirschke. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda in Bremen. Mit 89 Abbildungen. Nr. 274.

Die zweckmäßigste Betriebskraft von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. I: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 14 Abbildungen. Nr. 224.

Dasselbe. II: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbildungen. Nr. 225.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor an der Königlich Technischen Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Figuren. Nr. 196.

Dasselbe. II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Figuren. Nr. 197.

Dasselbe. III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.

Die Gleichstrommaschine von C. Kinzbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Figuren. Nr. 257.

Das Fernsprechwesen von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.

Die elektrische Telegraphie von Dr. Ludwig Rellstab. Mit 19 Figuren. Nr. 172.

Eisenkonstruktionen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch mit Beispielen von Ingenieur Karl Schindler. Mit 115 Figuren. Nr. 322.

Der Eisenbetonbau von Regierungsbaumeister Karl Rößle. Mit 75 Abbildungen. Nr. 349.

Das Veranschlagen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlages von Emil Beutinger, Architekt B.D.A., Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 16 Figuren. Nr. 385.

Bauführung von Emil Beutinger, Architekt B D.A., Assistent an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 20 Figuren. Nr. 399.

Heizung und Lüftung von Ingenieur Johannes Körting. I: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.

Dasselbe. II: Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Figuren. Nr. 343.

Öffentliche Bade- und Schwimmanstalten von Dr. Carl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Figuren. Nr. 380.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, diplomierter Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Figuren und 4 Tafeln. Nr. 152.

Dasselbe. II: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Sammlung Göschen

Das Rechnen in der Technik

und seine Hilfsmittel

Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.

Von

Joh. Eugen Mayer

Ingenieur

Mit 30 Abbildungen

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1908

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Kapitel I. **Der logarithmische Rechenschieber.**
§ 1. Allgemeines. Geschichtliches 5
§ 2. Beschreibung des gewöhnlichen Rechenschiebers 11
§ 3. Das Rechnen mit dem gewöhnlichen Rechenschieber 18
§ 4. Genauigkeit der Rechenschieberrechnung 31
§ 5. Spezielle Rechenschieber 34
§ 6. Kreisrechenschieber 42

Kapitel II. **Numerische Tafeln.**
A) Genaues Rechnen.
§ 1. Produktentafeln 44
§ 2. Tafeln der Viertelquadrate 53
B) Genähertes Rechnen.
Logarithmentafeln 64

Kapitel III. **Rechenmaschinen** 67
§ 1. Geschichtliches 67
§ 2. Hauptteile einer Rechenmaschine 74
§ 3. Die Thomassche Rechenmaschine 77
§ 4. Einige moderne Rechenmaschinen 79
§ 5. Multiplikationsmaschine von Steiger-Egli 83

Kapitel IV. **Grundoperationen des graphischen Rechnens** 87
A) Gleichmäßig geteilter Maßstab.
§ 1. Graphische Addition 87
§ 2. Graphische Subtraktion 91
§ 3. Graphische Addition und Subtraktion von Brüchen 91
§ 4. Graphische Multiplikation 93
§ 5. Graphische Division 96
§ 6. Graphisches Potenzieren 97
§ 7. Graphisches Radizieren 100
B) Logarithmischer Maßstab 101

Kapitel V. **Graphisch-mechanische Flächenbestimmung** 103

Kapitel VI. **Graphische Darstellung von Funktionen und graphische Tafeln.**
§ 1. Funktionsskalen. Rechentafeln mit vereinigten Skalen 107
§ 2. Graphische Darstellung der Funktion $y=f(x)$. Graphische Tafeln mit Koordinatennetz 111
§ 3. Graphische Darstellung von Funktionen mit zwei unabhängigen Variabeln 113
§ 4. Kartesische Rechentafeln 115
§ 5. Kollineare Rechentafeln 124
§ 6. Graphische Lösung numerischer Gleichungen . . 124

Literaturverzeichnis.

Biermann, Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden (Braunschweig 1905).

Blater, Jos., Tafel der Viertelquadrate (Wien 1887).

Brauer, E. A., Springende Logarithmen (Karlsruhe 1901).

Cremona, Elemente des graphischen Kalkuls (Leipzig 1875).

Dingler, Polytechnisches Journal, Bd. 300.

v. Dyck, Katalog math. und math.-phys. Modelle, Apparate und Instrumente (München 1892).

—, Nachtrag hierzu (München 1893).

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, 2.

Esersky, Ausgeführte Multiplikationen und Divisionen (Leipzig 1874).

Hammer, Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch (1898, 3. Aufl. 1904).

Herrmann, Das graphische Einmaleins (Braunschweig 1875).

Jordan, Handbuch der Vermessungskunde (II. Band, 1904).

Lüroth, Numerisches Rechnen (Leipzig 1900).

Mayer, Mechanisches Rechnen des Ingenieurs (Hannover 1907).

d'Ocagne, Calculs usuels effectués en moyen des Abaques (Paris 1891).

Ott, Das graphische Rechnen (Prag 1879).

Schilling, Über die Nomographie von M. d'Ocagne (Leipzig 1900).

Tichy, Graphische Logarithmentafeln (Wien 1897).

Vogler, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln (Berlin 1877).

Zeitschrift für Vermessungswesen (Jahrg. jeweils im Text).

Zimmermann, H., Rechentafel (Berlin 1907).

Zivilingenieur (Bd. 35, 1889).

Kapitel I.

Der logarithmische Rechenschieber.

§ 1. Allgemeines. Geschichtliches.

Der Rechenschieber oder Rechenstab ist ein Instrument zur mechanischen Ausführung kleinerer numerischer Rechnungen; er gibt die Resultate im allgemeinen angenähert, womit jedoch nicht gesagt ist, daß er zu genauen Rechnungen überhaupt unbrauchbar ist.

In der Technik sind weitaus die meisten Rechnungen angenäherte; fast stets ist ein oder der andere Faktor durch einen Versuchs- oder Erfahrungswert gegeben, also durch einen Zahlenwert, der auf streng mathematische Genauigkeit keinen Anspruch erhebt. Hat man beispielshalber in einer Wärme-Transmissionsberechnung die Wärmemenge zu berechnen, die durch eine Außenmauer von gegebenen Abmessungen verloren geht, so wird, selbst wenn man einen mathematisch genau ermittelten Inhalt der Mauerfläche zugibt, doch stets der sogenannte Transmissionskoeffizient einen Näherungswert — von Material und Dicke der Mauer abhängig — darstellen; das Resultat wird also immer mehr oder weniger, mathematisch genommen, ungenau sein.

Gerade aber weil in der Technik solche angenäherte Rechnungen überaus häufig sind und weil zu deren Ausführung der Rechenschieber sich in hervorragendem Maße eignet, hat er für den Techniker eine große Bedeutung erlangt. Wie wichtig es ist, daß der angehende Techniker sich mit dem Rechenschieber vertraut macht, dürfte am besten aus den Worten hervorgehen, die der Direktor einer großen Maschinenfabrik an den Ingenieur und Schriftsteller Häder richtete. Er schrieb: „Sicherheit im Rechnen mit dem Rechenschieber und Gewandtheit in Benützung von Tabellen muß bei uns jeder über 18 Jahre alte technische Beamte besitzen, andernfalls sofortige Entlassung.“

Um die Einrichtung eines Rechenschiebers zu verstehen, ist es nötig, zuerst die logarithmische Skala kennen zu lernen. Aus der Logarithmentafel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\log 1 &= 0{,}00\,000\\
\log 2 &= 0{,}30\,103\\
\log 3 &= 0{,}47\,712\\
\log 4 &= 0{,}60\,206\\
\log 5 &= 0{,}69\,897\\
\log 6 &= 0{,}77\,815\\
\log 7 &= 0{,}84\,510\\
\log 8 &= 0{,}90\,309\\
\log 9 &= 0{,}95\,424\\
\log 10 &= 1{,}00\,000\,.
\end{aligned}$$

Tragen wir nun auf einer Geraden (Papier- oder Kartonstreifen) Strecken ab, so zwar, daß die einzelnen Teilstrecken 1—2, 1—3, 1—4, 1—5 usf. den Logarithmen der Zahlen 2, 3, 4, 5 usf. proportional sind, daß mit anderen Worten

$$\begin{aligned}
(1-2):(1-3):(1-4):(1-5)\ \text{usf.}\\
= \log 2 : \log 3 : \log 4 : \log 5\ \text{usf.},
\end{aligned}$$

so heißt die auf diese Weise geteilte Gerade eine logarithmische Skala. Schreiben wir nun an die einzelnen Teilpunkte nicht die Logarithmen dieser Zahlen, sondern die Zahlen selbst, so ergibt sich nach den Regeln der Logarithmenrechnung folgendes. Um ein Produkt $a \cdot b$ zu bilden, habe ich offenbar zu der Strecke 1—a, d. h. zu der Strecke, deren Länge proportional dem Logarithmus der Zahl a ist, die Strecke 1—b zu addieren. Nehme ich also die Strecke 1—b in den Zirkel, setze die eine Spitze im Teilpunkt a ein, so steht die andere Spitze über dem Logarithmus des Produktes. Da aber nicht die Logarithmen, sondern die Numeri angeschrieben sind, so läßt sich das Produkt selbst direkt ablesen. Nehme ich z. B. die Länge der ganzen Skala von 1—10 zu 250 mm an, so ergeben sich:

Strecke	1— 2	= 250 · 0,30 103	=	75,26	mm
„	1— 3	= 250 · 0,47 712	=	119,28	„
„	1— 4	= 250 · 0,60 206	=	150,52	„
„	1— 5	= 250 · 0,69 897	=	174,74	„
„	1— 6	= 250 · 0,77 815	=	194,54	„
„	1— 7	= 250 · 0,84 510	=	211,28	„
„	1— 8	= 250 · 0,90 309	=	225,78	„
„	1— 9	= 250 · 0,95 424	=	238,56	„
„	1—10	= 250 · 1,00 000	=	250,00	„

Wollte ich also z. B. mittels dieser Skala $2 \cdot 3$ rechnen, so hätte ich die Strecke 119,28 in den Zirkel zu nehmen und am Ende der Strecke 75,26 einzusetzen; die andere Zirkelspitze steht dann über

$$75{,}26 + 119{,}28 = 194{,}54 = \log(2 \cdot 3).$$

An diesem Teilpunkt steht aber der Numerus von $(2 \cdot 3)$, nämlich 6, so daß man das Produkt also direkt ablesen kann.

Zum praktischen Rechnen ist diese Skala in dieser Form noch nicht brauchbar. Vor allem muß die Teilung noch weiter geführt werden, und zwar führt man diese so weit, daß man zwischen zwei benachbarte Teilstriche bequem weitere Teile hineinschätzen kann. Die nächsten Teilstriche werden sein: 1,1; 1,2 usw. Man erhält für die Strecken:

$$
\begin{array}{ll}
1\text{—}1{,}1: & 250 \cdot 0{,}04\,139 = 10{,}34 \text{ mm} \\
1\text{—}1{,}2: & 250 \cdot 0{,}07\,918 = 19{,}80 \quad \text{,,} \\
1\text{—}1{,}3: & 250 \cdot 0{,}11\,394 = 28{,}48 \quad \text{,,} \\
\ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots
\end{array}
$$

usf.

Hat man diese Teilungen durchgeführt, so wird man auch die Teilpunkte 1,11; 1,12 usw. einrechnen und eintragen. So wird man fortfahren, bis die Teilung eng genug ist, um bequem weitere Teile nach Augenmaß hineinzuschätzen, weit genug, um noch eine bequeme Ablesung zu ermöglichen.

Ferner leuchtet ein, daß, wenn man die ganze Strecke 1—10 an dem Endpunkt 10 nochmals ansetzt mitsamt der Teilung, diese zweite Hälfte dann den Numeri 10—100 entspricht; denn es ist:

$$
\begin{aligned}
\log 1 &= 0{,}00\,000 \\
\log 10 &= 1{,}00\,000 \\
\log 100 &= 2{,}00\,000\,.
\end{aligned}
$$

Die Strecke von 10—100 umfaßt also ebenfalls eine Einheitsstrecke wie die Strecke 1—10. An den Teilstrich von 2 ist jetzt 20 zu setzen, denn es ist:

$$\log 20 = \log 2 \cdot 10 = \log 10 + \log 2 = 1 + \log 2\,.$$

Es steht also der Teilstrich von 20 ebenso weit vom Endstrich 10 ab, als der Teilstrich 2 vom Anfangsstrich 1. Bringt man an den Endstrich dieser zweiten logarithmischen Einheitsstrecke noch eine dritte Einheitsstrecke mit ihren Teilungen an, so enthält diese offenbar die Zahlen von 100 bis 1000 usf.

Wählt man die Länge der Einheitsstrecke nicht 250 mm, sondern etwa nur 125 mm oder aber 360 mm, so sind obige Zahlen mit dem Proportionalitätsfaktor 125 bzw. 360 zu multiplizieren.

Außerdem aber leuchtet sofort ein, daß bei einer solchen Skala, die man nach ihrem Erfinder, dem englischen Geodäten und Astronomen Edmond Gunter (1620), eine Gunterskala nennt, die Charakteristik der Logarithmen gar nicht in Betracht kommt, sondern lediglich die Mantisse. Es ist also vollständig gleichgültig, ob ich die Teilstriche auf der zweiten Einheitsstrecke mit 20, 30, 40 usf. oder mit 2, 3, 4 usf. bezeichne. Der Teilstrich 3 irgend einer Teilstrecke kann also ebenso 0—3, wie 3, wie 3—0, wie 3—0—0 usw. gelesen werden. Man gewöhne sich also gleich von vornherein daran, auf einer solchen Skala, deren selbständige Aufzeichnung dem Schüler dringend empfohlen wird, die Zahlen nur in ihrer Ziffernfolge abzulesen; das Komma wird nachher entweder durch Überschlagen oder durch später zu besprechende Regeln festgelegt.

Diese Gunterskala wurde auf vielen Recheninstrumenten des 17. und 18. Jahrhunderts verwendet. Sie erforderte aber immer die Anwendung eines Zirkels zur mechanischen Ausführung der für Multiplikation und Division notwendigen Addition und Subtraktion, was als umständlich bezeichnet werden muß. Es war also eine äußerst fruchtbare Idee, als der Mathematiker E. Wingate 1627 den Vorschlag machte, den Zirkel dadurch überflüssig zu machen, daß man zwei genau miteinander übereinstimmende Gunterskalen so anordnet, daß sie aneinander verschoben werden können. Hierdurch ist man in der Lage, die zur Multiplikation notwendige Addition einfach durch Verschieben der einen Skala an der andern mechanisch zu bewerkstelligen. Mit der Zeit wurden dann am Rechenschieber — ein Name, den man ihm jetzt schon beilegen kann — weitere Verbesserungen, insbesondere vom Engländer Seth Partridge (1657), angebracht, bis er seine heutige Gestalt erhielt. Eine äußerst wichtige Vervollständigung war die Anbringung des sogenannten Läufers (courseur) durch den damaligen Artillerieleutnant Mannheim in Metz. Durch ihn ist man in der angenehmen Lage, auch zusammengesetzte Multiplikationen und Divisionen ohne Zwischenablesung auszuführen.

Der Rechenschieber in seiner heutigen Gestalt stammt aus Paris. In den letzten Jahrzehnten aber wurde dieser Fabrikation auch in Deutschland größere Aufmerksamkeit geschenkt, und wir haben einige Fabriken mit ganz hervorragenden Erzeugnissen. Bei fast allen deutschen Fabrikaten wird die Teilung nicht mehr auf das Holz aufgetragen, sondern auf weiße Zelluloidstreifen, die dann auf dem Holze befestigt werden. Diese Neuerung wurde von dem mathematisch-mechanischen Institut Dennert und Pape in Altona eingeführt.

Im folgenden wird nun der Leser zuerst mit dem gewöhnlichen Rechenschieber bekannt gemacht, indem ihm die Teilungen desselben eingehend erläutert werden; sodann wird entwickelt, wie die verschiedenen Rechenoperationen mittels des Rechenschiebers auszuführen sind. Hierauf werden verschiedene Spezialrechenschieber, soweit sie für den Techniker in Betracht kommen, erwähnt, um dann noch auf Rechenscheiben oder Kreisrechenschieber kurz zu sprechen zu kommen.

Originalrechenschieber in bester Ausführung liefern in Deutschland hauptsächlich A. W. Faber in Stein bei Nürnberg und Dennert und Pape in Altona.

Die Rechenschieber werden in verschiedenen Längen geliefert; die verbreitetste ist die von 27 cm, weil hierbei meist genügende Genauigkeit bei bequemer Form erreicht wird. Wir werden diese Länge bei der Beschreibung des gewöhnlichen Rechenschiebers zugrunde legen. Verfasser benutzt seit langer Zeit für die Bureauarbeiten einen Rechenschieber von 38 cm Länge, ohne daß dieser ihm je unhandlich vorkam, wobei er den Vorteil größerer Genauigkeit bietet. Die Preise der Rechenschieber richten sich nach Länge und Material; bei 27 cm Länge in Mahagoni- oder Buchsbaumholz und Zelluloidstreifen kostet ein Schieber durchschnittlich 10 M.

§ 2. Beschreibung des gewöhnlichen Rechenschiebers.

Der gewöhnliche Rechenschieber (siehe Abb. 1) besteht aus dem Lineal oder dem Stabe, dem in einer

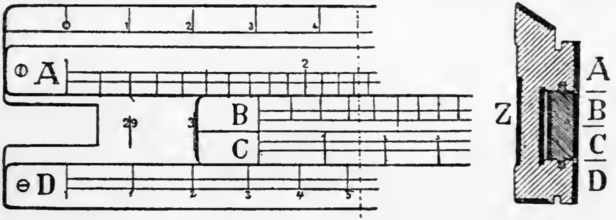


Abb. 1.

Nut verschiebbaren Teile, gewöhnlich Schieber oder Zunge genannt, und dem für viele Fälle notwendigen

Läufer. Stab und Zunge bestehen meist aus Holz, besonders aus Mahagoni- oder Buchsbaumholz; ab und zu auch aus Elfenbein oder aus Neusilber. Die Teilungen sind durch Teilmaschinen in feinen, meist schwarzen Strichen auf Zelluloidstreifen aufgetragen; die Firma Faber wählt bei ihren neuen Erzeugnissen eine schöne blaue Farbe, die besonders wohltuend auf die Augen wirkt. Der Läufer ist heute fast allgemein ein in Metallrahmen gefaßtes Glasblättchen, dessen Unterfläche sich unmittelbar über den Teilungen von Stab und Zunge bewegt und einen sogenannten Indexstrich in Form einer schwarzen Linie trägt.

Die Teilung A auf der oberen Hälfte der Staboberfläche ist eine logarithmische Teilung genau von der oben beschriebenen Einrichtung. Die Längeneinheit beträgt 125 mm, d. h. die Entfernung von 1—1(10) beträgt 125 mm; hieraus ergeben sich für die Strecken:

1—2	eine	Länge	von	125 · 0,30 103 =	37,63	mm
1—3	„	„	„	125 · 0,47 712 =	59,64	„
1—4	„	„	„	125 · 0,60 206 =	75,26	„
1—5	„	„	„	125 · 0,69 897 =	87,37	„
1—6	„	„	„	125 · 0,77 815 =	97,27	„
1—7	„	„	„	125 · 0,84 510 =	105,64	„
1—8	„	„	„	125 · 0,90 309 =	112,89	„
1—9	„	„	„	125 · 0,95 424 =	119,28	„
1—1(10)	„	„	„	125 · 1,00 000 =	125,00	„

Die rechte Hälfte ist genau die Wiederholung der linken und ist häufig auch nur mit 1, 2, 3, ... und nicht mit 10, 20, 30, ... beziffert. Das Komma gibt der Rechenschieber nicht, und es kann z. B. der Strich 3 in der linken Hälfte oder in der rechten die Bedeutungen 0, 03, 0,003, 3, 30, 300 usf. haben. Welche Bedeutung zu nehmen ist, ergibt sich durch Überschlagen oder besondere Regeln.

Die Teilung B auf der oberen Hälfte der Zunge, die sich an der Stabteilung A entlang verschieben läßt, stimmt vollständig mit dieser letzteren überein. Es lassen sich also mittels dieser beiden Skalen logarithmische Strecken addieren und subtrahieren, und zwar lediglich durch mechanisches Verschieben der einen gegen die andere. Die Skalen A und B stellen also die Multiplikations- und Divisionsskalen des Rechenschiebers dar.

Die Teilungen C und D stimmen unter sich genau überein, sind aber von A und B im Maßstab verschieden. C und D sind wie A und B logarithmische Skalen, haben aber den doppelten Maßstab wie A und B. Genau dieselben Strecken, welche die beiden gleichen Hälften von A und B einnehmen, nimmt bei C und D die einfache Teilung ein. Genau über 2, 3, ... der D-Teilung befinden sich 4, 9, ... der A-Teilung. Die Skala A ist die Quadratteilung im Vergleich mit D, oder D ist die Quadratwurzelskala im Vergleich mit A. Zur genauen Ablesung bedarf man des Läufers mit seinem Indexstrich. Wie leicht einzusehen, bilden aber auch C und D für sich wieder Multiplikations- und Divisionsskalen.

Jede Skala hat außer den erwähnten Hauptteilungen noch ihre Unterteilungen, und zwar wird die Unterteilung so weit getrieben, daß man zwischen zwei benachbarte Striche hinein bequem noch Zehntel schätzen kann; bei scharf gezogenen Strichen ist dies der Fall, wenn die Entfernung zweier benachbarter Striche nicht größer als $1-1^1/_4$ mm und nicht kleiner als $^1/_2$ mm ist. Zwischen die Hauptstriche 1 und 2 der Skalen A und B wird man also jedenfalls die Striche für 1,1; 1,2; 1,3; ...; 1,9 ziehen. Man findet als Entfernungen vom Anfangspunkt 1 der Skalen A und B folgende Strecken:

1—1,1	. . . $125 \cdot 0{,}04\,139 =$	5,17	mm
1—1,2	. . . $125 \cdot 0{,}07\,918 =$	9,90	„
1—1,3	. . . $125 \cdot 0{,}11\,394 =$	14,24	„
. . . .	. . . .	. . .	. .
. . . .	. . . .	. . .	. .
1—1,9	. . . $125 \cdot 0{,}27\,875 =$	34,84	„
1—2,0	. . . $125 \cdot 0{,}30\,103 =$	37,63	„ .

Der Abstand der Striche 1 und 1,1 am Anfang der Skala A beträgt also noch rund 5,2 mm, die Entfernung der Striche 1,9 und 2 noch 2,8 mm. Man wird also in der Unterteilung noch weiter gehen, und man hat noch Teilstriche eingezeichnet für

$$1{,}02;\ 1{,}04,\ 1{,}06,\ \ldots,\ 1{,}92,\ 1{,}94;\ 1{,}96;\ 1{,}98\,.$$

Die Entfernungen dieser Teilstriche vom Anfangspunkte sind ganz ebenso berechnet, wie oben angegeben. Von dem Hauptstrich 2 an würden die Striche für das Intervall 0,02 rasch zu eng aneinander zu stehen kommen, man hat daher zwischen 2 und 5 nur noch das Intervall 0,05 gewählt, man hat also Striche für 2,05 ; 2,10 ; 2,15 usf. Von 5—10 würden die Teilstriche auch für dieses Intervall zu eng aneinanderkommen, und man hat hier nur noch ein Intervall von 0,1, also Striche für 5,1 ; 5,2 ; 5,3 usf. Genau nach demselben Prinzip sind die Unterteilungen der Skalen C und D vorgenommen. Man hat:

zwischen	1	und	2	das	Intervall	0,01
„	2	„	4	„	„	0,02
„	4	„	10	„	„	0,05 .

Die Bezifferung der Striche auf den vier Skalen ist der Übersichtlichkeit halber mit möglichst wenig Zahlen bewerkstelligt. Auf A und B stehen meist nur die Zahlen 1, 2, 3, ..., 9, 1 bei den Hauptstrichen, ebenso auf C und D von 2 ab; zwischen 1 und 2 der Skalen C und D stehen noch die kleineren Ziffern 1, 2, 3, ..., 9, die als 1—1, 1—2, 1—3 usf. zu lesen sind. In der linken Hälfte der A- und B-Teilung ist bei $\pi = 3{,}142$ und in der rechten Hälfte bei $\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$ ein Strich. Diese Striche erleichtern die Kreis- und Kugelrechnung.

Die Rückseite der Zunge enthält drei weitere Teilungen. Die mittlere Teilung ist eine vollständig gleichförmige, die in zehn Hauptteile, beziffert mit 1, 2, 3, ..., 8, 9, 10 (10 nicht angeschrieben), eingeteilt ist. Jeder Hauptteil ist, da die ganze Skala 250 mm lang ist, 25 mm lang. Die Striche der Unterteilung sind 0,5 mm voneinander entfernt, so daß jeder Hauptteil in 50 gleiche Teile geteilt ist. Die Striche vom Anfangsstrich 0 aus bedeuten also der Reihe nach 002, 004, 006, 008, 010, 012, 014, ..., 100, 102, 104, ..., 202, 204, 206, ..., 996, 998, 1000. Die Mittelstriche zwischen zwei bezifferten Hauptstrichen, die Fünferstriche, sind durch kleine Haken an den Strichen kenntlich gemacht. Die Teilung ist die sogenannte L-Teilung, sie ist die Gegenteilung zu D. Mit diesen beiden Skalen kann man nämlich zu gegebenen Zahlen die Logarithmen aufsuchen oder zu gegebenen Logarithmen die Numeri, so daß man mit dem Schieber auch in der Lage ist, beliebige Potenzen und Wurzeln auszurechnen, allerdings nicht direkt wie Quadrate und Quadratwurzeln.

Die beiden äußeren Skalen der Rückseite der Zunge, die mit S und T bezeichnet sind, lassen die Sinus und

Tangenten gegebener Winkel bestimmen und sind daher mit Winkelgradzahlen beziffert. Die Einrichtung dieser beiden Skalen ist im allgemeinen folgende: Die Teilung S beginnt links mit dem Anfangsstrich, der $0^0\,34',4$ entspricht ($= \frac{1}{100} \cdot \varrho' = \frac{1}{100} \cdot 3438$); der erste wirkliche Teilstrich ist daher zu lesen: $0^0\,40'$, dann kommt $0^0\,50'$, $1^0\,0'$ (beziffert mit 1), dann $1^0\,10'$, $1^0\,20'$, $1^0\,30'$ (etwas längerer Strich) . . . $2^0\,0'$ (beziffert mit 2), $2^0\,10'$, $2^0\,20'$, . . . , 30^0, 40^0, . . . , 90^0 (Endstrich). Auf der T-Teilung, die gegen S umgekehrt am andern Rande der Zunge liegt, entspricht dem Anfangsstrich ebenfalls die Ablesung $0^0\,34',4$; dann folgen die Teilstriche $0^0\,40'$, $0^0\,50'$ (beide nicht beziffert), $1^0\,0'$ (mit 1 beziffert), $1^0\,10'$, $1^0\,20'$, . . . , 2^0, . . . , 10^0; bis hierher ist das Intervall $10'$, von da bis 20^0 ist es $20'$; von hier bis 45^0 aber $30'$. Der Endstrich der T-Teilung ist als 45^0 zu lesen.

An der abgeschrägten Seitenfläche des Stabes, neben der A-Teilung, befindet sich an der scharfen Kante ein Millimetermaßstab von 250 mm Länge. An der anderen Seitenfläche des Stabes, also neben der D-Teilung, liegt ein weiterer Millimetermaßstab. Dessen Anfangspunkt liegt aber genau an der linken Ecke, am anderen Endpunkt liegt bei einer genauen Länge des Stabes von 270 mm der Teilstrich von Zentimeter 27. Dieser Maßstab setzt sich nun auf dem nach Ausziehen der Zunge nach rechts sichtbar werdenden Grund des Stabes mit 271, 272, . . . mm bis 54 cm fort. In unserer Abb. 1 sind die Zentimeter 28, 29 und 30 auf dem Grund sichtbar, da die Zunge um 3 cm nach rechts herausgezogen wurde.

Auf der Rückseite des Stabes ist ein Blatt aufgeklebt (oder neuerdings auch dem Rechenschieber in Form eines starken Kartonstreifens beigegeben), das je nach der Fachrichtung des Technikers in verschiedenen Ausfertigungen zu haben ist. Das Blatt enthält mathematisch-physikalische und technische Zahlenwerte.

Gegen Krummwerden des Stabes und zur Erreichung eines gleichmäßigen Ganges der Zunge verwenden die verschiedenen Firmen verschiedene Mittel, die ihnen geschützt sind. Um die fortwährenden Veränderungen infolge Witterungswechsels im Gange der Zunge zu beheben, hat z. B. die Firma Dennert und Pape in Altona auf der Unterseite des Hauptkörpers eine leicht federnde Platte angebracht und den Hauptkörper im Grunde in seiner ganzen Länge aufgeschnitten. Ferner ist an der geraden Seite an jedem Ende und in der Mitte des Hauptkörpers eine Justierschraube vorgesehen, welche durch Vor- und

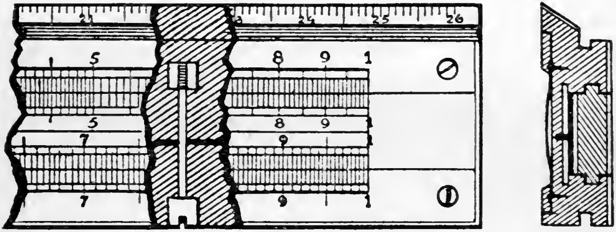


Abb. 2.

Rückwärtsschrauben denselben auseinanderpreßt oder zusammenzieht. Infolge dieser Vervollkommnung ist jeder in der Lage, sich die Beweglichkeit der Zunge nach Wunsch einstellen zu können. Unsere Abb. 2 bringt die Anordnung zur Darstellung. Die Rechenstäbe der Firma A. W. Faber in Stein bei Nürnberg, die durchweg aus Buchsbaumholz hergestellt werden, weisen durch zweckmäßige Behandlung des Holzes vor der Bearbeitung und sachdienliche Federung der Zunge einen außerordentlich gleichmäßigen sanften Gang auf und genügen allen billigen Anforderungen in dieser Richtung.

