Die Anwendung

der

Trigonometrie

auf

Arithmetik und Algebra.

Zum Gebrauche

für angehende Mathematiker, Techniker und solche Schüler, welche sich durch Selbstunterricht weiter ausbilden wollen.

Von

Dr. Wilh. Berkhan.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Vorerinnerung.

Es war längst bekannt, dass man von den trigonometrischen, oder eigentlich goniometrischen Functionen einen bloss arithmetischen Gebrauch bei der Auflösung einer Aufgabe machen und bestimmte Zahlenwerthe mit Vortheil berechnen kann, wo von Winkeln u. s. w. keine Rede ist.

Selbst die sog. goniometrische Reduction der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades hat sich durch ihre Vorzüge einen Namen erworben und darf in einem guten Lehrbuche der Algebra jetzt nicht mehr fehlen.

Diese trigonometrischen Behandlungen stehen aber noch mehr oder weniger vereinzelt da und sind mancher Erweiterung fähig.

Der Verf. hat es unternommen das Ganze zu ordnen und so viel möglich in ein System zu bringen. Auch ist er nicht so ängstlich, wie manche Mathematiker, welche an dem Principe festhalten, alles Fremdartige aus der Analysis zu entfernen, indem sie sagen: die Analysis bedarf der geometrischen und anderer Hülfen nicht und muss ihre Lehren rein aus ihr selbst entwickeln.

Die erlernten Lehren der Trigonometrie incl. der wichtigsten goniometrischen Formeln müssen, da sie dem jungen Mathematiker und Polytechniker wegen ihrer vielseitigen Anwendung unumgänglich nothwendig sind, auf das Vielseitigste eingeübt werden, wozu die vorliegende Schrift hinreichenden Stoff darbietet.

Es sind fast alle besondern Beispiele im Buche nach den *Vega*'schen Tafeln berechnet, weil der Verf. voraussetzen musste dass wol jeder junge Mathematiker mit diesen Tafeln versehen ist.

Endlich ist noch zu bemerken, dass die so häufig vorkommenden Citate, wie z. B. Form. No. 20 u. s. w., sich auf die am Schlusse des Buches befindliche trigonometrische Formeltafel S. 127 u. f. beziehen.

Inhalt.

Viertes Capitel.

Trigonometrische Auflösung der cubischen Gleichungen.

Fünftes Capitel.

Anwendung der trigonometrischen Functionen bei der Auflösung biquadratischer Gleichungen.

1. Capitel.

Trigonometrische Umformung algebraischer Ausdrücke ersten und zweiten Grades.

§. 1. Setzt man den Halbmesser oder Sinus totus $= 1$, so ist sowohl der Sinus als auch der Cosinus irgend eines Winkels $\varphi > 0$ und $< 90^0$ jederzeit ein ächter Bruch, und da der Uebergang des Sinus oder Cosinus von 0 bis 1 bei wachsendem Winkel von $0 — 90^0$, ein continuirlicher ist: so kann jeder ächte Bruch als Sinus, oder Cosinus irgend eines Winkels $= x$ betrachtet werden.

§. 2. Liegt eine Grösse zwischen 0 und -1, bildet also ein Glied der Reihe negativer ächter Brüche: so kann dieselbe als der Cosinus irgend eines stumpfen Winkels φ (wo also $\varphi > 90^0$ und $< 180^0$) angesehen werden. Es kann aber auch jeder negative ächte Bruch Sinus eines Winkels sein, der innerhalb der Grenzen 180^0 und 270^0, sowie zwischen 270 und 360^0 liegt.

§. 3. Jede Grösse zwischen den Grenzen 0 und ∞ darf als Tangente eines Winkels angesehen werden. Ebenso kann sie auch als Secante oder Cosecante irgend eines Winkels gelten, sobald dieselbe zwischen den Grenzen 1 und ∞ liegt.

Endlich ist jede negative oder positive Grösse zwischen 0 und $\mp \infty$ gleich der Tangente oder Cotangente eines Winkels $= \varphi$ anzusetzen.

Die wichtigsten Beziehungen, welche zwischen den verschiedenen trigonometrischen Functionen desselben Winkels oder Bogens stattfinden, werden hier als bekannt vorausgesetzt.

§. 4. Da jedes Binom, wie $a \mp b$, in ein Product umgewandelt werden kann, nämlich in $a\left(1 \mp \frac{b}{a}\right)$, so kann, wenn der Bruch

$\frac{b}{a}$ ein ächter ist, derselbe als Sinus oder Cosinus irgend eines Winkels betrachtet werden, wo also $\frac{b}{a}$ als eine trigonometrische Function auftritt. Ist $\frac{b}{a}$ ein unächter Bruch, so kann für denselben die Tangente oder Cotangente irgend eines Winkels φ gesetzt werden. Diesen Winkel pflegt man den Hülfswinkel zu nennen und sein Gradmass lässt sich aus den trigonometrischen Tafeln bestimmen.

Ein Hauptziel ist bei der Anwendung der trigonometrischen Functionen, arithmetische Ausdrücke zur logarithmischen Rechnung umzuformen, welches an folgenden Beispielen ersichtlich wird.

Es sei die gegebene Gleichung:

$$1.\quad x = a + b.$$

Man setze $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi^2$, also $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Dann ist $x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a(1 + \operatorname{tg}\varphi^2) = a\sec\varphi^2$, oder, da $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$, so hat man

$$x = \frac{a}{\cos\varphi^2}.$$

Anders, für $x = a + b$ setze man, wenn $b < a$, $\frac{b}{a} = \cos\varphi$; so ist $x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a(1 + \cos\varphi)$. Da nun $1 + \cos\varphi = 2\cos\frac{1}{2}\varphi^2$ (Form. No. 60), so folgt: $x = 2a\cos\frac{1}{2}\varphi^2$.

Wenn in 1. $x = a + b$ gesetzt wird $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, so entsteht $x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a(1 + \operatorname{tg}\varphi)$. Nun ist nach No. 69 $\operatorname{tg}45^0 + \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin(45^0 + \varphi)}{\cos 45^0 \cos\varphi}$ und, da $2\cos 45^{0^2} = 1$, also $\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oder $\frac{1}{\cos 45^0} = \sqrt{2}$, so erhält man

$$x = \frac{a\sqrt{2}\,.\sin(45^0 + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

§. 5. Es sei $x = a - b$, oder $a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$, wobei $b < a$. Wird $\frac{b}{a} = \cos\varphi^2$ gesetzt, so erhält man $x = a(1 - \cos\varphi^2) = a\sin\varphi^2$.

§. 6. Es sei $x = a + b + c = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) + c.$

Man nehme $\frac{b}{a} = \cos\varphi$, so ist

$$x = a(1 + \cos\varphi) + c = 2a\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 + c.$$

Nun setze man $\frac{c}{2a\cos\frac{1}{2}\varphi^2} = \cos\omega$, wenn $2a\cos\frac{1}{2}\varphi$ die absolut grössere Zahl, so ist $\left(1 + \frac{c}{2a\cos\frac{1}{2}\omega^2}\right) = (1 + \cos\omega)$, folglich, da $1 + \cos\omega = 2\cos\frac{1}{2}\omega^2$ (No. 60): so hat man

$$\begin{aligned} x &= \left(1 + \frac{c}{2a\cos\frac{1}{2}\varphi^2}\right).2a\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 \\ &= (1 + \cos\omega).2a\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 \\ &= 2\cos\tfrac{1}{2}\omega^2.2a\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 \\ &= 4a\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2\cos\tfrac{1}{2}\omega^2. \end{aligned}$$

Ist dagegen c die absolut grössere Zahl, so setze man in

$$x = 2a\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 + c = c\left(1 + \frac{2a\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{c}\right)$$

die Grösse $\frac{2a\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{c} = \cos\omega$: dann wird

$$x = c(1 + \cos\omega) = 2c\cos\tfrac{1}{2}\omega^2.$$

§. 7. Es sei $x = \frac{a - b}{a + b}$.

Man setze $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi^2$; dann erhält man

$$x = \left(\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}\right) = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}\varphi^2}{1 + \operatorname{tg}\varphi^2}\right).$$

Nun ist $\frac{1 - \operatorname{tg}\varphi^2}{1 + \operatorname{tg}\varphi^2} = \cos 2\varphi$. (Form. No. 104.) Mithin ist

$$x = \cos 2\varphi.$$

Setzt man dagegen $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, so wird

$$x = \left(\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}\right) = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi}\right).$$

Da nun $\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}=\operatorname{tg}(45^0-\varphi)$ *), so erhält man

$$x=\operatorname{tg}(45^0-\varphi).$$

§. 8. Es sei gegeben $x^2=a+b$, oder

$$x=\sqrt{(a+b)}=\sqrt{a\left(1+\frac{b}{a}\right)}.$$

Man setze $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi^2$, so entsteht:

$$x=\sqrt{a}(1+\operatorname{tg}\varphi^2)=\sqrt{a}\,.\,\sqrt{(1+\operatorname{tg}\varphi^2)},$$

folglich, da $\sqrt{(1+\operatorname{tg}\varphi^2)}=\sec\varphi=\frac{1}{\cos\varphi}$, so wird $x=\frac{\sqrt{a}}{\cos\varphi}$.

§. 9. Es sei $x=\sqrt{(a-b)}=\sqrt{\left(1-\frac{b}{a}\right)}$.

Man setze $\frac{b}{a}=\cos\varphi^2$. Dann wird:

$$x=\sqrt{a}.\sqrt{(1-\cos\varphi^2)}=\sin\varphi\,.\,\sqrt{a}.$$

§. 10. Es sei $x=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\sqrt{a}\sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}}$.

Man setze $\frac{b}{a}=\cos\varphi$; dann erhält man

$x=\sqrt{a}\,.\,\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$. Nun ist aber (Form. No. 61):

$\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$; daher ist $x=\sqrt{a}\,.\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$.

§. 11. Wenn $x=n\sqrt{(a+b)}$, also auch

$x=n\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)}\sqrt{a}$ und man setzt

$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi^2$, so wird $x=n\sqrt{a}\sqrt{(1+\operatorname{tg}\varphi^2)}=n\sqrt{a}\,.\sec\varphi=\frac{n\sqrt{a}}{\cos\varphi}$.

Wenn $x=n\sqrt{(a-b)}=n\sqrt{a}\sqrt{\left(1-\frac{b}{a}\right)}$.

Nimmt man $\frac{b}{a}=\cos\varphi^2$, so wird:

$$x=n\sqrt{a}\sqrt{(1-\cos\varphi^2)}=n\sqrt{a}\,.\sin\varphi.$$

---

*) Weil $\frac{a-b}{a+b}=\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}$ und $\operatorname{tg}(45^0-\varphi)=\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}45^0\operatorname{tg}\varphi}$ $=\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}$, indem $\operatorname{tg}45^0=1$ ist. (Form. No. 242.)

§. 12. Es sei, wie §. 6, das Trinom $x = a + b + c$ umzuformen, so kann man demselben die Form $(a+b)\left(1 + \frac{c}{a+b}\right)$ geben. Setzt man nun $\frac{c}{a+b} = \operatorname{tg}\varphi^2$ (also $\log c - \log(a+b) = \log \operatorname{tg}\varphi^2$), so ist $x = (a+b)(1 + \operatorname{tg}\varphi^2) = (a+b)\sec\varphi^2$

$$= \frac{a+b}{\cos\varphi^2}.$$

§. 13. Aus der Annahme $\frac{c}{a+b} = \operatorname{tg}\varphi$ folgt $a + b = \frac{c}{\operatorname{tg}\varphi}$ $= \frac{c\cos\varphi}{\sin\varphi}$; daher ist $1 + \frac{c}{a+b} = 1 + \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi}$. Multiplicirt man diese Gleichung mit $a + b = \frac{c\cos\varphi}{\sin\varphi}$, so kommt $x = a + b + c = \frac{c(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sin\varphi}$. Weil aber nach Form. No. 215 $\cos\varphi + \sin\varphi = \sin(45^0 + \varphi)\sqrt{2}$; so ist

$$a + b + c = \frac{c\sin(45^0 + \varphi)\sqrt{2}}{\sin\varphi}.$$

§. 14. Sei gegeben: $\log x = \log\sqrt{(n+m)}$, so ist $\log x = \log\sqrt{n\left(1 + \frac{m}{n}\right)}$. Setzt man hier $\frac{m}{n} = \operatorname{tg}\varphi^2$, so entsteht

$$\begin{aligned} \log x &= \log\sqrt{n(1 + \operatorname{tg}\varphi^2)} = \log\sqrt{n}\sec\varphi^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\log n + \log\sec\varphi \\ &= \tfrac{1}{2}\log n - \log\cos\varphi. \end{aligned}$$

Für $\log x = \log\sqrt{(n-m)}$ hat man $\log\sqrt{n\left(1 - \frac{m}{n}\right)}$. Wird nun $\frac{m}{n} = \sin\varphi^2$ gesetzt, so ist $\log x = \log\sqrt{n(1 - \sin\varphi^2)} = \log\sqrt{n}\cos\varphi^2 = \tfrac{1}{2}\log n + \log\cos\varphi$.

§. 15. **Berchnung von Beispielen.**

No. 1. (*Meier Hirsch* p. 79. No. 26.) Gesucht wird x aus der Gleichung $x = \sqrt[8]{21 + \sqrt[6]{19}}$. Es ist nun $x = \sqrt[8]{21\left(1 + \frac{\sqrt[6]{19}}{21}\right)}$. Man setze $\frac{\sqrt[6]{19}}{21} = \operatorname{tg}\varphi^2$, so wird

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[8]{21(1 + \operatorname{tg}\varphi^2)} = \sqrt[8]{21\sec\varphi^2} \\ &= \sqrt[8]{\frac{21}{\cos\varphi^2}} = \sqrt[4]{\sqrt{\frac{21}{\cos\varphi^2}}} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{21}}{\cos\varphi}}. \end{aligned}$$

Folglich
$$\log x = \frac{\log \sqrt{21} - \log \cos \varphi}{4}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} \log 21 - \log \cos \varphi}{4}.$$

Mit Hülfe der trig. Tafeln bestimme man aus $\operatorname{tg} \varphi^2 = \frac{\sqrt[6]{19}}{21}$, oder $\log \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}(\frac{1}{6} \log 19 - \log 21)$ so genau als möglich den Hülfswinkel φ.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Es ist} & \log 19 & = & 1{,}2787536 \\
 & & & {}^{6)}\,0{,}2131256 \\
 & & & {}^{+2} \qquad\qquad {}^{-2} \\
 & -\log 21 & = & 1{,}3222193 \\
 & & & 0{,}8909063 - 2 \\
 & & & {}^{2)}\,0{,}4454531 - 1, \text{ oder} \\
 & \log \operatorname{tg} \varphi & = & 9{,}4454531 - 10 \\
\text{Es entspricht:} & 15^0\, 35' & = & \ldots\ldots 4352 \\
 & & & 81{,}34)\, 179\, (2{,}2'', \\
\text{folglich ist} & \varphi & = & 15^0\, 35'\, 2{,}2''.
\end{array}$$

Man findet nun $\log \cos \varphi$, d. i.:
$$\log \cos\ 15^0\, 35'\, 2{,}2'' = 9{,}9337325 - 10;$$
daher nach der obigen Formel für $\log x$, wenn man diesen log cos einsetzt:

$$\begin{array}{lrcl}
 & \log 21 & = & 1{,}3222193 \\
 & & & {}^{2)}\,0{,}6111096 \\
 & & & {}^{+10} \qquad\qquad {}^{-10} \\
 & \log \cos \varphi & = & 9{,}9337325 - 10 \\
 & & & 0{,}6773771 \\
 & & & {}^{4)}\,0{,}1693442 = \log x, \\
\text{mithin} & x & = & 1{,}476876.
\end{array}$$

§. 16. No. 2. (*Meier Hirsch* No. 27.) Gesucht wird
$$x = \sqrt[3]{5{,}03 + \sqrt[5]{0{,}2}}$$
$$= \sqrt[3]{5{,}03\left(1 + \frac{\sqrt[5]{0{,}2}}{5{,}03}\right)}.$$

Man setze $\frac{\sqrt[5]{0{,}2}}{5{,}03} = \operatorname{tg} \varphi^2$; dann ist

$$x = \sqrt[3]{5{,}03\,(1 + \operatorname{tg}\varphi^2)} = \sqrt[3]{5{,}03\,.\sec\varphi^2}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{5{,}03\cos\varphi}{\cos\varphi^3}} = \frac{\sqrt[3]{5{,}03\cos\varphi}}{\cos\varphi}.$$

Es ist nun $\log\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}(\log\sqrt[5]{0{,}2} - \log 5{,}03)$

$$\begin{array}{rcl}
\log 0{,}2 & = & 4{,}3010300 - 5 \\
 & 5) & 0{,}8602060 - 1 \\
-\log 5{,}03 & = & \underline{0{,}7015680} \\
 & & 1{,}1586380 - 2 \\
 & 2) & 0{,}5793180 - 1, \quad \text{oder} \\
\log\operatorname{tg}\varphi & = & 9{,}5793190 - 10 \\
 & & \quad 2479 \text{ entspr. } 20^0\,47' \\
\text{Diff. } 1'' & = & 63{,}45)\ 711\ (11{,}2''
\end{array}$$

Hiernach ist $\varphi = 20^0\,47'\,11{,}2''$.

Ferner ist $\log x = \frac{1}{3}[\log 5{,}03 + \log\cos\varphi] - \log\cos\varphi.$

$$\begin{array}{rcl}
\log\cos\varphi & = & 9{,}9707697 - 10 \\
+\log 5{,}03 & = & \underline{0{,}7015680} \\
 & & 10{,}6723377 - 10 \\
 & & +20,\ldots\ldots - 30 \\
 & 3) & 10{,}2241125 - 10 \\
-\log\cos\varphi & = & \underline{9{,}9707697 - 10} \\
\log x & = & 0{,}2533428.
\end{array}$$

Diesem Logarithmus entspricht die Zahl $x = 1{,}79202\ldots$

§. 17. No. 3. (*M. Hirsch* No. 28.) Gesucht wird

$$x = \sqrt[5]{9{,}921 - 3\sqrt{5{,}02}}.$$ Hier ist nun

$$x = \sqrt[5]{9{,}921\left(1 - \frac{\sqrt{5{,}02}}{3{,}307}\right)}.$$

Man setze $\frac{\sqrt{5{,}02}}{3{,}307} = \cos\varphi^2$, so ist

$$x = \sqrt[5]{9{,}921\sin\varphi^2}.$$

$$\begin{array}{rcl}
\log 5{,}02 & = & 0{,}7007037 \\
 & 2) & 0{,}3503518 \\
 & & +20 \qquad\quad -20 \\
-\log 3{,}307 & = & \underline{0{,}5194342} \\
 & & 19{,}8309176 - 20 \\
\log\cos\varphi & =^{2)} & 9{,}9154588 - 10 \\
 & & \quad 3846 \text{ entspr. } 34^0\,37' \\
\text{Diff. } 1'' & = & 14{,}53)\ 74200\ (51'',
\end{array}$$

daher $\varphi = 34^0\,37' - 51'' = 34^0\,36'\,9''$.

$$
\begin{array}{rcl}
\log \sin \varphi & = & 9{,}7542562 - 10 \\
\log \sin \varphi^2 & = & \underline{\qquad\quad 2} \\
 & & 19{,}5085124 - 20 \\
+ \log 9{,}921 & = & \underline{0{,}9965554} \\
 & & 0{,}5050678 \\
\log x & = & {}^{5)}\overline{0{,}1010135}
\end{array}
$$

mithin $x = 1{,}261866\ldots$

§. 18. Es sei zu berechnen der Ausdruck:

$$x = a\sqrt{(bc + df)}.$$

Hier ist $$x = a\sqrt{bc\left(1 + \frac{df}{bc}\right)}.$$

Setzt man $\frac{df}{bc} = \operatorname{tg} \varphi^2$, so ist

$$
\begin{aligned}
x &= a\sqrt{bc(1 + \operatorname{tg} \varphi^2)} \\
&= \sqrt{bc} \sec \varphi^2 = \frac{a\sqrt{bc}}{\cos \varphi}.
\end{aligned}
$$

Beispiel. Es sei zu finden:

$$x = 3{,}8473\sqrt{(738{,}56 \times 5{,}4378 + 976{,}54 \times 0{,}87364)}.$$

Man erhält $\varphi = 24^0\,44'\,42''$ und $x = 268{,}4657$.

§. 19. Wir gehen jetzt zu einem anderen Gegenstande über, welcher wegen seiner algebraischen Verwendung von Bedeutung ist, nämlich die Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Binome von der Form

$$A \mp \sqrt{B}.$$

Zu diesem Ende möge hier die Entwickelung der Formel vorangehen, zumal dieselbe nicht jedem Leser sogleich gegenwärtig sein dürfte.

§. 20. **Aufgabe.** Aus einem Binome von der Form $A \mp \sqrt{B}$ die Quadratwurzel zu finden.

Auflösung 1. Man setze $\sqrt{A \mp \sqrt{B}} = \sqrt{x} \mp \sqrt{y}$; (1)

so ist $A \mp \sqrt{B} = x \mp 2\sqrt{xy} + y$. (2)

Da nun hier das Rationale nur dem Rationalen, und umgekehrt, gleich sein kann: so folgt

(3) $x + y = A$ und

(4) $2\sqrt{xy} = \sqrt{B}$ oder $4xy = B$.

Aus (3) folgt $x^2+2xy+y^2 = A^2$, davon abgezogen

$$4xy = B\text{, so bleibt:}$$

$$x^2-2xy+y^2 = A^2-B\text{, also}$$

$$x-y = \sqrt{A^2-B}.\ \text{Da nun}$$

$$x+y = A\text{, so folgt:}$$

$$2x = A+\sqrt{A^2-B}\text{, und}$$

$$x = \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}.\ \text{Ebenso ist}$$

$$y = \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}\text{, daher nach (1)}$$

$$\sqrt{A\mp\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\mp\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Auflösung 2. Da sowohl die Summe, als auch die Differenz zweier quadratischen Radicale in ein einziges Radical verwandelt werden kann, so lässt sich diese Umwandlung sehr bequem zur Auflösung obiger Aufgabe benutzen. Es ist offenbar

$$\sqrt{\alpha}\mp\sqrt{\beta} = \sqrt{(\sqrt{\alpha}\mp\sqrt{\beta})^2} = \sqrt{\alpha+\beta\mp 2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Ebenso ist nun auch $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}\mp\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}$

$$= \sqrt{\left[\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}\mp\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}+\alpha-\sqrt{\beta}\mp 2\sqrt{(\alpha+\sqrt{\beta})(\alpha-\sqrt{\beta})}}$$

$$= \sqrt{2\alpha\mp 2\sqrt{\alpha^2-\beta}} = \sqrt{2\left[\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\beta}\right]}.$$

Man hat demnach:

$$\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}\mp\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}} = \sqrt{2\left[\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\beta}\right]}.$$

Setzt man in diese Formel

$$\alpha = \tfrac{1}{2}A\ \text{und}\ \beta = \frac{A^2-B}{4},\ \text{so erhält man}$$

$$\sqrt{A\mp\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\mp\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

§. 21. Setzt man zur Abkürzung $\sqrt{A\mp\sqrt{B}} = x$, so lässt sich diese Formel in folgende umändern:

$$x = \sqrt{\frac{A}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{B}{A^2}}\right)}\mp\sqrt{\frac{A}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{B}{A^2}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{A}{2}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}}\mp\sqrt{\frac{A}{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{B}{A^2}}}.$$

Nun setzt man $\frac{B}{A^2} = \sin\varphi^2$, so entsteht:

$$x = \sqrt{\frac{A}{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\sin\varphi^2}} \mp \sqrt{\frac{A}{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin\varphi^2}}.$$

$$= \sqrt{\frac{A}{2}}\sqrt{1+\cos\varphi} \mp \sqrt{\frac{A}{2}}\sqrt{1-\cos\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{A}{2}} \times \left[\sqrt{1+\cos\varphi} \mp \sqrt{1-\cos\varphi}\right] \quad \text{(Form. No. 59 u. 60.)}$$

$$= \sqrt{\frac{A}{2}} \times \left[\sqrt{2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2} \mp \sqrt{2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{A}{2}} \times \sqrt{2}.(\cos\tfrac{1}{2}\varphi \mp \sin\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$= \sqrt{A}\,[2\cos\tfrac{1}{2}\varphi \mp \sin\tfrac{1}{2}\varphi].$$

Betrachten wir nun jede einzelne Form dieses Ausdruckes und sondern $\cos\frac{1}{2}\varphi$ ab, so entsteht:

α) $x = \sqrt{A}.[1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi]\cos\frac{1}{2}\varphi$

β) $x = \sqrt{A}.[1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi]\cos\frac{1}{2}\varphi$.

Setzt man ferner $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \operatorname{tg}\psi^2$ in α und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \sin\psi^2$, welches zulässig ist, weil φ nicht $> R$, also $\frac{1}{2}\varphi$ nicht $> \frac{1}{2}R$ angenommen werden kann; so bekommt man

α) $x = \cos\frac{1}{2}\varphi.\sec\psi^2.\sqrt{A}$

und β) $x = \cos\frac{1}{2}\varphi.\cos\psi^2.\sqrt{A}$; folglich

α) $\log x = \log\cos\frac{1}{2}\varphi + 2\log\sec\psi + \frac{1}{2}\log A$, oder,

da $\sec\psi = \dfrac{1}{\cos\psi}$,

$= \log\cos\frac{1}{2}\varphi - 2\log\cos\psi + \frac{1}{2}\log A$.

β) $\log x = \log\cos\frac{1}{2}\varphi + 2\log\cos\psi + \frac{1}{2}\log A$.

§. 22. **Beispiele.** (*Meier Hirsch* p. 51. No. 1.)

1) Gesucht wird $x = \sqrt{(7 + 4\sqrt{3})}$, oder $x = \sqrt{(7 + \sqrt{48})}$. Hier ist $A = 7$; $B = 48$, daher nach obiger Formel $\sin\varphi^2 = \dfrac{B}{A^2}$, oder $\log\sin\varphi = \frac{1}{2}\log B - \log A$.

Nun ist	$\frac{1}{2}\log 48$	=	10,8406206 — 10
	— log 7	=	0,8450980
folglich	$\log\sin\varphi$	=	9,9955226 — 10
und	φ	=	81° 47′ 35″
also	$\frac{1}{2}\varphi$	=	40° 53′ 47″
Da nun	$\operatorname{tg}\psi^2$	=	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$, also
	$\log\operatorname{tg}\psi$	=	$\frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$, so hat man

$$\log \operatorname{tg} 40^0\, 53'\, 47'' = \underline{19{,}9375763 - 20}$$
$$2)\overline{\;9{,}9687881 - 10}$$

wonach $\psi = 42^0\, 56'\, 34''$. Es ist also

$$\log x = \log\cos 40^0\, 53'\, 47'' - 2\log\cos 42^0\, 56'\, 34'' + \tfrac{1}{2}\log 7$$
$$\log\cos 40^0\, 53'\, 47'' = 9{,}8784614 - 10$$
$$-2\log\cos 42^0\, 56'\, 34'' = \underline{9{,}7290630 - 10}$$
$$0{,}1493984$$
$$+\tfrac{1}{2}\log 7 = \underline{0{,}4225490}$$
$$\log x = 0{,}5719474$$

woraus sich ergiebt: $x = 3{,}732049\ldots$

§. 23. Zur Controle diene folgende Rechnung:

Es ist $x = \sqrt{7} + \sqrt{48} = \sqrt{7\left(1 + \frac{\sqrt{48}}{7}\right)}$.

Setzt man $\frac{\sqrt{48}}{7}$ tg φ^2, so wird

$$x = \sqrt{7\,(1 + \operatorname{tg}\varphi^2)} = \sqrt{7}\sec\varphi^2 = \frac{\sqrt{7}}{\cos\varphi}.$$

Hiernach findet man $\varphi = 44^0\, 51'\, 8{,}3''$,

daher $\log x = \frac{1}{2}\log 7 - \log\cos 44^0\, 51'\, 8{,}3''$
$= 0{,}5719474$, also
$= 3{,}732049$, wie vorhin.

§. 24. 2) (*M. Hirsch* No. 4.) Gesucht wird

$$x = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})} = \sqrt{(3 - \sqrt{8})}.$$

Da $A = 3$ und $B = 8$, so ist $\sin\varphi^2 = \frac{B}{A^2}$, also

$$\log\sin\varphi = \tfrac{1}{2}\log B - \log A \text{ d. i.}$$
$$\tfrac{1}{2}\log 8 = 0{,}4515450$$
$$-\log 3 = \underline{0{,}4771213}$$
$$\log\sin\varphi = 9{,}9744237 - 10$$

also $\varphi = 70^0\, 31'\, 43''$ und
$\frac{1}{2}\varphi = 35^0\, 15'\, 51''$. Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = 9{,}9247457 - 10 = \log\sin\psi,$$

daher $\psi = 57^0\, 14'\, 8''$. Endlich ist

$$\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi = 9{,}9119556 - 10$$
$$+2\log\cos\psi = 9{,}4666940 - 10$$
$$+\log\tfrac{1}{2}A = \underline{0{,}2385606}$$
$$\log x = 0{,}6172102 - 1$$

mithin $x = 0{,}41420\ldots.$

Anmerk. Nach der Formel in (20) ergiebt sich für $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ sehr einfach

$$x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}} = \sqrt{2}-1,$$

folglich, da $\sqrt{2} = 1,4142136\ldots$, so ist $x = 0,4142136\ldots$ Allein nur in Einzelfällen kann diese Berechnung kürzer ausgeführt werden.

§. 25. **Aufgabe.** Es sei $x = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$ zu berechnen.

Auflösung. Wenn $\sqrt{a-b}$ reell sein soll, so muss $a > b$ sein. Man setze daher

$$\frac{b}{a} = \cos\varphi,$$

Nun ist $x = \sqrt{a\left(1+\frac{b}{a}\right)} + \sqrt{a\left(1-\frac{b}{a}\right)}$

$$= \sqrt{a}\sqrt{1+\cos\varphi} + \sqrt{a}\sqrt{1-\cos\varphi}.$$

Da aber nach Form. No. 60

$$1+\cos\varphi = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 \quad \text{und} \quad 1-\cos\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2,$$

so hat man:

$$x = \sqrt{a}\,[\sqrt{2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2} + \sqrt{2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}]$$
$$= \sqrt{2a}\,(\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \sin\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Nach Form. No. 111, 112 ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\varphi} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\varphi},$$

und $$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\varphi} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\varphi},$$ folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi + \cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{1+\sin\varphi}.$$ Daher wird

$$x = \sqrt{2a}\sqrt{1+\sin\varphi}.$$

Setzt man endlich $\sin\varphi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi^2$, so entsteht

$$x = \sqrt{2a}\sqrt{1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi^2} = \sqrt{2a}\,.\sec\tfrac{1}{2}\psi,$$ oder

$$x = \frac{\sqrt{2a}}{\cos\tfrac{1}{2}\psi}.$$

Logarithmen von Summen und Differenzen.

§. 26. Für die logarithmische Berechnung sind manche Ausdrücke nicht geeignet, in welchen die Reihenfolge der Operationen mit Addition und Subtraction verbunden ist, wo also complexe Grössen nur gliederweise berechnet werden können. Z. B. $x = 8\sqrt[5]{19} - 7\sqrt[3]{53} + (\tfrac{5}{11})^5$.

1. Es sei $\log(a+b)$ zu berechnen, wenn $\log a$ und $\log b$ gegeben sind.

Da $\log\sqrt{(a+b)} = \frac{\log(a+b)}{2}$, so hat man

$$\log(a+b) = 2\log\sqrt{(a+b)} = 2\log\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)a}$$

$$= 2\log\sqrt{a}\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)} = \log\sqrt{a} + 2\log\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)}.$$

Man setze $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi^2$, dann ist

$$\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)} = \sqrt{(1+\operatorname{tg}\varphi^2)} = \sec\varphi\text{, folglich}$$

$$\begin{aligned}\log(a+b) &= \log a + 2\log\sec\varphi\\ &= \log a + 2\log\frac{1}{\cos\varphi}\\ &= \log a - 2\log\cos\varphi.\end{aligned}$$

Man kann aber auch kürzer so verfahren:

Es ist $\log(a+b) = \log\left(1+\frac{b}{a}\right)a = \log a + \log\left(1+\frac{b}{a}\right).$

Wird nun $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi^2$ gesetzt, so ist

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{b}{a}\right) &= \log(1+\operatorname{tg}\varphi^2) = \log\sec\varphi^2\\ &= 2\log\sec\varphi\text{, also}\\ \log(a+b) &= \log a + 2\log\sec\varphi\text{, wie vorhin.}\end{aligned}$$

Bei der Berechnung des Hülfswinkels $\log\operatorname{tg}\varphi = \frac{\log b - \log a}{2}$ hat man den Vortheil, aus den Tafeln gleich $\log\cos\varphi$, neben $\log\operatorname{tg}\varphi$, entnehmen zu können, wozu also nur ein einmaliges Nachschlagen in den Tafeln erforderlich ist.

2. Es sei $\log(a-b)$ aus $\log a$ und $\log b$ zu berechnen, wenn $b < a$.

Hier hat man $\log(a-b) = \log\left(1-\frac{b}{a}\right)a = \log a + \log\left(1-\frac{b}{a}\right).$

Da $\frac{b}{a} < 1$, so setze man $\frac{b}{a} = \sin\varphi^2$; also $\log\sin\varphi = \frac{\log b - \log a}{2}$;

dann ist: $\log\left(1-\frac{b}{a}\right) = \log(1-\sin\varphi^2) = \log\cos\varphi^2$

$$\begin{aligned}&= 2\log\cos\varphi\text{; daher}\\ \log(a-b) &= \log a + 2\log\cos\varphi.\end{aligned}$$

Da $\log a$, $\log b$ gegeben sind, so ist beim Aufschlagen von $\log \sin \varphi = \frac{\log b - \log a}{2}$, sogleich $\log \cos \varphi$ mitgefunden.

3. Es sei $\log (a - b)$ aus $\log a$ und $\log b$ zu berechnen, wenn $b > a$ ist.

Setzt man $x = a - b$, so hat x einen negativen Werth, folglich ist $-x$ eine positive Grösse. Aus $-x = b - a$ folgt $-x = \left(1 - \frac{a}{b}\right) b$, wo $\frac{a}{b} < 1$ ist. Setzt man also $\frac{a}{b} = \sin \varphi^2$, so wird $-x = b\,(1 - \sin \varphi^2) = b \cos \varphi^2$. Daher $\log (-x) = \log b + 2 \log \cos \varphi$.

Beispiele.

§. 27. (*Heis* Samml. p. 112. No. 44.)

1) Es sei $\log a = 3{,}27654$, $\log b = 3{,}13854$. Wie gross ist $\log (a + b)$?

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Es ist} & \log b & = & \overset{+2\qquad -2}{3{,}13854} \\
 & \log a & = & \underline{3{,}27654} \\
 & & & 1{,}86200 - 2 \\
 & \log \operatorname{tg} \varphi & = 2) & \overline{9{,}93100 - 10} \\
\text{folglich} & \varphi & = & 40^0\ 29' \quad \text{und daher} \\
 & \log \cos \varphi & = & 9{,}88115 - 10 \\
 & & & \underline{2} \\
 & 2 \log \cos \varphi & = & 0{,}76230 - 1 \\
\text{Von} & \log a & = & 3{,}27654 \\
\text{abgezogen:} & 2 \log \cos \varphi & = & \underline{0{,}76230 - 1} \\
\text{mithin ist} & \log (a + b) & = & 3{,}51424.
\end{array}
$$

2) Gegeben: $\log b = 2{,}75869$, $\log a = 4{,}63369$; gesucht wird $\log (a + b)$?

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Hier hat man} & \log b & = & 2{,}75869 \\
 & \log a & = & \underline{4{,}63369} \\
 & & & 0{,}12500 - 2 \\
 & \log \operatorname{tg} \varphi & = 2) & \overline{9{,}06250 - 10} \\
\text{Diesem entspricht:} & \varphi & = & 6^0\ 35'. \\
\text{Nun ist} & \log \cos \varphi & = & 9{,}88115 - 10 \\
 & & & \underline{2} \\
\text{also} & 2 \log \cos \varphi & = & 0{,}76230 - 1
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
\text{Von } \log a &= 3{,}27654 \\
2\log\cos\varphi &= \underline{0{,}76230} \\
\log(a+b) &= 3{,}51424.
\end{aligned}$$

3) Gesucht wird $\log(a-b)$, wenn $\log a$ und $\log b$ gegeben sind.

Es sei $\log a = 3{,}06475$; $\log b = 2{,}78564$.

Die Rechnung geschieht, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\log b &= \overset{+2}{}2{,}78564\overset{-2}{} \\
\log a &= \underline{3{,}06475} \\
&\ \underline{1{,}72089-2} \\
\log\sin\varphi &= {}^{2)}\,9{,}86044-10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Diesem entspricht}\quad \varphi &= 46^{0}\,29'. \\
\text{Nun ist}\quad \log\cos\varphi &= 9{,}83794-10 \\
&\ \underline{\phantom{9{,}83794-}2} \\
2\log\cos\varphi &= 19{,}67588-20. \\
\text{Endlich hat man}\quad \log a &= 3{,}06475 \\
+\,2\log\cos\varphi &= \underline{0{,}67588-1} \\
\log(a-b) &= 2{,}74063.
\end{aligned}$$

4) Gesucht wird $\log(a-b)$ aus $\log a = 1{,}15896$ und $\log b = -1{,}62798$.

Um zuerst $\frac{b}{a} = \sin\varphi^2$ zu finden, hat man:

$$\begin{aligned}
\log b &= \overset{+2}{-}1{,}62798\overset{-2}{} \\
\log a &= \underline{1{,}15896} \\
&\ \underline{0{,}46902-2} \\
\log\sin\varphi &= {}^{2)}\,9{,}23451-10.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Diesem entspricht}\quad \varphi &= 9^{0}\,53'.\quad \text{Ferner ist} \\
\log\cos\varphi &= 9{,}99350-10 \\
\text{also}\quad 2\log\cos\varphi &= 0{,}98701-1 \\
\log a &= \underline{1{,}15896} \\
&\ 2{,}14597-1 \\
\text{d. i.}\quad \log(a-b) &= 1{,}14597.
\end{aligned}$$

§. 28. Diese vortheilhafte Besechnung von $\log(a \mp b)$ aus $\log a$ und $\log b$ gewährt auch in anderen Beziehungen wichtige Anwendung, so dass mehrere Mathematiker, nach dem Vorgange von *Gauss*, logarithmische Tabellen für $\log(a+b)$ und $\log(a-b)$ herausgegeben haben, welche unter dem Namen der „Gauss'schen Logarithmentafeln" bekannt sind.*) Die Einrichtung dieser Tabellen, die Art und Weise der Berechnung solcher Logarithmen übergehen wir, da man dieses in den Tafeln angegeben findet. Ebenso gestattet diese Methode aus dem gegebenen Logarithmus einer trigonometrischen Function die Berechnung des Logarithmus einer anderen Function, welche in den Tafeln nicht vorkommt. Z. B. wenn $\log \operatorname{tg} \alpha^2 = 0{,}67835$, wie gross ist $\log \sec \alpha^2$ und $\log \operatorname{cosec} \alpha^2$?

Da $\log(1 + \operatorname{tg} \alpha^2) = \log \sec \alpha^2$, so hat man:

$$\begin{array}{rcr}
\log b = \log \operatorname{tg} \alpha^2 & = & 0{,}67835 \\
\log a = \log 1 & = & 0{,}00000 \\
\hline
 & & 0{,}67835 \\
\log \operatorname{tg} \varphi & = & 0{,}33917 \\
 & = & 10{,}33917
\end{array}$$

Diesem entspricht $\varphi = 65^0\, 23'\, 38{,}3''$.

Nun ist $\log \cos \varphi \quad 9{,}6194862 - 10$

und $2 \log \cos \varphi = 0{,}1389724 - 1$

Daher von $\log a = 1{,}00000$

abgezogen $2 \log \cos \varphi = \underline{0{,}23897}$, so bleibt

$$\log \sec \alpha^2 = 0{,}76103.$$

Um ferner $\log \operatorname{cosec} x^2$ zu berechnen, so hat man nach Form. No. 122: $\operatorname{cosec} \alpha^2 = \dfrac{1 + \operatorname{tg} \alpha^2}{\operatorname{tg} \alpha^2}$.

