



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

Cumms

J.C. Branner Gat

*551.79
D 799*

DIE

GEOIDDEFORMATIONEN DER EISZEIT

I. TEIL.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VON DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT,

NEBST BEIGEFÜGTEN THESEN ÖFFENTLICH VERTEIDIGT

AM 6. JULI 1887

VON

ERICH VON DRYGALSKI

AUS KÖNIGSBERG I. PR.

OPPONENTEN:

AUGUST BÖHM, DR. PHIL.

ADOLPH OLLERICH, CAND. PHIL.

FRITZ MUMME, STUD. MATH.

[Faint, illegible text]

BERLIN, 1887.

DRUCK VON W. FORMETTER.

WJ



J.C. Bran

D 799
DIE
GEOIDDEFORMATIONEN DER EISZ

I. TEIL.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
VON DER
PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER
FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BER

GENEHMIGT,

NEBST BEIGEFÜGTEN THESEN ÖFFENTLICH VERTEIDIGT

AM 6. JULI 1887

VON

ERICH VON DRYGALSKI
AUS KÖNIGSBERG I. PR.

OPONENTEN:

AUGUST BÖHM, DR. PHIL.
ADOLPH OLLERICH, CAND. PHIL.
FRITZ MUMME, STUD. MATH.

BERLIN, 1887.

DRUCK VON W. PORMETTER.

55-174
D7461

676100

1965

In der Geschichte der Wissenschaft ist es eine oft wiederkehrende Erscheinung, daß die Tragweite neuer Gedanken überschätzt und ihre Anwendung zu sehr verallgemeinert wird. So hat der grundlegende Gedanke L. v. Buch's, daß das Festland säkularen Bewegungen unterworfen sei, wie die große Erkenntnis Bischof's von der Bedeutung der chemischen Thätigkeit des Wassers oder die Erfahrung Ramsay's von der erodierenden Wirkung der Gletscher zu starken Übertreibungen Anlaß gegeben, und selbst Lyell's unsterbliches Verdienst, in der Zeit das wichtigste geologische Agens erkannt zu haben, führte in seinen Ausartungen zum Quietismus.

Solche Übertreibungen haben ihre Berechtigung und ihren Nutzen. Denn in dem Streben nach Verallgemeinerung des Grundgedankens wird man auf Widersprüche und Ausnahmen geführt, die eine andere Erklärung erheischen, und so gelangt man durch die Übertreibungen zu einer richtigen Beschränkung des Grundgedankens und zu neuer Erkenntnis.

Wenn aber Theorien nicht, wie die genannten, einen Hinterhalt in bestimmten Thatsachen haben, fällt die wohlthätige Wirkung der Übertreibungen fort, weil die Kriterien fehlen, an welchen man die weitere Anwendbarkeit zu prüfen vermag. Die entwickelten Konsequenzen können dann ebenso gut richtig wie unrichtig sein, Rechnungen, die sich daran schliessen, sind nutzlos und werden vielmehr nachteilig wirken, weil sie unter dem Anscheine von Wissenschaftlichkeit zu Größenresultaten führen, welche der mathematischen Begründung entbehren; es entsteht eine Anhäufung von Hypothesen, mit welcher der Wissenschaft nicht gedient ist, weil sie, auf die Autorität des Verfassers gestützt, überall Eingang und allzu weite Verbreitung finden. Ist es mit der Zeit möglich das Fundament zu legen, fällt es dann kleiner aus, als das Gebäude verlangt.

Daß das Geoidproblem diesen verkehrten Entwicklungsgang gehabt hat, geht vielleicht aus den folgenden Ausführungen hervor. Ich

würde mich glücklich schätzen, wenn es mir gelänge darzuthun, daß die Hauptfrage in dem Problem eine geodätische ist und ihre Bedeutung für die physikalische Geographie nur gering.

Ältere Ansichten.

Dafs infolge unregelmäßiger Massenordnung auf der Erdoberfläche eine Ablenkung des Lotes erfolgen muß, war lange bekannt hatten doch schon 1778 Maskelyne und Hutton diese Thatsache zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde benutzt, nachdem ein noch früherer Versuch von Bouguer und de la Condamine am Chimborazzo 1749 zu keinem Resultate geführt hatte. Und dafs infolge dieser Lotablenkung der Meeresspiegel manche Deformationen erleiden mußte, vermochte man leicht aus dem Prinzip von Huygens zu folgern wonach die Oberfläche einer Flüssigkeit sich überall senkrecht zur resultierenden Kraft einstellen muß. Doch man bezeichnete diese Ablenkungen als lokale Störungen und hielt im übrigen an der von Newton noch als Voraussetzung gefaßten, später auf Grund des Huygensschen Prinzips unter der Annahme eines ursprünglich flüssigen Zustandes der Erde von Clairaut¹⁾ und streng erst von Maclaurin²⁾ bewiesenen Rotationsellipsoidform fest. — Erst Gauß³⁾ war es, der auf Grund seiner Bearbeitung der Hannöverschen Gradmessung und der darin sich ergebenden Differenzen zwischen astronomischen und geodätischen Resultaten aussprach, dafs diese bisher als lokale Störungen behandelten Lotablenkungen die Regel bilden müssten, und dafs es nur an der Unvollkommenheit der Beobachtungsmethoden lag, wenn derartige Störungen nicht aller Orten zur Kenntnis kämen. Näher hat sich Gauß nicht mit dem Probleme befaßt. — Bessel⁴⁾ wurde bei seinen geodätischen Arbeiten zu ähnlichen Resultaten geführt; er erkannte, wie Gauß, in den Differenzen zwischen astronomischen und geodätischen Bestimmungen die Abweichungen der wahren mathematischen Erdgestalt von der einfachen Form eines Rotationsellipsoides; hier ist wichtiger eine frühere kleine Schrift, welche die Veränderungen der Polhöhe infolge von Vorgängen im Erdinnern behandelt. Bessel gelangt darin zu dem Resultat, dafs außerordentlich große Massenumlagerungen im Innern der Erde erforderlich sind, um die Polhöhe auch nur um einen Zoll zu verrücken, Massen, gegen deren Umfang die sichtbaren Unregelmäßigkeiten auf der Erdoberfläche, wie Gebirge, verschwin-

1) Todhunter, History of the theories of attraction and the figure of the earth London 1873. Vol I, p. 85.

2) Todhunter vol. I, p. 137; nach vol. I, p. 81 war der erste angenäherte Beweis in den Arbeiten Stirlings implicite enthalten.

3) Gauß, Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten Göttingen und Altona. Göttingen 1828. p. 72.

4) Bessel und Baeyer, Gradmessung in Ostpreußen 1833. p. 427 ff.

den¹⁾. Die Schrift scheint wenig bekannt geworden zu sein, sonst hätte man nicht so sehr beträchtliche Schwankungen des Meeresspiegels auf Rechnung von oberflächlichen Massenumlagerungen setzen dürfen, die bedeutend kleiner waren, als die von Bessel gegebenen Größen.

In Frankreich wurde die Frage durch Puissant's „Description géométrique de la France“²⁾ angeregt, worin im Verlauf der Meridiane von Frankreich nicht unerhebliche Abweichungen von der regelmässigen Krümmung, wie sie das abgeplattete Rotationsellipsoid verlangt, zur Kenntnis kamen. Puissant³⁾ zeigte durch genauen Vergleich der astronomischen und geodätischen Resultate, dafs östlich vom Meridian von Paris Frankreich auf einem stark abgeplatteten, westlich sogar auf einem verlängerten Ellipsoid liegt. — Dafs diese Arbeiten zu weitgehenden Theorien ermutigen mußten, ist kaum zu behaupten. Sie konstatierten streng mathematisch einzelne heutige Abweichungen der Erdgestalt von der rotationsellipsoidischen Form infolge der unregelmässigen Massenverteilung in ihrer Gesamtheit, doch nur in der einen Schrift von Bessel finden wir die Massen, welche die Störung veranlaßt, präzisiert, und diese Schrift konnte eher abschreckend als ermutigend wirken.

Es fehlte daher vollkommen das Fundament, als Elie de Beaumont seine Ansichten entwickelte, wonach die beträchtliche Erhebung tertiärer Schichten ohne Dislokation Gravitationsänderungen ihren Ursprung verdanke. Leider stand mir das Werk Beaumont's nicht zur Verfügung; nach dem Citate, welches ich bei Rozet finde, hat er von der Theorie noch verschiedene andere weitgehende Anwendungen gemacht. Rozet⁴⁾ folgte ihm darin und erklärte die von Brogniart und Cuvier aus vielfacher Wechsellagerung mariner und lakustrer Schichten erfolgten zahlreichen Überflutungen des Pariser Beckens durch Gravitationsänderungen, die mit der Entstehung der Alpen zusammenhingen. In einer zweiten Mitteilung geht Rozet⁵⁾ noch weiter und bespricht auf Grund von Rechnungen, die jedoch nicht mitgeteilt sind, den Einfluß der Gebirgsbildung auch auf die Axenlage der Erde. Den Schwankungen dieser Lage schreibt er die Ursache der Meeresoscillationen, der vulkanischen Ausbrüche in der Auvergne und in den Anden, ja die Bildung des ganzen Diluviums zu. Es genügt, wegen dieser abenteuerlichen Theorie auf seine eigenen Ausführungen zu verweisen.

Humboldt⁶⁾ hat sich nur allgemein mit der Frage beschäftigt und die Möglichkeit von Deformationen des Meeresspiegels infolge von

1) Lindemann und Bohnenberger, Zeitschr. für Astronomie Bd. V. 1818. p. 29.

2) Mémorial du dépôt générale de la guerre Bd. VI u. VII. Paris 1832 u. 1840.

3) a. a. O. VII, p. 611—644.

4) Bull. Soc. geol. de France, t. XII, 1841, p. 176 f.

5) Bull. Soc. geol. de France, t. XIII, 1842, p. 175 ff.

6) Kosmos I, p. 312 u. IV, p. 18 ff.

Gravitationsänderungen z. B. bei der Gebirgsbildung anerkannt. gegen lieferte sein Zeitgenosse v. Bruchhausen¹⁾ eine eingehende Illustration und wies zuerst auf den Einfluss großer Eisansammlungen ohne aber numerische Daten zu bieten. In die folgende Zeit fallen die Versuche, der Frage mathematisch näher zu treten und numerisch zu begründen. Bei einer Übersicht müßte man streng zwei Gesichtspunkte trennen:

- 1) welches sind die gegenwärtigen Deformationen der Erdgestalt und
- 2) wie ändern sich diese Deformationen bei Änderungen in der Größe der Gravitation.

Durch einen grundlosen Schluss von dem Betrage des ersten die Größe des zweiten Punktes waren die haltlosen Theorien Beaumont und Rozet veranlaßt und eine Vermengung beider Teile es auch in der Folgezeit, die manches Unheil gestiftet. Der erste Punkt gehört der Messung, der zweite der Rechnung an. Ich will nächst eine Entwicklung des ersten Teils geben samt den fehlerhaften Versuchen, die einschlägigen numerischen Daten analog wie bei Punkt 2 zu ermitteln, wobei die Methoden von Punkt 2 auch Erwähnung finden und dann zu einigen Untersuchungen über die Schwankungen der Geoidgestalt übergehen.

A. Über die gegenwärtigen Deformationen der Erdgestalt

Eine gesunde Entwicklung unserer Kenntnis des Geoids kann nur auf Grund der Versuche, die Erdgestalt durch Schwermessung zu bestimmen, d. h. an der Hand des Clairautschen Theorems erfolgen. Zwar führen auch Gradmessungen zur Kenntnis gewisser Geoiddeformationen, ja sie haben den ersten Impuls gegeben diesen Verhältnissen nachzuforschen, indem Gauß auf Grund der hannöverschen Gradmessung die Allgemeinheit der Lotstörungen aussprach. Doch es ist ja an sich klar, daß gerade die wichtigsten Störungen, die durch den Gegensatz von Kontinent und Ozean veranlaßt sind, bei Gradmessungen unbemerkt bleiben können, weil die Messungen nur auf den Kontinenten selbst erfolgen. Schwermessungen sind gleichmäßiger über die Erde verteilt, und durch die Inselstationen finden die Meere auch die notwendige Rücksicht.

Das Theorem von Clairaut ist die Lösung des schon von Newton gestellten Problems, die Variationen der Schwerkraft auf der Erdoberfläche mit der Gestalt der Erde in Beziehung zu setzen. Newton setzte bei seinen Versuchen diese Gestalt noch voraus, sowie eine homogene

¹⁾ Die periodisch wiederkehrenden Eiszeiten und Sündfluten. Trier 1845. I u. 79. Ausführlicher dargestellt in einem Manuskript an Humboldt 1845, das leider nicht zur Verfügung stand.

Dichte des gesamten Erdkörpers; Huygens behandelte das entgegengesetzte, ebenfalls rein theoretische Extrem, wo die gesamte Massenwirkung von einem Punkte, dem Erdcentrum ausging. Sein Prinzip jedoch bahnte, wie schon erwähnt ist, den Beweis der rotationsellipsoidischen Gestalt einer rotierenden Flüssigkeitsmasse, also den Beweis der anderen Voraussetzung Newton's an Clairaut¹⁾ erst löste das Problem unter Bedingungen, die von den natürlichen nicht mehr allzuweit entfernt sind, und gab jene einfache Beziehung, welche abgesehen von einigen Modifikationen, die in den Voraussetzungen angebracht sind, bis heute besteht:

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} \gamma$$

$$\text{Abplattung} + \frac{\text{Schwere-Zunahme vom Äquator zum Pol}}{\text{Schwere am Äquator}} = \frac{5}{2} \frac{\text{Schwungkraft am Äquator}}{\text{Schwere am Äquator}}$$

Clairaut bewies diesen Satz unter der Annahme einer Dichtigkeitsanordnung im Erdinnern nach konzentrischen Schichten und legte, auf Maclaurin's Beweis gestützt, die Gestalt eines Rotationsellipsoides zu Grunde, die aus einem urflüssigen Zustand der Erde folgt. Infolge dessen hat man später vielfach in der nahen Übereinstimmung der Werte der Abplattung, welche das Clairaut'sche Theorem und die Gradmessungen lieferten, einen Beweis dafür erblickt, dafs die Erde früher wenigstens in einem flüssigen Zustande gewesen ist. Doch dieser Grund ist hinfällig, wie später Stokes gezeigt hat, indem er das Clairaut'sche Theorem ohne die Voraussetzung der rotationsellipsoidischen Form ableitete und allein von der Annahme ausging, dafs sie eine sphäroidische Gleichgewichtsfläche sei²⁾. — Nach Clairaut's Zeit bezeichnen einen wichtigen Fortschritt in der Geschichte des Theorems die Namen Legendre und Laplace durch die Einführung des Potentials und der Kugelfunktionen in die Entwicklung. Sonst hielten beide Forscher im wesentlichen noch an der Clairaut'schen Voraussetzung einer bestimmten Dichtigkeitsanordnung im Erdinnern fest. — Von dieser Voraussetzung machte eben erst Stokes das Theorem frei in seiner soeben erwähnten Schrift und das ist sein großes Verdienst,

1) Das ausführliche Werk Clairaut's heifst: *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique*. 1. Ausg. 1743 2. Ausg. 1808. Sein Theorem war schon in einer früheren Arbeit enthalten; *Phil. Trans.* 1738. cf. Todhunter vol. I, cap. XI.

2) Stokes, *On attractions and on Clairaut's Theorem* (math. and phys. Papers by G. G. Stokes, vol. II. Cambridge 1883. p. 104 ff.). Zuerst abgedruckt in *Cambridge and Dublin math. Journal* 1849, vol. IV, p. 194.

weil erst dadurch eine einwurfsfreie Anwendung des Theorems auf die Gestalt der Erde möglich wird. Denn über die Verteilung der Dichtigkeit im Erdinnern wissen wir nichts. Stokes machte nur die Annahme, daß die Erde eine Sphäroidgestalt habe, daß sie also ein kugelähnlich rotierender Körper sei.

Die weiteren Darlegungen von Stokes¹⁾ sind das Fundament für alle späteren Untersuchungen über die Erdgestalt; ich will im Folgenden zu entwickeln versuchen, wie die verschiedenen Forschungsrichtungen aus ihnen entstanden sind.

In Erweiterung des Huygensschen Prinzips hat man als Gleichgewichtsbedingung für eine Fläche das Potential der Kräfte $W = \text{const}$ zu setzen. Es dürfen in der Richtung der Fläche keine Kräfte wirken, ist nur ein anderer Ausdruck dafür, daß sich längs der Fläche das Potential nicht ändern darf, daß es also konstant sein muß. — Bei der rotierenden Erde setzt sich das Potential aus dem Potential der Schwerkraft und dem der Centrifugalkraft zusammen, wir erhalten

$$W = V + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi \quad 2)$$

als Ausdruck für das Potential, und somit als Gleichung der Niveaulinien oder Geoide:

$$V + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi = \text{const.}$$

Nun ist das Potential der Schwerkraft in Beziehung auf einen beliebigen Ort: $V = \gamma^2 \int \frac{dm}{e}$, wenn dm ein Massenelement, e die Entfernung dieses Elementes von dem attrahierten Punkt, γ^2 die Newtonsche Attraktionskonstante ist. — Entwickelt man den Ausdruck $\frac{1}{e}$ nach der Theorie der Kugelfunktionen zum Zwecke der Integration, so erhält man:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \frac{r}{r'} P_1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 P_2 + \dots \right\}$$

worin P_1, P_2, \dots Kugelfunktionen ersten, zweiten u. s. w. Ranges bedeuten, r' ist der Abstand des attrahierten Punktes vom Erdschwerpunkt und r der Abstand des attrahierenden Massenpunktes.

Wie nun ersichtlich, wird die obige Reihe konvergieren, so lang $r' > r$ ist, denn die P nehmen mit wachsendem Index ab, sie würden divergieren für $r' < r$, weil die P langsamer abnehmen, als die $\frac{1}{r'}$.

¹⁾ On the variation of gravity at the surface of the earth. (Math. and phy. Papers by Stokes, vol. II Cambridge 1883. p. 133 ff. Auch: Trans. of the Cambridge phil. Soc., vol. VIII, 1849, pag. 672.

²⁾ ω bezeichnet die Winkelgeschwindigkeit, r den Radiusvektor, φ den Neigungswinkel des Radiusvektors gegen die Ebene des Äquators.

zunehmen; in diesem Falle wird die Reihe unbrauchbar und ist durch die andere:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'}{r} P_1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 P_2 + \dots \right)$$

zu ersetzen.

Betrachten wir nun die physische Erdoberfläche, so ist doch un-
mittelbar klar, wenn wir die erste Entwicklung von $\frac{1}{e}$ nach Kugel-
funktionen in den Ausdruck $W = \text{konst.}$ einführen, daß für die Meeres-
fläche die Entwicklung unbrauchbar werden wird. Denn einzelne
Teile der Erde erheben sich über die Meeresfläche — diese in Kanälen
durch die Kontinente fortgesetzt gedacht — der Abstand r der Elemente
dieser Teile vom Erdschwerpunkt wird also größer, als der Radius-
vektor r' der Meeresfläche, mithin die Entwicklung divergent für diese
Teile. Um nun einen bis zur Meeresfläche gültigen Ausdruck für die
Gleichung der Flächen $W = \text{konst.}$, aus der das Clairautsche Theorem
abgeleitet wird, zu erhalten, denkt sich Stokes¹⁾ die über der Meeres-
fläche befindlichen Massen innerhalb der Meeresfläche kondensiert.
Dann bleibt überall $r < r'$ ($r = r'$ hindert nicht die Konvergenz) mit-
hin bleibt der Ausdruck $W = \text{konst.}$ bis zur Meeresfläche gültig und
daher auch das aus ihm für die Meeresfläche abgeleitete Clairautsche
Theorem.

Übrigens, das sei hier eingeschaltet, hat später Helmert²⁾ den Be-
weis geliefert, daß das Theorem auch ohne diese ideale Massenord-
nung für die Meeresfläche gültig ist, indem er die Entwicklung des
Potentials nach Kugelfunktionen in die beiden oben angeführten Reihen
zerlegt, von denen jede innerhalb eines bestimmten Wirkungskreises
gültig bleibt, ihre Summe daher eine allgemein gültige Darstellung der
ganzen Erde umfaßt. Helmert geht bei der Ableitung von Voraus-
setzungen aus, die durch die aus direkten Messungen gewonnenen Er-
fahrungen über die Gestalt der Erde und die Variationen der Schwer-
kraft hinreichend gerechtfertigt sind.

Daß nun infolge der Massenidealisierung theoretisch wie praktisch
Korrekturen erforderlich werden, ist klar. Denn die Geoidfläche
wird bei der Massenumlagerung verschoben und ihr Potential geändert,
wir haben also nicht mehr streng einen Ausdruck für das Potential der
Erde: das erfordert eine theoretische Rechtfertigung des Verfahrens.
— Der Betrag der gemessenen Schwerkraft wird nicht mehr direkt mit
der Theorie vergleichbar: das erfordert eine praktische Reduktion. —
Ich habe nicht ausdrücklich hervorgehoben, in welcher Weise die
Messungen in die Theorie eintreten; um jedoch aus dem Clairautschen

1) On the Variation etc. Art. 13.

2) Zeitschr. f. Vermessungs-Wesen, 1878, p. 121.

zu bestimmen. Die zweckentsprechende Reduktion besteht darin, daß man die Messungen, die an sich untereinander und Theorie nicht vergleichbar sind (schon wegen der wechselnden Lage des Beobachtungsortes) mit der Theorie in Einklang setzt. erhellet die Notwendigkeit einer praktischen Kondensationsrechnung wenn eben die Anwendbarkeit der Theorie zur Bestimmung der Erdgestalt auf dem Kondensationsverfahren beruht.

Was den theoretischen Teil betrifft, so bietet Stokes dafür Allgemeines und sucht das Verfahren durch Überlegung zu rechtfertigen. Erst Helmert hat die Theorie durchgeführt und zahlenmäßig erwiesen, daß die infolge einer zweckmäßigen Kondensation eintretende Verschiebung der Meeresfläche gar gering ist, daß es erlaubt ist, das Potential nach der Kondensation noch als das Potential der Erde zu betrachten¹⁾. Helmert hat dadurch erst die Möglichkeit einer einheitlichen Behandlung der Schweremessungen nach der Theorie der Gravitationsfunktionen eröffnet und auch gleich praktisch durch die Entwiklung von Reduktionsmethoden²⁾ die Wege gebahnt, welche zu einer freien Bestimmung der Erdgestalt aus Schweremessungen führen. Die Durchführung der Methode, welche außer der theoretischen Zweckmäßigkeit auch den praktischen Vorteil hat, daß lokale Anomalien keinen Einfluß verlieren, führte für die Abplattung der Erde zu der

$$\alpha = \frac{1}{299,26}.$$

Es ist hier nicht der Ort auf jenen Punkt einzugehen, welcher die Methode noch unvollkommen bleibt und welcher Helmert³⁾ wegs entgeht. Kurz gesagt ist es der, daß die ganze Reduktion der Messungen auf die Geoidfläche erfolgt, während sie auf die Sphäroidfläche erfolgen müßte, die, wie Bruns⁴⁾ hervorhebt, nicht ohne Berücksichtigung der Abplattung zu haben braucht. Ganz beseitigt wird diese Ungenauigkeit von Helmert nicht, doch durch seine Kondensationsmethode etwas abgeschwächt, indem dadurch, wie erwähnt, lokale Einflüsse, hauptsächlich das Geoid vom Sphäroid unterscheiden, an Bedeutung verlieren.

