DE INÆQUALITATIBUS QUAS SATURNUS ET JUPITER

SIBI MUTUO VIDENTUR INDUCERE
PRÆSERTIM CIRCA TEMPUS
CONJUNCTIONIS.

OPUSCULUM

AD PARISIENSEM ACADEMIAM
TRANSMISSUM
ET NUNC PRIMUM EDITUM

AUTHORE
P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH
SOCIETATIS JESU.

ROMÆ, MDCCLVI.

EX TYPOGRAPHIA GENEROSI SALOMONI.
SUPERIORUM FACULTATE.

EXCELLENTISSIMO COMITI

CHOISEUL DE STAINVILLE

CHRISTIANISSIMI REGIS

APUD SANCTAM SEDEM

LEGATO

ROGERIUS JOSEPHUS BOSCOVICH SOC. JESU.

SOLENT plerumque, COMES EXCELLENTISSIME, ubi libros ſuos Auctores conſcripſerint, Principem virum exquirere, cujus nomine decoratum opus, ac patrocinio fultum prodire poſſit in publicum. Id ego qui-

quidem si haberem in animo, quis mihi usquam Te uno aptior occurreret, ad quem, tanquam ad Mæcenatem confugerem? Vel enim aviti generis nobilitatem respiciam, vel animi egregiam indolem, vel acutissimam mentis aciem, ac vim perspicacissimam, quæ dona ab ipsa natura in Te uberrimè congesta accepisti, vel quas Tibi & generi par educatio, & industria Tua, atque exercitatio longè potiores, nobilioresque dotes adjunxerunt, contempler, mores integerrimos, liberalitatem munificentissimam, summam in difficillimis pertractandis negotiis prudentiam, iisdemque ad optatum perducendis exitum felicitatem, fortitudinem animi singularem cum summà rei bellicæ cognitione conjunctam, quam & ipsi milites tui, ac socii duces, & hostes ipsi tum sæpe alibi, tum inprimis in admirabili illa Pragensis urbis defensione sunt admirati, doctrinam, atque eruditionem, & bonarum artium cultum, quas inter militares tumultus, inter aulicarum curarum ambages & per Te colis ipse, & apud alios foves, ac promoves; quid uspiam eo in genere ad hanc rem aptius non dicam invenire possem, sed etiam tantummodo desiderare? Quid autem legatio isthæc ipsa, quam difficillimis sanè temporibus Tibi apud Pontificem Sapientissimum, atque Doctissimum, Perspicacissimus, & publicæ tranquillitatis Amantissimus Rex commisit uni, quam tantà cum laude, ac tam felici successu administras, qua dum fungeris, ab ipso Rege æquissimo meritorum æstimatore in amplissimum Galliæ ordinem cooptatus es, ac cæruleo isto nobilissimo baltheo insignitus? An non ea una res Te primum oculis, mentique meæ objiceret, quem ad decus, & indemnitatem edendi operis oporteret ſeligere, & aliis anteferre?

At mihi quidem non operi jam edendo Mæcenas quærendus hic fuit, ſed Mæcenati optimo, & de me ipſo, rebuſque meis benemerentiſſimo quærendum, ſeligendumque opus aliquod, quod ipſi ad imparem quidem, ſed omnino neceſſariam, ac debitam grati animi ſignificationem inſcriberem, ederemque, ut æternum apud omnes poſteros obſervantiæ meæ, & memoris beneficiorum animi monumentum extaret.

Exigebat a me jamdudum grati animi ſpecimen aliquod, & altiſſimis quibuſdam velut clamoribus efflagitabat humanitas illa tanta, & incredibilis benevolentia, qua me hominem vix ante viſum, & cognitum Tute ipſe ad te per Condaminium, hoſpitem illum tuum doctiſſimum, advocaſti, & cum omnibus amoris etiam, aut, ſi id

vocis

vocis adhibere licet, amicitiæ ſignificationibus excepiſti, Tibique addictum, & ad quotidianam propemodum conſuetudinem adhibitum arctiſſimis quibuſdam veluti vinculis adſtrinxiſti: quem ipſum exemplo tuo iſta tua Conjux lectiſſima, atque omnibus egregiis dotibus, quas quiſpiam vel deſiderare poſſit, vel etiam excogitare, & animi ornamentis in primis mirum ſanè in modum præſtans pari itidem humanitate exceptum ſibi in dies devincit magis, atque obſtringit. Exigebat id ipſum multo etiam magis tanta beneficiorum, quæ a Te mihi collata ſunt, ac conferuntur in dies multitudo, ac vis. Infinitum ſanè eſſet ea omnia ſingillatim perſequi, ac percenſere, ac Tute ipſe omnium optimè, qui noſti ſingula, judicabis, quam ineptus ſim, ſi eam in me provinciam ſuſcipiam, quorum quidem aliqua ſi ſelecta ex omni ſumma, atque excerpta commemorarem, nimis exile inde, ac tenue ingentis ejus cumuli specimen haberetur. Quamobrem nonnisi communi quadam veluti comprehensione simul omnia complecti licet, ac illud profiteri unum, omnes Tibi a me, quæcumque præstari possunt, grati, memorisque animi significationes deberi.

At quid demum ego, quid Tibi, inopiæ meæ, tuæ Amplitudinis memor exhibere possem, Te penitus non indignum? Diutius meditatus, ipso mihi vitæ meæ instituto proposito ob oculos, in eam demum deveni sententiam, nihil a me, homine nimirum litteris excolendis jamdudum addicto, minus ineptum præstari posse, quam si hujusce mei velut prædioli tenuem aliquem, sed adhuc bonarum artium, litterarumque fautore amantissimo minus indignum, proferrem fructum; & opusculum aliquod tuo nomine insignitum producerem, evulgaremque.

Con-

Consilio arrepto, haud quidem diu deliberandum fuit, quid potissimum, quod Tibi offerrem, seligerem. Conscripseram quinque ab hinc annis opusculum ad omnium maximè arduam, atque sublimem Astronomiæ partem pertinens, quo Jovis, ac Saturni aberrationes, perturbationesque, quas sibi invicem, mutuæ nimirum gravitatis vi, tum maximè inducunt, cum ad se propius accedunt, investigaveram, ac in communium Astronomorum potestatem redegeram. Id ego quidem ad Regiam Parisiensem Academiam transmiseram, quæ id ipsum argumentum præmio, ut solet, proposito bis jam tentatum necquidquam, proposuerat tertio, & earum pertubationum theoriam requirebat. Theoriam ibidem ita exposueram, ut problemate soluto penitus, communes jam Astronomi omnes, & ipsi tabularum Astronomicarum Arithmetici fabricatores possent earum aberrationum effectus singulos communis Astronomiæ ope, ac numeris tantumodo subductis definire, si vellent, & cum Astronomicis observationibus conferre, ac Nevvtonianam ipsam generalem gravitatem vel confirmare inde magis, vel infirmare. Ne numeros subducerem, tum alia nonnulla, quæ ad Academiam in præfixa introductione quadam perscripsi, tum in primis occupationes meæ, quæ hisce potissimum annis extiterunt immodicæ, atque immanes, deterrebant, quibus accessit ipse improbus, atque diuturnus tabularum condendarum labor, cui subeundo complures alios, vel ad id unum idoneos, vel eo laboris genere delectatos, inveniri facile posse prævidebam.

Præmium idcirco fortasse Eulero adjudicatum, at eodem simul elogio, & illud ejus, & hoc meum opusculum

lum ab Academia collaudatum, & ipsum hoc meum reliquorum omnium, quæ præter hæc duo, transmissa fuerant, ad scopum propositum accessisse maximè censuit, ac typis publicis edendum olim cum iis, quæ præmium obtinent, destinavit, calculis illis tantummodo desideratis, & collatione cum ipsis Cæli phenomenis, quæ quidem ab Academia theoriam postulante nequaquam requiri censueram, & facile admodum, uti monui, a communibus Astronomis suppleri possunt. Ipsa ejusmodi destinatio id effecerat, ut ego de singulari ejus editione nequaquam cogitarem; viderem autem posse cum eo tanto Academiæ præjudicio sine nota prodire in publicum.

Id quidem ipsum satis per sese deliberantem potuisset impellere, ut opusculum, ab Academia nimirum Parisiensi collaudatnm, ac typis publicis destinatum, & tam sublime, atque involutum argumentum evolvens, maturius ederem, & Tibi in hanc ipsam & observantiæ erga Te meæ, & grati animi significationem inscriberem. Quid enim minus dedeceat tantum ejus Legatum Regis, cujus Academiæ præjudicio jam palam edito id opusculum commendatur?

At illud in primis hanc ipsam mihi injecit mentem, quod in amænissimo tuo, ac magnificentissimo Tusculano secessu mihi nuper accidit perpportunè. Cum enim Tecum essem, & plures sub dio primo vespere unà cum lectissimo illo tuo Comitatu de astris potissimum, quæ suspectanda se nobis offerebant, sermones consereremus; vidi sanè quantam Tu in primis, & cultissima, atque ingeniosissima Conjux ista tua ex ejusmodi sermonibus voluptatem caperetis, cum quanta aviditate, tum alia multa, tum Jovem in

pri-

primis, ac Saturnum longiore tubo, quem ex Urbe mecum advexeram, contemplaremini. Illud ilico in mentem venit, opusculum, quod eo ipso de argumento, de quo itidem colloquebamur, jam haberem conscriptum, aptissimum sanè ad id fore, ut publici juris facerem tuo Nomini dedicatum.

En igitur consilium opportunè objectum mihi, captumque jam exequor, & ejus opusculi editionem Tibi inscriptam aggredior, quam propediem profecturus ex Urbe ad curandas eas, quæ inter Hetruriam, & Lucensem Rempublicam exortæ sunt controversiæ, ab hac posteriore evocatus, amicis commendo, Te verò obsecro, obtestorque, ut rem hanc ipsam non e tuis erga me tantis promeritis, sed ex mea tenuitate æstimatam, benigne accipias, & Tuam erga me voluntatem, ubicumque terrarum extiteris a Rege, sagacissimo tantarum

vir-

virtutum æstimatore, gravissimis admotus negotiis, serves illæsam, & obsequii erga Te mei; quod erit certè perenne, memoriam retineas, nec ea, quæ Tibi, ubicumque se occasio offeret, ipsius monumenta exhibebo semper, dedignere.

AD LECTOREM.

OPuſculum, quod tibi exhibeo, amice Lector, qua occaſione conſcriptum fuerit, cur nunc potiſſimum in lucem prodeat, habes ex nuncupatoria epiſtola, quam huic editioni præfixi; analyſim ejus quandam, quæ tibi unico velut obtutu videndum præbeat, quid in ipſo opuſculo contineatur, habes in ea introductione tranſmiſſa ad Regiam Pariſienſem Academiam, quam hic ſubjicio. Nihilo tamen minus ſunt adhuc quædam, nec ita pauca, quæ te monendum hic cenſeam in anteceſſum.

In primis argumentum, quod in ipſa fronte vides, ab Academia Pariſienſi primo propoſitum fuit pro præmio anni 1748. Eulerus tum quidem præmium obtinuit, & opuſculum id ipſum, uti tum erat in more poſitum, typis eſt editum ilico, evulgatumque. In eo fuiſſe aliquid ad ipſam ſolutionem pertinens, quod deinde minus ſatisfaceret, ſatis indicat illud, quod idem argumentum iterum pro anno 1750 propoſitum fuit. Sunt autem quædam in eo opuſculo, quæ pertinent ad rationem gravitatis reciprocam duplicatam diſtantiarum, vel minus accuratam per ſeſe, vel turbatam, ut ipſe ſuſpicatur, ab inæquali interno textu globorum, quorum vires in ipſa ſolutione problematis adhibentur. Ea ego reſpexi in introductione ipſa ad Academiam tranſmiſſa a pag. 4, ubi conor evincere, primo

mo

mo quidem, *satis accuratè eam legem per totum extendi Planetarium sistema, nec errores inde satis notabiles oriri posse*, tum vero, *quod ad inaequalem pertinet partium internarum textum, nihil inde, quod sensu percipi possit, Jovis potissimum, ac Saturni motus perturbari posse*.

Quod ad primum pertinet caput, rationem reciprocam duplicatam distantiarum ego quidem arbitror per totum Planetarium systema extendi non omnino accuratè, sed ita satis accuratè, ut in Jovis, ac Saturni motibus errores inde satis notabiles oriri non possint. Caeterum gravitatis legem ego censeo esse partem quandam generalissimae legis virium, quibus omnia materiae puncta praedita sint, quam cum pluribus aliis in locis, tum vero multo accuratius superiore anno exposui in Dissertatione de lege virium in Natura existentium, ubi & ejus curvae, qua ejusmodi lex exponitur, naturam, ac proprietates plerasque sum persecutus, & aequationem exhibui simplicem (quae nimirum ad alias inferioris ordinis nulla deprimi divisione possit) quae ejusmodi curvam referat accuratè.

Ea curva in majoribus distantiis, in quibus a se invicem Planetae distant, ita accedit ad Newtonianae legis hyperbolam, ut sensu percipi discrimen non possit, licet in minoribus distantiis, in iis in primis, in quibus vegetatio, & Chymici effectus se produnt, ab ea recedat plurimum, & axem suum in plurimis punctis secet viribus jam ex attractivis in repulsivas migrantibus, jam e repulsivis in attractivas,

vas; idque per multas vices; in minimis autem, & in infinitum decrescentibus asymptoticum habeat ramum tendentem ad partes priori oppositas, & repulsivas exhibentem vires auctas in infinitum. Primum illud crus eam per me exhibet, quam gravitatem generalem dicimus, quod ipsum fortasse in distantiis multo majoribus, in quibus jacent Fixæ, iterum ab illa eadem Hyperbola recedit, & axem secat. Arcus illi serpentes, & se hinc, atque inde circa axem contorquentes, cohæsionum, & respectivorum motuum, quos in exiguis distantiis particulæ habent, in vegetatione in primis, & in omni chymicorum phænomenorum congerie, varia genera mirum in modum explicant; postremus autem asymptoticus repulsivus arcus in collisionibus corporum sine saltu præstandis, & impenetrabilitate materiæ explicanda usum habet summum.

Hæc idcirco te monendum hic duxi, ne censeres ea, quæ in introductione proposui, adversari iis, quæ ad meum generale systema pertinent, quod quidem jam ab anno 1745 primum produxi in dissertatione de viribus vivis, tum in aliis pluribus uberius explicavi. Eodem pacto cavendum & illud, ne quod ibidem contra inæqualem textum partium internarum proposui, in quibus & Tellurem innui pag. 8, pugnare censeas cum iis, quæ in volumine De Litteraria Expeditione per Pontificiam ditionem exposui superiore anno; ubi illud, ut arbitror, evidentissime demonstravi, inæqualem textum partium Telluris superficiei proximarum in primis turbare plurimum progressio-

nem

uem graduum, & investigationem figuræ terrestris. Sunt enim ejusmodi etiam inæqualitates, quæ hanc Terrestris figuræ perquisitionem possint omnem corrumpere, ac penitus impedire, quin ullum possint non in Jovis tantummodo, ac Saturni distantia, sed vel in Luna ipsa Telluri tam proxima effectum edere, quem sensus nostri percipiant.

Anno 1750 præmium nulli adjudicatum fuerat, & idem argumentum tertio propositum pro anno 1752. Id quidem problematis difficultatem satis indicat per sese. Porro præcedenti anno exhibueram ego in brevi dissertatiuncula *De determinanda orbita Planetæ ope catoptricæ*, constructionem orbitæ ex data vi tendente ad centrum, & decrescente in ratione reciproca duplicata distantiarum, ac data velocitate, & directione projectionis factæ ex dato puncto, elegantissimam illam sane, atque expeditissimam, ad quam tum quidem me inopinato perduxerat solutio catoptrici problematis admodum simplicis, quam vero ipsam constructionem in hoc opusculo ex sola Mechanica, & Conicarum sectionum natura derivavi capite primo. Perspexi statim ea constructione viam sterni admodum expeditam ad pertractandum problema ab Academia propositum, & ubi primum otii nonnihil sum nactus, rem ipsam aggressus sum.

Vix ejusmodi investigationem susceperam per æstatem ejusdem anni 1750, cum a Summo Pontifice litteraria mihi expeditio per ejus ditionem commissa est, ad dimentiendos Meridiani gradus, & Geographicam mappam cor-

ri-

rigendam, in qua per biennium assiduis itineribus, atque observationibus operam dedi sane laborisissimam una cum P. Christophoro Maire doctissimo Societatis nostræ Mathemetico, quem ut mihi comitem, atque adjutorem ad arduam, molestissimamque provinciam felicius administrandam adjungerem, facile impetravi. Inter immanes ejusmodi labores, & frequentissima itinera investigationem vix inchoatam ad exitum perduxi, & ea, quæ sub opusculi finem exhibeo de mutatione inclinationis orbitæ, tum perscripsi, cum ad ostium Tiberinum exundantia fluvii nos ibi per plures dies detinuit, quem casum in primo de Litteraria Expeditione opusculo enarravi.

Theoriam quidem aberrationum Academia postulaverat, quam ego ita persecutus sum, &, ut arbitror, assecutus, ut in communium Astronomorum potestatem problema redegerim, qui numeris, methodo ibi satis perspicue tradita, adhibitis, facile deinde theoriam ipsam, & Nevvtonianam gravitatem cum Astronomicis observationibus conferre possint. Ne numeros ipse subducerem, & eam cum Cælo comparationem instituerem, immanes expeditionis molestissimæ labores, & gravissimæ tot observationum instituendarum curæ prohibebant ita, ut vel si maxime id laboris, a quo sane multum abhorreo, subire vellem, tum quidem omnino non possem.

Theoriam igitur ipsam ad Academiam transmittendam censui, successum idcirco etiam sperans aliquem, quod bis jam investigata fuerat necquidquam, & tertio proponebatur; con-

stabat

stabat autem mihi, me eam ita esse assecutum; ut ad Astronomicos usus abunde esse posset, atque etiam omnino deberet. Licet enim aberrationis cujusvis valorem quemvis indefinite per integrationem cujuspiam formulæ obtinere non possem, adhuc tamen obtinebam ope simplicis Geometriæ momentaneam quamvis aberrationis cujusvis mutationem, unde fiebat, ut per curvarum quadraturas, quantum liberet proximè, computari possent errores singuli, & aberrationum tabulæ ad plura sæcula computari multo etiam facilius, quam si aliquanto complicatiore formula ex integratione valor indefinitus profluxisset.

Quoniam vero suppresso nomine ejusmodi opuscula transmittuntur, & sententia, per quam discernantur, apponitur; præfixi hunc versiculum, quem ea respiciunt, & explicant, quæ in fine introductionis habentur:

Olim iræ, nunc turbat amor natumque, patremque.

Academiæ judicium illud extitit, a nemine sibi adhuc penitus satisfactum. Duas tamen adesse inter dissertationes transmissas, in quibus sublimiores haberentur perquisitiones, quarum alteram Eulerianam præmio donavit, alteri, nimirum huic meæ, per hanc sententiam denotatæ, adscripsit illud suum *Accessit*: Professa est autem se calculos illos, & comparationem cum Cælo potissimum desiderare; nihilo tamen minus editionem decrevit utriusque.

Id ego cum rescissem, me dissertationis ejusdem Auctorem professus sum, & nomine ipsius Domini de Fouchy, qui nunc est Academiæ

demiæ a secretis, significatum mihi fuit, utramque brevi, Eulerianam nimirum dissertationem, & meam hanc, editum iri. Sed ipsa editio nondum post annos fere quinque est instituta. Cum ea de re ad Mairanium, cui me ipsa Academia pro litterario commercio destinavit, *Correspondentem* appellant, perscripsissem, significatum ab eo mihi fuit, hujusmodi dissertationes, quæ antea etiam seorsum statim imprimebantur, imposterum non nisi tum collectas simul impressum iri, cum tam multæ fuerint, ut integrum volumen efficiant: licere autem Authori, ubi libuerit, publicam illam editionem prævertere. Inde nimirum effectum est, ut nec Euleriana illa, quæ duplicatum præmium adepta est, nec mea hæc adhuc lucem Parisiis aspexerit, licet posteriores, quæ pertinent ad annum 1754, statim editas esse, inaudierim nuper, uti antea etiam in more positum fuerat, nostris hisce adhuc latentibus apud Typographum.

An peculiarem suæ dissertationis Editionem Eulerus alicubi curaverit, ego quidem prorsus ignoro; subaudivi autem, inventum esse iterum in hac altera, ut in priore illa, quod in solutione, & calculis desideretur. Id quidem, an ita se habeat, mihi nequaquam satis constat; de re ipsa, ubi ea dissertatio demum prodierit, judicare poterit, qui implexos illos, & pene infinitos calculos, quos methodus ab eo adhiberi solita requirit, ad trutinam revocarit, quod quidem & ingentem analyseos sublimis cognitionem requirit, & patientiam singularem, ac ocium. Solet enim illud librorum

rum genus multo plus & laboris, & temporis ab eo exigere, qui ita perlegat, ut singula velit assequi, quam ab eo, qui conscripserit.

De solitaria mei opusculi editione ego quidem omnino nihil cogitabam, nec incredibili curarum pondere oppressus per hosce annos cogitassem, nisi id, quod in nuncupatoria epistola exposui, ne cogitantem quidem impulisset. Eædem curæ, quibus distineor, vetuerunt etiam, ne ipsum exemplar, quod amicis in meo discessu ex Urbe reliqui imprimendum, relegerem, ac diligentius aliquanto perpolirem, & quidpiam adderem. Est autem illud ipsum, ex quo alterum ad Academiam transmissum excriptum fuit, in quo, dum exscriberetur, vix uspiam, aut ne vix quidem mutavi quidquam: tantummodo brevissima quædam nonnulla, unum ad summum, aut alterum, nisi mea me fallit memoria, adjeci scholia, quæ tamen omnino etiam deesse poterant, ut idcirco eorum apud me exempla nequaquam retinuerim, nec ea in hac editione curaverim. Eam autem jam tum diligentiam adhibueram, ut etiam novo examine, sine nova perpolitione ulla in publicum emitti posse crediderim.

Porro illud etiam accedit, quod hanc editionis præoccupationem commendare possit, quod, cum methodum adhibuerim geometricam, & quæ solam infinitesimarum quantitatum ideam quandam requirat, omnia autem, quæ ad ipsam intelligendam vel ex Mechanica, vel ex Geometria sublimiore requiruntur, accurate exponam, spero, fore quamplurimos Physicarum rerum amatores, qui

omnia

omnia facile assequi possint, & de re tota judicare, qui quidem poterunt calculos etiam numericos instituere, & aberrationum tabulas computare, ut citius de consensu, vel dissensu Nevytonianæ gravitatis cum hac Astronomiæ parte judicare liceat; nullus autem dubito, quin futurum sit, ut ille, qui hucusque ubique inventus est, summus hic etiam consensus inveniatur.

In iis calculis, quos ego subduxi ad elementa formularum determinanda, usus sum Cassinianis Astronomicis tabulis; tum enim Romam Halleyanæ tabulæ nondum advectæ fuerant. Poterit nunc quidem facile, qui molestissimum computandarum ex mea hac theoria ad aberrationes hasce pertinentium tabularum laborem forte subire velit, tabulas astronomicas accuratiores, recentioresque adhibere alias, plures enim subinde prodierunt, & ipsam Jovis massam, quæ me remorata est, ex posterioribus astronomicis monumentis accuratius, ac certius definire,

Infinitesimali Geometrica methodo sum usus, quam ibidem, an etiam promoverim, judicabunt harum rerum Periti. Ea a methodo fluxionum, quam Mac-Laurinus persecutus est, nonnihil distat; in hac enim, qua ego utor, quantitates infinitesimæ respectu finitarum, & infinitesimæ ordinum inferiorum respectu infinitesimarum ordinum superiorum revera contemnuntur; quin tamen ex eo contemptu ullus error ne infinitesimus quidem in conclusionem deductam irrepat, quod, qui fiat, satis exposui in meis solidorum elementis, elementorum meorum

rum

rum tomo primo, in scholio, quod de ipsa infinitesimali methodo agit. Porro genuinam hujusmodi infinitesimarum quantitatum ideam, qua utor sæpe, tradidi in veteri dissertatione mea *de natura, & usu infinitorum, & infinitè parvorum*, ubi & ordines earum diggessi, & leges quasdam exposui, quarum ope facile innotescat, cujus ordinis obvenire debeat quantitas ex aliis quantitatibus deducta. Iis legibus hic usus sum, sed proximus elementorum meorum tomus, qui erit quartus, ipsam infinitesimorum naturam, & leges eorum adhibendorum complures multo uberius exponet, si mihi unquam otii quidpiam superererit, quod brevi spero superfuturum.

Illud unum est reliquum, quod mihi monendus es, amice lector; si uspiam hic videatur esse aliquid cum Telluris motu connexum, id omne non de absoluto motu debere intelligi, sed de respectivo quodam, quem primum proposui in dissertatione *de Maris Aestu*, tum alibi sæpe, ac demum superiore anno in Stayanæ Recentioris Philosophiæ supplementis explicavi uberius in eo paragrapho, in quo ego de vi Inertiæ, & respectivam quandam exposui ipsius Inertiæ vim, quæ potest universam Nevvtonianam Philosophiam cum absoluta Telluris quiete conciliare.

Hæc erant, quæ te monendum ducerem: fruere laboribus meis, si quidquam in iis non prorsus ineptum inveneris, & ubi rem ipsam non possis, animum saltem promovendæ Geometriæ simul, & Mechanicæ, atque Astronomiæ cupidissimum commenda.

IN-

INTRODUCTIO
TRANSMISSA AD ACADEMIAM.

P*Roponit jam tertio Academia argumentum ſane utiliſſimum*, Theoriam *nimirum* Saturni, & Jovis ejuſmodi, per quam explicari poſſint inæqualitates, quas hi Planetæ videntur ſibi mutuo inducere, potiſſimum circa tempus conjunctionis, *atque illud exigit, ut Auctores id argumentum pertractaturi nihil omittant eorum, quæ neceſſaria ſunt ad demonſtrandas eas propoſitiones, quibus tanquam baſibus quibuſdam eorum theoriæ inſiſtent, ac profitetur, ſe ſuperiore biennio nemini præmium adjudicaſſe, quod alii vix ipſam quæſtionem delibaverint, alii licet altiſſimis inveſtigationibus plurimis ſagacitatem ingentem præſetulerint, tamen hypotheſes pro fundamento aſſumpſerint, ipſius Academiæ judicio, probationibus ſatis firmis deſtitutas.*

Hæc ego quidem cum mihi animo propoſuiſſem, juſtiſſimis Academiæ deſideriis me ſatisfacturum eſſe duxi, ſi hæc tria præſtare poſſem. Primo, ut pro totius theoriæ meæ fundamento ejuſmodi originem inæqualitatum ipſarum aſſumerem, quæ non ficti-

tia esset, atque arbitraria, sed firmissimis argumentis, & vero etiam ingenti jam litteratorum hominum consensione comprobata. Secundo, ut viam inirem, qua inaequalitates omnes computari possent usque ad limites quoscunque. Tertio, ut singula demonstrarem cum rigore ejusmodi, qui nimius potius Academiae ipsi videri posset, nec praeter scholium fortasse aliquod ad theoriam ipsam non necessarium, quidquam assumerem, quod vel tyronibus ipsis, modo prima Matheseos elementa evolverint, non innotescat.

Primum igitur, quod ad theoriae basim pertinet, & inaequalitatum originem, eam jure sane optimo arbitratus sum firmiorem, probatioremque assumi non posse, quam mutuam Saturni, Jovis, ac Solis gravitatem, eamque directe proportionalem massae, in quam gravitatur, & reciproce quadrato distantiae. Eam quidem non arbitrio confictam, sed e probatissimis Keplerianis legibus, ac e generalissima Naturae analogia a Newtono derivatam, ipsae diuturnae oppugnantium contentiones, firmiorem reddiderunt in dies, ac mira cum phaenomenis omnibus, quae inde huc usque calculo satis accurato derivari potuerunt, atque incredibilis sane consensio ad summum propemodum certitudinis gradum evexerunt.

Et

Et quidem quod pertinet ad gravitatem primariorum Planetarum in Solem, undecunque ea ortum ducat, ac secundariorum tam in Primarios, quam cum iis in Solem ipsum, eam quidem jamdiu pro certa, atque indubitata Orbis litterarius habet, cum arearum æquabilitas, & orbitæ cavitas, motum ostendant partim in spatio non resistente conservatum vi inertiæ, partim ad centrum ipsum arearum æqualium perpetuo detortum. An mutua ejusmodi vis sit saltem inter omnia corpora solaris nostri systematis, & in iis distantiis, quas a se invicem ejusmodi corpora obtinent, reciprocam duplicatam distantiarum rationem sequatur, dubitatum fortasse diutius; at eo sane deventum est, ut nullus jam dubitationi locus superesse videatur.

Reciprocam duplicatam distantiarum rationem satis jam olim Newtonus ipse ex Apheliorum immobilitate deduxit. Eandem vero Lunarium inæqualitatum calculus, ac aberrationum tam implexarum consensus ille admirabilis cum theoria ita confirmavit, ut nihil ulterius desiderari posse videatur. Contractionem nimirum, ac expansionem orbitæ pro varia positione ad Solem, mutationem excentricitatis, accelerationem, ac retardationem areolæ, nodorum motum, orbitæ inclinationem felicissimo sane successu derivavit

vit ipse, motum vero apsidum, quem idem difficultate ineundi calculi absterritus unum omisit, jam demum novit Academia ab eadem ratione virium nequaquam recedere, quod quidem ipsum, & ex hac mea theoria ad Lunam rite translata, deduci posset. In eam per hosce postremos annos, analysi ad multo sublimiorem gradum evecta, multo diligentius est inquisitum. Rei exitus, qui legem ipsam initio videbatur evertere, calculis accuratius restitutis, in ejus laudem nimirum, & commendationem demum cessit, ac eandem firmissime, saltem pro Lunæ a Terra distantia, stabilivit.

In ea majore distantia, in qua Primarii Planetæ a se invicem distant, haberi aliquem ab eadem lege recessum, censuerunt alii, eumque etiam ex inæquali interno textu Planetaram ipsorum oriri posse sunt arbitrati. Si enim globorum quorundam particulæ in se invicem gravitent in ratione reciproca duplicata distantiarum, globorum ipsorum gravitas mutua ex singulis illis collecta singularum particularum viribus eandem pro centrorum distantiis rationem retinebit, ubi densitas paribus a centro distantiis in eodem globo sit eadem, quæ proinde si perturbetur, rationem quoque ipsam perturbari necesse est.

Verum

Verum satis accuratè eandem legem per totum extendi Planetarium systema, nec errores inde satis notabiles oriri posse, videtur omnino certum. Nam in primis in Mercurio, in Venere, in Tellure, in Marte errores pariter inde orti deprehenderentur, & eorum Aphelia potissimum mutarent locum. At eorum tabulæ ita penè accuratè cum Keplerianis legibus, ac proinde etiam cum ratione reciproca duplicata distantiarum consentiunt, atque aphelia ità fermè quiescunt, ut aberrationes illæ, perquam exiguæ, quæ supersunt, & lentissimus lineæ apsidum motus, vix tanta sint, quanta ex mutua aliqua actione oriri debere censendum est. Quid Cometarum motus, quorum loca dum etiam in eadem Jovis, ac Saturni distantia versantur, fere semper intra paucorum secundorum limites, cum orbita ex hac ipsa gravitatis lege deducta consentiunt? An igitur in Jove tantummodo, atque in Saturno, ingenium mutet natura, & ab ea lege, quam in cæteris omnibus ita accuratè persequitur, in iis unis recedat?

Et quidem, quod ad inæqualem pertinet internarum partium textum, nihil inde, quod sensu percipi possit, Jovis potissimum, ac Saturni motus perturbari posse, videtur omnino certum. Nam in primis inæqualis *densitas in ipsorum globis multo minorem, quam inæqualis in Sole densitas perturbationem inducent, ac fere nullam, tum quod vis acceleratrix corporis gravitantis, ejusque via multo magis pendet a positione partium ejus corporis, in quod gravitas ipsa dirigitur, quam a sua, tum quod multo minor ipsorum moles multo minorem particularum a loco sibi debito evagationem permittit, quam moles adeo immanis solaris globi, tum demum, quia multo celerior eorum circa proprium axem conversio, quam in Jove videmus, in Saturno ex analogia colligimus, huic ipsi malo, si quod esset, mederetur magis, jam aliis partibus in eandem plagam directis, jam aliis.*

At nullam in Sole ejusmodi densitatis inæqualitatem haberi, satis manifesto, meo quidem judicio, evinci potest. Nam siquid ea Jovis, ac Saturni motus perturbaret, multo illa quidem majorem perturbationem in propiorum Planetarum motus deberet inducere. Quo enim magis ab ea massa receditur, in quam gravitas tendit, eo minus inæqualitatem densitatis sentiri posse, manifestum omnino est; cum nimirum distantia loci, quem particula occupat, a loco, quem occupare deberet, ad distantiam corporis gravitantis eo minorem rationem habeat,

beat, quo magis crescit hæc secunda distantia. Quid vero in Cometis, quorum nonnulli tanto etiam infra Mercurium descendunt? Celeberrimus ille anni 1680, in quo primo suam Newtonus theoriam miro sane consensu comparavit cum Cælo, an in eodem plano, atque in eadem prorsus orbita post regressum a Sole perrexisset, in quibus advenerat, cum ad Solem ipsum ita accessisset, ut vix sexta ejus diametri parte ab eodem in Aphelio distiterit; si Solaris materia satis ab eo interno textu dissideret, qui requiritur, ut vires ad centrum globi se dirigant, & rationem distantiarum sequantur reciprocam duplicatam?

Atque hinc quidem satis manifesto evincitur ejusmodi inæqualitatem in Sole non haberi. Sunt autem plura, non indicia tantummodo, sed argumenta satis solida, atque firma, ex quibus colligi possit, nec in Sole, nec in Planetis ipsis eandem inæqualitatem adesse, saltem ita magnam, quæ motus ad sensum perturbet. Nam ex ejusmodi inæquali textu motum quoque circa proprium axem, positionem axis ipsius, Planetæ figuram perturbari omnino necesse est. At nullum ejusmodi perturbationis indicium apparet uspiam. Figuræ regularem prorsus formam habent omnino omnes, & circa centrum hinc, & in-

& inde æque dispositam, quin & sphæricam ad sensum omnes, præter Jovem unum, cujus figura ob tantam vertiginis celeritatem paullo magis compressa est; nam Telluris quoque nostræ figura ita parum distat a Sphærica, ut compressio, quam observationes exhibent, debeat sensum omnem longe prospectantis effugere, Saturni autem globus circularis apparet prorsus, & annulus ita est tenuis, ut ad globi massam relatus fere evanescat. Motus autem circa proprium axem in iis, in quibus satis definiri potest, ut & axis ipsius positio, diu eadem perstant ad sensum, & positio ipsa axis in Tellure nostra vix eum habet motum, quem protuberantia circa æquatorem requirit, eumque ita apte respondentem calculis sine ejusmodi densitatis inæqualitate deductis, ut Fixarum motus inde erutus intra unum, aut alterum secundum plerumque cum Cælo consentiat.

In tanta igitur phænomenorum omnium consensione, quis ab inæquali structura partium perturbationem rationis reciprocæ duplicatæ distantiarum jure timere possit? At nec tertium illud, quod proposueram, nimirum mutuam ejusmodi vim esse inter solaris saltem systematis corpora, minus firmum, ac solidum censendum est. Terrestrium particularum in Lunam gravitas satis ex

mari-

marini æstus phænomenis, atque ex ipso diurni motus axe circa axem eccliptica revoluto deprehenditur. Eadem, ut & secundariorum in suos primarios, & Solis gravitas in Planetas omnes, atque Cometas, e virium omnium analogia deducitur, quas ubique mutuas, contrarias, & æquales deprehendimus. Cum verò eadem omnino lex virium in tam multis corporibus tam longe a se invicem disjunctis tam accuratè obtineat, quid magis analogiæ naturæ consonum, quam illud, generalem hanc materiæ proprietatem esse, cujus partes in se mutuo æqualiter tendant in circumstantiis iisdem, undecumque ea ipsa tendentia ortum ducat?

Ex iis, quæ dicta sunt, ut & ex aliis, quæ addi possent non pauca, manifesto deprehenditur, aberrationum originem, quam assumpsi, & theoriæ meæ basim, non hypothesim esse arbitrariam probationibus suis destitutam, quin immo etiam firmissimis argumentis satis evinci. Et quidem eo in genere præjudicium habemus quoddam Academiæ ipsius, & in iis dissertationibus de Maris æstu, quas anno 1740 comprobavit, ediditque, & in postrema Euleriana de hoc ipso argumento, præmio pariter donata, quæ omnes mutuæ tantummodo gravitati decrescenti in ratione reciproca duplicata distan-

tiarum

tiarum innituntur. Quamobrem si ejusmodi theoriam proposuero, quæ aberrationes omnes a mutua Jovis, Saturni, ac Solis gravitate pendentes exhibeat, & accurate demonstrata sit; erit profecto Academiæ desiderio factum satis, & propositi problematis solutio habebitur ea ipsa, quam Academia requirit.

At ut id ipsum me utrunque simul præstitisse jam hinc ab ipso limine prospici possit, brevem quandam totius perquisitionis meæ speciem proponam ob oculos, unico velut obtutu perspiciendam.