Wenn man einen Rechenschieber kauft, so bringe man die linke 1 der Zunge mit der linken 1 von A und D zur Deckung und prüfe, ob die rechten Endstriche von A, B, C und D scharf zusammenfallen. Dadurch ist die Teilung meist genügend geprüft, da diese mit Teilmaschinen hergestellt wird; immerhin kommt es vor, daß auch die Teilungen zu wünschen lassen; solche Fabrikate sind als minderwertig zurückzuweisen. Dann prüfe man den Läufer, ob sein Indexstrich genau die Linie der Anfangs- oder Endstriche von A, B, C und D deckt; verbogene Exemplare, zu schwache Federn usw. lehne man ab.

§ 3. Das Rechnen mit dem gewöhnlichen Rechenschieber.

Als Vorübungen stelle der Schüler bestimmte Striche von B auf bestimmte Zahlen von A ein und umgekehrt. Man stelle z. B. den Teilstrich 1 von B auf folgende Zahlen ein:

1,7   14,4   1,86   19,6   265   0,860 .

Alle diese Zahlen sind auf A durch einen Strich bezeichnet, das Komma kommt nicht in Betracht; man gewöhne sich jetzt schon daran, alle Zahlen ohne Komma in ihrer Ziffernfolge zu lesen; also:

1—7 ; 1—4—4 ; 1—8—6 ; 1—9—6 ;
2—6—5 ; 8—6—(0) .

Ferner stelle man ein:

6,98   0,813   79,9   91,1   956 .

Bei diesen Zahlen ist die letzte Stelle einzuschätzen, indem man sich den Zwischenraum zwischen den beiden in Betracht kommenden Teilstrichen in 10 Teile geteilt gedenkt und auf den so vielten gedachten Teilstrich einstellt, als die letzte Stelle angibt. Hat man ferner z. B. einzustellen 19,65114, so kürze man auf 1—9—6—5 und stelle dieses ein. Weitere zahlreiche Beispiele bilde sich der Schüler selbst.

Die Anwendung des Rechenschiebers zur Ausführung von Multiplikationen und Divisionen zweier Zahlen beruht auf den logarithmischen Sätzen:

$$\log a b = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \, .$$

Für die Berechnung des Produktes

$$a \cdot b = P$$

mittels Rechenschiebers gilt die Rechenschieberregel:

Um das Produkt $a \cdot b = P$ zu finden, stelle man den Anfangsstrich der Skala B unter die Zahl a auf der Skala A, suche auf der Skala B die Zahl b, und die Zahl über b auf der Skala A stellt das gesuchte Produkt dar.

Hierbei ist es ganz gleichgültig, ob man in der linken oder rechten Hälfte von A oder B einstellt und abliest.

Beispiel: Man rechne:

$$11{,}2 \cdot 2{,}7 = ?$$

Man stelle den Anfangsstrich von B unter 1—1—2 auf A; suche auf B den Strich für 2—7 und lese darüber auf A ab. Man findet:

$$11{,}2 \cdot 2{,}7 = 30{,}2 \, .$$

Führt man Multiplikationen mittels der Skalen C und D aus, so hat man nach folgender Rechenschieberregel zu verfahren:

Um das Produkt $a \cdot b = P$ mittels der Skalen C und D zu bilden, stelle man den Anfangsstrich, und wenn für diese Stellung die Zahl b rechts außerhalb des Stabes fällt, den Endstrich von C über die Zahl a der Teilung D und suche auf C die Zahl b, und die Zahl unter b auf der Skala B gibt das gesuchte Produkt P an.

Einen schnellen Überblick, ob man den Anfangs- oder den Endstrich von C einzustellen hat, gewinnt man dadurch, daß man die Zahlen auf einstellige abrundet und ihr Produkt bildet; ist dieses Produkt kleiner als 10, so hat man den Anfangsstrich einzustellen, ist es größer als 10, den Endstrich. Muß der Anfangsstrich eingestellt werden, so ist die Ablesung rechts der Einstellung, muß der Endstrich eingestellt werden, so ist die Ablesung links der Einstellung vorzunehmen.

Beispiel: Man rechne:

$$5{,}7 \cdot 3{,}8 = ?$$

Auf einstellige Zahlen abgerundet erhält man:

$$6 \cdot 4 > 10 \,,$$

also ist der Endstrich einzustellen und links der Einstellung abzulesen. Man erhält:

$$5{,}7 \cdot 3{,}8 = 21{,}64 \,.$$

Hat man Produkte zu bilden, in denen ein Faktor konstant bleibt, hat man also Werte der Funktion:

$$y = c \cdot x$$

zu berechnen, so hat man den Anfangsstrich von B, resp.

den Anfangs- oder Endstrich von C stets auf den konstanten Faktor auf A resp. auf D einzustellen und liest mit dieser einzigen Einstellung alle die verlangten Werte ab.

Beispiel: Wieviel Meter sind:

$$11{,}5' \quad 12' \quad 15' \quad 20',$$

wenn $1' = 0{,}3139$ m sind?

Man stelle den Anfangsstrich von C auf 3—1—3—9 auf D und suche auf C die Zahlen 1—1—5, 1—2, 1—5, 2—0 und lese darunter auf D die gesuchten Werte ab. Man findet:

$$11{,}5' = 3{,}61 \text{ m}, \quad 12' = 3{,}765 \text{ m},$$
$$15' = 4{,}71 \text{ m}, \quad 20' = 6{,}28 \text{ m}.$$

Für die Division zweier Zahlen haben wir die Rechenschieberregel:

Einen beliebigen Quotienten a berechnet man, wenn man die Trennungslinien zwischen den Skalen A und B, resp. zwischen D und C als Bruchstrich ansieht, den Bruch herstellt und über dem Anfangsstrich von B auf A oder unter dem Anfangs- oder Endstrich von C den Quotienten auf D abliest.

Beispiel: Man rechne:

$$\frac{4{,}075}{0{,}182} = ?$$

Man stellt 1—8—2 auf der Skala B unter 4—0—7—5 auf der Skala A und lese über dem Anfangsstrich von B auf A ab, oder aber man stelle den Teilstrich 1—8—2 der Skala C über 4—0—7—5 der Skala D und lese unter dem Anfangsstrich von C auf D ab. Man findet:

$$\frac{4{,}075}{0{,}182} = 22{,}4 .$$

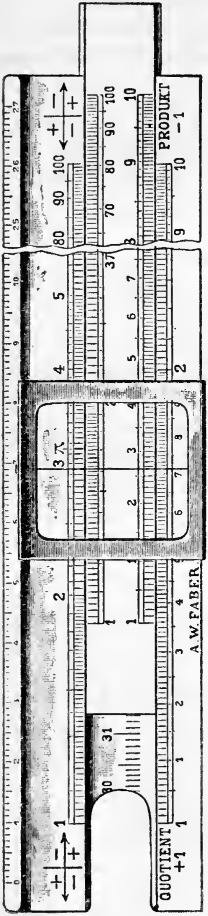


Abb. 3.

Die Bestimmung der **Stellenzahl der Resultate** könnte außer durch Überschlagen auch mit Hilfe der Charakteristik der Logarithmen vorgenommen werden. Wir vermeiden jedoch diesen Umweg und benützen die Stellenzahl der Zahlen selbst. Wir bezeichnen eine Zahl, welche n Stellen **vor** dem Komma hat, als n-stellig und eine Zahl, welche n Nullen **nach** dem Komma hat, als $-n$-stellig. Ist der Faktor a dann m-stellig und der Faktor b n-stellig, so ist die Stellenzahl des Produktes:

$$\underline{P = m + n}$$

oder:

$$\underline{P = m + n - 1\,.}$$

Erfolgt die Ablesung von P links, oder muß der Endstrich eingestellt werden, so gilt die erste Formel; erfolgt aber die Ablesung rechts, dann gilt die zweite Formel. Um hier Verwechslungen vorzubeugen, ist am rechten Ende des Rechenschiebers — siehe unsere Abb. 3, welche die Draufsicht auf einen gewöhnlichen logarithmischen Rechenschieber zeigt — angeschrieben: „Produkt“; dies
−1

besagt also, wenn rechts das Produkt abgelesen wird, dann ist seine Stellenzahl $m + n - 1$. Ist m die Stellenzahl des Zählers a und n die des Nenners b, dann ist die Stellenzahl des Quotienten Q:

$$\underline{Q = m - n}$$

oder:

$$\underline{Q = m - n + 1\,.}$$

Die zweite Formel gilt, wenn Q links abgelesen wird, und es ist deshalb am linken Ende — siehe Abb. 3 — vom Rechenstab angeschrieben: „Quotient“.

+1

Die einfachste Verbindung von Multiplikation und Division bietet die Proportionsrechnung. Sie erfordert die Berechnung von Ausdrücken der Form:

$$y = \frac{a}{b} \cdot x\,.$$

Die Ausrechnung solcher Ausdrücke bildet eigentlich die wichtigste Anwendung des Rechenschiebers.

Beispiel: Eine Straße hat eine Steigung von $4^0/_0$. Welches sind die Höhendifferenzen in einer Entfernung von 10,25; 31,40; 42,75; 62,35; 78,10; 89,50; 92,56 m vom Anfangspunkt der Steigung?

Das Steigungsverhältnis der Straße ist: $\frac{4}{100}$. Man stelle nun den Strich 4 der Teilung C über den Anfangs- oder Endstrich von D, dann stellen die Zahlen auf D die Horizontaldistanzwerte dar, während darüber auf C die gesuchten Werte der Höhendifferenzen stehen. Man findet die Höhendifferenzen:

bei 10,25 m . . . . 0,401 m
„ 31,40 m . . . . 1,256 m

bei 42,75 m	. . . .	1,710 m
„ 62,35 m	. . . .	2,490 m
„ 78,10 m	. . . .	3,125 m
„ 89,50 m	. . . .	3,580 m
„ 92,56 m	. . . .	3,70(3 ?) m .

Hat man Produkte zu berechnen von der Form:

$$P = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \ldots \cdot n\,,$$

so hat man die Multiplikationsregel einfach wiederholt in Anwendung zu bringen. Dabei liest man aber die Zwischenprodukte nicht ab, sondern hält ihre Stelle jeweils mit dem Läufer fest. Kommt man mit einem Faktor über den Schieber rechts hinaus, so stelle man den Läufer auf das zuletzt eingestellte Produkt und bringe von der Teilung *B* die mittlere 1 unter den Läufer und lese dann weiter ab.

Beispiel: Wie groß ist der stündliche Wärmeverlust einer nach Norden gelegenen 64 cm starken Außenmauer aus Backstein von 7 m Länge und 3,8 m Höhe, wenn als Transmissionskoeffizient bei dieser Stärke 0,87 (siehe H. Recknagel, Kalender für Gesundheitstechniker) gesetzt, als Zuschlag für die Himmelsrichtung 15 $^0/_0$ gerechnet werden und ferner die Temperaturdifferenz zu beiden Seiten der Mauer 40 $^0/_0$ betragen soll?

Der gesuchte Wärmeverlust beträgt:

$$(7{,}0 \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}87 \cdot 40 + 7{,}0 \cdot 3{,}8 \cdot 0{,}87 \cdot 40 \cdot 0{,}15) \text{ WE.}$$

Wir erhalten:

$$925 + 138{,}7 = \text{rot. } 1065 \text{ WE.}$$

Beispiel: Man berechne ferner:

$$\frac{7370 \cdot 46{,}8 \cdot 0{,}923}{565 \cdot 87} = ?$$

Man stellt, um einmal mit C und D zu rechnen, das Produkt des Zählers in bekannter Weise auf D ein und hält das Resultat nach Einstellung des letzten Faktors mit dem Läufer fest. Dann stelle man 5—6—5 der Skala C unter den Indexstrich des Läufers und verschiebe den Läufer so, daß er über Anfangs- oder Endstrich von C, in unserem Fall über dem Endstrich von C steht. Darauf stelle man 8—7 auf C unter den Indexstrich des Läufers und lese unter dem Endstrich von C auf D ab. Man erhält:

$$6—4—8\,.$$

Also:

$$\frac{7370 \cdot 46{,}8 \cdot 0{,}923}{565 \cdot 87} = 6{,}48\,.$$

Die Stellenzahl des Resultats erhält man, indem man die algebraische Summe der Stellenzahlen der Nennerfaktoren algebraisch subtrahiert von der algebraischen Summe der Stellenzahlen der Zählerfaktoren, d. h. indem man die Gesamtstellenzahl des Nenners von der Gesamtstellenzahl des Zählers subtrahiert. Zu diesem Ergebnis sind dann noch die während der Rechnung zu vermerkenden $+1$ und -1 bei Division und Multiplikation hinzuzuschlagen, um die richtige Stellenzahl des Resultates zu erhalten. In obigem Beispiel lesen wir im Zähler immer links der Einstellung ab, der Zähler hat also ausgerechnet 6 Stellen. Bei beiden Divisionen erfolgte die Ablesung rechts der Einstellung, also ist:

$$Q = m - n = 6 - 5 = 1\,.$$

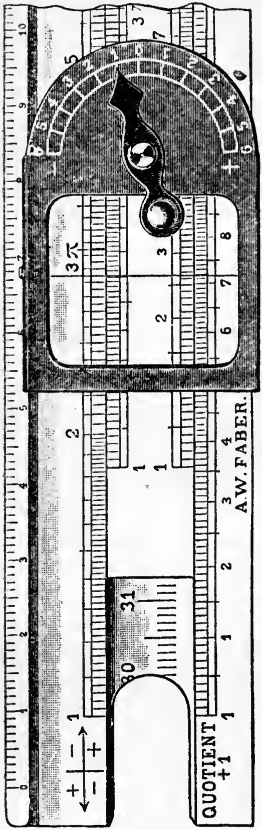


Abb. 4.

Zur Bestimmung der Stellenzahl wurden auch „Rechenstabuhren“ konstruiert; vom Standpunkt des Technikers, der täglich mit dem Rechenschieber rechnen muß, kann ich sagen, daß diese Uhren mehr oder weniger zeitraubende Spielereien sind; zur Markierung der $+1$ oder -1 ist höchstens eine Vorrichtung zu empfehlen, wie sie die Firma A. W. Faber in den Handel bringt und wie sie unsere Abb. 4 zeigt. Meist ist der Techniker über seine Stellenzahl nicht im Zweifel.

Nach den Sätzen der Logarithmenrechnung ist:

$$\underline{\log a^2 = 2 \log a}$$

$$\underline{\log \sqrt{a} = \tfrac{1}{2} \log a\,.}$$

Trägt man also Strecken auf, die den Logarithmen ihrer Maßzahlen proportional sind, so hat man die Strecken für a^2 doppelt so groß zu machen wie die von a, und die von $\sqrt{a}$ halb so groß wie die von a. Hieraus ergibt sich, daß A die Quadrate der Zahlen von D und D die Quadratwurzeln der Zahlen von A enthält.

Will man also auf dem Rechenschieber das

Quadrat einer Zahl a bestimmen, so stelle man den Anfangsstrich von B und C auf die betreffende Zahl a auf D und lese über diesem Anfangsstrich auf A ab, oder man benütze statt dieses Anfangsstriches den Indexstrich des Läufers.

Um $\sqrt{a}$ aufzusuchen, hat man umgekehrt den Teilstrich a der Skala A auf die Skala D zu übertragen und dort abzulesen.

Hierbei ist jedoch zu merken, daß jetzt die beiden Hälften von A nicht mehr gleichwertig sind; die gegebene Zahl ist in der linken Hälfte aufzusuchen, wenn sie zwischen 1 und 10 liegt, in der rechten, wenn sie zwischen 10 und 100 liegt. Ist die gegebene Zahl ein echter Dezimalbruch, so zerlegt man sie vom Komma aus in Gruppen von je zwei Stellen; ist die erste Gruppe, die nicht aus zwei Stellen besteht, kleiner als 10, so ist die Zahl in der linken Hälfte einzustellen, liegt sie aber zwischen 10 und 100, dann ist sie in der rechten Hälfte von A einzustellen. Die Zahlen, die größer als 100 sind, behandelt man ebenso und zwar, wenn kein Komma da ist, von den Einern aus, und wenn ein solches da ist, von diesem aus.

Beispiel: Man berechne:

$$\sqrt{0{,}0851} = ?$$

Man hat links einzustellen, weil die erste Gruppe 08 kleiner ist als 10. Man erhält:

$$\sqrt{0{,}0851} = 0{,}292\ .$$

Auch den Kubus einer Zahl kann man mit dem gewöhnlichen Rechenschieber bestimmen, indem man a^2 bestimmt und noch mit a multipliziert. Dieses Verfahren ist jedoch bereits etwas umständlich, und wer viel mit 3 und $\frac{1}{3}$ Potenzen zu schaffen hat, greift zu einem Rechenschieber, der diese direkt gibt (siehe § 5).

Die mittlere Teilung auf der Rückseite der Zunge, die sogenannte L-Teilung, beginnt rechts mit 0 (nicht angeschrieben) und endet links mit 10 (nicht angeschrieben); die Zwischenziffern sind angeschrieben. Jeder solche Hauptteil ist in 10 Teile und jeder solche Teil nochmals in 5 Teile geteilt; im ganzen sind 500 Teile vorhanden, die eine Strecke von 250 mm einnehmen; die Teile sind also 0,500 mm breit. Die Striche sind von rechts nach links zu lesen: 002, 004, 006, 008, 010, 012 usf. Führt man die Zunge in ihrer gewöhnlichen Lage wieder ein, bringt den Anfangsstrich der Skala C z. B. über 2 der Teilung D, lässt die Zunge in ihrer Lage und wendet den Schieber um, so liest man auf der Rückseite der Zunge an dem unteren Indexstrich im Ausschnitt unter dem Endstrich von D an der L-Teilung den Logarithmus von 2 ab. Man findet:

$$3—0—1$$

Also:

$$\log 2 = 0{,}301\ .$$

Dadurch daß der Rechenschieber also auch die Logarithmen der natürlichen Zahlen gibt, ist man auch imstande, mit ihm die Aufgaben zu lösen:

$$a^n = ?$$

$$\sqrt[n]{a} = ?\ ,$$

allerdings nicht direkt. Bestehen doch zur Lösung die Gleichungen:

$$\log a^n = n \cdot \log a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a\ .$$

Außer der L-Teilung trägt die Rückseite der Zunge noch die Teilungen S und T, vermittels welcher die numerischen Werte der trigonometrischen Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ der angeschriebenen Winkel sich bestimmen lassen. Die S-Teilung korrespondiert mit der Teilung A, d. h. zu den auf der Skala S befindlichen Winkeln gehören die Sinuswerte der Skala A und umgekehrt. Die Teilung T korrespondiert mit der Skala D, d. h. zu den Winkeln auf Teilung T werden die zugehörigen Tangentenwerte auf D abgelesen und umgekehrt. Die Tangentenwerte kleinerer Winkel als $5^0\,40'$ können vermittels der Sinusteilung abgelesen werden, d. h. man setzt für diese Winkel:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sin\alpha\ ,$$

was bei der mit einem Rechenschieber erreichbaren Genauigkeit genügend genau ist. Da die Teilung A zwei logarithmische Einheitsstrecken enthält, so liegen auch die numerischen Werte für die korrespondierenden Sinus der Winkel auf Teilung S in zwei logarithmischen Einheiten. Die Werte der Sinus, welche auf der linksseitigen Teilung von A resp. B abgelesen werden, liegen zwischen 0,01 bis 0,1 und entsprechen den Sinus der Winkel von $34'$ bis $5^0\,44'$. Die Werte, welche auf der rechtsseitigen Teilung von A resp. B abgelesen werden, liegen zwischen 0,1 bis 1,0 und entsprechen den Sinus der Winkel von $5^0\,44'$ bis 90^0. Die Tangentenwerte werden immer auf Teilung D resp. C abgelesen; sie liegen zwischen 0,1 bis 1,0 und entsprechen den Tangenten der Winkel von $5^0\,44'$ bis 45^0. Die trigonometrischen Funktionen $\sin\alpha$ und $\mathrm{tg}\,\alpha$ für kleinere Winkel α als $34'$ sind für Rechenschieberrechnungen mit genügender Genauigkeit durch den arcus des Winkels zu ersetzen. Es ist also für $\alpha < 34'$:

$$\sin\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{arc}\,\alpha\ .$$

Die Konstanten:

$$\frac{360^0}{2\pi}, \qquad \frac{(360 \cdot 60)'}{2\pi}, \qquad \frac{(360 \cdot 60 \cdot 60)''}{2\pi}$$

bezeichnet man bekanntlich mit ϱ^0, ϱ' und ϱ''.

Die Marken

$$\varrho' = 3438'$$
$$\varrho'' = 206\,265''$$

sind. auf den Teilungen C und D vermerkt. Nach neuer Teilung ist:

$$\varrho_{\prime\prime} = \frac{400 \cdot 100 \cdot 100}{2\pi} = 636\,620_{\prime\prime}$$

($\varrho_{\prime\prime}$ gelesen: „ϱ Neusekunden“). Auch diese Marke ist auf C und D angebracht. Ist nun b der zu α gehörige Bogen, so ist:

$$b = \operatorname{arc}\alpha = \frac{1}{\varrho} \cdot \alpha$$
$$\alpha = \varrho \cdot b,$$

also:

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{arc}\alpha = \frac{\alpha}{\varrho}.$$

Für technische Rechnungen ist oft der Umfang und der Inhalt eines Kreises zu berechnen aus dem gegebenen Durchmesser und umgekehrt aus Umfang oder Flächeninhalt der Durchmesser. Hierfür dienen die Marken π, c und die Marken bei der Ziffer 784 auf A und B. Die Marke c entspricht der Zahl:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}128\,.$$

Die Marke bei 784 entspricht der Zahl:

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}784\,.$$

Es ist nun:

$$\underline{U = \pi d}$$

$$\underline{J = \frac{\pi}{4} d^2 = \left(\frac{d}{c}\right)^2}\,.$$

oder

$$\underline{d = \frac{U}{\pi}}$$

$$\underline{d = \sqrt{J \cdot c}\,.}$$

§ 4. Genauigkeit der Rechenschieberrechnung.

Es ist außerordentlich wichtig, daß derjenige, der mit dem Rechenschieber rechnet, sich Aufschluß darüber geben kann, mit welcher Genauigkeit er in den verschiedenen Stadien seiner Übung rechnet. Wir beschränken uns hierbei auf die wichtigsten Anwendungen des Rechenschiebers, auf einfache und zusammengesetzte Multiplikation und Division. Wir nehmen an, daß bei unseren Ablesungen mittlere Genauigkeit angestrebt werde, daß also nicht durch flüchtige Ablesungen einerseits ein Teil der Genauigkeit eingebüßt werde, andrerseits nicht durch äußerst vorsichtiges Einstellen und Ablesen der höchstmögliche Genauigkeitsgrad erreicht werde. Wir legen die Anwendung der Skalen *A* und *B* zugrunde und schließen den Gebrauch einer Lupe aus.

Die Stelle für eine bestimmte gegebene Zahl schätzt man zwischen zwei Teilstriche, die nicht weiter als 1 mm voneinander entfernt sind (wie es für A und B, mit Ausnahme zwischen 2 und 3, der Fall ist), mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{20}$ mm hinein. Hat man nun zu bilden:

$$P = a \cdot b$$

oder

$$Q = \frac{a}{b},$$

so kommt diese Schätzungsgenauigkeit dreimal in Frage, bei Einstellung von a, bei Einstellung von b und bei Ablesung von P oder Q. Ist nun eine beliebige Strecke der Teilung A oder B, z. B. die Strecke 1—2, 1—5 oder 1—10, um $\frac{1}{20}$ mm = 0,05 m zu lang aufgetragen, so daß statt der Strecken:

37,629	87,371	125,000 mm
37,679	87,421	125,050 „

aufgetragen wurden, so hätten richtigerweise an Stelle der Zahlen:

2,0000	5,0000	10,0000

die Zahlen:

2,0019	5,0046	10,0093

zu stehen. Die an den Strichen stehenden Zahlen würden also um rund 0,093% oder um $\frac{1}{1070}$ dieser Zahlen falsch liegen.

In der Ausgleichungsrechnung wird nun gezeigt, daß, wenn $\pm m$ den mittleren Fehler bezeichnet, dem irgend ein Messungsvorgang ausgesetzt ist, der mittlere Fehler eines Ergebnisses, das aus Summierung oder Subtraktion der Einzelergebnisse des n mal ausgeführten Messungsvorganges resultiert:

$$\pm m \cdot \sqrt{n}$$

beträgt. Für die einfache Multiplikation oder Division erhält man daher als mittleren Fehler:

$$\frac{1}{1070} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{620} = 0{,}16\%$$

des Ergebnisses mit Rechenschieberskalen von 125 mm als Einheit der Teilungslänge.

Dieses Ergebnis entspricht der wirklichen Genauigkeit, die man bei mittlerer Geschwindigkeit der Rechnung erzielt.

Eigene Genauigkeitsversuche lassen sich folgendermaßen anstellen: Man rechne eine größere Anzahl von zweigliedrigen Produkten und Quotienten mit dem Rechenschieber aus. Dann rechne man dieselben Produkte und Quotienten so genau, etwa mit einer fünfstelligen Logarithmentafel, daß diese logarithmische Rechnung der Schieberrechnung gegenüber als fehlerfrei gelten kann. Hierauf bilde man die Abweichungen zwischen dem Rechenschieberresultat für die Produkte und Quotienten und deren richtigen Werten, drücke jede dieser Differenzen als Verhältniszahl oder in Prozentform aus und nehme schließlich aus diesen Verhältniszahlen oder Prozentzahlen den quadratischen Mittelwert, d. h. man erhebe diese Zahlen ins Quadrat, addiere sie und dividiere die Summe mit n, wenn n Versuche gemacht worden sind; hierauf ziehe man aus diesem Quotienten die zweite Wurzel, und man hat in dieser Zahl die mittlere Unsicherheit eines mit dem Rechenschieber gerechneten einfachen Produktes oder Quotienten in Bruchform oder als Prozentzahl des Ergebnisses. Bei mehr als zwei Faktoren ist der mittlere Fehler des Produkts, wenn zusammen R Faktoren und Divisoren vorhanden sind:

$$\frac{1}{1070} \cdot \sqrt{R+1} \quad \text{oder} \quad \left(0{,}093 \cdot \sqrt{R+1}\right)\%$$

des Resultats. Bei großer Übung und langsamerem Rechnen lassen sich die Genauigkeitsergebnisse selbstredend bedeutend steigern. Es lassen sich Genauigkeiten von 0,12 %, 0,10 %, selbst 0,08 % oder $\frac{1}{800}$, $\frac{1}{1000}$, ja selbst $\frac{1}{1200}$ des Resultats erzielen. Andrerseits muß sich der weniger Geübte mit schlechteren Resultaten begnügen.

§ 5. Spezielle Rechenschieber.

Es seien im folgenden einige Spezialkonstruktionen von Rechenschiebern erwähnt, soweit solche für den Techniker in Betracht kommen; auf eingehende Beschreibungen können wir uns hier nicht einlassen; ich verweise auf die Anleitungen der betreffenden Firmen.

Ein Rechenschieber, der die dritten Potenzen und dritten Wurzeln, die gebrochenen Potenzen $a^{\frac{2}{3}}$ direkt gibt, ist z. B. der Rechenschieber System Rietz. Dieser Schieber unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Rechenschieber nur dadurch, daß er auf dem Stab zwei weitere Teilungen aufweist. Die eine, die über A, enthält auf der Länge von 250 mm die logarithmische Einheit dreimal abgetragen. Diese Skala enthält also offenbar die dritten Potenzen zu den Zahlen der einfachen Teilung D und die zwei Drittel Potenzen zu den Zahlen der zweifachen Teilung A. Stellen wir also den Läuferstrich auf die Zahl a der Teilung D, so zeigt dieser auf A den Wert a^2 und auf der genannten obersten Teilung a^3. Stellen wir dagegen den Läuferstrich auf die Zahl a auf der Teilung über A, so zeigt der Läuferstrich auf D den Wert $\sqrt[3]{a}$ an und auf A den Wert $\sqrt[3]{a^2}$.

Die zweite weitere Teilung ist die logarithmische Teilung in der bekannten Ausführung. Diese ist direkt unter D angeordnet und bildet mit ihr eine logarithmische Tabelle, d. h. unter den Zahlen auf D stehen ihre Logarithmen auf dieser Teilung (Läufer mit Feder einschieben!).

Der mittlere Fehler beim gewöhnlichen Rechenschieber von 250 mm Teilungslänge beträgt für ein einfaches Produkt etwa $\frac{1}{800}$ bis $\frac{1}{1200}$ des Resultates. Die letztere Genauigkeit ist indes nur bei großer Gewandtheit erreichbar. Für viele Zwecke ist es nun erwünscht, genauere Resultate zu erhalten, z. B. bei Ausgleichungsrechnungen. Diesem Bedürfnis kommen die sogenannten Präzisionsschieber entgegen. Die größere Genauigkeit dieses Schiebers wird dadurch erreicht, daß die logarithmische Einheitsstrecke nicht 12,5 oder 25 cm, sondern 50 cm beträgt; um dem Schieber aber keine unhandliche Form zu geben, ihn durch Ziehen und Werfen nicht zu schädigen, ist die Strecke nicht in einer Länge von 50 cm, sondern in zwei Strecken von je 25 cm Länge abgesetzt. Der Rechenschieber ist somit auch nur 27 cm lang. Alle übrigen Teilungen, auch die auf der Rückseite der Zunge, gründen sich auf diese Teilungslänge; somit erhalten alle Rechnungen mit diesem Schieber einen bedeutend höheren, übereinstimmenden Grad von Genauigkeit. Bei mittlerer Rechnungsgeschwindigkeit und bei Vertrautsein mit dem Schieber läßt sich leicht ein Genauigkeitsgrad von 0,03 % oder $\frac{1}{3380}$ des Resultats erreichen. Hergestellt wird z. B. ein Präzisionsschieber von der Firma A. Nestler in Lahr i. B., deren Anleitung das Weitere besagt.