¹⁾ F. R. Helmert, Die math. u. phys. Theorien der höheren Geodäsie, Leipzig 1880 u. 84; vgl. vol. II, p. 149—155.

²⁾ A. a. O. vol. II, p. 172—190.

³⁾ A. a. O. vol. II, p. 237.

⁴⁾ H. Bruns, Die Figur der Erde (Publ. des K. Preufs. Geodät. Inst. 1878. p. 43 f.).

Die Gestalt und Abplattung nun, welche man so erhält, gehört einem Niveausphäroid an, d. h. einer Fläche, welche mathematisch die erste Annäherung an die komplizierte, durch einen einheitlichen analytischen Ausdruck nicht darstellbare Fläche des Geoids bezeichnet. Denn sowohl die Ableitung des Clairautschen Theorems, als auch die Interpolationsformel, welche die gemessenen Werte der Schwerkraft umfaßt, gilt für die Niveausphäroide, nicht für die Geoide, weil von der Reihenentwicklung nur die ersten Glieder benutzt sind und diese die Sphäroide darstellen; erst die ganzen Reihen würden die Geoide bezeichnen.

Es wäre eine kaum zu bewältigende Aufgabe, in gleicher Weise wie die Gestalt der Sphäroide die der Geoide zu bestimmen. Die Anzahl der dann in der Entwicklung zu berücksichtigenden Glieder und in Zusammenhang damit die Zahl der zu bestimmenden Konstanten ist zu groß, als daß sie rechnerisch bewältigt werden könnte.

Die Geoide, deren Wesen Bruns¹⁾ in seiner Figur der Erde klar gelegt hat, sind eben Flächen, die an jedem Punkte festgelegt werden müssen, wenn man sie genau erkennen will. Sie sind im wahren und im übertragenen Sinne des Wortes unberechenbar. Sie haben keine Kanten und Sprünge, doch ein unstätiges Krümmungsmaß, weil ein rascher lokaler Dichtigkeitswechsel einen Sprung in dem Krümmungsradius veranlaßt, eine Interpolation ist nicht möglich.

Es wird daher die Aufgabe der Geodäsie sein, die Gestalt der Niveausphäroide, welche von Rotationsellipsoiden nicht sehr verschieden sind, zu bestimmen und dann an möglichst vielen Orten die Geoide dagegen festzulegen.

Durch eine Kombination von geometrischen und trigonometrischen Nivellements, von Schweremessungen, Triangulationen und astronomischen Ortsbestimmungen wäre eine Festlegung des Geoids gegen ein bestimmtes Ellipsoid möglich, wie Bruns ausführt. Doch abgesehen von praktischen Schwierigkeiten bei Ausführung der verschiedenen Messungen, wo sie möglich sind, käme man auf diesem Wege nur zu einer Kenntnis des Geoids in bestimmten Teilen der Erde. Der größte Teil, alle Meere, sind einem Teile der Operationen, den Nivellements, unzugänglich, und da nur durch ein Zusammenwirken aller Klassen die Lage des Geoids ermittelt werden kann, ist die Aufgabe auf diesem Wege für die Meere unlösbar.

Einen anderen Weg hat schon früher Stokes²⁾ gezeigt, es ist der einzige, welcher zu einer befriedigenden Lösung führen kann, indem er eine Formel ableitete, welche gestattet, die Undulationen des Geoids gegen das zugehörige Niveausphäroid direkt aus den Ab-

1) A. a. O. p. 7—14.

2) On Variation of gravity. Art. 31.

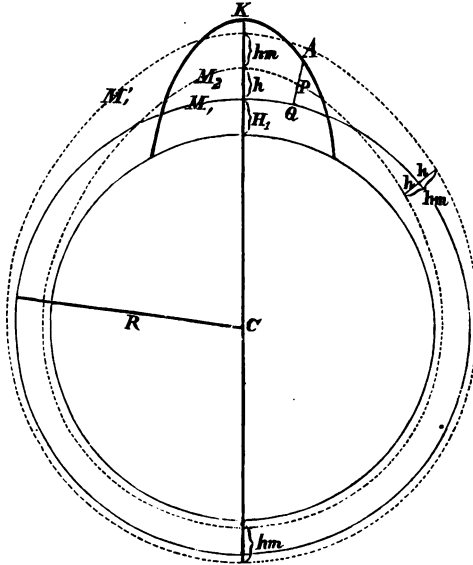
abweichungen der gemessenen Schwerkraft von der aus einer für Niveausphäroid gültigen Interpolationsformel berechneten Schwere bestimmen. Die Formel, welche von Helmert¹⁾ eine ausführlicher strengere Ableitung erfahren, lautet:

$$N = R \int_0^{\pi} \frac{\Delta g_{\psi}}{G} F d\psi$$

Die Formel ergibt den Abstand N des Geoids vom Sphäroid, wenn ψ wäre eine der Poldistanz entsprechende Gröfse, wenn man den Ort für welchen N gilt, als Pol betrachtet, Δg_{ψ} die mittlere Schwereabweichung für alle Orte mit gleicher Poldistanz, F eine bestimmte, von ψ abhängige Gröfse. Die Integration erstreckt sich über die ganze Erde wie aus den Grenzen hervorgeht, es ist daher streng genommen kein Kenntnis der Schwereabweichungen Δg über die ganze Erde erforderlich, weil es ein bestimmtes Gesetz der Variation nicht giebt. Man erhält aus einer Tabelle, welche Helmert²⁾ für F berechnet hat, die nahe gelegenen Orte bis etwa $\psi = 30^{\circ}$ am meisten bestimmten Wert von N eintreten werden; Helmert hält es daher nicht ausgeschlossen, dafs die Formel in nicht zu ferner Zeit auch praktische Anwendung finden wird in gewissen günstig gelegenen Orten allein, bei welchen es möglich ist in der Nähe eine hinreichende Anzahl von Werten der Schwerkraft zu erlangen.

Auf diesem Wege, für dessen praktische Verwertung die genügende Zahl von Schweremessungen noch nicht vorhanden ist, sind die Zahlen, welche als Beträge der Geoiddeformationen weite Verbreitung gefunden, keineswegs ermittelt. Dieser Weg erfordert lediglich eine Ausbreitung der Messung, weiter keine Theorie; die Methoden, welche die Zahlen ergaben, erfordern alle Voraussetzungen über die Lage und Gröfse der störenden Massen, sie sind somit auf Hypothesen gegründet, die die Unterlage fehlt. Es tritt hier das Eingangs erwähnte fehlerhafte Verfahren ein; in gleicher Weise, wie die Änderungen der Geoiddeformationen die ihren Grund in sichtbaren Massenänderungen haben, will man gegenwärtigen Deformationen ermitteln, die durch die gesamte un-

es, Fischer, Listing, Hann, Bruns, Helmert und anderen leicht. Die r möge die Darstellung veranschaulichen.



Figur 1.

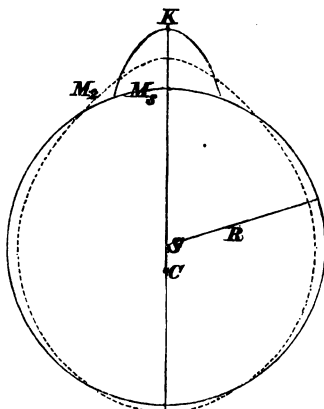
Zu der gleichmäÙig mit Wasser bedeckten Erdkugel mit dem Centrum C und dem Radius R trete der Kontinent K. Sein Sockel, h der mittleren Meerestiefe, habe die Höhe H_1 , seine mittlere Erhebung über das Meeressniveau sei H_2 . Dafs eine mechanische Verdrängung von Wasser statt hat, ist ja gleichgültig, das ungestörte Meeressniveau bleibe M_1 und der Radius R. — Infolge der Massenwirkung des Kontinentes wird eine Störung von M_1 eintreten, weil die Meeressfläche eine Gleichgewichtsfläche d. h. eine Fläche konstanten Potentials sein mufs. Nun wird, weil einfach die Masse K zu den bisherigen hinzutritt, die GröÙe des Potentials aber der Masse proportional ist, der Wert des Potentials überall auf M_1 steigen. Der Wert des Potentials nimmt mit der Entfernung vom Schwerpunkt ab, um also in einer Gleichgewichtsfläche zu gelangen, auf welcher dasselbe Potential W herrscht wie vorher auf M_1 , mufs sich die Meeressfläche in der Richtung der Normalen erheben. Natürlich in weiter Entfernung von K weniger als in geringer, weil der Potentialzuwachs auch mit der Entfernung von K abnimmt. M_1' stelle die Fläche $W = \text{konst.}$ dar. Ihre Erhebung über M_1 ist am gröÙten in der Mitte von K und nimmt von dort stetig nach beiden Seiten ab. Dafs die Meeressfläche nicht die Lage M_1' annehmen wird, ist klar, weil einer Erhebung des Wasserspiegels an einem Ort eine Senkung an einem anderen folgen mufs. Ein Wasserspiegel in einem konstanten

Gefäß kann sich nicht allgemein heben, weil keine Hohlräume bestel bleiben. Also jeder Erhebung wird eine Senkung entsprechen, die Sum aller Hebungen und Senkungen muß 0 sein — ich werde daher die L der wirklichen Meeresfläche erhalten, wenn ich von allen vorher berechneten Erhebungen h_1 den Mittelwert h_m abziehe, dann stellen sich h_1 , die kleiner als h_m waren, als Senkungen dar, die Summe wird

So nimmt der Meeresspiegel die Lage M_2 an, am meisten gehoben im Centrum von K , am meisten gesenkt diesem Centrum gegenüber das auf ihm herrschende Potential wird nicht mehr W sein, sondern größer als W , weil es eine innerhalb M_1' gelegene Parallelfäche M_1' ist. Ganz streng ist diese Konstruktion des Meeresspiegels nicht richtig, weil die Niveauflächen nicht parallel sind, doch sie ist zulässig wegen der Kleinheit von h_m .

Im Falle der Erde kommt es nun nicht darauf an, die Erhebungen und Senkungen h über und unter M_1 zu erkennen; denn M_1 würde nicht mehr der mittlere Meeresspiegel sein, wenn die Anziehung hörte. Durch den Zutritt von K wird nämlich auch der Erdschwerpunkt verschoben von C nach S . Beim Nachlassen der Attraktion würden Wasser sich um S gruppieren in einer Kugel mit dem Centrum S und dem Radius R . Ich erhalte also den Wert der wirklichen Geoiddeformationen, wenn ich die Lage von M_2 gegen M_s bestimme. Das geschieht indem ich von den h allerorts die Verschiebung des Wasserstandes den betreffenden Orten infolge der Schwerpunktsverlegung subtrahiere.

So resultieren die wahren Geoiddeformationen h' , sie zeigen, Fig. 2 lehrt, Erhebung im Centrum von K und bei den Antipoden Senkung dazwischen.



Figur 2.

Will ich jedoch im gegebenen Falle, wie bei den späteren Ausrichtungen, die Abweichungen des Wasserstandes von der Gleichgewichtsfäche, wie sie vor dem Zutritt von K war, erkennen, dann sind die zu bestimmen.

Um nun die h zu berechnen (oder die h'), muß ich die wirkenden Massen kennen, denn die Erhebungen über das frühere Niveau werden mit der Vergrößerung des Erdpotentials zusammenhängen, weil sie den Abstand zweier Flächen konstanten Potentials bezeichnen, und das Potential ist proportional der Masse. — Sei θ die Dichtigkeit des homogenen Kontinentes, dann wird der über den Meeresspiegel hervorragende Teil von K mit der Dichtigkeit θ wirken, der Sockel von der Höhe H_1 mit der Dichtigkeit $(\theta - 1)$, weil an derselben Stelle vorher eine Wasserschicht von der Dichtigkeit 1 und dem gleichen Volumen wirkte. v sei das Potential von K . Um nun die Erhebung h_1 über M_1 zu erhalten, geht Stokes²⁾ von der Definition des Potentials als Form der Energie, Arbeitsfähigkeit, aus. Die Hebung des Wasserspiegels, also eine Arbeit, würde solange erfolgen, bis die Arbeitsfähigkeit, welche in K liegt, erschöpft ist, folglich würde h_1 proportional dieser Arbeitsfähigkeit, d. h. proportional dem Potential v der hinzugetretenen Masse sein und umgekehrt proportional der Schwerkraft, weil diese der arbeitenden Kraft entgegenwirkt.

$$h_1 = h_m + h = \frac{v}{g}$$

Zu demselben Resultate gelangte auf mathematischem Wege Dahlander³⁾, der mit Hülfe dieser Formel den Einfluß von homogenen Massen, deren Potentiale man berechnen kann, auf das Meeresniveau bestimmt.

Auch Pratt³⁾ benutzte 1859 die gleiche Formel, die er mathematisch ableitet aus der Gleichgewichtsbedingung der Niveauflächen, zur Bestimmung des Betrages, um welchen der Wasserspiegel an der ostindischen Westküste infolge der Massenwirkung des Himalaya und des indischen Oceans, der einen Massendefekt darstellt, ansteigen wird. Pratt berechnet zwischen Kap Comorin und Karachi ein Ansteigen des Wasserspiegels um 514,57 engl. Fufs. Das Bedenkliche dieses letzten Versuches leuchtet sofort ein. Hatten Stokes und Dahlander theoretisch den Einfluß bekannter Massen geschätzt, so rechnet Pratt zuerst in der Natur und geht dabei von der völlig grundlosen Hypothese der Homogenität des Himalayagebirges aus, wo wir von der Anordnung der Dichtigkeit in diesem Massiv nicht das geringste wissen. Doch hat Pratt selbst später diesen Rechnungen nur theoretischen Wert beigelegt, da er infolge der Nichtübereinstimmung der berechneten und gemessenen Lotablenkungen selbst verschiedene Annahmen über Kompensation der sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten durch unsichtbare macht. — Zu der obigen Formel gelangte endlich auch Bruns⁴⁾ bei Behandlung des Pro-

1) On the Variation etc. Art. 20.

2) Poggend. Ann. vol. 117. 1862.

3) Phil. Trans. 1859.

4) Figur der Erde, p. 20.

blems den Abstand von Geoid und Sphäroid zu ermitteln. v ist in an dem betreffenden Orte die Potentialdifferenz zwischen Geoid und Sphäroid, mithin das Potential der unregelmäßigen Massenverteilung der Nenner g tritt bei Bruns noch in den cosinus der Lotablenkung multipliziert auf, eine Größe, die wegen der Kleinheit der Lotablenkung nahezu 1 ist, so daß dieselbe Formel resultiert wie bei Stokes. Die höhere Entwicklung des Theorems, die Bruns giebt, ist dann durch Helmert¹⁾ noch etwas vereinfacht.

Die Formel $h_1 = \frac{v}{g}$ findet endlich auch ihre Anwendung beim geometrischen Nivellement, wo es sich darum handelt die Niveau-differenz zweier Orte zu ermitteln. Sie folgt aus der Gleichung $\frac{dW}{dh} = g$ also $h = \int \frac{dW}{g}$, oder wenn ich g als Mittelwert vor das Integral schreibe $h = \frac{1}{g_m} \int_{W_2}^{W_1} dW = \frac{W_1 - W_2}{g_m} = \frac{v}{g_m}$.

Brunns wendet die Formel auf Amerika an, dem er die Gestalt eines Kugelzweiecks beilegt, und berechnet die Deformationen des Meeresspiegels auch unter der Annahme der Homogenität. Doch scheint es nur eine theoretische Schätzung sein.

So kann man also im theoretischen Falle, wenn das Potential der hinzutretenden Masse bekannt ist, die Deformation h_1 des Meeresspiegels berechnen. Zur Bestimmung von h_m giebt es auch Methode also kann man auch h finden. Daß eine Anwendung auf natürliche Verhältnisse nicht möglich ist, wurde bei Gelegenheit Pratt's erwähnt wir haben keinen Anhalt, um das Potential der unregelmäßigen Massenverteilung auf der Erde zu schätzen. Wenn Helmert die Formel benutzt, um das Zusammenwirken der fünf Kontinente zu schätzen, so ist er sich dessen voll und bewusst, daß es nur ein theoretisch interessanter Versuch ist. Man möge also nicht in Helmert's Karte eine Übersicht über die wirklichen Geoiddeformationen erwarten, das lag nicht in der Plane des Autors.

Diese Deformationen des Geoids haben nun indirekt auch Störungen der Schwerkraft im Gefolge, indem das Meeresniveau dem Erdschwerpunkt näher oder ferner gerückt wird. Dazu tritt der direkte Einfluß welcher von der Massenwirkung als solcher stammt. Diese Einflüsse wurden auch zuerst von Stokes²⁾ gegeneinander abgewogen und es ist ein rein theoretisches Beispiel gegeben.

Ob man sagt, der Ocean ist ein Massendefekt, es fehlt dort die Dichtigkeit $\theta - 1$ oder der Kontinentalsockel wirkt mit der Dichtigkeit $\theta - 1$ zuviel, weil dort Wasser mit der Dichtigkeit 1 wirken sollte

¹⁾ Vol. II, p. 147 f.

²⁾ On the Variation. Art. 20.

v ist
geoid
verteilt
blen
Lotat
i St
nn d

ng
Niv
leich
vor

Ges
en
ch

tal
leer
hoch
trü
väh
assa
di
so
an
se

kommt ganz auf dasselbe hinaus, wenn es sich darum handelt die oceanische und die kontinentale Schwerkraft zu vergleichen. Ob ich von c a abziehe, oder zu b a hinzuzähle ist gleich, $c - a$ und b unterscheiden sich um dieselbe Gröfse, wie c und $b + a$. Es ist einfacher die Wirkung auf den Kontinent zu übertragen, weil man hier schon den über das Meeresniveau ragenden Teil zu berücksichtigen hat; es vereinfacht die Rechnung.

In welcher Weise wird nun die Schwerkraft beeinflusst sein? Die in A (cf. Fig. 1) gemessene Schwere bedarf zunächst einer Reduktion auf M_2 wegen der Höhe des Beobachtungsortes; davon können wir hier absehen. Weil ferner der Kontinent über den Meeresspiegel hervorragt, wäre im praktischen Falle die Kondensationsreduktion anzuwenden, hier hat es keinen Einfluss, denn der Kontinent wirkt auf A ebensoviel wie auf P, wenn er innerhalb M_2 kondensiert gedacht wird; man kann wegen der weiten Ausdehnung der Platten diese Wirkungen gleich setzen¹⁾. Die Gesamtmassenwirkung des Kontinentes auf die Gröfse der Schwerkraft findet nun, wie man es z. B. bei Helmert (vol. II, pag. 144—147) entwickelt findet, ihren Ausdruck durch die Formel

$$\Delta_1 g = \frac{v}{2R} + 2\pi \kappa^2 \vartheta$$
, worin ϑ die unmittelbar um und unter der Station gelegenen Masse ist. Wir hätten, wenn wir, was wegen der Ausdehnung der Platten wieder zulässig ist, die gesamte störende Kontinentalmasse auf M_2 kondensiert denken, $\vartheta = H_1(\Theta - 1) + H_2\Theta$. — Für einen Punkt von M_2 aufserhalb K, also auf dem Meere, wird nun offenbar $\vartheta = 0$, denn dort ist unmittelbar um und unter der Station keine störende Masse. Auf dem Meere ergibt sich daher als Störung durch K einfach

$$\Delta_1 g = \frac{v}{2R}$$

Nun war oben entwickelt $h_1 = \frac{v}{g}$, mithin $v = gh_1 = g(h_m + h)$.

Also folgt, wenn g_{M_1} die normale Schwerkraft ist, die in M_1 wirkte, zunächst

$$g_{M_2} = g_{M_1} + \frac{v}{2R} + 2\pi \kappa^2 \vartheta$$

$$g_{M_2} = g_{M_1} \left(1 + \frac{h_m + h}{2R} + \frac{3}{2} \frac{\vartheta}{\Theta_m R} \right)$$

indem ich bedenke, das nach dem Newtonschen Gesetz $g_{M_1} = \frac{4}{3} R \pi \kappa^2 \Theta_m$

also $2\pi \kappa^2 \vartheta = \frac{3}{2} \frac{\vartheta}{\Theta_m R} g_{M_1}$ ist. Nun erleidet indirekt die Schwerkraft wegen der Erhebung von P über Q um h eine Verminderung um $\frac{2h}{R} g_{M_1}$, wie sich leicht beweisen lässt; dieses subtrahiert, erhalte ich daher als Schwerkraft in P:

1) Den Beweis hierfür siehe Helmert vol. II, p. 141 f.

