OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 60.

DIE
GEOMETRISCHEN CONSTRUCTIONEN,

AUSGEFÜHRT MITTELST

DER GERADEN LINIE UND EINES FESTEN KREISES,

ALS LEHRGEGENSTAND AUF HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN
UND ZUR PRAKTISCHEN BENUTZUNG

VON

JACOB STEINER.

(1833.)

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

Dr. Arthur von Oe… …emen Ausga… …en

…e des Umschlages.

Die
GEOMETRISCHEN CONSTRUCTIONEN,

ausgeführt mittelst

der geraden Linie und eines festen Kreises,

als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten
und zur praktischen Benutzung

von

JACOB STEINER.

(1833.)

Herausgegeben

von

A. J. v. Oettingen.

Mit 25 Textfiguren.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1895.

[1] # Die geometrischen Constructionen,

ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises

von

Jacob Steiner.

Einleitende Uebersicht.

§ 1.

Die Geometrie im engeren Sinne bedarf zu ihren Constructionen zweier Instrumente, des Zirkels und des Lineals. Ein italienischer Mathematiker, *Mascheroni*, hat auf eine scharfsinnige Weise gezeigt*), dass alle geometrischen Aufgaben mittelst des Zirkels allein gelöst werden können. Andererseits haben in der neuesten Zeit einige französische Mathematiker auf zahlreiche Aufgaben aufmerksam gemacht, deren Lösung nur die Hülfe des Lineals, oder das Ziehen erader Linien zwischen gegebenen Punkten, erfordert. Ja es haben Einige sogar schon die Vermuthung ausgesprochen, dass mittelst des Lineals alle Constructionen ausführbar seien, sobald in der Ebene irgend ein fester Hülfskreis gegeben ist. Die vorliegende kleine Schrift hat zum Zweck, diese Vermuthung zu bestätigen. [2] Und zwar wird dieser Zweck leichter erreicht, als ich anfangs glaubte und als es, nach dem Umfange des Gegenstandes, den Anschein hatte. Denn, wirft man einen strengen Blick auf die gesammten Constructionen, wie sie in der gewöhnlichen Geometrie, beim freien Gebrauch des Zirkels und Lineals vorkommen, so sieht man, dass sie, die Fälle ausgenommen, wo das Lineal allein genügt, im Grunde nur auf den folgenden zwei Hauptconstructionen:

---

*) *Mascheroni*'s »Gebrauch des Zirkels« aus dem Italienischen in's Französische übersetzt von *Carette* und in's Deutsche von *Grüson*, Berlin 1825.

a) »die Durchschnittte einer Geraden und eines Kreises« und

b) »die Durchschnitte zweier Kreise zu finden«,

beruhen, so zusammengesetzt sie übrigens auch sein mögen. Für die gegenwärtigen beschränkteren Hülfsmittel zeigte es sich, dass von diesen zwei Aufgaben die erste allein als Hauptaufgabe sich geltend macht, dass also die Lösungen aller Aufgaben auf der einzigen Hauptaufgabe:

A) »die Durchschnitte einer Geraden und eines Kreises zu finden«,

beruhen, indem auch die vorstehende andere Aufgabe (b) auf diese zurückgeführt werden muss und kann. Der Umstand aber, dass die Durchschnitte einer Geraden und des gegebenen Hülfskreises unmittelbar gegeben sind, bewirkt, dass man zunächst die folgenden, häufig vorkommenden und ihrem Wesen nach die meisten Elementaraufgaben umfassenden Hülfsaufgaben:

c) »parallele Gerade zu ziehen«;

d) »der Grösse nach gegebene Gerade [3] beliebig zu vervielfachen oder in beliebig viele gleiche Theile zu theilen«;

e) »zu einander rechtwinklige Gerade zu ziehen«;

f) »durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die mit einer gegebenen Geraden einen Winkel einschliesst, welcher einem der Grösse und Lage nach gegebenen Winkel gleich ist«;

g) »einen gegebenen Winkel zu hälften, oder beliebig oft zu vervielfachen«;

h) »an einen gegebenen Punkt, nach beliebiger Richtung, eine Gerade anzulegen, welche einer der Grösse und Lage nach gegebenen Geraden gleich ist«,

leicht lösen kann. Die Art und Weise, wie diese Aufgaben gelöst werden, weicht natürlicherweise von der in der Geometrie üblichen ganz und gar ab, und zwar dergestalt, dass hier einige von diesen Aufgaben dazu dienen, die obigen zwei Hauptaufgaben (a), (b), oder vielmehr die einzige Hauptaufgabe (A) unter allen Umständen zu lösen, also auch die Durchschnitte einer Geraden und eines nur der Lage und Grösse nach gegebenen Kreises (d. h. nur der Mittelpunkt und der Radius sind gegeben, der Kreis selbst nicht gezeichnet) zu finden; statt dass dort jene mittelst dieser gelöst werden.

Ob es mir gelungen sei, den vorgesteckten [4] Zweck auf die einfachste Weise zu erreichen, vermag ich nicht zu entscheiden, auch bin ich nicht einmal überzeugt, ob selbst bei dem von mir eingeschlagenen Weg überall die bequemsten Constructionen angewendet worden sind oder nicht. Wenn indessen der Gegenstand einiges Interesse erregen sollte, so wird, bei dem eifrigen Betriebe der Geometrie in unserer Zeit, das Fehlende bald von Anderen ergänzt werden, und ich dürfte dann wohl auf einige Nachsicht rechnen.

Sind die *Mascheroni*'schen Constructionen für die Mechaniker und besonders zur Anfertigung astronomischer Instrumente von grossem Vortheil, wie er behauptet, so dürften dagegen die gegenwärtigen für die Ingenieurs und Feldmesser von nicht geringerem Nutzen sein, worüber ich jedoch von diesen letztern selbst das sachverständige Urtheil erwarten will.

§ 2.

Die Sätze und Eigenschaften der Figuren, auf welchen die Lösungen der vorgenannten Aufgaben (§ 1) beruhen, sind unter andern theils im ersten Theil der »Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander« und theils in der Abhandlung »Einige geometrische Betrachtungen« (Journal für Mathematik, Bd. I. S. 161) enthalten, so dass also, mit Beziehung auf dieselben, die vorgelegten Aufgaben auf einem Raume von wenig Seiten erledigt werden könnten. Allein da das gegenwärtige Werkchen leicht in Vieler Hände [5] kommen kann, welche jene Schriften nicht besitzen, so hielt ich es für zweckmässig, jene Sätze und Eigenschaften hier kurz zu wiederholen, wobei ich mich bemühte, sie so elementar als möglich darzustellen. Diesem gemäss besteht die gegenwärtige Arbeit aus drei Kapiteln, die folgenden Inhalts sind:

Erstes Kapitel. Einige Eigenschaften geradliniger Figuren, in Rücksicht auf Transversalen, harmonische Strahlen und Punkte; Constructionen mittelst des Lineals allein, unter bestimmten Voraussetzungen, d. h., wenn entweder parallele oder in gegebenem Verhältniss getheilte Gerade gegeben sind, so lassen sich andere der Grösse und Lage nach gegebene Gerade beliebig vervielfachen und theilen, und andere Parallele ziehen (so wie auch rechte Winkel hälften und beliebige gegebene Winkel vervielfachen).

Zweites Kapitel. Vom Kreise. I. Harmonische Eigenschaften des Kreises. II. Von den Aehnlichkeitspunkten (oder Projectionspunkten) zweier und mehrerer Kreise. III. Von der Potenz bei Kreisen; A. Ort der gleichen Potenzen; B. gemeinschaftliche Potenz, in Beziehung auf die Aehnlichkeitspunkte.

Drittes Kapitel. Lösung aller geometrischen Aufgaben mittelst des Lineals, wenn irgend ein fester Hülfskreis gegeben ist, enthaltend die obigen acht Aufgaben (§ 1, a bis h). Schlussbemerkung.

Ausserdem werden in einem Anhange noch einige [6] wesentliche Aufgaben über Kegelschnitte aufgestellt, welche als zweckmässige Beispiele der Anwendung der gegenwärtigen Methode dienen sollen.

Erstes Kapitel.

Einige Eigenschaften geradliniger Figuren und darauf gegründete Constructionen mittelst des Lineals allein.

I. Harmonische Strahlen und Punkte, Transversalen.

§ 3.

I. Es sei ABC (Fig. 1) ein beliebiges Dreieck; aus der Spitze B gehe der Strahl b durch die Mitte $\mathfrak{b}$ und der Strahl d parallel der Grundlinie AC. Zieht man durch die Mitte $\mathfrak{b}$ der Grundlinie irgend eine Gerade, oder Transversale $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$, so wird diese von den zwei Seiten a, c und von den Strahlen b, d in den vier Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ so geschnitten, dass

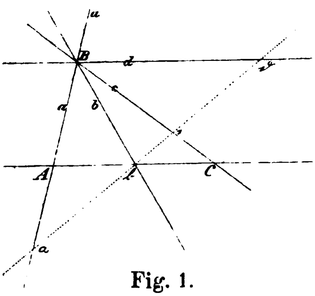

Fig. 1.

$$A\mathfrak{b} : B\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{a}\mathfrak{d} \quad (\text{weil } \Delta\mathfrak{a}A\mathfrak{b} \sim \Delta\mathfrak{a}B\mathfrak{d}),$$
$$C\mathfrak{b} : B\mathfrak{d} = \mathfrak{c}\mathfrak{b} : \mathfrak{c}\mathfrak{d} \quad (\text{weil } \Delta\mathfrak{c}C\mathfrak{b} \sim \Delta\mathfrak{c}B\mathfrak{d}),$$

folglich, weil $A\mathfrak{b} = C\mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{a}\mathfrak{d} = \mathfrak{c}\mathfrak{b} : \mathfrak{c}\mathfrak{d}$$

oder

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{d} : \mathfrak{c}\mathfrak{d},$$

das heisst: die Strecke $\mathfrak{ad}$ wird so in drei Abschnitte getheilt, dass sich der erste $\mathfrak{ab}$ zum zweiten $\mathfrak{bc}$, wie die Ganze $\mathfrak{ad}$ zum dritten $\mathfrak{cd}$ verhält.

Vermöge dieser Eigenschaft werden die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ »vier harmonische Punkte« [7] genannt, und zwar heissen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, so wie $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ »zugeordnete harmonische Punkte«. Ebenso werden die vier Strahlen a, b, c, d »vier harmonische Strahlen« und sowohl a und c, als b und d »zugeordnete harmonische Strahlen« genannt.

II. Werden die Strahlen a, b, c, d fest und unbegrenzt angenommen, so theilen sie nicht allein jede Transversale, welche durch den Punkt $\mathfrak{b}$ geht, harmonisch, sondern es wird offenbar jede beliebige Transversale von ihnen in vier harmonischen Punkten geschnitten; denn in welchem Punkte eine solche Transversale auch dem Strahle b begegnen mag, so kann man immer durch denselben eine Gerade sich denken, die der AC parallel ist, und sodann den vorstehenden Beweis anwenden. Ist insbesondere die Transversale mit einem der vier harmonischen Strahlen a, b, c, d parallel, wie zum Beispiel AC mit d, so liegt der Punkt $\mathfrak{b}$, in welchem sie den, dem Parallelstrahl d zugeordneten, harmonischen Strahl b schneidet, in der Mitte zwischen den zwei Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, in welchen sie von den zwei übrigen Strahlen a und c geschnitten wird; und umgekehrt: findet das Letztere statt, so ist die Transversale mit jenem Strahle parallel.

Werden andererseits die vier harmonischen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als fest angenommen, so folgt ähnlicher Weise, dass jede vier Strahlen a, b, c, d, welche von irgend einem beliebigen Punkte B aus durch dieselben gehen, vier harmonische Strahlen sind.

III. Es ist leicht zu sehen, dass, wenn drei [8] Strahlen (die durch einen Punkt gehen) gegeben sind, wovon zwei als zugeordnet angenommen werden, alsdann nur ein einziger bestimmter Strahl möglich ist, welcher zu dem dritten Strahle zugeordneter harmonischer Strahl ist. Denn sind z. B. die drei Strahlen a, c, d gegeben, und sollen etwa a und c zugeordnet sein, so denke man sich irgend eine Gerade AC parallel dem dritten Strahle d, so muss der vierte, dem d zugeordnete Strahl b durch die Mitte $\mathfrak{b}$ der Geraden AC gehen, und ist also genau bestimmt. Oder durch irgend einen Punkt des dritten Strahls, wie etwa durch den Punkt $\mathfrak{b}$ des

Strahls b, wenn die drei Strahlen a, b, c als gegeben und a und c als zugeordnet angenommen werden, denke man sich eine Gerade AC zwischen a und c so gezogen, dass sie durch jenen Punkt $\mathfrak{b}$ gehälftet wird, so wird alsdann derjenige Strahl d, welcher der Geraden AC parallel ist, der einzig mögliche, dem b zugeordnete, vierte harmonische Strahl sein. Aehnliches gilt von vier harmonischen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.

IV. Wenn insbesondere das Dreieck ABC gleichschenklig ist, nämlich $BA = BC$, so wird der Strahl b, da er durch die Mitte $\mathfrak{b}$ der Grundlinie AC geht, auf dieser, sowie auf dem Strahle d, senkrecht stehen und mit den Strahlen a und c gleiche Winkel einschliessen, sodass Winkel $(ab) = (bc)$; und daher muss auch d mit a und c gleiche Winkel $(ad) = (dc)$ bilden. Das heisst:

»Wenn von vier harmonischen Strahlen a, b, c, d einer, etwa b, mit zwei sich zugeordneten a und c gleiche Winkel bildet, [9] so findet dasselbe auch bei seinem zugeordneten Strahle d statt, und beide Strahlen, b und d, stehen zu einander rechtwinklig; und umgekehrt: wenn bei vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete b und d zu einander rechtwinklig sind, so hälften sie die von den zwei übrigen Strahlen a, c eingeschlossenen Winkel.«

§ 4.

Irgend vier Gerade a, c, a_1, c_1 (Fig. 2) in einer Ebene, die einander, im Allgemeinen, paarweise in sechs Punkten A, C, F, G, H, I schneiden, heissen »vollständiges Vierseit«. Ein solches Vierseit hat, wie man sieht, drei Diagonalen AC, GF, HI, die sich in den drei Punkten B, D, E schneiden. Es lässt sich leicht zeigen, dass diese drei Diagonalen einander harmonisch schneiden, nämlich wie folgt.[1])

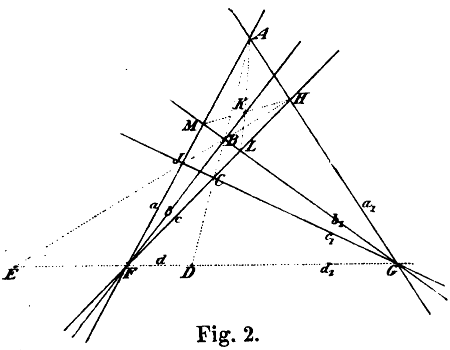

Fig. 2.

Denkt man sich zu den drei Strahlen a, c, d den vierten, dem d zugeordneten, harmonischen Strahl b, und ebenso zu den drei Strahlen a_1, c_1, d_1 den vierten, dem d_1 zugeordneten, harmonischen Strahl b_1, so muss jeder der zwei Strahlen b, b_1 die Diagonale ACD in demjenigen Punkte B schneiden, welcher zu den gegebenen drei Punkten A, C, D der vierte, dem D zugeordnete, harmonische Punkt ist (§ 3); ebenso müssen beide Strahlen b, b_1 die Diagonale HIE in demjenigen Punkte B schneiden, welcher zu den drei Punkten H, I, E der vierte, dem E zugeordnete, harmonische Punkt [10] ist; da aber b und b_1 nur einen einzigen Punkt B gemein haben können, so muss folglich derselbe zugleich der Durchschnittspunkt der Diagonalen AC, HI sein, woraus denn hervorgeht, dass diese Diagonalen harmonisch geschnitten werden. Aehnlicher Weise kann gezeigt werden, dass die dritte Diagonale GF von den zwei andern in den Punkten D, E harmonisch getheilt wird. Also:

»Bei jedem vollständigen Vierseit wird jede der drei Diagonalen von den zwei übrigen harmonisch geschnitten, d. h. die Punkte, in welchen eine der drei Diagonalen von den zwei übrigen geschnitten wird, sind zu den Eckpunkten, welche sie verbindet, zugeordnete harmonische Punkte, zum Beispiel A, B, C, D sind harmonisch und B, D sind zugeordnete harmonische Punkte.«[2])

§ 5.

Von den zahlreichen Folgerungen und Anwendungen, die sich aus dem letzten Satze (§ 4) ziehen lassen, sollen hier nur einige und zwar zunächst folgende herausgehoben werden.

I. »Zu irgend drei gegebenen Punkten in einer Geraden einen vierten harmonischen Punkt mittelst des Lineals allein zu finden.«

a) Sind etwa die drei Punkte G, D, F (Fig. 2) gegeben und es soll der dem D zugeordnete vierte harmonische Punkt E gefunden werden, so ziehe man nach einem beliebigen Punkt A die Geraden [11] AG, AD, AF, nehme in AD einen beliebigen Punkt C, und ziehe die Geraden GCI, FCH, wodurch man die zwei Durchschnitte I und H erhält, und ziehe endlich die Gerade HI, so wird diese den verlangten Punkt E angeben. Oder:

b) Sind G, F, E gegeben und es soll der dem E zugeordnete vierte harmonische Punkt D gefunden werden, so ziehe man nach einem willkürlichen Punkt A die Geraden FA, GA, schneide sie durch eine beliebige, durch E gehende Gerade EIH, in den Punkten I, H, ziehe sofort die Geraden GI, FH, die sich in C kreuzen, und ziehe endlich die Gerade AC, so wird diese durch den gesuchten Punkt D gehen.

II. »Zu irgend drei gegebenen Strahlen, die durch einen Punkt gehen, einen vierten harmonischen Strahl mittelst des Lineals zu finden.«

Sind etwa die drei Strahlen a, c, d (Fig. 2) gegeben und soll der dem d zugeordnete vierte harmonische Strahl b gefunden werden, so ziehe man durch einen beliebigen Punkt G, des Strahls d, irgend zwei Gerade GA, GI, welche die Strahlen a, c in A, I, C, H schneiden, ziehe sodann die Geraden AC, HI, die sich in B kreuzen, so wird FB der gesuchte Strahl sein.

Auf dieselbe Weise wird, wenn die Strahlen a, b, c gegeben sind, der dem b zugeordnete vierte harmonische Strahl d gefunden.

III. »Wenn ein rechter Winkel und ein anderer beliebiger Winkel einerlei Scheitelpunkt und einen gemeinschaftlichen [12] Schenkel haben, so soll der letzte Winkel mittelst des Lineals verdoppelt werden.«

Angenommen, es sei (bd) (Fig. 1) der rechte und (bc) der andere Winkel, so suche man zu den drei Strahlen b, c, d einen vierten, dem c zugeordneten, harmonischen Strahl a (II.), so wird alsdann, zufolge (§ 3, IV.), Winkel $(ab) = (bc)$, und mithin Winkel (ac) der verlangte doppelte Winkel sein.

IV. »Wenn von drei Strahlen, die durch einen Punkt gehen, der eine mit den zwei andern gleiche Winkel bildet, so soll mittelst des Lineals ein vierter Strahl gefunden werden, welcher ebenfalls mit den zwei letztern gleiche Winkel einschliesst, und mithin zu jenem ersten rechtwinklig ist.«

Die Lösung dieser Aufgabe gründet sich ebenfalls auf (II.) und (§ 3, IV.), wie die vorige.

V. »Werden irgend zwei Gerade a, c (Fig. 2) von beliebigen Geraden a_1, b_1, c_1, ..., die durch irgend einen Punkt G gehen, geschnitten, und man verbindet die Durchschnittspunkte von je zwei der letzteren kreuzweise durch ein Paar Gerade, wie etwa AC und HI, AL und HM, so liegen alle Punkte, wie B, K, in welchen sich diese Geradenpaare kreuzen, in einer bestimmten Geraden b, welche durch den Durchschnittspunkt F der zwei erstgenannten [13] Geraden a, c geht, und welche zu diesen und zu der Geraden FG oder d die vierte, der letztern zugeordnete, harmonische Gerade ist.«

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt, wie man leicht sehen wird, aus (II.) oder (§ 4).

VI. »Durch einen gegebenen Punkt mittelst des Lineals eine Gerade zu ziehen, welche mit zwei gegebenen Geraden nach einem und demselben Punkte gerichtet ist, wenn nämlich dieser Punkt, wegen Hindernisse, unzugänglich ist.«

Es sei etwa B (Fig. 2) der gegebene Punkt und AM, HL die gegebenen Geraden, welche aber nicht bis zu dem Punkte F, nach welchem sie gerichtet sind, sollen verlängert werden können. Man ziehe die Geraden AB, HB, welche die gegebenen Geraden in C, I schneiden, und ziehe ferner die Geraden AH, IC, die sich in G kreuzen; durch diesen Punkt G lege man eine beliebige Gerade GM (die nicht durch B zu gehen braucht), welche die gegebenen in M, L schneidet, und ziehe sofort AL, HM, die sich in K kreuzen: so wird die Gerade KB der Aufgabe genügen. Das Verfahren bleibt sich gleich, der Punkt B mag zu den gegebenen Geraden AM, HL eine Lage haben, welche man will, wie z. B. die Lage von G; ebenso können diese Geraden gegen einander eine Lage haben, welche man will, z. B. parallel sein.

Die Richtigkeit dieser Auflösung beruht, wie man bemerken wird, auf dem vorhergehenden [14] Satze (V.). (Vergl. Abhäng. geom. Gestalten. Thl. I. S. 77.)

II. Constructionen mittelst des Lineals unter gewissen Voraussetzungen.

A. Wenn Parallele, oder rational getheilte Strecken gegeben sind.

§ 6.

In Ansehung der obigen Aufgabe (§ 5, I.) findet ein wichtiger besonderer Fall statt, der näher betrachtet werden muss.

Tritt nämlich der besondere Fall ein, dass bei den drei gegebenen Punkten G, D, F der Punkt D gerade in der Mitte zwischen den Punkten G und F liegt, so wird der vierte, ihm zugeordnete, harmonische Punkt E sich in's Unendliche entfernen, d. h., so muss die Gerade HI, durch welche er gefunden wird, mit der gegebenen Geraden GDF parallel sein. Und umgekehrt: Schneidet man zwei Seiten AG, AF eines beliebigen Dreiecks GAF durch irgend eine, der Grundlinie GF parallele, Gerade HI (Fig. 3), verbindet die Durchschnittspunkte H, I mit den gegenüberliegenden Ecken an der Grundlinie durch Gerade FH, GI, welche sich im Punkte C kreuzen, und zieht durch diesen und durch die Spitze A des Dreiecks die Gerade ACD, so geht diese allemal durch die Mitte D der Grundlinie.

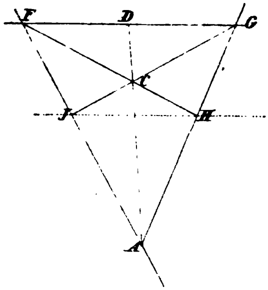

Fig. 3.

[15] Hierauf gründen sich die Auflösungen folgender Aufgaben.

I. »Wenn in einer Geraden drei Punkte G, D, F (Fig. 3) gegeben sind, wovon der eine, D, in der Mitte zwischen den zwei übrigen liegt, so soll (mittelst des Lineals allein) durch irgend einen beliebigen Punkt H mit jener Geraden eine Parallele gezogen werden.«

Man ziehe die Geraden GH, FH, nehme in GH einen willkürlichen Punkt A, und ziehe AD, AF; durch den Durchschnitt C, der FH und AD, ziehe man aus G die Gerade GCI, welche die AF in I schneidet, so ist endlich HI die geforderte Parallele.

II. »Wenn irgend zwei parallele Gerade GF, HI (Fig. 3) gegeben sind, so soll irgend eine gegebene Strecke in der einen oder andern, etwa die Strecke GF, gehälftet werden.«

Man ziehe aus einem willkürlichen Punkte A nach den Endpunkten G, F der gegebenen Strecke Gerade AG, AF, welche die andere Parallele in H, I schneiden (im Falle der Punkt A zwischen den Parallelen läge, wie C, oder jenseits GF, müsste man die Geraden AG, AF verlängern, bis sie HI schnitten); diese Durchschnittspunkte verbinde man mit jenen Endpunkten durch Gerade HF, IG, die sich in irgend einem Punkte C schneiden; durch diesen und durch jenen angenommenen Punkt A lege man endlich die Gerade [16] ACD, so wird diese durch die Mitte D der gegebenen Strecke GF gehen.

III. »Wenn irgend zwei parallele Gerade gegeben sind, so soll durch irgend einen gegebenen Punkt eine dritte Parallele gezogen werden.«

Man hälfte, nach (II.), irgend eine beliebige Strecke in einer der zwei gegebenen Geraden, so ist alsdann die Aufgabe auf (I.) zurückgeführt.

IV. »Wenn zwei parallele Gerade und in der einen irgend eine begrenzte Strecke gegeben sind, so soll man:

a) in der nämlichen Geraden eine andere Strecke, welche ein beliebiges Vielfache, etwa das $n$fache, von jener Strecke ist, von irgend einem gegebenen Punkte an, abstecken; oder

b) die gegebene Strecke in irgend eine gegebene Anzahl gleicher Theile theilen, oder in zwei Theile theilen, die sich zu einander verhalten, wie zwei gegebene Zahlen; oder endlich

c) eine andere Strecke finden (in der nämlichen Geraden), die zu der gegebenen ein gegebenes rationales Verhältniss hat.«

Es seien BF, bf (Fig. 4) die gegebenen Parallelen, und etwa BC die gegebene Strecke. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt A eine dritte Parallele AG (III.), und nach den Endpunkten der Strecke die Geraden AB, AC, welche [17] die zweite Parallele in b, c schneiden; sofort ziehe man die Gerade Cb, die der dritten Parallelen in

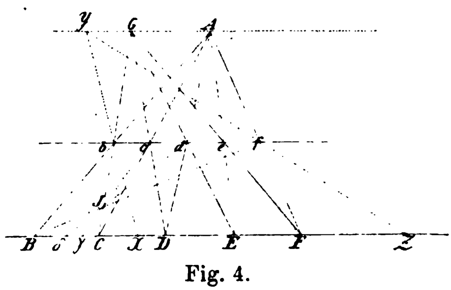

Fig. 4.