Exponentialrechenstäbe sind die Rechenstäbe System Perry, System Peter und Marke Wilhelm Schweth. Letzterer wird von der Firma Dennert und Pape in Altona zum Preis von 15 M. geliefert. Nach System Perry enthält der Schieber außer den gewöhnlichen Teilungen noch zwei weitere Teilungen, nennen wir sie O_3 und U_3. Man nennt diese Teilungen die Potenzteilungen. Mit Hilfe dieser Teilungen gestattet der Schieber, mit einer Einstellung der Zunge Potenzen und Wurzeln mit beliebigen ganzen, gebrochenen, positiven und negativen Exponenten zu bestimmen. Doch ist diese einfache Bestimmung nur für Grundzahlen möglich, die nicht über 10^4 und nicht unter 10^{-4} und nicht zwischen 0,95 und 1,1 liegen; für solche Zahlen sind umständliche Operationen nötig.

Die Potenzteilungen sind von folgender Einrichtung. Die einzelnen Teilstrecken sind proportional den Werten $\log\log a$ aufgetragen; die Teilstriche erhalten nicht den Logarithmenwert beigeschrieben, sondern den Numerus. Die Teilung O_3 enthält die Zahlen $a > 1$, die Teilung U_3 die Zahlen $a < 1$. Bei der genannten Anordnung ergibt sich die Eigentümlichkeit, daß die Zahlen von O_3 und U_3, so wie sie übereinanderstehen, reziprok sind. Zum Verständnis des Rechnens mit solchen Schiebern dienen folgende mathematische Beziehungen. Es sei

$$x = a^n ,$$

dann ist:

$$\log x = n \cdot \log a$$

$$\log\log x = \log n + \log\log a$$

$$x = \sqrt[n]{a}$$

und

$$\log\log x = \log\log a - \log n .$$

Addiert oder subtrahiert man also zu irgend einer Strecke $\log\log a$ der Potenzteilung mit Hilfe der Zunge eine beliebige Strecke $\log n$, so stellt der Numerus der Summen- oder Differenzenstrecke auf der entsprechenden Potenzteilung die Potenz a^n oder die Wurzel $\sqrt[n]{a}$ dar.

Der Exponentialrechenschieber von Wilhelm Schweth (Dennert und Pape in Altona) weist folgende Anordnung der Skalen auf. Die beiden Teilungen der Zunge und die hieran anstoßenden beiden Skalen des Stabes stimmen mit den Teilungen des gewöhnlichen Rechenschiebers überein und es wird mit ihnen also gerechnet, wie dort erläutert. Die Potenzteilungen sind am untersten und obersten Stabrande angebracht. Der erste Teil dieser Skala befindet sich am untersten Rande des Stabes und umfaßt die log log einer Reihe von Zahlen, deren größte 10 ist. Da nun log 10 gleich 1 ist, daher log log 1 = Null, so folgt, daß der rechte Endpunkt dieser Skala deren Nullpunkt ist. Die log log der Zahlen unter 10 haben negatives Vorzeichen; denn log einer Zahl unter 10 ist ein echter Dezimalbruch. Infolgedessen ist der log log einer in der untersten Skala stehenden Zahl dem absoluten Wert nach dargestellt durch eine Strecke, welche vom Index dieser Zahl bis zum rechten Endindex reicht. Am linken Endpunkt dieser Teilung ist, weil die Skalenlänge des Rechenschiebers der Einheit entspricht, diejenige Zahl zu notieren, deren $\log\log = (-1)$, oder deren $\log = 0{,}1$ ist. Aus den Tabellen ergibt sich $\text{num} \log 0{,}1 = 1{,}2589\ldots$ Die untere Skala enthält also die log log aller Zahlen zwischen 1,2589 ... und 10. Die Fortsetzung dieser Skala ist am obersten Stabrand angebracht. Sie beginnt mit 10 und hat daher ihren Anfangspunkt am linken Ende der Teilung. Da nun die log log aller Zahlen über 10 positiv sind, so ist der log log einer dort verzeichneten Zahl dargestellt durch die Strecke vom linken Index 10 bis zum Index der betreffenden Zahl. Hier tritt am rechten

Ende der Skala die Zahl auf, deren log log $= +1$, deren log $= 10$ ist, d. i. die Zahl $10^{10} = 10\,000\,000\,000$. Die obere Teilung enthält also die log log aller Zahlen von 10 bis 10^{10}.

Zur Ausführung tachymetrischer Rechnungen kommen sog. Tachymeterrechenstäbe in Anwendung. Die Firma Dennert und Pape in Altona konstruiert einen Tachymeterrechenstab System C. Werner; leider konnte ich kein Musterexemplar hiervon erhalten. Zu den tachymetrischen Rechenstäben gehört ferner der Universalrechenschieber der Maßstabfabrik A. Nestler in Lahr i. B. Der Stab hat vier Teilungen O_1 und O_2, U_1 und U_2, die Zunge 3. Die oberste Teilung O_1 ist eine L-Teilung, O_2 eine gewöhnliche logarithmische Teilung mit den Proportionalitätskonstanten 250. O_1 enthält also die Logarithmen der Zahlen von O_2. Die Teilung U_1 ist gleich O_2, U_2 enthält zwei logarithmische Einheiten, der Proportionalitätsfaktor ist also 125. U_2 enthält also die Quadrate der Zahlen von U_1. Der sich an U_2 anschließende Seitenstreifen enthält 3 log-Einheiten; dieser enthält also die Kuben der Zahlen von U_1. Auf der Zunge befinden sich drei Teilungen, von denen die zwei oberen für tachymetrische Rechnungen dienen, welche mit Hilfe dieser Teilungen und der Teilung O_2 ausgeführt werden. Es sind dies die „tachymetrischen“ oder „topographischen“ Teilungen; sie enthalten „$\sin n \cdot \cos n$“ und „$\cos^2 n$“. Die untere Teilung der Zunge ist gleich O_2 und U_1, dient also zur Multiplikation und Division. Auf der Rückseite der Zunge befinden sich die drei trigonometrischen Teilungen S, S und T, T. Da die trigonometrischen Funktionswerte sin und tg für Winkel von $34'$ bis $5^0\,44'$ nur wenig voneinander abweichen und ihre Werte zwischen 0,01 und 0,1 liegen, also beim Auftragen eine logarithmische Einheitsstrecke einnehmen, so sind die entsprechenden Teilungen für sin und tg in der mittleren Skala derart miteinander vereinigt worden, daß man für jeden Winkel den Sinus- und Tangentenwert ausmittelte. Die Funktionswerte für diese Teilung sind -1-stellig, die für die Winkel der Teilungen S und T sind 0-stellig.

Bei Meßtisch- und tachymetrischen Terrainaufnahmen kommen die Formeln zur Verwendung:

$$d = C \cdot a \cdot \cos^2 n + k$$

$$h = C \cdot a \cdot \sin n \cdot \cos n = \tfrac{1}{2} Ca \sin 2n\,.$$

Hierin bedeutet C die Fadenkonstante, welche gewöhnlich 100 ist, k eine Konstante, welche vom Instrument abhängt. Um nun die ziffernmäßige Ausrechnung obiger Formeln für alle praktisch vorkommenden Fälle zu erleichtern, ist auf der obersten Zungenteilung die Teilung $\cos^2 n$ von rechts nach links aufgetragen und umfaßt die Funktionswerte 1,0 bis 0,5. Die Teilung $\sin n \cdot \cos n$ ist von links nach rechts aufgetragen und von $64'$ bis 50^0 in zwei Teile zerlegt. Der erste Teil umfaßt die mittlere Zungenteilung für Winkel von $64'$ bis $6^0 41'$ und enthält die Funktionswerte von 0,01 bis 0,1. Der zweite Teil von $\sin n \cos n$ liegt in der obersten Zungenteilung, umfaßt die Winkel $n = 6^0 41'$ bis 50^0 und entspricht den Funktionswerten von 0,1 bis 0,5. Bei den letzten Winkelangaben wurde „neue Teilung“ ($1R = 100^0$ usf.) vorausgesetzt.

Einen speziell für Maschinen- und Elektroingenieure bestimmten Rechenschieber brachte kürzlich die Firma A. W. Faber in Stein bei Nürnberg auf den Markt. Der Stab hat vier Teilungen, die mit denen des gewöhnlichen Rechenschiebers vollständig überein-stimmen. Auf der einen abgeschrägten Seite befinden sich zwei Teilungen, von denen jedoch die untere die Fortsetzung der oberen ist. Die Teilung ist eine log log-Teilung, wie wir sie bereits kennen lernten. Die obere Teilung geht von 1,1 bis 2,9; die untere von 2,9 bis 100 000. Der Läufer trägt an dieser Seite eine Metallzunge, deren Ende als Marke genau mit dem Striche am Läuferglas übereinstimmt. Mit Hilfe dieser Teilung und der Schieberteilung D lassen sich beliebige Potenzierungen und Radizierungen vornehmen. Der Boden des Stabes, der sogenannte Grund, hat bei diesem Schieber zwei weitere logarithmische Teilungen erhalten. Das linke Zungenende hat einen Metallbelag, der schneidenförmig abgeschrägt ist, damit eine scharfe Einstellung ermöglicht ist. Die obere der beiden Teilungen dient zur Bestimmung der Wirkungsgrade von Dynamomaschinen und Elektromotoren oder zur Ermittelung der dynamischen Leistung in KW, resp. der effektiven Leistung in HP bei gegebenem Wirkungsgrad. Mit Hilfe der unteren Teilung kann aus der Stromstärke in einer elektrischen Leitung, Leitungslänge und Leitungsquerschnitt der Spannungsverlust ermittelt werden. Indes gilt die Teilung nur für Gleichstrom und induktionsfreien Wechselstrom. Die obere Stabteilung trägt ein KW, was Kilowatt bedeutet, die obere Zungenteilung trägt ein HP, dies bedeutet: Pferdekraft (Horse power). Die obere Teilung auf dem Grund, die Teilung der Wirkungsgrade, gibt von 100 nach links die Wirkungsgrade der Dynamomaschinen, von 100 nach rechts die der Elektromotoren. Die untere Teilung auf dem Grund möge die Spannungsverlust- oder die Voltteilung heißen. Auf der Zunge ist am rechten Ende ein W angeschrieben; die Länge $1 - W$ gibt die Länge der unteren log log-Teilung. Ist die Potenz größer als 2,9, dann wird dieses Indexzeichen W an Stelle von 1 gebraucht.

Der Spannungsverlust einer einfachen Kupferleitung rechnet sich für Gleichstrom oder induktionsfreien Wechselstrom nach der Formel:

$$e = \frac{J \cdot l}{c \cdot q},$$

worin J die Stromstärke in Ampere, l die Leitungslänge in Metern, q der Drahtquerschnitt und c eine Kupferkonstante ist, die auf unserem Rechenschieber zu 28,7 angenommen ist.

Einen neuen nautischen Rechenstab bringt die durch ihre soliden Rechenschieber hinlänglich bekannte Firma Dennert und Pape in Altona auf den Markt (System Dr. Maurer).

Die oberste Stab- und Zungenteilung stimmen überein; sie sind die gewöhnlichen Divisions- und Multiplikationsskalen. Die unterste Stabskala ist eine L-Teilung, sie enthält die Logarithmen der Zahlen auf den beiden genannten obersten Teilungen; mit ihrer Hilfe lassen sich nach der Formel $\log a^n = n \cdot \log a$ Aufgaben von der Form $x = a^n$ oder $x = a^{\frac{1}{n}}$ lösen (wenn auch nicht direkt, wie bei den Exponentialrechenschiebern).

Die Skalen 3 und 4, also die unterste Zungen- und die unterste Stabteilung, lösen die Aufgabe, den Querabstand A eines Objektes von einem geradlinigen Kurs aus zwei Peilungswinkeln α und β und der Versegelung D zwischen beiden Peilungen nach der Formel:

$$A = \frac{D}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

zu bestimmen.

Die Rückseite der Zunge trägt eine Kosinus- und dabei in Klammern eine Sinussteilung und eine Tangenten- resp. in Klammern eine Kotangententeilung.

Die Firma Dennert und Pape in Altona bringt noch Rechenschieber zur schnellen Berechnung der Gewichte von Eisen- und Stahlstücken (Marke: „Schiffbau-Ingenieur Stockhusen") und Rechenschieber zur schnellen Berechnung der ⊤-Trägerprofile zum Verkauf. Interessenten erhalten von der Firma nähere Aufschlüsse.

Bemerken will ich noch, daß auch Rechenschieber aus Karton hergestellt werden und diese dementsprechend billig sind. Für die Textilindustrie empfiehlt Ingenieur Ullrich einen solchen Rechenstab der Firma Wichmann, Berlin NW 6, in seiner Schrift: „Der Rechenstab in der Textilindustrie", Leipzig 1907.

§ 6. Kreisrechenschieber.

Da auf dem geraden Rechenschieber zwei Teilungen hintereinander nötig sind, ist es naheliegend, die logarithmische Teilung auf einem Kreis aufzutragen, so zwar, daß das Ende wieder in den Anfang übergeht. Ein solcher Rechenschieber wurde erstmals 1816 von Jomard ausgeführt.

Einen neueren Kreisrechenschieber fand ich in jüngster Zeit vielfach in Süddeutschland verbreitet; es ist dies der Kreisrechenschieber System Boucher, verbessert von H. Châtelain in Paris. Unsere Abb. 5 gibt denselben in der Ansicht wieder.

Dieses Instrument, das die Form einer Remontoiruhr von 5 cm Durchmesser hat, besitzt zwei Teilungsscheiben, von denen die eine um eine Achse drehbar, die andere fest ist. Die bewegliche Scheibe wird vermittels des

Knopfes gedreht; die Nadeln werden ebenfalls mittels des Knopfes bewegt, jedoch so, daß man zugleich den seitlichen Drücker benutzt. Da die zwei Zeiger an derselben Achse befestigt sind, bedingt die Stellung des einen Zeigers diejenige des anderen. Ein dritter Zeiger, der

Abb. 5.

Index, ist auf der beweglichen Scheibe oben an der Peripherie befestigt. Jede der zwei Scheiben hat vier konzentrische, geteilte Kreise; auf der beweglichen Scheibe befinden sich drei Einteilungsskalen, auf der festen Scheibe zwei. Mittels des Knopfes wird die Scheibe gedreht, so daß die Nadel oder der Index auf die gewünschte Zahl zu stehen kommt; mittels des seitlichen Drückers dagegen, der wie bei einer Remontoiruhr gehandhabt wird, stellt man die Nadeln der einen und anderen Scheibe je nach Wunsch. Aus der Kombination der Stellungen der Nadeln einerseits und der beweglichen Scheibe andererseits ergeben sich die Regeln zum Gebrauch des Kreisrechenschiebers. Die bewegliche Scheibe enthält in ihrem innersten Kreis die Skala der gewöhnlichen Zahlen; die beiden folgenden Kreise enthalten die Quadrate hierzu, der äußerste Kreis enthält die Sinusskala. Die feste Scheibe enthält auf den drei inneren Kreisen die Kubikskala, auf dem äußeren Kreis die Logarithmenskala.

Bezogen kann dieser Kreisrechenschieber werden von der Firma Gebrüder Knauß, Karlsruhe i. B., Kaiserstr. 63, zum Preise von 15 M.

Auf weitere hierher gehörige Konstruktionen, auf Rechenrad usw. wollen wir hier der beschränkten Anwendung halber nicht eingehen.

Kapitel II.

Numerische Rechentafeln.

A. Genaues Rechnen.

§ 1. Produktentafeln.

Die Produktentafeln, auch Pythagoreische Tafeln genannt, bilden das verbreitetste Erleichterungsmittel zur Ausführung von Zahlenrechnungen. Sie haben zwei Eingänge für die Zahlen x und y, deren Produkte xy sie enthalten. Außer den Einmaleinstafeln hatte man schon frühzeitig Tafeln, deren einer Faktor einstellig war, während der andere Faktor bis 100 ging. Bis $10 \cdot 10\,000$ reichten die Tabellen von J. Dodson (1747); auf denselben Bereich erstreckt sich die neuere Tafel (Anleitung in vier Sprachen) von Theodor von Esersky. Am weitesten geht die Erleichterungstafel von A. L. Crelle, sie erstreckt sich über einen Bereich bis zu $10 \cdot 10\,000\,000$. Die weiteste Verbreitung erlangten die Rechentafeln von A. L. Crelle, die alle Produkte bis $1000 \cdot 1000$ in zweckmäßiger Anordnung geben. Auf einer Seite stehen die Produkte einer Zahl x mit sämtlichen Zahlen y, die < 1000 sind. In einer Zeile stehen die Produkte von x mit den Zahlen y, welche die gleichen beiden Endziffern haben. Die für diese zehn Produkte identischen Endziffern stehen abgetrennt am Ende der Zeile. Es ist hier von folgender arithmetischer Betrachtung Gebrauch gemacht. Ist

$$x = 100 \cdot m + n\,,$$

worin $n \leqq 99$, dann hat

$$xy = 100\,m \cdot y + n \cdot y$$

die nämlichen Ziffern nullten und ersten Ranges wie ny, so daß diese von m unabhängig sind. Geht x bis zu 1000, so haben je zehn Produkte für $m = 0$ bis $m = 9$ die nämlichen beiden Endziffern. So werden z. B. $5y$, $105y$, $205y$, $305y$, $405y$, $505y$, $605y$, $705y$, $805y$ und $905y$ stets die beiden gleichen Endziffern haben; diese sind z. B. für $y = 21$ stets 05. Diese beiden Endziffern schreibt man nur einmal und setzt sie an besondere Stelle.

Läßt man in einer Produktentafel die beiden Faktoren zu gleicher Höhe ansteigen, so kommt, wie leicht einzusehen, jedes Produkt zweimal vor; die Tafel nimmt daher nur halb so viel Raum ein, wenn man jedes Produkt nur

	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	
51	44 370	44 421	44 472	44 523	44 574	44 625	44 676	44 727	44 778	44 829	51
52	45 240	45 292	45 344	45 396	45 448	45 500	45 552	45 604	45 656	45 708	52
53	46 110	46 163	46 216	46 269	46 322	46 375	46 428	46 481	46 534	46 587	53
54	46 980	47 034	47 088	47 142	47 196	47 250	47 304	47 358	47 412	47 466	54
55	47 850	47 905	47 960	48 015	48 070	48 125	48 180	48 235	48 290	48 345	55
56	48 720	48 776	48 832	48 888	48 944	49 000	49 056	49 112	49 168	49 224	56
57	49 590	49 647	49 704	49 761	49 818	49 875	49 932	49 989	50 046	50 103	57
58	50 460	50 518	50 576	50 634	50 692	50 750	50 808	50 866	50 924	50 982	58
59	51 330	51 389	51 448	51 507	51 566	51 625	51 684	51 743	51 802	51 861	59
60	52 200	52 260	52 320	52 380	52 440	52 500	52 560	52 620	52 680	52 740	**60**
61	53 070	53 131	53 192	53 253	53 314	53 375	53 436	53 497	53 558	53 619	61
62	53 940	54 002	54 064	54 126	54 188	54 250	54 312	54 374	54 436	54 498	62
63	54 810	54 873	54 936	54 999	55 062	55 125	55 188	55 251	55 314	55 377	63
64	55 680	55 744	55 808	55 872	55 936	56 000	56 064	56 128	56 192	56 256	64
65	56 550	56 615	56 680	56 745	56 810	56 875	56 940	57 005	57 070	57 135	65
66	57 420	57 486	57 552	57 618	57 684	57 750	57 816	57 882	57 948	58 014	66
67	58 290	58 357	58 424	58 491	58 558	58 625	58 692	58 759	58 826	58 893	67
68	59 160	59 228	59 296	59 364	59 432	59 500	59 568	59 636	59 704	59 772	68
69	60 030	60 099	60 168	60 237	60 306	60 375	60 444	60 513	60 582	60 651	69
70	60 900	60 970	61 040	61 110	61 180	61 250	61 320	61 390	61 460	61 530	**70**
71	61 770	61 841	61 912	61 983	62 054	62 125	62 196	62 267	62 338	62 409	71
72	62 640	62 712	62 784	62 856	62 928	63 000	63 072	63 144	63 216	63 288	72
73	63 510	63 583	63 656	63 729	63 802	63 875	63 948	64 021	64 094	64 167	73

74	64 380	64 454	64 528	64 602	64 676	64 750	64 824	64 898	64 972	65 046	**74**
75	65 250	65 325	65 400	65 475	65 550	65 625	65 700	65 775	65 850	65 925	**75**
76	66 120	66 196	66 272	66 348	66 424	66 500	66 576	66 652	66 728	66 804	**76**
77	66 990	67 067	67 144	67 221	67 298	67 375	67 452	67 529	67 606	67 683	**77**
78	67 860	67 938	68 016	68 094	68 172	68 250	68 328	68 406	68 484	68 562	**78**
79	68 730	68 809	68 888	68 967	69 046	69 125	69 204	69 283	69 362	69 441	**79**
80	69 600	69 680	69 760	69 840	69 920	70 000	70 080	70 160	70 240	70 320	**80**
81	70 470	70 551	70 632	70 713	70 794	70 875	70 956	71 037	71 118	71 199	**81**
82	71 340	71 422	71 504	71 586	71 668	71 750	71 832	71 914	71 996	72 078	**82**
83	72 210	72 293	72 376	72 459	72 542	72 625	72 708	72 791	72 874	72 957	**83**
84	73 080	73 164	73 248	73 332	73 416	73 500	73 584	73 668	73 752	73 836	**84**
85	73 950	74 035	74 120	74 205	74 290	74 375	74 460	74 545	74 630	74 715	**85**
86	74 820	74 906	74 992	75 078	75 164	75 250	75 336	75 422	75 508	75 594	**86**
87	75 690	75 777	75 864	75 951	76 038	76 125	76 212	76 299	76 386	76 473	**87**
88	76 560	76 648	76 736	76 824	76 912	77 000	77 088	77 176	77 264	77 352	**88**
89	77 430	77 519	77 608	77 697	77 786	77 875	77 964	78 053	78 142	78 231	**89**
90	78 300	78 390	78 480	78 570	78 660	78 750	78 840	78 930	79 020	79 110	**90**
91	79 170	79 261	79 352	79 443	79 534	79 625	79 716	79 807	79 898	79 989	**91**
92	80 040	80 132	80 224	80 316	80 408	80 500	80 592	80 684	80 776	80 868	**92**
93	80 910	81 003	81 096	81 189	81 282	81 375	81 468	81 561	81 654	81 747	**93**
94	81 780	81 874	81 968	82 062	82 156	82 250	82 344	82 438	82 532	82 626	**94**
95	82 650	82 745	82 840	82 935	83 030	83 125	83 220	83 315	83 410	83 505	**95**
96	83 520	83 616	83 712	83 808	83 904	84 000	84 096	84 192	84 288	84 384	**96**
97	84 390	84 487	84 584	84 681	84 778	84 875	84 972	85 069	85 166	85 263	**97**
98	85 260	85 358	85 456	85 554	85 652	85 750	85 848	85 946	86 044	86 142	**98**
99	86 130	86 229	86 328	86 427	86 526	86 625	86 724	86 823	86 922	87 021	**99**
100	87 000	87 100	87 200	87 300	87 400	87 500	87 600	87 700	87 800	87 900	**100**

einmal schreibt. Von dieser Tatsache haben C. Cairo-H. C. Schmidt (Aschersleben 1896) und A. Henselin (Berlin 1897) in ihren Tafeln Gebrauch gemacht.

Vielfach ist es bequem, wenn der eine Faktor sich nur von 1—100 erstreckt, der andere von 1—1000. Solche Tafeln existierten schon im 18. Jahrhundert. Eine neue, sehr beliebte Tafel dieser Art ist die von Dr.-Ing. Dr. H. Zimmermann (fünfte Auflage, Berlin 1907, 5 M.), die durch Runderlaß des Ministeriums der öffentlichen Arbeiten empfohlen wurde. Die Rechentafel hat zwei Eingänge, einen horizontalen und einen vertikalen, an der Kreuzung steht das gesuchte Produkt. Zur Erläuterung füge ich eine Probeseite dieser Tafel (S. 46 u. 47) ein.

Einige Beispiele mögen den Gebrauch erklären.

1. Man soll mittels der Tafel berechnen:

$$875 \cdot 63 = ?$$

Man sucht die Kreuzungsstelle der Vertikalkolumne 875 und der Horizontalzeile 63; man findet in dieser 55125, also: $875 \cdot 63 = 55125$.

2. Man berechne mittels der Tafel:

$$566973 \cdot 877 = ?$$

Man erhält:

Kolumne 877, Zeile 56:		49112
„ 69:		60513
„ 73:		64021
$566973 \cdot 877$		$= 497235321$.

3. $82532 : 94 = ?$

Man erhält ohne weiteres:

$$82532 : 94 = 878 .$$

Den Fuß der aufgenommenen und der unmittelbar vorhergehenden Seite bilden folgende Tabellen:

a	87,0	87,1	87,2	87,3	87,4	87,5	87,6	87,7	87,8	87,9	a
$\sqrt{a}$	9,3274	9,3327	9,3381	9,3434	9,3488	9,3541	9,3595	9,3648	9,3702	9,3755	$\sqrt{a}$
$\sqrt[3]{a}$	4,4310	4,4327	4,4344	4,4361	4,4378	4,4395	4,4412	4,4429	4,4446	4,4463	$\sqrt[3]{a}$
$100:a$	1,1494	1,1481	1,1468	1,1455	1,1442	1,1429	1,1416	1,1403	1,1390	1,1377	$100:a$
$\log a$	93 952	94 002	94 052	94 101	94 151	94 201	94 250	94 300	94 349	94 399	$\log a$

und:

a	87,0	87,1	87,2	87,3	87,4	87,5	87,6	87,7	87,8	87,9	a
a^2	7569,00	7586,41	7603,84	7621,29	7638,76	7656,25	7673,76	7691,29	7708,84	7726,41	a^2
a^3	658 503	660 776	663 055	665 339	667 628	669 922	672 221	674 526	676 836	679 151	a^3
$\pi a:2$	136,659	136,816	136,973	137,131	137,228	137,445	137,602	137,759	137,916	138,073	$\pi a:2$
$\pi a^2:4$	5944,68	5958,35	5972,04	5985,75	5999,47	6013,20	6026,96	6040,73	6054,51	6068,31	$\pi a^2:4$

Der hohe Wert dieser Tafeln dürfte hiermit klar sein.

Multiplikationstafeln, die meist ohne weiteres auch zur Division verwendet werden können, finden sich in den meisten technischen Tabellenbüchern, so z. B. auch in dem verbreiteten Buch: Schultze-Dieckmann, Mathematische und technische Tabellen.

Zum Schlusse sei noch kurz die Multiplikationstafel von Theodor von Esersky erläutert. Der Kopf jeder Tabelle lautet:

2 20.0.0	**3** 30.0.0	**4** 40.0.0	**5** 50.0.0	**1** 10.0.0	**6** 60.0.0	**7** 70.0.0	**8** 80.0.0	**9** 90.0.0

Die fetten Zahlen bedeuten bei Multiplikationen die Ziffer des Multiplikators, bei Divisionen die Ziffer des Quotienten. Die senkrecht neben dem Multiplikator gedruckten Zahlen 20.0.0 usw. zeigen an, daß bei Multiplikationen mit ganzen Zehnern, Hundertern, Tausendern usf. dem Produkte die dem Multiplikator entsprechende Anzahl Nullen hinzuzufügen ist. Wir geben einen kleinen Teil der Tafel (S. 51) wieder.

Die Zahlen in der Mittelkolumne, welche die fortlaufende Zahlenreihe 1, 2, 3, . . . (in unserer Musterseite 901, 902, 903, 904, . . ., 979, 980, 981, . . ., 995, 996, 997, 998, 999) bilden, stellen bei Multiplikationen den Multiplikandus, bei Divisionen den Divisor dar. Die Zahlen in den Kolumnen links und rechts von der mittleren sind die Produkte, welche durch Multiplikation der Zahlen in der Mittelkolumne mit den am Kopfe der entsprechenden Kolumne befindlichen entstehen.

Beispiel. Es sei zu berechnen:

$$911 \cdot 367 = ?$$

2 20.0.0	**3** 30.0.0	**4** 40.0.0	**5** 50.0.0	**1** 10.0.0	**6** 60.0.0	**7** 70.0.0	**8** 80.0.0	**9** 90.0.0
1802	2703	3604	4505	**901**	5406	6307	7208	8109
4	6	8	10	**2**	12	14	16	18
1806	2709	3612	4515	**903**	5418	6321	7224	8127
8	12	16	20	**4**	24	28	32	36
1810	2715	3620	4525	**905**	5430	6335	7240	8145
12	18	24	30	**6**	36	42	48	54
1814	2721	3628	4535	**907**	5442	6349	7256	8163
16	24	32	40	**8**	48	56	64	72
1818	2727	3636	4545	**909**	5454	6363	7272	8181
20	30	40	50	**10**	60	70	80	90
1822	2733	3644	4555	**911**	5466	6377	7288	8199
24	36	48	60	**12**	72	84	96	208
1826	2739	3652	4565	**913**	5478	6391	7304	8217
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
1958	2937	3916	4895	**979**	5874	6853	7832	8811
60	40	20	900	**80**	80	60	40	20
1962	2943	3924	4905	**981**	5886	6867	7848	8829
64	46	28	10	**82**	92	74	56	38
1966	2949	3932	4915	**983**	5898	6881	7864	8847
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
1990	2985	3980	4975	**995**	5970	6965	7960	8955
92	88	84	80	**96**	76	72	68	64
1994	2991	3988	4985	**997**	5982	6979	7976	8973
96	94	92	90	**98**	88	86	84	82
1998	2997	3996	4995	**999**	5994	6993	7992	8991

Wir erhalten aus unserer Musterseite:

$$
\begin{array}{r}
911 \cdot 300 = 273\,300 \\
911 \cdot 60 = 54\,660 \\
911 \cdot 7 = 6\,377 \\
\hline
911 \cdot 367 = 334\,337\,.
\end{array}
$$

Die Multiplikation ist hiermit auf eine Addition zurückgeführt.

