B. G. TEUBNERS LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN XXVII, 3

R. STURM

DIE LEHRE VON DEN GEOMETRISCHEN VERWANDTSCHAFTEN

III

B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

gr. 8. geb.

P. **Bachmann**, niedere Zahlentheorie. 2 Bände. I. Band. X, 402 S. 1902. n. ℳ 14.—. [Bd. X, 1.]

E. **Blaschke**, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. VIII, 268 S. 1906. n. ℳ 7.40. [Bd. XXIII.]

H. **Bruns**, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. VIII, 310 S. und Anhang 18 S. 1906. n. ℳ 8.40. [Bd. XVII.]

G. H. **Bryan**, Thermodynamics. An introductory Treatise dealing mainly with first Principles and their direct Applications. Mit 26 Fig. XIV, 204 S. 1907. n. ℳ 7.—. (Englisch.) [Bd. XXI.]

E. **Czuber**, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Auflage in 2 Bänden. I. Band: Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. Mit 18 Fig. im Text. X, 410 S. 1908. n. ℳ 12.—. [Bd. IX, 1.]

L. E. **Dickson**, linear Groups with an Exposition of the Galois Field theory. X, 312 S. 1901. n. ℳ 12.—. (Englisch.) [Bd. VI.]

O. **Fischer**, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen, sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. Mit 67 Fig. u. 4 Taf. X, 372 S. 1906. n. ℳ 14.—. [Bd. XXII.]

A. **Gleichen**, Lehrbuch der geometrischen Optik. Mit 251 Fig. XIV, 511 S. 1902. n. ℳ 20.—. [Bd. VIII.]

A. **Krazer**, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 10 Figuren. XXIV, 509 S. 1903. n. ℳ 24.—. [Bd. XII.]

H. **Lamb**, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von Joh. Friedel. Mit 79 Fig. XVI, 787 S. 1907. n. ℳ 20.—. [Bd. XXVI.]

R. **von Lilienthal**, Vorlesungen über Differentialgeometrie. In 2 Bänden. I. Band: Kurventheorie. Mit 26 Fig. VI, 368 S. n. ℳ 12.—. [Bd. XXVIII, 1.]

TS 50:708.

G. Loria, spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsch von Fr. Schütte. Mit 174 Fig. auf 17 lithogr. Tafeln. XXI, 744 S. 1902. n. *M.* 28.—. [Bd. V.]

—— Vorlesungen über darstellende Geometrie. Deutsch von Fr. Schütte. In 2 Teilen. I. Teil: Die Darstellungsmethoden. Mit 163 Figuren. XI, 219 S. 1906. n. *M.* 6.80. [Bd. XXV, 1.]

A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität. Deutsch unter Mitwirkung des Verfassers von A. Timpe. Mit 75 Abbildungen. XVI, 664 S.] 1907. n. *M.* 16.—. [Bd. XXIV.]

E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik. VIII, 260 S. 1901. n. *M.* 9.—. [Bd. VII.]

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie. 2 Bände. I. Band. Mit 150 Figuren. XII, 642 S. 1907. n. *M.* 15.60. [Bd. XX, 1.]

E. Pascal, die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen. Berechtigte deutsche Ausgabe von H. Leitzmann. XVI, 266 S. 1900. *M.* 10.—. [Bd. III.]

Fr. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren und 6 Doppeltafeln. [X, 519 S. 1906. n. *M.* 16.—. [Bd. XIX.]

D. Seliwanoff, Lehrbuch der Differenzenrechnung. VI, 92 S. 1904. n. *M.* 4.—. [Bd. XIII.]

O. Staude, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren. VIII, 447 S. 1905. n. *M.* 14.—. [Bd. XVI.]

O. Stolz und J. A. Gmeiner, theoretische Arithmetik. 2., umgearbeitete Aufl. ausgewählter Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. XI, 402 S. 1902. n. *M.* 10.60. [Bd. IV.]

—— Einleitung in die Funktionentheorie. 2., umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Fig. X, 598 S. 1905. n. *M.* 15.—. [Bd. XIV.]

R. Sturm, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. 4 Bände. I. Band: Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. XII, 415 S. 1908. n. *M.* 16.—. [Bd. XXVII, 1.]

H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte. X, 380 S. 1908. n. *M.* 16.—. [Bd. I.]

J. G. Wallentin, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Fig. X, 444 S. 1904. n. *M.* 12.—. [Bd. XV.]

E. von Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. XI, 622 S. 1900. n. *M.* 24.—. [Bd. II.]

A. G. Webster, the Dynamics of Particles and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on mathematical Physics. Mit 172 Fig. XII, 588 S. 1904. n. *M.* 14.—. (Englisch.) [Bd. XI.]

E. J. Wilczynski, projective differential Geometry of Curves and ruled Surfaces. VIII, 298 S. 1906. n. *M.* 10.—. (Englisch.) [Bd. XVIII].

Unter der Presse:

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. Aufl. 2 Bände. II. Band.

H. A. Lorentz, on the Theory of Electrons and its Application to the Phenomena of Light and Radiant Heat. [In englischer Sprache.]

G. Loria, Vorlesungen über darstellende Geometrie. 2 Teile. II. Teil.

R. Sturm, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. 4 Bände. II. Band.

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSZ IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXVII,3

DIE LEHRE VON DEN GEOMETRISCHEN VERWANDTSCHAFTEN

VON

RUDOLF STURM

DRITTER BAND

DIE EINDEUTIGEN LINEAREN VERWANDTSCHAFTEN ZWISCHEN GEBILDEN DRITTER STUFE

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

Inhaltsverzeichnis des dritten Bandes.

Fünfter Teil.

Eindeutige lineare Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe.

Sechster Teil.

Lineare Systeme von Kurven und Flächen, ihre kollineare Beziehung, Polarentheorie. Ausartungen und Abzählungen. Lineare Systeme von linearen Verwandtschaften und von Gebilden, die in solchen sich befinden.

a*

Band IV.

Siebenter Teil.

Eindeutige (Cremonasche) Verwandtschaften höheren Grades zwischen zweistufigen Gebilden.

Achter Teil.

Korrespondenzen auf Trägern vom Geschlechte 1.

Neunter Teil.

Mehrdeutige Verwandtschaften zwischen Feldern.

Zehnter Teil.

Eindeutige Flächenabbildungen.

Elfter Teil.

Eindeutige (Cremonasche) Verwandtschaften im Raume.

Zwölfter Teil.

Mehrdeutige Verwandtschaften im Raume.

Technische Ausdrücke.

(Die Zahl bezeichnet die Seite).

Fünfter Teil.

Eindeutige lineare Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe.

§ 70. Räumliche Kollineation und Korrelation und ihre Herstellung.

Dreistufiges Gebilde ist zunächst nur der Raum, als Inbegriff 468
seiner ∞^3 Punkte oder seiner ∞^3 Ebenen: Punktraum, Ebenenraum. Wir können also den Raum nur auf sich selbst beziehen, sprechen jedoch der Bequemlichkeit halber von zwei in Verwandtschaft gebrachten Räumen, welche aber stets ineinander liegen. Wir können wieder gleichartige Elemente: Punkte und Punkte oder Ebenen und Ebenen entsprechen lassen, oder ungleichartige: Punkte und Ebenen oder Ebenen und Punkte. Die zunächst bezogenen Elemente nennen wir auch hier primäre. Im allgemeinen folgt aus dem Entsprechen der primären Elemente nicht ein Entsprechen der sekundären. Bei den eindeutigen linearen Verwandtschaften, der Kollineation und der Korrelation, ist es der Fall.

Durch drei Paare entsprechender Elemente wurde die Projektivität einstufiger Gebilde eindeutig festgelegt, durch vier Paare entsprechender primärer Elemente die Kollineation oder Korrelation zweistufiger Gebilde. Wir haben darzutun, daß fünf Paare entsprechender primärer Elemente eine räumliche Kollineation oder Korrelation eindeutig bestimmen.

Wir betrachten zuerst die Kollineation und geben fünf Punkte A, B, C, D, E in dem einen Raume Σ und ihnen zugeordnet fünf Punkte A', B', C', D', E' im andern Σ'. Die Bündel A und A' seien kollinear gemacht, indem den vier Strahlen $A(B, C, D, E)$ die vier Strahlen $A'(B', C', D', E')$ zugeordnet werden, und ebenso die Bündel B und B' durch Zuordnung von $B(A, C, D, E)$ und $B'(A', C', D', E')$. In beiden Kollineationen sind die Ebenenbüschel um AB und $A'B'$ entsprechend und daher projektiv, und zwar ist es beidemal dieselbe Projektivität:

$$AB(C, D, E) \barwedge A'B'(C', D', E').$$

Ein Punkt X von Σ bestimmt die Strahlen AX, BX, welchen durch die Kollineationen zwei Strahlen in A', B' homolog sind. Jene liegen in derselben Ebene des Büschels AB, folglich diese in der Ebene des Büschels $A'B'$, welche ihr in jener Projektivität entspricht. Also schneiden sie sich; diesen Schnittpunkt X' ordnen wir dem X zu und sehen sofort, daß X in analoger Weise aus X' hervorgeht. Es liegt daher eine eindeutige Punktverwandtschaft der beiden Räume Σ, Σ' vor. Es ist zu beweisen, daß sie linear ist, d. h. daß X und X' sich zugleich in geraden Linien bewegen.

In der Tat, wenn X auf einer Gerade g sich bewegt, so beschreiben AX und BX zwei Strahlenbüschel, die entsprechenden Strahlen also die entsprechenden Büschel, und X' durchläuft die Schnittlinie der Ebenen derselben.

Drei nicht in gerader Linie gelegenen Punkten entsprechen drei eben solche.

Daraus folgt dann weiter, daß, wenn X eine Ebene ϵ durchläuft, X' dies ebenfalls tut. Es seien P, Q, R drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte von ϵ, P', Q', R' ihre entsprechenden, auch nicht in gerader Linie gelegen, X ein weiterer Punkt von ϵ, Y der Schnitt (PX, QR) und X', Y' die entsprechenden Punkte; da Q, R, Y in gerader Linie liegen, so tun es auch Q', R', Y', und weil P, Y, X geradlinig sind, so sind es auch P', Y', X'; beide Geraden $Q'R'Y'$ und $P'Y'X'$ liegen in der Ebene $\epsilon' = P'Q'R'$, also auch X'; der entsprechende Punkt zu jedem weiteren Punkte von ϵ liegt in ϵ'.

Der Ort der Punkte X', die den Punkten X von ϵ entsprechen, kann einer Gerade g' in Σ' nur einmal begegnen, nämlich in dem Punkte, der dem Schnittpunkte ϵg entspricht; woraus auch folgt, daß er eine Ebene ist.

Oder auch, wenn X die Ebene ϵ durchläuft, werden die beiden Bündel A und B kollinear und in perspektiver Lage; der Strahl AB und alle Ebenen durch ihn entsprechen sich selbst. Durch die beiden Kollineationen zwischen A und A', B und B' geht dies auf die Bündel A' und B' über; sie werden kollinear und alle Ebenen durch $A'B'$ sich selbst entsprechend. Also ist das Erzeugnis der Schnittpunkte X' entsprechender Strahlen die Perspektivitätsebene ϵ' (Nr. 337).

Es sind also nicht bloß die Punkte zugeordnet, sondern auch die Ebenen und die Geraden, welche letzteren wir als tertiäre Elemente bezeichnen könnten. Diese sind jedoch, wie wir wissen, in höherer, vierfach unendlicher Mannigfaltigkeit vorhanden.

Indem die sekundären und tertiären entsprechenden Elemente als Erzeugnisse entsprechender Punkte sich ergeben haben, haben wir auch den Satz erhalten:

Inzidenten Elementen des einen Raums (Punkt und Gerade, Punkt und Ebene, aber auch Gerade und Ebene, Gerade und Gerade) entsprechen inzidente Elemente im andern.

Die eindeutige Beziehung der weiteren Elemente ist unmittelbar klar; aber aus der Erhaltung der Inzidenz folgt, daß auch ihre Verwandtschaft linear ist. Entsprechende Ebenen drehen sich gleichzeitig um entsprechende Geraden oder Punkte, entsprechende Geraden beschreiben gleichzeitig Bündel um entsprechende Punkte, Felder in entsprechenden Ebenen und Strahlenbüschel, deren Scheitel und Ebenen entsprechend sind.

Wir müssen aber noch zeigen, daß die gegebenen Elemente $A, \ldots E$; $A', \ldots E'$ entsprechend sind. Den Strahlen AC, BC entsprechen $A'C'$, $B'C'$; also ist C' dem C entsprechend, ebenso D' dem D, E' dem E. Fällt X in A, so wird AX unbestimmt, BX ist BA; entsprechend sind ein unbestimmter Strahl durch A' und $B'A'$; Schnittpunkt ist jedenfalls A'.

Sind nun die Räume kollinear gemacht, so folgt aus der Eindeutigkeit und Linearität, daß entsprechende Geraden projektive Punktreihen und projektive Ebenenbüschel tragen, entsprechende Ebenen kollineare Felder, entsprechende Punkte kollineare Bündel. Es sind also z. B. auch die Bündel C und C' kollinear, und in ihnen entsprechen den $C(A, B, D, E, X)$ die $C'(A', B', D', E', X')$. Daraus erhellt, daß man auch mit den Bündeln A, C; A', C' hätte arbeiten können und genau zu denselben entsprechenden Punkten gelangt wäre. Also ist die Bevorzugung von A, B; A', B' nur eine scheinbare gewesen. Als bestimmend kann man jede fünf Punkte des einen Raums in allgemeiner Lage[1]) und ihre entsprechenden im andern Raume nehmen. Aber man sieht, daß man auch fünf Ebenen α, β, γ, δ, ϵ des einen Raums ihre entsprechenden α', β', γ', δ', ϵ' im andern zuordnen kann; man wird dann die Felder α und α' so kollinear machen, daß den Geraden $\alpha(\beta, \gamma, \delta, \epsilon)$ die Geraden $\alpha'(\beta', \gamma', \delta', \epsilon')$ entsprechen, und die Felder β, β' so, daß den $\beta(\alpha, \gamma, \delta, \epsilon)$ die $\beta'(\alpha', \gamma', \delta', \epsilon')$ korrespondieren; die Punktreihen auf $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ werden in beiden Kollineationen in derselben Weise projektiv, so daß:

$$\alpha\beta(\gamma, \delta, \epsilon) \barwedge \alpha'\beta'(\gamma', \delta', \epsilon').$$

Eine beliebige Ebene $\mathfrak{x}$ schneidet α, β in zwei Geraden, die sich auf $\alpha\beta$ treffen; die entsprechenden Geraden in α', β' treffen sich im entsprechenden Punkte von $\alpha'\beta'$ und bestimmen die entsprechende Ebene $\mathfrak{x}'$. Es ist nun ähnlich zu beweisen, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ sich gleichzeitig durch Ebenenbüschel und Ebenenbündel bewegen.[2])

1) Diese allgemeine Lage wird bald genauer erläutert werden.

2) Von Bestimmungen durch entsprechende tertiäre Elemente sehen wir vorderhand noch ab.

Neben diese Festlegungen der Kollineation durch fünf Paare entsprechender Punkte oder Ebenen stellen wir sofort die beiden nicht wesentlich sich von ihnen unterscheidenden durch:

$$\left|\begin{matrix} A\,\beta\,\gamma\,\delta\,\epsilon \\ A'\beta'\gamma'\delta'\epsilon' \end{matrix}\right|, \qquad \left|\begin{matrix} A\,B\,C\,D\,\epsilon \\ A'B'C'D'\epsilon' \end{matrix}\right|;$$

denn in der ersteren sind A' und die vier Ecken des Vierflachs $\beta'\gamma'\delta'\epsilon'$ dem A und den vier Ecken des Vierflachs $\beta\gamma\delta\epsilon$ zugeordnet, und ähnliches gilt bei der zweiten. Immer gibt es nur eine Kollineation.

Dagegen ist eine Bestimmung durch:

$$\left|\begin{matrix} A\,B\,C\,\delta\,\epsilon \\ A'B'C'\delta'\epsilon' \end{matrix}\right|, \qquad \left|\begin{matrix} A\,B\,\gamma\,\delta\,\epsilon \\ A'B'\gamma'\delta'\epsilon' \end{matrix}\right|$$

nicht möglich; denn z. B. im ersten Falle sind bei allgemeiner Lage der zehn Elemente, welche wir vorauszusetzen haben, die Ebenenbüschel $\delta\epsilon(A, B, C, \delta, \epsilon)$ und $\delta'\epsilon'(A', B', C', \delta', \epsilon')$ nicht projektiv, wie sie es in der Kollineation sein müssen. Ja, schon zwei Paare entsprechender Elemente der einen Art und zwei Paare der andern Art dürfen nicht beliebig gegeben sein.

Lassen wir aber ungleichartige Elemente entsprechen, etwa den Punkten $A, \ldots E$ des ersten Raumes die Ebenen $\alpha', \ldots \epsilon'$ im zweiten Raume, so erhalten wir Korrelation. Wir haben dann die Bündel A, B den Feldern α', β' korrelativ zu machen, so daß den Strahlen $A(B, C, D, E)$ die Strahlen $\alpha'(\beta', \gamma', \delta', \epsilon')$ entsprechen, und den Strahlen $B(A, C, D, E)$ die Strahlen $\beta'(\alpha', \gamma', \delta', \epsilon')$; der Ebenenbüschel AB wird projektiv zur Punktreihe $\alpha'\beta'$ in beiden Fällen so, daß:

$$AB(C, D, E) \;\overline{\wedge}\; \alpha'\beta'(\gamma', \delta', \epsilon').$$

Der Punkt X bestimmt AX und BX, die in derselben Ebene von AB liegen, ihnen entsprechen Geraden in α', β', die durch den entsprechenden Punkt von $\alpha'\beta'$ gehen und die entsprechende Ebene ξ' bestimmen. Wir zeigen in ähnlicher Weise wie oben, daß einer Punktreihe ein Ebenenbüschel entspricht, also einer Gerade eine Gerade, und einem Punktfelde ein Ebenenbündel, mithin auch einer Ebene des ersten Raumes ein Punkt im zweiten, usw.

Durch die Möglichkeit der räumlichen Korrelation ist das Prinzip der räumlichen Dualität bewiesen; dualisieren heißt Eigenschaften so umformen, wie es die Korrelation erfordert. Dualisierbar sind alle Eigenschaften, welche bei der Kollineation erhalten bleiben.

Die Beziehung zwischen einem Punkte und seiner Polarebene in bezug auf eine Fläche 2. Grades ist Korrelation;

denn sie ist in beiderlei Sinne eindeutig und den Punkten einer Gerade entsprechen die Ebenen eines Büschels.

Poncelet dualisierte, in bezug auf eine Fläche 2. Grades polarisierend.

Wir können noch auf eine zweite Weise die Kollineation oder Korrelation herstellen. Es seien, um diesmal die Korrelation ausführlicher zu behandeln, fünf Punkte A, B, C, D, E in Σ und die entsprechenden Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \epsilon'$ in Σ' gegeben. Bezeichnen wir die drei Verbindungslinien BC, CA, AB und ihre Ebene ABC mit a, b, c, φ und die drei entsprechenden Schnittlinien $\beta'\gamma', \gamma'\alpha', \alpha'\beta'$ und ihren Schnittpunkt $\alpha'\beta'\gamma'$ mit a', b', c', F'; so seien der Ebenenbüschel a und die Punktreihe a' so projektiv bezogen, daß den Ebenen nach den drei übrigen Punkten $aA = \varphi$, aD, aE die Schnittpunkte mit den drei übrigen Ebenen $a'\alpha' = F'$, $a'\delta'$, $a'\epsilon'$ homolog sind, und ebenso bei b und b', c und c'. In allen drei Projektivitäten sind also φ und F' entsprechend. Die Punkte, welche den Ebenen aX, bX, cX korrespondieren, geben die dem X zugeordnete Ebene ξ'. Wenn X auf einer Gerade läuft, werden die drei Ebenenbüschel a, b, c projektiv und zu je zweien in perspektiver Lage; φ entspricht sich selbst. Deshalb werden die zu ihnen bzw. projektiven Punktreihen a', b', c' untereinander projektiv, mit F' also sich selbstentsprechendem Punkte, sind daher ebenfalls zu je zweien in perspektiver Lage. Das Erzeugnis von a', b' ist ein Strahlenbüschel, ebenso das von a', c'. Die Ebene ξ', welche einen Punkt von a' mit den beiden entsprechenden Punkten auf b' und c' verbindet, geht durch einen Strahl des ersten und einen des zweiten Büschels, daher durch die Verbindungslinie der beiden Scheitel; also beschreibt ξ' den Ebenenbüschel um diese Gerade. 469

Die hergestellte Verwandtschaft ist eindeutig und linear und hat duale entsprechende Elemente, also ist sie Korrelation.

Aus der erhaltenen Korrelation folgt, daß der Bündel S zum Felde σ', der Bündel T zum Felde τ' korrelativ ist, wenn das entsprechende Elemente sind, und zwar so, daß Elemente dieser Bündel und Felder, die in der räumlichen Korrelation entsprechend sind, auch in der betreffenden Korrelation zwischen Bündel und Feld einander korrespondieren. Sind daher in der räumlichen Korrelation X und ξ' homolog, so sind SX und $\sigma'\xi'$, TX und $\tau'\xi'$ in der einen oder andern zweistufigen Korrelation entsprechend. Man sieht, daß die auf die jetzige Weise hergestellte Korrelation auch auf die frühere Weise hergestellt werden kann; ebenso kann die Umkehrung bewiesen werden. Und ähnliches gilt bei der Kollineation.

Das vorangehende Ergebnis kann auch so ausgesprochen werden.

Eine Korrelation zweier Räume Σ, Σ' ist festgelegt, wenn drei Ebenenbüschel des einen Σ, deren Axen a, b, c in einer Ebene φ liegen, auf drei Punktreihen von Σ', deren Träger a', b', c' in einen Punkt F' zusammenlaufen, bzw. projektiv bezogen sind, und zwar so, daß in allen drei Projektivitäten der Ebene φ der Punkt F' homolog ist. Einem Punkt X entspricht dann in der Korrelation die Ebene ξ', welche die drei Punkte auf a', b', c' verbindet, die den Ebenen aX, bX, cX korrespondieren.

Dem entsprechen zwei zueinander duale Bestimmungen der Kollineation. Entweder sind in beiden Räumen drei Ebenenbüschel gegeben, deren Axen a, b, c; a', b', c' je in derselben Ebene φ, φ' liegen, und jene bzw. auf diese projektiv bezogen und zwar so, daß alle drei Male φ und φ' entsprechend sind; oder es sind in beiden Räumen drei Punktreihen gegeben, deren Träger a, b, c; a', b', c' je in denselben Punkt F, F' zusammenlaufen, und jene bzw. so auf diese projektiv bezogen, daß durchweg F und F' korrespondieren. Im ersten Fall liegen entsprechende Punkte X und X' der Kollineation in entsprechenden Ebenen der Projektivitäten, im zweiten gehen entsprechende Ebenen der Kollineation durch entsprechende Punkte der Projektivitäten. Ähnlich kann die erste Herstellungsweise umgeformt werden.

Bei kollinearen Räumen entstehen in den entsprechenden Ebenen CDE, $C'D'E'$ kollineare Felder:

$$\left| \begin{matrix} C\,D\,E\,H \\ C'D'E'H' \end{matrix} \right|,$$

wo $H = (AB, CDE)$, $H' = (A'B', C'D'E')$, und über ihnen stehen sowohl die kollinearen Bündel A und A', als die kollinearen Bündel B, B'.

Es sind gegeben zwei kollineare Felder σ, σ' und noch zwei Paare entsprechender Punkte A und A', B und B' und zwar derartig, daß AB und $A'B'$ die Felder σ, σ' in homologen Punkten H, H' treffen. Dadurch werden die Bündel A und A', B und B' kollinear in der Weise, daß die Projektivität der Ebenenbüschel um AB und $A'B'$ beidemal dieselbe ist; denn beidemal handelt es sich um die projektiven Ebenenbüschel, welche aus AB, $A'B'$ die Strahlenbüschel (H, σ), (H, σ') projizieren, welche durch die Kollineation von σ und σ' projektiv sind. Die Strahlen AX, BX treffen σ in den Punkten Y, Z, die mit H in gerader Linie liegen; also korrespondieren ihnen Punkte Y', Z' von σ', die mit H' in gerader Linie liegen; und der Schnittpunkt $(A'Y', B'Z') = X'$ ist der dem X in der Kollineation zugeordnete.

Diese Form wird uns wertvoll sein, um zwei Flächen 2. Grades kollinear, d. h. entsprechend in einer räumlichen Kollineation zu machen.

Für die Korrelation werden ein Feld σ in Σ und ein Bündel S' in Σ' gegeben, welche korrelativ sind, ferner in Σ zwei Punkte A, B, in Σ' zwei Ebenen α', β' in solcher Lage, daß dem Schnitte (σ, AB) die Verbindungsebene $(S', \alpha'\beta')$ in jener Korrelation entspricht. Ein Punkt X von Σ führt wieder zu den Schnitten Y, Z von AX, BX mit σ, die in gerader Linie mit (σ, AB) liegen; ihnen entsprechen zwei Ebenen η', ζ' in S', welche in demselben Ebenenbüschel mit $(S', \alpha'\beta')$ sich befinden; so daß $\alpha'\eta', \beta'\zeta'$ in dieselbe Ebene fallen: das ist die dem X entsprechende ξ'.

Daß Ordnung und Klasse bei der Kollineation erhalten bleiben, bei der Korrelation sich vertauschen, braucht nur erwähnt zu werden.

Nachdem erkannt ist, daß fünf Paare entsprechender Punkte die 470
Kollineation eindeutig festlegen, ergeben sich einige Sätze für das Problem der räumlichen Projektivität und das der Bündelkollineation (§ 36, 68) unmittelbar. Es liegen wiederum:

$$G^5 \quad \begin{array}{c} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 \end{array}$$

vor. In der räumlichen Kollineation, in welcher die A_i und B_i entsprechend sind, korrespondiert einer kubischen Raumkurve a^3 durch die A_i eine b^3 durch die B_i. Sind dann zunächst a, b Doppelsekanten von a^3, b^3, A, B Punkte dieser Kurven, welche in der Kollineation zugeordnet sind, so ist wegen dieser:

$$1)\quad a(A_1, \ldots A_5) \;\overline{\wedge}\; b(B_1, \ldots B_5),$$
$$2)\quad A(A_1, \ldots A_5) \text{ koll. } B(B_1, \ldots B_5).$$

Daraus folgt, daß, weil die Punktreihe einer kubischen Raumkurve aus allen ihren Doppelsekanten durch projektive Ebenenbüschel projiziert wird, und aus allen Punkten der Kurve kollineare Bündel kommen, in denen auf der Kurve sich schneidende Strahlen homolog sind, daß die Projektivität 1) und die Kollineation 2) auch gelten, wenn a, b beliebige Doppelsekanten, A, B beliebige Punkte von a^3, b^3 sind. Daher (Nr. 456):

Jeder kubischen Raumkurve durch die eine Gruppe ist eine durch die andere analog, und zwar in beiden Problemen die nämliche, diejenige, die ihr in der räumlichen Kollineation entspricht.

Und den kubischen Raumkurven des Bündels (A_i), welche eine Gerade $\bar{a}$ treffen und daher eine Fläche 5. Ordnung erzeugen (Nr. 453), sind die kubischen Raumkurven des andern Bündels (B_i) analog, welche die der $\bar{a}$ in der Kollineation entsprechende Gerade $\bar{b}$ treffen; folglich erzeugen sie auch eine Fläche 5. Ordnung.

Die räumliche Kollineation besitzt in jedem Raume eine Fluchtebene, der unendlich fernen Ebene als Ebene des andern Raumes entsprechend, und die räumliche Korrelation einen Mittelpunkt, Durchmesser und Durchmesserebenen, je der unendlich fernen Ebene des andern Raums, ihren Geraden und Punkten korrespondierend.

§ 71. Bedingungen und Mannigfaltigkeit der Korrelation und der Kollineation, Koinzidenztetraeder der Kollineation.

471 Bei der Korrelation gibt es drei Arten polarer Elemente: ein Punkt in Σ und seine Polarebene in Σ', eine Ebene in Σ und ihr Pol in Σ' und zwei polare Geraden p, p'. Wenn p eine Punktreihe trägt, so ist p' Axe des Büschels der polaren Ebenen; aber es gilt auch das Umgekehrte; denn ein Punkt von p' liegt in den Polarebenen aller Punkte von p, also geht seine Polarebene durch alle diese Punkte, folglich durch p.[1])

Ein Element heißt wiederum (vgl. Nr. 267) konjugiert zu einem anderen, wenn es mit dessen polarem Elemente inzidiert. Daher sind zu einem Punkte konjugiert alle ∞^2 Punkte und ∞^2 Geraden seiner Polarebene, zu einer Ebene alle ∞^2 Ebenen und ∞^2 Strahlen durch den Pol, zu einer Gerade die ∞^1 Punkte der Polare, die ∞^1 Ebenen durch sie und die ∞^3 Geraden, welche die Polare treffen.

Wenn P' zu P konjugiert ist, also in der Polarebene π' von P liegt, so geht, weil inzidenten Elementen ebensolche entsprechen, die Polarebene π von P' durch P; d. h. P, in π liegend, ist zu P' konjugiert. Wenn p' zu P konjugiert ist, mithin in π' liegt, so muß der Pol P von π' auf der Polare p von p' liegen; P ist zu p' konjugiert.

Liegt P' auf der Polare p' von p, sodaß P' zu p konjugiert ist, so geht die Polarebene π von P' durch p und p ist zu P' konjugiert. Wenn q' die Polare p' von p trifft, also zu p konjugiert ist, so geht die Polarebene von $p'q'$ durch beide Polaren p, q von p', q'; also trifft p die Polare q von q' und ist zu q' konjugiert.

Nehmen wir dazu noch die dualen Fälle, so ergibt sich: die Konjugiertheit ist stets gegenseitig.

Man kann dies auch in der Form aussprechen: Wenn zwei Elemente konjugiert sind, so gilt dies auch für die zu ihnen polaren.

Wir wenden, mangels eines besseren Wortes, das Wort „kon-

1) Oft sind polare Geraden, insbesondere im speziellen Falle der Polarität in bezug auf eine Fläche 2. Grades, konjugierte Geraden genannt worden, z. B. in Schröters Buch über die Flächen 2. Ordnung, auch beim Nullsystem der kubischen Raumkurve (§ 36). Das hat leider Verwirrung hervorgebracht.

jugiert", wie schon bei der zweistufigen Kollineation (Nr. 427), auch für die analogen Beziehungen der räumlichen Kollineation an, in denen einem Punkte die Ebenen und Geraden durch den entsprechenden Punkt, einer Ebene die Punkte und Geraden in der entsprechenden Ebene, einer Gerade die Punkte, Ebenen, Geraden, die mit der entsprechenden Gerade inzidieren, zugeordnet werden.

Hält man von den 5 Paaren entsprechender Elemente (Punkte, 472
Ebenen), durch die eine Kollineation oder Korrelation festgelegt wird, die in dem einen Raume fest, während die im anderen Raume verändert werden, jedes in ∞^3 Lagen, so erhält man: Es gibt ∞^{15} Kollineationen oder Korrelationen (zwischen zwei Räumen).

Wird eines dieser Elemente (aus dem zweiten Raume) festgehalten, sodaß nur die vier anderen veränderlich sind, so werden ∞^{12} Verwandtschaften möglich. Es liegt also eine dreifache Bedingung vor, wenn für die Kollineation zwei entsprechende Punkte oder Ebenen, für die Korrelation ein Punkt in dem einen Raume und die entsprechende Ebene im anderen gegeben sind.

Für die Korrelation seien die konjugierten Elemente P und P' gegeben oder P und p'; dann haben wir für die Polarebene π' von P ∞^2 Lagen durch P' oder ∞^1 durch p'; es sind daher ∞^{12+2} bzw. ∞^{12+1} Korrelationen möglich.

Also handelt es sich, wenn P und P' oder π und π' als konjugiert gegeben sind, um eine einfache Bedingung, hingegen wenn P und p' oder π und p' als konjugiert gegeben sind, um eine zweifache Bedingung.

Die polare Gerade p' zu einer gegebenen Gerade p kann in ∞^4 Lagen gegeben werden; also liegt eine vierfache Bedingung vor, wenn zwei polare Geraden gegeben sind; legen wir auf eine von ihnen, etwa p, zwei Punkte P, P_1 oder zwei Ebenen π, π_1 durch sie, so wird die Bedingung in zwei doppelte zerlegt, daß p' zu P und P_1 oder zu π und π_1 konjugiert sei.

Wenn die polaren Geraden p und p' gegeben sind, sind ∞^{11} Kollineationen möglich. Verlangen wir für p' bloß Inzidenz mit P' oder π', wobei sie ∞^2 Lagen annehmen kann, so werden ∞^{11+2} Korrelationen möglich; und es zeigt sich von neuem, daß die Bedingung, eine Gerade p soll zu einem Punkte P' oder einer Ebene π' konjugiert sein, eine doppelte Bedingung ist.

Die Inzidenz von p' mit einer gegebenen Gerade q', oder die Konjugiertheit von p und q' wird von ∞^3 Geraden p' erfüllt; es werden ∞^{11+3} Korrelationen möglich, und die Bedingung, daß p und q' konjugiert seien, ist einfach. Also ist in allen drei Fällen konjugierter gleichartiger Elemente die Bedingung einfach. Diese ein- bis vierfachen Bedingungen, daß gegebene Elemente polar oder konjugiert sind, heißen Elementarbedingungen, und wir kommen wieder zu dem Problem, für dessen Lösung wir jedoch noch nicht vorbereitet sind, die Anzahl der Korrelationen zu bestimmen, welche solchen Elementarbedingungen mit der Vielfachensumme 15 genügen. Für die Fälle, wo es sich nur um dreifache Bedingungen handelt, wissen wir schon Bescheid; wenn α-mal der Pol im ersten, die Polarebene im zweiten Raume gegeben ist, β-mal umgekehrt, so sind bei den Signaturen (50), (41), (32), (23), (14), (05) die Anzahlen 1, 1, 0, 0, 1, 1. Ähnliches gilt bei der Kollineation.

Wir haben bei diesen dreifachen Bedingungen vorausgesetzt, daß die gegebenen Elemente allgemeine Lagen haben. Sind z. B. für die Kollineation zunächst A, B, C, D; A', B', C', D' gegeben und hat E allgemeine Lage, d. h. liegt er in keiner der vier Ebenen des Tetraeders $ABCD$, so können wir dem E' ∞^3 Lagen geben, und das Entsprechen von E und E' ist eine dreifache Bedingung. Fällt aber E in eine jener Ebenen, etwa in BCD, so muß, wenn wir eine eigentliche Kollineation haben wollen und keine Ausartung, E' in $B'C'D'$ gelegt werden und kann da nur ∞^2 Lagen einnehmen; die Bedingung, daß zwei gegebene Punkte E, E', bzw. in BCD, $B'C'D'$ gelegen, entsprechend sein sollen, ist nur noch doppelt.

Und wenn E auf eine der Verbindungslinien, etwa CD, gelegt wird und E' dann auf $C'D'$, so handelt es sich um eine einfache Bedingung. Es sind also im ersten Fall: B, C, D, E in einer Ebene, und ebenso B', C', D', E', wo erst 14 Bedingungen gegeben sind, noch ∞^1 Kollineationen, im zweiten: C, D, E in gerader Linie und ebenso C', D', E', wo sogar nur 13 Bedingungen vorliegen, noch ∞^2 Kollineationen möglich.

Wir wollen diese einfache, bzw. doppelt unendliche Unbestimmtheit der Kollineation auch aus der Herstellung derselben durch kollineare Bündel erkennen, haben aber zunächst das Analoge für zweistufige Gebilde nachzuholen. Wir fanden (Nr. 400), daß, wenn zwei Felder durch vier Paare entsprechender Elemente kollinear gemacht werden, ausgeartete Kollineation eintritt, sobald in dem einen lineare Lage statthat. Setzen wir diese aber in beiden voraus, lassen wir sowohl B, C, D, als B', C', D' in gerader Linie liegen, so ist zwar die Projektivität der Büschel A und A' bestimmt, aber nicht die der Büschel B und B', weil da nur zwei Paare entsprechender Strahlen $B\,(A,\ CD)$ und $B'\,(A',\ C'D')$ vorliegen; daher sind ∞^1 Projektivitäten zwischen ihnen möglich und infolgedessen auch ∞^1 Kollineationen zwischen den Feldern. Und ähnliches gilt bei Bündeln.

Fällt nun bei der räumlichen Kollineation E in die Ebene BCD und E' in $B'C'D'$, so bleibt die Kollineation der Bündel A und A' bestimmt, aber die der Bündel B und B' wird unbestimmt, weil gleichzeitig $B\,(C, D, E)$ und $B'\,(C', D', E')$ linear sind.

Es ergeben sich also ∞^1 Kollineationen zwischen diesen Bündeln und daher auch ∞^1 Kollineationen zwischen den Räumen.

Fällt aber E auf CD und E' auf $C'D'$, so sind beidemal ∞^1 Bündelkollineationen möglich, also ∞^2 Kollineationen der Räume. Dabei sind solche Bündel gewählt, welche zusammen möglichst geringen Grad der Unbestimmtheit haben.

Ebenso sind (Nr. 469) im ersten Falle ∞^1 Projektivitäten der Ebenenbüschel BC und $B'C'$ möglich, während die der AB und $A'B'$, der AC und $A'C'$ bestimmt sind; im zweiten werden auch zwischen letztern ∞^1 Projektivitäten möglich.

Die beiden kollinearen Räume sind, wie gesagt, immer ineinander- 473
liegend, und es muß daher Koinzidenzen geben. Lassen wir sie wieder durch die beiden Paare kollinearer Bündel A und A', B und B' entstehen. Den beiden Strahlen von A und B, die nach einem beliebigen Punkte X gehen, entsprechen Strahlen in A', B', die sich im entsprechenden X' schneiden. Nach einem sich selbst entsprechenden Punkte gehen daher zwei Strahlen aus A und B und ihre entsprechenden aus A' und B'. Folglich liegt er auf den beiden kubischen Raumkurven a^3, b^3, welche durch die kollinearen Bündel A und A' bzw. B und B' erzeugt werden. Und umgekehrt, jeder gemeinsame Punkt dieser beiden kubischen Raumkurven ist ein Koinzidenzpunkt. Denn nach ihm gehen zwei entsprechende Strahlen a, a' aus A, A' und zwei entsprechende Strahlen b, b' aus B, B'; also ist er sowohl ab, als $a'b'$, und weil diese Strahlen sich auch in der räumlichen Kollineation entsprechen, so ist er ein sich selbst entsprechender Punkt.

Nun sind die Ebenenbüschel AB, $A'B'$ in beiden Bündelkollineationen entsprechend und ihre Projektivität beidemal dieselbe, diejenige, welche sie in der räumlichen Verwandtschaft haben; also ist die Regelschar, welche durch sie entsteht, eine Sehnen-Regelschar der einen und der anderen kubischen Raumkurve. Diese liegen auf ihrer Trägerfläche und verhalten sich gleichartig zu den beiden Regelscharen, mithin haben sie vier Punkte gemein (Nr. 165, 208). Also haben wir vier Koinzidenzpunkte T, U, V, W; die Dualität fordert vier Koinzidenzebenen, offenbar die vier Ebenen des Tetraeders der vier Punkte, das wir daher das Koinzidenztetraeder nennen. Demnach hat eine räumliche Kollineation ein Koinzidenztetraeder, dessen Ecken, Ebenen, Kanten sich selbst entsprechend sind und ineinanderliegende kollineare bzw. projektive Gebilde (Bündel, Felder, Punktreihen, Ebenenbüschel) tragen.

Läßt man die räumliche Kollineation durch die Projektivitäten der Ebenenbüschel AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und $B'C'$ entstehen, so ergibt sich bei jeder von ihnen eine Regelschar; zu allen dreien gehört $\varphi\varphi'$; also hat die Trägerfläche der ersten mit denen der beiden anderen je noch eine kubische Raumkurve gemeinsam, die den Geraden der Regelscharen zweimal begegnet, weil der $\varphi\varphi'$ so oft. Die vier Punkte, die diesen beiden Raumkurven gemeinsam sind, sind den drei Trägerflächen, außer $\varphi\varphi'$, gemeinsam und die vier Koinzidenzpunkte der Kollineation.

In Spezialfällen können mehr als vier Koinzidenzpunkte vorhanden sein; wir werden sofort solche Fälle kennen lernen.

§ 72. Räumliche Homologie, Kollineation mit Axen, involutorische Kollineationen.

474 Wenn fünf beliebig im Raum gelegene Punkte $A, ., ., ., E$ sich selbst für eine Kollineation zugeordnet sind: $A \equiv A', \ldots E \equiv E'$, so ist sowohl die Kollineation der Bündel A und A', als die der Bündel B und B' Identität; daher ist es auch die räumliche Kollineation.

Hat eine räumliche Kollineation fünf sich selbst entsprechende Punkte in allgemeiner Lage, so entspricht jeder Punkt sich selbst, und natürlich auch jede Gerade, jede Ebene.

Anders ist es aber, wenn lineare Lage der fünf Punkte besteht. Es befinde sich E in BCD und darin in allgemeiner Lage, d. h. keine drei dieser vier Punkte liegen in gerader Linie. Dann wird die zur räumlichen Kollineation gehörige ebene Kollineation in dieser sich selbst entsprechenden Ebene Identität. Die räumliche wird (Nr. 472) unbestimmt, und unter den ∞^1 möglichen Kollineationen befindet sich die Identität; für jede von den übrigen haben wir nur dieses sich selbst entsprechende Feld $\sigma = BCD$ mit lauter sich selbst entsprechenden Elementen, und außerhalb den einzelnen Koinzidenzpunkt A oder S, wie wir ihn für diesen Spezialfall lieber nennen wollen. Es folgt sofort, daß alle Strahlen durch S, weil sie diesen sich selbst entsprechenden Punkt mit einem in σ verbinden, sich selbst entsprechen und demnach auch alle Ebenen durch S. Daher liegen zwei entsprechende Punkte stets auf einem dieser Strahlen; ferner zwei entsprechende Ebenen schneiden sich in σ, da die Schnittlinie der einen mit σ, als sich entsprechend, auch in der anderen liegen muß. Endlich müssen zwei entsprechende Geraden sowohl auf σ sich schneiden, als auch in einer durch S gehenden Ebene liegen.

Wir sehen, wir haben das räumliche Analogon zur ebenen Homologie vor uns, die räumliche Homologie: S ist das Zentrum, σ die Ebene desselben.

Da jeder Punkt einer Ebene durch S, weil sie sich selbst entspricht, auch in ihr liegen muß, so scheidet eine solche Ebene aus der räumlichen Homologie eine ebene aus. Diese lehrt uns, daß auf allen Strahlen dieser Ebene durch S das Doppelverhältnis (S, σ, X, X'), wo in der Klammer σ den Schnitt mit σ bedeutet, einen festen Wert hat, und der Schnittstrahl mit einer anderen derartigen Ebene zeigt, daß der Wert in dieser und daher auf allen Strahlen des Bündels S derselbe ist. Wir können die Gleichheit der Doppelverhältnisse zweier solcher Würfe wiederum aus ihrer perspektiven Lage (mit einem Perspektivitätszentrum auf σ) erkennen, und finden hier diese Invariante (S, σ, X, X') noch in zwei anderen Formen: (S, σ, ξ, ξ'), wo S die Ebene von $\xi\xi'$, die in σ liegt, nach S bedeutet, und (S, σ, x, x'), wo S den Strahl vom Punkte xx' (in σ) nach S und σ den Schnittstrahl der Ebene xx' (durch S) mit σ bedeutet.

Die ∞^1 zu S und σ gehörigen Homologien unterscheiden sich durch den Wert der Invariante; wir genügen der fünfzehnten Bedingung, wenn wir ihn festsetzen; wir können das auch in der Form tun, daß eine einfache Bedingung gegeben wird: ein Punkt X und eine konjugierte Ebene ξ'; X' ist dann der Schnitt von SX mit ξ', und damit ist die Invariante gegeben. Die im System der ∞^1 Homologien enthaltene Identität entspricht der Invariante 1.

Und zum Werte -1 gehört wiederum die harmonische und durchweg involutorische Homologie.

Wie eine Ebene durch S aus der räumlichen Homologie eine ebene ausscheidet, deren Zentrum ebenfalls S und deren Axe der Schnitt mit σ ist, so trägt jeder Punkt von σ eine in der räumlichen Homologie enthaltene Bündelhomologie: mit σ als Ebene und dem Strahle nach S als Axe.

Jeder Strahl durch S (Zentrumsstrahl) trägt konjektive Punktreihen, deren Koinzidenzen S und der Schnitt mit σ sind, jede Gerade von σ konjektive Ebenenbüschel mit σ und der Ebene nach S als Koinzidenzen.