G begegnet, und ziehe GcD, so wird, wie leicht zu sehen, $DC = BC$, und folglich BD doppelt so gross als die gegebene Strecke BC sein. Zieht man nun weiter die Gerade AD und sodann GdE; dann ferner AE und darauf

GeF, u. s. w., so werden offenbar die Strecken BC, CD, DE, EF, ... gleich gross sein, sodass man auf diese Weise jedes beliebige Vielfache der Strecke BC erhält, wie zum Beispiel BF ihr Vierfaches ist.

(a) Soll nun ein solches Vielfache von irgend einem gegebenen Punkte X an abgeschnitten werden, so ziehe man die Gerade Xb (oder Xf), verlängere sie, wenn es nöthig ist, bis sie die AG in Y schneidet, und ziehe YfZ, so wird XZ die verlangte $n$fache (hier vierfache) Strecke sein.

(b) Soll die gegebene Strecke BC in n gleiche Theile getheilt werden, so ziehe man, wenn bf das $n$fache von bc ist, die Geraden Cb, Bf, die sich in I kreuzen, und ziehe sofort $cI\gamma$, $dI\delta$, $eI\varepsilon$, ..., so werden die Strecken $C\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, ... einander gleich, und zwar jede der $n$te Theil von der gegebenen Strecke BC sein.

Soll die gegebene Strecke BC in zwei Abschnitte getheilt werden, die sich verhalten wie zwei gegebene Zahlen p, q, so muss bf das $(p+q)$fache von bc sein, und alsdann zählt man von b an p Strecken bc, cd, ... ab, zieht vom Endpunkte der letzten, z. B. von d, die Gerade $dI\delta$, [**18**], so werden sich die Abschnitte $C\delta$, $B\delta$ verhalten wie $p:q$.

(c) Soll endlich eine Strecke gefunden werden, die sich zu der gegebenen verhält, wie $q:p$, so ziehe man, wenn etwa fd, db sich ebenfalls wie $q:p$ verhalten, die Geraden Bb, Cd, und aus dem Punkt, in welchem diese sich kreuzen, ziehe man eine Gerade durch f, so wird diese der Geraden BC in irgend einem Punkte, der W heissen mag, begegnen, und es ist sodann CW die verlangte Strecke, d. h. es wird sich $BC : CW = p : q$ verhalten.

Anmerkung. Soll von der gegebenen Strecke BC bloss ein bestimmter einfacher Theil abgeschnitten werden, d. h. ein Stück abgeschnitten werden, welches sich zur ganzen verhält wie $1:n$, wo n eine ganze Zahl ist, so kann man auch wie folgt verfahren:

Aus einem willkürlichen Punkte A (Fig. 5) ziehe man nach den Endpunkten der Strecke die Geraden AB, AC, welche mit der anderen Parallelen die Durchschnitte b, c bilden; sodann ziehe man die Geraden Bc, Cb, die sich in d schneiden, und ziehe weiter AdD, so ist CD die Hälfte der gegebenen Strecke BC.

Wird nun ferner die Gerade cD, die der Cb in e begegnet, und sofort AeE gezogen, so ist $CE = \frac{1}{3}BC$. Denn vermöge des vollständigen Vierseits $Aced$ (dessen drei Diagonalen Ae, cd, CD sind) sind die vier Punkte B, D, E, C harmonisch (§ 4), sodass man hat

$$CE : ED = CB : DB,$$

[19] woraus folgt, da $DB = CD = \frac{1}{2}CB$,
dass $CE = \frac{1}{3}CB.$

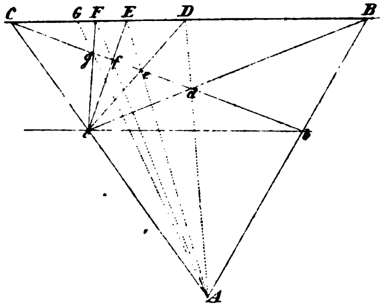

Fig. 5.

Auf ähnliche Weise folgt, dass, wenn man weiter cE zieht, die die Cb in f schneidet, und sodann AfF, dass dann $CF = \frac{1}{4}CB$ sei; und dass durch dasselbe Verfahren man zu $CG = \frac{1}{5}CB$ gelangt u. s. w.

Dieses sinnreiche Verfahren scheint von einem französischen Artillerie-Capitain, *Brianchon*, zuerst angewendet worden zu sein (*Application de la Théorie des Transversales*, *Paris* 1818, p. 37). Derselbe behandelt auch mehrere der vorhergehenden Aufgaben, und zeigt besonders, welche vortheilhafte Anwendungen auf dem Felde, im Kriege u. s. w. sich von solchen Aufgaben machen lassen, weshalb ich Militärs und Feldmesser auf seine Arbeit verweise.

§ 7.

»Wenn in einer Geraden zwei neben einander liegende Strecken BD, DC (Fig. 6) gegeben sind, die irgend ein gegebenes rationales Verhältniss zu einander haben, so soll man (mittelst des Lineals allein) durch irgend einen beliebigen Punkt mit der gegebenen Geraden eine Parallele ziehen.«

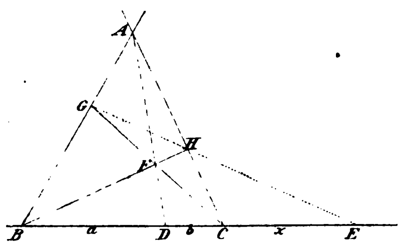

Fig. 6.

Da diese Aufgabe wohl mehr theoretisches Interesse als praktischen Nutzen haben mag, so will ich hier die Möglichkeit ihrer Lösung nur kurz andeuten, und das Auffinden der leichtesten und bequemsten Auflösung Andern überlassen.

[20] Die Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, sobald man in der gegebenen Geraden irgend drei Punkte gefunden hat, wovon der eine gleich weit von den zwei übrigen entfernt ist (§ 6, I.).

Das gegebene rationale Verhältniss der gegebenen Strecken BD, DC lässt sich immer, in welcher Form es auch gegeben sein mag, durch zwei ganze Zahlen a, b ausdrücken, welche unter sich Primzahlen sind. Angenommen es sei $a > b$. Man construire zu den drei gegebenen Punkten B, D, C den vierten, dem D zugeordneten, harmonischen Punkt E (§ 5, I.), so hat man:

$$BD : CD = BE : CE$$

oder, wenn man statt der Linien die ihnen entsprechenden Zahlen setzt, und CE durch die Zahl x ausdrückt:

$$a : b = (a + b + x) : x$$

und folglich

$$x = \frac{b\,(a + b)}{a - b}.$$

Wird $BC = a + b = y$ gesetzt, so hat man

$$x : y = \frac{b\,(a + b)}{a - b} : a + b$$

oder

$$1. \qquad x : y = b : (a - b),$$

das heisst: »Aus den gegebenen Strecken BD, CD, die sich verhalten wie die Zahlen a, b, lassen sich zwei neue Strecken BC, CE oder y, x, finden, die sich verhalten, wie die Differenz der gegebenen Zahlen $a - b$ zu der kleineren Zahl b.« Daher wird man, durch wiederholte Anwendung dieses [21] Verfahrens, endlich zu zwei Strecken gelangen, die einander gleich sind, d. h. man wird drei Punkte haben, wovon der eine in der Mitte zwischen den zwei übrigen liegt, und wodurch sodann die vorgelegte Aufgabe auf die obige (§ 6, I.) zurückgebracht ist. Denn ist z. B. die Differenz $a - b$ grösser als b, so wird man durch eine neue Construction zwei Strecken erhalten, die sich verhalten wie $b : (a - 2b)$; und so kann man fortfahren, bis man zu zwei Strecken gelangt, die sich verhalten wie $b : (a - nb)$, wo der Rest $a - nb$ kleiner als b, und etwa $= c$ ist. Sodann findet man weiter zwei Strecken, die sich verhalten wie $c : b - c$, u. s. w. f., was nothwendiger Weise zuletzt, da $a, b, c, \ldots\ldots$ ganze Zahlen sind, die der Reihe nach immer kleiner werden, zu zwei Strecken führen muss, die sich verhalten wie $1 : 1$.

Wird DE oder $b + x = z$ gesetzt, so hat man, wenn statt x der obige Werth gesetzt wird:

$$a : z = a : b + \frac{b(a+b)}{a-b}$$

oder

$$2. \qquad a : z = a - b : 2b,$$

das heisst: durch die nämlichen Constructionen gelangt man zu zwei Strecken BD, DE, welche sich verhalten, wie die Differenz der gegebenen Zahlen $a - b$ zu der doppelten kleineren Zahl $2b$, wodurch man, in gewissen Fällen, sich etwas schneller dem verlangten Verhältniss $1 : 1$ nähern kann.

Ist zum Beispiel

α) $\qquad a = 2$, und $b = 1$,

[22] so ist $x = 3$ und mithin C in der Mitte zwischen B und E; und wenn

β) $\qquad a = 3$, und $b = 1$,

so ist $x = 2$ und mithin D in der Mitte zwischen B und E. Jeder dieser zwei Fälle erfordert also nur eine einzige Hülfsconstruction.

B. Wenn zwei Paar Parallele, oder zwei rational getheilte Strecken, oder Parallele und rational getheilte Strecken zugleich gegeben sind.

§ 8.

I. »Wenn in einer Ebene irgend zwei Paar parallele Gerade, also irgend ein Parallelogramm gegeben ist, so soll man (mittelst des Lineals allein)

a) nach allen Richtungen parallele Gerade ziehen, d. h. mit irgend einer gegebenen Geraden durch irgend einen gegebenen Punkt eine Parallele ziehen, und

b) jede beliebige gegebene Strecke nach irgend einem gegebenen Verhältniss vervielfachen oder theilen.«

Es seien AB und DC, AD und BC (Fig. 7) die gegebenen Parallelen und mithin $ABCD$ das gegebene Parallelogramm, dessen Diagonalen AC, BD sich in E schneiden.

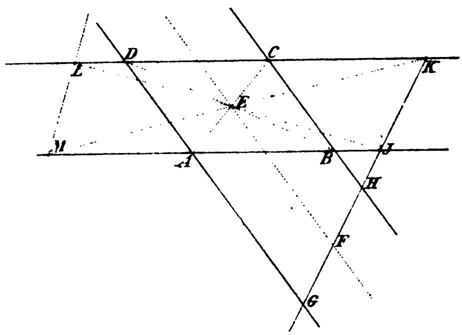

Fig. 7.

Durch den Punkt E lege man mit einem der zwei Paar Parallelen, etwa mit AD, BC, eine dritte Parallele EF, so befindet sich diese offenbar in der Mitte zwischen [23] jenen zweien, d. h. sie ist von beiden gleich weit entfernt, so dass also diese drei Parallelen jede andere Gerade (die nicht mit ihnen parallel ist) in drei solchen Punkten schneiden, wovon der eine in der Mitte zwischen den zwei übrigen liegt.

Ist nun eine Gerade, etwa GK, gegeben, so wird dieselbe von den drei Parallelen in den drei Punkten G, F, H geschnitten, wovon der eine, F, in der Mitte zwischen den zwei übrigen, G und H, liegt, und wodurch also der Forderung (a): »durch jeden willkürlichen Punkt mit der Geraden GK eine Parallele zu ziehen«, zufolge (§ 6, I.), genügt werden kann.

Oder, anstatt die dritte Parallele EF zu ziehen, kann man auch wie folgt verfahren. Durch die Punkte I, K, in welchen die gegebene Gerade GK die Parallelen AB, DC schneidet, ziehe man die Geraden IE, KE, welche diesen Parallelen in L, M begegnen, so wird die Gerade LM offenbar der IK parallel sein, und sodann kann durch jeden beliebigen Punkt, zufolge (§ 6, III.), mit IK eine Parallele gezogen werden.

Die zweite Forderung (b) wird durch Hülfe der ersten und nach Anleitung von (§ 6, II.) erledigt.

II. »Wenn in einer Ebene entweder:

a) drei Parallele, welche irgend eine vierte Gerade in gegebenem rationalen Verhältniss schneiden; oder

b) in zwei Parallelen irgend zwei Strecken, welche ein gegebenes rationales [24] Verhältniss zu einander haben; oder

c) irgend zwei Parallele und irgend eine in gegebenem rationalen Verhältniss getheilte Strecke; oder endlich

d) zwei beliebige, nicht parallele Strecken, wovon jede in irgend einem gegebenen rationalen Verhältniss getheilt ist,

gegeben sind, so soll man:

α) nach jeder beliebigen Richtung Parallele ziehen, und

β) jede beliebige gegebene Strecke nach jedem beliebigen rationalen Verhältniss theilen oder vervielfachen.«

Fall *a*. Schneiden etwa die drei Parallelen AB, CD, EF (Fig. 8) eine vierte Gerade AE so, dass sich ihre Abschnitte AC, CE verhalten wie $p:q$, wo p, q relative Primzahlen sind, so vervielfache man in der einen Parallelen, etwa in AB, eine willkürliche Strecke, und nehme AG gleich dem $p$fachen und GB gleich dem $q$fachen dieser Strecke (§ 6, IV., *a*.), ziehe sofort die Geraden GC, BE, so werden diese parallel sein, (weil $AC:CE = AG:GB = p:q$), und dadurch ist also die vorgelegte Aufgabe auf die vorige (I.) zurückgeführt.

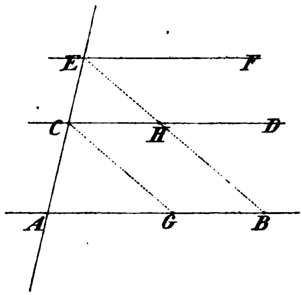

Fig. 8.

Um ein anderes Paar Parallele zu erhalten, könnte man auch, zufolge (§ 7), mit der in rationalem Verhältniss getheilten Geraden AE irgend [25] eine Parallele ziehen, was aber weitläufiger sein würde, als das erste Verfahren.

Fall *b*. Es seien AB, CD (Fig. 8) die gegebenen Parallelen und etwa AB, CH die gegebenen Strecken, welche sich verhalten wie zwei gegebene Zahlen p, q. Man ziehe durch die Endpunkte der Strecken die Geraden AC, BH, die sich in irgend einem Punkte E schneiden (man könnte ebenso die Geraden AH, BC ziehen), so wird man, vermöge der ähnlichen Dreiecke AEB, CEH, z. B. haben

$$AE:CE = AB:CH = p:q;$$

mithin ist auch das Verhältniss der Strecken $AC:CE$ gegeben, nämlich $= (p-q):q$, sodass also dadurch der gegenwärtige Fall auf den vorigen (a) gebracht ist. (Es ist dabei nicht nöthig die dritte Parallele EF zu ziehen, was leicht zu sehen ist.)

Fall c. Sind etwa A, B (Fig. 9) die gegebenen Parallelen und CE die gegebene Strecke, welche in D so getheilt ist, dass die Abschnitte CD, DE sich verhalten wie zwei gegebene Zahlen p, q. Man ziehe durch die Punkte C, D, E drei Gerade, welche den Geraden A, B parallel sind (§ 6, III.), so hat man alsdann den ersten Fall (a).

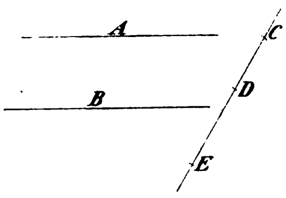

Fig. 9.

Oder, man ziehe durch irgend einen beliebigen Punkt eine Parallele mit CE (§ 7), so hat man die Aufgabe auf die obige (I.) gebracht.

Fall d. Sind etwa AC, DF (Fig. 10) die gegebenen Strecken, welche durch die Punkte B, E in gegebenem Verhältniss getheilt sind, sodass [26] $AB:BC = p:q$ und $DE:EF = r:s$, wo p, q, r, s gegebene Zahlen sind, so ziehe man durch irgend einen Punkt eine Parallele mit AC und durch (denselben oder) irgend einen andern Punkt eine Parallele mit DF (§ 7.): so hat man die Aufgabe auf die obige (I.) zurückgeführt. Oder man ziehe durch zwei Punkte der einen Geraden, etwa durch F, E, mit der andern Geraden AC Parallele (§ 7.), so hat man die Aufgabe auf den Fall (a) gebracht, und die Construction wird, in den meisten Fällen, im Ganzen etwas kürzer sein als die vorige.

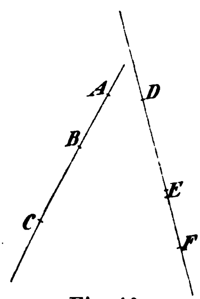

Fig. 10.

C. Wenn ein Quadrat gegeben ist.

§ 9.

Ausser den Aufgaben, welche vorhin durch Hülfe eines beliebigen Parallelogramms sich lösen liessen (§ 8, I.), können in dem besonderen Falle, wo das Parallelogramm ein Quadrat ist, unter andern noch folgende Aufgaben gelöst werden.

»Wenn in einer Ebene irgend ein Quadrat gegeben ist, so soll man:

a) auf irgend eine gegebene Gerade, aus irgend einem gegebenen Punkt, einen Perpendikel fällen;

b) irgend einen gegebenen rechten Winkel hälften;

c) irgend einen gegebenen Winkel beliebig oft vervielfachen.«

Es sei $ABCD$ (Fig. 11) das gegebene Quadrat, [27] und E der Durchschnittspunkt seiner Diagonalen AC, BD, also sein Mittelpunkt.

Zieht man durch den Mittelpunkt eine beliebige Gerade GF, so ist es leicht, diejenige Gerade IK zu finden, welche im Mittelpunkt E auf ihr senkrecht steht. Nämlich man zieht aus F die Gerade FH parallel der Seite BC oder AD (§ 6, III.), und sodann aus dem Punkt H, in welchem sie die Seite AB trifft, die Gerade HI parallel der Diagonale AEC (§ 6, I.), so wird die Gerade IEK zu FEG senkrecht sein. Denn zufolge dieser Construction ist, wie leicht zu sehen, $FC = HB = BI$, und ferner ist $BE = CE$ und Winkel $EBI = ECF$, folglich die Dreiecke EBI und ECF einander gleich, daher Winkel $BEI = CEF$ und folglich Winkel $BEC = IEF$ = einem Rechten.

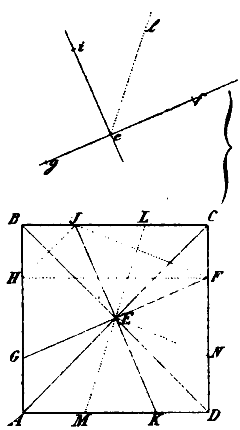

Fig. 11.

Da aus der Gleichheit der Dreiecke BEI und CEF ferner folgt, dass $EI = EF$, mithin das Dreieck IEF ein gleichschenkliges, so dass also die Gerade EL, welche dessen Winkel an der Spitze E hälftet, auf der Grundlinie IF senkrecht steht: so lässt sich dieser Winkel leicht hälften. Denn zu diesem Endzweck ziehe man EN parallel IF und GK, und ziehe, nach der eben gezeigten Weise, MEL rechtwinklig auf EN, so wird EL den rechten Winkel IEF hälften.

Wird nun verlangt, es soll auf eine beliebige gegebene Gerade gf, aus irgend einem gegebenen Punkte i, ein

Perpendikel gefället werden (a), so zieht man durch den Mittelpunkt E die Gerade FG parallel fg, errichtet KEI rechtwinklig auf FEG und zieht durch den gegebenen Punkt i die Gerade [**28**] ie parallel IEK (§ 6, I.); so hat man offenbar die Forderung erfüllt. Es ist klar, dass das Verfahren sich gleich bleibt, wenn aus dem Punkte e, in der gegebenen Geraden fg, auf diese ein Perpendikel errichtet werden soll.

Wird ferner verlangt, man soll irgend einen gegebenen rechten Winkel fei hälften (b), so zieht man EF parallel ef und EI parallel ei, hälftet sofort den Winkel FEI mittelst der Geraden EL und zieht endlich durch den Punkt e, mit EL parallel, die Gerade el, so wird diese offenbar der Forderung genügen.

Der Fall (c) endlich lässt sich mittelst des Falles (a) und einer früheren Aufgabe (§ 5, III.) leicht erledigen. Denn errichtet man aus dem Scheitel des gegebenen Winkels auf einen seiner Schenkel, welche a, b heissen mögen, etwa auf b, einen Perpendikel (wie soeben gezeigt worden (a)), so kann sofort dieser Winkel, nach Anweisung von (§ 5, III.), verdoppelt werden, d. h. man hat zwei Winkel (ab), (bc), die einander gleich sind und den Schenkel b gemein haben, sodass der Winkel (ac) das Zweifache des gegebenen Winkels (ab) ist. Errichtet man nun weiter auf dieselbe Weise auf den Schenkel c einen Perpendikel und verdoppelt die an diesem Schenkel liegenden beiden Winkel (cb), (ca), so erhält man zwei neue Schenkel d, e, und es ist (ad) das Dreifache und (ae) das Vierfache des gegebenen Winkels (ab). Auf gleiche Weise gelangt man nun mittelst eines Perpendikels auf den letzten Schenkel e zum 5-, 6-, 7- und 8fachen des gegebenen Winkels, und sodann [**29**] durch einen neuen Perpendikel zum 9- bis 16fachen u. s. w. f., nämlich durch den $n$ten Perpendikel gelangt man zum $(2^n + 1)$- bis 2^{n+1}fachen.

Zweites Kapitel.

Ueber einige Eigenschaften des Kreises.

I. Von harmonischen Eigenschaften.*)

§ 10.

I. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ (Fig. 12) irgend vier harmonische Punkte, so sind jede vier Strahlen a, b, c, d, welche von irgend einem Punkte B aus durch dieselben gehen, ebenfalls harmonisch (§ 3). Werden die vier Punkte als fest angenommen und sollen von den Strahlen zwei zugeordnete, etwa a

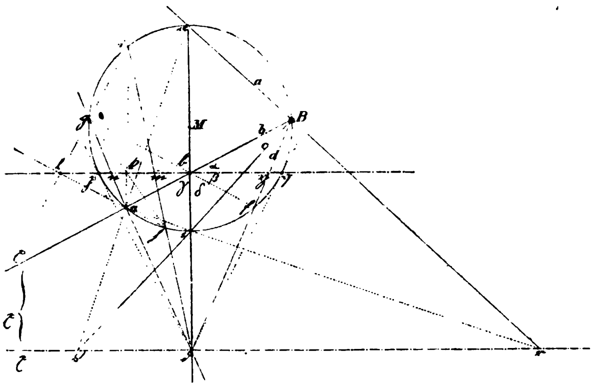

Fig. 12.

und c, zu einander rechtwinklig sein, mithin die von den zwei übrigen eingeschlossenen Winkel hälften, sodass Winkel $(ab) = (ad)$ und $(cb) = (cd)$ (§ 3, IV.), so ist offenbar der Ort des Punktes B ein Kreis M, welcher die Strecke $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ zum Durchmesser hat.

Die Strahlen b, d begegnen dem genannten Kreise M zum zweiten Male in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$. Da Winkel [30] $(bc) = (dc)$, so

*) Obschon diese Eigenschaften zu dem Hauptzwecke dieser Schrift (drittes Kapitel) wenig dienlich sind, so werden sie dennoch hier kurz entwickelt, und zwar deshalb, weil sie an und für sich interessant sind, in den Lehrbüchern aber noch fast gänzlich fehlen, und weil sie sich hier aus den vorhergehenden Betrachtungen leicht und elementar ableiten lassen.

ist auch Bogen $\mathfrak{ec} = \mathfrak{fc}$. Daher folgt (wenn man die gleichen Sehnen $\mathfrak{ec}$, $\mathfrak{fc}$ zieht), dass Winkel $\gamma = \delta$ und Winkel $\mathfrak{edc} = \mathfrak{fdc}$; und hieraus folgt weiter, dass der zu den drei Strahlen $\mathfrak{be}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{bf}$ gehörige, dem $\mathfrak{bc}$ zugeordnete, vierte harmonische Strahl $\mathfrak{bq}$ zu $\mathfrak{bc}$ senkrecht ist und mit den beiden übrigen Strahlen $\mathfrak{be}$ (oder $\mathfrak{b}B$), $\mathfrak{bf}$ gleiche Winkel bildet, nämlich Winkel $\alpha = \beta$, und dass ebenso der zu den drei Strahlen $\mathfrak{de}$, $\mathfrak{dc}$, $\mathfrak{df}$ gehörige, dem $\mathfrak{dc}$ zugeordnete, vierte harmonische Strahl $\mathfrak{dx}$ zu dem Strahle $\mathfrak{dc}$ senkrecht ist, und mit den zwei übrigen $\mathfrak{de}$, $\mathfrak{df}$ gleiche Winkel bildet. Vermöge dieser harmonischen Strahlen folgt endlich weiter, dass $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{y}$, B und ebenso B, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{x}$ vier harmonische Punkte sind.

Da bei dieser Betrachtung die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, sowie der Kreis M, als fest vorausgesetzt sind, so sind auch die Geraden $\mathfrak{bq}$ und $\mathfrak{dx}$, wovon die erste den Kreis in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ schneidet, fest, dagegen ändern die Strahlen b, d, $\mathfrak{bf}$, $\mathfrak{de}$ ihre Lage mit dem Punkte B zugleich, nämlich sie drehen sich um die festen Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, während B den Kreis durchläuft. Da ferner die veränderlichen Winkel α und β stets einander gleich sind, so müssen B und $\mathfrak{f}$ sich gleichzeitig dem festen Punkte $\mathfrak{q}$ nähern, sodass sie sich zuletzt zugleich mit ihm vereinigen, und dass folglich die Gerade $\mathfrak{dq}$, in welche in diesem Falle der Strahl d übergeht, Tangente des Kreises ist. (Das Letztere folgt auch daraus, dass, wenn man sich den Punkt B nach dem festen Punkte $\mathfrak{q}$ gelangt vorstellt, und sich sodann die Strahlen $\mathfrak{qa}$, $\mathfrak{qb}$, $\mathfrak{qc}$, $\mathfrak{qd}$ denkt, diese harmonisch [31] sind und ausserdem $\mathfrak{qa}$ und $\mathfrak{qc}$ zu einander rechtwinklig, mithin Winkel $\mathfrak{cqb} = \mathfrak{cqd} = \mathfrak{cpb}$, und folglich $\mathfrak{dq}$ Tangente ist.) Ebenso folgt, dass $\mathfrak{dp}$ Tangente des Kreises ist.

Aus diesen Betrachtungen folgt unter andern der nachstehende Satz.