Die Division wird ebenfalls am besten durch ein Beispiel erläutert. Es sei zu berechnen:

$$340\,407 : 981 = ?$$

Wir haben für 981 folgende Horizontalzeile:

2	3	4	5		6	7	8	9
1962	2943	3924	4905	981	5886	6867	7848	8829

Wir teilen nun vom Dividenden von links an gerechnet so viele Ziffern ab, als der Divisor deren enthält, und erhalten 340. Da aber 981 in 340 nicht enthalten ist, so haben wir noch eine Stelle weiter zu nehmen und erhalten so 3404. Jetzt suchen wir in obiger Horizontalreihe diese Zahl oder das nächstkleinere Produkt, wir finden 2943 und hierzu als erste Ziffer des Quotienten 3. Die Differenz zwischen diesem Produkt und der Zahl 3404 beträgt 461 und hierzu die nächste Stelle vom Dividenden genommen, ergibt 4610. Das nächstniedere Produkt in unserer Horizontalzeile ist 3924 und hierzu gehört die Quotientenziffer 4. Auf dieselbe Weise erhält man als letzte Quotientenziffer 7, und das Ergebnis lautet:

$$340\,407 : 981 = 347\,.$$

Die Division wurde auf Subtraktionen zurückgeführt.

Die Tafel enthält noch abgekürzte Tabellen von 10 000 bis 1 111 111, doch möge Weiteres aus der Tafel selbst ersehen werden.

§ 2. Tafeln der Viertelquadrate.

Der Mathematiker Laplace dürfte der erste gewesen sein, der die Frage behandelte, wie durch Benützung von Tafeln mit einem Eingang Multiplikationen auf Additionen und Subtraktionen zurückgeführt werden können. Er denkt sich das Produkt xy aus einem oder mehreren Gliedern von der Form $\varphi(X \pm Y)$ gebildet, worin X eine Funktion von x allein, Y eine solche von y allein bezeichnet. Die Annahme $x \cdot y = \varphi(X + Y)$ führt zu den Logarithmen, während die Annahme

$$xy = \varphi(X + Y) - \varphi(X - Y)$$

einerseits die Lösung:

$$xy = \tfrac{1}{2}[\cos(X - Y) - \cos(X + Y)]$$

mit

$$x = \sin X$$

$$y = \sin Y$$

ergibt, andererseits als zweite Lösung

$$xy = \tfrac{1}{4}[(x + y)^2 - (x - y)^2]$$

zuläßt.

Auf der ersten Lösung beruht die vor Erfindung der Logarithmen benutzte prosthaphäretische Methode (πρόσθεσις = Hinzufügung, ἀφαίρεσις = Wegnahme), ein Verfahren, Multiplikationen auf Additionen und Subtraktionen zurückzuführen. Grundlage hierzu ist die Formel:

$$2 \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\,.$$

Waren also beliebige Zahlen miteinander zu vervielfachen, so könnte jede derselben nach vorhergegangener Division oder

Multiplikation mittels einer mit Nullen versehenen Einheit als Sinus eines Winkels α (β) in einer mit genügender Genauigkeit berechneten Sinustafel nachgewiesen werden. Dann waren aber aus der Tafel auch die zu ($\alpha - \beta$) und zu ($\alpha + \beta$) gehörenden Kosinus zu entnehmen, und nach vollzogener Subtraktion waren nur noch die zum Beginne eingeführten Veränderungen der Zahlen um Einheiten verschiedener Ordnung und eine Halbierung zu vollziehen, um das gesuchte Produkt zu erhalten. Sollte addiert und nicht subtrahiert werden, so wählte man als Ausgangspunkt:

$$2 \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) .$$

[Cantor, Gesch. d. Math.]

Die zweite Lösung:

$$x y = \tfrac{1}{4}[(x + y)^2 - (x - y)^2]$$

brachte in ihrer veränderten Schreibweise:

$$x y = \frac{(x + y)^2}{4} - \frac{(x - y)^2}{4}$$

die Tafeln der Viertelquadrate.

Eine solche Tafel gab zuerst Ingenieur A. Voisin im Jahre 1817 zu Paris heraus. Die beste Tafel der Viertelquadrate ist die von Joseph Blater (Wien 1887). Durch verschiedene Kunstgriffe in der Anordnung liefert diese Tafel auf 200 Quartseiten (!) noch die Produkte fünfzifferiger Faktoren bis auf die letzte Stelle genau.

Der Gebrauch dieser Tafel erstreckt sich auf drei Hauptanwendungen:

I. Zur Multiplikation mehrzifferiger Faktoren.

II. Zur Quadrierung gegebener Zahlen unmittelbar bis 100000 und darüber.

III. Zum Ausziehen der Quadratwurzel aus gegebenen Zahlen bis zur Grenze von 10000 Millionen.

In der Tafel gehören je zwei einander gegenüber-liegende Seiten — wie durch die Signaturen a und b auch äußerlich hervortritt — zusammen. Jede Seite hat zwei Abteilungen, mit I und II bezeichnet, jede Abteilung hat zwölf Kolumnen.

Um einen Überblick über die Einrichtung der Tafel und deren Gebrauch geben zu können, seien zwei zusammengehörige Seiten wiedergegeben (S. 56 bis 59).

Die Kolumne $N + n$ ist die Eingangskolumne. Bestimmt wird diese durch die Argumente $x + y$ und $x - y$, wenn x und y die beiden gegebenen (variabeln) Faktoren sind. Die Tausender dieser Argumente stehen in der Kolumne unter N, und zwar, wenn sie unter 100 betragen und gerade sind, in Abteilung I, wenn sie ungerade sind, in Abteilung II der linken Seite; fallen sie aber zwischen 100 und 200, so hat man für gerade Tausender in die Abteilung I, wenn sie ungerade sind, in die Abteilung II der rechten Seite einzugehen. Die restlichen Ziffern für die Hunderter, Zehner und Einheiten findet man als Überschriften der Kolumnen in der Zeile $+n$, die in allen vier Abteilungen dieselben bleiben. Die Tausender sind in gerade und ungerade getrennt, weil hierdurch die Wiederholung von hunderttausenden Endziffern erspart bleibt, ohne das Aufschlagen auch nur im geringsten zu erschweren.

Die Zahlen des Resultats, also die Tafelzahlen stehen in den Kolumnen A, B und C, so zwar, daß A die Anfangsziffern, eine der B-Kolumnen die mittleren Ziffern und endlich C die Endziffern enthält. Die Ziffern in A gelten für die ganze Zeile von B, die Ziffern in C für die ganze Kolumne von B; hierdurch ist in geradezu genialer Weise eine ungeheure Zahl von Ziffern gespart.

Für Divisionen ist die Tafel der Viertelquadrate nicht geeignet.

200 a.

I.

$N + n$		200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
	A	B									
0	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
2	1	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219
4	4	410	412	414	416	418	420	422	424	426	428
6	9	610	613	616	619	622	625	628	631	634	637
8	16	810	814	818	822	826	830	834	838	842	846
10	26	010	015	020	025	030	035	040	045	050	055
12	37	210	216	222	228	234	240	246	252	258	264
14	50	410	417	424	431	438	445	452	459	466	473
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
96	2313	610	658	706	754	802	850	898	946	994	042
98	2410	810	859	908	957	*006	*055	*104	*153	*202	*251
	C	000	100	201	302	404	506	609	712	816	920

200a.

II.

$N+n$		200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
	A	B									
1	0	360	360	361	361	362	363	363	364	364	365
3	2	560	561	563	564	566	568	569	571	572	574
5	6	760	762	765	767	770	773	775	778	780	783
7	12	960	963	967	970	974	978	981	985	988	992
9	21	160	164	169	173	178	183	187	192	196	201
11	31	360	365	371	376	382	388	393	399	404	410
13	43	560	566	573	579	586	593	599	606	612	619
15	57	760	767	775	782	790	798	805	813	820	828
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
97	2361	960	*008	*057	*105	*154	*203	*251	*300	*348	*397
99	2460	160	209	259	308	358	408	457	507	556	606
	C	000	600	201	802	404	006	609	212	816	420

200b.

I.

$N + n$	A	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
						B					
100	2510	010	060	110	160	210	260	310	360	410	460
102	2611	210	261	312	363	414	465	516	567	618	669
104	2714	410	462	514	566	618	670	722	774	826	878
106	2819	610	663	716	769	822	875	928	981	*034	*087
108	2926	810	864	918	972	*026	*080	*134	*188	*242	*296
110	3036	010	065	120	175	230	285	340	395	450	505
112	3147	210	266	322	378	434	490	546	602	658	714
114	3260	410	467	524	581	638	695	752	809	866	923
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
196	9623	610	708	806	904	*002	*100	*198	*296	*394	*492
198	9820	810	909	*008	*107	*206	*305	*404	*503	*002	*701
	C	000	100	201	302	404	506	609	712	816	920

200 b.

II.

$N + n$		200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
	A	B									
101	2560	360	410	461	511	562	613	663	714	764	815
103	2662	560	611	663	714	766	818	869	921	972	*024
105	2766	760	812	865	917	970	*023	*075	*128	*180	*233
107	2872	960	*013	*067	*120	*174	*228	*281	*335	*388	*442
109	2981	160	214	269	323	378	433	487	542	596	651
111	3091	360	415	471	526	582	638	693	749	804	860
113	3203	560	616	673	729	786	843	899	956	*012	*069
115	3317	760	817	875	932	990	*048	*105	*163	*220	*278
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
197	9721	960	*058	*157	*255	*354	*453	*551	*650	*748	*847
199	9920	160	259	359	458	558	658	757	857	956	056
	C	000	600	201	802	404	006	609	219	816	420

Wir wollen an der Hand eines Beispieles nunmehr die Operation des Multiplizierens erläutern.

Es sei zu berechnen:

$$x \cdot y = 60\,706 \cdot 46\,497 = ?$$

Es ist:

$$x + y = 107\,203 = s$$

$$x - y = 14\,209 = d\,.$$

Nun ist, wie wir wissen:

$$x\,y = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}\,.$$

$\frac{(x+y)^2}{4}$ erhalten wir für unser Beispiel folgendermaßen. Die Anzahl der Tausender ist 107; diese spielt aber erst an zweiter Stelle eine Rolle; zuerst handelt es sich um die drei letzten Ziffern von s, die sind 203. Wir schlagen also in der Tafel die Seite auf, die 203 enthält; es sind dies 200a und 200b. Jetzt kommt die Anzahl der Tausender erst in Betracht. Die Zahl 107 liegt zwischen 100 und 200, also haben wir jedenfalls auf der Seite 200b zu suchen, und da 107 ungerade ist, in der Abteilung II. Die Kolumne A enthält nun in der Horizontalzeile von 107 die vier ersten Ziffern des Resultates, die Vertikalkolumne von 203 die drei mittleren Ziffern an der Kreuzung mit voriger Horizontalreihe, und an der Kreuzung dieser Kolumne mit der Horizontalreihe C stehen die drei Endziffern. Wir erhalten demnach:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 2\,872\,120\,802\,.$$

Nun hat aber die Zahl 120 in B einen Stern; dieser besagt, daß die Zahl unter A um 1 zu erhöhen ist; wir erhalten daher:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 2\,873\,120\,802\,.$$

Suchen wir nun auf dieselbe Weise:

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{14209}{2}\right)^2.$$

Wir erhalten:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \overbrace{50}^{A}\,\overbrace{473}^{B}\,\overbrace{920}^{C}\,.$$

Folglich:

$$\begin{array}{rr} x \cdot y = & 2\,873\,120\,802 \\ & 50\,473\,920 \\ \hline & 2\,822\,646\,882\,. \end{array}$$

Also ist:

$$60\,706 \cdot 46\,497 = 2\,822\,646\,882\,.$$

Hiermit dürfte klar sein, wie mit Hilfe dieser Tafel Produkte zu berechnen sind.

Das Erheben einer Zahl auf die zweite Potenz erfordert nur eine Verdoppelung der gegebenen Zahl, weil beide Faktoren einander gleich sind, und ein einmaliges Eingehen.

Beispiel: $48\,102^2 = ?$

Wir verdoppeln die Zahl und erhalten 96 204; nun schlagen wir 204 in der Zeile $N + n$ auf, wir finden dies auf der Doppelseite 200. Die Anzahl der Tausender ist 96, wir finden also auf der Seite 200a, Abteilung I:

$$48\,102^2 = 2\,313\,802\,404\,.$$

Die Einfachheit der Tafel zum Bestimmen von Quadraten dürfte an diesem Beispiel in verblüffender Weise zutage treten.

Das Quadrat aus allen sechszifferigen Zahlen, deren Endziffer 5 ist, erhält man, indem man der gefundenen Tafelzahl anstatt 00 das in der Tafel für alle ungeraden Argumente vernachlässigte Viertelquadrat der letzten Einheit in C mit 25 anhängt. Überschreitet das Argument die Tafelgrenze, so läßt sich häufig durch geeignete Division ein Eingehen in die Tafel ermöglichen; das so erhaltene Resultat ist dann mit dem Quadrat des Divisors zu multiplizieren. Ist die gegebene Zahl jedoch so groß, daß sich auch durch Kürzung kein Eingehen in die Tafel ermöglichen läßt, so muß eine Teilung in $(a + b)$ eintreten, und man hat nach der Formel $(a + \mathrm{b})^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$ zu verfahren, oder eventuell ist zu zerlegen in $(a - b)$ und die Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$ anzuwenden. Genügt das Abschneiden einer Ziffer am Ende, so wird zu a^2, dem 00 angehängt wird, das Produkt aus der abgeschnittenen Ziffer und dem Argument $(2\,a\,b)$ und b^2 addiert. Müssen mehrere Ziffern abgeschnitten werden, so erhält a^2 für jede abgeschnittene Ziffer zwei Nullen, die Multiplikation von $(a \cdot b)$ muß mit Hilfe der Tafel ausgeführt werden; das Produkt erhält ebenso viele Nullen, als Ziffern abgeschnitten wurden, und b^2 ist gleichfalls der Tafel zu entnehmen.

Das Bestimmen der Quadratwurzeln zu gegebenen Zahlen erfolgt, wie nachstehend erläutert. Ähnlich wie beim Suchen des Numerus zu einem gegebenen Logarithmus suchen wir zu der gegebenen Zahl die nächstkleinere Tafelzahl. Weil dies aber meist sehr umständlich ist, ist zur Erleichterung der Auffindung der Tafel ein Index angehängt, um die Seite und Abteilung zu bestimmen, wo die gesuchte Zahl zu finden sein wird. Auf zwei getrennten Doppelseiten (Index a und Index b) sind für a und b in gleicher Anordnung des Tafelwerkes die Werte in A von 50 zu 50 für $+n$ angeführt. Diejenigen Werte, welche vier Stellen nicht erreichen, sind bis zu vier Stellen mit angehängtem Dezimalbruch durch Anfangsziffern aus B ergänzt, daher die Andeutung am Kopfe A, B. Rechts am Rande stehen in der mit $\triangle$ bezeichneten Kolumne Zahlen mit der Angabe, wieviel Seiten umgeschlagen werden müssen, wenn A um eine Einheit größer wird. Die mit P bezeichnete unterste Zeile gibt außerdem noch die betreffende Seitenzahl an, die am untersten Rande steht. Findet sich die gesuchte Zahl vollständig übereinstimmend, so ist die Hälfte der Eingangszahl die gesuchte Wurzel. Findet sich die gesuchte Zahl nicht vollständig, sondern nur mit den Anfangsziffern übereinstimmend in der Tafel vor, so ist $\frac{1}{2}(N + n)$ nur der erste Teil der Wurzel. Zieht man dann die nächstkleinere Zahl in B von der gegebenen Zahl ab, und dividiert man den Rest durch das Doppelte des gefundenen Wurzelteils, so erhält man mittels abgekürzter Division weitere fünf bis sechs Ziffern. Das übrige besagt die Tafel.

Die Tafel der Viertelquadrate läßt sich auch zur Auflösung gegebener Zahlen in Faktoren benutzen; wir gehen hierauf nicht ein.

Andere Multiplikationstafeln, die die Multiplikation durch Addition und Subtraktion ersetzen, sind die Tafeln der Dreieckzahlen. Ist T_x die zu x gehörige Dreieckszahl, d. h. $T_x = \frac{1}{2}(x + 1)x$, so wird:

$$xy = T_{x-1} + T_y - T_{x-y-1} .$$

Solche Tafeln kamen jedoch nie in praktischen Gebrauch.

Tafeln der Quadrate und Kuben der Zahlen von 1 bis 1000 enthalten alle technischen Taschenkalender, manche auch solche der Zahlen von 1 bis 10 000.

Die sogenannten Faktorentafeln enthalten alle einfachen Teiler oder wenigstens den kleinsten Teiler aller Zahlen bis zu einer möglichst hohen Grenze. Wie erwähnt, läßt sich auch die sehr empfehlenswerte Tafel der Viertelquadrate von Jos. Blater (Universitätsbuchhandlung Alfred Hölder, Wien, Rotenturmstr.) als Faktorentafel benutzen.

B. Genähertes Rechnen.

Logarithmentafeln.

Mittels der Logarithmensätze ist es möglich, Rechenoperationen auf solche der nächst niederen Stufe zurückzuführen; Multiplikation und Division wird auf Addition und Subtraktion, Potenzierung und Radizierung auf Multiplikation reduziert.

Den Vorrang behaupten, weil am bequemsten für das gewöhnliche Rechnen, die sogenannten gemeinen oder Briggschen Logarithmen mit der Basis 10. Die Anzahl der gewöhnlichen Logarithmentafeln ist Legion; empfehlenswert ist für den Techniker besonders die große Ausgabe der fünfstelligen Logarithmentafel von F. G. Gauß. Die Einrichtung dieser Tafeln ist bekannt, übrigens geben auch meist beigefügte Gebrauchsanleitungen hinreichenden Aufschluß. Bemerkt soll noch werden, daß in technischen Rechnungen die Mantisse von der Charakteristik stets durch einen Punkt (nicht durch Komma, wie meist an den Gymnasien usw. üblich) zu trennen ist; anstatt einen Logarithmus zu subtrahieren, addiere man stets dessen dekadische Ergänzung (Ergänzung zu 10), geschrieben $E\log$, oder cpl. log (= complementum logarithmi) oder colog (= cologarithmus).

Von geringer Bedeutung für das gewöhnliche Rechnen sind die Tafeln der „natürlichen" oder „hyperbolischen" Logarithmen mit der Basis

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots\left(e = \lim_{n=\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^n\right).$$

Die vollständigste Tafel dieser Art ist die von Z. Dase, Wien 1850.

Von den „abgekürzten Logarithmentafeln" kommt für uns Techniker hier speziell nur eine Tafel in Betracht. Es ist dies die unter dem Titel „Springende Logarithmen" von Ernst A. Brauer, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe, herausgegebene Tafel. In seinem Vorwort gibt Brauer folgende Erklärung: „Bei den meisten Logarithmentafeln bilden die Grundzahlen eine arithmetische Progression mit der Stufe 1. Der Fortschritt von einer Zahl zur nächstfolgenden ist daher bei niedrigen Zahlen ein größerer Bruchteil der Zahl selbst, als bei höheren. Hat die Grundzahl vier Stellen, so würde z. B. die Zahl 1000,5 entweder durch 1000 oder durch 1001 ersetzt werden können, beidemal mit einem relativen Fehler von 1 : 2000, während beim Ersatz von 9999,5 entweder durch 9999 oder durch 10 000 der relative Fehler nur 1 : 20 000 beträgt. Diese Ungleichmäßigkeit ist durch das Genauigkeitsbedürfnis bei naturwissenschaftlichen Rechnungen nicht begründet. Wenn in den Anfangswerten 1000 1001 usf. die Stufe 1 klein genug ist, so dürfte die Stufe bei 2000 doppelt, bei 3000 dreimal so groß sein. Von dieser Möglichkeit wird bei den springenden Logarithmen Gebrauch gemacht, indem

zwischen	1000	und	2000	die	Grundzahlstufe	1
„	2000	„	3000	„	„	2
„	3000	„	4000	„	„	3

beträgt usf. In der Tabelle bedeuten Z die Grundzahlen, die Zahlen Log die Mantissen der Logarithmen; die Kolumnen D_1, enthalten die Logarithmendifferenzen für die Grundzahlstufe 1 in Einheiten der fünften Dezimalstelle. Die Differenzen sind für jede Zahl dreimal, nämlich am Anfang ihres Geltungsbereiches, an der Stelle ihrer größten Genauigkeit und am Ende des Geltungsbereiches, aufgeführt.“ —

So große Vorteile die Logarithmenrechnung bei Multiplikation, Division usw. bildet, so hinderlich ist sie bei der Addition und Subtraktion. Um nun den besonders bei trigonometrischen Rechnungen häufig nötigen Übergang von $\log a$ und $\log b$ zu $\log(a \pm b)$ zu erleichtern, wurden zuerst, nach einem Vorschlag von Leonelli (1802/03), von Gauß Additions- und Subtraktionslogarithmentafeln konstruiert; die Tafeln von Gauß sind fünfstellig, die Berechnung von Leonelli erfolgte auf 14 Stellen, doch wurde seine Arbeit nicht veröffentlicht. Die Gaußschen Tafeln wurden dann später insbesondere von Weidenbach in etwas anderer Anordnung als siebenstellige Tafeln veröffentlicht. Die heutige Anordnung weist zwei Kolumnen auf, die mit A und B bezeichnet sind. Sie stehen in der Beziehung:

$$A = \log x$$

$$B = \log(1 + x)$$

oder:

$$10^A = x$$

$$10^B = 1 + x = 1 + 10^A ,$$

und es ist:

$$\log a + \log b = A\,,\ \log(a+b) = b + \log b$$
$$= \log a + (B - A)$$

und:

$$\log a - \log b = B\,,\quad \log(a-b) = \log a - (B - A)\,.$$

Verwandt mit den Additionslogarithmen ist die von Weidenbach auf Gauß' Veranlassung berechnete Tafel, die die Logarithmen von $\frac{x+1}{x-1}$ gibt, wenn $\log x$ gegeben ist. Diese Tafel wurde neuerdings von Professor E. Hammer an der Technischen Hochschule Stuttgart erweitert (Sechsstellige Tafel der Werte $\overset{10}{\log}\frac{1+x}{1-x}$, Leipzig 1902).

Kapitel III.

Rechenmaschinen.

In diesem Kapitel sollen nur kurz die eigentlichen Rechenmaschinen, also Maschinen mit selbsttätiger Zehnerübertragung, ihre Behandlung finden; auf Rechenapparate will ich wegen ihrer einfachen, oft selbstverständlichen Handhabung und wegen des beschränkten Raumes nicht eingehen.

§ 1. Geschichtliches.

Der Rechenschieber rechnet wie die Logarithmentafel mit unvollständigen Zahlen, die zudem noch sehr rasch abbrechen; das Rechnen ist ein angenähertes.

Es war daher das unablässige Streben erfinderischer Geister, eine Maschine zu konstruieren, die mit vollständigen Zahlen operiert und zudem an Einfachheit der

Bedienung und Schnelligkeit der Rechnung mit den Logarithmentafeln in erfolgreichen Wettbewerb treten kann. Wenn wir einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Rechenmaschinen halten, so finden wir hier, wie auf manch anderem Entwickelungsgebiet, die Namen hervorragender Denker mit den Mißerfolgen verknüpft, während der Erfolg sich an die Namen wenig bekannter Männer heftet.

Die ältesten Rechenmaschinen sind reine Additions- und Subtraktionsmaschinen. Schon Blaise Pascal, der bedeutende Mathematiker (1623—1662), konstruierte eine Additionsmaschine. Auf der Ausstellung wissenschaftlicher Instrumente im Jahre 1876 zu London war die Pascalsche Maschine zu sehen. Sie trug die Aufschrift: Esto probati instrumenti symbolum hoc. — Blasius Pascal Aruernus inventor. 20. May 1652.

Eine Beschreibung dieser Maschine findet man in: „Oeuvres complètes de Blaise Pascal, tome troisième. Paris 1890". Die Oberfläche der Maschine bildet eine Kupferplatte, an deren Unterseite sich acht, um ihre Mittelpunkte bewegliche Kreisscheiben befinden. Der erste Kreis rechts hat 12 Zähne, der zweite 20, alle links folgenden 10. Diese Anordnung entspricht der früheren Münzteilung 1 livre = 20 sols, 1 sols = 12 deniers. Über den Kreisen befinden sich Hemmstücke zum Anhalten von Stiften, die man in der Hand hält und zwischen die Zähne der beweglichen Räder steckt, um dieselben in der Richtung 6, 5, 4, 3 zu drehen, wenn man die Maschine in Tätigkeit setzt. Diese Drehungen werden auf eine andere Räderreihe, das Zählwerk (siehe § 2), übertragen und es treten deren Ziffern unter Schaulöchern vor. Eine Zehnerübertragung ist vorhanden, wie wir sie später in ihrer Wirkung kennen lernen werden. Die

Pascalsche Maschine war eine Additionsmaschine für Geldzählung.

In der Folgezeit wurden noch eine Reihe von Additionsmaschinen konstruiert; so sei genannt die Maschine von Chr. L. Gersten, Mathematikprofessor in Gießen. Er erfand seine Maschine 1722. Die Einstellung der Zahlen erfolgte durch Drehen der Zifferscheiben und mit Hilfe von Schiebern.

Zur Steigerung der Schnelligkeit und Sicherheit im Rechnen ging man zur Einführung von Tasten über, so zwar, daß man entweder nur die Addition einzifferiger Zahlen ins Auge faßte und jeder Ziffer von 1 bis 9 je eine Taste zuwies, oder aber man ordnete für die Einer, Zehner, Hunderter usw. je 9 Tasten in parallelen Reihen an. Hierher gehört die Additionsmaschine von Max Mayer; ausgeführt von Mechaniker A. Barthelmes in München (1887).

Die Additionsmaschine wurde noch vervollkommt durch eine selbsttätige Vorrichtung zum Drucken der einzelnen Summanden und deren Summe auf einen fortlaufenden Papierstreifen (wie dies etwa bei Registrierapparaten — Thermometer usw. — der Fall ist). Die bekannteste selbstschreibende Additionsmaschine dürfte die von Burrough sein (Registering Accountant, Deutsche Patentschrift 77 068); sie wurde an vielen Postanstalten eingeführt. Auch W. Heinitz in Dresden, Lortzingstraße 27, liefert eine sehr brauchbare Additionsmaschine.

Um eine Rechenmaschine zu Additionszwecken auch für wiederholte Addition ein und derselben Zahl, d. i. also zu Multiplikationszwecken geeignet zu machen, mußte man sie mit besonderen Mechanismen versehen, die es ermöglichen, nach Vornahme der nötigen Einstellungen alle Zifferscheiben des Zählwerks zugleich, jede um eine gewünschte Zahl von Stellen, weiterzubewegen (schalten) und zwar durch eine einzige Handbewegung. Es mußte das Schaltwerk erfunden werden, über das wir uns in § 2 näher verbreiten werden.

Der erste, der die Idee zu einer solchen erweiterten Additionsmaschine in Tat umsetzte, war G. W. Leibniz. Er legte seine Erfindung bereits 1673 der Royal Society in London und später auch, nachdem er noch Verbesserungen an derselben vorgenommen hatte, der Pariser Akademie der Wissenschaften vor. Das Äußere, sowie das Verfahren beim Gebrauch hat Leibniz in den Abhandlungen der Berliner Akademie, Miscellanea Berolinensia, Bd. I, beschrieben. Obwohl Leibniz für seine Maschine ungeheure Summen opferte — nach verschiedenen Angaben 24000 Taler —, kam er nie recht damit zustande. Nach seinem Tode (1716 zu Hannover) weigerten sich seine Erben, den von Leibniz mit der Fertigstellung beauftragten Mechaniker Teubertin zu bezahlen, so daß das Werk unvollendet liegen blieb. Ein Exemplar der

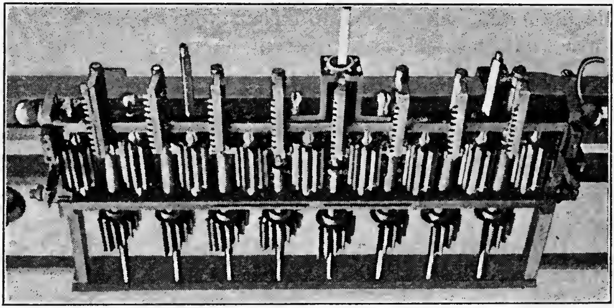


Abb. 6.

Leibnizschen Maschine befindet sich im Archiv der Königl. Bibliothek zu Hannover. Diese Maschine wurde im Auftrag der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften in den Jahren 1893—1896 durch Herrn Ingenieur Arthur Burkhardt in Glashütte i. Sa. untersucht, konnte jedoch nicht zum Gang gebracht werden, da ihre Konstruktion einen Fehler hat (vgl. auch: Zeitschrift für Vermessungswesen 1897, S. 392—398). Das Schaltwerk der Leibnizschen Rechenmaschine und die fertige Maschine ohne Gehäuse zeigen unsere Abb. 6 und 7.

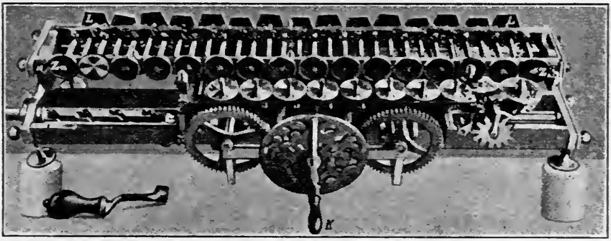


Abb. 7.