Die beiden Fluchtebenen sind der σ parallel, weil sie sich auf ihr mit der unendlich fernen Ebene begegnen, und vereinigen sich im Falle der involutorischen Homologie in die Mittelebene zwischen S und σ. Die ebene Homologie in einer Ebene durch S, welche zu σ und den Fluchtebenen normal ist, zeigt (Nr. 295), daß der Abstand vom Zentrum zur einen Fluchtebene in Größe und Sinn übereinstimmt mit dem von der anderen zur Ebene σ. Für alle Punkte R des ersten Raumes, welche den unendlich fernen des zweiten Raumes entsprechen, gilt, daß auf den Zentrumsstrahlen das Verhältnis $\frac{SR}{\mathfrak{S}R}$, wo $\mathfrak{S}$ der Schnitt mit σ ist, den festen Wert der Invariante hat. Durch diese Punkte entsteht ersichtlich eine zu σ parallele Ebene.

Die Konstruktion weiterer entsprechender Elemente, wenn etwa das Zentrum S, die Ebene σ und ein Paar entsprechender Punkte auf einem Zentrumsstrahl gegeben sind, verläuft analog wie bei der ebenen Homologie.

Die Homologie besitzt ∞^6 Koinzidenztetraeder: eine Ecke fest in S, die anderen in beliebigen drei Punkten von σ.

Wir erwähnen den Spezialfall, daß S in σ liegt.

Enthält eine räumliche Kollineation ein Feld σ mit lauter sich selbst entsprechenden Elementen, dann enthält sie auch einen ebenso beschaffenen Bündel und ist Homologie; und umgekehrt.

Es seien A, B, C und A', B', C' entsprechend und ϵ, ϵ' die beiden Ebenen; diese müssen als entsprechend sich auf σ schneiden; aber auch BC und $B'C'$, CA und $C'A'$, AB und $A'B'$ tun dies, weil eben die Elemente von σ sich selbst entsprechend sind. Somit liegen zwei perspektive Dreiecke vor, AA', BB', CC' laufen in einen Punkt S zusammen, der schon durch AA', BB' bestimmt ist, also bleibt, wenn C, C' durch andere entsprechende Punkte X, X' ersetzt werden. Folglich konkurrieren alle Verbindungslinien XX' in S; liegt daher Y auf SXX', so tut es auch Y', weil mit Y und S in gerader Linie, und der Strahl entspricht als XY und $X'Y'$ sich selbst.

Auf zwei Flächen 2. Grades, welche sich längs eines Kegelschnitts berühren, übertragen sich sofort die Sätze von Nr. 302ff. Jeder Strahl durch die Spitze des gemeinsam längs der Berührungskurve umgeschriebenen Kegels, den Berührungspol, schneidet sie nach konstantem Doppelverhältnis; es gibt zwei Homologien, zum genannten Pol S und zur Ebene σ der Berührungskurve gehörig, welche die Flächen ineinander überführen.

Insbesondere haben wir, wenn jene Konstante -1 ist, zwei harmonisch zugeordnete Flächen 2. Grades mit konischer Berührung, wie hier gleich hinzugefügt werde, weil wir bald noch eine zweite Art harmonisch zugeordneter Flächen 2. Grades kennen lernen werden.

Jeder Zentrumsstrahl trifft die eine Fläche reell, die andere imaginär. Wenn also die Berührung reell ist, so liegen die beiden harmonisch zugeordneten Flächen auf verschiedenen des dann reellen Berührungskegels: im Innern eine elliptische Fläche (Ellipsoid oder zweimanteliges Hyperboloid), im Äußern eine hyperbolische (einmanteliges Hyperboloid). Ist sie imaginär, so ist die eine Fläche reell-imaginär, die andere, mit dem Berührungspole im Innern, eine elliptische Fläche.

Zwei so harmonisch zugeordnete Flächen 2. Grades sind in ihrer Büschel-Schar zu den beiden ausgearteten Elementen derselben harmonisch: dem Berührungskegel und dem Berührungskegelschnitt oder der Doppelebene. Durch irgend eine Ebene des Bündels S wird dieser Satz auf den ebenen zurückgeführt.

Eine infinitesimale Homologie — deren entsprechende Punkte unendlich nahe sind — wird von A. Beck[1]) zu Abzählungen verwertet, von denen ich eine wiedergeben will. Durch sie gehe eine algebraische Raumkurve R n^{ter} Ordnung r^{ten} Ranges in R' über; diese trifft den Kegel, welcher R aus einem Punkte O projiziert, in n^2 Punkten, von denen n in die Ebene der Homologie fallen, r in die Punkte der R auf den Berührungskanten der vom Zentrum S kommenden Tangentialebenen und $2h$ in die Punkte, in denen R von ihren h Doppelsekanten aus P getroffen wird, so daß:

$$2h = n(n-1) - r.$$

Wir nehmen jetzt an, daß, nachdem wieder A, B, C, D zu sich 475
selbst entsprechenden Punkten gemacht sind, ein fünfter sich selbst entsprechender E auf CD gelegt wird; dann erhalten wir nur Identität der konjektiven Punktreihen auf dieser Gerade u, und ∞^2 Kollineationen, weil wir erst 13 Bedingungen haben; denn $E' \equiv E$ liegt auf $C'D' \equiv CD$. Alle Ebenen durch $v = AB$ verbinden drei sich selbst entsprechende Punkte, A, B und einen auf u, sind also sich selbst entsprechend; wir haben den Spezialfall einer Kollineation mit zwei ausgezeichneten Geraden u, v, von denen die eine lauter sich selbst entsprechende Punkte, die andere lauter sich selbst entsprechende Ebenen trägt. Letztere enthält zwei sich selbst entsprechende Punkte (A, B), die erstere zwei sich selbst entsprechende Ebenen, nach diesen Punkten gehend.

Jede Drehung um eine Axe u führt zu einer solchen Kollineation; die andere Gerade v ist die unendlich ferne Gerade der zu u senkrechten Ebenen, und die sich selbst entsprechenden Punkte auf ihr sind ihre absoluten Punkte.

Wertvoller ist ein noch speziellerer Fall. Wir hatten noch zwei Bedingungen zur Verfügung; die eine möge sein, daß wir auch auf v einen dritten sich selbst entsprechenden Punkt legen. Dann werden die beiden Geraden u, v gleichartig: alle Punkte der einen wie der andern, alle Ebenen durch die eine, wie die andere sind sich selbst entsprechend. Wir wollen eine solche Kollineation eine Kollineation mit Axen (die hier u, v sind) nennen.[2]) Zu den schon erwähnten sich selbst entsprechenden Elementen kommen hier noch die ∞^2 Strahlen des Strahlennetzes $[u, v]$, denn jeder von ihnen verbindet zwei sich selbst entsprechende Punkte auf u, v und ist der Schnitt zweier sich selbst entsprechender Ebenen durch u, v; man nennt diese Geraden die Leitstrahlen der vorliegenden speziellen Kollineation.

Zwei entsprechende Punkte X, X' liegen immer auf einem

---

1) Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Ges. in Zürich Jahrg. 52, S. 266.

2) Vielfach wird sie hyperboloidische Kollineation genannt.

Leitstrahl, zwei entsprechende Ebenen ξ, ξ' schneiden sich in einem; denn von jedem Punkte X geht ein Leitstrahl aus und enthält, weil er sich selbst entspricht, den X', und in jeder Ebene ξ liegt einer und befindet sich auch in ξ'.

Koinzidenztetraeder gibt es ∞^4: mit zwei beliebigen Ecken auf u und den andern auf v; während im vorangehenden Falle, wo auf v bloß A, B sich selbst entsprechend sind, nur ∞^2 vorhanden sind.

Auf jedem Leitstrahle l haben wir zwei konjektive Punktreihen, in denen die Punkte lu, lv die Koinzidenzen sind, und um ihn zwei konjektive Ebenenbüschel, mit den Ebenen lu, lv als Koinzidenzelementen.

In jeder Ebene durch eine der beiden Axen erhält man eine ebene Homologie. Axe derselben ist jene Axe der räumlichen Homologie, Zentrum der Spurpunkt der andern Axe. Und ebenso erhält man eine Bündelhomologie um jeden Punkt einer der Axen; diese wird auch Axe für sie, die Ebene nach der andern Axe ist die Ebene dieser Homologie.

Für zwei Leitstrahlen, die von demselben Punkte $\mathfrak{U}$ von u ausgehen nach $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2$ auf v, haben wir, wenn X, X' irgend welche entsprechenden Punkte auf $\mathfrak{U}\mathfrak{V}_1$ und Y, Y' solche auf $\mathfrak{U}\mathfrak{V}_2$ sind, wegen der ebenen Homologie in $\mathfrak{U}v$:

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{V}_1 XX') = (\mathfrak{U}\mathfrak{V}_2 YY').$$

Sind daher $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{U}_2\mathfrak{V}_2$ beliebige Leitstrahlen, so ergibt sich:

$$(\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1 XX') = (\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_2 YY') = (\mathfrak{U}_2\mathfrak{V}_2 ZZ').$$

Daraus sehen wir, daß auch hier eine Invariante vorhanden ist:

$$(uvXX')$$

wo in der Klammer u, v die Schnittpunkte des Leitstrahls XX' mit u, v bezeichnen. Die Dualität lehrt, daß auch

$$(uv\xi\xi'),$$

wo nunmehr u, v die Ebenen von dem Leitstrahle $\xi\xi'$ nach u, v bedeuten, invariant ist. Man kann aber leicht durch Projektion oder Schnitt aus einem Wurfe der einen Art einen der andern hervorrufen, also haben beide Invarianten denselben Wert. Durch eine andere Betrachtung können wir nochmals die Invarianz erkennen und eine dritte Form für die Invariante finden. Es seien x und x' zwei entsprechende Geraden, X, Y, Z drei Punkte auf x, X', Y', Z' die entsprechenden Punkte auf x', so sind XX', YY', ZZ' Leitstrahlen, treffen u, v; daher sind u, v, x, x' vier Geraden einer Regelschar, weil sie XX', YY', ZZ' schneiden. Zwei entsprechende Geraden unserer Kollineation mit Axen liegen immer mit diesen Axen in einer Regelschar, deren zugehörige Leitschar durch Leitstrahlen gebildet wird. Gehört y zu jener Regelschar, und ist y' ihr entsprechend, so hat die neue Regelschar $yy'uv$ mit der vorigen y, u, v gemeinsam, ist mit ihr identisch. Bewegt sich also x in einer Regelschar durch u, v, so bewegt sich auch x' in ihr; und die Regelschar wird konjektiv mit u, v als Koinzidenzen. Die Geraden einer Regelschar schneiden aber in die Leitgeraden Punktreihen und bilden mit ihnen Ebenenbüschel, und alle diese Punktreihen, Ebenenbüschel sind untereinander und mit der Regelschar projektiv; daher ist, wenn l, l_1 irgend zwei Geraden der Leitschar sind:

$$\text{Punktwurf } l(u, v, x, x') \barwedge l_1(u, v, x, x') \barwedge$$
$$\text{Ebenenwurf } l(u, v, x, x') \barwedge l_1(u, v, x, x') \barwedge$$

Wurf in der Regelschar $uvxx'$.

Also ist die dritte Form der Invariante: Doppelverhältnis des Wurfs einer Regelschar, der aus den beiden Axen und zwei entsprechenden Geraden besteht.

Drei beliebige Leitstrahlen l, l_1, l_2 bestimmen eine Leitschar, zur Regelschar gehören u, v und ∞^1 Paare entsprechender Geraden x, x'.

Solcher verbundener Regelscharen haben wir ∞^6, weil es ∞^2 Leitstrahlen gibt.

Wenn die Invariante gegeben wird, so wird die fünfzehnte Bedingung hinzugefügt und aus dem einfach unendlichen System von Kollineationen mit gemeinsamen Axen eine ausgeschieden. Unter ihnen haben wir für den Wert 1 der Invariante die Identität und für den Wert -1 wiederum eine durchweg involutorische Kollineation, die windschiefe oder gescharte Involution[1]) genannt werde. Hier sind alle Gebilde involutorisch geworden, die konjektiven Punktreihen auf den Leitstrahlen und die Ebenenbüschel um sie, die konjektiven Regelscharen durch die Axen, die ebenen Homologien und die Bündelhomologien.

Wir wollen noch direkt beweisen, daß, wenn die Axen u, v und der Wert der Invariante λ gegeben sind, in der Tat Kollineation entsteht. Jedem Punkt X ist auf dem Leitstrahle (X, u, v) eindeutig der Punkt X' zugeordnet, für den $(uvXX') = \lambda$ ist, und auch dem X' eindeutig der X. Bewegt sich X auf einer Gerade g, so beschreibt der Leitstrahl (X, u, v) eine Regelschar, zu deren verbundener Schar u, v, g gehören; und ist auf einem der X' konstruiert und durch ihn die Gerade g' dieser letzteren Schar gezogen, so folgt als Eigenschaft der Regelschar, daß g' alle Punkte auf den andern Leitstrahlen aus Punkten von g enthält, für die auch $(uvXX') = \lambda$ ist. Also handelt es sich um eine eindeutige lineare Verwandtschaft, eine Kollineation.

1) Geschart involutorische Kollineation, auch windschiefe Spiegelung (skew reflection).

476 Wir haben bis jetzt die Axen u, v reell angenommen; sie können aber auch konjugiert imaginär und durch eine elliptische Involution in einer Regelschar R definiert sein. Konstruieren wir zuerst die windschiefe Involution. Die gegebene Regelschar-Involution gehört zu ihr, ihre gepaarten Geraden sind auch in der windschiefen Involution entsprechend. Aus jedem Punkte wird diese involutorische Regelschar R durch eine Involution in dem Tangentialebenen-Büschel eines Kegels 2. Grades projiziert. Die Involutionsaxe s ist der Strahl aus dem Punkte, welcher die beiden Doppelstrahlen trifft. Ebenso schneidet jede Ebene in einer Involution auf einem Kegelschnitte; die Involutionsaxe ist die Gerade in der Ebene, welche die Doppelstrahlen der involutorischen Regelschar trifft. Wir können also für jeden Punkt X den durchgehenden Leitstrahl konstruieren und auf ihm den vierten harmonischen Punkt X' in bezug auf die Schnitte mit den Axen u, v, d. h. mit der Trägerfläche der Regelschar, also den Schnitt mit der Polarebene des X in bezug auf diese Trägerfläche, bzw. für jede Ebene ξ den in ihr liegenden Leitstrahl und die Ebene ξ', welche ihn mit dem Pole von ξ in bezug auf die Trägerfläche verbindet.

Beweisen wir, daß X' sich gleichzeitig mit X linear bewegt. Sind yy', zz' zwei Paare der gegebenen involutorischen Regelschar R, so finden wir die Axe s der Tangentialebenen-Involution um den Kegel 2. Grades, welcher aus X die Regelschar R projiziert, folgendermaßen. Man schneidet die Ebenen Xy und Xz, sowie die Ebenen Xy', Xz', und verbindet die beiden Schnittlinien, und ebenso die Schnittlinien (Xy, Xz'), (Xy', Xz); die verbindenden Ebenen begegnen sich in s. Durchläuft nun X eine Gerade g, so beschreiben die vier Schnittlinien Regelscharen $[gyz]$, $[gy'z']$, $[gyz']$, $[gy'z]$. Die erste Verbindungsebene umhüllt daher den Torsus 3. Klasse, welcher den Trägerflächen der beiden ersten Regelscharen gemeinsam ist, außer dem Ebenenbüschel g; er sendet durch g zwei Ebenen und daher auch durch y, z, y', z' und ist deshalb auch der Trägerfläche (R) der gegebenen Regelschar R umgeschrieben, weil er mit ihr acht Tangentialebenen gemein hat. Ebenso umhüllt die zweite Verbindungsebene einen solchen Torsus, der ebenfalls dieser Trägerfläche umgeschrieben ist; daher haben diese beiden Torsen, weil sie sich gegen die Regelschar R gleichartig verhalten, vier Ebenen gemein.[1]) Die beiden Torsen befinden sich in eindeutiger Beziehung ihrer Ebenen, indem je die durch denselben Punkt von g gehenden Ebenen einander entsprechen, also auch die vier gemeinsamen Ebenen sich selbst. Diese bewirken vier von den sechs Koinzidenzen, welche die auf einer Gerade durch

1) Dual: zwei kubische Raumkurven, welche auf der Trägerfläche einer Regelschar liegen und sich gleichartig gegen diese Schar verhalten, haben vier Punkte gemeinsam (Nr. 207).

die entsprechenden Ebenen der Torsen hervorgerufene Korrespondenz [3, 3] hat. Daher ist das Erzeugnis der Schnittlinien s entsprechender Ebenen eine Regelschar (s), die Regelschar der Geraden, welche an g und den Doppelstrahlen der gegebenen Involution in R gleiten.

Jede Gerade derselben ist nun noch zu schneiden mit der Polarebene, in bezug auf (R), des Punktes X auf g, von dem sie ausgeht; es liegen also eine Regelschar (s) und ein Ebenenbüschel vor, die zueinander projektiv sind. Von der kubischen Raumkurve, welche durch die Schnittpunkte entsprechender Elemente entsteht, lösen sich aber die beiden Geraden der Leitschar von R ab, welche durch die Schnittpunkte von g mit der Trägerfläche gehen, auch zu (s) gehören und vollständig in die Polarebene dieser Punkte fallen. Es bleibt also als Ort von X' eine Gerade, was bewiesen werden sollte.

Aber auch der allgemeine Fall einer Kollineation mit 477
Axen läßt sich, ohne daß man von diesen Axen ausgeht, herstellen.[1]) Wir legen zwei kollineare Bündel O, O' zugrunde, in denen der gemeinsame Strahl OO' sich selbst entspricht. Das Erzeugnis der Schnittlinien entsprechender Ebenen ist ein Strahlennetz N, dessen Leitgeraden u, v bzw. in den beiden reellen oder imaginären sich selbst entsprechenden Ebenen ϵ, φ durch OO' liegen und ebenso reell, bzw. imaginär sind, wie diese (Nr. 375).

Es seien ω, ω' zwei entsprechende Ebenen der beiden Bündel, $\omega\omega'$ also ein Strahl von N; durch die Spuren der Strahlen von N werden die Felder in ω, ω' kollinear gemacht. Denn durch jeden Punkt von ω oder ω' geht nur ein Strahl von N oder nur eine Schnittlinie entsprechender Ebenen von O und O'. Wir fanden (Nr. 369), daß in jedem der beiden Bündel die Ebenen, welche die entsprechenden in Geraden schneiden, die einer gegebenen Gerade g begegnen, Kegel 2. Grades umhüllen. Also entsteht durch die entsprechenden Ebenen dieser Kegel auf einer Gerade eine Korrespondenz [2, 2], und die Schnittlinien entsprechender Ebenen der Bündel, welche g treffen, erzeugen eine Regelfläche 4. Grades. Von dieser sondern sich aber in unserem speziellen Falle die Büschel in den sich selbst entsprechenden Ebenen (durch OO') um die Spuren von g ab; es bleibt eine Regelschar: die Regelschar der Geraden von N, welche g treffen. Liegt g in der Ebene ω, so gehört zur Regelschar die Schnittlinie $\omega\omega'$ und in ω' liegt daher eine Gerade der Leitschar, welche der Ort der Spuren der Geraden der Regelschar in ω' wird. D. h. die Spuren der Strahlen von N in ω und ω' bewegen sich gleichzeitig linear; die Verwandtschaft, in der sie einander zugeordnet sind, ist Kollineation.

1) Reye, Geometrie der Lage, 2. Aufl., Abt. II, S. 82; Sturm, Liniengeometrie, Bd. I, Nr. 83.

Ebenso entsteht in zwei anderen entsprechenden Ebenen ω_1 und ω_1' von O und O' durch die Strahlen von N eine Kollineation. Ein Strahl $\xi\xi'$ von N trifft also sowohl ω und ω', als auch ω_1 und ω_1' in entsprechenden Punkten; wenn aber $\xi\xi'$ den Strahl $\omega\omega_1$ von O trifft, so nimmt ihn die Ebene ξ in sich auf, und daher ξ' den entsprechenden Strahl $\omega'\omega_1'$, der also auch von $\xi\xi'$ getroffen wird. Die beiden Geraden $\omega\omega_1$ und $\omega'\omega_1'$ sind in beiden Kollineationen zwischen ω und ω' und zwischen ω_1 und ω_1' entsprechend; und auch jedem Punkte der einen entspricht beidemal derselbe Punkt der andern, insbesondere sind auch O und O' entsprechend, als Spuren des Netzstrahls OO'.

Wir legen jetzt eine räumliche Kollineation zwischen Σ, Σ' fest:

$$\left|\begin{matrix} O & T & U & T_1 & U_1 \\ O' & T' & U' & T_1' & U_1' \end{matrix}\right|;$$

worin T und T', U und U' in den kollinearen Feldern ω, ω', T_1 und T_1', U_1 und U_1' in ω_1, ω_1' entsprechend sind. In dieser Kollineation entsprechen dann der Gerade $\omega\omega_1$ (durch O) und ihren Schnittpunkten mit TU, T_1U_1, zu Σ gerechnet, die Gerade $\omega'\omega_1'$ (durch O') und ihre Schnittpunkte mit $T'U'$, $T_1'U_1'$, in Σ', und da diese Punkte und die Punkte O, O' in den Felder-Kollineationen und in der räumlichen Kollineation einander entsprechen, so sind die nämlichen Punkte von $\omega\omega_1$ und $\omega'\omega_1'$ in jenen und in dieser entsprechend. Weil nun die räumliche Kollineation auch ihrerseits die Felder in den entsprechenden Ebenen $\omega = OTU$ und $\omega' = O'T'U'$ kollinear macht, und da in dieser Kollineation auch T, T'; U, U' und irgend zwei Paare entsprechender Punkte auf $\omega\omega_1$, $\omega'\omega_1'$ homolog sind, so ist sie mit der vorhinigen Kollineation identisch; und dasselbe gilt bei ω_1, ω_1'.

Die kollinearen Felder in ω, ω'; ω_1, ω_1', die sich oben durch die Spuren der Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden vorausgesetzten kollinearen Bündel O, O' ergeben haben, sind auch homologe Gebilde der beiden kollinearen Räume Σ, Σ'.

Jeder Strahl von N enthält zwei Paare entsprechender Punkte von Σ, Σ', nämlich eins in ω, ω' und eins in ω_1, ω_1', entspricht daher sich selbst. Umgekehrt, jede sich selbst entsprechende Gerade der Kollineation zwischen Σ, Σ' trifft die homologen Ebenen ω, ω' in zwei entsprechenden Punkten, fällt daher mit dem Strahle von N zusammen, der diese Punkte verbindet.

So haben wir eine Kollineation zweier Räume erhalten, in welcher alle Strahlen eines Netzes sich selbst entsprechen.

Die Leitgeraden u, v von N sind sich selbst entsprechend. Sie liegen bzw. in den sich selbst entsprechenden Ebenen ϵ, φ der kollinearen

Bündel O, O'; jede von diesen enthält einen Büschel von Strahlen des Netzes, daher sind die Geraden, welche sie in ω und ω' einschneidet, da sie von den Spuren dieser Netzstrahlen durchlaufen werden, in der Kollineation der Felder ω und ω' entsprechend, und ebenso die in ω_1, ω_1' eingeschnittenen Geraden; also sind diese Geraden auch in der Kollineation der Räume entsprechend. Indem so ϵ und ebenso φ zwei Geraden aus Σ und zugleich die entsprechenden aus Σ' enthält, wird sie sich selbst entsprechend; das gilt dann auch für jeden Punkt von u und v, da in ihm eine sich selbst entsprechende Ebene von sich selbst entsprechenden Strahlen getroffen wird. Damit ist die Verwandtschaft als Kollineation mit Axen erkannt.

Es liegen zwei Flächen 2. Grades φ, φ' vor, welche sich 478
in einem Vierseit durchschneiden; u und v seien die in bezug auf die Flächen polaren Diagonalen des Vierseits, welche konjugiert imaginär sein können, wenn nämlich die einen Gegenseiten reell, die andern konjugiert imaginär sind Eine Ebene ϵ, durch eine von ihnen, etwa v, gelegt, schneidet Kegelschnitte aus, welche sich in den Ecken auf v berühren; Berührungspol ist $U = \epsilon u$. Folglich werden diese Kegelschnitte und daher auch die Flächen von allen Strahlen des Büschels (U, ϵ) nach demselben Doppelverhältnisse geschnitten (Nr. 302). Sind nun l und l_1 zwei beliebige Strahlen des Netzes $[u, v]$, so sei l' der gemeinsame Strahl der Büschel des Netzes in den Ebenen lu, l_1v; folglich sind die Doppelverhältnisse auf l und l_1 dem auf l' gleich.

Es werden also die beiden Flächen von allen Strahlen des Netzes $[u, v]$ nach demselben Doppelverhältnis $(ABA'B')$ geschnitten.

In jeder Ebene durch v sind die beiden Kegelschnitte in zwei Homologien entsprechend, deren Axe und Zentrum v und U sind; ihre Invarianten

$$\lambda = (UVAA') = (UVBB') \quad \text{und} \quad -\lambda = (UVAB') = (UVBA')$$

befinden sich zu der eben erwähnten Konstante in der Beziehung (Nr. 302):

$$(ABA'B) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2;$$

woran die Vertauschung von U, V oder von λ und $\frac{1}{\lambda}$ nichts ändert.

Daraus ergeben sich für die Flächen φ, φ' zwei Kollineationen mit den Axen u, v und den Invarianten $\lambda, -\lambda$, in denen sie einander entsprechen.

Ist $\lambda = i$, so erhalten wir wiederum zwei harmonisch zugeordnete Flächen 2. Grades, welche von allen Strahlen des Netzes $[u, v]$ harmonisch geschnitten werden: die andere Art derartiger Flächen, die wir durch die Bezeichnung: mit Vierseits-Durchschnitt von der früheren (Nr. 474): mit konischer Berührung unterscheiden.

Man kann auch unterscheidend sagen: harmonisch zugeordnet in bezug auf die Diagonalen u, v im jetzigen Falle und in bezug auf S und σ im früheren.

In jeder Ebene durch u oder v entstehen harmonisch zugeordnete Kegelschnitte; in Nr. 303 haben wir gelernt, wie aus dem einen der andere zu konstruieren ist. Da sie zu den ausgearteten Elementen ihrer Büschel-Schar harmonisch sind, so gilt dies auch für die harmonisch zugeordneten Flächen, in deren Büschel-Schar die ausgearteten Elemente Ebenenpaare sind je mit einer Diagonale als Doppellinie, zugleich Punktepaare mit der andern Diagonale als Doppellinie.

Auf jedem Strahle des Netzes $[u, v]$ befinden sich drei gegenseitig harmonische Paare; von ihnen besteht immer eins aus konjugiert imaginären Punkten. Wenn die Diagonalen reell sind, so trifft jeder Strahl des Netzes die beiden Flächen ungleichartig.

Eine hyperbolische Fläche 2. Grades wird von zwei Polaren, wie u und v, gleichartig geschnitten, von beiden reell oder von beiden imaginär, eine elliptische ungleichartig. Also müssen die beiden Flächen φ und φ', wenn sie reell sind, gleichartig sein, beide hyperbolisch oder beide elliptisch; weil sie dieselben Schnitte mit u, v haben.

Wenn eine Fläche, etwa φ', nicht reell ist, so daß sie von allen Strahlen des Netzes imaginär getroffen wird, so wird die andere φ reell getroffen und ist reell und zwar hyperbolisch, weil sie imaginäre Schnitte mit u, v hat. Umgekehrt, wenn φ hyperbolisch ist und imaginäre Schnitte mit u und v hat, so liegen diese polaren Geraden zu verschiedenen Seiten von ihr und alle Strahlen des Netzes treffen φ reell, mithin φ' imaginär, also ist φ' imaginär; denn anderenfalls würde jeder reelle Punkt von φ' einen reell treffenden Netzstrahl aussenden.

Wenn u, v reell treffen, was zur Folge hat, daß beide Flächen reell und hyperbolisch sind, so enthält das Netz zweierlei Strahlen: φ reell und φ' imaginär schneidende und φ imaginär, φ' reell schneidende. Zwei Punkte auf u, v, die auf verschiedenen Seiten von φ oder φ' liegen, müssen dann auf derselben Seite von φ' oder φ liegen.

Trifft nur eine der Polaren u, v, etwa u, reell, so sind beide Flächen reell und elliptisch. Diejenige der beiden Strecken auf u, welche Innenstrecke von φ ist und daher von lauter φ reell schneidenden Netzstrahlen getroffen wird, kann nicht Innenstrecke für φ' sein. Daraus folgt, daß höchstens eine der Flächen Ellipsoid ist, also sind beide Flächen zweimantelige Hyperboloide, oder nur eine und die andere Ellipsoid. Jedenfalls liegen sie in verschiedenen Flächenwinkeln der Tangentialebenen in den Schnitten von u.

Wenn aber die Diagonalen u, v konjugiert imaginär sind, was reelle hyperbolische Flächen voraussetzt, so treffen alle Strahlen des dann noch reellen Netzes beide Flächen reell.

Wir haben im vorangehenden zwei durchweg involutorische 479
räumliche Kollineationen kennen gelernt: die involutorische Homologie und die windschiefe Involution. Es fragt sich, ob dies die einzigen durchweg involutorischen Kollineationen sind.

Es liege eine durchweg involutorische Kollineation vor. Wenn $X \equiv Y'$ und $X' \equiv Y$ sich involutorisch entsprechen, so ist die Verbindungslinie sich selbst entsprechend, enthält zu jedem ihrer Punkte den entsprechenden, und das eine involutorische Paar bewirkt, daß in den konjektiven Punktreihen auf ihr alle Paare involutorisch sind. Also trägt jede Gerade, auf der ein involutorisches Paar liegt, eine Involution von solchen Paaren. Es gibt daher, wegen der ∞^3 Paare, ∞^2 solche Geraden. Diese sind so verteilt, daß durch jeden Punkt des Raums eine geht; sie verbindet ihn mit seinem involutorisch entsprechenden Punkte. Sie bilden also eine Kongruenz 1. Ordnung. Wenn in eine Ebene zwei fallen, so wird dieselbe sich selbst entsprechend, trägt also eine ebene Kollineation von lauter sich involutorisch entsprechenden Punkten, d. h. eine involutorische (ebene) Homologie und alle Strahlen durch das Zentrum gehören zur Kongruenz. Jede zwei sich schneidende Strahlen unserer Kongruenz ziehen sofort einen ganzen Strahlenbüschel nach sich, der zu ihr gehört. Es sei V der Scheitel dieses Büschels, das Zentrum der involutorischen Homologie in der Ebene, u die Axe derselben. Ein außerhalb der Ebene liegender Strahl der Kongruenz schneidet sie in einem sich selbst entsprechenden Punkte, also entweder in V oder auf u. Wenn es nur Strahlen in der Kongruenz gibt, welche das erstere tun, so hat die Kollineation einen Bündel von lauter sich selbst entsprechenden Elementen, also auch ein solches Feld, ist Homologie und involutorische Homologie. Gibt es aber Strahlen der Kongruenz, welche u treffen, so liefert jeder solche Strahl, zusammen mit dem Strahl des vorherigen Büschels, der durch den Treffpunkt U geht, eine Ebene, welche wieder eine involutorische ebene Homologie trägt, mit U als Zentrum und einer durch V gehenden Axe v. Damit haben wir zwei Geraden u, v mit lauter sich selbst entsprechenden Punkten, also eine Kollineation mit Axen, demnach die windschiefe Involution. Nehmen wir an, daß es in der Kongruenz keine zwei sich schneidenden (reellen) Geraden gibt, so bestimmen drei beliebige Strahlen p, q, r aus ihr, als Leitgeraden, eine Regelschar $[pqr]$. Jede Gerade x aus dieser hat eine entsprechende x', die ebenfalls zu ihr gehört; denn den Punkten xp, xq, xr entsprechen auch auf p, q, r gelegene Punkte; also bilden die entsprechenden Geraden x, x' in $[pqr]$ eine Involution. Die Punkte der Doppelstrahlen u, v, sind, weil in jedem sich zwei selbst entsprechende Geraden schneiden, sich selbst entsprechend; wir sehen, es liegt wieder windschiefe Involution vor, aber mit imaginären Axen, weil sonst die Punkte derselben Schnittpunkte reeller Strahlen der Kongruenz wären, welche wir jetzt nicht voraussetzen.

Das Ergebnis der Betrachtung ist, daß nur die involutorische Homologie und die windschiefe Involution durchweg involutorische Kollineationen sind.

Die Strahlen, welche Involutionen entsprechender Punkte tragen, bilden im ersten Falle einen Bündel, d. i. eine Kongruenz 1. Ordnung 0. Klasse, im zweiten Falle ein Strahlennetz (mit reellen oder imaginären Leitgeraden), eine Kongruenz 1. Ordnung 1. Klasse. Das sind auch die beiden einzigen Kongruenzen 1. Ordnung, deren Klasse 1 nicht übersteigt.

Die Strahlen des Netzes haben auch die duale Eigenschaft, daß sie Involutionen entsprechender Ebenen tragen; während bei der involutorischen Homologie diese Strahlen eine andere Kongruenz bilden, 0. Ordnung 1. Klasse, das Strahlenfeld in der Ebene der Homologie, das dem Bündel um das Zentrum dual gegenübersteht. Die involutorische Homologie ist vollständig und eindeutig durch das Zentrum S und die Ebene σ bestimmt, die windschiefe Involution durch die Axen u, v; so daß wir sie durch diese Elemente bezeichnen können: (S, σ), (u, v).

Aus der harmonischen Eigenschaft von Pol und Polarebene in bezug auf eine Fläche 2. Grades folgt:

Eine Fläche 2. Grades wird durch jede involutorische Homologie, deren Zentrum und Ebene, und durch jede windschiefe Involution, deren Axen in bezug auf sie polar sind, in sich selbst transformiert.

480 Man kann eine beliebige Kollineation:

$$\Gamma \quad \begin{vmatrix} A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & E' \end{vmatrix}$$

in eine Folge von 4 Homologien zerlegen.

Die erste Homologie H_1 haben eine beliebige Ebene σ_1, ihr Zentrum S_1 liege auf AA' und in ihr seien A und A' entsprechend; sie führe A, B, C, D, E in A', B_1, C_1, D_1, E_1 über. Es seien $(A'B_1, C_1D_1E_1) = F_1$ und $(A'B', C'D'E') = F'$, so liegen $A'B'F'$ und $A'B_1F_1$ in einer Ebene, also schneiden sich $B'B_1$ und $F'F_1$: in S_2. Wir nehmen nun eine Homologie H_2 mit dem Zentrum S_2, einer Ebene σ_2, die durch A' geht, in welcher B_1 und B' entsprechend sind. Wenn σ_2 die B_1B' und F_1F' in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{F}$ schneidet, so sind die Würfe $S_2\mathfrak{B}B_1B'$ und $S_2\mathfrak{F}F_1F'$ perspektiv; also gehen durch die zweite Homologie A', B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 in A', B', C_2, D_2, E_2, F' über. Nunmehr sei $(A'C_2, B_2D_2E_2) = G_2$ und $(A'C', B'D'E') = G'$. Es entsteht wiederum ein Schnitt $(C_2C', G_2G') = S_3$; die dritte Homologie H_3 habe diesen Punkt S_3 zum Zentrum; ihre Ebene gehe durch die Gerade $A'B'F'$; schneidet sie C_2C', G_2G' in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$, so haben wir die perspektiven Würfe $S_3\mathfrak{C}C_2C'$ und $S_3\mathfrak{G}G_2G'$; lassen wir also C_2, C' entsprechend sein, so sind es auch G_2, G'; H_3 führt also A', B', C_2, D_2, E_2, F', G_2 in A', B', C', D_3, E_3, F', G' über. Das Produkt der drei Homologien ist demnach

$$\mathsf{H}_{123} \quad \begin{vmatrix} A & B & C & D & E & F & G \\ A' & B' & C' & D_3 & E_3 & F' & G' \end{vmatrix}.$$

In Γ sind auch F und F', G und G' entsprechend; also muß noch mit

$$\mathsf{H}_4 \quad \begin{vmatrix} A' & B' & C' & D_3 & E_3 & F' & G' \\ A' & B' & C' & D' & E' & F' & G' \end{vmatrix}$$

multipliziert werden, damit sich Γ ergebe: $\mathsf{H}_{123} \cdot \mathsf{H}_4 = \Gamma$.

Aus $\mathsf{H}_4 = \Gamma \cdot \mathsf{H}_{123}^{-1}$ ergibt sich, daß H_4 Kollineation ist; in ihr entspricht die Ebene σ_4 der beiden Geraden $A'B'F'$, $A'C'G'$ sich derartig selbst, daß die vier Punkte B', C', F', G', von denen keine drei in gerader Linie liegen, sich selbst entsprechend sind. Sie ist daher eine Homologie mit dieser Ebene σ_4. Daher schneiden sich D_3D' und E_3E' und der Schnitt ist das Zentrum.

§ 73. Affinität, Ähnlichkeit, Kongruenz im Raume.

Zwei kollineare Räume Σ, Σ' heißen affin, wenn die unendlich 481
ferne Ebene sich selbst entspricht. Sie ist dann eine Ebene des Koizidenztetraeders und die Gegenecke ist, im allgemeinen, der einzige endliche Koinzidenzpunkt T.

Jede zwei entsprechenden Ebenen tragen affine Felder, jede zwei entsprechenden Geraden ähnliche Punktreihen, parallelen Geraden entsprechen parallele Geraden, jeder Richtung also eine Richtung, und zu zwei entsprechenden Richtungen gehört ein konstantes Verhältnis entsprechender Strecken von diesen Richtungen. Ebenso entsprechen parallelen Ebenen parallele Ebenen, also jeder Stellung eine Stellung. Einem Prisma entspricht also ein Prisma; daraus folgt, daß das konstante Verhältnis der Inhalte entsprechender Figuren in entsprechenden und daher affinen Feldern bleibt, wenn man in parallele entsprechende Ebenen übergeht. Also zu jeden zwei entsprechenden Stellungen gehört ein solches konstantes Verhältnis der Inhalte entsprechender Figuren. Diese beiden Verhältnisse ändern sich aber im allgemeinen mit der Richtung, der Stellung. Ganz konstant hingegen das Verhältnis entsprechender Körperinhalte; es genügt, dies für Tetraeder zu beweisen.

Nach Möbius gibt man auch den Inhalten von Tetraedern, entsprechend der Benennung, ein Vorzeichen. Je nachdem, aus einer der Ecken, etwa der vierten Ecke D betrachtet, das Dreieck ABC der drei andern Ecken in einem bestimmten Sinne oder dem entgegengesetzten umlaufen ist, hat das Tetraeder $ABCD$ das positive oder negative Vorzeichen. Daher haben zwei Tetraeder $ABCD$ und $ABCE$ gleiches oder ungleiches Vorzeichen, je nachdem D, E auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von ABC liegen. Sei ferner F der Schnitt von DE und ABC, so haben auch DF, EF dasselbe Vorzeichen, bzw. verschiedene. Und da die Inhalte sich wie diese den Höhen proportionalen Strecken verhalten, so gilt

$$\frac{ABCD}{ABCE} = \frac{DF}{EF},$$

auch dem Vorzeichen nach.

Gehören nun diese sechs Punkte dem einen von zwei kollinearen Räumen an und sind ihnen $A', \ldots F'$ im andern entsprechend, wozu auch F' der Schnitt von $D'E'$ mit $A'B'C'$ sein muß, so ist:

$$\frac{A'B'C'D'}{A'B'C'E'} = \frac{D'F'}{E'F'}.$$

In affinen Räumen aber ist $\frac{DF}{EF} = \frac{D'F'}{E'F'}$; also ist auch

$$\frac{ABCD}{ABCE} = \frac{A'B'C'D'}{A'B'C'E'} \quad \text{oder} \quad \frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{ABCE}{A'B'C'E'}.$$

Weil diese Formel auch für die Vorzeichen gilt, so liegen die Tetraeder des einen Raumes in derselben Weise zur gemeinsamen Grundfläche, wie die entsprechenden des andern zu der ihrigen. Wenn nun $ABCD$ und $EFGH$ zwei beliebige Tetraeder von Σ sind und $A'B'C'D'$, $E'F'G'H'$ ihre entsprechenden in Σ', so ist:

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{ABCH}{A'B'C'H'} = \frac{ABGH}{A'B'G'H'} = \frac{AFGH}{A'F'G'H} = \frac{EFGH}{E'F'G'H'}.$$

Jede Vertauschung zweier benachbarten Ecken ändert das Vorzeichen; daher ist z. B.

$$ABGH = -ABHG, \quad AFGH = -AGFH = AGHF.$$

Damit ist die Konstanz des Verhältnisses entsprechender Tetraeder bewiesen; aus ihr folgt die für entsprechende Prismen und andere Körper.

Hat das konstante Verhältnis den absoluten Wert 1, so hat man den Spezialfall der Gleichheit.[1])

---

1) Möbius, Baryzentr. Kalkül (Ges. Werke Bd. I) § 161—171.

Je nachdem das konstante Verhältnis positiv oder negativ ist, hat man gleichsinnige oder ungleichsinnige Affinität.

Ähnliche Folgerungen über größte und kleinste Figuren wie bei der Affinität von Feldern (Nr. 286) können auch hier gemacht werden.

Die Affinität ist eindeutig durch vier Paare entsprechender Punkte oder Ebenen oder zwei entsprechende Tetraeder bestimmt; zu ihnen kommt, als von selbst gegeben, die sich selbst entsprechende unendlich ferne Ebene.

Die Affinität ist daher eine dreifache Bedingung.

Der Satz, daß eine Kollineation in jener Ebene im allgemeinen zwei reelle entsprechende Dreiecke besitzt, welche Polardreiecke des absoluten Polarfeldes sind (Nr. 340), bedeutet für die Affinität, daß jeder der beiden Räume drei reelle zueinander rechtwinklige Richtungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ enthält, denen ebensolche $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ im andern Raume korrespondieren. Die Axen eines Ellipsoides, dem im andern Raume eine Kugel entspricht, liefern sie; denn dem Mittelpunkt und drei konjugierten Durchmessern einer Fläche 2. Grades entsprechen ebensolche Elemente der korrespondierenden Fläche.

Es seien $a : a'$, $b : b'$, $c : c'$ die Ähnlichkeitsverhältnisse für die drei ausgezeichneten Paare entsprechender Richtungen. Einem Ellipsoid von Σ, dessen Axen die Richtungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ haben, entspricht ein Ellipsoid in Σ' mit Axen von den Richtungen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$; die Halbaxen haben jene Verhältnisse. Sind nun P und P' zwei entsprechende Punkte der Ellipsoide, so sind, wenn diese Axen zu Koordinatenaxen genommen werden, auch die Parallelebenen durch P und P' zu entsprechenden Koordinatenebenen entsprechend; also haben die Koordinaten von P und P' jene Verhältnisse:

$$x : x' = a : a', \quad y : y' = b : b', \quad z : z' = c : c'.$$

Punkte der Ellipsoide, welche in der Affinität sich entsprechen, sind daher korrespondierend im Sinne Ivorys.[1])

Die Ivorysche Zuordnung korrespondierender Punkte auf zwei Ellipsoiden ist nichts anderes als Affinität dieser Flächen, bei welcher ihre Axen homolog sind.

Das läßt sich erweitern auf die andern Flächen 2. Grades; einem Paare konjugierter Punkte C, C_1 auf der c-Axe der einen Fläche entspricht ein Paar konjugierter Punkte C', C_1' auf der c'-Axe der andern; also ist

$$MC : M'C' = MC_1 : M'C_1' = c : c' = \sqrt{MC \cdot MC_1} : \sqrt{M'C' \cdot M'C_1'};$$

dies sind aber die beiden (reellen oder imaginären) Halbaxen.

Affine Flächen 2. Grades treten bei einem interessanten kine-

1) Ivory, Über die Anziehung homogener Ellipsoide, Philos. Transactions 1809, Klassiker der exakten Wissensch. Nr. 19 S. 32.

matischen Probleme auf. Wenn eine Gerade g sich so bewegt, daß drei Punkte A, B, C von ihr in drei Ebenen α, β, γ zu bleiben gezwungen sind, so beschreiben ihre übrigen Punkte affine konzentrische Ellipsoide, und wenn vier Punkte in Ebenen zu bleiben genötigt werden, entstehen durch die weiteren Punkte affine Ellipsen.[1])

Ferner, wir fanden (Nr. 344), die Kanten aller dreirechtwinkligen Dreikante, die einen Punkt P einer Fläche 2. Grades zum gemeinsamen Scheitel haben, stoßen je in sie drei Punkte ein, deren Verbindungsebene durch einen festen Punkt P' auf der Normale von P geht.

P' beschreibt eine koaxiale Fläche 2. Grades, die zu der gegebenen affin ist. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Halbaxen-Quadrate der letzteren und x, y, z, in bezug auf die Axen, die Koordinaten von P, so sind diejenigen x', y', z' von P':

$$x' = \frac{\mathfrak{ca} + \mathfrak{ab} - \mathfrak{bc}}{\mathfrak{bc} + \mathfrak{ca} + \mathfrak{ab}} x,$$

$$y' = \frac{\mathfrak{ab} + \mathfrak{bc} - \mathfrak{ca}}{\mathfrak{bc} + \mathfrak{ca} + \mathfrak{ab}} y,$$

$$z' = \frac{\mathfrak{bc} + \mathfrak{ca} - \mathfrak{ab}}{\mathfrak{bc} + \mathfrak{ca} + \mathfrak{ab}} z.$$ [2])

482 Wenn in einer Affinität einmal zwei entsprechende Tetraeder ähnlich sind, so sind durchweg entsprechende Tetraeder ähnlich.