»Zieht man durch irgend einen festen Punkt, $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{d}$, beliebige Gerade, wie etwa $B\mathfrak{bex}$ oder $\mathfrak{dfy}B$, welche einen festen Kreis M schneiden, so ist der Ort desjenigen Punktes, $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$, welcher zu den zwei Durchschnittspunkten, B und $\mathfrak{e}$, oder $\mathfrak{f}$ und B, und zu jenem festen Punkte, $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{d}$, der vierte, dem letzteren zugeordnete, harmonische Punkt ist, eine bestimmte Gerade, $\mathfrak{xd}$ oder $\mathfrak{yb}$, welche auf demjenigen Durchmesser des Kreises senkrecht steht, der durch den festen Punkt geht, $\mathfrak{abcd}$, und welche ausserhalb des Kreises liegt ($\mathfrak{xd}$) oder ihn schneidet ($\mathfrak{yb}$), je nachdem der feste Punkt innerhalb ($\mathfrak{b}$) oder ausserhalb ($\mathfrak{d}$) desselben sich befindet.« »Im letzteren Falle, wo der feste Punkt $\mathfrak{d}$ ausserhalb des Kreises liegt, schneidet die genannte zugehörige Orts-Gerade $\mathfrak{yb}$ den Kreis in denjenigen Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, in welchen er von den durch den festen Punkt $\mathfrak{d}$ gehenden Tangenten $\mathfrak{dp}$, $\mathfrak{dq}$ berührt wird.«

Vermöge dieser gegenseitigen Beziehung des jedesmaligen festen Punktes, $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{d}$, und der zugehörigen Orts-Geraden, $\mathfrak{xd}$ oder $\mathfrak{yb}$, heisst jener [32] der »harmonische Pol« der letztern, und diese heisst die »Harmonische« jenes Punktes in Bezug auf den festen Kreis.

II. Zieht man aus dem festen Punkt $\mathfrak{d}$ irgend zwei Secanten durch den Kreis M, etwa $\mathfrak{dg}$ und $\mathfrak{di}$, so bestimmen die vier Durchschnittspunkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$ vier Gerade $\mathfrak{hel}$, $\mathfrak{igl}$, $\mathfrak{efi}$, $\mathfrak{gfh}$, oder ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen einander harmonisch schneiden (§ 4), sodass also die zwei Diagonalen $\mathfrak{eg}$ und $\mathfrak{hi}$ von der dritten $\mathfrak{fl}$ in denjenigen Punkten $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ geschnitten werden, welche zu den drei Punkten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$ die vierten, dem $\mathfrak{d}$ zugeordneten, harmonischen Punkte sind; da aber, zufolge des vorstehenden Satzes (I.), die nämlichen Geraden $\mathfrak{deg}$, $\mathfrak{dhi}$ von der Geraden $\mathfrak{pbq}$ in denselben harmonischen Punkten $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ geschnitten werden, so muss folglich die Diagonale $\mathfrak{fl}$ mit der Geraden $\mathfrak{pq}$ zusammenfallen, d. h. die Punkte $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$ müssen in der Harmonischen $\mathfrak{pq}$ des Punktes $\mathfrak{d}$ liegen. Ebenso folgt, dass, wenn man durch den Punkt $\mathfrak{b}$ irgend zwei Secanten $B\mathfrak{be}$, $\mathfrak{abc}$ zieht (wovon die letztere nicht Durchmesser zu sein braucht), ihre vier Durchschnittspunkte B, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ mit dem Kreise, ein vollständiges Vierseit $\mathfrak{aes}$, $B\mathfrak{cs}$, $\mathfrak{a}B\mathfrak{r}$, $\mathfrak{ecr}$ bestimmen, dessen dritte Diagonale $\mathfrak{rs}$ die zwei übrigen $B\mathfrak{e}$, $\mathfrak{ac}$ in denjenigen Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{d}$ schneiden muss, welche zu den drei Punkten B, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die vierten, dem $\mathfrak{b}$ zugeordneten, harmonischen Punkte sind, dass folglich die Diagonale $\mathfrak{rs}$ mit der Harmonischen $\mathfrak{xd}$ des Punktes $\mathfrak{b}$ zusammenfällt. Also:

»Zieht man aus irgend einem festen [33] Punkte, $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{b}$, zwei beliebige Secanten, $\mathfrak{dg}$, $\mathfrak{di}$ oder $B\mathfrak{e}$, $\mathfrak{ac}$, durch einen festen Kreis M, so bestimmen ihre vier Durchschnittspunkte, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$ oder B, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, ein (einfaches) Viereck, (welches jene Secanten zu Diagonalen hat, und) dessen gegenüber stehende Seitenpaare, $\mathfrak{h}\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{i}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$, oder Bc und ae, aB und ec, sich auf der Harmonischen, $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ oder $\mathfrak{x}\mathfrak{d}$, des jedesmaligen festen Punktes, $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{b}$, schneiden, nämlich in den Punkten $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$.«

III. Zufolge dieses Satzes (II.) muss also die Harmonische des Punktes $\mathfrak{l}$, da $\mathfrak{h}\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{i}\mathfrak{g}$ zwei durch diesen Punkt gehende Secanten sind, durch die Punkte $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{k}$ gehen; sie geht aber auch, zufolge (I.), zugleich durch die Berührungspunkte der aus dem Punkt $\mathfrak{l}$ an den Kreis gelegten Tangenten. Daraus kann geschlossen werden: dass die Harmonische jedes beliebigen Punktes $\mathfrak{l}$, der in der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, aber jenseits des Kreises, also auf der einen oder andern Seite in deren Verlängerung liegt, durch den harmonischen Pol $\mathfrak{d}$ dieser Geraden geht, und dass, umgekehrt: der harmonische Pol jeder durch den festen Punkt $\mathfrak{d}$ gehenden Secante in der Harmonischen $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ dieses Punktes, aber jenseits des Kreises liegt; sodass also die in den Durchschnittspunkten der Secante, etwa in $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$ bei der Secante $\mathfrak{d}\mathfrak{h}\mathfrak{i}$, an den Kreis gelegten Tangenten sich in der genannten Harmonischen schneiden. Es gehen aber auch die Harmonischen aller Punkte, welche innerhalb des Kreises in der Geraden $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, also in der Strecke $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, liegen, durch [34] den harmonischen Pol $\mathfrak{d}$ dieser Geraden. Denn denkt man sich z. B. die Harmonische des Punktes $\mathfrak{m}$, so muss dieselbe der Geraden $\mathfrak{i}\mathfrak{m}\mathfrak{h}$ in demjenigen Punkte begegnen, welcher zu den drei Punkten $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}$ der vierte, dem $\mathfrak{m}$ zugeordnete, harmonische Punkt ist (I.), folglich muss sie ihr in $\mathfrak{d}$ begegnen.

Ebenso folgt, dass die Harmonische jedes Punktes in der festen Geraden $\mathfrak{x}\mathfrak{d}$ (welche den Kreis nicht schneidet) durch den harmonischen Pol $\mathfrak{b}$ der letzteren geht. Denn denkt man sich etwa die Harmonische des Punktes $\mathfrak{x}$, so muss sie der Geraden $\mathfrak{x}\mathfrak{e}B$ in demjenigen Punkte begegnen, welcher zu den drei Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{e}$, B der vierte, dem $\mathfrak{x}$ zugeordnete, harmonische Punkt ist (I.); da aber, zufolge der obigen Betrachtung, der Punkt $\mathfrak{b}$ diese Eigenschaft besitzt, so muss sie folglich durch $\mathfrak{b}$ gehen. Da der Punkt $\mathfrak{x}$ ausserhalb des Kreises liegt, so sind aus ihm Tangenten an diesen möglich, durch deren Berührungspunkte seine Harmonische geht (I.).

Aus dieser Betrachtung fliessen unter anderen folgende Sätze:

1. »Liegt ein Punkt in irgend einer Geraden (wie etwa l oder m in pq, oder x oder r in xb), so geht seine Harmonische durch ihren harmonischen Pol (b oder b).«

Oder mit anderen Worten, ausführlicher:

2. »Die Harmonische aller Punkte, welche in irgend einer Geraden (pq oder xb) liegen, schneiden einander in einem bestimmten Punkte (b oder b), nämlich im [35] harmonischen Pol jener Geraden«; und umgekehrt: »die harmonischen Pole aller Geraden, welche durch irgend einen festen Punkt (b oder b) gehen, liegen in der Harmonischen (pq oder xr) des letzteren«.

3. »Lässt man, in der Vorstellung, zwei Tangenten eines festen Kreises *M* sich so bewegen, dass ihr gegenseitiger Durchschnittspunkt (l oder x) längs irgend einer festen Geraden (pq oder xr) fortgleitet, so dreht sich die Gerade, welche durch ihre Berührungspunkte geht, um irgend einen bestimmten festen Punkt (b oder b).« Und umgekehrt: »Dreht sich eine Secante eines festen Kreises um irgend einen festen Punkt (b oder b), so bewegt sich der Durchschnittspunkt der Tangenten, durch deren Berührungspunkte sie geht, längs irgend einer bestimmten Geraden (pq oder xr).«

IV. Die vorstehenden Betrachtungen geben ein bequemes Mittel an die Hand, um die folgenden Aufgaben durch Hülfe des Lineals allein zu lösen.

1. »Wenn in einer Ebene irgend ein Kreis *M* gegeben ist, so soll man α) die Harmonische irgend eines gegebenen Punktes, und β) den harmonischen Pol irgend einer gegebenen Geraden finden.«

Es sei etwa b oder b (Fig. 12) der gegebene Punkt. Man ziehe durch denselben zwei beliebige [36] Secanten, etwa bg und bi oder *B*e und ac, verbinde die vier Durchschnittspunkte e, g, h, i oder *B*, e, a, c, in welchen sie den Kreis *M* schneiden, paarweise durch zwei Paar Gerade, he, ig und hg, ie, oder *B*c, ae und a*B*, ec, so werden ihre Durchschnittspunkte, l und f oder s und r, in der verlangten Geraden (α) liegen, wodurch diese sofort gefunden ist.

Ist ferner etwa die Gerade pq oder xr gegeben (β), so suche man, auf die eben gezeigte Weise, zu irgend zwei Punkten derselben, etwa zu $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$, oder $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$, die Harmonischen, so wird ihr Durchschnittspunkt, $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{b}$, der verlangte Pol sein (III.).

2. »An einen gegebenen Kreis M Tangenten zu ziehen, welche durch irgend einen gegebenen (ausserhalb des Kreises liegenden) Punkt $\mathfrak{d}$ gehen.«

Man construire die Harmonische $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ des gegebenen Punktes $\mathfrak{d}$ (1, *a.*) und verbinde die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, in welchen sie den Kreis schneidet, mit jenem Punkte durch Gerade, $\mathfrak{d}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{q}$, so sind diese die gesuchten Tangenten.

Anmerkung. Andere Sätze, welche aus der obigen Betrachtung unmittelbar folgen, und welche zum Theil die dem Kreise eingeschriebenen und umschriebenen Dreiecke, Vierecke u. s. w. betreffen, werden hier, als zu weit von dem gegenwärtigen Zwecke abliegend, übergangen. Man findet dieselben, nebst den vorstehenden Sätzen und Aufgaben, in der oben genannten Schrift (Systematische Entwickelung etc.) auf umfassende, dem Gegenstande [37] angemessene Weise für alle Kegelschnitte zugleich bewiesen. — Die vorstehenden Sätze sind übrigens die Grundlage der sogenannten »*Théorie des polaires réciproques*«.[3])

II. Vom Aehnlichkeitspunkt.

§ 11.

Zieht man in einer Ebene durch irgend einen Punkt A (Fig. 13) nach allen Richtungen Strahlen (Gerade) $A\mathfrak{a}$, $A\mathfrak{b}$, $A\mathfrak{c}$, ... und bezieht mittelst dieser Strahlen alle Punkte der Ebene dergestalt aufeinander, dass jedem Punkte $\mathfrak{a}$, in einem solchen Strahl, $A\mathfrak{a}$, ein anderer Punkt $\mathfrak{a}_1$ im nämlichen Strahl entspricht und zwar unter der Bedingung, dass die Abstände je zweier entsprechenden Punkte von dem Punkte A, $A\mathfrak{a}$ und $A\mathfrak{a}_1$, durchweg ein und dasselbe gegebene Verhältniss haben, etwa $n : n_1$, so wird dadurch ein solches Beziehungssystem bewirkt, in welchem die Ebene doppelt gesetzt ist, oder was man sich auch so vorstellen kann, als lägen zwei Ebenen, die E, E_1 heissen mögen, aufeinander, indem nämlich jeder Punkt sowohl als der einen, wie der anderen Ebene angehörend angesehen werden kann; z. B. den Punkt $(\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1)$ kann man als der Ebene E angehörend betrachten, also als $\mathfrak{c}$, und dann entspricht ihm der Punkt $\mathfrak{c}_1$, oder man kann ihn als der Ebene E_1 angehörend ansehen, das ist als $\mathfrak{d}_1$, und dann entspricht ihm der Punkt $\mathfrak{d}$.

Lässt man in Gedanken den Punkt $\mathfrak{a}$ sich so bewegen, dass er dem Punkte A näher rückt, so [38] muss nothwendiger Weise auch der ihm entsprechende Punkt $\mathfrak{a}_1$ gleichzeitig dem festen Punkte A sich nähern, bis zuletzt beide zugleich sich mit A vereinigen. Demnach kann man sagen, es seien in A zwei entsprechende Punkte vereinigt, und es ist klar, dass diese Eigenschaft nur diesem Punkte allein zukommen kann (ausgenommen bei dem besonderen Beziehungssystem, wo das genannte Verhältniss $n : n_1 = 1$ ist, in welchem Falle jeder Punkt mit seinem entsprechenden zusammenfällt).

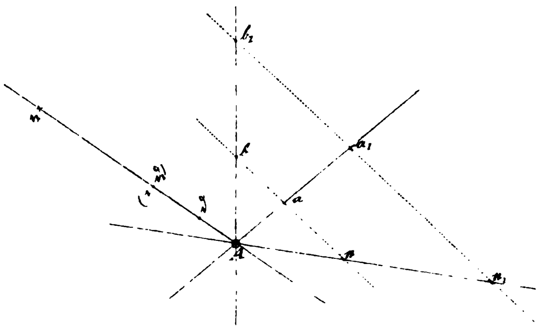

Fig. 13.

Aus dem einfachen Gesetz, durch welches die entsprechenden Punkte der zwei Ebenen E, E_1 bestimmt sind, folgt nun auch unmittelbar die gegenseitige Beziehung, welche irgend ein System von Punkten in der einen Ebene zu dem ihm entsprechenden System von Punkten in der andern Ebene hat; d. h. wenn in der einen Ebene irgend eine Figur gegeben ist, so lässt sich leicht angeben, was für eine Figur ihr in der anderen Ebene entspricht, und welche gegenseitige Beziehung irgend zwei solche entsprechende Figuren zu einander haben. Nämlich die Haupteigenschaften oder Hauptsätze über diese Beziehung gründen sich auf Folgendes:

Es ist zunächst klar, dass die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, welche durch irgend zwei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der einen Ebene E geht, mit denjenigen Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, welche durch die entsprechenden zwei Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ der anderen Ebene E_1 geht, parallel ist, und dass sich die Strecken $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ in diesen Geraden, welche durch die genannten Punkte begrenzt werden, ebenso zu einander verhalten, wie die Abstände irgend [39] zweier entsprechenden Punkte vom Punkte A; d. h. dass sich verhält $\mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = n : n_1$. Denn zufolge des Beziehungssystems sind offenbar die Dreiecke $\mathfrak{a}A\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1A\mathfrak{b}_1$ ähnlich, woraus sofort die ausgesprochenen Behauptungen unmittelbar folgen. Aehnlicher Weise folgt weiter: dass jede der zwei Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ alle Punkte enthält, welche den sämmtlichen Punkten in der anderen Geraden entsprechen; nämlich irgend einem Punkte in der einen Geraden, z. B. dem Punkte $\mathfrak{e}$ in der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, entspricht derjenige Punkt $\mathfrak{e}_1$ in der anderen Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, welcher mit ihm in demselben (durch A gehenden) Strahle liegt, sodass also jeder Geraden in der einen Ebene irgend eine bestimmte Gerade in der anderen Ebene entspricht. Daraus fliessen folgende Sätze:

I. »Jeder Geraden in der einen Ebene entspricht eine bestimmte Gerade in der anderen Ebene; d. h. allen Punkten in der ersten Geraden entsprechen die sämmtlichen Punkte in der zweiten Geraden; je zwei solche entsprechende Gerade sind unter sich parallel, und je zwei entsprechende Strecken (in zwei solchen Geraden) verhalten sich ebenso, wie die Abstände irgend zweier entsprechenden Punkte vom Punkte A, also wie $n : n_1$.« Und umgekehrt: »Eine Gerade, die durch irgend zwei Punkte in der einen Ebene geht, entspricht derjenigen Geraden, welche durch die entsprechenden Punkte in der anderen Ebene bestimmt wird.« Ein [40] wesentlicher besonderer Fall hiervon ist der folgende Satz:

II. »In jeder Geraden, welche durch A geht, also in jedem Strahl, sind zwei entsprechende Gerade vereinigt.«

III. »Dem Durchschnittspunkte irgend zweier Geraden in der einen Ebene entspricht der Durchschnittspunkt der ihnen entsprechenden Geraden in der anderen Ebene.«

IV. »Zieht man aus irgend zwei entsprechenden Punkten, etwa aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, nach beliebiger Richtung zwei parallele Strecken, etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}_1$, die sich dem Beziehungssystem gemäss verhalten, also $\mathfrak{a}\mathfrak{e} : \mathfrak{a}_1\mathfrak{e}_1 = n : n_1$, so sind ihre anderen Endpunkte, e und e_1, ebenfalls entsprechende Punkte, und liegen als solche in irgend einem (durch A gehenden) Strahl.«

Aus diesen Fundamentalsätzen folgen nun weiter die nachstehenden Sätze.

V. »Irgend einer geradlinigen Figur in der einen Ebene entspricht eine ähnliche und ähnlichliegende Figur in der anderen Ebene, nämlich die Ecken beider Figuren sind entsprechende Punkte, so dass sie paarweise in Strahlen liegen, und ihre Seiten sind entsprechende Gerade (oder Strecken), also paarweise parallel.«

VI. »Irgend einer krummen Linie C in der einen Ebene E entspricht eine [41] ähnliche und ähnlichliegende Curve C_1, in der anderen Ebene E_1, die Punkte, in welchen die erste Curve C von irgend einer Geraden G geschnitten wird, entsprechen den Punkten, in welchen die dieser entsprechende Gerade G_1 die zweite Curve C_1 schneidet, sodass also C und G sich in ebensovielen Punkten schneiden, als C_1 und G_1; daher wird jeder Tangente der ersten Curve auch eine bestimmte, jener parallele, Tangente der zweiten Curve entsprechen, und zwar müssen auch ihre Berührungspunkte entsprechende Punkte sein; jeder durch A gehende Strahl, welcher die eine Curve berührt, berührt auch die andere Curve, und zwar berührt er sie in entsprechenden Punkten«; u. s. w.

Insbesondere folgt also hieraus, dass:

VII. »irgend einem Kreise in der einen Ebene ebenfalls ein Kreis in der anderen Ebene entsprechen muss, und dass auch die Mittelpunkte zweier solcher Kreise entsprechende Punkte sind«; u. s. w.

Zufolge dieser Eigenschaften des Beziehungssystems wird der Punkt A »der Aehnlichkeitspunkt« oder in Ansehung der beiden aufeinander liegenden Ebenen E und E_1 »der Projectionspunkt« genannt.

Bei einem solchen Beziehungssystem sind jedoch zwei wesentlich verschiedene Fälle von einander [42] zu unterscheiden. Man kann nämlich entweder:

α) je zwei entsprechende Punkte, wie a und a_1, auf einerlei Seite vom Aehnlichkeitspunkt A annehmen, wie bei der vorstehenden Betrachtung geschehen ist, oder

β) je zwei entsprechende Punkte auf entgegengesetzten Seiten vom Aehnlichkeitspunkte annehmen, in welchem Falle dieser fortan durch I bezeichnet werden wird.

Diese beiden Fälle werden in der Folge dadurch unterschieden, dass man beim ersten Falle sagt, das Beziehungssystem habe einen »äusseren« und beim zweiten Falle, es habe einen »inneren« Aehnlichkeitspunkt.

Je zwei ähnliche Figuren, geradlinige oder krummlinige, lassen sich sowohl so legen, dass sie einen äusseren, als so, dass sie einen inneren Aehnlichkeitspunkt haben. Es giebt auch eine gewisse Klasse von Figuren, die beiden Forderungen zugleich genügen können, d. h. die sich in solche Lage bringen lassen, dass sie zugleich einen äusseren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt haben. Wird von zwei Figuren in einer Ebene gesagt, sie seien ähnlich und ähnlichliegend, so haben sie allemal einen Aehnlichkeitspunkt (V. u. VI.).

§ 12.

I. Aus den vorstehenden allgemeinen Gesetzen über den Aehnlichkeitspunkt folgen für den Kreis insbesondere nachstehende Eigenschaften.

[**43**] »Sind in einer Ebene irgend zwei Kreise gegeben, gleichviel welche gegenseitige Lage sie haben mögen, so haben sie allemal zugleich einen äusseren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt.«

Es seien M, M_1 (Fig. 14) die Mittelpunkte der Kreise und etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ irgend zwei parallele Durchmesser derselben, so werden, wenn man durch die Mittelpunkte die Gerade MM_1 zieht, die fortan »Axe« heissen soll, die

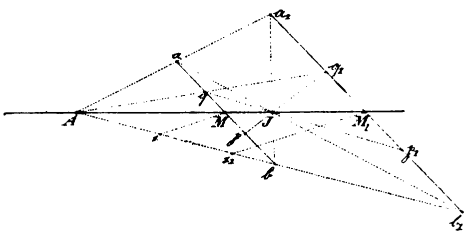

Fig. 14.

auf einerlei Seite der Axe liegenden Endpunkte der Durchmesser mit dem äusseren, und die auf entgegengesetzten Seiten derselben liegenden Endpunkte mit dem inneren Aehnlichkeitspunkt in

Geraden liegen; d. h., die Geraden oder Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ begegnen der Axe in irgend einem und demselben festen Punkte A, und die Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$ begegnen ihr in einem festen Punkte I. Denn vermöge der Parallelität der Durchmesser sind offenbar die Dreiecke $AM\mathfrak{a}$ und $AM_1\mathfrak{a}_1$, sowie die Dreiecke $IM\mathfrak{a}$ und $IM_1\mathfrak{b}_1$, ähnlich, woraus folgt, dass:

$$a) \qquad AM : AM_1 = M\mathfrak{a} : M_1\mathfrak{a}_1, \text{ und}$$

$$b) \qquad IM : IM_1 = M\mathfrak{a} : M_1\mathfrak{b}_1,$$

was, wie man sieht, dem Princip des Aehnlichkeitspunktes genügt; denn da nämlich die Verhältnisse rechts, die aus den Radien der Kreise gebildet sind, constant bleiben, welche parallele Richtung diese Radien immerhin haben mögen, so müssen auch die Verhältnisse links, also $AM : AM_1$ und $IM : IM_1$, denselben beständigen Werth haben, etwa $n : n_1$, und daher müssen folglich (da die Mittelpunkte M, M_1 fest sind): [44] »alle Geraden oder Strahlen, welche durch die auf einerlei Seite der Axe MM_1 liegenden Endpunkte paralleler Durchmeser gehen, der Axe in einem und demselben festen Punkte A, und die Strahlen, welche durch die auf entgegengesetzten Seiten der Axe liegenden Endpunkte gehen, müssen ihr in einem und demselben festen Punkte I begegnen, und diese zwei festen Punkte sind die Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise.«

Da $M_1\mathfrak{a}_1 = M_1\mathfrak{b}_1$, als Halbmesser des Kreises M_1, so sind die zwei Verhältnisse rechts (in (a) und (b)) einander gleich, daher ist auch

$$c) \qquad AM : AM_1 = IM : IM_1;$$

das heisst: »Die zwei Mittelpunkte M, M_1 der Kreise und die zwei Aehnlichkeitspunkte A, I derselben sind allemal zusammen vier harmonische Punkte, und zwar sind sowohl jene zwei, wie diese zwei, zugeordnete harmonische Punkte.«

Auch kann bemerkt werden, dass die Mittelpunkte der Kreise nothwendiger Weise immer auf einerlei Seite des äusseren Aehnlichkeitspunktes liegen, dagegen der innere Aehnlichkeitspunkt immer zwischen ihnen liegen muss.

Ferner sind über die gegenseitige Lage der Kreise und ihrer Aehnlichkeitspunkte folgende Umstände zu merken:

1) Wenn die Kreise ganz ausser einander liegen, so schneiden sich ihre äusseren gemeinschaftlichen Tangenten

im äusseren A-, und ihre inneren [**45**] gemeinschaftlichen Tangenten schneiden sich im inneren I-Aehnlichkeitspunkte, sodass also beide Aehnlichkeitspunkte ausserhalb beider Kreise liegen.

2) Lässt man in der Vorstellung die Kreise einander näher rücken, oder, wenn die Mittelpunkte und Aehnlichkeitspunkte fest bleiben sollen, in gleichem Verhältniss grösser werden, bis sie sich berühren, d. h. äusserlich berühren, so ist ihr Berührungspunkt zugleich ihr innerer Aehnlichkeitspunkt.

3) Bewegt man auf dieselbe Weise die Kreise weiter, bis sie einander schneiden, so liegt der innere Aehnlichkeitspunkt I innerhalb beider Kreise.

4) Dringt der kleinere Kreis so tief in den grösseren, dass er ihn nur noch berührt, d. h. innerlich berührt, so ist ihr Berührungspunkt zugleich ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt.

5) Gelangt der kleinere Kreis ganz innerhalb des grösseren, so liegen beide Aehnlichkeitspunkte innerhalb des kleineren Kreises.

6) Werden endlich die Kreise concentrisch, so fallen beide Aehnlichkeitspunkte mit ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkte zusammen.

7) Sind insbesondere die Kreise einander gleich, gleichviel ob sie einander schneiden oder ausser einander liegen, so liegt der innere Aehnlichkeitspunkt I in der Mitte zwischen ihren Mittelpunkten, und der äussere Aehnlichkeitspunkt A ist unendlich entfernt.

Von der Richtigkeit dieser Angaben wird man sich, durch Hülfe der obigen Betrachtungen, sehr leicht überzeugen können.