1)
$$g_{M_2} = g_{M_1} \left(1 + \frac{h_m}{2R} - \frac{3h_1}{2R} + \frac{3}{2} \frac{\vartheta}{\Theta_m R} \right)$$

Über dem Meere dagegen wird:

$$g_{M_2} = g_{M_1} \left(1 + \frac{h_m + h}{2R} \right)$$

und mit der Korrektion wegen der Deformation:

$$g_{M_2} = g_{M_1} \left(1 + \frac{h_m}{2R} - \frac{3}{2} \frac{h}{R} \right).$$

Stellt h eine Senkung des Meeresniveaus dar, wie es auf offenem C ja der Fall ist, wird das letzte Glied positiv, weil dann h negativ bei einer Hebung bleibt das Glied negativ. Wir können daher g über der Schwerkraft auf dem Lande (Index 1) für das Meer anse

2)
$$g_{M_2} = g_{M_1} \left(1 + \frac{h_m}{2R} + \frac{3}{2} \frac{h_0}{R} \right)$$

wenn wir unter h_0 eine oceanische Depression des Meeressp unter das ungestörte Niveau verstehen. Offenbar unterscheiden die beiden Werte für Festland und Meer durch die Gröfse

$$D = -h_1 + \frac{\vartheta}{\Theta_m} - h_0$$

wenn ich die konstanten Glieder g_{M_1} und $\frac{3}{2R}$ fortlasse; ist I wird die Schwerkraft auf dem Lande gröfser sein als auf dem N ich erhalte somit als Bedingung hierfür, wenn ich für ϑ den gegebenen Wert einsetze:

$$-h_1 - h_0 + \frac{\Theta - 1}{\Theta_m} \cdot H_1 + \frac{\Theta}{\Theta_m} \cdot H_2 > 0$$

oder für $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m = 2,8$

$$0,32 H_1 + 0,5 H_2 > h_1 + h_0,$$

worin $h_1 + h_0$ die Amplitude der Deformationen darstellt, weil i als absoluten Wert der Senkung eingeführt habe. — Allgemein sich diese Ungleichung für die ganze Erde nicht beweisen, we Wirkung von fünf Kontinenten zu kombinieren ist, deren gegense Abstand zu berücksichtigen wäre. Wohl aber folgt ihre Richtigk alle fünf Kontinente einzeln aus der Tabelle der h' Deformati die Helmert (vol. II, p. 353) giebt. Aus dieser kann man leicht Maximalwert von $h_1 + h_0$ ableiten, indem man zu der Differenz der h' für $\gamma = 0$ und $\gamma = 180^\circ$ die durch den betreffenden Kontinen ursachte doppelte maximale Schwerpunktsverschiebung addiert. erhält man folgende Maximalwerte der Amplituden $h_1 + h_0$:

	Max. Schwerp.-Verschieb	
Eurasien	1143 m	420
Africa	893 „	245
Nordamerika	817 „	202
Südamerika	723 „	155
Australien	542 „	83,5

er Tabelle Helmerts liegen für H_1 resp. H_2 die Werte 3438 m und 10 m zu Grunde, es ist also

$$0,32 H_1 + 0,5 H_2 = 1320 \text{ m}$$

ne Gröfse, die von keiner der obigen erreicht wird. — Dafs auch im Zusammenwirken der fünf Kontinente dieser Wert nicht erreicht wird, kann man daher vermuten, dafs stets durch die Wirkung des zweiten Kontinentes das h_1 des ersten vermindert wird, denn auch das h_0 eine Vergrößerung erfährt. Dieses wirkt sich entgegen, und da die Maximalgrößen noch weit von 1320 m entfernt sind, dürfte dieser Wert nirgends erreicht werden. Ein Zweifel könnte bei Eurasien entstehen, weil die Maximalamplitude hier um noch nicht 200 m geringer ist, als 1320 m. Doch ich habe mich durch Rechnung überzeugt, dafs infolge des Zusammenwirkens der übrigen vier Kontinente diese Amplitude nur um 120 m vergrößert wird, sie erreicht also auch noch nicht den Betrag von 1320 m. — So dürfen wir wohl allgemein annehmen, dafs in dem schematischen Falle der Homogenität die Schwerkraft auf den Kontinenten trotz der Erhebung des Meeresspiegels größer sein muß als auf den Meeren. Das gleiche Resultat folgt bei Helmert (vol. II, p. 363) bei Betrachtung der Schwereänderungen im 90° östl. und westl. Länge von Ferro.

Stokes¹⁾ war zu dem Resultate gelangt, dafs die Schwerkraft auf Inseln größer sein muß als auf den Kontinenten. Der Grund dieser Verschiedenheit liegt darin, dafs Stokes bei Betrachtung der Massenwirkung als solcher auf die Gröfse der Schwerkraft das Glied $2\pi x^2 \theta$ einfließen läßt. Zu diesem Verfahren ist Stokes berechtigt, wenn er sich die gemessene Schwerkraft — und die ganze Betrachtung ist ja nur anstellt, um mit den Messungen verglichen zu werden — konsequent nach der Formel von Bouguer reduziert denkt.

In dieser Formel ist nämlich aufer der Höhenlage der Station auch noch das umgebende Terrain berücksichtigt, dessen Wirkung von der Messung abgezogen wird. Das Glied, durch welches man den Einfluß des Terrains in Abzug bringt, stimmt fast vollkommen mit dem Gliede $2\pi x^2 \theta$ überein, es ist ihm nahezu gleich. Ziehe ich daher durch Bouguer's Formel bei der Messung die Wirkung des nahen Terrains ab, muß ich bei der theoretischen Betrachtung das Glied $2\pi x^2 \theta$ fortlassen. Dann wird in der That für Inseln eine größere Schwerkraft resultieren müssen, als für das Land, weil bei Inseln das Glied $\frac{3}{2} \frac{h_0}{R}$ addiert, beim Lande das Glied $\frac{3}{2} \frac{h_1}{R}$ subtrahiert wird, ohne dafs diese Subtraktion ersetzt wird durch ein Glied, wie es vorher $\frac{3\theta}{2\theta_m R}$ war. Es muß jedoch aus-

1) On the Variation etc. Art. 20.

drücklich bemerkt werden, daß auf diese Weise nicht ein Vergleich zwischen kontinentaler und oceanischer Schwere direkt zustande kommt, sondern nur zwischen kontinentaler und insularer Schwerkraft. wollte man in demselben Sinne wie in der Theorie, d. h. das Verhältnis der kontinentalen Schwere ohne das Glied $2\pi k^2 \vartheta$ zur oceanischen erhalten, würde die Reduktion nach Bouguer's Formel nicht gerät, weil dadurch ein Ausdruck subtrahiert wird, der dem Teile $2\pi k^2 \vartheta$ von $2\pi k^2 \vartheta$ entspräche. In $2\pi k^2 \vartheta$ ist jedoch auch noch der $2\pi k^2 (\Theta - 1) H_1$ enthalten, dem bei der praktischen Reduktion analoger Ausdruck entspricht. Stokes darf jedoch auch diesen bei seiner theoretischen Betrachtung fortlassen, wenn er sich in der Praxis die oceanische Schwere durch die insulare repräsentiert.

Er müßte, so ist der Sachverhalt, bei der Reduktion der kontinentalen Schweremessung ein dem Term $2\pi k^2 (\Theta - 1) H_1$ entsprechendes Glied auch subtrahieren zum Vergleich mit der Theorie, weil es in der Theorie fortgelassen wird. Doch er braucht es nicht, wenn er die oceanischen die insulare Schwere mit den kontinentalen vergleicht, weil dann auch bei der gemessenen oceanischen ein dem $2\pi k^2 (\Theta - 1) H_1$ entsprechenden Glied in der Anziehung der Insel hinzutritt. Statt der Größen a und b , die in der Theorie verglichen werden, hat man in der Praxis die Größen $a+c$ und $b+c$, c kein Unterschied. — So durfte also Stokes aussprechen, daß die kontinentale Schwerkraft kleiner sein muß als die insulare wegen der Abweichungen des Geoids, nicht als die oceanische, das wäre falsch.

Zu dem gleichen Resultate gelangte Ph. Fischer¹⁾ durch eine Berechnung, die auch nur Sinn hat, wenn er kontinentale und insulare Schwere vergleicht. Fischer versucht zuerst die Theorie bis zum praktischen Vergleich mit der Praxis durchzuführen, indem er durch Multiplikation der geschätzten Lotablenkung mit einem konstanten Faktor die Amplitude der Geoiddeformationen (Höhe seiner Kontinentaldeformation) bestimmt und die Schwerestörung, die dadurch verursacht werden kann, mit den praktisch ermittelten Schwerestörungen vergleicht²⁾. Er gelangt zu dem Resultate, daß die theoretisch ermittelte Amplitude zu gering als zu groß ist und hält daher die zuerst von Airy behauptete gehobene Schwerezunahme vom Festland zum Meere für hinreichend durch Geoiddeformationen erklärt.

Dieses Ergebnis Fischer's ist in weite Kreise gedrungen, wiewohl eine nahe Übereinstimmung der durch zwei verschiedene Methoden er-

1) Ph. Fischer, Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt p. 283 f.

2) Untersuchungen etc. p. 262—273 findet sich dieser Faktor abgeleitet.

3) p. 284—292.

Resultate notwendig Vertrauen erwecken mußte; seine Untersuchungen wurden dadurch nur zu geeignet, rein theoretischen Ermittlungen auch Anwendung auf natürliche Verhältnisse zu verschaffen.

So schlossen sich hieran und an die theoretischen Darlegungen von Stokes die Versuche von Listing¹⁾ und Hann²⁾ direkt aus Schwermessungen mit Hilfe der Bouguerschen Formel die Geoiddeformationen zu ermitteln. Beide Autoren wandten diese Formel, die dazu dient, den Einfluß Δg einer bekannten Höhe und der unterlagernden Massenschicht bis zum Meeresniveau auf die Größe der Schwerkraft behufs Elimination zu ermitteln, umgekehrt an, um aus Δg die Höhe zu erkennen. Δg ist dann die Differenz zwischen der gemessenen (natürlich auf das Geoid M_2 reduzierten) und der aus einer für das Sphäroid gültigen Interpolationsformel berechneten Schwere. Dafs dieser Weg jedoch nicht zur Ermittlung der wahren Geoiddeformationen führen kann, erhellt daher, dafs durch die Formel die gesamte schwerestörende Masse als homogene Schicht zwischen M_1 und M_2 betrachtet wird; es findet also z. B. auch die unregelmäßige Verteilung der störenden Massen keine Berücksichtigung.

Ph. Fischer ist auch eher zu weit, als zu wenig weit gegangen. Weil er nicht auf der allgemeinen Grundlage der Potentialtheorie steht, konnte er nicht einigermaßen annehmbare allgemeine Resultate erzielen. Er mußte sich bei der Rechnung auf gewisse Fälle beschränken, die den Wert von Beispielen haben, aber nicht einer weiteren Anwendung fähig sind. So dürfte die Übereinstimmung der beiden Methoden auch nur zufällig sein. Die kontinentalen Lotablenkungen werden geschätzt und ihre Größen zwischen weiten Grenzen schwankend befunden. Dann wird eine Menge von Gründen angeführt, welche die wahre Lotablenkung dem Maximalwert nähern müssen und schliesslich eine Zahl genannt (80—90"), die so gut richtig wie falsch sein kann, die aber jedenfalls der mathematischen Begründung entbehrt³⁾. Mit dieser Zahl wird die Amplitude der kontinentalen Geoiddeformationen ermittelt und diese zum Vergleich mit dem aus Schwerestörungen gewonnenen Resultate benutzt, das seinerseits auch auf weiten Voraussetzungen beruht.

Die Methode konnte keine allgemein gültigen Resultate fördern, weil es unmöglich war, den vielen Faktoren einigermaßen Rechnung zu tragen; unglücklicherweise fand sich nun beim Vergleich die Übereinstimmung, welche die Richtigkeit der Theorie von den großen Beträgen der Geoiddeformationen als gesichert erscheinen liefs und zu den Lösungsversuchen von Listing und Hann Veranlassung gab.

1) Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1877. p. 749.

2) Mitth. d. K. K. Geogr. Ges. Wien 1875. „Über gewisse beträchtliche Unregelmäßigkeiten im Meeresniveau.“

3) A. a. O. p. 274.

So gewiß also die nach Bouguer's Formel reduzierte kontinentale Schwerkraft bei Elevationen des Geoids kleiner sein muß als die insulare, wenn man mit Fischer die Anziehung der nahen Massen der Inselpfeilern wegen größerer Dichtigkeit des Gesteins und die der Kontinentalsockeln gleichsetzt, so unmöglich ist es doch zur Kenntniss der Deformationen mit den Näherungsmethoden zu kommen. Hand und Listing's Methode zwängen die unregelmäßige Massenverteilung in eine homogene Schicht, Fischer's Versuch mußte an der Menge und Weite der notwendigsten Voraussetzungen scheitern.

Es ist nun das große Verdienst Helmert's¹⁾, den Vergleich zwischen Theorie und Praxis auf der allgemeinen Grundlage der Potentialtheorie durchgeführt und dabei gezeigt zu haben, daß die von Fischer gemachte Übereinstimmung nicht besteht. Da Helmert die Reduktion der kontinentalen Schweremessungen tatsächlich ohne das Terrain der Bouguerschen Formel vornimmt, muß er in der Theorie das Glied $2\pi \kappa^2 \sigma$ beibehalten; eine aus dem voranstehenden wohl verständliche Folge ist dann, daß er in der Theorie direkt einen Vergleich zwischen kontinentaler und oceanischer Schwere erhält, während er in der Praxis die Anziehung der Inselpfeiler in Abzug bringen muß, um den analogen Vergleich zu erhalten. Doch das ist nur ein Unterschied in der Methode, der mutatis mutandis auch zu den Resultaten Fischer's führen könnte; nur muß die kontinentale Schwere größer als die oceanische sein. Die Theorie (Index t) ergibt aus dem Verhalten der Schwerestörungen im 90.° östl. und westl. Länge von Ferro:

$$F_t = M_t + 170.$$

Wenn F die Länge des Sekundenpendels auf dem Festland, M die Länge auf dem Meere bezeichnet und 170 die Differenz zwischen beiden angeben in Mikrons d. h. in Milliontel in der Länge des Sekundenpendels. Die Theorie der Schweremessungen (Index m) leitet Helmert andererseits ab:

$$F_m = J_m - 230.$$

oder, da er mit Faye²⁾ die Anziehung der Inselpfeiler im Mittel mit 250 Mikrons ansetzt, also $M = J - 250$ wäre

$$F_m = M_m + 20.$$

Die Theorie ergibt also einen weit größeren Überschuss der kontinentalen Schwere über die oceanische, als die direkte Messung.

Aus der Nichtübereinstimmung beider Resultate folgert dann Helmert, daß die vorausgesetzte Homogenität der Kontinente tatsächlich nicht anzunehmen ist, daß eine Kompensation der scheinbaren ungleichen Massenverteilung durch unsichtbare statthaben muß. Es wäre falsch, die von Helmert gegebenen Zahlen dazu benutzen zu wollen, um :

1) A. a. O. vol. II, cap. IV.

2) Comptes rendus 1880, Bd. 90, p. 1444.

eine Vorstellung über die Gröfse und Art der Kompensation zu machen, dazu sind sie nicht geeignet, weil ihre Beträge unsicher sind.

So führte ich die Berechnung der Schwerestörungen in derselben Weise, wie es Helmert für den 90° östl. und westl. Länge von Ferro gethan, für den 130° östl. und 50° westl. Länge durch und erhielt anstatt der Zahl 170 die Zahl 250, die eine weit gröfsere Kompensation verlangt. Andererseits ist auch die zweite Gleichung $F_m = M_m + 20$ einiger Variationen fähig, die sich bei genauerer Berücksichtigung der Böschungsverhältnisse bei Inseln und Küsten ergeben würden. Die Küstenstationen namentlich können bei der Behandlung in der Theorie leicht zu grofse Werte der Schwerestörung erhalten, wodurch der Wert der kontinentalen Schwere gegen den der oceanischen gesteigert wird. In der Theorie stehen sie nämlich den Festlandstationen vollständig gleich, in der Praxis wegen ihrer meist geringen Höhe (unter der Mittelhöhe des Kontinentes), wodurch die Anziehung einer bestimmten Festlandschicht in Fortfall kommt, sowie wegen der Kondensation der Küstenböschung nicht. Beide Punkte verringern den Betrag der Schwerestörung in Küstenstationen und verkleinern daher auch, weil die Küstenstationen mit den Festlandstationen kombiniert werden, den Betrag der kontinentalen Schwere, so dafs diese verhältnismäfsig kleiner ausfällt, als in der Theorie. Auch die Festlandstationen selbst werden bisweilen bei der Messung kleinere Werte erhalten, als bei der theoretischen Rechnung, unter sonst gleichen Voraussetzungen, weil unter Umständen, wenn nahe Gebirge vorhanden sind, eine normal nach aufsen gerichtete Komponente den Wert der Schwerkraft verkleinert. So würde z. B. die in Kaliana gemessene Schwere um 17 Mikrons wachsen, wenn das Himalayamassiv keine nach Aufsen gerichtete Komponente der Schwerkraft hätte.

Ich erwähne diese Punkte nur, ohne eine numerische Auswertung zu bieten, das dürfte nach dem heutigen Stand der Beobachtungsgrundlagen noch nicht möglich sein, denn die akurateste Berücksichtigung der Gestalt und Gröfse z. B. der Galapagos und die darauf gegründete Rechnung wurde gegenstandslos durch die einfache Angabe Hall's¹⁾, dafs das Gestein der Inseln von vielfachen Hohlräumen durchsetzt ist. Die Erwähnung obiger Punkte sollte nur zeigen, dafs die Zahlen Helmert's sich leicht und vielleicht nicht unwesentlich ändern können, und dafs man sich daraus über den Betrag der Kompensation keine Vorstellung bilden darf.

Zu absoluten Werten haben also die Rechnungen Helmert's nicht geführt, und sollten es auch nicht thun, ihre grofse Errungenschaft ist es aber unstreitig, dafs die Bearbeitung des Geoidproblems in richtige Bahnen gelenkt wurde. Hatte Fischer zufällig eine Übereinstimmung

1) Phil. Trans. 1823, p. 211—288.

zwischen Theorie und Praxis erzielt und hatten sich daran die Versuche von Listing und Hann angeschlossen, welche, wie bei bekannten Unregelmäßigkeiten der Massenverteilung, die Geoiddeformationen bestimmen wollten, so erreicht Helmert beim Vergleich der Theorie mit der Praxis nach genaueren Methoden keine absolute Übereinstimmung. Der Betrag der Differenz muß ebenfalls ein zufälliger genannt werden; doch die Überzeugung drängt sich bei der Betrachtung der Helmerischen Untersuchungen, sowie bei jedem Versuch, die absoluten Zahlen korrigieren zu wollen, unerschütterlich auf, daß es fruchtlos ist auf synthetischem Wege weiter zu dringen, weil es an den notwendigsten Grundlagen fehlt. Es giebt nur einen Weg, diese Grundlagen zu schaffen: Ausbreitung der Schwermessungen, besonders auch über die Meere. Nur hierdurch können wir zur Kenntnis der Unregelmäßigkeiten in der Konstitution der Erdrinde kommen, wie denn auch der Anfang schon mit Erfolg gemacht ist, nur hierdurch grundlose Hypothesen durch Thatsachen ersetzen, nur auf diesem Wege die Erdgestalt oder das Geoid bestimmen.

Zum Schluß dieser einleitenden Betrachtungen möchte ich noch mit wenigen Worten die Versuche erwähnen, welche das Barometer zur Bestimmung des Geoids benutzen wollen. Schon Rozet¹⁾ weist darauf hin, doch er irrt, wenn er Schouw²⁾ für diese Idee verantwortlich macht. In der Arbeit von Schouw, welche Rozet citiert, findet sich nichts der Art, vielmehr bemerkt Schouw ausdrücklich auf Grund einer vergleichenden Betrachtung der Mittelbarometerstände an verschiedenen Orten, daß die Differenzen in der Wärmecirkulation ihren Grund haben dürften. Bei Rozet findet sich die Behauptung, daß das Barometer auf den Oceanen höher stehen müßte, weil bei oceanischen Depressionen des Meeresspiegels die Luftsäule höher wäre. In neuerer Zeit wurde die gleiche Behauptung von Pfaff wiederholt und zuletzt auf dem Dresdener Geographentage mit einem auffallenden Mangel an Einsicht in das Geoidproblem von Leipoldt³⁾ verteidigt. Seine Ausführungen fanden durch Neumayer⁴⁾ die gebührende Korrektur.

Im allgemeinen muß man sagen, daß die Atmosphäre die Deformationen mitmachen wird, weil die Niveauflächen sich nach aufserhalb fortsetzen und die Luft eine dauernde Verschiebung der Teilchen zuläßt. Doch die Deformationen werden gegen die des Meeresspiegels abgeschwächt erscheinen, wie sich stets die kompliziertesten Niveauflächen bei wachsender Entfernung von den wirkenden Massen einfachen Gestalten nähern, weil, je größer die Entfernung von den

1) Bull. Soc. geol. de France, t. 13. 1842. p. 176.

2) Ann. de phys. et chemie, ser. II, 1833. p. 113.

3) Verh. d. 6. Deutsch. Geogr.-Tages zu Dresden. Berlin 1886. p. 73 ff.

4) p. 93 ff.

Massen, destomehr die Bedingung eines Attraktionscentrums erfüllt ist. Da nun die Niveauflächen eines Centrums Kugeln, bei Rotation Rotationsellipsoide sind, werden sich in der That die Geoide mit wachsender Entfernung von der Erde der Gestalt von Rotationsellipsoiden ähneln. Durch Barometermessungen könnte man nun theoretisch ein Erkenntnis von der Gestalt der äußersten Niveauflächen in der Atmosphäre gewinnen, indem man sie gegen ein bestimmtes Ellipsoid, auf welches sich die Höhen der Beobachtungsstationen beziehen, festlegt, doch wäre dieses jedenfalls ein Umweg, da in jeder Beobachtungsstation auch die Schwere bekannt sein muß — Schweremessungen sind so auch hier unerläßlich —, außerdem ist es fraglich, wie weit sich die Differenzen der Barometerstände, welche der Wärmecirkulation ihren Ursprung verdanken, eliminieren lassen. So ist dieser Weg, die Geoiddeformationen zu bestimmen, schwieriger und unsicherer, als der von Stokes, der sich direkt auf Schweremessungen gründet.

b. Die Wirkung von Massenumlagerungen im allgemeinen.

In den einleitenden Betrachtungen über das Geoid wurde ausgeführt, wie gering heute noch unsere Kenntnis von den gegenwärtigen Deformationen der Erdgestalt ist und wie nur von einer weiteren Vereinerung der Schweremessungen ein Fortschritt erhofft werden darf. Die Zahlen, welche man für die Beträge der Deformationen zu haben glaubte, mußten als gegenstandslos zurückgewiesen werden, weil die Methoden, durch welche sie erlangt sind, die wahren Beträge nicht kennen lassen können. Diese Methoden verlangten eine genaue Kenntnis der Lage und Größe der wirkenden Massen, sowie eine Kenntnis der Dichtigkeit, und es ist klar, daß ohne Zwang die vielgestaltige unregelmäßige Massenverteilung auf der Erde in einfache Formen nicht gebracht werden kann. — Etwas anderes ist es, wenn es sich darum handelt, den Einfluß bekannter, sichtbarer Massen zu schätzen. Dann hat man ein bestimmtes Objekt mit fester Lage und Größe, von bekannter Dichtigkeit, somit alle Faktoren, welche erforderlich sind, um die Wirkung des Objekts zu erkennen. Es ist dieses die Frage nach den Schwankungen der Geoidgestalt. Waren die gegenwärtigen Deformationen durch die unregelmäßige Massenverteilung in ihrer Gesamtheit bedingt, so hängen die Schwankungen des Geoids wenigstens zum Teil mit bestimmten Änderungen in der Massenverteilung zusammen, die begrenzt und daher auswertbar sind.