Zwei Tetraeder sind ähnlich, wenn die Kantenwinkel an einer Ecke des einen gleich und die von ihr ausgehenden Kanten proportional sind den entsprechenden Stücken des andern. Seien also die gegebenen ähnlichen Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$ oder $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, so schneiden wir mit zwei entsprechenden Ebenen ξ, ξ' die von A auslaufenden Kanten AB, AC, AD in E, F, G und die entsprechenden in E', F', G'; wegen der ähnlichen Punktreihen ist:

$$AB : A'B' = AE : A'E', \quad AC : A'C' = AF : A'F',$$
$$AD : A'D' = AG : A'G';$$

weil aber $ABCD \sim A'B'C'D'$, ist:

---

1) Vgl. des weiteren Liniengeometrie Bd. II (1893) Nr. 471 ff. — In den Principes et développements de Géométrie cinématique (1894) S. 169 ff. hat Mannheim auch mit diesen Fragen sich beschäftigt. Merkwürdig ist, daß, obwohl er mit Affinitätseigenschaften zu tun hat, Mannheim das Wort „Affinität" niemals ausspricht, und an die von der Gerade beschriebenen Örter — eine Kongruenz 6. Ordnung 2. Klasse, eine Regelfläche 4. Grades — gar nicht denkt.

2) In bezug auf das ebene Problem vgl. Steiner, Gesamm. Werke Bd II S. 432 Nr. 3.

also:
$$AB : A'B' = AC : A'C' = AD : A'D';$$
$$AE : A'E' = AF : A'F' = AG : A'G'.$$

Wiederum ist (vgl. Nr. 287), weil die Proportionalität der ähnlichen Punktreihen auch dem Vorzeichen nach gilt, $\sphericalangle EAF = E'A'F'$, $\sphericalangle EAG = E'A'G'$, $\sphericalangle FAG = F'A'G'$. Mithin ist:

$$\text{Tetr. } \beta\gamma\delta\xi \sim \beta'\gamma'\delta'\xi'.$$

Wir schließen weiter wie in Nr. 287 und erhalten:

$$\xi\eta\zeta\tau \sim \xi'\eta'\zeta'\tau'.$$

Von der Ähnlichkeit entsprechender Tetraeder schließt man, wegen der gleichen Lagerung zweier aneinander stoßender Tetraeder in dem einen von zwei affinen Räumen und ihren entsprechenden im andern, daß auch andere entsprechende Körper ähnlich sind.

In diesem speziellen Falle der Affinität, der räumlichen Ähnlichkeit, ist das Verhältnis aller entsprechenden Strecken, ebenso das aller entsprechenden Flächen konstant, und die drei Konstanten sind k, k^2, k^3.

Entsprechende Winkel von Strahlen oder Ebenen sind gleich, entsprechende Strahlen- und Ebenenbüschel sind gleich, entsprechende Bündel sind kongruent.

Man kann zwei Räume so affin machen, daß zwei nicht ähnliche Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$, in denen jedoch die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ ähnlich sind, einander entsprechen. Die Räume sind nicht ähnlich, aber die Felder in den Ebenen ABC und $A'B'C'$ sind es. Wir schneiden eine Parallelebene zu ABC mit einem prismatischen Raume über ABC in DEF, dem $D'E'F'$ entspreche; den Parallelen AD, BE, CF entsprechen die Parallelen $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$; es sind also auch DEF und $D'E'F'$ und ihre Felder ähnlich. Die Möglichkeit zweier entsprechender Stellungen mit ähnlichen Feldern in entsprechenden Ebenen bei affinen nicht ähnlichen Räumen ist vorhanden. In diesen ähnlichen Feldern sind dann auch entsprechende Strahlenbüschel gleich. Umgekehrt, gleiche entsprechende Strahlenbüschel in affinen Räumen bedingen ähnliche Felder (Nr. 287).

In ähnlichen Räumen entspricht das absolute Polarfeld und also auch seine Basiskurve, die absolute Kurve, sich selbst; d. h. zwei entsprechende Elemente des absoluten Polarfeldes gehen in zwei ebenfalls entsprechende Elemente desselben über. In der Tat, ein Büschel von Parallelebenen und der Bündel der zu ihnen senkrechten Geraden gehen über, wegen der Affinität, in einen Büschel von Parallelebenen und einen Bündel von Parallelstrahlen; wegen der Ähnlichkeit bleibt aber auch der rechte Winkel erhalten. Die unendlich fernen Elemente sowohl jener Ebenen und Strahlen, als auch dieser sind polar im absoluten Polarfelde.

Und umgekehrt, wenn bei einer räumlichen Kollineation das absolute Polarfeld in sich selbst übergeht, so handelt es sich zunächst um Affinität, weil die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht. Der absoluten Involution einer jeden Ebene entspricht die absolute Involution der entsprechenden Ebene; die Felder in je zwei entsprechenden Ebenen sind demzufolge ähnlich, also jedem gleichseitigen Dreiecke entspricht ein ebensolches, daher einem regelmäßigen Tetraeder ein Tetraeder mit vier gleichseitigen Dreiecken, also ein regelmäßiges und demnach jenem ähnliches Tetraeder. Die Verwandtschaft ist Ähnlichkeit.

Jede Kollineation, welche die absolute Kurve (und ihr Polarfeld) in sich transformiert, ist Ähnlichkeit.

483 Der endliche sich selbst entsprechende Punkt T ähnlicher Räume heißt Ähnlichkeitspunkt. Von den drei unendlich fernen sind zwei V, W auf der absoluten Kurve gelegen; denn die Kollineation in der unendlich fernen sich selbst entsprechenden Ebene ist eine Hermitesche, weil die absolute Kurve in sich selbst übergeht und zwei Koinzidenzpunkte enthalten muß. Sie berührt ihre Verbindungslinien mit dem dritten unendlich fernen Koinzidenzpunkte U. Die konjektiven Ebenenbüschel um die Verbindungslinie der beiden reellen Koinzidenzpunkte T, U sind daher, weil sie zwei die absolute Kurve berührende sich selbst entsprechende Ebenen enthalten, gleich und gleichsinnig (Nr. 338). Die zweite reelle sich selbst entsprechende Gerade VW ist den zu TU normalen Ebenen gemein.

Durch Drehung des einen Raums um TU kann man erreichen, daß jede zwei entsprechende Punkte in derselben Ebene durch TU liegen. Durch diese Drehung entsteht im Bündel T eine Kollineation mit einem Büschel von lauter sich selbst entsprechenden Ebenen, also eine Homologie: Axe ist TU, Ebene TVW. Es seien A und A' zwei entsprechende Punkte auf der Drehaxe TU, B und B' irgend zwei entsprechende Punkte; dann ist, wegen der Ähnlichkeit. $\sphericalangle A'TB' = ATB$. Wir können jene Drehung in zwei Weisen vollziehen, um den spitzen oder stumpfen Winkel entsprechender Ebenen; wir nehmen diejenige vor, durch welche B, B' mit T in eine Gerade gebracht werden. Dann hat die durch diese Drehung erzielte Homologie einen nicht mit der Axe identischen und nicht in die Ebene der Homologie fallenden sich selbst entsprechenden Strahl TBB'; folglich ist sie Identität. Es liegt nun räumliche Homologie vor, weil ein Bündel mit lauter sich selbst entsprechenden Elementen vorhanden ist: das Zentrum ist T, die Ebene der Homologie die unendlich ferne. Jede zwei entsprechende Punkte liegen mit T in gerader Linie, entsprechende Geraden oder Ebenen sind parallel. Wir haben homologische Ähnlichkeit oder Ähnlichkeit in ähnlicher Lage, und es sind wieder die beiden Fälle der direkten und der inversen Lage zu unterscheiden, je nachdem entsprechende Punkte auf derselben Seite von T liegen oder auf verschiedenen. Der eben erwähnte Parallelismus entsprechender Geraden fordert, daß, wenn die eine oder andere Lage einmal eintritt, sie durchweg statt hat. Bei der direkten Lage haben die Tetraeder $TABC$, $TA'B'C'$ gleiches, bei der inversen Lage ungleiches Vorzeichen; und das gilt auch, ehe die ähnliche Lage eingetreten ist.

Wenn das Ähnlichkeitsverhältnis k entsprechender Strecken gleich 1 ist, liegt Kongruenz vor. Da kommt es darauf an, wie die gleichen Punktreihen auf der sich selbst entsprechenden endlichen, reellen Gerade beschaffen sind. Sind sie ungleichlaufend, so bilden sie eine gleichseitig-hyperbolische Involution mit einem endlichen Koinzidenzpunkt T und dem unendlich fernen U. Diejenige Drehung um diese Gerade, durch welche alle Geraden aus T mit ihren entsprechenden vereinigt werden, bewirkt dann, daß jede zwei entsprechenden Punkte zu beiden Seiten gleich weit entfernt vom Punkt T sind; wir haben räumliche Symmetrie in bezug auf diesen Punkt: involutorische Homologie mit endlichem Zentrum T und unendlich ferner Ebene.

Sind aber die gleichen Punktreihen auf jener Gerade gleichlaufend, so muß auch der sonst endliche Koinzidenzpunkt T ins Unendliche fallen; er hat sich mit U so vereinigt, daß immer noch eine bestimmte Verbindungslinie vorliegt. Und die Drehung um diese bewirkt räumliche Homologie mit einer Ebene und einem Zentrum, welche beide unendlich fern sind und daher inzidieren.

Wenn zwei ähnliche Dreiecke ABC, $A'B'C'$ gegeben sind, so 484
kann man zu dem Punkte D zwei Punkte D' konstruieren, so daß die Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ ähnlich und in dem einen Falle gleichsinnig, im andern ungleichsinnig sind. Konstruiert man weitere entsprechende Punkte, so muß man gleichartig fortschreiten, durchweg gleichsinnige oder durchweg ungleichsinnige Tetraeder über ABC und $A'B'C'$ (oder andern schon erhaltenen entsprechenden Dreiecken) aufbauen; denn wenn $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gleichsinnig ähnlich wären, $ABCE$, $A'B'C'E'$ aber ungleichsinnig, so würden z. B. $ABDE$ und $A'B'D'E'$ nicht ähnlich sein; auf DE, $D'E'$ befänden sich keine ähnlichen Punktreihen.

Wir können also aus den gegebenen ähnlichen Dreiecken ABC, $A'B'C'$ zwei räumliche Ähnlichkeiten herstellen, eine gleichsinnige und eine ungleichsinnige.

Ist ABC gegeben, so können A', B' willkürlich, jeder in ∞^3 Lagen gegeben werden, C' kann nur in ∞^1 Lagen gewählt werden, so daß die Mannigfaltigkeit 7 in den gegebenen Stücken liegt. Folglich sind in der Eigenschaft der Ähnlichkeit — die wir als die definierende ansehen können —, daß die absolute Kurve sich selbst entspricht, acht Bedingungen enthalten. Es ist eine achtfache Bedingung für die Kollineation, daß einem gegebenen Kegelschnitte ein anderer gegebener entspricht, insbesondere jener sich selbst, und hängt diese Vielfachheit mit der Mannigfaltigkeit 8 der Kegelschnitte zusammen.

Man kann dies auch durch Zerlegung erhalten. Die Affinität ist eine dreifache Bedingung, die Ähnlichkeit eines Tetraeders zu einem gegebenen eine fünffache; denn es gibt unter den ∞^{12} Tetraedern ∞^7, die einem gegebenen ähnlich sind; man hat für das Bestehen von drei Winkelgleichheiten und zwei Proportionen zu sorgen.

Jetzt fragt es sich, wie zu den zwei ähnlichen Dreiecken ABC, $A'B'C'$ in den beiden Ähnlichkeiten die Axen TU und die Punkte T gefunden werden. Wir machen die beiden kongruenten Bündel um C und C', welche zu der einen oder andern Ähnlichkeit gehören, durch Parallelverlegung nach O konzentrisch; die parallelen Halbstrahlen durch O zu CA, CB, bzw. $C'A'$, $C'B'$ geben zwei gleiche entsprechende Winkel ab, $a'b'$.

Sind X, X' weitere entsprechende Punkte der gleichsinnigen Ähnlichkeit, so sind die kongruenten Ecken $C(A, B, X)$ und $C'(A', B', X')$ gleichsinnig, also, wenn x, x' die parallelen Halbstrahlen aus O zu CX, $C'X'$ sind, auch die Ecken abx, $a'b'x'$. Wir erhalten daher (Nr. 358) den reellen Koinzidenzstrahl der beiden konzentrischen kongruenten Bündel O als Schnittlinie der beiden Ebenen α, β, welche die Winkel aa', bb' senkrecht halbieren, und in der zu ihr senkrechten Ebene die reelle Koinzidenzebene. Die unendlich fernen Elemente dieses Strahls und dieser Ebene sind U_1, $V_1 W_1$ für die gleichsinnige räumliche Ähnlichkeit, wobei V_1, W_1 auf der absoluten Kurve liegen.

Bei der ungleichsinnigen Ähnlichkeit hat man den Schnittstrahl der bzw. zu α, β normalen Ebenen α_1, β_1, welche die Winkel aa_1', bb_1' senkrecht halbieren, wo a_1', b_1' die Ergänzungen der Halbstrahlen a', b' sind, und die zu ihm senkrechte Ebene zu konstruieren. Ihre unendlich fernen Elemente sind U_2, $V_2 W_2$ für diese Ähnlichkeit.

Wir haben nun $U_1 T_1$ und T_1, $U_2 T_2$ und T_2 zu konstruieren und können uns meistens mit der Bezeichnung UT, T begnügen, weil wir beide Fälle zusammen behandeln wollen. Es wird aber bisweilen notwendig sein, den unendlich fernen Punkt U in dem einen Sinne von dem im andern Sinne zu unterscheiden: U^+, U^-. Weil U sich selbst entspricht, sind die prismatischen Räume $U(A, B, C)$ und $U(A', B', C')$ ähnlich, wobei jedoch noch zu unterscheiden ist, ob beidemal U^+ oder U^-, oder das eine Mal U^+, das andere Mal U^- zu setzen ist. Jedenfalls sind die Normalschnitte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ (in derselben Ebene) ähnlich.

Wir wissen nun (Nr. 483), daß durch eine Drehung eines der beiden Räume Σ, Σ', etwa des Σ', um die Axe TU die Punkte A', B', C' in diejenigen Ebenen durch die Axe gelangen, in denen bzw. A, B, C liegen; da die Kanten der prismatischen Räume zur Drehaxe parallel sind, so gilt jenes auch für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$. Das fordert aber für die beiden in derselben Ebene gelegenen Dreiecke, daß sie gleich umlaufen sind. Folglich erscheinen auch ABC und $A'B'C'$, beide aus U^+ oder beide aus U^- betrachtet, gleich umlaufen, und ungleich umlaufen, wenn das eine aus U^+, das andere aus U^- betrachtet wird. Es sind daher $U_1^+(A, B, C)$ und $U_1^+(A', B', C')$ und ebenso $U_1^-(A, B, C)$ und $U_1^-(A', B', C')$ ähnlich und gleichsinnig, hingegen $U_2^+(A, B, C)$ und $U_2^-(A', B', C')$, $U_2^-(A, B, C)$ und $U_2^+(A', B', C')$ ähnlich und ungleichsinnig.

Da nun U bekannt ist, so sind es auch die prismatischen Räume und ihre Normalschnitte. Wir können daher zu den beiden ähnlichen und gleichsinnigen Dreiecken $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ den Ähnlichkeitspunkt (U_1 in Nr. 292) konstruieren, den Punkt, um den gedreht werden muß, um diese Dreiecke in ähnliche Lage zu bringen. Das Lot in ihm auf der Ebene der Normalschnitte ist die Gerade TU.

Die ähnlichen Punktreihen auf ihr erhält man leicht; entsprechende Punkte sind z. B. die Schnitte S, S' mit den Ebenen ABC, $A'B'C'$, die Fußpunkte der Lote aus entsprechenden Punkten A, A'; .... U ist der eine Koinzidenzpunkt, der andere T läßt sich leicht konstruieren.

T_1 bildet mit ABC, $A'B'C'$ gleichsinnige ähnliche Tetraeder, T_2 ungleichsinnige. Aus U_1^+ sowohl wie aus U_2^+ erscheinen ABC, $A'B'C'$ gleich umlaufen; daher muß T_1 von U_1^+ durch keine der beiden Ebenen ABC, $A'B'C'$ getrennt werden, T_2 von U_2^+ nur durch eine; d. h. T_2 liegt auf der endlichen Strecke SS' oder genauer S_2S_2', T_1 außerhalb S_1S_1'. Und so wie diese beiden entsprechenden Punkte S, S' zu T liegen, so liegen wegen der Ähnlichkeit jede zwei entsprechenden Punkte der ähnlichen Punktreihen auf TU; also sind die Reihen auf T_1U_1 gleichsinnig, auf T_2U_2 ungleichsinnig; und wir haben, wenn durch Drehung um TU die ähnliche Lage erhalten ist, im ersten Falle direkte, im zweiten inverse Lage.

Wie wir früher (Nr. 292) die beiden zu zwei Strecken gehörigen Ähnlichkeitspunkte als Schnitte zweier Kreise gefunden haben, so ergeben sich jetzt T_1, T_2 als Schnitte von drei Kugeln. Teilt man nämlich AA', BB', CC' je von außen und innen in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$; $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$ nach dem Ähnlichkeitsverhältnis, so sind diese Kugeln diejenigen, welche $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ zu Durchmessern haben.

Tritt Kongruenz ein, so werden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ unendlich fern; die Kugeln gehen in die Ebenen über, welche auf AA', BB', CC' in $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ senkrecht stehen; deren Schnitt ist T_2, während T_1 sich unendlich nahe neben U_1 gelegt hat, wie das bei zwei gleichen und gleichlaufenden Punktreihen auf derselben Gerade notwendig ist.

Es ist wertvoll, daß unsere Konstruktion die Gerade $T_1 U_1$ vor dem Punkte T_1 bringt.

Im Falle der gleichsinnigen Kongruenz ist $T_1 U_1$ die Axe der aus einer Schiebung längs ihr und einer Drehung um sie sich zusammensetzenden Schraubenbewegung, durch welche der eine Raum mit dem andern zur Deckung gebracht wird.

485 Im vorangehenden sind schon einige Spezialfälle der Homologie erhalten worden; wir wollen sie aber jetzt systematisch durchnehmen. Wenn bei der Homologie die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht, so muß sie entweder eine Ebene durch das Zentrum S sein, oder die Ebene σ der Homologie. Im ersteren Falle, wo dann das Zentrum S unendlich fern ist, haben wir homologische Affinität. Die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte X, X' sind parallel, und die Invariante $(S\mathfrak{S}XX')$ reduziert sich auf $\frac{\mathfrak{S}X'}{\mathfrak{S}X}$; so daß alle parallelen Verbindungsstrecken entsprechender Punkte nach konstantem Verhältnisse von der Ebene σ der Affinität geteilt werden, wobei noch die Fälle des positiven und negativen Wertes, oder daß X, X' auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von σ liegen, unterschieden werden.

Besonders hervorzuheben ist auch hier der Wert -1 der Invariante, bei welchem die Ebene σ alle jene Strecken halbiert. Die Beziehung ist involutorisch: man nennt sie Symmetrie in bezug auf die Ebene σ und die gegebene Richtung. Symmetrie schlechthin in bezug auf σ (oder normale Symmetrie) nennt man den Fall, wo die Verbindungslinien XX' zur Symmetrieebene normal sind und jede Figur das Spiegelbild der entsprechenden ist in der Ebene σ als Spiegel. In diesem Falle sind entsprechende Strecken und Winkel gleich, entsprechende ebene Figuren kongruent, entsprechende körperliche Figuren kongruent, aber nicht deckbar, ungleichsinnig.

Symmetrisch heißen häufig zwei kongruente, aber nicht deckbare räumliche Gebilde, auch wenn sie noch nicht normal-symmetrisch in bezug auf eine Ebene liegen.

Bei der schrägen Symmetrie finden jene Gleichheiten und Kongruenzen nur statt bei Elementen, die zur Symmetrieebene parallel sind.

Läßt man hingegen die Ebene σ der Homologie unendlich fern sein, das Zentrum S endlich, so sind entsprechende Geraden und Ebenen parallel und die Invariante ist $\frac{SX}{SX'}$. Daraus ist leicht die Ähnlichkeit entsprechender ebener und räumlicher Figuren abzuleiten: wir haben Ähnlichkeit, verbunden mit ähnlicher Lage, und zwar direkte oder inverse, je nachdem die Invariante — das Ähnlichkeitsverhältnis — positiv oder negativ ist.

Ist sie -1, so liegt wieder involutorische Beziehung vor; die entsprechenden Figuren sind dann kongruent, aber räumlich nicht deckbar, wie ja aus dem Verhältnis $k^3 = -1$ entsprechender Körper folgt; am einfachsten zeigen es zwei entsprechende Tetraeder $SABC, SA'B'C'$, die eine gemeinsame Ecke in S haben. Wir wissen schon, daß es sich hier um Symmetrie in bezug auf ein Zentrum handelt.

Der andere Fall, wo entsprechende räumliche Figuren gleichsinnig kongruent sind, (Invariante $= +1$) ist der, wo S und σ beide unendlich fern sind, alle entsprechenden Geraden und Ebenen parallel sind, alle Verbindungsstrecken entsprechender Punkte dieselbe Richtung haben. Diese Strecken sind alle von gleicher Länge, wie aus $XX' \parallel YY'$ und $XY \parallel X'Y'$ folgt. Diese Verwandtschaft beruht einfach auf einer Verschiebung, bei welcher alle Punkte Strecken von gleicher Größe, gleicher Richtung und gleichem Sinne durchlaufen haben.

Sie subsumiert sich dem Spezialfalle der Homologie, in dem Zentrum und Ebene inzidieren.

Auch bei der Kollineation mit Axen u, v wollen wir die 486
Affinität untersuchen. Sich selbst entsprechend sind die Ebenen durch die eine oder andere Axe. Also muß eine der beiden Axen, etwa v, unendlich fern sein, und wir haben dann einen Büschel von parallelen Leitebenen λ, dessen Axe v ist. Zu ihnen sind die Leitstrahlen XX' parallel, der Punkt $\mathfrak{V}$ auf ihnen unendlich fern; die Invariante ist also $\frac{\mathfrak{U}X}{\mathfrak{U}X'}$.

Ist diese gleich -1, sodaß wir es mit einer windschiefen Involution zu tun haben, dann handelt es sich um die Symmetrie in bezug auf die Gerade u, welche alle Strecken XX' halbiert. Diese XX' sind gegebenen Leitebenen parallel. Sind letztere zur Axe u normal und damit auch die Strahlen XX', so liegt normale Symmetrie vor, Symmetrie im engern Sinne in bezug auf eine Gerade.

In jeder Ebene durch die Axe u haben wir ebene Symmetrie in in bezug auf diese, mit Verbindungsstrahlen, die nach dem Schnittpunkte der Ebene mit v gehen, in jeder Leitebene, also einer durch die andere Axe v gehenden Ebene ebene Symmetrie in bezug auf den Spurpunkt von u.

Normale Symmetrie in bezug auf eine Axe ist Umwendung um dieselbe (Drehung um 180°). Sie ist gleichsinnige Kongruenz.

Wir fanden (Nr. 479), eine Fläche 2. Grades ist sich selbst entsprechend in einer involutorischen Homologie, deren Zentrum und Ebene, sowie in einer windschiefen Involution, deren Axen in bezug auf sie polar sind.

Spezialfälle davon sind, daß sie in sich symmetrisch ist in bezug auf den Mittelpunkt, in bezug auf eine Durchmesserebene, wobei die Verbindungslinien symmetrischer Punkte dem konjugierten Durchmesser (der nach dem unendlich fernen Pole der Durchmesserebene geht) parallel sind, in bezug auf einen Durchmesser, wobei die Verbindungslinien der konjugierten Durchmesserebene (die nach der unendlich fernen Polare des Durchmessers geht) parallel sind.

Davon sind wiederum Spezialfälle die normalen Symmetrien in bezug auf die Hauptebenen (Verbindungsebenen der Axen) und in bezug auf die Axen.

Die Symmetrie in bezug auf den Mittelpunkt oder in bezug auf eine Durchmesserebene führt jede der beiden Regelscharen einer hyperbolischen Fläche 2. Grades in die andere, diejenige in bezug auf einen Durchmesser jede in sich selbst über.

Von den beiden Kreisscharen einer Fläche 2. Grades geht durch die Symmetrien in bezug auf den Mittelpunkt, auf die Axe, die zu ihren Ebenen parallel ist, und auf die zu dieser Axe normale Hauptebene jede in sich selbst, durch diejenigen in bezug auf die anderen Axen und Hauptebenen jede in die andere über.

Es mag im Anschluß hieran eine andere weniger bekannte Eigenschaft erwähnt werden. Zu jedem Kreisschnitte einer hyperbolischen Fläche 2. Grades gehört ein Punkt, der so beschaffen ist, daß die Lote, aus ihm auf die Geraden g der einen Regelschar fällt, den Kreis mit ihren Fußpunkten erfüllen; und wenn der Kreisschnitt seine Schar durchläuft, so bewegt sich dieser Punkt auf einer Gerade, welche zu den Ebenen der andern Kreisschar normal ist. Sind K^1, K^2 die beiden Kreisschnitte, deren Ebenen durch den Mittelpunkt gehen, $V_g^{\,1}, V_g^{\,2}, V_l^1, V_l^2$ die ihnen so in bezug auf die Regelscharen der g und der l zugehörigen Punkte, so folgt, durch Symmetriebetrachtungen, daß

$$V_g^{\,1} \equiv V_l^2, \;\; V_g^{\,2} \equiv V_l^1.$$

Beide Punkte liegen auf der Axe, in der die Ebenen von K^1, K^2 sich schneiden, symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt in der Entfernung $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+c^2)}}{a}$, wenn $2a$ jene Axe und $2b$, $2ci$ die beiden andern sind.

Beim orthogonalen Hyperboloide rücken sie in die Scheitel, beim Rotationshyperboloid in den Mittelpunkt.

§ 74. Das Koinzidenztedraeder einer räumlichen Kollineation und der tetraedrale Komplex.

Wir beginnen mit Eigenschaften des räumlichen Sechsecks, die 487
zu den in Nr. 270, 290 besprochenen des ebenen Fünfecks analog sind. Auf den 15 Verbindungslinien der Ecken eines räumlichen Sechsecks $ABCDEF$ befinden sich projektive Punktreihen von je sechs Punkten, den beiden verbundenen Punkten und den Schnitten der Ebenen, welche die vier übrigen Punkte zu je dreien verbinden. Auf zwei Verbindungslinien, welche keine Ecke gemeinsam haben, z. B. AB, CD, ist, wie die Projektion aus EF lehrt:

$$AB(B, A, DEF, EFC, FCD, CDE)$$
$$\barwedge CD(BEF, EFA, D, C, FAB, ABE);$$

der Beweis ist nur für eins der beiden letzten Punktepaare notwendig. Die Ebene, welche den Punkt (AB, FCD) aus EF projiziert, schneidet die FAB in dem in FCD liegenden Strahle von jenem Punkte nach F; ihr Schnittpunkt mit CD liegt auf diesem Strahle und daher auf FAB.

Wir haben:

$$\begin{aligned}
&AB(B, A, DEF, EFC, FCD, CDE)\\
\barwedge\ &AC(C, DEF, A, EFB, FBD, BDE)\\
\barwedge\ &AD(D, CEF, EFB, A, FBC, BCE)\\
\barwedge\ &AE(E, CDF, DFB, FBC, A, BCD)\\
\barwedge\ &AF(F, CDE, DEB, EBC, BCD, A)\\
\barwedge\ &BC(DEF, C, B, EFA, FAD, ADE)\\
\barwedge\ &BD(CEF, D, EFA, B, FAC, ACE)\\
\barwedge\ &BE(CDF, E, DFA, FAC, B, ACD)\\
\barwedge\ &BF(CDE, F, DEA, EAC, ACD, B)\\
\barwedge\ &CD(BEF, EFA, D, C, FAB, ABE)\\
\barwedge\ &CE(BDF, DFA, E, FAB, C, ABD)\\
\barwedge\ &CF(BDE, DEA, F, EAB, ABD, C)\\
\barwedge\ &DE(BCF, CFA, FAB, E, D, ABC)\\
\barwedge\ &DF(BCE, CEA, EAB, F, ABC, D)\\
\barwedge\ &EF(BCD, CDA, DAB, ABC, F, E).
\end{aligned}$$

Jede dieser Reihen nennt Kohn den Wurf des Sechsecks.

Betrachten wir die Schnittlinie h zweier gegenüberliegender Ebenen ABC, DEF des Sechsecks; sind $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ die Schnitte von BC, CA, AB, EF, FD, DE mit ihr, so ist die Reihe

$$A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$$

allen jenen Reihen projektiv und daher auch Wurf des Sechsecks; die Projektion z. B. des Wurfs von AB aus C auf h zeigt dies.

Durch die sechs Punkte $A, \ldots F$ geht eine kubische Raumkurve R, und die Reihe der Punkte $A, \ldots F$ auf ihr ist zu allen jenen Reihen projektiv. In der Tat, durch zwei Doppelsekanten wie AB, CD ist eine Regelschar von Doppelsekanten der Raumkurve bestimmt, zu der sie gehören; ihre Leitschar wird durch die projektiven Ebenenbüschel um jene erzeugt. Wenn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ die zweiten Schnitte der Kurve mit den durch E, F gehenden Doppelsekanten aus jener Schar sind, so befinden sich die Punktepaare AB, CD, $E\mathfrak{E}$, $F\mathfrak{F}$ auf R in Involution (Nr. 203); daher ist:

$$BADC\mathfrak{E}\mathfrak{F} \barwedge ABCDEF;$$

projiziert man aber die linksstehende Reihe der Kurve aus der Doppelsekante EF auf AB, so ergibt sich:

$$AB(B, A, DEF, EFC, FCD, CDE).$$

Ein Beweis ist wiederum nur für einen der beiden letzten Punkte notwendig. Die durch F gehende Gerade aus der Leitschar, welche also AB, CD, $E\mathfrak{E}$ trifft, ist den Ebenen $EF\mathfrak{E}$ und FCD gemeinsam; in ihrem Schnitt mit AB wird daher diese sowohl von $EF\mathfrak{E}$, als von FCD getroffen.

Also ist

$$ABCDEF \barwedge AB(B, A, DEF, EFC, FCD, CDE)$$

oder auch

$$\barwedge EF(BCD, CDA, DAB, ABC, F, E);$$

man beachte die umgekehrte Stellung von A, B bzw. E, F.

Projiziert man aus einem Elemente des krummen Wurfs $ABCDEF$, etwa F, die übrigen, so liefert der fünfstrahlige Bündel $F(A, B, C, D, E)$ einen Wurf, der als Teilwurf aus dem sechselementigen Wurfe durch Weglassung des entsprechenden, also im vorliegenden Falle des sechsten Elements sich ergibt. Die fünf Bündelstrahlen (auf einem Kegel 2. Grades) seien a, b, c, d, e; so haben wir, in dem wir auf sie das Ergebnis von Nr. 270 über das ebene Fünfeck anwenden:

$$F(A, B, C, D, E) = abcde \barwedge ab(b, a, de, ec, cd)$$
$$= AFB(FB, FA, DFE, EFC, CFD);$$

schneidet man aber diesen Büschel mit der in seiner Ebene liegenden Gerade AB, so ergibt sich, daß der Bündelwurf projektiv ist zu

$$AB(B, A, DEF, EFC, FCD)$$

oder z. B. zu $EF(BCD, CDA, DAB, ABC, F)$.

In zwei kollinearen Räumen bilden sechs Punkte $A, \ldots F$ 488
des einen und ihre entsprechenden $A', \ldots F'$ des andern projektive Würfe. Denn der kubischen Raumkurve durch jene entspricht die kubische Raumkurve durch diese; die Punktreihen derselben sind projektiv mit den in der Kollineation korrespondierenden Punkten als ebenfalls entsprechenden.

Umgekehrt, zwei projektive sechspunktige Würfe $A \ldots F$, $A' \ldots F'$ sind entsprechend in einer Kollineation. Denn die durch

$$\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D\,E \\ A'B'C'D'E' \end{vmatrix}$$

bestimmte Kollineation verwandelt die kubische Raumkurve R durch $A, \ldots F$, insofern sie durch $A, \ldots E$ geht, in die analoge Kurve R' durch $A', \ldots E'$ (Nr. 241, 470), d. h. in diejenige (einzige) kubische Raumkurve durch diese Punkte, von deren Doppelsekanten nach ihnen Büschel gehen, die den Büscheln projektiv sind, welche von den Sehnen der ersten Kurve R nach $A, \ldots E$ gehen. Die Voraussetzung sagt aber aus, daß von den Doppelsekanten der durch $A', \ldots F'$ gehenden kubischen Raumkurve solche Büschel gehen; daher ist R' diese Kurve. Die der R entsprechende Kurve R' geht also durch F'; die durch die Kollineation auf R und R' hervorgerufene Projektivität stimmt mit der gegebenen schon in fünf Paaren entsprechender Punkte überein, ist daher mit ihr identisch, und F und F', die sich in der gegebenen Projektivität entsprechen, tun es auch in der Kollineation. Daß zwei sechspunktige Gruppen von Punkten projektive Würfe bilden, ist demnach ein Kennzeichen dafür, daß sie in einer Kollineation entsprechend sind.

Regelscharen, welche in bezug auf die beiden Gruppen analog sind, entsprechen einander in der Kollineation.

Das Sechseck werde nunmehr durch die vier Koinzidenz- 489
punkte T, U, V, W einer räumlichen Kollineation, denen im Tetraeder die Ebenen $\tau, \upsilon, \varphi, \psi$ gegenüberliegen mögen, und durch zwei entsprechende Punkte X', X gebildet. Wir bilden ein zweites mit Y', Y. Die beiden Würfe sind einander projektiv. In der Tat, die beiden kollinearen Bündel X, X' erzeugen die durch T, U, V, W, X, X' gehende kubische Raumkurve, welche Trägerin des Wurfes $TUVWX'X$ ist; die Bündel Y, Y' liefern diejenige, die den Wurf $TUVWY'Y$ trägt. Die projektiven Ebenenbüschel um die entsprechenden Geraden $z = XY$ und $z' = X'Y'$ gehören zu beiden Paaren von Bündeln und erzeugen eine Regelschar ρ, deren Geraden Doppelsekanten beider Kurven sind. Die Geraden der verbundenen Regelschar λ, zu welcher z, z' gehören, sind einfache Sekanten. Der Ebenenbüschel um eine der vorherigen gemeinsamen Doppelsekanten

ist zu den Punktreihen beider Kurven perspektiv; also sind diese zueinander projektiv, wobei sich solche Punkte entsprechen, die in derselben Ebene des Büschels oder auf derselben Gerade von λ liegen. Daher sind T, U, V, W sich selbst entsprechend, — die Geraden von λ, die durch sie gehen, seien t, u, v, w — und z schneidet die entsprechenden Punkte X, Y, z' die entsprechenden Punkte X', Y' ein. Folglich ist:

$$TUVWX'X \barwedge TUVWY'Y.$$

Also sind alle ∞^3 Würfe $TUVWX'X$ (je auf einer kubischen Raumkurve) untereinander projektiv. Wir nennen einen jeden dieser sechselementigen Würfe den Wurf der Kollineation; wir werden den dualen als projektiv erkennen.

Die vorangehende Betrachtung liefert, außer der Darstellung des Wurfs auf der kubischen Raumkurve, auch die durch die 6 Geraden einer Regelschar $tuvwz'z$, welche je durch die 6 Punkte der beiden obigen Punktwürfe gehen.

Wir wissen, daß wir unsern Wurf $TUVWX'X$ auch geradlinig darstellen können, es geschehe auf XX'; dann ist er:

$$XX'(UVW,\ VWT,\ WTU,\ TUV,\ X, X'),$$

oder einfacher

$$XX'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, X, X').$$

Also sind alle Würfe auf Verbindungslinien XX' entsprechender Punkte, gebildet durch die Schnitte mit den Koinzidenzebenen und durch X, X', untereinander projektiv.

Zu der Konstanz dieses Wurfes gelangen wir auch, wenn wir die projektiven Punktreihen auf z, z' betrachten; in der Regelschar, welche durch diese erzeugt wird, befinden sich vier in $\tau, \upsilon, \varphi, \psi$ gelegene Geraden; daher enthalten diese Ebenen auch vier Geraden der verbundenen Regelschar t_1, u_1, v_1, w_1, und sie, so wie z, z', welche auch dieser Regelschar angehören, schneiden in die beiden Geraden XX', YY' der ersteren Regelschar projektive Punktreihen ein; also:

$$XX'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, X, X') \barwedge YY'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, Y, Y').$$

Perspektiv zu diesen beiden Würfen ist wiederum der Regelschar-Wurf $t_1u_1v_1w_1zz'$: auf der einzigen Regelschar, welche z, z' und vier in $\tau, \upsilon, \varphi, \psi$ befindliche Geraden enthält. Daher gilt für die beiden dual entstehenden Würfe:

$$tuvwz'z \barwedge t_1u_1v_1w_1zz',$$

denn beide sind projektiv zu $TUVWX'X$.

Dual gebildet zu diesem Wurfe $TUVWX'X$, aber mit umgekehrter Stellung der beiden letzten Elemente, ist der Wurf $\tau\upsilon\varphi\psi\xi\xi'$, in dem ξ, ξ' irgend zwei entsprechende Ebenen sind: er wird von einem Torsus 3. Klasse getragen, demjenigen, der durch die kollinearen

Felder ξ, ξ' erzeugt wird. Auch die ∞^3 derartigen Würfe sind untereinander projektiv. Wie aber zu jedem Wurfe $TUVWXX'$ Regelscharwürfe $tuvwzz'$ perspektiv sind, so sind zu jedem $\tau\upsilon\varphi\psi\xi\xi'$ Regelscharwürfe $t_1u_1v_1w_1zz'$ perspektiv. Und die Büscheldarstellung dieses Wurfes ist:

$$\xi\xi'(T, U, V, W, \xi', \xi).$$

Folglich sind alle ∞^3 Büschel um die Schnittlinien entsprechender Ebenen ξ, ξ', gebildet durch die Ebenen nach den Koinzidenzpunkten und die Ebenen ξ, ξ', untereinander projektiv.

Weil aber

$$tuvwz'z \barwedge t_1u_1v_1w_1zz',$$

so ist auch:

$$TUVWX'X \barwedge \tau\upsilon\varphi\psi\xi\xi',$$

oder

$$XX'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, X, X') \barwedge \xi\xi'(T, U, V, W, \xi', \xi);$$

demnach sind auch die dualen Würfe zueinander projektiv; wofern die beiden letzten Elemente in dem einen umgekehrt gestellt sind, als im andern.[1])

Lassen wir die Ebenen ξ, ξ' bzw. mit den Punkten X, X' inzidieren, so wird $\xi\xi'$ eine Doppelsekante der durch die Bündel X, X' erzeugten kubischen Raumkurve, auf welcher der Wurf $TUVWX'X$ liegt. Also ist:

$$TUVWX'X \barwedge \xi\xi'(T, U, V, W, \xi', \xi) \barwedge \tau\upsilon\varphi\psi\xi\xi'.$$

Wir projizieren die beiden projektiven Würfe $TUVWX'X$, 490
$TUVWY'Y$, die auf den durch die Bündel X, X', bzw. Y, Y' erzeugten kubischen Raumkurven liegen, aus den Punkten X, Y dieser Kurven, so ergeben sich zunächst projektive Kantenreihen von Kegeln 2. Grades und daher kollineare Bündel:

$$X(T, U, V, W, X', x) \text{ koll. } Y(T, U, V, W, Y', y);$$

darin sind x, y die Tangenten der Kurven in X, Y, d. h. die Strahlen, welche im ersten Raume den Strahlen $X'X$, $Y'Y$ aus dem zweiten Raume entsprechen. Daher sind auch alle die ∞^3 Bündel untereinander kollinear, welche von einem Punkte X des ersten Raumes ausgehen und aus den Strahlen nach den vier Koinzidenzpunkten, dem Strahle nach dem entsprechenden Punkte im zweiten Raume und dem Strahle bestehen, welcher im ersten Raume dem fünften Strahle als Strahle des zweiten Raumes entspricht. Die beiden letzten Strahlen kann man auch bezeichnen als die beiden einzigen entsprechenden Strahlen x', x des zweiten, ersten Raumes, die durch X gehen.

---

1) Daß die einen für sich projektiv sind und ebenso die andern, habe ich in der Liniengeometrie Bd. I Nr. 262 gefunden; daß aber diese auch zu jenen projektiv sind, hat Kohn hinzugefügt, Math. Annalen Bd. 46 S. 305.

Die Projektion aus X' und Y' läßt uns erkennen, daß auch alle Bündel $X'(T, U, V, W, x'_1, x_1)$ untereinander und den vorherigen kollinear sind, wo $x_1 = X'X$ und x_1' die beiden durch X' gehenden entsprechenden Strahlen sind.

Dual sind alle Felder $\xi(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, x_2, \xi')$ oder $\xi(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, x_2, x_2')$ und $\xi'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, x_3, x_3')$ untereinander kollinear, worin x_2 und $x_2' = \xi\xi'$, sowie $x_3 = \xi\xi'$ und x_3' entsprechend sind. Und da:

$$TUVWX'X \barwedge \tau\upsilon\varphi\psi\xi\xi',$$

so sind jene Bündel zu diesen Feldern korrelativ. Stellen wir die Ergebnisse zusammen:

In
$$TUVWX'X,\ XX'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, X, X'),$$
$$\tau\upsilon\varphi\psi\xi\xi',\ \xi\xi'(T, U, V, W, \xi', \xi),$$
$$tuvwz'z,\ t_1u_1v_1w_1zz'$$

haben wir verschiedene Darstellungen des Wurfs einer räumlichen Kollineation. Dieser Wurf bleibt konstant (zu sich projektiv), wenn X, X', ξ, ξ', z, z' durch andere entsprechenden Elemente je derselben Art ersetzt werden.

Ferner ist:

$$X(T, U, V, W, x', x) \text{ koll. } X'(T, U, V, W, x_1', x_1) \text{ korrel.}$$
$$\xi(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, x_2, x_2') \text{ koll. } \xi'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, x_3, x_3'),$$

und diese Bündel und Felder bleiben kollinear und die letzteren zu den ersteren korrelativ, wenn die entsprechenden Elemente X, X', ξ', ξ und mithin die mit ihnen inzidenten $x', x, ..$ geändert werden.

Unsere projektiven Würfe $XX'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, X, X')$ führen zu sechs invarianten Doppelverhältnissen, in denen X, X' vorkommen:

$$XX'(\tau, \upsilon, X, X')\ldots, \quad \text{und die Würfe } \xi\xi'(T, U, V, W, \xi', \xi)$$

zu sechs andern.

Die drei Invarianten:

$$XX'(\tau, \upsilon, X, X'), \quad XX'(\upsilon, \varphi, X, X'), \quad XX'(\varphi, \tau, X, X')$$

oder kürzer:
$$\lambda_{\tau\upsilon}, \quad \lambda_{\upsilon\varphi}, \quad \lambda_{\varphi\tau}$$

gehören, wie die Projektion aus W und der Schnitt mit ψ zeigen, auch zur Bündelkollineation um W und zur ebenen Kollineation in ψ; ihr Produkt ist 1 (Nr. 290).

Wegen:
$$TUVWXX' \barwedge \tau\upsilon\varphi\psi\xi'\xi$$

sind $\xi\xi'(T, U, \xi', \xi), \ldots$ ihnen gleich, also $\xi\xi'(T, U, \xi, \xi'), \ldots$ zu ihnen reziprok.

$$\xi\xi'(T, U, \xi, \xi'), \quad \xi\xi'(U, V, \xi, \xi'), \quad \xi\xi'(V, T, \xi, \xi')$$

sind die zweiten Invarianten jener Kollineationen.

Ebenso ist

$$XX'(\tau, \upsilon, X, X') = \mathfrak{x}\mathfrak{x}'(T, U, \mathfrak{x}', \mathfrak{x})$$

die Invariante der konjektiven Punktreihen auf TU und die der konjektiven Ebenenbüschel um die Gegenkante $\tau\upsilon = VW$ (Nr. 71).

Von den andern Invarianten heben wir hervor:

$$\lambda = XX'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi) = \mathfrak{x}\mathfrak{x}'(T, U, V, W).$$

Also werden alle Verbindungslinien entsprechender Punkte in zwei kollinearen Räumen von den vier Ebenen des Koinzidenztetraeders in Punktwürfen von festem Doppelverhältnisse geschnitten, und alle Schnittlinien entsprechender Ebenen senden nach den Ecken des Tetraeders Ebenenwürfe von demselben Doppelverhältnisse, wobei in Würfen der einen und der andern Art solche Elemente korrespondieren, welche mit Gegenelementen des Tetraeders inzidieren.