Da nun $\log(1 + \operatorname{tg} \alpha^2) = 0{,}76103$

und $\log \operatorname{tg} \alpha^2 = \underline{0{,}67835}$, so folgt:

$$\log \operatorname{cosec} \alpha^2 = 0{,}08268.$$

§. 29. Wir wenden uns jetzt zur Berechnung complicirterer Ausdrücke, wobei Logarithmen von Summen und Differenzen zur Anwendung kommen.

1) (*Meier Hirsch* p. 79. No. 29.) Gesucht wird

$$x = \sqrt[16]{\frac{43 + 5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}}.$$

*) Solche Tafeln finden sich in der deutschen Ausgabe der la Lande'schen Logarithmentafeln von *Köhler*, Leipzig 1817. — Tafeln zur bequemen Berechnung der Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Von *Matthiessen* und Sohn. Ferner sehe man die neueren Ausgaben der Vega'schen Logarithmen-Tabellen, von *Hulsse* herausgegeben. — Ferner „Vierstellige Logarithmen der natürl. Zahlen und Winkelfunctionen etc. Vom Oberschulrath Dr. *Müller*, Halle 1844."

Hier hat man folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\log 278 &= 2{,}4440448\\
\log \sqrt[3]{278} &= 0{,}8146816\\
\log 5 &= 0{,}6989700\\
\log b &= 1{,}5136516 - 1\\
\log a &= 1{,}6334685\\
& \ 19{,}8801831 - 20\\
\log \operatorname{tg} \varphi &=^{2)} 9{,}9400915 - 10.
\end{aligned}$$

Diesem entspricht $\varphi = 41^0\, 3'\, 38{,}3''$.

$$\begin{aligned}
\log \cos \varphi &= 9{,}8773799 - 10\\
2 \log \cos \varphi &= 0{,}7547598 - 1\\
\log a &= 1{,}6334685\\
2 \log \cos \varphi &= 0{,}7547598 - 1\\
\log (a+b) &= 1{,}8787087\\
\log \sqrt[5]{17} &= 0{,}2460897\\
& \ 1{,}6326490\\
\log x &=^{16)} 0{,}1020387, \text{ folglich}\\
x &= 1{,}264843.
\end{aligned}$$

2) (*v. Rouvroy*, Samml. algebr. Aufg. Dresd. 1856. pag. 87. No. 1.)

Gesucht wird $x = \sqrt{\sqrt[3]{9{,}23476} - \sqrt[4]{0{,}063808}}$.

Man setze $x = \sqrt[5]{(a - b)}$. Nun ist

$$\log a = 0{,}3218085 \quad \text{und}$$
$$\log b = 0{,}7012188 - 1.$$

Da $\frac{b}{a} = \sin \varphi^2$ zu setzen ist, so findet man

$$\log \sin \varphi = 9{,}6897051 - 10$$

und daher $\varphi = 29^0\, 18'\, 15{,}11''$. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\log \cos \varphi &= 9{,}9405332 - 10\\
& \quad 2\\
2 \log \cos \varphi &= 0{,}8810664 - 1\\
+ \log a &= 0{,}3218085\\
\log (a - b) &= 0{,}2028749\\
\log x &=^{5)} 0{,}0405749 = \log \sqrt[5]{(a - b)}.
\end{aligned}$$

Mithin $x \doteq 1{,}09793$.

3) (*v. Rouvroy*, No. 15.) Gesucht wird

$$x = \sqrt[5]{\frac{(50{,}79598 \times 0{,}905) - (152{,}725)^{\frac{1}{3}}}{1454{,}451}} = \sqrt[5]{\frac{a - b}{c}}.$$

Die Rechnung geschieht, wie folgt:

$$\log 50{,}79598 = 1{,}7058294$$
$$+ \log 0{,}905 = 0{,}9566486 - 1$$
$$\log a = 1{,}6624780$$
$$\log 152{,}725 = 2{,}1838675$$
$$142$$
$$2{,}1838817$$
$$\log b = 3)\overline{0{,}7279605}.$$

Nun ist $\log \sin \varphi = \frac{\log b - \log a}{2}$.

$$\log b = 10{,}7279605 - 10$$
$$\log a = 1{,}6624780$$
$$19{,}0654825 - 20$$
$$\log \sin \varphi = 2)\overline{9{,}5327412 - 10}.$$

Diesem Log. entspricht $\varphi = 19^0\ 56'\ 13{,}85''$.

$$\log \cos \varphi = 9{,}9731588 - 10$$
$$2 \log \cos \varphi = 19{,}9463176 - 20$$
$$\log a = 1{,}6624780$$
$$+5 \qquad -5$$
$$\log a + 2 \log \cos \varphi = 1{,}6089756$$
$$\log c = 3{,}1626991$$
$$\log \frac{a-b}{c} = 3{,}4460965 - 5$$
$$\log x = 0{,}6892193 - 1.$$ Hieraus folgt:
$$x = 0{,}4888992.$$

4) Gesucht wird:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{58{,}59^2 \times 0{,}726 - 4{,}3\sqrt{569{,}4}}{87{,}63^2 + 55{,}67\sqrt[3]{769{,}2}}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck kann unter die allgemeine Form

$x = \sqrt[3]{\left(\frac{a-b}{a_1+b_1}\right)^2}$ gebracht werden. Es ist nun:

$$\log 58{,}59 = 1{,}7678235$$
$$\log 58{,}59^2 = 3{,}5356470$$
$$\log 0{,}726 = 0{,}8609366 - 1$$
$$\log a = 3{,}3965836.$$ Ferner ist
$$\log 569{,}4 = 2{,}7554175$$

$$\log \sqrt{569,4} = 1,3777087$$
$$+ \log 4,3 = 0,6334685$$
$$\log b = 2,0111772.$$

Für den Hülfswinkel hat man

$$\log \sin \varphi = \frac{\log b - \log a}{2}, \text{ folglich}$$
$$\log b \quad 22,0111772 - 20$$
$$- \log a = 3,3965836$$
$$\log b - \log a = 18,6145936 - 20,$$
$$\text{d. i. } \log \sin \varphi = 9,3072968 - 10.$$

Diesem entspricht $\varphi = 11^0\,42'\,25,2''.$

Nun ist $\log \cos \varphi = 9,9908706 - 10$

$$2 \log \cos \varphi = 0,9817412 - 1$$
$$+ \log a = 3,3965836$$
$$\log (a - b) = 3,3783248. \quad \text{Ferner}$$
$$\log 87,63 = 1,9426528$$
$$\log 87,63^2 = 3,8853056 = \log a_1$$
$$\log 769,2 = 2,8860393$$
$$\log \sqrt[3]{769,2} = 0,9620131$$
$$+ \log 55,67 = 1,7456212$$
$$\log b_1 \quad 22,7076343 - 20$$
$$\log a_1 = 3,8853056$$
$$18,8223287 - 20$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = 9,4111643 - 10.$$

Diesem entspricht $\varphi = 14^0\,27'\,8,3''.$

$$\log \cos \varphi = 9,9860349 - 10, \text{ also}$$
$$2 \log \cos \varphi = 0,9720698 - 1$$
$$\log a_1 = 3,8853056, \text{ folglich}$$
$$\log a_1 - 2 \log \cos \varphi = 3,9132358 = \log (a_1 + b_1).$$

Nun ist nach der obigen allgemeinen Form

$$\log (a - b) = \overset{+1}{3},3783248 \quad {}^{-1}$$
$$\log (a_1 + b_1) = 3,9132358$$
$$\text{Diff.} = 0,4650890 - 1$$
$$2$$
$$0,9301780 - 2$$

oder: $1,9301780 - 3$

$$\log x = {}^{3)}0,6433926 - 1.$$

Diesem Log. entspricht: $x = 0,4399391.$

5) Um auch den Fall §. 26. 3, wo bei der Berechnung von $\log(a - b)$, $b > a$ ist, auf ein Beispiel anzuwenden, so wählen wir hier ein von *Unger* gegebenes. Gesucht wird nämlich:

$$x = \sqrt[5]{\left(\frac{385{,}7 \times 0{,}0764^2 - 5{,}823^2}{76{,}3^2 \times 98{,}5 - 563{,}4 \times \sqrt{78{,}45}}\right)^3}.$$

Dieser Ausdruck ist unter der Form enthalten:

$$x = \sqrt[5]{\left(\frac{a - b}{a_1 - b_1}\right)^3}.$$

Die Rechnung geschieht, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\log 0{,}0764 &= 0{,}8830934 - 2 \\
\log 0{,}0764^2 &= 0{,}7661868 - 3 \\
+ \log 385{,}7 &= 2{,}5862496 \\
\hline
\log a &= 0{,}3524364 \\
\log 5{,}823 &= 0{,}7651468 \\
\log 5{,}823^2 &= 1{,}5302936 = \log b. \\
\log a &= 0{,}3524364 - 2 \\
\hline
\log a - \log b &= 0{,}8221428 - 2 \\
\log \sin \varphi &= 0{,}4110714 - 1, \text{ oder} \\
&= 9{,}4110714 - 10.
\end{aligned}$$

Diesem entspricht: $\varphi = 14^0\, 55'\, 55{,}6''.$

$$\begin{aligned}
\log \cos \varphi &= 9{,}9850813 - 10 \\
2 \log \cos \varphi &= 0{,}9701626 - 1 \\
\log b &= 1{,}5302936 \\
\hline
\log -(a - b) &= 1{,}5004562 \\
\log 76{,}3 &= 1{,}8825245 \\
\log 76{,}3^2 &= 3{,}7650490 \\
+ \log 98{,}5 &= 1{,}9934362 \\
\hline
\log a_1 &= 5{,}7584852 \\
\log 78{,}45 &= 1{,}8945929 \\
\log \sqrt{78{,}45} &= 0{,}9472964 \\
+ \log 563{,}4 &= 2{,}7508168 \\
\hline
\log b_1 &= 3{,}6981132, \text{ da } b_1 < a_1, \text{ so hat man}
\end{aligned}$$

nach §. 26. 2 $\log a_1 = 5{,}7584852$

$$\begin{aligned}
\log \sin \varphi &= 0{,}9698140 - 2, \text{ oder} \\
& 8{,}9698140 - 10.
\end{aligned}$$

Diesem entspricht: $\varphi = 5^0\, 21'\, 9{,}5''.$

Ferner ist $\log \cos \varphi = 9{,}9981021 - 10$

$$
\begin{aligned}
2\log\cos\varphi &= 0{,}9962042 - 1 \quad (\S.\ 26.\ 2)\\
+\log a_1 &= \underline{5{,}7584852}\\
\log(a_1 - b_1) &= 5{,}7546894.\quad \text{Nun ist}\\
&\ \ {+5} \qquad\qquad\quad {-5}\\
\log -(a-b) &= 1{,}5004562\\
\log(a_1 - b_1) &= \underline{5{,}7546894\qquad\quad}\\
&\quad\ 0{,}7457668 - \ \ 5\\
&\qquad\qquad\qquad\ \ \underline{3}\\
&\quad\ 2{,}2373004 - 15\\
\log(-x) &= 0{,}4474600 - \ \ 3
\end{aligned}
$$

Diesem entspricht: $\qquad -x = 0{,}002801947$;

mithin ist $\qquad x = -0{,}002801947$.

§. 30. Eine andere Auflösung der Aufgabe §. 26. 1. $\log(a+b)$ aus $\log a$ und $\log b$ zu finden, ergiebt sich in folgender Weise.

Man setze $\qquad \dfrac{a}{b} = \cot\varphi$; dann ist

$$
\begin{aligned}
a+b &= b\left(1+\frac{a}{b}\right) = b(1+\cot\varphi)\\
&= b\left(1+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = \frac{b(\sin\varphi+\cos\varphi)}{\sin\varphi}.
\end{aligned}
$$

Nun ist nach Form. No. 243:

$$\sin(45^0+\varphi) = (\sin\varphi + \cos\varphi)\sin 45^0,$$

folglich $\qquad x = a+b = \dfrac{b(\sin 45^0+\varphi)}{\sin\varphi\sin 45^0}$;

mithin ist $\log(a+b) = \log b + \log\sin(45^0+\varphi) - \log\sin\varphi\sin 45^0$.

Hätte man $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt, so würde man erhalten haben

$$
\begin{aligned}
a\left(1+\frac{b}{a}\right) = a(1+\operatorname{tg}\varphi) = a\left(1+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) &= \frac{a(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sin\varphi}\\
&= \frac{a\sin(45^0+\varphi)}{\sin\varphi\sin 45^0}.
\end{aligned}
$$

§. 31. **Aufgabe** Man soll $\log(a+b+c)$ aus $\log a$, $\log b$ und $\log c$ finden.

Auflösung. Vorausgesetzt, dass $\log(a+b)$ bereits gefunden worden, so setze man

$$\frac{c}{a+b} = \operatorname{tg}\psi;\quad \text{so ist}$$

$$a+b = \frac{c}{\operatorname{tg}\psi} = \frac{c\cos\psi}{\sin\psi}.$$

Nun ist
$$1+\frac{c}{a+b} = 1+\operatorname{tg}\psi$$
$$= 1+\frac{\sin\psi}{\cos\psi}$$
$$= \frac{\cos\psi+\sin\psi}{\cos\psi}$$
$$= \frac{\sin(45^0+\psi)}{\sin 45^0 \cos\psi}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit
$$a+b = \frac{c\cos\psi}{\sin\psi}, \text{ so erhält man}$$
$$a+b+c = \frac{c\sin(45^0+\psi)}{\sin 45^0 \sin\psi}.$$

§. 32. **Zusatz.** Ebenso findet man $\log(a+b+c+d)$, denn es sei 1) $\frac{d}{a+b+c} = \operatorname{tg}\delta$, so ist

$$2)\quad a+b+c = \frac{d}{\operatorname{tg}\delta} = \frac{d\cos\delta}{\sin\delta}. \quad \text{Aus (1) folgt}$$
$$1+\frac{d}{a+b+c} = 1+\operatorname{tg}\delta = 1+\frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{\cos\delta+\sin\delta}{\cos\delta}$$
$$= \frac{\sin(45^0+\delta)}{\sin 45^0 \cos\delta}.$$

Diese Gleichung mit (2) multiplicirt, so entsteht:
$$a+b+c+d = \frac{d\sin(45^0+\delta)}{\sin\delta \sin 45^0}.$$

Vergleicht man die gefundenen Ausdrücke für $a+b$; $a+b+c$; $a+b+c+d$, so sieht man leicht, dass sich dieses Verfahren für jede beliebige Summe fortsetzen lässt; jedoch wird das Bisherige ohne weitere Berechnung von Beispielen deutlich genug sein.

Tabellarische Uebersicht der Umformung arithmet. Ausdrücke zur trigonometr. Berechnung.

Gegebene Formel.	Substitution des Hülfswinkels.	Reducirte trigonometrische Formel.
1) $x = a + b.$	$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$, oder	$x = a \sec \varphi^2 = \frac{a}{\cos \varphi^2}.$
	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$	$x = \frac{a\sqrt{2} . \sin(45^0 + \varphi)}{\cos \varphi}.$
	Wenn $b < a$, so setze man $\frac{b}{a} = \cos \varphi.$	$x = 2a \cos \frac{1}{2}\varphi^2.$
2) $x = a - b.$	$\cos \varphi^2 = \frac{b}{a}.$	$x = a \sin \varphi^2.$
3) $x = \frac{a-b}{a+b}.$	$\operatorname{tg} \varphi^2 = \frac{b}{a}$, oder	$x = \cos 2\varphi.$
	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$	$x = \operatorname{tg}(45^0 - \varphi).$
4) $x = \sqrt{(a+b)}.$	$\operatorname{tg} \varphi^2 = \frac{b}{a}.$	$x = \frac{\sqrt{a}}{\cos \varphi}.$
5) $x = \sqrt{(a-b)}.$	$\cos \varphi^2 = \frac{b}{a}.$	$x = \sin \varphi . \sqrt{a}.$
6) $x = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$	$\cos \varphi = \frac{b}{a}.$	$x = \sqrt{a} . \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi.$
7) $x = \sqrt{A \mp \sqrt{B}}.$	$\sin \varphi^2 = \frac{B}{A^2}.$	
α) $x = \sqrt{A} . [1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi] \cos \frac{1}{2}\varphi.$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \operatorname{tg} \psi^2$ (in α)	α) $x = \cos \frac{1}{2}\varphi \sec \psi^2 . \sqrt{A}.$
β) $x = \sqrt{A} . [1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi] \cos \frac{1}{2}\varphi.$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \sin \psi^2$ (in β).	β) $x = \cos \frac{1}{2}\varphi \cos \psi^2 . \sqrt{A}.$
8) $x = \log(a + b).$	$\operatorname{tg} \varphi^2 = \frac{b}{a}.$	$x = \log(a + b) = \log a - 2 \log \cos \varphi.$
9) $x = \log(a - b).$	$\sin \varphi^2 = \frac{b}{a}.$	$x = \log(a - b) = \log a + 2 \log \cos \varphi.$

2. Capitel.

Auflösung trigonometrischer Gleichungen.

§. 33. Bei mathematischen Aufgaben kommt nicht selten der Fall vor, wo die Auflösung auf eine Gleichung führt, welche eine oder mehrere trigonometrische Functionen enthält, welche aus ihr bestimmt werden müssen. Vergeblich sieht man sich nach der weiteren Behandlung solcher trigonometrischen Gleichungen in den Lehrbüchern der Algebra um, und ist daher genöthigt die trigonometrische Literatur in Anspruch zu nehmen, wo man dann auch nicht immer den vorliegenden Fall finden wird. Es ist daher nicht unzweckmässig, die Auflösung dieser Categorie von Gleichungen näher zu betrachten und von den einfachsten Fällen auszugehen. Man darf hierbei nicht vergessen, dass die trigonometrischen Gleichungen meistens unendlich viele Auflösungen gestatten, von welchen man jedoch nur diejenigen nimmt, welche $< 360^0$ sind. Gehört aber ein gesuchter Winkel einem Dreiecke an, so bleibt das Resultat selbstverständlich $< 180^0$.

§. 34. **Aufgabe.** Man soll aus der Gleichung

$$\sin y = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} y$$

den Werth von y, d. h. das Gradmass des Winkels y bestimmen.

Auflösung 1. Da $\operatorname{tg} y = \dfrac{\sin y}{\cos y}$ (Form. No. 12.)

so ist $\sin y = \dfrac{\sin y}{2 \cos y}$, folglich

$$1 = \frac{1}{2 \cos y}, \text{ mithin}$$

$$\cos y = \tfrac{1}{2} = 0{,}5. \text{ Da nun}$$

$$\cos y = \sin(90 - y) = 0{,}5; \text{ so ist, weil } \sin 30^0 = \tfrac{1}{2},$$

$$90 - y = 30^0, \text{ folglich } x = 60^0.$$

Auflösung 2. Nach Form. No. 106. ist:

$$\sin y = \frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} y^2}}. \text{ Daher hat man}$$

$$\frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} y^2}} = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} y, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg} y^2 = 3, \text{ und}$$

$$\operatorname{tg} y = \sqrt{3} = 1{,}7320508.$$

Da $\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$, so ist $y = 60^0$.

§. 35. **Aufgabe.** Den Winkel x aus der Gleichung

$$\sin x = \tfrac{7}{8} \cos x$$

zu bestimmen.

Auflösung. Da $\cos x = \sqrt{1 - \sin x^2}$,

so ist

$$\begin{aligned} \sin x &= \tfrac{7}{8} \sqrt{1 - \sin x^2}, \text{ also} \\ \sin x^2 &= \tfrac{49}{64} (1 - \sin x^2) \\ &= \tfrac{49}{64} - \tfrac{49}{64} \sin x^2, \text{ oder} \\ \sin x^2 + \tfrac{49}{64} \sin x^2 &= \tfrac{49}{64}, \text{ d. i.} \\ \tfrac{113}{64} \sin x^2 &= \tfrac{49}{64}, \text{ folglich} \\ \sin x &= \sqrt{\tfrac{49}{113}}, \text{ und} \\ \log \sin x &= \tfrac{1}{2} [\log 49 - \log 113] \\ &= 9{,}8185588 - 10, \text{ welchem Log.} \end{aligned}$$

entspricht: $x = 41^0\, 11'\, 9{,}3$, oder, nach Form. No. 2:

$$x = 180 + x = 221^0\, 11'\, 9{,}3''.$$

§. 36. **Aufgabe.** Man soll die Gleichung auflösen:

$$0{,}718 \sin x = -0{,}3 \cos x.$$

Auflösung. Dividirt man mit $\cos x$, so entsteht:

$$0{,}718 \operatorname{tg} x = -0{,}3, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{0{,}3}{0{,}718} = -\tfrac{300}{718}.$$

Nun ist nach Form. No. 6. $-\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$, folglich ist

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg}(-x) &= \log 300 - \log 718. \\ \log 300 &= 12{,}4771213 - 10 \\ - \log 718 &= \underline{2{,}8561244} \\ \log \operatorname{tg}(-x) &= 9{,}6209969 - 10. \end{aligned}$$

Diesem Log. entspricht ein Winkel $x = 22^0\, 40'\, 35''$; folglich ist nach Form. No. 4. $-\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(180^0 - x) = 157^0\, 19'25''$

und $-\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(360^0 - x) = 337^0\, 19'25''$.

§. 37. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \cos x = b \cot x$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung. Da $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, so ist

$$a \cos x = \frac{b \cdot \cos x}{\sin x}, \text{ oder}$$

$$a = \frac{b}{\sin x}, \quad \text{folglich}$$

$$\sin x = \frac{b}{a}.$$

§. 38. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \operatorname{tg} x = b \cot x$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung. Da $\cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, so hat man

$$a \operatorname{tg} x = \frac{b}{\operatorname{tg} x}, \quad \text{oder}$$

$$a \operatorname{tg} x^2 = b, \text{ folglich } \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

§. 39. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \operatorname{tg} x = b \sec x$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung. Da $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, so ist

$$a \operatorname{tg} x = \frac{b}{\cos x}, \quad \text{folglich}$$

$$\frac{a \sin x}{\cos x} = \frac{b}{\cos x} \quad \text{und}$$

$$a \sin x = b, \quad \text{mithin}$$

$$\sin x = \frac{b}{a}.$$

§. 40. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \sin x = b \sec x$$

den Werth von x zu finden.

Auflösung. Es ist $a \sin x = \frac{b}{\cos x}$, folglich

$$a \sin x \cos x = b, \quad \text{oder}$$

$$\sin x \cos x = \frac{b}{a}, \quad \text{also auch}$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{2b}{a}.$$

Nach Form. No. 22. ist aber

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x, \quad \text{daher ist}$$

$$\sin 2x = \frac{2b}{a}.$$

§. 41. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \sin x = b \sin.\text{vers}\, x$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung. Da $\sin \text{vers}\, x = 1 - \cos x$, so ist

$$a \sin x = b\,(1 - \cos x).$$

Nach Form. No. 21 und No. 59 hat man nun:

$$2a \sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x = 2b \sin \tfrac{1}{2}x^2, \text{ oder}$$

$$a \cos \tfrac{1}{2}x = b \sin \tfrac{1}{2}x, \text{ folglich}$$

$$\text{tg}\, \tfrac{1}{2}x = \frac{a}{b}.$$

Ist $a = b$, so wird $\text{tg}\, \frac{1}{2}x = 1$, daher $\frac{1}{2}x = 45^0$ und also $x = 90^0$.

§. 42. **Aufgabe.** *Es ist ein Octant gegeben; man soll denselben dergestalt in zwei Theile theilen, dass die Sinus der beiden Bogen sich zu einander verhalten wie* 7 : 9.

Auflösung. Wenn der kleinere Bogen x^0 hält, so hält der grössere $45^0 - x$. Man erhält demnach die Proportion:

$$\sin x : \sin (45^0 - x) = 7 : 9,$$

folglich ist

$$9 \sin x = 7 \sin (45^0 - x),$$

$$\tfrac{9}{7} \sin x = \sin 45^0 \cos x - \sin x \cos 45^0.$$

Dividirt man mit $\sin x$, so entsteht:

$$\tfrac{9}{7} = \sin 45^0 \cot x - \cos 45^0.$$

Nun ist nach Form. No. 208 $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos 45^0$, folglich hat man:

$$\tfrac{9}{7} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} . \cot x - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} . \cot x = \tfrac{9}{7} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ mithin}$$

$$\cot x = \frac{\frac{9}{7} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$\text{d. i. } \cot x = \tfrac{9}{7}\sqrt{2} + 1.$$

Da

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135, \text{ so folgt}$$

$$\cot x = 2{,}8182745.$$

Dieser Cot. entspricht

$$x = 19^0\, 32{,}5'.$$

§. 43. **Aufgabe.** *Es ist ein Quadrant in zwei Bogen ungleicher Grösse α und β getheilt. Wenn nun die Sehne des Bogens $\alpha = \sqrt{6}$, und die des Bogens $\beta = \sqrt{12}$; so wird gefragt, wie gross der Halbmesser dieses Quadranten sei?*

Auflösung. Da $\alpha + \beta = 90^0$, so ist $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 45^0$, also $\frac{1}{2}\beta = 45^0 - \frac{1}{2}\alpha$. Da nun die Sehne eines Bogens der doppelte Sinus des halben Bogens ist, so hat man

$$2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{6} \text{ und } 2 \sin \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{12},$$

oder $$2 \sin \tfrac{1}{2}\beta = 2 \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{12}.$$
Nun ist $\sin(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) = \sin 45^0 \cos \frac{1}{2}\alpha - \sin \frac{1}{2}\alpha \cos 45^0$, folglich, da nach Form. No. 208 $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so ist
$$\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\cos \tfrac{1}{2}\alpha - \sin \tfrac{1}{2}\alpha\,.\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\cos \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{4}\sqrt{12}.$$
Man hat demnach die Gleichung:
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,.\cos \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{4}\sqrt{12} = \tfrac{1}{2}\sqrt{12}.$$
Daraus folgt: $$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{12} + \tfrac{1}{4}\sqrt{12}}{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}},$$
$$\text{d. i. } \cos \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{3}{2}\sqrt{6}.$$
Endlich ist, wenn man den gesuchten Halbmesser des Quadranten $= x$ setzt: $$\cos \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \tfrac{9}{4}\,.6 + \tfrac{1}{4}\,.6 = 15,$$
$$\text{d. i. } x^2 = 15; \text{ mithin ist } x = \sqrt{15}.$$

§. 44. **Aufgabe.** Welches Winkels Tangente ist doppelt so gross als dessen Cotangente?

Auflösung. Ist der Bogen des gesuchten Winkels $= x$, so ist $\operatorname{tg} x : \cot x = 2 : 1$, folglich $\operatorname{tg} x = 2 \cot x$. Da nun $\cot x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, so ist $$\operatorname{tg} x^2 = 2. \quad \text{Mithin ist}$$
$$\operatorname{tg} x = \sqrt{2}.$$

Andere Auflösung. Die Aufgabe ist offenbar mit folgender einerlei: Den Quadranten in zwei Bogen so zu theilen, dass die Tangente des grösseren sich zu der des kleineren $= 2 : 1$ verhalte.

Da nun die halbe Summe der Bogen $= 45^0$,
so sei „ „ Differenz „ „ z:
so ist der grössere Bogen $= 45^0 + z$ und der kleinere $= 45^0 - z$.
Daher ist $$\operatorname{tg}(45^0 + z) = 2 \operatorname{tg}(45^0 - z).$$
Nach Form. No. 217 und 242 hat man also:
$$\frac{1 + \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} z} = \frac{2.(1 - \operatorname{tg} z)}{1 + \operatorname{tg} z}, \text{ folglich}$$
$$(1 + \operatorname{tg} z)^2 = 2(1 - \operatorname{tg} z)^2, \text{ oder}$$
$$1 + \operatorname{tg} z = (1 - \operatorname{tg} z)\sqrt{2}.$$
Hieraus ergiebt sich
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)^2, \text{ oder}$$
$$\operatorname{tg} z = 3 - 2\sqrt{2}.$$
Es ist folglich $$\operatorname{tg}(45^0 + z) = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{-2 + 2\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{2}, \text{ wie oben.}$$

Das Gradmass des Bogens kann nun leicht durch die Sinus-Tafel gefunden werden.

§. 45. **Aufgabe.** Wie gross ist x, wenn

$$\sin x - \cos x = \tfrac{1}{4}?$$

Auflösung. Setzt man $\sqrt{1 - \sin x^2}$ statt $\cos x$, so ist

$$\sin x - \tfrac{1}{4} = \sqrt{1 - \sin x^2}, \text{ folglich}$$

$$\sin x^2 - \tfrac{1}{2} \sin x + \tfrac{1}{16} = 1 - \sin x^2, \text{ oder}$$

$$2 \sin x^2 - \tfrac{1}{2} \sin x = \tfrac{15}{16}$$

$$\sin x^2 - \tfrac{1}{4} \sin x = \tfrac{15}{32}.$$ Löst man diese quadratische Gleichung auf, so bekommt man

$$\sin x^2 - \tfrac{1}{4} \sin x + \tfrac{1}{64} = \tfrac{31}{64}, \text{ folglich}$$

$$\sin x - \tfrac{1}{8} = \sqrt{\tfrac{31}{64}} = \tfrac{1}{8}\sqrt{31}$$

$$\sin x = \tfrac{1}{8} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{31} = \frac{1 \mp \sqrt{31}}{8}.$$

Nun ist $\sqrt{31} = 5{,}5677644$, daher

$$\sin x = \begin{cases} +\,0{,}8209705 \\ -\,0{,}5709705 \end{cases} = \begin{cases} \sin 55^0\ 11' \\ -\sin 34^0\ 49'. \end{cases}$$

Andere Auflösung. Man quadrire die Gleichung

$$\sin x - \cos x = \tfrac{1}{4}, \text{ so entsteht}$$

$$\sin x^2 - 2 \sin x \cos x + \cos x^2 = \tfrac{1}{16}.$$

Da nun $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ und nach Form. No. 22

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x, \text{ so hat man:}$$

$$1 - \sin 2x = \tfrac{1}{16}, \text{ oder}$$

$$\sin 2x = \tfrac{15}{16} = 0{,}9375000.$$

Diesem entspricht $2x = 69^0\ 38'$, daher $x = 34^0\ 49'$ oder $90^0 - x = 55^0\ 11'$.

§. 46. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$5 \sin x \cos x = 4 \cos x^2 - \sin x^2$$

den Werth von x zu finden.

Auflösung. Dividirt man auf beiden Seiten mit $\sin x \cos x$, so erhält man:

$$5 = 4 \cot x - 4 \operatorname{tg} x, \text{ oder}$$

$$\cot x - \operatorname{tg} x = \tfrac{5}{4}.$$

Nach Form. No. 142 ist $2 \cot 2x = \cot x - \operatorname{tg} x$,

daher $\cot 2x = \tfrac{5}{8} = 0{,}6250000$,

folglich $2x = 57^0\ 59'$ circa und also

$$x = 28^0\ 59'.$$

Oder, da $\sin x \cos x = \tfrac{1}{2} \sin 2x$ und $\cos x^2 - \sin x^2 = \cos 2x$ (Form. No. 22), so ist

$$\tfrac{1}{2}\sin 2x = \tfrac{4}{5}\cos 2x,\ \text{folglich}$$
$$\operatorname{tg} 2x = \tfrac{8}{5}\ \text{u. s. w.}$$

Ein genaueres Resultat erhält man durch Benutzung der Logarithmen.

§. 47. **Aufgabe.** *Aus der Gleichung*

$$5\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} 2x$$

den Werth von x zu finden.

Auflösung. Da nach Form. No. 40

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x^2},\ \text{so hat man}$$

$$5\operatorname{tg} x = 2.\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x^2},\ \text{oder}$$

$$5 = \frac{4}{1-\operatorname{tg} x^2};\ \text{daher}$$

$$5(1-\operatorname{tg} x^2) = 4,\ \text{oder}$$

$$1-\operatorname{tg} x^2 = \tfrac{4}{5},\ \text{folglich}$$

$$\operatorname{tg} x^2 = 1-\tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5},\ \text{mithin}$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\tfrac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}\sqrt{5}$$

Es ist also $\log\operatorname{tg} x = \log\frac{\sqrt{5}}{5}$

$$= 9{,}6505150 - 10.$$

Diesem entspricht $x = 24^0\ 5'\ 41{,}42''$.

§. 48. **Aufgabe.** Wenn $\sin x + \cos x = a$ ist, durch welche Formel wird dann der Werth 1) von $\operatorname{tg} x + \cot x$ und 2) von $\sec x + \operatorname{cosec} x$ ausgedrückt?

Auflösung. Aus $\sin x + \cos x = a$ folgt:

$$\sin x^2 + \cos x^2 + 2\sin x\cos x = a^2\ \text{d. i.}$$

$$1 + 2\sin x\cos x = a^2.$$

Da nun (Form. No. 21) $2\sin x\cos x = \sin 2x$,

so folgt $1+\sin 2x = a^2$, daher

$$\sin 2x = a^2 - 1.$$

Nach Form. No. 143 ist $\operatorname{tg} x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

mithin ist $\operatorname{tg} x + \cot x = \dfrac{2}{a^2-1}$.

Anmerk. Von der Richtigkeit der Formel 143 kann man sich leicht überzeugen. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg}\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha^2+\cos\alpha^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

Da 2) $\sec x + \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}$

$= \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}$ und $\sin x + \cos x = a$,

so folgt: $$\sec x + \operatorname{cosec} x = \frac{a}{\frac{1}{2} \sin 2x}.$$

Nach dem Vorigen ist aber $\sin 2x = a^2 - 1$ gefunden, daher hat man:

$$\sec x + \operatorname{cosec} x = \frac{2a}{a^2 - 1}.$$

§. 49. **Aufgabe.** Es soll aus der Gleichung

$$2\sqrt{x^2 - x^4} = \sin \alpha$$

der Werth von x bestimmt werden.

Auflösung. Man quadrire die Gleichung, so entsteht:

$$4(x^2 - x^4) = \sin \alpha^2, \text{ oder}$$
$$x^2 - x^4 = \tfrac{1}{4} \sin \alpha^2.$$

Diese biquadratische Gleichung geordnet, kann leicht wie eine quadratische behandelt werden. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + \tfrac{1}{4} &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} \sin \alpha^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(1 - \sin \alpha^2) \\ &= \tfrac{1}{4} \cos \alpha^2, \text{ folglich} \\ x^2 - \tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{2} \cos \alpha \text{ und} \\ x^2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos \alpha \\ &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos \alpha) = \cos \tfrac{1}{2}\alpha^2, \end{aligned}$$

mithin $$x = \cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

§. 50. **Aufgabe.** Aus den beiden Gleichungen

$$1)\quad a = \operatorname{cosec} \varphi - \sin \varphi$$
$$2)\quad b = \sec \varphi - \cos \varphi$$

soll φ eliminirt werden.

Auflösung. Man multiplicire die erste Gleichung mit $\sin \varphi$, und die zweite mit $\cos \varphi$, so entsteht:

$$3)\quad a \sin \varphi = 1 - \sin \varphi^2$$
$$4)\quad b \cos \varphi = 1 - \cos \varphi^2.$$

Aus (3) folgt: $$\sin \varphi^2 + a \sin \varphi = 1.$$

Diese quadratische Gleichung giebt aufgelöst

$$\sin \varphi = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Aus (4) folgt: $\cos \varphi^2 + b \cos \varphi = 1$, woraus sich der Werth von $\cos \varphi = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2 + 4}}{2}$ ergiebt. Setzt man diese Werthe für $\sin \varphi$

und $\cos\varphi$ in die gegebenen Gleichungen, so erhält man zwei algebraische Gleichungen ohne φ.

§. 51. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$\cot x \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x \cot 2x = 2$$

den Werth von x zu finden.

Auflösung. In Betracht, dass $\operatorname{tg}\alpha \cot\alpha = 1$ und $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$, so folgt aus der gegebenen Gleichung sofort:

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg} x^2} - \frac{(1-\operatorname{tg} x^2)}{2} = 2.$$

Diess mit $(1-\operatorname{tg} x^2)\,2$ multiplicirt, giebt:

$$4 - (1-\operatorname{tg} x^2)^2 = 4(1-\operatorname{tg} x^2).$$

Reducirt man gehörig, so entsteht die biquadratische Gleichung

$$\operatorname{tg} x^4 - 6\operatorname{tg} x^2 = 1\text{, welche}$$
$$\operatorname{tg} x^2 = 3 \mp \sqrt{8} \text{ und mithin}$$
$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3 \mp \sqrt{8}} \text{ giebt.}$$

§. 52. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$4\cos\varphi\sin\varphi = \sin\varphi - \cos\varphi$$

den Werth von φ zu finden.

Auflösung. Quadrirt man diese Gleichung, so kommt:

$$16\cos\varphi^2\sin\varphi^2 = 1 - 2\sin\varphi\cos\varphi\text{, oder}$$
$$4 \times (2\cos\varphi\sin\varphi)^2 + 2\sin\varphi\cos\varphi = 1\text{, d. i.}$$
$$4\sin 2\varphi^2 + \sin 2\varphi = 1\text{, oder}$$
$$\sin 2\varphi^2 + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi = \tfrac{1}{4}\text{, folglich}$$
$$\sin 2\varphi^2 + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{64} = \tfrac{17}{64}\text{; daher}$$
$$\sin 2\varphi + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}\sqrt{17} \text{ und mithin:}$$
$$\sin 2\varphi = -\tfrac{1}{8} \mp \tfrac{1}{8}\sqrt{17},$$

woraus sich nun φ leicht finden lässt.

§. 53. **Aufgabe.** Den Winkel x aus der Gleichung

$$m\sin x = n\cos x$$

zu finden.

Auflösung. Dividirt man auf beiden Seiten mit $\cos x$, so erhält man:

$$m\operatorname{tg} x = n\text{, folglich}$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{n}{m}.$$

Hätte man statt $\cos x$ gesetzt $\sqrt{1-\sin x^2}$, so würde weniger bequem $\sin x = \sqrt{\frac{n^2}{m^2+n^2}}$ gefunden.

§. 54. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$m \sin x = n \operatorname{tg} x$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung. Setzt man $\frac{\sin x}{\cos x}$ statt $\operatorname{tg} x$, so entsteht

$$m \sin x = \frac{n \sin x}{\cos x}, \text{ folglich}$$

$$m \cos x = n \text{ und mithin}$$

$$\cos x = \frac{n}{m}.$$

Hier muss $\frac{n}{m} < 1$ sein, wenn die Aufgabe möglich sein soll.

§. 55. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \sin x + b \cos x = c$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung 1. Man setze für $\cos x$ den Werth: $\sqrt{1 - \sin x^2}$, so entsteht:

$$a \sin x - c = b\sqrt{1 - \sin x^2}, \text{ folglich}$$

$$a^2 \sin x^2 - 2ac \sin x + c^2 = b^2 - b^2 \sin x^2$$

$$(a^2 + b^2) \sin x^2 - 2ac \sin x = b^2 - c^2, \text{ oder}$$

$$\sin x^2 - \frac{2ac}{a^2 + b^2} \sin x = \frac{b^2 - c^2}{a^2 + b^2}, \text{ daher}$$

$$\sin x = \frac{ac}{a^2 + b^2} \mp \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2c^2}{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{ac \mp b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Ebenso erhält man durch Substitution von $\sqrt{1 - \cos x^2}$ für $\sin x$ in der gegebenen Gleichung

$$\cos x = \frac{bc \mp a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}; \text{ oder auch}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{ac \mp b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{bc \mp a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}.$$

Auflösung 2. Man bringe die vorgelegte Gleichung zuerst auf die Form:

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

Nun führe man einen Hülfswinkel ein und setze $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, so hat man

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a}, \text{ oder}$$

$$\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x = \frac{c}{a}; \text{ also}$$

$$\sin x \cos\varphi + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{a}; \text{ folglich (nach Form.}$$

No. 17.) $$\sin(\varphi + x) = \frac{c}{a}.\cos\varphi.$$

Diese Auflösung ist für die logarithmische Berechnung bequemer, vorausgesetzt, dass a, b und c positiv sind.

Anmerkung. Aus der Gleichung $a\cos x + b\sin x = c$ folgt $\cos(x - \varphi) = \frac{c\cos\varphi}{a}$, wenn φ durch die Relation $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ bestimmt ist.