Quinque ea capitibus absolvitur, quorum primum ea complectitur, quæ pertinent ad orbitam describendam viribus decrescentibus in ratione reciproca duplicata distantiarum, solutis nimirum binis problematis, quorum primo determinantur vires directæ ad focum sectionis conicæ, ubi areæ æquales terminantur ad focum, secundo data velocitate projectionis ac directione in datum punctum, datisque viribus decrescentibus in ratione reciproca duplicata distantiarum, determinatur orbita describenda. Utrumque quamplurimis jamdiu solutum methodis, methodo sane expeditissima hic iterum solvendum censui, ut ad constructionem orbitæ devenirem, qua simpliciorem desiderari vix

posse

posse arbitror, ex qua proinde quas mutationes in ipsam orbitam vis quaedam nova perturbatrix inducat, facile erueretur. Porro & illud commodum accidit, ut quidquid ex Newtoni compertis ad hanc meam perquisitionem requiritur, simul hisce propositionibus accuratissime, ac brevi methodo demonstratum, perquisitionis ipsius fundamenta lectori simul objiceret, ac pressius ipsius Academiae mentem assequeretur, quae demonstrationes propositionum requirit pro theoriae basi assumendarum. In corollariis vero, ac scholio pauca quaedam, licet ad rem praesentem non penitus necessaria adjicienda mihi censui, ut solutionis utriusque usum commendarem, ipsis Mechanicae, atque Astronomiae elementis haud sane incommodum, ac generaliter demonstravi, & satis evidenter ob oculos proposui, cur & quibus in casibus debeat projectum corpus ad centrum virium accedere, vel e contrario recedere, ac regulam admodum generalem, & expeditam nullo negotio derivavi, ad determinandum ex ipsa constructione, quae e tribus coni sectionibus describi debeat, Ellipsis nimirum, Parabola, an Hyperbola, prout altitudo illa, per quam motu uniformiter accelerato, vi, qua in puncto projectionis urgetur corpus, acquireretur velocitas,

tas, cum qua projicitur, ſit minor, æqualis, vel major diſtantiâ a centro virium, quæcunque fuerit projectionis ipſius directio.

Hiſce primo capite abſolutis, ſecundo capite mutationes perſequor, quas, mutata conſtructionis elementa in orbitam, & arearum deſcriptionem inducunt. Porro cum Jovis ac Saturni motus in Ellipſibus fiant, elliptici motus mutationes contemplor tantummodo, quæ contemplatio ad ceteras quoque facile transferri poſſet. Ejuſmodi vero elementa, quæ orbitam deſcribendam determinant, ſunt rectæ jungentis corpus cum centro virium directio, ac magnitudo, vis centralis quantitas abſoluta, motus tangentialis celeritas, atque directio. Iis nimirum datis, mea illa conſtructio & ſpeciem orbitæ, & magnitudinem, & poſitionem ſatis accurate determinat. Quamobrem ſi quid ex iis mutari contigerit, orbita ipſa mutetur, neceſſe eſt. Ea autem, quæ & ſpeciem, & magnitudinem, & poſitionem orbitæ determinant, ſunt magnitudo axis tranſverſi, magnitudo eccentricitatis, ac ipſius axis, ſive lineæ apſidum poſitio, quibus datis datur Ellipſis. Hinc ſingulis propoſitionibus ſingula, quæ jam enumerabo, determino: Primo quidem oſtendo, ex mutata directione tantummodo rectæ jungentis

gentis

gentis corpus cum centro virium, nihil consequi, nisi angularem motum lineæ apsidum ipsi ejus directionis mutationi æqualem: tum persequor magnitudinem axis transversi nihil mutatam inclinatione quacunque directionis tangentialis: deinde mutationes axis transversi ortas ex mutatione vis centralis, celeritatis tangentialis, ac distantiæ a centro virium, mutationes eccentricitatis, ac lineæ apsidum ortas ex mutatione axis transversi, easdem ortas ex mutatione distantiæ, easdem ex conversione tangentis. Eas autem omnes summo geometrico rigore definio, & in singulis geometria tantummodo infinitesimorum usus, ordines ipsos magno deinceps futuros usui mutationum ipsarum contemplor, atque accurate singularum valores determino.

Hisce absolutis ad arearum perturbationem facio gradum, ac primo quidem illud ostendo, mutationem positionis rectæ, jungentis corpus cum centro virium, mutationem vis directæ ad centrum ipsum, ac mutationem axis transversi, nihil arearum descriptionem turbare, quarum deinde mutationes ortas ex mutatione distantiæ, ex mutatione velocitatis, & ex mutatione directionis tangentis accurate definio, ac valores singulos eruo, ordines infinitesimorum contemplor.

Atque

Atque hæc bina capita ad perquisitionem ipsam veluti viam sternunt, ad quam multo propius accedo capite tertio, ubi in ipsas elementorum mutationes inquiro, quas vis extranea quædam in corpus agens inducit. Præmissis autem binis lemmatis, quorum alterum generalem quandam, & mihi utilissimam proprietatem exhibet binarum curvarum, quæ ordinatas in datis angulis ad idem dati axis punctum terminatas in data semper ratione habeant, alterum arcus infinitesimi proprietates quasdam, & linearum, angulorum, arearum ad ipsum pertinentium ordines præbet, quæ quidem licet satis nota, & pertinentia ad infinitesimorum elementa, demonstranda hic potius censui, ne quid omitterem, quæro effectum perturbationis inductæ in orbitam a vi extranea tempusculo infinitesimo. Porro eo tempusculo infinitesimo sine vi perturbante describi debuisset cujusdam ellipseos arcus, quem ea vis mutat in arcum curvæ alterius ita, ut in fine illius tempusculi corpus nec sit in eo puncto loci, in quo fuisset sine ipsa vi, nec celeritatem eandem habeat, nec eandem directionem motus. Quamobrem si concipiamus Ellipsim, quam in fine ejus tempusculi describere inciperet, si nulla præterea vi perturbante urgeretur, ejus elemen-

elementa ab elementis prioris ellipseos discrepant omnia, cum alia sit celeritas, alia tangentis novæ positio, alia distantia, ac proinde alia in centrum vis, alia demum positio distantiæ ipsius. In hasce igitur mutationes inquiro, & quidem inclinationem ipsam tangentis ita prius mutari concipio, ut parallela priori maneat, tum ut angulum cum nova distantia angulo prioris tangentis cum priore distantia æqualem contineat, quo pacto sex discrimina prioris ellipseos elementorum, a novæ ellipseos elementis considero.

Hic autem illud perquam commode accidit, quod universam perquisitionem mirum in modum simpliciorem reddidit, atque expeditionem, quod ex hisce sex elementorum mutationibus, binæ tantummodo considerari debeant, nimirum celeritatis mutatio, & inclinatio illa prima tangentis, reliquis mutationes secum trahentibus tempusculo infinitesimo primi ordinis, infinitesimas secundi, quæ proinde finito quoque tempore infinitesimæ sint, ac penitus evanescant. Priorum igitur illarum binarum mutationum effectus considero in axem, in eccentricitatem, in lineæ apsidum positionem, & axe per inclinationem tangentis nihil mutato, unicam pro ea, binas pro reliquarum singulis elicio formulas, quæ eorum mutationes

tiones ope præcedentium capitum exhibent, definitas per magnitudinem, ac directionem novæ vis perturbantis, ac positionem Planetæ perturbati in orbita sua. Iis autem definitis devolvor ad areas, in quibus, cum quævis areola post quodcunque tempus subsequens matationem subeat compositam ex mutationibus, quas præcedentes omnes in eam inducunt, illud ostendo, ne in quamvis areolam finito tempore ab initio motus distantem error irrepat infinitesimus ordinis primi, oportere, ut in præcedentium singulis ne secundi quidem ordinis infinitesimus error irrepat, ac proinde tertii tantummodo ordinis infinitesimas mutationes contemni posse. At a prioribus illis binis, nimirum a mutatione celeritatis tantummodo, & inclinatione tangentis, errores oriri evinco, qui ad secundum infinitesimorum ordinem assurgant, ceteris tuto contemptis, quare illos binos tantummodo persequor, & binas pro areolarum celeritate mutata formulas eruo, quas reliquis quinque adjungo, atque omnibus ejusmodi præfigo signa, quorum ope, & ope valoris sinuum, atque cosinuum, qui pro varia arcuum magnitudine angulos metientium verum valorem habent, determino, quibus in casibus incrementa haberi debeant, ac progressus, quibus aliis regressus,

sus, & decrementa, ubi & quædam, quæ ad methodum pertinent a Newtono propositam investigandi motus apsidum, adjicio, in quibus admodum facile ab incautis errores committi possunt, & vero etiam non semel commissi sunt, non ferendi.

Ac tertio quidem capite vim consideraveram perturbantem quancunque, & formulas per ejus quantitatem, ac directionem erueram. At capite quanto jam ad Jovem Saturnumque delapsus, in magnitudinem ipsam, ac directionem ejus vis, qua alter alterius motus perturbat, inquiro.

Et primo quidem rationem determino earum vivium, quibus Jupiter, & Saturnus in se invicem gravitant, earumque, quibus in eos gravitat Sol, ad eas, quibus ipsi in Solem gravitant, quæ cum a massis ipsorum pendeant, & a distantiis, massarum simul eam rationem eruo, Cassinianis Astronomiæ elementis usus, ubi Jovis massa, adeoque & gravitas in ipsum Jovem, quinta fere sui parte major mihi obvenit ea, qua Newtonus, qua Gravesandius, qua Keplerus est usus, unde in ipsas aberrationes Saturni ingens sane discrimen inducitur a varia massa in Jove assumpta, qua de re paulo infra redibit mentio.

Tum ad effectum harum virium dela-

psus, primum ostendo illud, vim, qua Planeta alteruter ab altero perturbatur, componi ex ea vi, qua in Planetam perturbantem gravitat perturbatus, ac ex vi æquali illi, qua in eundem gravitat Sol translata in ipsum Planetam perturbatum, cum nimirum hæc posterior Soli simul, ac Planetæ perturbato imprimenda sit, ut ejus circa Solem revoluti aberrationes habeantur, ac deinde propositione altera determino vires hasce compositas in conjunctione, ac oppositione, altera, in quavis binorum Planetarum positione ad se invicem.

Post utranque propositionem scholia quædam adjeci, quorum primum tam prioris, quam posterioris ad rem præsentem necessarium, methodum docet ineundi calculi numerici, ut virium ipsarum valores habeantur in quavis binorum Planetarum positione ad se invicem, & ad Solem. In posteriore prioris scholio algebraicum valorem vis in conjunctionibus, atque oppositionibus perturbantis motum expressi, unde liceret, at calulo molesto sane, atque inutili puncta etiam orbitæ definire, in quibus maxima evaderet, aut minima ea vis, ac in reliquis posterioris propositionis scholiis casus quosdam particulares sum persecutus, ac curvarum quarundam naturam, & constructio-

structionem simplicissimam, atque elegantem contemplari libuit, quarum aliæ directionem exhibent vis perturbantis, licet si Planeta perturbare concipiatur motus in circulo, ad decimum assurgant gradum, si moveatur in Ellipsi, ad quartumdecimum, aliæ, quantitatem quoque ejusdem vis determinant, & multo altiores sunt.

In postremo autem hujusce propositionis scholio aliquanto etiam fusiore, plures ostendo methodos, quibus directio ipsa, & quantitas vis perturbantis, ac ceteri etiam valores formularum capite tertio erutarum pro aberrationibus generaliter exprimi possent algebraica formula saltem per series infinitas, ubi & compendia quædam indico orta ex tam exiguo ellipsium harum discrimine a circulo, quibus omnibus definitis ad formularum integrationes liceret progredi, at immenso sane labore, & calculo adeo implicato, ut nullum possit habere usum, cum potissimum alia suppetat rei feliciter gerendæ ratio per curvarum quadraturas quasdam, quarum ordinatæ in quovis puncto nullo negotio obtinentur, & per eas facili admodum ratione areæ quoque, & quæsitarum aberrationum valores haberi possint. Sed ea, ut & tabularum condendarum rationem in caput quartum rejeci.

In ipso autem capite quarto in primis illud ostendo, qua ratione inveniri possit diurna mutatio orbitæ, ac areolæ in oppositionibus, & conjunctionibus, in quibus calculus evadit facilior, & quarum posteriorem Academia nominatim requirit. Cum nimirum formulæ capite tertio erutæ exhibeant per directionem & magnitudinem vis perturbantis determinatas capite quarto, ac per quantitates alias admodum facile computandas, mutationes ejusmodi aptatas tempusculo, quo arcus infinitesimus motus veri describitur, cumque exiguo tempore elementa omnia calculi, sive singuli formularum valores maneant ad sensum iidem, præter arcum ipsum veri motus; pro elemento arcus ipsius substituto arcu debito diei integræ, mutationes habentur diurnæ nullo negotio.

Deinde in mutationes easdem inquiro, quæ ubicunque, etiam extra conjunctiones, & oppositiones, debentur tempori, quo arcus quivis datus motus veri percurritur. Nimirum computato valore formulæ totius præter arcum illum infinitesimum motus veri, quod admodum facile præstatur pro quavis trium Planetarum positione ad se invicem, huic valori æqualem concipio ordinatam curvæ cujusdam, cujus abscissæ sint æquales arcubus ipsis veri motus; ac proinde ejus areæ valorem

rem quæsitum exhibent mutationem toti illi arcui debitarum. Sequenti autem scholio methodum trado admodum expeditam, qua computatis identidem ordinatis per æqualia arcuum intervalla, areæ valor computari possit vero quamproximus, & illud moneo, nihil incommodum esse tot ordinatas computare, ubi agitur de condendis tabulis, pro quibus etiam in formula integrata oporteret pro plurimis arcubus substituere valores suos. Hic autem præterea si correctiuncula quædam areis adhibeatur, non ita multis ordinatis est opus, & dum ordinatæ singulæ computantur; novarum ordinatarum elementa corrigi possunt, quæ quæsitas aberrationes exhibeant multo adhuc propiores veris. Tum ad mutationes pergo, quæ inde profluunt in distantiam Planetæ a Sole, in æquationem, ad Anomalias, & potissimum in tempus, quo datus arcus veri motus describitur.

Hisce fusius expositis, jam ad totius theoriæ fructum capiendum progredior, nimirum methodum trado condendi tabulas inæqualitatum ipsarum, ex quibus possit ad datum tempus, datus Planetæ locus definiri. Binis autem tabulis est opus, quarum altera per datam a conjunctione postrema distantiam, exhibeat correctiones debitam axi *trasverso, eccentricitati, positioni lineæ apsidum, tempori periodico distantiæ a Sole, tempori, quod in eo motu vero a conjunctione ipsa ad datum illum locum elapsum est, quæ quidem computari debet supposita conjunctione jam in aliis ab Aphelio distantiis, jam in aliis, ut interpolationis usitatæ methodo, dato quovis loco postremæ conjunctionis, eadem eruantur pro quavis ab eadem distantia.*

Secunda tabula debet quasdam velut radices conjunctionum continere, quæ conjunctiones ipsæ cum vicenis tantummodo redeant annis, earum non ita multæ pluribus sæculis abunde sufficiunt. In ea autem pro quavis ex ejusmodi conjunctionibus haberi debet ipsius conjunctionis tempus, & locus, distantia media, eccentricitas, locus Aphelii, tempus periodicum, ex quibus, & ex prima tabula, locus Planetæ ad datum tempus assignari omnino potest.

Jam vero methodum etiam exhibeo, qua ex datis quibusdam inter binas conjunctiones observationibus, & correctione iis adhibita ex prima tabula, elementa illa orbitæ pro conjunctione illa erui possint, tum ex iis, & eadem tabula progredi liceat ad conjunctionem sequentem, & ita porro, unde admodum perspicua ratio condendæ radicum

dicum

dicum tabulæ derivatur. Porro quotiescunque orbitam dico, axem, eccentricitatem, positionem aphelii, eam semper intelligo orbitam, ea orbitæ elementa, quæ haberentur, si repente vis omnis perturbans abrumperetur, & Planeta jam soli velocitati tangentiali, ac vi in Solem relictus moveri pergeret, qui nimirum Ellipsim semper describeret; sed Ellipsis ipsa jam alia esset, jam alia pro diverso loco, in quo vis illa perturbatrix abrumpitur, cujus Ellipseos mutationibus determinatis, illa semper, quam quovis tempore Planeta requirit, & locus in eadem deprehenditur, ac proinde mutuæ perturbationis effectus innotescit.

Huc usque autem ab orbitarum inclinatione mutua animum abstraxeram, quæ nimirum perturbationes orbitæ, & areæ descriptæ ad sensum non mutat, ut hic demonstro; at postremo capite in nodorum motum inquiro, ac in mutationem inclinationis orbitæ, pro quibus, geometrica pariter methodo, suas eruo formulas, determinando prius quæ pertinent ad nodos, & inclinationem mutuam orbitarum Planetæ perturbati, ac perturbantis, ac deinde effectum respectu Plani Eccliptícæ deducendo: quibus absolutis, in postremo generali scholio de iis mentionem facio, quæ præter mutuam *trasverso, eccentricitati, positioni lineæ apsidum, tempori periodico distantiæ a Sole, tempori, quod in eo motu vero a conjunctione ipsa ad datum illum locum elapsum est, quæ quidem computari debet supposita conjunctione jam in aliis ab Aphelio distantiis, jam in aliis, ut interpolationis usitatæ methodo, dato quovis loco postremæ conjunctionis, eadem eruantur pro quavis ab eadem distantia.*

Secunda tabula debet quasdam velut radices conjunctionum continere, quæ conjunctiones ipsæ cum vicenis tantummodo redeant annis, earum non ita multæ pluribus sæculis abunde sufficiunt. In ea autem pro quavis ex ejusmodi conjunctionibus haberi debet ipsius conjunctionis tempus, & locus, distantia media, eccentricitas, locus Aphelii, tempus periodicum, ex quibus, & ex prima tabula, locus Planetæ ad datum tempus assignari omnino potest.

Jam vero methodum etiam exhibeo, qua ex datis quibusdam inter binas conjunctiones observationibus, & correctione iis adhibita ex prima tabula, elementa illa orbitæ pro conjunctione illa erui possint, tum ex iis, & eadem tabula progredi liceat ad conjunctionem sequentem, & ita porro, unde admodum perspicua ratio condendæ radicum

dicum

dicum tabulæ derivatur. Porro quotiescunque orbitam dico, axem, eccentricitatem, positionem aphelii, eam semper intelligo orbitam, ea orbitæ elementa, quæ haberentur, si repente vis omnis perturbans abrumperetur, & Planeta jam soli velocitati tangentiali, ac vi in Solem relictus moveri pergeret, qui nimirum Ellipsim semper describeret; sed Ellipsis ipsa jam alia esset, jam alia pro diverso loco, in quo vis illa perturbatrix abrumpitur, cujus Ellipseos mutationibus determinatis, illa semper, quam quovis tempore Planeta requirit, & locus in eadem deprehenditur, ac proinde mutuæ perturbationis effectus innotescit.

Huc usque autem ab orbitarum inclinatione mutua animum abstraxeram, quæ nimirum perturbationes orbitæ, & areæ descriptæ ad sensum non mutat, ut hic demonstro; at postremo capite in nodorum motum inquiro, ac in mutationem inclinationis orbitæ, pro quibus, geometrica pariter methodo, suas eruo formulas, determinando prius quæ pertinent ad nodos, & inclinationem mutuam orbitarum Planetæ perturbati, ac perturbantis, ac deinde effectum respectu Plani Eclipticæ deducendo: quibus absolutis, in postremo generali scholio de iis mentionem facio, quæ præter mutuam *ipsorum actionem, Jovem, ac Saturnum licet multo minus perturbant, ac de observationibus quibusdam accuratius instituendis, ante quam tabulæ conputentur, per quas inposterum horum planetarum loca correctiora reddantur.*

Et hæc quidem summa est quædam totius theoriæ meæ, & brevis universæ dissertationis conspectus. Porro in iis omnibus, quæ ad ipsam theoriam necessaria sunt, geometria semper sum usus, quo plurium captui aptari posset, nec symbola, & algebram uspiam adhibui, præter scholia quædam, ad theoriam ipsam non necessaria, summum autem demonstrationum rigorem ubique sum persecutus, quem, an etiam assecutus sim, Academia judicabit.

Superesset tabularum ipsarum supputatio, longus sane labor, quem tamen subiissem libens, ante quam dissertationem hanc ipsam ad Academiam transmitterem. At primò quidem unum ex præcipuis elementis inæqualitatum Saturni, quæ magis sub sensum cadunt, adhuc minus accuratè definitum absterruit, ut ipso postremo scholio profiteor, nimirum massa Jovis, a qua ejus actio omnino pendet.

Ea ab elementis motuum, ac distantiarum Satellitum Jovis a Jove ipso derivatur

tur, quæ ipsa elementa ab aliis alia nimirum proponuntur ita, ut aberrationes omnes quinta sui parte majores obveniant, si Cassino assentior, quam si plerisque aliis, ut supra etiam memoravi. Licet autem, ut in eodem moneo postremo scholio, prima tabula semel computata facile admodum corrigi possit, ubi vera Jovis massa deinde deprehendatur; radices illæ non item, sed iterum calculandæ sunt, qui labor ingens sane, cum tanto infelicis exitus periculo tentari non debet. Massæ Jovis ex ipsis observationibus aberrationum Saturni, atque e tabulis semel calculatis determinandæ methodum ibidem trado, quæ quidem procederet, nisi aliis etiam inæqualitatibus, quas reliqui Planetæ, & Cometæ inducunt, Saturnus esset obnoxius.

Quamobrem, cum Satellitibus Jovis diligentius observatis eadem massa multo facilius, atque accuratius definiri possit, satius est, hanc ejus definitionem ante computationes tabularum expectare, quod iccirco etiam libentius præstiti, quod non ipsas etiam tabulas Academia requirit, sed theoriam, ex quâ nimirum tabulæ derivari possint, quam quidem diligentissime persecutus sum, & eam inveni, quam ea potissimum videtur requirere.

Si

Si tabulæ ipsæ computatæ jam essent; posset sane theoria cum Cælo conferri; sed non exiguus observationum numerus satis esset, cum nimirum ab aliis quoque Planetis, Cometisque, Saturnus potissimum, cujus omnium minima in Solem gravitas, disturbetur. Nec ea perturbatio est tam exigua, ut dissensum aliquem observationum a theoria parere nequeat, quem qui penitus evitare velit, is potest eadem methodo hac mea reliquorum quoque Planetarum actionem determinare, qui, dum in conjunctionibus hinc Solem trahunt sibi propiorem, inde vero Saturnum, adhuc mutuam utriusque positionem nonnihil perturbant. Verum definita semel massa Jovis, ac tabulis ex sola Jovis actione computatis, ubi per tempus licuerit, quod, si suo Academia suffragio labores hosce meos comprobaverit, libens quamprimum potero, præstare contendam, ex ipso theoriæ consensu, vel dissensu cum cælo, licebit judicare, utrum satis notabiles effectus edant Planetæ ceteri, quorum aliqui, ut Venus, Mars, & Mercurius, qua massa sint præditi omnino non constat. Neque enim aliunde perturbationes ipsas oriri posse nisi a mutua gravitate Planetarum, ac Cometarum crediderim, nec ullam aliam in se invicem exercere actio-

nem

nem Jovem, atque Saturnum, quam eam, quæ a mutua ipsa gravitate pendet; ut proinde, cum errores omnes determinaverim, quos hac ipsa gravitate sibi invicem inducunt hi Planetæ, nihil præterea determinandum supersit, ac sola vis, qua in se mutuo tendunt, & Solem trahunt ad sese, omnium aberrationum sit causa, quò etiam respexi in eo versu, quem tanquam Dissertationis titulum quendam de more præfixi ad veterum Poetarum somnia alludens, mutuo quodam amore nunc perturbante Jovem, atque Saturnum, quos illi dissensionibus olim, & odiis, atque inimicitiis perturbatos confinxerant.

HIE-

HIERONYMUS RIDOLFI

Societatis Jesu in Provincia Romana Præpositus Provincialis.

CUm librum, cui Titulus: *De inæqualitatibus, quas Saturnus, & Jupiter videntur sibi mutuo inducere potissimum circa tempus conjunctionis &c.* a P. Rogerio Josepho Boscovich nostræ Societatis Sacerdote conscriptum, aliquot ejusdem Societatis Theologi recognoverint, & in lucem edi posse probaverint, potestate nobis a R. P. nostro Aloysio Centurioni Præposito Generali ad id tradita, facultatem concedimus, ut typis mandetur, si ita iis, ad quos pertinet, videbitur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscriptas, & sigillo nostro munitas dedimus. Romæ die 14. Augusti 1756.

Hieronymus Ridolfi.

IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sacri Palatii Apostolici.

F. M. de Rubeis Patriarcha Constantinop. Vicesg.

JUssu Reverendiss. Patris S. P. A. Magistri legi librum, cui titulus: *De inæqualitatibus, quas Saturnus, & Jupiter &c.* In eo quidquam reperiri posse, quod Catholicæ Fidei, bonisque moribus adversetur, ne suspicandi quidem locus fuit. Vicit vero expectationem meam, quam ex celeberrimo Doctissimi Scriptoris nomine conceperam vel maximam, incredibilis illa ingenii vis atque amplitudo, quæ, in difficillimo hoc pertractando argumento, adeo Geometricam, qua mirifice pollet, rationem distendit, ac promovet, ut nihil desiderari nec clarius in hoc genere, nec verius, nec admirabilius possit. In quorum fidem &c.

Benedictus Stay in Archigym. Romano Pub. Eloquentiæ Professor.

IMPRIMATUR,

Fr. Joseph Augustinus Orsi Ordinis Prædicatorum, Sacri Palatii Apost. Magist.

CA-

CAPUT I.

De problemate directo, & inverso virium centralium decrescentium in ratione reciproca duplicata distantiarum.

Prop. I. Probl.

Investigare in Sectionibus conicis descriptis ita, ut areæ ad focum terminatæ sint temporibus proportionales, vires directas ad ipsum focum. F. 1

1. SIT ACa axis transversus, in 2
quo foci S, F, CB semiaxis 3
conjugatus, DC semidiameter conjugata diametri PCO parallela tangenti PK, occurrens rectæ PS in G, perpendiculo in se demisso ex P in H. Compleatur parallelogrammum PCDK, ac ex puncto E perimetri infinitè proximo P concipiatur recta tangenti PK parallela, occurrens rectis PC, PH, PS in M, I, L, & EN perpendicularis SP, ac areolæ PSE terminatæ ad focum S propiorem apsidi *a* æqualibus tempusculis descriptæ æquales sint; quæritur mensura virium, quæ corpus eam curvam describens perpetuo urgent in ipsum punctum S.

2. Quæ-

2. Quærendus erit valor lineolæ PL, posita constanti area PSE, cujus duplum si dicatur A; erit $A = PS \times EN$, adeoque $EN = \frac{A}{PS}$; ut & area parallelogrammi PCDK, quæ ex conicis est $= AC \times CB$, erit $= CD \times PH$.

3. Ex conicis est $CD^2 . CP^2 :: EM^2 . OM \times MP = \frac{CP^2 \times EM^2}{CD^2}$. Cumque pro OM sumi possit OP ipsi æquipollens, sive 2CP; dividendo hinc per OM, inde per 2CP fiet $PM = \frac{CP \times EM^2}{2CD^2}$.

4. Inde eruitur, esse $\frac{2CD^2}{CP} . EM :: EM . PM$; ac proinde cum EM sit quantitas infinitesima respectu quantitatis finitæ $\frac{2CD^2}{CP}$; erit & PM infinitesima respectu EM. Quare cum LM ad MP sit in ratione finita GC ad CP; erit & LM infinitesima respectu ME, ac sumi poterit LE pro ME, eritque $PM = \frac{CP \times EL^2}{2CD^2}$;

5. Ex conicis recta PG ducta per focum S, & intercepta inter P, & diametrum conjugatam æquatur semiaxi AC. Est autem $CP . GP = AC :: PM = \frac{CP \times EL^2}{2CD^2} . PL = \frac{AC \times EL^2}{2CD^2}$.

6. Quoniam triangula PHG, PIL similia sunt ob angulos ad H, & I rectos, ad P æquales,

les, & PIL, ENL pariter similia ob angulos ad I & N rectos, & angulum ad L communem; erit & PHG simile ENL; adeoque $PH . PG = AC :: EN = \frac{A}{PS} . EL = \frac{A \times AC}{PS \times PH}$, quo valore substituto in num. 5 erit $PL = \frac{A^2 \times AC^3}{2 \times PS^2 \times PH^2 \times CD^2}$.

7. Quoniam per num. 2 est $AC \times CB = CD \times PH$, erit $PL = \frac{A^2 \times AC^3}{2PS^2 \times AC^2 \times CB^2} = \frac{A^2 \times AC}{2PS^2 \times CB^2}$.

8. In ejusmodi formula variato utcunque puncto P per sectionem conicam eandem, constans est valor $\frac{A^2 \times AC}{2CB^2}$. Igitur PL, & vis ipsi proportionalis sunt reciprocè ut PS^2, sive in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro virium.

9. Si comparentur vires in diversis Sectionibus conicis, in formula num. 7 $\frac{2CB^2}{AC}$ est latus rectum principale, & areolæ A sunt, ut areæ quovis dato tempore descriptæ. Erunt igitur vires in ratione composita ex hisce tribus, duplicata directa areæ quovis dato tempore descriptæ; reciproca simplici lateris recti principalis, & reciproca duplicata distantiæ a centro virium. Q. E. Inv.

10. Cor. 1.

10. Coroll. 1. *Si in diversis Ellipsibus fuerint quadrata temporum periodicorum, ut cubi distantiarum mediarum, vel in Parabolis quadrata temporum, quibus areæ similes describuntur, ut cubi laterum homologorum; vires diversorum etiam corporum in iis revolventium inter se comparatæ erunt in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro virium.*

11. Nam in diversis Ellipsibus areæ totales sunt ex conicis ut $AC \times CB$; areolæ autem A communi tempusculo descriptæ eo majores, quo major est area totalis, & quo breviori tempore periodico describitur; adeoque si tempus periodicum dicatur T; erit A, ut $\frac{AC \times CB}{T}$. Erat autem per num. 7 vis generaliter, ut $\frac{A^2 \times AC}{2PS^2 \times CB^2}$. Ponendo igitur pro A^2, $\frac{AC^2 \times CB^2}{T^2}$, erit vis ut $\frac{AC^3}{2T^2 \times PS^2}$. Sit T^2 ut AC^3, quadrata temporum, ut cubi distantiarum mediarum; & jam evadet $\frac{AC^3}{T}$ quantitas constans. Omissa igitur constanti $\frac{AC^3}{2T^2}$, erit vis in ratione reciproca quadrati PS, sive reciproca duplicata distantiæ ab S. Quod erat primum.

12. Quoniam autem Ellipses, centro in infinitum abeunte, desinunt in Parabolas, quæ omnes similes sunt inter se; tempora, & latera homologa succedunt in iisdem tempori perio-

periodico, & distantiæ, ac areæ similes areis totalibus. Pater igitur etiam, quod secundo loco proposui.

13. Coroll. 2. *Si PQ jacens in eadem directione, secundum quam agit vis, sit æqualis illi altitudini, ex qua corpus libere descendendo motu uniformiter accelerato per vim, quam habet in P, acquireret velocitatem, quam ibidem habet; erit* $Aa \times PQ = PF \times PS$.

14. Nam in primis tempusculo, quo describitur arcus PE, describeretur PL motu uniformiter accelerato per eam vim, & motu uniformi cum velocitate, quæ habetur ibidem, describeretur LE. Tempore autem illo, quo motu uniformiter accelerato describitur PQ, cum velocitate illa eadem in fine acquisita describeretur ejus duplum motu uniformi. Erit igitur PL ad PQ, ut quadratum primi illius tempusculi ad quadratum secundi temporis, & erit LE ad 2PQ, ut primum illud tempusculum ad secundum tempus; adeoque $PL . PQ :: LE^2 . 4PQ^2$; ac proinde $\frac{LE^2}{4PQ} = PL =$ (per num. 5) $\frac{AC \times LE^2}{2CD^2}$. Quare $2AC \times PQ = CD^2$. Est autem e conicis quadratum semidiametri conjugatæ $CD^2 = PF \times PS$, & $2AC = Aa$. Igitur $Aa \times PQ = PF \times PS$. Q. E. D.

15. Coroll. 3. *In omnibus Sectionibus conicis descriptis eadem virium lege decrescentium in ratione reciproca duplicata distantiarum a communi foco, erunt quadrata velocitatum in ratio-*

ne composita ex directa distantiæ a foco, ad quem non tendit vis, qui dicitur focus superior, reciproca distantiæ a foco coincidente cum ipso centro virium, qui dicitur focus inferior, ac axis transversi conjunctim; in Parabolis autem in sola ratione reciproca distantiæ; & intra quamvis Ellipsim variabitur magis, intra quamvis Hyperbolam minus, quam pro ratione reciprocæ distantiæ ejusdem.

16. Nam in motu uniformiter accelerato spatia sunt, ut quadrata velocitatum directe, & ut vires reciprocè; ac proinde quadrata velocitatum directè, ut spatia, & vires conjunctim. Spatia in casu nostro sunt illæ altitudines $PQ = \frac{PF \times PS}{Aa}$, per num. 14, vires sunt, ut $\frac{1}{PS^2}$. Igitur Quadrata velocitatum erunt, ut $\frac{PF}{Aa \times PS}$, nimirum directè ut PF, & reciprocè ut PS, ac Aa conjunctim.

17. In Parabola abeunte axe in infinitum, ratio distantiæ PF ad axem Aa abit in rationem æqualitatis, ac proinde $\frac{PF}{Aa}$ evadit $= 1$. Quare quadratum illud celeritatis remanet, ut $\frac{1}{PS}$.

18. Intra quamvis Ellipsim, vel Hyperbolam axis Aa constans rationem non mutat. Remanet igitur illud quadratum velocitatis, ut

ut $\frac{PF}{PS}$. In Ellipsi autem crescente PF, decrescit PS, at in Hyperbola crescit. Quare $\frac{PF}{PS}$ in illa mutatur magis, in hac minus, quam in sola ratione $\frac{1}{PS}$. Patent igitur omnia, quæ proposita fuerant.

19. Coroll. 4. *In Ellipsi* PQ *semper erit minor, quam* PS, *in Parabola æqualis ipsi, in Hyperbolæ ramo citeriore major, in ulteriore potest habere ad ipsam rationem quamcunque.*

20. Cum enim sit, per num. 14, A*a*xPQ = PFxPS; erit PQ . PS :: PF . A*a*, quæ ratio in Ellipsi est minoris inæqualitatis, in Parabola abit in rationem æqualitatis, in ramo citeriore Hyperbolæ, est minoris inæqualitatis, in ulteriore potest esse quæcunque. Q. E. D.

21. Cor. 5. *Si sumatur* SR *æqualis axi transverso* A*a in Ellipsi in* fig. 1 *versus* P, *in ramo citeriore Hyperbolæ cavo versus* S *in* fig. 2 *ad partes oppositas* P, *atque iterum versus* P *in* fig. 3 *in ramo ulteriore obvertente ipsi* S *convexitatem; erit* SR *tertia geometricè proportionalis post* SQ, SP.

22. Quoniam enim ipsarum PS, PF summa in Ellipsi, differentia in Hyperbola æquatur axi transverso SR; in omnibus iis casibus erit PR = PF. Quare cum per num. 14 sit A*a*xPQ = PFxPS, erit SRxPQ = PRxPS; ac proinde SR . PR :: SP . PQ, & capiendo in

prima, ac ſecunda figura ſecundo, & quarto loco differentiam, in tertia ſummam terminorum rationis, erit SR . SP :: SP . SQ. Q. E. D.

23. *Scholium*. Multo plura deduci facile poſſent, ſed quæ ad rem noſtram minus pertinent. Poſtrema duo corollaria præ ceteris omnibus notanda, quorum uſus potiſſimus erit, & quæ problematis inverſi ſolutionem exhibent ſatis ſimplicem.

Prop. II. Problema.

Data directione, & celeritate projectionis ex dato puncto, ac data vi corporis tendentis in datum punctum poſitum extra directionem ipſam projectionis, vel tendentis ab eodem puncto viribus decreſcentibus in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, invenire orbitam, quam deſcribet.

F.4 24. Sit S centrum virium, PD directio
5 projectionis; ſit autem 1 ad u ratio gra-
6 vitatis noſtræ in ſuperficie Terræ ad vim il-
7 lam datam in P, ac n numerus digitorum Pariſienſium, qui ſingulis ſecundis horariis data illa velocitate percurrerentur. Invenietur in primis illa altitudo, ex qua motu uniformiter accelerato per datam vim acquireretur celeritas data. Nam noſtra gravia ſingulis ſecundis horariis deſcendunt per pedes Pariſienſes 15, & digitum 1, ſive per digitos 181, & in fine ejus altitudinis acquirunt celeritatem,

tem, qua singulis secundis horariis percurrerent ejus duplum, sive digitos 2×181. Cum igitur altitudines hujusmodi sint, ut quadrata celeritatum directè, & vires reciprocè conjunctim, erit, ut $\frac{4 \times 181 \times 181}{1}$ ad $\frac{nn}{u}$, ita 181 ad altitudinem quæsitam, quæ evadit $\frac{nn}{4 \times 181 \times u}$ $= \frac{nn}{724u}$.

25. Capiatur jam PQ æqualis ejusmodi altitudini versus eam partem, in quam vis tendit: tum fiat SR tertia proportionalis post SQ, SP, ad easdem partes cum SQ, ducaturque RD perpendicularis ipsi PD, & tantundem producatur in F, ac focis S, F, axe transverso *a*A æquali SR, cujus positionem & centrum C ipsi foci determinant, describatur coni sectio PE, quam dico fore quæsitam curvam.