Die einen, wie die andern Geraden erzeugen daher (Nr. 237) den nämlichen tetraedralen Komplex. So durch kollineare Räume erzeugt, wurde der tetraedrale Komplex durch Reye gefunden.[1]) Wir wissen, daß für jede Gerade g gilt:

$$g(\tau, \upsilon, \varphi, \psi) = g(T, U, V, W).$$

Jede Gerade XX' ist eine $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, und umgekehrt; denn wenn wir XX' als Gerade des ersten, bzw. zweiten Raumes mit y, z' bezeichnen, so gehen die entsprechenden Geraden y', z bzw. durch X', X und XX' ist Schnitt der beiden entsprechenden Ebenen yz, $y'z'$; dual wird die Umkehrung bewiesen. Zugleich ist erkannt, daß jede Gerade XX' oder $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, oder jeder Strahl des Komplexes von den beiden entsprechenden Geraden getroffen wird. Und umgekehrt, wenn $y \equiv z'$ von y' getroffen wird, so wird sie auch von z getroffen; weil den inzidenten Elementen y', z' inzidente Elemente y, z entsprechen; und sie ist die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte yz, $y'z'$ und die Schnittlinie der entsprechenden Ebenen yz, $y'z'$, also Strahl des Komplexes, der somit vierfacher Ort ist: Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier kollinearer Räume, Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen, Ort der Geraden des einen oder andern Raumes, die je ihre entsprechende treffen.

Die letzte Invariante $XX'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi)$ oder einfacher $(\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W})$, wenn die Schnitte von XX' mit $\tau, \ldots$ durch $\mathfrak{T}, \ldots$ bezeichnet werden, läßt sich durch die andern Invarianten folgendermaßen ausdrücken:

$$\lambda = (\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = \frac{(\mathfrak{T}X\mathfrak{V}X')}{(\mathfrak{T}X\mathfrak{W}X')} : \frac{(\mathfrak{U}X\mathfrak{V}X')}{(\mathfrak{U}X\mathfrak{W}X')} = \frac{1-(\mathfrak{T}\mathfrak{V}XX')}{1-(\mathfrak{T}\mathfrak{W}XX')} : \frac{1-(\mathfrak{U}\mathfrak{V}XX')}{1-(\mathfrak{U}\mathfrak{W}XX')}.$$

---

1) Geometrie der Lage 1. Aufl. 2. Abt. S. 117 und Journ. f. Math. Bd. 74 S. 10.

491 Von jedem Punkte kommen zwei entsprechende Geraden (die ihn mit den beiden entsprechenden Punkten verbinden); die projektiven Ebenenbüschel um sie erzeugen den Komplexkegel aus dem Punkte.

Ebenso liegen in jeder Ebene zwei entsprechende Geraden (in denen sie von den entsprechenden Ebenen geschnitten wird); die projektiven Punktreihen auf ihnen erzeugen die Komplexkurve der Ebene.

Da nun auch die Geraden, welche Ebenenwürfe von dem der Kollineation zukommenden Doppelverhältnisse λ nach den Ecken des Koinzidenztetraeders senden und von den Ebenen desselben in Punktwürfen dieses Doppelverhältnisses geschnitten werden, um jeden Punkt einen Kegel 2. Grades, in jeder Ebene einen Kegelschnitt bilden, so erhellt nun auch umgekehrt, daß jede dieser Geraden eine XX' oder eine $\xi\xi'$ sein muß.

Aber auch zwei entsprechende Geraden z, z' der Kollineation senden nach den Ecken des Tetraeders Würfe von gleichem Doppelverhältnisse, da sie projektive Ebenenbüschel tragen und in diesen entsprechende Ebenen nach den Ecken gehen. Und ebenso werden z und z' von den Ebenen des Tetraeders in Punktwürfen von gleichem Doppelverhältnis geschnitten. Also gehören, da diese beiden einander gleichen Doppelverhältnisse im allgemeinen von λ verschieden sind, z und z' zugleich zu einem andern tetraedralen Komplexe, welcher sich auf das Tetraeder bezieht. In jedem der ∞^1 tetraedralen Komplexe, die zum Koinzidenztetraeder der Kollineation gehören, befinden sich ∞^3 Paare entsprechender Geraden der Kollineation, in dem durch die Kollineation erzeugten sind es die Paare sich schneidender entsprechender Geraden.

Der Komplex enthält ∞^4 Regelscharen ρ_1, welche durch die projektiven Ebenenbüschel um entsprechende Geraden erzeugt werden: auf Trägerflächen, welche durch die Ecken des Tetraeders gehen, ferner ∞^4 Regelscharen ρ_2, welche durch die projektiven Punktreihen auf entsprechenden Geraden erzeugt werden: auf Trägerflächen, welche die Ebenen des Tetraeders berühren. Das sind die in Nr. 238 erwähnten. Jede Gerade des Komplexes gehört, wie schon dort gefunden wurde, zu je ∞^2 Regelscharen ρ_1 und ρ_2. Die ersteren ergeben sich aus den entsprechenden Geraden, die in den im Komplexstrahl sich schneidenden entsprechenden Ebenen ξ, ξ' liegen, die andern aus denen, welche durch die entsprechenden Punkte X, X' gehen, die er verbindet.

Ingleichen enthält der Komplex die Doppelsekanten-Kongruenzen $[r_1]$ der ∞^3 kubischen Raumkurven r_1, welche durch die kollinearen Bündel um zwei entsprechende Punkte erzeugt werden und durch die Ecken des Tetraeders gehen, sowie die Kongruenzen $[r_2]$ der Schmiegungsaxen der ∞^3 kubischen

Raumkurven r_2, welche durch die kollinearen Felder in entsprechenden Ebenen erzeugt werden und die Ebenen des Tetraeders oskulieren. Auch sie wurden schon in Nr. 238 erwähnt. Jeder Komplexstrahl gehört ebenfalls zu ∞^2 Kongruenzen $[r_1]$ oder $[r_2]$; jene rühren von den kollinearen Bündeln her, deren Scheitel in den Ebenen ξ, ξ' liegen, diese von den kollinearen Feldern, deren Ebenen durch X, X' gehen.

Die Komplexkegel gehören zu den ρ_1, die Komplexkurven zu den ρ_2. Die im Komplexe enthaltenen Regelscharen sind jedoch mit den ρ_1 und ρ_2 noch nicht erschöpft (Nr. 238).

Zwei Geraden des Komplexes $g = \xi\xi' = XX'$, $g_1 = \eta\eta' = YY'$ gehören sowohl zu einer Regelschar ρ_1, als zu einer ρ_2; die Ebenenbüschel um die entsprechenden Geraden $\xi\eta$, $\xi'\eta'$ erzeugen die erstere, die Punktreihen auf XY, $X'Y'$ die zweite.

Eine Regelschar ρ_1 hat mit einer Kongruenz $[r_1]$ eine Gerade gemein, ebenso eine ρ_2 mit einer $[r_2]$. Kommt ρ_1 von den entsprechenden Geraden l, l', $[r_1]$ von den entsprechenden Bündeln O, O' her, so ist der gemeinsame Strahl die Schnittlinie $(lO, l'O')$.

Die Ebenenbüschel um g und g_1 sind, wie schon bemerkt, auch projektiv:

$$g(T, U, V, W, \xi, \xi') \barwedge g_1(T, U, V, W, \eta, \eta');$$

sie erzeugen eine Regelschar, zu welcher $\xi\eta$, $\xi'\eta'$ gehören, und deren Trägerfläche durch diese Geraden, durch g, g_1 und die Tetraederecken geht; sie ist daher die Leitschar der Regelschar ρ_1 des Komplexes, zu welcher g und g_1 gehören. Ebenso erzeugen die projektiven Punktreihen auf g, g_1:

$$g(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, X, X') \barwedge g_1(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, Y, Y'),$$

die Leitschar der ρ_2, zu welcher g und g_1 gehören.

Drei Geraden des Komplexes $\xi\xi' \equiv XX'$, $\eta\eta' \equiv YY'$, $\zeta\zeta' \equiv ZZ'$ gehören zu der $[r_1]$, welche durch die Bündel um $\xi\eta\zeta$, $\xi'\eta'\zeta'$ entsteht, und der $[r_2]$, zu welcher die Felder in XYZ und $X'Y'Z'$ führen.

Jeder Strahl durch eine Ecke des Tetraeders oder in einer Ebene desselben gehört zum Komplexe. Jenes ergibt sich bei der jetzigen Erzeugung daraus, daß eine Ecke sich selbst in der Kollineation entspricht und jeder Strahl durch sie als Verbindungslinie vereinigter entsprechender Punkte angesehen werden kann, andererseits aber auch jeder Strahl eines zu sich selbst kollinearen Bündels Schnittlinie zweier entsprechenden Ebenen desselben ist, derjenigen nämlich, die ihn mit den beiden entsprechenden Strahlen verbindet. Dual ergibt sich das andere.

Die Tangenten einer Komplexkurve ergaben sich als Verbindungs- 492
linien entsprechender Punkte, die Kanten eines Komplexkegels als

Schnittlinien entsprechender Ebenen. Es ist erwünscht, auch die Entstehung bei der umgekehrten Auffassung zu erkennen. Die Bündel, welche aus einem Punkt O die kollinearen Felder in zwei entsprechenden Ebenen projizieren, haben drei Koinzidenzstrahlen; also gibt es drei Paare entsprechender Punkte in den beiden Feldern, deren Verbindungslinien durch O gehen.

Zu jedem Punkte des Raumes gehören demnach zwei in der Kollineation entsprechende kubischen Raumkurven, deren entsprechende Punkte verbunden die Kanten des Komplexkegels aus dem Punkte liefern. Sie gehen beide durch den Punkt und die vier Koinzidenzpunkte. Nennen wir den Punkt $O \equiv P'$ und O', P die entsprechenden; so entstehen die beiden entsprechenden kubischen Raumkurven durch die Bündel P und P', bzw. O und O'. In der Tat, es sei $x \equiv y'$ ein Strahl durch $O \equiv P'$, der seinen entsprechenden y aus P schneidet, so schneidet er auch seinen entsprechenden x' aus O'; die beiden Schnittpunkte yy', xx' liegen auf den genannten Kurven. Sie können aber auch xy und $x'y'$ genannt werden und erweisen sich so als entsprechende Punkte, immer auf dem Strahle durch $O \equiv P'$ gelegen, und die Kurven (P, P'), (O, O') als entsprechende im ersten und zweiten Raume. Der Komplexkegel projiziert beide aus $O \equiv P'$.

Ingleichen gehören zu jeder Ebene zwei in der Kollineation entsprechende kubischen Torsen, deren entsprechende Ebenen in den Tangenten der Komplexkurve der Ebene sich schneiden. Sie berühren die Ebene und die vier Koinzidenzebenen.

Allgemeiner, zu jeder im Komplexe befindlichen Regelschar ρ_1, durch zwei entsprechende Ebenenbüschel g, g' erzeugt, gibt es zwei entsprechende kubischen Raumkurven, deren homologe Punkte durch die Geraden der Regelschar verbunden werden. Wenn nämlich eine Gerade $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ der Regelschar mit y, z' bezeichnet wird, und y, z die entsprechenden Geraden sind, denen sie, als Komplexstrahl, begegnet, so sind yz und $y'z'$ die durch sie verbundenen entsprechenden Punkte. Es sei nun $g \equiv h'$, $g' \equiv i$ und h, i' die entsprechenden Geraden, so erzeugt z die Regelschar, welche durch projektive Ebenenbüschel um $h' \equiv g$ und h entsteht[1]); also ist der Ort der Punkte yz die kubische Raumkurve, welche durch die drei projektiven Büschel $g \equiv h', g', h$ erzeugt wird; die Regelschar ρ_1, als Erzeugnis zweier dieser Büschel, besteht aus einfachen Sekanten. Der Ort der Punkte $y'z'$ ist die kubische Raumkurve, welche durch projektive Büschel $g, g' \equiv i, i'$ erzeugt wird; die Geraden von ρ_1 sind

1) Diese Projektivität zwischen g und h entspricht in Σ der von der Kollineation herrührenden Projektivität zwischen g' und g, wenn diese als g' und h' zu Σ' gerechnet werden.

ebenfalls einfache Sekanten. Die Koinzidenzpunkte sind den beiden Kurven gemeinsam.

Dual gehören zu der Regelschar ρ_2, welche durch die projektiven Punktreihen g, g' erzeugt wird, zwei entsprechende und der Trägerfläche umgeschriebene kubischen Torsen, welchen die Koinzidenzebenen gemeinsam sind, und deren weitere entsprechenden Ebenen sich in den Geraden von ρ_2 schneiden; die eine entsteht durch projektive Punktreihen $g \equiv h'$, g', h, die andere durch $g, g' \equiv i, i'$.

Von diesen kubischen Torsen gehen durch zwei entsprechende Punkte O, O' drei Paare entsprechender Ebenen, also befinden sich von den Geraden der ρ_2 drei unter den Doppelsekanten der kubischen Raumkurve r_1, welche durch die Bündel O, O' erzeugt wird, oder auf g und g' liegen drei Paare entsprechender Punkte, deren Verbindungslinien zur Kongruenz $[r_1]$ gehören. Eine ρ_2 hat mit einer $[r_1]$, eine ρ_1 mit einer $[r_2]$ drei Geraden gemeinsam. Und die entsprechenden Punkte der beiden Räume, deren Verbindungslinien eine Kongruenz $[r_1]$ erzeugen, erfüllen zwei Flächen 3. Ordnung. Geht g und demnach auch g' durch eine Ecke T des Tetraeders, so zerfällt ρ_2 in zwei Strahlenbüschel der Ebene gg', von denen der eine T zum Scheitel hat; von den drei Doppelsekanten der r_1 in dieser Ebene gehen zwei durch T, die dritte, welche dem anderen Strahlenbüschel angehört, beweist, daß g und g' jene kubischen Flächen, außer in T, je nur einmal begegnen. Diese Flächen besitzen also in den Ecken des Tetraeders Doppelpunkte. Die eindeutige Korrespondenz ihrer Punkte, von denen diese Punkte sich selbst entsprechend sind, führt zur Kongruenz $[r_1]$ als dem Ort der Verbindungslinien.

Dual führen die Tangentialebenen von zwei entsprechenden Flächen 3. Klasse zu den Geraden einer $[r_2]$.

Es gibt ∞^{13} tetraedrale Komplexe, weil $\infty^{4 \cdot 3}$ Tetraeder und 493
∞^1 Doppelverhältnisse. Durch das Tetraeder und das Doppelverhältnis (mit bestimmter Zuordnung), oder durch einen seiner Strahlen ist der tetraedrale Komplex eindeutig bestimmt.

Da nun ∞^{15} Kollineationen möglich sind, so muß jeder tetraedrale Komplex bei ∞^2 Kollineationen sich ergeben.

In der Tat, wenn durch irgend einen seiner Strahlen, g_0, zwei Ebenen ϵ, ϵ' gelegt werden, so erzeugt die Kollineation:

$$\begin{vmatrix} \tau\upsilon\varphi\psi\epsilon \\ \tau\upsilon\varphi\psi\epsilon' \end{vmatrix}$$

den Komplex, und die ∞^2 Paare ϵ, ϵ' im Büschel g_0 führen zu den ∞^2 Kollineationen.

Jede Ebene $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \ldots$ durch g_0 bedingt einen Raum, mit den Ebenen als primären Elementen; und alle diese Räume werden kollinear, so daß jene Ebenen entsprechend sind, und das Tetraeder sich selbst entspricht. Reye[1]) hat dies einen Büschel von kollinearen Räumen genannt; und unsere ∞^2 Kollineationen sind diejenigen zwischen je zweien von ihnen.

Betrachten wir die drei Räume, welche bei drei der Ebenen $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ sich ergeben, so haben wir nachzuweisen, daß beliebige entsprechende Ebenen ξ, ξ', ξ'' durch dieselbe Gerade gehen. Die Regelschar, welche durch die wegen der Kollineation (ϵ, ϵ') projektiven Ebenenbüschel $\epsilon\xi, \epsilon'\xi'$ erzeugt wird, enthält $g_0 = \epsilon\epsilon'$ und vier durch die Ecken des Tetraeders gehende Erzeugenden; zur Leitschar gehören $\epsilon\xi, \epsilon'\xi'$ und auch vier durch die Ecken gehende Geraden. Analoges gilt für $\epsilon\xi, \epsilon''\xi''$.

Die beiden Trägerflächen haben also g_0, $\epsilon\xi$ und die vier Ecken gemeinsam, sind daher identisch; folglich sind es auch die Regelscharen und die je in derselben Ebene ξ durch $\epsilon\xi$ gelegenen Geraden $\xi\xi', \xi\xi''$ derselben. Also gehen ξ, ξ', ξ'' durch dieselbe Gerade und ebenso die weiteren Ebenen $\xi''', \ldots$ Die Leitschar dieser Regelschar besteht aus $\epsilon\xi, \epsilon'\xi', \epsilon''\xi'', \ldots$

Die einander entsprechenden Ebenen $\xi, \xi', \xi'', \ldots$ in den kollinearen Räumen $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots$ unseres Büschels bilden je einen Ebenenbüschel: um einen Strahl des Komplexes.

Alle diese Ebenenbüschel sind projektiv, wobei je demselben Raume angehörige Ebenen entsprechend sind. Denn die Ebenen $\xi, \xi', \xi'', \ldots$ und $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \ldots$ gehen nach den Geraden $\epsilon\xi, \epsilon'\xi', \epsilon''\xi'', \ldots$ der Leitschar. Auch nach den Ecken des Tetraeders gehen entsprechende Ebenen, so daß es sich um diejenige Projektivität handelt, die mit der ursprünglichen Definition (Nr. 237) des tetraedralen Komplexes zusammenhängt.

Reye bezeichnet a. a. O. den Inbegriff dieser Ebenenbüschel als linearen Komplex projektiver Ebenenbüschel und sagt von ihm und dem Büschel kollinearer Räume, daß sie sich stützen. Ich werde später erörtern, warum ich die Bezeichnung: Gebüsche projektiver Ebenenbüschel vorziehe.

Entsprechende Bündel aus den kollinearen Räumen $\Sigma, \Sigma', \ldots$ senden ihre homologen Ebenen nach den Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve r_1, welche durch die Tetraederecken geht, bilden also eine Reihe kollinearer Bündel (Nr. 371), und die Ebenenbüschel um diese dem Komplexe angehörigen Doppelsekanten bilden das sich auf die Reihe stützende Netz von projektiven Ebenenbüscheln, welches im Gebüsche enthalten ist.

Entsprechende Ebenenbüschel aus den Räumen senden ihre ho-

---

1) Journal für Math. Bd. 104, S. 217.

mologen Ebenen nach den Geraden einer Regelschar ρ_1, bilden also eine Schar projektiver Ebenenbüschel um die Geraden der Leitschar (Nr. 95); die sich stützende Schar projektiver Ebenenbüschel um die Geraden von ρ_1 selbst ist im Gebüsche enthalten.

Die entsprechenden Punkte $X, X', X'', \ldots$ der kollinearen 494
Räume $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots$ erfüllen eine kubische Raumkurve. Es sei X der Schnittpunkt dreier Ebenen ξ, ξ_1, ξ_2 aus Σ, also X' der Schnittpunkt der entsprechenden Ebenen ξ', ξ_1', ξ_2' aus Σ' usw.; daher handelt es sich um das Erzeugnis der projektiven Ebenenbüschel $\xi\xi'\xi''\ldots$, $\xi_1\xi_1'\xi_1''\ldots$, $\xi_2\xi_2'\xi_2''\ldots$ um die Komplexstrahlen g, g_1, g_2, welche dadurch Doppelsekanten der kubischen Raumkurve werden; da wir aber ξ, ξ_1, ξ_2 durch andere Ebenen von X ersetzen können, so ergeben sich auch die Schnittlinien der weiteren entsprechenden Ebenen in irgend zwei (und allen) Bündeln $X, X', \ldots$ als Doppelsekanten. Diese kubische Raumkurve ist daher eine r_1 (Nr. 491); und jeder Punkt in einem der Räume führt zu einer dieser Kurven, deren ja auch ∞^3 sind.

Die Punktreihen der $X, X', X'', \ldots$ einer solchen Kurve und der $Y, Y', Y'', \ldots$ einer zweiten sind projektiv; denn sie werden eingeschnitten durch die projektiven Ebenenbüschel $\xi\xi'\xi''\ldots$, $\eta\eta'\eta''\ldots$ um zwei Doppelsekanten g, h.

Die entsprechenden Geraden $x, x', x'', \ldots$ in unseren Räumen bilden eine Regelschar; fassen wir sie auf als Schnittlinien $\xi\xi_1, \xi'\xi_1'\ldots$, so sind ja die Ebenenbüschel der $\xi\xi'\ldots$, $\xi_1\xi_1'\ldots$ um die Komplexstrahlen g, g_1 projektiv. Die Leitschar besteht, wenn $\xi_2, \ldots$ weitere Ebenen durch x, $\xi_2', \ldots$ durch $x', \ldots$ sind, aus den Strahlen $g, g_1, g_2 \ldots$, so daß sie eine Regelschar ρ_1 des Komplexes ist, erzeugt durch die projektiven Ebenenbüschel um irgend zwei der Geraden $x, x', \ldots$ (Nr. 491).

Gehört x zum Komplexe, so schneidet sie (Nr. 490) einen und jeden der entsprechenden Strahlen $x', x'' \ldots$ Die Regelschar ρ_1, erzeugt etwa durch die Ebenenbüschel x, x', wird die Kantenschar eines Kegels mit der Spitze in $P = xx'$ und vereinigt sich mit der verbundenen Regelschar der $x, x', x'', \ldots$, die daher alle durch P gehen. Es handelt sich, da letztere Geraden alle zum Komplexe gehören, um den Komplexkegel aus P.

Der Punkt P, auf allen diesen Geraden $x, x', x'', \ldots$ gelegen, werde nach und nach zu den Räumen $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots$ gerechnet, unter denen wir einen $\bar{\Sigma}$ auszeichnen; die ihm als Punkte dieser verschiedenen Räume entsprechenden in $\bar{\Sigma}$ erfüllen die Gerade $\bar{x}$, also ergibt sich dieser Komplexstrahl $\bar{x}$ als Verbindungsstrahl entsprechender Punkte von Σ und $\bar{\Sigma}$, Σ' und $\bar{\Sigma}$, Σ'' und $\bar{\Sigma}, \ldots$

und zwar derartig, daß der erste fest ist: in P, der andere die $\bar{x}$ durchläuft![1])

Wir wollen uns dies wichtige Ergebnis noch auf eine andere Weise klar machen. Von den entsprechenden Ebenen $\xi, \xi', \xi'' \ldots$, die einen Büschel um einen Komplexstrahl bilden, geht eine durch den gegebenen Punkt P; folglich gibt es auf der zu $\bar{\Sigma}$ gehörigen Ebene $\bar{\xi}$ einen Punkt $\bar{X}$, der einen seiner entsprechenden Punkte in P hat; oder, wenn wir P nach und nach den verschiedenen Räumen zurechnen, so durchlaufen die ihm in $\bar{\Sigma}$ korrespondierenden Punkte eine Gerade, die auch durch P geht, weil $\bar{\Sigma}$ zu den Σ gehört. Sie ist daher Verbindungslinie entsprechender Punkte von Σ und $\bar{\Sigma}, \ldots$, also Komplexstrahl.

Die einander entsprechenden Punkte $X, X', X'' \ldots$, oder besser, die dem Punkte $\bar{X}$ von $\bar{\Sigma}$ entsprechenden Punkte $X, X', \ldots$ erzeugen eine kubische Raumkurve r_1 durch $\bar{X}$; die drei Schnittpunkte mit einer beliebigen Ebene Π beweisen, daß die Ebenen von $\bar{\Sigma}$, denen Π in den verschiedenen Räumen entspricht, einen Torsus 3. Klasse umhüllen, zu dem auch Π gehört. Die Spuren der übrigen Ebenen in Π umhüllen einen Kegelschnitt, ersichtlich die Komplexkurve, weil alle diese Geraden, als Schnittlinien entsprechender Ebenen, Komplexstrahlen sind. Die in Π befindlichen Erzeugende des Torsus, welche auch die zugehörige kubische Raumkurve berührt, ist derjenige Komplexstrahl, für welchen Π zu $\bar{\Sigma}$ gehört.

Eine gegebene Gerade p trifft in der obigen Regelschar der Geraden $x, x', x'', \ldots$, welche $\bar{x}$ entsprechen, zwei Geraden; daraus folgt, daß, wenn p nach und nach zu den verschiedenen Räumen gerechnet wird, die ihr in $\bar{\Sigma}$ entsprechenden Geraden eine Regelschar bilden.

Ist p wiederum ein Strahl des Komplexes und $\bar{\xi}$ die Ebene von $\bar{\Sigma}$, die mit den entsprechenden $\xi, \xi', \ldots$ sich in p schneidet, so artet diese Regelschar aus in den Komplex-Kegelschnitt der Ebene $\bar{\xi}$, denn die fraglichen Geraden sind Komplexstrahlen und müssen in $\bar{\xi}$ liegen, weil p in $\xi, \xi', \ldots$ liegt.

495 Betrachten wir zwei Räume aus dem Büschel $\Sigma^{(i)}, \Sigma^{(k)}$, von denen etwa $\Sigma^{(i)}$ der bisherige $\bar{\Sigma}$ sei, und den festen Komplexstrahl $g = x^{(i)} \equiv y^{(k)}$; $x^{(k)}$ sei dem $x^{(i)}$ in $\Sigma^{(k)}$ entsprechend und $y^{(i)}$ dem

1) Von solchen Kollineationen zwischen Σ und $\bar{\Sigma}$, Σ' und $\bar{\Sigma}, \ldots$ sagt Reye, daß sie einen Büschel von Kollineationen bilden; das System ist linear, weil es, wenn $\bar{\xi}$ und ein Punkt gegeben sind, nur eine Kollineation in ihm gibt, bei welcher die der $\bar{\xi}$ entsprechende Ebene durch diesen Punkt geht. Etwas anderes ist der obige Büschel von ∞^1 kollinearen Räumen mit ∞^2 Kollineationen.

$y^{(k)}$ in $\Sigma^{(i)}$. Diese beiden Geraden treffen jenen Strahl, und es sind sowohl die Schnittpunkte $Z^{(i)} = x^{(i)}y^{(i)} \equiv gy^{(i)}$ und $Z^{(k)} = x^{(k)}y^{(k)} \equiv x^{(k)}g$ entsprechend, als auch die gleichnamigen Ebenen $\zeta^{(i)}$, $\zeta^{(k)}$. Wir wollen nun wieder $\Sigma^{(i)}$ festhalten, $\Sigma^{(k)}$ verändern, so bewegen sich $x^{(k)}$ und $y^{(i)}$, aber verschiedenartig. Die erstere $x^{(k)}$ durchläuft die der festen $x^{(i)}$ in den verschiedenen Räumen entsprechenden Geraden, beschreibt also den Komplexkegel aus dem deshalb festbleibenden Punkt $Z^{(k)}$, die andere $y^{(i)}$, in dem festen Raume $\Sigma^{(i)}$ der den verschiedenen Räumen zugerechneten festen Gerade $y^{(k)}$ entsprechend, umhüllt den Komplex-Kegelschnitt in der festen Ebene $\zeta^{(i)}$. Dagegen bewegt sich $Z^{(i)}$ auf g und $\zeta^{(k)}$ um ihn.

Der Ebenenbüschel um einen Komplexstrahl g und die Punktreihe auf einem anderen g_1 sind so projektiv, daß die mit Gegenelementen des Koinzidenztetraeders $TUVW \equiv \tau\upsilon\varphi\psi$ inzidierenden Elemente homolog sind. Es soll nun dargetan, daß diese Projektivität (zwischen zwei ungleichartigen Gebilden 1. Stufe) involutorisch ist, in dem in Nr. 69 erläuterten Sinne.

Es seien wiederum $\xi, \xi', \xi'', \ldots \bar{\xi}$ die zu den verschiedenen kollinearen Räumen $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots \bar{\Sigma}$ gehörigen entsprechenden Ebenen des Büschels g. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte $\bar{X}$ und X in $\bar{\xi}$ und ξ geben die Kongruenz der Schmiegungsaxen einer kubischen Raumkurve r_2; konstruieren wir sie ebenso für $\bar{\xi}$ und ξ', $\bar{\xi}$ und $\xi'', \ldots$, so wird der ganze Komplex erfüllt. Denn die einem Punkte $\bar{X}$ von $\bar{\xi}$ in den Räumen entsprechenden Punkte $X, X' \ldots$, gelegen in $\xi, \xi', \ldots$, erzeugen eine kubische Raumkurve r_1, die durch $\bar{X}$ geht, und der Kegel, der sie aus $\bar{X}$ projiziert, ist der Komplexkegel. Diese ∞^1 Komplexkegel aus den Punkten von $\bar{\xi}$ bilden den vollen Komplex und ihre Strahlen sind mit den Strahlen jener Kongruenzen identisch, nur anders angeordnet. Damit ist erkannt, daß auf jedem Komplexstrahle, z. B. g_1, zwei Punkte $\bar{X}$ und $X^{(i)}$ liegen, welche in den Räumen $\bar{\Sigma}$ und $\Sigma^{(i)}$ entsprechend sind und in den entsprechenden Ebenen $\bar{\xi}$ und $\xi^{(i)}$ aus diesen Räumen sich befinden, die in g sich schneiden. Also ist $g = \bar{\xi}\xi^{(i)}$, $g_1 = \bar{X}X^{(i)}$.

Nun ist aber, wegen des Entsprechens in diesen kollinearen Räumen (Nr. 489):

$$g(T, U, V, W, \bar{\xi}, \xi^{(i)}) \barwedge g_1(\tau, \upsilon, \varphi, \psi, X^{(i)}, \bar{X});$$

das ist die oben genannte Projektivität; weil nun jede der beiden Ebenen $\bar{\xi}$, $\xi^{(i)}$ mit dem der anderen in dieser Projektivität entsprechenden Punkte $\bar{X}$, $X^{(i)}$ inzidiert, so ist die Projektivität involutorisch.

Verfahren wir dual, legen also auf g_0 zwei Punkte, statt wie in Nr. 493, zwei Ebenen durch sie, so gelangen wir zu einer Schar kollinearer Punkträume $\Sigma_1, \Sigma_1', \Sigma_1'', \ldots$ und zu einem auf sie 496 sich stützenden Gebüsche projektiver Punktreihen auf den Komplexstrahlen. Die Punkte derselben Punktreihe sind in den kollinearen Räumen entsprechend, und zwei entsprechende Punkte verschiedener Punktreihen gehören je zu demselben Raume.

Die ∞^2 Kollineationen, welche den Komplex erzeugen, müssen ebenso durch Zusammenstellung zweier der jetzigen Räume wie zweier der früheren sich ergeben.

Es seien wieder $\Sigma^{(i)}$ und $\Sigma^{(k)}$ zwei der früheren Räume, sie erzeugen den Komplex, und jeder Strahl desselben trägt zwei in ihnen entsprechende Punkte, der Strahl g_0 etwa die Punkte $Z_0^{(i)}$ und $Z_0^{(k)}$. Diese Punkte bestimmen zwei der jetzigen Räume, die deshalb $\Sigma_1^{(i)}$, $\Sigma_1^{(k)}$ heißen mögen Die Kollineation zwischen $\Sigma^{(i)}$ und $\Sigma^{(k)}$ und die zwischen $\Sigma_1^{(i)}$ und $\Sigma_1^{(k)}$ muß dieselbe sein, weil das Koinzidenztetraeder und das Paar entsprechender Punkte $Z_0^{(i)}, Z_0^{(k)}$ übereinstimmen. Also sind auch für $\Sigma_1^{(i)}$, $\Sigma_1^{(k)}$ die entsprechenden Punkte $Z^{(i)}$, $Z^{(k)}$ (und die entsprechenden Ebenen) bei jedem Komplexstrahle g die nämlichen wie bei $\Sigma^{(i)}$ und $\Sigma^{(k)}$.

Hält man wieder $\Sigma^{(i)}$ fest, während $\Sigma^{(k)}$ sich ändert, so bleibt, bei jedem g, $\zeta^{(i)}$ fest, während $\zeta^{(k)}$ sich ändert; da aber $Z^{(k)}$ festbleibt und $Z^{(i)}$ sich ändert, so gilt dies auch für $\Sigma_1^{(k)}$ bzw. $\Sigma_1^{(i)}$.

Die Kollineationen zwischen dem festen $\Sigma^{(i)}$ und dem veränderlichen $\Sigma^{(k)}$, welche einen Kollineationenbüschel bilden, sind identisch mit den Kollineationen zwischen dem veränderlichen $\Sigma_1^{(i)}$ und dem festen $\Sigma_1^{(k)}$, die eine Kollineationenschar bilden. Fassen wir jene als Transformationen von $\Sigma^{(i)}$ in die $\Sigma^{(k)}$ auf, also fester Elemente, zunächst Ebenen, dann Punkte in sich verändernde entsprechende Elemente, so sind die anderen Kollineationen, aufgefaßt als Transformationen fester Elemente (von $\Sigma_1^{(k)}$), zunächst Punkte, dann Ebenen, in sich verändernde entsprechende, die Umkehrungen[1]).

Wenn wir oben fanden, daß die einer Ebene Π, gerechnet zu den verschiedenen $\Sigma^{(k)}$, in $\Sigma^{(i)}$ korrespondierenden Ebenen den Schmiegungsebenen-Torsus einer kubischen Raumkurve umhüllen, so heißt das jetzt: wird Π zu dem festen $\Sigma_1^{(k)}$ gerechnet, so umhüllen die entsprechenden Ebenen in den verschiedenen $\Sigma_1^{(i)}$ einen solchen Torsus 3. Klasse. Das ist aber dual zu dem Satze, daß die entsprechenden Punkte zu $X^{(i)}$ (aus $\Sigma^{(i)}$) in den verschiedenen Σ eine kubische Raumkurve r_1 erzeugen.

Also ist die jetzige kubische Raumkurve eine r_2, deren Schmiegungsaxen zum Komplexe gehören.

497 Es seien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, $\xi\xi'$ fünf Strahlen eines tetraedralen Komplexes: Schnittlinien entsprechender Ebenen der kollinearen

1) Briefliche Mitteilung Reyes aus dem Jahre 1893.

Räume Σ, Σ'. Es sind dann auch die Punkte $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ entsprechend, sowie die Geraden $\delta\varepsilon$, $\delta'\varepsilon'$ und daher auch die Ebenen $\eta = (\alpha\beta\gamma, \delta\varepsilon)$ und $\eta' = (\alpha'\beta'\gamma', \delta'\varepsilon')$; $\eta\eta'$ ist Komplexstrahl. Der Büschel um ihn gehört sowohl zur Schar projektiver Büschel, die durch die projektiven Büschel $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, als zu dem Netze, das durch die projektiven Büschel $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ bestimmt wird. Also ist der Büschel $\varepsilon\varepsilon'$ in einer der Scharen enthalten, welche $\delta\delta'$ mit den Büscheln dieses Netzes verbinden; durch diese fächerförmige Erzeugung entsteht das Gebüsche projektiver Ebenenbüschel, von dem $\varepsilon\varepsilon'$ ein beliebiger ist. Oder weil die Ebenen $\zeta \equiv (\alpha\beta, \gamma\delta\varepsilon)$ und $\zeta' = (\alpha'\beta', \gamma'\delta'\varepsilon')$ entsprechend sind, so entsteht das Gebüsche aus den vier konstituierenden Büscheln $\alpha\alpha', \ldots \delta\delta'$ auch dadurch, daß man alle Büschel $\zeta\zeta'$ der Schar $(\alpha\alpha', \beta\beta')$ mit der Schar $(\gamma\gamma', \delta\delta')$ durch Netze verbindet; und, weil jedes dieser Netze dadurch erzeugt wird, daß $\zeta\zeta'$ mit allen Büscheln von $(\gamma\gamma', \delta\delta')$ durch Scharen verbunden wird, kann man auch jeden Büschel der Schar $(\alpha\alpha', \beta\beta')$ mit jedem von $(\gamma\gamma', \delta\delta')$ durch eine Schar verbinden.

Sind nun vier beliebige projektive Ebenenbüschel u_0, u_1, u_2, u_3 gegeben, so haben wir, um aus ihnen das Gebüsche herzustellen, das Netz $u_1u_2u_3$ zu konstruieren und jeden Büschel u_y desselben mit u_0 durch eine Schar zu verbinden, oder jeden Büschel u_z von u_2u_3 mit u_0u_1 durch ein Netz (oder, was nur eine andere Form ist, jeden Büschel von u_2u_3 mit jedem von u_0u_1 durch eine Schar) zu verbinden. Die Büschel u_x jener ∞^2 Scharen, bzw. dieser ∞^1 Netze erfüllen das Gebüsche. Es ist zu beweisen, daß der Inbegriff der projektiven Ebenenbüschel um die Strahlen eines tetraedralen Komplexes vorliegt.

Bei den vier gegebenen projektiven Ebenenbüscheln $u_0, \ldots u_3$ gibt es (Nr. 208) vier Punkte T, U, V, W, in welche entsprechende Ebenen aus allen zusammenlaufen. Sie liegen auf der kubischen Raumkurve, welche durch u_1, u_2, u_3 erzeugt wird; aus allen projektiven Ebenenbüscheln u_y um die Doppelsekanten dieser Kurve, welche das Netz $u_1u_2u_3$ bilden, gehen entsprechende Ebenen nach ihnen, aber auch aus allen projektiven Ebenenbüscheln der Scharen u_0u_y, also aus allen des Gebüsches; oder aus Ebenenbüscheln u_z von u_2u_3 und infolgedessen aus allen Büscheln u_x der Netze $u_0u_1u_z$.

Man hat daher auch folgende Herstellung des tetraedralen Komplexes. Man mache die Punktreihe auf einer kubischen Raumkurve und einen Ebenenbüschel u_0 projektiv; durch vier Punkte T, U, V, W der Kurve gehen entsprechende Ebenen. Der Büschel u_0 erzeugt mit jedem der zu ihm projektiven Ebenenbüschel, welche die Punktreihe auf der Kurve aus den Doppelsekanten projizieren, eine Regelschar; die verbundenen Regelscharen bilden einen tetraedralen Komplex: mit dem Tetraeder $TUVW$. Oder zwei Ebenenbüschel u_0, u_1 werden projektiv gemacht zu allen Ebenenbüscheln u_z einer Schar (um die Geraden einer Regelschar ρ); die Doppelsekanten der je durch $u_0 u_1 u_z$ erzeugten kubischen Raumkurven erfüllen den tetraedralen Komplex. Die Regelschar, welche durch die u_0, u_1 erzeugt wird, und diejenige, nach deren Geraden die entsprechenden Ebenen der u_z gehen, — Leitschar von ρ — werden dadurch auch projektiv und viermal schneiden sich entsprechende Geraden derselben (Nr. 179); diese Schnitte sind die Ecken des Tetraeders. Oder auch, zwei projektive Regelscharen liegen vor; jeder Ebenenbüschel um eine Gerade der einen Leitschar und jeder um eine der anderen werden durch sie projektiv, erzeugen je eine Regelschar, und durch die Leitscharen dieser ∞^2 Regelscharen entsteht der Komplex.

498 Die ursprüngliche Definition des tetraedralen Komplexes erfordert ein reelles Tetraeder; bei der Erzeugung durch zwei projektive Strahlenbüschel (Nr. 254) können zwei Ecken (und ihre Gegenebenen) imaginär sein, ebenso bei derjenigen durch einen Bündel und ein Feld, welche kollinear sind (Nr. 389). Die Reyesche Erzeugung durch zwei kollineare Räume ermöglicht auch den Fall, daß alle vier Ecken imaginär sind. Die Mannigfaltigkeit 13 haben wir aus der ursprünglichen Definition und aus dieser letzten Erzeugung schon abgeleitet. Zur Bestätigung tun wir es noch für die beiden andern.

Solcher Strahlenbüschel-Paare wie (A_1, α_2), (A_2, α_1) nach der Bezeichnung von Nr. 238 oder (T, υ), (U, τ) gibt es sechs, so daß nur eine endliche Anzahl von Erzeugungen eines gegebenen Komplexes durch projektive Strahlenbüschel möglich ist. Nun gibt es ∞^{10} Paare von Strahlenbüscheln im Raume und bei jedem ∞^3 Projektivitäten; wodurch die Mannigfaltigkeit 13 erreicht ist.

Dagegen haben wir ∞^6 Paare, bestehend aus einem Bündel und einem Felde, und jedesmal ∞^8 Kollineationen; wir erhalten die Mannigfaltigkeit 14, und haben uns zu überzeugen, daß jeder tetraedrale Komplex auf ∞^1 Weisen durch ein Feld und einen Bündel, welche kollinear sind, hergestellt werden kann.

Scheitel und Trägerebene liegen im Tetraeder einander gegenüber (Nr. 389). Es sei nun ein Strahlenbüschel des Komplexes (von der ersten Art in Nr. 239) genommen mit dem Scheitel X_0 in τ und der Ebene ξ_0 durch T, und x_0 ein Strahl von (T, ξ_0). Wir legen zwischen dem Felde τ und Bündel T die Kollineation:

$$\begin{vmatrix} U & V & W & X_0 \\ TU & TV & TW & x_0 \end{vmatrix}$$

fest; der erzeugte Komplex stimmt mit dem gegebenen im Tetraeder und in dem Strahlenbüschel (X_0, ξ_0) überein und ist mit ihm identisch. Durchläuft x_0 den Büschel (T, ξ_0), so hat man das eine der vier Systeme von ∞^1 erzeugenden Kollineationen; in allen ist die Ebene ξ_0 dem Punkte X_0 konjugiert, und wir haben das lineare Kollineationensystem

$$(3010)\qquad \begin{vmatrix} U & V & W & X_0 \\ TU & TV & TW & \xi_0 \end{vmatrix};$$

jedem Punkte X von τ ist die gemeinsam konjugierte Ebene ξ zugeordnet, die den nicht in τ fallenden Strahlenbüschel des Komplexes aus X trägt; die von diesen konjugierten Elementen X, ξ gebildete quadratische Verwandtschaft (Nr. 239) ist die, welche mit diesem linearen Kollineationensystem verbunden ist (Nr. 454).

Kommt x_0 bei seiner Bewegung durch (T, ξ_0) in eine der drei in T zusammenstoßenden Tetraederebenen, etwa υ, so entsprechen den drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten V, W, X_0 von τ drei in eine Ebene fallende Strahlen TV, TW, x_0 von T. Die Kollineation artet aus (Nr. 400), so daß die Büschel (T, υ) und (U, τ) singulär werden, und in der charakteristischen Projektivität entsprechen den Strahlen TV, TW, x_0 die $U(V, W, X_0)$. In dieser ausgearteten Kollineation entspricht einem Punkte X von τ im Bündel T derjenige Strahl von (T, υ), dessen homologer in (U, τ) den X enthält; folglich trifft jeder Strahl des Komplexes zwei homologe Strahlen der projektiven Büschel (T, υ), (U, τ). So hat sich die Erzeugung durch projektive Büschel als Ausartung derjenigen durch ein Feld und einen Bündel, welche kollinear sind, ergeben. Auch diese wird sich später als Ausartung der Erzeugung durch kollineare Räume herausstellen. —

Bei der Kollineation mit Axen u, v besteht der erzeugte tetraedrale Komplex aus den beiden Strahlengebüschen, deren Strahlen u oder v treffen: die Strahlen sind Verbindungslinien sich selbst entsprechender Punkte, Schnittlinien sich selbst entsprechender Ebenen. Die eigentlichen Verbindungs- und Schnittlinien bilden nur das den beiden Gebüschen gemeinsame Strahlennetz [u, v].

Bei der Homologie hingegen ergibt sich kein tetraedraler Komplex; alle Strahlen des Raums sind Verbindungslinien entsprechender vereinigter Punkte, Schnittlinien entsprechender vereinigter Ebenen. Die eigentlichen Verbindungs-, bzw. Schnittlinien bilden nur den Bündel S, bzw. das Feld σ.

§ 75. Flächen 2. Grades, welche in einer Kollineation oder Korrelation entsprechend sind.

Wir haben erkannt, daß zwei beliebige Kegelschnitte oder Kegel 499
2. Grades entsprechend sein können in kollinearen (oder korrelativen)

Feldern oder Bündeln. Man überzeugt sich sofort, daß das bei Flächen 2. Grades, wofern die räumliche Kollineation (Korrelation) reell sein soll, nicht der Fall sein kann. Es gibt ja zwei wesentlich verschiedene Arten von (reellen) Flächen 2. Grades, die elliptischen, welche keine reellen Geraden enthalten, und die hyperbolischen, welche Regelscharen mit reellen Geraden enthalten. Zu den elliptischen gehören die Ellipsoide und zweimanteligen Hyperboloide von den allgemeinen Flächen und als spezieller Fall das elliptische Paraboloid, zu den hyperbolischen von den allgemeinen nur das einmantelige Hyperboloid, von den speziellen das hyperbolische Paraboloid, der Kegel 2. Grades und dual zu ihm der Kegelschnitt: der Kegel als Ort von ∞^2 Punkten, von denen je ∞^1 auf einer Gerade gelegene dieselbe Berührungsebene haben, der Kegelschnitt als Ort von ∞^2 Ebenen, von denen je ∞^1, die einen Büschel bilden, denselben Berührungspunkt haben. Beim Kegel 2. Grades haben sich die beiden Regelscharen in die Reihe der Kanten, beim Kegelschnitt in die Reihe der Tangenten vereinigt.

Weil nun durch eine (reelle) Kollineation oder Korrelation eine reelle Gerade in eine ebenfalls reelle übergeht, so ist unmittelbar klar, daß einer elliptischen Fläche 2. Grades nur eine elliptische, einer hyperbolischen nur eine hyperbolische entsprechen kann.