§. 56. **Aufgabe.** Den Werth von x zu finden aus jeder der Gleichungen:

$$1)\quad a\sin x - b\cos x = c,$$
$$2)\quad a\sin x + b\cos x = -c.$$

Auflösung. Setzt man wie vorhin

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi,$$

so erhält man auf demselben Wege für (1)

$$\sin(\varphi - x) = \frac{c}{a}\cos\varphi \text{ und ebenso}$$

für (2) $$\sin(\varphi + x) = -\frac{c}{a}\cos\varphi.$$

§. 57. **Aufgabe.** Man soll aus der Gleichung

$$\sin x \sin(\varphi - x) = a$$

den Werth von x bestimmen, a sei positiv oder negativ.

Auflösung. Diese Gleichung entwickelt, giebt (nach Form. No. 18) $$\sin x \sin\varphi\cos x - \cos\varphi\sin x^2 = a,$$
folglich, wenn mit $\sin x^2$ dividirt wird:

$$\sin\varphi\cot x - \cos\varphi = \frac{a}{\sin x^2} = a\operatorname{cosec} x^2$$
$$= a + a\cot x^2, \text{ also}$$
$$a\cot x^2 - \sin\varphi\cot x = -a - \cos\varphi.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\cot x = \frac{\sin\varphi}{2a} \pm \sqrt{\frac{\sin\varphi^2}{4a^2} - \frac{a + \cos\varphi}{a}}$$
$$= \frac{\sin\varphi \mp \sqrt{\sin\varphi^2 - 4a(a + \cos\varphi)}}{2a}.$$

Andere Auflösung. Aus $\sin x \sin(\varphi - x) = a$ folgt:

$$\sin\varphi \sin x \cos x - \cos\varphi \sin x^2 = a.$$

Da nun $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ (Form. No. 21) und $\sin x^2 = \frac{1-\cos 2x}{2}$ (Form. No. 48), so erhält man durch Substitution dieser Werthe: $\sin\varphi \sin 2x - \cos\varphi + \cos\varphi \cos 2x = 2a$

$$\sin\varphi \sin 2x + \cos\varphi \cos 2x = 2a + \cos\varphi,$$

folglich (Form. No. 20) $\cos(2x - \varphi) = 2a + \cos\varphi$.

§. 58. **Aufgabe.** Aus der Gleichung:

$$\cos x \cos(\varphi - x) = a$$

den Werth von x zu finden.

Auflösung. Die Entwickelung der Gleichung giebt:

$$\cos x^2 \cos\varphi - \sin\varphi \sin x \cos x = a.$$

Nun ist (Form. No. 49) $\cos x^2 = \frac{1+\cos 2x}{2}$,

also: $(1+\cos 2x)\cos\varphi - \sin 2x \sin\varphi = 2a$, folglich

$$\cos 2x \cos\varphi - \sin 2x \sin\varphi = 2a - \cos\varphi,$$

mithin: $\cos(2x+\varphi) = 2a - \cos\varphi$.

§. 59. **Aufgabe.** Aus den beiden Gleichungen:

$$1)\quad x + y = 2s,$$

$$2)\quad \sin x - \sin y = d$$

die Winkel x und y zu finden.

Auflösung. Es sei $x - y = 2\delta$, dann ist $x = s + \delta$ und $y = s - \delta$. Nach Form. No. 66 ist nun

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\tfrac{1}{2}(x-y)\cos\tfrac{1}{2}(x+y)$$

d. i. $2\sin\delta . \cos s = a$. Daraus folgt:

$$\sin\delta = \frac{a}{2\cos s}.$$

Ist hiernach der Winkel δ gefunden, so hat man

$$x = s + \delta \quad \text{und} \quad y = s - \delta.$$

§. 60. **Aufgabe.** Aus den beiden Gleichungen

$$1)\quad x - y = 2\delta \text{ und}$$

$$2)\quad \cos x + \cos y = a$$

die Winkel x und y zu bestimmen.

Auflösung. Sei $x + y = 2s$, so ist $x = s + \delta$ und $y = s - \delta$. Nun ist, nach Form. No. 67,

$$\cos y + \cos x = 2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y),$$

folglich $2\cos s \cos\delta = a$, und daher

$$\cos s = \frac{a}{2\cos\delta}.$$

Ist somit s gefunden, so ergiebt sich

$$x = s + \delta \quad \text{und} \quad y = s - \delta.$$

§. 61. **Aufgabe.** Aus den Gleichungen

$$1) \quad x + y = 2s \quad \text{und}$$

$$2) \quad \sin x \cos y = a$$

die Winkel x und y zu finden.

Auflösung. Es sei $x - y = 2\delta$. Nach Form. No. 73 ist

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2} \sin (x + y) + \tfrac{1}{2} \sin (x - y).$$

Hiernach verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$\tfrac{1}{2} \sin 2s + \tfrac{1}{2} \sin 2\delta = a. \quad \text{Daraus folgt:}$$

$$\sin 2\delta = 2a - \sin 2s.$$

§. 62. **Aufgabe.** Aus den Gleichungen

$$1) \quad x - y = 2d \quad \text{und}$$

$$2) \quad \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{a}{b}$$

die Werthe von x und y zu finden.

Auflösung. Man setze $x + y = 2s$. Aus (2) oder der Proportion: $\cos y : \cos x = b : a$ folgt

$$\cos y + \cos x : \cos y - \cos x = b + a : b - a.$$

Es ist aber (nach Form. No. 88)

$$\frac{\cos y + \cos x}{\cos y - \cos x} = \cot \tfrac{1}{2} (x + y) \cot \tfrac{1}{2} (x - y).$$

Man hat demnach die Gleichung

$$\cot \tfrac{1}{2} (x + y) \cot \tfrac{1}{2} (x - y) = \frac{b + a}{b - a}, \text{ d. i.}$$

$$\cot s \cot d = \frac{b + a}{b - a}, \text{ daher}$$

$$\cot s = \frac{b + a}{b - a} \cdot \operatorname{tg} d, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg} s = \frac{b - a}{b + a} \cdot \cot d.$$

§. 63. **Aufgabe.** Aus den beiden Gleichungen:

$$1) \quad x - y = 2d \quad \text{und}$$

$$2) \quad \sin x^2 + \sin y^2 = a,$$

die Winkel x und y zu finden.

Auflösung. Man setze $x + y = 2s$. Aus der 2. Gleichung wird nach Form. No. 48:

$$\sin x^2 + \sin y^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 2y}{2} = a, \text{ oder}$$

$$2 - (\cos 2x + \cos 2y) = 2a.$$

Da ferner, nach Form. No. 67

$$\cos 2x + \cos 2y = 2\cos(x+y)\cos(x-y),$$

so hat man $2 - 2\cos(x+y)\cos(x-y) = 2a$, oder

$$\cos 2s \cos 2d = 1 - a,$$

und mithin
$$\cos 2d = \frac{1-a}{\cos 2d}.$$

§. 64. **Aufgabe.** Aus den Gleichungen

1) $x + y = 2s$ und

2) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a$

die Winkel x und y zu finden.

Auflösung. Setzt man $x - y = 2d$ und nach Form. No. 69 $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$, so entsteht:

$\sin 2s = a \cos x \cos y$, oder nach Form. No. 75:

$$\frac{\sin 2s}{a} = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$= \tfrac{1}{2}(\cos 2s + \cos 2d), \text{ mithin}$$

$$\cos 2d = \frac{2\sin 2s}{a} - \cos 2s.$$

§. 65. **Aufgabe.** Aus den Gleichungen

1) $x + y = 2s$ und

2) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a$

die Winkel x und y zu finden.

Auflösung. Nach Form. No. 70 ist

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} = a, \text{ folglich}$$

$\sin(x-y) = a \cos x \cos y$. Ferner ist nach Form. No. 75 $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$,

daher, wenn wieder $x - y = 2d$ gesetzt wird:

$$2\sin 2d = a\cos 2d + a\cos 2s,$$

also $2\sin 2d - a\cos 2d = a\cos 2s$,

oder $\sin 2d - \frac{a}{2}\cos 2d = \frac{a}{2}\cos 2s.$

Setzt man $\frac{a}{2} = \operatorname{tg}\varphi$, so entsteht:

$$\sin 2d - \operatorname{tg}\varphi \cos 2d = \operatorname{tg}\varphi \cos 2s,$$

folglich, wenn mit $\cos\varphi$ multiplicirt wird

$$\sin 2d \cos\varphi - \sin\varphi \cos 2d = \sin\varphi \cos 2s, \text{ d. i.}$$

$$\sin(2d - \varphi) = \sin\varphi \cos 2s,$$

eine Gleichung, aus welcher, da φ bekannt ist, $2d - \varphi$, oder $2d$ gefunden wird, wo dann $x = s + d$ und $y = s - d$ sich ergiebt.

In ähnlicher Weise lassen sich noch viele andere Aufgaben mit zwei Unbekannten auflösen, wenn deren Summe oder Differenz gegeben ist und ausserdem eine goniometrische Gleichung.

§. 66. **Aufgabe.** Welches Winkels Cosinus ist ebenso gross als dessen Tangente, oder aus der Gleichung

$$\cos x = \operatorname{tg} x$$

den Werth von x zu finden.

Auflösung. Es ist $\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$, also, da $\sin x = \sqrt{1 - \cos x^2}$, so hat man

$$\cos x = \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{\cos x}$$

$$\cos x^2 = \frac{1 - \cos x^2}{\cos x^2}, \text{ folglich}$$

$$\cos x^4 + \cos x^2 = 1.$$

Setzt man $\cos x^2 = y$, so entsteht die quadratische Gleichung:

$$y^2 + y = 1. \text{ Hieraus folgt:}$$

$$y = -\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \text{ u. s. w.}$$

§. 67. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \cos x = b \sin (A - x)$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung. Entwickelt man $\sin(A - x)$, so erhält man:

$$a \cos x = b \sin A \cos x - b \sin x \cos A.$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit $\cos x$, so entsteht:

$$a = b \sin A - b \cos A \operatorname{tg} x,$$

folglich $$b \cos A \operatorname{tg} x = b \sin A - a,$$

daher $$\operatorname{tg} x = \frac{b \sin A - a}{b \cos A}.$$

§. 68. **Aufgabe.** Den Winkel x aus der Gleichung

$$a \sin (A - x) - b \cos (B + x) = c \sin x$$

zu bestimmen.

Auflösung. Die Entwickelung der Gleichung giebt:

$$a \sin A \cos x - a \sin x \cos A - b \cos B \cos x + b \sin B \sin x = c \sin x.$$

Wird mit $\cos x$ dividirt, so entsteht:

$$a \sin A - a \cos A \operatorname{tg} x - b \cos B + b \sin B \operatorname{tg} x = c \operatorname{tg} x$$

oder $$(c + a \cos A - b \sin B) \operatorname{tg} x = a \sin A - b \cos B,$$

und folglich $$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin A - b \cos B}{c + a \cos A - b \sin B}.$$

§. 69. **Aufgabe.** Es soll ein Quadrant in zwei solche Theile getheilt werden, dass sich die Tangenten derselben zu einander verhalten, wie $2:5$. Wie gross sind die Bogen, und wie gross die Tangenten?

Auflösung. Nennt man den kleinern Bogen x, so ist der andere $= 90 - x$. Es ist also $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg}(90 - x) = 2:5$, folglich $5 \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg}(90^0 - x)$, oder nach Form. No. 1

$$5 \operatorname{tg} x = 2 \cot x.$$

Nun fanden wir aus der Gleichung in der Aufgabe (§. 38.)

$$a \operatorname{tg}^2 x = b \cot x$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Da nun hier $a = 5$ und $b = 2$; so ist

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\tfrac{2}{5}}.$$

$$\begin{array}{rcl}
 & & +2 \\
\log 2 & = & 0{,}3010300 - 2 \\
\log 5 & = & 0{,}6989700 \\
\hline
 & & 1{,}6020600 - 2 \\
\log \operatorname{tg} x & =^{2)} & 0{,}8010300 \\
 & & +9 \quad 8365 - 10 \\
\hline
 & 4661) & 193500\ (41{,}5''.
\end{array}$$

Diesem Log. tang. entspricht: $x = 32^0\, 18'\, 41{,}5''$; der andere Bogen ist also $(90^0 - x) = 57^0\, 41'\, 18{,}5''$.

Da die Tangente des kleineren Bogens $= \sqrt{\tfrac{2}{5}}$ ist, so findet man leicht die des andern, nämlich $\operatorname{tg}(90 - x)$. Es ist nämlich:

$$2:5 = \sqrt{\tfrac{2}{5}} : \operatorname{tg}(90 - x), \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg}(90 - x) = \tfrac{5}{2}\sqrt{\tfrac{2}{5}} = \sqrt{2\tfrac{1}{2}}.$$

§. 70. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$\sin(x - y) = \cos(x + y) = \tfrac{1}{2}$$

die Werthe von x und y zu finden.

Auflösung. Aus der Gleichung

$$\sin(x - y) = \tfrac{1}{2} \text{ folgt sofort,}$$

1) dass $x - y = 30^0$ ist.*)

Ebenso folgt aus der Gleichung $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$,

2) dass $x + y = 60^0$ ist.**)

Aus 1) und 2) ergiebt sich nun:

$$x = 45^0 \quad \text{und} \quad y = 15^0.$$

---

*) Es ist nämlich $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$. **) Weil $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$.

§. 71. **Aufgabe.** Die Gleichung

$$a \sin(\alpha - \varphi) = b \sin(\alpha + \varphi),$$

in welcher φ unbekannt ist, aufzulösen.

Auflösung. Entwickelt man sowohl $\sin(\alpha - \varphi)$, $\sin(\alpha + \varphi)$, so erhält man (Form. No. 17. 18.)

$$a[\sin\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\cos\alpha] = b[\sin\alpha\cos\varphi + \sin\varphi\cos\alpha].$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit $\cos\alpha\cos\varphi$, so entsteht:

$$a[\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi] = b[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi], \text{ oder}$$

$$a\operatorname{tg}\alpha - a\operatorname{tg}\varphi = b\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\varphi, \text{ oder}$$

$$a\operatorname{tg}\alpha - b\operatorname{tg}\alpha = a\operatorname{tg}\varphi + b\operatorname{tg}\varphi,$$

d. i.

$$(a-b)\operatorname{tg}\alpha = (a+b)\operatorname{tg}\varphi,$$

folglich

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a-b}{a+b}.\operatorname{tg}\alpha.$$

§. 72. **Aufgabe.** Die Gleichung

$$a\sin(\alpha+\varphi) = b\cos(\alpha-\varphi)$$

aufzulösen.

Auflösung. Diese Gleichung giebt entwickelt (Form. No. [19] u. 20): $a[\sin\alpha\cos\varphi + \sin\varphi\cos\alpha] = b[\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi]$. Auf beiden Seiten mit $\cos\alpha\cos\varphi$ dividirt:

$$a[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi] = b[1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi] \text{ d. i.}$$

$$a\operatorname{tg}\alpha + a\operatorname{tg}\varphi = b + b\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi,$$

folglich $a\operatorname{tg}\varphi - b\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi = b - a\operatorname{tg}\alpha$, oder

$$\operatorname{tg}\varphi[a - b\operatorname{tg}\alpha] = b - a\operatorname{tg}\alpha, \text{ mithin}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b - a\operatorname{tg}\alpha}{a - b\operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{oder} = \frac{a\operatorname{tg}\alpha - b}{b\operatorname{tg}\alpha - a}.$$

Setzt man $a = b\operatorname{tg}\beta$, so wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}.$$ Nach Form. No. 70 ist:

$$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta\cos\alpha}, \text{ daher}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\left(1 - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}.\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)}{\sin(\beta-\alpha)} \times \cos\beta\cos\alpha$$

$$= \frac{\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}, \text{ d. i.}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$$

§. 73. **Aufgabe.** Man soll die Gleichung

$$a \cos(\alpha + \varphi) = b \sin(\alpha - \varphi) \text{ auflösen.}$$

Auflösung. Entwickelt man die Parenthesen, so erhält man:

$$a[\cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi] = b[\sin\alpha \cos\varphi - \sin\varphi \cos\alpha].$$

Dividirt man beiderseits mit $\cos\alpha \cos\varphi$, so entsteht:

$$a[1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi] = b[\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi], \text{ d. i.}$$

$$a - a \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi = b \operatorname{tg}\alpha - b \operatorname{tg}\varphi, \text{ oder}$$

$$b \operatorname{tg}\varphi - a \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi = b \operatorname{tg}\alpha - a, \text{ also}$$

$$\operatorname{tg}\varphi\,[b - a \operatorname{tg}\alpha] = b \operatorname{tg}\alpha - a, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b \operatorname{tg}\alpha - a}{b - a \operatorname{tg}\alpha}.$$

Man setze $\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b}$, so wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \frac{a}{b}}{1 - \frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha}.$$

Nach Form. No. 70 verwandelt sich dieser Ausdruck in folgenden:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta\left(1 - \frac{\sin\beta \sin\alpha}{\cos\beta \cos\alpha}\right)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

§. 74. **Aufgabe.** Die Gleichungen

$$1) \quad a \cos(\alpha + \varphi) = b \cos(\alpha - \varphi)$$

$$2) \quad a \sin(\alpha + \varphi) = b \cos(\alpha + \varphi)$$

aufzulösen.

Auflösung von 1. Diese Gleichung giebt zunächst

$$a[\cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi] = b[\cos\alpha \cos\varphi + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi].$$

Mit $\cos\alpha \cos\varphi$ beiderseits dividirt:

$$a[1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi] = b[1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi]$$

$$a - a \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi = b + b \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi, \quad \text{oder}$$

$$a - b = a \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi + b \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi$$

$$= (a + b) \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a - b}{(a + b)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a - b}{a + b}.\cot\alpha.$$

Auflösung von 2. Es ist hier:

$$a[\sin\alpha \cos\varphi + \sin\varphi \cos\alpha] = b[\cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi].$$

Mit $\cos\alpha \cos\varphi$ beiderseits dividirt:

$$a[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi] = b[1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi] \text{ d. i.}$$

$$a \operatorname{tg}\alpha + a \operatorname{tg}\varphi = b - b \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi, \quad \text{oder}$$

$$a \operatorname{tg} \varphi + b \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi = b - a \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \varphi (a + b \operatorname{tg} \alpha) = b - a \operatorname{tg} \alpha, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b - a \operatorname{tg} \alpha}{a + b \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{b}{a} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha}.$$

Setzt man zur Vereinfachung $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta$, so erhält man:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha}, \text{ (also nach Form. No. 33)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\beta - \alpha).$$

§. 75. **Aufgabe.** Den Winkel φ aus der Gleichung

$$\sin \delta \sin (\alpha + \varphi) = \cos \delta \cos (\alpha + \varphi)$$

zu bestimmen, wenn $\delta = 36^0 19' 28''$ und $\alpha = 25^0 19' 32''$ ist.

Auflösung. Die Gleichung giebt entwickelt:

$$\sin \delta \sin \alpha \cos \varphi + \sin \varphi \cos \alpha \sin \delta = \cos \delta \cos \alpha \cos \varphi - \cos \delta \sin \alpha \sin \varphi.$$

Dividirt man mit $\cos \delta \cos \alpha \cos \varphi$, so entsteht:

$$\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi = 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi = 1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \varphi (\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \alpha) = 1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \alpha}.$$

oder (Form. No. 32) $\quad \cot \varphi = \operatorname{tg} (\alpha + \delta)$.

Da nun $\alpha + \delta = 61^0 39'$ und $\cot \varphi = \operatorname{tg} (90 - \varphi)$, so ist

$$\varphi = (90^0 - 61^0 39') = 28^0 21', \text{ oder}$$

$$\varphi = 28^0 21' + \pi = 208^0 21'.$$

§. 76. **Aufgabe.** Die Gleichung

$$m \sin (a + x) = n \sin (b + x) \text{ aufzulösen.}$$

Auflösung. Diese Gleichung entwickelt, giebt:

$$m [\sin a \cos x + \sin x \cos a] = n [\sin b \cos x + \sin x \cos b].$$

Mit $\cos x$ dividirt, so erhält man:

$$m [\sin a + \operatorname{tg} x \cos a] = n [\sin b + \operatorname{tg} x \cos b]$$

$$m \sin a + m \operatorname{tg} x \cos a = n \sin b + n \operatorname{tg} x \cos b$$

$$\operatorname{tg} x (m \cos a - n \cos b) = n \sin b - m \sin a$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{n \sin b - m \sin a}{m \cos a - n \cos b} = \frac{m \sin a - n \sin b}{n \cos b - m \cos a}.$$

Wird Zähler und Nenner mit m dividirt, so entsteht:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin a - \frac{n}{m}\sin b}{\frac{n}{m}\cos b - \cos a}.$$

Setzt man $\frac{n}{m} = \frac{\cos a}{\sin b} \operatorname{tg} \varphi$, woraus sich der Hülfswinkel φ ergiebt. Man hat nun

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin a - \cos a \operatorname{tg} \varphi}{\frac{\cos a}{\sin b} \operatorname{tg} \varphi \cos b - \cos a} = \frac{\sin a \sin b - \cos a \sin b \operatorname{tg} \varphi}{\cos a \cos b \operatorname{tg} \varphi - \cos a \sin b}$$

$$= \frac{\sin b \left(\sin a - \cos a \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right)}{\cos a \left(\cos b \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \sin b\right)}$$

$$= \frac{\sin b (\sin a \cos \varphi - \cos a \sin \varphi)}{\cos a (\cos b \sin \varphi - \sin b \cos \varphi)}, \text{ d. i.}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin b \sin (a - \varphi)}{\cos a \sin (\varphi - b)}.$$

Andere Auflösung. Man setze $a + x = y$, also $x = y - a$; dann erscheint die vorgelegte Gleichung in folgender Gestalt:

$$m \sin y = n \sin [(b - a) + y] \text{ d. i.}$$

$$\frac{m}{n} \sin y = \sin (b - a) \cos y + \sin y \cos (b - a).$$

Dividirt man mit $\sin (b - a) \cos y$, so entsteht:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg} y}{\sin (b - a)} = 1 + \operatorname{tg} y \cot (b - a), \text{ oder}$$

$$\frac{m}{n} \operatorname{tg} y = \sin (b - a) + \operatorname{tg} y \cos (b - a); \text{ daher}$$

$$\frac{m}{n} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \cos (b - a) = \sin (b - a), \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg} y \left[\frac{m}{n} - \cos (b - a)\right] = \sin (b - a),$$

mithin

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin (b - a)}{\frac{m}{n} - \cos (b - a)}.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = \sin (b - a) \cot \varphi$, woraus der Winkel φ bestimmt wird, so hat man

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin (b - a)}{\sin (b - a) \cot \varphi - \cos (b - a)}$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin(b-a)}{\sin(b-a)\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \cos(b-a)}$$

$$= \frac{\sin(b-a)\sin\varphi}{\sin(b-a)\cos\varphi - \cos(b-a)\sin\varphi}$$

$$= \frac{\sin(b-a)\sin\varphi}{\sin(b-a-\varphi)}.$$

Beispiel. Welcher Werth von x genügt der vorhergehenden Gleichung, wenn $m = 5{,}714$; $n = 3{,}098$; $b = 34^0\,17'$; $a = 79^0\,30'$ ist? Antw. $x = 68^0\,35'\,35''$, oder $248^0\,35'\,35''$.

Man berechne zuerst aus $\dfrac{\cos a}{\sin b}\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{n}{m}$ den Werth des Hülfswinkels φ, nämlich $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{n \sin b}{m \cos a}$ u. s. w.

§. 77. **Aufgabe.** Aus der Gleichung:

$$m\sin(a+x) = n\sin(b-x)$$

den Werth von x zu finden.

Auflösung. Diese Gleichung giebt entwickelt:

$$m[\sin a\cos x + \sin x\cos a] = n[\sin b\cos x - \sin x\cos b].$$

Wird beiderseits mit $\sin a\sin b\cos x$ dividirt, so kommt:

$$m\left[\frac{1}{\sin b} + \frac{\operatorname{tg} x\,.\cot a}{\sin b}\right] = n\left[\frac{1}{\sin a} - \frac{\operatorname{tg} x\cot b}{\sin a}\right],$$

oder: $$m[\sin a + \operatorname{tg} x\cos a] = n[\sin b - \operatorname{tg} x\cos b], \text{ d. i.}$$

$$m\operatorname{tg} x\cos a + n\operatorname{tg} x\cos b = n\sin b - m\sin a.$$

oder $$\operatorname{tg} x(m\cos a + n\cos b) = n\sin b - m\sin a.$$

folglich $$\operatorname{tg} x = \frac{n\sin b - m\sin a}{m\cos a + n\cos b},$$

oder $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin b - \dfrac{m}{n}\sin a}{\dfrac{m}{n}\cos a + \cos b}.$$

Setzt man $\dfrac{m}{n} = \dfrac{\cos b}{\sin a}\operatorname{tg}\varphi$; so erhält man:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin b - \cos b\operatorname{tg}\varphi}{\dfrac{\cos b}{\sin a}\operatorname{tg}\varphi + \cos b} = \frac{\sin a\sin b - \cos b\operatorname{tg}\varphi\sin a}{\cos b\cos a\operatorname{tg}\varphi + \cos b\sin a}$$

$$= \frac{\sin a\left(\sin b - \cos b\,.\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)}{\cos b\left(\cos a\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \sin a\right)}$$

$$= \frac{\sin a\,(\sin b \cos\varphi - \cos b \sin\varphi)}{\cos b\,(\cos a \sin\varphi + \sin a \cos\varphi)} \text{ d. i.}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin a \sin(b-\varphi)}{\sin b \sin(\varphi + a)}.$$

§. 78. **Aufgabe.** Die Gleichung

$m \sin(a - x) = n \sin(b - x)$ aufzulösen.

Auflösung. Durch Entwickelung der Klammern entsteht:

$m \sin a \cos x - m \sin x \cos a = n \sin b \cos x - n \sin x \cos b$, oder

$$\frac{m \sin a}{n \cos b} \cos x - \frac{m \sin a \cos a \sin x}{n \cos b \sin a} = \frac{\sin b \cos x}{\cos b} - \sin x.$$

Setzt man $\frac{m \sin a}{n \cos b} = \operatorname{tg}\varphi$, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\varphi \cos x - \operatorname{tg}\varphi \frac{\cos a \sin x}{\sin a} = \frac{\sin b \cos x}{\cos b} - \sin x, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\varphi \sin a - \operatorname{tg}\varphi \cos a \operatorname{tg} x = \frac{\sin a \sin b}{\cos b} - \sin a \operatorname{tg} x,$$

folglich $\operatorname{tg}\varphi \sin a - \frac{\sin a \sin b}{\cos b} = \operatorname{tg}\varphi \cos a \operatorname{tg} x - \sin a \operatorname{tg} x.$

$$\frac{\sin a\,(\sin\varphi \cos b - \sin b \cos\varphi)}{\cos\varphi \cos b \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cos a - \sin a\right)} = \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{\sin a \sin(\varphi - b)}{\cos b\,(\sin\varphi \cos a - \sin a \cos\varphi)} = \frac{\sin a \sin(\varphi - b)}{\cos b \sin(\varphi - a)}.$$

§. 78[a]. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$\sin(60^0 - x) = 2 \sin(30^0 - x)$

den Werth von x zu finden.

Auflösung. Nach der Formel der vorigen Aufgabe hat man zur Berechnung des Hülfswinkels

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 60^0}{2 \cos 30^0} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Hier ist nun $\log \operatorname{tg}\varphi = 9{,}6989700 - 10$

folglich $\varphi = 26^0\,33'\,54''$,

daher $\varphi - b = 3^0\,26'\,6''$ und $\varphi - a = 33^0\,26'\,6''$.

$$\begin{aligned} \log\sin 3^0\,26'\,6'' &= 18{,}7775438 - 20 \\ -\log\sin 33^0\,26'\,6'' &= 9{,}7411442 - 10 \\ \hline \log \operatorname{tg} x &= 9{,}0363996 - 10. \end{aligned}$$

Diesem Log. entspricht $x = 6^0\,12'\,22''$,

und $x = 180^0 + 6^0\,12'\,22'' = 186^0\,12'\,22''$.

§. 79. **Aufgabe.** Den Werth von x aus der Gleichung

$$m \cos(a+x) = n \sin(b+x)$$

zu bestimmen.

Auflösung. Zunächst erhält man:

$$m \cos a \cos x - m \sin a \sin x = n \sin b \cos x + n \sin x \cos b$$

oder

$$m \cos a - m \sin a \operatorname{tg} x = n \sin b + n \operatorname{tg} x \cos b.$$

$$n \operatorname{tg} x \cos b + m \sin a \operatorname{tg} x = m \cos a - n \sin b$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{m \cos a - n \sin b}{n \cos b + m \sin a}.$$

Setzt man $\frac{m \cos a}{n \cos b} = \operatorname{tg} \varphi$ und verwandelt die gefundene Formel in folgende:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{m \cos a}{n \cos b} - \frac{n \sin b}{n \cos b}}{1 + \frac{m \sin a \cos a}{n \cos b \cos a}}$$, so erhält man:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} a} = \frac{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\sin b}{\cos b}}{1 + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \frac{\sin a}{\cos a}}$$

$$= \frac{\sin \varphi \cos b - \cos \varphi \sin b}{\cos b \left(\cos \varphi + \sin \varphi \frac{\sin a}{\cos a}\right)}$$

$$= \frac{\cos a \sin (b - \varphi)}{\cos b (\cos a \cos \varphi + \sin \varphi \sin a)}$$, mithin

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos a \sin (b - \varphi)}{\cos b \cos (a - \varphi)}.$$

§. 80. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$\cos x^2 - 3 \cos x = a$$

den Werth von x zu finden.

Auflösung. Da man hier eine quadratische Gleichung hat, in welcher $\cos x$ die unbekannte Grösse ist, so erhält man

$$\cos x^2 - 3 \cos x + (\tfrac{3}{2})^2 = a^2 + \tfrac{9}{4}$$, folglich

$$\cos x - \tfrac{3}{2} = \sqrt{\frac{4a + 9}{4}}$$; mithin

$$\cos x = \tfrac{3}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{4a + 9}.$$

Nach dieser Formel lässt sich, sobald a in bestimmter Zahl gegeben ist, das Gradmass von x leicht bestimmen.

§. 81. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$m(\cos a + x) = n \sin(b - x)$$

den Werth von x zu finden.

Auflösung. Man erhält hier

$$m \cos a \cos x - m \sin a \sin x = n \sin b \cos x - n \sin x \cos b,$$

oder $$m \cos a - m \sin a \operatorname{tg} x = n \sin b - n \operatorname{tg} x \cos b$$

d. i. $$m \sin a \operatorname{tg} x + n \cos b \operatorname{tg} x = n \sin b - m \cos a,$$

folglich $$\operatorname{tg} x = \frac{n \sin b - m \cos a}{m \sin a + n \cos b}.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = \frac{\cos b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi$, so wird

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin b - \frac{m}{n} \cos a}{\frac{m}{n} \sin a + \cos b}, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin b - \cos b \operatorname{tg} \varphi}{\frac{\cos b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi \sin a + \cos b}$$

$$= \frac{\sin b - \frac{\cos b \sin \varphi}{\cos \varphi}}{\frac{\cos b}{\cos a} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin a + \cos b}$$

$$= \frac{\sin b \cos \varphi - \cos b \sin \varphi}{\frac{\cos b \sin \varphi}{\cos a} \sin a + \cos b \cos \varphi}$$

$$= \frac{\cos a \sin(b - \varphi)}{\cos b (\sin \varphi \sin a + \cos a \cos \varphi)}$$

$$= \frac{\cos a \sin(b - \varphi)}{\cos b \cos(a - \varphi)}.$$

§. 82. **Aufgabe.** Die Gleichung

$m \cos(a - x) = n \sin(b + x)$ aufzulösen.

Auflösung. Die Entwickelung giebt:

$$m \cos a \cos x + m \sin a \sin x = n \sin b \cos x + n \sin x \cos b$$

oder $$m \cos a + m \sin a \operatorname{tg} x = m \sin b + n \operatorname{tg} x \cos b,$$

$$n \cos b \,.\, \operatorname{tg} x - m \sin a \operatorname{tg} x = m \cos a - n \sin b, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{m \cos a - n \sin b}{n \cos b - m \sin a} = \frac{\frac{m}{n} \cos a - \sin b}{\cos b - \frac{m}{n} \sin a}.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = \frac{\cos b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi$, so entsteht:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos b \operatorname{tg} \varphi - \sin b}{\cos b - \frac{\cos b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi \sin a}$$

$$= \frac{\cos b \cos a \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \cos a \sin b}{\cos b \cos a - \frac{\cos b \sin a \sin \varphi}{\cos \varphi}}$$

$$= \frac{\cos b \cos a \sin \varphi - \sin a \cos \varphi \sin b}{\cos b \cos a \cos \varphi - \cos b \sin a \sin \varphi}$$

$$= \frac{\cos a \sin(\varphi - b)}{\cos b \cos(a + \varphi)}.$$

§. 83. **Aufgabe.** Die Gleichung

$m \cos(a - x) = n \sin(b - x)$ aufzulösen.

Auflösung. Man erhält hier:

$$m \cos a \cos x + m \sin a \sin x = n \sin b \cos x - n \sin x \cos b$$

oder: $$m \cos a + m \sin a \operatorname{tg} x = n \sin b - n \operatorname{tg} x \cos b,$$

$$\operatorname{tg} x (m \sin a + n \cos b) = n \sin b - m \cos a$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{n \sin b - m \cos a}{m \sin a + n \cos b} = \frac{\sin b - \frac{m}{n} \cos a}{\frac{m}{n} \sin a + \cos b}.$$

Wird $\frac{m}{n} = \frac{\cos b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi$ gesetzt, so entsteht

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin b - \cos b \operatorname{tg} \varphi}{\frac{\cos b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi \sin a + \cos b}$$

$$= \frac{\cos a \sin b \cos \varphi - \cos a \cos b \sin \varphi}{\cos b \sin \varphi \sin a + \cos a \cos b \cos \varphi}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich offenbar auf:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos a \sin(b - \varphi)}{\cos b \cos(a - \varphi)}.$$

§. 84. **Aufgabe.** Den Winkel x aus der Gleichung

$m \cos(a + x) = n \cos(b + x)$ zu finden.

Auflösung. Hier erhält man sofort:

$$m \cos a \cos x - m \sin a \sin x = n \cos b \cos x - n \sin b \sin x$$

und, wenn man mit $\cos x$ dividirt:

$$m \cos b - m \sin a \operatorname{tg} x = n \cos b - n \sin b \operatorname{tg} x,$$

folglich $(m \sin a - n \sin b) \operatorname{tg} x = m \cos a - n \cos b$,

also $$\operatorname{tg} x = \frac{m \cos a - n \cos b}{m \sin a - n \sin b} = \frac{\frac{m}{n} \cos a - \cos b}{\frac{m}{n} \sin a - \sin b}.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = \frac{\sin b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi$, so wird

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin b \operatorname{tg} \varphi - \cos b}{\frac{\sin b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi \sin a - \sin b} = \frac{\cos b - \frac{\sin b \sin \varphi}{\cos \varphi}}{\sin b - \frac{\sin b}{\cos a} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin a}$$

$$= \frac{\cos a \cos b \cos \varphi - \sin b \cos a \sin \varphi}{\sin b \cos a \cos \varphi - \sin b \sin \varphi \sin a}$$

$$= \frac{\cos a \,.\, \cos (b + \varphi)}{\sin b \,.\, \cos (a + \varphi)}.$$

§. 85. **Aufgabe.** Den Winkel x aus der Gleichung $m \cos (a + x) = n \cos (b - x)$ zu finden.

Auflösung. Diese Gleichung giebt:

$$m \cos a \cos x - m \sin a \sin x = n \cos b \cos x + n \sin b \sin x,$$

oder $m \cos a - m \sin a \operatorname{tg} x = n \cos b + n \sin b \operatorname{tg} x$,

folglich $(m \sin a + n \sin b) \operatorname{tg} x = m \cos a - n \cos b$,

also $$\operatorname{tg} x = \frac{m \cos a - n \cos b}{m \sin a + n \sin b}$$

$$= \frac{\frac{m}{n} \cos a - \cos b}{\frac{m}{n} \sin a + \sin b}.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = \frac{\sin b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi$, so entsteht:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{\sin b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi \cos a - \cos b}{\frac{\sin b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi \sin a + \sin b}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\cos a \cos \varphi$, so erhält man:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin b \sin \varphi \cos a - \cos b \cos a \cos \varphi}{\sin b \sin \varphi \sin a + \sin b \cos a \cos \varphi}$$

$$= \frac{-\cos a \cos (b + \varphi)}{\sin b \cos (a - \varphi)}.$$

§. 86. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$m \cos(a - x) = n \cos(b - x)$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung. Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$m \cos a \cos x + m \sin a \sin x = n \cos b \cos x + n \sin b \sin x$$

oder $$m \cos a + m \sin a \operatorname{tg} x = n \cos b + n \sin b \operatorname{tg} x, \text{ also}$$

$$(m \sin a - n \sin b) \operatorname{tg} x = n \cos b - m \cos a,$$

folglich $$\operatorname{tg} x = \frac{n \cos b - m \cos a}{m \sin a - n \sin b}$$

$$= \frac{\cos b - \frac{m}{n} \cos a}{\frac{m}{n} \sin a - \sin b}.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = \frac{\sin b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi$, so entsteht:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos b - \frac{\sin b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi \cos a}{\frac{\sin b}{\cos a} \operatorname{tg} \varphi \sin a - \sin b}.$$

Multiplicirt man die Glieder des Bruches mit $\cos a \cos \varphi$, so erhält man:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos a \cos b \cos \varphi - \sin b \sin \varphi \cos a}{\sin b \sin \varphi \sin a - \sin b \cos a \cos \varphi}$$

$$= \frac{-\cos a \sin(b + \varphi)}{\sin b \cos(a + \varphi)}.$$

§. 87. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \operatorname{tg} x + b \cot x = c$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung. Man setze $\operatorname{tg} x = y$, so ist $\cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{y}$. Die gegebene Gleichung verwandelt sich demnach in folgende quadratische:

$$ay + \frac{b}{y} = c, \quad \text{oder}$$

$$ay^2 - cy = -b. \text{ Sie giebt aufgelöst:}$$

$$y = \frac{c}{2a} \mp \frac{\sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}.$$

§. 88. **Aufgabe.** Aus den beiden Gleichungen

$$1)\quad x\sin(A-y)=a$$

$$2)\quad x\sin(B-y)=b$$

die Grössen x und y zu finden.

Auflösung 1. Diese giebt *Gauss* in seiner Theoria motus corp. coel. §. 78.

Durch Elimination von x und durch Einführung des Hülfswinkels $\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{b}$ erhält man die Gleichung:

$$(\cos\varphi\sin A-\sin\varphi\sin B)\cos y=(\cos\varphi\cos A-\sin\varphi\cos B)\sin y.$$

Um x und y zu finden, bedarf man keines neuen Hülfswinkels; denn es ist

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B-y)=\operatorname{tg}(45+\varphi)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B-A)$$

und
$$x=\frac{\sin(45+\varphi)}{\sin\varphi\cos\frac{1}{2}(B-A)\sin(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-y)}.$$

Dividirt man nämlich beide Gleichungen, so entsteht

$$\frac{\sin(A-y)}{\sin(B-y)}=\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

daher
$$\cos\varphi\sin(A-y)=\sin\varphi\sin(B-y)\ \text{d. i.}$$

$$\cos\varphi\sin A\cos y-\cos A\sin y\cos\varphi=\sin\varphi\sin B\cos y-\cos B\sin y\sin\varphi$$

oder $(\cos\varphi\sin A-\sin\varphi\sin B)\cos y=(\cos\varphi\cos A-\sin\varphi\cos B)\sin y$. u. s. w.

Auflösung 2. Da $x=\frac{a}{\sin(A-y)}$ (aus 1) und $x=\frac{b}{\sin(B-y)}$ (aus 2), so ist

$$a\sin(B-y)=b\sin(A-y).$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tg}y=\frac{b\sin A-a\sin B}{b\cos A-a\cos B}.$$

Setzt man $\frac{b}{a}=\frac{\cos B}{\sin A}\operatorname{tg}\varphi$, so erhält man (wie oben §. 78)

$$\operatorname{tg}y=\frac{\sin A\sin(\varphi-B)}{\cos B\sin(\varphi-A)}.$$

§. 89. **Aufgabe.** Aus den beiden Gleichungen

$$1)\quad x\sin(a+y)=m$$

$$2)\quad x\sin(b+y)=n$$

die Werthe von x und y zu finden.

Auflösung. Eliminirt man wie zuvor aus beiden Gleichungen die Unbekannte x, so erhält man:

$$m \sin(a + y) = m \sin(b + y).$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichung geschieht nun wie oben §. 76.