[**46**] II. Nach vorstehender Betrachtung liegen die Endpunkte irgend zweier parallelen Radien der zwei Kreise mit dem äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkt in einer Geraden, je nachdem sie auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten der Axe MM_1 liegen. Daher muss nothwendiger Weise auch das Umgekehrte stattfinden, nämlich:

»Zieht man durch einen der beiden Aehnlichkeitspunkte A, I zweier gegebenen Kreise M, M_1 irgend eine Gerade, welche den einen Kreis schneidet, so schneidet sie nothwendiger Weise auch den anderen Kreis, und zwar in entsprechenden Punkten, sodass die nach diesen Punkten gezogenen Radien beider Kreise paarweise parallel sind, z. B. bei einer durch A gehenden Geraden, welche die Kreise M, M_1 etwa in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$ schneidet, müssen sowohl die Radien $M\mathfrak{b}$ und $M_1\mathfrak{b}_1$, als $M\mathfrak{c}$ und $M_1\mathfrak{c}_1$ parallel sein.«

III. Da für beide Aehnlichkeitssysteme das Verhältniss $n : n_1$, durch welches die entsprechenden Punkte bestimmt sind (§ 11.), durch die Radien der Kreise gegeben ist (I.), mithin für beide den nämlichen Werth hat, und da sowohl $AM : AM_1$, als $IM : IM_1$ diesem Werthe gleich ist (I., a und b.), so sind folglich M und M_1 in beiden Systemen zugleich entsprechende Punkte.

Nimmt man irgend einen beliebigen Punkt $\mathfrak{q}$ an, und betrachtet ihn, in Bezug auf beide Aehnlichkeitssysteme, [47] als mit dem Kreise M derselben Ebene E angehörend (§ 11.), so werden ihm in der anderen Ebene E_1, welcher der andere Kreis M_1 angehört, zwei verschiedene Punkte entsprechen, nämlich es entspricht ihm ein bestimmter Punkt $\mathfrak{q}_1$ in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt A, und ein bestimmter Punkt $\mathfrak{p}_1$, vermöge des Aehnlichkeitspunktes I, und es müssen diese zwei Punkte $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{p}_1$ offenbar in einem und demselben Durchmesser des Kreises M_1 liegen und zwar gleich weit von dessen Mittelpunkt entfernt sein; d. h., es muss $\mathfrak{q}_1 M_1 \mathfrak{p}_1$ eine Gerade und $\mathfrak{q}_1 M_1 = M_1 \mathfrak{p}_1$ sein. Denn da M und M_1 in Bezug auf beide Aehnlichkeitspunkte entsprechende Punkte sind, und da ferner $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$ in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt A, und $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}_1$ in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt I entsprechende Punkte sind, so ist demnach sowohl $M_1\mathfrak{q}_1$ als $M_1\mathfrak{p}_1$ parallel $M\mathfrak{q}$ (§ 11, I.), also $\mathfrak{q}_1 M_1 \mathfrak{p}_1$ eine Gerade, und es verhält sich

$$AM : AM_1 = M\mathfrak{q} : M_1\mathfrak{q}_1, \text{ und}$$
$$IM : IM_1 = M\mathfrak{q} : M_1\mathfrak{p}_1,$$

mithin (I., c.):

$$M\mathfrak{q} : M_1\mathfrak{q}_1 = M\mathfrak{q} : M_1\mathfrak{p}_1$$

und folglich:

$$M_1\mathfrak{q}_1 = M_1\mathfrak{p}_1 .$$

Also: »Irgend einem Punkte, welchen man als zu dem einen Kreise gehörend ansieht, wie etwa dem Punkte $\mathfrak{q}$ als zu dem Kreise M gehörend angesehen, entsprechen vermöge der zwei Aehnlichkeitspunkte A, I in Bezug auf den anderen Kreis M_1 zwei solche

Punkte $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{p}_1$, [48] welche in einem und demselben Durchmesser dieses Kreises liegen und gleich weit von seinem Mittelpunkte (auf entgegengesetzten Seiten) abstehen; und es haben nur die Mittelpunkte M, M_1 der zwei Kreise allein die Eigenschaft, dass sie in Rücksicht auf beide Aehnlichkeitspunkte zugleich entsprechende Punkte sind.«

Hiernach kann man leicht, wenn etwa der eine Kreis M_1 gezeichnet vorliegt, aber der andere nicht, und wenn die Aehnlichkeitspunkte A, I gegeben sind, zu irgend einem Punkte $\mathfrak{q}_1$ oder $\mathfrak{p}_1$, welchen man als zu dem ersten Kreise gehörend ansieht, den entsprechenden Punkt in Ansehung des zweiten Kreises für das äussere und innere Aehnlichkeitssystem finden. Nämlich man zieht die Gerade $\mathfrak{q}_1 M_1 \mathfrak{p}_1$, nimmt den Punkt $\mathfrak{p}_1$ oder $\mathfrak{q}_1$ so an, dass $\mathfrak{q}_1 M_1 = M_1 \mathfrak{p}_1$ (was, unter der Voraussetzung, dass der Kreis M_1 gegeben sei, leicht geschehen kann), und zieht die Geraden $A\mathfrak{q}_1$, $I\mathfrak{p}_1$, so werden sich diese in dem verlangten Punkte $\mathfrak{q}$ schneiden. Zieht man ferner die Geraden $A\mathfrak{p}_1$, $I\mathfrak{q}_1$, so schneiden sich diese in einem Punkte $\mathfrak{p}$, welcher ebenfalls der Forderung genügt, und es ist $\mathfrak{q}M\mathfrak{p}$ eine Gerade, und $\mathfrak{q}M = M\mathfrak{p}$. Am einfachsten sind die Punkte zu finden, welche in dem Umfange des Kreises liegen, weil nämlich für diesen Fall in jedem Durchmesser des gegebenen Kreises unmittelbar zwei gleiche Strecken gegeben sind, wie z. B. im Durchmesser $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ die Strecken $\mathfrak{a}_1 M_1$ und $M_1 \mathfrak{b}_1$, wodurch sofort, nach der eben [49] angegebenen Weise, die Endpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ des entsprechenden Durchmessers im anderen Kreise gefunden werden. Diese letzte Construction findet bei den unten folgenden Aufgaben (§ 18) häufige Anwendung.

Aus dem vorstehenden Satze folgert man ferner leicht: »Dass jeder Geraden, die man als zu dem einen Kreise gehörend ansieht, wie z. B. irgend einer Geraden G, die man sich als zum Kreise M gehörend vorstellt, in Rücksicht auf die zwei Aehnlichkeitspunkte A, I, zwei verschiedene, zum Kreise M_1 gehörige, Gerade G_1, H_1 entsprechen, welche unter sich parallel sind (weil jede es mit jener G ist), und welche gleich weit vom Mittelpunkte M_1 abstehen.« »Geht die Gerade G insbesondere durch den Mittelpunkt M des zugehörigen Kreises, so fallen die zwei Geraden G_1, H_1

auf einander, und gehen ebenfalls durch den Mittelpunkt M_1 ihres zugehörigen Kreises«; »und fällt endlich G mit der Axe MM_1 zusammen, so vereinigen sich G_1, H_1 mit ihr«.*)

---

*) Von der grossen Menge von Anwendungen, die aus den Eigenschaften des Aehnlichkeitspunktes sich ableiten lassen, und die ich an einem anderen Orte ausführlich entwickeln werde, will ich hier nur ein Beispiel kurz andeuten, welches den Zusammenhang einiger häufig betrachteten, merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks auf eine eigenthümliche Weise aufklärt, nämlich das folgende Beispiel.

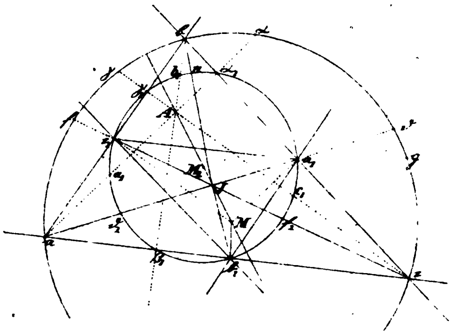

Fig. 15.

I. Zieht man in einem beliebigen Dreieck $\mathfrak{abc}$ (Fig. 15) aus den Ecken nach den Mitten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ der gegenüber liegenden Seiten gerade Linien $\mathfrak{aa}_1$, $\mathfrak{bb}_1$, $\mathfrak{cc}_1$, so schneiden sich diese bekanntlich in einem und demselben Punkte I und theilen einander dergestalt, dass sich die Abschnitte einer jeden zu einander verhalten wie $2:1$; d. h., es verhält sich:

$$1. \qquad I\mathfrak{a} : I\mathfrak{a}_1 = I\mathfrak{b} : I\mathfrak{b}_1 = I\mathfrak{c} : I\mathfrak{c}_1 = 2:1.$$

Daraus folgt also, dass man den Punkt I als Aehnlichkeitspunkt (oder Projectionspunkt) eines Beziehungssystems ansehen kann, in welchem $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ entsprechende Punkte sind, sodass $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der einen Ebene E und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ der anderen Ebene E_1 angehören, oder dass, mit einem Wort, die Dreiecke $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ entsprechende Dreiecke sind, und dass je zwei ähnlichliegende Punkte, in Bezug auf diese Dreiecke, auch zugleich ähnlichliegende Punkte in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt I sind, d. h. mit diesem in einer Geraden liegen, und von ihm nach dem beständigen Verhältniss von $2:1$ entfernt sind (§ 11).

Wird nun ferner als bekannt vorausgesetzt, dass die drei Lothe $\mathfrak{a}_1M$, $\mathfrak{b}_1M$, $\mathfrak{c}_1M$, welche aus den Mitten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ der Seiten des ersten Dreiecks $\mathfrak{abc}$ auf diese Seiten errichtet werden, einander in einem Punkte M treffen, nämlich im Mittelpunkte des dem Dreieck umschriebenen Kreises, und wird bemerkt, dass dieselben zugleich auch auf den entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ perpendikular sind (weil diese beziehlich mit jenen parallel sind): so folgt, wenn man jene Lothe für einen Augenblick als zu dem Dreieck $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ gehörend ansieht, vermöge des Aehnlichkeitspunktes I unmittelbar, dass auch die ihnen entsprechenden drei Geraden, d. i. die durch die Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ des ersten Dreiecks mit jenen Lothen parallelen, und mithin zu den

[50] Zum Behufe des Folgenden ist es zweckmässig, den hier betrachteten Elementen bestimmte [51] Benennungen

---

Gegenseiten dieses Dreiecks senkrechten, Geraden $\mathfrak{a}A$, $\mathfrak{b}A$, $\mathfrak{c}A$ einander in einem bestimmten Punkte A treffen, und zwar in demjenigen Punkte, welcher jenem Punkte M entspricht, sodass folglich die drei Punkte M, I, A in einer Geraden (Projectionsstrahl) liegen, und sich verhält

2. $IA : IM = 2 : 1.$

Zugleich folgt zunächst aus dieser Betrachtung auf doppelte Weise der bekannte Satz: »Dass die aus den Ecken auf die Gegenseiten eines Dreiecks ($\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ oder $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$) gefällten Lothe ($\mathfrak{a}_1M$, $\mathfrak{b}_1M$, $\mathfrak{c}_1M$, oder $\mathfrak{a}A$, $\mathfrak{b}A$, $\mathfrak{c}A$) allemal einander in einem und demselben Punkte (M oder A) treffen.«

Es folgt weiter, wenn man nämlich den Punkt M als der ersten Ebene E angehörend ansieht, und zwar als Mittelpunkt des dem Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ umschriebenen Kreises, dass ihm dann der Mittelpunkt M_1 des dem Dreieck $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ umschriebenen Kreises entspricht, und dass folglich dieser letztere Punkt M_1 ebenfalls in dem vorgenannten Projectionsstrahl MIA liegen muss, und zwar so liegen muss, dass sich verhält

3. $IM : IM_1 = 2 : 1.$

Aus diesem und dem vorigen (2.) Verhältniss folgt, wie man in der Figur sieht, dass sich auch verhält

4. $AM : AM_1 = 2 : 1,$

sodass also der Punkt A offenbar der äussere Aehnlichkeitspunkt der zwei Kreise M, M_1 ist.

Demnach hat man, zusammengenommen, den folgenden Satz.

»Bei jedem beliebigen Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ liegen die zwei Punkte, A und I, wovon der eine A der Durchschnittspunkt der drei Höhen und der andere I der Durchschnittspunkt der drei aus den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten gezogenen Geraden ist, mit den Mittelpunkten, M und M_1, der zwei Kreise, wovon der eine dem Dreieck umschrieben und der andere durch die Mitten der Seiten desselben geht, allemal in einer und derselben Geraden, und zwar sind die erstgenannten zwei Punkte die Aehnlichkeitspunkte der zwei Kreise, sodass also die vier genannten Punkte harmonisch liegen (§ 12, I.), wobei sowohl das erste wie das zweite Punktenpaar zugeordnete harmonische Punkte sind; und ferner sind die Abstände der vier Punkte von einander namentlich so beschaffen, dass sich verhält

5. $IM_1 : IM : AM_1 : AM = 1 : 2 : 3 : 6.$«

II. Vermöge der Kreise M, M_1 und ihrer Aehnlichkeitspunkte A, I folgert man unmittelbar noch mehr Eigenschaften, als z. B. nachstehende:

1. Die Strecken $A\mathfrak{a}$, $A\mathfrak{b}$, $A\mathfrak{c}$, in E, entsprechen in Ansehung des inneren Aehnlichkeitspunktes I den Strecken $M\mathfrak{a}_1$, $M\mathfrak{b}_1$, $M\mathfrak{c}_1$ in E_1; daher verhält sich

$$A\mathfrak{a} : M\mathfrak{a}_1 = A\mathfrak{b} : M\mathfrak{b}_1 = A\mathfrak{c} : M\mathfrak{c}_1 = 2 : 1.$$

beizulegen. Nämlich irgend zwei entsprechende Punkte, wie etwa $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$, oder $\mathfrak{q}$ [52] und $\mathfrak{p}_1$, sollen in der Folge, in

---

2. Die Punkte a_1, b_1, c_1, in welchen der Kreis M_1 die Strahlen $A\mathfrak{a}$, $A\mathfrak{b}$, $A\mathfrak{c}$ schneidet, sind, vermöge des äusseren Aehnlichkeitspunktes A, die Mitten dieser Strahlen, sodass sich verhält:

$$A\mathfrak{a} : Aa_1 = A\mathfrak{b} : Ab_1 = A\mathfrak{c} : Ac_1 = 2 : 1.$$

3. Bezeichnet man die Punkte, in welchen die Kreise M und M_1 von den drei, durch ihren inneren Aehnlichkeitspunkt I gehenden Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, geschnitten werden, beziehlich durch $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ so verhält sich:

$$I\mathfrak{d} : I\mathfrak{d}_1 = I\mathfrak{e} : I\mathfrak{e}_1 = I\mathfrak{f} : I\mathfrak{f}_1 = 2 : 1.$$

4. Da der Punkt M_1 in der Mitte zwischen M und A liegt (I., 4.), und da $M\mathfrak{a}_1$ und $A\alpha_1$ zu $\mathfrak{a}_1\alpha_1$ senkrecht sind, so muss folglich der Kreis M_1 auch durch α_1 gehen, weil er durch $\mathfrak{a}_1$ geht; ebenso muss er durch β_1 und γ_1 gehen. Oder dasselbe folgt auch daraus, dass $M_1\mathfrak{a}_1$ parallel $M\mathfrak{a}$, vermöge des Aehnlichkeitspunktes I, und auch M_1a_1 parallel $M\mathfrak{a}$, vermöge des Aehnlichkeitspunktes A, dass mithin $\mathfrak{a}_1M_1a_1$ ein Durchmesser des Kreises M_1, und folglich $\mathfrak{a}_1\alpha_1a_1$ ein rechter Winkel im Halbkreise ist u. s. w.

5. Werden also die Strahlen $A\alpha_1$, $A\beta_1$, $A\gamma_1$ verlängert, bis sie den ersten Kreis M in α, β, γ schneiden, so verhält sich, vermöge des Aehnlichkeitspunktes A:

$$A\alpha : A\alpha_1 = A\beta : A\beta_1 = A\gamma : A\gamma_1 = 2 : 1.$$

6. Vermöge des Kreises M_1 folgt nun weiter (4.) und (§ 17.), dass:

Rechteck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 . \mathfrak{a}\beta_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{c}_1 . \mathfrak{a}\gamma_1$,
» $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{b}\alpha_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 . \mathfrak{b}\gamma_1$, und
» $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{c}\alpha_1 = \mathfrak{c}\mathfrak{b}_1 . \mathfrak{c}\beta_1$.

7. Vermöge des Aehnlichkeitspunktes A folgt (§ 17), dass:

Rechteck $A\mathfrak{a} . A\alpha_1 = A\mathfrak{b} . A\beta_1 = A\mathfrak{c} . A\gamma_1 =$
» $A\alpha . Aa_1 = A\beta . Ab_1 = A\gamma . Ac_1$;

und vermöge des Aehnlichkeitspunktes I folgt, dass:

Rechteck $I\mathfrak{a} . I\mathfrak{d}_1 = I\mathfrak{b} . I\mathfrak{e}_1 = I\mathfrak{c} . I\mathfrak{f}_1 =$
» $I\mathfrak{d} . I\mathfrak{a}_1 = I\mathfrak{e} . I\mathfrak{b}_1 = I\mathfrak{f} . I\mathfrak{c}_1$.

Diese vorstehenden Sätze (1 bis 7) wird man leicht, nach gewöhnlicher Weise, in Worten abfassen können, wie z. B. folgenden Satz:

»In jedem Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ liegen die 12 Punkte — nämlich die drei Mittelpunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ der Seiten, die drei Fusspunkte α_1, β_1, γ_1 der Höhen, die drei Mittelpunkte a_1, b_1, c_1 derjenigen Strecken der Höhen, welche zwischen ihrem Durchschnittspunkte A und den Ecken des Dreiecks liegen, und endlich die drei Punkte $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$, welche in den aus den Ecken durch die Mitten der Gegenseiten gezogenen Geraden liegen, und von deren gemeinschaftlichem Durchschnittspunkte I halb so weit entfernt sind, als die Punkte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, in welchen dieselben Geraden den umschriebenen Kreis M schneiden, aber mit den letzteren nicht auf einerlei Seiten jenes Punktes I liegen — allemal zusammen in einem und demselben Kreise M_1.« U. s. w.

III. In Folge der obigen Bemerkung (I.), dass ähnlichliegende Punkte, in Bezug auf die Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, auch zugleich

Rücksicht auf die zwei Kreise M, M_1, denen sie zugehören, »ähnlich [53] liegende Punkte« genannt werden. Ebenso

---

in Betracht des Aehnlichkeitspunkts I ähnlichliegende Punkte sind, kann noch hinzugefügt werden, dass, wenn man sich die vier Kreise denkt, wovon jeder die drei Seiten (oder deren Verlängerung) des Dreiecks $\mathfrak{abc}$ berührt, und ebenso die vier dem zweiten Dreieck $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ eingeschriebenen Kreise, dass dann die vier letzteren den vier ersteren beziehlich entsprechen; d. h., dass dann diese Kreise paarweise den Punkt I zum inneren Aehnlichkeitspunkt haben, und dass also ihre Mittelpunkte paarweise in Strahlen liegen, welche durch diesen Punkt gehen, und dass ihre Abstände von demselben sich verhalten, wie 2 : 1. Aehnliches gilt von den Dreiecken $\mathfrak{abc}$ und $a_1b_1c_1$ in Hinsicht ihres Aehnlichkeitspunktes A. — Die Dreiecke $a_1b_1c_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ sind gleich und M_1 ist ihr (innerer) Aehnlichkeitspunkt, weil $\mathfrak{a}_1 M_1 a_1$ eine Gerade ist und M_1 in der Mitte zwischen $\mathfrak{a}_1$ und a_1 liegt. — U. s. w.

IV. »Wenn man in der Peripherie eines Kreises M irgend vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}$ annimmt, so bestimmen diese, zu drei und drei genommen, vier Dreiecke, welchen der Punkt M, als Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, gemeinschaftlich angehört, wogegen aber zu denselben sowohl vier verschiedene Punkte I, als M_1, als A gehören. Jede dieser vier Punkte, für sich genommen, liegen in einem Kreise; die Radien dieser drei neuen Kreise sind, nach der Reihe, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$ vom Radius des gegebenen Kreises M, und ihre Mittelpunkte liegen mit dem Mittelpunkt des letzteren in einer Geraden, und zwar in solchen Abständen von diesem, die sich, nach der Reihe, verhalten wie 2 : 3 : 6, sodass also der Punkt M der gemeinschaftliche Aehnlichkeitspunkt der drei neuen Kreise ist.« Und ferner: »Verbindet man jeden der vier angenommenen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}$, wie etwa $\mathfrak{g}$, mit dem zu den drei übrigen gehörigen Punkt A (d. h. mit dem Durchschnittspunkt der Höhen des durch die drei übrigen bestimmten Dreiecks) durch eine Gerade, so schneiden sich die auf diese Weise entstehenden vier Geraden in einem und demselben Punkt, und es wird jede durch diesen gehälftet.« U. s. w.

V. Die wesentlichsten von den vorstehenden Sätzen habe ich schon an einem anderen Orte angedeutet, nämlich bei Gelegenheit der Abhandlung: »*Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques*«, in den *Annales de Mathématiques, rédigées par Gergonne, à Montpellier, tom. XIX.* 1828. Ebendaselbst deutete ich auch den Satz an: »Dass der Kreis M_1 alle vier Kreise, welche dem Dreieck $\mathfrak{abc}$ eingeschrieben werden können, berührt«, ohne zu wissen, dass derselbe schon früher von *Feuerbach* bekannt gemacht worden war.[4]) Uebrigens hat auch Herr Prof. *Dove* die Relation zwischen den vier Punkten in (I., 5.), sowie die Eigenschaft (II., 4.) durch unmittelbare Beziehung beider Dreiecke $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ aufeinander, ohne Anwendung des Aehnlichkeitspunktes, auf einfache Weise abgeleitet.

sollen zwei Gerade, welche in Bezug auf eines [**54**] der zwei Aehnlichkeitssysteme entsprechende Gerade sind, fortan in Rücksicht auf die Kreise [**55**] »ähnlich liegende Gerade« heissen. Endlich soll jeder Strahl, welcher durch einen der zwei Aehnlichkeitspunkte A oder I geht, in Rücksicht auf die Kreise »Aehnlichkeitsstrahl« (oder »Projectionsstrahl«) genannt werden.

§ 13.

I. Betrachtet man in einer Ebene irgend drei Kreise, deren Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 (Fig. 16.) nicht in einer Ge-

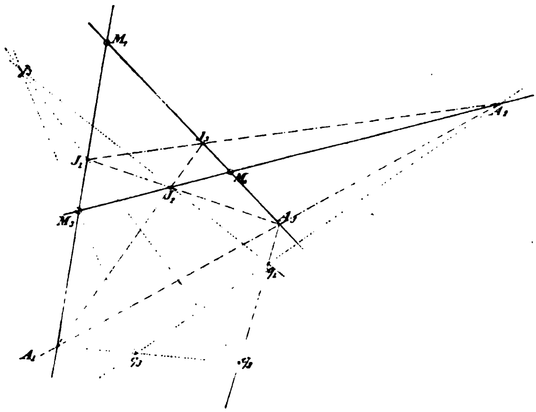

Fig. 16.

raden liegen, so gehören zu je zwei derselben zwei Aehnlichkeitspunkte, ein äusserer und ein innerer (§ 12.); es seien A_3 und I_3, A_2 und I_2, A_1 und I_1 beziehlich die Aehnlichkeitspunkte der Kreispaare M_1 und M_2, M_1 und M_3, M_2 und M_3. Von diesen sechs Aehnlichkeitspunkten liegen allemal viermal drei in einer Geraden, nämlich die drei äusseren liegen in einer Geraden, und jeder äussere liegt den beiden ihm nicht zugehörigen inneren in einer Geraden; d. h., es ist sowohl $A_3A_2A_1$ als $A_3I_2I_1$ als $A_2I_1I_3$ als $A_1I_2I_3$ eine Gerade. Denn zieht [**56**] man z. B. die Gerade A_3A_2, so ist sie, vermöge der Punkte A_3, A_2, eine äussere Aehnlichkeitslinie sowohl zu den Kreisen M_1 und M_2, als M_1 und M_3, mithin muss sie auch eine äussere Aehnlichkeitslinie der Kreise M_2 und M_3 sein, und als solche durch ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt A_1 gehen. Oder, um sich hiervon augenscheinlicher zu überzeugen, denke man sich aus den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 der Kreise, nach irgend einer beliebigen Richtung, bis an die Gerade A_3A_2 Parallele M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 gezogen, so verhalten sich diese, vermöge der Aehnlichkeitspunkte A_3 und A_2, wie die Radien der Kreise; also, wenn diese Radien durch R_1, R_2, R_3 vorgestellt werden, so verhält sich:

$$M_1N_1 : M_2N_2 = R_1 : R_2 \text{ (vermöge } A_3)$$
$$M_1N_1 : M_3N_3 = R_1 : R_3 \text{ (vermöge } A_2),$$

daher verhält sich auch

$$M_2N_2 : M_3N_3 = R_2 : R_3,$$

woraus denn folgt (§ 11, IV.), dass die Gerade N_2N_3 oder A_3A_2 durch den Aehnlichkeitspunkt A_1 der Kreise M_2, M_3 geht.

Aehnlicherweise folgen die übrigen drei Fälle. Also:

1. »Von den sechs Aehnlichkeitspunkten, welche zu drei beliebigen, in einer Ebene liegenden Kreisen, paarweise genommen, gehören, liegen viermal drei in einer Geraden, nämlich es liegen die drei äusseren und jeder äussere liegt mit den beiden, ihm nicht zugehörigen inneren, in einer Geraden«; oder mit [57] anderen Worten: »die drei Kreise haben vier gemeinschaftliche Aehnlichkeitsstrahlen, einen äusseren und drei innere«.

2. Wenn die drei Kreise insbesondere alle ausser einander liegen, so schneiden sich ihre gemeinschaftlichen Tangenten in ihren sechs Aehnlichkeitspunkten (§ 12, I., 1.), sodass also der vorstehende Satz sich auf die Durchschnittspunkte der sechs Paar Tangenten, welche die Kreise, paarweise genommen, gemein haben, übertragen lässt.