26. Nam in primis satis patet PR, PF fore æquales, & proinde SR fore summam, vel differentiam ipsarum PS, PF, adeoque conicam sectionem ejusmodi transituram per P, & ob angulos RPD, FPD æquales rectam PD fore ejus tangentem. Deinde satis constat, corpus projectum quacunque velocitate per tangentem cujusvis curvæ e puncto contactus posse eam curvam describere viribus directis ad punctum quodlibet, dummodo vires & initio, & deinde ejusmodi sint, quæ ipsum a motibus rectilineis, ad quos ubique nititur vi inertiæ secundum directiones tangentium,

ad illius ipsius curvæ arcum perpetuo deflectant. Quamobrem hac ipsa velocitate & directione data projectum hanc ipsam Sectionem conicam describet, si vis data sit ejusmodi, quæ ad eam describendam requiritur. Est autem. Nam primo quidem per num.21, ubi hæc coni sectio describitur, altitudo illa per quam vi, quam corpus habet in P, acquireret velocitarem, quam ibidem habet, est hæc ipsa PQ; ac proinde cum & velooitas, & altitudo PQ sit eadem; vis quoque illa erit eadem, ac vis data, quæ iccirco initio est, qualis esse debet. Præterea vero hæc vis data decrescit ex hypothesi in ratione reciproca duplicata distantiarum a foco S, ut illam debere decrescere patet ex num.8, adeoque & initio, & deinde vis data est ea, quæ ad hanc ipsam Sectionem conicam describendam requiritur. Eam igitur describet. Q. E. D.

27. Coroll.1. *Si vires tendant in datum punctum, vel a dato puncto in ratione reciproca duplicata distantiarum ab ipso, & projiciatur corpus iis viribus præditum utcunque per rectam quamcumque, quæ per ipsum virium centrum non transeat; describet semper Sectionem conicam, in primo casu Ellipsim, Parabolam, vel Hyperbolæ citeriorem ramum, prout altitudo illa, ex qua motu uniformiter accelerato per vim, quam habet, ubi projicitur, acquireretur velocitas, cum qua projicitur, fuerit minor, æqualis, vel major, quam distantia a centro virium; in secundo vero casu semper ramum ulteriorem Hyperbolæ, quæcunque fuerit projectionis velocitas.*

28. Sa-

28. Satis patet ex num. 19; adhuc tamen sic iterum facile demonstratur. In primo casu PQ semper cadet versus S, quo nimirum vis tendit, & si fuerit minor, quam PS, ut in *fig.* 4, cadet R ad partes oppositas tangentis PD respectu S, & alter focus F ad easdem partes cum S; ac proinde Sectio conica erit Ellipsis. Si PQ æquetur PS, evanescente SQ, abibit axis SR, & focus F in infinitum, ac Ellipsis figuræ 4 migrabit in Parabolam figuræ 5, quæ Parabola facile determinabitur. Assumpto enim in recta SP producta quovis puncto *r*, & ducta *rdf*, ut supra, debebit esse P*f* diameter, ob angulos *r*P*d*, *f*P*d* æquales; & dato foco S, diametro P*f*, cum ejus vertice P, ac directione ordinatarum parallelarum tangenti P*d*, datur Parabola. Si PQ fuerit adhuc major, ut in *fig.* 6, cadet R ad easdem partes cum S respectu tangentis, adeoque alter focus F ad oppositas; ac proinde jam Sectio Conica mutabitur in Hyperbolam, in qua cum PS sit minor, quam PR, adeoque minor, quam PF; focus S erit propior puncto P, quam focus F; ac proinde ramus PE erit ramus citerior, intra quem ipse focus S jacet. In secundo autem casu, in quo vires diriguntur ad partes oppositas centro virium S, jacebit PQ ad partes pariter ipsi oppositas, ut in *fig.* 7, cujuscunque ea magnitudinis fuerit; adeoque jacebit R inter P, & S, ac F ad partes oppositas tangentis; & proinde curva PE erit adhuc Hyperbola; sed ob PS majorem quam PR, adeoque etiam majorem, quam PF, ramus

PE erit ramus ulterior, extra quem jacet focus S. Patent igitur omnia, quæ fuerant proposita.

29. Coroll. 2. *Si directio projectionis fuerit perpendicularis directioni virium tendentium ad datum punctum, & casu pertinente ad Ellipsim, altitudo illa minor, quam distantia ab eodem puncto; vel punctum projectionis congruet cum apside summa remotiore a foco, in quo est centrum virium, vel focis coeuntibus Ellipsis migrabit in circulum, vel illud punctum congruet cum apside ima, prout illa altitudo fuerit minor, quam dimidia distantia a centro virium, vel ei æqualis, vel major.*

F.8 30. Nam in hoc casu perpendiculum RD
9 debet recidere in ipsam directionem ~~proje-~~ virium
10 ~~ctionis~~, ut patet; adeoque & focus F jacebit in eadem recta PS, in quam & axis transversi vertices, sive binæ apsides abibunt, & quidem earum altera in ipsum punctum P. Cum vero sit SR . SP :: SP . SQ, erit etiam dividendo PR . SP :: PQ . SQ. Quare PF, quæ ipsi PR æquatur, erit minor, quam PS, ut in *fig.* 8, vel ei æqualis, ut in *fig.* 9, vel major, ut in *fig.* 10, prout PQ fuerit minor, quam SQ, vel ei æqualis, vel major; ac proinde prout fuerit minor dimidià PS, vel ei æqualis, vel major. Q. E. D.

31. *Scholium* 1. Quædam licet ad rem nostram non pertinentia deduxi, quod ex una parte sponte profluerent ex admodum simplici constructione problematis, quæ est totius theoriæ meæ, & hujusce perquisitionis veluti basis

sis quædam, & fundamentum, ex alia parte, & ad Geometriam, & ad Mechanicam, & ad Astronomiam Physicam utilia sunt, & ipsa quadam elegantia sua, ac venustate, ne illa omitterem, vetuerunt. Unum illud hic prætcrea notandum duco, pro iis potissimum, qui Geometriæ, saltem altioris expertes, illud nequaquam intelligunt, qui fieri possit, ut idem Planeta ex Aphelio, ubi minore vi in Solem urgetur, ad Solem ipsum descendat, ex Perihelio vero, ubi urgetur majore vi, contra ascendat. Accessus, vel recessus corporis respectu centri virium pendet, a directione projectionis, sive velocitatis tangentialis respectu rectæ tendentis ad centrum virium, & relatione velocitatis ipsius ad vim, qua urgetur in ipsum centrum, vel ab ipso centro.

32. Nimirum si angulus, quem directio projectionis, vel velocitatis tangentialis continet, cum recta tendente ad centrum virium est acutus, semper corpus statim incipiet ad centrum ipsum virium accedere, licet deinde exiguo etiam intervallo possit mutare accessum in recessum; si est obtusus, semper incipiet recedere, licet pariter deinde exiguo etiam intervallo recessum mutare possit in accessum. Si est rectus, incipiet statim accedere, feretur semper in eadem distantia in circulo, vel incipiet recedere; prout altitudo illa, ex qua motu uniformiter accelerato per vim, qua urgetur in centrum, erit minor, quam dimidia distantia ab ipso centro virium, ipsi æqualis, vel major, & si vis tendat ad

par-

partes centro oppositas, semper in hoc anguli recti casu recedet.

33. Hoc theorema, quod generaliter demonstrari potest pro quavis curva, & quavis virium lege, pro lege vis decrescentis in ratione reciproca duplicata distantiarum manifesto patet ex hujus secundi problematis con-
F.4 structione, & corollariis. Nam in primis re-
5 ctam SP cum tangente per P ducta continere
6 in Ellipsi angulum acutum ad partes apsidis
7 imae *a* oppositas alteri foco F, & obtusum ad partes apsidis summae A, patet vel ex eo, quod binae SP, FP cum tangente angulos aequales contineant; ac pariter in Parabola in *fig*. 5, in ramo citeriore Hyperbolae, in *fig*. 6, & in ramo ulteriore, in *fig*. 7, SP cum tangente continet angulum acutum ad partes verticis axis *a* in prioribus binis, A in postremo, & obtusum ad partes oppositas. Ex alia vero parte in Ellipsi e rectis omnibus, quae a foco S duci possunt ad perimetrum, omnium minima est S*a*, omnium maxima SA, & SP ab apside ima *a* ad summam A semper crescit, contra semper decrescit; in Parabola vero, & ramo citeriore Hyperbolae pariter S*a* est omnium minima, ut in ramo ulteriore SA, & in recessu puncti P ab eo axis vertice semper SP crescit, in accessu decrescit. Quare patet, quotiescunque angulus tangentis, seu velocitatis tangentialis cum directione vis centralis est acutus, debere corpus accedere ad centrum virium S, quotiescunque autem est obtusus, debere recedere; quanquam si satis proximum

sit

sit apsidi summæ in Ellipsi, & versus eam tendat, cito recessum in accessum mutet, & si satis proximum sit apsidi imæ in eadem, vel in reliquis vertici illi axis, cito accessum mutet in recessum.

34. At ubi ille angulus est rectus; si altitudo illa PQ fuerit minor, quam dimidia PS, ut in *fig*.8; erit apsis summa A in ipso puncto P, adeoque ibi omnium maximam habebit distantiam corpus a centro virium S. Si illa altitudo fuerit æqualis dimidiæ illi distantiæ; describetur circulus, & corpus nec accedet, nec recedet ab S. Si demum fuerit major; recedet semper; nam donec ipsa PQ adhuc erit minor, quam PS, adhuc describetur Ellipsis, sed in P erit jam apsis ima *a*, & distantia PS omnium minima, quas in eadem Ellipsi habere potest; evadente autem PQ æquali ipsi PS, vel eam excedente, mutaretur Ellipsis in Parabolam, vel in Hyperbolam; sed semper vertex axis *a* esset in P, & distantia SP ibi omnium minima. Quod si vis repelleret corpus a centro virium S; describeretur ramus ulterior Hyperbolæ, cujus vertex esset in P, adeoque PS etiam ibi omnium minima. F.8 9 10

35. Hinc statim ratio redditur admodum expedita, cur Planeta in aliis orbis sui partibus accedat, in aliis recedat a centro virium, & in aliis accessum in recessum mutet. Ubicunque nimirum directio ejus motus, quem vi inertiæ haberet, si nulla vi urgeretur, cum directione vis ad focum tendentis continet

net angulum acutum, debet Planeta accedere; ubicunque fuerit obtusus, debet recedere; ubi fuerit rectus, debet mutare accessum in recessum, vel viceversa, prout illa altitudo, quæ pendet a relatione velocitatis ad vim centralem, fuerit minor, quam dimidia distantia, a centro virium, vel major, quæ si æqualis esset, nec accederet, nec recederet. In Perihelio vis quidem est major, sed major est & velocitas; contra vero in Aphelio utraque minor, & quidem, quod facile demonstratur, in eadem ratione in iis binis punctis sunt vires, in qua velocitatum quadrata, nimirum in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro virium, seu foco S; ac proinde altitudines illæ PQ utrobique æquales. Sed quoniam in Aphelio distantia a foco S est major, in Perihelio minor; duplum illius altitudinis est intermedium inter binas illas distantias; adeoque illa altitudo in Aphelio minor, quam dimidia distantia, in Perihelio major, ex qua conditione pendet accessus in primo casu, recessus in secundo. Et hæc vera est ratio discriminis inter casus, in quibus ad centrum virium acceditur, a casibus, in quibus receditur; non inepta illa, quam Mechanicæ ignari sæpe obtrudunt, vis centripetæ excedentis vim centrifugam, vel ab ea deficientis, quas quidem vires semper sibi mutuo æquales esse debere in orbibus libero motu descriptis, ex prima ipsa hujusmodi virium notione est admodum manifestum. Sed hæc ad rem nostram non pertinent.

36. Ca-

36. Casus figuræ 9, in quo describitur circulus, congruit cum quinto Hugenii theoremate de vi centrifuga, in quo habet: *Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ sit quartæ parti diametri æqualis; habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem.*

37. Nam vis centrifuga æqualis esse debet illi vi, quæ ipsum mobile in eo circulo retinere possit. Porro ea vis, quæ retinere possit ipsum mobile in eo circulo, æqualis est gravitati. Nam ex definitione altitudinis PQ corpus illud cadendo per ipsam motu uniformiter accelerato ea vi, acquireret velocitatem, cum qua movetur in circulo, & eadem altitudo cum sit dimidia radii PS in eo casu, æqualis est quartæ parti diametri. Ex hypothesi vero eandem pariter velocitatem acquireret vi gravitatis cadendo per eandem altitudinem æqualem quartæ parti diametri. Vis igitur centri fuga ipsi gravitati æqualis erit.

38. Præterea circa hujusmodi altitudinem & illud multo generalius demonstrari facile potest, nimirum in quavis curva viribus quibuscunque descripta, circulum, qui eam in quovis ejus puncto osculetur, abscindere ex recta directionem virium exprimente chordam quadruplam ejus altitudinis, ex qua motu uniformiter accelerato per vim, quam corpus ibidem habet, acquireretur celeritas, quæ habetur ibidem.

39. Sit enim curva PEM, PT ejus tangens, F. 11
PS directio virium, & assumpto quovis arcu PE,

PE, concipiatur circulus eandem in P tangentem habens, transiens per E, ac rectæ quidem PS occurrens in V, rectæ autem TE ipsi parallelæ in *u*, ducaturque EL parallela TP, cui & æqualis erit, ac abscindet PL æqualem ET; ac demum sit PQ altitudo illa. Ubi arcus PE in infinitum decrescat, erit TE, vel PL mensura vis illius, & PT vel LE effectus velocitatis tangentialis, adeoque, per num. 14, $PL = \frac{LE^2}{4PQ}$, quæ cum æquetur ET, erit per circulum $= \frac{PT^2}{Tu} = \frac{LE^2}{Tu}$. Quare $\frac{LE^2}{4PQ} = \frac{LE^2}{Tu}$, & proinde $Tu = 4PQ$. Abeat jam punctum E in P, & circulus abibit in circulum osculatorem curvæ, recta T*u* in rectam PV ejus chordam. Erit igitur chorda ejus circuli osculatoris quadrupla illius altitudinis. Q. E. D.

40. Hoc theorema maximos usus habet in constructione problematum, quibus curvæ quæruntur descriptæ viribus quibuscunque. Nobis quoque maximam opem feret in hac disquisitione, ad quam, liberius aliquanto evagati, regrediamur necesse est. Porro sequenti capite F.4 inquiremus in mutationes illas, quas patitur vel orbita ipsa, vel celeritas, qua areæ describuntur, mutatis elementis illis, quæ in constructione adhibuimus, nimirum primo vi versus S, secundo velocitate tangentiali, tertio angulo SPT, quarto distantia ab S, quinto positione rectæ SP, quorum singula, si mutentur, in ipsam curvam, & nonnulla in area-

rum

rum celeritatem mutationes quasdam inducunt. Cumque de Planetis nobis sit quæstio, qui in Ellipsibus moventur, de Ellipsium mutationibus agam tantummodo, & primo quidem, quæ ad ipsam orbitam pertinent, persequar, tum quæ ad areas.

CAPUT II.

De mutationibus infinitesimis, quæ mutata constructionis elementa inducunt in Ellipsim, ac in celeritatem, qua areæ describuntur.

Prop. III. Theor.

41. SI solum recta SP inclinetur circa S; reliqua manebunt omnia, & solum linea apsidum *a*A movebitur motu angulari æquali motui ipsius SP in eandem plagam.

42. Patet ex ipsa constructione. Si enim concipiatur tota figura 4 converti circa S, reliquis nihil mutatis; constructio, & omnes lineæ erunt eædem, & motus angularis lineæ *a*SA erit æqualis motui lineæ SP, ac fiet in eandem plagam. Q. E. D.

Prop. IV. Theor.

43. Mutata etiam utcunque positione tangentis PD, nulla in axem transversum mutatio inducitur.

44. Patet pariter ex ipsa constructione. Nam SR pendet a sola magnitudine rectarum PQ, PS, cum sit per num. 25 tertia post SQ, SP.

Prop. V.

Prop. V. Probl.

Invenire mutationes axis tranversi ortas ex mutatione vis centralis, tangentialis, & distantiæ a centro virium.

45. Pendet longitudo axis transversi SR, a longitudine rectarum SQ, SP, & iis mutatis, mutatur. Manente puncto P abeat primo Q in q, & abibit R in r ad partes oppositas; & quoniam per num. 25, $SQ \times SR = SP^2 = Sq \times Sr$; erit $SQ . Sq :: Sr . SR$; ac proinde $SQ . Qq :: Sr . Rr = \frac{Sr \times Qq}{SQ}$. Ponatur pro Sr recta SR ipsi æquipollens, sive $2AC$, & pro SQ ponatur $\frac{SP^2}{SR}$ sive $\frac{SP^2}{2AC}$; eritque $Rr = \frac{4AC^2}{SP^2} \times Qq$.

F. 12

46. Deinde manente puncto Q abeat P in p, & erit $SP^2 . Sp^2 :: SQ \times SR . SQ \times Sr, :: SR . Sr$; ac proinde quadratum SP ad suam differentiam, ut SR ad Rr. Est autem generaliter *quadratum ad suam differentiam æquipollenter, ut dimidium latus ad suam*; si enim sit SV, æqualis SP, erit differentia quadratorum SP, Sp rectangulum $Pp \times pV$, sive æquipollenter $Pp \times PV$ vel $2SP \times Pp$; ac proinde quadratum SP ad suam differentiam, ut SP^2 ad $2SP \times Pp$, ut $\frac{1}{2}SP$ ad Pp. Igitur erit $\frac{1}{2} SP . Pp :: SR = 2AC . Rr = \frac{4AC \times Pp}{SP}$.

47. Mutetur jam vis vel celeritas, & quoniam PQ est directè, ut quadratum celeritatis,

tis, & reciproce ut vis; mutata sola vi, erit vis ad suam mutationem, ut PQ ad Pq, mutata vero sola velocitate, erit per num.46, ut dimidia velocitas ad suam mutationem, ita PQ ad Qq. Ex quibus omnibus inter se collatis colligitur quæsita axis mutatio. Q. E. F.

48. Coroll.1. *Si vel distantia, vel vis, vel celeritas mutetur mutatione infinitesima ordinis secundi respectu sui, erit & Rr infinitesima ordinis secundi.*

49. Erit enim ejus ordinis Qq, quæ eam rationem habet ad finitam quantitatem PQ, quam mutatio vis ad vim, vel mutatio celeritatis ad dimidiam celeritatem; ac in formula numeri 45, Rr, & Qq sunt ejusdem ordinis. Pariter & per num.46, Rr est ejusdem ordinis, ac mutatio distantiæ Pp, cum ad quantitates finitas SR, ac $\frac{1}{2}$SP eandem habeant rationem.

50. Coroll.2. *Aucta velocitate, vel distantia, & imminuta vi, crescit axis transversus, & contra.*

51. Nam aucta velocitate, & imminuta vi, augetur PQ, adeoque minuitur SQ, & proinde augetur SR. Patet autem aucta SP augeri etiam SR tertiam post SQ, SP.

Prop. VI. Probl.

Invenire mutationes eccentricitatis, & positionis lineæ apsidum, ortas ex mutatione axis transversi.

52. Abeunte R in r, abibit F in f ita, ut puncta PFf jaceant in directum, & Ff æque-

tur Rr. Anguli enim DPF, DPf debent æquari eidem angulo DPR, & rectæ PF, Pf rectis PR, Pr. Determinanda erit differentia rectarum SF, Sf, quæ est mutatio duplæ eccentricitatis, & angulus FSf, qui est motus lineæ apsidum.

53. Centro S intervallo Sf concipiatur arcus fI, qui sumi potest pro recta perpendiculari ad SF, eritque, ut sinus totus, qui ponatur $=1$ ad cosinum anguli IFf, sive ad cos. SFP, ita Ff = Rr ad FI = cos. SFP×Rr, quæ erit mutatio duplæ eccentricitatis, adeoque mutatio ipsius eccentricitatis $\frac{1}{2}$ cos. SFP×Rr. Quod erat primum.

54. Est ut Sf, sive æquipollenter SF = 2SC ad Ff = Rr, ita sinus anguli SFf, sive SFP ad sinum FSf, qui evadit $= \frac{\text{sin. SFP} \times \text{Rr}}{2\text{SC}}$. Quod erat alterum.

55. Coroll. 1. *Patet, mutationes hujusmodi fore ejusdem ordinis, cujus fuerit Rr, extra casum, in quo angulus SFP fuerit rectus, in quo quidem evanescit mutatio eccentricitatis, & casum, in quo P cadat in alterutram apsidem, quo casu evanescit motus apsidum; cum in primo casu evanescat cosinus, in secundo sinus anguli SFP.*

56. Coroll. 2. *Crescente axe transverso, eccentricitas crescet, vel decrescet, prout angulus SFP fuerit acutus, vel obtusus, & motus apsidum fiet in consequentia, vel in antecedentia, prout corpus movebitur ab apside ima ad summam, vel a summa ad imam, & contrarium accidet decrescente axe.*

57. Crescente enim axe, crescet & PF, puncto f semper jacente ultra F. Quare donec angulus SFP fuerit acutus, erit SFf obtusus, & perpendiculum fI cadet in rectam SF productam ultra F, contra vero existente SFP obtuso, citra F cadet. Unde patet primum.

58. Quoniam crescente axe cadit f ultra F respectu P; recta Sf recedet ab SF ad partes oppositas rectæ SP. Quare si SP accedit ad SF, quod accidit in motu ab apside ima a ad summam A, movebitur Sf in eandem plagam, in quam movetur SP, nimirum in consequentia. Contra vero in motu P ab A ad a, in oppositas plagas ferentur rectæ Sf, SP; ac proinde Sf in antecedentia. Unde patet & secundum.

PROP. VII. PROBL.

Invenire eorundem mutationes ortas ex mutatione distantiæ.

59. Abeat SP in Sp, manente SR, abibit F in f, per ipsam rectam FR, eritque Ff dupla Dd; cum nimirum sit RF dupla RD, & Rf dupla Rd. Cumque sit Dd ad Pp, ut DR ad RP; erit Ff ad Pp, ut FR dupla DR ad eandem PR, vel PF. Quare $Ff = \frac{FR \times Pp}{PF}$. F.13

60. Ducto pariter arcu fI erit 1. sin. fFI $=$ cos. SFR :: $Ff = \frac{FR \times Pp}{PR}$. $FI = \frac{\text{cos.}SFR \times FR \times Pp}{PR}$, mutationem duplæ eccentricitatis. Rursus Sf, sive $SF = 2SC$. $Ff = \frac{FR \times Pp}{PR}$ :: sin. SFR. sin. $FSf = \frac{\text{sin.}SFR \times FR \times Pp}{2SC \times PR}$. Q. E. F.

61. Coroll. 1. *Patet mutationes hujusmodi fore ejusdem ordinis cum Pp, nisi cosinus in priore, sinus in posteriore anguli SFR evanescat, quo casu evanescunt, ut in propositione 6.*

62. Coroll. 2. *Crescente distantia, eccentricitas decrescet, vel crescet, prout angulus SFR fuerit acutus, vel obtusus, & motus apsidum fiet in antecedentia, vel consequentia, prout corpus movebitur ab apside ima ad apsidem summam, & contrarium accidet decrescente distantia.*

63. Demonstratio est eadem, quæ in corollario superioris problematis. Sed cum crescente SP debeat *f* cadere ad partes R, dum ibi crescente axe SR, in *fig.* 12, cadebat ad partes oppositas, debet hic oppositum contingere, & angulo SFR existente acuto, decrescere SF, obtuso vero, ut figura exhibet, crescere, & motus lineæ S*f* opponi motui lineæ SP, ubi ea accedit ad SA, conspirare, ubi recedit.

Prop. VIII. Probl.

Invenire eorundem mutationes ortas, ex conversione tangentis.

F. 14 64. Abeat PT in P*t*, manente SR, abibit
15 F in *f* per arcum circuli RFN descripti radio
16 PR, cui nimirum æqualis esse debet tam PF, quam P*f* per num. 22, eritque angulus FP*f* duplus anguli TP*t*. Cum enim ob angulos ad D, *d* rectos ipsa puncta D, *d* sint ad circulum diametro PR descriptum; angulus DR*d*, sive FR*f* æquatur angulo DP*d*, sive TP*t*; angulus vero FP*f* ad centrum circuli RFN est du-

duplus anguli FRf ad circumferentiam: Igitur & anguli TPt duplus esse debet. Hinc chorda anguli FPf in quovis circulo dupla est sinus anguli TPt in eodem accepti. Erit igitur ut sinus totus 1 ad 2 sin. TPt, ita PF ad Ff = 2 sin. TPt x PF.

65. Præterea quoniam angulus PFf, est æquipollenter rectus; erit SFf complementum anguli SFP. Est autem ut 1 ad cos. SFf, adeoque ad sin. SFP, ita Ff = 2 sin. TPt x PF ad FI, quæ erit sin. SFP x 2 sin. TPt x PF. Ac proinde mutatio eccentricitatis, ejus dimidia, erit sin. SFP x sin. TPt x PF. Quod erat primum.

66. Erit etiam ut Sf, sive æquipollenter SF, vel 2 SC ad Ff = 2 sin. TPt x PF, ita sin. SFf, sive cos. SFP ad sin. FSf, qui erit = $\frac{\text{cos. SFP} \times \text{sin. TP}t \times \text{PF}}{\text{SC}}$. Quod erat alterum.

67. Coroll. 1. *Patet pariter mutationes hujusmodi fore ejusdem ordinis, cum sinu anguli* TPt, *vel ipso angulo, nisi sinus anguli* SFP *in priore mutatione, cosinus in posteriore evanescat, nimirum nisi is angulus evadat rectus, vel* P *abeat in apsides, in quorum casuum primo evanescit mutatio eccentricitatis, & secundo motus apsidum.*

68. Coroll. 2. *Directione motus tangentialis se inclinante introrsum versus Ellipsim, eccentricitas decrescet, vel crescet, prout corpus movebitur ab apside ima ad summam, vel a summa ad imam; & motus apsidum fiet in consequentia, vel in antecedentia, prout angulus* SFP

fuerit acutus, vel obtusus, & contrarium accidet, directione illa se in oppositam partem inclinante.

69. Nam si, ut figuræ exhibent, augeatur angulus RP*d*, minuetur ejus complementum PR*d*; ac proinde punctum *f* recedet in semicirculo RFN a puncto R, & accedet ad N. Quare semper in eo casu S*f* decrescet, vel punctum S cadat intra circulum ejusmodi, ob SP minorem, quam SF, ut in *fig.*14, vel e contrario cadat extra, sed adhuc angulus SFP sit acutus, ut in *fig.*15, vel demum angulus SFP jam sit obtusus, ut in *fig.*16. Jam vero si corpus tendit ab *a* ad P, & directio motus tangentialis PT inclinetur versus Ellipsim, crescet angulus RPD, adeoque decrescet S*f*. Sed si e contrario tendat ab A ad P directio motus tangentialis, jam erit PM contraria ipsi PD. Quare accedente PM ad Ellipsim recedet PT ab eadem, & minuetur angulus RPD, adeoque S*f* crescet. Patet igitur pars prima.

70. Quoniam vero angulus, quem continet PF cum arcu circuli F*f*N, est major quovis acuto, minor obtuso; donec angulus SFP fuerit acutus; aliquis arcus F*f* etiam in *fig.*15 abibit ultra rectam SF, & recta S*f* initio digressa ab SF perget ad partes oppositas rectæ SP: e contrario vero, existente angulo SFP obtuso, ut in *fig.*16, totus arcus F*f*N jacebit intra angulum PSF, recta S*f* tendente versus SP. In primo casu, tendente P ab *a* versus A, & directione motus se inclinante versus Ellipsim, crescet angulus RP*d*, & S*f* movebitur

ab

ab SF, ut exhibet figura 14, & 15, ad partes oppositas rectæ SP, quæ eo casu tendet versus SF, conspirante motu ipsarum S*f*, SP; quod si corpus tenderet ab A ad *a*; accedente P*m* ad Ellipsim, recederet P*t*, & motus lineæ S*f* fieret in partes oppositas, ut eo casu etiam SP in oppositas partes vergeret. Quare adhuc motus apsidum conspiraret cum motu corporis, sive fieret in consequentia. Contrarium autem debere accidere in *fig*. 16 in casu anguli SFP obtusi, patet ob contrariam rationem. Patet igitur etiam pars secunda, & ex his colligitur, etiam contrarium debere accidere in recessu directionis motus tangentialis ab Ellipsi.

71. *Scholium*. Hoc pacto jam absolvi, quæcunque pertinent ad mutationem Ellipsis ipsius, nimirum ad mutationem axis transversi, eccentricitatis, & positionis lineæ apsidum, pendentem a mutatione quinque elementorum, quæ adhibentur in constructione, & quorum mentionem feci num. 40. Nunc inquirendum in mutationem, quam eadem elementa mutata inducunt in celeritatem, quà areolæ describuntur, quod jam præstabo methodo æquè facili, & expedita.

Prop. IX. Theor.

72. Motus rectæ SP, & mutatio vis directæ ad S, ac mutatio axis transversi nihil turbant celeritatem, qua describuntur areolæ. F. 4

73. Pars prima patet ex num. 41, immo

ex ipsa constructione. Nam si maneat eadem distantia, idem angulus cum tangente, eadem vis, & velocitas, adeoque eadem PQ; describetur idem arcus, ejusdem Ellipseos, sola positione ipsius, & areæ mutata, magnitudine non mutata.

F. 17 74. Pars secunda sic demonstratur in *fig.* 17. Manente directione, & velocitate PT, mutetur vis PL in P*l*. Pro areola PSE, habebitur areola PS*e*, jacente puncto *e* in eadem recta TE parallela PS. Igitur areæ PES, P*e*S super eadem basi PS, & iisdem parallelis constitutæ, erunt æquales, nulla nimirum in magnitudine areolæ dato tempusculo descriptæ mutatione facta.

75. Pars tertia patet ex eo, quod magnitudo areolæ PSE, pendet a solis punctis S,P,E, quorum punctorum nullum movetur, si solum axem mutari concipimus. Q. E. D.

76. *Scholium*. Mutabitur quidem areola mutato axe; si axis ipsius mutatio contingat vel ob mutatam distantiam SP, vel ob mutatam celeritatem, adeoque PT mutatam; cum altera mutatio inducat mutationem puncti P, altera mutationem puncti E. Sed eæ mutationes ita areolam immutant, ut ex mutatione, quam in axem inducunt, nova peculiaris mutatio in ipsam non profluat; & si concipiamus, iis mutatis, axem stare, tum post earum mutationem, mutari etiam ipsum axem, donec magnitudinem acquirat iis jam mutatis respondentem; dum eæ mutantur, mutatur areola; dum mutatur axis, areola novam

jam mutationem non acquirit. Porro in mutationes, quæ ex distantiæ, & velocitatis mutatione, ac ex tangentis inclinatione oriuntur, jam inquiremus.

PROP. X. PROBL.

Determinare rationem, quam habet areola ad suam mutationem ortam ex mutatione distantiæ.

77. Mutetur sola distantia SP, in S*p*, & quæratur ratio areolæ SEP ad suam mutationem, sive ad differentiam ab areola S*pe*. Quoniam TE*e* est parallela PS, erit area PES ad aream *pe*S, ut PS ad *ps*: ac proinde area ad suam mutationem, ut distantia SP ad mutationem suam P*p*, & crescet, vel decrescet una cum ipsa. Q. E. Inv: F. 18

PROP. XI. PROBL.

Determinare rationem, quam habet areola ad suam mutationem ortam ex mutatione velocitatis.

78. Mutata velocitate, mutabitur & PT in P*t*, ac proinde & LE in L*e*, & binæ areæ LPE, LSE, in binas LP*e*, LS*e* in eadem ratione. Erit igitur areola PSE ad suam mutationem, ut velocitas ad suam, & simul crescent, vel decrescent. Q. E. Inv: F. 19

PROP.

Prop. XII. Probl.

Invenire eandem rationem, mutatione areolæ orta ex inclinatione tangentis.

F.20 79. Abeat PT in P*t*; abibit E in *e* ita, ut TE, *te* sint parallelæ PS. Quare si per T ducatur recta perpendicularis ipsi SP, eidem occurrens in V, ac *et* in I; erunt VT, VI altitudines arearum SEP, S*e*P; ac proinde area SEP ad suam differentiam, ut VT ad TI. Ea ratio componitur ex rationibus VT ad T*t*, & T*t* ad TI.

80. Porro ob angulum TP*t* infinitesimum, T*t* haberi poterit pro perpendiculari ad binas illas PT, P*t*. Quare in primis erit VT ad T*t*, ut sinus anguli VPT, sive SPT ad sinum TP*t*; deinde angulus *t*TI erit complementum anguli PTV; ac proinde T*t*I complementum anguli TPV, adeoque T*t* ad TI ut radius $=1$ ad cosinum anguli VPT, sive SPT. Erit igitur areola ad suam mutationem, ut $1 \times$ sin. SPT ad cos. SPT $\times$ sin. TP*t*, sive ut 1 ad $\frac{\text{cos. SPT} \times \text{sin. TP}t}{\text{sin. SPT}}$. Q. E. F.

81. Coroll. 1. *Patet mutationem hujusmodi fore semper ejusdem ordinis cum angulo* TP*t*, *in posteriore termino rationis, præter casum, in quo angulus* SPT *sit rectus, quo casu evanescit cosinus ipsius; nam sinus* SPT *nunquam potest evanescere in Ellipsi.*

82. Coroll. 2. *Directione tangentis se inclinante*

nante introrsum versus Ellipsim, areola crescet, vel decrescet, prout corpus movebitur ab apside ima ad apsidem summam, vel a summa ad imam, & contrarium accidet directione illa se in oppositam partem inclinante.

83. Nam decrescente angulo SP*t*, punctum *t* cadet ultra, vel citra rectam TE, prout angulus PTE fuerit minor, vel major recto PT*t*; ac proinde prout angulus SPT, qui ob PS, TE parallelas, est ipsius PTE complementum ad duos rectos, fuerit major, vel minor recto, nimirum obtusus, vel acutus. Est autem ex Conicis angulus rectæ SP cum tangente PT obtusus versus apsidem summam, acutus versus imam. Quare corpore pergente ab apside ima ad summam, areola in hac inclinatione tangentis crescet, contra decrescet; unde patent & reliqua.

84. *Scholium*. Hoc demum pacto determinavimus relationem, quam habent mutationes omnes elementorum in constructione problematis inversi adhibitorum cum mutationibus, quas illæ secum trahunt in orbitam, & in areæ describendæ celeritatem. Nunc inquirendum in mutationes, quas in illa ipsa elementa inducere debet vis extranea, quæ in corpus Ellipsim describens, agat, & ejus motum perturbet, ac inde eruendæ mutationes illæ, quas & in orbitam, & in arearum descriptiones inducit vis eadem. Id autem persequemur sequenti capite.

CA-

CAPUT III.

De mutatione, quam in elementa, & per ipsa in orbitam, ac in arearum descriptionem inducit vis extranea motum perturbans.

Lemma I.

85. Si sint binæ curvæ GP, *gp*, sive in eodem, sive in diversis planis positæ F.21 ejusmodi, ut binæ rectæ KP, K*p* in datis angulis inclinatæ ad rectam quancunque datam OK a communi ejus puncto K maneant in eadem ratione, mutato utcumque ipso puncto K; tangentes per P, & *p* ductæ concurrent in quodam ejusdem rectæ puncto.

86. Si enim sint quævis aliæ binæ rectæ DI, D*i* parallelæ prioribus KP,K*p*, puncto I existente ad curvam GP, & chorda IP producta occurrat illi rectæ in H, ducaturque H*p*, quæ ipsi D*i* occurrat in *i*; erit DI . DH : : KP . KH, & DH . D*i* : : KH . K*p*. Quare ex æqualitate ordinata DI . D*i* : : KP . K*p*; ac proinde punctum *i* erit ad curvam *g*P. Accedat jam ID*i* ad ~~PN~~*p*, & demum cum ea congruat: rectæ HP, H*p* pergent semper concurrere in ipsa recta OK, & chordis demum evanescentibus, evadent tangentes. Ipsæ igitur tangentes concurrent in quodam puncto ejusdem rectæ ~~GN~~. Q. E. D.

K

OK

87. Coroll. *Si bina mobilia ejusmodi curvas*

vas ita percurrant, ut altero existente in P, *alterum existat semper in* p; *erunt eorum celeritates, ut binæ illæ tangentes* HP, H*p*.

88. Nam erunt in ea ratione, ad quam ultra quoscumque limites accedunt spatiola PI, *pi* simul descripta, dum concipiuntur in infinitum decrescere. Porro ea spatiola, antequam evanescant, sunt semper, ut PH, *p*H; cum sit PI . KD : : HP . HK, & KD . *pi* : : HK . H*p*; adeoque etiam PI . *pi* : : PH . *p*H; ac proinde eadem spatiola accedunt ultra quoscunque limites ad eam rationem, in qua ipsis evanescentibus remanent PH, *p*H, quæ tum evadunt tangentes.

LEMMA II.

89. Si binæ Ellipseos tangentes alicubi concurrant, & bini contactus ad se invicem accedant ultra quoscunque limites; ipsæ tangentes accedent ad rationem æqualitatis pariter ultra quoscunque limites.

90. Sint ejusmodi tangentes HE, H*e*, & diameter HO ducta per concursum tangentium H, secabit, ex Conicis, bifariam chordam E*e* alicubi in M, ac chorda ipsa erit ordinata ad diametrum PO. Quare per num. 4 erit PM infinitesima respectu ME. Est autem, pariter ex Conicis, OH . HP : : OM . MP, ac proinde alternando, ut OH ad OM, ita HP ad PM in ratione finita, adeoque & ipsa PM, & tota HM est infinitesima respectu ME. F. 22

91. Centro H intervallo H*e* ducatur circulus

culus ſecans Ee in N, EH in I, & eandem productam in Q, cujus chordam eN perpendiculum HD ſecabit bifariam in D. Ob Ee, Ne, duplas Me, De, erit & EN dupla MD; cumque ipſa MD ſit minor, quam MH, adeoque infiniteſima reſpectu ME, erit & EN infiniteſima reſpectu ipſius EM, ac multo magis EI, quæ minor eſt quam EN, infiniteſima erit reſpectu EH majoris ipsà ME. Quare ipſarum HE, He differentia infiniteſima eſt reſpectu earundem, quæ iccirco ad rationem æqualitatis accedunt ultra quoſcunque limites. Q. E. D.