Die Kunde von der Pascalschen und Leibnizschen Rechenmaschine regte zu weiteren Erfindungen an. Im Jahre 1776 trat der Pfarrer Philipp Matthias Hahn in Echterdingen bei Stuttgart, ein trefflicher Mathematiker und Mechaniker, mit einer neuen Rechenmaschine hervor. Die Zahlenscheiben hat Hahn im Kreise nebeneinander gestellt, wodurch die Maschine die Form eines Zylinders erhält, in dessen Mitte die Kurbel spielt. Die Zifferblätter haben nur eine Bewegung, aber doppelte Zahlenreihen in zwei konzentrischen Kreisen. Hahn fertigte drei Maschinen, eine vierte wurde nach seinem Tode (1790) von seinem

Sohne, der württembergischer Hofmechaniker war, 1809 fertiggestellt. Diese Maschine ist im Besitz Sr. Durchlaucht Wilhelm, Herzog von Urach, Graf von Württem-

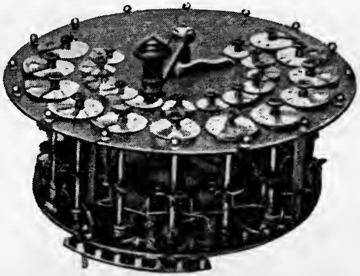


Abb. 8.

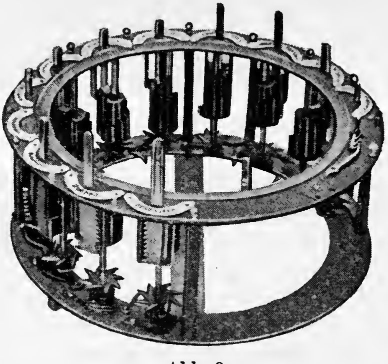


Abb. 9.

berg. Sie gestattet Berechnungen bis zu zwölf Stellen und ist noch jetzt in vollständig gangbarem Zustand. Wir geben in unseren Abb. 8, 9 und 10 das Zählwerk, das Schaltwerk und die fertige Maschine ohne Gehäuse wieder.

Die Hahnsche Maschine ist die erste brauchbare Rechenmaschine.

Eine andere Maschine wurde erfunden im Jahre 1783 von dem Ingenieurhauptmann J. H. Müller in Gießen. Sie befindet sich im Besitz des Großh. Hessischen Museums in Darmstadt (Beschreibung in Dycks Katalog).

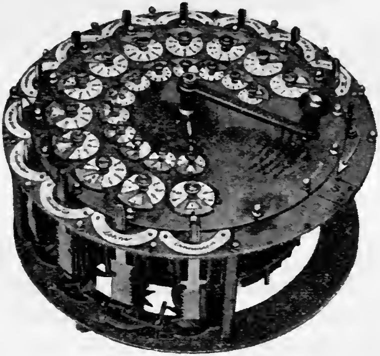


Abb. 10.

Allein eine weitere Verbreitung konnte sich weder die Hahnsche noch die Müllersche Maschine erringen; dies war erst der Thomasschen Maschine beschieden, so genannt nach ihrem Erfinder Thomas aus Colmar i. Els., der seinerzeit Versicherungsdirektor in Paris war. Wir kommen auf diese Maschine, die fortab den Grundtyp aller Rechenmaschinen, die erweiterte Additionsmaschinen sind, bildet, in § 3 ausführlich zu sprechen. Thomas erfand seine Maschine im Jahre 1821 und brachte sie 1822 zur Vollendung; er kannte aller Wahrscheinlichkeit nach die Hahnsche Maschine.

Die Thomassche Rechenmaschine wurde nun, nachdem sie allgemeinere Anwendung gefunden hatte, die Herstellung von Rechenmaschinen allmählich also zu einem Industriezweig geworden war, vielfach in ihren Konstruktionsteilen vervollkommnet und vervollständigt. In Deutschland nahm der Ingenieur Arthur Burkhardt in Glashütte i. Sa. im Jahre 1878 zuerst die Fabrikation der Thomasschen Rechenmaschine mit Erfolg auf. Durch eine Reihe hervorragender Verbesserungen ist sein „Arithmometer“ heute eine der besten und technisch vollendetsten Rechenmaschinen.

Da wir in § 4 auf mehrere moderne Rechenmaschinen eingehen wollen, so soll die weitere geschichtliche Entwicklung nicht verfolgt werden. Erwähnt sei jedoch, daß die erste eigentliche Multiplikationsmaschine, also eine Maschine, die die Teilprodukte durch eine einzige Drehung gibt, im Jahre 1888 von Léon Bollée konstruiert wurde. Die gegenseitigen Produkte der Zahlen 1 bis 9 sind bei seiner Maschine dargestellt durch Paare von Stiften, deren Längen den Einern und Zehnern jener Produkte entsprechen. In diese Kategorie von Rechenmaschinen gehört die Rechenmaschine Patent Steiger.

§ 2. Hauptteile einer Rechenmaschine.

Zählwerk: Das Zählwerk ist meist dem dekadischen Zahlensystem angepaßt und daher je ein Element für Einer, Zehner, Hunderter usw. vorgesehen. Die Elemente sind gewöhnlich zylindrische Scheiben, auf deren ebenen oder krummen Flächen die Ziffern 0, 1, 2, . . ., 9 einmal oder mehrmals angebracht sind. Die Drehungsachsen der

Scheiben können parallel sein und in einer Ebene liegen (Pascal, Leibniz, Thomas), oder aber Mantellinien eines Zylinders bilden (Hahn, Müller usw.), oder endlich zusammenfallen, so daß die Ziffernscheiben sich auf gemeinsamer Welle nebeneinander befinden. Letzte Anordnung (Odhner, Selling, Küttner, Bollée usw.) hat den Vorteil geringer Raumbeanspruchung und leichten Überblicks, da die Ziffern eng aneinander stehen.

Die Zehnerübertragung ist eine Einrichtung derart, daß, wenn irgend eine Ziffernscheibe über die Stellung, in der sie 9 zeigt, hinausgedreht wird, die Ziffernscheibe nächsthöherer Ordnung sich um eine Stelle weiterbewegt; diese Einrichtung kann so getroffen werden, daß sich diese Weiterdrehung ganz plötzlich vollzieht, oder aber so, daß bei jeder Drehung einer beliebigen Ziffernscheibe die nächsthöhere sich $^1/_{10}$ so schnell dreht, daß also bei einer vollen Umdrehung einer Scheibe die nächsthöhere sich um eine Ziffer weiterbewegt.

Es sind vier Arten von Schaltwerken in Anwendung gekommen. Am häufigsten kamen Stufen- oder Staffelwalzen zur Anwendung; eine solche Walze ist ein Zylinder mit neun Zähnen von verschiedener Länge. In der Regel ist für Einer, Zehner, Hunderter usw. je eine Stufenwalze vorgesehen. Solche Walzen verwandten Leibniz (siehe Abb. 6) und Hahn (siehe Abb. 9). Eine zweite Konstruktionsart verwendet Zahnräder, von deren Zähnen sich beliebig viele nach innen schieben und dadurch unwirksam machen lassen. Dieses Schaltwerk verwandte Odhner, Büttner, Küttner usw. (siehe § 4). Schaltwerke mit gezahnten Rädern, die, sobald von ihren Zähnen die gewünschte Zahl gewirkt hat, außer Eingriff mit den Zahnrädern, welche die Drehung der Ziffernscheiben vermitteln, gebracht werden, hat z. B. der englische Viscount Charles Mahan bei seiner im Jahre 1777 konstruierten, vorzüglich arbeitenden Maschine verwendet. Ebenso Bollée und Steiger. Endlich kann die Anordnung auch so getroffen werden, daß die Glieder des Schaltwerks sich mit verschiedener Geschwindigkeit bewegen. Diese Konstruktion verwandte Selling bei seiner Maschine vom Jahre 1886.

Eine große Bedeutung für die Brauchbarkeit der Rechenmaschine hatte die Einrichtung der Verlegbarkeit des Schaltwerkes gegen das Zählwerk (oder umgekehrt); damit ist möglich, das 10-, 100-, . . .-fache einer beliebigen im Schaltwerk eingestellten Zahl durch eine einzige Handbewegung auf das Zählwerk zu übertragen. Die Verlegung erfolgt von Hand, mittels besonderer Kurbel oder mittels der schon vorhandenen Kurbel (Steiger).

Zur Ermöglichung der Subtraktion trugen früher die Ziffernscheiben eine zweite (rote) Ziffernreihe in umgekehrter Reihenfolge; der Drehsinn der Elemente war daher stets derselbe. Später ging man zur Rückwärtsdrehung über und es fand diese die weiteste Verbreitung. Thomas, Bollée und jetzt auch Steiger drehen die Kurbel immer in demselben Sinne, bewirken aber durch ein Wendegetriebe, daß nach Einstellen eines Hebels oder eines Knopfes auf „Subtraktion" oder „Division" die Ziffernscheiben des Zählwerkes ihre Bewegungen umkehren.

Ein weiterer Maschinenteil ist das Nebenzählwerk, auch „Quotient" genannt. Dieses zeigt beim Multiplizieren den Multiplikator, beim Dividieren den Quotienten.

Eine weitere, sehr vorteilhafte Einrichtung für eine Rechenmaschine ist der sogenannte Auslöscher, durch diesen werden sämtliche Ziffernscheiben des Zählwerks in die Nullstellung gebracht. Die Auslöscher werden meist durch Hebel oder Knopf in Tätigkeit gesetzt.

Macht die Maschine selbst einen Fehler, oder wird ihr eine unmögliche Operation zugemutet, so ertönt ein Glockensignal.

Manche Maschinen werden mit Druckvorrichtungen versehen; mechanischem Antrieb scheint man weniger Beachtung zu schenken.

§ 3. Die Thomassche Rechenmaschine.

Da die Thomassche Rechenmaschine zu allen erweiterten Additionsmaschinen die Grundlage abgegeben hat, sei eine kurze Beschreibung derselben gegeben. Zur Erläuterung diene unsere Abb. 11.

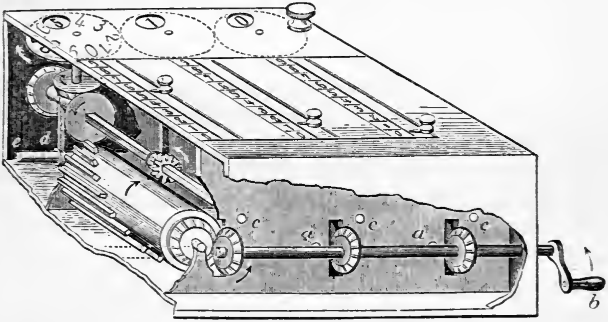


Abb. 11.

Die Maschine hat eine Reihe gezahnter Walzen mit horizontalen, parallelen Achsen a. Die erste Stufenwalze ist sichtbar. Durch die Kurbel b und die ersichtliche Triebachse und Triebräder werden die Walzen in Bewegung gesetzt. Schräg über jeder Walze liegt eine zwischen ihren Zapfen c vierkantige Achse, auf der sich ein Zahnrädchen mit zehn Zähnen beliebig verschieben läßt. Die Stellung des Rädchens wird auf dem Deckel der Maschine durch einen Knopf mit Zeiger markiert. Wie leicht ersichtlich, steht es vermöge der ungleichen Länge der leistenförmigen Walzenzähne uns frei, das Rädchen bei einer Kurbeldrehung um neun oder weniger Zähne sich weiterbewegen zu lassen; es hängt dies lediglich von der Stellung ab, die wir dem Rädchen geben. Auf der Skala neben dem Knopf auf dem Deckel läßt sich ablesen, um wieviel Zähne sich das Rädchen bei einer Kurbelbewegung weiterbewegt. Seine Bewegung überträgt dieses Rädchen durch Kegelgetriebe sofort auf ein Zifferblatt mit den 10 im Kreisumfang eingeschriebenen Ziffern 0 bis 9, welches über dem verlängerten Teil der vierkantigen Achse und unter dem Deckel horizontal angebracht ist, und von welchem stets nur eine Ziffer durch ein Schauloch im Deckel sichtbar wird. Wie aus der Abbildung leicht ersichtlich, läßt sich jede Ziffernscheibe recht- oder rückläufig einstellen, je nachdem man das vordere oder das hintere Kegelzahnrad auf der vierkantigen Achse in das Kegelzahnrad unter der Ziffernscheibe eingreifen läßt. Stellt man nun z. B. die Zeigerknöpfe von vier nebeneinanderliegenden Walzen der Reihe nach auf die Ziffern 1, 2, 3, 4, das Kegelgetriebe an der vierkantigen Achse durch den Stellhebel *d* auf Addition und zeigen die vier entsprechenden Zifferblätter Null, so erscheint nach einer Kurbeldrehung in den vier Schaulöchern des Deckels die Zahl 1234, nach einer zweiten Drehung das Doppelte, 2468. Um nun durch fernere Kurbeldrehungen auch das Drei- und Mehrfache der Zahl 1234 zu erhalten, ist eine Vorrichtung nötig, welche nach jeder vollen Umdrehung eines Zifferblattes das nächste zur Linken um einen Zahn weiterbewegt.

Das kann einfach durch einen Stift geschehen, der aus dem ersten Zifferblatt hervorragt und in die Zähne des nächsten dann eingreift, wenn jenes zur Rechten eben von 9 auf 0 übergehen soll. Nur darf das linke Zifferblatt nicht in Bewegung sein, sonst wäre das Eingreifen des Stiftes wirkungslos. Es muß also noch dafür gesorgt werden, daß die Zähne jeder Walze zur Linken erst in das Zahnrädchen des Vierkants eingreifen, wenn der Nachbar zur Rechten seine Bewegung schon vollzogen hat. Hierdurch wird die Konstruktion kompliziert und wir wollen nicht weiter darauf eingehen. Der Teil des Deckels, welcher die Zifferblätter trägt, also das Zählwerk ist gegen die Zeigerknöpfe (Schaltwerk) verschiebbar, wodurch die schon früher erwähnte Multiplikation mit 10, 100 usw. durch eine Handbewegung möglich ist. Durch Umstellung des Stellhebels *d* ist es möglich, auch Subtraktionen und Divisionen vorzunehmen. Ein Nebenzählwerk, das in der Abbildung nicht eingezeichnet ist, bringt den Quotienten zur Darstellung. Auch die Stellung des Kommas läßt sich durch Elfenbeinknöpfchen zwischen den Schaulöchern angeben. Durch einen Auslöscher lassen sich sämtliche Zifferblätter wieder auf Null stellen.

§ 4. Einige moderne Rechenmaschinen.

Der Arithmometer von Ingenieur A. Burkhardt in Glashütte i. Sa.

Burkhardt stellt die Thomassche Maschine in Deutschland seit 1878 her und hat sie seither bedeutend vervollkommnet, so daß die heutige Burkhardtsche Maschine eine der vollkommensten Maschinen ist. Eine eingehende Beschreibung dieser Maschine hat Reuleaux in seiner Broschüre „Die sogenannte Thomassche Rechenmaschine“

gegeben. Diese ist von der Burkhardtschen Fabrik (2,2 M.) zu beziehen. Wir fassen uns hier unter Verweisung auf jene Schrift sehr kurz.

Die Staffelwalzen sind auf $\frac{16}{25}$ ihrer Oberfläche vollkommen zylindrisch, der übrige Teil von $\frac{9}{25}$ ist besetzt von 9 Zähnen verschiedener Länge, wie wir die Anordnung bereits kennen. Thomas hatte den Trommelumfang in 22 Teile geteilt. Denkt man sich eine Mantellinie in 10 Teile geteilt, so ist der längste Zahn 9 Teile lang usw. Diese Staffelwalzen greifen in ähnlicher Weise wie bei der Thomasschen Maschine in verschiebbare Zahnräder ein. Die sämtlichen Walzen stehen durch konische Räder mit einer Längstransmission so in Verbindung, daß bei einer Umdrehung der Kurbel sich auch alle Walzen je einmal umdrehen. Die Zehnerübertragung und die gesamte Inneneinrichtung ist sehr ausführlich in obenerwähnter Schrift erläutert.

Eine andere Maschine ist die von Professor Selling (Universität Würzburg), hergestellt von Max Ott, mech. Werkstätte für Präzisionsmechanik in München. Nach Ott verdankt die Maschine ihre Entstehung der Absicht, die Mängel der Thomasschen Rechenmaschine — das einförmige Kurbeldrehen und die stoßweise erfolgende Zehnerübertragung — zu umgehen. Die Maschine, die unsere Abb. 12 veranschaulicht, besteht aus zwei getrennten Mechanismen, welche während des Arbeitens in Verbindung miteinander gebracht werden. Dies sind: 1. die Nürnberger Schere mit den Zahnstangen und der Klaviatur zum Einstellen des Multiplikanden, 2. die Zahn- und Zahlenräder, alle auf einer gemeinsamen Achse drehbar, welche die Längsbewegung der Zahnstangen aufnehmen und dieselbe in eine rotierende verwandeln und zwecks der Zahnübertragung durch sogenannte Planetenräder unter sich miteinander in Verbindung gebracht sind; dadurch ist ein fehlerhaftes Funktionieren, wie es bei Federungen vorkommt, ausgeschlossen. Das eigentliche Rechnen erfolgt durch Öffnen und Schließen der Nürnberger Schere mittels des Handrings; die Größe dieser Bewegung ist durch den Multiplikator bedingt.

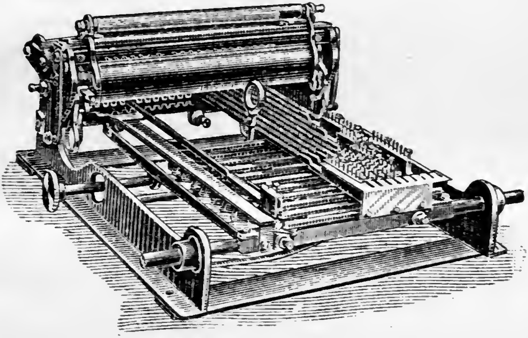


Abb. 12.

Die von Odhner (Petersburg) erfundene Rechenmaschine, die seit 1892 als „Brunsviga" in Deutschland vertrieben wird, hat an Stelle von Staffelwalzen Zahnräder, an welchen durch Einstellung von innen heraus nach Bedarf mehr oder weniger Zähne (von 0 bis 9) wirksam gemacht werden können. Die Maschine steht anderen Konstruktionen an Zuverlässigkeit nach, hat aber doch große Verbreitung gefunden.

Als leistungsfähigste erweiterte Additionsmaschine bezeichnet Mehmke die Rechenmaschine von Küttner, Duplex-Rechenmaschine genannt. Sie wird gebaut vom Mechaniker W. Heinitz, Dresden, Lortzingerstr. 27. Küttner verwendet an Stelle der Stufenwalze ebenfalls ein Schaltrad mit neun radialen Einschnitten, die zur Aufnahme der verschiebbaren Zähne dienen. Die Zähne sind auf der einen Seite mit Stiften versehen, die sich in einem konzentrisch gebrochenen Schlitz der mit dem Schaltrad verbundenen Stellscheibe führen. Je nachdem diese Stellscheibe mehr oder weniger gedreht wird, tritt eine größere oder kleinere Anzahl von Zähnen aus der Peripherie des Schaltrades heraus. Ein selbsttätiges unerwünschtes Drehen der Stellscheibe wird durch eine Sperrfedervorrichtung verhindert. Die Registrierräder sitzen lose auf ihrer Welle auf und sind durch Stifte, die sich in eingedrehten Nuten der Welle führen, an der seitlichen Verschiebung gehindert. Um zu verhindern, daß durch die lebendige Kraft, die den bewegten Registrierrädern innewohnt, eine Rotation desselben weiter fortgesetzt wird, als es den im Eingriff gestandenen Zähnen entspricht, ist zwischen Schalt- und Registrierwerk ein eigenartiges Sperrwerk eingeschaltet, das eine absolute Zwangsläufigkeit der Registrierräder bedingt. Die Zehnerübertragung besorgt ein auf der Zahltrommel zwischen den Zahlen 5 und 6 angebrachter, dem nächsthöheren Schaltrad zugekehrter Stift. Dieser stößt bei der Drehung des Registrierrades an einen Hebel, der auf dem nächsthöheren Schaltrade einen sogenannten Zehnerzahn derartig stellt, daß er zum Eingriff mit dem ihm zugehörigen Trieb kommt und diesen um einen Zahn dreht. Eine sehr eingehende Beschreibung findet der Interessent in Dinglers Polytechnischem Journal, 77. Jahrgang, 300. Band (1896).

Als eine sehr brauchbare Rechenmaschine bezeichnet man auch die Rechenmaschine von Otto Büttner. Eine Ansicht derselben gibt unsere Abb. 13. Die Maschine hat keine Umsteuerung, da die Kurbel sich auch rückwärts drehen läßt. Der Quotient hat einen eigenen Auslöscher; im Stellwerk stehen die Ziffern immer in gerader Linie nebeneinander, so daß jede eingestellte Zahl bequem abgelesen werden kann; das Lineal *L* ist nach vorn geneigt, was die Übersicht ebenfalls erleichtert. Geliefert wird die Maschine von der Firma W. Brückner in Dresden.

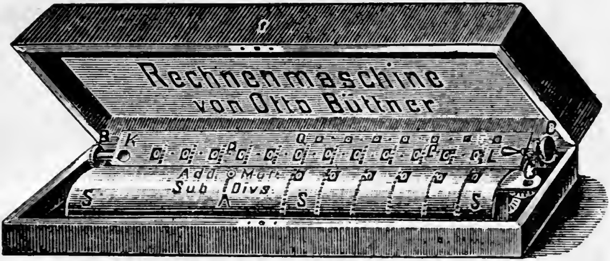


Abb. 13.

§ 5. **Die Multiplikationsmaschine von Egli** (Pat. Steiger).

Wie schon erwähnt wurde, hat Bollée die erste eigentliche Multiplikationsmaschine konstruiert; die einzige heute im Handel befindliche Multiplikationsmaschine ist die Rechenmaschine „Millionär", Patent O. Steiger, ausgeführt von Ingenieur Hans W. Egli in Zürich II, Albisserstr. 2.

Die Ansicht dieser Maschine zeigt unsere Abb. 14. Der Hauptvorteil der Maschine besteht darin, daß für jede Stelle des Multiplikators oder Quotienten nur eine einzige Kurbeldrehung auszuführen ist, während welcher sich die notwendige Verschiebung des Resultats automatisch vollzieht. Äußerlich sehen wir an der Maschine rechts oben die Handkurbel, daneben befindet sich die Umstellungsvorrichtung, mittels welcher man die Maschine für die verschiedenen Rechnungsoperationen (Addition, Multiplikation usw.) einstellt. Daneben ist oben das Einstellbrett mit seinen Knöpfen und Skalen angebracht, und in der linken Ecke sieht man den Multiplikations-

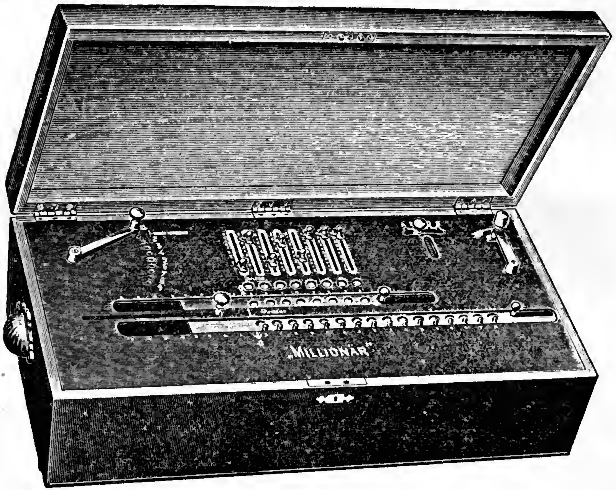


Abb. 14.

hebel. Die Reihe unter den Schlitzen der Einstellknöpfe ist eine Kontrollreihe. Die unterste Ziffernscheibenreihe zeigt die Resultate, die darüber befindliche, also mittlere Ziffernscheibenreihe ist eine Kontrollreihe für die Stellung des Multiplikationshebels. Die beiden rechts befindlichen Knöpfe führen die Ziffernscheiben in die

Nullstellung zurück, mittels des größeren Knopfes links wird das Registrierwerk verschoben.

An der Rechenmaschine „Millionär“ lassen sich drei Hauptmechanismen unterscheiden:

a) der Multiplikationsmechanismus,

b) der Übertragungsmechanismus,

c) das Registrierwerk, das seinerseits in zwei Teile zerfällt, wovon der eine die Produkte aufzeichnet, während der andere den Multiplikator registriert und nicht absolut notwendig ist.

Der Multiplikationsmechanismus besteht aus dem sogenannten Einmaleinskörper und seiner Einstellvorrichtung, welche ihm eine Bewegung in vertikaler, in horizontaler Längsrichtung und in horizontaler Querrichtung gestattet. Der Einmaleinskörper besteht aus neun Zungenplatten, wovon:

die	erste	die	Produkte	von	1	bis	9 mal	die	Zahl	1
„	zweite	„	„	„	1	„	9 „	„	„	2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„	neunte	„	„	„	1	„	9 „	„	„	9

enthält, wodurch also das ganze Einmaleins dargestellt ist. Jedes dieser Produkte ist durch zwei Zungen ausgedrückt, wovon die eine den Zehnerwert, die andere den Einerwert des in Frage stehenden Produkts durch die entsprechende Anzahl Längeneinheiten repräsentiert. Sämtliche Zehnerwerte einer Zungenplatte bilden eine Gruppe für sich, ebenso sämtliche Einerwerte. Es wirken diese Gruppen nacheinander auf den Übertragungsmechanismus und das Registrierwerk. Der Übertragungsmechanismus besteht aus neun parallel liegenden Zahnstangen und aus den quer darüber gelagerten Achsen, an denen Zahnrädchen mittels Einstellknöpfe verschoben und dadurch mit irgend einer der neun Zahnstangen in Eingriff gebracht werden können. Die Einstellung erfolgt nach dem Wert der betreffenden Multiplikandenstelle. Auf diesen Achsen sitzen ferner, in der Achsenrichtung verschiebbar, je ein Paar Kegelrädchen, welche die der Längsbewegung der Zahnstangen entsprechende Drehung der Zahnrädchen auf das Registrierwerk übertragen, sowohl in positivem Sinne bei Multiplikation, als in negativem Sinne bei Division. Durch entsprechende Ein- und Ausrückungsmechanismen werden diese Kegelrädchen periodisch mit dem Registrierwerk in und außer Eingriff gebracht, so daß nur die Bewegung der Zahnstangen beim Verschieben übertragen wird, während das Zurückführen derselben das Registrierwerk nicht beeinflußt. Die Enden der Zahnstangen liegen entweder der Zehner- oder der Einergruppe der Zungen einer Zungenplatte gegenüber. Der Wechsel der Gruppen wird durch die kleine horizontale Querverschiebung des Einmaleinskörpers besorgt, während die Einstellung der verschiedenen Zungenplatten durch Verschieben des Multiplikationshebels längs einer Skala erfolgt. Nach Übertragung der Zehnerwerte wird das Registrierwerk automatisch um eine Stelle nach links zu verschoben.

Der Preis dieser äußerst empfehlenswerten Maschine bebeträgt 1050 M., was gegen die andern Rechenmaschinen wohl viel ist; beachtet man aber die große Zeitersparnis, die mit dieser Maschine erzielt werden kann, so ist die Maschine sehr billig zu nennen.

Kapitel IV.

Die Grundoperationen des graphischen Rechnens.

Das graphische Rechnen ist der Inbegriff aller Methoden zur Lösung von Aufgaben der Analysis durch Konstruktionen, die durch Lineal, Zirkel, Maßstab und andere Zeichengeräte ausführbar sind. Im allgemeinen stellt man hierbei die reellen Zahlengrößen durch Strecken dar, die nach einem gewöhnlichen oder auch nach einem logarithmischen Maßstab aufgetragen sein können. Die Vorzüge der graphischen Methoden bestehen hauptsächlich in ihrer Anschaulichkeit und ihrer bequemen Ausführbarkeit; auf der andern Seite ist ihre Genauigkeit eine beschränkte. Manche Aufgaben der Analysis sind überhaupt nur graphisch lösbar, bei andern bietet die graphische Lösung eine willkommene Ergänzung zur analytischen. Im folgenden seien zunächst die Grundoperationen graphisch gelöst; bei diesen treten die Vorteile der graphischen Methoden noch nicht so sehr zutage.

A. Gleichmäßig geteilter Maßstab.

§ 1. Graphische Addition.

Unter graphischer oder geometrischer Addition versteht man die Aneinanderreihung von Strecken nach Größe, Richtung und Sinn in der Weise, daß jedesmal der Endpunkt der vorhergehenden Strecke den Anfangspunkt der nächstfolgenden bildet. Die Summe erhält man, indem man den Anfangspunkt des sich ergebenden Linienzuges mit dessen Endpunkt verbindet; diese Verbindungslinie stellt die Summe aller Strecken des Zuges dar. Sie heißt auch Resultante zu den gegebenen Strecken, die dann Komponenten heißen.

Aus dieser Definition ergibt sich sofort, daß die Summe einer gegebenen Anzahl von Strecken Null ist, wenn sich der aus den Strecken konstruierte Linienzug schließt. Hinsichtlich der Lage können die zu addierenden Strecken folgende verschiedene Fälle aufweisen:

1. die Strecken haben gleiche Richtung, d. h. sie sind parallel;
2. die Strecken haben verschiedene Richtung, liegen aber in einer Ebene oder sind zu dieser Ebene parallel;
3. die Strecken haben verschiedene Richtung im Raum.

Im Fall 1 werden die Strecken auf ein und derselben Geraden nach ihrem Sinn aneinandergereiht; die Strecke zwischen dem Anfangspunkt der ersten Strecke und dem

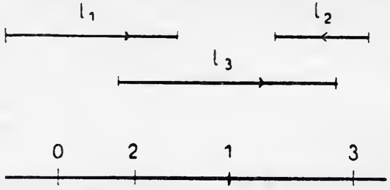


Abb. 15.