Eine elliptische Fläche 2. Grades schneidet die unendlich ferne Ebene reell oder imaginär, je nachdem sie zweimanteliges Hyperboloid oder Ellipsoid ist; die entsprechende muß sich ebenso zur Fluchtebene ihres Raums verhalten; welcher von den beiden Arten sie angehört, ist gleichgültig. Wird im Übergangsfalle die Fluchtebene berührt (in einem imaginären Geradenpaare mit reellem Doppelpunkte geschnitten), so ist die entsprechende Fläche ein elliptisches Paraboloid.

Eine hyperbolische Fläche 2. Grades schneidet die unendlich ferne Ebene immer reell; sie ist das allgemeine einmantelige Hyperboloid oder speziell ein hyperbolisches Paraboloid, wenn die entsprechende Fläche die Fluchtebene in einem allgemeinen Kegelschnitte schneidet oder in einem (reellen) Geradenpaare, d. h. sie in dessen Doppelpunkte berührt.

Einem Kegel 2. Grades entspricht durch eine Kollineation ein Kegel 2. Grades, welcher Zylinder wird, wenn jener seine Spitze in der Fluchtebene hat, einem Kegelschnitt ein Kegelschnitt, der Parabel wird, wenn jener die Fluchtebene berührt; durch eine Korrelation hingegen geht der Kegel in einen Kegelschnitt über und umgekehrt.

Polare Beziehungen bleiben erhalten. Dem Mittelpunkt, den Durchmessern und Durchmesserebenen der einen von zwei kollinear entsprechenden Flächen 2. Grades korrespondieren der Pol der Fluchtebene in bezug auf die andere, seine Strahlen und Ebenen, dem Asymptotenkegel der Berührungskegel aus diesem Punkte, drei konjugierten Durchmessern die Kanten eines Polardreikants in bezug auf diesen Tangentialkegel.

Bei der Korrelation, wo jeder der beiden Räume einen Mittelpunkt hat, welcher der unendlich fernen Ebene, als Ebene des andern Raums, entspricht, korrespondiert dem Mittelpunkte der einen Fläche die Polarebene des Mittelpunktes des andern Raums in bezug auf die entsprechende Fläche in demselben, usw.

Wir wollen zwei gegebene Flächen 2. Grades φ^2, φ'^2 kol- 500
linear (d. h. zu entsprechenden Gebilden in kollinearen Räumen) machen und benutzen dazu die letzte in Nr. 469 besprochene Herstellungsweise einer räumlichen Kollineation. Wir nehmen zwei Ebenen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$, welche die φ^2, bzw. φ'^2 reell (oder wenigstens gleichartig) schneiden, stellen zwischen ihnen eine Kollineation her, in der diese Kegelschnitte k^2, k'^2, bzw. ihre Polarfelder entsprechend sind, lassen ferner die Pole D und D' von $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ nach φ^2, bzw. φ'^2 einander entsprechen, und endlich zwei den Flächen angehörige Punkte A, A', die jedoch so liegen, daß DA und $D'A'$ die Ebenen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ in homologen Punkten B, B' ihrer Felder treffen, oder daß DA, $D'A'$ homolog sind in den Bündeln D, D', welche ja vermittelst der Felder auch kollinear geworden sind.[1])

Die der φ^2 in dieser Kollineation entsprechende Fläche muß, weil φ^2 den k^2 enthält, längs desselben von dem Kegel Dk^2 tangiert wird und durch A geht, in eine Fläche 2. Grades übergehen, welche k'^2 enthält, längs dieser Kurve von dem Kegel $D'k'^2$ berührt wird und durch A' geht. Das tut auch φ'^2; und dadurch ist eine Fläche 2. Grades eindeutig bestimmt; denn durch die beiden ersteren Bedingungen wird sie einer Büschel-Schar sich konisch berührender Flächen 2. Grades zugewiesen, aus welcher der Punkt A' eine Fläche ausscheidet. Die Kollineation führt also φ^2 in φ'^2 über.

Machen wir uns nunmehr klar, daß diese Konstruktion reell nur dann möglich ist, wenn die beiden Flächen gleichartig sind; es sind nur dann homologe Strahlen in den kollinearen Bündeln D, D' vorhanden, welche beide Flächen reell treffen, so daß reelle Punkte A und A' einander zugeordnet werden können. Von den homologen Punkten B, B', in denen die entsprechenden Strahlen DA, DA' die Felder $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ treffen, müssen gleichartige Tangenten an k^2, k'^2 gehen, also sind sie beide äußere oder beide innere Punkte; ihre Polaren b, bzw. b' in bezug auf die Kegelschnitte verhalten sich also auch gleichartig, beide schneiden reell oder beide imaginär. Zu diesen Geraden sind aber in bezug auf die Flächen polar die Geraden DB, $D'B'$, auf denen A, A' liegen sollen; denn z. B. b ist Schnitt der

1) Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 264.

Polarebenen von D und B. Nun haben zwei polare Geraden in bezug auf hyperbolische und elliptische Flächen 2. Grades verschiedenartiges Verhalten: bei jenen schneiden sie beide reell oder beide imaginär, bei diesen die eine reell, die andere imaginär.[1]) Danach haben bei verschiedenartigen Flächen, weil b und b' sich gleichartig verhalten, DB und DB' verschiedenes Verhalten, also sind A und A' nicht zugleich reell; reelle Kollineation ist nicht möglich. Bei hyperbolischen Flächen müssen, damit DB, $D'B'$ reell schneiden, auch b, b' es tun, also B und B' im Äußern der Kegelschnitte k^2, k'^2 sich befinden, bei elliptischen im Innern.

Aus dem Satze, daß nur gleichartige Flächen 2. Grades einander in einer Kollineation entsprechen können, möge eine interessante Folgerung gemacht werden.

Eine Fläche 2. Grades F^2 berühre die sechs Kanten eines Tetraeders $ABCD$; wir haben in Nr. 120 erkannt, daß dann die drei Verbindungslinien der Berührungspunkte auf Gegenkanten in einen Punkt P zusammenlaufen. Der Mittelpunkt P' eines regelmäßigen Tetraeders $A'B'C'D'$ ist auch Konkurrenzpunkt der drei gleich langen gemeinsamen Lote zwischen den Gegenkanten und halbiert alle drei; daher ist er Mittelpunkt einer Kugel, welche die sechs Kanten berührt.

In der Kollineation:

$$\left| \begin{matrix} A & B & C & D & P \\ A' & B' & C' & D' & P' \end{matrix} \right|$$

sind die drei von P ausgehenden Treffgeraden der Gegenkanten von $ABCD$ den drei von P' ausgehenden derjenigen von $A'B'C'D'$, also den gemeinsamen Loten entsprechend, daher auch die einen Treffpunkte den andern. Folglich entspricht der Kugel, welche durch diese Punkte geht und in ihnen die Kanten tangiert, eine Fläche 2. Grades, welche die Kanten von $ABCD$ in den nämlichen Punkten wie F^2 berührt, die Seitenflächen in denselben Kegelschnitten schneidet und infolgedessen mit F^2 identisch ist. Diese Fläche kann nach dem obigen Satze nur eine elliptische Fläche sein.

Nur elliptische Flächen 2. Grades können die sechs Kanten eines (reellen) Tetraeders berühren.[2])

Kehren wir zum allgemeinen Ergebnisse zurück. Liegen gleich-

---

1) Wir setzen hier (wie schon in Nr. 478) diesen Satz als aus der Theorie der Flächen 2. Grades bekannt voraus, werden jedoch bei der räumlichen Polarkorrelation auf ihn zurückkommen.

2) Reye, Archiv d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 9, S. 217. Diese Abhandlung veranlaßte mich zu dem obigen Beweise. In derselben Weise wird der Satz bewiesen in der Straßburger Dissertation von E. Brand, Über Tetraeder, deren Kanten eine Fläche 2. Ordnung berühren (1908), in welcher auch die übrigen Sätze von Reyes Abhandlung begründet werden.

artige Flächen vor, so kann man der festen Ebene $\mathfrak{d}$ ∞^3 Ebenen $\mathfrak{d}'$ zuordnen; es sind dann je ∞^3 Kollineationen der Felder möglich (Nr. 268, 325), in denen die k^2, k'^2 oder ihre Polarfelder korrespondieren. Dem Strahle DBA korrespondiert ein Strahl $D'B'A'$.

Danach ergeben sich ∞^6 Kollineationen, in denen die beiden Flächen φ^2, φ'^2 entsprechend sind, so daß es eine neunfache Bedingung für eine Kollineation ist, zwei gegebene Flächen 2. Grades ineinander überzuführen.

Es bleibt noch, nachdem A auf φ^2 gewählt, die Zweideutigkeit der Wahl des einen oder andern Schnitts auf der Gerade durch D', die zu DAB homolog ist. Es gibt, wie sich bald zeigen wird, zwei Kollineationen, in denen immer demselben Punkte X von φ^2 je die beiden Schnittpunkte des zu DX homologen Strahls von D' mit φ'^2 zugeordnet sind.

Man könnte aus der sechsfachen Unendlichkeit der Kollineationen den Schluß ziehen, daß noch die beiden dreifachen Bedingungen erfüllbar sind, daß zwei Punkten X, Y des einen Raums zwei beliebige Punkte X', Y' des andern zugeordnet werden. Das ist nicht möglich; denn dann würden auch den Polarebenen von X, Y nach φ^2 die von X', Y' nach φ'^2 korrespondieren, und es würden auf XY, $X'Y'$ zwei entsprechende Würfe von im allgemeinen nicht gleichen Doppelverhältnissen sich ergeben.

Die Dualisierung des einen Raums liefert das analoge Ergebnis für die Korrelation.

Zwei hyperbolische[1]) Flächen 2. Grades kann man mit 501
Hilfe ihrer Regelscharen kollinear oder korrelativ machen. Es seien g_1, g_2, g_3; l_1, l_2, l_3 je drei Geraden aus den beiden Scharen von φ^2, und ebenso g_1', g_2', g_3'; l_1', l_2', l_3' solche von φ'^2. Dann ordnet man für die Kollineation den fünf Punkten (oder Ebenen):

$$g_1 l_1,\ g_1 l_2,\ g_2 l_1,\ g_2 l_2,\ g_3 l_3$$

die Punkte (Ebenen):

$$g_1' l_1',\ g_1' l_2',\ g_2' l_1',\ g_2' l_2',\ g_3' l_3'$$

zu, für die Korrelation den Punkten (Ebenen) die Ebenen Punkte).[2])

Es genügt, die Kollineation mit der Zuordnung von Punkten zu betrachten. Daß den g_1, g_2, l_1, l_2 die g_1', g_2', l_1', l_2' entsprechen, ist unmittelbar zu ersehen. Der Gerade g_3, welche durch den Punkt $g_3 l_3$ geht und l_1, l_2 trifft, muß die Gerade entsprechen, welche durch $g_3' l_3'$ geht und l_1', l_2' trifft, also g_3'; ebenso entspricht der l_3 die l_3'. Durch

1) Diese Beschränkung ist nur nötig, wenn reell konstruiert werden soll.
2) Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 329.

drei Geraden aus einer Schar ist jede der beiden Flächen eindeutig bestimmt. Die in der obigen Weise festgelegte Kollineation oder Korrelation transformiert also die eine Fläche in die andere. Die Projektivitäten zwischen den zugeordneten Regelscharen sind in beiden Fällen:

$$g_1 g_2 g_3 \barwedge g_1' g_2' g_3', \quad l_1 l_2 l_3 \barwedge l_1' l_2' l_3'.$$

Hält man die Geraden der einen Fläche fest, so kann je die entsprechende der andern ∞^1 Lagen einnehmen; die sechs Geraden führen zur sechsfach unendlichen Mannigfaltigkeit.

Wenn man die eine und andere Regelschar von φ'^2 auf die eine und andere Regelschar von φ^2 projektiv bezieht:

$$g_1 g_2 g_3 \barwedge g_1' g_2' g_3', \quad l_1 l_2 l_3 \barwedge l_1' l_2' l_3',$$

so hat man eine Kollineation hergestellt, in welcher die beiden Flächen entsprechend sind; wobei dann, wenn g und g', l und l' beliebige entsprechende Geraden dieser Projektivitäten sind, immer die Punkte gl und $g'l'$ einander korrespondieren; denn es werden eben dann den Punkten $g_1 l_1$, $g_1 l_2$, $g_2 l_1$, $g_2 l_2$, $g_3 l_3$ die Punkte $g_1' l_1', \ldots g_3' l_3'$ zugeordnet.

Das soll benutzt werden, um noch einen Punkt aus dem Problem der räumlichen Projektivität (§ 36) zu erledigen. Die Regelscharen $\mathfrak{A}_1^2$, $\mathfrak{B}_1^2$, welche zwei in bezug auf

$$G^6 \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 \end{matrix}$$

analogen Regelscharen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$ verbunden sind, sind im allgemeinen nicht wiederum analog. Die Leitscharen $\mathfrak{A}_1^2$, $\mathfrak{B}_1^2$ sind projektiv mit den durch A_i und B_i gehenden Geraden in ihren als homologen (Nr. 244). Wenn nun $\mathfrak{A}_1^2$, $\mathfrak{B}_1^2$ auch analog sind, dann sind $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ in derselben Weise projektiv. Durch diese beiden Projektivitäten werden die Trägerflächen von $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{A}_1^2$, $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{B}_1^2$ in einer räumlichen Kollineation entsprechend und zwar den Punkten $A_1, \ldots A_6$ die Punkte $B_1, \ldots B_6$ homolog. Diese 12 Punkte von G^6 sind aber willkürlich gegeben, die zugeordneten sind nicht entsprechend in einer räumlichen Kollineation.

Sind sie es aber, so entspricht jeder Fläche 2. Grades durch die eine Gruppe eine Fläche 2. Grades durch die andere, und die eine wie die andere Regelschar jener Fläche ist in bezug auf G^6 zu der in der Kollineation entsprechenden Regelschar der andern Fläche analog.

Dann und nur dann, wenn die zugeordneten Punkte der beiden Gruppen von G^6 in einer räumlichen Kollineation homolog sind, tritt es ein, daß die verbundenen Regelscharen von analogen wiederum analog sind, und tritt durchweg ein.

Und wenn dies einmal stattfindet, so findet es durchweg statt; denn die Kollineation besteht dann.

Die Kollineation der Felder $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ in Nr. 500 ist festgelegt, wenn drei Punkten E, F, G von k^2 die entsprechenden Punkte E', F', G' von k'^2 zugeordnet sind. Dem Punkt A von φ^2 können dann die beiden Schnitte des Strahls $D'B'$, der dem DAB entspricht, zugeordnet werden. Folglich sind durch die Korrespondenz der Punkte E, F, G von φ^2 mit den E', F', G' von φ'^2 zwei Kollineationen festgelegt, in denen diese Flächen entsprechend sind. Beiden ist die Kollineation der Felder $\mathfrak{d} = EFG$ und $\mathfrak{d}' = E'F'G'$ und die der Bündel um die Pole D, D' gemeinsam. 502

Sind g_1, l_1; g_2, l_2; g_3, l_3 die durch E, F, G gehenden Geraden der beiden Regelscharen von φ^2 und $g_1', l_1'; \ldots$ die durch E', F', G' gehenden auf φ'^2, so ist die eine Kollineation festgelegt durch:

$$\begin{gathered} g_1 l_1, \quad g_1 l_2, \quad g_2 l_1, \quad g_2 l_2, \quad g_3 l_3 \\ g_1' l_1', \; g_1' l_2', \; g_2' l_1', \; g_2' l_2', \; g_3' l_3', \end{gathered}$$

in der andern sind den oberen Punkten die Punkte:

$$l_1' g_1', \; l_1' g_2', \; l_2' g_1', \; l_2' g_2', \; l_3' g_3'$$

zugeordnet; so daß den Regelscharen (g), (l) im ersten Falle die Regelscharen (g'), (l'), im zweiten aber die Regelscharen (l'), (g') korrespondieren.

Ist g die eine Gerade auf φ^2 durch A, so entspricht der Ebene Dg, einer Berührungsebene von φ^2, in beiden Kollineationen dieselbe Ebene durch D', eine Berührungsebene von φ'^2, welche durch den Strahl geht, der dem DA korrespondiert. Sind g', l' die in ihr gelegenen Geraden von φ'^2 und A', $\mathfrak{A}'$ die auf ihnen befindlichen Schnitte dieses Strahles mit φ'^2, so sind A und A' entsprechend in derjenigen Kollineation, welche gleichnamige Regelscharen zuordnet, A und $\mathfrak{A}'$ in der andern, und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ in jener, $\mathfrak{A}$ und A' in dieser, wenn $\mathfrak{A}$ der zweite Schnitt von DA mit φ^2 ist.

Die Kollineation zwischen zwei Flächen 2. Grades φ^2 und φ'^2 führt zu einer quadratischen Verwandtschaft der Bündel um irgend zwei Punkte O, P' auf ihnen, in denen die Strahlen nach entsprechenden Punkten der beiden Flächen homolog sind. 503

Die Beziehung ist ersichtlich eindeutig; ein Strahlenbüschel in O geht nach den Punkten eines Kegelschnitts auf φ^2, welchem ein im allgemeinen nicht durch P' gehender Kegelschnitt auf φ'^2 entspricht; der Kegel 2. Grades, welcher ihn aus P' projiziert, entspricht jenem Strahlenbüschel, und so ist die Verwandtschaft als quadratisch erkannt.

Die Hauptstrahlen (bei denen die Eindeutigkeit aufhört) sind leicht anzugeben. Es seien P und O' die P', O korrespondierenden Punkte, so entspricht in der quadratischen Verwandtschaft dem OP jede Tangente von φ'^2 in P', wie sich ergibt, wenn man sich dem P auf φ^2 in allen möglichen Richtungen nähert. Also ist dem Hauptstrahle OP der Tangentenbüschel oder einfacher die Berührungsebene in P' zugeordnet.

Ferner, seien g_1, l_1 die sich in O schneidenden Geraden der φ^2 und g_1', l_1' die ihnen entsprechenden auf φ'^2 mit O' als Schnittpunkt, und ebenso g_2', l_2' die Geraden von φ'^2, die sich in P' schneiden, und g_2, l_2 ihre entsprechenden auf φ^2 mit P als Schnittpunkt. Den Strahlen g_1, l_1 entsprechen die Ebenen aus P' nach g_1', l_1'; jene sind also Hauptstrahlen. Diese Ebenen enthalten die l_2', g_2', Hauptstrahlen des Bündels P', denen die Ebenen von O nach l_2, g_2 zugeordnet sind, welche wiederum die g_1, l_1 enthalten. Die l_2', g_2' liegen in der Ebene, die dem OP zugeordnet ist, der Berührungsebene von P', und ebenso g_1, l_1 in der Berührungsebene von O, welche dem Hauptstrahl $P'O'$ zugeordnet ist. Wir haben also die beiden Dreikante von Hauptstrahlen OP, g_1, l_1 in O, $P'O'$, g_2', l_2' in P', und jedem ist eine Ebene des andern Dreikants zugeordnet: den OP, g_1, l_1 die Ebenen $g_2'l_2'$, $P'g_1' = (P'O', l_2')$, $P'l_1' = (P'O', g_2')$, den $P'O'$, g_2', l_2' die Ebenen $g_1 l_1$, $Og_2 = (OP, l_1)$, $Ol_2 = (OP, g_1)$.

Nennen wir zwei Hauptstrahlen homolog, wenn jedem die Gegenebene des andern zugeordnet ist, so sind homolog: OP und $P'O'$, g_1 und g_2', l_1 und l_2'.

Falls die Bündelscheitel auf φ^2 und φ'^2 entsprechend sind, entsteht Kollineation.

504 Wenn zwei Flächen 2. Grades φ^2 und φ'^2 in einer Homologie entsprechend sind, so erhalten sie aus dem Zentrum S den nämlichen Tangentialkegel und die Ebene σ schneidet sie in derselben Kurve. Sie sind also in der besonderen gegenseitigen Lage, daß ihre Schnittkurve 4. Ordnung einen Kegelschnitt enthält und der gemeinsam umgeschriebene Torsus 4. Klasse einen Kegel 2. Grades. Jede dieser Eigenschaften hat die andere zur Folge; es genügt, wegen der Dualität, den einen Fall zu beweisen. Wir setzen voraus, die beiden Flächen haben einen gemeinsamen Berührungskegel k; daraus folgt dann, daß sie noch einen zweiten haben. Denn seien τ, τ', τ'' drei Ebenen des restierenden Teils des Torsus 4. Klasse, so haben die beiden Tangentialkegel, welche vom Schnittpunkt $\tau\tau'\tau''$ an die Flächen gehen, diese drei Ebenen τ, τ', τ'' und die beiden Berührungsebenen an k gemeinsam, sind also identisch. Dem entspricht dual, daß ein gemeinsamer Kegelschnitt einen zweiten nach sich zieht. Die beiden Berührungskurven des k mit den Flächen haben zwei Punkte Q, R gemein, in ihnen werden diese je von der nämlichen Ebene berührt, der Tangentialebene des Kegels; woraus wir schon schließen, daß Q, R Doppelpunkte der Durchschnittskurve 4. Ordnung sind. Die Ebene durch

Q, R und einen beliebigen Punkt P dieser Kurve schneidet die Flächen in Kegelschnitten, welche sich in Q, R berühren und in P schneiden, daher identisch sind. Dieser Kegelschnitt bedingt, wie eben gesagt, einen zweiten gemeinsamen, der aber ebenso durch die Ebene sich ergibt, welche Q, R mit irgend einem Punkte des ferneren Schnitts verbindet.

Ein gemeinsamer Tangentialkegel zweier Flächen 2. Grades bedingt einen zweiten und das Zerfallen der Schnittkurve in zwei Kegelschnitte; und umgekehrt.

In Q, R begegnen sich die beiden Kegelschnitte, und sie sind die Berührungspunkte der gemeinsamen Berührungsebenen der beiden Tangentialkegel; QR ist also, in bezug auf beide Flächen, polar zur Verbindungslinie der Spitzen. Die Schnittinvolution dieser Gerade mit dem Büschel lehrt, daß die Spitzen S, S_1 der gemeinsamen Tangentialkegel und die Ebenen σ, σ_1 der gemeinsamen Kegelschnitte sich harmonisch trennen.

Eine Ebene ϵ, durch die Spitze S des einen Tangentialkegels k gelegt, schneidet Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ aus den Flächen aus, für welche S Umbilikalpunkt (Nr. 269) ist und die Schnittlinien s, s_1 mit σ, σ_1 gemeinsame Sekanten, und zwar die dem S korrespondierenden. Denn ihr Schnittpunkt liegt auf der Gerade $\sigma\sigma_1 = QR$, und durch diese gehen die Polarebenen von S, die Ebenen der Berührungskurven von k, also durch den Schnittpunkt die Polaren von S nach $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$; demnach liegt S auf der Gegenseite des Schnitts jener Sekanten im gemeinsamen Polardreieck von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$.

Daher führt S als Zentrum und etwa s als Axe zu einer Homologie, in der $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ entsprechend sind (Nr. 301). Die Polaren von S nach ihnen fallen in die Polarebenen nach den Flächen, also bestimmen diese auf jedem Strahle zwei entsprechende Punkte und die Invariante λ, die daher für alle Ebenen ϵ dieselbe ist. Die räumliche Homologie (S, σ) mit dieser Invariante λ enthält alle ebenen Homologien und transformiert φ^2 in φ'^2.

Wenn die beiden Flächen ungleichartig sind, so kann keine der vier Homologien reell sein. Dazu muß das Zentrum S reell sein, daher auch der gemeinsame Tangentialkegel, als Tangentialkegel an die hyperbolische Fläche. Jeder Strahl des Bündels S sendet an die beiden Flächen dieselben Berührungsebenen, die des Kegels, also gleichartige, muß also, wegen des verschiedenen Verhaltens polarer Geraden bei hyperbolischen und elliptischen Flächen (Nr. 500), in bezug auf seine Schnitte sich ungleichartig verhalten, die eine Fläche reell, die andere imaginär schneiden. Daraus folgt die Behauptung. Auch die Ebenen σ und σ_1 sind nicht reell. Denn die beiden ungleichartigen Flächen liegen zu verschiedenen Seiten des reellen gemeinsamen Berührungskegels, also haben sie keinen reellen Schnitt;

ein imaginärer Kegelschnitt auf einer hyperbolischen Fläche fordert aber eine imaginäre Ebene.

Beachten wir, daß es sich nicht um sich konisch berührende Flächen handelt wie in Nr. 474.

505 Zwei kollinear verwandte Flächen 2. Grades φ^2, φ'^2 führen zu zwei Erzeugnissen: der Kongruenz der Verbindungslinien entsprechender Punkte und der Kongruenz der Schnittlinien entsprechender Berührungsebenen.[1])

Beide Kongruenzen liegen in dem durch die beiden kollinearen Räume erzeugten tetraedralen Komplexe. Betrachten wir die erstere Kongruenz und fassen also die Strahlen des Komplexes als Verbindungslinien entsprechender Punkte auf, so entsteht die Komplexkurve in einer Ebene ω durch die projektiven Punktreihen auf zwei entsprechenden Geraden m, m' und der Komplexkegel aus einem Punkte O durch die projektiven Punktreihen auf zwei entsprechenden kubischen Raumkurven r^3, r'^3 (Nr. 491, 492). Die Schnitte von m, m' mit den beiden entsprechenden Flächen φ^2, φ'^2 geben zwei Paare entsprechender Punkte, deren Verbindungslinien in die Ebene ω fallen, und die sechs Schnittpunkte von r^3, r'^3 mit φ^2, φ'^2 geben sechs Paare entsprechender Punkte, deren Verbindungslinien durch O gehen.

Die Kongruenz der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier kollinearer Flächen 2. Grades ist 2. Klasse 6. Ordnung. Sie hat 12 singuläre Ebenen mit ∞^1 Kongruenzstrahlen. Zu ihnen gehören die vier Koinzidenzebenen der beiden kollinearen Räume; jede schneidet die beiden Flächen in zwei entsprechenden Kegelschnitten; die Punktreihen derselben sind projektiv, und die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen eine Kurve 4. Klasse (Nr. 166); weshalb die vier Ebenen singulär vom 4. Grade heißen.

Wegen der eindeutigen Beziehung ihrer Tangenten auf die Punkte des einen oder andern Kegelschnitts ist sie vom Geschlechte 0 und muß drei Doppeltangenten haben.

Zu den andern singulären Ebenen führen uns die Regelscharen der beiden Flächen φ^2, φ'^2; wir wissen, daß der einen (g) von φ^2 die eine (g') von φ'^2 und der andern (l) die andere (l') projektiv zugeordnet sind. Jede zwei entsprechende Geraden g und g' führen zu einer Regelschar, welche der Kongruenz angehört, und ebenso jede zwei entsprechende Geraden l, l'. Die Kongruenz wird also von zwei einfach unendlichen Reihen von Regelscharen durchzogen derartig, daß jeder Strahl von ihr zu je einer Regelschar aus jeder der beiden Reihen gehört.

Es ist in Nr. 180, 208 bewiesen, daß bei zwei projektiven Regel-

---

1) Reye, Journal f. Math. Bd. 93 S. 81.

scharen viermal entsprechende Geraden sich schneiden. Jedes solche Paar sich schneidender entsprechenden Geraden aus (g) und (g') oder aus (l) und (l') führt zu einer in einen Kegelschnitt ausgearteten Regelschar.

Es ergeben sich so acht singuläre Ebenen 2. Grades, welche in zwei Gruppen von je vier Ebenen zerfallen.

Die Kanten des Koinzidenztetraeders sind sich selbst entsprechend; die Schnitte jeder von ihnen mit der einen Fläche entsprechen denen mit der andern. Daher sind sie Doppelstrahlen der Kongruenz, und die drei in einer singulären Ebene 4. Grades, einer Ebene des Koinzidenztetraeders gelegenen sind die drei oben erwähnten Doppeltangenten der Kurve 4. Klasse in derselben (Nr. 289).

Von jeder der oben genannten Regelscharen fällt eine Gerade in jede der vier Koinzidenzebenen und wird dadurch Tangente der Kurve 4. Klasse; denn die beiden Punkte, in denen zwei entsprechende Geraden g und g' oder l und l' die Ebene treffen, sind entsprechend; folglich hat auch jeder der acht singulären Kegelschnitte eine Tangente in der Ebene. Jede Regelschar der einen Reihe, entstanden aus g und g', und jede der andern, entstanden aus l und l', haben eine Gerade gemein, die Verbindungslinie von gl und $g'l'$; es haben daher auch zwei singuläre Kegelschnitte aus verschiedenen Gruppen eine Tangente gemein. So zeigt sich, daß jede der vier singulären Kurven 4. Klasse mit allen 11 übrigen eine Tangente gemeinsam hat, mit den drei gleichartigen solche, die je für beide Kurven Doppeltangenten sind. Hingegen jeder singuläre Kegelschnitt hat eine Tangente mit den singulären Kurven 4. Klasse und den vier singulären Kegelschnitten der andern Gruppe gemein.

Die vier singulären Ebenen 4. Grades bilden mit den vier singulären Ebenen 2. Grades der einen oder andern Gruppe acht assoziierte Ebenen; denn die Trägerflächen aller Regelscharen der einen Reihe berühren sie.

Dual ist die Kongruenz der Schnittlinien entsprechender Berührungsebenen der beiden kollinearen Flächen 2. Grades eine Kongruenz 2. Ordnung und 6. Klasse. Sie hat 12 singuläre Punkte; aus den vier Koinzidenzpunkten kommen Kegel 4. Ordnung, erzeugt durch die Schnittlinien entsprechender Tangentialebenen zweier projektiven Kegel 2. Grades, und aus den acht Schnittpunkten entsprechender Geraden g und g', l und l' kommen Kegel 2. Grades, erzeugt durch die projektiven Ebenenbüschel um diese Geraden.[1])

1) Diese Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse (und die duale 2. Klasse 6. Ordnung) wurde früher zur Unterscheidung von einer andern Kongruenz derselben Ordnung und Klasse erster Art genannt und diese andere zweiter Art. Ich habe in meiner Liniengeometrie Bd. II Nr. 319 erörtert, daß die umgekehrte Be-

Wenn eine Fläche 2. Grades φ^2 in bezug auf eine andere f^2 in eine dritte φ'^2 polarisiert wird, so werden zunächst jedem Punkte X von φ^2 und seiner Berührungsebene ξ eine Berührungsebene ξ' von φ'^2 und ihr Berührungspunkt X' zugeordnet; nun sind aber X' und ξ' einander zugeordnet in der Polaritäts-Korrelation von φ'^2 (Nr. 468). Daher sind X und ξ den X' und ξ' kollinear zugeordnet, und z. B. die Verbindungslinien XX' entsprechender Punkte erzeugen eine Kongruenz 2. Klasse 6. Ordnung.

In Nr. 338 ersetzten wir, behufs der projektiven Verallgemeinerung der Normalität, das absolute Polarfeld in der unendlich fernen Ebene und die absolute Kurve durch ein beliebiges Polarfeld und seine Basiskurve. Wir können noch weiter gehen. Diese Kurve ist eine Ausartung einer Fläche 2. Grades, bei der die ∞^2 Tangentialebenen ∞^1 Büschel um die Tangenten eines Kegelschnitts bilden; ersetzen wir sie durch eine allgemeine Fläche 2. Grades f^2 (absolute Fläche), so sind zu einer Ebene alle die Geraden normal (quasinormal), welche nach ihrem Pole in bezug auf f^2 gehen; Quasinormalen der φ^2 (und zugleich der φ'^2) sind dann die obigen Verbindungslinien XX', und ihr Erzeugnis eine Kongruenz 2. Klasse 6. Ordnung. Das Koinzidenztetraeder der Kollineation zwischen φ^2 und φ'^2 ist das gemeinsame Polartetraeder für φ^2 und f^2, welches auch Polartetraeder für φ'^2 wird.

Im Falle der eigentlichen Normalen, wo die absolute Kurve Basis der räumlichen Polarisation ist, bleiben Klasse und Ordnung dieselben.[1])

§ 76. Die φ^2-Kollineation, ihre beiden Arten.

506 Wenn eine Fläche 2. Grades φ^2 durch Kollineation in sich selbst transformiert werden soll, so sieht man sofort, daß zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden sind. In dem einen entspricht jede der beiden Regelscharen sich selbst, im andern entsprechen sie einander.

Spezielle Kollineationen von den beiden Arten sind die windschiefe Involution mit Axen, welche in bezug auf φ^2 polar sind, und die involutorische Homologie, deren Zentrum S und Ebene σ nach φ^2 polar sind (Nr. 479). Bei jener gehören entsprechende Geraden mit den Axen zu einer Regelschar,

zeichnung wohl die richtigere ist, und Fano hat (Annali di Matemica, Ser. II, Bd. 21) noch einen andern Grund für diese Änderung angegeben. Die beiden Arten sind eingehender behandelt in Nr. 450 ff. und Nr. 461 ff. von Bd. II der Liniengeometrie.

1) Über die Zahl der Normalen aus einem Punkte an eine Fläche vgl. Math. Annalen Bd. 6, S. 241, Bd. 7 S. 567; zur obigen Normalenkongruenz der Fläche 2. Grades auch Liniengeometrie Bd. I Nr. 283, Bd. III Nr. 873.

sind also windschief. Daraus folgt, daß jeder Gerade der φ^2 eine Gerade aus derselben Regelschar entspricht. Bei dieser schneiden sich entsprechende Geraden auf σ (mit Verbindungsebene durch S); mithin entspricht jeder Gerade von φ^2 eine aus der andern Schar.

Wir unterscheiden: φ^2-Kollineation erster und zweiter Art.

Bei der ersten Art hat jede der beiden Regelscharen von φ^2, weil in sich projektiv, zwei Koinzidenzgeraden, und die vier Schnitte der einen mit den andern sind die vier Koinzidenzpunkte, welche die Kollineation auf der Fläche besitzt, und in ihnen berühren vier Koinzidenzebenen. Folglich gehören alle Koinzidenzpunkte und Koinzidenzebenen der Fläche an. Die vier Geraden der Fläche, aus jeder Regelschar zwei, welche sich in den Koinzidenzpunkten schneiden und durch die Koinzidenzebenen verbunden sind, sind vier Kanten des Koinzidenz-Tetraeders, welche ein windschiefes Vierseit bilden.

Bei der φ^2-Kollineation zweiter Art gehen die beiden Regelscharen ρ, σ ineinander über, aber in zwei Projektivitäten. Unterscheiden wir ρ_{I} und ρ_{II} nach dem Raume, zu dem sie gerechnet sind, und ebenso σ_{I} und σ_{II}; so haben wir eine Projektivität zwischen ρ_{I} und σ_{II} und zwischen ρ_{II} und σ_{I}. Da gibt es (Nr. 209) zwei Paare r_1, s_1; r_2, s_2 von Geraden aus ρ, σ, die in beiden Projektivitäten, also in der Kollineation involutorisch sich entsprechen. Mithin sind in diesem Falle zwei auf der Fläche gelegene Koinzidenzpunkte $T = r_1 s_1$, $U = r_2 s_2$ vorhanden und zwei sie berührende Koinzidenzebenen υ, τ, die Berührungsebenen dieser Punkte. Die andern Ecken V, W und Ebenen φ, ψ des Koinzidenztetraeders inzidieren nicht mit φ^2.[1])

Bei der quadratischen Verwandtschaft (Nr. 503), die sich ergibt, wenn entsprechende Punkte der φ^2 aus zwei beliebigen Punkten O, P' dieser Fläche projiziert werden, treten als Hauptelemente die auf, mit welchen wir bei der Erzeugung der Fläche 2. Grades durch korrelative Bündel zu tun gehabt haben (§ 59).

Wird aus demselben Punkte $O \equiv P'$ der φ^2 projiziert, so ergeben sich konzentrische quadratisch verwandte Bündel. Dem Punkte $O \equiv P'$, dessen Berührungsebene $\omega \equiv \pi'$ sei, mögen O', P entsprechen. Durch ihn gehen die Geraden $g \equiv h'$ aus der einen und $l \equiv m'$ aus der andern Regelschar, denen g', h, l', m korrespondieren: g', l' schneiden sich in O', h, m in P. Bei der φ^2-Kollineation der ersten Art gehören $g \equiv h'$, g', h zu der ersten, $l \equiv m'$, l', m zu der zweiten Regelschar, bei derjenigen der zweiten Art $g \equiv h'$, l', m zur ersten, $l \equiv m'$, g', h zur zweiten Regelschar. Hauptstrahlen der Verwandtschaft sind in beiden Fällen:

1) Zeuthen, Math. Annalen Bd. 18, S. 33, insbes. § II; Sturm, ebenda Bd. 26, S. 468.

$$g, l, OP;\ h', m', P'O',$$

ihnen zugeordnete Ebenen:

$$(P', g'),\ (P', l'),\ \pi';\ (O, h),\ (O, m),\ \omega;$$

oder, anders geschrieben, im ersten Falle:

$$(m', P'O'),\ (h', P'O'),\ (h', m');\ (l, OP),\ (g, OP),\ (g, l),$$

im zweiten aber:

$$(h', P'O'),\ (m', P'O'),\ (h', m');\ (g, OP),\ (l, OP),\ (g, l).$$

Im ersten Falle liegt daher keiner von den Hauptstrahlen in der zugeordneten Ebene, im zweiten tun es $g \equiv h'$, $l \equiv m'$, und zwar liegt jeder von diesen beiden Bündeln gemeinsamen Hauptstrahlen in beiden zugeordneten Ebenen.

In beiden Fällen ergeben sich vier sich selbst entsprechende Strahlen der ineinander liegenden quadratisch verwandten Bündel, was einem späteren Satz über die quadratische Verwandtschaft entspricht. Im ersten Falle gehen sie nach den vier auf φ^2 befindlichen Koinzidenzpunkten, im zweiten aber sind zwei von ihnen die genannten Hauptstrahlen, die je mit einem von den ∞^1 entsprechenden Strahlen, welche den Büschel in der zugeordneten Ebene erfüllen, zusammenfallen, die beiden andern gehen nach den auf φ^2 gelegenen Koinzidenzpunkten der φ^2-Kollineation.

507 In diesen beiden Koinzidenzpunkten T, U der zweiten Art begegnen sich zwei Kegelschnitte i^2, j^2 der Fläche φ^2, welche durch die Schnittpunkte entsprechender Geraden aus ρ_{I} und σ_{II}, bzw. ρ_{II} und σ_{I} entstehen (Nr. 105). Zwischen ihnen bestehen zwei zur Kollineation gehörige Projektivitäten, in deren einer i^2 zum ersten, j^2 zum zweiten Raume gerechnet wird, während in der zweiten das Umgekehrte gilt; jeder Punkt des einen hat zwei verschiedene entsprechende auf dem andern, so daß die beiden Kegelschnitte sich involutorisch entsprechen (aber nicht ihre Punkte).

In der Tat, es sei $g \equiv h'$ eine Gerade aus ρ und g', h die beiden ihr in σ entsprechenden, so sind die Schnitte $gg', h'h$ Punkte von i^2 und j^2; wir können sie aber auch $g'h'$ und gh nennen, also sind sie in der Kollineation entsprechend und zwar dem zweiten und ersten Raume zugehörig, mithin auch entsprechend in der zweiten jener Projektivitäten. Sei ferner g' aus σ als Gerade des ersten Raums mit k bezeichnet und k' die ihr entsprechende in ρ und im zweiten Raume, so kommt ihr Schnittpunkt als $k'k$ auf j^2, und als $g'k'$ ist er dem gk auf i^2, der vorhin gg' und $g'h'$ hieß, entsprechend; und wir haben so zu demselben Punkte $gk \equiv g'h'$ auf i^2 die beiden entsprechenden Punkte $g'k'$ und gh auf j^2. In der einen Projektivität, in der i^2 zum ersten, j^2 zum zweiten Raume gehört und gk und $g'k'$ entsprechend sind, ist die Gerade $k \equiv g'$ aus der Regelschar σ die verbindende Gerade, in der andern, wo i^2 zum zweiten Raume, j^2 zum ersten gehört und $g'h'$ und gh homolog sind, ist $g \equiv h'$ aus der Regelschar ρ die verbindende Gerade. Die Projektivität $(i_{\mathrm{I}}^2, j_{\mathrm{II}}^2)$ erzeugt also die Regelschar σ, die andere $(i_{\mathrm{II}}^2, j_{\mathrm{I}}^2)$ die Regelschar ρ.

Die Koinzidenzebenen φ, ψ, welche nicht die Fläche φ^2 berühren, beide durch TU gehend, schneiden φ^2 in zwei eigentlichen Kegelschnitten, welche durch T, U gehen und sich selbst entsprechen, so daß wir in vier Ebenen des Büschels um TU ausgezeichnete Kegelschnitte haben: diese beiden sich selbst entsprechenden (φ), (ψ) und die beiden oben besprochenen i^2, j^2, welche sich involutorisch entsprechen.

Das Duale gilt für die Kegel, welche längs dieser Kegelschnitte berühren und ihre Spitzen auf der Kante VW des Koinzidenztetraeders haben, welche ja polar zu TU ist als Schnittlinie der Berührungsebenen υ, τ. Und zwar haben die Kegel, welche längs (φ) und (ψ) berühren, ihre Spitzen in V, W, den Gegenecken der Ebenen φ, ψ, welche die Pole von φ, ψ sind. Denn VW ist Polare von TU; auf dieser sich selbst entsprechenden Gerade VW entstehen involutorische Punktreihen, da ja die beiden Schnitte mit φ^2 sich in beiderlei Sinne entsprechen. Sie sind daher harmonisch zu V, W und diese konjugiert in bezug auf φ^2. Also ist $\varphi = TUW$ Polarebene von V und ψ von W.

Man kann (Nr. 501) die Verwandtschaft auf φ^2 auch herstellen, indem man die Regelscharen benutzt; gehören g_1, g_2, g_3; g_1', g_2', g_3' zu der einen, l_1, l_2, l_3; l_1', l_2', l_3' zu der andern Regelschar, so ergibt sich Kollineation erster oder zweiter Art, je nachdem man den Punkten (Ebenen):

$$g_1 l_1,\ g_1 l_2,\ g_2 l_1,\ g_2 l_2,\ g_3 l_3$$

die Punkte (Ebenen):

$$g_1' l_1',\ g_1' l_2',\ g_2' l_1',\ g_2' l_2',\ g_3' l_3'$$

oder:

$$l_1' g_1',\ l_1' g_2',\ l_2' g_1',\ l_2' g_2',\ l_3' g_3'$$

zuordnet.

Drei Paare entsprechender Punkte: $g_1 l_1$, $g_1' l_1'$; $g_2 l_2$, $g_2' l_2'$; $g_3 l_3$, $g_3' l_3'$ bestimmen eindeutig eine Verwandtschaft der einen und eine der andern Art.

Durchläuft ein Punkt X auf φ^2 einen Kegelschnitt, so werden die beiden Regelscharen zueinander projektiv, mit solchen Geraden als homologen, die sich auf ihm schneiden (Nr. 105); die Projektivitäten innerhalb der Regelscharen oder zwischen ihnen, die durch die Kollineation hervorgerufen werden:

$$g_1 g_2 g_3 \barwedge g_1' g_2' g_3',\ l_1 l_2 l_3 \barwedge l_1' l_2' l_3';$$

bzw.

$$g_1 g_2 g_3 \barwedge l_1' l_2' l_3',\ l_1 l_2 l_3 \barwedge g_1' g_2' g_3'$$

bewirken dann eine zweite Projektivität zwischen ihnen, und deren Erzeugnis ist der vom entsprechenden Punkte X' durchlaufene Kegelschnitt.

508 Jede Homologie, welche eine Fläche 2. Grades φ^2 in sich selbst transformiert, oder jede Kollineation mit Axen, für die das gilt, deren Axen aber nicht auf der Fläche liegen, ist involutorisch; denn die ebene Homologie, welche durch eine Ebene ausgeschnitten wird, die mit dem Scheitel oder einer der Axen inzidiert, transformiert den aus der Fläche ausgeschnittenen Kegelschnitt, einen allgemeinen, in sich selbst und ist daher involutorisch (Nr. 305). Dann sind Zentrum und Ebene, bzw. die Axen polar in bezug auf φ^2.

Dagegen führt eine Kollineation mit Axen, auch wenn sie nicht involutorisch ist, jede Fläche 2. Grades, welche durch die Axen geht, in sich selbst, weil jede Gerade derjenigen Regelschar, zu welcher die Axen nicht gehören, in sich selbst übergeht und jede Gerade der andern in eine Gerade, die ebenfalls dieser Regelschar angehört. Also handelt es sich um φ^2-Kollineation erster Art. Daß die φ^2-Homologie („involutorisch“ wird überflüssig) zweiter Art, und die windschiefe φ^2-Involution mit polaren Axen erster Art ist, wissen wir schon.

Bei jener ist der Kegelschnitt von φ^2 in σ sich selbst entsprechend, und zwar auch jedes Element von ihm; dasselbe gilt für den Berührungskegel von φ^2 aus S. Auch alle Kegelschnitte von φ^2 in den Ebenen durch S und ihre aus Punkten von σ kommenden Berührungskegel sind sich selbst entsprechend, so jedoch, daß die Elemente sich involutorisch entsprechen und die Doppelelemente mit σ oder S inzidieren.

Dieser Spezialfall der φ^2-Kollineation zweiter Art hat, statt bloß zweier der Fläche angehöriger Koinzidenzpunkte und Koinzidenzebenen, eine Koinzidenzkurve (in σ) und einen Koinzidenzkegel (aus S), soweit es sich um Elemente von φ^2 handelt.