92. Coroll. *Earum ſumma accedit ad rationem æqualitatis cum chorda ultra quoſcunque limites, & anguli* HEe, HeE *decreſcunt in infinitum.*

93. Prima pars facile demonſtratur ope hujus theorematis, cujus ſæpe occurrit uſus: *In omni triangulo latus quodlibet ſuperat differentiam reliquorum*; quod quidem patet, cum utrilibet additum ſummam conficiat reliquo majorem. Hinc HM erit major, quam differentia inter HE, EM, & He, eM; ac proinde hujuſmodi differentiæ infiniteſimæ ſunt reſpectu ipſarum EM, eM, reſpectu quarum HM infiniteſima eſt. Accedunt igitur ſingulæ HE, He ad rationem æqualitatis cum ſingulis ME, Me, adeoque & ſumma cum ſumma ultra quoſcunque limites, quod erat primum.

94. Sinus autem anguli HEM ad ſinum HME radio, ſive finita quantitate non majorem, eſt ut HM ad HE, reſpectu cujus ipſa HM

HM decreſcit in infinitum. Decreſcit igitur in infinitum etiam ipſe ſinus, & angulus, ac eadem eſt demonſtratio pro H*e*M; quod erat alterum.

95. *Scholium*. Hæc theoremata generaliter locum habent in omnium curvarum arcubus, dummodo circulum aliquem oſculatorem habeant ibidem, & ſatis ſunt nota. Libuit tamen ea ipſa hic demonſtrare pro Ellipſi, pro qua jam erunt uſui. Deducitur autem facile & illud, aream clauſam arcu E*e*, & ſua chorda non excedere quantitatem infiniteſimam ordinis tertii. Nam ea area eſt minor triangulo *e*HE, adeoque multo minor rectangulo ſub E*e* infiniteſima ordinis primi, & HD infiniteſima ordinis ſecundi, ac proinde minor quantitate quadam infiniteſima ordinis tertii. Inde autem fit, ut pro ſectore elliptico, cujus radius ſit recta finita, & arcus infiniteſimus primi Ordinis, tuto adhiberi poſſit triangulum per chordam terminatum etiam, ubi binorum ſectorum differentia conſideratur, quæ remaneat infiniteſima ordinis ſecundi, quod præſtiti pluribus vicibus, & ſi opus fuerit, præſtabo inpoſterum.

Prop. XIII. Probl.

96. Si mobile quoddam cum data velocitate tendens ſecundum datam directionem GK, vi quadam agente ſecundum directionem GS debeat detorqueri ad arcum cujuſdam curvæ; ac alia quædam vis agens ſecundum aliam di- F.23

rectionem datam GO hunc motum perturbet; quæritur hujus perturbationis effectus debitus tempusculo infinitesimo.

97. Mobile illud pro arcu illo GP describet, ut patet, alium arcum quendam G*p* ita, ut GK sit tangens communis utriusque; cum cessante omni vi debeat mobile abire per tangentem curvæ, quam describit, & hic ponitur debere in eo casu abire per GK. Si autem sumpta ad arbitrium GL versus S, ductaque LD parallela GO, quæ ad ipsam GL sit, ut est vis perturbans ad vim in S, erit GD directio vis ex utraque compositæ, detorquens ipsum mobile a recta GK ad arcum G*p*, & tres rectæ GL, GD, LD expriment tres illas vires. Quare si ducantur binæ rectæ KP, K*p*, parallelæ ipsis GL, GD usque ad eas curvas, quæ rectæ erunt effectus vis in S, & vis compositæ ex ea, ac ex vi perturbante, eædem erunt ut GL, GD, ac triangulum PK*p* simile triangulo LGD, & proinde P*p* effectus vis perturbantis. Cum igitur detur ratio K*p*, vel P*p* ad KP, & detur arcus GP, dabitur & arcus G*p*; ac mobile illud ex actione vis perturbantis, habebit distantiam S*p* a dato puncto S, pro SP aliam, & aliter inclinatam, habebit directionem motus per aliam tangentem *pt*, pro directione PT, & velocitatem mutabit, quibus, ex ejus curvæ natura determinatis, determinabitur perturbatio ipsa. Q. E. F.

98. Coroll. 1. *Binæ tangentes TP*, tp *concurrent in aliquo puncto H rectæ GK, eritque velocitas in P ad velocitatem in* p, *ut HP ad H*p.

99. Pa-

99. Patet ex num. 85; 87; cum Kp ad KP sit in ratione data GL ad GD, utcunque mutato puncto K.

100. Coroll. 2. *Existente tempusculo illo infinitesimo ordinis primi, erit differentia distantiarum* SP, Sp, *& angulus* PSp *infinitesimus ordinis secundo non superioris*.

101. Sit enim GM altitudo illa, ex qua motu uniformiter accelerato per vim agentem in G directione GS acquireretur velocitas, quæ habetur ibidem per GK; & cum KP, GK sint effectus ejus vis, & velocitatis, erit eadem demonstratione, qua num. 14 sum usus,

$$4GM^2 . GK^2 :: GM . KP = \frac{GK^2}{4GM}; \text{ adeoque}$$

ipsa KP erit tertia post 4GM finitam, & GK infinitesimam ordinis primi; nimirum erit ordinis secundi. Quamobrem erit ordinis secundi etiam Pp, quam per num. 93 differentia, inter SP, Sp non excedit, ac proinde secundum infinitesimorum ordinem non superat. Q. erat primum.

102. Cum vero sit SP quantitas finita, ad Pp infinitesimam ordinis secundi, ut est sinus anguli SpP, qui radium finitam quantitatem non excedit, ad sinum anguli PSp; hic etiam sinus, adeoque & ipse angulus secundum pariter infinitesimorum ordinem non excedet. Quod erat alterum.

103. Coroll. 3. *Si vis perturbans dicatur* u, *vis autem illa prior* g; *angulus, quem directio vis* Pp *continet cum tangente* PT, *dicatur* A,

ac sinus anguli GSP *dicatur* dz; *erit velocitas in* P *ad ejus differentiam a velocitate in* p, *ut* 1 *ad* $\frac{GS}{2GM} \times \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. SPT}} \times \frac{u}{g} \times dz$, *& crescet, vel decrescet, prout angulus* A *fuerit acutus, vel obtusus*.

104. Concipiatur enim centro H intervallo Hp arcus circuli, qui abscindat PV differentiam ipsarum HP, Hp, & haberi possit pro recta perpendiculari ad HP. Erit, per num. 98, velocitas ad differentiam velocitatis, ut HP ad PV. Porro est, per num. 101, $PK = \frac{GK^2}{4GM}$, sive cum ob KP infinitesimam ordinis secundi per ipsum num. 101, GK, GP differant quantitate infinitesima respectu sui ipsarum, adeoque æquipolleant, & per num. 92, ac 89, GP possit sumi pro 2HP, est $PK = \frac{2HP \times GP}{4GM} = \frac{HP \times GP}{2GM}$. Per num. vero 97, est $g.\ u :: PK.\ Pp = PK \times \frac{u}{g} = \frac{HP \times GP}{2GM} \times \frac{u}{g}$; Præterea ut radius = 1 ad cosinum anguli pPV, sive pPT = A, ita pP ad PV = cos. $A \times Pp = \frac{HP \times GP}{2GM} \times \text{cos. } A \times \frac{u}{g}$. Quare HP ad PV, sive velocitas ad suam differentiam, ut 1 ad $\frac{GP}{2GM} \times \text{cos. } A \times \frac{u}{g}$. Est autem demum ut sinus anguli SPG, qui ob GPH infinitesimum, per num. 94 æquipollet angulo SPH, ad

ad sinum anguli GSP, $=dz$; ita SG ad GP $=$ $\frac{SG \times dz}{\text{sin.}SPH} = \frac{SG \times dz}{\text{sin.}SPT}$, cum nimirum SPT sit complementum ad duos rectos anguli SPH, adeoque eundem sinum habeant. Igitur hoc valore substituto, illa ratio reducetur ad hanc 1 ad $\frac{GS}{2GM} \times \frac{\text{cos}.A}{\text{sin}.SPT} \times \frac{u}{g} \times dz$. Quod erat primum.

105. Perpendiculum vero *p*V debet cadere ad partes anguli acuti. Quamobrem cadet versus T, vel versus H, prout angulus *p*PT, quem diximus A, fuerit acutus, vel obtusus. Quod erat alterum.

106. Coroll.4. *Radius ad sinum anguli* PHp *erit, ut* 1 *ad* $\frac{\text{sin}.A}{\text{sin}.SPT} \times \frac{SG}{2GM} \times \frac{u}{g} \times dz$, *& inclinabitur tangens* pt *respectu* PT *versus Ellipsim, vel ad partes oppositas, prout vis perturbans dirigetur pariter versus Ellipsim, vel ad partes oppositas.*

107. Est enim ut H*p*, sive HP ad P*p* $= \frac{HP \times GP}{2GM} \times \frac{u}{g}$, per num. 104, ita sinus anguli HP*p*, sive *p*PT, vel anguli A, ad sinum anguli quæsiti PH*p*, qui prodit $\text{sin}.A \times \frac{GP}{2GM} \times \frac{u}{g}$, seu posito $\frac{SG}{\text{sin}.SPT} \times dz$ pro GP, evadit $\frac{\text{sin}.A}{\text{sin}.SPT} \times \frac{SG}{2GM} \times \frac{u}{g} \times dz$. Quod erat primum.

108. Patet autem punctum p debere jacere respectu P ad eam partem, ad quam tendit vis illa statum perturbans. Quod erat alterum.

109. *Scholium*. Hisce corollariis continentur mutationes omnes, quibus opus est ad definiendam mutationem elementorum, ex quibus pendet determinatio Ellipseos; ac proinde ope capitis secundi jam possunt definiri mutationes omnes, quas tam in Ellipsim eandem, quam in areolæ magnitudinem vis illa extranea perturbans inducit.

F.24 110. Nam in *fig.* 24 manentibus punctis SMGHTPpt, ut in *fig.* 23, sit jam GP arcus Ellipseos, pro quo ob vim perturbantem descripserit mobile arcum Gp. Si nulla vis perturbans egisset; delatum ad P, debuisset eandem, quam prius Ellipsim describere, & areas singulis tempusculis æqualibus verrere æquales areolæ GSP; ac illa quidem Ellipsis esset ea, quæ debetur corpori projecto ex P, per rectam PT, & prædito illa vi, & velocitate, quæ debetur puncto P prioris Ellipseos. Nunc autem, si in p jam nulla nova vis motum ellipticum perturbaret; vi directa ad S describeret quidem Ellipsim, sed novam quandam, quæ debetur projectioni per pt, vi respondenti distantiæ Sp, & velocitati illi novæ, quæ habetur in p. Si determinaverimus mutationem, quæ inducitur hoc pacto, quovis tempusculo, in Ellipsim, & areæ celeritatem; summa mutationum hujusmodi exhibebit differentiam primæ illius Ellipseos ab Ellipsi illa, quæ post quod-

vis

vis finitum tempus describi deberet, si suæ tantum vi directæ ad S, & decrescenti in ratione reciproca duplicata distantiarum ab ipso S, relinqueretur, ac celeritatem, qua quovis tempore describitur area, ex quibus, ut infra videbimus magnitudo areæ descriptæ, & locus corporis in hac Ellipsi perpetuo mutata, & ejus differentia a loco, quem sine illa vi perturbante obtinuisset, definietur.

111. Concipiamus autem mutationem fieri hoc pacto per gradus. 1. celeritas, quæ haberetur in P mutetur in eam, quæ haberi debet in *p*, 2. tangens PT abeat in rectam PN parallelam rectæ *pt*, 3. mutetur PN in PL ita, ut angulus SPL sit æqualis angulo S*pt*, 4. SP mutetur in SI æqualem S*p* ita, ut PL abeat in ID sibi parallelam, sed vis ad S adhuc concipiatur eadem, quæ erat in P, 5. Vis debita distantiæ SP, mutetur in vim debitam distantiæ SI, 6. Recta SI cum angulo SID abeat in S*p* cum angulo S*pt*. Si determinaverimus summam mutationum omnium, quæ habentur e singulis hisce elementorum mutationibus; habebimus mutationem illam, quæ habetur ob vim perturbantem, sive differentiam Ellipseos, quæ deberet describi a mobili egresso ex P, cum velocitate illa priore, secundum directionem PT, ab illa Ellipsi, quam idem egressum ex *p* cum velocitate illa posteriore secundum directionem *pt* describeret. Nam differentia primi casus a postremo in iis, quorum mutatio definita hic est, est summa

differentiarum, quæ habentur assumptis intermediis casibus quotcunque.

112. Verum illud hic sors quædam penitus inopinata ultro mihi, ne cogitanti quidem, obtulit peropportunè, quod hanc perquisitionem omnem, dum eam aggressus, fore arbitrabar, implicatissimam, explicavit mirum in modum, & multo simpliciorem reddidit, quam ego quidem sperare possem. Nimirum ex hisce permutationibus binarum tantummodo priorum habenda est ratio; reliquæ ad secundum infinitesimorum ordinem depressæ, sine ullo erroris periculo negligendæ sunt, ac penitus prætermittendæ; quod quidem sequenti propositione manifesto patebit.

Prop. XIV. Theor.

113. Si mobile quoddam exeat semper ex P cum directione PN parallela directioni pt, dum aliud cum eadem velocitate exit ex p, cum directione pt, differentia binarum Ellipsium, & arearum quas percurrent, finito tempori debita, erit infinitesima,

114. Nam discrimen inter eorum mobilium conditiones tollitur per hasce quatuor mutationes, 1. rectæ PN in PL, 2. distantiæ SP in SI, 3. vis debitæ priori distantiæ in vim debitam posteriori, 4. anguli SID in Spt ipsi æqualem. Porro omnes hujusmodi mutationes sunt infinitesimæ ordinis non superioris secundo; & proinde secum trahunt mutationes axis, ec-

cen-

centricitatis, positionis lineæ apsidum, non superiores ordine infinitesimorum secundo, pro tempusculo infinitesimo ordinis primi; quod quidem sic demonstratur per partes.

115. In primis angulus NPL, æquatur angulo PS*p* infinitesimo ordinis secundi, per num.100. Producta enim S*p* usque ad PN in B, erit angulus SPL æqualis S*pt* per constructionem, adeoque etiam angulo SBN interno & opposito ipsius S*pt*, nimirum binis internis, & oppositis SPB, BSP. Quare ablato utrinque angulo SPB, erit LPN æqualis BSP. Hinc mutationes ab hac prima mutatione inductæ in eccentricitatem, & positionem lineæ apsidum erunt infinitesimæ ordinis non superioris secundo per num.67. Axis autem ab ea non mutatur per num.43.

116. Deinde secunda mutatio distantiæ SP in SI per quantitatem PI infinitesimam ordinis non superioris secundo, per num.100, parit mutationes ordinis non superioris secundo tum in axe transverso, per num.48, tum in eccentricitate, & positione lineæ apsidum, sive consideretur mutatio inducta ab axe mutato, per num.55, sive immediatè a mutatione distantiæ per num.61.

117. Pariter tertia mutatio vis in P ad vim in I, cum ipsa vis ad suam differentiam sit ut quadratum SI ad suam, nimirum, per num.46, ut dimidia SI ad IP infinitesimam ordinis secundi, parit mutationes ordinis non superioris secundo tum in axe transverso per num.48, tum in eccentricitate, & positione

lineæ apsidum, si consideretur mutatio inducta ab axe mutato, per num. 55; nam immediatè a mutatione vis nulla oritur mutatio in eccentricitate, si concipiatur manere axis transversus, ut patet ex constructione propositionis secundæ.

118. Demum ex quarta mutatione rectæ SI in S*p*, per angulum infinitesimum PS*p* ordinis non superioris secundo, reliqua nihil mutantur, & sola linea apsidum movetur motu æquali, nimirum infinitesimo ordinis ejusdem, per num. 41.

119. Ex hisce patet, posteriores illas quatuor mutationes inducere in axem, in eccentricitatem, in lineam apsidum mutationes non superiores ordine infinitesimorum secundo, tempusculo infinitesimo ordinis primi. Hinc summa omnium ejusmodi mutationum debita finito tempori, adhuc infinitesima esse debet, nec potest primum infinitesimorum ordinem superare. Patet igitur binarum Ellipsium differentiam post tempus finitum fore adhuc infinitesimam. Q. E. D.

120. Quod vero ad areas attinet, area, quæ finito tempore describitur, est summa areolarum omnium, quæ singulis tempusculis infinitesimis ordinis primi, eo tempore contentis describuntur; in quarum singulis si committatur error infinitesimus ordinis secundi; in ipsa summa committetur error adhuc infinitesimus, ut patet.

121. Consideretur autem duplex areolarum series, quæ series, quo melius intelligi possit, con-

consideretur curva quædam GpX, quæ describitur, ita ut quodam tempusculo describatur arcus Gp, sequenti vero pX. Si in quovis puncto cessaret omnis vis perturbans, ibidem inciperet pro curva illa describi Ellipsis quædam. Cessante ea vi in G, sit ejusmodi Ellipsis GPE cujus arcus GP sit is, qui describeretur primo tempusculo, PE is, qui secundo. Cessante vero eadem vi in p, sit ejusmodi Ellipsis pe, cujus arcus pe sit, is, qui describeretur pro pX, qui describitur. Prima igitur series sit earum areolarum, quæ describerentur quovis tempusculo infinitesimo, si per id tempusculum cessaret vis perturbans, cujusmodi est GSP pro quodam tempusculo, & pSe pro sequenti tempusculo, ut diximus. Secunda sit earum, quæ verè describuntur, cujusmodi est pro priore tempusculo areola GSp, & pro posteriore pSX.

122. Posterioris seriei termini sunt illi, qui in unam summam colligi debent ad habendam aream finito tempore descriptam. Si in iis singulis committatur error, qui secundum infinitesimorum ordinem non excedat; in ipsa summa committetur error, qui non excedet ordinem infinitesimorum primum, ut patet.

123. In primis autem si singulis terminis secundæ seriei substituantur singuli seriei primæ; error in singulis committetur infinitesimus ordinis, qui supra secundum non assurget. Nam areolæ GSP, GSp sunt, ut earum distantiæ a basi communi SG; ac proinde areola prima, quæ est infinitesima ordinis primi ad earum differentiam, ut distantia puncti P,

quæ

quæ est infinitesima pariter ordinis primi, ad differentiam earundem distantiarum, utique non majorem recta P*p* infinitesima ordinis secundi, per num. 100. Quare differentia arearum, quæ in illa substitutione contemnitur, est infinitesima ordinis non superioris secundo.

124. Superest igitur, ut in determinatione singularum areolarum primæ seriei non committatur error, qui secundum infinitesimorum ordinem excedat. Porro in iis determinandis, quævis areola cuicunque tempusculo posteriori debita pendet ab omnibus areolis, quæ debentur præcedentibus omnibus tempusculis. Nam areola *pSe* definitur, definita differentia, quam ea habere debet ab areola PSE æquali areolæ PSG præcedentis ipsam *pSe* in prima serie. Si sequentibus tempusculis nulla jam vis extranea ageret; omnes areolæ, quæ sequuntur, ut ea, quæ post millesimum tempusculum advenit, ab illa prima GSP differret æquè, ac differt hæc secunda *pSe*; ac proinde vis extranea, quæ primo tempusculo egit, jam in eam millesimam areolam inducit mutationem suam. Vis autem extranea, quæ secundo tempusculo aget, pariter inducet differentiam aliquam areolæ secundæ a tertia, & inde eodem argumento inducetur alia huic æqualis variatio in illam millesimam; & ita porro sequentes omnes omnium 999 tempusculorum actiones in millesimam illam primæ seriei areolam inducent mutationem quæque suam, & mutatio, quæ in quavis areola fiet post tempus finitum quodlibet, erit summa muta-

mutationum omnium, quas in binas se immediatè excipientes singulis tempusculis induxerunt præcedentes actiones.

125. Hinc autem illud consequitur; nimirum ne in areolam quamvis post finitum aliquod intervallum temporis advenientem irrepat error, qui secundum infinitesimorum ordinem non excedat, requiri ex una parte, & satis esse ex altera, ut in determinanda differentia earum, quæ prius sibi immediatè succedebant, inducta ab actione vis extraneæ respondentis singulis præcedentibus tempusculis, non admittatur error, qui tertium infinitesimorum excedat ordinem. Nam si ejusmodi error committatur; adhuc errorum summa finito tempori debita non excederet ordinem infinitesimorum secundum: posset autem excedere, si singulis ejusmodi tempusculis committeretur error tertium excedens ordinem, quorum nimirum summa posset ad ordinem ascendere superiorem uno gradu; & omnino ascenderet nisi forte fortuna sese errores ipsi fere prorsus corrigerent, quod quidem generaliter nequaquam accidit.

126. Jam vero differentia cujusvis areolæ præcedentis a sequenti inducta a vi, quæ præcedenti tempusculo egit, habetur ex mutationibus, quas in areolarum descriptionem inducunt illæ sex elementorum mutationes, quas exposui num. 111. Si qua igitur ex iis mutationibus differentiam inducit infinitesimam ordinis non superioris tertio; ea neglecta errorem secum trahet ordine secundo non superiorem

rem

rem in illa areola, quæ debetur tempusculo post finitum intervallum advenienti; ac proinde ubi demum colligitur summa areolarum omnium primæ seriei, in hac summa non committetur error, qui primum infinitesimorum ordinem excedat.

127. Hujusmodi autem sunt postremæ quatuor e mutationibus expositis num. 111, quas num. 113, & 114 proposui, & de quibus affirmavi, differentiam ab iis inductam in aream finito tempore descriptam esse infinitesimam. Nam ubi in postrema ex iis abit SID in *Spt* & ubi in penultima vis debita puncto P abit in vim debitam puncto I, nullam prorsus in areola sequenti tempusculo debita mutationem fieri patet ex num. 72. Mutationes verò rectæ SP in SI, & tangentis PN in PL sunt infinitesimæ ordinis secundi, vel non superioris secundo per num. 116, & 115, adeoque pariunt ejusmodi mutationem in areola, quæ sit, per num. 77 & 81, ad areolam ipsam, ut quantitas infinitesima ordinis non superioris secundo ad unitatem. Igitur cum ipsa areola sit infinitesima ordinis primi; eæ mutationes non excedent ordinem tertium infinitesimorum; adeoque in singulis areolis finito licet temporis intervallo distantibus, non colligetur mutationum summa, quæ excedat ordinem secundum; & proinde in summam omnium areolarum primæ seriei differentia non inducetur, quæ primum superet ordinem.

128. Quare si pro motu facto ex *p* cum directione *pt*, semper substituatur motus fa-

ctus ex P cum directione PN ipsi *pi* parallela, & cum eadem velocitate, quæ haberetur in *p*: differentia binarum Ellipsium, & arearum, quæ percurrentur, finito tempori debita, erit infinitesima Q. E. D.

129. Coroll. 1. *Ad definiendam mutationem, quæ post finitum tempus fiet in Ellipsi, ac in quantitate areæ descriptæ, satis erit definire, quæ mutationes in ea inducantur a velocitate, quæ haberetur in* P, *mutata in velocitatem, quæ habetur in* p, *& ab inclinatione tangentis* PT *in rectam* PN *per angulum* TPN *æqualem angulo* PH*p*, *& earum mutationum summam rite inire.*

130. Nam quæ a reliquis quatuor elementorum mutationibus mutationes proveniunt, cum in summa tempori finito debita mutationem inducant tantummodo infinitesimam, sine ullo erroris periculo contemnuntur.

Prop. XV. Probl.

Determinare mutationem, quam velocitas, & directio tangentis mutata per vim extraneam inducunt in axem transversum.

131. Directio quidem tangentis, utcunque mutetur, axem transversum nihil mutat, per num. 43. Quamobrem remanet solum determinandus effectus mutatæ velocitatis, qui ex jam demonstratis facile eruitur.

132. In primis si PQ fuerit altitudo illa respondens puncto P; poterit pro $\frac{GS}{GM}$ poni $\frac{PS}{PQ}$, cum

cum & PS infinite parum differat a GS sibi infinitè proxima, & tam vires, quam celeritates debitæ punctis G, P infinitè parum a se distantibus, infinitè parum inter se differant, adeoque & GM, PQ differant a se invicem infinitè parum.

133. Est autem, per num. 103, 1 ad $\frac{GS}{2GM} \times \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. SPT}} \times \frac{u}{g} \times dz$ sive ad $\frac{PS}{2PQ} \times \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. SPT}} \times \frac{u}{g} \times dz$, ut velocitas ad suam mutationem, sive, per num. 47, ut 2PQ ad $Qq = PS \times \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. SPT}} \times \frac{u}{g} \times dz$. Per numerum vero 45, mutatio axis transversi $Rr = \frac{4AC^2}{SP^2} \times Qq$. Erit igitur mutatio ipsa $= \frac{4AC^2}{PS} \times \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. SPT}} \times \frac{u}{g} \times dz$. Q. E. F.

134. Coroll. *Crescet autem, vel decrescet axis transversus, prout angulus ille A fuerit acutus vel obtusus.*

135. Nam in iis casibus crescet, vel decrescet velocitas per num. 103. Axis autem crescit vel decrescit, prout crescit, vel decrescit velocitas, per num. 50.

Prop. XVI. Probl.

Determinare mutationem, quam eædem inducunt in Eccentricitatem.

136. Velocitas mutata eccentricitatem mutat per mutationem, quam inducit in axem, & mu-

& mutatio eccentricitatis erit, per num. 53, $\frac{1}{2}$ cof.SFP$\times$Rr. Quare fubftituto valore R$=$
$\frac{4AC^2}{PS}\times\frac{\text{cof.A}}{\text{fin.SPT}}\times\frac{u}{g}\times dz$ ex num. 133, erit ea mutatio $\frac{2AC^2}{PS}\times\frac{\text{cof.A}\times\text{cof.SFP}}{\text{fin. SPT}}\times\frac{u}{g}\times dz$. Quod erat primum.

137. Per num. 106 finus anguli PHp, five anguli TPN, quo tangens inclinatur, pofito $\frac{PS}{2PQ}$, pro $\frac{GS}{2GM}$ juxta num. 132, eft $\frac{\text{fin.A}}{\text{fin.SPT}}\times\frac{SP}{2PQ}\times\frac{u}{g}\times dz$. Si pro PQ, per num. 14, ponatur $\frac{PF\times PS}{2AC}$, evadit hæc formula $\frac{\text{fin. A}}{\text{fin. SPT}}\times\frac{AC}{PF}\times\frac{u}{g}\times dz$. Et fi hæc formula in ea fin.SFP$\times$fin.TP$t\times$PF, quæ num. 65 exprimit mutationem eccentricitatis, ponatur pro fin.TPt, nam ibi TPt eft eadem inclinatio tangentis, quæ hic eft TPN; habebitur pro mutatione quæfita AC$\times\frac{\text{fin.A}\times\text{fin.SFP}}{\text{fin.SPT}}\times\frac{u}{g}\times dz$. Quod erat alterum.

138. Coroll. *In prima formula eccentricitas crefcet, vel decrefcet; prout angulus* A, *&* *angulus* SFP *fuerint ejufdem fpeciei, vel diverfæ: in fecunda crefcet, ubi vis extranea dirigetur verfus Ellipfim, & corpus defcendet ab apfide fumma ad imam, vel utrumque contrario modo fe habebit; decrefcet, ubi alterum ex iis tantummodo mutabitur.*

139. Pars

139. Pars prima colligitur ex num. 103, ubi habetur velocitatem, adeoque & axem transversum, per num. 50, crescere, vel decrescere, prout angulus A fuerit acutus, vel obtusus, & ex num. 56, ubi habetur, crescente axe transverso, eccentricitatem crescere, vel decrescere, prout angulus SFP fuerit acutus vel obtusus, quæ binæ regulæ inter se collatæ exhibent primam corollarii partem.

140. Pars secunda pariter colligitur ex num. 106, ubi habetur tangentem inclinari versus Ellipsim, vel ad partes contrarias, prout vis perturbans dirigetur versus ipsam Ellipsim, vel versus partem contrariam, & ex num. 68., ubi habetur, in primo ex iis casibus eccentricitatem crescere, dum corpus ab apside summa descendit ad imam, decrescere, dum ab ima ascendit ad summam.

PROP. XVII. PROBL.

Determinare mutationes quas eædem induceunt in positionem lineæ apsidum.

141. Hic etiam binæ mutationes habentur, altera ex mutatione axis, altera ex inclinatione tangentis.

142. Porro per num. 54, sinus anguli, quo apsides moventur, est $= \frac{\text{sin.}SFP \times Rr}{2SC}$. Posito igitur per num. 133. pro Rr suo valore $\frac{4AC^2}{PS} \times \frac{\text{cos}.A}{\text{sin}.SPT} \times \frac{u}{g} \times dz$, erit idem sinus $\frac{2AC^2}{PS \times SC} \times \frac{\text{cos}.A \times \text{sin}.SFP}{\text{sin}.SPT} \times \frac{u}{g} \times dz$. Quod erat primum.

143. Per

143. Per num. 137. sinus anguli, quo tangens inclinatur est $\frac{\text{sin.A}}{\text{sin.SPT}} \times \frac{\text{AC}}{\text{PF}} \times \frac{u}{g} \times dz$. Si pro sin. TP$t$ ponatur hæc formula in ea $\frac{\text{cos. SFP} \times \text{sin.TP}t \times \text{PF}}{\text{SC}}$, quæ num. 66 exprimit motum apsidum, habebitur pro mutatione quæsita $\frac{\text{AC}}{\text{SC}} \times \frac{\text{sin.A} \times \text{cos.SFP}}{\text{sin.SPT}} \times \frac{u}{g} \times dz$. Quod erat alterum.

144. Coroll. *In prima formula motus apsidum fiet in consequentia, ubi angulus* A *fuerit acutus, & corpus ascendat ab apside ima ad summam, vel utrunque contrario modo se habuerit; decrescet, si alterum tantummodo contrario modo se habeat. In secunda vero fiet in consequentia, ubi vis perturbans se diriget versus Ellipsim, & angulus* SFP *erit acutus, vel ubi utrunque contrario modo se habebit; in antecedentia vero, si alterum tantummodo se habeat contrario modo.*

145. Pars prima colligitur eodem pacto, quo in præcedenti corollario ex num. 103, & 56, secunda ex num. 106, & 68.

Prop. XVIII. Probl.

Invenire rationes, quas habent mutationes areolæ ad areolam ipsam inductæ ab iisdem.

146. In primis per num. 78, mutatio areolæ orta a velocitate habet ad areolam eam

F ratio-

rationem, quam differentia velocitatis ad velocitatem, quæ per num. 133, est $\frac{PS}{2PQ} \times \frac{\text{cos. } A}{\text{sin. } SPT} \times \frac{u}{g} \times dz$. Ponatur pro 2PQ suus valor $\frac{PF \times PS}{AC}$, per num. 14, habebitur quæsita ratio $\frac{AC}{PF} \times \frac{\text{cos. } A}{\text{sin. } SPT} \times \frac{u}{g} \times dz$. Quod erat primum.

147. Deinde per num. 137, sinus anguli, quo tangens inclinatur, est $\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. } SPT} \times \frac{AC}{PF} \times \frac{u}{g} \times dz$. Si pro sin. TP*t* ponatur hæc formula in ea $\frac{\text{cos. } SPT \times \text{sin. } TPt}{\text{sin. } SPT}$, quæ num. 80, exprimit ejusmodi rationem ortam ex inclinatione tangentis, habebitur pro ratione quæsita $\frac{AC}{PF} \times \frac{\text{sin. } A \times \text{cos. } SPT}{(\text{sin. } SPT)^2} \times \frac{u}{g} \times dz$. Q. E. alterum.

148. Coroll. *In prima formula areola crescet, vel decrescet, prout angulus* A *fuerit acutus vel obtusus, & in secunda crescet, ubi vis perturbans se diriget versus Ellipsim, & corpus ascendet ab apside ima ad apsidem summam, vel utrunque contrario modo se habebit; decrescet, si alterum tantummodo se habeat contrario modo.*

149. Pars prima colligitur ex ipso illo num. 78, ex quo habetur, areolam crescere vel decrescere, prout crescit, vel decrescit velo-

velocitas; nimirum, per num. 103, prout angulus A est acutus, vel obtusus;

150. Pars secunda colligitur ex num. 82, collato cum num. 106.

151. *Scholium* 1. Hoc pacto mutationes omnes axis, eccentricitatis, positionis lineæ apsidum, rationis, quam habet mutatio areolæ ad areolam pro quovis dato tempusculo, determinata sunt per vim perturbantem. Formulas hic oculis subjiciam unico obtutu contemplandas. Iis autem signa apponam, quorum ope, sine jam demonstratis canonibus, ex solo valore cujusvis formulæ cognosci possit, utrum haberi debeat incrementum, an decrementum. Sed illud præmittendum, quod in sublimiori Geometria notissimum est, inclinationem lineæ ad lineam ita accipi posse, ac gradibus mensurari, ut post gradus 180 adhuc augeatur secundum eandem directionem considerata, in quo sensu, angulus quocunque graduum numero constare potest. Signum autem sinus mutari e positivo in negativum, & viceversa post parem quemlibet quadrantum numerum, signum autem cosinus post imparem.

152. Recta enim CN prius congruens cum CM, incipiat moveri motu angulari circa punctum C fixum, & centro C sit circulus rectæ CM versus M occurrens in B, ad partes oppositas in A, & rectæ ipsi perpendiculari in E, & F. Dum recta CN revolvitur directione BE, & abit successivo motu in CN2, CN3, CN4; occurret circulo alicubi in D, F.25

 in G,

in G, in H, in I, & arcus a B ſecundum eandem directionem computatus menſurabit motum. Is arcus in caſibus a figura exhibitis erit primum BD quadrante minor, tum BEG minor binis quadrantibus, tum BEAH major iis, & minor tribus, deinde BEAFI major etiam tribus; & ſi ſuperato iterum puncto B motus continuetur; motus ipſe, & inclinatio lineæ CN hoc modo conſiderata habebit pro menſura arcum circulo, vel etiam quotcunque circulis majorem.

153. Porro in hoc caſu ſinus DL abit in GO eandem directionem ſervans, tum poſt A abit in HO, & IL habentes directionem contrariam, quam iterum poſt B mutat ita, ut in tranſitu per puncta B, & A mutetur ſemper directio. Nimirum poſt quadrantes duos, quatuor, ſex, & ita porro progrediendo per numeros pares.

154. At coſinus DP directionem mutat ſtatim poſt primum quadrantem abiens in GP, quam retinet poſt A abiens in HQ, & iterum mutat in F abiens in IQ, retinet vero poſt B regreſſus ad DP. Quare eandem mutat poſt quadrantem primum, tertium, quintum, & ita porro progrediendo per numeros impares.

155. Ad rem noſtram ſatis erit unicam circularem revolutionem integram conſiderare. Angulus, quem in puncto contactus continet directio vis perturbantis cum directione motus tangentialis, concipiatur oriri, cum congruunt, & augeri, dum prior illa verſus Ellipſim movetur introrſum, ac ubi poſt oppoſitam

sitam directionem jam tendit ad partes Ellipsi oppositas, ejus mensura superet gradus 180: Angulus autem, quem in *fig.*24 recta FP continet cum FS, oriatur pariter, ubi congruunt, & punctum P cadit in apsidem imam *a*, tum augeatur, dum tendit secundum ordinem signorum versus apsidem summam, qua transgressa, jam in reditu ab apside summa ad apsidem imam excedet gradus 180. Angulus demum SPT, qui in casu nostro Ellipseos nunquam evanescit, aut semicirculum excedit, concipiatur augeri, dum communi modo augetur ita, ut ejus mensura debeat esse semicirculus, si possit PS congruere cum PH, quod non potest. Sinus autem, & cosinus in primo quadrante habeantur pro positivis.

156. Eo pacto prioris anguli, quem directio vis continet cum motu tangentiali, sinus erit positivus, quoties vis dirigetur versus Ellipsim, negativus, quoties dirigetur ad partes oppositas, cosinus erit positivus, quoties is angulus communi modo consideratus acutus erit, ut in *fig.*25 MCN1, MCN4, negativus, quoties obtusus erit, ut MCN2, MCN3. Anguli autem, quem in *fig.*24 recta FP cum FS continet, erit pariter sinus positivus ab apside ima *a* ad summam A, tum negativus ab A ad *a*, cosinus vero positivus, vel negativus, prout is angulus communi modo consideratus acutus fuerit, vel obtusus. Anguli demum SPT sinus semper erit positivus; cosinus erit positivus, vel negativus, prout is angulus fuerit acutus, vel obtusus.

157. Hisce notatis jam formulas ipsas subjiciam, quarum prima eruitur ex num. 133, tum reliquæ ordine suo e numeris 136, 137; 142, 143, 146, 147. Conferendo autem signa formularum ipsarum cum numeris 134, 138, 144, 148, patebit haberi incrementum, vel motum apsidum in consequentia, si signum formulæ substitutis valoribus evaserit positivum, contra decrementum, vel motum in antecedentia, si signum evaserit negativum. Iccirco autem secundæ, & postremæ præfixi signum negativum, quia ubi quantitas per formulam ipsam eruta evadit positiva, eccentricitas, & ratio areolæ decrescunt, non crescunt, habita autem ratione signi præfixi, etiam eæ formulæ per se ipsæ exhibebunt incrementa, vel decrementa.