§. 90. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \sin x^2 + b \sin x \cos x = d$$

den Winkel x zu berechnen.

Auflösung. Nach Form. No. 48 ist

$\sin x^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ und nach No. 21 ist

$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$. Setzt man diese Werthe in die gegebene Gleichung, so erhält man:

$$a \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{b \sin 2x}{2} = d,$$

also

$$a(1 - \cos 2x) + b \sin 2x = 2d, \text{ folglich}$$

$$b \sin 2x - a \cos 2x = 2d - a, \text{ oder}$$

$$\sin 2x - \frac{a}{b} \cos 2x = \frac{2d - a}{a}.$$

Setzt man nun $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varphi$, so entsteht:

$$\sin 2x - \operatorname{tg} \varphi \cos 2x = \frac{2d - a}{a}, \quad \text{oder}$$

$$\sin 2x \cos \varphi - \sin \varphi \cos 2x = \frac{2d - a}{a} \cdot \cos \varphi,$$

$$\text{d. i. } \sin(2x - \varphi) = \frac{2d - a}{a} \cdot \cos \varphi.$$

§. 91. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \operatorname{tg} x^2 + b \cot x^2 = c$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung 1. Statt $\cot x^2$ setze man $\frac{1}{\operatorname{tg} x^2}$, so ist

$$a \operatorname{tg} x^2 + \frac{b}{\operatorname{tg} x^2} = c, \quad \text{oder}$$

$$a \operatorname{tg} x^4 + b = c \operatorname{tg} x^2.$$

Diese Gleichung vom vierten Grade kann als quadratische behandelt werden. Es ist nämlich:

$$\operatorname{tg} x^4 - \frac{c}{a} \operatorname{tg} x^2 = -\frac{b}{a}, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg} x^4 \quad \frac{c}{a} \operatorname{tg} x^2 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} - \frac{b}{a} = \frac{c^2 - ab}{a^2}$$

und $$\operatorname{tg} x^2 = +\frac{c}{a} + \frac{\sqrt{c^2 - ab}}{a}, \text{ mithin}$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{c}{a} \mp \frac{\sqrt{c^2 - ab}}{a}}.$$

Auflösung 2. Nach Form. No. 61 ist $\operatorname{tg} x^2 = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ und nach Form. No. 62 hat man

$$\cot x^2 = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}.$$

Substituirt man diese Werthe in die gegebene Gleichung, so erhält man:

$$\frac{a(1 - \cos 2x)}{1 + \cos 2x} + \frac{b\,(1 + \cos 2x)}{1 - \cos 2x} \quad c.$$

Multiplicirt man mit $1 - \cos 2x^2$, so entsteht:

$$a(1 - \cos 2x)^2 + b\,(1 + \cos 2x)^2 = c\,(1 - \cos 2x^2)$$

d. i. $$\left.\begin{array}{l} a - 2a\cos 2x + a\cos 2x^2 \\ + b + 2b\cos 2x + b\cos 2x^2 \end{array}\right\} = c - c.\cos 2x^2.$$

Diese quadratische Gleichung giebt, geordnet:

$$(a + b + c)\cos 2x^2 - 2(a - b)\cos 2x = c - a - b,$$

in welcher $\cos 2x$ die gesuchte Grösse ist, die sich nun ohne Schwierigkeit aus ihr bestimmen lässt.

§. 92. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$a \sec x^2 + b \sec x \operatorname{cosec} x + c \operatorname{cosec} x^2 = d$$

den Winkel x zu finden.

Auflösung. Nach Form. No. 52 und No. 53 verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende:

$$a.\frac{2}{1 + \cos 2x} + 2b \operatorname{cosec} 2x + c\,\frac{2}{1 - \cos 2x} = d.$$

Aus dieser Gleichung wird eine quadratische mit der unbekannten Grösse $\cos 2x$, sobald $b = 0$ ist, oder auch in dem Falle, wo $a = c$ ist, wo dann $\sin 2x$ die unbekannte Grösse ist. In diesem Falle hat man

$$\frac{2a}{1 + \cos 2x} + \frac{2a}{1 - \cos 2x} + \frac{2b}{\sin 2x} = d,$$

oder $$\frac{2a(1 - \cos 2x) + 2a\,(1 + \cos 2x)}{1 - \cos 2x^2} + \frac{2b}{\sin 2x} = d$$

d. i. $$\frac{4a}{\sin 2x^2} + \frac{2b}{\sin 2x} = 2d.$$

Aus dieser Gleichung kann nun der Winkel x gefunden werden.

§. 93. **Aufgabe.** *Gesucht werden zwei Kreisbogen, welche sich wie* 3 : 5 *verhalten. Die Sinus derselben verhalten sich aber* = 2 : 3.

Auflösung. Setzt man den einen Kreisbogen $= 3x$, so ist der andere $= 5x$, und wird der Sinus von jenem mit $2y$ bezeichnet, so ist der Sinus des anderen Bogens $= 3y$. Nun folgt nach Form. No. 87

$$5y : y = \operatorname{tg} 4x : \operatorname{tg} x, \quad \text{oder}$$
$$5 : 1 = \operatorname{tg} 4x : \operatorname{tg} x.$$

Hieraus erhält man also die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 4x = 5 \operatorname{tg} x.$$

Nach Form. N. 191 hat man daher

$$\frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg} x^3}{1 - 6 \operatorname{tg} x^2 + \operatorname{tg} x^4} = 5 \operatorname{tg} x, \quad \text{oder}$$
$$\frac{4 - 4 \operatorname{tg} x^2}{1 - 6 \operatorname{tg} x^2 + \operatorname{tg} x^4} = 5, \quad \text{folglich}$$
$$4 - 4 \operatorname{tg} x^2 = 5 - 30 \operatorname{tg} x^2 + 5 \operatorname{tg} x^4,$$

welche Gleichung sich auf folgende biquadratische reducirt:

$$\operatorname{tg} x^4 - \tfrac{26}{5} \operatorname{tg} x^2 = -\tfrac{1}{5}.$$

Setzt man $\operatorname{tg} x^2 = z$, so erhält man

$$z^2 - \tfrac{26}{5} z = -\tfrac{1}{5}.$$

Daraus folgt: $z = \tfrac{13}{5} \mp \tfrac{1}{5}\sqrt{164}$,

also ist $\operatorname{tg} x = \sqrt{\tfrac{13}{5} + \tfrac{1}{5}\sqrt{164}}$.

Die weitere Rechnung giebt die Bogen: $33^0\, 24{,}54'$ und $55^0\, 40{,}9'$.

§. 94. **Aufgabe.** Aus der Gleichung

$$3 \sin x + 4 \cos x + 3 \operatorname{tg} x = -4$$

den kleinsten positiven oder negativen Winkel zu finden, welcher derselben Genüge leistet.

Auflösung. Man drücke jede dieser Grössen durch eine und dieselbe trigonometrische Function aus, was immer möglich ist; denn alle trigonometrischen Functionen lassen sich durch die Tangente des halben Winkels darstellen. Nach Form. No. 103, No. 104 und No. 162 verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende:

$$\frac{6 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}x^2} + \frac{4\,(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}x^2)}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}x^2} + \frac{6 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}x^2} = -4.$$

Multiplicirt man alle Glieder mit dem Generalnenner

$$(1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x^2)\,(1 - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x^2), \text{ so entsteht:}$$

$$+\left.\begin{array}{r} 6\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x(1-\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x^2) \\ 4(1-\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x^2)(1-\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x^2) \\ +\,6\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x^2(1+\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x^2) \end{array}\right\} = -4+4\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x^4.$$

Reducirt man gehörig, so erhält man:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x = 1, \text{ folglich}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x + (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{25}{16}, \text{ daher}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4} = \mp\tfrac{5}{4}, \text{ mithin}$$

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x = \tfrac{3}{4}\mp\tfrac{5}{4} = \left\{\begin{array}{l} -\tfrac{1}{2} \\ 2. \end{array}\right.$$

Diess Resultat giebt also einen doppelten Werth für $\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x$, nämlich $\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x = 2$ und $\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}$.

Aus $\log\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x = \log 2 = 10{,}3010300 - 10$

folgt $\tfrac{1}{2}x = 63^0\,26'\,5{,}75''$, also

$x = 126^0\,52'\,11{,}5''$.

Aus $\log\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}x \quad \log\tfrac{1}{2} = \log 0{,}5$

$= 9{,}6989700 - 10$

folgt $\tfrac{1}{2}x = -26^0\,33'\,54{,}18''$, also

$x = -53^0\,7'\,48{,}36''$.

Hier ist nun jener Werth für x der kleinste positive, sowie dieser der kleinste negative Werth.

§. 95. **Aufgabe.** Aus den Gleichungen

1) $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y = m$

2) $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,z = n$ und

3) $x+y+z = \pi$

die Werthe von x, y und z zu finden.

Auflösung. Da π immer, wenn nicht ausdrücklich Anderes bestimmt ist, die halbe Peripherie, oder 180^0 bedeutet, so hat man nach Form. No. 185

4) $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y+\mathrm{tg}\,z = \mathrm{tg}\,x\,.\,\mathrm{tg}\,y\,.\,\mathrm{tg}\,z$.

Aus (1) folgt: $\mathrm{tg}\,y = \dfrac{m}{\mathrm{tg}\,x}$,

Aus (2) folgt: $\mathrm{tg}\,z = \dfrac{n}{\mathrm{tg}\,x}$.

Diese Werthe in (4) gesetzt, so erhält man:

$$\mathrm{tg}\,x + \frac{m}{\mathrm{tg}\,x} + \frac{n}{\mathrm{tg}\,x} = \mathrm{tg}\,x\,.\,\frac{m}{\mathrm{tg}\,x}\,.\,\frac{n}{\mathrm{tg}\,x},$$

folglich $\mathrm{tg}\,x^2 + m + n = mn$, und mithin

$$\mathrm{tg}\,x = \sqrt{mn-(m+n)}.$$

Man findet nun leicht

$$\operatorname{tg} z = \frac{n}{\sqrt{mn - (m+n)}} \text{ u. s. w.}$$

Umformung trigonometrischer Gleichungen zur logarithmischen Rechnung.

§. 96. Zum Schlusse dieses Capitels wollen wir noch die zur bequemen logarithmischen Rechnung nicht eingerichteten trigonometrischen Gleichungen betrachten und an Beispielen zeigen, wie dieselben theils durch goniometrische Formeln, theils durch Einführung eines Hülfswinkels umgeformt werden können.

1. Es sei gegeben die Gleichung

$$\cos\alpha + \sin\alpha = x.$$

Nach Form. No. 208 ist $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Setzt man nun in die Formel

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

45^0 statt α und α statt β, so erhält man

$$\sin(45^0+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

oder $\sqrt{2} \cdot \sin(45^0+\alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha = x.$

Diese Formel lässt sich auch auf folgende Weise umformen. Da $\cos\alpha = \sin(90^0-\alpha)$, so ist $\cos\alpha + \sin\alpha = \sin(90^0-\alpha) + \sin\alpha$. Nach Form. No. 65 ist aber

$$\sin a + \sin b = 2\sin\tfrac{1}{2}(a+b) \cdot \cos\tfrac{1}{2}(a-b),$$

folglich

$$x = 2\sin 45^0 \cos(45^0-\alpha), \text{ oder}$$

$$x = \sqrt{2} \cdot \cos(45^0-\alpha).$$

2. Es sei die Gleichung gegeben:

$$\cos\alpha - \sin\alpha = x.$$

Man findet hier nach der Form. für $\cos(\alpha+\beta)$ auf dieselbe Weise, wie vorhin

$$\cos(45^0+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha, \text{ folglich}$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos(45^0+\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha = x.$$

Oder man setze wieder $\sin(90^0-\alpha)$ statt $\cos\alpha$; dann ist

$$\sin(90^0-\alpha) - \sin\alpha = 2\sin(45^0-\alpha)\cos 45^0$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sin(45^0-\alpha).$$

Ebenso ist $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2} \,.\, \sin(\alpha - 45^0)$
$$= -\sqrt{2} \,.\, \cos(45^0 + \alpha).$$

3. Es sei gegeben:
$$1 + \sin 2\alpha = x.$$
Setzt man in die Formel
$$\sin a + \sin b = 2 \sin \tfrac{1}{2}(a + b) \cos \tfrac{1}{2}(a - b)$$
$a = 90^0$ und $b = 2\alpha$, so erhält man:
$$1 + \sin 2\alpha = 2 \sin(45 + \alpha) \cos(45 - \alpha)$$
und, weil $\sin(45^0 \pm \alpha) = \cos(45^0 \mp \alpha)$, so folgt
$$x = 1 + \sin 2\alpha = 2 \sin(45^0 + \alpha)^2 = 2 \cos(45^0 + \alpha)^2.$$
Auf gleiche Weise findet man
$$1 - \sin 2\alpha = 2 \sin(45^0 - \alpha)^2 = 2 \cos(45^0 + \alpha)^2.$$

4. Es sei gegeben
$$1 \pm \operatorname{tg} b = x.$$
Nach Form. No 69 ist $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \dfrac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b}$. Setzt man hierin $\alpha = 45^0$, so erhält man:
$$\operatorname{tg} 45^0 + \operatorname{tg} b = 1 + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(45^0 + b)}{\cos 45^0 \cos b}$$
$$= \sqrt{2} \,.\, \frac{\sin(45^0 + b)}{\cos b}.$$
Ebenso ist nach Form. No. 70 $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \dfrac{\sin(a - b)}{\cos a \,.\, \cos b}$, also für $\alpha = 45^0$
$$1 - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(45 - b)}{\cos 45^0 \cos b} = \sqrt{2} \,.\, \frac{\sin(45^0 - b)}{\cos b}.$$
Anmerk. In gleicher Weise findet man nach Form. No. 229 u. 230
$$1 + \cot\alpha = \sqrt{2} \,.\, \frac{\sin(45^0 + \alpha)}{\sin\alpha}$$
und
$$\cot\alpha - 1 = \sqrt{2} \,.\, \frac{\sin(45^0 - \alpha)}{\sin\alpha}.$$

5. Es sei gegeben
$$1 - \operatorname{tg}\alpha^2 = x.$$
Hier ist $1 - \dfrac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha^2} = \dfrac{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2}{\cos\alpha^2}$,
folglich nach Form. No. 22:
$$x = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha^2}.$$

6. Es sei gegeben

$$1 - \cot \alpha^2 = x.$$

Man hat $x = 1 - \frac{\cos \alpha^2}{\sin \alpha^2} = \frac{\sin \alpha^2 - \cos \alpha^2}{\sin \alpha^2}$

$$= \frac{-(\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2)}{\sin \alpha^2} = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha^2}.$$

7. Es sei gegeben

$$1 \pm \cos \alpha = x.$$

Nach Form. No. 59. 60 hat man

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos \tfrac{1}{2}\alpha^2 \text{ und } 1 - \cos \alpha = 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Hiernach kann also jede Summe oder Differenz von der Form $1 + \sin \alpha$; $1 + \cos \alpha$; $\sin \alpha \mp \cos \alpha$; $1 \mp \operatorname{tg} \alpha$; $1 \mp \cot \alpha$; $1 - \operatorname{tg} \alpha^2$; $1 - \cot \alpha^2$ in ein Product oder einen Quotienten umgeformt werden.

7. Ferner lässt sich jede Summe oder Differenz von der Form $\sin \alpha \mp \sin \beta$; $\cos \alpha \mp \cos \beta$; $\operatorname{tg} \alpha \mp \operatorname{tg} \beta$; $\cot \alpha \mp \cot \beta$; $\operatorname{tg} \alpha \mp \cot \beta$; $\sin \alpha^2 - \sin \beta^2$; $\cos \alpha^2 - \cos \beta^2$; $\cos \alpha^2 - \sin \beta^2$ in ein Product oder in einen Quotienten verwandeln und zwar ist:

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ nach No. 65.

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$, nach Form. No. 66.

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ „ „ „ 67.

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ „ „ „ 68.

$\operatorname{tg} \alpha \mp \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha \mp \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ nach Form. No. 69. 70.

$\cot \alpha \mp \cot \beta = -\frac{\sin (\alpha \mp \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$ „ „ „ 71. 72.

$\operatorname{tg} \alpha \mp \cot \beta = \mp \frac{\cos (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$ „ „ „ 151. 152.

$\sin \alpha^2 - \sin \beta^2 = \cos \beta^2 - \cos \alpha^2$

$= \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$ „ „ „ 77.

$\cos \alpha^2 - \sin \beta^2 = \cos (a + \beta) \cos (\alpha - b)$ „ „ „ 79.

8. Es soll die bekannte trigonometrische Formel

$$x = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A},$$

nach welcher aus zwei Seiten b, c eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel, die dritte Seite gefunden wird, zur logarithmischen Berechnung umgeformt werden.

Erste Methode. Da $b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc$, so ist

$$x = \sqrt{(b + c)^2 - 2bc - 2bc \cos A}$$
$$= \sqrt{(b + c)^2 - 2bc(1 + \cos A)},$$

und, da $1 + \cos A = 2\cos\frac{1}{2}A^2$, so wird: $x = \sqrt{(b+c)^2 - 4bc\cos\frac{1}{2}A^2}$
$= \sqrt{\left(1 - \frac{4bc\cos\frac{1}{2}A^2}{(b+c)^2}\right)(b+c)^2}$. Setzt man $\frac{4bc\cos\frac{1}{2}A^2}{(b+c)^2} = \sin\varphi^2$,
so folgt $\quad x = (b+c)\sqrt{1 - \sin\varphi^2} = (b+c)\cos\varphi$.

Zweite Methode. Da $b^2 + c^2 = (b-c)^2 + 2bc$; so ist

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos A),$$

folglich, weil $\quad 1 - \cos A = 2\sin\frac{1}{2}A^2$, so ist

$$x^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin\frac{1}{2}A^2$$
$$= \left[1 + \frac{4bc\sin\frac{1}{2}A^2}{(b-c)^2}\right](b-c)^2.$$

Man setze $\frac{4bc\sin\frac{1}{2}A^2}{(b-c)^2} = \operatorname{tg}\varphi^2$, so wird (nach Form. No. 24)

$$x = (b-c)\sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi^2} = (b-c)\sec\varphi,$$

oder (nach Form. No. 14) $\quad x = \frac{(b-c)}{\cos\varphi}$.

Anmerk. Man konnte auch von der Form

$$x^2 = (b-c)^2 + 2bc - 2bc\cos A$$

zu der folgenden übergehen: $(b-c)^2 - 2bc(\cos A - 1)$, oder

$$(b-c)^2 - 2bc[-(1 + \cos A)] = (b-c)^2 + 4bc\cos\frac{1}{2}A^2.$$

Setzt man nun $\cos\varphi^2 = \frac{4bc\cos\frac{1}{2}A^2}{(b-c)^2}$, so wird

$$x = (b-c)\sqrt{1 - \cos\varphi^2} = (b-c)\sin\varphi.$$

9. Man soll die Formel

$$\operatorname{tg} x = \frac{a\sin A}{1 + a\cos A}$$

in eine andere für die Logarithmen zugängliche Formel umwandeln.

Man setze $a\cos A = \operatorname{tg}\varphi^2$, dann ist:

$$\operatorname{tg} x = \frac{a\sin A}{1 + \operatorname{tg}\varphi^2} = \frac{a\sin A}{\sec\varphi^2} = a\sin A\cos\varphi^2.$$

Anderes Verfahren. Aus der Gleichung folgt

$$\operatorname{tg} x + a\cos A\operatorname{tg} x = a\sin A, \text{ oder}$$
$$\operatorname{tg} x = a\sin A - a\cos A\operatorname{tg} x \quad (\cos x$$
$$\sin x = a\sin A\cos x - a\cos A\sin x$$
$$= a[\sin A\cos x - \cos A\sin x] \text{ d. i.}$$
$$\sin x = a\sin(A - x), \text{ also}$$
$$\sin x : \sin(A - x) = a : 1, \text{ folglich}$$
$$\frac{\sin(A-x) + \sin x}{\sin(A-x) - \sin x} = \frac{1+a}{1-a}.$$

Nach Form. No. 87 hat man demnach:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A}{\operatorname{tg}(\frac{1}{2} A - x)} = \frac{1 + a}{1 - a}, \text{ mithin ist}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - x) = \frac{1 - a}{1 + a} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A.$$

10. Es sei gegeben

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin B}{c - a \cos B}.$$

Offenbar ist $\operatorname{tg} x = \dfrac{a}{c\left(1 - \dfrac{a \cos B}{c}\right)}$.

Man setze $\dfrac{a \cos B}{c} = \sin \varphi^2$, so wird

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin B}{c(1 - \sin \varphi^2)} = \frac{a \sin B}{c \cos \varphi^2}.$$

Für $\operatorname{tg} x = \dfrac{a \sin B}{c + a \cos B}$ setze man $\dfrac{a \cos B}{c} = \operatorname{tg} \varphi^2$; dann entsteht:

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin B}{c(1 + \operatorname{tg} \varphi^2)} = \frac{a \sin B}{2 \cos \varphi^2}.$$

oder

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin B}{c} \cdot \cos \varphi^2.$$

11. Es soll die Formel

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

(nach welcher in der sphärischen Trigonometrie aus den drei Seiten die Winkel gefunden werden) zur logarithmischen Rechnung eingerichtet werden.

Da nach Form. No. 59 $1 - \cos A = 2 \sin \frac{1}{2} A^2$, so setze man hierin für $\cos A$ den obigen Werth; dann ist

$$2 \sin \tfrac{1}{2} A^2 = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

d. i. nach Form. No. 68

$$2 \sin \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin b \sin c}$$

oder

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin b \sin c}}.$$

Geht man von der Formel $1 + \cos A = 2 \cos \frac{1}{2} A^2$ aus, so gelangt man zu der Gleichung

$$\cos \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin (b+c-a)}{\sin b \sin c}.$$

Ein anderes Verfahren. Man setze

$$\frac{\cos b \cos c}{\sin a} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ also } \cos b \cos c = \sin a \operatorname{tg} \varphi;$$

dann wird
$$\cos A = \frac{\cos a - \sin a \operatorname{tg} \varphi}{\sin b \sin c}$$

folglich, wenn mit $\cos \varphi$ multiplicirt wird:

$$\cos A = \frac{\cos a \cos \varphi - \sin a \sin \varphi}{\sin b \sin c \cos \varphi}$$

$$\text{d. i. } \cos A = \frac{\cos (a + \varphi)}{\sin b \sin c \cos \varphi}.$$

Analog würde man für

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin a \sin c} \text{ zu setzen haben:}$$

$$\frac{\cos c \cos a}{\sin b} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ wodurch}$$

$$\cos B = \frac{\cos (b + \varphi)}{\sin a \sin c \cos \varphi} \text{ wird.}$$

12. Die Formel

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

logarithmisch umzuformen.

Hier setze man, nachdem zuvor durch $\cos c$ dividirt worden:

$$\operatorname{tg} c . \cos A = \operatorname{tg} \varphi; \text{ dann ist}$$

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \cos b + \sin b \operatorname{tg} c \cos A, \text{ also}$$

$$= \cos b + \sin b \operatorname{tg} \varphi.$$

Multiplicirt man mit $\cos \varphi$, so erhält man:

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \frac{\cos b \cos \varphi + \sin b \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$= \frac{\cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}, \text{ mithin}$$

$$\cos a = \frac{\cos c . \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Für die Formel

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

würde man $\operatorname{tg} b \cos C = \operatorname{tg} \varphi$ zu setzen haben, wodurch

$$\cos c = \frac{\cos b \cos (a - \varphi)}{\cos \varphi}$$ entsteht.

13. Es sei die Formel gegeben:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Man setze hier $\dfrac{\cos B \cos C}{\sin A} = \cot \varphi$, also $\cos B \cos C = \sin A \cot \varphi$, dann erhält man:

$$\cos a = \frac{\cos A + \sin A \cot \varphi}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{\cos A \sin \varphi + \sin A \cos \varphi}{\sin B \sin C \sin \varphi}$$

$$\text{d. i. } \cos a = \frac{\sin (\varphi + A)}{\sin B \sin C \sin \varphi}.$$

Ebenso erhält man für die Formel

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C},$$

wenn $\dfrac{\cos A \cos C}{\sin B} = \cot \varphi$ gesetzt wird, das Resultat:

$$\cos b = \frac{\sin (\varphi + B)}{\sin C \sin A \sin \varphi}.$$

Auf eine andere Weise lässt sich diese Formel wie in 11. umändern.

Es ist nämlich $1 + \cos a = 1 + \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$ oder, nach Form. No. 60

$$2 \cos \tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin B \sin C + \cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C}$$

$$\text{d. i. } 2 \cos \tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\cos (B - C) + \cos A}{\sin B \sin C}.$$

Nun ist nach Form. No. 67

$$\cos b + \cos a = 2 \cos \tfrac{1}{2} (a + b) \cos \tfrac{1}{2} (a - b),$$

folglich hat man, nach Division mit 2:

$$\cos \tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B - C) \cos \frac{1}{2} (A - B + C)}{\sin B \sin C}.$$

Ebenso findet man, von $1 - \cos a$ ausgehend:

$$\sin \tfrac{1}{2}a^2 = \frac{- \cos \frac{1}{2} (A + B + C) \cos \frac{1}{2} (B + C - A)}{\sin B \sin C}.$$

14. Es soll die Formel

$$\cot C = \frac{\cot c \sin a - \cos a \cos B}{\sin B}$$

logarithmisch eingerichtet werden.

Hier hat man:

$$\cot C = \frac{\cot c \sin a}{\sin B} - \frac{\cos a \cos B}{\sin B}.$$

Man setze $\operatorname{tg} \varphi = \cos B \operatorname{tg} c$, oder was einerlei,

$\cot c = \cos B \cot \varphi$; dann ist:

$$\begin{aligned}\cot C &= \cot \varphi \cot B \sin a - \cos a \cot B \\ &= \cot B (\cot \varphi \sin a - \cos a),\end{aligned}$$

wird nun mit $\sin \varphi$ multiplicirt, so entsteht:

$$\cot C = \frac{\cot B (\cos \varphi \sin a - \cos a \sin \varphi)}{\sin \varphi}, \text{ d. i.}$$

$$\cot C = \frac{\cot B . \sin (a - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

15. Es soll die Formel

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sin a}{\cot C \sin B + \cos a \cos B}$$

zur logarithmischen Rechnung umgeformt werden.

Die gegebene Formel giebt umgekehrt:

$$\cot c = \frac{\cot C \sin B}{\sin a} + \cot a \cos B.$$

Man setze $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\cot C}{\cos a}$, oder $\cot C = \operatorname{tg} \varphi \cos a$; dann wird

$$\begin{aligned}\cot c &= \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos a \sin B}{\sin a} + \cot a \cos B \\ &= \frac{\sin \varphi \cot a \sin B}{\cos \varphi} + \frac{\cot a \cos B \cos \varphi}{\cos \varphi} \\ &= \frac{\cot a [\sin B \sin \varphi + \cos \varphi \cos B]}{\cos \varphi} \\ &= \frac{\cot a \cos (B - \varphi)}{\cos \varphi}, \text{ oder}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a \cos \varphi}{\cos (B - \varphi)}.$$

16. Es soll die Gleichung $x = \operatorname{tg} \varphi + \cot \varphi$ zur logarithmischen Rechnung brauchbar gemacht werden.

Da $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ und $\cot \varphi = \dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$, so ist

$$\operatorname{tg}\varphi + \cot\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$
$$= \frac{\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi};$$

weil aber $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$, so folgt:

$$x = \operatorname{tg}\varphi + \cot\varphi = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\varphi} = \frac{2}{\sin 2\varphi},$$

oder, da $\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$, so ist auch $x = 2\operatorname{cosec} 2\varphi$.

17. Es soll die Gleichung $x = \operatorname{tg}\varphi - \cot\varphi$ logarithmisch umgeformt werden.

Hier ist $x = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\sin(90^0 - \varphi)}{\cos(90^0 - \varphi)}$

$$= \frac{\sin\varphi\cos(90^0 - \varphi) - \sin(90^0 - \varphi)\cos\varphi}{\cos\varphi\sin\varphi}$$
$$= \frac{\sin[\varphi - (90^0 - \varphi)]}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\sin(2\varphi - 90^0)}{\sin\varphi\cos\varphi}$$
$$= \frac{-\sin(90^0 - 2\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{-\cos 2\varphi}{\frac{1}{2}\sin 2\varphi} = -2\cot 2\varphi.$$

18. Umformung des Ausdruckes

$$5\cos\varphi + 4\cos 2\varphi + 3\cos 3\varphi = 0.$$

Nach Form. No. 189 ist $\cos 3\varphi = \cos\varphi^3 - 3\cos\varphi\sin\varphi^2$. Setzt man diesen Werth in die gegebene Gleichung, so entsteht:

$$5\cos\varphi + 4\cos 2\varphi + 3\cos\varphi^3 - 9\cos\varphi\sin\varphi^2 = 0,$$

oder $3\cos\varphi^3 = 9\cos\varphi(1 - \cos\varphi^2) - 5\cos\varphi - 4\cos 2\varphi$

$$= 9\cos\varphi - 9\cos\varphi^3 - 5\cos\varphi - 4\cos 2\varphi,$$

folglich $\qquad 12\cos\varphi^3 = 4\cos\varphi - 4\cos 2\varphi$ d. i.

$$3\cos\varphi^3 = \cos\varphi - \cos 2\varphi.$$

Nun ist nach Form. No. 68

$$\cos b - \cos a = 2\sin\tfrac{1}{2}(a + b)\sin\tfrac{1}{2}(a - b),$$

folglich, wenn $a = 2b$ gesetzt wird:

$$\cos b - \cos 2b = 2\sin 3\frac{b}{2}\sin\frac{b}{2};$$

daher $\qquad 3\cos\varphi^3 = 2\sin 3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$, oder

$$\frac{\cos\varphi^3}{\sin 3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}} = \tfrac{2}{3}.$$

Auflösung einiger transcendenten Gleichungen.

§. 97. Es giebt verschiedene Methoden transcendente Gleichungen aufzulösen. Bei trigonometrischen Gleichungen empfiehlt sich, ihrer Einfachheit wegen, vorzugsweise die Regel vom falschen Satze, welche daher auch bei den folgenden Aufgaben angewandt werden soll. *)

Sobald zwei Grenzen feststehen, zwischen denen eine gesuchte Grösse enthalten ist, ergiebt sich durch eine einfache Interpolation ein Resultat, welches dem wahren Werthe bedeutend näher tritt, so dass bei weiter fortgesetztem Verfahren der Unterschied zwischen dem gefundenen und dem wahren Werthe als verschwindend klein betrachtet werden kann. Diese Regel lautet:

1) *Die Summe zweier Werthe einer Gleichung, mit entgegengesetzten Zeichen, verhält sich zur Differenz der auf diese Werthe sich beziehenden Substitutionen von x, wie sich der kleinere oder grössere Werth der Gleichung zu dem Unterschiede zwischen dem angenommenen Werthe und dem wahren Werthe von x verhält.*

2) *Die Differenz zweier Werthe einer Gleichung mit einerlei Vorzeichen verhält sich, ohne Rücksicht auf diese Zeichen, zu der Differenz der auf diese Werthe sich beziehenden Substitutionen für x, wie sich der kleinere oder grössere Werth der Gleichung zu dem Unterschiede zwischen dem angenommenen Werthe und dem wahren Werthe von x verhält.*

Einen grossen Vortheil bei der Auflösung transcendenter trigonometrischer Gleichungen gewähren die in Theilen des Halbmessers (= 1) berechneten Kreisbogen, wie wir solche in mehreren logarithmischen und trigonometrischen Tafeln besitzen. So z. B. enthalten die Schulzeschen Tafeln (im 2ten Bande) die Länge der Kreisbogen für alle Grade von 0—360 und für alle Minuten, sowie Secunden, bis auf 27 Decimalstellen.

§. 98. **Aufgabe.** Welcher Kreisbogen ist ebenso gross als sein Cosinus, oder welchen Werth erhält x aus der Gleichung

$$\cos x = x?$$

*) Eine ausführliche Darstellung und Begründung der sogenannten regula falsi findet man in meiner Schrift: Die Anwendung der Algebra auf praktische Arithmetik etc. Halle bei H. W. Schmidt, 1859.

Auflösung. Nach einigen Versuchen (wozu auch eine geometrische Construction beitragen kann) gelangt man zu der Ueberzeugung, dass der gesuchte Bogen zwischen 42^0 und 43^0 liegt, so dass dadurch $\cos x - x = 0$ werde.

Nun ist
$$\begin{aligned} \cos 42^0 &= 0{,}7431448 \\ \text{Arc. } 42^0 &= 0{,}7330382 \\ \text{Differenz: } & 0{,}0101066 \ (A) \end{aligned}$$

Ferner ist
$$\begin{aligned} \cos 43^0 &= 0{,}7313537 \\ \text{Arc. } 43^0 &= 0{,}7504915 \\ \text{Differenz: } & -0{,}0191378 \ (B) \end{aligned}$$

Man schliesse: $A + B : 1^0 = A : y$, d. i.
$$292444 : 1^0 = 101066 : y,$$
folglich $y = 0{,}345^0 = 0{,}345 \times 60 = 20{,}7'$
oder $y = 20'\,42''$.

Hiernach liegt x zwischen $42^0\,20'$ und $42^0\,21'$. Man rechne nun weiter:
$$\begin{aligned} \cos 42^0\,21' &= 0{,}7390435 \\ \text{Arc. } 42^0\,21' &= 0{,}7391468 \\ & -0{,}0001033 \ (A) \\ \cos 42^0\,20' &= 0{,}7392394 \\ \text{Arc. } 42^0\,20' &= 0{,}7388559 \\ & 0{,}0003835 \ (B) \end{aligned}$$

Man schliesse: $A + B : 1' = A : y$ d. i.
$4868 : 1' = 1033 : y$. Daraus folgt:
$y = 0{,}212' = 12''\,43{,}2'''$. Diess von
$21'$ subtrahirt:
$0'\,12''\,43{,}2'''$, so bleibt:
$20'\,47''\,16'''$, so dass sehr nahe
$x = 42^0\,20'\,47''\,16'''$.

(*Heis* Samml. pag. 341. No. 12.)

§. 99. **Aufgabe.** *Von einem Kreise ein Segment abzuschneiden, welches dem Quadrate des Halbmessers gleich sein soll.*

Auflösung. Der gesuchte Kreisbogen sei $= x$, der Halbmesser $= 1$, so ist der Inhalt des Sectors $= \frac{1 \cdot x}{2}$; wird hiervon der Inhalt des Dreiecks abgezogen, so erhält man den des Segments. Nun ist die Sehne $= 2 \sin \frac{1}{2}x$ und das Höhenperpendikel aus dem Centro auf dieselbe $= \cos \frac{1}{2}x$, daher der Inhalt dieses

Dreiecks $= 2 \sin \frac{1}{2}x \times \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x = \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$ oder $\frac{1}{2} \sin x$; folglich ist der Inhalt des Segments $= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x$ und, da dieser dem Quadrate des Halbmessers gleich sein soll, so hat man die Gleichung $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x = 1$, oder

$$x - \sin x = 2.$$

Wegen der näherungsweisen Rechnung setze man $x - \sin x = y$, wo dann y möglichst nahe $= 2$ sein muss.

Man wird bald ermitteln, dass der Bogen x ohngefähr zwischen 140^0 und 150^0 liege. Nehmen wir daher diese Grenzen auf die Probe, so findet sich

$$\begin{aligned}
\text{Arc. } 140^0 &= 2{,}4434609 \\
\sin 140^0 &= \underline{0{,}6427876} \\
y &= 1{,}8006733 \\
\text{Arc. } 150^0 &= 2{,}6179938 \\
\sin 150^0 &= \underline{0{,}5000000} \\
y &= 2{,}1179938.
\end{aligned}$$

Da hiernach y näher bei 150^0 als 140^0 zu suchen ist, so würde man 145^0 und 147^0 als engere Grenzen annehmen können; allein da die Rechnung für $x = 145^0$ noch zu wenig giebt, so nehmen wir die engeren Grenzen 146^0 und 147^0.

$$\begin{aligned}
\text{Arc. } 147^0 &= 2{,}5656340 \\
\sin 147^0 &= \underline{0{,}5446390} \\
y &= 2{,}0209950 \\
\text{Arc. } 146^0 &= 2{,}5481807 \\
\sin 146^0 &= \underline{0{,}5591929} \\
y &= 1{,}9889878.
\end{aligned}$$

Da x näher bei 146^0 als 147^0 liegt und eine fernere Probe für $x = 146^0\ 20'$ noch etwas zu wenig giebt, so nehmen wir die näheren Grenzen $146^0\ 20'$ und $146^0\ 21'$; dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
\text{Arc. } 146^0\ 21' &= 2{,}5542893 \\
\sin 146^0\ 21' &= \underline{0{,}5541182} \\
y &= 2{,}0001711 \\
\text{Arc. } 146^0\ 20' &= 2{,}5539984 \\
\sin 146^0\ 20' &= \underline{0{,}5543603} \\
y &= 1{,}9996381.
\end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung folgt nun:

Es soll kommen:	2
es kommt aber:	2,0001711
Differenz also:	— 0,0001711 (*A*).

Es soll kommen	2
es kommt aber	1,9996381
folglich Differenz:	0,0003619 (B).

Man schliesse daher nach der regula falsi:

$$A + B : 1' = B : z.$$

Daraus folgt: $z = 0{,}67' = 40{,}2'' = 40''\ 12'''$,
und man hat demnach: $x = 146^\circ\ 20'\ 40''\ 12'''$,
ein Resultat, welches den gesuchten Bogen fast bis auf Tertien genau angiebt.

§. 100. **Aufgabe.** *Einen Kreisausschnitt zu finden, der durch die zum Bogen gehörige Sehne in zwei gleiche Theile getheilt wird.* (*Heis* No. 15.)

Auflösung. Setzt man den Bogen des Ausschnitts $= 2x$, so ist der Inhalt des Ausschnitts für den Halbmesser $= 1$, das halbe Product aus dem Bogen und Halbmesser $= 2x \times \frac{1}{2} = x$; die zugehörige Sehne ist $= 2 \sin x$ und das Perpendikel aus dem Centro auf die Sehne $= \cos x$. Daher ist der Inhalt des Dreiecks $= 2 \sin x \times \dfrac{\cos x}{2} = \frac{1}{2} \sin 2x$. Da nun dieses Dreieck die Hälfte des Ausschnitts sein soll, so hat man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2} \sin 2x, \text{ oder}$$
$$x - \sin 2x = 0.$$

Der gesuchte Bogen liegt, wie man bald findet, zwischen 108 und 110^0, oder es ist $x > 54^0$ und $x < 55^0$. Man rechne nun folgendermassen:

$$\begin{aligned} \text{Arc. } 54^0 &= 0{,}9424777 \\ \sin 108^0 &= 0{,}9510565 \\ \text{Diff. } &-0{,}0085788. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \text{Arc. } 55^0 &= 0{,}9599310 \\ \sin 110^0 &= 0{,}9396926 \\ \text{Diff. } &\ \ 0{,}0202384. \end{aligned}$$

Aus der Proportion: $288172 : 1^0 = 85788 : y$ folgt

$$y = 0{,}29^0 = 17'\ 24'', \text{ also}$$
$$x = 54^0\ 17'\ 24''.$$

Da x näher bei 54^0 als 55^0 liegt, so nehmen wir die Grenzen $54^0\ 20'$ und $54^0\ 18'$. Demgemäss ist

$$\begin{aligned} \text{Arc. } 54^0\ 20' &= 0{,}9482954 \\ \sin 2(54^0\ 20') &= 0{,}9473966 \\ &+0{,}0008988. \end{aligned}$$

$$\text{Arc.}\,54^\circ\,18' = 0{,}9477136$$
$$\sin 2\,(54^\circ\,18') = \underline{0{,}9477684}$$
$$-0{,}0000548.$$ Es ist nun
$$9536 : 2' = 548 : y.$$ Daraus folgt
$$y = 0{,}114' = 0'\,6''\,50{,}4''',$$ daher ist
$$x = 54^\circ\,18'\,6''\,50{,}4''',$$ welches Resultat bis auf $2'''$ genau ist.

Zur weiteren Uebung mögen hier noch einige Beispiele folgen.