Transformiert man φ^2 hintereinander in sich selbst durch zwei involutorische Homologien (S, σ), (S_1, σ_1), so entsteht eine φ^2-Kollineation erster Art, welche die besondere Eigenschaft hat, einen Büschel sich selbst entsprechender Ebenen und eine Punktreihe sich selbst entsprechender Punkte zu besitzen, nämlich um $u = SS_1$ und auf $v = \sigma\sigma_1$. Das ist aber keine Kollineation mit Axen, denn die Punkte auf u, die Ebenen durch v sind nicht sich selbst entsprechend, sondern der in Nr. 475 besprochene allgemeinere Fall.

Bei einer φ^2-Homologie haben die beiden Projektivitäten zwischen den Regelscharen, weil eben durchweg involutorisches Entsprechen statt hat, in eine sich vereinigt, jeder Schnittpunkt (involutorisch) sich entsprechender Geraden ist sich selbst entsprechender Punkt; die beiden Kurven i^2, j^2 sind in die Koinzidenzkurve in σ, die zugehörigen Berührungskegel in den Koinzidenzkegel aus S zusammengefallen.

Die Fläche φ^2, die durch eine windschiefe Involution mit polaren Axen u, v in sich selbst übergeht, enthält nur vier Koinzidenzpunkte und vier Koinzidenzebenen, die Schnitte mit den Axen und die zugehörigen Berührungsebenen, welche je durch die andere Axe gehen. Diese vier Punkte und Ebenen bilden ein Koinzidenztetraeder mit vier auf φ^2 gelegenen Kanten, aber, wie wir wissen, nicht das einzige Koinzidenztetraeder der Kollineation.

Sich selbst entsprechend, jedoch nicht Element für Element, sind die Kegelschnitte auf φ^2 in den Ebenen durch die Axen und die Berührungskegel längs derselben, die je aus einem Punkte der andern Axe kommen.

Die Projektivitäten in den Regelscharen sind Involutionen, deren Doppelstrahlen das Vierseit bilden, von dem die Axen die Diagonalen sind.

Wenn zwei windschiefe Involutionen $(u,v), (u_1, v_1)$ hintereinander die Fläche φ^2 in sich überführen, so sind die beiden Treffgeraden r, s der vier Axen auch polar in bezug auf φ^2; denn die Polarebenen der vier Punkte $r(u, v, u_1, v_1)$ gehen durch v, u, v_1, u_1, die gemeinsame Gerade, die Polare von r, trifft sie alle vier und ist die zweite Treffgerade s.

Diese beiden Geraden r, s sind in derjenigen φ^2-Kollineation erster Art, welche Produkt $(u, v) \cdot (u_1, v_1)$ ist, sich selbst entsprechend, wie in jedem der beiden Faktoren. Die Schnittpunkte von r, s mit φ^2 sind die vier Koinzidenzpunkte dieser Kollineation, und ihre Berührungsebenen, je durch die andere Gerade gehend, die Koinzidenzebenen. In jedem der Faktoren entsprechen sie sich gegenseitig. Folglich sind die Geraden r, s die Diagonalen des Vierseits der sich selbst entsprechenden Geraden auf φ^2 für diese Kollineation.

Wir wollen die Möglichkeit erörtern, eine gegebene φ^2-Kolli- 509
neation in involutorische Homologien oder windschiefe Involutionen zu zerlegen.[1]) Die Anzahl der Homologien muß natürlich gerade oder ungerade sein, je nachdem die Kollineation erster oder zweiter Art ist.

Es liege zunächst eine φ^2-Kollineation zweiter Art vor mit der besonderen Eigenschaft, daß sie einen Büschel sich selbst entsprechender Ebenen um eine Gerade u, welche nicht auf φ^2 liegt, oder, was genügt, drei sich selbst entsprechende Ebenen besitzt, welche durch die Gerade u gehen. Diese Kollineation muß involutorische Homologie

1) Immer solche gemeint, welche φ^2 in sich selbst überführen.

sein. Die Gerade u entspricht sich selbst, ebenso die Kegelschnitte auf φ^2 in den Ebenen durch u; also müssen die beiden Punkte $u\varphi^2$, durch die sie alle gehen, entweder sich involutorisch entsprechen oder jeder sich selbst. In diesem Falle würden, wegen der zweiten Art, die beiden Geraden von φ^2, die durch einen dieser Punkte gehen, einander entsprechen, also auch die Ebenen, welche sie mit u verbinden; was der Voraussetzung widerspricht.

Auf u haben wir also ein involutorisches Paar, daher eine Involution in der Kollineation, aber auch auf jedem der genannten Kegelschnitte, ebenfalls wegen dieses Paars. Das Zentrum einer jeden dieser Involutionen muß auf u liegen, sich selbst entsprechen, weil dies für jede der Verbindungslinien gepaarter Punkte gilt, also einer der Doppelpunkte der geradlinigen Involution auf u sein und, wie die Kontinuität fordert, für alle derselbe; durch den andern gehen die Involutionsaxen, die ja auch sich selbst entsprechend sind; diese Axen, als Polaren des Zentrums S, erfüllen die Polarebene des S in bezug auf φ^2; man sieht, es handelt sich um involutorische Homologie.

Jetzt sei eine φ^2-Kollineation erster Art vorausgesetzt: mit der nämlichen besonderen Eigenschaft. Diesmal müssen die Punkte $u\varphi^2$ sich selbst entsprechen; denn entsprächen sie sich involutorisch, so würde dies auch für die beiden durch sie gehenden Geraden g (oder l) gelten und die Ebenen, welche sie mit u verbinden und verschieden sind. Auf u legen wir das Zentrum S einer φ^2-Homologie (S, σ); sie verwandle den Punkt X, den die gegebene Kollineation in X' überführt, in X''; die Kollineation (X'', X') zweiter Art führt, weil die Homologie es auch tut, alle Ebenen von u in sich über, also ist sie involutorische Homologie (S_1, σ_1), und die gegebene φ^2-Kollineation ist so zum Produkte zweier Homologien gemacht. Sie ist, im allgemeinen, von der im Anfang von Nr. 475 erwähnten Art. Das neue Zentrum S_1 liegt ebenfalls auf u.

Sollte aber auf u noch ein dritter sich selbst entsprechender Punkt vorhanden sein und damit alle Punkte von u diese Beschaffenheit haben, so müssen das Zentrum S und der Schnitt $u\sigma$, weil auch in der ersten Homologie sich selbst entsprechend und sie allein, auch in der zweiten es sein und das Zentrum S_1 in σ fallen und σ_1 durch S gehen, weil Identität der beiden Homologien ja ausgeschlossen ist.

Zwei solche involutorische Homologien, bei denen jedes Zentrum mit der andern Ebene inzidiert, vereinigen sich aber zu einer windschiefen Involution, deren Axen $u = SS_1$ und $v = \sigma\sigma_1$ sind. In der Tat, wenn X durch (S, σ) in X'', dieser durch (S_1, σ_1) in X' übergeht, so seien V der Schnitt der Ebene $XX''X'$, die durch S, S_1 und u geht, mit v, $\mathfrak{S}$ der von SXX'' mit σ, auf S_1V gelegen, $\mathfrak{S}_1$ der Schnitt von $S_1X''X'$ mit σ_1, auf SV gelegen.

Es ist dann $-1 = (S\mathfrak{S}XX'') = (S_1\mathfrak{S}_1X''X') = (\mathfrak{S}_1S_1X'X'')$; daher geht XX' durch $V = (S\mathfrak{S}_1, S_1\mathfrak{S})$, trifft also v, ersichtlich auch u, nämlich in U, und der Wurf $UVXX'$ ist (aus S_1) perspektiv zu $S\mathfrak{S}XX''$, also harmonisch.

Involutorische Homologien aber, bei denen die beiden Inzidenzen nicht eintreten, lassen sich nicht so vereinigen.

Wir betrachten nun weiter eine beliebige φ^2-Kollineation zweiter Art. Sie hat zwei Koinzidenzebenen φ, ψ, welche durch die Verbindungslinie der beiden auf φ^2 befindlichen Koinzidenzpunkte T, U gehen und eigentliche Kegelschnitte ausschneiden. In eine von ihnen, etwa in ψ, legen wir das Zentrum einer φ^2-Homologie (X, X''). Die φ^2-Kollineation (X'', X') ist dann erster Art. Für sie ist ψ ebenfalls Koinzidenzebene. T, U sind für jene Homologie nicht Koinzidenzpunkte, also auch nicht für diese Kollineation. Auf dem sich selbst entsprechenden Kegelschnitte in ψ entstehen zwei Koinzidenzen der Kollineation (X'', X'), welche in dem sich selbst entsprechenden Vierseite auf φ^2 zwei Gegenecken sind, weil ψ einen eigentlichen Kegelschnitt ausschneidet. Und so haben wir durch die Verbindungslinie u dieser beiden Koinzidenzen drei verschiedene sich selbst entsprechende Ebenen, ψ und die beiden Berührungsebenen, welche durch je zwei Seiten des Vierseits gehen; folglich sind es alle Ebenen des Büschels, und die φ^2-Kollineation (X'', X') kann in zwei Homologien zerlegt werden, deren Zentren auf u und daher auch auf ψ liegen; und die gegebene ist in drei zerlegt.

Jede φ^2-Kollineation zweiter Art kann in eine Folge von drei φ^2-Homologien zerlegt werden, deren Zentren alle drei in einer der beiden Ebenen liegen, welche einen sich selbst entsprechenden allgemeinen Kegelschnitt enthalten. Das erste Zentrum kann beliebig in diese Ebene gelegt werden, das zweite dann beliebig auf eine durch das erste bestimmte Gerade, das dritte ist bestimmt.

Legen wir das zweite in den Schnitt dieser Gerade mit der Ebene der ersten Homologie, so folgt von selber, daß die Ebene der zweiten Homologie durch das Zentrum der ersten geht; weil Zentrum und zugehörige Ebene ja polar nach φ^2 sind.

Folglich können wir nunmehr die beiden ersten Homologien in eine windschiefe Involution zusammenziehen, und die gegebene φ^2-Kollineation ist zerlegt in eine windschiefe Involution und eine Homologie.

Eine φ^2-Kollineation erster Art zerlegen wir in eine Homologie 510
(X, X') und eine φ^2-Kollineation (X'', X'), die dann zweiter Art ist. Wir zerlegen diese also in drei Homologien oder eine windschiefe Involution und eine Homologie und haben dann die gegebene Kollineation zerlegt in vier Homologien oder in zwei Homologien und

eine windschiefe Involution, von denen diese durch jene eingeschlossen wird. Bei der Zerlegung der (X'', X') in drei Homologien kann man die erste derselben wieder so einrichten, daß ihr Zentrum in die Ebene von (X, X'') fällt, also ihre Ebene durch deren Zentrum geht; dann lassen sich diese beiden Homologien zu einer windschiefen Involution vereinigen.

Daß man eine φ^2-Kollineation zweiter Art auch in eine Homologie und eine ihr folgende windschiefe Involution zerlegen kann, ergibt sich am einfachsten daraus, daß ihre Umkehrung sich als Produkt in der andern Reihenfolge darstellen läßt: wenn $(X', X) = (X', X'') \cdot (X'', X)$, wo (X', X'') windschiefe Involution und (X'', X) Homologie ist, so ist $(X, X') = (X, X'') \cdot (X'', X')$. Daraus folgt für die φ^2-Kollineation erster Art, daß sie Produkt zweier Homologien und einer windschiefen Involution ist, und jene, die aufeinander folgen, so eingerichtet werden können, daß sie zum Produkt eine windschiefe Involution haben, und die φ^2-Kollineation Produkt zweier solchen Involutionen ist. Also:

Eine φ^2-Kollineation läßt sich, je nachdem sie zweiter oder erster Art ist, in drei, bzw. vier Homologien zerlegen; und diese lassen sich auch so einrichten, daß zwei aufeinander folgende zu einer windschiefen Involution sich vereinigen.

Da die Ebenen φ, ψ nicht reell sein müssen, so brauchen auch diese Verwandtschaften nicht reell zu sein. Sehen wir zu, ob die Zerlegung in zwei windschiefe Involutionen sich nicht direkter nachweisen läßt.

Es liege eine φ^2-Kollineation erster Art vor; g_1, g_2, l_1, l_2 seien die vier sich selbst entsprechenden Geraden, die auf der Fläche liegen, r, s die beiden Diagonalen dieses Vierseits, ebenfalls sich selbst entsprechend und polar in bezug auf φ^2. Für jede Gerade u, welche diese beiden Polaren schneidet, hat ihre Polare v dieselbe Eigenschaft. Die windschiefe Involution (u, v) bringt in die beiden Regelscharen von φ^2 je eine Involution, in der auch g_1 und g_2, bzw. l_1 und l_2 gepaart sind, weil die Schnitte der Leitstrahlen r, s der Involution mit φ^2, auf g_1 und g_2, l_1 und l_2 gelegen, entsprechend sind. Diese Involution hat mit der Projektivität, welche die gegebene Kollineation in der betreffenden Regelschar bewirkt, zwei Paare gemeinsam; es sei g_0, g_0' eins dieser Paare in der (g)-Regelschar und l_0, l_0' eins in der (l)-Regelschar, ferner u_1, v_1 die Geraden durch den Punkt $g_0' l_0'$, bzw. in der Ebene $g_0' l_0'$, welche r, s treffen, also zwei polare Geraden. Die windschiefe Involution (u_1, v_1) transformiert ebenfalls φ^2 in sich, und zwar vertauscht sie, ebenso wie die (u, v), die Geraden g_1, g_2; l_1, l_2; die g_0', l_0', welche beide Axen treffen, gehen in sich selbst über.

Demnach führt (u, v) die Geraden g_1, g_2, g_0, l_1, l_2, l_0 in g_2, g_1,

g_0', l_2, l_1, l_0' über, (u_1, v_1) führt diese in g_1, g_2, g_0', l_1, l_2, l_0' über, d. h. die Folge der beiden windschiefen Involutionen tut dasselbe wie die gegebene Kollineation: sie führt g_1, g_2, g_0, l_1, l_2, l_0 in g_1, g_2, g_0', l_1, l_2, l_0' über. Durch dies Entsprechen ist aber die Kollineation eindeutig festgelegt; und die gegebene Kollineation erster Art ist so in zwei windschiefe Involutionen zerspalten. In Nr. 508 ist gezeigt worden, daß alle vier Axen zweier windschiefen φ^2-Involutionen die beiden Diagonalen des Vierseits treffen müssen, welches durch die vier Geraden auf φ^2 gebildet wird, die in dem Produkte sich selbst entsprechen.

Durch diese Zerlegungen haben wir ein einfaches Mittel erhalten, auf einer Fläche 2. Grades, insbesondere auf einer elliptischen, wo mit den Regelscharen nicht gearbeitet werden kann, Kollineationen der einen oder andern Art herzustellen.

Wir wissen (Nr. 507), daß jede der beiden Arten eindeutig 511
dadurch festgelegt ist, daß drei Punkten A, B, C der Fläche φ^2 drei andere A', B', C' zugeordnet sind. Es kommt also nur darauf an, in einfachster Weise die Zentren der drei, bzw. vier involutorischen Homologien zu erhalten. Wir nehmen zunächst den leichteren Fall der zweiten Art vor, bei dem nur drei notwendig sind. Die Kegelschnitte, welche von den Ebenen $\mathfrak{d} = ABC$ und $\mathfrak{d}' = A'B'C'$ aus φ^2 geschnitten werden, seien k^2 und k'^2. Durch eine von den Homologien führen wir die Punkte A', B', C' in drei ebenfalls auf k^2 gelegene Punkte A'', B'', C'' über, also k'^2 in k^2; folglich muß das Zentrum Spitze eines Kegels 2. Grades sein, welcher durch k^2 und k'^2 geht und daher zum Flächenbüschel $(\varphi^2, \mathfrak{d}\mathfrak{d}')$ gehört; in jeder Ebene durch die Spitze ergeben sich diese und der Schnittpunkt mit der Gerade $p = \mathfrak{d}\mathfrak{d}'$ als Doppelpunkte zweier Geradenpaare des aus dem Flächenbüschel geschnittenen Kegelschnitt-Büschels, also konjugiert in bezug auf den aus φ^2 geschnittenen Kegelschnitt und auf φ^2 selbst; d. h. die Spitze liegt auf der Polarebene jedes Punktes von p, also auf der Polare p_1 von p in bezug auf φ^2; auf dieser ist sie dann der eine Doppelpunkt Q_1 der Involution, welche durch die Paare der Schnittpunkte mit φ^2 und $\mathfrak{d}\mathfrak{d}'$ bestimmt wird; der andere Q_2 ist Spitze des zweiten Kegels 2. Grades durch k^2 und k'^2. In dem Falle, der uns jetzt besonders interessiert, wo φ^2 elliptisch ist, sind diese Punkte Q_1, Q_2 immer reell; denn wenn p die φ^2 reell schneidet, tut p_1 es imaginär, und die Involution ist wegen dieses imaginären Paares hyperbolisch; wenn aber p imaginär schneidet, so sind die Schnitte von p_1 mit φ^2 die Berührungspunkte der reellen von p kommenden Tangentialebenen, welche zu den beiden reell schneidenden Ebenen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ hyperbolische Lage haben; also ist auch diesmal die Involution auf p_1 hyperbolisch.

Die durch p und Q_2 gehende Polarebene von Q_1 ist die Ebene der Homologie, welche A', B', C' in A'', B'', C'' überführt und k'^2 in k^2.

Nachdem nun alle sechs Punkte A, B, C; A'', B'', C'' auf den Kegelschnitt k^2 gebracht sind, haben wir nach der Vorschrift von Nr. 121 die Projektivität

$$ABC \barwedge A''B''C''$$

auf demselben in zwei Involutionen zu zerlegen mit den Zentren O_1, P_1, von denen die erste A, B, C in A''', B''', C''' und die zweite diese in A'', B'', C'' überführt; beide Zentren liegen auf der Axe der zerlegten Projektivität und das eine kann willkürlich auf ihr gewählt werden. Die drei involutorischen φ^2-Homologien, welche O_1, P_1, Q_1 zu Zentren haben, bewerkstelligen also die Überführung von A, B, C in A', B', C' und liefern die gewünschte φ^2-Kollineation zweiter Art.

Die Ebene $O_1P_1Q_1$ ist die eine Ebene mit dem sich selbst entsprechenden Kegelschnitte auf φ^2; die Axe der durch die drei Involutionen (O_1), (P_1), (Q_1) auf ihm hervorgerufenen Projektivität gibt die beiden Koinzidenzpunkte der Kollineation. Wir fanden zwar, daß in diese Ebene eins der drei Zentren beliebig gelegt werden kann; darauf wurde verzichtet, um die Konstruktion möglichst einfach zu gestalten; an sich notwendig ist es nicht, daß die sechs Punkte A'', B'', C''; A, B, C auf denselben Kegelschnitt fallen.

Die zweite Kegelspitze Q_2 liefert die zweite Ebene mit dem sich selbst entsprechenden Kegelschnitte, und dieser muß auch die beiden Koinzidenzen erhalten. Jedenfalls sind im Falle einer elliptischen Fläche diese beiden Ebenen stets reell.

Soll aber aus A, B, C; A', B', C' eine φ^2-Kollineation erster Art hergestellt werden, so wird man zuerst durch eine beliebige involutorische φ^2-Homologie die Punkte A, B, C in A'', B'', C'' überführen, um dann für die φ^2-Kollineation zweiter Art, in welcher den A'', B'', C'' die A', B', C' homolog sind, drei überführende Homologien zu konstruieren.

512 Kommen wir nochmals zurück auf die Bestimmung einer φ^2-Kollineation erster Art vermittelst einer Projektivität in der einen Regelschar und einer Projektivität in der andern. Die Schnittpunkte der einen Koinzidenzgeraden mit den andern sind die vier Koinzidenzpunkte. Zu jeder der beiden Projektivitäten kann man eine Involution konstruieren, deren Doppelstrahlen ihre Koinzidenzen sind; man hat zu jeder Gerade der Regelschar die ihr in beiderlei Sinne entsprechenden Geraden und in bezug auf diese die ihr zugeordnete vierte harmonische Gerade zu konstruieren; das ist die ihr in der gesuchten Involution gepaarte (Nr. 75). Diejenige φ^2-Kollineation, bei welcher mit diesen beiden Involutionen in den Regelscharen ge-

arbeitet wird, ist eine involutorische, also eine windschiefe Involution. Wie erhält man zu einem Punkte X der Fläche den entsprechenden in dieser? Wir fassen ihn, für die gegebene Kollineation, als $Y \equiv Z'$ auf und konstruieren seine beiden entsprechenden Y', Z. Durch X gehen die Geraden $g \equiv h'$, $l \equiv m'$, welchen entsprechen g', h, l', m, und Y' ist $g'l'$, Z ist hm. Der vierte harmonische Strahl zu $a \equiv g \equiv h'$ in bezug auf g' und h sei a_1 und der zu $b \equiv l \equiv m'$ in bezug auf l' und m sei b_1, wo a, b dritte neutrale Namen der durch X gehenden Geraden seien. Es ist dann $X_1 = a_1 b_1$ der dem $X = ab$ in der windschiefen Involution zugeordnete Punkt. Wir haben in beiden Regelscharen einen harmonischen Wurf: $a a_1 g' h$, bzw. $b b_1 l' m$; dadurch sind die beiden Regelscharen projektiv und die vier Punkte $ab = X$, $a_1 b_1 = X_1$, $g'l' = Y'$, $hm = Z$ liegen auf einem Kegelschnitte der φ^2. Auf ihm liegt der harmonische Wurf $X X_1 Y' Z$; also sind die Geraden XX_1 und $Y'Z$ konjugiert in bezug auf diesen Kegelschnitt; daher trifft XX_1 die Polare von $Y'Z$ in bezug auf φ^2, denn auf dieser liegen die Pole der $Y'Z$ bezüglich der φ^2-Kegelschnitte in den Ebenen durch sie. Wir erhalten also, in der windschiefen φ^2-Involution, welche mit der gegebenen φ^2-Kollineation erster Art die vier Koinzidenzpunkte gemein hat, zu jedem Punkte X der φ^2 den gepaarten X_1, nachdem zu ihm als $Y \equiv Z'$ die beiden in der Kollineation entsprechenden Punkte Y', Z und dann zu der Gerade $Y'Z$ die Polare in bezug auf φ^2 konstruiert ist, als zweiten Schnitt, mit φ^2, der von X ausgehenden Gerade, welche diese beiden polaren Geraden trifft.

Sind daher vier Paare entsprechender Punkte auf φ^2 in dieser windschiefen Involution konstruiert, so sind die beiden Treffgeraden ihrer Verbindungslinien die Axen der Involution und deren Schnitte mit φ^2 die vier Koinzidenzpunkte.[1])

Stellen wir die Kollineation einer Fläche φ^2 in sich nach 513
Anweisung von Nr. 500 her. Wir bestimmen die Pole D und D' der Ebenen $\mathfrak{d} = ABC$ und $\mathfrak{d}' = A'B'C'$. Diejenige Kollineation der Felder $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$, in welcher $k^2 = \mathfrak{d}\varphi^2$, $k'^2 = \mathfrak{d}'\varphi^2$ entsprechend sind und zwar den Punkten A, B, C die Punkte A', B', C', ist festgelegt, sowie die der Bündel D, D', welche zu $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ beziehentlich perspektiv sind. Es seien zwei entsprechende Strahlen der beiden Bündel, nach den Punkten H, H' von $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ gehend, gezogen, von denen der eine reell schneidet: in G und $\mathfrak{G}$ und der andere dann auch: in G' und $\mathfrak{G}'$, weil es sich um identische, also gleichartige Flächen handelt; und wir haben die beiden Kollineationen: $(G, G'; \mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ und $(G, \mathfrak{G}'; \mathfrak{G}, G')$.

1) Vgl. hierzu den oben erwähnten Aufsatz von Zeuthen.

Die zweite ist das Produkt derjenigen Γ, in welcher A, B, C, H, D sich selbst entsprechen und G und 𝔊 einander, und der ersten; in Γ sind die Ebene 𝔡, der Bündel D und alle ihre Elemente sich selbst entsprechend; sie ist die involutorische φ^2-Homologie mit dem Zentrum D und der Ebene 𝔡 und vertauscht die beiden Regelscharen. Daraus folgt, daß von den beiden Kollineationen (G, G'; 𝔊, 𝔊′) und (G, 𝔊′; 𝔊, G') die eine erster, die andere zweiter Art ist.

Die kubische Raumkurve, welche durch die beiden kollinearen Bündel D, D' erzeugt wird, hat mit φ^2 die vier Koinzidenzen der einen und die beiden auf φ^2 gelegenen Koinzidenzen der andern gemein.

Bei einer elliptischen Fläche φ^2 liegen D und D' auf derselben Seite, und äußere, innere Punkte werden in äußere und innere Punkte transformiert. Die φ^2-Kollineation ist einseitig, wie wir sagen wollen. Bei einer hyperbolischen Fläche φ^2 aber — für die alle Punkte äußere sind — können D und D' auf verschiedenen Seiten liegen; die φ^2-Kollineation führt dann Punkte auf der einen Seite der Fläche in Punkte der andern Seite über; wir können eine solche φ^2-Kollineation zweiseitig nennen.

Die involutorischen φ^2-Kollineationen sind immer einseitig; denn zwei zugeordnete Punkte sind bei jeder von ihnen harmonisch in bezug auf zwei bezüglich der Fläche konjugierte Punkte; solche Punkte liegen immer auf der nämlichen Seite der Fläche; denn entweder hat die Verbindungslinie keine reellen Schnitte mit φ^2 oder, wenn solche vorhanden sind, so haben sie und die zugeordneten Punkte ein reelles gemeinsames harmonisches Paar, die konjugierten Punkte, also haben sie hyperbolische Lage.

Eine zweiseitige φ^2-Kollineation kann also nicht in lauter reelle involutorische Homologien zerlegt werden. Dies zeigt auch die Konstruktion von Nr. 511. Wenn die Pole D und D' der Ebenen $\mathfrak{d} = ABC$ und $\mathfrak{d}' = A'B'C'$ auf verschiedenen Seiten der hyperbolischen Fläche φ^2 liegen, so schneidet DD' diese Fläche reell: in M, N, und diese Punkte liegen zu D, D' elliptisch, also auch zu den Schnitten mit 𝔡, 𝔡′, welche zu D, bzw. D' harmonisch sind in bezug auf M, N; die Involution, deren Doppelpunkte die Kegelspitzen Q_1, Q_2 sind, ist elliptisch.

§ 77. Fortsetzung.

514 Aber wir müssen uns nun der Frage zuwenden, ob eine beliebige Kollineation eine Fläche 2. Grades in sich überführt. Sie ist verneinend, wie in Nr. 304, zu beantworten und verschiedenartig für die beiden Arten.

Wir wissen, wenn eine Fläche 2. Grades durch eine Kollineation auf die erste Art in sich selbst übergeht, so muß sie durch zwei Paare gegenüberliegender Kanten des Koinzidenztetraeders gehen. Bei einer beliebigen Kollineation entspricht nun einer Fläche 2. Grades, welche durch eins der drei Kantenvierseite geht, im andern Raume eine Fläche, welche dasselbe tut, und wir erhalten in der Büschel-Schar von Flächen durch das Vierseit eine Projektivität, deren Koinzidenzen ersichtlich die beiden Ebenenpaare sind.

Also wird durch eine beliebige Kollineation keine allgemeine Fläche 2. Grades auf die erste Art in sich selbst transformiert, und wir haben die Bedingung für die Kollineation aufzusuchen, unter der es geschieht.

Es ist sofort ersichtlich, daß, wenn eine allgemeine Fläche 2. Grades durch eine Kollineation auf die erste Art in sich transformiert wird, dies für jede Fläche der Büschel-Schar gilt, die das Kantenvierseit des Koinzidenztetraeders zur Basis hat, durch welches jene geht; denn die erwähnte Projektivität hat dann drei Koinzidenzen.

Die gesuchte Bedingung läßt sich bequem durch die Invarianten der Kollineation ausdrücken. Es sei $TUVW$ das Kantenvierseit, durch das die Fläche geht, und X, X' zwei entsprechende Punkte auf ihr; es ist dann (durch Projektion aus VW, TU):

$$XX'(\tau, \upsilon, X, X') = VW(VU, WT, X, X'),$$
$$XX'(\psi, \varphi, X, X') = TU(VU, WT, X, X');$$

aber, weil das Vierseit $TUVW$ und die Punkte X, X' auf derselben Fläche 2. Grades liegen, ist:

$$VW(VU, WT, X, X') = TU(VU, WT, X, X');$$

daher:

$$XX'(\tau, \upsilon, X, X') = XX'(\psi, \varphi, X, X').$$

Diese Gleichheit zweier Invarianten, mit welcher:

$$XX'(\tau, \psi, X, X') = XX'(\upsilon, \varphi, X, X')$$

äquivalent ist, ist die Bedingung dafür, daß die Kollineation eine durch das Vierseit $TUVW$ gehende Fläche 2. Grades und dann alle, die das tun, in sich selbst transformiert. Wir können sie auch schreiben:

$$XX'(\tau, \upsilon, X, X') = XX'(\varphi, \psi, X', X),$$

so daß die Bedingung lautet: die drei Punktepaare

$$XX'(\tau, \varphi; \upsilon, \psi; X, X')$$

sind in Involution. Das ergibt sich unmittelbar aus der Involutionseigenschaft des Büschels.

Umgekehrt folgt aus der Invarianten-Gleichung, daß

$$VW(VU, WT, X, X') = TU(VU, WT, X, X'),$$

d. h. daß die durch $TUVW$ und X gehende Fläche 2. Grades auch durch X' geht und sich selbst entspricht.

Wir können diese spezielle räumliche Kollineation wegen der Analogie zur ebenen Kollineation, welche Kegelschnitte in sich überführt, wiederum eine Hermitesche nennen.

Durch zwei entsprechende Punkte X, X' der sich selbst entsprechenden Fläche φ^2 seien die Geraden aus verschiedenen Regelscharen derselben gezogen, etwa durch X diejenige, welche TW, UV trifft: in P, Q, und durch X' diejenige, welche VW, TU trifft: in R, S; wenn X_1 der Schnitt dieser Geraden ist, so ist:

$$(PQXX_1) = VW(WT, VU, X, X') = XX'(\upsilon, \tau, X, X'),$$
$$(RSX_1X') = UV(VW, UT, X, X') = XX'(\tau, \psi, X, X');$$

folglich sind die beiden linksstehenden Doppelverhältnisse auch invariant; und unsere φ^2-Kollineation ist das Produkt von zwei Kollineationen mit Axen, nämlich derjenigen, welche TW, UV zu Axen hat und deren Invariante das erste Doppelverhältnis ist, und derjenigen, deren Axen VW, TU sind und welche das zweite zur Invariante hat; jene führt X in X_1, diese X_1 in X' über.

515 Betrachten wir vor der Kollineation mit Axen den allgemeineren Fall, der in Nr. 475 kurz erwähnt wurde und bei welchem eine der Koinzidenzgeraden lauter sich selbst entsprechende Punkte trägt und infolgedessen die gegenüberliegende lauter sich selbst entsprechende Ebenen. Die Koinzidenzpunkte auf dieser seien U, W, während T, V auf jener beliebig zwei Punkte sein können und daher ∞^2 Koinzidenztetraeder möglich sind: mit den festen Ecken U, W, den festen Ebenen υ, ψ. Zwei entsprechende Punkte X, X' liegen nun in einer Ebene durch UW; der Schnittpunkt von XX' mit τ, φ ist der mit UW, also beidemal derselbe und unabhängig von der Unbestimmtheit dieser Ebenen; die Bedingung dafür, daß durch das Kantenvierseit $TUVW$ eine sich selbst entsprechende Fläche 2. Grades geht, ist:

$$XX'(UW, \upsilon, X, X') = XX'(\psi, UW, X, X').$$

Wird sie bei irgendeinem der ∞^2 Vierseite $TUVW$ erfüllt, so wird sie bei jedem erfüllt.

Wenn also eine Fläche 2. Grades, die durch irgend eines dieser Vierseite geht, in sich selbst übergeführt wird, so tun das nicht bloß alle durch dasselbe Vierseit gehenden, sondern alle ∞^3 Flächen 2. Grades, die durch sämtliche Vierseite gehen; d. h. alle, welche durch die festen Koinzidenzpunkte U, W gehen und für die deren Verbindungslinie und die gegenüberliegende polar sind.

Es wurde a. a. O. erläutert, daß jede Drehung um eine Axe zu einer solchen Kollineation führt; ersichtlich werden alle (∞^3) Rotationsflächen 2. Grades um diese Axe in sich selbst transformiert. Die U, W sind die absoluten Punkte der zur Axe normalen Ebenen. Man erkennt leicht, daß die Invarianten-Bedingung erfüllt wird: X, X' liegen auf einem Kreise in einer solchen Ebene mit dem Mittelpunkt M auf der Axe; dieser Kreis, das Geradenpaar seiner Asymptoten $M(U, W)$ und die doppelte unendliche ferne Gerade UW gehören zu demselben Büschel; daher entsteht auf XX' eine Involution, in der gepaart sind X, X'; $XX'(MU, MW)$ oder $XX'(\psi, \upsilon)$ und (XX', UW) Doppelpunkt ist; daraus folgt die obige Doppelverhältnis-Gleichheit. 516

Eine Kollineation mit Axen transformiere eine Fläche 2. Grades, die nicht durch diese Axen geht, auf die erste Art, wie notwendig, in sich selbst; dann sind ihre Schnitte mit den Axen die vier Koinzidenzpunkte: T, V auf der einen, U, W auf der andern, und $TUVW$ ist das Kantenvierseit, durch welches die Fläche geht. Die Bedingung:

$$XX'(\tau, \upsilon, X, X') = XX'(\psi, \varphi, X, X')$$

geht über in:

$$(Q, P, X, X') = (P, Q, X, X'),$$

wo P, Q die Schnittpunkte von XX' mit den Axen sind. Das bedeutet, da wir Identität nicht annehmen, daß beide -1 sind und die Kollineation windschiefe Involution ist.

Wenn eine Kollineation mit Axen eine Fläche 2. Grades, die nicht durch diese Axen geht, in sich selbst überführt, so muß sie windschiefe Involution sein und ihre Axen in bezug auf die Fläche polar sein; denn sie sind die Diagonalen eines ihr aufgeschriebenen Vierseits.

Jede Fläche 2. Grades kann auf ∞^4 Weisen so in sich transformiert werden, und jede windschiefe Involution transformiert ∞^5 Flächen in sich selbst; denn es ist eine vierfache Bedingung für eine Fläche 2. Grades, zwei gegebene Geraden zu Polaren zu haben.

Jede Fläche 2. Grades, welche die beiden Axen einer Kollineation mit Axen enthält, geht, wie schon bemerkt (Nr. 508), durch diese in sich selbst über. Geht eine in sich selbst transformierte Fläche durch die eine Axe, so geht sie auch durch die andere Axe, weil jede Gerade, die zwei entsprechende Punkte auf ihr verbindet, beide Axen trifft und auf der Fläche liegt.

Es seien u, v zwei Geraden, welche die Kanten TU, VW eines Tetraeders harmonisch schneiden; so sind sowohl TV, UW, u, v, als TW, UV, u, v vier harmonische Geraden einer Regelschar; die Geraden der Leitscharen beweisen, daß u, v polar sind in bezug auf jede durch das Vierseit $TVUW$ gehende Fläche 2. Grades, welche also durch die windschiefe Involution (u, v) in sich selbst übergeht; so daß einem bestimmten Punkte in den ∞^2 möglichen windschiefen Involutionen (u, v) die Punkte der durch ihn und das Vierseit gehenden Fläche 2. Grades entsprechen.

Wenn nun eine beliebige Kollineation vorliegt mit dem Koinzidenztetraeder $TUVW$, in welcher P und P' entsprechend sind, so seien durch das Vierseit $TVUW$ und P, bzw. $TWVU$ und P' die Flächen 2. Grades gelegt und P_1 ein Punkt der Schnittkurve; wir haben dann eine windschiefe Involution I_1, deren Axen die Gegenkanten TU, VW treffen und welche P in P_1 überführt, eine zweite I_2, deren Axen die TV, UW treffen und welche P_1 in P' überführt. Nun ziehe man durch P' die Gerade, welche die dritten Gegenkanten TW, UV trifft und die zu ihr harmonische Gerade in bezug auf die Ecken auf diesen Kanten; I_3 sei die windschiefe Involution mit diesen Geraden als Axen. Es führt dann I_1 die Punkte T, U, V, W, P über in U, T, W, V, P_1, I_2 diese in W, V, U, T, P' und I_3 diese wiederum in T, U, V, W, P'; daher ist die gegebene Kollineation das Produkt dieser drei windschiefen Involutionen. Es kann also jede Kollineation in drei windschiefe Involutionen zerlegt werden.[1])

517 Es mag hier anschließend erwähnt werden, ohne daß jedoch näher darauf eingegangen werden kann, daß Kollineationen, welche Flächen 2. Grades in sich selbst auf die erste Art transformieren, zugleich solche sind, welche Strahlengewinde (Komplexe 1. Grades) in sich selbst überführen.

Ein durch eine Kollineation in sich selbst übergehendes Strahlengewinde muß auch durch eines der drei Kantenvierseite des Koinzidenztetraeders gehen und infolge dessen die beiden andern Kanten zu Polaren haben. Um jedoch diese vier sich selbst entsprechenden Strahlen des Gewindes zu erkennen, sind eingehendere Kenntnisse der Liniengeometrie notwendig, als sie hier vorausgesetzt werden, z. B. das Korrespondenzprinzip im Gewinde; es muß daher auf mein Buch über die Liniengeometrie Bd. I Nr. 234—242 verwiesen werden.

Eine beliebige Kollineation transformiert kein allgemeines Gewinde in sich selbst; tut sie es aber, so transformiert sie sofort alle diejenigen Gewinde in sich selbst, welche durch das nämliche Kantenvierseit $TUVW$ gehen, wie das der Voraussetzung, oder welche durch das Strahlennetz mit den Leitgeraden TV, UW gehen. Und eine derartige Kollineation transformiert zugleich alle Flächen 2. Grades, welche durch das nämliche Kantenvierseit $TUVW$ gehen, in sich selbst; und umgekehrt.

Der Büschel der in sich transformierten Gewinde und die Büschel-Schar der ebenfalls in sich transformierten Flächen 2. Grades stehen in folgender Beziehung. Jedes von jenen Gewinden enthält die einen Regelscharen von zweien dieser Flächen, und jede dieser Flächen

1) Wilson, Transactions of the American Mathematical Society Bd. 1 S. 193.

sendet ihre beiden Regelscharen in zwei der Gewinde. Das führt jedoch nicht, wie a. a. O. Nr. 236 gesagt ist, zu einer Korrespondenz [2, 2] zwischen den beiden Systemen von Gewinden und Flächen, sondern zu zwei Projektivitäten. Von den beiden Regelscharen, die in einem der Gewinde sich befinden, hat die eine TU, VW, die andere TW, UV zu Leitgeraden. Bleibt man bei der einen Art von Regelscharen, so ergibt sich die eine Projektivität zwischen den Gewinden und den Flächen, die andere Art liefert die zweite.

Es gibt ∞^{14} Kollineationen, welche eine Fläche 2. Grades oder ein Gewinde in sich transformieren, weil die Bedingung eine einfache ist. Jede derartige Kollineation transformiert dann ∞^1 Flächen 2. Grades oder Gewinde in sich; nun gibt es ∞^9 Flächen 2. Grades und ∞^5 Gewinde; daraus ergibt sich, daß jede gegebene Fläche durch ∞^{14+1-9}, also durch ∞^6 Kollineationen in sich transformiert wird, wie wir schon wissen, und jedes gegebene Gewinde durch ∞^{14+1-5}, also durch ∞^{10} Kollineationen. In Nr. 237 a. a. O. ist dies direkt gezeigt.

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Bedingungen für eine φ^2-Kollineation zweiter Art. Nur zwei Koinzidenzpunkte T, U liegen auf φ^2; daraus folgt, daß die sich selbst entsprechende Gerade, welche die beiden andern V, W verbindet, die Fläche in zwei involutorisch sich entsprechenden Punkten P, Q treffen muß: den Schnitten $r_1 s_2$, $r_2 s_1$ der involutorisch sich entsprechenden Geraden r_1, s_1; r_2, s_2 (Nr. 506). Also ist überhaupt die Projektivität auf dieser Gerade eine Involution, so wie diejenige des Ebenenbüschels um TU; daher müssen zwei entsprechende Punkte X, X' in Ebenen durch TU liegen, welche zu den Ebenen φ, ψ harmonisch sind; d. h. es ist die Invariante 518

$$XX'(\varphi, \psi, X, X') = -1.$$

Liegen nun X, X' auf der Fläche φ^2, so ergibt sich, wegen des ihr aufgeschriebenen Vierseits $TPUQ$, daß:

$$TP(TQ, PU, X, X') = UQ(QT, UP, X, X'),$$

oder durch Schnitt mit XX':

$$\begin{aligned} XX'(\upsilon, TUP, X, X') &= XX'(TUQ, \tau, X, X') \\ &= XX'(\tau, TUQ, X', X); \end{aligned}$$

also sind X, X' und die Schnitte von XX' mit den Ebenen τ, υ und diejenigen mit den Ebenen $TU(P, Q)$ in Involution. Nun sind die Ebenen $TU(X, X')$ und $TU(P, Q)$ zu den Ebenen φ und ψ harmonisch, folglich auch $XX'(\tau, \upsilon)$ zu $XX'(\varphi, \psi)$. Oder

$$XX'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi) = -1;$$

d. h. der tetraedrale Komplex der Kollineation ist ein harmonischer. Sonach hat eine Kollineation, wenn sie eine

Fläche 2. Grades auf die zweite Art in sich transformieren soll, zwei Bedingungen zu erfüllen:

$$XX'(\tau, \upsilon, \varphi, \psi) = -1, \quad XX'(\varphi, \psi, X, X') = -1$$

oder eins der fünf analogen Paare von Bedingungen.

Umgekehrt, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so gehen ∞^2 Flächen 2. Grades in sich selbst über. Denn wegen der zweiten Bedingung sind die Punkte auf der Kante VW des Koinzidenztetraeders involutorisch einander zugeordnet; V, W sind Doppelpunkte. Wenn P, Q irgend ein Paar dieser Involution bilden, so haben wir darzutun, daß jede Fläche 2. Grades, welche durch das Vierseit $TPUQ$ geht, sich selbst entspricht, d. h. die durch X gehende auch den entsprechenden Punkt X' enthält.

Die Schnitte von XX' mit φ, ψ sind harmonisch zu den Schnitten mit τ, υ, zu X, X' und zu den Schnitten mit $TU(P, Q)$. Dies folgt aus den beiden Bedingungen und daraus, daß P, Q zu V, W harmonisch sind; daher sind diese drei Punktepaare in Involution; also ist:

$$\begin{aligned} XX'(\upsilon, TUP, X, X') &\barwedge XX'(\tau, TUQ, X', X) \\ &\barwedge XX'(TUQ, \tau, X, X') \end{aligned}$$

oder:

$$TP(TQ, UP, X, X') \barwedge UQ(TQ, UP, X, X');$$

was bedeutet, daß X, X' mit dem Vierseit $TPUQ$ auf derselben Fläche 2. Grades liegen.

Der Inbegriff aller dieser ∞^2 Flächen ist ein Netz N; für jeden der Büschel durch die verschiedenen Vierseite nehmen wir als Konstituenten die beiden Ebenenpaare, von denen das eine fest ist: (τ, υ), während das andere $TU(P, Q)$ eine Involution durchläuft, also einen Büschel beschreibt. Wir können aber das System auch als das duale Gebilde eines Netzes auffassen, wo es dann durch das feste Punktepaar TU und die Schar (oder Involution) von Punktepaaren PQ entsteht. Für alle Flächen dieses Systems sind TU und VW gemeinsame Polaren, hat jeder Punkt auf TU eine feste (durch VW gehende) Polarebene, und jede Gerade durch V oder W, welche TU trifft, eine feste Polare durch W oder V, welche ebenfalls TU trifft.[1])

Jede zwei entsprechenden Punkte X, X' der Kollineation liegen auf ∞^1 Flächen des Systems, die einen Büschel bilden; dessen Grundkurve ist sich selbst entsprechend und so jede Grundkurve eines Büschels des Systems; und ebenso der Torsus, welcher einer Schar des Systems umgeschrieben ist.

---

1) Man kommt zu diesem in sich dualen System 2. Stufe von Flächen 2. Grades, wenn einmal Pol und Polarebene und einmal zwei Polaren gegeben sind, also eine dreifache und eine vierfache Bedingung.