Pro axe ex mutata velocitate.

$$+\frac{4AC^2}{PS}\times\frac{\text{cos. A}}{\text{sin. SPT}}\times\frac{u}{g}\times dz$$

Pro eccentricitate

Ex mutatione axis.

$$+\frac{2AC^2}{PS}\times\frac{\text{cos. A}\times\text{cos. SFP}}{\text{sin. SPT}}\times\frac{u}{g}\times dz$$

Ex inclinatione tangentis.

$$-AC\times\frac{\text{sin. A}\times\text{sin. SFP}}{\text{sin. SPT}}\times\frac{u}{g}\times dz$$

Pro

Pro motu apsidum

Ex mutatione axis.

$$+\frac{2AC^2}{PS \times SC} \times \frac{\text{cos. } A \times \text{sin. } SFP}{\text{sin. } SPT} \times \frac{u}{g} \times dz$$

Ex inclinatione tangentis.

$$+\frac{AC}{SC} \times \frac{\text{sin. } A \times \text{cos. } SFP}{\text{sin. } SPT} \times \frac{u}{g} \times dz$$

Pro areola

Ex mutatione velocitatis.

$$+\frac{AC}{PF} \times \frac{\text{cos. } A}{\text{sin. } SPT} \times \frac{u}{g} \times dz$$

Ex inclinatione tangentis.

$$-\frac{AC}{PF} \times \frac{\text{sin. } A \times \text{cos. } SPT}{(\text{sin. } SPT)^2} \times \frac{u}{g} \times dz$$

158. *Scholium* 2. Ut hæ formulæ possunt e positivis evadere negativæ pro diverso valore eorum sinuum, vel cosinuum, quos involvunt; ita etiam alicubi evanescunt iisdem evanescentibus. Evanescit autem sinus, ubi angulus evanescit, vel æquatur duobus rectis, & cosinus, ubi ille evadit rectus. Igitur habebuntur sequentia theoremata.

159. Ubi directio vis est perpendicularis tangenti, evanescit formula mutationis axis, & prima tum eccentricitatis, tum apsidum,

tum areolæ; ubi vero congruit cum tangente, evanescunt reliquæ.

160. Ubi mobile est in altera apside, evanescit formula eccentricitatis secunda, apsidum prima, areolæ iterum secunda; ubi vero est in recta axi perpendiculari ducta per focum superiorem, evanescit formula eccentricitatis prima, & apsidum secunda.

161. Extra autem hosce casus semper ea omnia mutantur, cum nullus alius valor possit evanescere.

162. Hoc vero videtur contrarium prima fronte celeberrimo Nevvtoni theoremati 15 lib. 1, in quo sic habet: *Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inversè*. Videtur enim ex eo theoremate illud deduci, accedente ejusmodi vi nova in idem virium centrum directa, nullam prorsus mutationem induci in orbitam, ubicunque in ipsa orbita sit corpus, & solum moveri apsides, ac moveri in quovis casu, & perpetuo in eandem plagam cum e contrario ex hisce formulis eruatur, accedente vi qualibet extra paucos illos casus mutari semper & eccentricitatem, & axem, motum vero apsidum aliquando esse nullum, & directionem mutare.

163. At illud hic notandum maximè; ad hoc, ut corpus, quod in aliqua curva immobili circa datum virium centrum revolvebatur, revolvi incipiat in eadem orbita mobili,

non

non esse satis, ut accedat vis illa nova in ratione reciproca triplicata distantiarum, sed ut velocitas quoque tangentialis mutetur in illa eadem ratione, in qua debet esse motus angularis rectæ jungentis corpus cum centro virium in orbita immobili ad eundem motum in orbita mobili, quod admodum facile ex ipsa Nevvtoni demonstratione deducitur, quæ quidem ratio est ratio finita, ubi apsides finito tempore per finitum aliquem angulum progrediuntur, vel regrediuntur. Ac nisi ea velocitatis mutatio comitetur accessum vis novæ; nec retinebitur illa orbita eadem, nec idem ille apsidum motus habebitur; & si corpus, quod revolvebatur in orbita quadam mobili, repente amittat vim illam agentem in ratione reciproca triplicata distantiarum, & velocitatem tangentialem non mutet; non iccirco in eadem orbita jam facta immobili perget, sed ad aliam delabetur ita diversam a priore, ut ipsæ meæ formulæ, mutata tangentiali velocitate, mutari orbitam, indicant.

164. Atque iccirco, qui in apsidum motu colligendo solum vis perturbantis accessum ita contempletur, ut eam in orbitis parum a circulo abludentibus reducat ad reciprocam triplicatam distantiarum, Nevvtoni methodo, & formulis a Nevvtono inventis utatur ita, ut nullo ad velocitates tangentiales respectu habito, e sola illa vi æstimet apsidum motum, longè is quidem a veritate aberret, necesse est. Vis enim illa nova, quæ singulis tempusculis advenit, cum non inveniat con-

gruen-

gruentem sibi velocitatis differentiam ab ea, quæ pro eodem orbe immobili describendo requiritur, non eum apsidum motum parit, quem pareret. Atque id ipsum sane Nevvtonum quoque in investigando apsidum lunarium motu perturbasse crediderim, quem unum nimirum nequaquam determinavit, licet virium perturbantium & directiones, & magnitudines probe nosset.

165. Verum ego in alienis hic ad trutinam revocandis tempus non teram. Illud unum mihi abunde est, me sirtes ejusmodi cavisse omnes, qui longe alia usus methodo illum semper orbem considero, quem corpus manentibus reliquis omnibus, & sola vi perturbante summota describeret. Hic orbis ab eo, quem Planeta describit, plurimum differt, licet ab hujus ipsius perpetua mutatione quadam determinetur. Et quidem Ellipseos ipsius apsides cum apsidibus curvæ genitæ non semper congruunt, cum nimirum illius apsides perpetuo mutentur, hujus apsides immotæ maneant. Curva enim, quam Planeta vere describit, in se prorsus determinata nihil mutatur. Congruunt tamen apsides utriusque, ubi mobile ad alteram apsidem devenit ita, ut in apside curvæ genitæ esse non possit, nisi simul in apside Ellipseos, quam ego considero, versetur. Cum enim utriusque orbitæ, nimirum illius Ellipseos perpetuo mutatæ, & hujus curvæ ab illa genitæ, in punctis singulis tangens sit eadem, per num.97; ubi tangens prioris fuerit perpendicularis rectæ jungenti

genti

genti corpus cum centro virium, erit pariter & tangens posterioris; ac proinde in hac ipsa posteriori accessum in recessum, vel viceversa recessum in accessum mutare non poterit, sive, quod idem est, in aliqua ejus apside non erit; nisi in priore illa pariter mutet, & ad apsidem ipsius appulerit. Nam illud facile demonstratur, ubi ejusmodi mutatio fit, ibi tangentem perpendicularem esse debere rectæ jungenti punctum mobile cum puncto, a quo receditur, vel ad quod acceditur. Quamobrem appulsus ad apsides curvæ descriptæ ab appulsu ad apsides Ellipseos, quam ego considero, omnino pendet, & ille ope hujus determinatur.

166. Nec vero per observationes immediatè determinari possunt apsides curvæ genitæ, quæ ope hujus Ellipseos perpetuo mobilis, quam ego considero, facile ex observationibus eruuntur, dummodo innotescant mutationes ejusdem Ellipseos dato cuipiam tempori finito debitæ. Id enim præstari potest adhibendo quancunque ex iis methodis, quæ adhibentur in hypothesi Kepleriana, dummodo retenta una ex observationibus, adhibeantur reliquis correctiones, quæ respondent intervallo temporis inter illam observationem, & hasce reliquas. Eo enim pacto habebuntur ea loca, quæ haberi debuissent, si nulla vis extranea perturbasset motum tam ante, quam post observationem, quæ retinetur, adeoque habebitur forma, & positio Ellipseos debitæ illius ipsius observationis momento, seclusa vi

per-

perturbante. Sed de iis infra. Interea in illam ipſam vim perturbantem inquirendum, ut ejus habeatur directio, ex qua pendet angulus ille A, & ratio illa $\frac{u}{g}$, vis ipſius ad vim illam directam ad S, quod quidem præſtabitur ſequenti capite.

CAPUT IV.

De quantitate, & directione vis, qua Jupiter, & Saturnus ſuos motus perturbant.

Prop. XIX. Probl.

Determinare rationem virium earum, quibus Jupiter, & Saturnus in ſe mutuo gravitant, & Sol in eos, ad vim, qua ſinguli gravitant in Solem.

167. Ratio quæſita invenietur ope eorum, quæ demonſtrata ſunt in prop. 1, & corollariis, adhibitis quibuſdam elementis ex Aſtronomia derivatis. In primis enim, quoniam ex tribus notiſſimis legibus Planetæ deſcribunt Ellipſes circa Solem in foco poſitum, & rectæ, quæ ipſos cum Sole conjungunt, areas verrunt temporibus proportionales, ac quadrata temporum periodicorum ſunt, ut cubi diſtantiarum mediarum; ea, quæ in prima prop. de viribus ad focum directis demonſtrata ſunt, ad ipſos pertinent; & proinde vires, quibus in Solem gravitant, ſive comparen-

parentur inter se vires, quas singuli habent in diversis locis suæ Ellipseos, sive vis unius cum vi alterius cujuscunque, decrescunt in ratione reciproca duplicata distantiarum per num. 8, & 10. Et quoniam eædem leges deinde detectæ sunt in Jovis, & Saturni Satellitibus; eandem legem sequuntur vires ipsorum Satellitum in Jovem, ac Saturnum; ut jam olim Nevvtonus invenit, & est notissimum ipsis Tyronibus. Quare corpora omnia, de quibus nobis constare ex observationibus potuit, in diversis distantiis collocata a Sole, Jove, Saturno gravitant in ipsos viribus quibusdam, quarum eæ, quæ ad singulos terminantur, decrescunt in ratione reciproca duplicata distantiarum ab ipsis.

168. Si igitur detur ratio virium, quæ ad unum tendunt in data quavis distantia, ad vires, quæ tendunt ad alium in alia quavis data; mutatis utcunque iis distantiis, habebitur ratio virium, quæ tendunt in unum, ad vires, quæ tendunt in alium, augendo terminos rationis datæ, vel minuendo in ratione reciproca duplicata prioris distantiæ ad novam. Ea autem ratio pro quibusdam distantiis datur per num. 11, ope revolutionis cujusvis Planetæ circa Solem, & cujusvis Satellitis circa Jovem, vel Saturnum. Sunt enim per num. 11, vires in diversis sectionibus conicis ut

$\frac{AC^3}{2T^2 \times PS^2}$, ubi AC exprimit semiaxem transversum, sive distantiam mediam, PS distantiam

tiam aliam quamcunque, cui debentur vires, in quas inquiritur, T tempus periodicum; adeoque in mediis diſtantiis facta PS = AC, erunt vires, ut $\frac{AC}{2T^2}$, ſive ut $\frac{AC}{T^2}$.

169. Sumantur diſtantiæ Veneris circa Solem, ac quarti Satellitis Jovialis circa Jovem, Saturnii circa Saturnum, & eorum tempora periodica. Ex Aſtronomia Caſſini earum partium, quarum diſtantia media Terræ a Sole eſt 10000, diſtantia media Veneris eſt 7234, diſtantiæ illorum Satellitum a centris Jovis, & Saturni 132 . 4269, 83 . 2678, quæ eruuntur ex ſemidiametris orbium viſis e Sole in diſtantia media ab iis Planetis, cum ſint eæ ſemediametri apud Caſſinum 8' : 45", ac 3' : 0": diſtantiæ autem mediæ Jovis, ac Saturni a Sole 52029, ac 95418, ſit autem ut radius ad ſinum ſemidiametri viſæ a Sole, ita diſtantia media ad ſemidiametrum ipſam in partibus, in quibus habetur ea diſtantia media. Tempus autem periodicum Veneris apud eundem habita ratione præceſſionis æquinoctiorum colligitur dierum 224, horarum 16 : 48' : 56", ſive ſecundorum 19414136, eorum autem Satellitum tempora periodica ſunt ſecundorum 1441933, 1377280. Quamobrem erunt vires in Solem, Jovem, Saturnum, ut $\frac{7234.}{(19414136)^2}$, $\frac{132 . 4269}{(1441933)^2}$, $\frac{83 . 2679}{(1377280)^2}$.

170. Sit

170. Sit jam Sol in S, in *fig.*26, Saturnus F.26
in P, Jupiter in I, & erit ut PS^2 ad $(7234.)^2$, ita vis illa Veneris in Solem ad vim Saturni, quæ prodit $\frac{(7234)^3}{(19414136)^2 \times SP^2}$, eodemque modo habebuntur vires in Solem, Jovem, Saturnum, in quibusvis distantiis, ut numeri $\frac{(7234.)^3}{(19414136)^2}$, $\frac{(132.4269)^3}{(1441936)^2}$, $\frac{(83.2679)^3}{(1377280)^2}$ divisi per quadrata distantiarum. Porro ii numeri, inito calculo sunt, ut 10000, 11.121, 3.029. Quamobrem erunt vires, quibus Jupiter, & Saturnus gravitant in Solem, $\frac{10000}{SI^2}$, $\frac{10000}{SP^2}$; eæ, quibus Sol, & Saturnus in Jovem $\frac{11.121}{SI^2}$, $\frac{11.121}{IP^2}$; eæ, quibus Sol & Jupiter in Saturnum $\frac{3.030}{SP^2}$, $\frac{3.030}{PI^2}$. Q.E.F.

171. *Scholium*. Poterat multo expeditius idem problema solvi, dicendo, esse vires directè ut massas, in quas gravitatur, & reciprocè ut quadrata distantiarum, & supponendo rationem massarum jam determinatam. Sed quoniam ex una parte, massæ ipsæ determinantur per vires, ope illius ejusdem formulæ, ope cujus vires ipsas determinavi immediatè ex observationibus astronomicis sine ulla massarum consideratione, & ex alia parte formulam

mulam ipsam in directo problemate demonstraveram; libuit rem cæteroquin notissimam, eruere hac methodo satis obvia, ut nimirum fundamenta demonstrationum, eorum quoque, quæ nota sunt, in hac ipsa dissertatione haberentur, ubi commode id fieri posset.

172. Atque illud etiam commode accidit, quod ita simul productum est notissimum licet fundamentum gravitatis in Solem, Jovem, Saturnum decrescentis in ratione reciproca duplicata distantiarum, quæ lex nisi satis accurata esset, orbitæ profecto satis ab Ellipsibus ad sensum immobilibus discreparent, ac tempora rationem distantiarum sesquiplicatam non sequerentur.

173. Notandum autem num. illos 10000; 11.121; 3.030 exprimere rationem massarum. Cum enim vires in Solem, Jovem, & Saturnum sint, ut hi numeri divisi per quadrata distantiarum; in iisdem distantiis, erunt ut hi numeri. Debent autem in iisdem distantiis esse ut massæ horum corporum. Igitur massæ erunt, ut ii numeri; ac proinde eosdem dicemus S, I, P, ut scilicet exprimantur hisce literis massæ Solis, Jovis, & Saturni. Porro massæ ipsæ apud Nevvtonum *Princ. l.3. Prop.8. in editione Londinensi anni* 1726, sunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, sive ut 10000, 9.37, 3.31, eædem in editione Amstelodamensi anni 1714 sunt, ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$ sive

ſive ut 10000, 9. 68, 4. 15. Apud Graveſandium in poſtrema editione, ut 10000, 9. 305, 3. 250, qui quidem numeri ab hiſce meis plurimum diſſident. Diſcrimen oritur a diſſenſu elementorum calculi ex Aſtronomia deſumptorum. Et quidem Maſſa Jovis obvenit hic mihi fere quinta ſui parte major, quam Nevvtono, quia Caſſinus exhibet diſtantiam quarti Satellitis Jovis a Jove viſam e Sole in mediocri diſtantia Jovis 17'. 30", quam Nevvtonus adhibuit tantum 16'. 32". Ex hoc autem ingens etiam in aberrationibus Saturni diſcrimen orietur, quæ cæteris paribus mutantur, ut maſſa Jovis.

Prop. XX. Probl.

Invenire vires, quibus Jupiter, & Saturnus ſuum motum Ellipticum ſibi mutuo perturbant in conjunctione vel oppoſitione. F. 27

174. Sit MN*mn* planum orbitæ Jovis VI*i*, cum quo concipiatur congruere planum orbitæ Saturni *a*PA, quod ab eodem parum declinat, exiſtentibus M, *m*, N, *n* locis Aphelii A Saturni, Perihelii *a* ejuſdem, ac Aphelii V, & Perihelii *u* Jovis; & ſit quævis recta PS, in qua jaceat Saturnus in P, ac Jupiter, vel in conjunctione in I, vel in oppoſitione in *i*.

175. Jupiter quidem Saturni orbitam reſpectivam circa Solem turbabit non ſolum vi, qua Saturnus in eum gravitat, verum etiam ea, qua in ipſum Jovem gravitat Sol. Muta-

tur enim positio Saturni respectu Solis tam eo motu, quo movetur Saturnus, quam eo, quo Sol movetur. Porro ejus ratio habebitur, si concipiatur impressa & Soli, & Saturno vis contraria, & æqualis illi, qua ipse Sol in Jovem gravitat. Est enim theorema in Mechanica notissimum, positionem respectivam binorum corporum non turbari, si utrique imprimantur motus per rectas parallelas, & æquales. Inde autem illud consequitur: si Soli, & Saturno imprimatur vis æqualis, & contraria illi, qua Sol in Jovem gravitat, respectivam ipsorum positionem non turbari. In eo autem casu Sol maneret sine ulla vi a Jove in ipsum impressa, quam nimirum eliderет vis illa contraria, & æqualis, & Saturnus binis viribus urgeretur præter eam, qua in Solem gravitat, altera nimirum, qua ipse gravitat in Jovem, altera æquali illi, qua in Jovem gravitat Sol.

176. Quamobrem Jove existente in I in conjunctione, concipienda erit in Saturno in P summa virium, quibus ipse Jupiter trahit Solem S, & ipsum Saturnum P, nam prima earum virium, quæ habet in Sole directionem SI, habebit in Saturno directionem PI, congruentem cum directione, qua Saturnus ipse in Jovem gravitat. At Jove existente in *i* in oppositione, habebit Saturnus differentiam earundem virium tendentem ad partes oppositas puncto S. Nam vis agens per S*i*, qua Sol in Jovem gravitat, major vi per P*i*, qua in ipsum Jovem gravitat Saturnus, translata in P cum

cum directione opposita elidet vim illam per Pi, & residuum dirigetur ad partes contrarias. Igitur si ponatur I pro loco Jovis, ubicunque sit, erit vis, quæ Saturnum perturbat in primo casu $\frac{I}{SI^2} + \frac{I}{IP^2}$, & Saturnum urgebit in Solem directione PS, in secundo $\frac{I}{SI^2} - \frac{I}{IP^2}$ cum directione opposita, & ipsum a Sole distrahet. Atque eadem prorsus ratiocinatione erit vis Solis in Saturnum $\frac{P}{PS^2}$, vis Jovis in ipsum $\frac{P}{IP^2}$, quæ tam in conjunctione, quam in oppositione eadem directione agunt; ac proinde, priore illa in contrariam mutata, erit semper vis perturbans earum virium differentia, nimirum in conjunctione $\frac{P}{IP^2} - \frac{P}{PS^2}$, in oppositione $\frac{P}{PS^2} - \frac{P}{IP^2}$; quæ in utroque casu tendet ad partes Soli oppositas. Inventæ sunt igitur vires, quibus Jupiter, & Saturnus suos sibi motus Ellipticos mutuo perturbant in conjunctione, & oppositione; Q. E. F.

177. Coroll. *Quoniam hæ vires perturbantes sunt eæ, quas dixi* n *in formulis superioris capitis, & vis in Solem, quæ dicta est ibidem* g, *est in Saturno* $\frac{S}{SP^2}$, *in Jove* $\frac{S}{SI^2}$; *habe-*

buntur sequentes quatuor valores illius fractionis $\frac{u}{g}$, *quos dicam attrahentes, ubi diriguntur ad Solem, distrahentes, ubi ad partes oppositas tendunt*.

Valor $\frac{u}{g}$

Pro Saturno

in conjunctione attrahens

$$\frac{I}{S} \times \frac{PS^2}{SI^2} + \frac{I}{S} \times \frac{PS^2}{PI^2}$$

in oppositione distrahens

$$\frac{I}{S} \times \frac{PS^2}{SI^2} - \frac{I}{S} \times \frac{PS^2}{PI^2}$$

Pro Jove

in conjunctione distrahens

$$\frac{P}{S} \times \frac{IS^2}{IP^2} - \frac{P}{S} \times \frac{IS^2}{PS^2}$$

in oppositione distrahens

$$\frac{P}{S} \times \frac{IS^2}{PS^2} - \frac{P}{S} \times \frac{IS^2}{IP^2}$$

178. *Scholium* 1. Si orbes Jovis & Saturni essent circulares, facile habitis distantiis eorundem a Sole haberentur ejusmodi vires numeris expressæ. Ex Cassinianis tabulis distantia media Jovis est partium 52029, quarum distantia media Saturni 95418. Si hæ essent distantiæ constantes; esset SI = 52029, SP = 95418. Quare PI in conjunctione = 43389; in oppositione 147447. Si hi numeri substituantur in superioribus formulis, & capiantur valores I, P, S ex n. 173, colliganturque summæ, vel differentiæ; habebuntur formulæ sequentes.

Pro

$$\frac{u}{g}\begin{cases}\textit{Pro Saturno}\begin{cases}\text{in conjunctione} & 0.009118\\ \text{in oppositione} & 0.003274\end{cases}\\ \textit{Pro Jove}\begin{cases}\text{in conjunctione} & 0.000346\\ \text{in oppositione} & 0.000052\end{cases}\end{cases}$$

179. Hinc autem patet, si vel conjunctio, vel oppositio contingerent, utroque ex his Planetis existente in media a Sole distantia, fore vim perturbantem motum Saturni in conjunctione relatam ad vim, qua ipse in Solem tendit, a qua nimirum relatione pendent effectus perturbationis, fere triplo majorem, quam in oppositione, & plusquam 26 vicibus majorem, vi, quæ perturbat motus Jovis in conjunctione, ac plus quam 170 vicibus majorem vi, quæ perturbat Jovem in oppositione. Vim autem, quæ Jovem in conjunctione perturbat, plusquam sextuplo majorem esse vi, quæ ipsum perturbat in oppositione.

180. Verum, cum horum Planetarum orbitæ Ellipticæ sint, neque ita parvam eccentricitatem habeant, nam Saturni quidem eccentricitas est partium 5432, Jovis 2506; ac proinde illa ad semiaxem suum transversum 95418, ut 5693 ad 100000, hæc ad suum 52029, ut 4816 ad 100000; pro diversa positione loci oppositionis ad bina Aphelia, diversa etiam erit ratio distantiarum PI, PS, IS, ac vires diversæ. Et quidem discrimen erit non penitus contemnendum. Si enim conjunctio accideret Jove Aphelio, & Saturno Perihelio, esset PS = 89986, IS = 54535, PI = 35451. Si autem fieret Jove Perihelio, & Sa-

& Saturno Aphelio, esset PS = 100850; IS = 49523, PI = 51327. Quare valor ille $\frac{n}{g}$ primae formulae numeri 177 esset in primo casu 0. 010192, in secundo 0. 008905, qui inter se octava circiter sui parte differunt.

181. Tantum sanè discrimen ad multa saltem annorum millia haberi non poterit; cum observationes Astronomicae ostendant Jovis, ac Saturni Aphelia vix moveri; nunc autem tribus fere signis a se invicem distent; Est enim ex Cassinianis tabulis ad annum 1752 Longitudo Aphelii Saturni sign. 8 : 29° : 16' : 7" Jovis vero sig. 6 : 10° : 16' : 28"; unde fit, ut nec in medias utriusque distantias conjunctiones, atque oppositiones possint incidere.

182. Facile autem pro quovis angulo ASP, qui mensuret distantiam Saturni P ab Aphelio A, inveniri poterunt rectae SP, SI, PI, quae virium mensuram exhibeant pro casu, quo ibidem habeatur conjunctio. Producta enim SP in R, ut SR aequetur axi transverso, ductaque FR, in triangulo FSR dabitur latus SF aequale duplae eccentricitati = 10864, SR aequale duplae distantiae mediae = 190836, ac angulus iis interceptus, unde haberetur angulus SRF, & SPF ejus duplum ob PF = PR; ac proinde in triangulo SPF datis jam binis angulis, & latere SF invenietur SP. Quoniam vero innotescit angulus VSA, ac datur angulus ASI; habebitur & VSI, ac ob Sr, Sf pariter

riter notas innotescit SI; unde eruitur & IP. Ac similiter pro oppositione eruitur Si.

183. Generaliter autem exprimentur ejusmodi lineæ ope hujus satis noti lemmatis. *Si in quodam triangulo basis dicatur* 2b, *summa laterum* 2a, *alteruter angulus ad basim* x, *erit latus ei angulo adjacens* $\frac{aa - bb}{a - b \text{ cos. } x}$. Id autem lemma sic facile demonstratur. Sit hujusmodi triangulum SPF, & demisso perpendiculo FO in latus SP, fiat SP $= z$, ac proinde FP $= 2a - z$, sitque PSF $= x$. Erit ut 1 ad cos. x : : SF $= 2b$. SO $= 2b$ cos. x. Est autem $FP^2 + 2 SP \times SO = SP^2 + SF^2$, nimirum $4aa - 4az + zz + 4bz \text{ cos. } x = z^2 + 4b^2$; ac proinde eliso z^2; & dividendo per 4, erit $a^2 - b^2 = az - bz \text{ cos. } x$, sive $z = \frac{a^2 - b^2}{a - b \text{ cos. } x}$. Habito nimirum angulo ASP; invenietur per hoc lemma SP, & habito angulo VSI, habebitur SI.

184. Multo adhuc facilius eædem distantiæ eruentur ope tabularum Astronomicarum, in quibus pro quavis anomalia vera ASP habetur distantia vera SP. Data autem anomalia vera Saturni, & adjecta eidem distantia MN apheliorum $= 78^\circ: 59': 39''$, habebitur anomalia vera Jovis, & ipsi respondens distantia SI pro conjunctione; vel adhuc addito semicir-

 culo,

culo, habebitur anomalia vera puncti i, & ipsi respondens distantia vera Si.

185. Hoc pacto pro tricenis saltem gradibus anomaliæ veræ Saturni, possent computari eæ lineæ, & ope earum vires, tum pro conjunctione, tum pro oppositione sive Jovis, sive Saturni ibidem facta, & tabula construi, ex qua deinde eædem haberentur pro quavis conjunctione, vel oppositione ubilibet contingente, ope nimirum usitatæ interpolationis, ac ex ipsa tabula innotesceret etiam, in quibus conjunctionibus maximæ deberent esse vires ejusmodi, in quibus minimæ.

186. *Scholium* 2. Posset etiam generali formula exprimi vis perturbans in conjunctione, & methodo usitata in quæstionibus de maximis, & minimis, posita differentia formulæ æquali nihilo, investigari puncta, in quibus maxima ea evaderet, vel minima. Sed calculum admodum implexum indicabo tantum.

187. Dicatur axis transversus Saturni $= 2a$, eccentricitas $= b$, axis Jovis $= 2p$, eccentricitas $= q$, sinus anguli FSP $= x$, cosinus $= y$ $= \sqrt{1-xx}$, sinus dati anguli VSA $= m$, cosinus $= n = \sqrt{1-mm}$, eritque ex Trigonometria cosinus anguli VSP $= ny - mx$. Erit autem per num. 183, SP $= \dfrac{aa-bb}{a-by}$, SI $=$ $\dfrac{pp-qq}{p-nqy+mqx}$. Quare PI $= \dfrac{aa-bb}{a-by} -$

pp—qq

$\frac{pp-qq}{p-nqy+mqx}$. Hinc autem cum juxta num. 177 formula pro Saturno in conjunctione sit $\frac{I\times SP^2}{SI^2}+\frac{I\times SP^2}{PI^2}=I\times SP^2\times\left(\frac{1}{SI^2}+\frac{1}{PI^2}\right)$, erit eadem $I\times\left(\frac{aa-bb}{a-by}\right)^2\times\left(\frac{(p-nqy+mqx)^2}{(pp-qq)^2}+\frac{(a-by)^2\times(p-nqy+mqx)^2}{(aa-bb)^2\times(p-nqy+mqx)^2-(a-by)^2\times(pp-qq)^2}\right)$. Hujus formulæ si capiatur differentia, tum pro y substituatur $\sqrt{1-xx}$, & pro $\frac{-xdx}{\sqrt{1-xx}}$ pro dy; habebitur æquatio cum sola incognita x, quæ exhibebit sinum cujusvis anomaliæ veræ, cui maxima, vel minima vis respondet; eadem autem formula, substituto pro x sinu, pro y cosinu anomaliæ veræ Saturni, exhibebit quantitatem illam $\frac{u}{g}$, quæ eodem prorsus pacto invenitur etiam pro Jove, & eadem est methodus pro oppositionibus.

188. Verum cum formulæ adeo implexæ proveniant; valor quidem vis perturbantis multo facilius invenitur methodis superioris scholii, vel etiam constructione binarum Ellipsium, quæ valorem ipsum ad rem præsentem satis proximum exhiberet. Loca autem maximæ vis perturbantis, vel minimæ, & iisdem

iisdem methodis obtineri possunt satis proxima, & fere nullius sunt usus; cum nimirum non a sola quantitate ejus vis pendeat quantitas aberrationis, sed, juxta formulas num. 157, etiam ab ejus directione, & positione Planetæ in sua orbita.

Prop. XXI. Probl.

Invenire vires perturbantes ubicunque etiam extra conjunctionem, & oppositionem.

F.26 189. Sit Saturnus ubicunque in P, ac Jupiter in I, & quæratur directio, & quantitas vis perturbantis motum Ellipticum Jovis, ac Saturni.

190. Gravitates Saturni, ac Solis in Jovem erunt, per num. 170, ac 173, $\frac{1}{PI^2}$, $\frac{1}{SI^2}$. Fiat ut prior vis ad posteriorem, sive ut SI^2 ad PI^2, ita PI ad IQ assumptam in IS producta, si opus sit, & erit PQ directio vis in Saturnum perturbantis. Completo enim parallelogrammo PIQB, transferenda erit, per num. 175, in Saturnum vis secundum directionem PB contrariam, & parallelam directioni SI, qua Sol gravitat in Jovem; ac proinde jam Saturnus urgebitur binis viribus, altera per PB, altera per PI, quæ erunt ut ipsæ PI, PB; & vis ex iis composita dirigetur per PQ.

191. Erit autem etiam ut PI ad PQ, ita vis

vis illa, qua Saturnus gravitat in Jovem $= \frac{I}{PI^2}$, ad vim hanc compositam, quæ erit $= \frac{I \times PQ}{PI^3} = u$. Vis autem Saturni in Solem erit Per num. 170 $= \frac{S}{PS^2} = g$. Igitur vis perturbans in Saturno relata ad vim in Solem, sive $\frac{u}{g} = \frac{I}{S} \times \frac{PQ \times SP^2}{PI^3}$.

192. Eodem autem pacto si fiat Pq versus S, quæ sit ad PI, ut PI^2 ad SP^2, ducaturque Iq; erit eàdem demonstratione Iq directio vis perturbantis, & $\frac{u}{g} = \frac{P}{S} \times \frac{Iq \times SI^2}{PI^3}$, in Jove.

193. Inventa igitur est & directio, & quantitas vis hujusmodi, Q. E. F.

194. Coroll. 1. *Cum sit* IQ *ad* IP, *ut quadratum* IP *ad quadratum* IS, *sive in duplicata ratione* IP *ad* IS; *erit* IQ *quarta continuè proportionalis post* SI, IP, *ut pariter* Pq *quarta post* PS, PI.

195. Coroll. 2. *Punctum* Q *cadet ad easdem, vel ad oppositas partes puncti* I *respectu* S, *prout* PI *fuerit minor, vel major, quam* IS, *& pariter* q *ad easdem partes cum* P, *vel ad oppositas, prout eadem* PI *fuerit minor, vel major, quam* PS.

196. Patet ex præcedenti, cum debeat esse IQ

se IQ ad IS in triplicata ratione PI ad IS, & Pq ad PS in triplicata PI ad PS.

197. Coroll. 3. *Si recta* SP *occurrat orbitæ Jovis in* H *versus* P, *in* D *versus partes oppositas, & pariter* SI *orbitæ Saturni in* h *versus* I, *in* d *versus partes oppositas, & rectæ ipsas* SP, SI *secantes bifariam, & ad angulos rectos in* L, l *occurrant, illa orbitæ Jovis in* G, E; *hæc orbitæ Saturni in* g, e; *directio* PQ *vis perturbantis motum Saturni abibit ad partes oppositas rectæ* PI *respectu* PS, *ut figura exhibet, vel congruet cum ipsa* PS, *vel cadet ad partes* PI, *prout Jupiter* I *fuerit in arcu* GDE, *vel in punctis* G, E, *vel in arcu* GHE; *ac pariter directio* Iq *vis perturbantis motum Jovis cadet ad partes oppositas rectæ* IP *respectu* IS, *vel congruet cum* IS, *vel cadet versus* IP, *ut figura exhibet; prout Saturnus* P *jacuerit in arcu* gde, *vel in punctis* g, e, *vel in arcu* ghe.

198. Patet ex eo, quod si punctum I cadat in G, vel E, debeat esse IS = IP; adeoque & IQ quarta post ipsas, æqualis ipsi IS; in arcu autem GDE erit semper PI major quam IS, & in arcu GHE minor. Quare & IQ in primo casu major, quam IS, in secundo minor. Et eadem est demonstratio pro secunda parte, cum abeunte P in *g*, vel *e*, fiat PI = PS, versus *d* sit major, versus *h* minor.

199. Coroll. 4. *Recta* SP *continet cum tangente orbitæ Saturni angulum, cujus complementum est dimidium anguli* SPF: *recta* IP *continet angulum, cujus complementum est summa, vel differentia anguli* IPS, & $\frac{1}{2}$ SPF, *prout* I

cadat

cadat respectu rectæ PHD *ad partes oppositas cum foco superiore* F, *vel ad easdem, & pariter* PQ *continet angulum, cujus complementum est summa, vel differentia anguli* SPQ, *& dimidii* SPF, *prout* Q *ceciderit ad partes oppositas* F, *vel ad easdem respectu ipsius* PHD; *ac idem obtinet, si punctis* PIQF, *substituantur* IP*qf*.

200. Patet ex eo, quod recta tangenti perpendicularis secat bifariam ex conicis angulum SPF in orbita Saturni & angulum SI*f* in orbita Jovis.

201. *Scholium* 1. Data Anomalia vera Jovis, & Saturni, facile ope hujus propositionis, & corollariorum eruetur tam magnitudo vis perturbantis motum ellipticum sive Jovis, sive Saturni, quam angulus, quem ejus directio continet cum tangente, idque vel ex Ellipsi, vel ex tabulis Astronomicis.

202. Nam in primis si anomalia dicatur x, semiaxis transversus a, eccentricitas b, erit per num. 182 distantia, PS, vel IS $= \frac{aa - bb}{a - b \cos. x}$. Ea vero ipsa etiam facilius ex tabulis Astronomicis eruitur, ubi adest computata pro singulis gradibus anomaliæ veræ.

203. Deinde datis anomaliis veris, & locis Apheliorum, dantur longitudines Jovis, & Saturni, quarum differentia exhibet angulum ISP. Datis vero IS, SP, cum angulo ISP, habetur IP, cum angulis SIP, SPI. Habita IS, & IP, habetur IQ quarta post ipsas. Habita PI, IQ cum angulo PIQ, habetur PQ, & angulus IPQ.

204. Porro

204. Porro hisce habitis, habetur $\frac{I}{S} \times \frac{PQ \times SP^2}{PI^3}$ magnitudo vis in Saturno, juxta num. 191.

205. Habita SP, PF cum angulo FSP, habetur & angulus SPF, adeoque ejus dimidium. Ejus summa, vel differentia ab angulo SPI exhibet juxta num. 199 complementum anguli, quem PI continet cum tangente. Hujus autem differentia ab angulo IPQ, exhibet complementum ejus anguli, quem PQ continet cum ipsa tangente.

206. Eodem prorsus modo habetur etiam $\frac{P}{S} \times \frac{Iq \times SI^2}{PI^3}$, vis in Jove, juxta num. 192, & dimidium anguli SIf, quod additum, vel ablatum angulo PIS exhibet complementum anguli, quem PI continet cum recta tangente orbitam Jovis, cujus differentia ab angulo SIq demum exhibet complementum anguli, quem ipsa directio Iq, vis perturbantis motum Jovis continet cum tangente ipsa.

207. Anguli SPF, SIf ex ipsis tabulis Astronomicis facillimè eruuntur veris proximi. Notum est enim in Ellipsi non multum abludente a circulo, posita descriptione arearum constanti circa alterum focum, haberi motum angularem quamproximè æquabilem circa alterum, quam Astronomi dicunt Hypothesim Ellipticam simplicem. Porro in ea

Hypo-

Hypothesi SPF, SI*f* sunt æquationes centrorum Saturni, & Jovis respondentes datis anomaliis veris.

208. Quoniam autem distantiæ SI, SP in tabulis Astronomicis habentur per logarithmos, & in trigonometria traditur methodus, datis per logarithmos binis lateribus, & dato angulo intercepto, inveniendi tertium latus, & reliquos angulos pariter per logarithmos; constat per logarithmos haberi IP, & sinum anguli PIS, sive PIQ, adeoque & IQ, & proinde etiam PQ. Quare, & tota formula pro vi Saturni per logarithmos haberi facile poterit, & eodem pacto formula pro vi Jovis.