3. Wenn insbesondere der eine Kreis, etwa M_3, die beiden übrigen berührt, so sind die zwei Berührungspunkte zugleich entweder (§ 12, I., 2. u. 4.) *a*) die Aehnlichkeitspunkte A_1 und A_2, oder I_1 und I_2, oder *b*) die Aehnlichkeitspunkte A_1 und I_2, oder A_2 und I_1, je nachdem er sie nämlich (*a*) gleichartig, oder (*b*) ungleichartig berührt (d. h. in Rücksicht auf äusserlich und innerlich berühren); daher kann man auch sagen (1.): »Wenn irgend zwei Kreise M_1, M_2 von einem beliebigen dritten Kreise M_3

berührt werden, so liegen die zwei Berührungspunkte allemal mit dem äusseren (A_3) oder inneren (I_3) Aehnlichkeitspunkt derselben in gerader Linie, je nachdem sie gleichartig oder ungleichartig vom dritten Kreise berührt werden.«

4. Wenn ferner insbesondere zwei Kreise einander gleich sind, etwa $R_1 = R_3$, so liegt ihr innerer Aehnlichkeitspunkt I_2 in der Mitte zwischen ihren Mittelpunkten M_1, M_3, und ihr äusserer [58] Aehnlichkeitspunkt A_2 liegt unendlich entfernt (§ 12, I., 7.), sodass also nothwendigerweise die Aehnlichkeitsstrahlen $I_1 I_3 [A_2]$, $A_1 A_3 [A_2]$ mit der Axe $M_1 M_3$ parallel gehen. Werden alle drei Kreise einander gleich, so entfernt sich der Aehnlichkeitsstrahl $A_1 A_3 A_2$ in's Unendliche, und die drei inneren Aehnlichkeitsstrahlen $I_1 I_2$, $I_2 I_3$, $I_3 I_1$ werden den Axen $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, $M_3 M_1$ parallel.

II. Ueber die drei betrachteten Kreise soll hier nur noch eine Bemerkung, in Bezug auf ähnlich liegende Punkte, hinzugefügt werden. Sind etwa $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ irgend zwei ähnlich liegende Punkte zu den Kreisen M_1 und M_2 in Bezug auf ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt A_3, so werden sich die Strahlen $A_2 \mathfrak{q}_1$ und $A_1 \mathfrak{q}_2$ in demjenigen Punkte $\mathfrak{q}_3$ schneiden, welcher jenen zwei Punkten in Bezug auf die Aehnlichkeitspunkte A_2, A_1 entspricht, d. h., es sind $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_3$, $\mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_3$ beziehlich ähnlich liegende Punkte zu den Kreisen M_1 und M_3, M_2 und M_3; und ebenso werden sich die Strahlen $I_2 \mathfrak{q}_1$ und $I_1 \mathfrak{q}_2$ in demjenigen Punkte $\mathfrak{p}_3$ schneiden, welcher den zwei Punkten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ in Hinsicht der Aehnlichkeitspunkte I_2, I_1 entspricht; die zwei Punkte $\mathfrak{q}_3$ und $\mathfrak{p}_3$ aber werden allemal in einem Durchmesser des dritten Kreises M_3 liegen und gleich weit von seinem Mittelpunkte abstehen. Von der Richtigkeit dieser Eigenschaften wird man mittelst des Vorhergehenden sich leicht überzeugen.

[59]

III. Von der Potenz bei Kreisen.

A. Vom Ort der gleichen Potenzen.

§ 14.

Sind in einer Ebene irgend zwei feste Punkte M, M_1 (Fig. 17.) gegeben und es soll der Ort desjenigen Punktes N

gefunden werden, für welchen der Unterschied der Quadrate seiner Abstände von den zwei festen Punkten eine gegebene Grösse, etwa $= u^2$, ist, sodass also

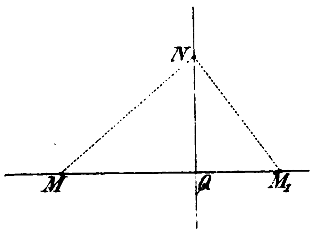

Fig. 17.

$$MN^2 - M_1 N^2 = u^2,$$

so ist der in Frage stehende Ort offenbar eine Gerade NQ, welche auf der durch die zwei festen Punkte bestimmten Geraden MM_1 senkrecht steht und sie dergestalt theilt, dass auch der Unterschied der Quadrate ihrer Abschnitte gleich jener gegebenen Grösse ist, d. h., dass auch

$$MQ^2 - M_1 Q^2 = u^2$$

ist. Denn erfüllt der Punkt N die gegebene Bedingung, so hat man, wenn man aus ihm auf die Gerade MM_1 das Loth NQ fället, vermöge der rechtwinkligen Dreiecke NQM und NQM_1:

$$NM^2 - QM_2 = NM_1^2 - QM_1^2 = NQ^2,$$

mithin

$$NM^2 - NM_1^2 = QM^2 - QM_1^2 = u^2.$$

Da nun aber die Gerade MM_1 nur in einem einzigen Punkte Q so getheilt werden kann, dass der Unterschied der Quadrate der Abschnitte, das ist $QM^2 - QM_1^2$, eine gegebene Grösse u^2 hat, so trifft also das genannte Loth NQ die Gerade **[60]** MM_1 allemal in dem nämlichen festen Punkte Q, und folglich ist der Ort von N eine feste Gerade NQ.

Ob der Punkt Q zwischen den zwei festen Punkten M, M_1 liege, oder jenseits derselben, hängt von dem gegenseitigen Verhältniss der Grösse u und der Strecke MM_1 ab, je nachdem nämlich u kleiner oder grösser als MM_1 ist.

§ 15.

Denkt man sich um die Punkte M, M_1 mit beliebigen Radien R, R_1 Kreise beschrieben, und verlangt den Ort des Punktes N für den besonderen Fall, wo die Differenz der Quadrate seiner Abstände von jenen Punkten gleich ist der Differenz der Quadrate der Radien, also wo

$$MN^2 - M_1 N^2 = R^2 - R_1^2 = u^2,$$

so wird, wenn insbesondere die Kreise einander schneiden, die gesuchte Ortslinie NQ nothwendiger Weise ihre gemeinschaftliche Secante sein, d. h., sie wird durch ihre gegenseitigen Durchschnittspunkte gehen. Denn für jeden dieser zwei Punkte, wenn man ihn mit N bezeichnet, hat man: $MN = R$ und $M_1 N = R_1$, welches offenbar der vorliegenden, für N festgesetzten Bedingung genügt.

Wenn aber die Kreise einander nicht schneiden, so wird auch keiner von ihnen von der Ortslinie NQ getroffen, sondern diese liegt alsdann entweder zwischen oder jenseits der Kreise, je nachdem diese ausser oder ineinander liegen.

[61] Im Allgemeinen hat die Ortslinie NQ ferner folgende Beziehung zu den zwei Kreisen:

a) »Die aus irgend einem Punkte derselben an die Kreise gelegten Tangenten sind einander gleich«; und

b) »Die durch irgend einen Punkt derselben, welcher innerhalb der Kreise liegt (also im Falle, wo diese einander schneiden), in beiden Kreisen gezogenen kleinsten Sehnen sind einander gleich.« Und umgekehrt:

c) »Jeder Punkt, welchem eine von diesen zwei Eigenschaften (*a*) oder (*b*) zukömmt, liegt in der Ortslinie NQ.«

Denn denkt man sich aus irgend einem Punkte N der Ortslinie an jeden Kreis eine Tangente gelegt, bezeichnet die Berührungspunkte durch B, B_1, und denkt sich ferner die Geraden MN, $M_1 N$, sowie die Radien MB, $M_1 B_1$ gezogen, so hat man vermöge der rechtwinkligen Dreiecke MBN und $M_1 B_1 N$:

$$NB^2 = MN^2 - MB^2 = MN^2 - R^2 \text{ und}$$
$$NB_1^2 = M_1 N^2 - M_1 B_1^2 = M_1 N^2 - R_1^2.$$

Zufolge der obigen Gleichung sind aber in diesen zweien die Differenzen rechts einander gleich, daher muss auch

$$NB^2 = NB_1^2, \text{ oder}$$
$$NB = NB_1$$

sein, d. h., es müssen die Tangenten einander gleich sein (*a*). Aehnlicher Weise wird der zweite Fall (*b*) bewiesen.

Die Ortslinie NQ wird vermöge dieser Eigenschaft [62]

»die Linie der gleichen Potenzen«, oder auch, in Ansehung ihrer Punkte, welche ausserhalb der Kreise liegen, »die Linie der gleichen Tangenten« der zwei Kreise genannt. Ueber die eigentlichen Gründe für die erste Benennung sehe man die oben (§ 2.) erwähnte Abhandlung (im *Journ. f. Mathem.*), wo dieser Gegenstand etwas ausführlicher behandelt ist.

Wenn insbesondere die Kreise einander berühren, so ist die Linie der gleichen Potenzen zugleich ihre gemeinschaftliche Tangente in ihrem Berührungspunkte.

§ 16.

Betrachtet man in einer Ebene irgend drei Kreise M_1, M_2, M_3, deren Mittelpunkte nicht in einer Geraden liegen, so haben je zwei derselben eine Linie der gleichen Potenzen; es seien $N_3 Q_3$, $N_2 Q_2$, $N_1 Q_1$ beziehlich die Linien der gleichen Potenzen der Kreise M_1 und M_2, M_1 und M_3, M_2 und M_3.

Denkt man sich den Punkt $\mathfrak{q}$, in welchem sich zwei der drei Linien der gleichen Potenzen, etwa die Linien $N_3 Q_3$ und $N_2 Q_2$, schneiden, so hat dieser Punkt vermöge der Linie $N_3 Q_3$ zu den Kreisen M_1 und M_2, und vermöge der Linie $N_2 Q_2$ zu den Kreisen M_1 und M_3 gleiche Potenzen — d. h., wenn der Punkt $\mathfrak{q}$ ausserhalb der Kreise liegt, so sind die durch denselben gehenden Tangenten der Kreise M_1 und M_2, sowie der Kreise M_1 und M_3, einander gleich, also Tangente $\mathfrak{q}B_1 = \mathfrak{q}B_2$ und $\mathfrak{q}B_1 = \mathfrak{q}B_3$, und wenn er innerhalb
[63] der Kreise liegt, so sind die durch denselben gehenden kleinsten Sehnen der Kreise M_1 und M_2, sowie der Kreise M_1 und M_3, einander gleich — daher hat er auch zu den Kreisen M_2 und M_3 gleiche Potenzen (d. h., die durch ihn gehenden Tangenten oder kleinsten Sehnen dieser Kreise sind einander gleich, nämlich Tangente $\mathfrak{q}B_2 = \mathfrak{q}B_3$), und folglich liegt er in der zu diesen Kreisen gehörenden dritten Ortslinie $N_1 Q_1$. Der Punkt $\mathfrak{q}$ heisst vermöge dieser Eigenschaft »der Punkt der gleichen Potenzen der drei Kreise«.

Aus dieser Betrachtung ergeben sich folgende Sätze:

a) »Die drei Linien der gleichen Potenzen $N_3 Q_3$, $N_2 Q_2$, $N_1 Q_1$, welche zu irgend drei Kreisen in einer Ebene, paarweise genommen, gehören, treffen allemal in irgend einem Punkte $\mathfrak{q}$ zusammen, nämlich im Punkte der gleichen Potenzen aller drei Kreise.« Und insbesondere:

b) »Wenn drei Kreise in einer Ebene einander schneiden, so treffen sich die drei Secanten (oder Sehnen), welche sie, paarweise genommen, gemein haben, allemal in irgend einem Punkte $\mathfrak{q}$ (§ 15.).«

c) »Wenn drei Kreise in einer Ebene einander berühren, so treffen sich die in den Berührungspunkten an sie gelegten Tangenten in irgend einem Punkte $\mathfrak{q}$.«

Schneiden die drei Kreise einander in einem Punkte, so ist dieser offenbar zugleich der Punkt ihrer gleichen Potenzen $\mathfrak{q}$.

[64]

B. Von der gemeinschaftlichen Potenz.

§ 17.

I. Zieht man aus einem der beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise M, M_1 (Fig. 18.), etwa aus dem äusseren Aehnlichkeitspunkte A, irgend eine die Kreise schneidende Ge-

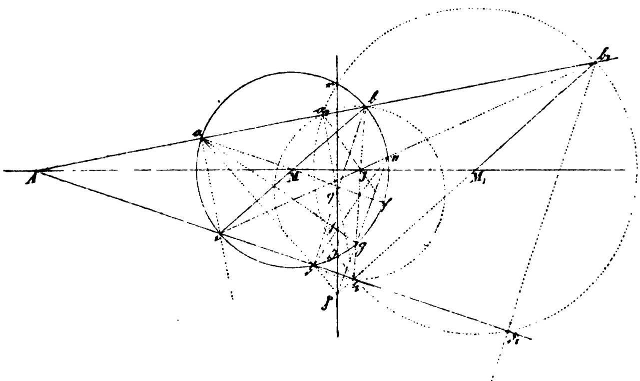

Fig. 18.

rade $A\mathfrak{b}_1$, so sind von den vier Schneidepunkten zwei und zwei, nämlich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, ähnlichliegende Punkte (§ 12, III.). Die zwei Schneidepunkte des einen Kreises lassen sich aber mit denen des anderen noch in einer anderen Ordnung paarweise gruppiren, nämlich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1$; jedes dieser zwei Paare soll vorläufig **unähnlichliegende Punkte** heissen. Zieht man nun ferner durch denselben Aehnlichkeitspunkt A irgend eine zweite, die Kreise schneidende, Gerade $A\mathfrak{d}_1$, so liegen in ihr ebenfalls zwei Paar unähnlichliegende Punkte, nämlich $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}_1$, und es kann leicht gezeigt werden, dass jedes dieser Punktenpaare mit jedem Paar unähnlichliegenden Punkten der ersten Geraden in irgend einem Kreise liegt, also dass sowohl die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}_1$, als $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}_1$, als $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}_1$, als $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}_1$, in irgend einem Kreise liegen; nämlich wie folgt.

Man ziehe z. B. die Sehnen $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, so sind $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, als entsprechende oder ähnlichliegende Gerade, parallel (§ 11, I. und § 12, III.), daher müssen die Winkel der zwei Vierecke $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1$ paarweise gleich sein, und daher muss, da das erstere einem Kreise M eingeschrieben [**65**] ist, auch das andere einem Kreise eingeschrieben sein, d. h., die vier Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}_1$ müssen in irgend einem und demselben Kreise liegen. Ebenso folgt, da die Sehnen $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ als ähnlichliegende Gerade parallel sind, dass das Viereck $\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1$ einem Kreise eingeschrieben ist; u. s. w.

Da die vier Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}_1$ in einem Kreise liegen, so ist in Rücksicht auf die Secanten $A\mathfrak{b}$, $A\mathfrak{c}_1$, zufolge eines bekannten Satzes (der Potenz des Punktes A in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1$, siehe die vorerwähnte Abhandl. § 15.):

$$A\mathfrak{b} \,.\, A\mathfrak{a}_1 = A\mathfrak{d} \,.\, A\mathfrak{c}_1;$$

ebenso folgt, da $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}_1$ in einem Kreise liegen, dass

$$A\mathfrak{a} \,.\, A\mathfrak{b}_1 = A\mathfrak{d} \,.\, A\mathfrak{c}_1;$$

und aus ähnlichen Gründen folgt, dass:

$$A\mathfrak{a} \,.\, A\mathfrak{b}_1 = A\mathfrak{c} \,.\, A\mathfrak{d}_1 \text{ und}$$
$$A\mathfrak{b} \,.\, A\mathfrak{a}_1 = A\mathfrak{c} \,.\, A\mathfrak{d}_1;$$

und folglich zusammengefasst:

$$A\mathfrak{a} \,.\, A\mathfrak{b}_1 = A\mathfrak{b} \,.\, A\mathfrak{a}_1 = A\mathfrak{c} \,.\, A\mathfrak{d}_1 = A\mathfrak{d} \,.\, A\mathfrak{c}_1.$$

Da diese Gleichungen immer stattfinden, welche Richtung die schneidenden Geraden $A\mathfrak{b}_1$, $A\mathfrak{d}_1$ haben mögen, also immer stattfinden, währenddem man z. B. den Strahl $A\mathfrak{b}_1$ um den festen Aehnlichkeitspunkt A herumbewegt, und da Aehnliches in Bezug auf den inneren Aehnlichkeitspunkt I stattfindet, so hat man also den folgenden Satz:

»Zieht man aus einem der beiden Aehnlichkeitspunkte irgend zweier Kreise M, M_1 beliebige, die Kreise schneidende Strahlen, so liegen je zwei Paar [66] unähnlichliegende Schneidepunkte, welche irgend zwei verschiedenen Strahlen angehören, allemal in irgend einem Kreis«; und ferner: »das Rechteck unter den Abständen je zweier unähnlichliegender Punkte vom jedesmaligen Aehnlichkeitspunkt ist von beständigem Inhalt, d. h., für alle Strahlen oder für alle Punktenpaare hat dieses Rechteck einen und denselben bestimmten Inhalt«.

Dieser constante Inhalt aller Rechtecke wird »die gemeinschaftliche Potenz« der Kreise M, M_1 in Bezug auf den jedesmaligen Aehnlichkeitspunkt genannt, und zwar »äussere« oder »innere« gemeinschaftliche Potenz, je nachdem dieser Aehnlichkeitspunkt der äussere A oder der innere I ist; und ferner werden je zwei unähnlichliegende Punkte, durch welche ein Rechteck bestimmt wird, wie etwa $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$, »potenzhaltende« Punkte genannt. (Zwei potenzhaltende Punkte brauchen jedoch nicht in den gegebenen Kreisen selbst zu liegen, sondern nur in einem Strahl, und zwar so, dass das Rechteck unter ihren Abständen vom Aehnlichkeitspunkte den bestimmten constanten Inhalt hat, und dass sie auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten des Aehnlichkeitspunktes liegen, je nachdem dieser A oder I ist.)

II. Zum Behufe später folgender Aufgaben ist es wichtig, hierbei noch auf folgende Umstände aufmerksam zu machen.

Da nämlich die vier Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}_1$ in einem [67] Kreise liegen, so müssen die Sehnen $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$ als gemeinschaftliche Sehnen dieses Kreises und der gegebenen Kreise M und M_1, einander in irgend einem Punkte $\mathfrak{q}$ der gemeinschaftlichen Sehne $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ der letzteren Kreise schneiden (§ 16, *b.*). Aus ähnlichen Gründen müssen die Sehnen (oder Secanten) $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1$ einander auf der gemeinschaftlichen Sehne (oder Secante) $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ der gegebenen Kreise M, M_1 schneiden. Entsprechendes findet in Rücksicht auf den inneren Aehnlichkeitspunkt I statt. Also:

»Durch je zwei Paar potenzhaltende Punkte, welche in den Kreisen selbst (aber nicht in einem und demselben Strahle) liegen, werden in diesen Kreisen allemal zwei solche Sehnen (oder Secanten) bestimmt, welche einander in irgend einem Punkte ihrer gemeinschaftlichen Secante $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ schneiden.«

Drittes Kapitel.

Lösung aller geometrischen Aufgaben mittelst des Lineals, wenn ein fester Kreis gegeben ist.

§ 18.

I. Durch die in den beiden vorhergehenden Kapiteln enthaltenen Betrachtungen über Eigenschaften der Figuren sind wir nun in Stand gesetzt, dem eigentlichen Zwecke dieser Schrift, [68] nämlich der Forderung: »alle geometrischen Aufgaben nur mittelst des Lineals zu lösen, wenn in der Ebene irgend ein fester Kreis gegeben ist«, zu genügen. Und zwar kommt es hierbei, wie schon Eingangs bemerkt worden (§ 1), hauptsächlich nur auf die Lösung der nachstehenden acht Aufgaben an. Die Beweisgründe, auf welchen die Richtigkeit der zur Lösung dieser Aufgaben angewendeten Constructionen beruht, werde ich, wenn sie in vorhergehenden Sätzen enthalten sind, kurz andeuten, wenn sie aber in leichten, allgemein bekannten Elementarsätzen bestehen, mit Stillschweigen übergehen.

II. Nehmen wir also an, es sei in der Ebene irgend ein gezeichnet vorliegender Kreis, sowie dessen Mittelpunkt, welcher fortan durch M bezeichnet werden soll, gegeben, und es sei nur der Gebrauch des Lineals, um zwischen gegebenen Punkten gerade Linien zu ziehen, gestattet; dabei sei man jedoch berechtigt, die gegenseitigen Durchschnittspunkte des Hülfskreises M und beliebiger Gerader als unmittelbar gegeben anzusehen: so lassen sich die in Rede stehenden Aufgaben wie folgt lösen.

Erste Aufgabe.

»Mit irgend einer gegebenen Geraden, durch jeden beliebigen Punkt, eine Parallele zu ziehen.«

a. Wenn die gegebene Gerade durch den Mittelpunkt des Hülfskreises geht, wie etwa aMb (Fig. 19). — In diesem Falle [69] hat man in der Geraden unmittelbar drei Punkte, nämlich die zwei Punkte a und b, in welchen sie den Kreis schneidet, und den Mittelpunkt M des letztern, wovon der eine, nämlich M, in der Mitte zwischen den zwei übrigen liegt, sodass durch deren Hülfe sofort, nach (§ 6, I.), durch jeden beliebigen Punkt mit ab eine Parallele gezogen werden kann.

b. Wenn die gegebene Gerade den Hülfskreis schneidet, aber nicht durch seinen Mittelpunkt geht, wie etwa cd. — Ziehe aus den Schneidepunkten c, d durch den Mittelpunkt M des Kreises die Durchmesser cMc_1, dMd_1, so bestimmen deren andere Endpunkte c_1, d_1 eine Sehne c_1d_1, welche mit der gegebenen cd parallel ist, und durch deren Hülfe also sofort der Aufgabe genügt werden kann (§ 6, III.).

c. Wenn die gegebene Gerade beliebige Lage hat, wie etwa die Gerade ef. — 1. Ziehe aus einem willkürlichen Punkte der gegebenen Geraden, etwa aus g, den Durchmesser abg, lege durch einen beliebigen Punkt c der Kreislinie die Sehne cde mit ab parallel ($a.$), ziehe sofort die Durchmesser cMc_1, dMd_1, und durch ihre Endpunkte c_1, d_1 die Gerade d_1c_1f, so hat man in der gegebenen Geraden drei Punkte e, g, f, wovon offenbar der eine, g, gleich weit von den zwei übrigen entfernt ist, sodass man sofort durch jeden beliebigen Punkt mit dieser Geraden eine Parallele ziehen kann (§ 6, I.). — Oder 2. Ziehe aus zwei beliebigen Punkten h, i der gegebenen Geraden die Durchmesser hc_1c, [70] idd_1, und durch deren Endpunkte die parallelen Sehnen cde, d_1c_1f, die der Geraden in den Punkten e, f begegnen; aus diesen Punkten ziehe ferner die Durchmesser eMe_1, fMf_1, welche jene Sehnen in e_1, f_1 schneiden, so wird die Gerade e_1f_1 der gegebenen Geraden ef parallel sein, und man kann sofort durch jeden beliebigen Punkt mit der letzteren eine Parallele legen (§ 6, III.).

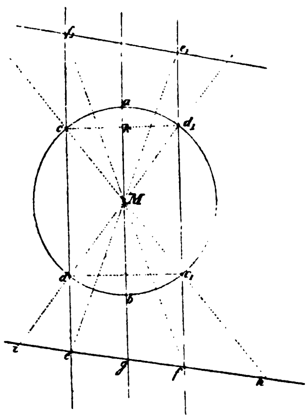

Fig. 19.

Anmerkung. 1) Der dritte Fall ($c.$) ist allgemein, er umfasst auch die beiden vorhergehenden Fälle, sowie auch den besonderen Fall, wo die gegebene Gerade den Kreis berührt.

2) Sollten mit mehreren gegebenen Geraden durch gegebene Punkte Parallele gezogen werden, so würde man am zweckmässigsten verfahren, wenn man irgend einen Durchmesser ab, und sofort zwei gleichweit von ihm abstehende und mit ihm parallele Sehnen cd, c_1d_1 zöge, weil alsdann diese drei Parallelen offenbar in jeder Geraden (mit welcher sie nicht etwa zufällig parallel wären), drei Punkte, wie etwa e, g und f, bestimmten, wovon der eine, g, in der Mitte zwischen den zwei übrigen läge.

Zweite Aufgabe.

»Wenn in einer Geraden irgend eine begrenzte Strecke gegeben ist, so soll man a) eine andere Strecke finden, welche ein gegebenes Vielfaches von jener ist; oder b) die gegebene Strecke in irgend eine gegebene Anzahl gleicher Theile theilen; oder endlich c) eine andere Strecke finden, welche zu der gegebenen [71] irgend ein gegebenes rationales Verhältniss hat.«

Man ziehe mit der gegebenen Geraden irgend eine Parallele (erste Aufgabe), so kann sofort die vorgelegte Aufgabe, nach Anleitung von (§ 6, IV.), gelöst werden.

Dritte Aufgabe.

»Auf eine gegebene Gerade, durch irgend einen gegebenen Punkt, eine andere Gerade rechtwinklig zu ziehen.«

A. Mittelst Paralleler.

a. Wenn die gegebene Gerade irgend ein Durchmesser des Hülfskreises ist, wie etwa ab (Fig. 19). — Man ziehe irgend eine mit dem gegebenen Durchmesser ab parallele Sehne cd (§ 6, I.), ziehe sodann den Durchmesser dMd_1, und ferner die Sehne cd_1, so wird diese zu dem gegebenen Durchmesser ab rechtwinklig sein und von ihm im Punkte k gehälftet werden; man hat daher sofort nur nöthig, durch den gegebenen Punkt mit der Sehne ckd_1 eine Parallele zu ziehen (§ 6, I.), um der Aufgabe zu genügen.

Um insbesondere denjenigen Durchmesser zu finden, welcher auf dem gegebenen ab senkrecht steht, denke man sich die Geraden ac, bd gezogen (nachdem man zuvor cd mit ab parallel gelegt hat), lege durch ihren Durchschnittspunkt und durch den Mittelpunkt M eine Gerade, so ist diese der verlangte Durchmesser; ebenso schneiden sich die Geraden ad_1, bc_1 auf dem gesuchten Durchmesser.