Aus den beiden Bedingungen wollen wir eine dritte folgern, wozu wir sie in der einfacheren Form:

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = -1 \text{ und } (\mathfrak{V}\mathfrak{W}XX') = -1$$

schreiben; nehmen wir $\frac{X\mathfrak{T}}{X'\mathfrak{T}} = \mathfrak{t}$, $\frac{X\mathfrak{U}}{X'\mathfrak{U}} = \mathfrak{u}, \ldots$ als Parameter der vier Punkte $\mathfrak{T}, \ldots \mathfrak{W}$, so führt die erste Harmonizität zu:

$$(\mathfrak{t} + \mathfrak{u})(\mathfrak{v} + \mathfrak{w}) + 2(\mathfrak{t}\mathfrak{u} + \mathfrak{v}\mathfrak{w}) = 0,$$

die andere zu: $\mathfrak{v} + \mathfrak{w} = 0$; daher: $\mathfrak{t}\mathfrak{u} + \mathfrak{v}\mathfrak{w} = 0$ oder $\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{v}} = -\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{u}}$, also:

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{V}XX') = -(\mathfrak{W}\mathfrak{U}XX').^{1)}$$

Aus dieser Form der einen Bedingung läßt sich folgern, daß der Flächenbüschel durch das Vierseit $TVUW$ involutorisch in sich selbst übergeht. Eine Gerade treffe die Gegenseiten TV und UW in $X \equiv Z'$ und $Y \equiv S'$; so daß ihr in beiderlei Sinne $X'Y'$ und ZS entsprechen, welche die beiden Flächen des Büschels festlegen, die der durch jene Gerade bestimmten Fläche entsprechen.

Für die auf TV gelegenen Punkte X, X'; Z, Z' ist die in der neuen Formel links stehende Invariante: $(VTXX')$, $(VTZZ')$ und für die auf UW gelegenen Y, Y'; S, S' ist die rechts stehende $(UWYY')$, $(UWSS')$; daher

$$(VTXX') = -(UWYY'), \ (VTZZ') = -(UWSS'),$$

also, weil Z' mit X, S' mit Y identisch ist:

$$(TVX'Z) = (WUY'S).$$

Das sagt aus, daß TW, UV, $X'Y'$, ZS einer Regelschar angehören, in deren Leitschar sich TV, WU befinden, oder daß $X'Y'$, ZS auf derselben durch das Vierseit $TVUW$ gehenden Flächen 2. Grades liegen, die also involutorisch der durch $XY \equiv Z'S'$ gehenden entspricht.

Dieser Büschel $(TVUW)$ hat mit dem oben besprochenen Netze N, dessen Flächen in sich selbst übergehen, das Ebenenpaar $\tau\upsilon$ gemein, also bestimmen sie ein Gebüsche von Flächen 2. Grades (lineares System 3. Stufe), das aber in sich auch dual ist, weil der Büschel auch Schar, das Netz auch in sich dual und das Punktepaar TU beiden gemeinsam ist.

Es handelt sich offenbar um alle Flächen 2. Grades, welche in T und U von υ und τ berührt werden.

---

1) Läßt man $\mathfrak{W}$ unendlich fern werden, so wird $\mathfrak{V}$ die Mitte von $\mathfrak{T}\mathfrak{U}$ und XX', also

$$\frac{\mathfrak{T}X}{\mathfrak{T}X'} = \frac{\mathfrak{U}X'}{\mathfrak{U}X}, \ \frac{\mathfrak{V}X}{\mathfrak{V}X'} = -1, \text{ daher } (\mathfrak{T}\mathfrak{V}XX') = -\frac{\mathfrak{U}X'}{\mathfrak{U}X} = -(\mathfrak{W}\mathfrak{U}XX').$$

Jede Fläche dieses Systems geht involutorisch in eine andere Fläche des Systems über.

Eine Fläche $\mathfrak{A}^2$ des Gebüsches werde mit zwei Flächen $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}^2$ des Büschels $(TVUW)$ verbunden durch Büschel; diese schneiden das Netz N in Flächen $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{E}^2$ und alle vier Flächen $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}^2$, $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{E}^2$ befinden sich in dem Netze des Gebüsches, das durch $\mathfrak{A}^2$ und den Büschel $(TVUW)$ bestimmt ist. Diesen vier Flächen $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}^2$, $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{E}^2$ mögen $\mathfrak{B}'^2$, $\mathfrak{C}'^2$, $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{E}^2$ entsprechen, jene involutorisch, diese sich selbst, d. i. auch involutorisch; mithin gehören sie auch zu einem Netze, also haben die Büschel $\mathfrak{B}'^2\mathfrak{D}^2$ und $\mathfrak{C}'^2\mathfrak{E}^2$ desselben eine Fläche gemeinsam, welche die der $\mathfrak{A}^2$ entsprechende $\mathfrak{A}'^2$ ist; und zwar entspricht sie involutorisch, weil die eben genannten Büschel involutorisch den $\mathfrak{B}^2\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{C}^2\mathfrak{E}^2$ entsprechen[1]).

Liegt eine Homologie vor, so befindet sich die eine Ecke W des Koinzidenztetraeders im Zentrum S, die drei anderen sind beliebige Punkte der Ebene σ der Homologie; also fallen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ in S, $\mathfrak{W}$ in den Schnittpunkt von XX' mit σ; die Bedingung: $(\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = -1$ wird von selber erfüllt, die Bedingung: $(\mathfrak{V}\mathfrak{W}XX') = -1$ aber nur, wenn die Homologie involutorisch ist. Nur die involutorische Homologie transformiert Flächen 2. Grades auf die zweite Art in sich selbst, und zwar ∞^6, alle, für welche S, σ polar sind.

519 Wir fanden als Erzeugnis der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier zueinander kollinearen Flächen 2. Grades eine Kongruenz 6. Ordnung 2. Klasse (Nr. 505). Wenn eine Fläche φ^2 zu sich selbst kollinear ist, so erniedrigt sich die Ordnung durch die Koinzidenzpunkte, von denen jeder einen ganzen Bündel von Verbindungslinien liefert, also auf 2, wenn eine φ^2-Kollineation erster Art vorliegt, auf 4, wenn sie zweiter Art ist Diese Ordnungen 2 und 4 sind für Punkte der Fläche φ^2 leicht zu bestätigen. Im ersten Falle gehen durch ihn nur die beiden Strahlen, welche ihn mit den ihm in beiderlei Sinne entsprechenden Punkten verbinden, im zweiten Falle treten zu diesen hinzu die beiden Geraden der Fläche; denn jede enthält zwei entsprechende Punkte, diejenigen, in denen sie von den beiden ihr entsprechenden Geraden der anderen Regelschar getroffen wird.

Die Kongruenz der Verbindungslinien entsprechender Punkte einer zu sich selbst kollinearen Fläche 2. Grades

1) Hierbei sind einige Sätze der Theorie der linearen Systeme von Flächen, die in § 97 eingehend besprochen werden soll, als bekannt angenommen: daß zwei Büschel eines Netzes, ein Büschel und ein Netz eines Gebüsches eine Fläche gemeinsam haben und daß umgekehrt ein Büschel und ein Netz mit einer gemeinsamen Fläche ein Gebüsche bestimmen. — Zum Vorangehenden vgl. Voß, Math. Annalen Bd. 13, S. 320; Sturm, ebenda Bd. 26, S. 471.

ist bei der ersten Art: 2. Ordnung 2. Klasse, bei der zweiten Art: 4. Ordnung 2. Klasse.

Die Kongruenz 2. Ordnung 2. Klasse des ersten Falles ist dadurch spezialisiert, daß sie vier Doppelstrahlen[1]) hat, nämlich die vier Kanten des Koinzidenztetraeders, welche auf φ^2 liegen. Denn für jeden Punkt auf einer von diesen Geraden liegen die beiden entsprechenden auch auf ihr, und es vereinigen sich daher die von ihm ausgehenden Strahlen der Kongruenz mit ihr. Es läßt sich auch umgekehrt beweisen, daß durch eine Kongruenz 2. Ordnung 2. Klasse, welche 4 ein Vierseit bildende Doppelstrahlen besitzt, jede Fläche 2. Grades, welche durch dies Vierseit geht, zu sich kollinear gemacht wird nach der ersten Art. Doch soll dies hier nicht geschehen[2]).

Dual ergibt sich, daß die Schnittlinien der entsprechenden Berührungsebenen der Fläche φ^2 ebenfalls eine Kongruenz 2. Ordnung 2. Klasse mit denselben vier Doppelstrahlen erzeugen. Und statt der Kongruenz 4. Ordnung 2. Klasse wollen wir lieber die duale Kongruenz 2. Ordnung 4. Klasse genauer betrachten, welche durch diese Schnittlinien bei einer φ^2-Kollineation zweiter Art entsteht. Wir haben zwei Kegelschnitte i^2, j^2 gefunden (Nr. 507), welche durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen der beiden Regelscharen bei der einen und der anderen Projektivität zwischen ihnen erzeugt werden. Die Geraden der einen, wie der anderen Regelschar gehen durch entsprechende Punkte auf diesen Kurven, und wir sehen so von neuem, daß die Regelscharen zu der vorherigen Kongruenz 4. Ordnung 2. Klasse gehören; und weil in ihnen auch entsprechende Berührungsebenen der beiden Kegel sich schneiden, die der Fläche φ^2 längs dieser Kegelschnitte umgeschrieben sind, so gehören sie auch zur jetzigen Kongruenz. Aber zwei entsprechende Berührungsebenen enthalten zwei Geraden g, l und ihre entsprechenden g', l', ihre Schnittlinie folglich die beiden Punkte gg', ll', die auf den beiden Kurven i^2, j^2 liegen. Unsere Kongruenz ist also die Kongruenz 2. Ordnung 4. Klasse der Strahlen, welche auf die beiden sich zweimal begegnenden Kegelschnitte i^2, j^2 sich stützen[3]).

Die Kongruenz 4. Ordnung 2. Klasse ist die der gemeinsamen Tangenten der vorhin genannten Kegel, welche längs i^2 und j^2 der φ^2 umgeschrieben sind.

---

1) Mögliche oder, vielleicht besser, außerordentliche Doppelstrahlen: Liniengeometrie Bd. II, Nr. 401.

2) Liniengeometrie Bd. II, Nr. 415. — Vgl. auch Hirst, Proceed. London Math. Soc. Bd. 10, S. 131; Zeuthen, Math. Annalen Bd. 26, S. 261.

3) Liniengeometrie Bd. II, Nr. 410—415 und 483.

§ 78. Transformation der kubischen Raumkurve in sich selbst durch Kollineation.[1])

520 Dazu muß der Begriff eines Schmiegungstetraeders und eines Schmiegungsvierseits entwickelt werden; wir erläutern diese Figuren an der kubischen Raumkurve, aber man kann sie an jeder Raumkurve konstruieren. Es seien A, C zwei Punkte einer kubischen Raumkurve, γ, α die zugehörigen Schmiegungsebenen und AB, CD die Tangenten, wobei B, D die Schnitte je mit der anderen Schmiegungsebene sind, so daß $\gamma \equiv ABD$, $\alpha \equiv CDB$; ist dann noch $\beta \equiv ACD$ und $\delta \equiv ABC$, so ist $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ das zu A, C (oder α, γ) gehörige Schmiegungstetraeder[2]). Von dem Tetraeder sind zwei Gegenkanten AB, CD die Tangenten, zwei andere AD, BC sind Schmiegungsstrahlen, d. h. Strahlen, durch einen Punkt der Kurve in der zugehörigen Schmiegungsebene gezogen, und zwar assoziierte oder besser konjugierte Schmiegungsstrahlen. In jedem Büschel von Schmiegungsstrahlen, etwa im Punkte A, gibt es einen, der eine bestimmte Tangente, die von C, trifft, und jeder Schmiegungsstrahl einer kubischen Raumkurve trifft, außer der Tangente des Punktes, zu dem er gehört, nur eine andere; denn er schneidet den Kegelschnitt in der Schmiegungsebene, welcher durch die Spuren der Tangenten gebildet wird (Nr. 205), außer im zugehörigen Punkte nur noch einmal. So werden in zwei Schmiegungsstrahlen-Büscheln der kubischen Raumkurve zwei konjugierte Schmiegungsstrahlen einander eindeutig zugeordnet.[3])

Die dritten Gegenseiten werden durch die Doppelsekante AC und die Schmiegungsaxe $\alpha\gamma \equiv BD$ gebildet. Das von den Tangenten und den Schmiegungsstrahlen gebildete Vierseit $ABCD$ sei das Schmiegungsvierseit (Montesano).

Wir benennen es so, und $ADCB$ würde dasselbe Vierseit heißen, wenn AD, CB die Tangenten wären, wiederum in den Punkten A, C.

Durch ein solches Schmiegungsvierseit $ABCD$ und einen Punkt E (oder eine Schmiegungsebene) ist eine kubische Raumkurve eindeutig bestimmt; denn die beiden Kegel 2. Grades, welche sie aus A und C projizieren, sind es. Der aus A projizierende wird von der zugehörigen Schmiegungsebene längs der Tangente AB und von $\beta \equiv ACD$ längs AC berührt und geht durch E; wodurch er ein-

1) Math. Annalen Bd. 26, S. 487.

2) Cremona, Annali di Matematica Ser. I, Bd. 1, S. 164, 178; Joachimsthal, Journal für Math. Bd. 56, S. 44; Voß, Math. Annalen Bd. 13, S. 232; Schröter, ebenda Bd. 25, S. 293.

3) Cremona, bei dem sie assoziierte Geraden heißen: Journal für Math. Bd. 58, S. 138; Nouv. Annales de Mathém. Ser. II, Bd. 1, S. 287, 366, 436.

deutig bestimmt ist; der andere berührt α längs CD, $\mathfrak{d} \equiv CAB$ längs CA und geht durch E. Die Kurve ist ihr Schnitt, außer AC.

Ist E nicht gegeben, so erhält man bei A und bei C je eine Büschel-Schar von sich doppelt berührenden Kegeln und einen Bündel von ∞^2 kubischen Raumkurven, in denen die einen Kegel die anderen schneiden[1]); wir nennen dies System einen Bündel, weil durch jeden Punkt des Raumes eine Kurve geht.

Wir bezeichnen diesen Bündel mit

$$(A - AB,\ C - CD).$$

Das Schmiegungsvierseit ist eine in sich duale Figur, und wir können den Bündel auch in dualer Weise konstruieren.

Sind nun zwei kubische Raumkurven r^3 und r'^3 gegeben (die auch identisch sein können), $ABCD$, $A'B'C'D'$ die zu A, C, bzw. A', C' gehörigen Schmiegungsvierseite, und E und E' Punkte auf ihnen, so führt die Kollineation:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & E' \end{vmatrix}$$

r^3 in eine kubische Raumkurve über, welche $A'B'C'D'$ zum Schmiegungsvierseite hat und durch E' geht, also mit r'^3 identisch ist.

Läßt man A', C', E' die zweite Kurve durchlaufen, so zeigt sich, daß es ∞^3 Kollineationen gibt, in denen die beiden Kurven einander entsprechen. Es läßt sich leicht feststellen, daß in neun dieser Kollineationen noch zwei gegebene Punkte O, O' homolog sind. Es seien OAC, $O'A'C'$ die Doppelsekanten aus O an r^3, aus O' an r'^3 und $ABCD$, $A'B'C'D'$ die zu A, C; A', C' gehörigen Schmiegungsvierseite; ferner E einer der drei Schnitte von OBD mit r^3 und E' einer der Schnitte von $O'B'D'$ mit r'^3. Die Kollineation:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & E' \end{vmatrix}$$

führt dann r^3 und O in r'^3 und O' über; und umgekehrt, wenn in einer Kollineation den r^3 und O die r'^3 und O' korrespondieren, so tun es auch A, C und A', C', die zugehörigen Schmiegungsvierseite und ein Schnitt von OBD mit r^3 und einer von $O'B'D'$ mit r'^3.

Wird nun eine kubische Raumkurve r^3 durch eine Kollineation 521
in sich selbst transformiert, so geben die projektiven Punktreihen entsprechender Punkte auf ihr zwei Koinzidenzen, die zugehörigen Tangenten und Schmiegungsebenen sind ebenfalls sich selbst ent-

---

1) E. Heinrichs, Über den Bündel derjenigen kubischen Raumkurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder haben. Dissertation von Münster 1887.

sprechend. Dies bedeutet, daß das Koinzidenztetraeder einer Kollineation, welche eine kubische Raumkurve in sich selbst überführt, ein Schmiegungstetraeder derselben ist, und eins seiner drei Kantenvierseite das zugehörige Schmiegungsvierseit.

Das Koinzidenztetraeder $TUVW$ einer gegebenen Kollineation kann man in zwölf Weisen als Schmiegungstetraeder anordnen. Jedes der drei Kantenvierseite $TUVW$, $TVWU$ und $TWUV$ gibt drei Anordnungen; z. B. das erste, bei dem wir bleiben wollen, führt, den Schmiegungsvierseiten $TUVW$, $TWVU$, $UTWV$, $UVWT$ entsprechend, zu folgenden vier Bündeln von kubischen Raumkurven:

$$(T-TU,\ V-VW),\ (T-TW,\ V-VU),\ (U-UT,\ W-WV),\ (U-UV,\ W-WT).$$

Wir betrachten den ersten Bündel. Jeder Kegel der Büschel-Schar (T) geht, weil die Berührung mit TUW und TVW längs TU und TV durch die Kollineation erhalten bleibt, in einen Kegel ebenfalls dieser Büschel-Schar über, und ebenso jeder Kegel der Büschel-Schar (V). Soll nun eine Kurve des Bündels sich selbst entsprechen, so müssen es auch die beiden in ihr sich schneidenden Kegel (T) und (V) tun; aber Koinzidenzen der Projektivitäten, die in den Büschel-Scharen durch die Kollineation entstehen, sind im allgemeinen nur die ausgearteten Kegel, z. B. in (T) die Ebenenpaare $(TUW, TVW) \equiv (\varphi, \upsilon)$ und $(TUV, TUV) \equiv (\psi, \psi)$ (oder in dualer Auffassung: der Doppelbüschel um TW, das Büschelpaar TU, TV).

Folglich führt eine beliebige Kollineation keine kubische Raumkurve in sich selbst über.

Geschieht es aber bei einer Kollineation, so erhalten jene Projektivitäten in den Büschel-Scharen je noch ein drittes Koinzidenzelement, so daß alle Kegel in (T) und in (V) und daher alle Kurven des Bündels sich selbst entsprechen.

Wenn eine Kollineation eine allgemeine kubische Raumkurve in sich selbst transformiert, so tut sie das mit allen kubischen Raumkurven, welche das Koinzidenztetraeder in derselben Weise zum Schmiegungstetraeder haben wie jene Kurve.

Die Kollineation hat dann zwei Bedingungen zu erfüllen; zwei entsprechende Punkte X und X' liegen auf einem Kegel (T) und auf einem Kegel (V); also ist:

$$TU(W, V, X, X') = TV(U, W, X, X'),$$
$$VW(T, U, X, X') = VT(U, W, X, X');$$

mithin:

$$XX'(\varphi, \psi, X, X') = XX'(\psi, \upsilon, X, X'),$$
$$XX'(\upsilon, \tau, X, X') = XX'(\psi, \upsilon, X, X')$$

oder:

$$XX'(\varphi, \psi, X, X') = XX'(\psi, \upsilon, X, X') = XX'(\upsilon, \tau, X, X')^{1)}.$$

Es müssen demnach drei Invarianten einander gleich sein. Zwei dieser Gleichheiten sagen eben aus, daß die Kegel (T) und (V) in sich transformiert werden (sowie die zu ihnen perspektiven Kegelschnitte in τ und φ). Die dritte Gleichheit:

$$XX'(\tau, \upsilon, X, X') = XX'(\psi, \varphi, X, X')$$

sagt aus, daß alle Flächen 2. Grades der Büschel-Schar durch das Schmiegungsvierseit $TUVW$ in sich transformiert werden.

Jede Kurve des Bündels macht, weil sie auf einem Kegel (T) und auf einem Kegel (V) liegt, die beiden Büschel von TU, VW zum Büschel um TV projektiv, also auch untereinander; sie erzeugen eine Regelschar, deren Geraden von der Kurve einmal getroffen werden; zur Leitschar, deren Geraden sie zweimal treffen, gehören die Tangenten TU, VW; in den beiden Büscheln entsprechen der Schmiegungsebene TUW und der Ebene TUV die VWT und die Schmiegungsebene VWU (im Büschel TV sind ihnen entsprechend TVU, TVW); Schnittlinien sind die Schmiegungsstrahlen TW, VU; die Trägerfläche der beiden Regelscharen geht daher durch das Vierseit $TUVW$ und ist eine der sich selbst entsprechenden Flächen.

Auf jeder dieser Flächen durch $TUVW$ liegen ∞^1 Kurven des Bündels und bilden einen Büschel sich doppelt berührender Kurven; von den andern Kurven des Bündels wird die Fläche in T, V dreipunktig berührt, weil die Schmiegungsebene der Kurve die Fläche tangiert.

Die Geraden der Regelschar, zu der die Tangenten gehören, treffen sie zweimal.

Wir haben die Doppelbedingung für die Kollineation ermittelt, damit eine Kurve aus dem Bündel $(T - TU, V - VW)$ in sich selbst übergeht und dann jede; man stelle sie ebenso für die elf andern Bündel auf.

Macht man bei einem solchen Bündel von kubischen Raumkurven das gemeinsame Schmiegungstetraeder zum Koinzidenztetraeder und zwei benachbarte Punkte irgend einer Kurve des Bündels zu entsprechenden, so wird die Kollineation infinitesimal; jede Kurve des

1) In dieser zyklischen Reihenfolge: φ, ψ; ψ, υ; υ, τ ist die Formel am einfachsten zu behalten; $\varphi\psi = TU$ ist die eine Tangente, $\psi\upsilon = TV$ die Doppelsekante, $\upsilon\tau = VW$ die andere Tangente.

Bündels geht in sich selbst über und zwar jeder Punkt in den Nachbarpunkt; alle Tangenten der Kurven des Bündels sind Verbindungslinien entsprechender Punkte und bilden daher einen tetraedralen Komplex. Das Doppelverhältnis dieses Komplexes hat den speziellen Wert $\frac{1}{4}$. Auf irgend einer Tangente x ist der Berührungspunkt X in der Involution, in der sie den Kegelbüschel (T) schneidet, der eine Doppelpunkt; der andere ist der Schnitt mit der Doppelebene ψ; ein Paar der Involution bilden die Schnitte mit υ, φ; daher:

$$x(X, \psi, \varphi, \upsilon) = -1, \quad x(X, \varphi, \upsilon, \psi) = \tfrac{1}{2},$$

und ebenso im Büschel (V):

$$x(X, \upsilon, \tau, \psi) = -1, \quad x(X, \tau, \psi, \upsilon) = \tfrac{1}{2};$$

also:

$$x(X, \varphi, \upsilon, \psi) \cdot x(X, \tau, \psi, \upsilon) = \tfrac{1}{4}$$

oder:

$$x(\tau, \varphi, \upsilon, \psi) = \tfrac{1}{4}.$$ [1]

522 Eine beliebige kubische Raumkurve denken wir uns, ein Schmiegungsvierseit $TUVW$ konstruierend, als Kurve des Bündels

$$(T - TU, \ V - VW);$$

sie liegt dann auf einer Fläche 2. Grades durch $TUVW$. Wir bestimmen eine Kollineation, welche die Schmiegungsstrahlen TW, VU zu Axen hat und in der die beiden Schnittpunkte einer Geraden aus der andern Regelschar mit der Kurve homolog sind; die vier Ecken des Vierseits, auf den Axen gelegen, sind sich selbst entsprechend, also ist $TUVW$ eins der ∞^4 Koinzidenztetraeder; die Kurve geht daher in sich selbst über, und es sind immer zwei Punkte entsprechend, die auf einer Gerade jener Regelschar liegen. Diese beiden Punkte sind aber die Schnitte der Gerade mit dem Kegel (T), auf welchem die Kurve liegt, die Stützpunkte auf TW, VU sind die Schnittpunkte mit der Doppelgerade des Ebenenpaars $\upsilon\varphi$ und mit der Doppelebene ψ des Kegelbüschels, folglich die Doppelpunkte der Schnittinvolution und jene zu diesen harmonisch; die Kollineation ist eine windschiefe Involution.

Zwei konjugierte Schmiegungsstrahlen einer kubischen Raumkurve bestimmen als Axen eine windschiefe Involution, in welcher die Kurve sich selbst entspricht.

Und: Die Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve, welche einen Schmiegungsstrahl treffen, treffen auch den konjugierten, und diese Treffpunkte sind zu denen mit der Kurve harmonisch.

---

1) Voß, Math. Ann., Bd. 13, S. 237; Sturm, ebenda, Bd. 28, S. 271; Heinrichs a. a. O.

Auf der Kurve entstehen durch die windschiefe Involution zwei involutorische Punktreihen; Doppelpunkte sind die beiden Punkte T, V, zu denen die Axen als Schmiegungsstrahlen gehören.

Umgekehrt, jede der ∞^2 auf der kubischen Raumkurve befindlichen Involutionen führt zu einer windschiefen Involution, in welcher die Kurve sich selbst entspricht. Die konjugierten Schmiegungsstrahlen, welche zu den Doppelpunkten jener Involution gehören, sind die Axen, und die Involution, welche von der windschiefen Involution mit diesen Axen auf der Kurve induziert wird, ist mit der gegebenen identisch.

Wenn eine Kollineation mit Axen r, s eine kubische Raumkurve in sich selbst überführt, so muß ein Schmiegungsvierseit $TUVW$ dieser ein Kantenvierseit eines der Koinzidenztetraeder der Kollineation sein, in jedem von ihnen sind die Axen zwei Gegenkanten; also sind diese entweder die Diagonalen oder zwei Gegenseiten des Vierseits. Die Schnitte einer Verbindungslinie XX' entsprechender Punkte mit r, s seien R, S. Fallen nun die Axen r, s in die Diagonalen TV, UW des Schmiegungsvierseits, so lautet die Doppelbedingung (Nr. 521):

$$(SRXX') = (RRXX') = (SRXX')$$

welche nicht erfüllbar ist; fallen sie in die Tangenten TU, VW, so lautet sie:

$$(RRXX') = (SRXX') = (SSXX'),$$

für die dasselbe gilt. Fallen sie aber in die konjugierten Schmiegungsstrahlen TW, UV, so lautet sie:

$$(SRXX') = (RSXX') = (SRXX')$$

und wird erfüllt, wenn der gemeinsame Wert -1 ist.

Eine Kollineation mit Axen transformiert nur dann eine kubische Raumkurve in sich selbst, wenn die Axen in zwei konjugierten Schmiegungsstrahlen liegen und die Kollineation windschiefe Involution ist.

Die ∞^2 Paare konjugierter Schmiegungsstrahlen führen zu ∞^2 solchen Transformationen.

Jede windschiefe Involution transformiert ∞^6 kubische Raumkurven in sich, denn es lassen sich ∞^4 Schmiegungsvierseite, deren Schmiegungsstrahlen in ihre Axen fallen, konstruieren und zu jedem gehört ein Bündel von Raumkurven.

Bei einer Homologie, welche eine kubische Raumkurve in sich überführt, müssen eine Ecke des Schmiegungsvierseits in das Zentrum und die drei andern in die Ebene der Homologie fallen. Mag nun jene Ecke einer der beiden Punkte T, V der Kurve oder einer der andern Punkte sein, die Doppelbedingung läßt sich nicht erfüllen, auch nicht, wenn involutorische Homologie vorliegt.

Eine Homologie kann nicht eine kubische Raumkurve in sich selbst transformieren.

Dagegen kann man die Kurven eines Bündels ($T - TU$, $V - VW$) durch Homologie in Beziehung zueinander bringen.

Zwei Kurven des Bündels, welche von einer Gerade getroffen werden, die durch eine Ecke des Tetraeders geht, sind entsprechend in der Homologie, für welche diese Ecke zum Zentrum und die gegenüberliegende Ebene zur Ebene der Homologie genommen ist, denn diese Homologie transformiert das Schmiegungstetraeder in sich selbst.

Wenn die Ecke einer der Punkte ist, durch welche die Kurven des Bündels gehen, etwa T, so liegen solche Kurven auf demselben Kegel 2. Grades (T), und ihre Schmiegungsebenen umhüllen denselben Kegelschnitt in τ.

Ist das Zentrum eine von den beiden andern Ecken, so liegen die beiden Kurven auf demselben Kegel 3. Ordnung aus ihr und ihre Schmiegungsebenen umhüllen dieselbe Kurve 3. Klasse in der Gegenebene.

Wir erhalten so je einen Büschel von Kegeln 3. Ordnung aus den Ecken U, W, und jeder enthält ∞^1 Kurven des Bündels. Für jeden der Kegel aus U ist die Schmiegungsebene τ von V Wendeberührungsebene und UV zugehörige Wendekante, ferner UT, die Tangente in T, Rückkehrkante und die Schmiegungsebene φ zugehörige Berührungsebene. Die Kegel bilden einen Büschel, der zugleich eine Schar von Kegeln 3. Klasse ist. Ingleichen ergibt sich in der Gegenebene υ eine Büschel-Schar von Kurven 3. Klasse 3. Ordnung, für welche VW, die Spur der Schmiegungsebene τ von V, Wendetangente und V der zugehörige Wendepunkt ist, ferner der Kurvenpunkt T ein Rückkehrpunkt und die Spur TW der zugehörigen Schmiegungsebene φ die Rückkehrtangente ist[1]).

§ 79. Zugeordnete Gebilde der räumlichen Korrelation.

523 Wie bei der ebenen Korrelation (§ 47) gelten die Sätze: Fällt ein Punkt in die eine von seinen beiden Polarebenen, so fällt er auch in die andere; und geht eine Ebene durch den einen ihrer beiden Pole, so geht sie auch durch den andern. Der Beweis geschieht analog wie dort.

Hier kommt aber noch hinzu:

Schneidet eine Gerade $x \equiv y'$ die eine von ihren Polaren, etwa x', so schneidet sie auch die andere y.

Denn die Polarebene ζ des Punktes $Z' = x'y'$ muß durch die beiden Polaren x, y gehen, folglich trifft y die x oder y'.

---

1) Heinrichs, a. a. O. Nr. 30.

Beide Schnittpunkte $x'y'$ und xy sind Punkte, die in ihre Polarebene xy, bzw. $x'y'$ fallen.

Bei der räumlichen Korrelation gibt es drei Kernörter:

1. die Punkt-Kernfläche, den Ort der Punkte, welche in ihre eine und dann auch in die andere Polarebene fallen,

2. die Ebenen-Kernfläche, den Ort dieser Polarebenen, die durch den einen und den andern Pol gehen[1]),

3. den Kernkomplex, den Ort der Geraden, welche die eine und dann auch die andere Polare schneiden[2]).

Zu ihm gehören also auch diese beiden Polaren.

Der zweite Grad der beiden Kernflächen ergibt sich ähnlich wie in der Ebene: in einer Punktreihe und einem Ebenenbüschel, welche projektiv sind, einer Polreihe und dem zugehörigen Büschel der Polarebenen, gibt es zwei Paare entsprechender Elemente, die inzidieren.

Nennen wir diese Flächen F^2, Φ_2.

Aber ebenso gibt es in zwei projektiven Strahlenbüscheln zwei Paare entsprechender inzidenter Elemente; einem Strahlenbüschel des einen Raumes ist der Büschel der Polaren im andern, dessen Scheitel und Ebene zu der Ebene und dem Scheitel jenes polar sind, projektiv.

Also ist auch der Kernkomplex 2. Grades, weil er in jeden Strahlenbüschel zwei Strahlen sendet.

Die beiden Kernflächen gehen durch die Korrelation involutorisch ineinander über, der Kernkomplex in sich selber.

Bei der ebenen Korrelation sind die beiden Tangenten aus einem Punkte der Punkt-Kernkurve an die Geraden-Kernkurve seine beiden Polaren, und jede Tangente dieser Kurve schneidet jene in ihren beiden Polen.

Hier gehen aber von jedem Punkte der Punkt-Kernfläche F^2 ∞^1 einen Kegel 2. Grades umhüllende Berührungsebenen an die andere Kernfläche Φ_2, unter denen die beiden Polarebenen sich befinden, und jede Berührungsebene dieser Fläche hat ∞^1 Punkte auf jener, darunter die beiden Pole.

Jede Gerade des Raumes trägt eine Projektivität konjugierter Punkte; die erste Reihe wird gebildet durch die auf ihr gelegenen Pole aus Σ, die zweite durch die Schnitte der zugehörigen Polarebenen aus Σ', oder diese durch Pole von Σ' und jene durch die Schnitte ihrer Polarebenen aus Σ; die Konjugiertheit ist ja gegenseitig. Ebenso trägt sie eine Projektivität konjugierter Ebenen.

---

1) Schröter, Journal f. Math., Bd. 77, S. 105.

2) Montesano, La corrispondenza reciproca fra due sistemi dello spazio (Neapel 1885); Sturm, Math. Annalen, Bd. 28, S. 268.

Bei einem Strahle des Kernkomplexes arten beide Projektivitäten aus. Denn ist er wiederum $x \equiv y'$ und x', y die beiden ihn schneidenden Polaren, so sind xy und $x'y'$ die singulären Elemente, denen je alle Punkte bzw. Ebenen der Gerade im andern Raume konjugiert sind; weil z. B. die Polarebene $x'y'$ des Punktes xy die Gerade vollständig enthält.

Und umgekehrt, wenn auf einem Strahle die eine jener Projektivitäten ausgeartet ist, so gehört er zum Kernkomplexe, und auch die andere ist ausgeartet. Denn wenn dem Punkt X von x alle Punkte dieser Gerade in Σ' konjugiert sind, so geht die Polarebene ξ' von X durch x, und die in ihr liegende Polare x' trifft x, so daß x zum Kernkomplexe gehört.

Die beiden Punkte xy und $x'y'$ auf einem Strahle des Kernkomplexes liegen je in der Polarebene $x'y'$, xy, also sind sie die Schnitte des Strahls mit F^2, und diese Ebenen die Tangentialebenen an Φ_2. Als singuläre Punkte der Projektivität sind sie allen Punkten der Gerade konjugiert. Beschreibt der Komplexstrahl also einen Komplexkegel, so sind die xy in dem einen, die $x'y'$ in dem andern Sinne dem Scheitel konjugiert, durchlaufen also die Schnittkurven der beiden Polarebenen desselben mit F^2.

Der Kegel 2. Grades aus einem Punkte P an den Kernkomplex geht durch die Schnittkurven seiner beiden Polarebenen mit der Punkt-Kernfläche F^2.

Die Kurve dieses Komplexes in einer Ebene π wird eingeschnitten durch die Tangentialkegel aus dem einen wie dem andern Pole an die Ebenen-Kernfläche Φ_2.

Aus jenem Satze ergibt sich, daß die Polarebene des Punktes P in bezug auf F^2, weil sie auf den Kegelkanten die vierten harmonischen Punkte enthält, durch die Schnittlinie der beiden Polarebenen des P in der Korrelation geht und durch diese Ebenen harmonisch von P getrennt wird.

Ebenso liegt der Pol einer Ebene in bezug auf die Ebenen-Kernfläche Φ_2 auf der Verbindungslinie ihrer beiden Pole in der Korrelation und wird durch diese von ihr harmonisch getrennt.

524 Zwei kollineare Räume muß man mit entsprechenden Ebenen schneiden, um kollineare Felder zu erhalten, und nur in einer Koinzidenzebene ergibt sich eine ebene Kollineation. Dagegen aus einer räumlichen Korrelation schneidet jede Ebene Π eine ebene Korrelation. Dem Punkt X in Π, aus Σ und daher zum ersten der beiden Felder $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ in Π gehörig, korrespondiert in $\mathfrak{S}'$ die Spur x' der Polarebene ξ' von X in Σ', und, weil dem Ebenenbüschel x' von Σ' die Punktreihe x von Σ polar ist, so ist deren Spur X der der x' als Gerade von $\mathfrak{S}'$ entsprechende Punkt von $\mathfrak{S}$.

Bewegt sich X auf einer Gerade y von $\mathfrak{S}$, so entsteht durch den Ebenenbüschel y' in Σ', der dieser Polreihe von Σ entspricht, in $\mathfrak{S}'$ ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel Y' der y entsprechende Punkt wird. Die Polarebenen der Punkte von y' gehen durch y, also ist diese die Spurlinie der Polarebene von Y'. Daraus erhellt, daß man es mit entsprechenden Elementen korrelativer Felder $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ zu tun hat. Die ähnliche Betrachtung in Nr 323 bezieht sich, wie wir bald finden werden, auf einen Spezialfall.

Die Kurve, in welcher die Ebene Π die Punkt-Kernkurve F^2 schneidet, ist die Punkt-Kernkurve dieser ebenen Korrelation; der Tangentialkegel aus dem einen oder andern Pol der Ebene Π an Φ_2 schneidet in Π die Geraden-Kernkurve ein; denn jede Berührungsebene des Kegels geht, als Tangentialebene von Φ_2, durch beide Pole, von denen der eine, weil sie durch den einen Pol von Π geht, in Π liegt; also geht die Spurlinie dieser Ebene in Π durch ihren einen Pol in der ebenen Korrelation, tangiert die Geraden-Kernkurve derselben und geht auch durch den andern Pol: sie ist auch Spurlinie einer Berührungsebene des zweiten Kegels.

Wir wissen schon, daß dieser gemeinsame Schnitt der beiden Tangentialkegel die Komplexkurve des Kernkomplexes in Π ist. In der Tat, es muß jede Tangente dieser Geraden-Kernkurve durch ihre Pole in der ebenen Korrelation gehen, also die beiden Polaren der räumlichen Korrelation, denen sie angehören, treffen.

In gleicher Weise scheidet ein Punkt P aus der räumlichen Korrelation zwei konzentrische korrelative Bündel aus; die beiden Strahlen, die einer Ebene des Bündels P darin korrespondieren, sind die, welche nach ihren Polen gehen.

Der Ebenen-Kernkegel dieser Bündelkorrelation ist der Tangentialkegel aus P an Φ_2, der Strahlen-Kernkegel ist der Komplexkegel des Kernkomplexes und geht durch die Schnitte von F^2 mit den beiden Polarebenen von P.

Mit einer räumlichen Korrelation ist eine Kollineation 525
verbunden. Zugeordnet sind in ihr die beiden Pole X, Y' derselben Ebene $\xi' \equiv \eta$. Die Eindeutigkeit der Zuordnung ist ersichtlich. Durchläuft X eine Gerade z, so dreht sich ξ' um die Polare z', also η um die damit identische t, und Y' durchläuft deren Polare t'. Ebenso wenn X eine Ebene ζ beschreibt, deren Pol Z' ist, erzeugt Y' die Polarebene τ' des mit Z' identischen Punkts T. Es ist also in der Tat Kollineation entstanden, und es entsprechen sich auch zwei Geraden, zwei Ebenen, die derselben Gerade, demselben Punkte in beiderlei Sinne polar sind.

Diese Kollineation, das Ergebnis zweimaliger Transformation durch die Korrelation: Überführung von X in ξ' und der damit identischen

η in Y', kann das Quadrat der Korrelation genannt und mit C^2 bezeichnet werden, wenn diese mit C bezeichnet wird.

Durch sie geht jede der beiden Kernflächen und der Kernkomplex in sich über.

Ihr Koinzidenztetraeder liefert in seinen Ecken, Ebenen, Kanten Elemente, welche in beiderlei Sinn dasselbe polare Element in C haben, so daß involutorisches Entsprechen von Ecken und Ebenen, von Kanten statt hat. Die genauere Untersuchung muß aber noch aufgeschoben werden.

Zu einer räumlichen Kollineation gehört ein tetraedraler Komplex: seine Strahlen sind zugleich Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte, Schnittstrahlen entsprechender Ebenen und solche Strahlen, welche die eine und dann auch die andere entsprechende Gerade treffen. Also ergibt sich auch bei der räumlichen Korrelation durch die Kollineation, welche ihr Quadrat ist, ein tetraedraler Komplex, erzeugt durch die Geraden, welche zugleich Verbindungslinien der beiden Pole einer Ebene und daher ihr in beiderlei Sinne konjugiert und Verbindungsstrahlen der beiden Polarebenen eines Punktes und daher ihm in beiderlei Sinne konjugiert sind. Schröter hat a. a. O. derartige Strahlen Wechselstrahlen der Korrelation genannt. Die dritte Eigenschaft, die ein solcher Strahl hat, ist zunächst, daß er, als x, dessen Polare x' sei, die Polare y' der mit x' vereinigten Gerade y trifft, und dann, wenn er zugleich z' ist, mit dessen Polare z die w' sich vereinige, die Polare w von w' trifft. Aber das läßt sich einfacher ausdrücken. Weil nämlich y', z' (oder x, w) in einer Ebene liegen, so gilt dies auch für $y \equiv x'$ und $z \equiv w'$; und die beiden Polaren x', z von $x \equiv z'$ schneiden sich; umgekehrt, wenn das der Fall und x' mit y, z mit w' identisch ist, dann wird $x \equiv z'$ von y' und w getroffen. Also können wir sagen: Ein Strahl des Komplexes ist drittens ein solcher Strahl, dessen beide Polaren sich schneiden. Der Schnittpunkt ist der Punkt, zu dem der Wechselstrahl gehört, und die verbindende Ebene die Ebene, zu der er gehört.

526 Die Punkte des Wechselstrahles $\xi'\eta$, der zu einem beliebigen Punkte $X \equiv Y'$ gehört, sind ihm in beiderlei Sinne oder doppelt konjugiert. Also trägt jeder Strahl des Büschels, welcher aus $X \equiv Y'$ die Punktreihe auf $\xi'\eta$ projiziert, eine Projektivität konjugierter Punkte mit einem involutorischen Paare, daher eine Involution doppelt konjugierter Punkte; jeder Punkt auf ihm hat einen seiner doppelt konjugierten Punkte auf ihm, und der Strahl gehört zu dem Strahlenbüschel, der sich in gleicher Weise bei jedem seiner Punkte ergibt. Daraus erhellt, daß durch $X \equiv Y'$ kein anderer derartiger Strahl mit einer Involution doppelt konjugierter Punkte geht.

Jeder Punkt des Raums sendet also einen Strahlenbüschel von Strahlen aus, die eine Involution doppelt konjugierter Punkte tragen. Folglich erzeugen alle diese Strahlen einen linearen Komplex oder ein Gewinde $\mathfrak{G}^p$.[1]) Auch jede Ebene enthält einen Strahlenbüschel. Der Scheitel desselben ist (Nr. 307) der Berührungspol W der beiden Kernkurven der ebenen Korrelation, welche durch die Ebene, wie wir eben fanden, aus der räumlichen Korrelation ausgeschnitten wird.

In dualer Weise ergibt sich, mit der räumlichen Korrelation verbunden, ein zweites Gewinde $\mathfrak{G}^e$; seine Strahlen tragen Involutionen doppelt konjugierter Ebenen. Der Büschel solcher Strahlen, der in einer Ebene $\xi \equiv \eta'$ liegt, hat zum Scheitel den Spurpunkt des dieser Ebene zugehörigen Wechselstrahls $X'Y$, und der aus einem Punkte P kommende Strahlenbüschel liegt in der Ebene, welche die gemeinsamen Berührungskanten der Kernkegel der konzentrischen korrelativen Bündel verbindet, die in P durch die räumliche Korrelation hervorgerufen werden.

Kehren wir zu jenem linearen Komplexe $\mathfrak{G}^p$ zurück. Jedem Punkte $\mathfrak{Z} \equiv X \equiv Y'$ ist eine durch ihn gehende Ebene ζ_1 zugeordnet, die Ebene nach $\xi'\eta$, welche den Strahlenbüschel von $\mathfrak{G}^p$ trägt, und jeder Ebene ζ_1 ein in ihr gelegener Punkt $\mathfrak{Z}$, der Punkt W der ausgeschnittenen Korrelation. Bewegt sich $\mathfrak{Z}$ auf einer Gerade $\mathfrak{r} \equiv l \equiv m'$, so drehen sich die Polarebenen ξ' und η um die Geraden l', m und der Wechselstrahl beschreibt eine Regelschar, welche auf l' und m Punktreihen hervorruft, die zu diesen Ebenenbüscheln und der von $\mathfrak{Z}$ auf $\mathfrak{r}$ beschriebenen Punktreihe projektiv sind. Die Ebene ζ_1 verbindet drei entsprechende Punkte; aber vom Torsus 3. Klasse, den sie nach Nr. 204 umhüllen muß, lösen sich zwei Ebenenbüschel ab; denn kommt $\mathfrak{Z}$ in einen der Schnitte von $\mathfrak{r}$ mit der Punkt-Kernfläche F^2, so geht $\xi'\eta$ durch ihn, und die verbindende Ebene wird unbestimmt. Es bleibt, als eigentlicher Ort von ζ_1, ein Ebenenbüschel um $\mathfrak{r}_1$, dem im Kontinuum für die beiden eben erwähnten Lagen von $\mathfrak{Z}$ zwei bestimmte Ebenen angehören, die später genauer beschrieben werden sollen.

Durchläuft also $\mathfrak{Z}$ eine Gerade, so beschreibt ζ_1 einen Ebenenbüschel; also liegt Korrelation vor, aber mit der besonderen Eigenschaft, daß durchweg Punkt und Ebene, die einander zugeordnet sind, inzidieren.

Dual ergibt sich eine ebenso beschaffene Korrelation bei dem andern linearen Komplex $\mathfrak{G}^e$.

---

1) Mathem. Annalen Bd. 19 S. 475. — Battaglini, Memorie dell Accademia dei Lincei Ser. III Bd. 12.

§ 80. Der Nullraum, der eine Fall involutorischer Korrelation im Raume, und der zugehörige Strahlenkomplex 1. Grades.