1. Welchen Werth hat x aus der Gleichung
$$\cot x = 2x\,?$$
Antwort. $x = 37^\circ\,25'\,46{,}85''$.

2. Welchen Werth hat x aus der Gleichung
$$\cot x = 1 + x\,?$$
Antwort. $x = 32^\circ\,31'\,53{,}43''$.

3. Welcher Werth von φ entspricht der Gleichung
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = \varphi\,?$$
Antwort. $\varphi = 133^\circ\,33'\,48{,}49''$.

Gebrauch der dekadischen Ergänzung.

§. 101. Sobald Decimalzahlen theils zu addiren, theils zu subtrahiren sind (wie diess bei logarithmischen Rechnungen öfter vorkommt), können die subtractiven Zahlen in additive verwandelt werden, wenn man statt derselben nur ihre dekadische Ergänzung (Complementum arithmeticum) setzt. Man erhält nämlich das Complement einer gegebenen Zahl, wenn man dieselbe von ihrer nächst höheren dekadischen Ordnungszahl abzieht und zwar sehr einfach, wenn man jede Ziffer von der Linken zur Rechten von 9, die letzte und niedrigste Ziffer aber von 10 subtrahirt.

So ist z. B. $\text{Compl.}\,1862 = 10000 - 1862$
$$= 8138$$
$$\text{Compl.}\,1 = 10 - 1 = 9;\ \text{Compl.}\,27 = 100 - 27 = 73 \text{ u. s. w.}$$
Ebenso ist für $\log 3 = 0{,}4771213$
$$\text{Compl.}\log 3 = 9{,}5228787.$$

Am Schlusse der Rechnung hat man dann selbstverständlich so viele dekadische Ordnungseinheiten vom Resultate abzuziehen, als Subtrahenda vorhanden sind. Gesetzt, es sollte berechnet werden: $x = 6{,}572 - 4{,}0372 + 2{,}8 - 1{,}3594,$
so schreibe man folgendermassen:

$$\begin{array}{rrl} & & 6{,}572 \\ \text{Compl. } 4{,}0372 & = & 5{,}9628 \quad (-10) \\ & & 2{,}8\ldots \\ \text{Compl. } 1{,}3594 & = & \underline{8{,}6406 \quad (-10)} \\ x & = & 23{,}9754 - 2.10, \text{ d. i.} \\ x & = & 3{,}9754. \end{array}$$

Der Grund dieses Verfahrens erhellt einfach aus der analytischen Gleichung:

$$A - B = A + (X - B) - X.$$

Mit Recht bemerkt *Cagnoli* in seiner trefflichen Trigonometrie, dass der Gebrauch der dekadischen Ergänzung vorzugsweise bei trigonometrischen Rechnungen vortheilhaft sei. Auch kann der Rechner beim Aufschlagen eines subtractiven Logarithmus, der in der Rechnung additiv zu nehmen ist, dessen dekadische Ergänzung sogleich im Kopfe berechnen und hinschreiben, womit jedesmal eine Raumersparniss und kein erheblicher Zeitverlust verbunden ist.

Prüft man übrigens den Umtausch irgend eines subtractiven Logarithmus in einen additiven, so sieht man, dass derselbe sich jederzeit auf die dekadische Ergänzung des subtractiven Logarithmus reducirt.

So hat die Cotangente zum Logarithmus die dekadische Ergänzung von dem der Tangente und umgekehrt, weil $\operatorname{tg} \varphi . \cot \varphi = 1$, also $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{1}{\cot \varphi}$ und folglich

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log 1 - \log \cot \varphi = -\log \cot \varphi.$$

---

3. Capitel.

Trigonometrische Auflösung quadratischer Gleichungen.

§. 102. Aus der Algebra ist bekannt, dass jede unreine quadratische Gleichung unter einer der vier Formen begriffen ist:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x^2 + px + q = 0 \\ \text{II.} & x^2 - px + q = 0 \\ \text{III.} & x^2 + px - q = 0 \\ \text{IV.} & x^2 - px - q = 0. \end{array}$$

Die Auflösungsformeln sind entsprechend:

$$\text{für I.}\quad x = -\frac{p}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q},$$

$$\text{für II.}\quad x = \frac{p}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q},$$

$$\text{für III.}\quad x = -\frac{p}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q}.$$

$$\text{für IV.}\quad x = \frac{p}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q}.$$

Man sieht leicht, dass die beiden ersten Gleichungen nur so lange reelle Wurzeln haben können, als $p^2 > 4q$, oder $1 > \frac{4q}{p^2}$ ist d. h. so lange $\frac{4q}{p^2}$ ein ächter Bruch ist. Sobald aber $p^2 < 4q$, oder $\frac{4q}{p^2}$ ein unächter Bruch ist, treten imaginäre Wurzeln auf und ist in diesem Falle eine trigonometrische Auflösung nicht zulässig.

Dagegen gestatten die beiden letzten Formen, weil sie reelle Wurzeln haben, unbedingte Einführung eines Hülfswinkels.

Wir wollen nun, unter der Voraussetzung, dass p und q reell sind, verschiedene Auflösungen neben einander stellen und mit einigen speciellen Beispielen begleiten.

§. 103. **Auflösung der Gleichung I.**

$$x^2 + px + q = 0.$$

Da hier

$$x = \tfrac{1}{2}(-p \mp \sqrt{p^2 - 4q})$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[-p \mp \sqrt{\left(1 - \frac{4q}{p^2}\right)p^2}\,\right]$$

$$= \frac{p}{2}\left(-1 \mp \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right),$$

so setze man, insofern die Wurzeln reell,

$$\frac{4q}{p^2} = \sin\varphi^2. \quad \text{Dann ist}$$

$$\tfrac{1}{2}p = \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}. \quad \text{Es ist also}$$

$$x = \frac{p}{2}(-1 \mp \cos\varphi), \text{ oder}$$

$$= -\frac{p}{2}(1 \pm \cos\varphi)$$

$$= -\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}(1 \pm \cos\varphi).$$

Nun ist (nach Form. No. 64)

$$\cot \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}\text{, und nach No. 91:}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\text{, folglich}$$

$$x_{,} = -\sqrt{q}\,.\cot\tfrac{1}{2}\varphi \text{ und}$$

$$x_{,,} = -\sqrt{q}\,.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Da das Ganze eine negative Zahlengrösse sein muss, so kann von $\sqrt{q}$ auch nicht der negative Werth gelten, denn sonst würden $x_{,}$ und $x_{,,}$ positive Grössen.

§. 104. **Auflösung der Gleichung II.**

$$x^2 - px + q = 0.$$

Hier ist $x = \tfrac{1}{2}(p \mp \sqrt{p^2 - 4q})$

$$= \frac{p}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right).$$

Setzt man wieder wie vorhin

$$\frac{4q}{p^2} = \sin\varphi^2\text{, also}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}\text{, so erhält man}$$

$$x_{,} = \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}(1-\cos\varphi) \text{ und}$$

$$x_{,,} = \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}(1+\cos\varphi)$$

oder nach Einsetzung obiger Formeln:

$$x_{,} = \sqrt{q}\,.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \text{ und}$$

$$x_{,,} = \sqrt{q}\,.\cot\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Diese Werthe stimmen mit den obigen von I. der Grösse nach überein.

§. 105. **Auflösung der Gleichung III.**

$$x^2 + px - q = 0.$$

Da
$$x = -\frac{p}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q}$$

$$= -\frac{p}{2} \mp \frac{p}{2}\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}$$

$$= -\frac{p}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right]\text{, so setze man}$$

$\frac{4q}{p^2} = \operatorname{tg}\varphi^2$, woraus $\tfrac{1}{2}p = \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\cos\varphi\sqrt{q}}{\sin\varphi}$ folgt, dann ist:

$$x = -\frac{\cos\varphi\sqrt{q}}{\sin\varphi}(1 \mp \sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2})$$

$$= -\frac{\cos\varphi\sqrt{q}}{\sin\varphi}(1 \mp \sec\varphi)$$

$$= -\frac{\cos\varphi\sqrt{q}}{\sin\varphi}\left(1 \mp \frac{1}{\cos\varphi}\right)$$

$$= -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\left(\frac{\cos\varphi \mp 1}{\cos\varphi}\right)\sqrt{q} = -\frac{(\mp 1 + \cos\varphi)\sqrt{q}}{\sin\varphi}.$$

Dieser Ausdruck zerfällt in die beiden

$$x_{,} = \frac{+(1-\cos\varphi)\sqrt{q}}{\sin\varphi} \text{ und}$$

$$x_{,,} = \frac{-(1+\cos\varphi)\sqrt{q}}{\sin\varphi}.$$

Nun ist nach Form. No. 91 und 64

$$\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \text{ und } \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Setzt man diese Werthe ein, so erhält man

$$x_{,} = +\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\,.\sqrt{q} \text{ und}$$

$$x_{,,} = -\cot\tfrac{1}{2}\varphi\,.\sqrt{q}.$$

§. 106. **Auflösung der Gleichung IV.**

$$x^2 - px - q = 0.$$

Es ist

$$x = \frac{p}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+4q}$$

$$= \frac{p}{2} \mp \frac{p}{2}\sqrt{1+\frac{4q}{p^2}}$$

$$= \frac{p}{2}\left[1 \mp \sqrt{1+\frac{4q}{p^2}}\right].$$ Setzt man wieder

$$\frac{4q}{p^2} = \operatorname{tg}\varphi^2, \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{2}p = \frac{2\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\cos\varphi\sqrt{q}}{\sin\varphi};$$ so wird

$$x = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}[1 \mp \sec\varphi]\sqrt{q}$$

$$= \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\left[1 \mp \frac{1}{\cos\varphi}\right]\sqrt{q}$$

$$= \frac{(\cos\varphi \mp 1)\sqrt{q}}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{\mp 1 + \cos\varphi\,.\sqrt{q}}{\sin\varphi}.$$ Daher

$$x_, = \frac{-(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}\sqrt{q} = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\sqrt{q}.$$

$$x_{,,} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot\sqrt{q} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\sqrt{q}.$$

§. 107. **Zusätze.** **1.** Die beiden ersten Gleichungen

$$x^2 \mp px + q = 0$$

haben der Grösse nach gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Wurzeln, welches auch bei den eben gefundenen Resultaten stattfindet.

Dasselbe gilt von den beiden letzten Gleichungen

$$x^2 \pm px - q = 0.$$

2. Da bei jeder quadratischen Gleichung die Summe der beiden Wurzeln dem entgegengesetzten zweiten Gliede, und das Product der beiden Wurzeln dem dritten Gliede gleich ist: so müssen auch die trigonometrisch bestimmten Wurzeln das Gleiche leisten.

Für $x^2+px+q = 0$ fanden wir

$$x_, = -\sqrt{q}.\cot\tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{und}$$
$$x_{,,} = -\sqrt{q}.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Setzt man hierin den Werth von $\sqrt{q}$, welcher aus $\frac{4q}{p^2} = \sin\varphi^2$ hervorgeht, nämlich: $\frac{1}{2}p\sin\varphi = \sqrt{q}$, so verwandeln sich die beiden Wurzeln in:

$$x_, = -\tfrac{1}{2}p\sin\varphi.\cot\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$x_{,,} = -\tfrac{1}{2}p\sin\varphi.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Setzt man endlich nach Form. No. 46

$$\sin\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi, \text{ so entsteht:}$$
$$x_, = -p\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 \quad \text{und}$$
$$x_{,,} = -p\sin\tfrac{1}{2}\varphi; \text{ ihre Summe ist}$$
$$x_,+x_{,,} = -p(\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2+\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2),$$

folglich (nach Form. No. 54)

$$x_,+x_{,,} = -p.$$

Ferner ist für das Product der Wurzeln

$$x_, = -\sqrt{q}.\cot\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$x_{,,} = -\sqrt{q}.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$x_,.x_{,,} = q.\cot\tfrac{1}{2}\varphi.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi,$$

welches sich nach Form. No. 10 reducirt auf

$$x_,.x_{,,} = q.$$

In gleicher Weise wird man dasselbe Gesetz für die übrigen drei Gleichungen bestätigt finden.

3. Sind r und s die Wurzeln der Gleichung $x^2+px+q=0$, so besteht das Gesetz: $x^2+px+q = (x-r)(x-s)$. Nun fanden wir (§. 106) die Wurzeln der Gleichung $x^2-px-q = 0$

$$x_{,} = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q} = r$$
$$x_{,,} = +\cot\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q} = s.$$

Es muss also das Product

$$(x+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q})(x-\cot\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q}) = x^2-px-q$$

sein. Die Multiplication dieser Factoren giebt

$$x^2+x(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi-\cot\tfrac{1}{2}\varphi)\sqrt{q}-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\,.\cot\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,q$$

oder
$$x^2+(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi-\cot\tfrac{1}{2}\varphi)\sqrt{q}\,.\,x-q.$$

Da nach Form. No. 105 $\cot\frac{1}{2}\varphi-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = 2\cot\varphi$ und $\frac{2\sqrt{q}}{p} = \operatorname{tg}\varphi$, also $\cot\varphi = \frac{p}{2\sqrt{q}}$, so erhält man, durch Substitution dieser Werthe in das erhaltene Product:

$$x^2-2\cot\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q}\,.\,x-q$$
$$x^2-2\,.\,\frac{p}{2\sqrt{q}}\,.\sqrt{q}\,.\,x-q \text{ d. i.}$$
$$x^2-px-q = 0.$$

Demnach leisten die trigonometrischen Ausdrücke für die Wurzeln der Gleichung Genüge.

4. Wäre die gegebene Gleichung von der allgemeinsten Form:

$$ax^2+bx+c = 0,$$

so reducirt man dieselbe durch Division mit dem Coefficienten a auf

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0$$

und nimmt, ohne diese Divisionen auszuführen,

$$p = \frac{b}{a},\quad q = \frac{c}{a}$$

sofort mit in die logarithmische Rechnung auf.

5. Es verdient endlich noch bemerkt zu werden, dass die trigonometrischen Auflösungsformeln die bestimmteste Entscheidung über die positiven und negativen Wurzeln enthalten und also völlig mit dem Lehrsatze des *Des Cartes* harmoniren: *jede geordnete quadratische Gleichung hat so viele positive Wurzeln, als Zeichenwechsel stattfinden, und ebenso viele negative Wurzeln, als Zeichen-Folgen herrschen.* Die folgende Tabelle dient zur bequemen Uebersicht und zum Gebrauche bei aufzulösenden numerischen Gleichungen.

Trigonometrische Reduction der Gleichungen zweiten Grades.

Gleichung.	Substitution.	Wurzeln.
$x^2 \pm px + q = 0$	$\frac{2\sqrt{q}}{p} = \sin\varphi$	$\begin{cases} x_, = \mp \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{q} \\ x_{,,} = \mp \cot\frac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{q} \end{cases}$
$x^2 \pm px - q = 0$	$\frac{2\sqrt{q}}{p} = \operatorname{tg}\varphi$	$\begin{cases} x_, = \pm \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{q} \\ x_{,,} = \mp \cot\frac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{q} \end{cases}$

Hierbei entspricht dem oberen Zeichen des zweiten Gliedes der Gleichung auch das obere Zeichen in der Wurzel.

Beispiele.

§. 108. **No. 1.** (*Heis* Samml. pag 205. No. 168.) Gegeben

$$x^2 + 1{,}1102x = 3{,}3594.$$

Nach der Auflösung von No. III. ist hier $p = 1{,}1102$ und $q = 3{,}3594$. Man berechne zunächst

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p},$$

oder logarithmisch ausgedrückt:

$$\log\operatorname{tg}\varphi = \log 2 + \tfrac{1}{2}\log q - \log p.$$

$$\begin{aligned} \log q &= \log 3{,}3594 = \underline{0{,}5262617} \\ &\qquad\qquad 2)\,0{,}2631308 \\ +\log 2 &= \underline{0{,}3010300} \\ &\qquad\qquad 0{,}5641608 \\ -\log p = \log 1{,}1102 &= \underline{0{,}0454012} \\ \log\operatorname{tg}\varphi &= 9{,}5187596 - 10. \end{aligned}$$

Diesem log tg entspricht: $\varphi = 73^0\, 9'\, 2{,}1''$, also $\frac{1}{2}\varphi = 36^0\, 34'\, 31''$.

Nun ist $\log x_, = \frac{1}{2}\log q + \log\operatorname{tg} 36^0\, 34'\, 31''$.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log q &= 0{,}2631308 \\ +\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi &= \underline{9{,}8704017 - 10} \\ \log x_, &= 0{,}1335325, \end{aligned}$$

folglich $x_, = 1{,}35998$. Da nun

$x_, + 1{,}35998 = -1{,}1102$, so ist hiernach

$$x_{,,} = -2{,}47018.$$

No. 2. (*Heis* No. 169.) Gegeben:

$$x^2 + 0{,}42331x = 8{,}53972.$$

Hier ist $p = 0{,}42331$; $q = 8{,}53972$ und die Gleichung fällt unter die Form $x^2 + px - q = 0$.

Für $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ findet man

$$\begin{aligned} \log\sqrt{q} &= 0{,}4657215 \\ +\log 2 &= \underline{0{,}3010300} \\ &\ 0{,}7667515 \\ -\log p &= \underline{0{,}6266585 - 1} \\ &\ 11{,}1400930 - 10 = \log\operatorname{tg}\varphi. \end{aligned}$$

Diesem entspricht $\varphi = 85^0 51' 26''$, folglich ist $\frac{1}{2}\varphi = 42^0 55' 43''$.

Ferner ist $\quad x_, = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{q}$.

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi &= 9{,}9685708 - 10 \\ +\log\sqrt{q} &= \underline{0{,}4657215} \\ \log x_, &= 0{,}4342923, \text{ daher} \\ x_, &= 2{,}718268\,.. \\ \text{und}\quad x_{,,} &= -3{,}14158\,.. \end{aligned}$$

No. 3. (*Heis* No. 170. α.) Gegeben:

$$x^2 + 9{,}125571x + 9{,}74192654 = 0.$$

Diese Gleichung fällt unter die allgemeine Form

$$x^2 + px + q = 0,$$

wo $p = 9{,}125571$ und $q = 9{,}74192654$ ist.

Für $\frac{2\sqrt{q}}{p} = \sin\varphi$ erhält man:

$$\begin{aligned} \log q &= 0{,}9886449, \text{ also} \\ \log\sqrt{q} &= 0{,}4943224 \\ +\log 2 &= \underline{0{,}3010300} \\ &\ 10{,}7953524 - 10 \\ -\log p &= \underline{0{,}9602600} \\ \log\sin\varphi &= 9{,}8350924 - 10. \end{aligned}$$

Diesem entspricht $\varphi = 43^0\ 9' 41{,}4''$, also $\frac{1}{2}\varphi = 21^0 34' 50{,}7''$.

Nun berechne man nach obiger Formel

$$x_, = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\,\sqrt{q}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi &= 9{,}5971898 - 10 \\ +\log\sqrt{q} &= \underline{0{,}4943224} \\ \log x_, &= 0{,}0915122, \text{ folglich} \\ x_, &= -1{,}23456, \text{ mithin,} \end{aligned}$$

da $x_, + x_{,,} = -p$, so folgt $x_{,,} = -7{,}891011$.

No. 4. (*Heis* No. 170. β.) Gegeben:

$$x^2 - 10{,}83945x + 26{,}991104 = 0.$$

Für $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ hat man

$$\begin{aligned}
\log q = \log 26{,}991104 &= 1{,}4312207 \\
\log\sqrt{q} &= 0{,}7156103 \\
& 0{,}3010300 \\
& 11{,}0166403 - 10 \\
\log p &= 1{,}0350072 \\
\log\sin\varphi &= 9{,}9816331 - 10,
\end{aligned}$$

folglich $\varphi = 73^0\,27'\,13{,}8''$ und $\frac{1}{2}\varphi = 36^0\,43'\,36{,}9''$.

Nun ist für die Wurzel $x_, = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q}$:

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi &= 9{,}8726396 - 10 \\
& \phantom{9{,}872}1621 \\
& 9{,}8728017 - 10 \\
+\log\sqrt{q} &= 0{,}7156103 \\
\log x_, &= 10{,}5884120 - 10.
\end{aligned}$$

Diesem Log. entspricht $x_, = 3{,}87625$. Die andere Wurzel ist durch $\cot\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q}$ bestimmt $= 6{,}9632$.

No. 5. (*Heis*, No. 171.) Gegeben:

$$7{,}3527x^2 - 33{,}81507x - 148{,}87107 = 0$$

oder: $$x^2 - \frac{33{,}81507}{7{,}3527}x - \frac{148{,}87107}{7{,}3525} = 0.$$

Der allgemeinen Form $x^2 - px - q = 0$ entsprechend, berechne man $\frac{2\sqrt{q}}{p} = \operatorname{tg}\varphi$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\log 148{,}87107 &= 2{,}1728103 \\
-\log 7{,}327 &= 0{,}8664468 \\
& 1{,}3063635 \\
2)\ & 0{,}6531817 = \log\sqrt{q}. \\
\log 2\sqrt{q} &= 0{,}9542117.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\log 33{,}81507 &= 1{,}5291103 \\
-\log 7{,}3527 &= 0{,}8664468 \\
\log p &= 0{,}6626635.
\end{aligned}$$

Folglich

$$\log\operatorname{tg}\varphi = 10{,}2915482 - 10,$$

welchem entspricht: $\varphi = 62^0\,55'\,52{,}7''$.

Man hat nun $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q}$ für die eine Wurzel zu berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi &= \log\operatorname{tg} 31^0\,27'\,56{,}3'' \\
&= 9{,}7867345 - 10 \\
\log\sqrt{q} &= 0{,}6531817 \\
& 10{,}4399162 - 10
\end{aligned}$$

$$\text{d. i. } \log x_{,} = 0{,}4399162.$$

Diesem entspricht $x_{,} = -2{,}7537$ nahe.

No. 6. (*Heis* No. 172.) Gegeben:

$$\frac{x^2}{1{,}2345} - 1{,}54994x + 0{,}6789 = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$x^2 - \underbrace{1{,}54994 \,.\, 1{,}2345}_{p}x + \underbrace{0{,}6789 \,.\, 1{,}2345}_{q} = 0.$$

Um $\frac{2\sqrt{q}}{p} = \sin\varphi$ zu erhalten, hat man

$$\begin{aligned} \log 0{,}6789 &= 0{,}8318058 - 1 \\ + \log 1{,}2345 &= 0{,}0914911 \\ \hline \log q &= 1{,}9232969 - 2 \\ \log \sqrt{q} &= 0{,}9616484 - 1 \\ + \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline & \quad 10{,}2626784 - 10. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \log 1{,}54994 &= 0{,}1903149 \\ + \log 1{,}2345 &= 0{,}0914911 \\ \hline \log p &= 0{,}2818060. \end{aligned}$$

Daher $\log \sin\varphi = 9{,}9808724 - 10,$

folglich $\varphi = 73^0\ 7'\ 10{,}5''$ und also

$$\tfrac{1}{2}\varphi = 36^0\ 33'\ 35{,}2''.$$

Es ist nun $x_{,} = +\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q}$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi &= 9{,}8701562 - 10 \\ + \log \sqrt{q} &= 0{,}9616484 - \ \ 1 \\ \hline \log x_{,} &= 0{,}8318046 - \ \ 1, \end{aligned}$$

folglich $x_{,} = 0{,}6788983,$

wofür nahe 0,6789 gesetzt werden kann.

Dann ist $x_{,,} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q}.$

$$\begin{aligned} \log \cot\tfrac{1}{2}\varphi &= 10{,}1298438 - 10 \\ + \log \sqrt{q} &= 0{,}9616484 - \ \ 1 \\ \hline \log x_{,,} &= 0{,}0914922, \end{aligned}$$

folglich $x_{,,} = 1{,}234503.$

No. 7. (*Heis* No. 175.)

Wenn die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 - mx + n = 0$ mit $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi'$ bezeichnet werden, durch welche Formeln lassen sich die Winkel φ und φ' bestimmen?

Da nach der Natur der quadratischen Gleichung $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi' = m$

und $\operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\varphi' = n$ ist, so würde man aus beiden Gleichungen die Werthe erhalten:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}.$$

Um jedoch diese Aufgabe trigonometrisch zu lösen, so hat man nach Form. No. 32:

$$(\alpha) \quad \operatorname{tg}(\varphi + \varphi') = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi'} = \frac{m}{1 - n}.$$

Es ist aber nach Form. 126

$$\frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')} = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'}, \text{ folglich ist}$$

$$(\beta) \quad \cos(\varphi - \varphi') = \frac{1 + n}{m} \sin(\varphi + \varphi').$$

Nach (α) ist $\varphi + \varphi'$ bestimmt, also ist auch $\sin(\varphi + \varphi')$ bestimmt und daher nach (β) $\varphi - \varphi'$ gefunden. Demnach sind $\varphi + \varphi'$ und $\varphi - \varphi'$ bekannte Grössen, woraus sich φ und φ' ergiebt. Selbstverständlich sind nun auch die Wurzeln $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi'$ bestimmt.

No. 8. (*Heis* No. 176.) Gegeben:

$$x^2 - 24{,}691x + 61{,}6 = 0.$$

Um diese Gleichung nach den allgemeinen Formeln in No. 7 zu lösen, berechne man zuerst

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varphi') = \frac{m}{1 - m} \text{ d. i.}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varphi') = -\frac{24{,}691}{60{,}6}.$$

$$\begin{aligned} \log 24{,}691 &= 1{,}3925387 \\ -\log 60{,}6 &= 1{,}7824726 \\ \hline \log\operatorname{tg}(\varphi + \varphi') &= 9{,}6100661 - 10. \end{aligned}$$

Diesem entspricht: $\varphi + \varphi' = 22^0\, 10'\, 5''$.

Da aber $\operatorname{tg}(\varphi + \varphi')$ negativ ist, und $-\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180^0 - \alpha)$ ist, so muss diese Tangente einem stumpfen Winkel angehören.

Es ist also $\quad \varphi + \varphi' = 180^0 - (22^0\, 10'\, 5'')$

$$= 157^0\, 49'\, 55''.$$

$$
\begin{aligned}
\text{Nun ist} \quad \sin(\varphi+\varphi') &= 9{,}5767150-10\\
+\log(1+n) = \log 62{,}6 &= \underline{1{,}7965743}\\
&\ 11{,}3732893-10\\
-\log m = \log 24{,}691 &= \underline{1{,}3925387}\\
\log\cos(\varphi-\varphi') &= 9{,}9807506-10.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt: $\varphi-\varphi' = 16^0\,55'\,59{,}9''$, also

$$\varphi = 87^0\,22'\,57{,}4''$$

$\varphi' = 70^0\,26'\,57{,}5''$. Ferner ist

$$\log \operatorname{tg}\varphi = \log \operatorname{tg} 87^0\,22'\,57{,}4'' = 11{,}3399521-10$$

d. i. $\log x = 1{,}339521$,

mithin $x = 21{,}875$.

Ebenso findet man $x_{,} = \operatorname{tg}\varphi' = 2{,}816$.

No. 9. (*Heis* No. 173.) Was wird aus dem Resultate der Gleichung

$$c^2 = (a+mx)^2+(d+nx)^2,$$

wenn $\frac{n}{m} = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{p}{q} = \operatorname{tg}\beta$, $p^2 = c^2-a^2-d^2$, und $q = a\cos\alpha + d\sin\alpha$ gesetzt wird?

Diese Gleichung geht, algebraisch aufgelöst, nach und nach in folgende Formen über:

$$(m^2+n^2)x^2+2(am+dn)x = c^2-a^2-d^2$$

$$x^2+\frac{2(am+dn)x}{m^2+n^2} = p^2$$

$$x^2+\frac{2(am+dn)x}{m^2+n^2}+\left(\frac{am+dn}{m^2+n^2}\right)^2 = \frac{p^2}{m^2+n^2}+\left(\frac{am+dn}{m^2+n^2}\right)^2$$

$$x = -\frac{am+dn}{m^2+n^2} \mp \sqrt{\frac{p^2(m^2+n^2)+(am+dn)^2}{m^2+n^2}}$$

$$= \frac{-(am+dn)+\sqrt{p^2(m^2+n^2)+(am+dn)^2}}{m^2+n^2}.$$

Setzt man jetzt $\frac{n}{m} = \operatorname{tg}\alpha$ und richtet die Auflösungsformel dazu ein, so erhält man:

$$x = \frac{-\left(a+d\frac{n}{m}\right)m+\sqrt{p^2\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)m^2+\left(a+d.\frac{n}{m}\right)^2m^2}}{\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)m^2}$$

$$x = \frac{-(a+d\operatorname{tg}\alpha)+\sqrt{p^2(1+\operatorname{tg}\alpha^2)+(a+d\operatorname{tg}\alpha)^2}}{m(1+\operatorname{tg}\alpha^2)}$$

$$x = \frac{-\left(a + d\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) + \sqrt{p^2 \sec\alpha^2 + \left(a + d\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}}{m\left(1 + \frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha^2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-(a\cos\alpha + d\sin\alpha)}{\cos\alpha} + \sqrt{\frac{p^2}{\cos\alpha^2} + \frac{(a\cos\alpha + d\sin\alpha)^2}{\cos\alpha^2}}}{\frac{m(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2)}{\cos\alpha^2}}.$$

Setzt man nun $a\cos\alpha + d\sin\alpha = q$, so folgt:

$$x = \frac{-\frac{q}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{p^2 + q^2}}{\frac{m}{\cos\alpha^2}}.$$

Wird Zähler und Nenner mit $\cos\alpha^2$ multiplicirt, so entsteht:

$$x = \frac{-q\cos\alpha + \cos\alpha\sqrt{p^2 + q^2}}{m}$$

$$= \frac{-q\cos\alpha + \cos\alpha\sqrt{\left(\frac{p^2}{q^2} + 1\right)q^2}}{m}$$

und für $\frac{p}{q} = \operatorname{tg}\beta$ substituirt:

$$x = \frac{-q\cos\alpha + q\cos\alpha\sqrt{1 + \operatorname{tg}\beta^2}}{m}$$

$$= \frac{q\cos\alpha}{m}\,[-1 + \sec\beta],\text{ oder, da}$$

$$q = \frac{p}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{p\cos\beta}{\sin\beta},\text{ so folgt:}$$

$$x = \frac{p\cos\beta\cos\alpha}{m\sin\beta}\left[-1 + \frac{1}{\cos\beta}\right]$$

$$= \frac{p\cos\beta\cos\alpha}{m\sin\beta}\;\frac{[-\cos\beta + 1]}{\cos\beta}$$

$$= \frac{p\cos\alpha}{m\sin\beta}\;[1 - \cos\beta]$$

$$= \frac{p\cos\alpha}{m\sin\beta}.\,2\sin\tfrac{1}{2}\beta^2 = \frac{2\,p\cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta^2}{m\sin\beta}$$

$$= \frac{2\,p\cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta^2}{m.2\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta} = \frac{p}{m}\cos\alpha\operatorname{tg}\beta;$$

oder, da aus $\frac{n}{m} = \operatorname{tg}\alpha$ folgt: $m = \frac{n}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{n\cos\alpha}{\sin\alpha}$, so ergiebt sich, wenn dieser Werth für m eingesetzt wird, der eine Werth der Wurzel:

$$x_{,} = \frac{p\sin\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta}{n},$$ und folglich ist der andere:

$$x_{,,} = \frac{-p\sin\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta}{n}.$$

§. 109. **Aufgabe.** Die quadratische Gleichung mit imaginären Coefficienten

$$x^2 + (a+b\sqrt{-1})x + (c+d\sqrt{-1}) = 0$$ aufzulösen.

Auflösung. Wenn man diese Gleichung nach den Regeln der Algebra auflöst, so erhält man

$$x^2+(a+b\sqrt{-1})x = -(c+d\sqrt{-1}),$$ folglich

$$x^2+(a+b\sqrt{-1})x + \left(\frac{a+b\sqrt{-1}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2+2ab\sqrt{-1}-b^2}{4} - \frac{4c+4d\sqrt{-1}}{4}$$

$$= \frac{(a^2-b^2-4c)+(2ab-4d)\sqrt{-1}}{4}$$

$$x = \frac{-(a+b\sqrt{-1})}{2} \mp \frac{\sqrt{(a^2-b^2-4c)+(2ab-4d)\sqrt{-1}}}{2},$$ oder

$$x = \tfrac{1}{2}\left[-(a+b\sqrt{-1}) \mp \sqrt{(a^2-b^2-4c)+(2ab-4d)\sqrt{-1}}\right]. \quad (\alpha.)$$

Diese Auflösung fordert nun die Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A+B\sqrt{-1}$. In §. 20. fanden wir die Formel:

$$\sqrt{A\mp\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \mp \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

und können wir dieselbe auch auf das Binom $A+B\sqrt{-1}$ anwenden, wenn wir $A = A$ und $\sqrt{B} = \sqrt{-B^2}$, d. i. $B = -B^2$ setzen (da $\sqrt{-B^2} = \sqrt{B^2}\sqrt{-1} = B\sqrt{-1}$ ist). Man erhält alsdann

für $$\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} = \frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2} = \frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}$$

und für $$\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} = \frac{A-\sqrt{A^2+B^2}}{2} = \frac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2} \times -1,$$

folglich

$$\sqrt{A\mp B\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}} \mp \sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2}}\cdot\sqrt{-1}. \quad (\beta.)$$

Hier ist also $A = a^2 - b^2 - 4c$ und $B = 2ab - 4d$, daher ist

$$x = \tfrac{1}{2}\left[-(a \mp b\sqrt{-1}) \mp \sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2}}\,.\sqrt{-1}\right]$$

Es sind also die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$(\gamma.)\begin{cases} x_{,} = \tfrac{1}{2}\left[-(a+b\sqrt{-1}) + \sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}} + \sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2}}.\sqrt{-1}\right] \\ x_{,,} = \tfrac{1}{2}\left[-(a-b\sqrt{-1}) + \sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}} + \sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2}}.\sqrt{-1}\right] \end{cases}$$

Andere Auflösung. In der Auflösungsformel (α.) für x hat man die Quadratwurzel aus dem Ausdrucke $(a^2 - b^2 - 4c) + (2ab - 4d)\sqrt{-1}$ zu bestimmen. Um dieses durch goniometrische Functionen zu leisten, verwandle man diese Grösse in folgende:

$$\left[1 + \frac{(2ab-4d)\sqrt{-1}}{a^2-b^2-4c}\right][a^2 - b^2 - 4c] \text{ und setze}$$

$$1)\quad \frac{2ab-4d}{a^2-b^2-4c} = \operatorname{tg}\varphi\text{; dann erhält man}$$

$$(1+\operatorname{tg}\varphi.\sqrt{-1})(a^2-b^2-4c), \text{ oder } \left(1+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{-1}\right)(a^2-b^2-4c)$$

$$= (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})\left(\frac{a^2-b^2-4c}{\cos\varphi}\right). \text{ Setzt man}$$

$$2)\quad \frac{a^2-b^2-4c}{\cos\varphi} = \frac{2ab-4d}{\sin\varphi} = m, \text{ so wird}$$

$$\sqrt{(a^2-b^2-4c)+(2ab-4d)\sqrt{-1}} = \sqrt{m}\,(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}).$$

Da nun $\sqrt{(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})} = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}$ *), so giebt die Gleichung (α.) den Werth

$$x = \tfrac{1}{2}\left[-(a+b\sqrt{-1}) \mp \sqrt{m}.\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi}{2}\sqrt{-1}\right)\right].$$

Zieht man die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Glieder zusammen, so sind die beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung

---

*) Es ist nämlich $\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}\right)^2 = \cos\frac{\varphi}{2}^2 + 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.\sqrt{-1} - \sin\frac{\varphi}{2}^2$. Da nun $\cos\frac{\varphi}{2}^2 - \sin\frac{\varphi}{2}^2 = \cos\varphi$ und $2\cos\frac{\varphi}{2}\ \frac{\varphi}{2} = \sin\varphi$, so folgt $\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}\right)^2 = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$. Ebenso ist

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^2 = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi\sqrt{-1}, \text{ also auch umgekehrt:}$$
$$\sqrt{(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\sqrt{-1})} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}.$$

$$3)\quad \begin{cases} x_{,} = \frac{1}{2}\left[\left(-a+\sqrt{m}\,.\cos\frac{\varphi}{2}\right)+\left(-b+\sqrt{m}\,.\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{-1}\right] \\ x_{,,} = \frac{1}{2}\left[\left(-a-\sqrt{m}\,.\cos\frac{\varphi}{2}\right)+\left(-b-\sqrt{m}\,.\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{-1}\right]. \end{cases}$$

§. 110. **Beispiele.**

1. Es sei die Gleichung gegeben:

$$x^2-(5+4\sqrt{-1})\,x+(6+8\sqrt{-1}) = 0.$$

Nach der algebraischen Auflösung hat man $a=-5$; $b=-4$; $c=6$; $d=8$, also $A=a^2-b^2-4c=-15$; $B=8$; daher

$$\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{225+64}-15}{2}} = 1 \text{ und}$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}-A\,.\sqrt{-1}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{225+64}+15\sqrt{-1}}{2}} = 4\sqrt{-1}.$$

Folglich sind die beiden Wurzeln, nach (γ.)

$$x_{,} = \tfrac{1}{2}[5+4\sqrt{-1}+1+4\sqrt{-1}] = 3+4\sqrt{-1}$$
$$x_{,,} = \tfrac{1}{2}[5-4\sqrt{-1}-1+4\sqrt{-1}] = 2.$$

Nach der zweiten Auflösung.

Da $2ab-4d=40-32=8$ und

$a^2-b^2-4c = 25-16-24 = -15$, so ist $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{8}{15}$. Da $m\sin\varphi=8$ und $m\cos\varphi=-15$, so folgt, dass $\varphi {> 90^0 \atop < 180^0}$ sein muss. Die Berechnung von φ kann hier erspart werden; denn da $m^2\sin\varphi^2=64$ und $m^2\cos\varphi^2=225$, so folgt $m^2=289$, also $m=17$. Es ist also $\sin\varphi=\frac{8}{17}$ und $\cos\varphi=-\frac{15}{17}$. Da nun $\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{1}{17}}$ und $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{4}{\sqrt{17}}$, so erhält man nach den Auflösungsformeln (3) des vorigen §.:

$$x_{,}=3+4\sqrt{-1} \quad\text{und}\quad x_{,,}=2,\ \text{wie vorhin.}$$

2. Es sei die Gleichung gegeben:

$$x^2+(5+2\sqrt{-1})\,x+(3+\sqrt{-1}) = 0,$$

Hier ist $a=5$; $b=2$; $c=3$; $d=1$, also $2ab-4d=20-4=16$ und $a^2-b^2-4c=25-4-12=9$; daher $\operatorname{tg}\varphi=\frac{16}{9}$.

$$\begin{aligned} \log 16 &= 1{,}2041200 \\ \log\ \ 9 &= \underline{0{,}9542425} \\ \log\operatorname{tg}\varphi &= 10{,}2498775-10. \end{aligned}$$

Diesem entspricht: $\varphi = 60^0\,38'\,32''$.

Zur Berechnung von m hat man

$$\frac{2ab - 4d}{\sin\varphi} = m, \text{ d. i. } m = \frac{16}{\sin\varphi};$$

daher

$$\begin{aligned} \log 16 &= 1{,}2041200 \\ \log \sin\varphi &= \underline{9{,}9403049 - 10} \\ \log m &= 1{,}2638151 \\ \log \sqrt{m} &= 0{,}6319075. \end{aligned}$$

Man berechne nun $\sqrt{m}\,.\cos\frac{\varphi}{2}$ und $\sqrt{m}\sin\frac{\varphi}{2}$, wobei

$$\frac{\varphi}{2} = 30^0\,19'\,16'' \text{ ist.}$$

$$\begin{aligned} \log\cos\frac{\varphi}{2} &= 9{,}9361163 - 10 \\ \log\sqrt{m} &= \underline{0{,}6319075} \\ &\quad 10{,}5680238 - 10. \end{aligned}$$

Diesem Log. entspricht:

$$\sqrt{m}\,.\cos\frac{\varphi}{2} = 3{,}698484. \text{ Ferner ist}$$

$$\begin{aligned} \log\sin\frac{\varphi}{2} &= 9{,}7031587 - 10 \\ + \log\sqrt{m} &= \underline{0{,}6319075} \\ &\quad 0{,}3350662. \end{aligned}$$

Diesem Log. entspricht: $\sqrt{m}\,.\sin\frac{\varphi}{2} = 2{,}163048$.