Die ideale Aufgabe wäre es nun, bestimmte Änderungen der Massenverteilung in Rechnung zu ziehen und die Resultate mit Beobachtungen der Natur, mit Meeresschwankungen, zu vergleichen, denn die Schwankungen des Meeresspiegels zeigen uns die Deformationen des Geoids. Doch diese Aufgabe ist nur in wenigen Fällen lösbar, weil bei dem Problem der Meeresschwankungen zahlreiche Faktoren zu be-

rücksichtigen sind, welche sich unter zwei große Kategorien, Schwankungen der Lithosphäre und Schwankungen der Hydrosphäre, begreifen lassen.

Einfluss der Gebirgsbildung.

So stehen wir dem Einfluss der Gebirgsbildung auf die Gestalt des Geoids noch ratlos gegenüber. Man könnte hier eine dynamische und eine statische Wirkung trennen. Dynamisch, indem das entstehende Gebirge eine Änderung in der Gestalt und Größe der Meeresräume zur Folge hat und der Wasserspiegel passiv sich neuen Formen anzuschmiegen genötigt ist. Da infolge der Runzelungen der Erdkruste die Wassermengen ein immer zunehmendes Zusammendrängen auf kleineren Raum erfahren, wird ein Ansteigen des Wasserspiegels im allgemeinen durch die Gebirgsbildung verursacht werden, wie Penck¹⁾ richtig gegen die entgegengesetzte Ansicht Trautschold's²⁾ bemerkt. Im einzelnen hat jedoch nicht jede Runzelung eine Verkleinerung der Meeresräume zur Folge. Hängt die Gebirgsstauung z. B. mit einem lokalen Einbruch, wie dem Mittelmeere, zusammen, werden die Meeresräume vielmehr vergrößert und der Wasserspiegel wird durch Gebirgsbildung gesenkt.

Zu der dynamischen Wirkung tritt die statische, indem das neue Gebirgsmassiv die Lotrichtung und somit die Stellung des Wasserspiegels verändert. Hiervon wurde durch Beaumont und Rozet die weitgehendste Anwendung gemacht, Humboldt deutet diesen Punkt vorsichtig an, Penck³⁾ führt den Fall schematisch durch und hält dafür, dass die Küsten eines flachen Kontinentes überflutet werden müssten, wenn sich im Innern ein Gebirge erhebt. Daran, dass die Masse des Gebirges schon vor der Faltung an derselben Stelle wirkte, ist nicht gedacht, wie überhaupt eine Präzisierung der Wirkung nirgends versucht ist. Die Massen können allerdings nach der Faltung unter Umständen stärker attrahieren, weil sie auf engem Raum zusammengedrängt sind, doch gleichzeitig tritt der dynamische Teil in Kraft, der je nach der Art der gebirgsbildenden Ursache auch gegen den statischen wirken kann. Die Frage kompliziert sich also durch die Bewegungen der Erdrinde selbst, so dass ein absoluter Vergleich von Ursache und Wirkung unmöglich wird. Dazu sind wir bisher in den wenigsten Fällen imstande die heutige statische Wirkung eines Gebirgsmassivs zu berechnen, weil Spalten und Sprünge das Gebirge durchsetzen, deren Verlauf, Richtung, Größe und Zahl unserer Kenntni

1) A. Penck, Schwankungen des Meeresspiegels, p. 21. (Jahrb. der Geo. Ges. zu München, Bd. VII, 1882.)

2) Bull. de la Soc. imp. de nat. de Moscou, 1879.

3) Schwankungen d. Meeresspiegels p. 18.

entzogen ist. Beim Himalaya stellte sich die thatsächliche Wirkung kleiner heraus als Pratt's¹⁾ Rechnungen ergaben, und die von Helmert²⁾ mit Recht gefolgerte Kompensation deutet darauf hin, dafs dieser Fall nicht vereinzelt ist, wenn wir auch die Beträge nicht kennen. Es ist wohl ersichtlich, dafs die nähere Erforschung dieser statischen Wirkung der Gebirge mit dem Hauptprobleme zusammenfällt und weiterer Schweremessungen zu seiner Lösung bedarf.

Leichter einer wissenschaftlichen Behandlung zugänglich ist der Fall, wo wir es mit Massentransporten zu thun haben. Freilich kommt auch hier der Anfangszustand in Betracht bei Bestimmung der Änderungen des Geoids. Doch einmal wirken hier nicht die Massen vor und nach der Umgestaltung von derselben Stelle; sie werden weit transportiert, und da die Wirkung mit der Entfernung abnimmt, wird meistens die Wirkung des Massenverlustes am Ursprungsort klein sein gegen die Wirkung des Massenzuwachses am Ablagerungsort, resp. umgekehrt. Zweitens haben wir es hier nur mit der statischen Wirkung zu thun, weil die Erdräume fest an Gestalt und Gröfse bestehen bleiben. Dafür tritt freilich, wenn die Massen direkt ins Meer geführt werden, eine mechanische Verdrängung ein; ihr Betrag ist im gegebenen Falle zu schätzen, wird sich aber meist als so klein erweisen wegen des gewaltigen Areal der Meeresräume, über das sich die Wirkung verteilt, dafs man ihn einfach vernachlässigen darf.

Mit der Wirkung solcher Massenumlagerungen, wie sie in der Natur wirklich vorhanden sind, beschäftigen sich zwei Arbeiten, von Zöppritz³⁾ und Penck⁴⁾, jene geht von der Ursache aus und leitet streng mathematisch den Betrag der Wirkung ab, diese, von Penck, betrachtet die Wirkung und leitet die Ursache ab, dem Sinne nicht der Gröfse nach; die numerischen Werte müssen sich dem Gedanken fügen.

Flufs-Sedimente.

Die Arbeit von Zöppritz ist für die Frage nach dem Einflufs der Sedimentattraktion entscheidend. Denn aus dem Beispiele des Polar-meeres, in dem die Wirkung der hineingeführten Sedimente berechnet und der Betrag der Hebung des Wasserspiegels als ein Bruchteil der Mächtigkeit der abgelagerten Schicht gefunden wird, folgt evident, dafs die Anziehung der Sedimente wohl die Tiefe der Wasserbedeckung etwas vergrößern kann, dafs sie aber nicht dauernd eine Wasserbedeckung und damit die Grundbedingung des ferneren Wachstums zu schaffen und zu erhalten vermochte.

1) Phil. Trans. 1859. p. 85.

2) A. a. O. vol. II, p. 364 f.

3) K. Zöppritz, Schwankungen des Meeresspiegels infolge von geologischen Veränderungen. Wiedemanns Ann. Bd. XI. Leipzig 1880.

4) Schwankungen des Meeresspiegels.

In gleicher Weise entscheidend ist das Beispiel der Deltabildung von Zöppritz. Selbst bei großen Deltas ergab sich nur ein geringes Ansteigen des Wasserspiegels, so daß nur ganz flache Küstenstrecken überflutet werden könnten. Ich versuchte eine Anwendung der Theorie auf das Memeldelta zu machen. Als rechtwinkliges Dreieck gefaßt — der rechte Winkel liegt etwa bei Nemonien, die Hypothense zieht von Tilsit bis nördl. Windenburg — ergab sich in Windenburg eine Hebung des Wasserspiegels um $0,00036 D$, wenn D die Mächtigkeit des Deltas ist. Mit 100 m ist sie weit überschätzt und dann würde doch nur ein Ansteigen um 3 cm resultieren. Dieser Zahl steht eine tatsächliche Senkung des Bodens bis zu 3 m gegenüber, sie ist bewiesen durch einen alten Uferstrand, der an der östlichen Küste des Kurischen Haffs unter dem Wasserspiegel sich entlang zieht¹⁾. Die Theorie vermag also die Thatsachen hier nicht zu erklären.

Wenn ferner Penck (pag. 19) den allgemeinen Satz aufstellt, daß Landmassen, welche keinerlei Bewegung ihrer Massen besitzen, sondern nur den abtragenden Wirkungen der Erosion und Denudation ausgesetzt sind, Hebungerscheinungen zeigen werden, so ist das in seiner Allgemeinheit auch nicht richtig. Richtig würde es nur sein, wenn man sich alle Sedimente durch Meeresströmungen fortgeführt denkt, ein rein hypothetischer Fall. In der Natur wird das denudierte Material den Küsten näher geführt und auf der Küstenböschung abgelagert.

Der Verminderung der Attraktion infolge der Denudation der Kontinente (Senkung des Wasserspiegels) steht also eine Vermehrung infolge der Sedimentation auf der Küstenböschung entgegen (Hebung des Wasserspiegels), die beiden Faktoren wirken sich entgegen, die resultierende Bewegung ist ihre Differenz. Nun ist der Einfluß der Sedimentation nach dem Delta-Beispiel von Zöppritz klein, der Einfluß der Denudation ebenfalls wegen der größeren Entfernung des Ursprungsvom Wirkungsort, die Differenz beider also klein von der zweiten Ordnung. Man wird daher unbedingt Zöppritz beistimmen müssen, wenn er meint, daß die Wirkungen der Massentransporte durch fließendes Wasser in der Summe 0 sind, richtiger keinen nennbaren Betrag erreichen.

Vulkane.

Bei anderen Arten von Massenumlagerungen ist die Frage noch nicht in gleicher Weise entschieden. Die Vulkane können wir übergehen, der Herkunftsort der Laven und Schlacken entzieht sich bislang noch jeglicher Rechnung. Doch daß die bekannten Vorgänge am Serapis-Tempel — mag man die Amplitude der dortigen Schwankung jetzt

¹⁾ G. Behrend, Geologie des Kurischen Haffs u. seiner Umgebung (Schriften d. phys.-ök. Ges. Königsbergs i. Pr. Bd. IX, 1868. p. 131 ff.

auch noch so sehr einzuschränken bemüht sein — in keinem Falle, wie v. Bruchhausen¹⁾ meinte, durch die Anziehung der Laven und Schlacken des Vesuvs erklärt werden können, zeigt die Rechnung. Als Ablagerungsgebiet nahm ich die Gegend in einem Umkreis von 7 km Radius um den Vesuvkegel, als Dichtigkeit 3, als gleichmäßige Mächtigkeit D , dann resultiert am Serapis-Tempel ein Ansteigen des Wassers um $0,0005 D$, wobei der entgegenwirkende Einfluß des Herkunftsortes noch unberücksichtigt ist. Die Zahl zeigt zur Genüge, daß die geringste Schwankung des Meeresspiegels, die man zu konstatieren vermag, eine andere Ursache haben muß, als die Attraktion der Vesuvlaven.

Wirkung des Eises.

Die folgenden Untersuchungen sollen den Einfluß der Umlagerungen des Wassers selbst behandeln, welches in Form von Eis die Massen der Kontinente vermehrt. Der gleiche Stoff wird in den beiden Arbeiten Pencks²⁾ behandelt, deren Inhalt im weiteren Verlauf mehrfach erwähnt werden wird. Penck gelangt zu schönen Resultaten: die oscillierenden Strandverschiebungen in Grönland und Spitzbergen, die Terrassen Norwegens, die schrägen Strandlinien des Altenfjord, die ansteigenden Uferlinien in Nordamerika, die verschiedenen Niveaus der Eriethone, die Seen des masurisch-pommerschen Höhenrückens, die Stromverlegungen in Norddeutschland — alle diese Fragen werden gestreift und mit mehr oder weniger Bestimmtheit durch die attrahierende Wirkung des Inlandeises erklärt. Es ist schade, daß diese umfassende Theorie der mathematischen Begründung entbehrt. Die Rechnung wird den Ausführungen Penck's oft entgegenzutreten genötigt sein.

Man unterscheidet zwei Arten von Eis: das Schneeeis und das Wassereis nach ihrer Entstehungsweise und nach ihrer Struktur; für die Frage nach dem Einfluß des Eises auf die Erdgestalt genügt diese Unterscheidung nicht, weil hier allein der Gesichtspunkt maßgebend ist, ob durch die Eisbildung eine Veränderung in der Massenordnung erfolgt. Man muß daher trennen schwimmendes Eis und ruhendes Eis. — Das schwimmende Eis, mag es aus den aufeinandergepackten Schollen des Polareises bestehen, mag es das abgebrochene Ende einer Gletscherzunge sein, kommt für diese Untersuchung nicht in betracht. Denn ein schwimmender Eisberg ersetzt in jeder Beziehung die Wassermenge, aus der er entstanden, weil das durch ihn verdrängte Wasserquantum zu seiner Bildung hinreichend ist. Anders verhält es sich mit dem ruhenden Eis oder Landeis, mit dessen Entstehung eine Änderung in der Massenwirkung eintritt, indem eine Wassermenge vorher als

¹⁾ In dem erwähnten Manuskript von 1845.

²⁾ Schwankungen d. Meeresspiegels a. a. O. und Periodicität der Thalbildung. (Verh. der Ges. f. Erdk. z. Berlin XI, 1884, p. 39 ff.)

Wasser im Meere, nun als Eis vom Lande aus wirkt. Den Einfluss dieser Wassermassungen wollen wir hier näher betrachten.

I. Allgemeiner Teil.

Die Wirkungsart von Inlandeismassen.

Das Material des Inlandeises liefern die Winde, welche sich auf den Meeren mit Wasserdämpfen beladen; es entsteht somit aus den Wassermengen, welche den Meeren entzogen sind. Hieraus ergibt sich eine doppelte Wirksamkeit:

- 1) wegen der Vermehrung der Kontinentalmassen durch das aufgelagerte Eis,
- 2) wegen Verminderung des Meereswassers.

Die Vermehrung der Kontinentalmassen beeinflusst die Gleichgewichtslage der Erde wieder in doppelter Weise: einmal durch Verückung des Erdschwerpunktes nach dem Schwerpunkt der Vereisung hin; hierauf hat wohl Adhémar¹⁾ zuerst hingewiesen, Croll²⁾ liefert eine überaus anschauliche numerische Behandlung der Frage. Die Folge der Schwerpunktverschiebung ist, dass sich die Gleichgewichtslage, wie sie durch das Meeresniveau dargestellt wird, um den neuen Erdschwerpunkt gruppiert, wie sie es vorher um den alten gethan. Würden die nordpolaren Gegenden vom Eise bedeckt, würde eine Verschiebung des Erdschwerpunktes zum Nordpol stattfinden; eine Versenkung der nordischen Lande, ein Auftauchen auf der südlichen Hemisphäre wäre die Folge.

Zweitens wird durch eine Eisansammlung ein neues Attraktionscentrum geschaffen, worauf v. Bruchhausen zuerst eingegangen ist. Die neue (verschobene) Gleichgewichtslage würde dadurch mannigfache Deformationen erleiden in ähnlicher Weise, wie sie in der Einleitung mit h' bezeichnet sind. Es würde keine Schwierigkeit haben, hier die h' zu berechnen; wenn die Massen bekannt sind, kann man die statischen Momente und damit die Verschiebung des Erdschwerpunktes bestimmen. Doch es hat kein Interesse die Deformationen h' zu erkennen, welchen die verschobene Gleichgewichtslage unterworfen war; uns interessiert vielmehr die Frage nach den absoluten Störungen des ursprünglichen Meeresniveaus. Wir können daher die Verschiebung des Erdschwerpunktes außer Acht lassen und uns direkt zur Bestimmung der gestörten Gleichgewichtslage wenden. Wir haben somit die Größen $h = h_1 - h_m$ zu berechnen; sie ergeben an jedem Ort die Lage des gestörten Meeresniveaus gegen den Wasserspiegel, welcher beim Fortfall der neuen Massenwirkung herrscht. Die Bestimmung erfolgt durch das Theorem von Bruns, wie es Helmert genannt hat

$$h_1 = h + h_m = \frac{v}{g}$$

1) Révolutions de la Mer. 1842.

2) James Croll, Climate and Time. London 1875. p. 368 ff.

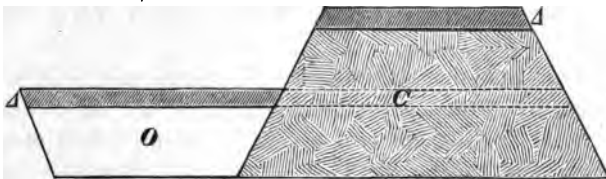
In der Einleitung gab ich die Ableitung der Formel im Sinne von Stokes.

Zweitens sind also die Wassermengen des Meeres vermindert und auch dieser Vorgang hat eine doppelte Folge, welche aber nur von Wichtigkeit ist, wenn man mit der Untersuchung der Geoiddeformationen bestimmte Zwecke verbindet, wenn man nämlich die Schwankungen des Meeresspiegels erforschen will.

Der normale Meeresspiegel — er ist von dem mittleren zu unterscheiden, den man erhält, wenn man aus den periodischen Deformationen, durch Gezeiten, Barometerdifferenzen, Winde den mittleren Meerestand konstruiert — stellt einen Teil der Gleichgewichtslage der Erde dar; er ist eine jener Niveauflächen oder Geoide, welche ihre Gestalt dem Erdpotentiale verdanken, und zwar ist er das wichtigste Geoid, wenn wir von den periodischen Störungen absehen, weil er der Ausgangspunkt aller Messungen ist. Die Schwankungen dieser Fläche ursächlich zu ergründen, ist das fundamentale Problem der Wissenschaft von der Erde, denn diese Schwankungen haben in geologischen Zeiten zur Bildung der Formationen geführt, sie haben somit alles Werden und Leben auf der Erde bedingt.

Der Meeresspiegel also wird außer durch das Entstehen des neuen Attraktionscentrums auch durch die Verminderung der Wassermengen beeinflusst sein; das allgemeine Niveau wird gesenkt und dadurch stellenweise eine Gegenwirkung gegen die Attraktion geschaffen, stellenweise eine Unterstüzung, wo nämlich die Attraktion auch eine Senkung veranlaßt hat. Im großen und ganzen kommt die Berücksichtigung dieser Wirkung der Konstruktion einer Parallelfäche zu dem vor Betrachtung der Wasserabsorbtion bestimmten Geoid gleich, freilich nicht ganz streng, denn die Niveauflächen sind nicht parallel, doch können wir auch hier, wo es sich wieder um kleine Größen handelt, von den Differenzen absehen.

Die allgemeine Senkung des Wasserspiegels hat noch eine andere Folge, welche streng nicht allein bei Behandlung der Meeresschwankungen von Einfluß ist. Ich will sie schematisch erklären:



Figur 3.

Wenn ich dem Ocean O die Wasserschicht A entziehe und auf den Kontinent C übertrage, so wird nicht allein die Masse von C vermehrt und der Spiegel von O gesenkt — die bisher betrachteten Fälle —, sondern es wird auch die Masse von O vermindert. Ein bestimmtes

Wasserquantum, welches vorher die Anziehung einer bestimmten Festlandschicht auf die Lotrichtung kompensierte, ist fortgeführt. Die Wirkung der Festlandschicht tritt in Kraft, das Lot wird stärker abgelenkt, der Wasserspiegel steigt ein wenig mehr gegen den Kontinent an. Im Falle der Erde kompliziert sich das Problem, weil wir es mit fünf Kontinenten zu thun haben; doch würden wir auch hier am besten zu einer numerischen Auswertung kommen, wenn wir bedenken, dafs auf allen fünf Kontinenten eine Massenschicht von der Höhe H (Betrag der allgemeinen Senkung), die vorher nur mit der Dichtigkeit $\Theta - 1$ deformierte — nämlich der Differenz zwischen der Dichtigkeit des Festlandes und der des Wassers —, jetzt mit der Dichtigkeit Θ deformieren kann. Eine numerische Auswertung dieses Punktes werden wir übergehen, weil er nur in untergeordneter Weise die Wirkung der anderen Faktoren modifizieren kann. Eine zweckmäßige Verwertung der Tabelle Helmert's (vol. II, pag. 353) zeigt dies unmittelbar.

Schließlich ist noch eine Wirkungsart des Eises zu erwähnen, welche nicht mit seiner Bildung, sondern mit seiner Lage zusammenhängt — nämlich die mechanische Verdrängung von Wassermengen bei der Ausbreitung über die Meere. Dieser Faktor hat wieder lediglich auf das eine Geoid, die Meeresfläche, Bezug. Penck erwähnt ihn, doch mit der Bemerkung, dafs er unwesentlich ist, weil sich die Vereisung nur über seichte Meere erstreckte. Er hat darin Recht, wie die folgenden Zahlen zeigen.

Das gesamte Weltmeer hat nach Krümmel¹⁾ ein Areal von 6 786 000 Q.-Ml., worin die unbekanntenen Gegenden am Südpol zum Meere gerechnet sind. Um keine zu geringen Werte zu erhalten, rechnen wir sie als Land, so dafs von obiger Zahl etwa 260 000 Q.-Ml. abgehen. Ferner waren dem allgemeinen Meereszusammenhang und somit den Schwankungen des Niveaus die vereisten Meere entzogen; ihr Areal auf der nördlichen Hemisphäre beträgt nach Penck²⁾ 110 000 Q.-Ml., die ebenfalls zu subtrahieren sind, weil es auf die Schwankungen des allgemeinen Niveaus ankommt; diese mußten um so gröfser ausfallen, je kleiner das Areal war, über das sie sich erstreckten. Es bleiben also rund 6 420 000 Q.-Ml. übrig, welche eisfrei waren und daher schwanken konnten.

Wollen wir nun die Hebung des Wasserspiegels infolge der Verdrängung von Wassermengen erhalten, müssen wir das Areal der vereisten Meere in das Gesamtareal dividieren, dann erhält man die Anzahl von Einheiten, welche die Tiefe des betreffenden vereisten Meeres haben mußte, um das allgemeine Niveau um eine Einheit zu heben; diese Gröfse ist dann in die mittlere Tiefe des vereisten Meeres in

1) O. Krümmel, Versuch einer vergleichenden Morphologie der Meeresräume. Leipzig 1879. p. 102.

2) Schwankungen des Meeresspiegels, p. 27.

etern zu dividieren, dann resultiert direkt der Einfluss der verdrängten Wassermenge in Metern. Ich gebe die Resultate in einer Tabelle zunächst für die europäischen Meere, die Autoren der Zahlen sind in Klammern beigefügt; die nicht angemerkt haben ich nach Stieler's Landatlas geschätzt und möglichst große Werte genommen.