[72] b. Wenn die gegebene Gerade den Hülfskreis schneidet, wie etwa cd. — Ziehe die Durchmesser cc_1, dd_1 und sodann die Sehnen cd_1, dc_1, so werden diese letzteren zu der gegebenen Geraden cd rechtwinklig und mithin unter sich parallel sein; daher wird der Aufgabe genügt, wenn man durch den jedesmaligen gegebenen Punkt mit jenen Sehnen eine Parallele zieht (§ 6, III.).

c. Wenn die gegebene Gerade den Hülfskreis nicht schneidet, wie etwa ef. — Ziehe irgend eine Sehne der gegebenen Geraden ef parallel (1. Aufg.), es sei etwa dc_1 eine solche Sehne, sodann ziehe die Durchmesser dd_1, c_1c, und dann weiter die Sehnen cd, d_1c_1, so sind diese zu der Sehne dc_1, und mithin auch zu der gegebenen Geraden ef, senkrecht, also parallel, und daher wird der Aufgabe genügt, wenn man sofort durch den gegebenen Punkt mit den Sehnen cd, d_1c_1 eine Parallele zieht (§ 6, III.).

Der gegebene Punkt kann, wie leicht zu sehen, in allen drei Fällen (a.), (b.), (c.) liegen wo man will, in der gegebenen Geraden selbst, oder ausserhalb derselben.

B. Mittelst harmonischer Eigenschaften.

a. Wenn die gegebene Gerade Durchmesser des Hülfskreises ist, wie etwa ab (Fig. 20). — α. Der gegebene Punkt liege ausserhalb des Hülfskreises, wie etwa p. Ziehe durch den Punkt p und durch die Endpunkte des Durchmessers ab die Geraden pa, pb, die den Kreis zum zweiten Mal in c, d schneiden, und ziehe die Geraden [73] ad, cb, die sich in irgend einem Punkte p_1 schneiden, so wird die

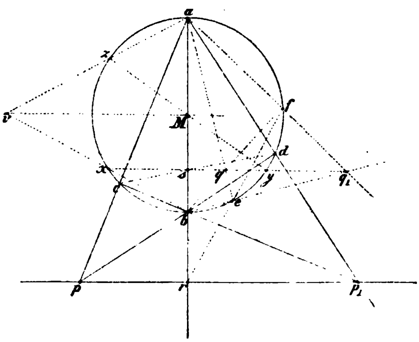

Fig. 20.

Gerade pp_1 die verlangte sein. Denn da acb und adb rechte Winkel sind, so sind p_1c und pd, in Hinsicht des

Dreiecks pap_1, zwei aus den Ecken auf die Gegenseiten gefällte Lothe, und daher muss ab das aus der dritten Ecke auf die Gegenseite gefällte Loth sein, weil alle drei Lothe sich in einem und demselben Punkte b schneiden müssen. Der Beweis folgt auch aus harmonischen Eigenschaften, zu welchem Ende man nur noch die Gerade csd ziehen muss (§ 10). — Liegt insbesondere der gegebene Punkt in dem gegebenen Durchmesser, wie etwa r, so ziehe man durch ihn irgend eine den Kreis schneidende Gerade ref, ziehe weiter die Geraden ae und bf, af und be, die sich in den Punkten q, q_1 schneiden, lege durch diese die Gerade qq_1, die den gegebenen Durchmesser ab in s trifft, lege durch diesen Punkt s eine beliebige Secante csd, ziehe sofort die Geraden ac und db, ad und cb, die sich in p, p_1 schneiden, und ziehe endlich die Gerade pp_1, so wird diese der Aufgabe genügen. Die Richtigkeit dieser Construction folgt aus (§ 10, III. und IV.); nämlich es ist zu bemerken, dass sqq_1 die Harmonische des Punktes r, und prp_1 die Harmonische des Punktes s ist, u. s. w. — β. Der gegebene Punkt liege innerhalb des Hülfskreises, wie etwa q. Man ziehe die Geraden aq, bq, die den Kreis in e, f schneiden, ziehe weiter die Geraden af, be, die sich in q_1 schneiden, so ist qq_1 die verlangte Gerade. Ist s der gegebene Punkt, so ziehe man durch ihn eine beliebige Sehne csd, [**74**] und sodann die Geraden ac und db, ad und cb, die sich in p, p_1 schneiden, ziehe ferner die Gerade pp_1, die den Durchmesser ab in r trifft, lege durch diesen Punkt eine beliebige Secante ref, und ziehe weiter die Geraden ae und bf, af und be, die sich in q, q_1 schneiden, so wird die Gerade qq_1 der Forderung genügen, d. h., sie wird in dem gegebenen Punkte s auf dem gegebenen Durchmesser ab senkrecht stehen. Alles beruht auf ähnlichen Gründen, wie vorhin (α).

b. Wenn die gegebene Gerade beliebige Lage hat, z. B. sie sei pp_1 (oder qq_1). — Man suche ihren harmonischen Pol s (oder r) in Bezug auf den Hülfskreis (§ 10, IV.), ziehe den durch denselben gehenden Durchmesser Ms (oder Mr), so steht dieser auf der gegebenen Geraden pp_1 (oder qq_1) im Punkte r (oder s) senkrecht; man suche weiter zu diesem Punkte r die Harmonische xy, ziehe sofort yz, und ferner az, bx, die sich in v schneiden, so wird der Durchmesser vM der gegebenen Geraden pq_1 parallel sein, und man hat sofort nur auf ihn aus dem gegebenen

Punkt ein Loth zu fällen, nach (a), um der Aufgabe zu genügen. Für die Gerade qq_1 ist die Lösung etwas einfacher, wie man leicht bemerken wird.

Vierte Aufgabe.

»Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die mit einer gegebenen Geraden einen Winkel einschliesst, [**75**] welcher einem gegebenen Winkel gleich ist.«

Es sei AmC (Fig. 21) der gegebene Winkel, EF die gegebene Gerade und etwa p der gegebene Punkt. — Man ziehe die Durchmesser ab, cd den Schenkeln des Winkels parallel (1. Aufgabe), sodass Winkel $aMc = AmC$, und ferner den Durchmesser ef der gegebenen Geraden EF parallel; sodann ziehe man weiter die Sehne ce, und durch a die Sehne ag mit ihr parallel, und ferner den Durchmesser gh, so ist Bogen $ac = ge$, und mithin Winkel $gMe = aMc = AmC$; daher ziehe man endlich durch den gegebenen Punkt p mit dem Durchmesser gMh eine Parallele pq (§ 6, I.): so wird pqE $(= gMe = AmC)$ der verlangte Winkel sein. Zöge man die Sehne ae, statt ce, und durch c mit ihr eine parallele Sehne u. s. w., so würde man den anderen Winkel erhalten, welcher ebenfalls der Aufgabe genügt, und welcher nach F hin, statt nach E hin, gekehrt wäre.

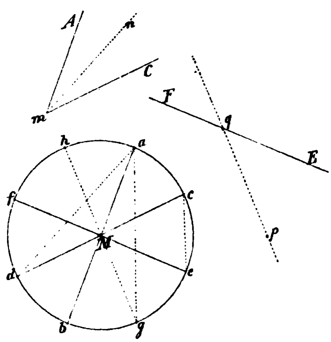

Fig. 21.

Ebenso wird die Aufgabe gelöst, wenn insbesondere der gegebene Punkt in der gegebenen Geraden EF selbst liegt, wie etwa q, d. h. wenn die gewöhnliche Aufgabe gestellt wird: »An eine gegebene Gerade EF, in einem gegebenen Punkt q, einen Winkel anzulegen, welcher einem der Grösse und Lage nach gegebenen Winkel AmC gleich ist.«

Fünfte Aufgabe.

»Einen gegebenen Winkel a) zu hälften, oder b) beliebig oft zu vervielfachen.«

[**76**] Fall a. Es sei AmC (Fig. 21) der gegebene Winkel. — Ziehe die Durchmesser ab, cd den Schenkeln mA, mC des Winkels parallel, sodass Winkel $aMc = AmC$ ist; ziehe sofort die Sehne ad (oder cb) und durch den Scheitel des gegebenen Winkels die Gerade mn mit ad (oder cb) parallel, so wird mn den Winkel AmC hälften.

Fall b. Dieser Fall kann durch Hülfe der dritten Aufgabe nach Anleitung von (§ 9.) erledigt werden. Hier liesse er sich übrigens noch auf andere Weise bewerkstelligen, dessen ich mich aber enthebe, weil er mir nicht als sehr wesentlich erscheint.

Sechste Aufgabe.

»An einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen, welche einer der Grösse und Lage nach gegebenen Geraden gleich ist.«

Es sei $M_1 a_1$ (Fig. 22) die gegebene Gerade, und etwa M_2 der gegebene Punkt. Sollen viele Gerade zugleich an den Punkt M_2 gelegt werden, die der gegebenen Strecke $M_1 a_1$ gleich sind, so scheint das folgende Verfahren am zweckmässigsten zu sein. Zum leichteren Verständniss ist jedoch zuvörderst noch zu bemerken, dass die Endpunkte

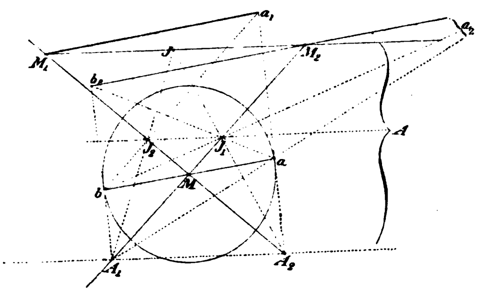

Fig. 22.

aller Geraden, welche der Aufgabe genügen, offenbar in einem Kreise M_2 liegen, dessen Halbmesser der gegebenen Strecke $M_1 a_1$ gleich ist. Dieses leitet daher darauf, den Punkt M_2 und den einen Endpunkt der gegebenen Geraden, etwa M_1, als Mittelpunkte zweier gleicher Kreise anzusehen, [**77**] deren Radien nämlich der gegebenen Strecke $M_1 a_1$ gleich sind, um sodann durch die gegenseitige Beziehung der drei Kreise M, M_1, M_2, und zwar namentlich durch ihre Aehnlichkeitspunkte, die Mittel zu finden, durch deren Hülfe der vorgelegten Aufgabe genügt werden kann. Zu diesem Endzweck stelle man sich unter A_2 und I_2, A_1 und I_1, A und I

beziehlich die Aehnlichkeitspunkte der Kreispaare M und M_1, M und M_2, M_1 und M_2 vor. Da die Kreise M_1, M_2 gleich sind, so liegt ihr innerer Aehnlichkeitspunkt I in der Mitte zwischen ihren Mittelpunkten M_1, M_2, und ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt A ist unendlich entfernt (§ 12, I., 7.), und es müssen die Aehnlichkeitsstrahlen $A_1 A_2 [A]$, $I_2 I_1 [A]$ mit der Axe $M_1 M_2$ parallel sein (§ 13, I., 4.). Hiernach kann die vorgelegte Aufgabe wie folgt gelöst werden.

Man ziehe die Geraden MM_1, MM_2 und $M_1 M_2$; ziehe ferner den Durchmesser ab parallel der gegebenen Geraden $M_1 a_1$, und sodann die Geraden $a_1 a$, $a_1 b$, welche die $M_1 M$ in A_2, I_2 schneiden; hierauf ziehe man weiter durch den Punkt A_2, mit $M_2 M_1$ parallel, die Gerade $A_2 A_1$, die der $M_2 M$ in A_1 begegnet, und ziehe ferner die Gerade $A_1 I_2$, welche die $M_1 M_2$ in I trifft, und endlich die Gerade IA_2, welche die MM_2 in I_1 schneidet*): so sind alsdann die Punkte A_1, I_1 die [78] Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise M, M_2, wovon der letztere die gegebene Strecke $M_1 a_1$ zum Halbmesser hat.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun leicht, an den Punkt M_2 so viele Gerade anzutragen, als man will, die der gegebenen Strecke $M_1 a_1$ gleich sind. Denn zieht man im Hülfskreise irgend einen Durchmesser, wie z. B. ab (welcher aber nicht mit $M_1 a_1$ parallel zu sein braucht), verbindet seine Endpunkte a, b mit den Punkten A_1, I_1 durch Gerade $A_1 a$ und bI_1, $A_1 b$ und aI_1, so schneiden sich diese in zwei Punkten a_2, b_2, wovon jeder um die gegebene Länge $M_1 a_1$ von dem gegebenen Punkte M_2 absteht, und zwar liegen diese drei Punkte a_2, M_2, b_2 in einer Geraden (§ 12, III.).

Ist aber die Richtung der anzutragenden Geraden gegeben, ist z. B. eine durch M_2 gehende Gerade gegeben, in welcher sie liegen soll, oder ist irgend eine Gerade gegeben, welcher sie parallel sein soll, so muss man zuerst den mit dieser Geraden parallelen Durchmesser des Hülfskreises M ziehen (1. Aufg.), und sodann ebenso verfahren wie vorhin.

---

*) Um die Punkte A_1, I_1 zu finden, kann man auch, zufolge der obigen Vorbereitung, statt durch A_2 die $A_2 A_1$, durch I_2 die $I_2 I_1$ mit $M_2 M_1$ parallel ziehen, wo man sofort durch die Gerade $A_2 I_1$ den Punkt I, und durch die Gerade II_2 den Punkt A_1 erhält; oder man kann drittens zuerst die Mitte I der Geraden $M_1 M_2$ suchen (2. Aufg.), und dann mittelst der Geraden II_2, IA_2 die Punkte A_1, I_1 finden.

Siebente Aufgabe.

»Die gegenseitigen Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden und eines [79] der Grösse und Lage nach gegebenen Kreises (welcher aber nicht gezeichnet vorliegt) zu finden.«

Es sei G_1 (Fig. 23) die gegebene Gerade, M_1 der Mittelpunkt und etwa $M_1 a_1$ der Radius des gegebenen Kreises.

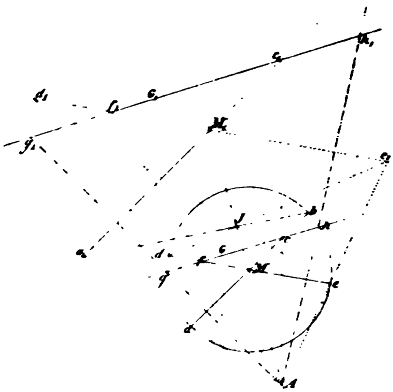

Fig. 23.

Die vorgelegte Aufgabe kann dadurch gelöst werden, dass man die Aehnlichkeitspunkte A, I der zwei Kreise M, M_1 construirt, und sodann diejenige Gerade G sucht, welche zu dem Hülfskreise M, in Ansehung des einen oder anderen Aehnlichkeitspunktes, ähnliche Lage hat wie die gegebene Gerade G_1 zu dem Kreise M_1; denn alsdann müssen die Durchschnittspunkte g, h der ersteren (G und M), den Durchschnittspunkten g_1, h_1 der letzteren (G_1 und M_1) entsprechen, oder mit ihnen ähnlichliegende Punkte sein, sodass diese (g_1, h_1) mittelst jener (g, h) sofort gefunden werden. Dieses alles geschieht aber wie folgt.

Man ziehe den Durchmesser ab mit dem gegebenen Radius $M_1 a_1$ parallel, ziehe ferner die Axe MM_1 nebst den Geraden $a_1 a$, $a_1 b$, welche die Axe in den Aehnlichkeitspunkten A, I schneiden (§ 12, I.). Man verlängere den Radius $a_1 M_1$, bis er die gegebene Gerade G_1 in c_1 trifft, und ziehe sodann den Strahl Ac_1, der dem Durchmesser ab in c begegnet, so sind c und c_1 zwei ähnlichliegende Punkte, in Bezug auf den äusseren Aehnlichkeitspunkt A (weil aM, $a_1 M_1$ ähnlichliegende Gerade sind (§ 11.)). Nun ziehe man ferner im Hülfskreise einen beliebigen Durchmesser [80] de, lege die Geraden Ae, dI, die sich in e_1 schneiden (oder die Geraden Ad, eI, die sich in d_1 schneiden), ziehe den Durchmesser $e_1 M_1$ (oder $d_1 M_1$), der jenem de entspricht, also mit ihm parallel ist, und der die Gerade G_1 in f_1 schneidet, und ziehe endlich den Strahl Af_1, welcher dem Durchmesser de in f begegnet, so sind f und f_1 ebenfalls ähnlichliegende Punkte in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt A. Daher sind die Geraden ef, $e_1 f_1$ oder G, G_1, in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt A, ähnlichliegend (§ 11, I.), und ebenso die Punkte g und g_1, h und h_1, in welchen sie die zugehörigen Kreise M, M_1 schneiden. Man ziehe demnach weiter die Gerade ef, die den Kreis M in g, h schneidet, und sodann die Strahlen Ag, Ah, so treffen diese die gegebene Gerade G_1 in den in der Aufgabe verlangten Punkten g_1, h_1.

Anmerkung. 1. In Hinsicht der gegenseitigen Lage des Kreises M und der Geraden G sind drei Fälle möglich, nämlich entweder 1) schneiden sie sich in zwei Punkten, oder 2) sie berühren sich in einem Punkte, oder 3) sie treffen einander gar nicht; in jedem dieser drei Fälle findet dann offenbar in Hinsicht der gegenseitigen Lage des gegebenen Kreises M_1 und der gegebenen Geraden G_1 ein Gleiches statt.

2. Wäre der Radius $M_1 a_1$ zufällig mit der gegebenen Geraden G_1 parallel, so würde der Punkt c_1 unendlich entfernt liegen, und alsdann wäre es bequemer, statt seiner irgend einen anderen Punkt in der Construction zu gebrauchen, der nämlich auf dieselbe Weise, wie der Punkt f_1 hervorgebracht [81] und benutzt würde. Bei Anwendungen auf dem Felde würde zur Bequemlichkeit auch schon in dem Falle ein anderer Punkt zu Hülfe genommen werden, wenn nur der Punkt c_1 sehr entfernt läge, d. h. schon wenn die Geraden $a_1 M_1$ und G_1 einen sehr spitzen Winkel bildeten.

3. So wie man durch die Hülfe des äusseren Aehnlichkeitspunktes A die zur Lösung der Aufgabe nöthige Gerade G, oder Sehne gh, construirt hat, ebenso kann man mittelst des inneren Aehnlichkeitspunktes I eine Gerade H hervorbringen, die in Bezug auf denselben der gegebenen Geraden G_1 entspricht, und wo man alsdann mittelst zweier durch I (und durch die Durchschnittspunkte der H und des Hülfskreises M, die nämlich die anderen Endpunkte der durch g, h gehenden Durchmesser des Kreises M sind (§ 12, III.)) gehenden Strahlen die nämlichen gesuchten Punkte g_1, h_1 findet, wie dort. Kämen daher bei einem praktischen Falle, etwa auf

dem Felde, Hindernisse vor, wäre z. B. die gegebene Gerade G_1 nicht überall zugänglich, sondern wäre sie nur durch zwei Punkte, etwa durch c_1 und f_1, gegeben, die so lägen, dass man nicht von dem einen bis zu dem anderen hinsehen könnte, so würde man auf die angegebene Weise beide Aehnlichkeitspunkte A und I zugleich benutzen, um jeden der beiden gesuchten Punkte g_1, h_1 als Durchschnittspunkt zweier Strahlen, wovon der eine durch A und der andere durch I ginge, zu erhalten. In diesem Falle müsste aber der Gang der Auflösung etwas geändert werden. Nämlich man würde zuerst durch [**82**] die gegebenen Punkte c_1, f_1 die Durchmesser $c_1 M_1$, $f_1 M_1$ ziehen, sodann mit diesen parallel die Durchmesser ab, de, und dann wäre von da an das Weitere wie zuvor.

4. Wenn der gegebene Radius $M_1 a_1$ insbesondere in der Axe MM_1 läge, z. B. wenn er $M_1 k_1$ wäre, wie müsste dann bei der Lösung verfahren werden? Ein ähnlicher besonderer Fall kann bei der vorhergehenden Aufgabe eintreten, wenn nämlich die daselbst gegebene Strecke $M_1 a_1$ in der Richtung irgend eines Durchmessers des Hülfskreises M liegt, und Aehnliches kann ferner bei der nachfolgenden Aufgabe (8. Aufgabe) stattfinden. Die Lösung dieser besonderen Fälle wird den Liebhabern zur Selbstübung überlassen.

Achte Aufgabe.

»Die gegenseitigen Durchschnittspunkte zweier gegebenen Kreise zu finden.«

Erster Fall. Wenn der eine Kreis gezeichnet vorliegt, nämlich der Hülfskreis M selbst ist, und der andere Kreis nur der Grösse und Lage nach gegeben ist. Es sei z. B. M_1 (Fig. 18) der Mittelpunkt und $M_1 \mathfrak{b}_1$ der gegebene Radius des zweiten Kreises.

Bei der Lösung dieses Falles kommt es offenbar darauf an, die gemeinschaftliche Secante der zwei Kreise zu finden, weil diese sodann auf dem Hülfskreise unmittelbar die gesuchten Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ giebt. Dieses kann, zufolge (§ 17.), unter andern auf nachstehende Weise geschehen.

[**83**] Man ziehe im Hülfskreise M den Durchmesser $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ dem gegebenen Radius $M_1 \mathfrak{b}_1$ parallel, ziehe ferner die Axe MM_1 nebst den Geraden $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}$, die jener in den Aehnlichkeitspunkten A, I begegnen, und den Kreis M zum zweiten Mal in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}$ schneiden; nun ziehe man weiter den Strahl $A\mathfrak{c}$, der den Kreis M zum zweiten Mal in $\mathfrak{d}$ und den verlängerten

Radius $\mathfrak{b}_1 M_1$ in $\mathfrak{c}_1$ trifft, welcher letztere Punkt zugleich im Kreise M_1 liegt; sodann ziehe man ferner den Durchmesser $\mathfrak{a}\mathfrak{f}$, und sofort die Gerade $\mathfrak{f}I$, die dem Strahle $A\mathfrak{b}_1$ im Punkte $\mathfrak{a}_1$ begegnet, welcher zugleich dem Kreise M_1 angehört (§ 12, III.): so sind alsdann sowohl die zwei Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$, als $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1$, als $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}_1$ potenzhaltende Punkte in Bezug auf

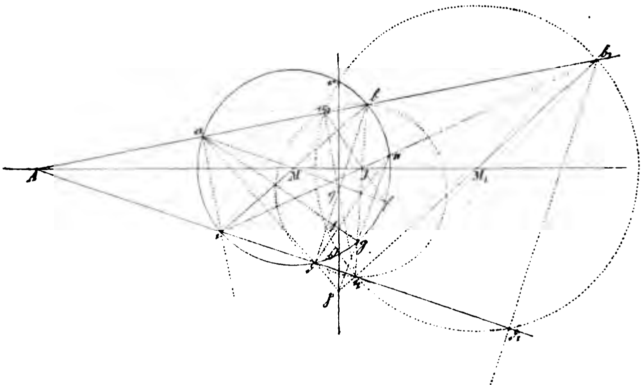

Fig. 18. (Wiederholung.)

den Aehnlichkeitspunkt A (§ 17, I.); zieht man daher weiter die zwei Paar Sehnen $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ (diese verlängert), $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, welche sich in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ schneiden, und zieht endlich die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, so ist diese die gemeinschaftliche Secante der gegebenen Kreise (§ 17, II.), und schneidet den Hülfskreis M in den in der Aufgabe geforderten Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$.

Anmerkung. 1. Würde ausser den vorausgesetzten Beschränkungen der Hülfsmittel noch die Bedingung hinzugefügt, man solle von dem Kreise M_1 ausser dem Punkte $\mathfrak{b}_1$ (und dem Mittelpunkte M_1) keinen anderen Punkt benutzen, wäre dies etwa durch irgend obwaltende Hindernisse bedingt, so könnte man der Aufgabe mittelst des anderen Kreises M allein unter anderen wie folgt genügen. Nachdem man, auf dieselbe Weise, wie vorhin, mittelst der Geraden $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}$ die Aehnlichkeitspunkte [84] A, I, sowie die Schneidepunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}$ gefunden hätte, fände man mittelst des Strahls $A\mathfrak{c}$ den Punkt $\mathfrak{d}$ und mittelst des Strahls $\mathfrak{b}I$ den Punkt $\mathfrak{g}$; sodann mittelst der Sehne $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}\mathfrak{g}$ den Punkt $\mathfrak{p}$, und mittelst der Sehnen $\mathfrak{a}\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ den Punkt $\mathfrak{t}$; und alsdann lägen diese Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{t}$ in der gemeinschaftlichen Secante $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ der beiden gegebenen Kreise

M, M_1. Die Gründe, auf welchen die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht, sind leicht aufzufinden (2. Kapit.).

2. Wenn die gefundene Gerade $\mathfrak{pq}$ den Kreis M nur berührt, oder ihn gar nicht trifft, so zeigt dies an, dass auch der Kreis M_1 ihn berührt, oder ihn gar nicht trifft.

Zweiter Fall. Wenn die zwei Kreise bloss der Grösse und Lage nach gegeben sind. Es seien z. B. M_1, M_2 (Fig. 24) die Mittelpunkte, und etwa M_1a_1, M_2c_2 die Radien der zwei gegebenen Kreise.

Dieser Fall kann unter andern dadurch gelöst werden, dass man die gemeinschaftliche Secante der beiden gegebenen Kreise construirt, und sodann die gegenseitigen Durchschnittspunkte dieser Secante und eines der beiden Kreise sucht. Dieses kann z. B. wie folgt geschehen.

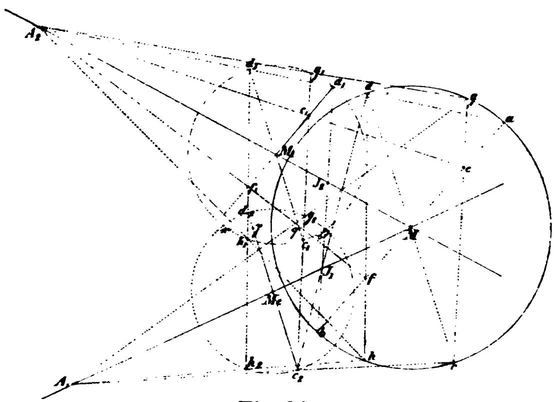

Fig. 24.