Man erhält nun für

$$\begin{aligned} x_{,} &= 0{,}650758 + 0{,}081524\sqrt{-1} \\ x_{,,} &= -4{,}349242 - 2{,}081524\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Andere Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§. 111. Diese zweite trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichung können wir um so weniger übergehen, als sie sich nicht auf die algebraische Auflösung gründet, sondern direct aus der Vergleichung einer trigonometrischen Formel mit der vorgelegten Gleichung entspringt. Es bedarf nur der Auflösung der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 - px + q &= 0 \text{ und} \\ x^2 + px - q &= 0, \end{aligned}$$

weil die beiden übrigen Formen, welche durch

$$x^2 \pm px \pm q = 0$$

ausgedrückt sind, der Grösse nach dieselben Wurzeln, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen haben.

§. 112. **I. Auflösung der Gleichung** $x - px + q = 0$.

Nach Form. No. 21. ist:

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi, \text{ folglich auch}$$
$$\sin 2\varphi^2 = 4 \sin \varphi^2 \cos \varphi^2.$$

Setzt man statt $\cos \varphi^2 = 1 - \sin \varphi^2$, so erhält man

$$\sin 2\varphi^2 = 4 \sin \varphi^2 (1 - \sin \varphi^2)$$
$$= 4 \sin \varphi^2 - 4 \sin \varphi^4, \text{ oder}$$
$$4 \sin \varphi^4 - 4 \sin \varphi^2 + \sin 2\varphi^2 = 0, \text{ oder}$$
$$\sin \varphi^4 - \sin \varphi^2 + \tfrac{1}{4} \sin 2\varphi^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird nicht gestört, wenn man sie mit einer unbestimmten Hülfsgrösse, $= r^4$, multiplicirt, indem diese, wie jede andere goniometrische Formel für jeden Halbmesser Gültigkeit hat.

$$r^4 \sin \varphi^4 - r^4 \sin \varphi^2 + \tfrac{1}{4} r^4 \sin 2\varphi^2 = 0, \text{ oder}$$

A. $$(r^2 \sin \varphi^2)^2 - r^2(r^2 \sin \varphi^2) + \tfrac{1}{4} r^4 \sin 2\varphi^2 = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der gegebenen

$$x^2 - px + q = 0$$

und setzt also $x = r^2 \sin \varphi^2$, so geht (*A.*) in folgende Gleichung über:

B. $$x^2 - r^2 x + \tfrac{1}{4} r^4 \sin 2\varphi^2 = 0.$$

Identificirt man diese Gleichung mit $x^2 - px + q = 0$, so entstehen zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen,

1) $r^2 = p$ und

2) $\tfrac{1}{4} r^4 \sin 2\varphi^2 = q.$

Durch Eliminirung von r folgt:

$$\tfrac{1}{4} p^2 \sin 2\varphi^2 = q, \text{ also}$$

I. $$\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p} \text{ und daher}$$

II. $$x = p \sin \varphi^2.$$

Man hat demnach bei der Auflösung der vorgelegten Gleichung $x^2 - px + q = 0$, nach I. erst den Hülfswinkel φ zu bestimmen, wodurch dann die Auflösungsformel II. den Werth von x giebt.

§. 113. Anmerkung. Um den obigen Kunstgriff, die Formel $\sin \varphi^4 - \sin \varphi^2 + \frac{1}{4} \sin 2\varphi^2 = 0$ mit r^4 zu multipliciren, zu erklären, so bezeichnen wir nach *Grunert* *) mit $\text{Sin}\,\varphi$ und $\text{Cos}\,\varphi$ die trigonometrischen Functionen für den Halbmesser r, während $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ dem Halbmesser $= 1$ entsprechen. Dann ist $\text{Sin}\,\varphi = r\sin\varphi$ und $\text{Cos}\,\varphi = r\cos\varphi$, sowie $\text{Sin}\,2\varphi = r\sin 2\varphi$ und umgekehrt, $\sin 2\varphi = \frac{1}{r}\text{Sin}\,\varphi$ u. s. w. Nach gehöriger Substitution dieser Werthe wird daher aus der Gleichung $\sin 2\varphi^2 = 4\sin\varphi^2\cos\varphi^2$ folgende:

$$\frac{1}{r^2}\,\text{Sin}\,2\varphi^2 = \frac{4}{r^4}\,\text{Sin}\,\varphi^2\,\text{Cos}\,\varphi^2$$

und, wenn man $r^2 - \text{Sin}\,\varphi^2$ statt $\text{Cos}\,\varphi^2$ setzt:

$$\frac{1}{r^2}\,\text{Sin}\,2\varphi^2 = \frac{4}{r^4}\,\text{Sin}\,\varphi^2 - \frac{4}{r^4}\,\text{Sin}\,\varphi^4, \text{ oder}$$

$$(\alpha.) \qquad (\text{Sin}\,\varphi^2)^2 - r^2\,\text{Sin}\,\varphi^2 + \tfrac{1}{4}r^2\,\text{Sin}\,2\varphi^2 = 0.$$

Geht man nun wieder auf den Halbmesser 1 zurück, setzt also $\text{Sin}\,\varphi = r\sin\varphi$, sowie $\text{Sin}\,2\varphi = r\sin 2\varphi$, so wird aus der Gleichung (α.) nunmehr

$$(r^2\sin\varphi^2)^2 - r^4\sin\varphi^2 + \tfrac{1}{4}r^4\sin 2\varphi^2 = 0,$$

welche völlig mit der obigen Gleichung (*A.*) übereinstimmt.

§. 114. Wir wollen diese Auflösung sogleich anwenden und zu diesem Ende die obige Gleichung des 4ten Beispiels nehmen.

Gegeben: $x^2 - 10{,}83945x + 26{,}991104 = 0.$

Um $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ zu finden, hat man:

$$\begin{array}{rcl}
\log q = \log 26{,}991104 & = & 1{,}4312207 \\
\log\sqrt{q} & =^{2)} & 0{,}7156103 \\
+\log 2 & = & 0{,}3010300 \\
 & & 11{,}0166403 - 10 \\
\log p = \log 10{,}83945 & = & 1{,}0350072 \\
\log\sin 2\varphi & = & 9{,}9816331 - 10.
\end{array}$$

Diesem entspricht $2\varphi = 73^\circ 27'\, 13{,}8''$,
also ist $\varphi = 36^\circ 43'\, 36{,}9''$.

Es ist nun $x = p\sin\varphi^2$ zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl}
\log\sin 36^\circ 43'\, 36{,}9'' & = & 9{,}7767024 - 10 \\
 & & 2 \\
 & & 19{,}5534048 - 20 \\
+\log p & = & 1{,}0350072 \\
\log x & = & 0{,}5884120.
\end{array}$$

Diesem Log. entspricht $x = 3{,}87625.$

---

*) Lehrbuch der ebenen und sphaerischen Trigonometrie. Brandenb. 1843.

Der kürzeste Weg die andere Wurzel zu erhalten, ist die Subtraction der gefundenen Wurzel von dem Coefficienten p, wodurch man erhält 6,9632.

Aber auch die trigonometrische Rechnung muss, unabhängig von diesem algebraischen Gesetze, beide Wurzeln finden lehren.

Da nämlich jeder Sinus zwei Winkeln angehört, welche sich zu 180° ergänzen [$\sin \alpha = \sin (180^0 - \alpha)$], so ist der zweite Werth $2\varphi = 180 - 73^0 27' 13{,}8'' = 106^0 32' 46{,}2''$, also $\varphi = 53^0 16' 23{,}1''$.

$$\begin{aligned}
\text{Es ist} \qquad \log \sin \varphi &= 9{,}9039007 - 10 \\
2 \log \sin \varphi &= 19{,}8078014 - 20 \\
+ \log p &= \underline{1{,}0350072 \qquad} \\
\log x &= 0{,}8428086. \text{ Diesem entspricht:}
\end{aligned}$$

$x = 6{,}963194$, wofür man setzen kann 6,9632.

§. 115. **Zusatz.** Da sich die beiden Werthe von 2φ zu 180° ergänzsn, so ergänzen sich offenbar die von φ zu 90°. Man braucht daher nur den kleinsten Werth von 2φ zu halbiren und ihn von 90° abzuziehen, so wird, weil $\sin \varphi = \cos (90 - \varphi)$, die Gestalt der beiden Wurzeln der Gleichung folgende sein:

$$1)\ x_, = p \sin \varphi^2, \qquad 2)\ x_{,,} = p \cos \varphi^2.^{*)}$$

Beispiel.

Es sei gegeben (*Heis* No. 176.)

$$x^2 - 24{,}691 x + 61{,}6 = 0.$$

Um $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ zu erhalten, hat man

$$\begin{aligned}
\log 61{,}6 &= 1{,}7895807 \\
\log \sqrt{61{,}6} &= 0{,}8947903 \\
+ \log 2 &= \underline{0{,}3010300 \qquad} \\
&\quad 11{,}1958203 - 10 \\
- \log 24{,}691 &= \underline{1{,}3925387 \qquad} \\
\log \sin 2\varphi &= 9{,}8032816 - 10, \\
\text{folglich} \qquad 2\varphi &= 39^0 28' 30{,}4'' \text{ und} \\
\varphi &= 19^0 44' 15{,}2''.
\end{aligned}$$

---

*) Die Richtigkeit dieser Formel bestätigt sich auch algebraisch, wenn man $x_,$ von dem mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Coefficienten p der gegebenen Gleichung subtrahirt. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
p - p.\sin \varphi^2 &= p(1 - \sin \varphi^2) \\
&= p \cos \varphi^2.
\end{aligned}$$

Nun ist für $x_, = p \sin \varphi^2$:

$$\begin{array}{rl}
\log \sin 19^0\,44'\,15{,}2'' = & 9{,}5285468 - 10 \\
& \underline{\qquad\qquad 2 \qquad} \\
& 19{,}0570936 - 20 \\
+ \log p = & \underline{1{,}3925387 \qquad\quad} \\
\log x_, = & 0{,}4496323,
\end{array}$$

folglich $x_, = 2{,}815997$ d. i. circa 2,816.

Ferner ist für $x_{,,} = p \cos \varphi^2$:

$$\begin{array}{rl}
\log \cos 19^0\,44'\,15{,}2'' = & 9{,}9737162 - 10 \\
\text{Diff. } 1'' = 7{,}56 \times 15{,}2 = & \underline{\qquad\qquad 115 \qquad} \\
& 9{,}9737047 - 10 \\
& \underline{\qquad\qquad 2 \qquad} \\
& 19{,}9474094 - 20 \\
+ \log p = & \underline{1{,}3925387 \qquad\quad} \\
\log x_{,,} = & 1{,}3399481,
\end{array}$$

folglich $x_{,,} = 21{,}875$.

§. 116. **II. Auflösung der Gleichung** $x^2 + px - q = 0$.

Nach Form. No. 40 ist $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi^2}$

oder $\operatorname{tg} 2\varphi - \operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{tg} \varphi^2 = 2 \operatorname{tg} \varphi$, geordnet

$$\operatorname{tg} \varphi^2 \operatorname{tg} 2\varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} 2\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi^2 + \frac{2}{\operatorname{tg} 2\varphi} \cdot \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0.$$

Multiplicirt man alle Glieder mit r^2, so entsteht:

$$r^2 \operatorname{tg} \varphi^2 + \frac{2r^2}{\operatorname{tg} 2\varphi} \cdot \operatorname{tg} \varphi - r^2 = 0, \text{ oder}$$

$$(\alpha.) \qquad (r \operatorname{tg} \varphi)^2 + \frac{2r}{\operatorname{tg} 2\varphi} \cdot r \operatorname{tg} \varphi - r^2 = 0.$$

Setzt man $r \operatorname{tg} \varphi = x$, so erhält man:

$$(\beta.) \qquad x^2 + \frac{2r}{\operatorname{tg} 2\varphi}\, x - r^2 = 0.$$

Identificirt man diese Gleichung mit der vorgelegten; so ist

$$p = \frac{2r}{\operatorname{tg} 2\varphi} \quad \text{und} \quad q = r^2.$$

Da nun $\frac{1}{2} p \operatorname{tg} 2\varphi = r = \sqrt{q}$, also $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2\sqrt{q}}{p}$, so folgt:

$$x = (r \operatorname{tg} \varphi) = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{q}$$

als Werth für die eine Wurzel der Gleichung.

§. 117. Um die zweite Wurzel zu erhalten, berücksichtige man, dass jede Tangente zwei Winkeln angehört, welche um 180° verschieden sind. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(180^0+\varphi) \quad \text{(Form. No. 4).}$$

Die Richtigkeit der Formel folgt leicht aus No. 32, wornach

$$\operatorname{tg}(180^0+\varphi) = \frac{\operatorname{tg}180^0+\varphi}{1-\operatorname{tg}180^0\operatorname{tg}\varphi}.$$

Da nun $\operatorname{tg}180^0 = 0$, so ist

$$\operatorname{tg}(180^0+\varphi) = \frac{0+\operatorname{tg}\varphi}{1-0} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Es ist also auch $\qquad \operatorname{tg}(180^0+2\varphi) = \operatorname{tg}2\varphi.$

Da die erhaltenen beiden Werthe des gesuchten Winkels $180^0+2\varphi$ und 2φ sind, so hat offenbar der Winkel φ die beiden Werthe $90^0+\varphi$ und φ; also hat die Gleichung die beiden Wurzeln

$$x_{,} = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{q} \quad \text{und}$$
$$x_{,,} = \operatorname{tg}(90^0+\varphi)\sqrt{q}.$$

Es ist aber $\operatorname{tg}(90^0+\varphi) = \dfrac{\sin(90+\varphi)}{\cos(90+\varphi)}$

$$= \frac{\sin 90\cos\varphi+\sin\varphi\cos 90}{\cos 90^0\cos\varphi-\sin\varphi\sin 90^0} = \frac{\cos\varphi}{-\sin\varphi}$$
$$= -\cot\varphi.$$

Demnach hat man zur Auflösung der Gleichung

$$x^2+px-q = 0$$

die Formeln anzuwenden:

$$\text{I.} \quad \operatorname{tg}2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} x_{,} = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{q} \\ x_{,,} = -\cot\varphi\sqrt{q}. \end{cases}$$

Anmerk. Dass die zweite Wurzel der Gleichung $-\cot\varphi\sqrt{q}$ sei, folgt auch sogleich aus der bekannten Eigenschaft der quadratischen Gleichung, gemäss welcher das dritte Glied $(-q)$ das Product beider Wurzeln ist. Nun war die eine Wurzel $= \operatorname{tg}\varphi\sqrt{q}$; daher muss die andere $= \dfrac{-q}{\operatorname{tg}\varphi\sqrt{q}} = \dfrac{-q\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi\cdot q} = -\cot\varphi\sqrt{q}$ sein. (Form. No. 11.)

Beispiel.

(*Heis* No. 178.) Es sei gegeben:

$$x^2+0{,}43555x-0{,}2016 = 0.$$

Dann hat man zur Bestimmung von $\operatorname{tg}2\varphi$:

$$\log q = \log 0{,}2016 = 1{,}3044905-2$$

$$
\begin{aligned}
\log\sqrt{q} &= 0{,}6522452-1\\
+\log 2 &= \underline{0{,}3010300}\\
&\ 0{,}9532752-1\\
\log p = \log 0{,}43555 &= \underline{0{,}6390381-1}\\
\log \operatorname{tg} 2\varphi &= 10{,}3142372-10,
\end{aligned}
$$

folglich $2\varphi = 64^0\, 7'\, 32''.$

und also $\varphi = 32^0\, 3'\, 46''.$

Für die Wurzel $x_{,} = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{q}$ ist nun:

$$
\begin{aligned}
\log \operatorname{tg}\varphi &= 9{,}7968475-10\\
+\log\sqrt{q} &= \underline{0{,}6522452-\ 1}\\
\log x_{,} &= 0{,}4490927-\ 1,
\end{aligned}
$$

mithin $x_{,} = 0{,}28125.$

Zur Bestimmung der andern Wurzel hat man:

$$
\begin{aligned}
\log \cot\varphi &= 10{,}2031525-10\\
+\log\sqrt{q} &= \underline{\ 0{,}6522452-\ 1}\\
\log x_{,,} &= \ 0{,}8553977-\ 1,
\end{aligned}
$$

folglich $x_{,,} = -0{,}71679.$

§. 118. **Zusatz 1.** Wäre die Gleichung aufzulösen

$$x^2 - px - q = 0,$$

so lässt sich diese nach denselben Formeln ausführen. Setzt man nämlich in diese Gleichung $-x$ statt x, so entsteht: $x^2 + px - q = 0$. Man braucht dann nur d i e s e Gleichung vorschriftsmässig aufzulösen und den erhaltenen Wurzeln das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben.

Zusatz 2. Die Gleichung $x^2 \pm px - q = 0$ hat jederzeit reelle Wurzeln; denn $\operatorname{tg} 2\varphi$ kann jeden Werth haben, der zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegt. Dies harmonirt auch völlig mit der algebraischen Auflösung der Gleichung. Es ist nämlich: $x = \mp \frac{1}{2}p \mp \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$, wobei q als positiv angenommen ist; daher hat $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$, also auch x stets einen reellen Werth.

Beispiel.

Es sei die Gleichung gegeben (*Heis* No. 177.)

$$x^2 - 2{,}3927x - 5{,}757312 = 0,$$

welche in $x^2 + 2{,}3927x - 5{,}757312 = 0$ übergeht, wenn $-x$ statt $+x$ gesetzt wird.

Für $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2\sqrt{q}}{p}$ hat man

$$\log\sqrt{q} = 0{,}3801099$$

$$\log 2\sqrt{q} = 0{,}6811399$$
$$\log p = 0{,}3788882$$
$$\log \operatorname{tg} 2\varphi = 10{,}3022517 - 10,$$

folglich $2\varphi = 63^0\ 29'\ 57''$

und $\varphi = 31^0\ 44'\ 58{,}5''$.

Nach der zweiten Formel ist nun zu berechnen

$$x = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{q}.$$
$$\log \operatorname{tg}\varphi = 9{,}7915564 - 10$$
$$+ \log\sqrt{q} = 0{,}3801099$$
$$\log x = 0{,}1716663.$$

Diesem Log. entspricht: $x = 1{,}48479$. Da aber die Wurzel der gegebenen Gleichung negativ zu nehmen ist, so hat man $x_, = -1{,}48479$.. Mithin ist die andere Wurzel, oder $x_{,,}$ - 3,87749.

Dritte Auflösung der quadratischen Gleichung.

§. 119. Die hier folgende dritte Auflösung der quadratischen Gleichungen glaubt der Verfasser anführen zu müssen, theils weil sie kürzer, theils weil sie leichter ist, als die beiden vorigen. Diese Auflösung gründet sich auf die von *Vieta* († 1603) gelehrte Methode der Zurückführung einer unreinen quadratischen Gleichung auf eine reine.

Sei I. $x^2 + px + q = 0$.

Man setze $x = y - \frac{1}{2}p$, so entsteht die reine Gleichung:

$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q\text{, folglich}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}.$$

Setzt man nun $\frac{4q}{p^2} = \sin\varphi^2$, so wird

$$y = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 - \sin\varphi^2} = \tfrac{1}{2}p\cos\varphi\text{, folglich}$$
$$x = (y - \tfrac{1}{2}p) = \tfrac{1}{2}p\cos\varphi - \tfrac{1}{2}p\text{, oder}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}p(1 - \cos\varphi) = -p\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \text{ (Form. No. 59.).}$$

Der zweite Werth für $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ ist $180^0 - \varphi$, folglich

$$x_{,,} = -p\sin\tfrac{1}{2}(180^0 - \varphi)^2 = -p\sin(90^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)^2$$
$$= -p\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

§. 120. Sei II. $x^2 - px + q = 0$,

so wird, wenn $x = y + \frac{1}{2}p$, die reducirte Gleichung

$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q, \text{ also, wie vorhin}$$
$$y = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}.$$

Man setze $\frac{4q}{p^2} = \sin\varphi^2$, dann ist $y = \frac{1}{2}p\cos\varphi$, folglich
$$x = (y + \tfrac{1}{2}p) = \tfrac{1}{2}p\cos\varphi + \tfrac{1}{2}p$$
$$= \tfrac{1}{2}p(\cos\varphi + 1) = p\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 \text{ (Form. No. 60.).}$$

Für die andere Wurzel berücksichtige man, dass dem $\sin\varphi$ die beiden Winkel φ und $180^0 - \varphi$ entsprechen, also auch statt $\cos\frac{1}{2}\varphi$ gesetzt werden kann $\cos\frac{1}{2}(180^0 - \varphi)$ oder $\cos(90^0 - \frac{1}{2}\varphi)$ d. i. $\sin\frac{1}{2}\varphi$, so dass mithin die vorgelegte Gleichung die beiden Wurzeln hat:
$$x_, = +p\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$$
$$x_{,,} = +p\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

§. 121. Sei III. $x^2 + px - q = 0$,
so ist für $x = y - \frac{1}{2}p$ die reducirte Gleichung
$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 + q = \frac{p^2 + 4q}{4}, \text{ also}$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}.$$

Man setze $\frac{2\sqrt{q}}{p} = \operatorname{tg}\varphi$, so ist
$$y = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi^2} = \tfrac{1}{2}p\sec\varphi, \text{ daher}$$
$$x = (y - \tfrac{1}{2}p) = \tfrac{1}{2}p\sec\varphi - \tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{2}p(\sec\varphi - 1).$$

Da aber (Form. No. 121.) $\sec\varphi - 1 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{tg}\varphi$ und $p = \frac{2\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi}$, so erhält man, nach Einsetzung dieses Werthes von p:
$$x = \sqrt{q}\,.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi, \text{ folglich, da}$$
$$x_,\,.\,x_{,,} = -q, \text{ so ist } x_{,,} = \frac{-q}{\sqrt{q}\,.\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi} = -\cot\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q}.$$

§. 122. Sei IV. $x^2 - px - q = 0$;
so ist für $x = y + \frac{1}{2}p$ die reducirte Gleichung:
$$y^2 = \tfrac{1}{4}p^2 + q = \frac{p^2 + 4q}{4}, \text{ also}$$
$$y = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}.$$

Man setze $\frac{4q}{p^2} = \operatorname{tg}\varphi^2$, also $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$; dann ist $y = \frac{1}{2}p\sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi^2}$ d. i. $y = \frac{1}{2}p\sec\varphi$, folglich $x = (y + \frac{1}{2}p) = \frac{1}{2}p\sec\varphi + \frac{1}{2}p$
$$= \tfrac{1}{2}p(\sec\varphi + 1).$$

Setzt man hierin den Werth $p = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so erhält man

$$x = \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi}(\sec\varphi + 1) = \left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\sqrt{q}$$

$$= \frac{(1+\cos\varphi)\sqrt{q}}{\sin\varphi} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{q}$$

$$= \cot\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q}.$$

Die andere Wurzel findet man auf dieselbe Weise wie oben und es sind demnach die Wurzeln für diese Gleichung:

$$x_{,} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q}$$
$$x_{,,} = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{q}.$$

Anmerk. Die vier verschiedenen Formen der quadratischen Gleichung sind hier, der Uebung wegen, nach der Reihe aufgelöst, obgleich es nur der Auflösung der zwei Hauptformen $x^2 + px + q = 0$ und $x^2 + px - q$ bedurft hätte, wie schon oben bemerkt worden ist. Aus folgender Zusammenstellung übersieht man dieses leicht.

Gleichung: $x^2 + px + q = 0.$

Wurzeln: $\begin{cases} x_{,} = -p\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \\ x_{,,} = -p\cos\frac{1}{2}\varphi^2. \end{cases}$

Gleichung: $x^2 - px + q = 0.$

Wurzeln: $\begin{cases} x_{,} = p\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \\ x_{,,} = p\cos\frac{1}{2}\varphi^2. \end{cases}$

Gleichung: $x^2 + px - q = 0.$

Wurzeln: $\begin{cases} x_{,} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q} \\ x_{,,} = -\cot\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q}. \end{cases}$

Gleichung: $x^2 - px - q = 0.$

Wurzeln: $\begin{cases} x_{,} = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q} \\ x_{,,} = +\cot\frac{1}{2}\varphi\sqrt{q}. \end{cases}$

Trigonometrische Auflösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 123. **Aufgabe.** Aus den beiden Gleichungen

I. $x + y = a$ und

II. $xy = b$

die Werthe von x und y zu finden.

Auflösung. Obgleich die algebraischen Auflösungsformeln

$$\begin{cases} x = \dfrac{a + \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2} \\ y = \dfrac{a - \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2} \end{cases}$$

eine trigonometrische Behandlung ohne Weiteres zulassen, so ist doch das Verfahren, diese Gleichungen rein trigonometrisch aufzulösen — wie solches zuerst von *Förstemann*, in dessen Lehrbuche der Geometrie geschehen — von grösserem Interesse. Vorausgesetzt, dass a und b reell sind, kann man hier zwei Fälle unterscheiden. Es ist nämlich b positiv, oder negativ.

Fall 1. b sei positiv.

Man setze $x = f \cot \varphi$ und $y = f \operatorname{tg} \varphi$; dann kommt es darauf an, sowohl den Hülfswinkel, als auch die Hülfszahl f so zu bestimmen, dass dadurch die beiden Unbekannten gefunden werden können.

Es ist nun 1) $f \cot \varphi + f \operatorname{tg} \varphi = a$ und

2) $f^2 = b$, folglich erhält man nach Form. No. 143

$$\frac{2f}{\sin 2\varphi} = a. \quad \text{Aus (2) folgt:}$$

$$f = \sqrt{b}; \text{ daher ist } \frac{2\sqrt{b}}{a} = \sin 2\varphi.$$

Demnach ist $x = \sqrt{b} . \cot \varphi$ und $y = \sqrt{b} . \operatorname{tg} \varphi$.

Fall 2. b sei negativ.

Man setze 1) $x = f \cot \varphi$, wie vorhin, und

2) $x = -f \operatorname{tg} \varphi$.

Dann ist $f \cot \varphi - f \operatorname{tg} \varphi = a$, oder $f(\cot \varphi - \operatorname{tg} \varphi) = a$.

Nach Form. No. 142 ist daher

$$2f \cot 2\varphi = a.$$

Aus (2) folgt $f = \sqrt{-b}$; daher hat man

$$2\sqrt{-b} . \cot 2\varphi = a \quad \text{und folglich}$$

$$\cot 2\varphi = \frac{a}{2\sqrt{-b}}, \text{ oder } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\sqrt{-b}}{a}.$$

Dieser Werth von $\operatorname{tg} 2\varphi$ enthält keinen imaginären Werth, weil $\sqrt{-b}$ reell ist, indem b eine negative Grösse sein sollte.

Es ist demnach $x = \cot \varphi \sqrt{-b}$ und $y = -\operatorname{tg} \varphi \sqrt{-b}$.

§. 124. **Zusatz 1.** Wären die beiden Gleichungen gegeben:

1) $x - y = a$ und

2) $xy = b$,

so würde man für $x = f \cot \varphi$ und $y = f \operatorname{tg} \varphi$ die Gleichungen erhalten: $\quad f^2 = b$, also $f = \sqrt{b}$ und

$$f(\cot\varphi - \operatorname{tg}\varphi) = a,$$

d. i. $\quad 2f\cot 2\varphi = a$ und also

$$\cot 2\varphi = \frac{a}{2\sqrt{b}}.$$

Daraus folgt: $\quad x = f\cot\varphi = \cot\varphi\sqrt{\varphi}$ und

$$y = f\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{b}.$$

Zusatz 2. Es liegt auf der Hand, dass die im vorigen §. enthaltene Auflösung der Gleichungen $x + y = a$ und $xy = b$ sogleich zu einer Auflösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ führen muss; denn bezeichnet man, wie früher, die Wurzeln dieser Gleichung mit $x_,$ und $x_{,,}$, so verwandeln sich jene beiden unbestimmten Gleichungen in folgende:

$$x_, + x_{,,} = -p \quad \text{und} \quad x_, x_{,,} = q,$$

und man hat, vorausgesetzt, dass p und q reell sind, nach den obigen Auflösungsformeln für den

1. Fall, wo q positiv ist, zur Bestimmung des Hülfswinkels
1) $\sin 2\varphi = -\frac{2\sqrt{q}}{p}$ (weil p eine negative Grösse ist) und dann
2) $x_, = \cot\varphi\sqrt{q}$; $\quad x_{,,} = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{q}$.

Für den 2. Fall, wo q negativ ist, wird 1) $\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\sqrt{-q}}{p}$ (weil die Gleichung $2f\cot 2\varphi = a$ in $2\sqrt{-q}\,.\cot 2\varphi = -p$ übergeht, woraus $\cot 2\varphi = \frac{-p}{2\sqrt{-q}}$, oder $\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\sqrt{-q}}{p}$ folgt) und 2) $x_, = \cot\varphi\sqrt{-q}$; $\quad x_{,,} = -\operatorname{tg}\varphi\sqrt{-q}$.

§. 125. **Aufgabe.** Es sei gegeben

$$1) \quad xy = a,$$
$$2) \quad x^2 + y^2 = b;$$

man soll die Werthe von x und y finden.

Auflösung. Man setze $x = f\sin\varphi$ und $y = f\cos\varphi$; dann ist $\quad$ 1) $\quad xy = f^2\sin\varphi\cos\varphi = a$ und

2) $\quad x^2 + y^2 = f^2\sin\varphi^2 + f^2\cos\varphi^2 = b,$

oder $\quad f^2(\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2) = b$, folglich $f = \sqrt{b}$.

Es ist also $\quad b\sin\varphi\cos\varphi = a$, $\quad$ oder

$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{a}{b}.$$

Nach Form. No. 21. ist aber $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$, daher

$$\sin 2\varphi = \frac{2a}{b}.$$

Demnach ist $x = (f \sin\varphi) = \sin\varphi\sqrt{b}$

und $y = (f\cos\varphi) = \cos\varphi\sqrt{b}$.

§. 126. **Aufgabe.** Aus den Gleichungen

1) $xy = a$,

2) $x^2 - y^2 = b$

die Werthe von x und y zu bestimmen.

Auflösung. Man setze $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$, dann wird aus (1) $\cos\varphi\sin\varphi = a$,

und aus (2) $\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2 = b$.

Nach Form. No. 21. ist $2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi$, daher ist

3) $\sin 2\varphi = 2a$.

Ferner ist nach Form. No. 22. $\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2 = \cos 2\varphi$, folglich

4) $\cos 2\varphi = b$. Dividirt man (3) durch (4),

so entsteht 5) $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a}{b}$. Hat man demnach aus (3), (4) oder (5) den Hülfswinkel φ gefunden, so sind auch $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$ bestimmt.

§. 127. **Aufgabe.** Aus den beiden Gleichungen

1) $x + y = a$ und

2) $x^2 + y^2 = b$

die Werthe von x und y zu bestimmen.

Auflösung. Man setze $x = f\sin\varphi$ und $y = f\cos\varphi$, so erhält man aus (1) $f(\sin\varphi + \cos\varphi) = a$, und aus (2)

$f^2(\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2) = b$.

Daraus folgt $f = \sqrt{b}$. Es ist also

$$\sin\varphi + \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{b}}.$$

Quadrirt man diese Gleichung, so entsteht

$$\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 + 2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{a^2}{b},$$

folglich $\sin 2\varphi = \frac{a^2}{b} - 1 = \frac{a^2 - b}{b}$.

Demnach ist $x = \sin\varphi\sqrt{b}$ und $y = \cos\varphi\sqrt{b}$.

§. 128. **Zusatz.** Wäre gegeben:

1) $x - y = a$ und

2) $x^2 + y^2 = b$, so würde für $x = f\sin\varphi$ und $y = f\cos\varphi$ in gleicher Weise, wie vorhin,

$$\sin 2\varphi = 1 - \frac{a^2}{b} = \frac{b - a^2}{b}$$

gefunden werden.

§. 129. **Aufgabe.** Aus den beiden Gleichungen

$$1)\quad x + y = a,$$
$$2)\quad x^3 + y^3 = b$$

die Werthe von x und y zu bestimmen.

Auflösung. Da $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$, so hat man nach (1) und (2) die Gleichung:

$$3)\quad a(x^2 - xy + y^2) = b.$$

Setzt man $x = f \operatorname{tg} \varphi$ und $y = f \cot \varphi$, so folgt aus (1):

$$f[\operatorname{tg} \varphi + \cot \varphi] = a \quad (4)$$

und aus (3) $\quad f^2[\operatorname{tg} \varphi^2 - \operatorname{tg} \varphi \cot \varphi + \cot \varphi^2] = \frac{b}{a} \quad (5)$

(4) quadrirt, giebt $\quad f^2[\operatorname{tg} \varphi^2 + 2 \operatorname{tg} \varphi \cot \varphi + \cot \varphi^2] = a^2 \quad (6)$

Subtr. (5) von (6) $\quad f^2.3 \operatorname{tg} \varphi \cot \varphi = a^2 - \frac{b}{a} = \frac{a^3 - b}{a}$

$$\text{d. i.}\quad 3f^2 = \frac{a^3 - b}{a},$$

folglich
$$f = \sqrt{\frac{a^3 - b}{3a}}.$$

Nun ist nach Form. No. 143. $\operatorname{tg} \varphi + \cot \varphi = \frac{2}{\sin 2\varphi}$, daher verwandelt sich die Gleichung (4) in $\frac{2f}{\sin 2\varphi} = a$. Hieraus folgt:

$$\sin 2\varphi = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{a^3 - b}{3a}}.$$

Demnach ist
$$x = \sqrt{\frac{a^3 - b}{3a}}.\operatorname{tg} \varphi \text{ und}$$
$$y = \sqrt{\frac{a^3 - b}{3a}}.\cot \varphi.$$

§. 130. **Aufgabe.** Die unbestimmte Pythagorische Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

aufzulösen, d. h. für x, y, z rationale ganze Zahlen zu finden, welche dieser Gleichung Genüge leisten.

Auflösung. Man denke sich ein in C rechtwinkliges Dreieck ACB, dessen Seiten als Repräsentanten für x, y, z gelten können.

Setzt man nun in die bekannte Formel

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ die Werthe}$$
$$\sin A = 2 \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}A \quad \text{(No. 46.)}$$

und $\quad \cos A = \cos \tfrac{1}{2}A^2 - \sin \tfrac{1}{2}A^2$ (No. 47.), so ist

$$(1)\quad \operatorname{tg} A = \frac{2 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}A^2 - \sin \frac{1}{2}A^2}.$$

Setzt man $\sin \frac{1}{2}A = b$ und $\cos \frac{1}{2}A = a$, so ist

$$(2)\quad \operatorname{tg} A = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Da ferner $\sec A^2 = 1 + \operatorname{tg} A^2$, so ist nach (2)

$$\begin{aligned}\sec A^2 &= 1 + \frac{4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2} \\ &= \frac{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2} \\ &= \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2} \\ &= \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{(a^2 - b^2)^2} \text{ d. i.}\end{aligned}$$

$$\sec A^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2}, \text{ folglich ist}$$

$$(3)\quad \sec A = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

Ferner ist (nach No. 26.)

$$(4)\quad \sin A = \frac{\operatorname{tg} A}{\sec A} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

und, da (nach No. 14.) $\sec A = \frac{1}{\cos A}$, so ist

$$(5)\quad \cos A = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Demnach sind nach (2), (3), (4) und (5) für die Tang., Sec. den Sinus und Cosinus des Winkels A solche rationale Formeln gefunden, dass sie als Werthe der obigen Gleichung Genüge leisten. Denn nimmt man im $\triangle ABC$ die Kathete $AC = x$, $BC = y$ und $AB = z$, so ist $x : y : z = 1 : \operatorname{tg} A : \sec A$

$$= 1 : \frac{2ab}{a^2 - b^2} : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \text{ d. i.}$$

$$x : y : z = a^2 - b^2 : 2ab : a^2 + b^2.$$

Nimmt man die Hypotenuse als Sin. tot., so ist

$$\begin{aligned}x : y : z &= \cos A : \sin A : 1 \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} : \frac{2ab}{a^2 + b^2} : 1 \\ &= a^2 - b^2 : 2ab : a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Man hat also $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$ und es ist
$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Anmerk. Eine andere Auflösung, sowie Bemerkungen über die Natur der Pythagorischen Zahlen findet man in meiner Schrift: „Die merkwürdigen Eigenschaften der Pythagorischen Zahlen, ihr Bildungsgesetz und ihr Gebrauch in der unbestimmten Analytik. Eisleb. 1853."

---

4. Capitel.

Trigonometrische Auflösung der cubischen Gleichungen.

§. 131. Jede cubische Gleichung kann auf die Form
$$(A) \quad x^3 + px + q = 0$$
gebracht werden, welche eben deswegen die reducirte heisst. Wären z. B. die Gleichungen gegeben:
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & y^3 + ay^2 \mp by \mp c = 0, \\ \text{II.} & y^3 - ay^2 \mp by \mp c = 0, \end{array}\right.$$
so würde leicht durch Substitution von
$$y = x - \tfrac{1}{3}a \text{ in I.}$$
$$y = x + \tfrac{1}{3}a \text{ in II.}$$
das zweite Glied ay^2 in beiden Fällen weggeschafft. Wäre die gegebene Gleichung $x^3 + px^2 + q = 0$, so würde man durch Substitution von $x = y - \frac{1}{3}p$ ebenfalls das zweite Glied wegschaffen.

§. 132. Um die Gleichung $x^3 + px + q = 0$, in welcher p und q reell sind, aufzulösen, setze man zunächst $x = a + b$, dann erhält man:
$$x^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3, \text{ also}$$
$$(B) \qquad x^3 - 3ab[x - (a^3 + b^3)] = 0.$$
Aus der Vergleichung von A und B ergiebt sich
$$p = -3ab \quad \text{und} \quad q = -(a^3 + b^3).$$
Setzt man $a^3 = m$ und $b^3 = n$, so wird $p = -3\sqrt[3]{mn}$ und $-q = m + n$, folglich $p^3 = -27mn$, oder $mn = -\frac{p^3}{27}$, also
$$4mn = -\frac{4p^3}{27} \text{ und } q^2 = (m+n)^2. \text{ Da nun bekanntlich:}$$
$$(m+n)^2 - 4mn = (m-n)^2, \text{ so folgt:}$$

$$(m-n)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27}\text{, also}$$

$$m-n = \sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}} \text{ und da}$$

$$m+n = -q\text{, so erhält man}$$

$$m = \frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2} \text{ und}$$

$$n = -q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}.$$ Demnach ist $a+b$, oder

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-q-\sqrt{q^2-\frac{4p^2}{27}}}{2}\right)} \quad (C)$$

Dieser Ausdruck, welcher unter dem Namen der Cardani'schen Formel bekannt ist, giebt eine Wurzel der reducirten cubischen Gleichung, ohne dass es möglich wäre, die beiden andern Wurzeln mit zu bestimmen. Sie giebt rationale Grössen oft in irrationaler Form.

§. 133. Bei der trigonometrischen Auflösung der cubischen Gleichungen hat man folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1) die gegebene Gleichung hat die Form

$$x^3+px\mp q = 0\text{, oder sie hat}$$

2) die Form $x^3-px\mp q = 0$, und es ist $4p^3 < 27q^2$, oder es ist

3) bei dieser Gleichung $4p^3 > 27q^2$.

§. 134. **Auflösung der cubischen Gleichungen von der Form** $x^3+px\mp q = 0$.

Die eine Wurzel, welche die Cardanische Formel für diese Gleichung giebt, ist

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$$

Man setze nun $\frac{4p^3}{27q^2} = \operatorname{tg}\varphi^2$, oder

$$\frac{2p}{3q}\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = \operatorname{tg}\varphi\,.$$

Aus dieser Annahme folgt:

$$\frac{q}{2} = \frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{(\sqrt{\frac{1}{3}p})^3}{\operatorname{tg}\varphi} \text{ *); daher ist}$$

$$\frac{q}{2}\sqrt{\left(1+\frac{4p^3}{27}\right)} = \frac{(\sqrt{\frac{1}{3}p})^3}{\operatorname{tg}\varphi}\,.\sec\varphi. \quad \text{Folglich ist}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-(\sqrt{\frac{1}{3}p})^3}{\operatorname{tg}\varphi}(1-\sec\varphi)\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-(\sqrt{\frac{1}{3}p})^3}{\operatorname{tg}\varphi}(1+\sec\varphi)\right)},$$

oder $$x = \left(\sqrt[3]{\frac{-(1-\sec\varphi)}{\operatorname{tg}\varphi}} - \sqrt[3]{\frac{1+\sec\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}}\right).\sqrt{\tfrac{1}{3}p}, \quad \text{oder}$$

$$x = \left(\sqrt[3]{\frac{(\sec\varphi-1)}{\operatorname{tg}\varphi}} - \sqrt[3]{\frac{1+\sec\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}}\right).\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.$$

Setzt man $\frac{1}{\cos\varphi}$ für $\sec\varphi$, so erhält man:

$$x = \left(\sqrt[3]{\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}} - \sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}}\right)\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.$$

Nach Form. No. 63. und 64. ist aber $\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$ und $\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi$; daher hat man

$$x = (\sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} - \sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi})\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.$$

Setzt man endlich $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg}\psi$, also $\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi} = \cot\psi$**), so entsteht

$$x = (\operatorname{tg}\psi - \cot\psi)\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.$$

Da ferner nach Form. No. 142. $\operatorname{tg}\psi - \cot\psi = -2\cot 2\psi$, so resultirt:

$$x = -2\cot 2\psi\,.\sqrt{\tfrac{1}{3}p},$$

wodurch eine Wurzel der Gleichung $x^3+px+q=0$ gefunden ist.