Endpunkt der letzten Strecke bildet die Summe der gegebenen Strecken. Zur Erläuterung diene unsere Abb. 15; $\overline{01}$ stellt die Strecke l_1, $\overline{12}$ die Strecke l_2 und $\overline{23}$ die Strecke l_3 dar; $\overline{03}$ ist die Summe, es ist:

$$\overline{03} = l_1 + l_2 + l_3 .$$

Zur Erläuterung des zweiten Falles diene unsere Abb. 16. Es seien gegeben die Strecken l_1, l_2, l_3, l_4 und l_5; dieselben sollen alle in der Zeichnungsebene liegen oder zu derselben parallel sein; man bilde die Summe der gegebenen Strecken. Man geht von einem Anfangspunkt 0 aus und konstruiert aus den gegebenen Strecken den Linienzug 012345, indem man durch den Anfangspunkt 0, bzw. durch den Endpunkt der unmittelbar voran-

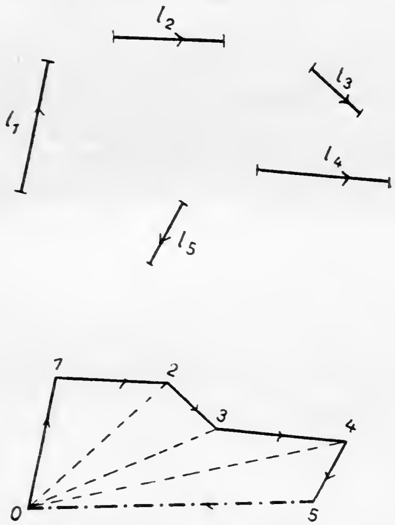


Abb. 16.

gehenden Strecke Parallelen zieht zu den gegebenen Strecken und diesen Parallelen dieselbe Größe und denselben Sinn gibt wie jenen. Die Schlußlinie des polygonalen Zuges stellt die gesuchte Summe nach Größe und Richtung dar; in unserer Abbildung ist also:

$$\overline{05} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 .$$

Das Summierungspolygon 012345 gibt aber nicht nur die Gesamtsumme der gegebenen Strecken, sondern auch die Partialsummen der einzelnen Strecken. So ist z. B. $\overline{02}$ die Summe von l_1 und l_2 nach Größe und Richtung, oder es ist ferner:

$$\overline{04} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \, .$$

Die Summe von zwei oder mehreren Summanden bleibt indes ungeändert, wenn man die Reihenfolge der Summanden beliebig ändert. In unserer Abbildung bildet $\overline{04}$ die Summe von l_1, l_2, l_3 und l_4; genau dieselbe Strecke $\overline{04}$ erhalten wir als Summe durch die Reihenfolge l_1, l_4, l_2, l_3, wie aus der Abbildung deutlich hervorgeht. Wir finden also

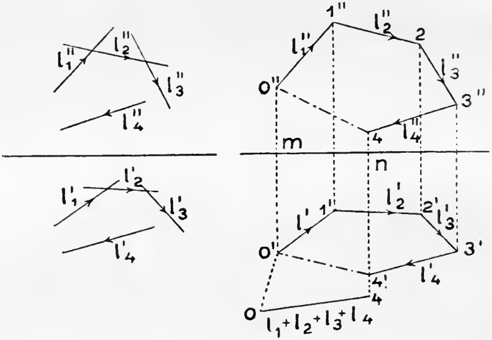


Abb. 17.

auch im graphischen Rechnen den Satz bestätigt, daß für das Ergebnis der Addition die Reihenfolge der Summanden gleichgültig ist.

Liegen die Strecken beliebig im Raume, wie dies der Fall 3 vorsieht, so sind zur Bestimmung der Lage und Größe dieser Strecken bekanntlich zwei Projektionen derselben nötig. Man verschafft sich daher die beiden Projektionen l_1', l_2', l_3', ... und l_1'', l_2'', l_3'', ...; konstruiert die beiden Projektionen des Summenpolygons $0'1'2'3'$ ... und $0''1''2''3''$ ... Durch die beiden Projektionen $0'n'$ und $0''n''$ der Schlußseite $0n$ ist dann die Summe der gegebenen Strecken, d. h. $0n$ vollkommen bestimmt (vgl. darstellende Geometrie). Dieser Fall ist in unserer Abb. 17 zur Darstellung gebracht, die verständlich sein dürfte; $\overline{04}$ ist die wahre Größe der Summenstrecke.

§ 2. Graphische Subtraktion.

Da die Subtraktion eine Addition mit umgekehrtem Vorzeichen oder graphisch eine Addition im entgegengesetzten Sinne ist, so erledigt sich diese Operation von

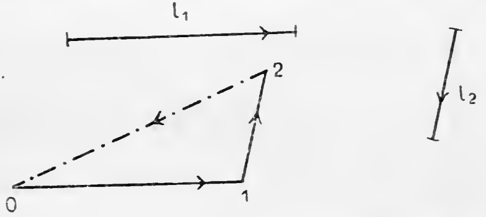


Abb. 18.

selbst. Ist $l_1 - l_2$ zu bilden, so hat man an den Minuend l_1 den Subtrahend l_2 in entgegengesetztem Sinne anzureihen; in unserer Abb. 18 ist $\overline{02} = l_1 - l_2$.

§ 3. Graphische Addition und Subtraktion von Brüchen oder Verhältnissen.

Als Voraufgabe ist für diese Operationen die Aufgabe: $\frac{a}{b}$ auf einen beliebigen Nenner n zu bringen, zu lösen.

Bezeichnen wir den gesuchten Zähler mit x, so ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{n}$$

oder:

$$a : b = x : n\,,$$

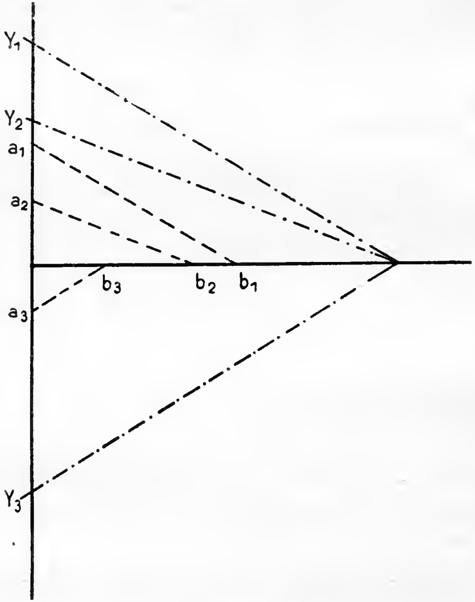


Abb. 19.

daß x die vierte geometrische Proportionale zu a, b und n ist. Wir konstruieren diese nach bekannter Weise; wir tragen auf einem Winkelschenkel vom Scheitel aus den

Zähler a ab und auf dem andern Schenkel die Nenner b und n; verbinden a mit b und ziehen durch n eine Parallele nx, dann ist $0x$ der gesuchte Zähler, wenn 0 der Scheitel ist.

Hieraus ergibt sich ohne weiteres die graphische Konstruktion der algebraischen Summe einer Anzahl von Brüchen. In nebenstehender Abb. 19 ist die Summe:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{n} = \frac{z}{n}$$

graphisch gebildet.

§ 4. Graphische Multiplikation.

1. Es seien zwei Verhältnisse miteinander zu multiplizieren, also ein Produkt zu bilden von der Form:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{y}{n} .$$

Zur Lösung dieser Aufgabe gibt es verschiedene Konstruktionen; wir geben nur eine, und zwar eine sehr gebräuchliche wieder.

Man trägt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Nenner b_1 und b_2 als Abszissen (vom Anfangspunkt an) auf und die Zähler als zugehörige Ordinaten. In unserer Abb. 20 sei $Ob_1 = b_1$, $Ob_2 = b_2$; $b_1 a_1 = a_1$ und $b_2 a_2 = a_2$. Durch a_1 und a_2 ziehen wir die radii vectores L_1 und L_2. Nun wählen wir eine beliebige Abszisse Ox_1, errichten die Ordinate $x_1 y_1 = y_1$ und machen $Ox_2 = y_1$; dann errichtet man $x_2 y_2 = y_2$ und $\frac{y_2}{x_1}$ ist das gesuchte Produkt.

Beweis: Es ist:

$$\triangle O\, a_1\, b_1 \sim \triangle O\, y_1\, x_1$$

und:

$$\triangle O\, a_2\, b_2 \sim \triangle O\, y_2\, x_2\,;$$

also bestehen die Proportionen:

$$\frac{a_1\, b_1}{O\, b_1} = \frac{y_1\, x_1}{O\, x_1}$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{y_1}{x_1}\,,$$

und ferner:

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_2}\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2}\,.$$

Nun ist aber:

$$x_2 = y_1\,,$$

folglich:

$$\underline{\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_1 \cdot y_2}{x_1 \cdot y_1} = \frac{y_2}{x_1}\,.}$$

Wählen wir nun das beliebige x_1 gleich der Konstruktionseinheit, so erhalten wir:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = y_2\,,$$

also gleich einer Strecke.

Hat man das Produkt aus einer Reihe von Verhältnissen zu bilden, so hat man obiges Verfahren einfach wiederholt anzuwenden. Das gesuchte Produkt ist $\frac{y_n}{x_1}$, oder wenn $x_1 = 1$ gemacht wird, gleich y_n.

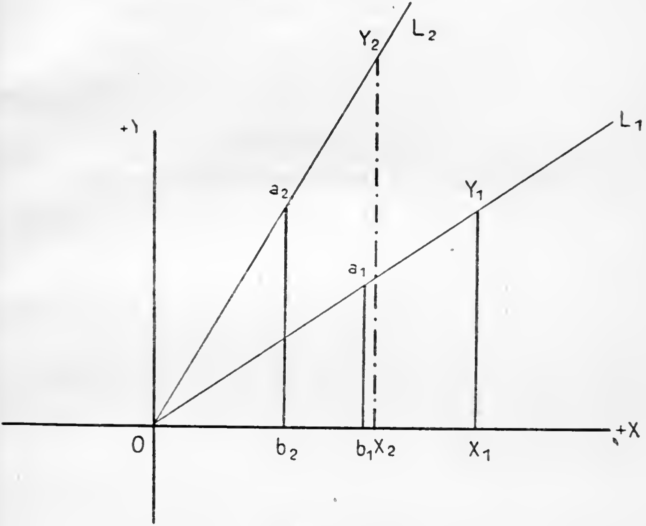


Abb. 20.

2. Es sei das Produkt aus mehreren gegebenen Strecken $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ zu bilden.

Man hat hier nur zu bedenken, daß $a_1 = \frac{a_1}{1}$, $a_2 = \frac{a_2}{1}$ usf., und man verfährt dann nach obiger Konstruktion. Zu demselben Auskunftsmittel greift man, wenn man eine Anzahl von Verhältnissen mit einer Anzahl von Strecken zu multiplizieren hat.

Ist nur ein Verhältnis mit einer Strecke zu multiplizieren, also das Produkt zu bilden:

$$\frac{a}{b} \cdot c = y\,,$$

so kommt man mit einer einfacheren Konstruktion zum Ziel; es ergibt sich nämlich:

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{c}\,,$$

so daß y die vierte geometrische Proportionale zu a, b und c ist, welche nach bekannter Weise konstruiert wird.

3. Hat man ein gegebenes Verhältnis $\frac{a}{b}$ mit einer Reihe von Strecken $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ zu multiplizieren, so hat man zu je drei der gegebenen Strecken die vierte geometrische Proportionale zu konstruieren. Man trägt a und b als zusammengehörige Ordinaten auf und erhält dann durch den Radiusvektor jedes zu c gehörige y. Diese Methode leistet gute Dienste für Umwandlungstafeln. Es sei z. B. eine Reduktionstafel von Zoll in Millimetern herzustellen. Das Verhältnis ist: $1'' = 26{,}154$ mm. Tragen wir nun eine Abszisse $= 1$ auf und in ihrem Endpunkt eine Ordinate von der Länge 26,154 und ziehen durch den Endpunkt dieser Ordinate einen Radiusvektor, so erhalten wir zu jedem Zollmaß als Abszisse aufgetragen den Wert in Millimetern durch die Länge der zu der Abszisse gehörigen Ordinate.

§ 5. **Graphische Division.**

Da die Division die Umkehrung — und zwar die einzige — der Multiplikation ist, so verwandle man jede

Division in eine Multiplikation und verfahre nach den in § 4 gemachten Regeln. Ist z. B. zu bilden:

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2},$$

so hat man:

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2},$$

was nach § 4 leicht konstruiert werden kann. Spezielle Fälle kann man sich leicht selbst zurechtlegen.

§ 6. **Graphisches Potenzieren.**

1. Es soll die n-te Potenz eines Verhältnisses $\frac{a}{b}$ gebildet werden. Man verfährt nach der in § 4 gegebenen Regel für Multiplikation so oft, als n angibt. In unserer Abb. 21 konstruieren wir $\left(\frac{-a}{b}\right)^n$. Es ist: $O b = b$, $b a = -a$. $O x_1$ wähle ich beliebig, eventuell gleich der Konstruktionseinheit. Ich mache $O x_2 = x_1 y_1$ (negativ!) und errichte $x_2 y_2 = y_2$, und es ist:

$$\frac{-a}{b} = \frac{-y_1}{x_1}$$

$$\left(\frac{-a}{b}\right) \cdot \left(\frac{-a}{b}\right) = \left(\frac{-a}{b}\right)^2 = \frac{+y_2}{+x_1}.$$

Nun mache ich

$$O x_3 = x_2 y_2$$

und errichte

$$x^3 y_3 = y_3,$$

und es ist:

$$\left(\frac{-a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{-a}{b}\right) = \left(\frac{-a}{b}\right)^3 \cdot \frac{-a}{b} = \frac{-y_3}{x_1} \quad \text{usf.}$$

Ist ein Verhältnis zu einer negativen Potenz zu erheben, so mache man Gebrauch von der Formel:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n .$$

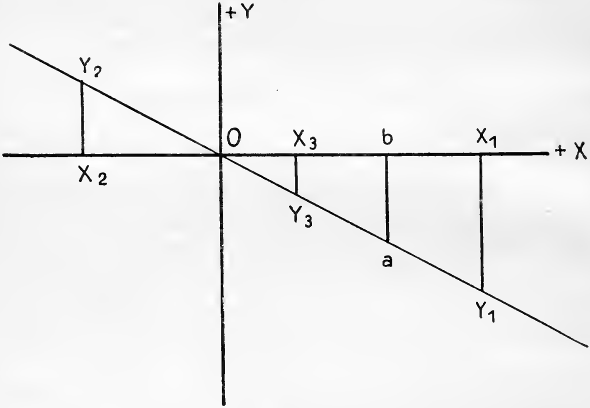


Abb. 21.

2. Die n-te Potenz von Strecken kann man auf dieselbe Weise erhalten, indem man $a^n = \left(\frac{a}{1}\right)^n$ setzt und ebenso verfährt wie unter 1.

Die einfachste Konstruktion der Potenzen von Strecken erhält man jedoch mittels der logarithmischen Spirale. Reiht man in Abb. 22 eine Anzahl ähnlicher Dreiecke aneinander, so zwar, daß die bei O liegenden Winkel α, α_1, α_2 usw. einander gleich sind und jede durch den gemeinsamen Scheitel O gehende Seite zwei Dreiecken gemeinsam ist, so entsteht, wenn die Winkel α unendlich klein werden, aus dem Polygon $ABCD\ldots$ eine Kurve, die man logarithmische Spirale nennt. Es leuchtet sofort ein, daß die Gleichung gilt:

$$\frac{l_1}{l_0} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_3}{l_2} = \ldots = \frac{l_n}{l_{n-1}}.$$

Setzt man den Wert dieses konstanten Verhältnisses gleich c, so wird:

$$l_1 = l_0 \cdot c;$$
$$l_2 = l_1 \cdot c = l_0 \cdot c^2;$$
$$l_3 = l_2 \cdot c = l_0 \cdot c^3$$

usw. Wählen wir $l_0 = 1$, so ist $c = l_1$ und es wird:

$$l_1 = l_1$$
$$l_2 = l_1^2$$
$$l_3 = l_1^3$$

usf., d. h. die aufeinanderfolgenden Leitstrahlen bilden die Potenzen von l_1, wenn sie miteinander denselben Winkel α bilden, welchen l_1 mit $l_0 = 1$ bildet.

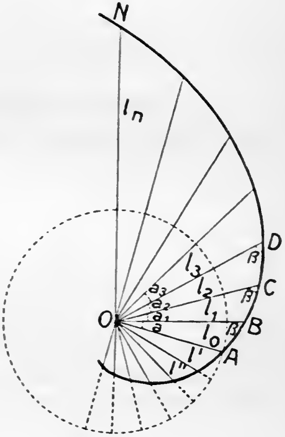


Abb. 22.

Die Konstruktion der logarithmischen Spirale läßt sich wie folgt bewerkstelligen. Man trage l_0 auf einer Geraden ab (siehe Abb. 22 a) und beschreibe bei diesem Abtragen einen größeren Kreisbogen; auf diesem trage man von l_0 aus l_1 als Sehne ab, wodurch der Verhältniswinkel φ bestimmt ist. Beschreibt man nun mit l_1 als Radius den Kreisbogen um O, so erhält man l_2 usw. Trägt man dann diese Leitstrahlen l_0, l_1 usw. nach Abb. 22 auf und wählt hierbei α möglichst klein, so erhält man die gesuchte Spirale. Die Punkte unter l_0 erhält man, indem man in einer Hilfsfigur mit l_1 einen Kreisbogen beschreibt (siehe Abb. 22 b) und l_0 als Sehne aufträgt usw. Hat man nun l^n zu

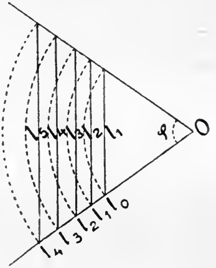


Abb. 22 a.

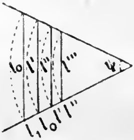


Abb. 22 b.

konstruieren, so durchschneide man die Spirale von O aus mit den Radien $OA = 1$ und $OB = l_1$, verbinde die erhaltenen Durchschnittspunkte A und B mit O und trage den hierdurch erhaltenen Winkel n-mal im Kreise herum; dann ist der zu $n\,\alpha$ gehörige Leitstrahl $ON = l^n$.

Hat man $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ zu konstruieren, so bilde man $\frac{a}{b} = \frac{y}{1}$ und konstruiere y^n. Für a^{-n} hat man den Winkel $n \cdot \alpha$ in entgegengesetzter Richtung zu bilden.

§ 7. Graphisches Radizieren.

Mit Berücksichtigung des vorigen Paragraphen ergibt sich folgende Regel.

Hat man zu bilden

$$x = \sqrt[n]{l_1},$$

so durchschneide man die Spirale von O aus mit der Einheitsstrecke OA und mit der Strecke $OB = l_1$, verbinde die beiden Schnittpunkte A und B mit O und teile den von diesen Strahlen eingeschlossenen Winkel in n gleiche Teile. Der durch den ersten Teilstrich gehende Leitstrahl gibt die gesuchte Wurzel.

Aus der Planimetrie ergeben sich für manche Spezialfälle einfache Konstruktionen, die wir in Hinweis auf Nr. 41 dieser Sammlung als bekannt voraussetzen dürfen.

B. Logarithmischer Maßstab.

Den logarithmischen Maßstab haben wir hinreichend bei der Beschreibung des gewöhnlichen Rechenschiebers kennen gelernt; jeder logarithmische Rechenschieber ist aus logarithmischen Maßstäben zusammengesetzt. Die Rechenoperationen des Multiplizierens, Dividierens, auch die des Potenzierens und Radizierens bieten uns keinerlei Schwierigkeit. Es ist nur noch einiges zu erwähnen über die Aufgabe, die zum Logarithmus der Summe zweier Größen gehörige Strecke Oc zu finden, wenn die Logarithmen der beiden Größen als Strecken, nicht aber ihre Zahlenwerte gegeben sind. Es soll also:

$$Oc = \log(\alpha + \beta)$$

gesucht werden, wenn:

$$Oa = \log\alpha$$

$$Ob = \log\beta$$

gegeben sind, nicht aber α und β.

Setzen wir nun:

$$ab = \log\beta - \log\alpha = \log\frac{\beta}{\alpha} = \log t\,,$$

so wird:

$$\begin{aligned} bc &= \log(\alpha + \beta) - \log t - \log\alpha \\ &= \log\alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \log t - \log\alpha \\ &= \log\alpha + \log(1 + \mathrm{t}) - \log t - \log\alpha \\ &= \log\frac{1+t}{t} = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

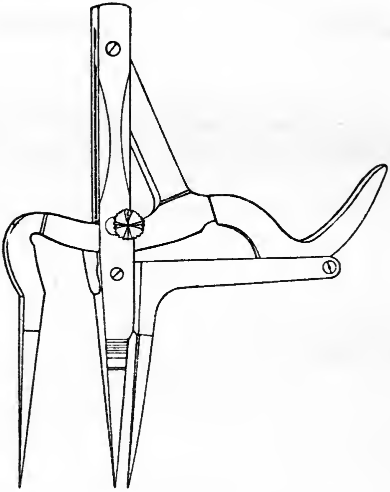


Abb. 23.

Zeichnet man daher im voraus für die Längeneinheit des Grundmaßstabes eine „A d d i t i o n s k u r v e“, deren Punkte man durch Auftragen zusammengehöriger Werte von $\log t$ und $\log\left(1+\frac{1}{t}\right)$ als Abszissen und Ordinaten erhält, so hat man, um den Punkt c zu finden, bloß die Strecke ab mit dem Zirkel auf der Abszissenachse der Additionskurve abzutragen, die zugehörige Ordinate abzugreifen und bc gleich dieser zu machen. Bequemer ist noch die Anwendung des logarithmischen Zirkels von Prof. E. A. Brauer in Karlsruhe. Unsere Abb. 23 veranschaulicht denselben. Dieser mit drei Spitzen I, II und III versehene Zirkel ist so eingerichtet, daß, wenn zwischen die Spitzen I und II eine Strecke gefaßt, deren Länge — mit einem Maßstab von 50 mm Längeneinheit gemessen — gleich $\log t$ ist, der Numerus t auf dem Teilbogen abgelesen werden kann, während die Spitzen II und III sich von selbst auf die Entfernung $\log\left(1+\frac{1}{t}\right)$ einstellen. Man setzt also für unsere Aufgabe die Spitze I auf a, öffnet, bis II auf b steht, dann gibt die dritte Spitze den Punkt c. Mit denselben Mitteln lassen sich auch Logarithmen subtrahieren.

Kapitel V.

Graphisch-mechanische Flächenbestimmung.

Wir beschränken uns in diesem Kapitel lediglich auf Berechnungen unregelmäßiger Flächen, die in Plänen aufgezeichnet sind, und erwähnen auch hier nur kurz die wichtigsten Hilfsinstrumente, da der Stoff dem Plan des vorliegenden Bändchens schon ferner liegt. Ist ein Polygon zu berechnen, so leistet die Verwandlung desselben in ein inhaltsgleiches Dreieck — nach bekanntem geometrischen Verfahren — sehr gute Dienste. Zur Erleichterung dieser Verwandlungen hat Vermessungsinspektor Hoffmann ein Hilfsinstrument — das Hofmannsche Verwandlungsplanimeter — konstruiert. Das Instrument besteht aus einem Lineal, an welches sich ein Arm anlegt, dessen Drehpunkt in die obere Kante des Lineals fällt. Mit dem Arm ist ein Ring fest verbunden, der sich bei der Drehung in einem an dem Lineal befestigten Ringe bewegt. Auf den beweglichen Ring drückt ein Hebel durch die Wirkung einer Feder, welche unter demselben angebracht ist; soll aber der Arm frei bewegt werden, so wird die Hemmung durch den Druck auf das Ende des Hebels aufgehoben. Eine Gebrauchsanleitung ist enthalten in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1874.

Ein Näherungsverfahren besteht bekanntlich darin, daß man ein Netz von Parallelen (Fadennetz, „Harfe“) auf die zu messende Fläche legt; man ermittelt dann die Summe der in der Mitte zwischen den Netzlinien gemessenen Längen der entstehenden Streifen durch Abgreifen und mechanisches Addieren mit dem Zirkel, so daß man durch Multiplikation dieser Summe mit dem Abstand der Parallelen die Fläche erhält. Man hat hierzu auch Additionszirkel konstruiert, welche bis zu einem festen Anschlag eine konstante runde Länge geben und durch ein Zählrädchen die Anzahl der vollen Anschläge zählen.

Zeichnet man die zu berechnende Fläche auf Millimeterpapier, etwa im Maßstab 1 : 100, so hat man einfach die mittleren Höhen der Flächenstreifen mechanisch mit dem Zirkel zu addieren und kann direkt mittels der erhaltenen Zirkelöffnung auf dem Papier den gesuchten

Inhalt abstechen (Zirkeladdition). Mittels dieser Methode rechnet der Straßen- und Eisenbahnbautechniker den Inhalt seiner Querprofile zur Erstellung der Erdberechnung. Man kann die Zeichnung, wenn sie nicht auf Millimeterpapier gefertigt ist, auch mit einer Glasplatte, die ein Quadratnetz trägt, bedecken und wie oben verfahren.

Zur Berechnung von unregelmäßigen Figuren, wie Diagrammen, Konstruktionsrissen von Schiffen usw., verwendet der Techniker Umfahrungsplanimeter. Das bekannteste und verbreitetste Planimeter dieser Art ist das Amslersche Polarplanimeter, das von J. Amsler 1856 erfunden wurde. Gebaut wird dasselbe in verschiedenen Ausführungsformen von der Firma J. Amsler-Laffon & Sohn in Schaffhausen in der Schweiz. Wenn größere Genauigkeit verlangt wird, wie dies in der Geodäsie und im Schiffsbau häufig verlangt wird, so verwendet man mit Vorteil Amslers Scheibenlinearplanimeter oder Coradis Kugelrollplanimeter. Diese Instrumente sind in jedem Lehrbuch der Vermessungskunde beschrieben (vgl. auch mein Büchlein: Das mechanische Rechnen des Ingenieurs).

Ein Instrument, welches durch einmaliges Umfahren nicht nur den Flächeninhalt, sondern auch das statische und das Trägheitsmoment der umfahrenen Fläche in bezug auf eine beliebige Gerade gibt, ist das Integrometer oder der Integrator der Firma Amsler-Laffon & Sohn.

Die gebräuchlichste Form des Integrators zeigt unsere Abb. 24. Der Integrator besteht aus einem Wagen, dessen beide scharfkantige Räder in der geraden Nut eines Führungslineals laufen, in welcher sie vermöge der gleichmäßigen Belastung durch das Instrument selbst und das Gegengewicht gehalten werden. Der Wagen trägt auf einem rahmenartigen Gestell drei ineinandergreifende Zahnräder, die um Achsen senkrecht zur Zeichenebene drehbar sind. Die Durchmesser der Zahnräder verhalten sich wie 3 : 2 : 1. An dem mittleren Rade ist eine Stange befestigt, welche einen Fahrstift trägt, mit dem die zu messende Figur umfahren wird. An der Stange und den beiden äußeren Zahnrädern sind die Rollen A, J und M angebracht. Die Achse von A

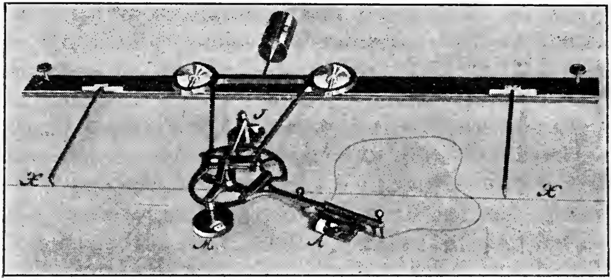


Abb. 24.

ist parallel zur Stange. Wird die Stange in eine zur Nut des Lineals parallele Lage gebracht, so ist die Achse der Rolle M senkrecht, die der Rolle J parallel zur Nut. Die bei der Verschiebung des Wagens vom Mittelpunkt des mittleren Zahnrades beschriebene gerade Linie ist die Achse $X—X$, auf welche sich die Momente beziehen.

Während Planimeter und Integrator durch Umfahren einer Figur mit dem Fahrstift das Ergebnis der hierdurch erfolgten mechanischen Integration, also den Flächeninhalt der Figur in einer an der Meßrolle ablesbaren Zahl anzeigen, zeichnet der Integraph der Firma G. Coradi in Zürich während des Umfahrens der Figur eine Kurve auf, aus welcher nicht nur das Endergebnis, sondern auch der Verlauf der Integration ersichtlich ist. Die aufgezeichnete Kurve heißt die Integralkurve zu der durchfahrenen Kurve, die ihrerseits die Differentialkurve heißt. Näheres ist aus der Beschreibung der Firma ersichtlich.

Zum Schluß sei noch erwähnt: Für Auswertung von Indikatordiagrammen wird in letzter Zeit vielfach der Wildasche Flächenmesser besonders empfohlen, der im Verlag Jänecke in Hannover erschienen ist. Er besteht aus einer Tafel von durchsichtigem Zelluloid, die mit einem Quadratnetz bedruckt ist; er ist dem Harfenplanimeter nachgebildet, hat jedoch diesem gegenüber den Vorteil einfacherer Handhabung und macht Zirkel und Maßstab entbehrlich. Daß seine Angaben dem eines Amslerschen Polarplanimeters ebenbürtig sind, möchte Verfasser dahingestellt sein lassen; für langgestreckte Diagramme mag er gute Dienste leisten. Sein Preis beträgt einschließlich Gebrauchsanweisung 2 Mark.

Kapitel VI.

Graphische Darstellung von Funktionen und graphische Tafeln.

§ 1. Funktionsskalen. Rechentafeln mit vereinigten Skalen.

Es liege die Funktion vor:

$$y = f(x) .$$

Wir geben hierin der unabhängigen Variabeln x Werte α, die in arithmetischer Progression fortschreiten; die Funktionswerte $y = c \cdot f(x)$, worin c eine beliebig zu wählende Konstante bezeichnet, tragen wir als Abszissen auf einer Geraden von einem Nullpunkt aus auf. Die Teilpunkte bezeichnen wir durch Striche; an diese schreiben wir aber nicht die Funktionswerte an, sondern die Werte von x. Das hierdurch entstehende Schaubild heißt eine Skala der Funktion $y = f(x)$ oder eine Funktionsskala (échelle de la fonction). Die wichtigsten besonderen Arten von Funktionsskalen sind folgende:

$$y = f(x) = x\,, \tag{1}$$

$$y = f(x) = \log x\,, \tag{2}$$

$$y = f(x) = \frac{px + q}{rx + s}\,. \tag{3}$$

Die durch (1) definierte Skala heißt die gewöhnliche, gemeine oder reguläre Skala, (2) gibt die uns bekannte logarithmische Skala, (3) umfaßt die sogenannte projektive Skala. Sie ist eine beliebige Zentralprojektion einer geradlinigen gemeinen Skala; in der Perspektive ist sie bekannt unter der Bezeichnung „perspektivischer Maßstab“.