209. *Scholium* 2. Si PS fuerit plusquam dupla SH ita, ut puncto L cadente extra circulum, recta ipsi PS perpendicularis ducta per L nusquam occurrat orbitæ Jovis; punctum Q nunquam cadet in S, & multo minus versus I. Quoniam autem distantia maxima Saturni 100850 est plus quam dupla minimæ distantiæ Jovis 49523, contra vero minima Saturni 89986 minor quam dupla non solum maximæ distantiæ Jovis 54535, sed & minimæ 49523, pro varia locorum in orbitis, & orbitarum positione potest, & debet aliquando contingere, ut PS sit plusquam dupla SH, & aliquando minus, ac in Perihelio quidem Saturni semper erit minus quam dupla, adeoque semper habebitur aliquis arcus GHE in eo casu, qui rectam PQ detrudat intra angulum IPS.

210. *Scho-*

210. *Scholium* 3. Hinc si manente puncto P, punctum I concipiatur motu continuo percurrere orbitam suam, punctum Q describet motu pariter continuo curvam quandam, quæ dici potest directrix vis perturbantis Saturnum, ut manente puncto I, & gyrante puncto P, punctum *q* describet curvam directricem vis perturbantis motum Jovis. Non erit sanè abs re considerare ductum earum curvarum, ut clarior quædam concipiatur idea vis hujusmodi perturbantis, a cujus angulo cum tangente orbitæ pendet in formulis numeri 157, incrementum vel decrementum axis, eccentricitatis, areolæ, ac directio motus apsidum.

211. In primis si PL fuerit minor, quam PH, recta IQ per num. 209 semper erit major, quam IS. Quare punctum Q semper jacebit ad partes oppositas I, adeoque curvam describet circa punctum S circumvolutam, & directio PQ initio congruens cum directione PS, in integra revolutione puncti I per suam orbitam, revolvetur circa punctum P per totum circulum, nunquam regressa ad positionem priorem PS, nisi integra conversione absoluta, in quo gyro bis cum tangente congruet. Et si orbita Jovis esset circularis puncto I existente in H, & puncto Q existente in PS producta, ibi IQ, & SQ esset minima; tum puncto I pergente versus D utralibet ex parte, ita semper augetur SQ, ut abeunte I in D, evaderet maxima, & jaceret in directione SP.

212. Si

212. Si PH ſit æqualis HS, puncto I abeunte in H, abibit Q in S; ſed ſi ibidem tangens ſit perpendicularis orbitæ Jovis, nuſquam pariter regredietur ad S, ac in caſu orbitæ circularis, continebit cuſpidem in ipſo S. At ſi Jovis orbita non fuerit circularis, nec punctum H in vertice axis; recta perpendicularis ipſi PS per H ducta, orbitam ipſam ſecabit in ipſo H, & iterum in aliquo puncto, ad quod, ubi I devenerit, fiet iterum PI=IS.

213. Si PH fuerit ut in *fig.* 28 adhuc minor quam HS; jam habebuntur puncta illa G, E, & puncto I exiſtente in H, punctum Q cadet inter S, & H; tum puncto I excurrente per arcum GHE, punctum Q deſcriberet nodum quendam inter S & P, & bis deveniret ad S, puncto nimirum I cadente in G, & E, ubi ſe curva interſecaret, ac deinde ambitu majore punctum P amplecteretur. F.28

214. Arcus interior nodo terminatus perpetuo accederet ad H, puncto P ad ipſum accedente, & ſi concipiatur punctum P abire in H; arcus ipſe debet appellere ad H; cum evaneſcente PI debeat evaneſcere IQ.

215. Quod ſi adhuc minuta SP, ut in *fig.* 29, punctum P ingrederetur rectam PS, arcus ille interior tranſiliret punctum P, quod jaceret intra eum nodum; In hoc caſu recta PQ, tam puncto I exiſtente in H, quam in D, haberet directionem congruentem cum SP; puncto I exiſtente in G, & E, haberet oppoſitam; ac bis circa P converſionem integram abſolveret, quater cum tangente congruens, F.29

quater ipsi perpendicularis effecta. Sed jam is casus exhibet Planetam inferiorem positum in P turbatum a superiori posito in I. Quare jam possumus considerare Saturnum in I, Jovem in P.

216. Pro casu, quo orbita Jovis existente Elliptica, punctum H non esset in axe Ellipseos; existente PL minori, quam PH, posset recta illa perpendicularis per L ducta tan-
F.30 gere sectionem conicam in E, ut in *fig.* 30, vel eam secare in binis punctis G, E ad ean-
F.31 dem partem rectæ SP, ut in *fig.* 31, & in primo casu haberetur cuspis, in secundo nodus in S, arcu interiore jacente ad easdem partes lineæ PS, & obliquo; ex quo patet, quod per se etiam est manifestum, multo magis compositas esse hujusmodi curvas, si nascantur ex Ellipsi, quam si nascantur e circulo.

F.26 217. Facile demonstratur in iis omnibus casibus, ubi curva ad S devenit, ejus tangentem in ipso puncto S semper tendere ad occursum rectæ illius perpendicularis per L ductæ cum orbita HID; ac proinde si cuspidem habeat; utriusque arcus tangentem congruere cum recta PS, vel in *fig.* 30, cum SE; si nodum habeat, binos arcus ibidem habituros binas tangentes ES, GS in *fig.* 28, 29, 31. In casu vero numeri 211, in ipso vertice curvæ inter S & D convexitatem obverti puncto S, ac deinde flexum haberi contrarium; ut & alia plurima, de arcus reliqui directione, ac natura facile solius Geometriæ ope determinari possunt, quorum multa si curvæ ipsæ con-

struan-

ſtruantur, ſponte ſeſe oculis offerent. Earum autem delineationem omiſi, tum quod pleræque axem producunt ultra vicenos, & tricenos circuli genitoris radios, ac proinde nimis in longum excurrunt, tum quod ad rem noſtram pleræque minus pertinent. Binarum tantummodo ſchema exhibui, alterius in *fig.* 28, in qua punctum P extra circulum jacet, ut in Saturno accidit, alterius in *fig.* 29, in qua punctum P jacet intra circulum, ut in Jove contingit; ſed in Saturni caſu plus æquo ipſum punctum P admovi orbitæ, ut nodus melius videri poſſet. Cæterum in eo, cum poſſit PH eſſe vel major, vel æqualis, vel minor, quam HS, poterit haberi caſus tam numeri 211, quam 212, & 213; quanquam poſtremum hunc ſchema exhibet, & quidem hunc ipſum ab orbita circulari definitum, a qua ita parum differt Saturni orbita, ut in exiguis delineationibus vix diſcernantur.

218. Illud unum non eſt omittendum, quod eſt quidam veluti fructus conſiderationis ipſius. Quoniam num. 157 incrementa vel decrementa axis, eccentricitatis, areolæ, & directio motus lineæ apſidum pendent a ſinu vel coſinu illius anguli A, quem directio vis perturbantis continet cum tangente orbitæ; in Saturno bis ſaltem, in Jove quater omnino debere mutari in ſingulis formulis, ex hoc ſolo capite, incrementa in decrementa, vel viceverſa, & motum apſidum mutari a motu in antecedentia, ad motum in conſequentia in

singulis conversionibus Jovi-Saturniis, sive in intervallis singulis inter binas quasque proximas conjunctiones; cum nimirum linea illa SQ semel in Saturno, in *fig.*28, bis in Jove in *fig.*29. circa P integram conversionem debeat absolvere, adeoque saltem bis transire per tangentis positionem, ac per positionem rectæ ipsi perpendicularis in Saturno, quater in Jove, mutato ibi bis, hic quater valore cosinus ejus anguli, vel sinus.

219. In Saturno vero posset etiam, ubi nodus habetur, quater transiri per directionem tangenti perpendicularem, quod & necessario contingeret, si præterea H esset vertex axis. Puncto enim I in *fig.*26 ac 28 appellente ad puncta GHED, semper directio PQ congrueret cum directione PS, vel SP perpendiculari tangenti.

220. Descripta autem curva hujusmodi pro data quavis positione Saturni in orbita, invenientur positiones illæ Jovis necessariæ ad habendam directionem PQ, sive perpendicularem tangenti, sive cum ea congruentem, sive datam aliam quamcunque. Ducta enim SQ in angulo dato quocunque, usque ad intersectionem cum ejusmodi curva in Q, satis esset rectam QS ducere, donec occurreret cum orbita Jovis ad partes easdem puncti Q, vel oppositas, prout punctum Q jaceret in arcu interiore, ubi nodus habetur, vel in exteriore, & ejus occursus in I cum orbita ipsa solutionem problematis exhiberet.

221. Porro curvæ descriptio est admodum expedita; cum nimirum IQ quarta proportionalis esse debeat post IS, IP; ac semel ductis binis rectis indefinitis se ad angulos rectos intersecantibus, ac in earum altera assumptâ semper SI, in altera IP, methodo notissima, ope normæ bis applicatæ, invenitur quarta continue proportionalis. Et quidem in casu circuli centro S descripti, res etiam multo facilior evadit, cum SI sit semper constans; in quo casu admodum elegans habetur curvæ proprietas, quod nimirum IQ directa semper ad S sit in ratione triplicata directa rectæ IP, quarta nimirum proportionalis post ejus circuli radium, & ipsam IP.

222. *Scholium 4.* Si libeat ejusdem curvæ naturam calculo investigare; res erit multò operosior, cum altissimi sit ordinis non solum, ubi ab Ellipsi generatur, verum etiam, ubi generatur a circulo. Hoc autem pacto æquatio in utroque casu haberi potest.

223. Sit primò orbita HID circularis in *fig.* 32, & ductis QO, IT perpendicularibus ad PS, dicatur $SO = x$, $OQ = y$, $SQ = \sqrt{x^2 + y^2} = z$, $SP = a$, $SI = b$. Erit $SQ = z$. F.32
$SO = x :: SI = b$. $ST = \frac{bx}{z}$. Hinc $PI^2 = SP^2 + SI^2 + 2PS \times ST = a^2 + b^2 + \frac{2abx}{z}$. Quare ob $IS^2 \times IQ = IP^3$, erit $b^2 + b^2 z = $

$\overline{a^2+b^2+\frac{2abx}{z}}^{\frac{1}{2}}$ Ponatur $a^2+b^2=c^2$; & quadrando utrinque, ac multiplicando per z^3; fiet $b^6z^3+2b^5z^4+b^4z^5=c^6z^3+6abc^4xz^2+2a^2b^2c^2x^2z^2+8a^3b^3x^3$. In hac æquatione substituendo $\sqrt{x^2+y^2}$ pro z, & x^2+y^2 pro z^2 in omnibus terminis præter secundum utriusque membri haberetur irrationalitas ob imparem ipsius z potestatem. Transpositione igitur facta & quadrando, jam tolleretur irrationalitas, cum omnes potestates ipsius z essent pares. Verum terminus ille tertius primi membri, qui habet z^5, jam elevaretur ad z^{10}, adeoque assurgeret ad x^{10}, & y^{10}; ac proinde æquatio ad gradum decimum assurgeret; unde eruitur, curvam altissimam esse, generis nimirum noni.

224. Verum tanta curvæ altitudo inde provenit, quod casus, quem consideravimus, & qui ad nostram rem solus pertinet, complectitur curvæ partem tantummodo, sive ramum alterum e binis, quos æquatio continet; & quorum alter, quem in schematibus non expressi, ad eum casum pertinet, in quo punctum S non gravitet in I, sed ab eo tendat ad partes oppositas quasi repulsum. Eo enim casu in *fig.* 26 IQ non esset assumenda versus S, sed ad partes oppositas. Quare solum

lum SQ=z mutaret valorem suum e positivo in negativum. Ubi autem postremo quadrantur membra, & z elevatur ad potentias pares, sive ipsum negativum fuerit, sive positivum, potentiæ paris signum positivum evadit; ac proinde æquatio remanet prorsus eadem.

225. Quin immo bini hujusmodi curvæ rami eadem æquatione exprimunt directricem vis perturbantis pro quatuor casibus. Primus est noster, quo & Saturnus, & Sol in Jovem tendunt, cui respondet ramus interior, quem descripsi, determinatus a recta IQ assumpta versus S. Secundus est is, quem nominavi, quo Saturnus quidem in Jovem tendat, at Sol a Jove; cui responderet ramus exterior eadem æquatione expressus, & qui describeretur manente in *fig.*26. PI, sed rectis PB, IQ jacentibus ad partes oppositas. Tertius est is, in quo e contrario Saturnus a Jove tenderet, Sol in Jovem; in quo quidem PB in *fig.*26 maneret, ut schema exprimit, sed PI, BQ jacere deberent ad partes contrarias. Quartus est is, in quo & Saturnus, & Sol tenderent a Jove; in quo casu tam PI, quam PB in partes oppositas abirent.

226. Porro priores duos eadem æquatione contineri, vidimus num.224, tertius autem, & quartus casus ramos exhibent prorsus eosdem, quos secundus & primus. Si enim in *fig.*33 parallelogrammi PBQI, prius manente latere PI, abeat latus PB ad partes oppositas in PB', tum manente PB abeat PI ad partes F.33

oppositas in PI', ac demum mutetur utrunque; punctum Q abibit in Q2, tum in Q3, inde in Q4, & patet diametros Q1Q3, Q2Q4 terminatas ad quatuor puncta Q, se debere secare bifariam in puncto P. Quare rectæ PQ2, PQ3, rectis PQ4, PQ1 æquales erunt, & in directum jacebunt. Hinc si tota figura convertatur circa P per semicirculum ita, ut puncta B, I, abeant in B', I', patet puncta Q1, Q2, debere semper abire in Q4, Q3. Quare rami illi, quos puncta Q1, Q2 describunt sola figuræ conversione penitus congruerent cum ramis descriptis a punctis Q3, & Q4. Ac proinde sunt penitus similes, & æquales, ac eandem illam æquationem habent, cum hoc tantum discrimine, quod ea æquatio priores illos exhibet simul; posteriores ut exhibeat, abscissæ x considerandæ sunt positivæ ex parte opposita, vel manente plaga positivorum, mutanda sunt signa omnium terminorum, in quibus in æquatione jam reducta habetur potestas aliqua impar abscissæ x.

227. In casu autem Ellipseos æquatio est multo magis composita. Sint enim IT, QO perpendiculares lineæ apsidum VSu, in quam demittatur etiam PM, quæ rectæ IN parallelæ Vu occurrat in N. Posita SO $= x$ OQ $= y$,

F.34 SQ $= z = \sqrt{x^2 + y^2}$, sit SP $= a$, axis Vu $= 2b$, eccentricitas $= e$, recta SM $= m$, PM $= n$, $= \sqrt{aa - mm}$; eritque ut SQ $= z$ ad SO $= x$, ita radius $= 1$ ad cosinum anguli QSO,

QSO, sive IST $= \frac{x}{z}$, Quare per num. 183 erit SI $= \frac{bb - ee}{b - \frac{ex}{z}} = \frac{bbz - eez}{bz - ex}$, Quare QS $=$ $z \cdot$ SI $= \frac{bbz - eez}{bz - ex}$: : SO $= x \cdot$ ST $=$ $\frac{bbx - eex}{bz - ex}$, & eodem pacto IT $= \frac{bby - eey}{bz - ex}$.
Hinc IN $=$ MT $=$ MS $+$ ST $= m + \frac{bbx - eex}{bz - ex}$; & PN $= n + \frac{bby - eey}{bz - ex}$; & proinde IP^2 $=$ $\left(m + \frac{bbx - eex}{bz - ex}\right)^2 + \left(n + \frac{bby - eex}{bz - ex}\right)^2$. Quamobrem ob IS$^2 \times$IQ $=$ IP^3, & IQ $=$ IS $+$ SQ, erit demum $\left(\frac{bbz - eez}{bbz - ex}\right)^3 + \left(\frac{bbz - eez}{bz - ex}\right)^2$

$$z = \left(\left(m + \frac{bbx - eex}{bz - ex}\right)^2 + \left(n + \frac{bby - eex}{bz - ex}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

228. Hic jam in primo membro in numeratore assurgit z ad tres dimensiones. Quadrando utrinque assurget ad sex. Facto cubo secundi membri, elevabitur in denominatore ipsius $bz - ex$ ad potestatem tertiam, qui valor in eo, qui nunc est secundus terminus primi membri, assurget post quadraturam solum ad secundum. Quare multiplicatis omnibus terminis per cubum divisoris illius $bz - ex$ ad tollendas fractiones, debebit ipse ille

ille secundus terminus primi membri adhuc multiplicari semel per $bz - ex$, adeoque ibi z assurget ad potestatem septimam. Demum vero transpositis terminis, in quibus habentur potestates impares ipsius z, & utrobique quadrando ad irrationalitatem tollendam, habebitur æquatio curvæ per x, & y assurgens ad gradum 14; unde eruitur curvam esse generis tertii decimi, quatuor nimirum gradibus altiorem curva orta ex circulo.

229. Posset labore sane calculi molestissimo, sed notissimis methodis inquiri in omnes curvarum hujusmodi proprietates, quarum multæ detegi possent multo facilius per compendia quædam ante eliminatum valorem z, ubi is adhuc ad solum septimum gradum assurgit, & multo facilius pleraque per solam Geometriam expedirentur ex simplicissima illa proprietate, quod IQ sit quarta post IP, PS.

230. Verum utilior adhuc esset curva alia, quæ non directionem tantum, sed etiam magnitudinem exhiberet vis perturbantis relatæ ad vim in Solem, sive valorem illius fractionis $\frac{x}{g}$, quæ quidem ope prioris hujus curvæ admodum facile determinatur. Est enim per num. 191. illa fractio in Saturno $\frac{1}{S} \times \frac{PQ \times SP^2}{PI^3}$. Est autem IQ quarta proportionalis post SI, IP, ut toties diximus, adeoque $IP^2 = SI^2$

$= SI^2 \times IQ$. Quare $\frac{u}{g} = \frac{1}{S} \times \frac{PQ \times SP^2}{IQ \times SI^2}$. Hinc cum $\frac{1}{S} \times SP^2$ sit quantitas constans; si capiatur ubique in fig. 28 PK versus Q, quæ sit ut $\frac{PQ}{IQ \times SI^2}$, punctum K describet curvam ejusmodi, in qua Jove existente in I, exprimet PK non directionem tantum, sed etiam magnitudinem vis perturbantis $\frac{u}{g}$.

231. In casu orbitæ circularis constructio evadit expeditissima. Nam SI sit constans, & PK remanet ut $\frac{PQ}{IQ}$; ac proinde si semper ducatur SK parallela IP; ea abscindet ex PQ segmentum PK, quod erit proportionale fractioni $\frac{u}{g}$. Erit enim IQ. PQ :: IS. PK $= \frac{PQ \times IS}{IQ}$, quæ ob IS constantem, erit ut $\frac{PQ}{IQ}$.

232. Ea methodo in utraque figura 28, ac 29 delineavi ejusmodi curvas per puncta. Notandum tamen, ad hoc, ut dato puncto I inveniatur PK, vel data PK inveniatur punctum I, requiri curvam illam priorem determinatam a puncto Q, ducta enim a dato puncto I recta IS, & producta usque ad ipsam in Q, recta PQ posteriori curvæ occurrens in K exhiberet quæsitam PK, & vice-

versa

versa invento puncto K respondente datæ PK, productaque ipsa PK, si opus sit, usque ad priorem curvam in Q, recta deinde QS producta determinaret punctum quæsitum I.

233. Harum etiam curvarum æquatio haud difficulter determinari potest, quæ multo adhuc esset sublimior. Sed quoniam non a sola directione, & magnitudine vis perturbantis inæqualitates pendent, multo minoris usus est hujusmodi curvarum investigatio, & ea, quæ vidimus, abunde sunt. Ex iis autem binos fructus licet colligere. Primo quidem clariorem quandam ipsius vis perturbantis acquisivimus ideam, ac ejus ope mutationes, quæ accidunt in uno e præcipuis inæqualitatum elementis, propius inspeximus. Deinde fæcunditatem quandam Geometriæ contemplati sumus sane admirabilem, quæ lætissimos ubique campos obtrudit vel invitis, per quos excurrere liceat in immensum, ac sæpe ne cogitantibus quidem omissam solutionis partem ob oculos ponit, & Geometram plus æquo festinantem quodam veluti clamore quodammodo revocat, ac voce satis perspicua ejus sermonis non ignaro sui muneris admonet, &, quæ omiserat, disertè docet.

234. *Scholium* 4. Posset etiam tam magnitudo, quam directio hujusmodi vis perturbantis algebraicè exprimi saltem per series infinitas, ut deinde in formulis numeri 157 substitueretur valor $\frac{u}{g}$, & sin. A, ac cos. A, ac ad integrationes ipsarum formularum fieret gradus.

dus; Totam hanc ineundi calculi methodum hìc ostendam, ac compendia quædam adjiciam, quæ offert tam exiguum orbitarum discrimen a circulo; at quoniam calculus ipse nimis implexus esset, longe faciliore, & in re præsenti æque, immo etiam fortasse magis accurata methodo, sequenti capite rem omnem conficiam.

235. In primis autem ex doctrina sinuum notissima sunt hæc theoremata; primo, latera in quovis triangulo esse, ut sinus angulorum oppositorum; secundo, si cujusdam anguli sinus sit x, radio existente $=1$, fore cosinum $\sqrt{1-xx}$; tertio, si cosinus sit z, fore sinum dimidii anguli $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z}$; quarto, sinum versum arcus cujusvis esse tertiam proportionalem post diametrum, & chordam; quintò, Si bini anguli dicantur x, & z, fore $\sin.(x+z)=\sin.x.\cos.z+\cos.x.\sin.z$; sextò fore $\cos.(x+z)=\cos.x.\cos.z+\sin.x.\sin.z$; septimo, in calculo differentiali si angulus quidam sit $=z$, erit $dz=\frac{d\sin.z}{\cos.z}=\frac{-d\cos.z}{\sin.z}$.

236. Deinde si in quodam triangulo sint tria latera p, q, r, angulus autem lateri r oppositus sit x, erit $rr=pp+qq-2pq\cos.x$; nam si sit $SP=p$, $FP=q$, $SF=r$, angulus $SPF=x$, erit 1, $\cos.x :: FP=q$. $PO=q\cos.x$, Est autem $SF^2=SP^2+FP^2-2SP\times PO$, sive $rr=pp+qq-2pq\cos.x$. F. 27

Inde vero $\cos.x=\frac{pp+qq-rr}{2pq}$.

237. Præ-

237. Præterea dato sinu, vel cosinu cujusvis anguli potest per series infinitas determinari sinus, vel cosinus anguli, qui sit ad eum in ratione quavis data, & in Ellipsi, cujus detur axis transversus, & eccentricitas, dato angulo, quem recta per focum ducta continet cum axe transverso, potest per seriem infinitam determinari area, quæ clauditur inter ipsam, & axem, & viceversa data ejusmodi area, potest per seriem infinitam determinari is angulus, vel ejus sinus, aut cosinus.

238. Hisce præmissis sit M locus Saturni,
F.35 *m* Jovis in quadam conjunctione, P locus Saturni, I locus Jovis post datum quodvis tempus. Angulus ASM, & VSM dabitur. Dicatur A*a* = 2*a*, SF = 2*b*, V*u* = 2*c*, S*f* = 2*e*, sinus anguli VSM = *m*, anguli ASM = *n*, sinus anguli MSP = *x*, & per hos valores habebuntur omnia, quæ continentur in formulis memoratis numeri 157 saltem ope serierum.

239. Nam in primis in triangulo *f*S*m*, habito S*f* = 2*e*, & summa laterum S*m*, *mf* = 2*c*, ac sinu anguli *f*S*m* = *m*, adeoque per num. 235 ejus cosinu, habebitur, per num. 183, S*m*, eodemque pacto habebitur SM. Hinc habebuntur per num. 237, & areæ VS*m*, ASM.

240. Quoniam autem habetur sinus anguli ASM = *n*, & anguli MSP = *x*, habebitur per num. 235 & sinus totius ASP, & inde per seriem infinitam, per num. 237, area ASP, ac proinde & area MSP. Est autem & area MSP ad aream *m*SI, in ratione composita ex directa areæ totius Ellipseos AP*a*, ad aream totius

totius Vmn, & reciproca temporis periodici Saturni ad tempus periodicum Jovis, quæ rationes dantur. Habebitur igitur analyticè & area mSI. Quare ob areum VSm cognitum, habebitur tota VSI, & iccirco per series infinitas habebitur & sinus anguli VSI; adeoque ob datum sinum anguli dati VSm, habebitur, per num.235, etiam sinus mSI, & ob datum sinum MSP, habebitur, per eundem numerum etiam sinus PSI.

241. In triangulis SPF, SIf habitis jam sinibus FSP, fSI, basibus SF, Sf & summis laterum, habebuntur, per num.183, SP, SI. Quare in triangulo PSI habebitur per num.236 IP latus oppositum angulo ISP, cujus jam habebatur sinus, & proinde cosinus, ac per num.235 habitis jam analyticè lateribus, & sinu unius anguli, habebuntur sinus angulorum IPS, PIS.

242. Habita SI, & IP, habetur IQ $= \frac{IP^2}{SI^2}$, & habito præterea sinu anguli PIQ, adeoque & cosinu, habebitur, per num.236, PQ, &, per eundem, sinus anguli IPQ, ac ob notum sinum SPI, innotescet & sinus SPQ; per num.235.

243. In triangulo FSP habito jam, per num.241, SP, habebitur FP $= 2a -$ SP. Quare ob sinum FSP cognitum, habebitur sinus SPF per num.236, ac 235, adeoque per hunc eundem & sinus ejus dimidii, quem recta perpendicularis tangenti, & ex conicis bifariam

fariam secans angulum SPF, continet cum SP. Quare dabitur per ipsum num. 233, sinus anguli, quem PQ continet cum ea normali; & proinde ejus cosinus, sive sinus ejus anguli, quem directio vis perturbantis continet cum tangente, nimirum sinus QPT, quem angulum diximus A in memoratis formulis; adeoque innotescet pro Saturno sin. A, & cos. A.

244. Valor autem $\frac{u}{g}$ pro Saturno, per num. 191, erat $\frac{1}{S} \times \frac{PQ \times SP^2}{PI^3}$. Quare cognitis jam PQ, SP, PI, habebitur & is valor.

245. Si jam considerentur reliqui valores, qui habentur in formulis numeri 157, habentur præterea AC, semiaxis transversus, quem hic diximus in Saturno *a*, SC eccentricitas, quæ hic pro Saturno *b*, & SP, ac PF, distantiæ Planetæ a binis focis, quas jam invenimus. Anguli earum formularum SFP sinus habetur per num. 233, habitis omnibus lateribus, & sinu anguli ad S, adeoque & cosinus. Anguli autem SPT, quem SP continet cum tangente, sinus habetur, cum habeantur, per num. 243, sinus anguli, quem SP, continet cum normali ad tangentem ipsam.

246. Demum in iisdem formulis valor *dz* est sinus differentiæ anguli MSP, qui sinus æquipollet ipsi arcui, sive differentiæ ejus anguli. Quare is quoque habetur, juxta num. 235 per sinum & cosinum anguli MSP, adeoque

per

per ſinum ſolum, per quem habetur coſinus. Igitur valores omnes in iis formulis contenti haberi poſſunt per eas quantitates, quas num. 238 expreſſi. Porro in iis valores omnes haberi poſſent pro conſtantibus, dempto ſolo illo ſinu anguli MSP, cum adeo parum varientur, ut ex obſervationibus Aſtronomicis conſtat, quæ docent, admodum exiguas eſſe horum Planetarum inæqualitates. Quare haberentur in ſingulis formulis quantitates conſtantes, & ſola variabilis x cum ſua differentia. Igitur integrari poſſet quælibet formula ſaltem per ſeries infinitas.

247. Hæc quidem methodus pro Jove eſt eadem. Sed ibi ponendus eſſet ſinus anguli mSI $= x$, & operatio inverſo ordine inſtituenda. Porro ea manifeſto duceret ad valores earum formularum; at quam immenſo calculi labore, nemo non videt. Quot enim quantitates reducendæ eſſent in ſeries, & ſeries ipſæ per ſe invicem multiplicandæ, dividendæ, atque ad poteſtates elevandæ integras, vel fractas?

248. Plura autem compendia calculi exhibet potiſſimum tanta orbitarum affinitas cum circulo, a quo parum admodum diſſident. In primis in iis formulis habetur ubique pro diviſore ſin. SPT, qui pro unitate haberi poteſt, & ſine notabili errore omitti. Nam angulus SPT, eſt is, quem SP in Saturno, SI in Jove continet cum tangente. Cum vero normalis ad tangentem biſariam ſecet angulum SPF, & SIf; dimidium hujus erit complementum illius. Porro facile demonſtratur

hunc esse maximum in vertice axis conjugati Ellipseos. Ibi autem est radius ad sinum dimidii ipsius, ut est semiaxis ad eccentricitatem, nimirum in Saturno, per num. 180, ut 10000 ad 5693, in Jove ad 4816. Quare dimidium ejus anguli in Saturno ex tabulis sinuum erit gr. 3 min. 16, in Jove gr. 2, min. 45. Quare ille angulus ubi plurimum a recto differt, in Saturno differt per gradus 3 min. 30, in Jove, per gr. 2, min. 45, plerunque autem multo minus, & in ipso Aphelio ac Perihelio nihil. Hinc sinus ejus ubi plurimum differt a recto est partium 0.998 in Saturno, 0.999 in Jove; ac proinde in illo ad summum quingentesima sui parte, in hoc millesima, plerunque autem in utroque ne millesima quidem sui parte differt, adeoque pro illo assumi potest.

249. Deinde ut diximus num. 207, Hypothesis Elliptica simplex, in qua describuntur aequabiliter anguli circa focum superiorem, parum abludit a Kepleriana, in qua areae circa focum inferiorem aequabiliter describuntur. Quare pro ratione areae MSP ad aream *m*SI, quarum arearum prima ex anguli ASP sinu, & ex quarum secunda sinus anguli VSI, non nisi per series infinitas haberi possunt, potest adhiberi ratio anguli MFP ad angulum *mf*I reciproca rationis temporum periodicorum.

250. Praeterea pro unica vi illa composita agente in Saturno per PQ, in Jove per I*q*, possunt potius adhiberi binae in singulis, quarum prior in Saturno agat sola directione PI,

secun-

secunda directione parallela rectæ IS, in Jove autem prima per IP, secunda directione parallela rectæ PS. Si harum altera post alteram applicaretur formulis, & colligerentur singularum effectus, haberetur illud idem, quod vis composita exhiberet. Earum autem & magnitudo, & directio simpliciorem determinationem habent, quam ea, quæ ex ipsis in angulo obliquo ad se invicem collocatis componitur. Porro si ejusmodi vires seorsum considerentur; erit in Saturno vis agens directione IS, nimirum vis æqualis, & contraria ei, qua Sol gravitat in Jovem, per num. 170, ac 173 $= \frac{I}{SI^2}$, qui erit primus valor *u* pro Saturno; cumque vis Saturni in Solem sit ibidem $\frac{S}{PS^2} = g$, erit primus valor $\frac{u}{g}$ pro Saturno $= \frac{I}{S} \times \frac{PS^2}{SI^2}$, ac eodem pacto invenietur alter pro Saturno, & alii bini pro Jove, quos hic subiicio.

$$\text{Valor } \frac{u}{g} \begin{cases} \textit{Saturno} \begin{cases} \text{directione IS} = \frac{I}{S} \times \frac{PS^2}{SI^2} \\ \text{directione PI} = \frac{I}{S} \times \frac{PS^2}{PI^2} \end{cases} \\ \textit{Pro Jove} \begin{cases} \text{directione PS} = \frac{P}{S} \times \frac{IS^2}{PS^2} \\ \text{directione IP} = \frac{P}{S} \times \frac{IS^2}{IP^2} \end{cases} \end{cases}$$

251. Demum ubi in triangulo FSP, vel fSl per sinus angulorum ad basim definiuntur latera, vel viceversa, ut & sinus dimidii anguli basi oppositi; multo simplicius eæ determinationes haberi possunt, considerando exiguam ipsam basis rationem ad latera, & contemnendo eos terminos, in quibus ea ad plures, quam duas dimensiones elevatur, quam per theor. expositum num. 183, generaliter vidimus.

252. Ibi ostensum est posita basi SF $= 2b$, summa laterum SP, PF $= 2a$, angulo FSP $= x$, fore SP $= \frac{aa - bb}{a - b \cos. x}$. Quare si potius ipse cosinus ejus anguli dicatur x, erit SP $= \frac{aa - bb}{a - bx}$. Instituta divisione, & contemptis terminis, in quibus b ultra secundam potentiam progreditur, erit SP $= a + bx + \frac{b^2 x^2}{a} - \frac{bb}{a}$, vel posito sinu ejus anguli z, cum sit $1 - x^2 = z^2$, fiet SP $= a + bx - \frac{b^2 z^2}{a}$.

253. Igitur FP $= 2a - a - bx + \frac{b^2 z^2}{a} = a - bx + \frac{b^2 z^2}{a}$.

254. Cum vero sit FP $= a - bx + \frac{b^2 z^2}{a}$. SP $= a + bx - \frac{b^2 z^2}{a}$: : sin. FSP $= z$, sin. SFP $= a^2$

$=\frac{a^2+abx-b^2z^2}{a^2-abx+b^2z^2}\times z$; instituta divisione, & neglectis terminis, in quibus b assurgit ad potestates altiores secunda, erit sinus anguli SFP $=z+\frac{2bxz}{a}-\frac{2b^2z^3}{a^2}+\frac{2b^2x^2z}{a^2}$, sive cum sit $z^2=1-x^2$, erit sinus anguli SFP $=z+\frac{2bxz}{a}+\frac{4b^2x^2z}{a^2}-\frac{2b^2z}{a^2}$.

255. Pariter cum sit $FP=a-bx+\frac{b^2z^2}{a}$. $SF=2b$: : sin. FSP $=z$. sin. SPF $=\frac{2bz}{a-bx+\frac{b^2z^2}{a}}$; instituta divisione actuali, & contemptis ut supra terminis, in quibus b assurgit ultra secundam potentiam habetur $\frac{2bz}{a}+\frac{2b^2xz}{a^2}$. Cumque angulorum exiguorum sinus sint quam proxime ut ipsi anguli; erit sinus dimidii anguli FPS, sive sinus ejus anguli, quem SP continet cum normali, & cosinus ejus, quem continet cum tangente $\frac{bz}{a}+\frac{b^2xz}{a^2}$.

256. Cosinus vero anguli SFP habebitur per theor. expositum num. 236, in formula

$\frac{pp+qq-rr}{2pq}$. Sunt enim p, & q latera adjacentia angulo, nempe hic SF, FP, & r latus oppositum nempe hic SP. Est autem $FP^2 - SP^2 = -4abx + 4b^2z^2 = -4abx - 4b^2x^2 + 4b^2$, & $SF^2 = 4b^2$, ac $PF = a - bx + \frac{b^2z^2}{a} = a - bx - \frac{b^2x^2}{a} + \frac{b^2}{a}$. Erit igitur valor illius cosinus $= \frac{-4abx - 4b^2x^2 + 8b^2}{4b \times (a - bx - \frac{b^2x^2}{a} + \frac{b^2}{a})}$, nimirum facta actuali divisione, & contemptis contemnendis erit is cosinus $-x + \frac{2bz^2}{a} - \frac{3b^2xz^2}{a^2} = -x - \frac{2bx^2}{a} - \frac{3b^2x^2}{a^2} + \frac{3b^2z^2}{a^2} + \frac{2b}{a} = -x + \frac{2bz^2}{a} + \frac{3b^2xz}{a^2}$.

257. Demum cosinus anguli SPF ex eadem formula habebitur, eritque $\frac{SP^2 + FP^2 - SF^2}{2SP \times PF}$. Est autem contemptis terminis contemnendis $SP^2 + FP^2 = 2a^2 + 2b^2x^2$, & $SP \times PF = a^2 - b^2x^2$. Igitur erit is cosinus $\frac{2a^2 + 2b^2x^2 - 4b^2}{2a^2 - 2b^2x^2}$ nimi-

nimirum contemptis contemnendis $= 1 + \frac{2b^2 x^2}{a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$; sive $= 1 - \frac{2b^2 z^2}{a^2}$, cumque differentia cosinus a radio in angulis acutis sit sinus versus, & is juxta num. 233, ut quadratum chordæ, nimirum in arcubus exiguis quamproximè ut quadratum ipsius arcus; erit hæc differentia quadruplo minor in cosinu dimidii anguli SPF, adeoque is cosinus erit $1 - \frac{b^2 z^2}{2a^2}$.

258. Collectis igitur simul omnibus, quæ inventa sunt, habebuntur sequentes formulæ, quas cum suis positionibus hic subjiciam.

259. Posito sinu anguli FSP $= z$, cosinu $= x = \sqrt{1 - zz}$, summa laterum SP, FP, sive axe transverso $2a$, latere SF, sive distantia focorum, vel dupla eccentricitate $= 2b$, erit

Latus SP – – – – $= a + bx - \frac{b^2 z^2}{a}$

Latus FP – – – – $= a - bx + \frac{b^2 z^2}{a}$

Sinus anguli SFP $= z \times 1 + \frac{2bx}{a} + \frac{4b^2 x^2}{a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$

Cosinus ejusdem $= -x \times 1 + \frac{2bz}{a} - \frac{2b}{ax} + \frac{3b^2 x^2}{a^2} - \frac{3b^2}{a^2}$

Sinus anguli, quem SP continet cum tangente — — — — — — — $= 1 - \frac{b^2 z^2}{2a^2}$

Cosinus ejusdem — — — $= z \times \frac{b}{a} + \frac{b^2 x}{a^2}$

260. Quoniam vero fractio $\frac{b^2}{a^2}$ pariter satis exigua est ob b ita parvam respectu a; si ii etiam termini omittantur, in quibus ea adest, adhuc multo simpliciores evadent formulæ; ut contra eædem multo accuratiores, sed magis implexæ evaderent, si superiores etiam ejus fractionis potestates adhiberentur. Porro eædem hæ formulæ aptantur etiam Jovi, si pro $2a$, $2b$, x, z, ponantur valores Vu, ff, cos. SfI, sin. SfI.