Ist aber das dritte Glied q der vorgelegten Gleichung negativ, so entspricht der Gleichung $x^3+px-q=0$, wenn man die Entwickelung in gleicher Weise ausführt, die Wurzel:

---

*) weil nämlich $\frac{4p^3}{27} = q^2\operatorname{tg}\varphi^2$, so ist $q\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{4p^3}{27}} = 2\sqrt{\frac{p^3}{27}} = 2\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3$; daher $q = \frac{2\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3}{\operatorname{tg}\varphi}$, mithin $\tfrac{1}{2}q = \frac{\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3}{\operatorname{tg}\varphi}$.

**) Aus $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg}\psi$ folgt: $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \operatorname{tg}\psi^3$, also ist auch $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\psi^3}$, oder $\cot\tfrac{1}{2}\varphi = \cot\psi^3$; daher $\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi} = \cot\psi$.

$$x = +2\cot 2\psi . \sqrt{\tfrac{1}{3}p}\ ^{*}),$$

wobei wie vorhin die Hülfswinkel φ und ψ durch die Formeln $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2p}{3q}\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$ und $\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi}$ bestimmt sind. Die Algebra lehrt, dass die beiden anderen Wurzeln im ersten und zweiten Falle imaginär sind.

Beispiele.

§. 135. **No. 1.** (*Heis*, Samml. pag. 321. No. 1.) Gegeben:

$$x^3 + 3x - 5 = 0.$$

Diese Gleichung ist unter der allgemeinen Form $x^3 + px - q = 0$ begriffen, wo $p = 3$ und $q = 5$ ist. Es ist also

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2p}{3q}\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = \tfrac{6}{15}.$$

$$\begin{aligned} \log 6 &= \overset{+1}{0},7781513 - 1 \\ \log 15 &= \underline{1,1760913} \\ \log\operatorname{tg}\varphi &= 9,6020600 - 10. \end{aligned}$$

Diesem $\log\operatorname{tg}\varphi$ entspricht: $\varphi = 21^0\, 48'\, 5,07''$, folglich ist

$$\tfrac{1}{2}\varphi = 10^0\, 54'\, 2,535''.$$

Nun berechne man $\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 10^0\, 54'\, 2,535''}$.

$$\log\operatorname{tg} 10^0\, 54'\, 2,535'' = 29,2846165 - 30, \text{ folglich}$$

$$\log\sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} = 9,7615388 - 10 = \log\operatorname{tg}\psi.$$

Hiernach findet sich $\psi = 30^0\, 0'\, 20,44''$.

Nach der Formel $x = 2\cot 2\psi . \sqrt{\tfrac{1}{3}p}$ hat man

$$\begin{aligned} \log\cot 2\psi &= 9,7612406 - 10 \\ +\log 2 &= \underline{0,3010300} \\ \log x &= 0,0622706, \text{ welchem entspricht} \\ x &= 1,154172. \end{aligned}$$

No. 2. Gegeben: $x^3 + 7x + 3 = 0$, der allgemeinen Form $x^3 + px + q = 0$ entsprechend. Da $p = 7$, $q = 3$, so ist

$$\begin{aligned} \log\sqrt{\tfrac{1}{3}p} &= 0,1839883 \\ +\log 2p &= \underline{1,1461280} \\ & 1,3301163 \\ -\log 3q &= \underline{0,9542425} \\ \log\operatorname{tg}\varphi &= 10,3758738 - 10. \end{aligned}$$

---

*) Dasselbe ergiebt sich auch schon daraus, dass wenn man in die Gleichung $x^3 + px + q = 0$, $x = -x$, setzt, sich dieselbe in $-x_,^3 - px_, + q = 0$, oder $x_,^3 + px_, - q = 0$ verwandelt. Folglich hat die erste Gleichung mit der letzten der Grösse nach gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln.

Diesem entspricht $\varphi = 67^0\,10'\,34{,}54''$.
Daher ist $\frac{1}{2}\varphi = 33^0\,35'\,17{,}27''$. Ferner ist

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = 29{,}8222334 - 30 \text{ und}$$

$$\log \sqrt[3]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi} = 9{,}9407444 - 10 = \log \operatorname{tg} \psi.$$

Diesem entspricht $\psi = 41^0\;6'\,12''$,
daher ist $2\psi = 82^0\,12'\,24''$.
Endlich ist

$$\log \cot 2\psi = 9{,}1362903 - 10$$

$$+ \log 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0{,}4850183$$

$$\log x = 0{,}6213086 - 1.$$

Mithin ist $x = -0{,}4181273$.

Auflösung der cubischen Gleichungen von der Form $x^3 - px \mp q = 0$, wenn $4p^3 < 27q^2$ ist.

§. 136. Nach der Cardanischen Formel erhält man eine Wurzel der Gleichung $x^3 - px + q = 0$, weil p negativ ist:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}.$$

Da nun vermöge der Bedingung $4p^3 < 27q^2$; so ist $\frac{4p^3}{27q^2} < 1$, also $\frac{4p^3}{27q^2}$ ein ächter Bruch. Man kann daher $\frac{4p^3}{27q^2} = \sin\varphi^2$, oder

$$\sin\varphi = \frac{2\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3}{q} \text{ setzen.}$$

Daraus folgt

$$\frac{q}{2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3}{\sin\varphi}.$$

Setzt man diese Werthe in die Auflösungsformel, so erhält man, da $\sqrt{1 - \sin\varphi^2} = \cos\varphi$ ist,

$$x = \sqrt[3]{-\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3\left(\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right)} + \sqrt[3]{-\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3\left(\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}\right)},$$

oder

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}} + \sqrt[3]{\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}}\right).$$

Da $\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$ und $\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot \frac{1}{2}\varphi$, so reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} + \sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi}\right)$$

und für $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg}\psi$, also auch $\sqrt[3]{\cot\frac{1}{2}\varphi} = \cot\psi$, auf:

$x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\,(\operatorname{tg}\psi + \cot\psi)$. Nach Form. No. 143. ist aber

$\operatorname{tg}\psi + \cot\psi = 2\operatorname{cosec} 2\psi = \dfrac{2}{\sin 2\psi}$, mithin ist $x = -\dfrac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2\psi}$.

Für die andere Form $x^3 - px - q = 0$, wo das dritte Glied q negativ ist, führt die gleiche Entwickelung zu dem Resultate:

$$x = +\frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2\psi}\,.\text{*)}$$

Beispiele.

§. 137. **No. 3.** Gegeben $x^3 - 7x + 11 = 0$.

Da $p = 7$ und $q = 11$ ist, so hat man

$$\sin\varphi = \frac{2\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3}{q} = \frac{2\,(\sqrt{\frac{7}{3}})^3}{11}$$ zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\log 7 &= 0{,}8450980\\
\log 3 &= \underline{0{,}4771213}\\
&\ 0{,}3679767\\
\log\sqrt{\tfrac{7}{3}} &= 2)\,\underline{0{,}1839883}\\
\log(\sqrt{\tfrac{7}{3}})^3 &= 0{,}5519649\,(3\\
\log 2 &= \underline{0{,}3010300}\\
&\ 10{,}8529949 - 10\\
\log 11 &= \underline{1{,}0413927}\\
\log\sin\varphi &= 9{,}8116022 - 10,
\end{aligned}$$

folglich $\varphi = 40^0\, 23'\, 38{,}5''$,

also $\frac{1}{2}\varphi = 20^0\, 11'\, 49{,}25''$.

Ferner ist $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}$ zu berechnen.

---

*) Setzt man in die Gleichung $x^3 - px + q = 0$, $x = -x_,$, so entsteht $-x_,^3 + px_, + q = 0$, oder $x_,^3 - px_, - q = 0$, woraus wieder folgt, dass beide Gleichungen gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln haben.

Man hat $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = 9{,}5653733 - 10$

$$\begin{array}{rl} & 3201 \\ \hline & 29{,}5656934 - 30 \\ \log \operatorname{tg} \psi = 3) & 9{,}8552311 - 10. \end{array}$$

Diesem entspricht $\psi = 35^0\,37'\,21{,}1''$,

also ist $2\psi = 71^0\,14'\,42{,}2''$.

Endlich ist $x = -\dfrac{2\sqrt{\dfrac{p}{3}}}{\sin 2\psi}$ zu berechnen.

Nach dem Obigen ist:

$$\begin{array}{rl} \log \sqrt{\frac{7}{3}} = & 0{,}1839883 \\ + \log 2 = & 0{,}3010300 \\ \hline & 10{,}4850183 - 10 \\ - \log \sin 2\psi = & 9{,}9763051 - 10 \\ \hline \log x = & 0{,}5087132. \end{array}$$

Diesem entspricht: $x = -3{,}226362$.

No. 4. Gegeben: $x^3 - 4x - 5 = 0$.

Hier ist $p = 4$ und $q = 5$, daher

$$\sin \varphi = \frac{2(\sqrt{\frac{4}{3}})^3}{5}.$$

$$\begin{array}{rl} \log 4 = & 0{,}6020600 \\ \log 3 = & 0{,}4771213 \\ \hline & 0{,}1249387 \\ 2) & 0{,}0624693 \\ \hline & 0{,}1874079 \ (3 \\ \log 2 = & 0{,}3010300 \\ \hline & 10{,}4884379 - 10 \\ \log 5 = & 0{,}6989700 \\ \hline \log \sin \varphi = & 9{,}7894679 - 10. \end{array}$$

Diesem Log. entspricht $\varphi = 38^0\,0'\,46{,}7''$,

also $\frac{1}{2}\varphi = 19^0\,0'\,23{,}4''$.

Zur Bestimmung des zweiten Hülfswinkels ψ hat man

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg} \psi.$$

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} 19^0\,0'\,23{,}4'' = & 29{,}5371319 - 30 \\ 3) & 9{,}8457103 - 10. \end{array}$$

Diesem entspricht $\psi = 35^0\,1'\,48''$, also ist

$2\psi = 70^0\,3'\,36''$.

Nun ist nach der Formel $x = \frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2\psi}$ noch folgende Rechnung auszuüben:

$$\begin{aligned}
\log \sqrt{\tfrac{1}{3}p} &= 0{,}0624693\\
+\log 2 &= 0{,}3010300\\
&\overline{10{,}3634993-10}\\
\log \sin 2\psi &= 9{,}9731511\\
\log x &= 0{,}3903482.
\end{aligned}$$

Diesem Log. entspricht sehr nahe $x = 2{,}456678$.

Auflösung der cubischen Gleichungen von der Form $x^3 - px \mp q = 0$, wenn $4p^3 > 27q^2$ ist.

(Der Casus irreducibilis.)

§. 138. Wenn in der Cardanischen Formel §. 136

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$$

$\frac{4p^3}{27q^2} > 1$ ist; so kann man diesen Bruch nicht mehr $= \sin \varphi^2$ setzen, weil für den Halbmesser oder Sin. tot. $= 1$ kein Sin. > 1 möglich ist. Da bei dieser Voraussetzung der Ausdruck $\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}$ etwas Unmögliches enthält, so führt die Cardan. Formel auf eine Schwierigkeit, welche algebraisch sich nicht heben lässt, obgleich die zugehörige Gleichung $x^3 - px + q$ drei mögliche Wurzeln besitzt; eben deswegen hat man diesen Fall den irreducibeln genannt. Die trigonometrische Behandlung leistet nun in diesem Falle auf die einfachste Weise das Verlangte.

§. 139. Nach Form. No. 189 ist

$$\sin 3\alpha = 3 \cos \alpha^2 \sin \alpha - \sin \alpha^3 \text{ *)}, \text{ oder}$$

---

*) Es ist nämlich
$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha\\
&= 2 \sin \alpha \cos \alpha^2 + (\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2) \sin \alpha\\
&= 2 \sin \alpha \cos \alpha^2 + \sin \alpha \cos \alpha^2 - \sin \alpha^3\\
&= 3 \sin \alpha \cos \alpha^2 - \sin \alpha^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha\,(1-\sin\alpha^2)-\sin\alpha^3\\ &= 3\sin\alpha-3\sin\alpha^3-\sin\alpha^3\\ &= 3\sin\alpha-4\sin\alpha^3,\ \text{folglich}\\ 4\sin\alpha^3 &= 3\sin\alpha+\sin 3\alpha = 0,\ \text{oder}\\ \sin\alpha^3-\tfrac{3}{4}\sin\alpha+\tfrac{1}{4}\sin 3\alpha &= 0.\quad (A.)\end{aligned}$$

Nun ist die gegebene aufzulösende Gleichung

$$x^3-px\mp q = 0.$$

Setzt man in dieselbe $x = m\sin\varphi$, so verwandelt sie sich in folgende:

$$m^3\sin\varphi^3-p\,m\sin\varphi\mp q = 0,\quad \text{oder}$$

$$\sin\varphi^3-\frac{p}{m^2}\sin\varphi\mp\frac{q}{m^3} = 0.\quad (B.)$$

Identificirt man diese Gleichung mit $(A.)$, indem man $\sin\varphi$ statt $\sin\alpha$ schreibt; so ist

$$\frac{p}{m^2} = \tfrac{3}{4}\ \text{und}\ \tfrac{1}{4}\sin 3\varphi = \frac{\mp q}{m^3}.$$

Daraus folgt $$m = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}}\ \text{und}$$

$$\sin 3\varphi = \frac{\mp 4q}{m^3}.$$

Da hierdurch sowohl m als auch 3φ oder φ bekannt sind, so ist die gesuchte Wurzel $x = m\sin\varphi$.

Sobald nun q positiv ist, wird $\sin 3\varphi = \dfrac{+q}{\mp m^3}$, folglich kann $\sin 3\varphi$ sowohl positiv als auch negativ genommen werden; wird in jenem ersten Falle auch m positiv angenommen, so sind die entsprechenden Bogen

$$3\varphi\ \text{und}\ 180^0-3\varphi,$$

demnach ist $x = +m\sin\varphi$ und $x = +m\sin(180^0-\varphi)$.

Für den zweiten Fall, wo m negativ zu nehmen ist, sind die entsprechenden Bogen

$$180^0+3\varphi\ \text{und}\ 360^0-3\varphi,\ \text{daher wird}$$

$$x = -m\sin(60^0+\varphi)\quad\text{und}\quad x = -m\sin(120-\varphi).$$

Da aber $\sin(60^0+\varphi) = \sin(120^0-\varphi)$, so fallen beide Wurzeln in einen Werth zusammen. Demnach sind für die Gleichung $x^3-px+q = 0$ oder ein positives q die drei gesuchten Wurzeln

1) $x_{,} = m\sin\varphi$,
2) $x_{,,} = m\sin(60^0-\varphi)$,
3) $x_{,,,} = -m\sin(60^0+\varphi)$.

Wenn aber die Gleichung $x^3-px-q = 0$, oder q negativ ist, so erhält man für die Wurzeln die nämlichen Werthe, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen.

§. 140. **Zusatz.** Im vorigen §. fanden wir zur Auflösung der Gleichung $x^3 - px + q = 0$ die beiden Hülfsformeln $m = \sqrt{\frac{4p}{3}}$ und $\sin 3\varphi = \frac{4q}{m^3}$. Setzt man in diese Gleichung den Werth von m, so erhält man: $\sin 3\varphi = \dfrac{4q}{\left(\sqrt{\frac{4p}{2}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{4p}{3}}}$

$$= \frac{4q}{\frac{4p}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4p}{3}}} = \frac{3q}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}p}}.$$

Es bedarf daher nur dieser einen Gleichung zur Bestimmung des Hülfswinkels 3φ. Es sind alsdann die Wurzeln der Gleichung

$$x_{,} = \mp\sqrt{\frac{4p}{3}} \cdot \sin\varphi,$$

$$x_{,,} = \mp\sqrt{\frac{4p}{3}} \cdot \sin(60^0 - \varphi)$$

$$x_{,,,} = \pm\sqrt{\frac{4p}{3}} \cdot \sin(60^0 + \varphi).$$

Beispiele.

§. 141. **1.** (*Heis* Samml. p. 321. No. 5.) Gegeben:

$$x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Da hier $p = 3$ und $q = 2$ ist, so hat man

$$m = 2\sqrt{\frac{p}{3}} = 2 \text{ und}$$

$$\sin 3\varphi = \frac{4q}{m^3} = 1,$$

folglich $3\varphi = 90^0$ und daher $\varphi = 30^0$.

Demnach erhält man folgende Wurzeln:

$$x_{,} = m\sin\varphi = 2\sin 30^0 = 1,$$

$$x_{,,} = m\sin(60^0 - \varphi) = 2\sin 30^0 = 1,$$

$$x_{,,,} = -m\sin(60^0 + \varphi) = -2\sin 90^0 = -2.$$

2 Gegeben: $x^3 - 12x - 16 = 0$.

Hier ist $p = 12$ und $q = 16$, daher $m = 2\sqrt{\tfrac{12}{3}} = 4$ und $\sin 3\varphi = 1$, folglich $3\varphi = 90^0$ und also $\varphi = 30^0$.

Demnach ist $x_{,} = -2$,
$x_{,,} = -2$,
$x_{,,,} = +4$. (§. 139.)

3. Gegeben: $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Man hat $m = 2\sqrt{\frac{p}{3}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ und

$$\sin 3\varphi = \frac{4q}{m^3} = \frac{4.6}{8(\sqrt{\frac{7}{3}})^3} = \frac{3}{(\sqrt{\frac{7}{3}})^3}.$$

$$\begin{aligned}
\log 7 &= 0{,}8450980 \\
\log 3 &= 0{,}4771213 \\
&\quad\; 0{,}3679767 \\
&2)\;0{,}1839883 \\
&\qquad\qquad\quad 3 \\
\log (\sqrt{\tfrac{7}{3}})^3 &= 0{,}5519649
\end{aligned}$$

Nun ist
$$\begin{aligned}
\log 3 &= 10{,}4771213 - 10 \\
&\quad\; 0{,}5519649 \\
\log \sin 3\varphi &= 9{,}9251564 - 10.
\end{aligned}$$

Diesem entspricht $3\varphi = 57^0\, 19'\, 11{,}5''$,

daher ist $\varphi = 19^0\; 6'\, 23{,}8''$.

Endlich ist $x_{,} = m \sin\varphi = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \sin 19^0\, 6'\, 23{,}8''$.

$$\begin{aligned}
\log \sin 19^0 6' 23{,}8'' &= 9{,}5148371 - 10 \\
23{,}8 \times \text{Diff. } 1'' = 60{,}78 &= \qquad 1446 \\
&\quad\; 9{,}5149817 - 10 \\
\log 2\sqrt{\tfrac{7}{3}} &= 0{,}4850183 \\
\log x_{,} &= 10{,}0000000 - 10.
\end{aligned}$$

Daher $x_{,} = 1$. Ebenso findet man

$x_{,,} = m \sin(60^0 - \varphi) = 2$ und $x_{,,,} = -m \sin(60^0 + \varphi) = -3$.

Tabellarische Uebersicht der trigonometrischen Auflösung cubischer Gleichungen.

Gleichung.	Substitution.	Wurzeln.
I. $x^3 + px \mp q = 0$	$\left.\begin{aligned} \frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}} &= \operatorname{tg}\varphi \\ \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi} &= \operatorname{tg}\psi \end{aligned}\right\}$	$x = \pm 2\cot 2\psi\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$. Die beiden andern Wurzeln sind imaginair.
II. $x^3 - px \mp q = 0$	$\left.\begin{aligned} \frac{2}{q}\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3 &= \sin\varphi \\ \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi} &= \operatorname{tg}\psi \end{aligned}\right\}$	$x = \pm\dfrac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2\psi}$. Die beiden anderen Wurzeln sind imaginair.
III. $x^3 - px \mp q = 0$	$\left.\begin{aligned} m &= 2\sqrt{\frac{p}{3}} \\ \sin 3\varphi &= \frac{4q}{m^3} \end{aligned}\right\}$	$x_{,} = \mp m\sin\varphi$. $x_{,,} = \mp m\sin(60^0 - \varphi)$. $x_{,,,} = \pm m\sin(60^0 + \varphi)$.
Oder man setze	$\sin 3\varphi = \dfrac{3q}{p}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}p}}$	$x_{,} = \mp\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\,.\sin\varphi$. $x_{,,} = \mp\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\,.\sin(60^0 - \varphi)$. $x_{,,,} = \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\,.\sin(60^0 + \varphi)$.

NB. Hierbei entspricht das obere Zeichen der Auflösung dem obern Zeichen des dritten Gliedes q in der Gleichung.

Einfache trigonometrische Lösung des Casus irreducibilis.*)

§. 142. Man kann als allgemeine Gestalt der Cardanischen Formel für diesen Fall annehmen:

$$x = \sqrt[3]{A + B\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{A - B\sqrt{-1}}.$$

Sondert man auf der zweiten Seite dieser Gleichung $\sqrt[3]{A}$ als gemeinschaftlichen Factor ab, so erhält man:

*) Diese elegante Auflösung ist zuerst von *Könitzer* gegeben worden. Ausserdem findet sich dieselbe in *Lacroix*'s Einleit. in die Differential- und Integral-Rechnung. 2 Aufl. §. 78, *Aschenborn* u. A.

$$x = \sqrt[3]{A}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{B}{A}\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{1 - \frac{B}{A}\sqrt{-1}}\right),$$

und wenn man $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\varphi$ setzt:

$x = \sqrt[3]{A}\left(\sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}\varphi\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{1 - \operatorname{tg}\varphi\sqrt{-1}}\right)$, woraus

$x = \sqrt[3]{A}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{-1}}\right)$, oder

$x = \sqrt[3]{A}\left(\sqrt[3]{\frac{\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi}}\right)$, oder

$x = \sqrt[3]{\frac{A}{\cos\varphi}}\left(\sqrt[3]{\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}}\right.$ folgt.

Nun ist aber

$$\sqrt[3]{\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}} = 2\cos\frac{\varphi}{3}\ ^{*}),$$

folglich $$x = 2\cos\frac{\varphi}{3}\sqrt[3]{\frac{A}{\cos\varphi}}.$$

---

*) Nach dem *Moivre*'schen Satze ist nämlich:

$$\sqrt[n]{(\cos\varphi + \sin\varphi\,.\sqrt{-1})} = \cos\frac{\varphi}{m} + \sin\frac{\varphi}{m}\,.\sqrt{-1}$$

und $$\sqrt[n]{(\cos\varphi - \sin\varphi\,.\sqrt{-1})} = \cos\frac{\varphi}{m} - \sin\frac{\varphi}{m}\,.\sqrt{-1}$$

woraus durch Addition beider Ausdrücke $2\cos\frac{\varphi}{3}$ folgt.

Ohne uns auf die *Moivre*'sche Formel zu berufen, kann der Satz für die Cubikwurzel folgendermassen leicht bewiesen werden.

Es ist $\sqrt[3]{(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})} = \cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}$.

Denn setzt man einstweilen $\frac{\varphi}{3} = \alpha$, so ist:

$(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})^3 = \cos\alpha^3 + 3\cos\alpha^2\sin\alpha\sqrt{-1} - 3\cos\alpha\sin\alpha^2 - \sin\alpha^3\sqrt{-1}$.

Nun ist nach Form. No. 190:

$\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha\sin\alpha^2 = \cos 3\alpha$ und nach Form. No 189

$3\cos\alpha^2\sin\alpha - \sin\alpha^3 = \sin 3\alpha$, also auch

$(3\cos\alpha^2\sin\alpha - \sin\alpha^3)\sqrt{-1} = \sin 3\alpha\sqrt{-1}$. Demnach hat man

$(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})^3 = \cos 3\alpha + \sin 3\alpha\sqrt{-1}$.

Setzt man also für α seinen Werth $\frac{\varphi}{3}$, so ist

$\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}\right)^3 = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$, oder was einerlei ist:

$$\sqrt[3]{(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})} = \cos\frac{\varphi}{3} + \sin\frac{\varphi}{3}\sqrt{-1}.$$

Andere Ableitung der Cardanischen Formel
durch Zurückführung der cubischen Gleichung auf eine quadratische in Beziehung auf den irreductibeln Fall.

§. 143. Zur Erläuterung der Auflösung im vorigen §. ist zunächst die Behauptung zu begründen, dass die Formel

$$x = \sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}$$

für den Casus irreducibilis allgemein sei.

Für diesen Fall hat die cubische Gleichung die allgemeine Form $x^3 - px \mp q = 0$, wobei erforderlich ist, dass der Coefficient von x negativ sei; das dritte Glied q kann sowohl einen positiven als negativen Werth haben. Unbeschadet der Allgemeinheit, und nur der Vereinfachung wegen, kann man die gegebene cubische Gleichung unter der Form

$$(1.) \quad x^3 - 3ax - 2b = 0 \quad \text{annehmen.}$$

Man setze
$$p^2 - px + a = 0,$$
so ist
$$x = \frac{p^2+a}{p}. \quad (2.)$$

Wird dieser Werth in (1.) gesetzt, so entsteht:

$$\frac{p^6 + 3ap^4 + 3a^2p^2 + a^3}{p^3} - \frac{3ap^2 + 3a^2}{p} - 2b = 0,$$

oder gehörig reducirt:

$$(3.) \quad p^6 - 2bp^3 + a^3 = 0.$$

Diese Gleichung vom sechsten Grade kann offenbar als eine quadratische aufgelöst werden, und man hat

$$p^6 - 2bp^3 + b^2 = b^2 - a^3, \text{ folglich ist}$$
$$p^3 = b + \sqrt{b^2 - a^3}, \text{ und also}$$
$$(4.) \quad p = \sqrt[3]{(b + \sqrt{b^2 - a^3})}.$$

Nach (2.) ist $x = p + \frac{a}{p}$. Setzt man hierin den Werth von p, so entsteht:

$$(5.) \quad x = \sqrt[3]{(b + \sqrt{b^2 - a^3})} + \frac{a}{\sqrt[3]{(b + \sqrt{b^2 - a^3})}}.$$

Um die Division des letzten Gliedes auszuführen, cubire man den Bruch, dann hat man $\frac{a^3}{a + \sqrt{b^2 - a^3}}$. Wird nun Zähler und Nenner mit $b - \sqrt{b^2 - a^3}$ multiplicirt, so entsteht $\frac{a^3(b - \sqrt{b^2 - a^3})}{a^3}$ oder $b - \sqrt{b^2 - a^3}$. Zieht man hieraus wieder die Cubikwurzel, so verwandelt sich der obige Bruch in $\sqrt[3]{(b - \sqrt{b^2 - a^3})}$ und es ist

$$(6.)\quad x = \sqrt[3]{(b+\sqrt{b^2-a^3})} + \sqrt[3]{(b-\sqrt{b^2-a^3})}\,.$$

Wenn nun $a^3 > b^2$, so sei $a^3 = b^2 + B^2$ (also $B = \sqrt{a^3 - b^2}$), dann ist $\sqrt{b^2 - a^3} = \sqrt{b^2 - (b^2 + B^2)} = \sqrt{-B^2} = B\sqrt{-1}$; folglich ist, wenn noch $b = A$ gesetzt wird,

$$x = \sqrt[3]{(A + B\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(A - B\sqrt{-1})}\,,$$

womit die Richtigkeit der obigen Behauptung nachgewiesen ist.

Anmerk. Ist in der Gleichung $x^3 - 3ax \mp 2b = 0$ das dritte Glied $2b$ positiv, so verändert sich dadurch der Werth von x in folgenden:

$$x = \sqrt[3]{(-A + B\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(-A - B\sqrt{-1})}.$$

Beispiele.

§. 144. **1.** Es sei $x^3 - 20x - 25 = 0$ aufzulösen.

Hier ist $3a = 20$ und $2b = 25$, also $b = \frac{25}{2}$ und $a = \frac{20}{3}$; daher $b^3 - a^2 = \frac{15125}{108}$ d. i.

$$B = \sqrt{\frac{15125}{108}} \text{ und } \frac{B}{A} = \frac{2}{25}\sqrt{\frac{15125}{108}} = \sqrt{\frac{121}{135}} = \operatorname{tg}\varphi.$$

$$\begin{array}{rcl} & & +20 \\ \log 121 & = & 2{,}0827854 - 20 \\ \log 135 & = & 2{,}1303338 \\ \hline & & 19{,}9524516 - 20 \\ \log \operatorname{tg}\varphi & \overset{2)}{=} & 9{,}9762258 - 10 \end{array}$$

folglich $\varphi = 43^0 25' 57''$.

Nach der obigen Formel (§. 142.) war

$$x = 2\cos\frac{\varphi}{3}\sqrt[3]{\frac{A}{\cos\varphi}}\,.$$

Da nun $\frac{\varphi}{3} = 14^0 28' 39''$, so hat man:

$$\begin{array}{rcl} \log A & = & 1{,}0969100 \\ \log\cos\varphi & = & 9{,}8610472 - 10 \\ \hline & & 1{,}2358628 \\ \log\sqrt[3]{\dfrac{A}{\cos\varphi}} & = & {}^{3)}\,0{,}4119542 \\ +\log 2\cos\dfrac{\varphi}{3} & = & 10{,}2870157 - 10 \\ \hline \log x & = & 0{,}6989699. \end{array}$$

Diesem Log. entspricht $x = 4{,}9999\ldots$, wofür man setzen kann $x = 5$.

2. Es sei $x^3 - 13x - 16 = 0$ aufzulösen.

Diese Gleichung mit (1.) des vorigen §. verglichen, so ist $a = \frac{13}{3}$; $b = 8 = A$; $B = \sqrt{(\frac{13}{3})^3 - 64} = \sqrt{\frac{469}{27}}$ und $\frac{B}{A} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{469}{27}}$ $= \sqrt{\frac{469}{1728}} = \operatorname{tg}\varphi$.

$$\begin{array}{rcl} & & +20 \\ \text{Nun ist} \quad \log 469 & = & 2{,}6711728 - 20 \\ \log 1728 & = & 3{,}2375437 \\ \hline & & 19{,}4336291 - 20 \\ \hline \log \operatorname{tg}\varphi & =^{2)} & 9{,}7168145 - 10, \text{ folglich} \\ \varphi & = & 27^0\, 31'\ 5{,}722'', \text{ also} \\ \frac{1}{3}\varphi & & 9^0\, 10'\, 21{,}907'' \text{ und} \\ \log\cos\frac{1}{3}\varphi & = & 9{,}9944106 - 10 \\ +\log 2 & = & 0{,}3010300 \\ \log 2\cos\frac{1}{3}\varphi & = & 0{,}2954406. \text{ Ferner ist} \\ \log A = \log 8 & = & 0{,}9030900 \\ -\log\cos\varphi & = & 9{,}9478569 - 10 \\ \hline & & 0{,}9552331 \\ \hline \log\sqrt[3]{\frac{A}{\cos\varphi}} & =^{3)} & 0{,}3184110 \\ \log 2\cos\frac{\varphi}{3} & = & 0{,}2954406 \\ \hline \log x & = & 0{,}6138516. \\ \text{Mithin} \quad x & = & 4{,}110093. \end{array}$$

---

5. Capitel.

Anwendung der trigonometrischen Functionen bei der Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Methode von Euler.

§. 145. Wie bei der cubischen Gleichung, so kann auch bei der biquadratischen allemal das zweite Glied weggeschafft werden, so dass sich die vollständige Gleichung

$$X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta = 0$$

durch Substitution von $X = x - \frac{1}{3}\alpha$ auf

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0$$

reducirt. Wegen der völligen Unbestimmtheit der Coefficienten kann die reducirte biquadratische Gleichung auch so geschrieben werden:

(1.) $x^4 = bx^2 + cx + d$. Setzt man nun

(2.) $x = u + v + w$, so erhält man

$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2uw + 2vw$, oder
$u^2 v^2 w^2 + 2(uv + uw + vw)$. Es sei

(3.) $P = u^2 + v^2 + w^2$, so ist

$x^2 - P = 2(uv + uw + vw)$, also quadrirt

$$x^4 - 2Px^2 + P^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 + \left\{\begin{array}{l} 8u^2vw \\ 8v^2uw \\ 8w^2uv \end{array}\right. \quad \text{oder}$$

$$= 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w).$$

Setzt man zur Vereinfachung

(4.) $Q = u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2$,

(5.) $R = u^2v^2w^2$, so verwandelt sich diese Gleichung in

(6.) $x^4 = 2Px^2 + 8\sqrt{R} . x + (4Q - P^2)$.

Wird diese Gleichung mit (1.) verglichen, so werden beide identisch, wenn

(7.) $2P = b$,

(8.) $8\sqrt{R} = c$ und

(9.) $4Q - P^2 = d$.

Lassen sich nun die Grössen u, v, w dergestalt bestimmen, dass sie diesen Gleichungen Genüge leisten, so ist auch x aus der Gleichung (2.) bestimmt. Aus (7.) folgt:

(10.) $P = \frac{1}{2}b$, aus (8.)

(11.) $Q = \dfrac{d + P^2}{4} = \dfrac{d + \frac{1}{4}b^2}{4} = \frac{1}{4}d + \frac{1}{16}b^2$.

Nun besteht der Lehrsatz der Algebra:

„*Wenn in der cubischen Gleichung*

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$$

die Coefficienten A, B, C folgende Werthe haben: $A = -(a + b + c)$; $B = ab + ac + bc$; $C = -abc$, *so sind a, b, c die Wurzeln der Gleichung.*“

Zufolge dieses Lehrsatzes und der Gleichungen (3.), (4.), (5.) sind also die Grössen u^2, v^2, w^2 die drei Werthe von z aus der cubischen Gleichung

(13.) $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$, oder

(14.) $$z^3 - \tfrac{1}{2}bz^2 + \left(\frac{1}{d} + \tfrac{1}{16}b^2\right)z - \tfrac{1}{64}c^2 = 0.$$

Sobald nun die drei Wurzeln dieser Gleichung u^2, v^2, w^2 gefunden sind, so hat man:

$$z_{,} = u^2; \quad z_{,,} = v^2; \quad z_{,,,} = w^2, \quad \text{also}$$
$$u = \sqrt{z_{,}}; \quad v = \sqrt{z_{,,}}; \quad w = \sqrt{z_{,,,}}, \quad \text{und es ist}$$

nach (2.): $$x = u + v + w = \sqrt{z_{,}} + \sqrt{z_{,,}} + \sqrt{z_{,,,}}.$$

In Betracht der Doppelwerthe dieser Radicale würde x acht verschiedene Werthe erhalten können; allein da nach (8.)

$$\sqrt{R} = uvw = \sqrt{z_{,}}.\sqrt{z_{,,}}.\sqrt{z_{,,,}} = \frac{c}{8}$$

sein soll, so reducirt sich diese Anzahl auf die Hälfte; denn es kann ein Werth von $\sqrt{z_{,}}$ und ein Werth von $\sqrt{z_{,,}}$ nur mit *einem* Werthe von $\sqrt{z_{,,,}}$ combinirt werden, $\frac{c}{8}$ mag positiv oder negativ sein.

Somit sind also nur vier verschiedene Werthe für x bestimmt, welche der Natur der biquadratischen Gleichung gemäss, der reducirten Gleichung Genüge leisten.

Das Eingreifen mit trigonometrischen Functionen kann hier, besonders bei unbequemen Zahlen, nur zur Berechnung von z in der cubischen Gleichung (14.) stattfinden.

Methode des Descartes.

§. 146. Es sei die reducirte Gleichung

(1.) $$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0. \quad \text{Man setze}$$

(2.) $$x^4 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + mx + n)(x^2 - mx + r).$$

Das Product dieser beiden quadratischen Factoren ist

$$= x^4 + (n + r - m^2)x^2 + m(r - n)x + nr = 0.$$

Wenn nun beide Gleichungen identisch sein sollen, so muss

(3.) $$A = n + r - m^2,$$

(4.) $$B = m(r - n) \quad \text{und}$$

(5.) $$C = nr, \quad \text{folglich auch}$$

(6.) $$n + r = A + m^2 \quad \text{und}$$

(7.) $$r - n = \frac{B}{m} \quad \text{sein. Aus (6.) und (7.) folgt:}$$

(8.) $$2r = A + m^2 + \frac{B}{m} \quad \text{und}$$

(9.) $$2n = A + m^2 - \frac{B}{m}.$$

Werden nun die beiden letzten Gleichungen mit einander multiplicirt und wird dabei $4C$ statt $4rn$ (nach 5.) gesetzt, so entsteht:

$$m^4 + 2Am^2 + A^2 - \frac{B^2}{m^2} = 4C, \text{ oder}$$

$$m^6 + 2Am^4 + A^2m^2 - B^2 = 4Cm^2, \text{ d. i.}$$

(10.) $$m^6 + 2Am^4 + (A^2 - 4C)m^2 - B^2 = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich in eine cubische durch Substitution von $y = m^2$, nämlich

(11.) $$y^3 + 2Ay^2 + (A^2 - 4C)y - B^2 = 0.$$

Wird diese Gleichung aufgelöst, so hat man y, also auch m; sodann ergeben sich aus (8.) und (9.) die Werthe von r und n, da A, B, C bekannte Grössen sind, mithin erhält man aus den beiden fingirten quadratischen Gleichungen

$$x^2 + mx + n = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - mx + r = 0$$

die vier Werthe von x in Beziehung auf (8.) und (9.). Es ist nämlich

$$x^2 + mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} - n, \text{ also}$$

(12.) $$x = -\frac{m}{2} \mp \sqrt{\frac{m^2}{4} - n} \text{ und ebenso ist}$$

$$x^2 - mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} - r, \text{ folglich}$$

(13.) $$x = \frac{m}{2} \mp \sqrt{\frac{m^2}{4} - r}.$$

Da $$n = \tfrac{1}{2}A + \frac{m^2}{2} - \frac{B}{2m} \text{ und}$$

$$r = \tfrac{1}{2}A + \frac{m^2}{2} + \frac{B}{2m},$$

so erhält man, diese Werthe für n und r substituirt:

$$x = -\frac{m}{2} \mp \sqrt{-\tfrac{1}{2}A - \frac{m^2}{4} + \frac{B}{2m}} \text{ und}$$

$$x = +\frac{m}{2} \mp \sqrt{-\tfrac{1}{2}A - \frac{m^2}{4} - \frac{B}{2m}}.$$

Die weitere Rechnung kann nun durch Einführung von Hülfswinkeln geschehen. Zu diesem Ende schaffen wir das zweite Glied aus der Gleichung (11.)

$$y^3 + 2Ay^2 + (A^2 - 4C)y - B^2 = 0$$

durch Substitution von $y = z - \frac{2}{3}A$ fort. Dadurch erhalten wir:

$$\begin{array}{lcl}
y^3 = (z - \frac{2}{3}A)^3 & = & z^3 - 2Az^2 + \frac{4}{3}A^2z - \frac{8}{27}A^3 \\
2Ay^3 = & & \quad + 2Az^2 - \frac{8}{3}A^2z + \frac{8}{9}A^3 \\
(A^2 - 4C)y & = & \qquad + \frac{3}{3}A^2z - \frac{2}{3}A^3 \\
 & & \qquad - 4Cz \qquad + \frac{8}{3}AC \\
-B^2 & = & \qquad\qquad\qquad -B^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$z^3 - (\tfrac{1}{3}A^2 + 4C)z + (\tfrac{8}{3}AC - \tfrac{2}{27}A^3 - B^2) = 0. \tag{14.}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der reducirten Form des §. 136, nämlich mit $x^3 - px + q = 0$, so werden sie identisch, wenn man setzt $p = \frac{1}{3}A^2 + 4C$ und $q = \frac{8}{3}AC - \frac{2}{27}A^3 - B^2$.