In der gemeinen Skala (1) stimmen Arguments- und Funktionswert überein. Ist daher mit einer Skala $y = f(x)$ die zugrunde liegende gemeine Skala auf derselben Linie nach der andern Seite verzeichnet, so kann man gegenüber der Stelle der ersten Skala, an welcher irgend ein Wert x steht, den Wert von $y = f(x)$ ablesen und umgekehrt kann zu jedem Funktionswert das Argument abgelesen werden. Wir erhalten nach dieser Methode also auf einfache Weise graphische Tafeln.

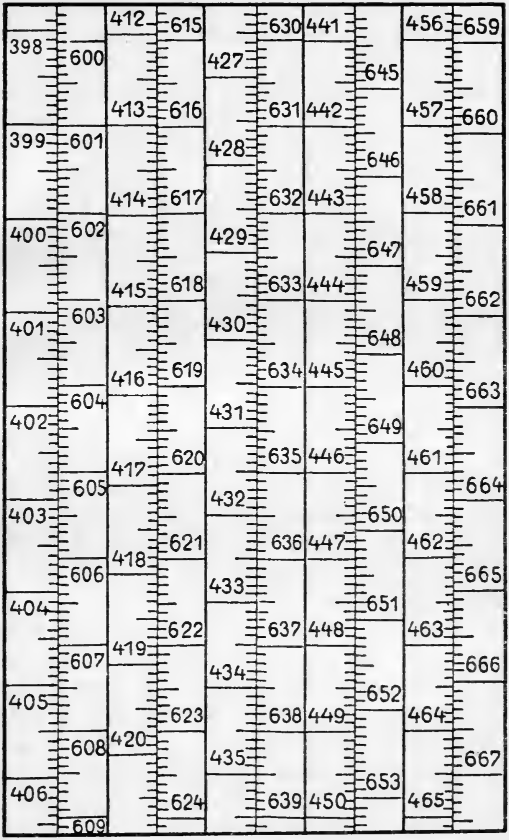


Abb. 25.

Tafeln dieser Art sind die graphischen Logarithmen-Tafeln von Oberingenieur Anton Tichy. Wir geben einen Bruchteil der Tafel der gemeinen Logarithmen aus Tichys Tafeln in unserer Abb. 25 wieder; wir können aus diesem Teil z. B. direkt ablesen: $\log 4 = 0{,}60206$. An die gemeinen Logarithmen schließt Tichy noch verschiedene weitere graphische Tafeln an, so Logarithmentafeln der trigonometrischen Tafeln, eine Tafel für compl. $\log \cos^2\alpha$, eine Sehnentafel für den Radius 100, die vorzugsweise zum Messen aufgezeichneter Winkel dient. Man trägt auf beiden Winkelschenkeln vom Scheitel aus 100 mm auf und mißt den Abstand beider Punkte in Millimetern; mit diesem sucht man in der Tafel den zugehörigen Winkelwert. Eine weitere Tafel trägt den Titel: „Gradteilung der Achteckseite für Radius 200“. Sie dient zum Zeichnen von Winkeln auf dem Papier nach gegebenem Gradmaß. Werden die beiden Bogenenden eines Oktanten von 200 mm Radius durch eine Sehne verbunden, so ist dies die reguläre Achteckseite. Denkt man sich am Oktantenbogen alle 45 Grade mit Unterteilung jedes Grades von $0{,}05^0$ zu $0{,}05^0$ oder von $3'$ zu $3'$ aufgetragen und Radien durch die Teilpunkte gezogen, so schneiden alle diese Radien auf der Achteckseite bestimmte Strecken ab; die linke Seite der Skala enthält das Gradmaß, die rechte ebendiese Strecken vom Anfangspunkt der Achteckseite an gerechnet. Die weitere „Tafel der Kreisbogenlängen für den Radius 1“ dient zur Bestimmung von log sin oder log tang sehr kleiner Winkel. Das Schlußtäfelchen gibt die Relation zwischen Dezimal- und Sexagesimalteilung. Weitere Beispiele von graphischen Tafeln mit nebeneinander verlaufenden Skalen bieten Dampfspannungsskalen neben denen der Temperatur usw.

§ 2. Graphische Darstellung der Funktion $y = f(x)$. Graphische Tafeln mit Koordinatennetz.

Ist eine Funktion:

$$y = f(x)$$

gegeben, so erhält man ein deutliches Bild vom Verlauf der Funktion y bei stetigem Zu- und Abnehmen des Arguments durch die graphische Darstellung. Hierbei trägt man die speziellen Zahlenwerte des Arguments (x_1, x_2, x_3 usw.) als Abszissen, die zugehörigen Funktionswerte (y_1, y_2, y_3 usw.) als Ordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf. Man erhält hierdurch eine Reihe von Punkten, welche durch eine kontinuierliche Linie, gewöhnlich eine Kurve, verbunden werden. Die Kurve oder Linie gibt das geometrische Bild der Funktion. Diese graphische Darstellung gewährt den leichtesten Überblick über die Art der Abhängigkeit der Funktion von ihrem Argument und ersetzt eine Tabelle zusammengehörender Werte (x_1, y_1) usw. Der Maßstab, in dem die Strecken aufgetragen werden, ist willkürlich; auch kann für die Abszissen ein anderer als für die Ordinaten gewählt werden.

Wie wir nun aus der analytischen Geometrie wissen, stellt jede Gleichung von der Form:

$$Ax + By + C = 0$$

eine Gerade dar; die graphische Darstellung einer linearen Funktion wird also stets eine Gerade sein.

Ferner lehrt uns die analytische Geometrie, daß jede Gleichung zweiten Grades von der Form:

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0$$

einen Kreis darstellt; die Gleichung:

$$Mx^2 + Ny^2 = k$$

für positives N und k eine Ellipse, für $-N$ und $\pm k$ eine Hyperbel; läßt sich eine vorgelegte Funktion auf eine der angegebenen Formen bringen, so ist ihr geometrisches Bild auch die entstehende Figur.

Die Gleichung:

$$y^2 + My + Nx + Q = 0$$

oder:

$$x^2 + My + Nx + Q = 0$$

stellt eine Parabel dar, und so wird auch eine Funktion von dieser Form als graphische Darstellung eine Parabel ergeben.

Ebenso wird die Funktion von der Form:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$

in ihrer graphischen Darstellung eine parabolische Kurve ergeben, wie die Funktion: $y^n = p x^r$ eine höhere Parabel zu ihrem geometrischen Schaubild haben wird.

Die graphische Darstellung von Funktionen von zwei Variabeln, für die das Abhängigkeitsverhältnis in Gleichungsform gegeben ist, ist uns also aus der analytischen Geometrie geläufig.

Ist aber auch das Abhängigkeitsgesetz zweier variablen Größen nicht durch eine Gleichung gegeben, sondern liegen nur einzelne zusammengehörige Werte der beiden Variabeln vor, so kann man hieraus eine Kurve verzeichnen, und nicht selten führt dann diese auf die gesuchte Gleichung.

Mit Hilfe dieser Darstellung von Funktionen in kartesischen Koordinaten läßt sich auch für die verschiedensten Zwecke eine graphische Rechentafel konstruieren, d. h. eine Tafel, die zu jedem Argument den zugehörigen Funktionswert gibt; ich habe nur nötig, die Kurve in eine mit einem Koordinatennetz bedeckte Koordinatenebene einzuzeichnen. Ja, ich kann dieses Koordinatennetz auch entbehren, wenn ich eine Glas- oder Zelluloidplatte habe, die das dem betreffenden Maßstab entsprechende Koordinatennetz trägt. Ich bringe dann diese mit dem Koordinatensystem der Kurve in entsprechende Deckung und mache die gewünschten Ablesungen, wobei ich die verschiedenen Werte der unabhängigen Variabeln auf der Abszissenachse aufsuche und die zugehörigen Ordinaten ablese. Man nennt eine solche Tafel eine Kurventafel oder ein Diagramm; solche kommen in der Praxis unzählige vor und sind hinlänglich bekannt.

§ 3. Graphische Darstellung von Funktionen mit zwei unabhängigen Variabeln.

Die allgemeine Form einer Funktion mit zwei unabhängigen Veränderlichen x, y ist:

$$z = f(x, y) .$$

Die graphische Darstellung dieser Funktion muß, da sie drei Dimensionen hat, im Raume erfolgen. Trägt man nun in unserer Abb. 26 auf den Achsen OX und OY zwei spezielle Werte $x = a = OP$ und $y = b = OQ$ auf und bestimmt den Punkt (a, b) in der Ebene OXY, so erhält man als solchen den Punkt N'. Errichtet man in N' eine Senkrechte und macht $N'N = z = f(a, b)$, so ist N derjenige Punkt des Raumes, welcher der Funktion $z = f(x, y)$ für $x = a$ und $y = b$ entspricht. Läßt man nun x und y nach und nach andere spezielle Werte annehmen und bestimmt die zugehörigen Werte von z, so erhält man hierdurch eine Reihe von Punkten im Raume, welche eine gewisse Fläche bestimmen, die den geometrischen Ort der Funktion $z = f(x, y)$ repräsentiert und deren Gestalt offenbar durch das Abhängigkeitsverhältnis $z = f(x, y)$ bedingt ist.

Nehmen wir nun für z einen konstanten Wert z_1 an und geben hierfür x und y alle möglichen Werte. Zeichnen wir die möglichen Punkte in der (XY)-Ebene auf, so erhalten wir eine Kurve $D'N'E'$, welche der Grundriß resp. die Horizontalprojektion einer Kurve DNE (OR sei der beliebige konstante Wert von z) ist, die auf der Fläche $z = f(x, y)$ liegt und zur Horizontalebene YOX im Ab-

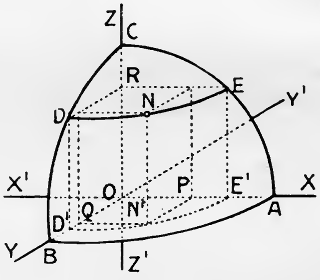


Abb. 26.

stand $OR = z_1$ parallel läuft. Auf dieselbe Weise läßt sich für verschiedene $z = z_2 = z_3 = z_4$ usw. eine Reihe solcher Kurven konstruieren; man erhält also eine Reihe von Horizontalkurven, die in hinreichend kleinem Abstand voneinander — zweckmäßig in gleichem — ein deutliches Bild der Fläche oder Funktion $z = f(x, y)$ geben. Man pflegt diese Horizontalkurven, da ein und dieselbe Kurve dem gleichen Wert für z entspricht, nach dem griechischen Wort für gleichwertig Isoplethen zu nennen. Man stellt die Funktion $z = f(x, y)$ in einer einzigen

Ebene dadurch dar, daß man den einzelnen Isoplethen die zugehörigen Werte von z einschreibt; man erhält so den Grundriß einer Reihe von Horizontalkurven der räumlichen Fläche und kann nun, wenn die z-Werte der einzelnen Kurven, sowie die Zahlenwerte von x und y gehörig eingetragen sind, sofort das zu bestimmten x und y gehörige z ablesen. Dem Techniker ist diese Darstellungsart aus den Höhenkurvenplänen geläufig. Bemerkt sei noch, daß die Horizontalprojektionen von z Gerade sind, wenn die Gleichung $z = f(x, y)$ vom ersten Grade ist, dagegen Kegelschnitte, wenn die Gleichung vom zweiten Grad ist.

§ 4. Graphische Tafeln für zwei Argumente mit Kurvenkreuzung. (Kartesische Rechentafeln.)

Die in § 3 enthaltenen Entwicklungen lassen unschwer erkennen, daß sich die angegebene Darstellung der Funktion $z = f(x, y)$ ganz vorzüglich zur Herstellung von Rechentafeln eignet, d. h. zur Herstellung graphischer Tafeln, aus denen für bestimmte x und y das zugehörige z abgelesen werden kann. Eine solche Tafel wird zwei Eingänge oder Köpfe haben müssen, je einen für das Argument x und für das Argument y, den ersten in horizontaler Zeile, den anderen in vertikaler Spalte. Im Kreuzungspunkt von Zeile und Spalte steht das zugehörige z; eventuell ist dasselbe durch Augenmaß zu interpolieren.

Ist allgemein die Gleichung gegeben:

$$z = ay + bx + c,$$

so erhält man, wenn man z der Reihe nach die speziellen Werte $z_1, z_2, z_3, \ldots$ usw. gibt:

$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{z_1 - c}{a} = -\alpha x + \beta_1 ,$$

$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{z_2 - c}{a} = -\alpha x + \beta_2 ,$$

$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{z_3 - c}{a} = -\alpha x + \beta_3$$

usf.

Die zugehörigen Isoplethen stellen also parallele Gerade vor, die sich nur durch eine Konstante β unterscheiden. Wählt man z_1, z_2, z_3, z_4 usw. in gleichen Intervallen, so werden die parallelen Isoplethen auch äquidistant sein. Damit sich diese Isoplethen zwischen den Koordinatenachsen möglichst gleichmäßig ausbreiten, ist es vorteilhaft, die Maßstabeinheiten für Abszissen und Ordinaten so zu wählen, daß die Isoplethen die Achsen möglichst unter 45^0 schneiden, was bekanntlich dann eintritt, wenn $\alpha = \pm 1$ ist. Diese Anordnung wird jedoch nicht in jedem Falle ohne weitere Änderungen getroffen werden können.

Als erstes Beispiel diene uns ein physikalisches. Bei der Reduktion des Luftdruckes nach den Ablesungen am Naudetschen Aneroid auf die entsprechenden Höhen des Quecksilberbarometers in Millimetern erfolgt die Umwandlung nach der Formel:

$$b = A + 0{,}65 + z ,$$

in welcher b den gesuchten Barometerstand, A die Angaben des Aneroids in Millimetern und z die Korrektion bedeutet, für welche die Formel gilt:

$$z = -0{,}15\,t + 0{,}04\,(760 - A) ,$$

worin t die Temperatur in Celsius angibt. Wir erhalten hieraus:

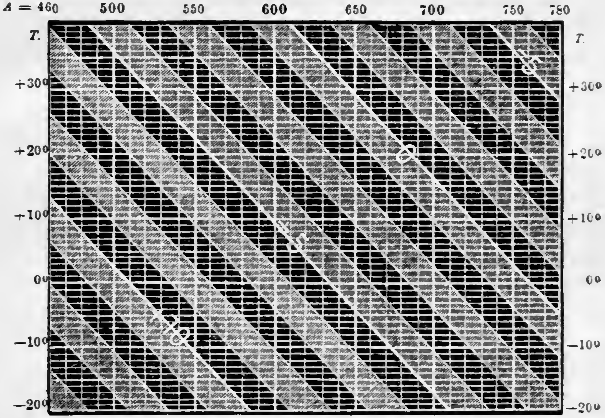
$$t = -\tfrac{4}{15} A + (202\tfrac{2}{3} - 6\tfrac{2}{3} z) .$$

Setzt man nun:

$$t = y\,; \qquad A = x$$

und geben wir z nacheinander die Werte 0, ± 1, ± 2 usw., so repräsentiert der Ausdruck in der Klammer eine Konstante β, und man erhält die Gleichung:

$$y = -\tfrac{4}{15} x + \beta ,$$



$b = A + 0{,}65 +$ *Korrektion.*

Abb. 27.

welche offenbar eine Gerade bestimmt, deren Konstante β dem jeweiligen Wert von z entspricht.

Um nun die Geraden, d. h. also die Isoplethen, nahezu unter 45^0 zu erhalten, wählt man die Einheiten der

Ordinatenachse viermal größer als die der Abszissenachse, denn $4 \cdot \frac{b}{a}$ wird $\frac{16}{15}$, also nahezu der Einheit gleich. In unserer Abbildung ist dies geschehn und die Isoplethen der Korrektion für jedes ganze Millimeter der Korrektion (z) entworfen. Wäre z. B. $y = 8^0$ und $x = 680$ mm, so findet man den Kreuzungspunkt dieser beiden Koordinaten auf der Isoplethe $z = 2$. Wir erhalten demnach:

$$b = 680 + 0{,}65 + 2 = 682{,}65 \text{ mm} .$$

Es sei noch ein weiteres Beispiel eingefügt. Ist p das in Gramm angegebene Gewicht des in 1 cbm Luft von t^0 C enthaltenen Wasserdampfes, dessen Spannkraft f mm ist, so besteht folgende Beziehung:

$$p = \frac{810 \cdot f}{760 + 2{,}78\, t} .$$

Die Spannkraft f ist als eine empirisch nach der Tabelle von Regnault bestimmte Funktion der auf dem Hygrometer abgelesenen Kondensationstemperatur t' gegeben zu denken. Sie ist in unserer Abbildung als Begrenzungskurve eingezeichnet, wobei $x = 3 \text{ mm} \cdot f$ und $y = 1{,}2 \text{ mm} \cdot t'$.

Setzen wir nun:

$$x = l_1 \cdot 810\, f ,$$

$$y = l_2 \cdot 278\, t ,$$

so erhalten wir:

$$y = \frac{l_2}{l_1\, p} \cdot x - 760\, l_2 .$$

Diese Gleichung stellt ein Büschel von Geraden dar, die durch den Punkt $x = 0$, $y = -l_2 \cdot 760$ mm gehen. In der Figur ist nun auf der Ordinatenachse die Temperaturskala, auf der oberen Geraden die Werte von p, welche den einzelnen ausgezogenen „Radianten" entsprechen, aufgetragen. Hierbei wurde $l_1 = 0{,}0037$ mm und $l_2 = 0{,}43$ mm gewählt. Ist nun $t = 30^0$ und $t' = 16^0$ gegeben, so suche man den Schnittpunkt der durch 16^0 zu der Abszissenachse gezogenen Parallelen mit der Kurve; diesen Schnittpunkt übertrage man mit Hilfe eines in der Richtung der Abszissenachse beweglichen „Index"

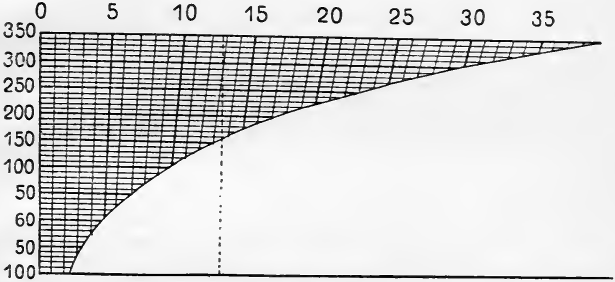


Abb. 28.

(gestrichelt gezeichnet) auf die durch 30^0 gehende Parallele zur Abszissenachse. Der Schnittpunkt beider bestimmt das gesuchte p; man findet 12,9 g.

Ist die Gleichung $z = f(x, y)$ eine Gleichung zweiten Grades, so werden die Isoplethen im allgemeinen zu Kegelschnittlinien; speziell erhält man für

$$z = xy$$

eine Schar gleichseitiger Hyperbeln. Diese Tafel ergibt, wie leicht einzusehen, eine graphische Produkten- und Quotiententafel (die Multiplikationstafel von L. E. Pouchet 1797). Sie veranschaulicht unsere Abb. 29. Wird z der Reihe nach gleich 0, 1, 2, 3, . . . gesetzt, so entspricht der obigen Gleichung eine Schar gleichseitiger Hyperbeln, welche die Koordinatenachsen zu Asymptoten haben und deren Abstände auf irgend eine Abszisse oder Ordinate gemessen gleich sind. Konstruiert man also zwei dieser Hyperbeln, so lassen sich die anderen leicht bestimmen. Das gesuchte Resultat ist stets in der Kreuzung von Zeile und Kolumne abzulesen resp. einzuschätzen.

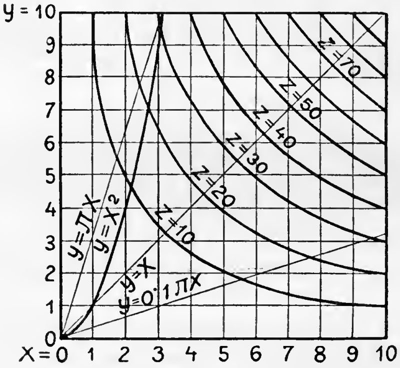


Abb. 29.

Natürlich ist auch eine vorgelegte Division ohne weiteres ausführbar. Man hat den Dividenden, d. h. dessen Zahlenwert als Kurve aufzusuchen, den Divisor ermittelt man auf der Abszissenachse, die dem Schnittpunkt beider entsprechende Ordinate gibt den Quotienten.

Es leuchtet natürlich ein, daß die Tafel um so brauchbarer wird, je größer ihre Ausführung, je weiter ihre Unterteilung getrieben ist.

Ist $y = x$, also $z = x^2 = y^2$, so entspricht der Gleichung $y = x$ eine Gerade, welche den Koordinatenwinkel halbiert. Am Schnitt der Koordinaten n steht n^2. Man kann also die Tafel auch zum Quadrieren und Quadratwurzelausziehen benutzen. Hat man allgemein eine Anzahl von Produkten z zu bilden, deren Faktoren x und y sich wie $1 : n$ verhalten, so liegen offenbar alle zugehörigen Koordinatenschnitte auf einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt 0 geht. Ist z. B. $n = \pi$, also $y = \pi x$, so liest man, wenn x gegeben ist, y als Ordinate des Durchschnittspunktes der Abszisse x mit jener Geraden ab, deren Projektionen auf Abszissen- und Ordinatenachse sich verhalten wie $1 : \pi$. In unserer Figur ist diese Gerade mit πx bezeichnet.

Zeichnet man einen Ast der Hyperbel $y = x^2$ ein, so leuchtet ein, daß man aus der Tafel auch die dritten Potenzen und Wurzeln erhält. Macht man $y = \frac{4}{3} \pi x^2$, so erhält man den Inhalt von Kugeln, deren Radien den Abszissen der Durchschnittspunkte entsprechen. Diese wenigen Andeutungen dürften zeigen, wie äußerst fruchtbar sich eine solche Tafel bei zweckmäßiger Ausgestaltung anlegen läßt. —

Der große Vorteil, den bei der Herstellung von graphischen Tafeln speziell parallele geradlinige Isoplethen bilden, legt die Frage nahe, ob und inwieweit es möglich ist, in allgemeinen Fällen eine solche Darstellungsweise zu ermöglichen. Leider müssen wir uns auf einen kurzen Hinweis beschränken.

Wir haben gesehen, daß sich das Produkt $z = x \cdot y$ durch eine Schar gleichseitiger Hyperbeln darstellen läßt. Diese Hyperbeln können aber nun sehr leicht durch parallele Gerade ersetzt werden, wenn man statt der Argumente deren Logarithmen einführt. Logarithmieren wir die gegebene Gleichung, so kommt:

$$\log z = \log x + \log y$$

oder, wenn wir:

$$\log z = w\,, \qquad \log x = v \qquad \text{und} \qquad \log y = u$$

setzen:

$$w = v + u\,.$$

Diese Gleichung stellt für spezielle Werte von w gerade Linien vor, die gegen die Koordinatenachsen unter 45^0 geneigt sind. Eine solche transformierte Tafel ist genau zu gebrauchen wie die ursprüngliche kartesische Tafel, nur sind die Achsen gemäß den Funktionen $x = \varphi(v)$ und $y = \psi(u)$ zu teilen; in unserem Falle ist die Koordinatenteilung also eine logarithmische. Wir geben einen Teil einer solchen Tafel in unserer Abb. 30; die Diagonale — in unserer fragmentalen Abbildung natürlich nicht Diagonale — ist wieder die Quadratlinie. Zieht man durch den Anfangspunkt eine Linie $u = 2\,v$, welche der Gleichung:

$$\log y = 2 \log x$$

$$y = x^2$$

entspricht, so daß

$$z = x \cdot y = x^3 \text{ wird,}$$

so geben die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Isoplethen die Kuben der zugehörigen Abszissen. Zu bemerken ist noch, daß sich die durch 1 gehende Kubuslinie nur für Zahlenwerte bis 3 verwenden läßt; für größere Zahlen ist die durch den oberen Endpunkt der Quadratlinie gehende Kubuslinie zu benutzen; hierbei sind die zugehörigen Isoplethenwerte um 10 zu vermehren.

Diese Transformationen wurden von Léon Lalanne eingeführt und dienen in erster Linie zum „Geradstrecken“

krummliniger Isoplethen; die Transformation wurde von Lalanne als geometrische Anamorphose bezeichnet.

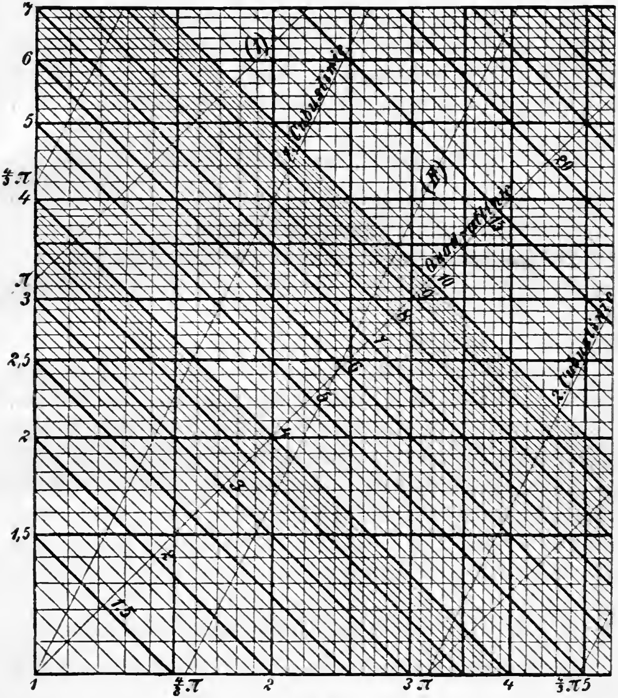


Abb. 30.

Einen Vergleich mit dem Rechenschieber hält die logarithmische Rechentafel sicherlich aus. In ihrer Vielseitigkeit ist sie dem Rechenschieber überlegen, höhere Potenzen lassen sich mit der Rechentafel bequemer bestimmen, die Änderungen des Papieres sind ohne Einfluß. Der Rechenschieber seinerseits ist handlicher und dauerhafter, wenn auch teurer.

Die geometrische „Anamorphose“ leistet bei der Herstellung graphischer Rechentafeln außerordentliche Dienste; leider können wir uns nicht weiter mit der Angelegenheit befassen; wir verweisen auf die angegebene Literatur.

§ 5. Kollineare Rechentafeln.

Eine neuere Methode zur Herstellung graphischer Rechentafeln beruht darauf, daß an Stelle von Kurven, die mit Zahlenwerten beschrieben sind, sogenannten kotierten Kurven, kotierte Punktreihen benutzt werden. Die Anwendung dieser Tafeln wird charakterisiert durch den Satz: „Die Gerade, welche die den gegebenen Werten α_1 und α_2 entsprechenden Punkte der Punktreihen verbindet, schneidet die dritte Skala (α_3) in einem Punkte, dessen Kote α_3 die gesuchte Größe α_3 ergibt.“ Solche Tafeln gestalten sich übersichtlicher, sind genauer und bequemer zu handhaben; ein Eingehen auf diese Tafeln würde uns hier zu weit führen; wer sich näher interessiert, der sei auf d'Ocagne und Schilling (siehe Literaturübersicht) verwiesen.

§ 6. Graphische Lösung numerischer Gleichungen.

Eine sehr beliebte Anwendung der graphischen Methoden zur Herstellung von Rechentafeln bildet die graphische Lösung numerischer Gleichungen. Wir gehen an dieser Stelle nur kurz auf die Methode von Professor Mehmke an der Technischen Hochschule Stuttgart (Zivilingenieur Bd. 35, 1889) ein. Die meisten Verfahren zur graphischen Auflösung einer Gleichung mit einer

Unbekannten x entspringen dem folgenden Gedanken. Man trennt nach irgend einem Grundsatz die Glieder der gegebenen Gleichungen in zwei durch das Gleichheitszeichen verbundene Gruppen, d. h. man stellt die Form her:

$$f(x) = g(x) \, .$$

Wird jede Seite gleich y gesetzt, so zerfällt die ursprüngliche Gleichung in die beiden ihr gleichwertigen:

$$y = f(x) \, , \quad y = g(x) \, .$$

Wenn man x und y als Koordinaten eines Punktes betrachtet, so stellen die beiden Gleichungen zwei Kurven dar. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte dieser Kurven sind alsdann die gesuchten Wurzeln. Statt der sich so ergebenden Kurven zeichnet Mehmke ihre logarithmischen Umformungen, d. h. er zeichnet x und y mit einem logarithmischen Maßstab auf. Bei der Teilung der Gleichung bringt man die positiven Glieder auf die eine, die negativen auf die andere Seite. Zugleich denke man sich die Veränderliche x zunächst positiv, man erhält so nur die positiven Wurzeln. Alsdann setze man $x = -x$, man erhält so eine Gleichung, deren ebenso zu bestimmende Wurzeln ihrem absoluten Wert nach gleich den negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Besteht die Gleichung bloß aus einem Gliede, z. B.

$$y = a\,x^m \, ,$$

so ist:

$$\log y = \log a + m \log x \, .$$

Das Bild dieser Gleichung ist eine Gerade.