Meere	Areal	Tiefen	Hebung des allgem. Niveaus
Arktisches Meer	1318 Q.-Ml. (K) ¹⁾	73 m (K)	0,015 m
Baltisches Meer, nördl. Norwegen . .	2500 „ (P) ²⁾	300 „	0,016 „
Atlant. Ocean, westl. Norwegen	6500 „ (P)	100 „	0,100 „
Mittelmeer	3700 „ (K)	86 „ (K)	0,050 „
Atlant. Ocean, westl. u. südl. Irland	1700 „ (P)	100 „	0,030 „
Nordsee	9945 „ (K)	89 „ (K)	0,138 „
Südsee	7545 „ (K)	67 „ (K)	0,079 „
Summa: 33 208 Q.-Ml. (P)			0,5 m

Gleichzeitig waren die nordamerikanischen Meere vereist; genauere Angaben liegen nur für drei Teile davon vor:

Meere	Areal	Tiefen	Hebung des allgem. Niveaus
Arkt. Meer und Strafsen . . .	14 410 Q.-Ml. (K)	275 m (K)	0,620 m
Labradors-Bai und Strafsen . .	18 500 „ „	375 „ „	1,080 „
Barrow-See und Davis-Strasse .	10 200 „ „	777 „ „	1,233 „
Summa: 43 110 Q.-Ml.			3 m

Im ganzen berechnet Penck das Areal der vereisten Meere der Nordhemisphäre zu 110 000 Q.-M. Abzüglich der Areale, die wir schon berücksichtigt haben, waren also noch etwa 33 682 Q.-M. vereist. 228 Q.-M. hiervon liegen nach Penck um Inseln, um die Farör, Island, Spitzbergen, Nowaja-Semla, Kaiser Franz Josefs-Land und die Neubiirischen Inseln, die übrigen 32 450 Q.-M. um den nordamerikanischen Kontinent. — Auf große Tiefen erstreckten sich diese Eis-Ausdehnungen nicht; absolute Zahlen entziehen sich unserer Kenntnis. Doch wir sind sicher, weit über den wahren Werten zu stehen, wenn wir für die unerkannten Gebiete die mittlere Tiefe der verdrängten Wassersäule 50 m setzen. Dann erhält man als Betrag bei den die Inseln umgebenden Meeren 0,095 m, bei den Meeren um den amerikanischen Kontinent 2,5 m.

Addieren wir alle Wirkungen zusammen, so resultiert ein Betrag von 3 m für die allgemeine Hebung des Meeresniveaus infolge der Verdrängung von Wassermengen durch Inlandeis. Diese an sich noch zu

1) K = Krümmel.

2) P = Penck.

große Zahl zeigt zur Genüge, daß wir auf diesen Faktor keinen Wert zu legen haben; wo es doch nur möglich ist, die numerischen Daten im großen und ganzen ihrem Sinne nach anzugeben, wird eine Änderung von 6 m ohne Bedeutung sein.

Die Elemente der Rechnung.

In den letzten Ausführungen waren schon stillschweigend die Verhältnisse zu Grunde gelegt, welche die Eiszeit der Nordhemisphäre charakterisierten. Es bedarf in der That kaum der ausdrücklichen Bemerkung, daß nur sehr beträchtliche Eisansammlungen in betracht kommen werden.

Die Wirkung des einzelnen Gletschers verschwindet, wie die einfache Angabe lehren mag, daß ein Kreiscylinder von Eis, dessen Radius und Höhe 1 km beträgt, an seinem Rande nur ein Ansteigen des Wasserspiegels um 25 mm verursacht. Diese Masse würde ein nicht unerhebliches Vorrücken eines Gletschers darstellen und doch ist die Wirkung so gering, daß sie nur durch die genaueste Messung zu konstatieren wäre. Solche Messungen liegen in den Gebieten, die hier in Frage kommen, in Grönland und Spitzbergen nicht vor; es wird nur von einem Ansteigen des Meeres berichtet, und wo die Erscheinung so auffällig ist, liegt ihr sicher eine allgemeinere Ursache zu Grunde.

Ein Anwachsen des Inlandeises allein kommt in betracht, also kurz die Verhältnisse, welche die Eiszeit charakterisierten.

Da verschiedene selbständige Inlandeismassen existierten, kompliziert sich das Problem, indem die Wirkungen der einzelnen Vereisungen sich algebraisch summieren. Es kommt also nicht mehr allein auf die einzelne Masse, sondern auch auf die gegenseitige Lage dieser Massen an; doch wird der Einfluß der Lage erst bestimmbar sein, wenn wir die Einzelwirkungen kennen.

Die Einzelwirkung hängt lediglich von der Masse ab, d. h. von dem Volumen und der Dichtigkeit der Vereisung; das Volumen seinerseits von dem Areal und der Stärke.

Die Dichtigkeit ist bekannt, $\theta = 0,92$ ist die gewöhnlich für das spec. Gewicht des Eises gegebene Zahl.

Was über die Mächtigkeit der diluvialen Gletscher geschrieben ist, beruht meist auf Rechnungen, die lokale Erfahrungen verallgemeinern mußten, weil es an einer allgemeinen Kenntnis der Bewegungsphänomene des Inlandeises und seiner oberflächlichen Neigungsverhältnisse fehlt, und hat dann immer zu ganz außerordentlich großen Werten für die Mächtigkeit des Eises geführt, wie bei Croll¹⁾, Penck²⁾,

¹⁾ Climate and Time, pag. 374 ff. und „The Thickness of the antarctic ice“, Quart. Journ. of Science. 1879.

²⁾ Die Vergletscherung der deutsch. Alpen, Kap. 16.

Mc Gee¹⁾. Nur zum kleinen Teile liegen wirklich Beobachtungen vor, wie in einzelnen Teilen der Alpen; diese beziehen sich dann aber nur auf die engen Bezirke und lassen sich nicht übertragen. Im ganzen herrscht völliges Dunkel, wir ziehen es daher vor von vornherein keine bestimmte Mächtigkeit anzunehmen; die Wirkung des Eises ist der Mächtigkeit proportional, wir können diese daher unbeschadet der Übersichtlichkeit der Rechnungen unbestimmt lassen — ich nenne sie D — und nur später in Beispielen bestimmte Festsetzungen treffen.

Die Areale sind wenigstens annähernd bekannt. Wir werden im Folgenden vier Vereisungsbezirke unterscheiden, deren Überwiegen über alle lokaleren Eisansammlungen in der Karte von Penck²⁾ klar hervortritt.

1. Das nordeuropäische Inlandeis.

In den Gebirgen Skandinaviens entstehend, breitete es sich nach Osten bis zum Timengebirge aus; nach Südosten fast bis zur unteren Wolga in die Gegend von Saratow; die Städte Woronesch, Tula, Poltawa, Kiew, Owrutsch, Lemberg, Krakau bezeichnen den Verlauf der Südgrenze in Rußland³⁾. In Deutschland drangen die Gletscher bis zu den Mittelgebirgen vor, das Riesengebirge, das Erzgebirge, der Harz tragen Spuren der nordischen Vereisung. Nach Südwesten durchmaßten die skandinavischen Gletscher die Nordsee und verschmolzen auf den britischen Inseln mit dem schottischen Inlandeis; im Westen vermag man ihre Spuren bis zu den Shetlandinseln zu verfolgen. Penck hat für diese nordeuropäische Vereisung — als die westliche Grenze sieht er die 100 Fadenlinie an — ein Areal von 115 000 Q.-Ml. berechnet. Wenn man die Form des vereisten Areals in seinen Hauptzügen betrachtet, wird man zugeben müssen, dafs die Gestalt eines halben Kreiscylinders nicht übel dazu stimmt. Der Mittelpunkt läge etwa in 68° n. Br. und 14° östl. L. v. Gr., die nordwestliche Grenze ist annähernd eine gerade Linie (die Durchschnittslinie des Kreiscylinders) und verläuft von Novaja Semla längs der skandinavischen Küste bis zur Südwestecke von Irland, die östliche und südliche Begrenzung weicht von der Kreisbogenform nicht erheblich ab.

Bekanntlich ist der Flächeninhalt eines sphärischen Kreises $4\pi R^2 \sin^2\left(\frac{a_s}{2R}\right)$, wenn a_s der sphärische Radius, R der Radius der

¹⁾ W. J. McGee, On maximum synchronous glaciation (Proc. Amer. Assoc. XXIX, 1880) in Citaten: Sill. Am. Journ. of science, Ser. III, vol. XXII, 1881, p. 264 u. Ser. III, vol. 24, 1882, p. 100.

²⁾ Die Vergletscherung der deutschen Alpen. Reprod. in A. Kirchhoff „Unser Wissen von der Erde“ vol. I, 1886. Taf. 28.

³⁾ S. Nikitin, Die Grenzen der Gletscherspuren in Rußland und dem Uralgebirge. Petermann's Mitt. 1886, p. 257.

Kugel ist; $\frac{a_s}{R}$ ist dann der Winkel des sphärischen Radius. Dieser Winkel würde die Größe $18^\circ 8'$ haben, rund 18° , wenn der Inhalt des halben sphärischen Kreises auf der Erdkugel vom Radius $6370,3 \text{ km} = 858,5 \text{ d. g. Ml.}$ das Areal von $115\,000 \text{ Q.-Ml.}$ haben soll. Wir halten an dem Werte von 18° fest, werden ihn im folgenden aber nur benutzen, wenn es sich um die Geoiddeformationen (Meeresschwankungen) an der skandinavischen Küste, also am Westrande der Vereisung handelt. Um den Einfluss auf entferntere Gegenden zu schätzen, bedarf es dieser genauen Berücksichtigung der Gestalt des vereisten Areals nicht, besonders da sie die Rechnung kompliziert. Denn die Wirkung des halben Kreiscylinders ist natürlich nur gleich der halben Wirkung des Ganzen auf dem größten Kreise, welcher den Kreiscylinder halbiert — für die skandinavische Küste trifft dies annähernd zu. In anderen Gegenden wirkt der zunächst gelegene Teil stärker als ein gleich großer von der entgegengesetzten Seite wegen der größeren Entfernung. Die Formeln komplizieren sich dann nicht unerheblich und erschweren die Rechnung.

Wir werden daher, wo es sich um den Einfluss der nordeuropäischen Vereisung auf entferntere Gegenden handelt, nicht die Gestalt eines halben, sondern die eines ganzen Kreiscylinders zu Grunde legen. Der sphärische Radius, welcher dann der Größe von $115\,000 \text{ Q.-Ml.}$ entspricht, hat den Winkel $12^\circ 47' 40''$. Der Mittelpunkt dieses Kreises sei der Schwerpunkt der nordeuropäischen Vereisung, der etwa in der Gegend von Nicolaistadt am Bottnischen Busen gelegen haben mag. Wenn man diesen Kreis auf einen Globus aufträgt, ist ersichtlich, daß die Abweichungen von der wahren Gestalt der vergletscherten Areale auch nicht allzugroß sind. Die britischen Inseln und die Gegend von Novaja Semla kommen zu kurz, zu viel Masse ist im Atlantischen Ocean westlich Skandinavien gelegen. In Deutschland werden die Beträge nur unerheblich von den wahren abweichen und zwar im positiven Sinn, wegen der größeren Konzentration der wirkenden Masse. Dieser ganze Kreiscylinder wird im Folgenden hauptsächlich benutzt werden.

2. Das nordamerikanische Inlandeis.

Die Arbeiten Chamberlin's¹⁾ haben uns die Grenzen des nordamerikanischen Eises kennen gelehrt. Ein Endmoränenzug beginnt an der Küste in der Gegend von New-York und zieht sich in vielfachen Windungen um das Seengebiet herum. Von der Stadt Des Moines in Jowa wendet er sich nordwestlich und begleitet die nördliche Umrandung der Missouribeckens. Südlich von diesem Moränenzug in den

¹⁾ Third Ann. Rep. of the Un. St. Geol. Survey by J. W. Powell. Washington 1883. Auszug v. E. Geinitz in Petermann's Mitt. 1885, p. 90 f. u. Taf. 5.

Driftregionen finden sich auch noch einzelne Spuren ehemaliger Vereisung. Im Westen verschmolzen die Gletscher mit der selbständigen Vereisung der Rocky Mountains, die sich auch über Alaska verbreitet. Ausgangspunkt der hauptsächlichsten Eismassen war wahrscheinlich Grönland. Das Areal dieses Inlandeises hat Penck auf 361 000 Q.-Ml. berechnet, seine Gestalt fügt sich ohne Zwang in die Form eines ganzen Kreiscylinders. Alaska wird dabei freilich ausgeschlossen, während die wohl eisfreien Gebiete am und nördlich vom oberen Missouri einbegriffen sind; doch involviert das keine erheblichen Fehler, zumal unsere Kenntnis der Eisverhältnisse im Westen noch unsicher ist.

Der sphärische Radius, der zu dem Areale von 361 000 Q.-Ml gehört, würde nach der obigen Formel den Winkel $22^{\circ} 46'$ haben. Das Centrum möchte ich auf die Insel Southampton, an den Eingang der Hudsonsbay verlegen, etwa nach 64° n. Br. und 84° w. L. Gr.

3. Die antarktische Vereisung.

Hierunter fallen die heute den Südpol umlagernden Gletschermassen, deren Ausdehnung der größten diluvialen Gletscherentfaltung auf der nördlichen Hemisphäre nicht viel nachsteht. Im Mittel reichen sie bis zum 70° s. Br., ihr sphärischer Radius hätte deshalb den Winkel 20° , das Centrum ist der Südpol, die Ausdehnung auf der Kugel würde einem Areale von 279 300 Q.-Ml entsprechen. Es ist ja klar, daß die durch Anziehung dieser antarktischen Eismassen verursachten Störungen des Geoids zu dem heutigen Zustande gehören; doch ist die Berechnung ihrer Wirkung erforderlich, um die Änderungen der Gleichgewichtslage erkennen zu können, die mit ihrem Abschmelzen verbunden sind.

Wir wissen noch nicht, ob die beiden Hemisphären gleichzeitig oder alternierend Eiszeiten trugen. Die berechnete Wirkung der antarktischen Eismassen ist daher im negativen Sinne mit der der nordischen Eismassen zu kombinieren, um womöglich, falls sich dann die Änderungen in der Gleichgewichtslage erklären lassen, die man aus den Meeresschwankungen kennen gelernt, auf diesem Weg einen Schritt zur Lösung des Problems thun zu können, ob gleichzeitig, ob alternierend Eiszeiten für die beiden Hemisphären anzunehmen sind.

4. Der südpolare Eisring.

Die vierte Eismasse dient dem gleichen Zwecke. Rein hypothetisch nehme ich einen Eisring an, der zwischen dem 70° und 64° s. Br. gelegen ist, und berechne seinen Einfluß auf die Gleichgewichtslage der Erde. Dieser Eisring würde einer weiteren Ausbreitung der südpolaren Gletscher, mithin der Steigerung des heutigen Phänomens zu einer antarktischen Eiszeit entsprechen. Denn daß auf der Südhemisphäre die Gletscher einst auch eine reichere Entfaltung hatten, beweisen die

Spuren in Südamerika und auf Neu-Seeland. In Ermangelung von Thatsachen müssen wir zu einer Hypothese greifen, welche ungefähr den von Penck auf seiner Karte angegebenen Verhältnissen entspricht. Das Areal dieses Eisringes würde die Gröfse von 189 420 Q.-Ml gehabt haben, sein Centrum ist der Süpol, seine Wirkung bestimmt sich durch die Differenz der Wirkungen zweier Eiskalotten, deren sphärische Radien die Winkel 26° resp. 20° haben.

Mit diesen Elementen schreiten wir zur Bestimmung der Deformationen zunächst allgemein, ohne Rücksicht auf die Lage des Eises.

Die Formeln und ihre Anwendbarkeit.

Allen vier Inlandeismassen durften wir die Formen von Kreiscylindern substituieren; es sind nun die Formeln zu entwickeln, durch welche man dann die Gröfsen h bestimmen kann.

Die Kreiscylinder haben die endliche Dicke D und die Dichtigkeit $\Theta = 0,92$; zur Vereinfachung der Rechnung führen wir anstatt der Raummassen Flächenmassen ein, indem wir die Eismassen auf die ursprüngliche Meeresfläche, als welche wir die Kugel vom Radius R fassen, kondensiert denken. Strenge ist diese Annahme nicht, doch läfst sich der Fehler berechnen. Helmert (vol. II, p. 319) bestimmt seine Gröfse, wenn einem ebenen Cylinder eine ebene Fläche substituiert wird, und findet, dafs das aus der Flächenform abgeleitete Resultat im Centrum der Masse um $\frac{D}{2a}$ zu grofs wird, wenn a den

Radius des ebenen Kreises bezeichnet; am Rande ungefähr eben soviel. Der Fehler wächst also, je kleiner der Radius wird. Der kleinste Radius, den wir benutzen, hat den Winkel etwa 12° . Der Radius des ebenen Kreises, welcher mit diesem sphärischen gleichen Inhalt hat, hätte die Gröfse: $2 R \sin 6^\circ = 1332$ km, da $R = 6370,3$ km ist. — Nehmen wir nun selbst die abnorm grofse Mächtigkeit $D = 4000$ m für den Augenblick an, so würde der Fehler des Resultates im Centrum der Vereisung nur $\frac{1}{666}$ betragen. Im Folgenden ist als Deformation im

Centrum der Vereisung Skandinaviens $+ 0,0549 D$ berechnet, der Fehler würde daher $0,00008 D$, also bei $D = 4000$ m $0,32$ m betragen, eine Gröfse, durch welche die Berechtigung der Kondensation hinreichend dargethan ist. Wir können also den Raummassen Flächenmassen substituieren, und haben als Dichtigkeit dieser Flächenmassen $\Theta D = 0,92 D$.

Wir benutzen ferner nach dem Vorgange von Zöppritz und Helmert nicht sphärische sondern ebene Flächen. Der Inhalt eines ebenen Kreises ist $a_e^2 \pi$, der eines sphärischen $4\pi R^2 \sin^2 \frac{a_s}{2R}$, worin a_e den ebenen,

a_s den sphärischen Radius bedeutet. Beide Flächen müssen gleichen Inhalt haben, wir haben daher zur Bestimmung von a_e anzusetzen:

$$a_e^2 \pi = 4 \pi R^2 \sin^2 \frac{a_s}{2R}$$

woraus $a_e = 2R \sin \frac{a_s}{2R}$ folgt.

Es hat kein Interesse in unseren Fällen die Größen der ebenen Radien zu bestimmen, ist auch nicht notwendig, denn da wir oben die Winkel der sphärischen Radien bestimmt — ihre Größe ist $\frac{a_s}{R}$ — können wir in die für ebene Kreisflächen abgeleiteten Formeln für a_e den Ausdruck $2R \sin \frac{a_s}{2R}$ setzen. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß es die Formeln vereinfacht und daß man die Resultate ohne weiteres auf die Kugel übertragen kann, ohne eine Umrechnung vorzunehmen, weil sie für bestimmte a_s erhalten sind.

Die Frage ist nur, welcher Fehler mit der Substitution ebener Kreisflächen verbunden ist. Hierüber liegen Betrachtungen von Zöppritz und Helmert (vol. II, p. 325 ff.) vor, auf die ich verweisen kann. Sie zeigen, daß die Substitution zulässig ist und daß die resultierenden Fehler nur unbedeutende Beträge erreichen. Im Folgenden werde ich mehrfach Gelegenheit haben, auf diesen Punkt zurückzukommen und die Fehler in bestimmten Fällen zu schätzen; es wird hervortreten, daß sie innerhalb der festgehaltenen Genauigkeitsgrenzen ohne Einfluss sind. Ich möchte daher eine allgemeine Untersuchung hier übergehen, sie könnte doch nur die Ausführungen von Helmert rekapitulieren.

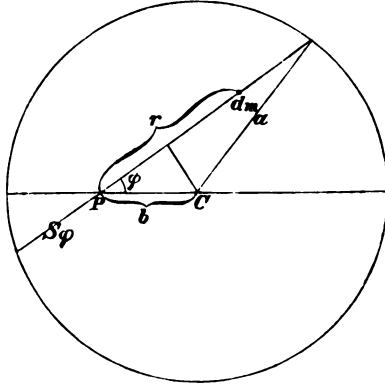
Wir haben also ebene Kreise mit Masse belegt von der Dichtigkeit

Θ D. Die Radien der Kreise haben die Größe $a_e = 2R \sin \frac{a_s}{2R}$, wenn für a_s die oben gegebenen Elemente zu setzen sind. Es ist das Potential dieser ebenen Kreisflächen zu bestimmen auf Punkte von der Centraldistanz b , wofür wir, um auch hier die Übertragung auf die Kugel zu erleichtern, $2R \sin \frac{b_s}{2R}$ setzen dürfen. Diese Potentialwerte sind durch die normale Schwerkraft g zu dividieren, um h_1 zu erhalten. — Da wir die Kugelform zu Grunde gelegt haben, müssen wir auch g hierdurch bestimmen und nach dem Newtonschen Gesetz für einen Punkt der Kugeloberfläche setzen:

$$g = \frac{4}{3} R \pi \kappa^2 \Theta_m$$

worin $\Theta_m = 5,6$ die mittlere Dichtigkeit der Erde, κ^2 die Newtonsche Attraktionskonstante bedeutet.

Den Wert des Potentials erhält man auf folgendem Wege zunächst für einen Punkt im Innern der Fläche:



Figur 4.

P habe die Centraldistanz b , a sei der Radius. Ich führe Polardinaten ein mit dem Pole P, r sei der Radiusvektor, φ der Winkel. Dann ist das Potential dv des Massenelementes dm auf P:

$$dv = x^2 \frac{dm}{r} = x^2 \frac{r dr d\varphi \Theta D}{r}$$

$$dv = x^2 \Theta D dr d\varphi$$

Mithin das Gesamtpotential: $v = x^2 \Theta D \int r dr d\varphi$. Das Integral über r ergibt, wenn ich die Sehne, die zu φ gehört, mit s_φ bezeichne:

$$v = x^2 \Theta D \int_0^\pi s_\varphi d\varphi$$

die Grenzen sind 0 und π , weil die zwischenliegende Variation φ den ganzen Raum bestreicht.

Nun ist $\frac{s_\varphi}{4} = a^2 - b^2 \sin^2 \varphi$

also $s_\varphi = 2a \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}$

und somit: $v = 2a x^2 \Theta D \int_0^\pi \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi$

wofür ich zum Zwecke der numerischen Auswertung auch schreiben darf:

$$v = 4a x^2 \Theta D \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

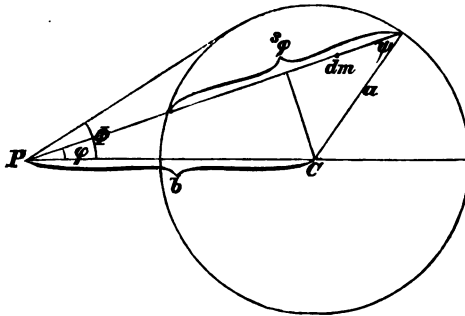
Wir haben hier ein elliptisches Integral zweiter Gattung, das wir mit $E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{b}{a}\right)$ bezeichnen können und erhalten somit $v = 4a_c x^2 \Theta D E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{b}{a}\right)$. Dividieren wir diesen Ausdruck durch g , so resultiert:

$$h_1 = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{a_c}{\pi R} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{b}{a}\right) D$$

wenn wir den sphärischen Radius einführen:

$$1) \quad h_{1,i} = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{2}{\pi} \sin \frac{a_s}{2R} E \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sin \frac{b_s}{2R}}{\sin \frac{a_s}{2R}} \right) D.$$

Der Punkt, für den h_1 gilt, liegt im Inneren des Kreises; b_e bleibt für alle Punkte des Inneren kleiner als a_e , der Modul $k = \frac{b}{a}$ ist daher für alle Punkte des Inneren ein echter Bruch, mithin das elliptische Integral in dieser Form direkt auswertbar. Wir wollen h_1 für das Innere mit dem Index i beilegen. — In gleicher Weise erfolgt die Ableitung einer Formel für äußere Punkte:



Figur 5.