Werden diese Werthe von p und q in die Auflösungsformel des §. 136 eingesetzt, nämlich in:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)},$$

so entsteht:

$$z = \sqrt[3]{}\left[-\tfrac{4}{3}AC + \tfrac{1}{27}A^2 + \tfrac{1}{2}B^2 + (\tfrac{4}{3}AC - \tfrac{1}{27}A^2 - \tfrac{1}{2}B^2)\right] \times \sqrt{\left(1 \quad \frac{4(\frac{1}{3}A^2 + 4C)^3}{27(\frac{8}{3}AC - \frac{2}{27}A^3 - B^2)^2}\right)} + \sqrt[3]{}\ldots\ldots \tag{15.}$$

Man setze nun wie oben

$$\sin\varphi^2 = \frac{4p^3}{27q^2} = \frac{4p^2}{9q^2} \cdot \frac{p}{3}.$$

Dann ist $\sin\varphi = \frac{p}{3q} \cdot 2\sqrt{\frac{p}{3}}$. Hierin die obigen Werthe für p und q substituirt, so hat man:

$$1)\ \sin\varphi = \frac{\frac{1}{3}A^2 + 4C}{8AC - \frac{2}{9}A^3 - 3B^2} \cdot 2\sqrt{\tfrac{1}{9}A^2 + \tfrac{4}{3}C}$$

$$= \frac{A^2 + 12C}{24AC - \frac{2}{3}A^3 - 9B^2} \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{A^2 + 12C}.$$

Ferner 2) $\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$3) \qquad z = -\frac{\frac{2}{3}\sqrt{A^2 + 12C}}{\sin 2\psi}.$$

Offenbar gelten diese Werthe (1), (2), (3) insofern bei dem Werthe von z in (15.):

$$4(\tfrac{1}{3}A^2 + 4C)^3 < 27(\tfrac{8}{3}AC - \tfrac{2}{27}A^3 - B^2)^2 \text{ ist.}$$

§. 147. Sobald in (15.) $4(\frac{1}{3}A^2 + 4C)^3 > 27(\frac{8}{3}AC - \frac{2}{27}A^3 + B)^2$, oder, was einerlei: $\sin\varphi > 1$ ist, so tritt der Casus irreducibilis ein (§. 138).

Es wird alsdann (bei $x^3 - px \mp q = 0$)

$$m = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \quad \text{und} \quad \sin 3\varphi = \frac{4q}{m^3} \text{ d. i.}$$

$$m = 2\sqrt{(\tfrac{1}{9}A^2 + \tfrac{4}{3}C)} \quad \text{und}$$

$$\sin 3\varphi = \frac{(\tfrac{8}{3}AC - \tfrac{2}{27}A^3 - B^2)}{2\sqrt{(\tfrac{1}{9}A^2 + \tfrac{4}{3}C)^3}}.$$

Nun war $m^2 = y$, oder $m = \sqrt{y}$ und $y = z - \frac{2}{3}A$, folglich ist $m = \sqrt{z - \frac{2}{3}A}$. Demnach lassen sich die vier Wurzeln der vorgelegten biquadratischen Gleichung durch die Auflösungsformeln darstellen

$$x = -\tfrac{1}{2}m \mp \sqrt{\left(-\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{4}z + \frac{B}{2m}\right)} \quad \text{und}$$

$$x = +\tfrac{1}{2}m \mp \sqrt{\left(-\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{4}z + \frac{B}{2m}\right)}.$$

Das weitere Verfahren wird sich nun an einigen Beispielen näher erläutern.

§. 148. **Beispiele.**

1. Es sei gegeben die Gleichung

$$x^4 + 3x^2 + 30x + 32 = 0.$$

Die Gleichung (1.) in §. 146 verwandelt sich in eine cubische (14.), wo dann $A = 3$, $B = 30$, $C = 32$; daher hat man nach (1.)

$$\sin\varphi = \frac{9 + 12.32}{24.96 - 18 - 9.900} \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{9 + 12.32}$$

$$= \frac{131}{-1938} \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{393}, \text{ wobei vorläufig der negative}$$

Nenner unbeachtet bleiben kann.

Nun ist	$\log 393$	$=$	$2{,}5943926$
	$\log \sqrt{393}$	$=$	$2)\,1{,}2971963$
	$+ \log 2$	$=$	$0{,}3010300$
	$+ \log 131$	$=$	$2{,}1172713$
	Compl. $\log 3$	$=$	$9{,}5228787$
	Compl. $\log 1938$	$=$	$6{,}7126462$
	$\log \sin\varphi$	$=$	$9{,}9510225 - 10.$
Diesem entspricht	φ	$=$	$63^0\,17'\,51{,}03''.$

Da aber dieser Sinus negativ ist, so hat man zu φ noch 180^0 zu addiren, so dass der entsprechende Bogen $\varphi = 243^0\,17'\,51{,}03''$ also $\frac{1}{2}\varphi = 121^0\,38'\,55{,}51''$ ist. Man berechne jetzt nach (2.) $\log \operatorname{tg} \psi = \log \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi}$.

Es ist $\quad \log - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = 30{,}2101530 - 30$

also $\quad \log \operatorname{tg} \psi = {}^{3)}10{,}0700510 - 10,$

folglich $\psi = 49^0\, 36'\, 3{,}42''$. Da aber die Tangente negativ ist, so ist $\psi = 180^0 - 49^0\, 36'\, 3{,}42''$, d. i. $\psi = 130^0\, 23'\, 56{,}58''$, also ist

$$2\psi = 260^0\, 47'\, 53{,}16''.$$

Nun ist nach No. 3 des §. 146:

$$z = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{A^2 + 12C}}{\sin 2\psi} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{393}}{\sin 2\psi}$$

$$\begin{aligned} \log\sqrt{393} &= 1{,}2971963 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \text{Compl.}\log 3 &= 9{,}5228787 \\ \text{Compl.}\log\sin 2\psi &= \underline{0{,}0056253} \\ \log z &= 1{,}1267303, \text{ folglich ist} \\ z &= 13{,}38844. \end{aligned}$$

Nun setzen wir bei (10.) des §. 146 $y = m^2$ und bei der Wegschaffung des zweiten Gliedes in (11.) $y = z - \frac{2}{3}A$, also ist

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{z - \tfrac{2}{3}A} = \sqrt{(13{,}38844 - 2)} \\ &= \sqrt{11{,}38844} = 3{,}374676, \end{aligned}$$

folglich hat man nach den Auflösungsformeln von (13.)

$$\begin{aligned} x &= -1{,}687338 \mp \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - \frac{11{,}38844}{4} + \frac{30}{2 . 3{,}374676}\right)} \\ &= -1{,}687338 \mp 0{,}312661 \text{ d. i.} \end{aligned}$$

$$x = \begin{cases} -2 \\ -1{,}374678. \end{cases}$$

Die beiden anderen Werthe sind unmöglich, wie die Substitution in die zweite obige Formel für x ergiebt.

2. Es sei gegeben die Gleichung

$$x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0.$$

Dann ist $A = -12$; $B = 12$; $C = -3$. Da aber nach §. 146 (1.) der Werth von

$$\sin\varphi = \frac{144 - 36}{24 . 36 + 8 . 144 - 9 . 144} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{108} = \tfrac{108}{720} . \tfrac{2}{3}\sqrt{108}$$

$$= \tfrac{3}{20}\sqrt{108} = \tfrac{3}{5}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{27}}{5} > 1 \text{ ist, so berechne man}$$

nun nach der Formel des §. 147

$$\sin 3\varphi = \frac{(\frac{8}{3}AC - \frac{2}{27}A^3 - B^2)}{2\sqrt{(\frac{1}{9}A^2 + \frac{4}{3}C)^3}}, \text{ so erhält man}$$

$$\sin 3\varphi = \frac{80}{2\sqrt{12^3}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{27}}.$$

Dann ist $\log \sin 3\varphi = \log \frac{5}{\sqrt{27}}$:

$$\log 5 = 10,6989700 - 10$$
$$\log \sqrt{27} = \underline{0,7156819}$$
$$\log \sin 3\varphi = 9,9832881 - 10.$$

Diesem entspricht $3\varphi = 74^0\, 12'\, 24,5''$, also
$$\varphi = 24^0\, 44'\; 8,16''.$$

Da ferner $m = 2\sqrt{(\frac{1}{9}A^2 + \frac{4}{3}C)} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ und

$$1) \quad z = + m \sin \varphi$$

(§. 139. Hier wird, weil das letzte Glied der cubischen Gleichung $z^3 - pz + q = 0$ positiv ist, das $+$ Zeichen vor m genommen). Es ist also

$$\log z = \log m + \log \sin \varphi$$
$$\log \sqrt{3} = 0,2385606$$
$$+ \log 4 = \underline{0,6020600}$$
$$\log m = 0,8406206$$
$$+ \log \sin \varphi = \underline{9,6216243 - 10}$$
$$\log z = 6,4622449, \text{ folglich}$$
$$z_{,} = 2,898978.$$

2) Ferner ist $60^0 - \varphi = 35^0\, 15'\, 51,84''$; daher nach der Formel $z_{,,} = + m \sin (60^0 - \varphi)$:

$$\log \sin (60^0 - \varphi) = 9,7614394 - 10$$
$$\log m = \underline{0,8406206}$$
$$\log z_{,,} = 0,6020600, \text{ folglich}$$
$$z_{,,} = 4.$$

3) Für die dritte Wurzel ist

$$z_{,,,} = - m \sin (60^0 + \varphi)$$
$$60^0 + \varphi = 84^0\, 44'\, 8,16''.$$
$$\log \sin (60^0 + \varphi) = 9,9981632 - 10$$
$$+ \log m = \underline{0,8406206}$$
$$\log z_{,,,} = 10,8387838 - 10, \text{ folglich ist}$$
$$z_{,,,} = -6,898963.$$

Nehmen wir den unter 2) angegebenen Werth von z, also $m = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, so erhält man nach den Auflösungsformeln (§. 147)

$$1) \; x = -\sqrt{3} \mp \sqrt{\left(4 - 1 + \frac{12}{4\sqrt{3}}\right)} = -\sqrt{3} \mp \sqrt{3 + \sqrt{3}} \text{ d. i.}$$

$$x = -1,7320509 \mp 2,1753277, \quad \text{oder}$$

$$x_{,} = +0{,}4432768 \text{ und}$$
$$x_{,,} = -3{,}9073786.$$

2) $x = +\sqrt{3} \mp \sqrt{(3-\sqrt{3})}$ d. i.
$$x = 1{,}7320509 \mp 1{,}1260324 \text{ oder}$$
$$x_{,,,} = +2{,}8580833 \text{ und}$$
$$x_{,,,,} = +0{,}6060185.$$

Selbstverständlich würde man dieselben vier Wurzeln der gegebenen Gleichung auch durch die unter (1.) und (3.) angegebenen Werthe von z und m finden.

---

§. 149. Die Formeln, welche man nach der **Methode des Pilatte** erhält, mögen hier noch angeführt werden.

Nachdem man die biquadratische Gleichung auf die allgemeine Form $x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$ gebracht hat, findet man leicht die vier Werthe der Unbekannten durch die beiden Formeln:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{w} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-w - 2A - \frac{2B}{\sqrt{w}}\right)} \text{ und}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{w} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-w - 2A + \frac{2B}{\sqrt{w}}\right)},$$

worin w einen durch die cubische Gleichung
$$w^3 + 2Aw^2 + (A^2 - 4C)w - B^2 = 0$$
bestimmten Werth hat.

Schliesslich wollen wir hier die Auflösung der biquadratischen Gleichung in eine allgemeine Regel zusammenfassen und die Reduction der allgemeinsten Form einer solchen Gleichung voranschicken.

Es sei also die gegebene Gleichung:
$$X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta = 0.$$

Man setze $X = \frac{V}{4}$; dann erhält man
$$\frac{V^4}{256} + \frac{\alpha V^3}{64} + \frac{\beta V^2}{16} + \frac{\gamma X}{4} + \delta = 0, \text{ oder}$$
$$V^4 + 4\alpha V^3 + 16V^2 + 64\gamma V + 256\delta = 0.$$

Um nun das zweite Glied $4\alpha V^3$ wegzuschaffen, setze man $V = x - \alpha$. Dann bekommt man:

$$\begin{array}{rcrrrrrr}
V^4 & = & (x-\alpha)^4 = & x^4 - 4\alpha x^3 & + 6\alpha^2 x^2 & - 4\alpha^3 x & + \alpha^4 \\
+ 4\alpha V^3 & = & 4\alpha(x-\alpha)^3 = & + 4\alpha x^3 & - 12\alpha^2 x^2 & + 12\alpha^3 x & - 4\alpha^4 \\
+ 16\beta V^2 & = & 16\beta(x-\alpha)^2 = & & + 16\beta x^2 & - 32\alpha\beta x & + 16\alpha^2\beta \\
+ 64\gamma V & = & 64\gamma(x-\alpha) = & & & + 64\gamma x & - 64\alpha\gamma \\
+ 256\delta & & = & & & & + 256\delta \\
\hline
\end{array}$$

d. i. $0 = x^4 + (16\beta - 16\alpha^2)x^2 + (8\alpha^3 - 32\alpha\beta + 64\gamma)x +$
$$+ 16\alpha^2\beta - 64\alpha\gamma - 3\alpha^4 + 256\delta.$$

Setzt man alsdann $A = 16\beta - 6\alpha^2$;
$$B = 8\alpha^3 - 32\alpha\beta + 64\gamma \text{ und}$$
$$C = 16\alpha^2\beta - 64\alpha\gamma - 3\alpha^4 + 256\delta,$$
so entsteht die reducirte Gleichung:
$$x^4 + Ax^2 + B + C = 0.$$

Durch diese in besonderen Fällen immer leicht ausführbare Verwandlung einer gegebenen aufzulösenden biquadratischen Gleichung kann man daher von der letzten Form, als einer allgemeinen ausgehen.

Allgemeine Regel zur Auflösung biquadratischer Gleichungen.

1) Wenn die gegebene Gleichung ist:
$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$
2) So berechne man:
$$p = \tfrac{1}{3}A^2 + 4C \text{ und}$$
$$q = \tfrac{8}{3}AC - \tfrac{2}{27}A^3 - B^2. \text{ Dann löse man}$$
3) die cubische Gleichung $z^3 - pz + q = 0$.
4) Ist hieraus der Werth von z gefunden, so nehme man
5) $y = z - \frac{2}{3}A$, und dann
6) $m = \sqrt{y}$.
7) Nachdem der Werth von m gefunden ist, nehme man
$$n = \tfrac{1}{2}\left(A + m^2 - \frac{B}{m}\right)$$
und
$$r = \tfrac{1}{2}\left(A + m^2 + \frac{B}{m}\right).$$
8) Nun sind die beiden quadratischen Gleichungen zu lösen:
$$x^2 + mx + n = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 - mx + r = 0,$$
wodurch die vier Werthe von x gefunden werden.

---

§. 150. **Aufgaben zur weiteren Uebung.**

No. 1. Den Werth von x aus der Gleichung

$$3x^2+x = 7$$ zu finden.

Aufl. $\varphi = 83^0\,46'\,30''$; $x = \begin{cases} 1{,}36996\,.. \\ -1{,}70320\,.. \end{cases}$

No. 2. Den Werth von x aus der Gleichung

$$x^2 - 0{,}71423x = 14{,}6258$$ zu bestimmen.

Aufl. Es ist $\varphi = 84^0\,39'\,54{,}92''$

und $x = \begin{cases} +4{,}19812 \\ -3{,}48389. \end{cases}$

No. 3. Die Gleichung $x^2 + \frac{7}{44}x = \frac{1695}{12716}$ aufzulösen.

Antw. Man erhält $\varphi = 77^0\,42'\,31{,}72''$

und $x = \begin{cases} 0{,}29412 \\ -0{,}45321. \end{cases}$

No. 4. Es sei gegeben: $x^2 + 4{,}731219x + 3{,}132753 = 0$.

Antw. Man findet $\varphi = 48^0\,26'\,6{,}2''$

und $x = \begin{cases} -3{,}9351163\,.. \\ -0{,}7961017\,.. \end{cases}$

No. 5. Gegeben: $x^2 - 8x - 9 = 0$. Wie gross ist x?

Antw. Man findet $\varphi = 18^0\,26'\,5{,}83''$

und $x = \begin{cases} -1 \\ +9. \end{cases}$

No. 6. Gegeben $x^2 - \frac{3649}{245}x + \frac{5256}{1225} = 0$.

Antw. Es ist $\varphi = 16^0\,8'\,59{,}74''$

und $x = \begin{cases} 14{,}6 \\ 0{,}2938775\,.. \end{cases}$

No. 7. Aus der cubischen Gleichung

$$x^3 + 2x + 33 = 0$$

den Werth von x zu finden.

Antw. Es ist $\varphi = 1^0\,53'\,22{,}16''$ und $x = -3$. Die beiden anderen Wurzeln sind imaginär.

No. 8. Gegeben: $x^3 - \frac{403}{441}x + \frac{46}{147} = 0$. Welche Werthe hat x?

Antw. 1) $x_{,} = 0{,}4285714 = \frac{3}{7}$ (nahe),

2) $x_{,,} = 0{,}6666\ldots = \frac{2}{3}$,

3) $x_{,,,} = -1{,}095238$.

No. 9. Gegeben: $x^3 - 9x + 4 = 0$. Wie gross ist x?

Antw. $x_{,} = 2{,}74657$,

$x_{,,} = -3{,}20147$,

$x_{,,,} = 0{,}45490$.

No. 10. Aus der biquadratischen Gleichung

$$x^4 - 3x^2 - 30x - 88 = 0$$

den Werth von x zu finden.

Antw. $\varphi = 94^0\,25'\,13{,}94''$,
$x_{,} = 4$,
$x_{,,} = -2{,}401444$.

Die beiden anderen Wurzeln dieser Gleichung sind imaginär.

Tafel der trigonometrischen Formeln.

1. $\begin{cases} \sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha); \quad \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha); \\ \operatorname{tg}\alpha = \cot(90^0 - \alpha); \quad \cot\alpha = \operatorname{tg}(90^0 - \alpha) \text{ etc.} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin(180^0 \mp \alpha) = \pm \sin\alpha \\ \cos(180^0 \mp \alpha) = -\cos\alpha. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(360^0 - \alpha) = \cos\alpha. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \operatorname{tg}(180^0 \mp \alpha) = \mp \operatorname{tg}\alpha \\ \cot(180^0 \mp \alpha) = \mp \cot\alpha \\ \operatorname{tg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\ \cot(360^0 - \alpha) = -\cot\alpha. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sec(180^0 \mp \alpha) = -\sec\alpha \\ \operatorname{cosec}(180^0 \mp \alpha) = \pm \operatorname{cosec}\alpha \\ \sec(360^0 - \alpha) = \sec\alpha \\ \operatorname{cosec}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha; \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \\ \sec(-\alpha) = \sec\alpha; \quad \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha. \end{cases}$

7. $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$.

8. $\sin\alpha = \sqrt{(1 - \cos\alpha^2)}$.

9. $\cos\alpha = \sqrt{(1 - \sin\alpha^2)}$.

10. $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \cot\alpha = 1$.

11. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}; \quad \cot\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

12. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

13. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

14. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

15. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

16. $\sin v.\alpha = 1 - \cos\alpha$; $\cos v.\alpha = 1 - \sin\alpha$.

17. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

18. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$.

19. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

20. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

21. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

22. $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$.

23. $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta) + \cos\alpha.\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta$.

24. $1 + \operatorname{tg}\alpha^2 = \sec\alpha^2$.

25. $1 + \cot\alpha^2 = \operatorname{cosec}\alpha^2$.

26. $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}$.

27. $\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$.

28. $\sec\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cot\alpha}$.

29. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sec\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.

30. $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha^2 - \sin\beta^2 = \cos\beta^2 - \cos\alpha^2$.

31. $\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha^2 - \sin\beta^2 = \cos\beta^2 - \sin\alpha^2$.

32. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

33. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

34. $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$.

35. $\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$.

36. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\alpha\cot\beta - 1}$.

37. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\cot\beta - \cot\alpha}{\cot\alpha\cot\beta + 1}$.

38. $\cot(\alpha+\beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$.

39. $\cot(\alpha-\beta) = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

40. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \alpha^2}$.

41. $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot \alpha^2 - 1}{2 \cot \alpha}$.

42. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \cot \alpha}{\cot \alpha^2 - 1}$.

43. $\cot 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg} \alpha^2}{2 \operatorname{tg} \alpha}$.

44. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\left(\dfrac{\sin \alpha^2}{1 - \sin \alpha^2}\right)}$.

45. $\cot \alpha = \sqrt{\left(\dfrac{\cos \alpha^2}{1 - \cos \alpha^2}\right)}$.

46. $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha \,.\, \cos \frac{1}{2}\alpha$.

47. $\cos \alpha = \cos \frac{1}{2}\alpha^2 - \sin \frac{1}{2}\alpha^2$.

48. $\sin \alpha = \sqrt{\left(\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right)}$.

49. $\cos \alpha = \sqrt{\left(\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right)}$.

50. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\left(\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}\right)}$.

51. $\cot \alpha = \sqrt{\left(\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}\right)}$.

52. $\sec \alpha^2 = \dfrac{2}{1 + \cos 2\alpha}$.

53. $\operatorname{cosec} \alpha^2 = \dfrac{2}{1 - \cos 2\alpha}$.

54. $\sin \frac{1}{2}\alpha^2 + \cos \frac{1}{2}\alpha^2 = 1$.

55. $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{(1 - \cos \frac{1}{2}\alpha^2)}$.

56. $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{(1 - \sin \frac{1}{2}\alpha^2)}$.

57. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\dfrac{\sin \frac{1}{2}\alpha^2}{1 - \sin \frac{1}{2}\alpha^2}\right)}$

58. $\cot \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\dfrac{\cos \frac{1}{2}\alpha^2}{1 - \cos \frac{1}{2}\alpha^2}\right)}$.

59. $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\dfrac{1 - \cos \alpha}{2}\right)}$, oder $1 - \cos \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2$.

60. $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\dfrac{1 + \cos \alpha}{2}\right)}$, oder $1 + \cos \alpha = 2 \cos \frac{1}{2}\alpha^2$.

61. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\dfrac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right)}$.

62. $\cot \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\right)}.$

63. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}.$

64. $\cot \frac{1}{2}\alpha = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}.$

65. $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) . \cos \frac{1}{2}(a-b).$

66. $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}(a+b).$

67. $\cos b + \cos a = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) . \cos \frac{1}{2}(a-b).$

68. $\cos b - \cos a = 2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}(a-b).$

69. $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a . \cos b}.$

70. $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}.$

71. $\cot b + \cot a = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}.$

72. $\cot b - \cot a = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}.$

73. $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta.$

74. $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \cos\alpha \sin\beta.$

75. $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta.$

76. $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2 \sin\alpha \sin\beta.$

77. $\sin\alpha^2 - \sin\beta^2 = \sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta).$

78. $\cos\beta^2 - \cos\alpha^2 = \sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta).$

79. $\cos\alpha^2 - \sin\beta^2 = \cos(\alpha+\beta) . \cos(\alpha-\beta).$

80. $\cos\beta^2 - \sin\alpha^2 = \cos(\alpha+\beta) . \cos(\alpha-\beta).$

81. $\operatorname{tg}\alpha^2 - \operatorname{tg}\beta^2 = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha^2 \cos\beta^2}.$

82. $\cot\beta^2 - \cot\alpha^2 = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha^2 \sin\beta^2}.$

83. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta).$

84. $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta).$

85. $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot \frac{1}{2}(\alpha+\beta).$

86. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot \frac{1}{2}(\alpha-\beta).$

87. $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$

88. $\dfrac{\cos\beta + \cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \cot \frac{1}{2}(\alpha-\beta).$

89. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}.$

90. $\dfrac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}.$

91. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

92. $\cot \frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$

93. $\sec \frac{1}{2}\alpha = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha}.$

94. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos\alpha^2}}{\cos\alpha}.$

95. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}.$

96. $\cot\alpha \cot\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}.$

97. $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \cot\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}.$

98. $\cot\alpha \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}.$

99. $\sec 2\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2}.$

100. $\operatorname{cosec} 2\alpha = \dfrac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}.$

101. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha^2}{\cos\alpha^2}}.$

102. $\cos\alpha^2 = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha^2}.$

103. $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha^2}.$

104. $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha^2}{1+\operatorname{tg}\alpha^2}.$

105. $\cot 2\alpha = \frac{1}{2}\cot\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$

106. $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2}}.$

107. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\alpha^2}}$.

108. $\operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{1}{2}\cot\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

109. $\operatorname{cosec} 2\alpha = \cot\alpha - \cot 2\alpha$.

110. $\operatorname{cosec} 2\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \cot 2\alpha$.

111. $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \sin 2\alpha)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \sin 2\alpha)}$.

112. $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \sin 2\alpha)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \sin 2\alpha)}$.

113. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

114. $\cot\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

115. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.

116. $\cot\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.

117. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg}\alpha^2)$.

118. $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cot\alpha^2}}$.

119. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1}{2}(\cot^2\alpha - 1)$.

120. $\cos\alpha = \dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1 + \cot\alpha^2}}$.

121. $\sec\alpha - 1 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \, . \operatorname{tg}\alpha$.

122. $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\alpha^2}}{\operatorname{tg}\alpha^2}$.

123. $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha^2$.

124. $1 + \cos 2\alpha = \dfrac{2}{1 + \operatorname{tg}\alpha^2}$.

125. $1 - \cos 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha^2}{1 + \operatorname{tg}\alpha^2}$.

126. $\dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$.

127. Wenn $\alpha + \beta \quad 90^0$; so ist $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

128. $\cos\alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\alpha}$.

129. $\sin\alpha = \dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\alpha}$.

130. $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{1 - \cos\alpha}}.$

131. $\cos\alpha^2 - \sin\beta^2 = \cos\beta^2 - \sin\alpha^2 = \cos(\alpha - \beta) . \cos(\alpha + \beta).$

132. $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2 - 1$, oder $2\cos\alpha^2 = 1 + \cos 2\alpha.$

134. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin\alpha^2$, oder $2\sin\alpha^2 = 1 - \cos 2\alpha.$

135. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2}{\cot\alpha - \operatorname{tg}\alpha}.$

136. $2\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha^2}.$

137. $2\cot\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha^2}.$

138. $1 - \operatorname{tg}\alpha^2 = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha^2}.$

139. $1 + \operatorname{tg}\alpha^2 = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha^2}.$

140. $\cot\alpha^2 - 1 = \dfrac{2\cot\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha^2}.$

141. $1 + \cot\alpha^2 = \dfrac{2\cot\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha^2}.$

142. $\cot\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\cot 2\alpha.$

143. $\cot\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$

144. $\cot\alpha^2 - \operatorname{tg}\alpha^2 = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha^2\cos\alpha^2} = \dfrac{4\cot 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$

145. $1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

146. $1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

147. $\cot\alpha\cot\beta - 1 = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

148. $\cot\alpha\cot\beta + 1 = \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

149. $1 + \cot\alpha\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$

150. $1 - \cot\alpha\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$

151. $\cot\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$

152. $\cot\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

153. $\dfrac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b}$ und $\dfrac{\cos b - \cos a}{\sin a - \sin b} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$.

154. $\dfrac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b}$ und $\dfrac{\cos b - \cos a}{\sin a + \sin b} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)$.

155. $\dfrac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} \cdot \dfrac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = [\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)]^2$.

156. $\dfrac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} \cdot \dfrac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = [\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)]^2$.

157. $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a + \sin b} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$.

158. $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin a - \sin b} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}$.

159. $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a + \cos b} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$.

160. $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos b - \cos a} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}$.

161. $\dfrac{\sin(a-b)}{\sin a + \sin b} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$.

162. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha)^2}$.

163. $\cot\alpha = \dfrac{(\cot\frac{1}{2}\alpha)^2 - 1}{2\cot\frac{1}{2}\alpha}$.

164. $\sin\alpha^2\sin\beta^2 + \cos\alpha^2\cos\beta^2 + \sin\alpha^2\cos\beta^2 + \cos\alpha^2\sin\beta^2 = 1$.

165. $1 - \operatorname{tg}\alpha^2\operatorname{tg}\beta^2 = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha^2\cos\beta^2}$.

166. $\cot\alpha^2 - \operatorname{tg}\beta^2 = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha^2\cos\beta^2}$.

167. $\operatorname{tg}\alpha^2\operatorname{tg}\beta^2 = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha^2 - \operatorname{tg}\beta^2}{\cot\beta^2 - \cot\alpha^2}$.

168. $\cot\alpha^2\operatorname{tg}\beta^2 = \dfrac{\cot\alpha^2 - \operatorname{tg}\beta^2}{\cot\beta^2 - \operatorname{tg}\alpha^2}$.

169. $\dfrac{\cot\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\cot\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\cot\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\cot\beta + \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

170. $\dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha\cot\beta + 1} = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

171. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\cot\beta - \cot\alpha}$.

172. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\cot\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha+\beta).$

173. $\dfrac{\cot\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \cot\beta \operatorname{tg}(\alpha+\beta).$

174. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\cot\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha-\beta).$

175. $\dfrac{\cot\alpha - \cot\beta}{\cot\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \cot\beta \operatorname{tg}(\alpha-\beta).$

Wenn die Summe $a + b + c = 180^0$, so ist

176. $\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \tfrac{1}{2}a . \cos \tfrac{1}{2}b . \cos \tfrac{1}{2}c.$

177. $\sin a + \sin b - \sin c = 4 \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c.$

178. $\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c.$

179. $\cos a + \cos b - \cos c = -1 + 4 \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}c.$

180. $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin a \sin b \sin c.$

181. $\sin 2a + \sin 2b - \sin 2c = 4 \sin a \cos a \cos b.$

182. $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = -(1 + 4 \cos a \cos b \cos c).$

183. $\cos 2a + \cos 2b - \cos 2c = 1 + 4 \sin a \sin b \cos c.$

184. $\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1 - 2 \cos a \cos b \cos c.$

185. $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$

186. $\cot a + \cot b + \cot c = \cot a \cot b \cot c + \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c.$

187. $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}b \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c = 1.$

188. $\cot \tfrac{1}{2}a + \cot \tfrac{1}{2}b + \cot \tfrac{1}{2}c = \cot \tfrac{1}{2}a . \cot \tfrac{1}{2}b . \cot \tfrac{1}{2}c.$

Sinus der vielfachen Bogen.

189. $$\left\{\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2 \cos\alpha \sin\alpha \\
\sin 3\alpha &= 3 \cos\alpha^2 \sin\alpha - \sin\alpha^3 \\
\sin 4\alpha &= 4 \cos\alpha^3 \sin\alpha - 4 \cos\alpha \sin\alpha^3 \\
\sin 5\alpha &= 5 \cos\alpha^4 \sin\alpha - 10 \cos\alpha^2 \sin\alpha^2 + \sin\alpha^5 \\
&\vdots \\
\sin n\alpha &= n \cos\alpha^{n-1} \sin\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos\alpha^{n-3} \sin\alpha^3 \\
&\quad + \frac{n \ldots\ldots (n-4)}{1 \ldots\ldots 5} \cos\alpha^{n-5} \sin\alpha^5 \\
&\quad - \frac{n \ldots\ldots (n-6)}{1 \ldots\ldots 7} \cos\alpha^{n-7} \sin\alpha^7 + \ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Cosinus der vielfachen Bogen.

190.
$$\left\{\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 \\
\cos 3\alpha &= \cos\alpha^3 - 3\cos\alpha\sin\alpha^2 \\
\cos 4\alpha &= \cos\alpha^4 - 6\cos\alpha^2\sin\alpha^2 + \sin\alpha^4 \\
\cos 5\alpha &= \cos\alpha^5 - 10\cos\alpha^3\sin\alpha^2 + 5\cos\alpha\sin\alpha^4 \\
&\vdots \\
\cos n\alpha &= \cos\alpha - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos\alpha^{n-2}\sin\alpha^2 \\
&\quad + \frac{n\ldots\ldots(n-3)}{1.2.3.4}\cos\alpha^{n-4}\sin\alpha^4 \\
&\quad - \frac{n\ldots\ldots(n-5)}{1.2\ldots\ldots6}\cos\alpha^{n-6}\sin\alpha^6 + \ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Tangenten vielfacher Bogen.

191.
$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\cot\alpha - \operatorname{tg}\alpha} \\
\operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} \\
\operatorname{tg} 4\alpha &= \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}\alpha^3}{1-6\operatorname{tg}\alpha^2+\operatorname{tg}\alpha^4} \text{ etc.}
\end{aligned}\right.$$

Cotangenten vielfacher Bogen.

192.
$$\left\{\begin{aligned}
\cot 2\alpha &= \frac{\cot\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \\
\cot 3\alpha &= \frac{\cot\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha}{3-\operatorname{tg}\alpha^2} \\
\cot 4\alpha &= \frac{\cot\alpha - 6\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha^3}{4-4\operatorname{tg}\alpha^2} \text{ etc.}
\end{aligned}\right.$$

Andere Ausdrücke für die Sinus und Cosinus vielfacher Bogen.

193.
$$\left\{\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\cos\alpha\sin\alpha \\
\sin 3\alpha &= 2\cos\alpha\sin 2\alpha - \sin\alpha \\
\sin 4\alpha &= 2\cos\alpha\sin 3\alpha - \sin 2\alpha \\
\sin 5\alpha &= 2\cos\alpha\sin 4\alpha - \sin 3\alpha \\
&\vdots \\
\sin n\alpha &= 2\cos\alpha\sin(n-1)\alpha - \sin(n-2)\alpha.
\end{aligned}\right.$$

$$194.\quad \begin{cases} \cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2 - 1 \\ \cos 3\alpha = 2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha \\ \cos 4\alpha = 2\cos\alpha\cos 3\alpha - \cos 2\alpha \\ \cos 5\alpha = 2\cos\alpha\cos 4\alpha - \cos 3\alpha \\ \vdots \\ \cos n\alpha = 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha. \end{cases}$$

Potenzen der Sinus.

195. $\sin\alpha^2 = \frac{1}{2}(-\cos 2\alpha + 1).$
196. $\sin\alpha^3 = \frac{1}{4}(-\sin 3\alpha + 3\sin\alpha).$
197. $\sin\alpha^4 = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3).$
198. $\sin\alpha^5 = \frac{1}{16}(\sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin\alpha).$
199. $\sin\alpha^6 = \frac{1}{32}(-\cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha - 15\cos 2\alpha + 10).$

Potenzen der Cosinus.

200. $\cos\alpha^2 = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1).$
201. $\cos\alpha^3 = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha).$
202. $\cos\alpha^4 = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3).$
203. $\cos\alpha^5 = \frac{1}{16}(\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha).$
204. $\cos\alpha^6 = \frac{1}{32}(\cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha + 15\cos 2\alpha + 10).$

Potenzen der Tangenten und Cotangenten.

205. $\operatorname{tg}\alpha^2 = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha^3 = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}.$

206. $\cot\alpha^2 = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha};\quad \cot\alpha^3 = \dfrac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}.$

Formeln für specielle Winkel.

207. $\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}.$
208. $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$
209. $\sin 15^0 = \cos 75^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$
210. $\cos 15^0 = \sin 75^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$
211. $\sin 18^0 = \cos 72^0 = \dfrac{-1 \mp \sqrt{5}}{4}.$
212. $\cos 18^0 = \sin 72^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$
213. $\cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$
214. $\cos 36^0 = \sin 54^0 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$
215. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sin(45^0+\alpha)\sqrt{2} = \cos(45^0-\alpha)\sqrt{2}.$
216. $\cos\alpha - \sin\alpha = \cos(45^0+\alpha)\sqrt{2} = \sin(45^0-\alpha)\sqrt{2}.$

217. $\operatorname{tg}(45^0+\alpha) = \cot(45^0-\alpha) = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cot\alpha+1}{\cot\alpha-2}$.

218. $\operatorname{tg}(\alpha-45^0) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1-\cot\alpha}{1+\cot\alpha}$.

219. $1+\sin 2\alpha = 2\cos(45^0-\alpha)^2 = 2\sin(45^0+\alpha)^2$.

220. $1-\sin 2\alpha = 2\sin(45^0+\alpha)^2 = 2\cos(45^0+\alpha)^2$.

221. $\cos 2\alpha = 2\cos(45^0+\alpha).\cos(45^0-\alpha)$
$= 2\sin(45^0+\alpha).\cos(45^0-\alpha)$.

222. $\operatorname{tg}(45^0-\alpha) = \dfrac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

223. $\sin\alpha+\cos\beta = 2\sin[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+45^0].\cos[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-45^0]$
$= 2\sin[45^0+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)].\sin[45^0+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)]$
$= 2\cos[45^0-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)].\cos[45^0-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)]$.

224. $\sin\alpha-\cos\beta = 2\cos[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+45^0].\sin[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-45^0]$.

225. $\cos\alpha+\sin\beta = 2\cos[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+45^0].\cos[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-45^0]$.

226. $\sin\beta-\cos\alpha = 2\sin[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+45^0].\sin[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-45^0]$.

227. $1+\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}.\dfrac{\sin(45^0+\alpha)}{\cos\alpha} = \sqrt{2}.\dfrac{\cos(45^0-\alpha)}{\cos\alpha}$.

228. $1-\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}.\dfrac{\sin(45^0-\alpha)}{\cos\alpha} = \sqrt{2}.\dfrac{\cos(45^0+\alpha)}{\cos\alpha}$.

229. $1+\cot\alpha = \sqrt{2}.\dfrac{\sin(45^0+\alpha)}{\sin\alpha} = \sqrt{2}.\dfrac{\cos(45^0-\alpha)}{\sin\alpha}$.

230. $\cot\alpha-1 = \sqrt{2}.\dfrac{\sin(45^0-\alpha)}{\sin\alpha} = \sqrt{2}.\dfrac{\cos(45^0+\alpha)}{\sin\alpha}$.

231. $\cot(45^0-\alpha) = \dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$.

232. $\sin(30^0+\beta) = \cos\beta-\sin(30^0-\beta)$.

233. $\cos(30^0+\beta) = \cos(30^0-\beta)-\sin\beta$.

234. $\operatorname{tg}(45^0+\alpha) = \sec 2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha$.

235. $\operatorname{tg}(45^0-\alpha) = \sec 2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha$.

236. $\dfrac{\operatorname{tg}(45^0+\alpha)}{\operatorname{tg}(45^0-\alpha)} = \dfrac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$.

237. $\dfrac{\operatorname{tg}(45^0-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^0+\alpha)} = \dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

238. $\sin(60^0+\beta) = \sin\beta+\sin(60^0-\beta)$.

239. $\cos(60^0+\beta) = \cos\beta-\cos(60^0-\beta)$.

240. $\operatorname{tg}(60^0+\alpha) = 2\operatorname{tg}(30^0+2\alpha)+\operatorname{tg}(30^0-\alpha)$.

241. $\operatorname{tg}(45^0+\alpha)-\operatorname{tg}(45^0-\alpha) = 2\operatorname{tg}2\alpha$.

242. $\operatorname{tg}(45^0 - \alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}.$

243. $\sin(45^0 + \varphi) = (\sin\varphi + \cos\varphi)\sin 45^0.$

Nachtrag.

244. $\sin(a + b + c) = \sin a \cos b \cos c - \sin a \sin b \sin c$
$+ \cos a \sin b \cos c + \cos a \cos b \sin c.$

245. $\sin(a + b - c) = \sin a \cos b \cos c + \cos a \sin b \cos c$
$- \cos a \cos b \sin c + \sin a \sin b \sin c.$

246. $\cos(a + b + c) = \cos a \cos b \cos c + \sin a \sin b \cos c$
$- \sin a \cos b \sin c - \cos a \sin b \sin c.$

247. $\cos(a + b - c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c$
$+ \sin a \cos b \sin c + \cos a \sin b \sin c.$

248. $\operatorname{tg}(a + b + c) = \dfrac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}c - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b \operatorname{tg}c}{1 - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}c - \operatorname{tg}b \operatorname{tg}c}.$

249. $\sin(a - b)\sin c + \sin(b - c)\sin a + \sin(c - a)\sin b = 0.$

250. $\sin(a - b)\cos c + \sin(b - c)\cos a + \sin(c - a)\cos b = 0.$

251. $\sin(a + b)\sin c - \sin(b + c)\sin a \quad \sin(c - a)\sin b = 0.$

252. $\sin(a + b)\cos c - \sin(b + c)\cos a + \sin(c - a)\cos b = 0.$

253. $\cos(a - b)\sin c - \cos(b - c)\sin a - \sin(c - a)\cos b = 0.$