Man ziehe im Hülfskreise M die Durchmesser ab, cd den gegebenen Radien M_1a_1, M_2c_2 parallel, und suche sofort die Aehnlichkeitspunkte A_2 und I_2, A_1 und I_1 der Kreispaare M und M_1, M und M_2. Hierauf construire man, durch Hülfe der Aehnlichkeitspunkte A_2 und I_2, den mit cd und also auch mit c_2M_2, parallelen Durchmesser [85] c_1d_1 des Kreises M_1 (§ 12, III.), und bestimme gleicherweise den zweiten Endpunkt d_2 des Durchmessers c_2M_2. Sodann ziehe man die Geraden c_2c_1, d_1d_2, welche den Radius a_1M_1 in e_1, f_1 schneiden, und ziehe ferner die Strahlen A_2e_1, A_2f_1, welche dem Durchmesser aMb in e, f begegnen, und wo e und e_1, f und f_1 ähnlichliegende Punkte zu den Kreisen

M, M_1 in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt A_2 sind. Man ziehe weiter die Geraden ce, df, welche den Hülfskreis M (zum zweiten Mal) in g, h schneiden, und lege sofort die Strahlen A_2g und A_2h, A_1g und A_1h, welche den Geraden c_2c_1, d_1d_2 beziehlich in den Punkten g_1 und h_1, g_2 und h_2 begegnen, so liegen diese Punkte zugleich auf den Kreisen M_1, M_2, und zwar sind sowohl c_1 und g_2, als g_1 und c_2, als d_1 und h_2, als h_1 und d_2 potenzhaltende Punkte in Bezug auf ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt (A). Denkt man sich also weiter die Sehnen (g_1h_1), (g_2h_2) gezogen (um die Figur nicht zu überfüllen, sind diese und einige folgende Linien nicht wirklich gezogen worden), und bezeichnet die Punkte, in welchen sie beziehlich die Durchmesser c_2d_2, c_1d_1 schneiden, durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, und zieht endlich die Gerade $(\mathfrak{p}\mathfrak{q})$, so ist diese die gemeinschaftliche Secante der Kreise M_1, M_2 (§ 17, II.), und es ist somit die vorgelegte Aufgabe auf die vorhergehende (7. Aufg.) zurückgebracht, indem nunmehr nur noch die gegenseitigen Durchschnittspunkte der Geraden $(\mathfrak{p}\mathfrak{q})$ und eines der beiden Kreise, etwa des Kreises M_1, zu finden nöthig sind. Dieses kann aber mittelst der [**86**] bereits vorhandenen Hülfslinien sehr leicht geschehen. Nämlich man ziehe die Strahlen $(A_2\mathfrak{p})$, $(A_2\mathfrak{q})$, nenne die Punkte, in welchen sie der Sehne (gh) und dem Durchmesser cd beziehlich begegnen, (p), (q); ziehe weiter die Gerade (pq), nenne die Punkte, in welchen sie den Hülfskreis M schneidet, (r), (s) und ziehe endlich die Strahlen (A_2r), (A_2s), so werden diese die Gerade $(\mathfrak{p}\mathfrak{q})$ in den der Aufgabe genügenden Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ treffen.

Mehrere andere Auflösungsarten der vorliegenden Aufgabe übergehe ich hier, weil keine einfacher ist, als die eben beendigte. Die eine besteht z. B. darin, dass man die Linien der gleichen Potenzen (oder gemeinschaftlichen Secanten) der Kreispaare M und M_1, M und M_2 sucht (1. Fall), und aus ihrem Durchschnittspunkte $(\mathfrak{q})$ auf die Axe M_1M_2 ein Loth fällt, welches alsdann die gemeinschaftliche Secante der Kreise M_1, M_2 ist, u. s. w.

§ 19.

Schlussbemerkung.

Dass nunmehr alle geometrischen Aufgaben, im engeren Sinne genommen, sich in der That durch Hülfe der vorhergehenden acht Aufgaben (§ 18) behandeln lassen, das heisst, dass ihre Auflösung in einer geringeren oder grösseren

Zusammensetzung und Wiederholung der für diese gegebenen Constructionen besteht, wie verwickelt sie auch immerhin scheinen mögen, ist leicht einzusehen, sodass also der Zweck dieser Arbeit jetzt als erreicht [87] zu betrachten ist. Die Möglichkeit dieser Behandlung gründet sich vornehmlich auf die vorstehende siebente und achte Aufgabe, indem nämlich, wie schon im Eingange bemerkt worden, bei der gewöhnlichen Geometrie die meisten und schwierigsten Aufgaben bloss mittelst dieser beiden gelöst werden. Wollte man aber in der That alle geometrischen Aufgaben nach der gegenwärtigen Methode, und zwar auf die möglichst einfachste Art lösen, so dürfte man natürlicher Weise bei zusammengesetzten Constructionen nicht Schritt für Schritt dem Verfahren folgen, welches gewöhnlich angewendet wird, wenn der freie Gebrauch beider Instrumente, des Zirkels und des Linels, gestattet ist, sondern man müsste vielmehr darauf bedacht sein, die Auflösungen, so viel wie möglich, für die hier erlaubten Hülfsmittel einfach und bequem zu machen. In dieser Hinsicht sind die obigen sechs ersten Aufgaben selbst als wesentliche Beispiele zu betrachten. Ausserdem zeigen die vorstehenden Aufgaben insgesammt, dass es auch hierbei, wie denn in der Geometrie überhaupt, vornehmlich darauf ankommt, die Eigenschaften der Abhängigkeit der Figuren von einander genauer zu erforschen. — Insbesondere will ich hier nur noch bemerken, dass z. B. bei solchen Aufgaben, wo verlangt wird: »einem bloss der Grösse und Lage nach gegebenen Kreise M_1 (oder auch einem bloss durch irgend drei Bedingungen bestimmten Kreise M_1), ein regelmässiges Vieleck ein- oder umzuschreiben«, man unter anderen so verfahren kann, dass man dieselbe Aufgabe [88] vorerst für den gegebenen Hülfskreis M löst und sodann das gefundene Vieleck, mittelst der zu den Kreisen gehörenden Aehnlichkeitspunkte A und I, auf den Kreis M_1 projicirt u. s. w.; wozu die obigen Constructionen hinreichende Anleitung geben.

Bei dieser Gelegenheit füge ich noch folgende Bemerkung hinzu:

Es scheint, dass man im Allgemeinen bis jetzt noch zu wenig Sorgfalt auf die geometrischen Constructionen verwendet habe. Die hergebrachte, von den Alten uns überlieferte Weise, wonach man nämlich Aufgaben als gelöst betrachtet, sobald nachgewiesen worden, durch welche Mittel sie sich auf andere, vorher betrachtete, zurückführen lassen, ist der richtigen Beurtheilung dessen, was ihre vollständige Lösung erheischt, sehr hinderlich. So geschieht es denn auch, dass auf diese Weise häufig Constructionen angegeben werden, die, wenn man in die Nothwendigkeit versetzt wäre, alles, was sie einschliessen, wirklich und genau auszuführen, bald aufgegeben würden, indem man dadurch sich gewiss bald überzeugen müsste, dass es eine ganz andere Sache sei, die Constructionen in der That, d. h. mit den Instrumenten in der Hand, oder, um mich des Ausdruckes zu bedienen, bloss mittelst der Zunge auszuführen*). Es lässt sich gar leicht sagen: ich [89] thue das, und dann das, und dann jenes; allein die Schwierigkeit, und man kann in gewissen Fällen sagen, die Unmöglichkeit, Constructionen, welche in einem hohen Grade zusammengesetzt sind, wirklich zu vollenden, verlangt, dass man bei einer vorgelegten Aufgabe genau erwäge, welches von den verschiedenen Verfahren bei der gänzlichen Ausführung das einfachste, oder welches unter besonderen Umständen das zweckmässigste sei, und wie viel von dem, was die Zunge etwas leichtfertig ausführt, zu umgehen sei, wenn es darauf ankommt, alle überflüssige Mühe zu sparen, oder die grösste Genauigkeit zu erreichen, oder den Plan (das Papier), worauf gezeichnet wird, möglichst zu schonen, u. s. w. Es käme also, mit einem Worte, darauf an: »zu untersuchen, auf welche Weise jede geometrische Aufgabe, theoretisch oder praktisch, am einfachsten, genauesten oder sichersten construirt werden könne, und zwar 1) welches im Allgemeinen, 2) welches bei beschränkten Hülfsmitteln, und 3) welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmässigste Verfahren sei«. Diese Untersuchung würde also auch sowohl die *Mascheroni*'sche als die gegenwärtige Constructions-Methode umfassen, und es würde alsdann eine Vergleichung aller Methoden mit [90] einander eine richtige Kenntniss der Sache gewähren, und gewiss nicht ohne Interesse für die Wissenschaft selbst sein. Dass die vorhergehenden Aufgaben etwas lang scheinen mögen, darf deshalb nicht von der

*) Ich brauche hierbei z. B. nur an die frühere Construction desjenigen Kreises, welcher drei gegebene Kreise berühren soll, zu erinnern. Und dass selbst beim gewöhnlichen Schulunterrichte, bei viel einfacheren Aufgaben, ähnliche Beispiele vorkommen, davon wird sich jeder aufmerksame Lehrer leicht überzeugen können.[5])

gegenwärtigen Methode abschrecken; denn wenn man, wie schon gesagt worden, in der gewöhnlichen Geometrie ebenso alles, was zur Construction einer zusammengesetzten Aufgabe erforderlich ist, wirklich ausführt, so wird man bald sehen, dass auch da Vieles gar nicht so einfach ist, als es scheint, wenn die Geschäfte bloss mit Worten abgemacht werden. Auch habe ich mich bereits überzeugt, dass man auf dem gegenwärtigen Wege, und zwar bei anscheinend schweren Aufgaben, sogar zu solchen einfachen Auflösungen gelangt, welche mit allen beliebigen Hülfsmitteln weder kürzer noch bequemer gemacht werden können, wie dies namentlich durch die nachfolgenden Beispiele bestätigt werden wird.

Anhang.

Vermischte Aufgaben, nebst Andeutung ihrer Lösung mittelst des Lineals und eines festen Kreises.

§ 20.

Um zu zeigen, wie einfach sich manche anscheinend schwierige Aufgaben, bloss mittelst des Lineals, lösen lassen, wenn in der Ebene irgend ein fester Kreis M gegeben ist, füge ich hier noch einige zweckmässige Beispiele bei. Die Gründe, [91] auf welchen einige der dabei angedeuteten Auflösungen beruhen, findet man im ersten Theil der »Systematischen Entwickelung etc.«, und die, auf welchen die übrigen beruhen, werden in den späteren Theilen desselben Werkes entwickelt werden. Ausserdem wird dasselbe Werk noch viele andere Aufgaben dieser Art enthalten, wie namentlich im ersten Theil schon mehrere vorkommen, welche alle hier zu wiederholen mir jedoch unnöthig schien. —

In Betreff der nachfolgenden Auflösungen muss ich noch bevorworten, dass der Leser, falls es ihm darum zu thun sein sollte, die beschriebenen Constructionen auf dem Papiere wirklich zu sehen, sich, nach Anleitung der Auflösung, die jedesmaligen erforderlichen Bilder (Figuren) selber zeichnen möge.

Aufgabe 1.

»**Wenn in einer Ebene zwei beliebige Dreiecke gegeben sind, so soll man ein drittes finden, welches zugleich dem ersten um- und dem zweiten eingeschrieben ist.**«

Es seien B, B_1, B_2 die Eckpunkte des ersten, und A, A_1, A_2 die Seiten, und zwar die unbegrenzt verlängerten Seiten des zweiten Dreiecks.

Man nehme in A einen willkürlichen Punkt $\mathfrak{a}$ an, ziehe den Strahl $\mathfrak{a}B$, der die Gerade A_1 (beide genugsam verlängert) in einem Punkte $\mathfrak{a}_1$ trifft, ziehe sofort den Strahl $\mathfrak{a}_1B_1$, der die A_2 in einem Punkte $\mathfrak{a}_2$ schneidet, und ziehe endlich den Strahl [92] $\mathfrak{a}_2B_2$, welcher der A in einem Punkte α begegnet. Nun hat die Aufgabe offenbar keinen anderen Zweck, als den ersten Punkt $\mathfrak{a}$ so zu bestimmen, dass der zuletzt erhaltene Punkt α mit ihm zusammenfällt, indem in diesem Falle das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\alpha$ der Aufgabe genügt. Da aber, im Allgemeinen, dieses Zusammenfallen nicht stattfindet, sondern $\mathfrak{a}$ und α zwei verschiedene, aber von einander abhängige, einander entsprechende Punkte sein werden, so suche man ähnlicher Weise zu zwei anderen, beliebig angenommenen Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in der Geraden A, die ihnen entsprechenden Punkte β, γ in der nämlichen Geraden. Sodann nehme man im Umfange des Hülfskreises M irgend einen Punkt P an, und ziehe die Strahlen $P\mathfrak{a}$ und $P\alpha$, $P\mathfrak{b}$ und $P\beta$, $P\mathfrak{c}$ und $P\gamma$, die den Kreis (zum zweiten Mal) beziehlich in den Punkten a und α_1, b und β_1, c und γ_1 schneiden; eins dieser Punktenpaare, z. B. das erste, verbinde man kreuzweise mit jedem der übrigen, d. h., man ziehe die Geraden $a\beta_1$ und $\alpha_1 b$, die sich in einem Punkte $\mathfrak{p}$, sowie die Geraden $a\gamma_1$ und $\alpha_1 c$, die sich in einem Punkte $\mathfrak{q}$ schneiden, ziehe weiter die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, die den Kreis M, im Allgemeinen, in zwei Punkten r, s schneidet, und ziehe endlich die Strahlen Pr, Ps: so werden diese die Seite (oder Gerade) A in denjenigen Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ treffen, in welchen allein und in der That die Ecke des zu beschreibenden Dreiecks liegen kann, so dass also dieses somit gefunden ist. Demnach giebt es im Allgemeinen zwei Dreiecke $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}$, wovon jedes der vorgelegten Aufgabe Genüge leistet. Wenn [93] aber insbesondere die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ den Kreis nur berührt, so giebt es nur e i n, und wenn sie ihn gar nicht trifft, so giebt es **gar kein** Dreieck, welches die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Anmerkung. Ganz ebenso wird die Aufgabe gelöst, wenn statt der Dreiecke beliebige Vierecke, oder Fünfecke u. s. w. gesetzt werden.

Aufgabe 2.

»Die gegenseitigen Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden und eines bloss durch

a) fünf Punkte, oder

b) fünf Tangenten

gegebenen (also nicht gezeichnet vorliegenden) Kegelschnitts zu finden.«

Fall a. Es heisse die Gerade A, und die fünf Punkte des Kegelschnitts B, B_1, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. — Aus irgend zweien der fünf Punkte, etwa aus B, B_1, ziehe man Strahlen durch die drei übrigen, also die Strahlen $B\mathfrak{A}$ und $B_1\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$ und $B_1\mathfrak{B}$, $B\mathfrak{C}$ und $B_1\mathfrak{C}$, und nenne die Punkte, in welchen sie (genugsam verlängert) der Geraden A begegnen, beziehlich $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{b}$ und β, $\mathfrak{c}$ und γ. Mittelst dieser drei Punktenpaare suche man sofort, genau auf dieselbe Weise wie bei der vorhergehenden Auflösung (Aufg. 1), also durch Benutzung des Hülfskreises M, in der Geraden A die zwei Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, so sind diese die verlangten Schneidepunkte. Trifft die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, welche man durch die weitere Construction findet, den Hülfskreis M nicht, so schneiden die gegebene Gerade [94] und der Kegelschnitt einander auch nicht; berühren sich jene, so berühren sich auch diese, sodass in diesem Falle die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ zusammenfallen.

Fall b. Dieser Fall lässt sich leicht auf den ersten bringen, indem man nämlich mittelst des Lineals allein die fünf Punkte finden kann, in welchen der Kegelschnitt von den gegebenen fünf Tangenten berührt wird. (Abhängigk. geom. Gestalten, I. Thl., S. 152.)

Aufgabe 3.

»Diejenigen Geraden zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, und einen nur durch

a) fünf Tangenten, oder

b) fünf Punkte

gegebenen Kegelschnitt berühren.«

Fall a. Es heisse der gegebene Punkt B, und die fünf gegebenen Tangenten des Kegelschnitts A, A_1, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Man bezeichne die Punkte, in welchen A und A_1 von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ geschnitten werden, beziehlich durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$. Man ziehe die Strahlen $B\mathfrak{a}_1$, $B\mathfrak{b}_1$, $B\mathfrak{c}_1$ und nenne die Punkte, in welchen sie die Gerade A treffen, beziehlich α, β, γ. Hierauf suche man auf gleiche Weise, wie bei den beiden vorhergehenden Aufgaben, mittelst der drei Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{b}$ und β, $\mathfrak{c}$ und γ und des Hülfskreises M, in der Geraden A die zwei Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, und ziehe sofort die Geraden $B\mathfrak{r}$, $B\mathfrak{s}$, so werden diese, und zwar diese allein, der Forderung der Aufgabe genügen. Wenn die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, [**95**] welche durch weitere Constructionen gefunden wird (siehe Aufg. 1.), den Hülfskreis M nicht schneidet, so zeigt dies an, dass der gegebene Punkt B innerhalb des Kegelschnitts liegt, und mithin die Aufgabe unmöglich ist; und wenn jene Gerade den Kreis berührt, so zeigt dies an, dass der Punkt im Kegelschnitte selbst liegt, und mithin nur eine einzige Gerade (in der sich zwei vereinigt haben) der Aufgabe genügen kann.

F a l l b. Dieser Fall kann auf entsprechende Weise auf den ersten (a) gebracht werden, wie solches bei der vorigen Aufgabe (2.) stattfand, worüber ebenfalls an dem daselbst angeführten Orte das Nähere zu finden ist.

A u f g a b e 4.

»W e n n v o n e i n e m K e g e l s c h n i t t e v i e r P u n k t e u n d e i n e T a n g e n t e g e g e b e n s i n d, s o s o l l m a n d e n P u n k t f i n d e n, i n w e l c h e m d i e l e t z t e r e v o m K e g e l s c h n i t t e b e r ü h r t w i r d.«

I. Es heisse die gegebene Gerade A, und die vier gegebenen Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$. Man ziehe durch diese Punkte drei Paar Gerade, nämlich $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, nenne die Punkte, in welchen sie der Geraden A begegnen, beziehlich $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{b}$ und β, $\mathfrak{c}$ und γ, und suche sofort, auf dieselbe Weise, wie bei den vorhergehenden Aufgaben, in der Geraden A die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$, so wird jeder von diesen der vorgelegten Aufgabe genügen, sodass es also im Allgemeinen z w e i Kegelschnitte giebt, von denen jeder [**96**] durch die vier gegebenen Punkte geht und die gegebene Gerade berührt. Die Merkmale, woran man erkennt, ob die Aufgabe in der That z w e i, oder n u r e i n e, oder g a r k e i n e Auflösung zulässt (d. h., ob 2, oder nur 1, oder k e i n

Kegelschnitt möglich sei), sind die nämlichen wie bei den vorhergehenden Aufgaben.

II. Um die Construction etwas abzukürzen, kann man bei dieser Aufgabe auch wie folgt verfahren. Man ziehe nur zwei Paar Gerade (I.), etwa $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{CD}$, $\mathfrak{AC}$ und $\mathfrak{BD}$, welche der Tangente A in den Punkten $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{b}$ und β begegnen, und ziehe sofort aus dem im Hülfskreise M beliebig angenommenen Punkte P (vergl. Aufg. 1) die Strahlen $P\mathfrak{a}$ und $P\alpha$, $P\mathfrak{b}$ und $P\beta$, welche den Kreis in a und α_1, b und β_1 schneiden, und ziehe ferner die Geraden $a\beta_1$ und $b\alpha_1$, die sich in einem Punkte $\mathfrak{p}$, sowie die Geraden ab und $\alpha_1\beta_1$, die sich in einem Punkte $\mathfrak{t}$ schneiden, lege weiter die Gerade $\mathfrak{pt}$, die den Kreis M, im Allgemeinen, in zwei Punkten r und s schneiden wird, und ziehe endlich die Strahlen Pr und Ps, so werden diese der Geraden A in den gesuchten Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ begegnen.

Aufgabe 5.

»Wenn von einem Kegelschnitte vier Tangenten und ein Punkt gegeben sind, so soll man die Tangente finden, welche den Kegelschnitt in diesem Punkte berührt.«

[97] Es seien A, B, C, D die gegebenen vier Tangenten, und $\mathfrak{A}$ der gegebene Punkt. Es heissen die Punkte, in welchen A von B, C, D geschnitten wird, beziehlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, und die Punkte, in welchen D und C, D und B, C und B einander schneiden, beziehlich $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$. Man ziehe die Strahlen $\mathfrak{A}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{c}_1$, und nenne die Punkte, in welchen sie die Tangente A treffen, beziehlich α, β, γ. Sodann suche man, auf dieselbe Weise wie bisher, mittelst der Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{b}$ und β, $\mathfrak{c}$ und γ, in der Geraden A die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$, und ziehe sofort die Strahlen $\mathfrak{A}\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{s}$, so wird jeder von diesen der Aufgabe genügen. — Uebrigens lassen sich die zwei Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ auch hier durch dasselbe abgekürzte Verfahren finden, wie bei der vorigen Aufgabe (Aufg. 4, II.), wozu man nämlich nur zwei der drei Punktenpaare, etwa $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{b}$ und β, nöthig hat.

Aufgabe 6.

»Wenn drei Punkte und zwei Tangenten eines Kegelschnittes gegeben sind, so soll man die Punkte finden, in welchen derselbe die Tangenten berührt.«

Man bezeichne die gegebenen Tangenten durch B, C, und irgend zwei der drei gegebenen Punkte durch $\mathfrak{a}$, α. Man ziehe die Gerade $\mathfrak{a}\alpha$ und nenne die Punkte, in welchen sie die B und C schneidet, $\mathfrak{b}$ und β, und suche sodann, auf die nämliche Weise wie oben (Aufg. 4, II.), in der Geraden $\mathfrak{a}\alpha$ (dort A) die zwei Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$. Nun lege man ferner durch den dritten gegebenen Punkt und einen [98] der beiden andern, $\mathfrak{a}$ oder α, eine Gerade, und suche, auf ganz gleiche Weise, in ihr die zwei Punkte $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{s}_1$. Sodann ziehe man die vier Geraden $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$, so wird jede von diesen insbesondere die Tangenten B, C in solchen Punkten schneiden, in welchen sie von einem und demselben, durch die drei gegebenen Punkte gehenden, Kegelschnitte berührt werden. Die vorgelegte Aufgabe lässt demnach im Allgemeinen vier Auflösungen zu, oder es giebt, im Allgemeinen, vier Kegelschnitte, welche die drei gegebenen Punkte, sowie die zwei gegebenen Tangenten, gemein haben*). Die Aufgabe wird (oder die Kegelschnitte werden) unmöglich, wenn eins der genannten Punktenpaare $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{s}_1$, nicht stattfindet. Dieser Fall lässt sich aber, ohne vorherige Construction, unmittelbar aus der gegenseitigen Lage der gegebenen fünf Elemente erkennen, nämlich er findet statt, wenn die gegebenen Punkte, in Rücksicht auf die durch die Tangenten B, C gebildeten Winkel, in Nebenwinkeln (aber keine zwei derselben mit dem Durchschnitte der Tangenten in einer Geraden) liegen. Besondere oder Grenzfälle entstehen, wenn entweder die drei gegebenen Punkte in einer Geraden, oder zwei derselben mit dem Durchschnitte der Tangenten B, C in einer Geraden liegen; u. s. w.

[99] Aufgabe 7.

»Wenn drei Tangenten und zwei Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so soll man die Tangenten finden, welche denselben in jenen Punkten berühren.«

Man bezeichne die gegebenen drei Tangenten durch B, C, D und die gegebenen zwei Punkte durch $\mathfrak{a}$, α, und ferner die gegenseitigen Durchschnittspunkte der Tangenten-

---

*) Vergl. *Mémoire sur les lignes du second ordre*, p. 47 par *Brianchon*, Capitaine d'Artillerie, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris 1817; und *Abhäng. geom. Gestalten*, S. 285, Thl. I.

paare B und C, B und D, C und D beziehlich durch $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$. Man ziehe die Gerade $\mathfrak{a}\alpha$, und nenne die Punkte, in welchen sie das Tangentenpaar, etwa B und C, schneidet, $\mathfrak{b}$ und β, und suche sodann, in der Geraden $\mathfrak{a}\alpha$, zu den zwei Punktenpaaren $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{b}$ und β, das durch dieselben bestimmte Punktenpaar $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ (Aufgabe 4, II.). Aehnlicher Weise suche man zu dem gegebenen Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und α, und zu dem Punktenpaare, in welchem die Gerade $\mathfrak{a}\alpha$ von einem andern Tangentenpaare, etwa von B und D, geschnitten wird, das durch dieselben bestimmte Punktenpaar $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{s}_1$. Sodann ziehe man die Strahlen $\mathfrak{D}\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{s}$, $\mathfrak{E}\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{s}_1$, und bezeichne die Durchschnittspunkte von $\mathfrak{D}\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{s}_1$, beziehlich durch u, x, y, z, und ziehe endlich die Geradenpaare $u\mathfrak{a}$ und $u\alpha$, $x\mathfrak{a}$ und $x\alpha$, $y\mathfrak{a}$ und $y\alpha$, $z\mathfrak{a}$ und $z\alpha$, so wird jedes von diesen, für sich genommen, der vorgelegten Aufgabe genügen, d. h., je zwei solche Gerade berühren in den zugehörigen Punkten $\mathfrak{a}$ und α einen bestimmten Kegelschnitt, welcher ebenfalls von den drei gegebenen Geraden [100] B, C, D berührt wird. Demnach lässt die Aufgabe, im Allgemeinen, vier Auflösungen zu, oder es finden vier Kegelschnitte statt, welche sowohl die drei gegebenen Tangenten, als die zwei gegebenen Punkte gemein haben; u. s. w.

Mittelst der vorstehenden Aufgaben (2 bis 7.) lassen sich nunmehr auch die folgenden Doppelaufgaben, welche, wie man bemerken wird, theils Zusammensetzungen, theils besondere Fälle von jenen sind, leicht lösen.

Aufgabe 8.

»Die gegenseitigen Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden und eines Kegelschnitts, von welchem

a) vier Punkte und eine Tangente, oder

b) vier Tangenten und ein Punkt

gegeben sind, zu finden.«

Aufgabe 9.

»Diejenigen Geraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen und einen Kegelschnitt berühren, von welchem

a) vier Tangenten und ein Punkt, oder

b) vier Punkte und eine Tangente

gegeben sind, zu finden.«

Aufgabe 10.

»Die gegenseitigen Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden und eines Kegelschnitts, von welchem
a) drei Punkte und zwei Tangenten, oder
b) drei Tangenten und zwei Punkte
gegeben sind, zu finden.«

[101]

Aufgabe 11.

»Diejenigen Geraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen und einen Kegelschnitt berühren, von welchem
a) drei Tangenten und zwei Punkte, oder
b) drei Punkte und zwei Tangenten
gegeben sind, zu finden.«

Aufgabe 12.