Wieder ist $dv = x^2 \Theta D \, dr \, d\varphi$. Die Integration über φ reicht zweifach von 0 bis Φ , wenn wir mit Φ den Winkel bezeichnen, welchen die Tangente mit dem Durchmesser bildet. Es resultiert daher:

$$v = 2 x^2 \Theta D \int_0^{\Phi} s_{\varphi} \, d\varphi$$

oder, indem offenbar $s_{\varphi} = 2 a \cos \psi$ und

$$\sin \varphi = \frac{a}{b} \sin \psi, \text{ mithin } d\varphi = \frac{a}{b} \frac{\cos \psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \psi}} \, d\psi \text{ ist.}$$

für die Grenze Φ wird $\psi = \frac{\pi}{2}$, wie leicht ersichtlich):

$$v = 4 x^2 \Theta D \frac{a^2}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \psi}} \, d\psi$$

Bedenkt man, daß

$$\cos^2 \psi = 1 - \sin^2 \psi = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \psi\right)$$

ist, so erhält man unschwer die Zerlegung:

$$v = 4\pi^2 \Theta D \left\{ b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \psi} d\psi - b \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \psi}} \right\}$$

Der erste Term stimmt wieder mit der Normalform der elliptischen Integrale zweiter Gattung überein (Modul $k = \frac{a}{b}$), der zweite Teil mit der Normalform der elliptischen Integrale erster Gattung mit gleichem Modul. Wir können daher sehr einfach schreiben:

$$v = 4\pi^2 \Theta D b \left\{ E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{a}{b}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{a}{b}\right) \right\} D$$

und erhalten somit, wenn wir wieder durch g dividieren und für a_e und b_e die entsprechenden sphärischen Ausdrücke einführen:

$$2) \quad h_{1a} = \frac{3 \Theta}{\Theta_m} \frac{2}{\pi} \sin \frac{b_s}{2R} \left\{ E\left(\frac{\sin \frac{a_s}{2R}}{\sin \frac{b_s}{2R}}\right) - (1 - k^2) F(k) \right\} D,$$

worin im letzten Teile der Klammer $k = \frac{\sin \frac{a_s}{2R}}{\sin \frac{b_s}{2R}}$ gesetzt und die

Grenze $\frac{\pi}{2}$ fortgelassen ist.

Auch diese Formel kann überall direkt ausgewertet werden, wo außerhalb stets $b > a$ ist, mithin $k < 1$.

Für ferner liegende Punkte der Kugeloberfläche können wir u noch eine weitere Vereinfachung gestatten, indem mit wachsender Entfernung von der wirkenden Masse die Bedingung eines Attraktionscentrums immer mehr erfüllt wird. Wir können uns dann die gesamte Masse im Centrum konzentriert denken und haben zur Bestimmung des Potentials einfach diese Masse durch den Centralabstand zu dividieren. Dieser Abstand ist die Sehne, welche zum Winkel der sphärischen Entfernung gehört, mithin $2R \sin \frac{b_s}{2R}$; somit ergibt sich:

$$v = \frac{4\pi R^2 \sin^2 \frac{a_s}{2R} \Theta D \pi^2}{2R \sin \frac{b_s}{2R}}, \text{ und durch } g \text{ dividiert:}$$

$$3) \quad h_{1a} = \frac{3 \Theta \sin^2 \frac{a_s}{2R}}{2 \Theta_m \sin \frac{b_s}{2R}} D.$$

Die Genauigkeit dieser Formel 3 wächst mit wachsender Entfernung von der wirkenden Masse.

Bei seinen Untersuchungen über die Wirkung der einzelnen Konimente diskutiert Helmert (vol. II, p. 346 ff.) die Kreise, für welche die einzelnen Formeln anzuwenden sind. Bei der Formel 1) ist das an sich klar; die Grenzen zwischen Formel 2) und 3) findet er vermittels der graphischen Methode; von dem Punkte an, wo beide Formeln annähernd gleiche Werte liefern — es ist bei Eurasien etwa 60° Centraldistanz — ist er die Formel 3) in Kraft treten, so daß 2) auf die Küstennähe beschränkt bleibt. Indessen leiden diese Ausführungen an dem von Helmert selbst erwähnten, jedoch nicht mehr korrigierten Versehen, als die sphärische und die ebene Entfernung verwechselt sind. Tatsächlich kann man die Formel 2 weit länger anwenden, als Helmert annimmt, ja sie liefert bis $\frac{b_s}{R} = 180^\circ$, also bis zu den Antipoden des Centrums genauere Werte als 3, wie ein Vergleich mit den Resultaten eigen wird, die unter Zugrundelegung der sphärischen Flächenform abgeleitet sind. So würde in der graphischen Darstellung Helmert's tatsächlich der Schnitt der Kurven 1 und 2 nicht stattfinden, sondern die Kurve 2 würde sich mit wachsendem Abstand vom Centrum der Kurve 1 nähern, ohne sie ganz zu erreichen; beide Kurven entfernen etwas zu geringe Werte, wenn auch die Fehler ganz unerheblich sind.

Für die Centraldistanzen $\frac{b_s}{R} = 90^\circ$ und $\frac{b_s}{R} = 180^\circ$ vereinfachen sich die Formeln, welche unter Zugrundelegung sphärischer Verhältnisse abgeleitet werden können, und gestatten eine leichtere numerische Auswertung. Wir werden sie nach den von Helmert¹⁾ gegebenen Reihen für diese beiden Punkte ausführen und die so erhaltenen Werte zur Korrektur der mit Formel 3 erlangten Resultate benutzen; bis $\frac{b_s}{R} = 90^\circ$ wenden wir Formel 2 an, von 90 bis 180° Formel 3 mit den Korrekturen. Die Resultate gehen ausgezeichnet in einander über; in der graphischen Darstellung lassen sich getrennte Kurven in richtiger Weise gar nicht zur Anschauung bringen, sie fallen zusammen und stellen eine einzige stätige Kurve dar.

Für die Richtigkeit der Resultate bürgt die fast absolute Übereinstimmung bei Ableitung des Mittelwertes h_m nach zwei Methoden, während sich bei Helmert infolge des erwähnten Versehens nicht ganz erhebliche Differenzen ergaben. In den folgenden Tabellen wird die Anwendbarkeit der verschiedenen Formeln noch manche Beleuchtung erfahren.

1) A. a. O. vol. II, p. 330 ff.

Was die Bestimmung des Mittelwertes betrifft, so wäre nach kannten Sätzen strenge, wenn wir der Abkürzung wegen $\frac{b_s}{R} = \gamma$ setzen:

$$h_m = \frac{\int_0^\pi h_1 \sin \gamma \, d\gamma}{\int_0^\pi \sin \gamma \, d\gamma}$$

Zur Ausführung bedienen wir uns, wie es auch Helmert gethat der einfachsten Formel der mechanischen Quadratur und setzen:

$$h_m = \frac{\sum h_1 \sin \gamma}{\sum \sin \gamma}$$

für Werte von γ von 10 zu 10° und entnehmen die notwendigen Wert von h_1 den nachfolgenden Tabellen.

Die Theorie der Kugelfunktionen lehrt noch eine andere Method zur Bestimmung des Mittelwertes, für welche Helmert (vol. II, p. 337) eine überaus einfache Ableitung giebt; ich führe nur die in sphärisch Terminologie übersetzte Formel an:

$$h_m = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \sin^2 \frac{a_s}{2R} D.$$

Diese Formel liefert eine Handhabe, um die Richtigkeit der Resultate zu prüfen, da dieser Wert von h_m direkt aus der wirkende Masse jener aus den berechneten Deformationen h , abgeleitet wird.

Die Rechnung.

Wir geben zunächst die Endresultate in tabellarischer Form, und dann noch einige Bemerkungen über die Wege, welche zu den Resultaten geführt, anzuknüpfen. Die numerische Auswertung der elliptischen Integrale führte ich mit Hülfe der in Legendre's *Traité des Fonctions élliptiques* für Integrale erster und zweiter Gattung gegebenen

Tafeln aus; sie schreiten bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ für ϑ von Grad zu Grad vor

Für die untere Grenze $\varphi = 0$ verschwinden die Integrale. Der Wert von ϑ ergab sich einfach aus der Relation:

$$\sin \vartheta = k = \frac{b}{a} \text{ für innere Punkte.}$$

$$\sin \vartheta = k = \frac{a}{b} \text{ für äußere Punkte.}$$

Zwischen den Graden habe ich die Werte einfach durch Interpolation bestimmt. Die erste Kolumne enthält den Winkel der Centradistanz, die zweite den Winkel des Modul, die dritte den Faktor $(1-k^2)$, die vierte das elliptische Integral zweiter Gattung $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, die fünfte das elliptische Integral erster Gattung $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, die sechste di

Erhebung h_1 des Geoids, die siebente und achte liefern die numerischen Elemente zur Berechnung des Mittelwertes, die neunte das Resultat, also die Geoiddeformationen $h = h_1 - h_m$.

Der Wert $h_1 = 0,0138$ für $\frac{b_s}{R} = \gamma = 90^\circ$ wurde mit Berücksichtigung der sphärischen Flächenform abgeleitet; genau würde sich dadurch ergeben $0,01377$. Die Formel 2 ergibt für diesen Ort $h_1 = 0,01371$, die Formel 3 $h_1 = 0,01358$. Die Methode 2 liefert also ein genaueres Resultat, als wenn man sich die ganze Masse im Centrum vereinigt denkt, wie schon oben erwähnt ist.

I. Nordamerikanisch-Grönländisches Inlandeis.

Areal: $361\ 000 \square M$. Radius $22^\circ 46'$, $\Theta = 0,92$, $\Theta_m = 5,6$. Mächtigkeit D.

$\frac{b_s}{R}$	ϑ	$1-k^2$	$E\left(\frac{\pi}{2}k\right)$	$F\left(\frac{\pi}{2}k\right)$	h_1	$h_1 \sin \gamma$	$\sin \gamma$	$h_1 - h_m = h$
0°	0°	—	1,5708	—	0,0973 D	0	0	0,0781 D
10°	$26^\circ 12'$	—	1,4912	—	0,0924 D	0,01605	0,17365	0,0732 D
20°	$61^\circ 37'$	—	1,1957	—	0,0741 D	0,02534	0,34202	0,0549 D
$22^\circ 46'$	90°	—	1,0000	—	0,0619 D	—	—	0,0427 D
25°	$65^\circ 46'$	0,1684	1,1567	2,3358	0,0518 D	—	—	0,0326 D
30°	$49^\circ 41,5'$	0,4185	1,3084	1,9302	0,0407 D	0,02035	0,50000	0,0215 D
35°	$41^\circ 1'$	0,5692	1,3847	1,7995	0,0340 D	—	—	0,0148 D
40°	$35^\circ 14,7'$	0,6670	1,4305	1,7338	0,0294 D	0,01890	0,64279	0,0102 D
50°	$27^\circ 50,5'$	0,7819	1,4813	1,6689	0,0234 D	0,01793	0,76604	0,0042 D
60°	$23^\circ 15'$	0,8442	1,5077	1,6380	0,0196 D	0,01697	0,86603	+0,0004 D
70°	$20^\circ 7,6'$	0,8816	1,5232	1,6207	0,0170 D	0,01598	0,93969	-0,0022 D
80°	$17^\circ 52,9'$	0,9057	1,5331	1,6099	0,0151 D	0,01487	0,98481	-0,0041 D
90°	$16^\circ 12,5'$	0,9221	1,5397	1,6028	0,0138 D	0,01380	1,00000	-0,0054 D
100°	—	—	—	—	0,0127 D	0,01251	0,98481	-0,0065 D
110°	—	—	—	—	0,0119 D	0,01118	0,93969	-0,0073 D
120°	$13^\circ 10,4'$	0,9481	1,5502	1,5918	0,0112 D	0,00970	0,86603	-0,0080 D
130°	—	—	—	—	0,0107 D	0,00820	0,76604	-0,0085 D
140°	—	—	—	—	0,0104 D	0,00688	0,64279	-0,0088 D
150°	—	—	—	—	0,0101 D	0,00505	0,50000	-0,0091 D
160°	$11^\circ 33,7'$	0,9598	1,5549	1,5869	0,0099 D	0,00339	0,34202	-0,0093 D
170°	$11^\circ 25,6'$	0,9608	1,5552	1,5866	0,0098 D	0,00170	0,17365	-0,0094 D
180°	$11^\circ 23'$	0,9610	1,5554	1,5865	0,0097 D	0,00000	0,00000	-0,0095 D
Summa						0,21864	11,43006	

Bei $\gamma = 180^\circ$ erhält man genau $h_1 = 0,00969$, durch Formel 2 $h_1 = 0,00966$, durch Formel 3 $h_1 = 0,00960$, also auch hierfür liefert noch 2 genauere Resultate als 3. Da jedoch 3 weit bequemer zur Rechnung ist, haben wir damit die Werte für h_1 von $\gamma = 90^\circ$ bis $\gamma = 180^\circ$ bestimmt. Nach obigen Zahlen wäre h_1 bei $\gamma = 90^\circ$ um $0,00019$ zu klein, bei $\gamma = 180^\circ$ um $0,00009$. Damit haben wir für diese beiden Punkte direkt die Korrekturen. Für die zwischenliegenden können wir sie durch lineare Interpolation ermitteln; durch den in dieser Gegend von einem linearen nicht weit entfernten Verlauf der unten folgenden Deformationskurven und durch die Kleinheit der Korrektur ist dieses Verfahren hinreichend

gerechtfertigt. Die Korrekturen sind den durch 3 erhaltenen Ausdrücken zuzuzählen.

Auf diese Weise entstanden die in der Tabelle gegebenen Werte für h_1 von $\gamma = 90$ bis 180° . Für sämtliche Werte wurde schliesslich die fünfte Decimale nur zur Korrektur der vierten benutzt; da dann bei $\gamma = 90^\circ$ das genaue und das durch 2 berechnete Resultat nur um $0,0001$ D differieren, kann man die Kurven als in einander übergend betrachten, so dass eine stätige Kurve resultiert. Der Fehler hat keine nennbare Grösse.

Mit dem so bestimmten h_1 wurde die siebente und achte Kolonne berechnet; es ergibt sich dann als Mittelwert der h_1 :

$$h_m = \frac{\sum h_1 \sin \gamma}{\sum \sin \gamma} = 0,0191 \text{ D.}$$

Die andere Methode liefert:

$$h_m = \frac{3\theta}{\theta_m} \sin^2 \frac{a_s}{2R} \text{ D} = 0,0192 \text{ D.}$$

Man sieht fast eine absolute Übereinstimmung, ein schönes Zeichen für die Richtigkeit der Werte h_1 . $h_1 - h_m$ lieferten schliesslich die neunte Kolonne, und so ergaben sich die wirklichen Geoiddeformationen h .

II. Nordeuropäisches Inlandeis.

$\frac{bs}{R}$	ϑ	$1 - k^2$	$E\left(\frac{\pi}{2} k\right)$	$F\left(\frac{\pi}{2} k\right)$	h_1	$h_1 \sin \gamma$	$h_1 - h_m = h$
0°	0°	—	1,5708	—	0,0549 D	0,00000	0,0488 D
10°	$51^\circ 28'$	—	1,2919	—	0,0452 D	0,00785	0,0391 D
$12^\circ 47' 40''$	90°	—	1,0000	—	0,0350 D	—	0,0289 D
15°	$58^\circ 36,4'$	0,2714	1,2296	2,1199	0,0268 D	—	0,0207 D
20°	$39^\circ 54,9'$	0,5883	1,3941	1,7857	0,0187 D	0,00640	0,0126 D
25°	$30^\circ 58,95'$	0,7350	1,4610	1,6776	0,0155 D	—	0,0094 D
30°	$25^\circ 29,9'$	0,8147	1,4953	1,6523	0,0121 D	0,00605	0,0060 D
40°	$19^\circ 0,72'$	0,8939	1,5283	1,6152	0,0091 D	0,00585	0,0030 D
50°	$15^\circ 17,2'$	0,9305	1,5431	1,5994	0,0073 D	0,00559	0,0012 D
60°	$12^\circ 52,5'$	0,9503	1,5511	1,5908	0,0062 D	0,00537	+0,0001 D
70°	$11^\circ 12,6'$	0,9623	1,5558	1,5860	0,0053 D	0,00498	—0,0008 D
80°	$9^\circ 58,9'$	0,9699	1,5590	1,5828	0,0048 D	0,00473	—0,0013 D
90°	$9^\circ 3,9'$	0,9752	1,5610	1,5807	0,0044 D	0,00440	—0,0017 D
100°	—	—	—	—	0,0040 D	0,00394	—0,0021 D
110°	—	—	—	—	0,0038 D	0,00357	—0,0023 D
120°	—	—	—	—	0,0036 D	0,00312	—0,0025 D
130°	—	—	—	—	0,0034 D	0,00260	—0,0027 D
140°	—	—	—	—	0,0033 D	0,00212	—0,0028 D
150°	—	—	—	—	0,0032 D	0,00160	—0,0029 D
160°	—	—	—	—	0,0031 D	0,00106	—0,0030 D
170°	—	—	—	—	0,0031 D	0,00054	—0,0030 D
180°	—	—	—	—	0,0031 D	0,00000	—0,0030 D
Summa						0,06977	

Es wären die gleichen Bemerkungen wie bei Nordamerika hinzuzufügen. Für $\gamma = 90^\circ$ erhält man nach der genauesten Methode 0,00435 und ganz denselben Wert durch 2, während 3 0,00433 liefert. Bei $\gamma = 180^\circ$ hat man genau 0,00307, nach 3: 0,00306. Auf die Werte h_i zwischen 90° und 180° ist daher additiv die Gröfse 0,00001 zu verteilen, soweit das überhaupt möglich ist. Als Mittelwerte erhält man:

$$1) \quad h_m = \frac{\sum h_i \sin \gamma}{\sum \sin \gamma} = 0,0061 D,$$

$$2) \quad h_m = \frac{3\theta}{\theta_m} \sin^2 \frac{a_s}{2R} D = 0,0061 D.$$

Es ist also innerhalb der festgehaltenen Genauigkeitsgrenzen eine absolute Übereinstimmung erzielt. Die Kolumne $\sin \gamma$ habe ich fortgelassen, weil sie genau wie in der ersten Tabelle gelaute hätte.

III. Das heutige antarctische Inlandeis.

$\frac{bs}{R}$	ϑ	$1-k^2$	$E\left(\frac{\pi}{2}k\right)$	$F\left(\frac{\pi}{2}k\right)$	h_i	$h_i \sin \gamma$	$h_i - h_m = h.$
0°	0°	—	1,5708	—	0,0856 D	0,00000	0,0708 D
10°	$30^\circ 7,6'$	—	1,4666	—	0,0799 D	0,01387	0,0651 D
20°	90°	—	1,0000	—	0,0545 D	0,01864	0,0397 D
25°	$53^\circ 20,9'$	0,3563	1,2743	1,9998	0,0382 D	—	0,0234 D
30°	$42^\circ 8,3'$	0,5499	1,3753	1,8140	0,0307 D	0,01535	0,0159 D
40°	$30^\circ 30,7'$	0,7422	1,4641	1,6900	0,0225 D	0,01446	0,0077 D
50°	$24^\circ 15,6'$	0,8312	1,5022	1,6443	0,0180 D	0,01379	0,0032 D
60°	$20^\circ 19,3'$	0,8794	1,5223	1,6216	0,0151 D	0,01308	+0,0003 D
70°	$17^\circ 37,35'$	0,9083	1,5342	1,6088	0,0131 D	0,01231	-0,0017 D
80°	$15^\circ 40,4'$	0,9270	1,5417	1,6008	0,0117 D	0,01152	-0,0031 D
90°	$14^\circ 12,9'$	0,9397	1,5468	1,5954	0,0106 D	0,01062	-0,0042 D
100°	—	—	—	—	0,0098 D	0,00965	-0,0050 D
110°	—	—	—	—	0,0092 D	0,00865	-0,0056 D
120°	—	—	—	—	0,0087 D	0,00753	-0,0061 D
130°	—	—	—	—	0,0083 D	0,00636	-0,0065 D
140°	—	—	—	—	0,0080 D	0,00514	-0,0068 D
150°	—	—	—	—	0,0078 D	0,00390	-0,0070 D
160°	—	—	—	—	0,0076 D	0,00260	-0,0072 D
170°	—	—	—	—	0,0075 D	0,00130	-0,0073 D
180°	—	—	—	—	0,0075 D	0,00000	-0,0073 D
Summa						0,16877	

Für $\gamma = 90^\circ$ ist nach der genauesten Methode $h_i = 0,01063 D$ nach 2: $h_i = 0,01058 D$ nach 3: $h_i = 0,01051 D$. Mit vier Stellen gehen also 1 und 2 ineinander über. Die nach 3 berechneten Werte bedürfen bei 90° einer Korrektur von +0,00012 D und bei 180° einer von +0,00006 D, weil hier die resp. Werte 0,00749 und 0,00743 lauten. Auf die Werte zwischen 90 und 180° sind also 0,00006 D zu verteilen. Die Resultate giebt die Tabelle. Als Mittelwert erhält man:

$$1) \quad h_m = \frac{\Sigma h_i \sin \gamma}{\Sigma \sin \gamma} = 0,0147 D,$$

$$2) \quad h_m = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \sin^2 \frac{a_s}{2R} D = 0,0148 D;$$

die Übereinstimmung ist wiederum nahezu absolut.

IV. Der antarktische Eisring.

Seine Wirkung bestimmen wir durch die Differenz zweier Eis-kalotten, resp. zweier Kreisscheiben mit den Radien $\frac{a_s}{R} = 26^\circ$ und $\frac{a_s}{R} = 20^\circ$. Die Wirkung der letzteren ist in der dritten Tabelle gegeben, die Wirkung der ersteren fügen wir bei und geben in einer neuen Kolumne die Differenz beider Wirkungen, mithin die Wirkung des Ringes.