Sind zwei Glieder vorhanden, etwa

$$y = a\,x^m + \mathrm{b}\,x^n \, ,$$

so wird das logarithmische Bild dieser Gleichung eine Kurve sein. Einen Punkt dieser Kurve erhält man leicht, nämlich den Schnittpunkt mit der Y-Achse. Für ihn ist $\log x = 0$, also $x = 1$, folglich $\log y = \log(a + b)$. Um weitere Punkte zu finden, zeichne man zunächst die beiden geraden Linien, welche nach dem Vorausgehenden zu den einzelnen Gliedern gehören. Eine beliebige Parallele zur Y-Achse schneide die X-Achse, jene beiden Geraden und die gesuchte Kurve beziehentlich in den Punkten o, p, q, r. Setzt man nun $a x^m = P$ und $b x^n = Q$, so ist:

$$o p = \log P\,,$$

$$o q = \log Q\,,$$

$$o r = \log(P + Q)\,.$$

Wir haben also den Punkt r zu bestimmen aus der bekannten Lage von p und q. Wir finden:

$$q r = o r - o q = \log(P + Q) - \log Q = \log\left(1 + \frac{1}{\frac{Q}{P}}\right),$$

also hängt $q r$ nur von $\frac{Q}{P}$ resp. $\log\frac{Q}{P} = \log Q - \log P$ $= o q - o p$, d. h. von $p q$ ab. Diese Abhängigkeit läßt sich durch eine Kurve, die sogenannte Additionskurve, darstellen, wie wir schon früher gehört haben. Man setze:

$$p q = u\,,$$

$$q r = v\,,$$

$$\frac{Q}{P} = z\,,$$

dann ist:

$$u = \log z\,,$$

$$v = \log\left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

Gibt man z eine Reihe von Werten, berechnet u und v und trägt u als Abszissen, v als Ordinaten auf, so ergeben sich Punkte der Additionskurve. Um den Punkt r aus den Punkten p und q zu finden, suche man zu $p\,q = u$ als Abszisse die Ordinate v der Additionskurve und mache $q\,r$ gleich derselben. Ich erinnere hierbei den Leser an den früher erwähnten logarithmischen Zirkel von Brauer. Man erhält auf diese Weise sehr leicht und rasch eine genügende Anzahl von Kurvenpunkten.

Ist y aus mehr als zwei Gliedern zusammengesetzt, so zeichne man wieder die zu den einzelnen Gliedern gehörigen Geraden. Sind p, p_1, p_2, p_3 ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Parallelen zur Ordinatenachse, r der zugehörige Punkt der gesuchten Kurve, dann muß r so bestimmt werden, daß

$$o\,r = (\log P + P_1 + P_2 + \ldots . + P_k)\,,$$

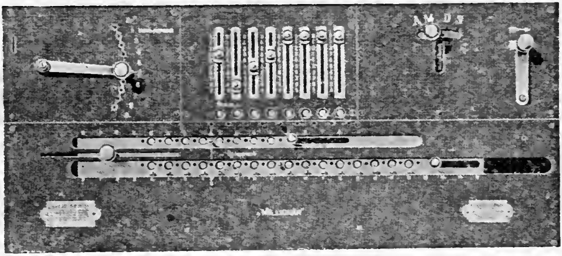
wo

$$o\,p = \log P, \quad o\,p_1 = \log P_1, \quad \ldots, \quad o\,p_k = \log P_k\,.$$

Man geht hier schrittweise vor, indem man zuerst auf die gezeigte Art mittels der Additionskurve aus p und p_1 einen Hilfspunkt r' ableitet, so daß $o\,r' = \log(P + P_1)$ usw. ist, bis man schließlich zum gesuchten Punkt r gelangt.

Bemerkt soll noch werden, daß die dem Gliede mit dem höchsten Exponenten und ebenso die dem Gliede mit dem niedrigsten Exponenten entsprechende Gerade Asymptote an die beim logarithmischen Verfahren zur

Auflösung der Gleichung dienende Kurve ist. Sind die Koeffizienten der Gleichung alle positiv, so hat die Kurve keine Wendepunkte und ist nach oben offen. Beispiele praktischer Anwendungen finden sich in oben zitiertem Aufsatz.



Gegründet 1878.

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Berlin u. Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.

Agrikulturchemie. I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Agrikulturchemische Kontrollwesen, Das, von Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Akustik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— **Musikalische,** v. Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Univers. Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik u. Algebra v. Dr. H. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Prof. an der Universität Graz. Mit 19 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 129.

Altertümer, Die deutschen, v. Dr. Franz Fuhse, Direktor d. städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.

Altertumskunde, Griechische, von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearb. von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

— **Römische,** von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollb. Nr. 45.

Amphibien siehe: Tierreich III.

Analyse, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— — Repetitorium und Aufgabensammlung z. Differentialrechnung v. Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

— — **II:** Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium i. Stuttgart. M. 89 Fig. Nr. 88.

Analysis, Höhere. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 50 Fig. Nr. 147.

— **Niedere,** von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Prof. an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Arbeiterversicherung, Die, v. Prof. Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra v. Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Armenwesen u. Armenfürsorge. Einführung in die soziale Hilfsarbeit von Dr. Adolf Weber in Bonn. Nr. 346.

Ästhetik, Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an d. Kgl. Akademie der bildenden Künste in Stuttgart. Nr. 300.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. F. Wislicenus, Prof. a. d. Univers. Straßburg. Mit 36 Abb. u. 1 Sternk. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.

Aufgabensammlg. z. Analyt. Geometrie d. Ebene v. O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.

— — **d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 309.

— **Physikalische,** v. G. Mahler, Prof. der Mathem. u. Physik am Gymnas. in Ulm. Mit d. Resultaten. Nr. 243.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. Mit 15 Figuren und 2 Tafeln. Nr 302.

Bade- und Schwimmanstalten, Oeffentliche, von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

Bauführung von Emil Beutinger, Architekt B. D. A., Assistent an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 20 Figuren. Nr. 399.

Baukunst, Die, des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 1. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- u. Betriebskosten M. 14 Abb. Nr. 224.

— — 2. Teil: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbild. Nr. 225.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 15 Abbild. Nr. 96.

Biologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Biologie der Tiere, Abriß der, von Dr. Heinr. Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Nr. 131.

Blütenpflanzen, Das System der, mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Pilger. Mit 31 Figuren. Nr. 393.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor d. Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Mit 16 Abbild. Nr. 303.

Buchführung in einfachen und doppelten Posten von Rob. Stern, Oberlehrer der Öffentl. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Buddha von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Fig. Nr. 71.

Chemie, Analytische, von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— — II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische**, von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

— — siehe auch: Metalle. — Metalloide.

— **Geschichte der**, von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chemischen Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— — II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

— **Organische**, von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Physiologische**, von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 9.

Dampfmaschine, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 8.

Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda, Oberlehrer am staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abbild. Nr. 274.

Determinanten von Oberlehrer Paul B. Fischer in Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Dietrichepen. Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. a. Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenbetonbau, Der, von Reg.-Baumeister Karl Rößle. Mit 75 Abbildungen. Nr. 349.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.

— — II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Eisenkonstruktionen im Hochbau von Ingenieur Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Fig. Nr. 322.

Elektrizität. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.

— — II. Teil: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. Nr. 253.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. M. 47 Fig. Nr. 196.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Fig. Nr. 197.

— — III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Fig. Nr. 198.

Entwicklung, Die, der sozialen Frage von Prof. Dr. Ferdinand Tönnies. Nr. 353.

— **der christlichen Religion** siehe: Religion.

— **der Handfeuerwaffen** siehe: Handfeuerwaffen.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johannes Meisenheimer, Prof. der Zoologie an der Universität Marburg. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— — II: Organbildung. Mit 46 Fig. Nr. 379.

Epigonen, Die, des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Taf. Nr. 175.

Ethik von Professor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit je 50 Abbild. Nr. 268 u. 269.

Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Neubabelsberg. Mit 6 Abbild. u. 12 Tab. Nr. 333.

Familienrecht. Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Feldgeschütz, Das moderne, I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850 bis 1890, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

Feldgeschütz, Das moderne, II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbild. Nr. 307.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. M. 56 Fig. Nr. 288.

Fette, Die, und Oele sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikation und die Harze, Lacke, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in die Chemie, Besprechung einiger Salze und die Fette und Öle. Nr. 335.

— — II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbild. Nr. 336.

— — III: Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Finanzwissenschaft v. Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. I: Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— — II: Besonderer Teil (Steuerlehre.) Nr. 391.

Fische. Das Tierreich IV: Fische von Privatdozent Dr. Max Rauther in Gießen. Mit 37 Abbild. Nr. 356.

Fischerei und Fischzucht v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Formelsammlung, Mathemat., u. Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.

— **Physikalische,** von G. Mahler, Prof. a. Gymn. in Ulm Mit 65 Fig. Nr. 136.

Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.

Fortbildungsschulwesen, Das deutsche, nach seiner geschichtl. Entwickl. u. in sein. gegenwärt. Gestalt von H. Sierds, Direkt. d städt. Fortbildungsschulen in Heide i. Holst. Nr. 392.

Fremdwort, Das, im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Gaskraftmaschinen, Die, von Ing. Alfred Kirschke in Halle a. S. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

Genossenschaftswesen, Das, in Deutschland. Von Dr. Otto Lindecke, Sekretär des Hauptverbandes deutscher gewerblicher Genossenschaften. Nr. 384.

Geodäsie von Dr. C. Reinhertz, Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.

Geographie, Astronomische, von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Mit 52 Abbild. Nr. 92.

— **Physische,** von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbild. Nr. 26.

— s. auch: Landeskunde. — Länderkunde.

Geologie in kurzem Auszug für Schulen und zur Selbstbelehrung zusammengestellt von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Taf. mit 51 Fig. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene von Prof Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Fig. Nr. 65.

— — **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.

— **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbild. Nr. 89.

— — **Aufgabensammlung z. Analyt. Geometrie d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof. a. Realgymn. i. Schwäb.-Gmünd. M. 8 Fig. Nr. 309.

Geometrie, Darstellende, von Dr. Robert Haußner, Prof. an der Univ. Jena. I. Mit 110 Fig. Nr. 142.
Geometrie, Analyt., Aufgabensammlung z. Analytischen Geometrie der Ebene, von O. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.
— **Projektive**, in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Professor an der Universität München. Mit 91 Fig. Nr. 72.
Geschichte, Badische, von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.
— **der Christlichen Balkanstaaten** (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.
— **Bayerische**, von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.
— **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.
— **Deutsche, I: Mittelalter** (bis 1519) von Dr. F. Kurze, Prof. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.
— — **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1500—1648) von Dr. F. Kurze, Professor am Königl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 34.
— — **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648—1806) von Dr. F. Kurze, Prof. am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 35.
— — siehe auch: Quellenkunde.
— **Englische**, von Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.
— **Französische**, von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univers. Berlin. Nr. 85.
— **Griechische**, von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der deutschen Univers. Prag. Nr. 49.
— **des 19. Jahrhunderts** v. Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Univers. Bonn. 1. Bdchn.: 1800—1852. Nr. 216.
— — 2. Bdchn.: 1853 bis Ende d. Jahrh. Nr. 217.
— **Israels** bis auf die griech. Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
Geschichte, Lothringens, v. Dr. Hermann Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.
— **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Prof. a. d. Univers. München. M. 9 Bild. u. 1 Kart. Nr. 43.
— **Oesterreichische, I**: Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439) von Professor Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.
— — **II**: Vom Tode König Albrechts II. bis zum Westfälischen Frieden (1440 bis 1648), von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 3 Stammtafeln. Nr. 105.
— **Polnische**, v. Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.
— **Römische**, von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.
— **Russische**, v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.
— **Sächsische**, von Professor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
— **Schweizerische**, von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.
— **Spanische**, von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.
— **Thüringische**, von Dr. Ernst Devrient in Jena. Nr. 352.
Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 270.
Geschütze, Die modernen, der Fußartillerie. I: Vom Auftreten der gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890 v. Mummenhoff, Major beim Stabe des Fußartillerie-Regiments Generalfeldzeugmeister (Brandenburgisches Nr. 3). Mit 50 Textbildern. Nr. 334.
— — **II**: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 31 Textbildern. Nr. 362.
Gesetzbuch, Bürgerliches, siehe: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Gewerbehygiene von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Prof. an d. Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 203. 204.

Gewichtswesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Gleichstrommaschine, Die, von C. Kinzbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Fig. Nr. 257.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Taf. Nr. 154.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

Grammatik, Lateinische. Grundriß der lateinischen Sprachlehre von Prof. Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.

— **Mittelhochdeutsche.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Univers. Rostock. Nr. 1.

— **Russische,** von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 66.

— — siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.

Handelskorrespondenz, Deutsche, von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.

— **Englische,** von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

Handelskorrespondenz, Französische, von Professor Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.

— **Italienische,** von Prof. Alberto de Beaux, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.

— **Russische,** von Dr. Theodor von Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.

— **Spanische,** von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Handelspolitik, Auswärtige, von Dr. Heinr. Sieveking, Prof. an der Univers. Marburg. Nr. 245.

Handelswesen, Das von Geh. Oberregierungsrat Dr. Wilh. Lexis, Prof. a. d. Univers. Göttingen. **I: Das** Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— — II: Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Handfeuerwaffen, Die Entwicklung der, seit der Mitte des 19. Jahrhunderts und ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Oberleutnant im Infanterie-Regiment Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posensches) Nr. 59 und Assistent der Königl. Gewehr-Prüfungskommission. Mit 21 Abb. Nr. 366.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und **Gottfried von Straßburg.** Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königlichen Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III.) Nr. 337.

Hauptliteraturen, Die, d. Orients v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Univers. Wien. I. II. Nr. 162. 163.

Heizung und Lüftung von Ingenieur Johannes Körting in Düsseldorf. I.: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 34 Fig. Nr. 342.

— — II.: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Fig. Nr. 343.

Heldensage, Die deutsche, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 32.
– siehe auch: Mythologie.
Hydraulik von Diplom-Ingenieur W. Hauber. Mit 44 Figuren. Nr. 397.
Hygiene des Städtebaus, Die, von Professor H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 30 Abb. Nr. 348.
— **des Wohnungswesens** von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 5 Abbild. Nr. 363.
Industrie, Anorganische Chemische, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Taf. Nr. 205.
— — II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Taf. Nr. 206.
— — III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.
— **der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels.** I: Glas und keramische Industrie von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Taf. Nr. 233.
— — II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Taf. Nr. 234.
Infektionskrankheiten, Die, und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildung. u. einer Fiebertafel. Nr. 327.
Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymn. in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.
— Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung v. Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymn. in Stuttgart. Mit 52 Fig. Nr. 147.
Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo und F. Sauter, Prof. am Realgymn. in Ulm, neu bearb. von Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. Mit 70 Abbild. Nr. 30.
Kirchenlied. Martin Luther, Thom. Murner, und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.
Kirchenrecht von Dr. Emil Sehling, ord. Professor d. Rechte in Erlangen. Nr. 377.
Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. und 2 Fig. Nr. 114.
Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Prof. der Geschichte an der Univers. Berlin. Nr. 156.
Kolonialrecht, Deutsches, von Dr. H. Edler von Hoffmann, Privatdoz. an der Univers. Göttingen. Nr. 318.
Kompositionslehre. Musikalische Formenlehre von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.
Kontrapunkt. Die Lehre von der selbständigen Stimmführung von Stephan Krehl. Nr. 390.
Kontrollwesen, Das agrikulturchemische, von Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.
Körper, der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. und 1 Taf. Nr. 18.
Kostenanschlag siehe: Veranschlagen.
Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Prof. an der Univers. Straßburg. Mit 190 Abbild. Nr. 210.
Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 10.
— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.
Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Univers. Wien. Nr. 189.
Kulturgeschichte, Deutsche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
Künste, Die graphischen, von Carl Kampmann, Fachlehrer a. d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbild. und Beilagen. Nr. 75.

Kurzschrift siehe: Stenographie.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Prof. am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Professor a. Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen und Profil. Nr. 63.

Landeskunde u. Wirtschaftsgeographie d. Festland. Australien von Dr. Kurt Hassert, Professor der Geographie an d. Handels-Hochschule in Köln. Mit 8 Abbild., 6 graphisch. Tabellen und 1 Karte. Nr. 319.

Landeskunde von Baden von Prof. Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profil, Abbild. und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Prof. an d. Kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176.

— **der Republik Brasilien** von Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbild. und einer Karte. Nr. 373.

— **von Britisch-Nordamerika** von Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbild. und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.

— **des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck** von Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

— **der Iberischen Halbinsel** von Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univers. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Professor an der Univers. Berlin. Mit 10 Textillustration. und 1 Karte. Nr. 244.

— **der Rheinprovinz** von Dr. V. Steinecke, Direktor des Realgymnas. in Essen. Mit 9 Abbild., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.

— **des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Professor Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.

Landeskunde des Königreichs Sachsen v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 258.

— **der Schweiz** von Gymnasiallehrer Dr. H. Walser in Bern. Mit Abbildungen und einer Karte. Nr. 398.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Heinrich Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbild. und 1 Karte. Nr. 202.

— **der Vereinigten Staaten von Nordamerika** von Prof. Heinrich Fischer in Berlin. Mit Karten, Figuren im Text und Tafeln. 2 Bändchen. Nr. 381, 382.

— **des Königreichs Württemberg** v. Dr. Kurt Hassert, Prof. d. Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbild. u. 1 Karte. Nr. 157.

Landes- u. Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbild. u. 1 Karte. Nr. 345.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.

Leben, Deutsches, im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- und Kunstepen und zum Minnesang. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. 1. Teil: Öffentliches Leben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 93.

— — 2. Teil: Privatleben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 328.

Lessings Emilia Galotti. Mit Einleitung und Anmerkungen von Prof. Dr. W. Votsch. Nr. 2.

— **Minna v. Barnhelm.** Mit Anm. von Dr. Tomaschek. Nr. 5.

Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Literatur, Althochdeutsche, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts I: Martin Luther, Thom. Murner u. das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

— — **II: Hans Sachs.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

— — **III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

— **Deutsche, des 17. und 18. Jahrhunderts** von Dr. Paul Legband in Berlin. Erster Teil. Nr. 364.

Literaturen, Die, des Orients. I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 162.

— II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken, von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 163.

Literaturgeschichte, Deutsche, von Dr. Max Koch, Professor an der Univers. Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Carl Weitbrecht, Prof. an der Techn. Hochschule Stuttgart. Nr. 161.

— **Deutsche, des 19. Jahrhunderts** v. Carl Weitbrecht, Prof. an d. Techn. Hochschule Stuttgart, neubearb. von Dr. Rich. Weitbrecht in Wimpfen. I. II. Nr. 134. 135.

— **Englische,** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— — Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.

— **Italienische,** von Dr. Karl Voßler, Prof. a. d. Univ. Heidelberg. Nr. 125.

— **Nordische,** I. Teil: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an d. Univers. Rostock. Nr. 254.

Literaturgeschichte, Portugiesische, von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule München. Nr. 213.

— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

— **Slavische,** von Dr. Josef Karásek in Wien. 1. Teil: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — 2. Teil: Das 19. Jahrh. Nr. 278.

— **Spanische,** von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.

Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie v. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

Malerei, Geschichte der, I. II. III. IV. V. von Dr. Rich. Muther, Prof. an d. Univers. Breslau. Nr. 107—111.

Mälzerei. Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. P. Dreverhoff, Direktor der Öffentl. u. I. Sächs. Versuchsstat. für Brauerei u. Mälzerei, sow. d. Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Nr. 303.

Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Materialprüfungswesen. Einführ. i. d. mod. Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Diplomingenieur. Ständ. Mitarbeiter a. Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel f. Festigkeitsversuche. Mit 58 Fig. Nr. 311.

— II: Metallprüfung u. Prüfung v. Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

Meereskunde, Physische, von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Taf. Nr. 112.

Messungsmethoden, Physikalische v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr. 301.

Metalle (Anorganische Chemie 2. Teil) v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Metalloide (Anorganische Chemie 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metallurgie von Dr. Aug. Geitz, diplom. Chemiker in München, I. II. Mit 21 Fig. Nr. 313, 314.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Prof. an der Univers. Innsbruck. Mit 49 Abbild. und 7 Taf. Nr. 54.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Prof. an der Univers. Bonn. Mit 130 Abbild. Nr. 29.

Minnesang und Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Morphologie, Anatomie u. Physiologie der Pflanzen. Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Murner, Thomas. Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, von Dr. A. Möhler in Pfrungen. Zwei Bändchen. Mit zahlreichen Abbild. und Musikbeilagen. Nr. 121 und 347.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) v. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Musikästhetik von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.

— **seit Beginn d. 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164. 165.

Musiklehre, Allgemeine, v. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Mythologie, Germanische, von Dr. Eugen Mogk, Prof. an der Univers. Leipzig. Nr. 15.

— **Griechische und römische,** von Dr. Herm. Steuding, Prof. am Kgl. Gymnasium in Wurzen. Nr. 27.

— siehe auch: Heldensage.

Nadelhölzer, Die, von Dr. F. W. Neger, Prof. an der Kgl. Forstakad. zu Tharandt. Mit 85 Abb., 5 Tab. und 3 Karten. Nr. 355.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbild. Nr. 84.

Nibelunge, Der, Nôt in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik m. kurz. Wörterbuch v. Dr. W. Golther Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 1.
— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.
Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Fig. Nr. 123.
Pädagogik im Grundriß von Prof. Dr. W. Rein, Direktor des Pädagog. Seminars an der Univ. Jena. Nr. 12.
— **Geschichte der**, von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.
Paläontologie v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Univ. Graz. Mit 87 Abbild. Nr. 95.
Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Fig. Nr. 260.
Perspektive nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Oberl. an der Baugewerkschule Köln. Mit 88 Abbild. Nr. 57.
Petrographie von Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Univers. Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.
Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbild. Nr. 44.
Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.
Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludw. Diels, Privatdoz. a. d. Univers. Berlin. Nr. 389.
Pflanzenkrankheiten v. Dr. Werner Friedr. Bruck, Privatdozent in Gießen. Mit 1 farb. Taf. u. 45 Abbild. Nr. 310.
Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakad. Eisenach. Mit 50 Abbild Nr. 141.
Pflanzenreich, Das. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs, mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakad. Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.
Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 158.
Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.
Philologie, Geschichte der klassischen, von Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. an der Universität Münster in Westfalen. Nr. 367.
Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentscher, Prof. a. d. Univers. Königsberg. Nr. 281.
— **Geschichte der, IV: Neuere Philosophie bis Kant** von Dr. Bruno Bauch, Privatdoz. a. d. Univers. Halle a. S. Nr. 394.
— Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
Photographie, Die. Von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 94.
Physik, Theoretische, von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Mechanik und Akustik. Mit 19 Abbild. Nr. 76.
— — II. Teil: Licht und Wärme. Mit 47 Abbild. Nr. 77.
— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbild. Nr. 78.
— — IV. Teil: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Fig. Nr. 374.
— **Geschichte der,** von A. Kistner, Prof. an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.
— — II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.
Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. d. Mathem. u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.
Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.
Physikalische Messungsmethoden v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr 301.
Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Taf. Nr. 116.

Plastik des 19. Jahrhunderts von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern. Nr. 321.
Poetik, Deutsche, von Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.
Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
Psychophysik, Grundriß der, von Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Fig. Nr. 98.
Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der kgl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit zahlr. Abbild. Nr. 290.
Quellenkunde zur deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Univers. Tübingen. 2 Bde. Nr. 279. 280.
Radioaktivität von Chemiker Wilh. Frommel. Mit 18 Abbild. Nr. 317.
Rechnen, Kaufmännisches, von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.
— **Das, in der Technik und seine Hilfsmittel** von Ingenieur Joh. Eugen Mayer. Mit Abbildungen. Nr. 405.
Recht d. Bürgerlich. Gesetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.
— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse v. Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 324.
— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. an der Univers. Göttingen. Nr. 305.
Rechtslehre, Allgemeine, von Dr. Th. Sternberg, Privatdoz. an der Univers. Lausanne. I: Die Methode. Nr. 169.
— II: Das System. Nr. 170.
Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche, von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.
Redelehre, Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Mit einer Taf. Nr. 61.
Redeschrift siehe: Stenographie.
Religion, Die Entwicklung der christlichen, innerhalb des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 388.
Religionsgeschichte, Alttestamentliche, von D. Dr. Max Löhr, Prof. an der Univers. Breslau. Nr. 292.
— **Indische,** von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.
— — siehe auch Buddha.
Religionswissenschaft, Abriß der vergleichenden, von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.
Renaissance. Die Kultur d. Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdoz. an der Univ. Wien. Nr. 189.
Reptilien siehe: Tierreich III.
Roman. Geschichte d. deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.
Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 68.
Russische Literatur I: Auswahl moderner Prosa u. Poesie m. ausführl. Anmerk. u. Akzentbezeichn. von Dr. Erich Boehme, Lektor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 403.
— — **II:** Auswahl aus Garschin's Werken von Dr. Erich Boehme, Lektor an d. Handelshochsch. Berlin. Nr. 404.
Russisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 67.
— — siehe auch: Grammatik.
Sachs, Hans. Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.
Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.
Schattenkonstruktionen v. Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Fig. Nr. 236.
Schmarotzer u. Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univers. Graz. Mit 67 Abbild. Nr. 151.
Schule, Die deutsche, im Auslande, von Hans Amrhein, Direktor der deutschen Schule in Lüttich. Nr. 259.

Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.

Seemacht, Die, in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Seerecht, Das deutsche, von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. I. Allgemeine Lehren: Personen und Sachen des Seerechts. Nr. 386.

— — II. Die einzelnen seerechtlichen Schuldverhältnisse: Verträge des Seerechts und außervertragliche Haftung. Nr. 387.

Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle II.) Mit 25 Abbild. Nr. 336.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeb. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Univers. Breslau. Nr. 138.

Sociologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Soziale Frage siehe: Entwicklung.

Sprachdenkmäler, Gotische, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Sprachwissenschaft, Germanische, v. Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 238.

— **Indogermanische,** v. Dr. R. Meringer, Prof. a. d. Univ. Graz. Mit einer Taf. Nr. 59.

— **Romanische,** von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Univers. Wien. I: Lautlehre u. Wortlehre I. Nr. 128.

— — II: Wortlehre II u. Syntax. Nr. 250.

— **Semitische,** von Dr. C. Brockelmann, Prof. an der Univers. Königsberg. Nr. 291.

Staatslehre, Allgemeine, von Dr. Hermann Rehm, Prof. an d. Univ. Straßburg i. E. Nr. 358.

Staatsrecht, Preußisches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univers. Bonn. 2 Teile. Nr. 298 u. 299.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. an der Univers. Wien. Mit 2 Karten und 2 Taf. Nr. 126.

Statik, I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper v. W. Hauber, Diplom.-Ing. Mit 82 Fig. Nr. 178.

— II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Fig. Nr. 179.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Mitglied des Kgl. Stenogr. Instituts Dresden. Nr. 246.

— Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems von Dr. Albert Schramm, Landesamtsass. in Dresden. Nr. 368.

— Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses Oranienstein. Nr. 86.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Prof. an der Univers. Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 97.

Stilkunde von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.

Technologie, Allgemeine chemische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

— **Mechanische,** von Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke i. Braunschweig. Nr. 340/41.

Teerfarbstoffe, Die, mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Telegraphie, Die elektrische, von Dr. Lud. Rellstab. M. 19 Fig. Nr. 172.

Testament. Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk in Jena. Nr. 272.

— Die Entstehung des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

— **Neutestamentliche Zeitgeschichte I:** Der historische und kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums von Lic. Dr. W. Staerk, Privatdoz. in Jena. Mit 3 Karten. Nr. 325.

Testament. Neutestamentl. Zeitgeschichte II: Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit einer Planskizze. Nr. 326.

Textil-Industrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Figuren. Nr. 184.
— — II. Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
— — III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
Thermodynamik (Technische Wärmelehre) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. M. 54 Fig. Nr. 242.
Tierbiologie siehe: Biologie d. Tiere.
Tiere siehe auch: Entwicklungsgeschichte.
Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.
Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner, Prof an der Univers. Graz. Mit 78 Abbild. Nr. 60.
Tierreich, Das, I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.
— — III: Reptilien und Amphibien. Von Dr. Franz Werner, Privatdozent an der Univ. Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 383.
— — IV: Fische von Privatdozent Dr. Max Rauther in Gießen. Nr. 356.
Tierzuchtlehre, Allgemeine u. spezielle, von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.
Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Fig. Nr. 99.
Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.
— **Geschichte des deutschen Unterrichtswesens** v. Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direkt. d. Kgl. Gymn zu Luckau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.
Unterrichtswesen, Geschichte des deutschen Unterrichtswesens von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau.
— — II. Teil: Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
Urgeschichte der Menschheit v. Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 53 Abbild. Nr. 42.
Urheberrecht, Das, an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künste und Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.
Urheberrecht, Das deutsche, an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.
Vektoranalysis v. Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent am Phys. Institut d. Technischen Hochschule in Hannover. Mit 11 Fig. Nr. 354.
Veranschlagen, Das, im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlags von Emil Beutinger, Architekt BDA., Assistent an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Figuren. Nr. 385.
Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.
Versicherungswesen, Das, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.
Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos der ethnogr. Sammlung des naturhistor. Hofmuseums u. Privatdoz. an d. Univers. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.
Volksbibliotheken (Bücher- u. Lesehallen), ihre Einrichtung und Verwaltung von Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.
Volkslied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. 2 Bd. Nr. 25 u. 132.
Volkswirtschaftslehre v. Dr. Carl Johs. Fuchs, Prof. an der Univers. Freiburg i. B. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 177.

Waltharilied, Das, im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule und a. d. Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.

Warenkunde, von Dr. Karl Hassack, Professor u. Leiter der k. k. Handelsakademie in Graz. I. Teil: Unorganische Waren. Mit 40 Abbild. Nr. 222.

— II. Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbild. Nr. 223.

Warenzeichenrecht, Das. Nach dem Gesetz zum Schutz der Warenbezeichnungen vom 12. Mai 1894. Von Regierungsrat J. Neuberg, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 360.

Wärme. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) von K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ingenieure. Mit 54 Fig. Nr. 242.

Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe von Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ingen. in Saalfeld. Mit 15 Abbild. Nr. 261.

Wehrverfassung, Deutsche, von Kriegsgerichtsrat Karl Endres in Würzburg. Nr. 401.

Wettbewerb, Der unlautere, von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. Nr. 339.

Wolfram von Eschenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskolleg. z. Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches,** von Dr. Ferd. Detter, Prof. an d. Universität Prag. Nr. 64.

— **Technisches,** enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I: Deutsch-Englisch. Nr. 395.

— — II: Englisch-Deutsch. Nr. 396.

Zeichenschule von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Taf. in Ton-, Farben- und Golddruck u. 200 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Zeitungswesen, Das moderne, (Syst. d. Zeitungslehre) v. Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

— **Allgemeine Geschichte des,** von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Burckhardt. Nr. 357.

Weitere Bände erscheinen in rascher Folge.