261. Jam vero hac alia methodo calculus instituendus esset. Primo quidem denominato sinu anguli MSP $= t$, cosinu $= y$ haberetur sinus, & cosinus anguli PSA, ob datum MSA, ac pariter, denominato sinu anguli mSI $=$ S, cosinu $= r$, haberetur sinus, & cosinus anguli ISV, ob datum mSV. Quare per superiores formulas invenirentur omnia, quæ pertinent ad triangula SPF, SIf. Deinde ex sinibus, & cosinibus angulorum PSA, ASV, adeoque & PSV, ac pariter sinu, & cosinu ISV jam invento, haberetur sinus & cosinus ISP, & ob SI, SP jam inventas, haberetur IP, cum sinu, & cosinu anguli ad P, ut supra ostendi. Demum pariter ex sinu, & cosinu anguli IPS, & dimidii anguli SPI, haberetur

sinus,

sinus, & cosinus anguli, quem directio vis agentis per PI continet cum normali, nimirum cosinus, & sinus ejus, quem continet cum tangente, & magnitudo hujusce vis $= \frac{I}{S} \times \frac{PS^2}{PI^2}$ pariter haberetur. Sic etiam ob inventum sinum anguli ISP, adeoque & alterni, quem SP contineret cum recta parallela IS, & inventum pariter sinum, & cosinum anguli, quem SP continet cum ea normali, nimirum cosinu, & sinu ejus, quem continet cum tangente, haberetur demum sinus, & cosinus anguli, quem directio vis ejus, qua Sol in Jovem gravitat, translatæ in Saturnum continet cum eadem tangente. Ejus autem vis magnitudo $\frac{I}{S} \times \frac{PS^2}{SI^2}$ haberetur pariter. Quare habitis etiam SC, SP, SF, sinu, & cosinu anguli PFS, ac demum pro dz, quod in iis formulis exhibet valorem sinus differentiæ anguli MSP, cujus sinum hic diximus t, cosinum y, posito $\frac{dt}{y}$, juxta num. 235, habebitur quidquid eæ formulæ continent pro Saturno, per t, y, s, r.

262. Porro est $y = \sqrt{1 - tt}$, & $r = \sqrt{r - ss}$, & cum angulus Ifm ad PFM sit in data ratione reciproca temporis periodici Jovis ad tempus Saturni, datur etiam sinus s per sinum t, per seriem infinitam. Quare

per

per solum valorem t variabilem cum sua differentia dt, ac valores distantiarum mediarum Jovis, & Saturni, ac eccentricitatum, & sinuum angulorum MSA, mSV, quæ ob perturbationem motuum tam exiguam haberi possent ut constantes, haberentur eæ formulæ, quæ ad Saturnum pertinent, ac earum summæ per sinum MSP distantiæ Saturni a loco conjunctionis cujusdam datæ in M. Ea vero, quæ pertinent ad Jovem, eadem prorsus methodo haberentur, ut patet, posito in formulis $\frac{ds}{r}$ pro dz, & quæsitis sinibus, ac cosinibus angulorum, quos PI, & recta parallela PS ducta per I continerent cum tangente per I ducta.

263. In hoc calculo illud per quam commode accideret, quod per illos valores t, y, s, r, tam quantitas, quam directio vis haberentur semper sine irrationalitate. Nam sinus & cosinus summæ, vel differentiæ angulorum, per num. 235 habentur sine irrationalitate ex sinibus, & cosinibus angulorum ipsorum. In triangulo autem ISP, quadratum pariter IP, quod ingreditur quantitatem vis perturbantis, haberetur per num. 234 sine irrationalitate, ex lateribus IS, IP pariter sine irrationalitate deductis per formulas numeri 259, & ex cosinu anguli ISP sine irrationalitate deducti. Sinus autem angulorum IPS, PIS, ex sinu PSI, & lateribus inventis, inveniretur pariter sine irrationalitate per num. 235, & cosinus ex lateribus per num. 236.

164. Adhuc

264. Adhuc tamen multæ ambages supereſſent, a quibus vel tentandis abhorret plurimorum animus, & ſi ſimplicior aliqua, ac expeditior adſit methodus, eam præferendam eſſe nemo non videt. Adeſt autem methodus, quæ aſperitates evitet omnes. Quamobrem, eam, cum ſe ſponte objiciat, & Geometris jamdudum notiſſima ſit, atque uſitata, avide arripui, ac viam inii, quæ homini etiam integralis calculi prorſus ignaro patet prona, eſt autem multo etiam accuratior, & quantum libet ad veritatem accedit, potiſſimum ſi ea adhibeantur, quæ ad ejuſmodi methodum pertinentia protulit Coteſius olim, & ſummus nuper Geometra Valmesleyus ipſius Coteſii illuſtrator, atque promotor. Verum ea, quæ ad ipſam pertinentia ego hic proferam, abunde ſunt. Hic autem illud accidit, quod in curva directrice virium ſupra contigerat, quæ nimirum geometrica conſtructione, & calculo ſi libet tantum numerico ex ea deducto, expeditiſſime definitur, ac ejus ductus, & natura cognoſcitur, calculo vero algebraico ad quartumdecimum gradum aſſurgente, immenſo ſane labore, ac per longas ambages, vix demum ex æquatione, qua ejus natura exprimitur, cognoſci poſſet. Hanc methodum ſequenti capite jam exponam.

CA-

CAPUT V.

De determinandis inæqualitatibus, quæ dato quovis finito tempore oriuntur, & ordinanda tabula correctionum.

Prop. XXII. Probl.

Determinare mutationem diurnam orbitæ, & areolæ in conjunctionibus, & oppositionibus.

265. Ea mutatio varia est pro varia positione loci, in quo contingit conjunctio, vel oppositio. Habetur autem facile conferendo formulas numerorum 156, 177 inter se. Nimirum in formulis numeri 177 inveniatur methodo exposita num. 182 valor $\frac{n}{g}$. Is valor, diurno tempore, non mutatur ad sensum, Saturnus enim vix duo minuta, Jupiter 5 singulis diebus percurrit; ac proinde is valor ne menstruo quidem tempore mutatur ad sensum. Reliqui omnes valores adhibiti in formulis numeri 157 pariter ad sensum non mutantur præter *dz*, & facile inveniuntur.

266. Nam AC quidem, & SC sunt distantia media, & eccentricitas, quæ habentur in tabulis Astronomicis, PS est distantia vera Planetæ a Sole, quæ invenitur ex angulo FSP juxta num. 183, vel facilius per formulam numeri 259 invenitur veræ proxima, vel adhuc facilius eruitur in tabulis Astronomicis ex data ano-

F. 27

ta anomalia vera. PF habetur ſubtrahendo SP a dupla diſtantia media. Angulus SPF vel invenitur ex lateribus SF, PF, & angulo PSF, vel per formulam numeri 259, vel ex tabulis Aſtronomicis vero proximus, cum ſit æqualis quamproximè æquationi; cum motus angularis circa focum ſuperiorem F ſit quamproximè æquabilis, ut diximus num. 207. Angulus SPT eſt complementum anguli dimidii SPF ut pariter vidimus. Quare illo invento, & is invenitur. Angulus autem A eſt idem in conjunctione pro Saturno, ac angulus SPT, ac in oppoſitione pro Saturno, & tam in conjunctione, quam in oppoſitione pro Jove, habet ſinum & coſinum eundem, ſed cum ſigno contrario, cum is angulus ſit per num. 103 ille, quem directio vis continet cum directione motus tangentialis, & vis in conjunctione dirigatur pro Saturno per PS, per num. 176, in oppoſitione pro Saturno, & in utroque caſu pro Jove dirigatur ad partes contrarias S. Demum angulus SFP habetur ſubtrahendo ſummam SPF, FSP a duobus rectis, vel ex lateribus FP, FS, & angulo FSP, vel per formulas numeri 259.

267. Supereſt valor ille dz, qui exprimit motum verum debitum tempuſculo infiniteſimo. Pro eo ſi ſubſtituatur arcus deſcriptus motu vero, ſpatio unius diei, habebitur ex ipſa formula quantitas mutationis quæſitæ; motus autem ipſe poteſt ſubſtitui in minutis ſecundis, ubi agitur de motu apſidum; in reliquis vero inveniendus eſt valor ejus arcus in partibus radii.

dii. Dicatur numerus secundorum motus veri B, quorum semiperipheria continet 648000, & fiat ut 113 ad 355 ita 1 ad $\frac{355}{113}$, qui erit valor semiperipheriæ. Tum ut 648000 ad B ita $\frac{355}{113}$ ad $\frac{355B}{113 \times 648000}$, qui erit valor arcus quæsiti substituendi in reliquis formulis.

268. Inventa per formulam magnitudine mutationis, invenietur per num. 156, & signum formulæ præfixum, & in eccentricitate, motu apsidum, areola, capienda erit summa, vel differentia eorum, quæ proveniunt ex binis formulis, ac habebitur demum mutatio quæsita. Q. E. F.

269. Coroll. *In tertia, quinta, & septima ex iis formulis auferri poterit in conjunctione, & oppositione e numeratore sin.*A, *e denominatore sin.*SPT, *retento signo formulæ in conjunctione pro Saturno, & mutato in oppositione pro ipso, ac in utraque pro Jove.*

270. Est enim juxta num. 266 angulus A idem ac SPT in primo casu, ipsi oppositus in secundo.

271. Coroll. 2. *Binæ formulæ pro mutatione areolæ se mutuo destruunt, ac ipsa manet sine ulla mutatione tam in conjunctione, quam in oppositione utriusque Planetæ.*

272. Nam in primis ablato e numeratore posterioris formulæ sin. A, & e denominatore semel sin. SPT, nullum aliud discrimen supererit præter cos. A in numeratore primæ,

& cos.

& cos.SPT in numeratore secundæ. Porro ii cosinus æquales sunt. Igitur & quantitates easdem formulæ exprimunt. Sunt autem earum signa contraria, & ea in conjunctione manent pro Saturno, in cæteris casibus bis mutatur signum, nimirum primo, ubi aufertur sin.A, & sin.SPT; deinde ubi pro cosinu SPT ponitur cos. A; ac proinde eodem redit signum ipsum, & manet adhuc contrarium signo formulæ præcedentis.

273. Coroll.3. *Utrolibet Planeta existente in Aphelio, vel in Perihelio evanescunt mutationes omnes, tum in conjunctione, tum in oppositione præter motum apsidum tantummodo ortum a formula posteriore.*

274. Nam formulæ quidem pro areola se mutuo destruunt ubique per num.272. Reliquæ autem habent omnes præter secundam motus apsidum in numeratore vel cosinum anguli A, vel sinum SFP. Primus evanescit; cum ibi directio vis evadat perpendicularis tangenti in Aphelio, & Perihelio, ob angulum SPT ibi rectum. Secundus evanescit, cum angulus SFP in Aphelio evadat æqualis duobus rectis, in Perihelio evanescat.

275. Coroll.4. *Invento valore formularum pro quovis puncto orbis Planetæ, in quo fiat conjunctio, vel oppositio, facile invenitur valor ejusdem parum a vero abludens pro quovis alio.*

276. Nam ob exiguum discrimen Ellipseos parum admodum mutantur valores PS, PF, sin. SPT, sin.A, $\frac{u}{g}$, dz, sive B; manent AC,

& SC,

& SC; & solum mutantur plurimum cosinus A, ac sinus & cosinus SFP. Quoniam complementum anguli A, est in iis casibus $= \frac{1}{2}$ SPF, & SPF proximè æquatur æquationi centri, ac sinus angulorum exiguorum sunt proximè, ut anguli ipsi, cosinus A mutabitur proximè in eadem ratione æquationis Planetæ, sinus autem, & cosinus SFP erit proximè idem ac sinus, & cosinus anomaliæ mediæ. Quare habebuntur sequentia theoremata, quæ considerates ipsis formulis patebunt.

277. Mutatio axis in conjunctione, & oppositione est proximè, ut æquatio centri Planetæ debita illi puncto orbis, in quo conjunctio, vel oppositio fit.

278. Prima formula eccentricitatis mutatur proximè in ratione composita ex rationibus æquationis, & cosinus anomaliæ mediæ; secunda vero ejusdem proximè in ratione sinus anomaliæ mediæ.

279. Prima apsidum in ratione composita ex rationibus æquationis, & sinus anomaliæ mediæ, secunda proximè ut cosinus anomaliæ mediæ.

280. *Scholium*. Valores, qui ad hasce formulas pertinent, possunt etiam obtineri ope constructionis Geometricæ binarum Ellipsium Saturni ac Jovis, si enim orbitæ ipsæ paulo majores construantur, in admodum exiguis inæqualitatibus error committi poterit perquam exiguus. Poterunt autem facile, & logarithmi adhiberi, qui laborem minuunt in im-

immensum. Et quidem ubi quæritur valor $\frac{u}{g}$ in formulis numeri 177; in prioribus binis habebitur $\frac{I}{S} \times PS^2$ ductum in prima in $\frac{1}{SI^2} + \frac{1}{PI^2}$, in secunda in $\frac{1}{SI^2} - \frac{1}{PI^2}$, in reliquis autem $\frac{P}{S} \times IS^2$, ductum in $\frac{1}{IP^2} - \frac{1}{PS^2}$, ac in $\frac{1}{PS^2} - \frac{1}{IP^2}$, quod si notetur, calculi labor minuitur.

Prop. XXIII. Probl.

Determinare eandem mutationem debitam tempori respondenti dato cuilibet motui vero finito ubicunque etiam extra conjunctiones, & oppositiones.

281. Ducatur recta quædam AQ, quæ exprimat arcum respondentem motui vero Planetæ, cujus mutationes quæruntur, tempore dato, assumptum in circulo, cujus radius $=1$. Sit AC arcus ejusmodi respondens cuilibet intervallo temporis a primo momento ad quodvis tempus intermedium. Pro tempore respondente puncto C inveniatur coefficiens totus formulæ, cujus summa quæritur, dempto *dz*, ut si quæratur mutatio axis, inveniatur coefficiens $\frac{4AC^2}{PS} \times \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. SPT}} \times \frac{u}{g}$, nimirum ex dato per tabulas Astronomicas loco F. 36

Saturni, & Jovis inveniatur, methodo tradita a num. 201 ad num. 209, $\frac{n}{g}$ & angulus A, reliqui valores, qui vel ad hanc, vel ad reliquas formulas pertinent inveniantur methodo numeri 266. Erigatur CD perpendicularis ad AQ invento coefficienti æqualis versus alteram plagam ad libitum assumptam pro plaga positivorum, vel ad oppositam, prout valor coefficientis evaserit positivus, vel negativus. Per omnia puncta D ducatur curva BDEFR, cujus si areæ positivæ, ac negativæ sumantur, harum differentia exhibebit mutationem quæsitam illi tempori debitam, positivam, vel negativam, prout areæ positivæ prævaleant, vel negativæ.

282. Nam si fit Cc, arcus infinitesimus $= dz$; areola $CDdc$ exprimet valorem formulæ debitum tempusculo illi, quo ejusmodi arcus percurritur. Quare tota area exhibebit valorem formulæ debitum toti tempori AQ. Q. E. F.

283. Coroll. 1. *Si AQ exprimat totam circumferentiam ejus circuli respondentem integræ revolutioni Planetæ; curva BDR secabit axem AQ in pluribus punctis, nimirum ubi agitur de Saturno saltem bis in formula pro mutatione axis, quater in reliquis; ubi autem agitur de Jove, quater in prima, sexies in reliquis.*

284. Nam curva secabit axem, quotiescunque coefficiens evadit $= 0$. Porro in prima formula evanescit is coefficiens, evanescente cos.

cos. A, in reliquis, tam evanescente cos. A, vel sin. A, quam evanescente cos. SFP, vel sin. SFP. Porro in Saturno saltem bis, in Jove quater evanescit tam sinus, quam cosinus anguli A, qui in illo semel, in hoc bis mutatur per totum circulum, juxta num. 218. In utroque autem sinus anguli SFP bis evanescit, nimirum in Aphelio, & Perihelio, bis autem cosinus ejusdem in locis intermediis.

285. Coroll. 2. *Ubi agitur de eccentricitate, & motu apsidum, potest ordinata elevari aequalis binis coefficientibus binarum formularum ad singulas pertinentium simul sumptis, ut unica area totam mutationem statim exhibeat.*

286. *Scholium* Quoniam ordinatae hujus curvae facili calculo haberi possunt, quam libuerit, veris proximae, area quoque verae proxima per ipsas ordinatas facile obtinebitur ope sequentis lemmatis prorsus elementaris. *In trapezio* ABDC *cujus bina latera* AB, CD *sunt parallela, latus autem* AC *ipsis perpendiculare, erit ejus area productum ex semisumma laterum* AB, CD *parallelorum ducta in latus illud perpendiculare* AC. Patet autem, cum resolvatur in bina triangula ADB, ADC, quorum altitudo communis AC, basis vero prioris AB, posterioris DC. F.37

287. Quod si recta *ac* latus BD secet in I; mutato valore D*c*, & area DI*c* in negativam, erit differentia arearum BI*a*, DI*c* aequalis differentiae rectarum B*a*, D*c*, ductae in ipsam *ac*. Patet autem eodem pacto, est enim ea

 dif-

differentia eadem ac differentia triangulorum BD*a*, D*ca* ob *a*ID communem.

F.38 288. Sit jam curva quævis BDMR, cujus ordinatæ pro quavis abſciſſa computari poſſint, & quæratur ejus area veræ proxima uſque ad quandam ordinatam IK. Secta abſciſſa AI in partes æquales AC, CE, EG, GI, quotcunque opus fuerit; ut erectis ordinatis CD, EF, GH, arcus BD, DF, FH, HK ſumi poſſint pro rectis neglecta areola, quæ jacet inter chordam & arcum. Computatis autem omnibus ejuſmodi ordinatis, ſumma omnium intermediarum CD, EF, GH, & extremarum, BA, IK ſemiſumma ducatur in unum ex intervallis AC, ac habebitur quæſita area.

289. Nam primum trapezium ABCD eſt ſemiſumma AB, CD, ducta in AC, ſecundum CDFE ſemiſumma CD, EF, ducta in CE æqualem AC, & ita porro. Quare in ſumma omnium ejuſmodi trapeziorum, omnes intermediæ ordinatæ bis veniunt, extremæ ſemel, ducunturque omnes in AC, & dimidium totius hujuſmodi ſummæ capiendum eſt. Ac proinde ſi mediæ ſumantur ſemel, & iis adjuncta extremarum ſemiſumma ducatur in AC, habebitur omnium trapeziorum aggregatum.

290. Quod ſi quæratur area uſque ad aliquam ordinatam negativam SR, theorema eandem habebit vim, dummodo ordinatæ negativæ ON, QP, SR negativo modo computentur in ſummam; nimirum ſubducantur, & poſtremæ SR, ac primæ AB capiatur ſemidiſ-

midifferentia; ac proveniet differentia arearum AVB, SVR.

291. Si vero adhuc accuratior computatio areæ desideratur, ubi etiam arcus a chorda paulo magis distant, facile admodum obtinebitur hoc artificio. Arcus BDF in *fig.* 37 consideretur ut parabolicus, & recta BF, secet in K ordinatam CD æque distantem a binis AB, EF. Eritque ex notissima Parabolæ quadratura area BDF curvilinea ad triangulum inscriptum ut 4 ad 3. Quare area in priore methodo contempta, quæ intercipitur inter chordas, & arcus BD, DF, erit triens trianguli BDF, & sola area segmenti BD, vel sola area segmenti DF æqualis trienti trianguli BDK, nimirum $= \frac{1}{6}$ DK×AC. Hinc series omnium hujusmodi segmentorum præter ultimum, vel præter primum, habebitur, si summa omnium DK ducatur in $\frac{1}{6}$ AC. F. 37

292. Porro cum CK sit media arithmeticè proportionalis inter AB, EF, erit DK $= -\frac{1}{2}$ AB $+$ CD $-\frac{1}{2}$ EF. Hinc si ordinatæ dicantur a, b, c, d . . . . u, x, y, z, erunt ipsæ DK se ordine suo excipientes

$$-\tfrac{1}{2}a+b-\tfrac{1}{2}c$$
$$-\tfrac{1}{2}b+c-\tfrac{1}{2}d$$
$$-\tfrac{1}{2}c+d \;\&c.$$
$$-\tfrac{1}{2}d \;\&c.$$
$$\&c.-\tfrac{1}{2}u$$
$$\&c.+u-\tfrac{1}{2}x$$
$$-\tfrac{1}{2}u+x-\tfrac{1}{2}y$$
$$-\tfrac{1}{2}x+y-\tfrac{1}{2}z$$

ac proinde omnium summa $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}y$

$\frac{1}{2} y - \frac{1}{2} z$. Nimirum correctio usque ad penultimam ordinatam habebitur, si a summa secundæ, & penultimæ dematur summa primæ & ultimæ, & residui pars duodecima ducatur in unum ex illis intervallis AC. Sed integra correctio habebitur, si præterea addatur valor ultimi segmenti, ut æqualis penultimo, vel primi, ut æqualis secundo, nimirum $-\frac{1}{2} x + y - \frac{1}{2} z$, vel $-\frac{1}{2} a + b - \frac{1}{2} c$ ductum in $\frac{1}{6}$ AC. Vel quoniam arcus curvæ est tantum proximè parabolicus, & illa segmenta sunt tantum proximè æqualia, addi poterit medium arithmeticum inter ejusmodi valores, nimirum $-\frac{1}{4} a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{4} c - \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} y - \frac{1}{4} z$, ductum in $\frac{1}{6}$ AC, adeoque tota correctio jam erit $-\frac{1}{4} a + b - \frac{1}{4} c - \frac{1}{4} x + y - \frac{1}{4} z$ ductum in $\frac{1}{6}$ AC, sive $\left(-\frac{1}{8} a + \frac{1}{6} b - \frac{1}{24} c - \frac{1}{24} x + \frac{1}{6} y - \frac{1}{8} z\right) \times$ AC, & canon computandæ areæ jam erit, qui sequitur. Summæ ordinatarum omnium mediarum addatur semisumma extremarum, ac aggregatum ducatur in unum ex illis intervallis AC, & habebitur area non correcta. Addatur pars sexta secundæ & penultimæ, auferatur pars octava primæ & ultimæ, ac pars 24 tertiæ & antepenultimæ; & residuum eodem modo multiplicetur, ac habebitur correctio veræ proxima.

293. Possunt & singulæ ordinatæ prius duci in AC (nam per logarithmos inventos facile ducuntur singulæ, addito reliquis logarithmis

rithmis semper illo logarithmo AC) tum illæ summæ, & partes accipi.

294. Si area usque ad datam quandam ordinatam GH computata jam est, & quæritur area usque ad proximam IK; satis erit areæ inventæ addere semisummam ordinatæ postremæ GH, & novæ IK eodem modo ductarum in illam AC, & si correctio adhibenda sit ob curvitatem; satis erit addere partem sextam ultimæ GH, ac demere partem duodecimam penultimæ, & novæ eodem pacto ductarum. Primi autem segmenti jacentis inter primas duas ordinatas correctio habebitur, si a sexta parte ordinatæ secundæ auferatur pars duodecima primæ & tertiæ, quæ erit eadem juxta expositum canonem, ac correctio secundi segmenti, habitis nimirum primis binis areolis pro æqualibus. F.38

295. Ope horum lemmatum jam patet, quo pacto computari possint quantum libet veris proximæ variationes, quæ habentur in Ellipsi finito quovis dato tempore. Dividatur motus verus Planetæ ei tempori debitus in plures partes æquales. Pro singulis divisorum momentis, ut & pro initio & fine temporis, quærantur coefficientes formularum rite notatis earum signis. Colligatur omnium intermediorum summa, & extremorum semisumma, atque ea ducatur in arcum circuli, cujus radius unitas, respondentem uni intervallo, & habebitur valor formulæ vero proximam mutationem exhibens. Si vero is quæratur accuratior, addatur pars sexta secundi,

& penultimi, ac dematur pars octava primi; & ultimi, vigesimaquarta tertii, & antepenultimi, ac residui summa ducatur in illum eundem arcum, & habebitur valor multo correctior.

296. Quo autem in plures partes secabitur arcus debitus motui illi vero, hoc etiam vero propior habebitur mutationis quæsitæ valor, & licebit approximationem promovere, quantum libuerit.

297. Porro licet videatur molestior tot ordinatarum calculus, satis patet, nihil in eo laboris contineri, quod methodum molestiorem reddat, quam par esset, si mutationum quærantur tabulæ, cum nimirum pro singulis orbitæ punctis, quibus mutationes aptari debent, singulæ tantummodo in singulis formulis ordinatæ comparandæ sint. Ex alia vero parte dum ipsæ computantur, & ex iis derivantur mutationes factæ in orbita eo usque, poterunt inde jam corrigi elementa ipsa orbitæ, ex quibus sequentes mutationes jam correctiores evadant. Quanquam ea correctio tuto etiam omitti potest, cum mutationes tam exiguæ inductæ a vi perturbante in orbitas parum admodum a se invicem discrepantes, nihil ad sensum inter se differre possint.

Prop. XXIV. Probl.

Invenire mutationes, quæ a mutationibus jam determinatis inducuntur in distantiam Planetæ, & æquationem, ac anomalias.

F.39 298. Fuerit quodam tempore Planeta in recta

recta SB in B, ac debuerit quodam alio tempore devenire ad rectam SP in orbita non mutata in P. Interea vero mutato axe, mutata eccentricitate, & positione lineæ apsidum SFA, in *Sfa*, plures inde mutationes sequentur.

299. Primo quidem anomalia vera ASP mutabitur in anomaliam veram *a*SP, earumque mutatio erit eadem, ac motus apsidum AS*a*.

300. Secundo distantia SP mutabitur in aliam distantiam S*p*. Differentia earum inveniri poterit computando prius eandem, ex axe, eccentricitate, & anomalia vera nihil mutatis, methodo numeri 182, vel per formulam numeri 259, $SP = a + bx - \frac{b^2 z^2}{a}$, ubi a, b, x, z sunt semiaxis transversus, eccentricitas, cosinus, & sinus anomaliæ veræ, tum eandem computando ex hisce ipsis elementis jam mutatis mutatione determinata, per præcedentem propositionem, & habebitur nova S*p* respondens novæ Ellipsi.

301. Poterit autem hæc ipsa mutatio haberi immediatè veræ proxima differentiando formulam $a + bx - \frac{b^2 z^2}{a}$ cum nimirum mutationes valorum a, b, x, z sint admodum exiguæ. Proveniet autem $da + bdx + xdb - \frac{2b^2 zdz}{a} - \frac{2z^2 bdb}{a} + \frac{b^2 z^2 da}{a^2}$, ubi da, db

sunt

sunt mutationes semiaxis, & eccentricitatis respondentes motui vero BSP, & dx, dz mutationes cosinus, & sinus anomaliæ veræ; quæ si dicatur r, erit, juxta num. 235 in fine, $xdr = dz$, & $-zdr = dx$; ac proinde formula mutationis erit hæc $da - bzdr + xdb - \frac{2b^2 xzdr}{a} - \frac{2z^2 bdb}{a} + \frac{b^2 z^2 da}{a^2}$. Verum multò facilius est totas ex ambabus Ellipsibus distantias computare, & earum differentiam capere, quam ex hac longiore, & magis implexa formula differentiam ipsam immediate è solis mutationibus derivare.

302. Tertio alia jam est æquatio, & anomalia media. Earum differentia erui potest computando æquationem, & anomaliam mediam tam in priore Ellipsi ex priore anomalia vera ASP, priore axe, & eccentricitate, quam in posteriore ex nova anomalia vera aSp, novo axe, & eccentricitate, aliqua e tot methodis, quibus Keplerianum problema solvitur, inveniendi in Hypothesi arearum tempori proportionalium anomaliam mediam e vera. Differentia nimirum habebitur computata utraque.

303. Verum potest æquatio erui veræ proxima per num. 255 ex formula $\frac{2bz}{a} + \frac{2b^2 xz}{a^2}$, quæ exprimit valorem sinus anguli SPF, sive æquationis in hypothesi elliptica simplici, quæ

quidem

quidem parum admodum a vera differt; ac multo minus a vera differre potest mutatio, quæ in ipsam æquationem inducitur. Posset autem & hic differentiando erui immediate mutatio æquationis ex mutationibus valorum a, b, x, z, sed formula provenit multo implicatior.

304. Inventa nova æquatione, invenitur nova anomalia media, ac proinde & ejus mutatio. Quare inveniuntur omnes propositæ mutationes. Q. E. F.

Prop. XXV. Probl.

Invenire mutationem, quæ fit in tempore, dato motui vero, respondente, ob mutationem Ellipseos, & celeritatis areolæ.

305. Discesserit Planeta quodam tempore ex B, & post datum quoddam tempus devenerit ad rectam SP, in qua in illa Ellipsi non mutata esset in P, sed ob mutationem Ellipseos erit alicubi in p. Sit PSE areola, quam in illa priore Ellipsi debuisset describere tempusculo sequenti infinitesimo, debebit autem describere quandam aliam pSe, ab ea diversam ob mutationes in areolam hanc postremam inductas ab actione omnium virium perturbantium, quæ egerunt toto tempore motus veri ab SB ad SP, juxta ea, quæ dicta sunt a num. 120. Quamobrem si radio SM=1 fit arcus circuli occurrens rectis SB, SP, SE, Se in M, N, Q, q, tempusculo illo, quo prius descriptus fuisset motus verus NQ, jam describetur F. 40

betur

betur motus N*q*, & ille arcus NQ non percurretur eo tempusculo, quo debuisset percurri, sed alio, quod ob motum verum tempusculo infinitesimo æquipollenter uniformem, erit ad illud prius ut NQ ad N*q*, ac proinde erit ad suam mutationem, ut N*q* ad Q*q*. Si igitur colligatur summa omnium hujusmodi mutationum respondentium omnibus arcubus NQ contentis in toto arcu MN; habebitur discrimen temporis debiti motui vero pro casu, quo nulla vis perturbaret motum, a tempore ipsi debito pro casu perturbationis.

306. Jam vero est N*q* ad NQ æquipollenter, ut area *p*S*e* ad aream *p*SI, sive in ratione composita ex ratione areæ *p*S*e* ad PSE, & ratione areæ PSE ad *p*SI. Prima ex his rationibus eruitur ope postremarum formularum
F. 36 numeri 157. Si enim in *fig*. 36 AC æquetur arcui illi MN figuræ 40, & CD sit æqualis summæ coefficientium binarum illarum formularum nimirum valori illi $\frac{AC}{PF} \times \frac{1}{\text{sin. SPT}} \times \frac{u}{g} \times \left(\text{cos. A} - \frac{\text{sin. A} \times \text{cos. SPT}}{\text{sin. SPT}}\right)$; area ABCD figuræ 36 jam exprimet rationem areolæ PSE figuræ 40 ad suam differentiam a *p*S*e*; nam ob C*c* in figura 36 $= dz$, erit 1 ad DC*cd*, ut areola proximè præcedens ad suam differentiam a proximè sequenti, quæ nimirum differentia per illam formulam exprimitur. Ac proinde cum areolæ ipsæ parum admodum mutentur, exprimet area BACD proximè summam

mam omnium ejusmodi mutationum, quæ in postremam areolam inducitur a vi agente per totum arcum AC. Quare si ejusmodi area computetur methodo exposita a num. 286; & dicatur N, erit prima ratio, nimirum in *fig.* 40 ratio areæ pSe ad PSE, ut $1+N$ ad 1.

307. Secunda autem ratio areæ PSE ad pSI ob angulum ad S infinitesimum est æquipolenter ratio SP^2 ad Sp^2, sive, per num. 46, ob Pp admodum exiguam est, ut $\frac{1}{2}$ SP ad $\frac{1}{2}$ SP $+ Pp$, sive ut 1 ad $1+\frac{2Pp}{SP}$.

308. Igitur ratio illa composita erit $1+N$ ad $1+\frac{2Pp}{SP}$, & proinde tempusculum, quo describi debuisset arcus NQ motu vero sine vi perturbante, ad differentiam ab eo tempore, quo describi debet agente ejusmodi vi, est ut $1+N$ ad $N-\frac{2Pp}{SP}$, sive proximè ut 1 ad $N-\frac{2Pp}{SP}$.

309. Tempusculum autem, quo debuit percurri arcus NQ, sic invenitur. Dicatur tempus periodicum t, tota area Ellipseos describendæ, sine vi perturbante, quæ dato axe transverso, & eccentricitate, ac proinde etiam axe conjugato, datur ex Conicis, cum æquetur areæ circuli habentis pro diametro mediam proportionalem inter binos axes, dicatur p, & erit ut tota illa area p ad aream PSE, ita tem-

tempus periodicum t, ad illud tempusculum $= \frac{PSE \times t}{p}$. Est verò ut $SN^2 = 1$ ad SP^2, ita Sector circuli $NSQ = \frac{1}{2} SN \times NQ = \frac{1}{2} NP$, ad $PSE = \frac{1}{2} SP^2 \times NQ$. Quare hoc valore substituto pro PSE, erit illud tempusculum $= \frac{1}{2} SP^2 \times \frac{t}{p} \times NQ$.

310. Quare si fiat ut 1 ad $N - \frac{2Pp}{SP}$, ita tempusculum illud $\frac{1}{2} SP^2 \times \frac{t}{p} \times NQ$ ad differentiam ejusdem tempusculi; hæc differentia erit $\frac{t}{2p} \times SP \times NQ \times (SP \times N - 2Pp)$.

311. Concipiatur jam in *fig.* 36, in qua AC exprimit arcum MN figuræ 40, & C*c* arcum NQ ejusdem, ordinata $CD = \frac{t}{2p} \times SP \times (SP \times N - 2Pp)$; & area tota ABDC computanda methodo exposita a num. 286 exhibebit differentiam temporis, quod in *fig.* 40 impensum fuisset in motu vero MN sine ulla vi perturbante, a tempore, quod agente eadem vi impendi debet.

312. Patet, quia quævis areola DC*cd* exprimet differentiam cujusvis tempusculi respondentis cuivis arcui NQ figuræ 40.

313. *Scholium* 1. In formula illius ordinatæ numeri 311, P*p* est positiva, si, ut exhibet *fig.* 40, cui demonstratio aptata est, distantia

S*p*

Sp a vi perturbante sit major, quam SP, aliter negativa; ejus autem valor invenitur num. 300. Valor autem N invenitur num. 306, ubi simul innotescit, an positivus sit idem valor, an negativus; & quoniam tempusculum in casu a figura expresso minuitur in ratione *Nq* ad NQ, si area collecta ex ordinatis expositis num. 311 fuerit positiva, ejus valor demendus erit a tempore debito illi motui vero; si obvenerit negativus, addendus erit.

314. *Scholium* 2. In omnibus hisce arearum computationibus, quædam, quæ parum admodum mutantur, pro constantibus habita sunt, & eorum ope determinatæ ordinatæ arearum computandarum, ut eccentricitas illa SC, distantia media AC, & rectæ illæ SP, FP desumptæ sunt ex Ellipsi illa, quæ haberetur, si nulla vis turbaret motum. Id quidem licuit ob ipsam nimis exiguam mutationem; nam ex istis contemptibus error committitur in areæ supputatione, qui est ad aream ipsam, in ratione minore, quam sit quævis ex ejusmodi mutationibus eorum elementorum, ad id, cujus ea mutatio est. Verum si quis ejus quoque exigui erroris rationem habere velit; facile poterit, corrigendo nimirum novas ordinatas ex area jam computata. Inde enim jam habetur mutatio, quæ usque ad ordinatam novæ inveniendæ proximam facta est in elementis ipsis, ex quibus ea computari debet; ac proinde quantum libuerit correctior proveniet.

315. Sic

315. Sic etiam ubi numero 309 pro ratione SP^2 ad Sp^2, ponitur ratio $\frac{1}{2}SP$ ad $\frac{1}{2}SP + Pp$, ac pro SP^2 ad $Sp^2 - SP^2$ ratio 1 ad $1 + \frac{2Pp}{SP}$, potuit retineri ipsa ratio SP^2 ad $Sp^2 - SP^2$; Sed hæc & alia ejusmodi sane pauca, quæ passim adhiberi solent, & ego adhibui, ita parvum errorem, in aberrationibus jam per se exiguis, pariunt, ut sensum omnem effugiat, quod quidem correctiones hasce tentanti patebit facile, & accuratè etiam demonstrari posset persequendo errores singulos, qui inde obvenire possunt, verum & demonstratio, longa singulorum casuum enumeratione, fusior esset, ac molestior, & methodus ipsa hujusmodi contemptuum usitatior est, quam ut in ea vindicanda tempus diutius terendum sit. Satis autem erit hæc innuisse, & viam indicasse, qua hujusmodi etiam errorum ratio haberi possit in hac methodo; quod quidem, si formulæ integrari deberent, non per arearum quadraturas ex singulis ordinatis determinandas computari, omnino non posset.

316. Sed jam ad methodum tabulas construendi, corrigendique faciendus gradus, & comparandi theoriam cum observationibus, qui est totius perquisitionis scopus quidam, ac tanti laboris fructus.

Prop. XXVI. Probl.

Determinare orbitam a Jove, vel Saturno circa Solem descriptam, & eorum loca in iis assignare ad datum tempus.

317. Hæc determinatio haberi potest, quantum libuerit veræ proxima per hosce gradus. Primo quidem ex aliquot locis Planetarum Heliocentricis observatis, notatisque temporum intervallis determinetur, methodo usitata in Astronomia, tempus periodicum, & orbita utriusque Planetæ, ac earum positio, quæ a veris non multum abludent, cum aberrationes, quas mutua gravitas inducit, exiguæ sint.

218. Secundò supposito, quod eæ sint veræ magnitudines, & positiones orbitarum eo momento temporis, quo Planeta, cujus orbita corrigenda est, erat in aliquo ex locis observatis, corrigantur per prop. 25, ope prop. 23, & 24, ac scholiorum, intervalla temporis observata, usque ad loca vera in aliis observationibus notata, & quoniam correctiones correspondentes orbitis parum admodum a se invicem diversis, parum admodum diversæ sunt, intervalla ita correcta erunt ad sensum ea ipsa, quæ fuissent, si nulla vis motum perturbasset.