Die beiden Werte bei 90° lauten: 0,01797 und nach 3: 0,01764 (nach 2 wäre es 0,01787), bei $\gamma = 180^\circ$ haben wir die Werte 0,01263 und 0,01274. Hieraus sind die Korrekturen berechnet. Wir haben die Rechnung hier nicht für die ganze Kugeloberfläche ausgeführt, weil wir die Werte von h_i für $\gamma = 0$ bis 30° nicht brauchen. Infolge dessen konnten wir den Mittelwert auch nur nach der zweiten Methode bestimmen, es ergibt sich:

$$h_m = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \sin^2 \frac{a_s}{2R} D = 0,0249 D.$$

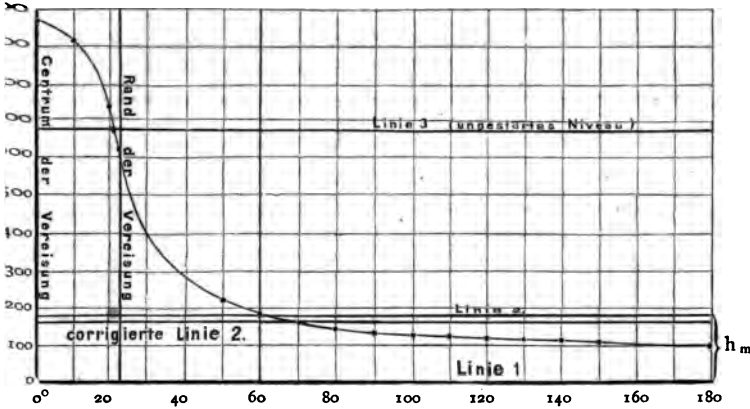
Hiervon den Mittelwert der inneren Kalotte subtrahiert, erhält man als mittlere Wirkung des Ringes $h_m = 0,0101 D$. Im Vertrauen auf die gute Übereinstimmung der früheren Resultate haben wir hier von einer Kontrolle abgesehen.

$\frac{b_s}{R}$	φ	$1-k^2$	$E\left(\frac{\pi}{2} k\right)$	$F\left(\frac{\pi}{2} k\right)$	h_i (Ca- lotte 26°)	h_i (Ring)	h (Ring)
40°	41° 7,6'	0,5674	1,3838	1,8008	0,0389 D	0,0164 D	0,0063 D
50°	32° 9,6'	0,7167	1,4528	1,7036	0,0308 D	0,0128	0,0027
60°	26° 44,2'	0,7976	1,4880	1,6609	0,0256	0,0105	+0,0004
70°	23° 5,5'	0,8462	1,5085	1,6371	0,0222	0,0091	-0,0010
80°	20° 29,1'	0,8775	1,5215	1,6225	0,0197	0,0080	-0,0021
90°	18° 33'	0,8988	1,5303	1,6130	0,0180	0,0074	-0,0027
100°	—	—	—	—	0,0166	0,0068	-0,0033
110°	—	—	—	—	0,0155	0,0063	-0,0038
120°	—	—	—	—	0,0147	0,0060	-0,0041
130°	—	—	—	—	0,0140	0,0057	-0,0044
140°	—	—	—	—	0,0135	0,0055	-0,0046
150°	—	—	—	—	0,0131	0,0053	-0,0048
160°	—	—	—	—	0,0128	0,0052	-0,0049
170°	—	—	—	—	0,0127	0,0052	-0,0049
180°	—	—	—	—	0,0126	0,0051	-0,0050

Wir wenden uns zur Diskussion dieser numerischen Daten.

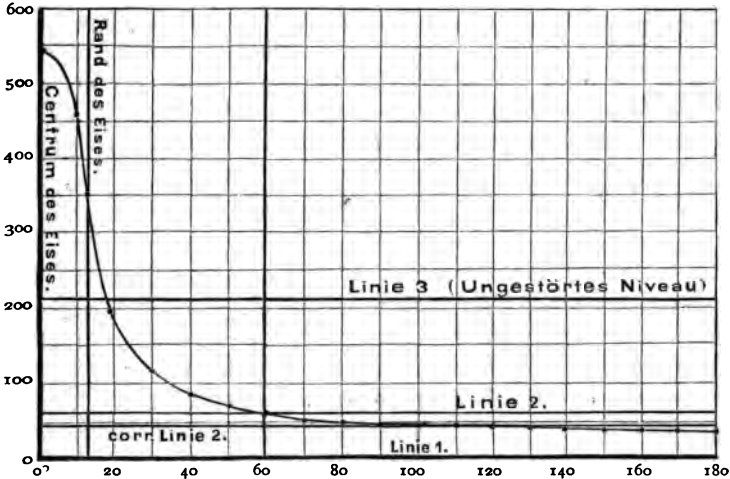
Graphische Darstellung in Kurven.

Man gebe zunächst die vier Deformationskurven, weil man dadurch besten eine Übersicht über den Verlauf und die Größe der Abweichungen erhält. Als Abscissen sind die Centraldistanzen in Graden zu tragen, die Ordinaten sind die zugehörigen h , und zwar in Zehntausendstel von D , also wie sie in den Tabellen enthalten sind; die Verbindung der Endpunkte liefert die Deformationskurve.

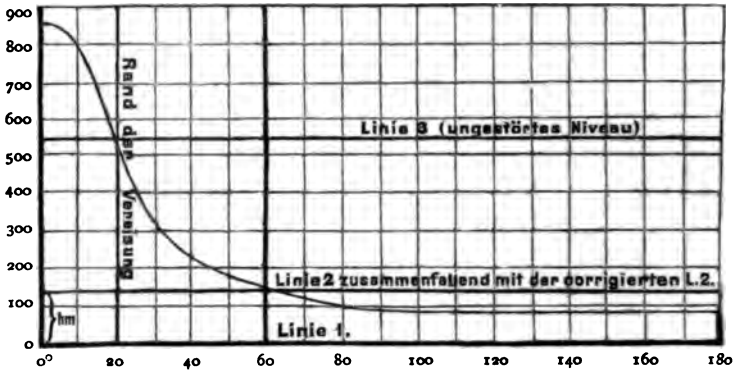


Figur 6. Deformationscurve der Nordamerikanisch-Grönländischen Vereisung.

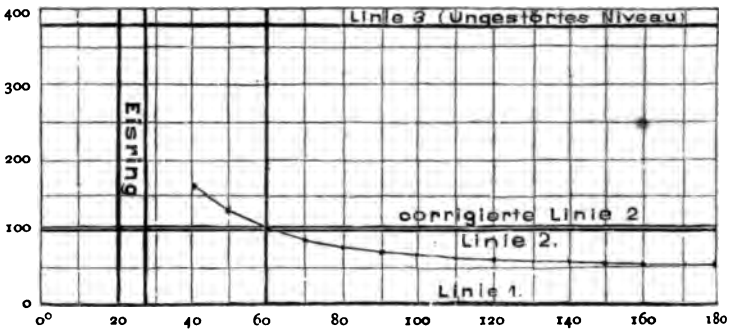
Zum Zwecke der leichteren Ermittlung genauer h , hatte ich die Kurven in größerem Maßstabe ausgeführt, als es hier in der Darstellung möglich ist. Meine Zeichnung gestattete die Werte von h , bis Zehntausendstel von D ohne Fehler einfach abzulesen.



Figur 7. Deformationskurve der Nordeuropäischen Vereisung.



Figur 8. Deformationscurve der heutigen antarctischen Vereisung.



Figur 9. Deformationscurve des hypothetischen Eisringes am Südpol.

In Bezug auf Linie 1 stellen die Kurven die Lage der Niveauflächen dar, welche ein gleich großes Potential hat, wie Linie 1 vor Hinzutritt des Eises. Um die Störungen des Meeresspiegels zu erhalten, muß ich überall das betreffende h_m subtrahieren; das geschieht in der Zeichnung, indem ich die Kurve auf eine Linie 2 beziehe, die im Abstand h_m über 1 parallel einherzieht. Der Abstand der Kurven von diesen Linien giebt die Größen h , also die Störungen des Meeresspiegels.

Behinderung der freien Schwankungen durch Festlandmassen.

Sowohl in der Einleitung wie in den soeben gegebenen Kurven wurde der Meeresspiegel konstruiert, indem wir von der Voraussetzung ausgingen, daß bei einem Wasserspiegel die Summe aller Erhebungen und Vertiefungen 0 werden muß. Wir subtrahierten den Mittelwert h_m von jedem einzelnen h_i und hätten so unzweifelhaft — abgesehen von der Nichtparallelität der Niveauflächen, die wir vernachlässigen konnten — die Störungen des Meeresspiegels erhalten, wenn die ganze Erdkugel mit Wasser bedeckt wäre und dieses Wasser ungehindert

wanken könnte. Den Fehler,* den dieses Verfahren bei der tatsächlichen Verteilung von Wasser und Land involviert, will ich zunächst schematisch erklären.



Figur 10.

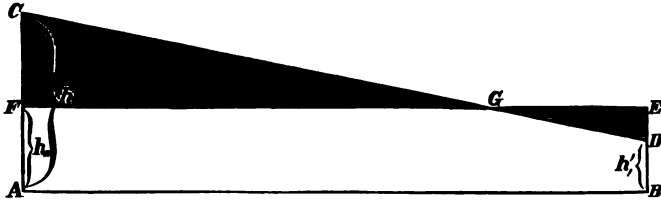
Die Wasserbedeckung W sei durch die Festlandsmassen C_1 und C_2 unterbrochen. N_1 sei das ungestörte Niveau, N_2 sei auf obigem Wege durch Subtraktion des Mittelwertes aus den berechneten Störungen, die durch C_1 verursacht sind, konstruiert. Die Störungen von C_2 interessieren uns nicht. Bei dieser Konstruktion sind nun folgende Fehler begangen:

1) Es ist angenommen, daß sich innerhalb C_1 der Meeresspiegel erhoben hat, und um die Wassermenge dafür zu schaffen, mußte an anderen Orten eine Senkung angenommen werden. Nun hat sich zwar innerhalb C_1 das Geoid erhoben, nicht aber der Meeresspiegel. Die Wassermenge also, welche in dem vertikal schraffierten Raume bei der Konstruktion vorausgesetzt ist, bleibt tatsächlich über die Meere verteilt. Ich korrigiere diesen Fehler, indem ich den Betrag berechne, um welchen sich der Meeresspiegel heben würde, natürlich allgemein, wenn ich die Wassermenge des schraffierten Raumes über ihn verteile.

2) Infolge der Wirkung von C_1 sei der Meeresspiegel innerhalb C_2 gesenkt. Dann ist bei der Konstruktion angenommen, daß die vorher im horizontal schraffierten Flächenstück gelegene Wassermenge dazu benutzt ist, um an anderen Orten eine Erhebung des Wasserspiegels zu bewerkstelligen. Da nun tatsächlich in dem Flächenstück kein Wasser vorhanden war und nur eine Senkung des Geoids dort erfolgte, muß die Wassermenge, welche zur Bildung der Erhebungen notwendig ist, dem allgemeinen Niveau entnommen werden. Ich berücksichtige also diesen Punkt, indem ich den Betrag berechne, um welchen das allgemeine Niveau gesenkt werden mußte, um den horizontal schraffierten Raum zu füllen. — Die Differenz von 1 und 2 ist also zu bestimmen, um den mit der Subtraktion von h_m verbundenen Fehler zu minimieren.

In unserem Falle kompliziert sich das Problem beträchtlich. Die Wirkung des Raumes innerhalb der Inlandeismassen selbst ist leicht zu bestimmen, weil man den Kubikinhalt dieses Raumes einfach berechnen kann. Doch es kommen auch sämtliche Kontinentalmassen in Betracht,

innerhalb deren teils Hebung teils Senkung ist. Ihren Einfluss werden wir nur angenähert bestimmen können.



Figur 11.

AB sei ein beliebiger Schnitt durch einen Kontinent, CD der Verlauf der Deformationskurve darin; durch Beziehung auf EF erhalte ich die zu korrigierenden Störungen h . Es ist ersichtlich, dass CFG den Teil repräsentiert, welcher eine Hebung, DEG den, welcher eine Senkung des allgemeinen Niveaus zur Folge haben wird.

Ihre Differenz d ist doch nun offenbar:

$$d = AB \left\{ \frac{h_1 + h'_1}{2} - h_m \right\}.$$

Da CD eine Kurve ist, muß ich nicht $\frac{h_1 + h'_1}{2}$ sondern den Mittelwert der h_i auf der Strecke AB ermitteln, ich nenne ihn h'_m und erhalte

$$d = AB \{ h'_m - h_m \}.$$

Da diese Gleichung für jedes Profil richtig ist, gilt sie auch für den ganzen Kontinent, nur ist dann statt der Linie AB das Areal a des Kontinentes und statt h'_m der Mittelwert der h_i innerhalb des Kontinentes zu setzen. So resultiert:

$$d = a \{ h'_m - h_m \}.$$

Hieraus habe ich den hindernden Einfluss der Festlandmassen abgestimmt, indem ich von der Annahme Helmert's der Kreiscylinder für die Kontinente ausging. Nur mußten die Radien etwas vergrößert werden, weil die Küstenböschungen auch in Betracht zu ziehen: Helmert giebt die Vergrößerung für ebene Flächen, seine Zahlen waren also lediglich in unsere sphärische Terminologie zu übertragen. So erhält man für die Radien der einzelnen Kontinente folgende Werte:

Eurasien	39,5 °
Afrika	29 ° 40'
Nordamerika	26 ° 41'
Südamerika	23 ° 11'
Australien	15 °

Die zu diesen Radien gehörenden Areale werden in das Areal des freien Meeres dividiert — es ist oben zu 6 420 000 Q.-M. angegeben — dann erhält man wieder die Anzahl von Einheiten, welche über diese Areale sein müßte, um das allgemeine Niveau um eine Einheit zu

cken; diese ist dann also lediglich in die Gröfse $h'_m - h_m$ zu dividieren und die Korrektion für den betreffenden Kontinent zu erhalten.

Die Werte h'_m leitete ich direkt aus den Kurven ab nach einem Verfahren, welches der zweiten Art der näherungsweise Quadratur (Trapezform) entsprechen würde, und zwar bestimmte ich h'_m für den Radius, welcher den Kontinentalkreisylinder halbiert, und für den Radius, welcher ihn tangiert, an der Berührungsstelle. Der letztere Wert ist die obere resp. untere Grenze innerhalb des Kontinentes. — Beide Werte wichen nur unerheblich von einander ab, so daß es nicht notwendig war, auch noch für zwischenliegende Schnitte die h'_m zu ermitteln. Man konnte aus den beiden berechneten Werten das h'_m des Kontinentes schätzen; es liegt natürlich näher an dem h'_m des Durchmessers als an dem der Tangente.

Weit überwiegend kommen die vereisten Areale selbst in Betracht, deren Gröfse oben angegeben ist. Für sie kann man das h'_m nach der von Helmert gegebenen genaueren Formel berechnen, wonach der Mittelwert der h_i innerhalb der wirkenden Masse selbst:

$$h_{m_i} = \frac{4\theta}{\theta_m} \frac{a_c}{\pi R} D = \frac{8\theta}{\theta_m} \frac{1}{\pi} \sin \frac{a_s}{2R} D$$

Wo die vereisten Areale zum Teil mit den Kontinentalmassen zusammenfallen, habe ich den Einfluß der eisfreien Teile zu ermitteln gesucht, indem ich sie in sphärische Zonen konzentrisch zum Centrum der Vereisung zerlegte. So zerfiel der eisfreie Teil Eurasiens in drei Zonen, bei Nordamerika genügte eine. Die unten in tabellarischer Form folgenden Resultate, in Bruchteilen von D , stellen also die Betrag dar, um welche das allgemeine Niveau sich hebt (+) oder senkt (-), wenn man nicht eine zusammenhängende, sondern eine von Festlandmassen unterbrochene Wasserbedeckung annimmt. — Ich bringe diesen Faktor in der graphischen Darstellung zur Anschauung, indem ich Parallele zu den Grundlinien ziehe. Diese verlaufen unter den bisherigen Linien 2, wenn ich eine Hebung, über den Linien 2, wenn ich eine Senkung habe, die positiven d sind also von den h_m zu subtrahieren, die negativen zu addieren:

1. Nordamerikanisch-Grönländische Vereisung.

Vereistes Gebiet	+ 0,0036 D
Eisfreies Nordamerika	+ 0,0005 D
Nordamerika	— 0,0001 D
Eurasien	+ 0,0002 D
Nordamerika	— 0,0005 D
Australien	— 0,0002 D
Antarctis	— 0,0004 D
Summe:	+ 0,0031 D

2. Nordeuropäisches Inlandeis.

Vereistes Gebiet	+ 0,0008 D
Eurasien (eisfreier Teil)	+ 0,0006 D
Nordamerika	+ 0,0001 D
Südamerika	— 0,0001 D
Afrika	+ 0,0001 D
Australien	0,0000...
Antarctis	0,0000...
Summe:	+ 0,0015 D

3. Die heutige antarctische Vereisung.		4. Der hypothetische Eisrand am Südpol.	
Vereistes Gebiet	+ 0,0025 D	Inneres und Antarctis	+ 0,0000
Eurasien	— 0,0011 D	Eurasien	— 0,0000
Afrika	— 0,0004 D	Afrika	— 0,0000
Nordamerika	— 0,0005 D	Nordamerika	— 0,0000
Südamerika	— 0,0001 D	Südamerika	— 0,0000
Australien	<u>0,0000...</u>	Australien	<u>0,0000</u>
	Summe: + 0,0004 D		Summe: — 0,0000

Bedeutend sind diese Korrekturen nicht, doch wollte ich sie der Vollständigkeit halber nicht unbestimmt lassen.

Wirkung eines Attraktionscentrums auf eine gleichmäßig mit Wasser bedeckte Kugel.

Bei Betrachtung der Beziehung, in welche die Linien z zu σ Kurven treten, zeigt sich, daß diese Linien in allen vier Fällen σ Kurven in der Nähe der Centraldistanz 60° schneiden; bei dem nordamerikanischen Inlandeise mit dem kleinsten Radius liegt der Schnittpunkt am weitesten, doch sind die Differenzen unerheblich. Der hieraus sich ergebende Schluß, daß der Radius, also die Ausbreitung der wirkenden Masse nur von geringem Einfluß ist, — eine neue Rechtfertigung der Methode 3, in welcher die wirkende Masse im Centrum vereinigt gedacht wurde. — läßt sich folgendermaßen mathematisch beweisen.

Um den Schnittpunkt der Kurve mit der Linie z zu finden, nenne ich den Ausdruck für den Mittelwert h_m gleich dem Ausdruck für die Erhebung h , setze, ich erhalte also folgende Gleichung:

$$\frac{3\Theta}{\Theta_m} \sin^2 \frac{a_s}{2R} D = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{z}{\pi} \sin \frac{b_s}{2R} \left\{ E \left(\frac{\sin \frac{a_s}{2R}}{\sin \frac{b_s}{2R}} \right) - (1-k^2) F(k) \right\} D$$

oder, wenn ich zur Abkürzung $\frac{a_s}{R} = \alpha$ und $\frac{b_s}{R} = \gamma$ setze:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{z}{\pi} \sin \frac{\gamma}{2} \left\{ E \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right) - \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \right) F \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right) \right\}$$

F und E sind die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. Ich ziehe alle Ausdrücke unter ein Integral von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zusammen und entwickle die Größen:

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \sin^2 \varphi} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \sin^2 \varphi}$$

1 dem binomischen Satz. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{2}{\pi} \sin \frac{\gamma}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin^4 \frac{\gamma}{2}} \sin^4 \varphi + \dots - 1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \sin^2 \varphi + \\ &\quad - \frac{3}{8} \frac{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin^4 \frac{\gamma}{2}} \sin^4 \varphi + \dots + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin^4 \frac{\gamma}{2}} \sin^2 \varphi + \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \frac{\sin^6 \frac{\alpha}{2}}{\sin^6 \frac{\gamma}{2}} \sin^4 \varphi + \dots \right\} \end{aligned}$$

Gleichung wird durch $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ dividiert, $\sin \frac{\gamma}{2}$ bringe ich unter das Integralzeichen. Dann resultiert folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sin \frac{\gamma}{2}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\gamma}{2}} (\sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi + \dots \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} d\varphi &= \frac{\pi}{2} ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi &= \frac{1}{16} \int_0^{\pi} \sin^2(2\varphi) d(2\varphi) = \frac{\pi}{32} . \end{aligned}$$

Mithin geht unsere Gleichung über in:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} + \frac{\pi}{3^2} \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\gamma}{2}} + \dots$$

oder durch $\frac{\pi}{2}$ dividiert und mit $\sin \frac{\gamma}{2}$ multipliziert:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\gamma}{2}} + \dots$$

Wir erhalten somit eine transcendente Gleichung zur Bestimmung des Wertes $\gamma = \frac{b_s}{R}$, bei welchem $h_m = h_1$ werden muß. Durch diese Gleichung ist der Beweis von dem geringen Einfluß der Flächenveränderung oder des Radius auf die betreffende Entfernung γ erbracht, weil das Überwiegen des vom Radius unabhängigen Gliedes deutlich hervortritt. Weitere Glieder der Reihe werden nur noch von dem verschwindendem Einfluß sein.

Falls der Radius nicht allzugroß ist, wird sich daher der Scheitelpunkt der Linie z mit der Kurve nur wenig von der Centraldistanz 60° entfernen. Mit abnehmendem Radius nähert sich $\frac{b_s}{R}$ 60° an und erreicht diesen Wert für $\alpha = 0$, weil dann alle anderen Glieder der Reihe verschwinden und $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$ mithin $\frac{\gamma}{2} = 30^\circ$ wird. Auf einer gleichmäßig mit Wasser bedeckten Kugel wird somit ein Attraktionszentrum bis zur Winkeldistanz 60° eine Erhebung und von 60° an eine Senkung des Wasserspiegels zur Folge haben. Diese interessante Erscheinung folgt einfach, wenn man $\alpha = 0$ setzt.

Doch kehren wir zu den natürlichen Verhältnissen zurück.

Die Wirkung der Wasserabsorption.

Weit kürzer läßt sich die Bedeutung der Wasserabsorption behandeln. Wir werden darnach trachten müssen, auch hier die Resultate als Funktionen der Mächtigkeit D zu erhalten, damit ein direkter Vergleich mit dem ersten Punkte auch ohne Kenntnis von D möglich wird. Nach dem schon Gesagten hat das Eis die mindeste Schwere. Die vereisten Areale werden successive in das Areal der eisfreien Meere dividiert und die resultierende Zahl in die Mächtigkeit D der Eislage, dann erhält man die Mächtigkeit der Eislage, welche entsteht, wenn man das Inlandeis über die eisfreien Meere verteilt. Da Eis aber gleichzeitig zu Wasser wird, resp. umgekehrt, ist das Resultat

noch mit der Dichtigkeit des Eises $\theta = 0,92$ zu multiplizieren. Wenn man die Areale der Vereisungen in das eisfreie Meer (6420000 QM.) dividiert, erhält man die Zahlen der ersten Kolumne, die zweite giebt die Resultate:

Nordamerik. Grönl. Inlandeis	17,78	0,0517 D
Nordeuropäisches Inlandeis	55,82	0,0165 D
Heutige antarktische Vereisung	22,98	0,0400 D
Antarctischer Eisring	33,41	0,0275 D.