»Die gegenseitigen Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden und eines durch
a) vier Punkte und die Tangente in einem derselben, oder
b) vier Tangenten und den Berührungspunkt einer derselben
gegebenen Kegelschnitts zu finden.«

Aufgabe 13.

»Diejenigen Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, und einen durch
a) vier Tangenten und den Berührungspunkt einer derselben, oder
b) vier Punkte und die Tangente in einem derselben
gegebenen Kegelschnitt berühren, zu finden.«

Aufgabe 14.

»Die gegenseitigen Durchschnittspunkte einer gegebenen Geraden und eines durch
a) drei Punkte und die Tangenten in zwei derselben, oder

[102]

b) drei Tangenten und die Berührungspunkte von zwei derselben
gegebenen Kegelschnitts zu finden.«

Aufgabe 15.

»Diejenigen Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen durch

a) drei Tangenten und die Berührungspunkte von zwei derselben, oder

b) drei Punkte und die Tangenten in zwei derselben

gegebenen Kegelschnitt berühren, zu finden.«

Wie man sieht, lassen sich z. B. die Aufgaben (8. und 9.) mittelst der Aufgaben (4. und 5.) auf die Aufgaben (2. und 3.) zurückführen, ebenso die Aufgaben (10. und 11.) mittelst der Aufgaben (6. und 7.) auf die Aufgaben (2. und 3.) u. s. w., woraus die Zahl der Auflösungen, welche jeder der gegenwärtigen Aufgaben möglicher Weise zukommen können, leicht zu finden ist.

Aufgabe 16.

»Wenn von zwei Kegelschnitten zwei gemeinschaftliche (oder Durchschnitts-) Punkte und ausserdem von jedem insbesondere irgend drei Punkte gegeben sind, so soll man ihre übrigen zwei gemeinschaftlichen Punkte, sowie ihre vier gemeinschaftlichen Tangenten finden.«

Es mögen die Kegelschnitte durch K und K_1, ihre gegebenen zwei gemeinschaftlichen Punkte durch $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, die übrigen gegebenen drei Punkte des Kegelschnitts K durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und die des K_1 durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ bezeichnet und die gesuchten [103] zwei gemeinschaftlichen Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ genannt werden; dann kann die Aufgabe unter anderen z. B. wie folgt gelöst werden.

Man ziehe etwa die Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{S}$, suche die Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, in welchen sie K_1 (ausser in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$) zum zweiten Mal schneiden — welches bekanntlich mittelst des Lineals allein leicht geschehen kann, da fünf Punkte von K_1 gegeben sind — ziehe sofort die Geradenpaare $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, nenne die Punkte, in welchen sie sich kreuzen, beziehlich $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, und ziehe die Gerade $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, so ist diese eine (der gegebenen $\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ zugeordnete) gemeinschaftliche Secante der zwei Kegelschnitte K, K_1, sodass also nur noch nöthig ist, die Durchschnitte derselben mit einem der letzteren zu finden (Aufg. 2, *a.*), um die in der Aufgabe verlangten Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ zu haben.

Um andererseits die vier gemeinschaftlichen Tangenten zu finden, nehme man in der gegebenen Secante $\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ irgend einen Punkt $\mathfrak{P}$ an (welcher aber ausserhalb der Kegelschnitte liegt), ziehe aus demselben an jeden Kegelschnitt zwei Tangenten, suche sofort, mittelst des Lineals, die Berührungspunkte, a und b, a_1 und b_1, derselben und ziehe sodann die Geradenpaare aa_1 und bb_1, ab_1 und ba_1, die sich beziehlich in den Punkten A, I schneiden, welche zugleich die Durchschnittspunkte der gesuchten zwei Paar gemeinschaftlichen Tangenten sind, sodass also diese letzteren sofort nach (Aufg. 3.) gefunden werden.

Eine einfachere Auflösung der vorgelegten Aufgabe werde ich an einem anderen Orte mittheilen und beweisen.

[104]

Aufgabe 17.

»Wenn von zwei Kegelschnitten K, K_1 zwei gemeinschaftliche Tangenten A, A_1 und ausserdem von jedem insbesondere irgend drei Tangenten, etwa a, b, c und a_1, b_1, c_1, gegeben sind, so soll man ihre übrigen zwei gemeinschaftlichen Tangenten, sowie ihre vier gemeinschaftlichen Punkte finden.«

Heissen die Punkte, in welchen A und A_1 von a, b, c geschnitten werden, beziehlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$. Aus jedem der letzteren drei Punkte lege man an K_1 eine zweite Tangente (welche nämlich ausser der schon vorhandenen A_1 noch stattfindet), nenne die Punkte, in welchen sie die A schneiden, beziehlich α, β, γ, suche sofort, mittelst des Hülfskreises, in der Geraden A zu den drei Punktenpaaren $\mathfrak{a}$ und α, $\mathfrak{b}$ und β, $\mathfrak{c}$ und γ die zwei Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$, und lege endlich aus jedem dieser Punkte eine (zweite) Tangente an K (oder K_1), so werden dieselben auch K_1 (oder K) berühren, und mithin die gesuchten zwei gemeinschaftlichen Tangenten sein. — Die gemeinschaftlichen Punkte der Kegelschnitte werden sofort auf eine entsprechende Weise gefunden, wie bei der vorigen Aufgabe die gemeinschaftlichen Tangenten.

Es lassen sich nun weiter eine Menge Aufgaben aufstellen, welche aus den zwei letzten (16. und 17.) und aus den früheren Aufgaben zusammengesetzt sind, wie z. B. die folgenden.

Aufgabe 18.

»Wenn von zwei Kegelschnitten zwei [**105**] gemeinschaftliche Punkte und nebstdem von jedem insbesondere irgend drei Tangenten gegeben sind, so soll man ihre übrigen gemeinschaftlichen Punkte, sowie ihre gemeinschaftlichen Tangenten finden.«

Aufgabe 19.

»Wenn von zwei Kegelschnitten zwei gemeinschaftliche Tangenten und nebstdem von jedem insbesondere irgend drei Punkte gegeben sind, so soll man ihre übrigen gemeinschaftlichen Tangenten, sowie ihre gemeinschaftlichen Punkte finden.«

U. s. w.

Die Lösung aller solcher Aufgaben hat, wie die obigen Beispiele zur Genüge zeigen, gar keine Schwierigkeit, sodass ich es nicht für nöthig erachte, mich weiter darauf einzulassen. Denn man wird leicht bemerken, dass z. B. die Aufgabe (18.), im Allgemeinen, zufolge der Endbemerkung in der Auflösung von (7.), 16 Fälle umfasst, wovon jeder insbesondere sich auf die Aufgabe (16.) bringen lässt. Aehnlich verhält es sich mit (19.).

Von den Aufgaben über Kegelschnitte will ich hier nur noch das folgende Paar hinzufügen.

Aufgabe 20.

»In einen durch irgend fünf Punkte (oder durch irgend fünf Bedingungen) gegebenen Kegelschnitt ein nEck zu beschreiben, welches zugleich irgend einem gegebenen nEck umschrieben ist (d. h., dessen Seiten zugleich, nach bestimmter Ordnung, durch n beliebige gegebene Punkte gehen).«

[**106**] Aufgabe 21.

»Um einen durch irgend fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt ein nEck zu beschreiben, welches zugleich irgend einem gegebenen nSeit eingeschrieben ist (d. h., dessen Ecken zugleich, nach der Reihe, in n beliebigen gegebenen Geraden liegen).«

Von diesen zwei Aufgaben hat die erste, oder vielmehr nur ein besonderer Fall derselben, eine seltene Berühmtheit erlangt, indem nämlich die bedeutendsten Mathematiker sich damit beschäftigt haben.*) Das Verfahren, durch welches dieselbe mittelst der hier gestatteten Hülfsmittel gelöst werden kann, besteht der Hauptsache nach z. B. in folgendem.

Der Kegelschnitt heisse M_2 und das gegebene nEck N_2. Durch irgend drei der fünf gegebenen Punkte des Kegelschnittes, die etwa durch $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ bezeichnet werden mögen, ist ein Kreis bestimmt; er heisse M_1. Zuvörderst lassen sich nun, mittelst des Hülfskreises M, die Aehnlichkeitspunkte A und I der Kreise M, M_1 finden (wozu man von M_1 nicht mehr als jene drei Punkte nöthig hat). Mittelst A und I bestimme man irgend zwei neue Punkte des Kreises M_1, [107] etwa $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$. So lässt sich für M_1 und M_2, da von jedem fünf Punkte gegeben sind, ein Projectionspunkt (der nämlich in den meisten Fällen der Durchschnittspunkt zweier gemeinschaftlichen Tangenten derselben ist) finden; er heisse P. Mittelst P und einer gemeinschaftlichen Secante von M_1 und M_2, etwa der Secante $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$, findet man sofort das zu M_1 gehörige nEck N_1, welches dem, zu M_2 gehörigen, gegebenen nEcke N_2 entspricht; und sodann findet man ferner, mittelst A und I, leicht das zu M gehörige nEck N, welches dem, zu M_1 gehörigen, nEcke N_1 entspricht. Hierauf beschreibe man, mittelst des Lineals allein, in den gezeichnet vorliegenden Kreis M, ein nEck $\mathfrak{N}$, welches zugleich dem gegebenen nEck N umschrieben ist**), suche sofort, mittelst A und I, das ihm in Bezug auf den Aehnlichkeitspunkt A (oder I) entsprechende, zum Kreise M_1 gehörige, nEck $\mathfrak{N}_1$, und sodann (mittelst P und $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$) das diesem entsprechende, zum Kegelschnitte M_2 gehörige, nEck $\mathfrak{N}_2$, so wird dieses letztere der Forderung der Aufgabe genug thun. — Auf entsprechende Weise kann auch die andere Aufgabe (21.) gelöst werden.

Anmerkung. Die vorstehenden Aufgaben, von der zweiten an, sind, wie man bemerken wird, nach dem sogenannten Gesetze der Dualität einander paarweise zugeordnet, nämlich: 2 und 3, 4 und 5, ..., 20 und 21.

* * *

*) Man sehe *Klügel's* Mathematisches Wörterbuch, Th. III. Art. Kreis, § 115, S. 155, und ausserdem die späteren Arbeiten über denselben Gegenstand von den Mathematikern *Gergonne*, *Encontre*, *Servois*, *Rochat*, *Brianchon*, *Poncelet*, *Lhuilier*, etc., in den *Annales de Mathematiques*, *tom. I* und *VIII.*, im *Journal de l'École Polytechnique*, *cahier X.*, etc.

**) Dieses geschieht z. B. nach dem Verfahren, welches *Poncelet* in den *Annales de Mathematiques*, *tom. VIII.*, zuerst bekannt gemacht hat.

[108] Aufgabe 22.

»Wenn irgend ein Punkt a_1 (Fig. 25) eines Kreises und dessen Mittelpunkt M_1 gegeben sind, wovon der letztere jedoch als unzugänglich vorausgesetzt wird, so soll man beliebig viele andere Punkte des Kreises finden.« Wenn z. B. der Punkt M_1 durch irgend einen hohen Gegenstand, etwa durch einen Thurm oder Baum etc., der sich auf einer kleinen Insel, oder in der Mitte einer Stadt befindet, gegeben ist, sodass man nicht leicht von allen Seiten, durch den Raum RS hindurch, zu demselben gelangen, wohl aber ihn aus dem Punkte a_1 und aus anderen Punkten M, A, a, ... sehen kann, und wenn verlangt wird, man

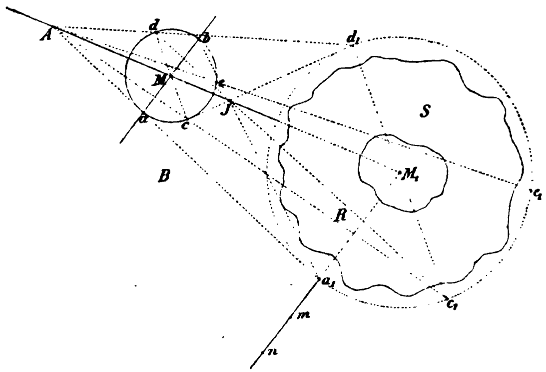

Fig. 25.

soll um das die Insel umgebende Wasser RS, oder um die Stadt einen kreisförmigen Weg, Kanal etc. herumführen, welcher durch den gegebenen Punkt a_1 geht, und in dessen Mittelpunkt der Gegenstand M_1 steht: so kann ein Mann allein mit wenig Hülfsmitteln, nämlich mittelst Stäben und einer Kette (oder Schnur) von bestimmter Länge, beliebig viele Punkte, durch welche der genannte Weg etc. führt, wie folgt finden.

Man setze in a_1 einen Stab und nehme in der Richtung $M_1 a_1$, nach welcher M_1 sichtbar ist, zwei beliebige gleiche Strecken, etwa $a_1 m = mn$, und setze in m, n ebenfalls Stäbe. Auf einem ebenen Platze stecke man eine Gerade ab ab, welche mit $a_1 mn$ parallel ist (§ 6, I.), setze in dem Punkte M, den man als Mittelpunkt des Hülfskreises annimmt, einen Stab, der von einem, [109] an dem einen Ende der Kette befindlichen, Ringe lose umschlossen wird, und nehme $Ma = Mb =$ der Länge der Kette und setze in a und b Stäbe. Nun setze man ferner in A, wo sich die Geraden $a_1 a$ und $M_1 M$ kreuzen, sowie in I, wo sich die Geraden $a_1 b$ und $M_1 M$ durchschneiden, einen Stab: so lassen sich alsdann, mit Hülfe dieser Vorbereitungen, leicht so viele Punkte des Kreises M_1 finden, als man will. Denn man spanne z. B. die Kette nach einer beliebigen Richtung, etwa nach c hin, aus, setze hier einen Stab, und spanne sie sodann nach der gerade entgegengesetzten Richtung bis d aus, und setze hier auch einen Stab, so ist sowohl der Durchschnitt der Geraden Ac und dI, als der Geraden Ad und cI, also sowohl c_1 als d_1, ein Punkt des Kreises M_1.

Fänden solche Hindernisse statt, dass man nicht über den Raum R hinwegsehen, also nicht aus A und I nach c_1 sehen könnte, so würde man vorerst nur die erforderliche Menge von Punkten längs des sichtbaren Bogens $a_1 d_1$ bestimmen, und sodann den Hülfskreis anderswo annehmen, um einen neuen Bogen zu erhalten, oder um den vorigen zu verlängern, und so würde man fortfahren, bis der Kreis M_1 vollständig wäre.

Wären, anstatt des Mittelpunktes M_1 des zu construirenden Kreises und des einen Punktes a_1, in dem Umfange desselben, irgend drei Punkte des letzteren, etwa a_1, d_1, e_1, gegeben, so liesse sich die Aufgabe z. B. folgendergestalt lösen.

Man stecke irgend ein Dreieck ade ab, dessen Seiten den Seiten des gegebenen Dreiecks $a_1 d_1 e_1$ [110] beziehlich parallel sind; suche den Mittelpunkt M des Kreises ade (d. h. des dem Dreiecke ade umschriebenen Kreises), sowie die Aehnlichkeitspunkte A, I der Kreise ade, $a_1 d_1 e_1$, und verfahre sodann ebenso wie oben. Um nämlich z. B. die Gerade ad mit der durch die zwei Punkte a_1 und d_1 gegebenen Geraden $a_1 d_1$ parallel zu ziehen, ist es nöthig, die letztere über einen ihrer Endpunkte hinaus zu verlängern, um in dieser Verlängerung zwei gleiche Strecken annehmen zu können, wie vorhin die Strecken $a_1 m = mn$. Dieses Verlängern ist aber bekanntlich auch in demjenigen Falle möglich, wo weder einer der beiden Endpunkte a_1, d_1 aus dem anderen zu sehen, noch die zwischen ihnen befindliche Strecke (von a_1 bis d_1) zugänglich ist, sondern wenn nur dieselben von der Seite her, wie etwa aus B, sichtbar sind*). Gleiches gilt von den übrigen Seitenpaaren ae und a_1e_1, de und d_1e_1. Die einander ähnlichen Dreiecke $a_1d_1e_1$, ade sind alsdann entweder gleichliegend oder ungleichliegend; im ersten Falle, welcher in der gegenwärtigen Figur stattfindet, schneiden sich die Geraden, welche durch die entsprechenden Ecken der Dreiecke gehen, wie etwa die Geraden a_1a und d_1d, im äusseren Aehnlichkeitspunkte A, u. s. w. —

*) Man sehe »Handbuch des Feldmessens und Nivellirens« von *Crelle*, Berlin 1826, § 67, S. 116, wo unter anderen auch diese Aufgabe mit Umsicht behandelt wird.

Anmerkungen.

Jacob Steiner war geboren am 18. März 1796 zu Utzenstorf, auf halbem Wege von Burgdorf nach Solothurn gelegen, wo seine Eltern ein kleines Bauerngütchen besassen, an dessen Bearbeitung bis zum vollendeten 14. Lebensjahre der kräftig aufwachsende Knabe Theil nahm. Heidelberger Katechismus und Gesangbuch, beides kräftig memorirt, bot ihm fast den einzigen Bildungsstoff dar, ja selbst das Schreiben erlernte er erst im 14. Lebensjahre, und blieb ihm dieses Zeit seines Lebens eine ungeläufige Kunst. Es kostete viel Mühe, den Vater zu bewegen, dass er dem hochbegabten Knaben eine weitere höhere Ausbildung zukommen liesse; nur ungern entliess er den rüstigen Mitarbeiter nach Iferten zu *Pestalozzi*, dessen Ruf bereits im Sinken begriffen war. Auch hier fand *Steiner* nur wenig Anregung durch den Unterricht, der eben viel zu wünschen übrig liess; dennoch dachte er im späteren Leben gern an diese Zeit und zollte seinem einstigen Lehrer stets hohe Achtung. Im Alter von 20 Jahren ging *Steiner* nach Heidelberg, wo er 3 Jahre blieb, obwohl er wiederum keinen seinem Geiste ebenbürtigen Lehrer fand. Die Mittel zum Studium erwarb er sich durch Privatstunden, und mag bei dieser Gelegenheit schon manchen Grundstein zu späteren Arbeiten gelegt haben. Im Jahre 1821 kam er nach Berlin in eine Privaterziehungsanstalt; doch glückte es ihm weder hier, noch in seiner späteren Stellung am Friedrich Werder-Gymnasium; er war bereits im Begriffe, Berlin zu verlassen, als er in das Haus *Wilhelm von Humboldt*'s trat, der von *Steiner*'s Talenten gehört hatte und ihm den Unterricht seines ältesten Sohnes anvertraute. Zum Interesse, das er dem jungen Lehrer entgegenbrachte, trug nicht zum Geringsten der Umstand bei, dass *Humboldt* preussischer Gesandter in Bern gewesen war und die schweizerischen Zustände kannte.

Jetzt nahm auch *Alexander von Humboldt*, dem die Wissenschaft mehrere »Entdeckungen grosser Männer« verdankt, an den Bestrebungen des Bruders theil. *Steiner* ward an der Gewerbeschule als ordentlicher Lehrer angestellt, wo er von 1825 bis 1835 fungirte. Unterdess war schon 1834 für ihn eine ausserordentliche Professur an der Berliner Universität gegründet worden, dank den Bemühungen *Humboldt*'s und *Jacobi*'s, welch letzterer schon seit 1824 an der Universität docirte und seit 1827 als Professor nach Königsberg berufen war. In demselben Jahre 1834 wurde *Steiner* auch zum Mitgliede der Akademie der Wissenschaften gewählt.

Steiner's erste Publicationen fallen genau mit dem Jahre der Begründung des berühmten *Crelle*'schen Journales 1826 zusammen, ja es stützte *Crelle* sein Unternehmen auf die Mitarbeit von *Steiner* und dem sechs Jahre jüngeren, mit letzterem eng befreundeten *Abel*, der von 1825—27 in Berlin lebte und 1829 dorthin übergesiedelt und in die neue Professur eingetreten wäre, wenn nicht der Tod ihn schon im April dieses Jahres ereilt hätte.

Zahlreiche Aufsätze von *Steiner* bringen die ersten 3 Bände des *Crelle*'schen Journales bis zum Jahre 1828. Dann tritt eine Pause ein, die wohl verständlich ist; erst im Jahre 1832 begegnen wir dem berühmten Werke: »Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc.« I. Theil, Berlin (bei G. Fincke) 1832, und schon im folgenden Jahre 1833 erscheint das vorliegende Bändchen im Verlage von Ferdinand Dümmler in Berlin. Hat das erstgenannte Werk bahnbrechend eine neue Aera der Geometrie inaugurirt, so ist das zweite eine wahre Perle sorgfältiger, umsichtiger, stylvoller Betrachtung. Man gewinnt den Eindruck eines vollendeten Kunstwerkes, in dem Alles motivirt erscheint, an seinem rechten Platze steht, in treffender, bündiger Sprache. Der Anhang (pag. 66—80) dürfte wohl nur von demjenigen verstanden und gewürdigt werden, der das vorangehende Hauptwerk wenigstens in seinem ersten Theil kennt und mit den projectivischen Beziehungen, insbesondere mit der Theorie der sich deckenden projectivischen Geraden vertraut ist, wie solches der Autor auch selbst im § 20 vorliegender Schrift ausspricht. Dieser Anhang wird aber in der Hand eines Lehrers, der die Elemente der projectivischen Beziehungen vorzutragen hat, von Werth sein, und wir zweifelten nicht daran, ihn mitaufnehmen zu müssen, und zwar um so mehr, als wir auch die »Systematische Entwickelung etc.« demnächst in den Klassikern zu bringen gedenken. Im Uebrigen ist, mit blosser Ausmerzung der Druckfehler, nach genauer Durchsicht der Text unverändert wiedergegeben worden.

Die Figuren haben wir in den Text gesetzt und dieselben nicht wiederholt, wenn beim Umschlagen des folgenden Blattes die Betrachtung fortgesetzt wird. Es sollte sich der Leser in solchem Falle die Figur selbst reproduciren, ein Verfahren, das auch *Steiner* seinen Schülern stets zu empfehlen pflegte. Die vorliegende Schrift wird auch als Einleitung zum Verständniss der »Geometrischen Constructionen« *Crelle* Bd. I. dienen können.

Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie wurden 1867 herausgegeben und zwar Th. I. »Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung« von Dr. *C. F. Geiser* und Th. II. »Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften« von Dr. *H. Schröter* (Teubner, Leipzig, 2. Aufl. 1876). Ferner erschienen *Steiner*'s »Gesammelte Werke«, herausgegeben von *Weierstrass*, 2 Bände, (Berlin, Reimer) 1882.

Steiner starb am 1. April 1863. Er hatte die letzte Zeit in seiner Heimath gelebt. Dort verkehrte er auch mit der Jugend und stiftete in seiner Geburtsstätte Utzenstorf einen Kopfrechenpreis für die Elementarschule. Der Berliner Akademie der Wissenschaften aber hat er 8000 Thaler zu Preis-Aufgaben aus dem Gebiete der synthetischen Geometrie vermacht.

Wer ein lebendiges Bild von *Steiner*'s Persönlichkeit, von seiner Lehrmethode, von der Art seines Umganges mit Freunden und Schülern und zugleich eine Uebersicht über seine Gesammtleistung gewinnen will, den verweisen wir auf den gediegenen Vortrag seines Landsmannes und Neffen Dr. *C. F. Geiser*: »Zur Erinnerung an *Jacob Steiner*, ein Vortrag, gehalten in Schaffhausen am 22. August 1873«, C. Schmidt, Zürich. Jede Zeile athmet hier die Liebe und Verehrung für den grossen, unsterblichen Meister. Selbst die rauhen Seiten seines Charakters werden mit tiefem Verständniss für das originelle Wesen der gesammten Persönlichkeit in das rechte Licht gestellt.

Wer zu *Steiner's* Füssen gesessen, dem herrlichen Fluss seiner Rede gelauscht, wer die »Meisterschaft der Darstellung« zu bewundern das Glück gehabt hat, dem wird die kernige Gestalt, das geistvolle Antlitz, der sprudelnde Witz und Humor des unvergesslichen Mannes auch in dieser Lebensskizze wieder ins Gedächtniss treten, er wird sich an der markigen, treuen Zeichnung des kraftvollen, urwüchsig-genialen Alpensprösslings wahrhaft erquicken.

1) Zu S. 8. Die Ausdrucksweise ist etwas zu kurz. Der Leser findet indess den vervollständigten Lehrsatz am Schlusse desselben Paragraphen.

2) Zu S. 9. Die Begriffe »vollständiges Vierseit und vollständiges Viereck« wurden bereits 1803 von *Lazare Nicolas Marguerite Carnot* (dem Vater des berühmten *Sadi Carnot*, Begründers der Thermomechanik) eingeführt in dessen: »Géométrie de position« 1803.

3) Zu S. 28. Die sogen. »théorie des polaires réciproques« hat *Jean Victor Poncelet* aufgestellt in einem Aufsatze unter vorstehendem Titel in *Gergonne's* Ann. d. math. VIII. 1817. Weiteres hierüber von *Poncelet* in *Crelle*. Bd. IV. 1829.

4) Zu S. 40. Der Kreis M_1 wird jetzt allgemein der *Feuerbach*'sche Kreis genannt. *Karl Wilhelm Feuerbach*, 1800—1834, Sohn des berühmten Juristen, war Prof. der Mathematik am Gymnasium zu Erlangen und schrieb: »Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks«, Nürnberg 1822.

5) Zu S. 65. Das hier erwähnte Problem, einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise berührt, wird das *Apolloni*'sche Problem genannt und es beruht die Lösung auf der Lehre von den Aehnlichkeitspunkten und der Lehre von der Potenz bei Kreisen. *Apollonius von Perga* (200 v. Chr.) schrieb ein Werk: »de tactionibus«, deutsch von *Diesterweg*, Elberfeld 1827, und von *Paucker* (An. St. Petersb. 1831).

Inhalt.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig), für Physik Prof. Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig).

Um die Anschaffung der Klassiker der exakten Wissenschaften Jedem zu ermögli
ist der Preis für
M —.25 festgeset
doch machen eine

Aus dem Geb

sind bis jetzt ersc

Nr. 5. **C. F. Gauss,**
gerin. (6
» 14. **C. F. Gauss,**
nen etc. (17
M 1.50.
» 17. **A. Bravais,**
und in Geme
Mit 1 Taf.
» 19. **Üb. d. Anzie**
(1782), **Ivor**
(1839). Hera
» 46. **Abhandlung**
lungen von
Leonhard
19 Textfigu
» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) *M* 1.60.
» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) *M* 1