319. Tertio, per loca observata, & tempora correcta, definiatur iterum tempus periodicum, ac orbita, & habebitur orbitæ species, ac positio, cum suo tempore periodico, quales haberentur, si momento observationis illius primo assumptæ cessaret vis omnis

perturbatrix, & inde methodo ab Astronomis usitata, computari poterit Planetæ locus, pro quovis alio dato tempore in ejusmodi orbita non perturbata.

320. Quarto demum, per prop. 25, inveniantur correctiones respondentes intervallo temporis inter momentum illud observationis primo assumptæ, & locum tempori dato respondentem, quibus adhibitis habebitur orbita illi tempori respondens, & locus Planetæ in ipsa. Q. E. F.

321. *Scholium* 1. Si orbita requiritur adhuc correctior; poterunt primo corrigi ambæ orbitæ, tum ex iis correctis iterum definiri correctiones adhibendæ intervallis temporum; ac iterum computari orbitæ. Verum quoniam differentia orbitæ correctæ a non correcta est ita exigua, secundæ correctiones a primis ad sensum non different, & observationes ipsæ intra multo ampliores limites incertæ erunt.

322. *Scholium* 2. Quoniam pro singulis locis computandis inventio tot arearum esset laboris sanè improbi; potest semel computari tabula quædam, cujus ope cætera multo facilius inveniantur.

323. Tabula autem esset hujusmodi. Prima columna deberet continere singula signa distantiæ Planetæ, pro quo tabula computatur, a loco proximæ conjunctionis cum altero, quæ in Saturno satis esset producere usque ad octavum, in Jove usque ad 20, cum nimirum post totidem signa circiter eorum con-

conjunctio redeat. In fronte deberent esse signa anomaliæ veræ ejusdem Planetæ respondentia conjunctioni ipsi, quæ iccirco essent 12, ponendo nimirum conjunctionem fieri jam alio loco, jam alio. Secunda columna deberet continere mutationem semiaxis, eccentricitatis, & temporis debiti motui vero a postrema conjunctione usque ad id tempus, ac motum Aphelii respondentem motui vero a postrema conjunctione facta in gradu anomaliæ extantis in fronte usque ad distantiam ab eadem extantem in prima columna, quæ mutatio, & motus computarentur per prop. 25. Tertia columna contineret mutationes easdem respondentes conjunctioni factæ in gradu anomaliæ 30°, & ita porro.

324. Ope hujus tabulæ, dato quovis tempore, si innotesceret tempus conjunctionis proximæ præcedentis, & distantia media, eccentricitas, locus Aphelii, tempus periodicum, locus conjunctionis, & anomalia media, quæ respondent illius conjunctionis momento, inveniretur locus Planetæ pro dato illo tempore.

325. Nam in primis, ex tempore periodico pertinente ad eam conjunctionem, & intervallo temporis a momento conjunctionis ad tempus datum, daretur motus medius respondens eidem intervallo, adeoque & anomalia media ad tempus datum, & ob datam pariter eccentricitatem, ac distantiam mediam, inveniretur etiam æquatio, & proinde anomalia vera, debita in eadem orbita tempori

dato, a qua subducendo anomaliam veram momenti conjunctionis daretur distantia a loco conjunctionis.

326. Jam vero ex loco conjunctionis proximæ præcedentis, & distantia ab ipsa, inveniretur in tabula correctio orbitæ, & temporis debiti usque ad eum locum. Correctioni temporis facile esset invenire correctionem loci respondentem. Nam inveniretur motus medius debitus ei correctioni temporis, & ubi areæ constantes describuntur, est motus verus ubique in ratione reciproca duplicata distantiæ, cum nimirum in sectoribus infinitè parvis sint areæ ut anguli, & quadrata radiorum conjunctim; adeoque anguli directè ut areæ, & reciprocè ut quadrata radiorum. Quamobrem motus verus, dato tempori exiguo debitus, ad motum medium, est in ratione duplicata distantiæ mediæ ad distantiam veram, quæ inveniretur ex datis anomalia, distantia media, & eccentricitate: Inveniretur igitur locus verus ad tempus datum, & ejus ope anomalia jam correcta, per quam corrigeretur facile & distantia,

327. Totus igitur labor superesset in determinandis iis, quæ pertinent ad conjunctionem proximè præcedentem. At ea ope ipsius tabulæ haberi possent incipiendo a data aliqua conjunctione. Nam in primis seligi possent tres observationes post eam ipsam conjunctionem proximè cognitam. Earum loca corrigerentur ope tabulæ expositæ, adeoque haberentur tria loca, quæ haberi debuissent, si post con-

jun-

junctionem illam nulla vis perturbasset motum. Ex iis tribus locis definiretur Ellipsis respondens theoriæ Keplerianæ cum positione Aphelii. Quoniam vero in definienda orbita per tres observationes assumitur ut aliunde cognitum tempus periodicum, quod eruitur ab Astronomis per loca non correcta, potest ad tempus quartæ observationis assumptæ, computari locus Planetæ, qui si congruat cum loco observato, poterit tempus periodicum retineri pro ea conjunctione; sin minus, poterit assumi tempus periodicum paulo majus, & iterum computari orbita, ac locus quartæ observationis in ea, tum, ut in falsa positione fit, fieri posset, ut differentia binorum locorum erutorum ex calculo ad differentiam loci prioris ab observato, ita differentia binorum temporum periodicorum, quæ assumpta sunt, ad differentiam prioris a vero.

328. Habita orbita jam correcta pro primæ illius conjunctionis momento, posset pro tempore conjunctionis sequentis, vel præcedentis haberi, ope tabulæ expositæ, correctio debita orbitæ, motus apsidum, & correctio loci ipsius Planetæ, ex qua tempus etiam conjunctionis & locus haberentur correctiora, quanquam locum & tempus conjunctionis satis est nosse veris proxima tantummodo, cum paulum mutata distantia a conjunctione, vel loco conjunctionis, correctiones datis deinde temporibus debitæ, & per quam exiguæ, nihil ad sensum mutentur. Tempus autem periodicum debitum Ellipsi respondenti huic no-

væ conjunctioni haberetur ex tempore primæ, & distantiis mediis binarum orbitarum ad eas pertinentium, cum, per num. 11, sint quadrata temporum periodicorum, ut cubi distantiarum mediarum in Ellipsibus descriptis vi tendente ad idem centrum virium, in ratione reciproca duplicata distantiarum, ut hic ponuntur describi illæ Ellipses, quæ nimirum sunt eæ, quas Planeta describeret, si in illo momento conjunctionis cessaret omnis vis perturbans.

329. Eodem pacto liceret progredi ad aliam immediate præcedentem, vel sequentem, & ita porro, quousque liberet. Et pro singulis conjunctionibus jam haberetur ipsarum tempus, locus verus Planetæ in ipsa conjunctione, distantia media, eccentricitas, locus Aphelii, tempus periodicum, ac in orbita cognita ex dato loco Aphelii, & loco vero momento conjunctionis, ac proinde anomalia vera, deduci posset anomalia media, nimirum haberentur ea omnia, quæ num. 324 requirebantur.

330. Patet, licere hoc pacto progredi ad conjunctiones quotcunque. Verum quoniam immensus esset labor singulis vicibus deducere conjunctionum loca alia ex aliis; posset semel computari tabula quædam, quæ conjunctionum per aliquot sæcula exhiberet velut radices. Et quidem quoniam conjunctiones Jovis, ac Saturni redeunt post 20 annos circiter, quo nimirum tempore Jupiter percurrit 20 circiter signa, Saturnus 8; pro singulis sæcu-

lis halis habentur 5 conjunctiones circiter. Quamobrem si secunda hæc tabula contineret 20 hujusmodi conjunctiones, ea satis esset pro 4 sæculis. Porro Astronomia diligentius excoli cæpta est vix duobus ab hinc sæculis. Quare si per tres, vel quatuor observationes determinarentur conjunctionis cujuspiam radices; decem præcedentes conjunctiones satis essent ad comparandam theoriam, cum omnibus observationibus, quas habemus post ipsam Astronomiæ restaurationem; nam in vetustioribus loca ipsa observata fere semper incerta sunt inter limites multo laxiores, quam sint ipsæ aberrationes a mutata gravitate inductæ; aliæ autem decem posteriores pro sequentibus binis sæculis inservirent.

331. Liceret autem post bina sæcula tabulam hanc secundam iterum producere, quantum liberet, & licet aliæ ex aliis conjunctionum radices deducantur; tamen cum in singulis approximatio haberi possit usque ad quoscumque limites, possent etiam post longam sæculorum seriem evitari errores. Posset enim, determinata semel utriusque orbita per tabulam primo computatam, & locis primo correctis, iterum tabula computari, idque quotlibuerit vicibus. Verum labor restituendorum calculorum, & immanis esset & irritus. Nam & exigui observationum errores inducunt in orbitam calculo erutam errores pariter exiguos, sed majores iis, quos theoria parit, qui etiam progressu temporis crescunt; & Cometarum, ac cæterorum Planetarum actio

turbationes novas inducit. Quamobrem satius esset post bina, vel quaterna sæcula per novas observationes, unam e novis radicibus definire.

332. Quoniam post ternas quasque conjunctiones, annorum intervallo circiter 60, binis Saturnus, quinis Jupiter conversionibus peractis, ferme eodem redeunt, & sexta conjunctio fit in loco paucis gradibus remoto a loco primæ; mutationes, quæ accident post ternas quasque conjunctiones erunt æquales quamproximè; unde liceret prospicere, quantæ mutationes post longam etiam sæculorum seriem haberi debeant.

333. Si formulæ numeri 157 integrarentur; liceret ex ipsis immediatè eruere tum mutationes orbitæ, tum loca ad data tempora, post utcunque longam annorum seriem. Verum, eæ ipsæ integrari non possunt, nisi pluribus contemptis, & ope serierum, in quibus pariter contemnuntur minores termini; ac proinde etiam illi errores post longum tempus excrescerent. Commodum autem computandi correctiones immediatè ex formula fere nullum esset saltem generaliter ad usus Astronomicos; cum adhuc ex ipsa formula tabulæ computandæ essent locis plurimis accommodatæ, & quidem labore multo majore, quam in hac theoria per arearum quadraturas fiat.

334. *Scholium* 3. Aphelia Jovis, & Saturni videntur in tabulis Astronomicis perpetuo progredi, nec ita parum; cum eorum motus in iisdem computetur respectu Principii

Arie-

Arietis, quod ipsum regreditur. Hujus regressu dempto, exiguus sane superest Apheliorum motus; superest tamen aliquis. Quamobrem post longam annorum seriem Aphelia ipsa habebunt distantiam a se invicem satis diversam ab ea, quam habent nunc, & quam in prima tabula computanda adhiberemus. Tum vero ea iterum computari posset eodem pacto. Sed quoniam aberrationes, quas tota alterius orbita producit in altero, sunt adeo exiguæ; tota prioris eccentricitas easdem parum admodum mutat; ac proinde nihil ad sensum eædem turbantur, si Aphelium ejusdem per plures etiam gradus loco moveatur.

335. *Scholium* 4. Huc usque orbitas consideravi, ut in eodem plano positas, nulla habita ratione inclinationis binorum planorum, quæ ita exigua est, ut nullum ad sensum discrimen proveniat inter mutationes, ac errores a gravitate mutua inductos in computanda Planetæ longitudine, quam solam huc usque consideravimus, si pro altera orbita substituatur ejus vestigium in alterius plano definitum per rectas eidem perpendiculares. Est enim e Cassinianis Tabulis pro anno 1752 longitudo nodi Saturni sig. 3: 22°: $2'$: $58''$, Jovis sig. 3: 7°: $50'$: $45''$. Quare differentia, sive distantia nodorum sig. 0: 14°: $12'$: $13''$. Inclinatio autem orbis Saturni ad Eclipticam 2°: $30'$: $36''$, orbis

F.41 orbis Jovis 1° : 19' : 30", sit Eccliptica BAMN : Orbita Jovis MDB, Saturni NDA adeoque binæ eiusmodi inclinationes DMN, DNB, & distantia nodorum MN. Invenietur ope Trigonometriæ sphæricæ angulus MDN, nimirum inclinatio binorum planorum 1° : 16' : 7". Quare rectæ ad alterum planum ab altero reductæ, ubi maximè ad illud inclinatur, nimirum 1° : 16' : 7" in positione perpendiculari ad lineam nodorum, aberrant a veris minus, quam una quarta millesima sui parte; aberrant enim excessu secantis ejus anguli supra radium. Extra autem eum casum plerumque ne decima quidem, aut centesima millesima sui parte a veritate aberrant.

336. Verum ab hujusmodi inclinatione orbitarum, & loco nodi pendet ipsorum Planetarum latitudo, ac vis illa perturbans hanc ipsam orbitarum inclinationem, hanc lineæ nodorum positionem perturbat. Eam igitur perturbationem jam oportet determinare, quod eadem methodo præstabo sequenti capite.

CAPUT VI.

De nodis & inclinatione orbitæ ad Eccliptic am.

Prop. XXVII. Probl.

Invenire motum momentaneum intersectionis planorum orbitarum Jovis, & Saturni ortam ex vi perturbante motum alterius ex ipsis.

337. Sit Sol in S, Planeta perturbans in I, perturbatus in P; intersectio planorum Jovis, & Saturni ST, directio motus Planetæ P in P sit PT, quæ tanget arcum PE Ellipseos, quam Planeta ibi describeret, si nulla vi turbaretur, sitque AEL tangens arcus ejusdem in E, quæ eidem intersectioni occurret alicubi in L, cui pariter occurret alicubi in K chorda PE producta, sitque ED parallela SP exprimens effectum gravitatis Planetæ P in Solem debitum tempusculo, quo describeretur arcus PE. F.42

338. Sumpta IQ versus S in plano orbitæ Planetæ I quarta continue proportionalis post SI, IP, erit per num. 190 PQ directio vis perturbantis. Sumpta autem PR versus S ad arbitrium, & RH parallela PQ, quæ sit ad RP, ut vis perturbans ad gravitatem in Solem, ductaque PH, quæ jacebit in plano SPQ, ac producta occurret alicubi rectæ SQ in O, exriment rectæ PR, RH, PH gravitatem Planetæ P in Solem, vim perturbantem Planetam P, & vim ex utraque compositam; ac proinde PHO erit directio vis totius deflectentis

tis Planetam P a recta PT ad arcum PB. Quamobrem jacebit ipse arcus in plano OPT, & ducta DB parallela OP usque ad arcum PB, ea exprimet effectum omnium virium detorquentium Planetam P a recta PT ad arcum ipsum PB debitum tempusculo, quo percurritur idem arcus, & quo sine vi perturbante describeretur arcus PE.

339. Hinc erit DE ad DB in data ratione PR ad PH. Quare, per num.84, tangens per B ducta concurret cum tangente ducta per E in eodem puncto A rectæ PT. Ipsa autem tangens AB jacens in eodem plano OPT cum arcu PB occurret alicubi in M rectæ OT. Si vero in B cessaret omnis vis perturbans, deberet describi Ellipsis jacens in plano tangentis BM, & Solis S. Quare nova interiectio hujus novi plani cum plano Planetæ I esset SM, & motus intersectionis momentaneus erit angulus LSM, cujus mensurà determinatà, habetur quæsitus motus. Q. E. F.

340. Coroll.1. *Recta* EB *exprimet effectum vis perturbatricis agentis directione illa* PQ, *prorsus ut in* fig.23, *recta* P*p per num.*97 *exprimit vim eandem. Jacebit autem* EB *in plano* PKQ, *ac producta incurret in rectam* QK *alicubi in* N, *eritque angulus* LAM *is, quo vis perturbans detorquet tangentem.*

341. Coroll.2. *Quoniam rectæ* AL, AM, EN *jacent in eodem plano trianguli* AEB; *jacebunt puncta* NML *in eadem recta, nimirum in intersectione ejusdem plani cum plano orbitæ Planetæ* L. *Erit autem sin.*ALM, *sive sin.*ALN.

sin.

$fin.\,LAM :: AM . ML = \frac{fin.\,LAM}{fin.\,ALN} \times AM$,

& $SM . ML = \frac{fin.\,LAM}{fin.\,ALN} \times AM :: fin.\,SLM$,

sive $fin.\,SLN . fin.\,MSL = \frac{AM}{SM} \times \frac{fin.\,SLN}{fin.\,ALN} \times fin.\,LAM$.

342. Coroll. 3. *Cum ob arcus* PB, PE *infinitesimos*, TPK, LAT, MAT *infinitesimi sint, anguli autem* PTK, PTM *finiti; erunt* TK, TL, TM *infinitesimæ, ac ob rectas* MN, KQ *finitas, anguli quoque* LNK, KQT *erunt infinitesimi. Quare angulus* ALS *æquipollebit angulo* ATS, *sive* PTS; *angulus* ALN *angulo* AKN, *& hic angulo* PTQ, *rectæ vero* SM, SL, *& rectæ* AM, AT, PT *etiam ipsæ inter se æquipollebunt. Hisce igitur substitutis, erit sinus anguli* $LSM = \frac{PT}{ST} \times \frac{fin.\,STQ}{fin.\,PTQ} \times fin.\,LAM$.

343. Coroll. 4. *Si manentibus punctis* ISQTP *in* fig. 43, *iisdem, ac in* fig. 42, *occurrat recta* ST *orbitæ Planetæ* P *in* N, *&* n, *qui erunt nodi orbitæ Planetæ* P *cum plano orbitæ Planetæ* I, *& sint* a, A *apsides*, C *centrum*, F *focus superior orbitæ Planetæ* P; *angulus ille* LAM *figuræ* 42 *inclinatio tangentis orta ex vi perturbante erit, per num.* 137, $= \frac{fin.\,A}{fin.\,SPT} \times \frac{AC}{PF} \times \frac{u}{g} \times dz$, *ubi per num.* 103, A *est angulus* QPT, *quem continet directio vis perturbantis* F. 42 43

bantis PQ *cum tangente* PT. *Quare si substituatur in hoc valore* sin.QPT *pro* sin.A, *& hic valor pro sinu anguli* LAM *in formula superioris numeri, ac per num.235* $\frac{\text{sin.PST}}{\text{sin.SPT}}$ *pro* $\frac{\text{PT}}{\text{ST}}$, *erit motus momentaneus lineæ nodorum* nN =

F.43 $$\frac{\text{sin.QPT} \times \text{sin.PST} \times \text{sin.STQ}}{(\text{sin.SPT})^2 \times \text{sin.PTQ}} \times \frac{\text{AC}}{\text{PF}} \times \frac{u}{g} \times dz.$$

344. Coroll.5. *Motus lineæ nodorum fiet in consequentia, vel in antecedentia; prout punctum* Q *jacuerit respectu lineæ nodorum* nN *ad easdem partes puncti* P, *vel ad oppositas.*

345. Nam in *fig.42* si Planeta P tendat ad eam partem, ad quam tangens PT incidit in lineam nodorum, ut figura exhibet; jacebit semper punctum A inter P & T, & rectæ PEK, AEL a PT verrsus S. Quare si punctum Q jacuerit ad partes oppositas punctorum P, respectu lineæ ST, adeoque & O, quod debet jacere in recta SQ; jacebit punctum N, adeoque & M pariter ad partes oppositas punctorum P, respectu rectæ ejusdem ST, ac motus LSM fiet recedendo ab ipsa ST ad partes oppositas iis, ex quibus Planeta P accedit, conspirante utriusque motu. Ac proinde motus rectæ SM fiet in consequentia. Contra vero si Q, & O jacerent ad partes oppositas rectæ ST, nimirum ad easdem cum P, jaceret pariter & recta TO, & punctum M, ac recta SM.

346. Quod

346. Quod si Planeta P recedat a recta ST, punctum A cadet ad partes oppositas; & proinde puncta KL abibunt ultra T. Quare & punctum M abibit in rectam OT productam, jacente SM respectu rectæ ST ad partes oppositas puncti Q & O. Quare donec punctum O jacuerit ad partes oppositas punctorum P*p*, jacebit SM ab ST versus P*p*, & linea nodorum adhuc perget moveri in eam plagam, in quam tum movebitur Planeta P; puncto autem O jacente ad partes oppositas, jacebit SM ad partes oppositas P, & recedet a recta ST in plagam oppositam ei, in quam recedet ipse Planeta P. Q. E. D.

/E

347. *Scholium* 1. Idem exhibet formula numeri 345, in qua sinus SPT, AC, PF, *u*, *g*, valorem non mutant: sinus QPT, & sinus PTQ, valoris sui signum mutant simul, puncto nimirum Q abeunte ultra rectam PT; ac proinde formulæ valorem mutare non possunt. Pendet igitur ejus valor a valore sinuum PST, & STQ, adeoque si altera, e rectis SP, TQ transeat ultra rectam ST, mutabitur signum totius formulæ; si utraque, manebit idem. Porro formula eruta est ex figura, in qua puncta P, & Q jacent ad partes oppositas respectu rectæ ST, & motus nodi fit in consequentia; & si alterum ex iis punctis transiliat eam rectam, jam utrumque jacebit ad eandem partem; si utrumque transiliat, jacebunt ad partes oppositas. Igitur, quoties ea jacebunt ad partes oppositas; motus fiet in con-

consequentia; si jaceant ad easdem; fiet in antecedentia, ut in corollario 5 demonstratum est.

348. *Scholium* 2. Valores formulæ corollarii 4 facile inveniuntur vel methodo jam tradita, vel simili. Valor $\frac{u}{g}$ habetur per num. ~~191~~ 177, ~~192~~ 178; AC, PF, sin. SPT, sin. QPT, sive sin. A, per num. 201, & sequentes, PST est distantia ab eo nodo, versus quem tangens concurrit cum linea nodorum, qui invenitur ex loco Planetæ P dato, & loco nodi, in quo orbitæ ipsæ se mutuo secant, qui habetur in *fig*. 41 ex resolutione trianguli sphærici MDN indicata num. 335. Invenitur enim MD = $29^\circ : 13' : 7''$, qui arcus si addatur longitudini nodi M orbitæ Jovis signorum $3 : 7^\circ : 50' : 45''$ erit locus D in orbita Jovis ipsius fig. 41: $7^\circ : 3' : 52''$, & eodem modo ex arcu DN, & longitudine nodi N Saturni inveniretur locus nodi D in orbita Saturni; angulus STQ invenitur in triangulo TSQ, in quo SQ datur ob SI & IQ datas per num. 203, & ST invenitur in triangulo SPT ex data SP, & angulis ad P, & S. Demum angulus PTQ invenitur, invento STQ, & in triangulo SPT, invento STP.

PROP.

PROP. XXVIII.

Invenire mutationem momentaneam inclinationis planorum orbitæ Jovis, & Saturni ortam ex vi perturbante motum alterius ex ipsis.

349. Concipiatur in *fig.* 42 recta A*a* perpendicularis plano orbitæ Planetæ I, & per ipsam bina plana AG*a*, A*ga* perpendicularia binis rectis ST, SM. Erunt AG*a*, A*ga* inclinationes binorum planorum orbitæ Planetæ P supra planum orbitæ Planetæ I. F. 42

350. Occurrat recta *ag* rectæ SG in V, ducaturque AV, & rectæ *a*V, *a*G different a se invicem per rectam infinitesimam respectu ipsius VG, adeoque etiam respectu V*g*. Quamobrem angulus VA*g*, qui est differentia angulorum *ag*A, *a*VA, discrepabit a differentia angulorum *ag*A, *a*GA per angulum infinitesimum respectu sui ipsius; ac proinde ipse VA*g* sumi poterit pro mutatione momentanea inclinationis orbitarum.

351. Dicatur jam inclinatio orbitarum B, & erit in primis, ut 1 ad cos. AST, sive cos. PST, ita AS, sive PS ad SV $=$ cos. PST $\times$ PS. Deinde ut 1 ad sin. VS*g* $=$ per num. 343

$$\frac{\text{sin. QPT} \times \text{sin. PST} \times \text{sin. STQ}}{(\text{sin. SPT})^2 \times \text{sin. PTQ}} \times \frac{\text{AC}}{\text{PF}} \times \frac{u}{g} \times dz,$$

ita SV $=$ cos. PST $\times$ PS ad V*g* $=$

$$\frac{\text{sin. QPT} \times \text{sin. PST} \times \text{cos. PST} \times \text{sin. STQ}}{(\text{sin. SPT})^2 \times \text{sin. PTQ}} \times \frac{\text{AC} \times \text{PS}}{\text{PF}} \times \frac{u}{g} dz.$$

Præterea ut 1 ad sin. AST, sive

 sin.

fin.PST, ita SA, five SP ad AG $=$ fin. PST $\times$ SP. Demum ut AV, five AG $=$ fin. PST$\times$SP ad gV, ita fin. AgV $=$ fin. B ad fin. VAg $= \frac{\text{fin. B} \times gV}{\text{fin. PST} \times \text{SP}}$

$$= \frac{\text{fin. B} \times \text{fin. QPT} \times \text{cof. PST} \times \text{fin. STQ}}{(\text{fin. SPT})^2 \times \text{fin. PTQ}} \times$$

$\frac{AC}{PF} \times \frac{n}{g} \times dz$, quæ erit quæfitæ mutationis menfura Q. E. F.

352. Coroll. 1. *Angulus inclinationis decrefcet, vel crefcet; prout motus nodi propioris Planetæ* P *fiet verfus ipfum, vel ad partes oppofitas.*

353. Nam in *fig.* 42 fi angulus aSg fuerit major, quam aSV, erit ag major, quam aG, adeoque angulus aAg major, quam aAG, & agA minor, quam aGA. Porro perpendiculum AG cadit ad partes anguli acuti rectæ PS cum linea nodorum, five in *fig.* 43 cum linea nN, nimirum verfus nodum, a quo Planeta diftat minus, quam uno quadrante, five ad partes nodi propioris. Igitur fi nodus propior movetur verfus locum Planetæ P, angulus inclinationis decrefcit; contra crefcit. Q. E. D.

354. Coroll. 2. *In primo, & tertio quadrante argumenti latitudinis Planetæ perturbati ab orbita Planetæ perturbantis, fi nodi progrediuntur; angulus inclinationis decrefcet; fi regrediuntur, crefcet: contra in fecundo, & quarto.*

355. Nam in primo, & tertio Planeta recedit a nodo propiore. Quare fi nodi progrediuntur, nodus propior movetur verfus

locum

locum Planetæ, ac per *Cor.* 1. angulus inclinationis crescit; si nodi regrediuntur, nodus propior movetur ad partes oppositas loco Planetæ, & angulus inclinatiouis decrescit. Contrarium vero accidit in secundo & quarto quadrante.

356. *Scholium* 1. Quod in hisce Corollariis demonstratum est, eruitur etiam ex formula propositionis, in qua sinus SPT, AC, PF, $\frac{n}{g}$ signum non mutant, sinus PTQ, & QPT mutant, simul abeunte Q ultra ST, signum sinus B mutatur in transitu puncti P per lineam nodorum *n*N, in quo transitu angulus inclinationis abit ad partes oppositas, ac proinde mutatur, ubi mutatur signum, sinus PST, a quo, & a signo sinus STQ pendet progressus, vel regressus nodorum, per num. 344. Demum cosinus anguli PST signum mutat in transitu a primo quadrante ad secundum, & a tertio ad quartum. Unde patet mutationem valoris formulæ fieri in iis locis, in quibus ipsa corollaria demonstrant debere fieri.

357. *Scholium* 2. Valores formulæ numeri 351, habentur facile. Cætera nimirum, ut numero 348; angulus autem B est inclinatio binarum orbitarum, quæ datur, per num. 335.

Prop. XXIX.

Invenire mutationes lineæ nodorum, & inclinationis planorum debitas dato cuilibet tempori finito.

358. Invenientur eodem modo, quo reliqua, per quadraturas arearum methodo exposita Prop. 23; & quidem haberi potest pro constanti inclinatio, & locus nodorum, contempta mutatione illa exigua, quam vis perturbans inducit, dum utriusque mutatio ipsa computatur; vel etiam, si libeat, corrigi poterit utrunque per calculum jam factum, dum calculus ipse producitur, methodo exposita num. 297, immo & calculus restitui, quotiescunque opus fuerit methodo exposita num. 314. Q. E. F.

Prop. XXX.

Invenire motum nodorum, per planum Eccliptica & mutationem inclinationis ad idem planum Eccliptica Planetæ utriuslibet, debitum dato cuilibet tempori finito.

F.41 359. Sit in *fig.* 41. ADN orbita Planetæ, cujus mutationes quæruntur, D nodus cum orbita BDM Planetæ alterius, N nodus cum Eccliptica BAMN. Habetur pro initio dati temporis angulus M inclinatio orbitæ Planetæ perturbantis ad Eccliptícam, angulus MDN inclinatio binarum orbitarum, & MD distantia nodorum orbitæ ejusdem Planetæ perturban-

tis

tis cum orbita Planetæ perturbati & Ecclipticæ; ut & MN, ac angulus DNB, quæ ipsis respondent. Habetur per prop. præcedentem etiam motus D*d* nodi binarum orbitarum per orbitam Planetæ perturbantis, & mutatio inclinationis, adeoque arcus M*d*, & angulus M*dn*. Ex iis, & ex angulo M, computetur arcus M*n*, & angulus *d*NB, & horum differentia a prioribus exhibebit motum, & mutationem debitam dato tempori finito. Q. E. F.

360. *Scholium* 1. Posset immediate ex mutatione exigua inclinationis mutuæ, & motu nodorum per alteram orbitam, inveniri mutatio inclinationis ad Eccliplicam, & motus nodorum per eam. Sed Trianguli sphærici resolutio simplicior est, & expeditior.

361. *Scholium* 2. Dum orbita ADN mutatur, mutatur etiam orbita BDM: Sed ejus motus negligi poterit, dum quæritur mutatio, quæ in orbitam ADN inducitur; quæ nimirum ad sensum mutari non potest, mutata positione ipsarum respectiva, per mutationem a vi perturbante inductam; nam ea admodum exigua deberet esse respectu totius inclinationis orbitarum, qua evanescente, evanescit penitus omnis motus orbitæ utriuslibet.

362. Sed, si libeat, potest haberi ratio mutationis ejusdem, computando identidem mutationes utriusque orbitæ, & ad Eccliplicam reducendo mutationes ipsas.

363. *Scholium* 3. Cum interea & planum Eccliplicæ moveatur ob actionem Planetarum omnium, & Cometarum, alias etiam habebit

mutationes tam positio nodorum, quam inclinatio orbitæ, sed hic eas tantummodo mutationes quærimus, quas sibi mutuo inducunt Saturnus, & Jupiter.

364. *Scholium* 4. Mutationes hujusmodi computari debent, & inseri tabulæ primæ expositæ a num. 322 eodem modo, quo mutationes distantiæ mediæ, eccentricitatis, ac loci Aphelii, ut & radices pro conjunctionibus tabulæ secundæ, computando primum positiones nodorum, & inclinationes per observationes non correctas, tum corrigendo observationes illas per mutationes inde computatas, ac per observationes jam correctas eruendo radicem primam correctam, tum per eam, & mutationes ipsas radices reliquas.

365. *Scholium* 5. Posset etiam investigari integratio formularum numeri 343, & 351, methodo tradita a num. 234. Sed juxta num. 295, multo simplicius per arearum computationes idem præstatur, multo ad communem captum accommodatius, & vero etiam, si quis calculum restituere velit pluribus vicibus, multo usque ad limites quoscunque accuratius.

Scholium generale.

366. Hoc pacto tradita est theoria Jovis, & Saturni ejusmodi, per quam explicari omnino possunt, & ultra quoscunque limites determinari errores illi, quos hi Planetæ ipsi sibi mutuo videntur inducere potissimum in conjunctionibus. Hisce erroribus correctis, adhuc tabulæ non possunt penitus congruere cum

cum observationibus, cum adhuc supersint errores, quos reliqui Planetæ, & Cometæ inducunt, & mutationes, quæ in Ecliptica, & Æquatore nostro accidunt. Verum ista omnia multo minora sunt.

367. Dissensus aliquis observationum cum theoria oriri etiam poterit ex massa Planetæ perturbantis non satis accuratè determinata juxta num. 173. Sunt enim aberrationes omnes cæteris paribus, ut valor ille $\frac{u}{g}$, qui est ut massa Planetæ ejusdem relata ad massam Solis. Porro posita massa Solis 10000, massa Jovis est Nevvtono 9. 37, qua & Eulerus nuper utendum sibi duxit, dum eandem ex Cassini elementis invenimus 11. 121; ac proinde fere quinta sui parte discrepant. Quamobrem aberrationes omnes, quas altera ex iis diversis massis gignit, ab iis, quas gignit altera, quinta fere sui parte discrepant.

368. Cum tamen eædem aberrationes proportionales sint massæ ipsi; si tabula prima computetur ex assumpta massa quavis, & massa ipsa deinde deprehendatur correctione indigens, satis erit aberrationes ipsas erutas e tabula corrigere in eadem ratione. Quin immo massa ipsa Planetæ perturbantis determinari poterit accuratius, comparando ejusmodi aberrationes calculo erutas cum observationibus sequenti methodo. Eruantur ex observationibus bina tempora periodica Planetæ perturbati, quæ inæqualia deprehen-

duntur

duntur ita, ut in Saturno inæqualitas ipsa plurium dierum quandoque sit. Eruantur e prima tabula methodo numeri 311 correctiones debitæ intervallis illis binis temporum periodicorum respondentes massæ assumptæ, & mutatio axis transversi respondens motui vero inter initia binorum illorum temporum periodicorum, unde cum sint quadrata temporum periodicorum in motibus non perturbatis, ut cubi distantiarum mediarum; invenietur præterea differentia temporis periodici secundi a primo debita mutationi axis; erit enim dimidium tempus, quod hic satis est nosse vero proximum, ad mutationem suam, ut triens axis transversi ad suam. Colligatur effectus illarum correctionum temporis, & hujus mutationis in ordine ad producendum, vel contrahendum tempus periodicum; & si hic effectus æquetur differentiæ observatæ inter illa bina tempora periodica, massa Planetæ perturbantis erit rite assumpta; sin minus mutanda erit ipsa massa in ratione effectus calculo collecti ad observatum. Mutata enim hoc pacto massa, habebuntur correctiones ejusmodi, quæ inæqualitati observatæ satisfacient.

369. Et hæc quidem methodus admodum accuratè exhiberet massam Planetæ perturbantis, potissimum Jovis, si Planeta perturbatus nullas alias inæqualitates haberet. Verum cum & Cometæ singuli, & alii Planetæ suas itidem mutationes inducant, res erit nonnihil periculosa massam hoc pacto determinare, nisi forte plu-

te plurima hujusmodi periodica tempora assumantur, & per ea corrigatur massa, ut inter plures determinationes intermedia quædam seligi possit. Quamobrem multo satius videtur in Jovis satellites multo accuratius inquirere, quam fortasse hactenus sit præstitum, & ante quam labor non exiguus sane calculandarum tabularum suscipiatur, massam Planetæ perturbantis definire. Tabulas enim computare, quæ deinde corrigendæ sint, videtur labor plus æquo improbus, cum hæc alia suppetat ratio rei gerendæ felicius.

370. Accedit autem, quod licet prima tabula computata ex hypothesi cujuscunque massæ, ubi vera massa detecta fuerit, corrigi possit, mutando correctiones omnes in ratione data; tabula secunda radicum corrigi non posset, sed magnitudine correctionum mutata, jam orbita iterum computanda esset, ac primus labor cederet prorsus irritus.

371. Si Halleyanæ tabulæ ad meas pervenissent manus, in iis fortasse aliquid, quod ad Jovialis massæ determinationem per Satellitum motus pertinet, invenissem, quod scrupulum amoveret. At eas frustra diu quæsivi, nec antequam hæc dissertatio transmittenda fuit, uspiam invenire licuit. Hinc satius duxi theoriam ipsam quamevidentissimè licuit demonstrare, indicare calculos omnes, & eo rem redigere, ut Arithmeticam puram, ac tabularum fabricatorem desideret, & massæ Jovialis determinationem accuratiorem, vel tutiorem, quod Academia per se ipsa præstare fa-

re facile poterit. Et quidem, si labores hosce meos praemio non indignos Academia ipsa censuerit, libens sane laborem ipsum computandarum tabularum, & curam summam colligendae Jovis massae tam ex meis, quam ex aliorum observationibus, corrigendaeque methodo etiam indicatae suscipiam.

372. Illud unum hic demum notandum duco, quod sponte etiam incurrit in oculos, plurima hic contineri theoremata, quae ad Lunarem etiam theoriam viam sternunt, sed ea investigatio ad rem praesentem non pertinet.

FINIS.

		ERRATA	CORRIGE.
Pag. 6	lin. 3	inducent	inducet
7	11	Aphelio	Perihelio
11	16	ipsis	pro ipsis
16	7	matationem	mutationem
	27	verum	varium
17	10	quanto	quarto
	15	vivium	virium
19	4	perturbare	perturbans
36	29	digitum *a*	digitum 1.
37	6	$1 \times 181 \times u$	$4 \times 181 \times u$
38	10	velooitas	velocitas
39	28	pariter	pariter
40	17	projectionis	virium
45	32	curca	curva
48	15	SP	*Sp*
58	22	Q. E. F.	Q. E. I.
60	23	PN*p*	PK*p*
	28	GN	OK
94	15	semediametri	semidiametri
127	4	areum	arcum
147	20	in margine	Fig. 37
150	30	inventes	inventos
151	3	in margine	Fig. 38
	20	comparari	computari
	29	reum	arcum
155	16	in margine	Fig. 40
159	25	haberi	habere
171	1	Caput V.	Caput VI.
174	17)		
	20)	P*p*	PE
175	8)		
176	7	191, 192	177, 178
	17	fig. 4	fig. 41

[illegible]