Beim Entstehen einer Vereisung geben diese Zahlen den Betrag der allgemeinen Senkung des Meeresniveaus an, beim Schwinden die Hebung. Wir werden sie in der graphischen Darstellung zur Anschauung bringen, indem wir in den betreffenden Abständen Parallelkurven konstruieren oder, was wieder einfacher ist, die Kurven auf Linien beziehen, die in den betreffenden Abständen über den korrigierten h_m Linien verlaufen. Die Beziehung der Kurven auf die so entstehenden Linien 3 bringt das Verhältnis der gestörten Meeresfläche zu der ungestörten, wie sie vor Eintritt der betreffenden Vereisung war, in anschaulicher Weise zum Ausdruck.

Wir ersehen hier, dafs infolge der Einzelwirkung der nordamerikanischen Vereisung nur innerhalb des vereisten Areales selbst eine Hebung des Wasserspiegels hätte erfolgen können, dafs somit, weil bei Schwankungen des Meeresspiegels allein der Raum außerhalb der wirkenden Massen in Betracht kommen kann, eine allgemeine Senkung des Wasserspiegels die Folge der nordamerikanischen Vereisung während des Maximums ihrer Entfaltung war.

Die heutige antarktische Vereisung erzeugt ebenfalls eine allgemeine Senkung, denn die Linie 3 schneidet die Kurve fast genau am Rande der wirkenden Masse. Nur eine ganz geringe Hebung des Wasserspiegels kann in schmalen Saumen den Rand des Eises begleiten.

Das nordeuropäische Eis dagegen hat, wenn man seine Einzelwirkung betrachtet, an seinem Rande eine nicht ganz unbedeutende Hebung zur Folge gehabt, die allerdings schon in geringem Abstand vom Rande, ca. 6° , in eine Senkung überging. Das Maximum der Erhebung wäre 0,0139 D gewesen, also über 20 m, wenn man die Mächtigkeit gegen 2000 m ansetzt. Doch wir müssen bedenken, dafs gleichzeitig das nordamerikanische Eis existierte, dessen Centrum von dem Centrum des europäischen etwa 42° , also vom Rande etwa 30° abstand. In der Centraldistanz 30° erzeugte das nordamerikanische Eis schon eine Senkung um 0,0271 D, fast das Doppelte also der oben genannten Erhebung; das Resultat war eine beträchtliche Senkung auch am Rande des europäischen Eises. Dieses Ergebnis ändert sich nicht, wenn wir statt des vollen den halben Kreiscylinder für Skandinavien zu Grunde legen; die größte Erhebung findet dann im Centrum selber statt, doch auch diese wird noch erheblich übertroffen durch die Senkung infolge

des Einflusses von Nordamerika. So kommen wir dann schon hier durch einen Vergleich der Kurven zu dem Resultate, dafs während des Maximums der nordischen Eiszeit eine nicht unerhebliche, mit der Entfernung von den Eismassen wachsende Senkung des Meeresspiegels stattgefunden haben mufs. Zu dieser Erkenntnis bedurften wir einer Bestimmung der Mächtigkeit nicht, weil alle Faktoren als einfache Funktionen von D ermittelt und dadurch direkt mit einander vergleichbar gemacht sind.

Erscheinungen beim Abschmelzen der Gletscher.

Es ist nun wiederholt, namentlich von Penck, darauf hingewiesen, dafs die gröfsten diluvialen Versenkungen der nordischen Lande nicht mit dem Maximum der Vereisung zusammengefallen sind, sondern erst beim Abschmelzen der Gletscher erfolgten, indem dadurch den Meeren beträchtliche Wassermengen wieder zugeführt wurden. Penck erblickt in dieser Thatsache gerade eine Stütze seiner Theorie, während Dana¹⁾ sie zum Beweise gegen Croll benutzt.

Würden die heutigen antarktischen Eismassen schmelzen, so würden die nordischen Meere beträchtlich schwellen, das lehrt eine einfache Betrachtung von Kurve 3; denn was sich hier in Bezug auf Linie 3 als Senkung darstellt, bedeutet ein Ansteigen des Wasserspiegels in gleichem Betrage, wenn man aus der Zeichnung nicht die Wirkung der entstehenden, sondern die der vergehenden Vereisung ablesen will. Dieses Ansteigen würde sogar die infolge einer gleichzeitigen nordischen Vereisung eintretende Senkung des Wasserspiegels, von der wir soeben gehandelt, stellenweise überwogen haben. Schon Croll²⁾ hat diesen Punkt betont, allerdings nur in Hinsicht der Schwerpunktsverschiebung der Erde, und seinen Ausführungen eine einfache numerische Auswertung beigefügt. Doch wir lassen vorläufig den Einfluß der antarktischen Vorgänge auf die nördliche Halbkugel aufser Betracht und wenden uns zunächst der Frage zu, ob und wie weit das soeben gewonnene Resultat, dafs die beiden nordischen Vereisungen allenthalben eine Senkung des Wasserspiegels zur Folge hatten, durch Berücksichtigung der Vorgänge beim Abschmelzen der Gletscher eine Änderung erfährt.

Zu diesem Zwecke müssen wir die Flächenausdehnung, also den Radius der Kreiscylinder nun veränderlich setzen und die Bedingungen suchen, bei welchen die gröfstmögliche Erhebung des Wasserspiegels über das Ausgangsniveau eintreten wird. Wir haben es natürlich nur mit Gegenden aufserhalb der wirkenden Massen zu thun, bei Berech-

1) Silliman, Amerik. Journ. of Science. Ser. III, vol. 24. p. 98.

2) Climate and Time, cap. 23.

nung der Erhebung kommt daher nur die Formel 2 in Betracht. Nach dem Voranstehenden ist wohl verständlich:

$$h = h_1 - h_m = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{2}{\pi} \sin \frac{\gamma}{2} \left\{ E \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right) - (1 - k^2) F(k) \right\} D - \frac{3\Theta}{\Theta_m} \sin^2 \frac{\alpha}{2} D,$$

wenn α der jeweilige variable Radius des Eiskreiscylinders, γ der Centralabstand des betreffenden Ortes ist. Von h ist noch abzuziehen der Einfluß der Wasserabsorbtion, um die Deformation gegen das Ausgangsniveau zu erhalten.

Nach unserer Rechnungsart ist dieser Einfluß beim Radius α :

$h_2 = \frac{4\pi R^2 \Theta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{6420000} D$. (R in geogr. Meilen, weil der Nenner in Q.-Ml. ausgedrückt ist.) Wir erhalten somit als resultierenden Abstand vom Ausgangsniveau (Erhebung oder Senkung der Kurve über oder unter Linie 3):

$$f(\alpha) D = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{2}{\pi} \sin \frac{\gamma}{2} \left\{ E(k) - (1 - k^2) F(k) \right\} D - \frac{3\Theta}{\Theta_m} \sin^2 \frac{\alpha}{2} D + \frac{4\pi R^2 \Theta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{6420000} D.$$

Ich habe die Deformation $f(\alpha)$ genannt, um auf die Abhängigkeit vom variablen Radius das Hauptgewicht zu legen. Bei einer Senkung wird $f(\alpha)$ negativ. Aus obiger Gleichung entsteht, wenn ich die letzten beiden Ausdrücke zusammenziehe und die numerischen Werte einsetze:

$$\frac{\Theta_m}{3\Theta} f(\alpha) D = -3,7 \sin^2 \frac{\alpha}{2} D + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\gamma}{2} \left\{ E(k) - (1 - k^2) F(k) \right\} D.$$

Es ist der größtmögliche Wert von $f(\alpha)$ zu finden und der Radius α zu bestimmen, bei welchem er eintreten wird. Eine Überlegung vereinfacht die Gleichung bedeutend. Wir haben es zunächst mit der Einzelwirkung einer Vereisung zu thun. Da die Deformationskurven stetig gegen die wirkenden Massen ansteigen, werden die $f(\alpha)$ bei allen Werten von α mit abnehmendem γ , d. h. mit der Annäherung an die wirkenden Massen hin wachsen. Das Maximum aller $f(\alpha)$ wird also jedenfalls am Rande der wirkenden Masse, d. h. bei $\alpha = \gamma$ stattfinden müssen. Um es zu bestimmen, können wir daher $\alpha = \gamma$ setzen, dann wird $1 - k^2 = 0$ und

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \left[\sin \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

mithin geht unsere Gleichung in die folgende über, wenn wir D fortlassen:

$${}_{3(\theta)} f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\alpha}{2} - 3,7 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Aus dieser Gleichung können wir das Maximum von $f(\alpha)$ bestimmen und den Radius α , bei welchem es eintritt.

Wollen wir für irgend eine andere Centraldistanz γ das Maximum finden, müßten wir die ausführliche Gleichung beibehalten; selbstverständlich ist das aber keine allgemeine Aufgabe, sondern kommt auf den einzelnen Fall an. Das absolute Maximum interessiert uns vornehmlich und dieses finden wir aus obiger Gleichung.

Wir berechnen zunächst den Radius, bei welchem $f(\alpha)$ ein Maximum wird, indem wir die Gleichung nach α differenzieren und den ersten Differentialquotienten 0 setzen. So ergibt sich:

$$\frac{1}{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} - 3,7 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

$0 = \cos \frac{\alpha}{2}$ ist ausgeschlossen, weil dann $\alpha = 180^\circ$ wäre, mithin die Masse die ganze Erde bedeckte, also bleibt:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\pi \cdot 3,7} \quad \alpha = 9^\circ 52' 14''$$

Dafs für $\alpha = 9^\circ 52' 14''$ in der That $f(\alpha)$ ein Maximum wird, sehen wir durch nochmalige Differentiation, denn

$$-\frac{1}{\pi} \sin \frac{\alpha}{2} - 3,7 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 3,7 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\pi} \sin \frac{\alpha}{2} - 3,7 \cos \alpha$$

ist jedenfalls für $\alpha = 9^\circ 52' 14''$ negativ. Berechnen wir für $\gamma = \alpha = 9^\circ 52' 14''$ den Wert von $f(\alpha)$, so ergibt sich:

$$f(\alpha)D = \frac{3(\theta)}{(\theta)_m} \left\{ \frac{2}{\pi} \sin \frac{\alpha}{2} - 3,7 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} D = 0,0135 D.$$

Dieses ist der Maximalwert der Erhebung des Wassers über den ungestörten Meeresspiegel, der überhaupt bei einer einzelnen Gletscherentfaltung eintreten kann. Er tritt ein, wenn das Areal dem Radius $9^\circ 52' 14''$ entspricht, und können wir daher diesen Radius als den Radius der maximalen Erhebung (am Rande wie überhaupt) bezeichnen.

Mit den thatsächlichen Vereisungen verglichen würde dieser Radius schon ein Schwinden des Eises bezeichnen, mithin ein Stadium, in welchem auch die Mächtigkeit schon erheblich abgenommen hatte. Das nordamerikanische Inlandeis war bei diesem Radius schon sehr beträchtlich zusammengeschmolzen und auch das skandinavische hatte seinen Höhepunkt lange verlassen. Die Mächtigkeit $D = 1000$ m würde somit wohl kaum mehr erreicht; es fehlt mir jeder Anhalt um eine bestimmte Zahl zu bieten, doch stehe ich wahrscheinlich über dem richtigen Werte, wenn ich ausspreche, dafs die grösstmögliche Erhebung des Wasserspiegels unter der Wirkung einer Vereisung etwa 12 m betragen hat.

Annähernd giebt diese Zahl auch den Betrag der Erhebung, welche unter dem Zusammenwirken der beiden nordischen Vereisungen im Maximum entstehen konnte. Wir wollen dafür wenigstens eine Schätzung versuchen. — Als das nordamerikanische Eis bis zu dem Radius $9^{\circ} 52' 14''$ zusammengeschmolzen war und somit an seinem Rande die maximale Erhebung des Wasserspiegels von $0,0135 D$ eintrat, hatte das skandinavische Eis etwa den Radius $5^{\circ} 29'$ erreicht, wenn wir annehmen, daß beide Eismassen beim Rückzug dasselbe Größenverhältnis beibehielten wie beim Maximum der Vergletscherung. Die Centra waren bei der größten Entfaltung etwa 42° entfernt, sie mögen sich jetzt etwa bis auf 25° genährt haben, indem das Centrum des nordamerikanischen Eises sich von Southampton in der Richtung auf die Discoinsel hin verlegte, das des nordeuropäischen sich der norwegischen Küste näherte. Dann war der Rand des amerikanischen Eises vom Centrum des europäischen etwa 15° entfernt. Wir finden den Einfluß des europäischen durch die genaue Formel pag. 59, indem wir $\gamma = 15^{\circ}$ $\alpha = 5^{\circ} 29'$ setzen, und erhalten durch Auswertung der elliptischen Integrale das Resultat, daß das europäische Eis am Rande des amerikanischen den Wasserspiegel höchstens um $0,0002 D$ gehoben hat. So resultiert in Summa eine Hebung um $0,0137 D$. Es ist dieses die größtmögliche Hebung des Wasserspiegels in der Nähe, also unter der Hauptwirkung des amerikanischen Eises; sie weicht von dem obigen Maximalwert nur unerheblich ab.

Es könnte die Frage entstehen, ob nicht ein zweites Maximum am Rande des amerikanischen Eises eintreten wird, wenn das europäische dort die maximale Hebung erzeugt. Ein Maximum im mathematischen Sinne wohl, doch wird es kleiner sein, als der soeben gegebene Wert, weil am Rande des amerikanischen Eises der Einfluß dieses wegen der größeren Flächenausdehnung stets überwiegen muß. Es läßt sich das auch rechnerisch beweisen, doch übergehe ich die hierher gehörigen Zahlen.

Anders ist es am Rande der skandinavischen Gletscher, weil diese stets beträchtlich kleiner waren als die amerikanischen, hierfür folgen sogleich die einschlägigen Daten.

Wir benutzen den halben Kreiscylinder mit dem Radius 18° . Das Maximum der Erhebung tritt dann natürlich im Centrum selber ein bei $\gamma = 0$, wofür das elliptische Integral zweiter Gattung $E = 1,5708$ ist; das Integral E ist das einzige, welches in Betracht kommt, weil wir hier, im Innern, Formel 1 anzuwenden haben. An Stelle der obigen Gleichung erhalten wir somit hier die leicht zu verifizierende Form:

$$- 0,5 \cdot 3,7 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1,5708}{\pi} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\theta_m}{3\theta} f. (\alpha)$$

und nach der üblichen Rechnung $\alpha = 15^{\circ} 32'$ als den Wert, bei welchem das Maximum der Erhebung $0,0167 D$ eintreten wird, infolge

der Einzelwirkung des halben Kreiscylinders. Wenn dieser den Radius $15^{\circ} 32'$ gehabt hat, hatte ein gleich großer ganzer den Radius $10^{\circ} 58'$, mithin die gleichzeitige amerikanische Vereisung den Radius $19^{\circ} 44'$. Den Abstand der Centra habe ich auf einem Globus zu 34° geschätzt. Mithin war die Wirkung des amerikanischen Eises auf das Centrum des europäischen — $0,0275 D$, so daß trotz der maximalen Erhebung von $+ 0,0167 D$ noch eine Senkung des Wasserspiegels um $0,0108 D$ resultiert. Hier ist also wegen des größeren Areales der Einfluß des amerikanischen Eises trotz der weiteren Entfernung noch größer als der des europäischen.

Wir werden deshalb den maximalen Betrag, um welchen der Wasserspiegel an der skandinavischen Küste überhaupt steigen konnte, finden, wenn wir den maximalen Einfluß des amerikanischen Eises auf die skandinavische Küste ermitteln und dazu den gleichzeitigen Einfluß des europäischen Eises addieren. Hier hätten wir also jene Rechnung anzustellen, welche wir vorher übergingen, weil dort eine einfache Überlegung das Überwiegen des amerikanischen Eises unzweifelhaft machte.

Eine strenge Rechnung vermag ich nicht zu bieten, weil die notwendige Differentiation der elliptischen Integrale zu äußerst verwickelten Ausdrücken führt und wir auch γ variabel setzen müßten. Dagegen führt eine Diskussion der Kurven zu einem genügenden Ziele. Die kleinste Centraldistanz, die möglich ist, hätte den Winkel 25° ; offenbar ist die Annahme der kleinstmöglichen Centraldistanz günstig. Die drei ersten Kurven zeigen nun bei $\gamma = 25^{\circ}$ eine Senkung des Wasserspiegels, die mit abnehmendem Radius abnimmt. Wenn wir für den Radius der maximalen Erhebung die Senkung in 25° Abstand berechnen, finden wir $0,0069 D$, also noch geringer als bei dem Radius $12^{\circ} 47' 40''$ (Skandinavien). Ob diese Senkung, die bei $\alpha = 0$ selbst 0 wird, bei weiterem Abschmelzen stellenweise in eine Hebung übergeht, kann unentschieden bleiben. Gleichzeitig nimmt das skandinavische Eis ab und mit ihm die Hebung des Wasserspiegels, die es im Centrum zu verursachen vermochte. Als das amerikanische Eis den Radius $9^{\circ} 52' 14''$ hatte, hatte das europäische ungefähr den Radius $5^{\circ} 29'$, also ein gleich großer halber Kreiscylinder den Radius $7^{\circ} 45'$; mithin läßt sich die Hebung im Centrum in diesem Stadium auf $0,0125 D$ bestimmen. Hier überwiegt also schon die Hebung die Senkung von $0,0069 D$, die das amerikanische Eis zur Folge hatte. Die Summe würde $+ 0,0056 D$ betragen.


Diese Zahl wird ungefähr das absolute Maximum bezeichnen. Bei weiterem Abschmelzen würde zwar die Senkung von $0,0069 D$ geringer werden, event. sogar einer geringen Hebung Platz machen, doch gleichzeitig nimmt die Hebung ab, und zwar stärker, weil sie von $0,0125 D$ auf 0 sinkt, während die Senkung nur von $0,0069 D$ auf 0 herabgeht.

Andererseits wird bei einem Wachsen der Radien zwar die Hebung wachsen, doch gleichzeitig die Senkung auch und zwar wieder stärker, weil sie auf 0,0275 D steigt, während die Hebung gleichzeitig nur auf 0,0167 D anwächst. Ungefähr wird also die Zahl 0,0056 D den maximalen Betrag der Hebung anzeigen, der an der skandinavischen Küste im Centrum des Eises und also überhaupt eintreten kann; absolut freilich haben wir die Zahl nicht berechnet, viel größer würde sie nicht geworden sein, setzen wir 0,006 D.

Also von dem Punkte an, wo das skandinavische Eis selbst die größte Hebung hervorrief — sie wurde überwogen durch den Einfluss Nordamerikas — wuchs die Hebung, trotzdem der Einfluss des skandinavischen Eises abnahm, weil die zuvor durch die nordamerikanischen Gletscher veranlasste Senkung stärker abnahm. Dieses Verhältnis kehrte sich in einem gewissen Stadium um: an dem Wendepunkt entstand durch das Zusammenwirken beider eine Hebung ungefähr um 0,006 D, die bei weiterem Schwinden wieder abnehmen mußte.

Setzen wir in diesem Stadium des Rückzugs die Mächtigkeit noch gleich 1000 m, so würde also die Hebung etwa 6 m betragen haben und so können wir denn zusammenfassend aussprechen: daß während des Maximums der Gletscherentfaltung auf der nördlichen Hemisphäre, lediglich unter der Wirkung der nordischen Inlandeismassen allerorts eine Senkung des Meeresspiegels stattgefunden hat; daß beim Rückzuge der Vereisungen lokale engbegrenzte Hebungen eingetreten sein können, daß diese aber in der Nähe des nordamerikanischen Eises den Betrag von etwa 12 m, in der Nähe des nordeuropäischen an der skandinavischen Küste den Betrag von 6 m kaum erreicht haben werden. Die thatsächlichen Elevationen lagen wahrscheinlich unter diesen Beträgen und hatten somit verschwindende Größen.

Der zweite Teil der Dissertation, welche der philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin vollständig vorgelegen hat, wird im Anschluß an den ersten in der Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin XXII. Band, 3. u. 4. Heft, demnächst erscheinen. Er enthält die Anwendungen der Theorie und ihre Prüfung durch die Resultate der geologischen Forschung.



V i t a.

Ego, Erich Dagobert a Drygalski, natus sum die IX. mensis Februarii anno 1865 Regimontii Borussorum, patre F. L. H. a Drygalski, direttore gymnasii Kniphoviensis Regimontii, matre Lydia, e gente Siegfried, quos adhuc vivos colo. Fidei addictus sum evangelicae. Primis litterarum elementis imbutus auctumno anni 1873 gymnasium Kniphoviense adii et in eo per novem annos remansi. Auctumno anni 1882 testimonium maturitatis adeptus civibus almae matris Albertinae Regimontii adscriptus sum, ut geographiae operam darem. Per hiemem 1882/83 Regimontii in litteras incubui, deinde per aestatem 1883 Bonnae, tum per tria semestria usque ad ver anni 1885 Lipsiae, tum per tria semestria usque ad auctumum 1886 Regimontii, postremo per hiemem 1886/87 Berolini.

Interfui per haec novem semestria scholis et seminariis virorum doctissimorum:

Berolini: Dilthey, Kiepert, baronis a Richthofen.

Bonnae: Maurenbrecher, Ritter, Schönfeld.

Lipsiae: Credner, Hahn, Hankel, Kolbe †, baronis a Richthofen, Roscher, Zirkel.

Regimontii: R. Caspary, Chun, Hahn, Hurwitz, Liebisch, Lindemann, Müller, Rahts, Ritthausen, Volkmann, Weber, Zöpplitz †.

Omnibus his insignibus et optime de me meritis magistris, imprimis autem Professori Dr. baroni a Richthofen, qui doctrinae copia et consiliorum humanitate studia mea direxit, ut ad finem quandam pervenirent, gratias ago quam maximas.

Stanford University Libraries



3 6105 023 965 903

T h e s e n .

1. In der Diluvialzeit fanden Bewegungen der Erdrinde statt, die durch die Schrumpfungstheorie im Sinne von Prévost und Süfs nicht erklärt werden können.
 2. Die eigentliche Aufgabe der wissenschaftlichen Geodäsie besteht in der Ermittlung des Potentials der Kräfte.
 3. Vermöge ihrer größeren Kohäsion würde eine starre Eismasse eher im stande sein, Seebecken zu durchmessen und daher auch zu erodieren, als eine plastisch-flüssige Masse von Gletschereis. Oldham's diesbezügliche Annahme ist eine Koncession an seine Gegner.
 4. Die Wasserscheide von Plainville im Farmington-Valley in Connecticut ist infolge einer partiellen Umkehrung des Gefälles in der Champlainperiode entstanden.
-