527 Diese spezielle Korrelation mit durchgängiger Inzidenz der einander entsprechenden Punkte und Ebenen wollen wir nun genauer betrachten und zunächst auf eine einfache Weise herstellen: mit Hilfe eines einfachen windschiefen Fünfecks $ABCDE$. Wir legen eine Korrelation fest:

$$\begin{array}{llllll} \Sigma & A & B & C & D & E \\ \Sigma' & EAB & ABC & BCD & CDE & DEA, \end{array}$$

also jeder Ecke die zugehörige Winkelebene zuordnend. Der Ebene EAB, aus Σ, korrespondiert der Schnittpunkt der drei Polarebenen DEA, EAB, ABC von E, A, B, also A in Σ'. Folglich entsprechen die fünf Ecken und ihre Winkelebenen einander involutorisch. Ob man nun wie oben $A, \ldots E$ zu Σ und $EAB, \ldots$ zu Σ' rechnet und nach Anweisung von Nr. 468—69 zu einem Punkt von Σ die zugehörige Ebene in Σ' konstruiert oder ob man jene Punkte zu Σ', diese Ebenen zu Σ rechnet und zu demselben Punkte, nunmehr aber aus Σ' die zugehörige Ebene konstruiert, die Konstruktion ist beidemal genau dieselbe; man operiert dort wie hier mit denselben Elementen in derselben Weise, sie je das eine Mal dem einen, das andere Mal dem andern Raume zuweisend; man muß also bei beiden Konstruktionen die nämliche Ebene erhalten. Die hergestellte Korrelation ist durchweg involutorisch; jedes Element hat nur ein entsprechendes, und die unterscheidende Akzentuierung wird überflüssig.

Diese Korrelation hat aber noch eine zweite Eigenschaft: die der durchgängigen Inzidenz von Punkt und Ebene, die einander entsprechen, aber nicht von entsprechenden Geraden.

Zunächst entspricht jede Seite des Fünfecks sich selbst, der AB die Schnittlinie $(EAB, ABC) = AB$. Der Büschel (A, EAB) entspricht sich selbst und ist in sich projektiv; drei Strahlen in ihm erweisen sich sofort als sich selbst entsprechend: AE, AB und der Strahl, der die CD trifft; denn der entsprechende muß dies auch tun. Also entsprechen alle Strahlen dieses Büschels und der vier andern sich selbst. Daher liegt jeder Punkt einer dieser fünf Ebenen in seiner Polarebene, weil er mit einer sich selbst entsprechenden Gerade inzidiert, durch welche die Polarebene dann auch geht. Folglich sind auf jeder Gerade des Raums fünf Punkte sich selbst konjugiert, die Projektivität der konjugierten Punkte (Nr. 523) auf ihr ist Identität; jeder Punkt der Gerade, also jeder im Raume, ist sich selbst konjugiert, in seiner Polarebene gelegen.

Was demnach im allgemeinen Falle nur für die Punkte der einen Kernfläche, die Berührungsebenen der andern gilt, tritt hier bei jedem

Punkte, jeder Ebene ein: die Kernflächen sind unbestimmt geworden.

Liegt Y in der Polarebene ξ von X, so geht seine Polarebene η durch X, beide Ebenen gehen durch beide Punkte, und $\xi\eta$ ist mit XY identisch. Jeder Strahl, durch einen Punkt X in der zugehörigen Polarebene ξ gezogen, entspricht sich selbst; die Polarebene jedes seiner Punkte geht durch ihn.

Dieser Spezialfall der Korrelation wird Nullsystem (Möbius) oder Nullkorrelation (Reye) genannt, am einfachsten wohl Nullraum.[1]) Die zugeordneten und inzidenten Elemente nennt man dann Nullpunkt und Nullebene; die Strahlen eines der ∞^3 Strahlenbüschel, welche je durch Nullpunkt und Nullebene bestimmt werden, Nullstrahlen oder Leitstrahlen. Für entsprechende Geraden, die die Eigenschaft der Inzidenz nicht haben, verbleibt der allgemeine Name Polaren.

Die ∞^3 Büschel von Nullstrahlen führen, weil jeder Nullstrahl zu ∞^1 derartigen Büscheln gehört, welche die Punkte auf ihm zu Scheiteln haben und je in der durch den Strahl gehenden Nullebene liegen, nur zu ∞^3 Nullstrahlen, so daß ein Strahlenkomplex entsteht, und zwar einer vom 1. Grade, da eben von jedem Punkte ein Strahlenbüschel dieses Komplexes ausgeht, in jener Ebene einer sich befindet, in jedem beliebigen Strahlenbüschel also ein Strahl des Komplexes.

Jeder Nullraum liefert durch seine Nullstrahlen einen linearen Komplex, ein Gewinde, wie ich vorgeschlagen habe, dieses der Ebene analoge Gebilde der Liniengeometrie einfacher zu nennen.[2])

Mit der durchgängigen Inzidenz entsprechender Punkte 528
und Ebenen einer Korrelation ist das durchgängige involutorische Entsprechen verbunden, aber nicht umgekehrt. Dem X in Σ entspreche die durch ihn gehende Ebene ξ' in Σ', y aus Σ gehöre zum Büschel (X, ξ'), ihr entspreche y' in Σ', in ξ' gelegen, weil y durch X geht. Wenn nun y' von y verschieden wäre, so gäbe es auf y nur zwei Punkte (von Σ), die in ihre entsprechenden Ebenen fallen, nämlich X und $Z = yy'$, dessen entsprechende Ebene ζ' durch y' geht. Das widerspricht der vorausgesetzten durchgängigen Inzidenz. Also entspricht jeder Strahl von (X, ξ') sich selbst, jeder Punkt O von $\eta \equiv \xi'$ liegt auf einem solchen Strahle, so daß die entsprechende Ebene ω' durch diesen, durch O und durch X geht; wenn aber die

1) Die erste Erwähnung geschah, wie Cremona in seiner Schrift: Sulle figure reciproche nella Statica grafica (1872) festgestellt hat, durch Giorgini (Memorie della Società italiana delle Scienze Bd. 20 (1827); bekannt aber ist diese Korrelation erst geworden durch Möbius (Journ. f. Math. Bd. 10 (1833) S. 317, Lehrbuch der Statik 1837 § 81ff.; Gesammelte Werke Bd. 1 S. 487, Bd. 3 S. 112ff.) und durch Staudt: Geom. der Lage § 24, Beiträge zu derselben § 34.

2) Liniengeometrie Bd. I Nr. 65.

Polarebenen, in Σ', der Punkte O von η in X zusammenlaufen, so wird dieser Punkt X der Pol Y' von η, d. h. die Ebene $\xi' \equiv \eta$ hat in beiderlei Sinne denselben Pol $X \equiv Y'$.

Wir haben diese involutorische Korrelation mit durchgängiger Inzidenz entsprechender Punkte und Ebenen aus einem Fünfecke abgeleitet. Wir können für jede Korrelation, die jene Inzidenz-Eigenschaft besitzt, solche Fünfecke nachweisen. A sei ein beliebiger Punkt, α die durch ihn gehende (einzige) Polarebene, B ein Punkt in ihr, β wiederum seine Polarebene, die dann durch den sich selbst entsprechenden Strahl AB und A geht, C in β gelegen und D dann wieder in dessen Polarebene γ, E endlich in den Polarebenen δ, α von D und A gelegen; dann hat dieses Fünfeck $ABCDE$ die Eigenschaft, daß jeder von seinen Ecken die zugehörige Winkelebene zugeordnet ist; denn B und E liegen in α, A und C in β, usw.

Da A in ∞^3, B, C, D je in ∞^2, E in ∞^1 Lagen gewählt werden kann, so besitzt jede Korrelation mit der Inzidenz-Eigenschaft ∞^{10} solche Fünfecke; und da es ∞^{15} Fünfecke im Raume gibt und je ∞^{10} dieselbe Korrelation liefern, so bestehen ∞^5 derartige spezielle Korrelationen oder Nullräume, und für eine Korrelation ist es eine zehnfache Bedingung, diese spezielle Eigenschaft zu haben, daß die entsprechenden Punkte und Ebenen durchweg inzidieren und infolge dessen involutorisch entsprechend sind.

Wenn bei einer Korrelation zwei windschiefe Geraden l und m einander involutorisch entsprechen und auch einem jeden Punkte von l oder m involutorisch eine durch ihn gehende Ebene entspricht, also die Ebene, die ihn mit der andern Gerade verbindet, so liegt jeder Strahl des Netzes $[l, m]$ in den Polarebenen seiner Schnitte mit l, m, ist also deren Schnittlinie und zu sich selbst polar. Jeder Punkt des Raums befindet sich auf einem Strahle von $[l, m]$, liegt daher auf der einen wie der andern Polarebene, die durch diesen Strahl gehen müssen. Die Korrelation hat die Eigenschaft der durchgängigen Inzidenz entsprechender Punkte und Ebenen, ist involutorisch und Nullraum.

Vier Punkte A, B, C, D und ihre Nullebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bilden zwei Tetraeder, von denen jedes dem andern um- und dann auch eingeschrieben ist. Ersichtlich ist $\alpha\beta\gamma\delta$ dem $ABCD$ umgeschrieben. Aber weil der Punkt $\beta\gamma\delta$ in den drei Ebenen β, γ, δ liegt, so geht seine Nullebene durch deren Nullpunkte B, C, D; also liegt $\beta\gamma\delta$ in BCD, ebenso $\gamma\delta\alpha$ in $CDA, \ldots$ und $ABCD$ ist auch dem $\alpha\beta\gamma\delta$ umgeschrieben.[1])

---

1) Die Möglichkeit solcher Tetraeder erkannte Möbius (Journal f. Math. Bd. 3 S. 273; Gesamm. Werke Bd. 1 S. 429); daher Möbiussche Tetraeder.

Es ist aber auch umgekehrt mit jedem Gewinde ein Nullraum verbunden. Denn zunächst ist, auf Grund der Definition des linearen Komplexes, der Komplexkegel aus jedem Punkte 1. Ordnung und die Komplexkurve in jeder Ebene 1. Klasse, also beidemal ein Strahlenbüschel. Es wird daher jedem Punkte eine durch ihn gehende Ebene, jeder Ebene ein in ihr befindlicher Punkt zugeordnet. Wenn X_1, X_2 zwei Punkte auf einer Gerade l sind und l' die Schnittlinie der beiden zugeordneten Ebenen ξ_1, ξ_2 ist, so geht durch jeden Punkt Y von l' ein Strahl aus dem Büschel (X_1, ξ_1) und einer aus (X_2, ξ_2), das sind zwei Strahlen des Gewindes; die Ebene, welche sie verbindet, ist die Ebene η des Büschels aus Y; sie geht durch l. Daher geht durch jeden Punkt von l ein von Y kommender Komplexstrahl und ebenso ein von jedem andern Punkte von l' kommender; d. h. die zu ihm gehörige Ebene geht durch l'. Jeder Punkt der Gerade l oder l' sendet seine Ebene durch die andere. Die Zuordnung der Punkte und Ebenen ist daher so, daß, wenn der Punkt eine Gerade durchläuft, die Ebene einen Büschel beschreibt; d. h. sie ist Korrelation, und zwar, wegen der durchgängigen Inzidenz, Nullkorrelation oder Nullraum. 529

Die Gewindestrahlen sind die Nullstrahlen des verbundenen Nullraums und zu sich selbst polar.

Wenn l und l' im Nullraume polar sind und sich schneiden, so geht die Nullebene von ll' als Punkt von l durch l', also ist l' mit diesem Punkte ll' und seiner Nullebene inzident, demnach Nullstrahl und mit l identisch.

Zwei getrennte Polaren des Nullraums sind immer windschief; haben sie einen Punkt gemein, so vereinigen sie sich in einem Nullstrahle.

Jeder Strahl x, welcher zwei (getrennte) Polaren l, l' trifft, ist Nullstrahl, weil die Ebene, welche xl mit l' verbindet, die Nullebene dieses Punktes ist und x enthält.

Jeder Nullstrahl, welcher l trifft, trifft auch l'; da er in der Nullebene jenes Treffpunktes liegt und diese durch l' geht.

Sind also l und l', m und m' polar, so trifft jede Gerade, welche l, l', m schneidet, auch m'; denn sie ist Nullstrahl, weil sie l und l' schneidet, und trifft als solcher mit m auch die m'.

Es entsteht so eine Regelschar von Nullstrahlen. Die verbundene Regelschar enthält schon die beiden Polarenpaare l, l'; m, m'; wenn n eine weitere Gerade von ihr ist, so muß ihre polare Gerade n' von diesen n treffenden Nullstrahlen, welche die erstere Schar bilden, auch getroffen werden, also ebenfalls zur Leitschar gehören.

Da eine involutorische Korrelation eine Regelschar, die sie in sich überführt, involutorisch macht, so bilden die l, l'; m, m'; n, n'; ...

eine Involution. In der Leitschar entsteht also eine Involution von Polaren. Die Doppelstrahlen sind Nullstrahlen. Zum Gewinde gehört die eine Regelschar ganz, von der andern nur zwei Geraden.

Umgekehrt, eine involutorische Regelschar führt zu einem Nullraume oder einem Gewinde. In der Tat, jeder Ebene $\mathfrak{x}$ ist ein in ihr liegender Punkt X zugeordnet, das Zentrum der Involution, welche durch die Regelschar auf dem ausgeschnittenen Kegelschnitte hervorgerufen wird. Die Strahlen des Büschels $(X, \mathfrak{x})$ treffen gepaarte Geraden der Regelschar, sind daher Schnittlinien gepaarter Ebenen der Involution, die im Tangentialkegel aus X durch die Regelschar entsteht, und $\mathfrak{x}$ ist die Involutionsebene. So ergibt sich $\mathfrak{x}$ aus X.

Die Ebene $\mathfrak{x}$ werde um die Gerade g gedreht; wenn dann l, m die von dieser getroffenen Strahlen der Regelschar sind und l', m' ihnen in der Involution gepaart, so laufen in jeder der Ebenen $\mathfrak{x}$ die Verbindungslinien von gl mit $\mathfrak{x}l'$, von gm mit $\mathfrak{x}m'$ durch den X; diese Geraden bewegen sich aber in den Ebenen von gl nach l', von gm nach m', also X auf der Schnittlinie derselben. Demnach ist eine Korrelation mit durchgängiger Inzidenz entstanden.

Null- oder Gewindestrahlen sind daher die Strahlen, welche gepaarte Geraden der involutorischen Regelschar treffen, so daß das Gewinde durch ∞^1 Strahlennetze entsteht.[1])

In Nr. 175 wurde gezeigt, wie, wenn eine Korrespondenz [2, 2] zwischen zwei Punktreihen u, u_1 vorliegt, eine Fläche 2. Grades F^2 hergestellt werden kann, für welche die Erzeugenden der Regelfläche 4. Grades, zu der die Korrespondenz führt, Tangenten sind, und wie diese F^2 die Verzweigungspunkte der [2, 2] liefert.

Wir behalten die dortigen Namen bei, so daß z. B. a, b, c_1, d_1 die Geraden aus der einen Regelschar von F^2 sind, welche durch A, B, C_1, D_1 gehen und zugleich gelegen sind in den Berührungsebenen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$ (durch u), β_1, α_1 (durch u_1). Wir legen in dieser Regelschar die Involution $(a, b; c_1, d_1)$ fest, wodurch ein Nullraum sich ergibt. In ihm suchen wir die Nullstrahlen auf, welche u und u_1 treffen und also auch deren Polaren u', u_1'; diese Nullstrahlen bilden eine Regelschar, in deren Leitschar u, u_1, u', u_1' sich befinden. Aus jener Regelschar von Nullstrahlen nehmen wir die vier Geraden, welche durch A, B, C_1, D_1 gehen. Die durch A gehende trifft in A die u und die a, also muß sie als Nullstrahl der gepaarten Gerade b begegnen; als Gerade aus A, welche b trifft, fällt sie in die Ebene $\mathfrak{c}$

1) Das ist die von Chasles schon 1839, also längere Zeit vor der Liniengeometrie, angegebene Erzeugung des linearen Komplexes: Journal de Mathématiques Ser. I Bd. 4 S. 348.

und da sie auch u_1 trifft, muß sie durch den Punkt $A_1 = u_1 \Upsilon$ gehen; also ist sie AA_1, und die drei andern sind BB_1, C_1C, D_1D. Diese vier Geraden gehören zu einer Regelschar, u und u_1 befinden sich in der Leitschar; daher ist:

$$ABCD \;\overline{\wedge}\; A_1B_1C_1D_1,$$

und die Projektivität der beiden Würfe der Verzweigungselemente der [2, 2] ist von neuem bewiesen.

Jede Regelschar von Nullstrahlen eines Nullraums (oder von 530 Strahlen eines Gewindes) ruft in der Leitschar sofort eine Involution von Polaren hervor, denn die Polare zu jeder Gerade derselben muß dieser angehören. Wir können die Leitschar jeder Regelschar auf ∞^2 Weisen involutorisch machen; also befindet sich jede Regelschar in ∞^2 Gewinden oder für ∞^2 Nullräume besteht sie aus Nullstrahlen. Drei die Regelschar bestimmende Nullstrahlen bestimmen die Leitschar und die Involution in ihr und so werden auch die übrigen Strahlen der ersteren Nullstrahlen. Die durch drei Nullstrahlen bestimmte Regelschar besteht aus lauter Nullstrahlen, oder die Regelschar, die durch drei Strahlen eines Gewindes bestimmt ist, gehört ihm ganz an. Danach enthält jedes Gewinde, weil jede seiner Regelscharen auf ∞^3 Weisen durch drei Geraden bestimmt werden kann, die ∞^3 Geraden aber auf ∞^9 Weisen zu dreien sich zusammenstellen lassen, ∞^6 Regelscharen. Legt man also durch jede der ∞^9 Regelscharen je die ∞^2 Gewinde, so reproduziert sich jedes ∞^6-mal; es ergibt sich ∞^5 als die Anzahl der Gewinde, in Übereinstimmung mit der der Nullräume (Nr. 528).

Jedes Polarenpaar liefert ein Strahlennetz in das Gewinde, so daß es deren ∞^4 gibt. Vier Geraden des Gewindes machen ihre beiden Treffgeraden zu einem Polarenpaar; denn die Polare der einen Treffgerade muß auch die vier Nullstrahlen treffen; dadurch werden die übrigen Strahlen dieses Netzes auch Null- und Gewindestrahlen. Jede vier Strahlen eines Gewindes (die nicht zur nämlichen Regelschar gehören) bestimmen ein ganz im Gewinde befindliches Strahlennetz; dies gibt die Mannigfaltigkeit $4 \cdot 3 - 4 \cdot 2$ der Netze im Gewinde.

Wenn zwei projektive Ebenenbüschel u, u' gegeben sind, so ist der Ort der Geraden, welche von ihnen in involutorischen Punktreihen geschnitten werden, ein Gewinde. Denn für die beiden projektiven Strahlenbüschel, welche sie in eine Ebene Π schneiden, bilden diese Geraden einen Strahlenbüschel um das involutorische Zentrum P (Nr. 90), den Schnittpunkt der beiden Strahlen, welche dem gemeinsamen Strahle der Strahlenbüschel korrespondieren. Zu P finden wir umgekehrt Π als die Ebene von ihm nach der Schnittlinie der beiden Ebenen ξ', ξ, welche in der gegebenen Projektivität den Ebenen uP, $u'P$ entsprechen; denn auf jedem Strahle des Büschels (P, Π) entsteht so ein involutorisches Paar. Läuft P auf einer Gerade l, so bewegt sich die Schnittlinie $\xi\xi'$ durch eine Regelschar, welche zur Punktreihe P projektiv ist; aber zweimal geht eine Gerade derselben durch den entsprechenden Punkt P, wenn dieser nämlich einer der Schnittpunkte der l mit der durch die gegebenen projektiven Ebenenbüschel erzeugten Regelschar ist; also entsteht durch die Ebenen Π nicht ein kubischer Torsus, sondern ein Ebenenbüschel. Und ähnlich beschreibt, wenn Π sich um eine Gerade dreht, P nicht eine kubische Raumkurve, sondern eine Gerade. So ist der zum Gewinde gehörige Nullraum nachgewiesen. In Nr. 90 wurde dieser lineare Komplex schon kurz erwähnt.

Daraus, daß die durch drei Strahlen eines Gewindes bestimmte Regelschar ihm ganz angehört und zwei entsprechende Geraden einer Kollineation mit Axen in einer Regelschar mit diesen Axen sich befinden (Nr. 475), folgt, daß ein Gewinde und sein Nullraum durch eine Kollineation mit Axen, welche dem Gewinde angehören oder Nullstrahlen des Nullraums sind, in sich selbst übergehen.

Das Gewinde $\mathfrak{G}^p$ einer allgemeinen Korrelation (Nr. 526) entsteht durch diejenigen Strahlen, welche einen Punkt mit einem doppelt konjugierten Punkte (auf der Schnittlinie der beiden Polarebenen) verbinden; bei einer involutorischen Korrelation sind jede zwei Punkte, welche in dem einen Sinne konjugiert sind, es auch im andern Sinne, und der Zusatz „doppelt“ wird überflüssig. Wir erhalten daher bei dem Nullraume das Gewinde $\mathfrak{G}^p$ durch die Strahlen aus jedem Punkte nach den ihm konjugierten Punkten. Diese erfüllen die Nullebene des Punktes, und es ergibt sich der Büschel um den Punkt in seiner Nullebene, wobei jeder Strahl ∞^1 dem Punkte konjugierte Punkte enthält.

Das Gewinde $\mathfrak{G}^p$ vereinigt sich also im Falle des Nullraumes mit dem diesem zugehörigen Gewinde, und dasselbe gilt für $\mathfrak{G}^e$.

Aber auch der Kernkomplex wird durch dies Gewinde dargestellt. Jeder nicht dem Gewinde angehörige Strahl ist von seiner Polare verschieden und windschief zu ihr; die Strahlen des Gewindes sind die einzigen, welche ihre Polaren schneiden, indem sie sich ganz mit ihnen vereinigen. Also nur diese Strahlen können Strahlen des Kernkomplexes sein. Im allgemeinen Fall enthält jeder Strahlenbüschel (X, η) (des einen Raumes) zwei Strahlen, welche je ihre Polare (im andern Raume) schneiden. Hier haben sich diese beiden Strahlen durchweg vereinigt in dem Strahl des Gewindes, der zu (X, η) gehört und, weil zu sich polar, auch zum polaren Büschel

(ξ, Y). Folglich repräsentiert das Gewinde, zweifach gerechnet, den Kernkomplex.

Wenn eine Gerade l einen Strahlenbüschel $(\dot{A}, \alpha)$ beschreibt, so 531
beschreibt die Polare l' einen projektiven Strahlenbüschel (A', α') um den Nullpunkt von α in der Nullebene von A; der, wie eben gefunden, beiden Büscheln gemeinsame Gewindestrahl entspricht sich selbst. Jeder Strahl des Gewindes trifft einen Strahl von (A, α) und dann auch den entsprechenden in (A', α'), der zu ihm im Nullraume polar ist. So erhellt, daß jeder lineare Komplex auf die Sylvestersche Weise (Nr. 255) erzeugt werden kann, und zwar, weil es ∞^5 Strahlenbüschel gibt, in ∞^5 Weisen. Andererseits gibt es zu jedem der ∞^5 Strahlenbüschel ∞^3, welche mit ihm einen Strahl gemeinsam haben, also haben wir ∞^8 Paare derartiger Strahlenbüschel, und bei jedem sind, weil der gemeinsame Strahl sich selbst entsprechen soll, ∞^2 Projektivitäten möglich. Wir erhalten ∞^{8+2-5} Gewinde.

Wie aus fünf Strahlen vermittelst der Sylvesterschen Erzeugung ein Gewinde hergestellt werden kann, ist a. a. O. gezeigt worden. Wenn zwei von diesen Strahlen sich schneiden, so haben wir in dem Schnittpunkt und der Verbindungsebene Nullpunkt und Nullebene. Also kann man auch drei Strahlen des linearen Komplexes und einmal Nullpunkt und Nullebene oder einen Strahl und zweimal Nullpunkt und Nullebene geben. Letzteres ist wiederum damit gleichbedeutend, daß zwei Polaren gegeben sind: die Verbindungslinie der beiden Nullpunkte und die Schnittlinie der beiden Nullebenen.

Wenn drei Punkte A, B, C und ihre Nullebenen α, β, γ gegeben sind, so ist es, da ja γ durch den Punkt $(ABC, \alpha\beta)$ gehen muß, hinreichend, wenn A, B, α, β und ein Strahl c von (C, γ) gegeben sind; denn dann wird jedem Punkt X von c die Ebene als Nullebene ξ zugeordnet, die den Strahl c mit dem Punkte $(ABX, \alpha\beta)$ verbindet, insbesondere dem Punkte C die Ebene γ. Also ist auch durch A, B, C und α, β, γ, wenn sie nur die genannte Inzidenz erfüllen, eindeutig ein Gewinde oder ein Nullraum bestimmt.

In der in Nr. 255 besprochenen Konstruktion des Gewindes aus fünf Strahlen kommen Willkürlichkeiten vor, die es zweifelhaft machen, ob das Gewinde dadurch eindeutig bestimmt ist. Nachdem wir uns für einen der fünf Strahlen als den gemeinsamen der erzeugenden Strahlenbüschel und die beiden durchzulegenden Ebenen α, β, die wir jetzt α und α' nennen wollen, entschieden, verläuft die weitere Konstruktion eindeutig; wir wissen nun, daß die Scheitel A_0, B_0 die Nullpunkte A', A von α', α sind. Legen wir durch einen beliebigen der fünf Strahlen zwei Ebenen und ordnen jeder den Nullpunkt der andern in bezug auf das vorhin erzeugte Gewinde zu, so sind die beiden Strahlenbüschel projektiv mit dem Strahle als sich selbst entsprechendem und mit je den von den vier anderen Strahlen getroffenen Strahlen als entsprechenden; sie sind die erzeugenden Büschel für diese andere Anordnung und das erzeugte Gewinde ist das nämliche. Die eindeutige Bestimmung des Gewindes durch fünf seiner Strahlen, oder des Nullraums durch fünf Nullstrahlen ist erkannt. Die Bestimmung durch ein windschiefes Fünfseit (Nr. 527) ist nur ein Spezialfall hiervon.

Wenn durch fünf Strahlen ein Gewinde gelegt werden kann, so gehen durch vier Strahlen und das durch sie bestimmte Strahlennetz ∞^{4-3} Gewinde, ein Büschel von Gewinden, indem der fünfte Strahl jeder von den ∞^4 Strahlen des Raums sein kann, je ∞^3 aber dasselbe Gewinde liefern, durch drei Strahlen und die durch sie bestimmte Regelschar $\infty^{2\cdot 4-2\cdot 3}$, also ∞^2 Gewinde, ein Netz (oder Bündel) von Gewinden, und durch zwei Strahlen ∞^3 Gewinde, ein Gebüsche von Gewinden.

In diesen linearen Systemen 1., 2., 3. Stufe wird durch 1, 2, 3 Strahlen bzw. ein Gewinde eindeutig bestimmt.

Zwei Büschel von Gewinden, die einem Netze angehören, bestimmt durch zwei vierte Strahlen, außer der gemeinsamen Regelschar, haben das Gewinde gemeinsam, das durch diese beiden Strahlen, als vierten und fünften, festgelegt ist. Also ist wiederum jedes Gewinde eines Netzes in einem der Büschel enthalten, welche eins von den Gewinden des Netzes mit den verschiedenen Gewinden eines Büschels desselben verbinden; dies gibt die fächerförmige Erzeugung des Netzes; und ebenso führt der Satz, daß ein Büschel und ein Netz aus einem Gebüsche ein Gewinde gemeinsam haben, festgelegt durch die beiden Strahlen, die, außer den beiden Grundstrahlen des Gebüsches, den Büschel, und den Strahl, der das Netz bestimmt, zur fächerförmigen Herstellung des Gebüsches.

Fächerförmig erzeugt man dann das lineare System 4. Stufe von Gewinden (Gewebe), ein Gewinde mit allen Gewinden eines Gebüsches durch Büschel verbindend. Da jenes Gewinde im allgemeinen durch keinen der Grundstrahlen des Gebüsches geht, so hat dies System keinen allen seinen Gewinden gemeinsamen Strahl, kann aber einen haben. Das Gewinde kann nicht durch beide Grundstrahlen des Gebüsches gehen, weil es demselben nicht angehören darf.[1])

532 Jede kubische Raumkurve führt zu einem Nullraume. Wir fanden (Nr. 204, 216), daß die Ebene, welche die Oskulationspunkte der von einem Punkte kommenden Schmiegungsebenen verbindet, durch diesen Punkt geht und umgekehrt, daß der Punkt, der den Schmiegungsebenen der drei Schnittpunkte der Kurve mit einer Ebene gemeinsam ist, in diese Ebene fällt. Darin haben wir eine

1) Liniengeometrie Bd. I S. 175ff.

eindeutige Zuordnung von Punkten und Ebenen mit durchgängiger Inzidenz. Es ist nachzuweisen, daß sie Korrelation ist, daß also, wenn der Punkt auf einer Gerade läuft, die zugeordnete Ebene um eine andere sich dreht. Wegen der Inzidenz handelt es sich dann um einen Nullraum. Wir erinnern uns aus Nr. 216, daß jeder Punkt durch seinen Ebenenbündel auf R^3 eine involutorische Trilinearität oder Involution 3. Grades 2. Stufe induziert; und die Oskulationspunkte der Schmiegungsebenen sind die dreifachen Punkte derselben und bilden selbst ein Tripel. Läuft der Punkt auf einer Gerade, so ergibt sich ein Büschel von Trilinearitäten, denen die kubische Involution gemeinsam ist, welche auf R^3 durch den Büschel um jene Gerade entsteht. Wir können ihn, wenn $T = 0$, $T_1 = 0$ die Gleichungen von zwei dieser Trilinearitäten sind, durch $T + \rho T_1 = 0$ darstellen. Jeder Punkt von R^3 legt in $T = 0$, wie in $T_1 = 0$ eine Involution der ihn zu Tripeln vervollständigenden Paare fest; deren gemeinsames Paar gibt mit ihm ein allen Trilinearitäten des Büschels gemeinsames Tripel, und diese gemeinsamen Tripel bilden eine kubische Involution, offenbar diejenige, welche den Trilinearitäten $T = 0$, $T_1 = 0$ als zweien I_3^2, die beide in der einzigen I_3^3 auf R^3 enthalten sind, gemeinsam ist (Nr. 218).

Wird nun in $T + \rho T_1 = 0$ $x' = x'' = x$ gesetzt, so ergibt sich, für jede der Trilinearitäten des Büschels, das Tripel der dreifachen Elemente; sie bilden, wie die Gleichung zeigt, eine kubische Involution und die verbindenden Ebenen einen Ebenenbüschel (Nr. 203).

Es seien, um noch einen mehr geometrischen Beweis zu geben, A, B, C, D vier Punkte der Kurve, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ihre Schmiegungsebenen; so daß $\alpha\beta\gamma\delta$ dem $ABCD$ umgeschrieben ist. Aber sie sind Möbiussche Tetraeder; sind nämlich A_1, B_1, C_1, D_1 die Ecken $\beta\gamma\delta, \ldots$ des Tetraeders $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ die Ebenen $BCD, \ldots$ von $ABCD$, so ist α_1 die zu A_1 gehörige Ebene, denn die durch A_1 gehenden Schmiegungsebenen β, γ, δ oskulieren in B, C, D; also geht auch α_1 durch A_1, β_1 durch $B_1, \ldots$ Es liegen achtmal vier von den acht Punkten in einer der acht Ebenen. In α_1 liegen $B, C, D, A_1; \ldots$; in $\alpha: B_1, C_1, D_1, A; \ldots$ Daher ist $\alpha\beta \equiv C_1D_1$, $\gamma\delta \equiv A_1B_1, \ldots$, $\alpha_1\beta_1 \equiv CD, \ldots$; aber auch $AB_1 \equiv \alpha\beta_1$; usw.

AB_1 trifft die in α, β_1 gelegenen C_1D_1, CD und, in A, B_1, die AB, A_1B_1; dieselben vier Geraden werden auch von BA_1, CD_1, DC_1 getroffen; also gehören

$$AB_1, \; BA_1, \; CD_1, \; DC_1$$

zu einer Regelschar, und

$$AB, \; CD, \; \alpha\beta \equiv C_1D_1, \; \gamma\delta \equiv A_1B_1$$

zur verbundenen.

Es sei ξ' die dem Punkte X zugehörige Ebene; wir denken sie bestimmt durch X und die Oskulationspunkte A, B von zwei Schmiegungsebenen α, β durch X; η' gehe durch X und C, D seien zwei ihrer Schnitte und γ, δ ihre Schmiegungsebenen, so ist der zu η' gehörige Punkt Y der Schnittpunkt $(\eta', \gamma\delta)$. Durch die Bezeichnung sind X, Y dem ersten, ξ', η' dem zweiten Raume zugewiesen. Die $\xi'\eta'$ trifft $\alpha\beta$ im Punkte X, durch den α, β, ξ', η' gehen; sie trifft ferner die in ξ', η' gelegenen AB, CD; also trifft sie drei Geraden der zweiten von den obigen Regelscharen, gehört zur ersten und trifft auch $\gamma\delta$; das bedeutet, daß der Punkt $Y = (\eta', \gamma\delta)$ in ξ' liegt. Wenn also X und η' inzidieren, so tun es auch ξ' und Y.

Nun sei eine beliebige Gerade g als Schnittlinie der Ebenen ω_1', ω_2' betrachtet, denen O_1, O_2 zugehören; jeder Punkt X auf g inzidiert mit ω_1', ω_2', also die ihm zugehörige Ebene ξ' mit O_1, O_2 und $g' = O_1 O_2$. Läuft dann Y auf g' und bleibt damit in zwei durchgehenden Ebenen, zugehörig zu Punkten auf g, so geht η' durch diese Punkte und durch g.

Damit ist die Zuordnung als Korrelation und, wegen der Inzidenz, als Nullraum erkannt.

Mit jeder kubischen Raumkurve ist ein Nullraum und ein Strahlengewinde verbunden: in jenem ist einem Punkt die Ebene zugeordnet, welche die Oskulationspunkte der von ihm kommenden Schmiegungsebenen verbindet.[1])

In Nr. 204 wurde schon ein Spezialfall zweier polarer Geraden erwähnt: eine Schmiegungsaxe und die Doppelsekante, welche die Oskulationspunkte der beiden Schmiegungsebenen durch sie verbindet. Eine Tangente ist zu sich polar, und einer Ebene durch sie ist der Punkt zugeordnet, in dem die Schmiegungsebene des dritten Schnitts die Tangente trifft; geht sie in die Schmiegungsebene über, so fällt der zugehörige Punkt in den Berührungspunkt der Tangente oder Oskulationspunkt der Schmiegungsebene.

Weil es ∞^{12} kubische Raumkurven gibt (Nr. 202, 372) und andererseits ∞^5 Nullräume oder Gewinde, so müssen zu jedem Nullraume oder Gewinde ∞^7 kubische Raumkurven gehören — Ordnungskurven des Nullraums, wie sie Staudt nennt.

533 Die Polaren der unendlich fernen Geraden heißen Durchmesser des Nullraums oder des Gewindes; sie haben alle dieselbe Richtung: nach dem Nullpunkte $\mathfrak{U}$ der unendlich fernen Ebene. Die Nullebenen der Punkte eines Durchmessers sind parallel, da ihnen die unendlich ferne Polare des Durchmessers gemeinsam ist. Derjenige Durchmesser a, welcher zu den Nullebenen seiner Punkte normal ist, heißt Axe des Nullraums

1) Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage Nr. 487; Schröter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung und Raumkurven 3. Ordnung § 36 (wo jedoch im ersten Absatze auf S. 295 eine Verbesserung erforderlich ist); Sturm, Liniengeometrie Bd. I Nr. 243 ff.

und des Gewindes; sie ist polar im Nullraume zu der Polare a'_∞ jenes Punktes $\mathfrak{U}$ im absoluten Polarfelde.

Jeder Strahl des Gewindes, welcher die Axe a trifft, trifft auch a'_∞, ist also rechtwinklig zu a; und umgekehrt, jeder Strahl, welcher a rechtwinklig schneidet, gehört zum Gewinde, weil er a'_∞ trifft. Die Nullebene jedes Punktes geht durch das Lot aus ihm auf die Axe.

Alle Strahlen, welche zwei beliebige Polaren l, l' und die Axe treffen, sind Gewindestrahlen und treffen auch a'_∞; also erzeugen sie eine paraboloidische Regelschar. Die Leitebenen für sie gehen nach a'_∞, sind daher rechtwinklig zur Axe; diejenigen der verbundenen Schar, zu welcher a gehört, sind zu a parallel und deshalb zu jenen Leitebenen senkrecht. Daher ist das Paraboloid ein gleichseitiges. In der ersteren Regelschar befindet sich das gemeinsame Lot zwischen l und a, da es auch a'_∞ trifft; es ist senkrecht zu den Leitebenen der zweiten Schar, die durch a und l gehen, daher auch zu der durch l' gehenden und zu l'.

Das gemeinsame Lot zwischen der Axe a und einer beliebigen Gerade l trifft auch deren Polare l' rechtwinklig; und, weil l und l' nur ein gemeinsames Lot haben, folgt:

Das gemeinsame Lot zwischen zwei Polaren l und l' schneidet die Axe rechtwinklig.

Es sei P^2 ein Rotationszylinder um die Axe a und p sein Radius. Alle Strahlen des Gewindes, deren gemeinsames Lot mit a die Länge p hat, berühren diesen Zylinder und bilden also Strahlenbüschel in dessen Berührungsebenen; weil diese Ebenen durch $\mathfrak{U}$ gehen, so liegen ihre Nullpunkte, die Scheitel der Büschel, in der unendlich fernen Ebene, und es handelt sich um Parallelstrahlen-Büschel. Also haben zunächst sämtliche Strahlen eines solchen Büschels dieselbe Neigung φ gegen a. Aber diese Neigung ist für alle diese Strahlenbüschel dieselbe. Aus jedem von ihnen haben wir einen Strahl g, welcher auf einem bestimmten Kreise k^2 des Zylinders berührt: in X; die Nullebene ξ von X enthält X und das Lot aus X auf a oder zwischen g und a. Ist s die durch X gehende Zylinderkante, so steht dieses Lot auf der Berührungsebene sg senkrecht, daher sind auch die Ebenen sg und ξ normal; d. h. g ist Orthogonalprojektion von s auf ξ, also $\sphericalangle\, \xi s = gs$ oder $\sphericalangle\, \xi a = ga = \varphi$. Dieser Winkel ξa bleibt aber konstant, wenn X den k^2 durchläuft. In bezug auf k^2 sind nämlich der auf a gelegene Mittelpunkt M und die unendlich ferne Gerade a'_∞ polar; also sind die ihnen im Nullraume entsprechenden Elemente, die Ebene μ von k^2 und die Axe a, polar in bezug auf den Kegel 2. Grades, der dem k^2 entspricht und von den Nullebenen ξ der Punkte X von k^2 eingehüllt wird; daher ist a eine Axe dieses Kegels und μ die zu ihr senkrechte Hauptebene. Ferner, die Durchmesser von k^2 gehen, als

Strahlen des Gewindes, im Nullraume in sich selbst über; die rechtwinklige Involution konjugierter Durchmesser wird Involution konjugierter Strahlen für den Kegel, und die Ebene μ eine zyklische Ebene desselben, deren Kanten nach ihren absoluten Punkten gehen; die Parallelebenen zu ihr schneiden Kreise aus dem Kegel. Wenn aber die Parallelebenen zu einer Hauptebene dies tun, so ist der Kegel ein Rotationskegel und a seine Axe; folglich haben die Berührungsebenen ξ konstante Neigung gegen a.

Alle Strahlen des Gewindes, welche den Rotationszylinder P^2 um a tangieren und daher gleiche Entfernung p von a haben, haben auch gleiche Neigung φ gegen a.

Das gilt für jeden Rotationszylinder um die Axe a, jedem p entspricht ein φ. Jede Verschiebung in der Richtung der Axe verschiebt nun jeden der Büschel von Parallelstrahlen, die diese Zylinder berühren, in sich, führt das Gewinde in sich selbst über, jede Drehung um die Axe führt jeden dieser Büschel in einen andern den nämlichen Zylinder berührenden über, transformiert ebenfalls das Gewinde in sich selbst; daher gilt das auch für jede Schraubenbewegung um die Axe.

Dem konstanten Winkel φ mit a, der zu jedem Rotationszylinder um a gehört, entspricht ein unendlich ferner Kegelschnitt $\mathfrak{f}^2$, für welchen $\mathfrak{U}$ und a'_∞ polar sind; er entspricht im Nullraume dem Zylinder und wird durch die Nullpunkte der Berührungsebenen desselben, also die unendlich fernen Scheitel der Parallelstrahlen-Büschel von Gewindestrahlen in diesen Ebenen erzeugt, wobei zu zwei parallelen Berührungsebenen die beiden Schnitte ihrer gemeinsamen Geraden mit $\mathfrak{f}^2$ gehören. Bewegt man die Tangentialebene kontinuierlich um den Zylinder, so durchläuft der Scheitel projektiv und kontinuierlich diese Kurve $\mathfrak{f}^2$, und die Büschel gehen kontinuierlich ineinander über. Daraus erhellt, daß, wenn in die Axe a und die Zylinderkanten s ein positiver Sinn gelegt und auf die Gewindestrahlen g ebenfalls, so jedoch, daß der Winkel der positiven Sinne von g und s spitz ist, für einen Beobachter, der in der Axe steht mit dem positiven Sinne von den Füßen nach dem Kopfe, der Winkel gs immer denselben Sinn hat. Wenn nun p sich unendlich wenig ändert, tut es auch φ; also muß der Sinn erhalten bleiben.

Der Sinn von gs ist daher für alle Strahlen des Gewindes der nämliche, und es existieren zwei verschiedene Arten von Gewinden: rechts gewundene und links gewundene,[1]) je nachdem der Sinn der übliche positive ist (der Uhrzeigerdrehung entgegengesetzt) oder der negative.

---

1) Wegen dieser „Windungs"-Eigenschaften habe ich mich entschlossen, den einfacheren Namen „Gewinde" zu wählen.

Wenn der Strahl g des Gewindes den Zylinder P^2 in X berührt, X_1 der unendlich nahe Punkt auf g ist, in dem wiederum der Strahl g_1 des Gewindes berührt, ..., so sind $X, X_1, X_2, \ldots$ Punkte einer auf dem Zylinder verlaufenden Schraubenlinie und $g, g_1, g_2, \ldots$ ihre Tangenten. Ist der Winkel gs positiv, so ist diese Schraubenlinie eine rechtsgewundene; denn so wird eine Schraubenlinie genannt, wenn die Bewegung eines Punktes auf ihr sich auf einen Kreis des Zylinders in eine im Sinne der Uhrzeigerdrehung erfolgende Bewegung projiziert für einen in der Richtung der Axe betrachtenden Beobachter, auf welchen zu die Bewegung geschieht.

Die Strahlen eines rechts- oder linksgewundenen Gewindes, welche denselben Rotationszylinder um die Axe a berühren, sind die Tangenten von ∞^1 kongruenten rechts-, bzw. linksgewundenen Schraubenlinien auf dem Zylinder.

Nun handelt es sich um die Beziehung zwischen p und φ. Es sei auf einem die Axe a, wie wir wissen, rechtwinklig schneidenden Strahl des Gewindes X_0 der Fußpunkt, X_∞ der unendlich ferne Punkt und X, X' zwei beliebige Punkte auf derselben Seite von X_0, $X_0 X = p$, $X_0 X' = p'$, g, g' die Strahlen des Gewindes, welche die Zylinder mit den Radien p, p' in X, X' berühren, ferner seien $\xi_0, \xi_\infty, \xi, \xi'$ die Nullebenen jener vier Punkte; ξ_0 ist senkrecht zu a; weil X_∞ auf a'_∞ liegt, geht ξ_∞ durch a und ist zu ξ_0 senkrecht. Wir wissen, $\varphi = ga$ und $\varphi' = g'a$ sind gleich ξa, $\xi' a$ oder $\xi\xi_\infty$, $\xi'\xi_\infty$. Nun ist, wegen der Korrelation:

$$(X_0 X_\infty X X') = (\xi_0 \xi_\infty \xi \xi');$$

also

$$\frac{p}{p'} = \frac{\sin \xi_0 \xi}{\sin \xi_\infty \xi} : \frac{\sin \xi_0 \xi'}{\sin \xi_\infty \xi'} = -\operatorname{cotg} \varphi : -\operatorname{cotg} \varphi',$$

daher:

$$p \operatorname{tg} \varphi = p' \operatorname{tg} \varphi' = k.$$

Wir nennen dies Produkt aus dem kürzesten Lote zwischen g und a in die Tangente des Winkels, den sie bilden, den **Parameter** von g in bezug auf a.

Alle Strahlen eines Gewindes haben denselben Parameter in bezug auf die Axe. Man nennt ihn deshalb den Parameter des Gewindes. Indem wir p absolut nehmen, φ aber mit einem Vorzeichen behaften, sehen wir, daß rechts-, bzw. linksgewundene Gewinde positiven, negativen Parameter haben.

Es läßt sich weiter beweisen, daß, wenn p und φ, p' und φ' zu zwei polaren Geraden l, l' gehören, auch $p \operatorname{tang} \varphi = p' \operatorname{tang} \varphi'$, aber nur absolut.

Durch seinen Parameter ist ein Gewinde gestaltlich vollständig bestimmt. Und wenn die Axe gegeben ist, dann ist das Gewinde durch seinen Parameter (oder einen Strahl) eindeutig bestimmt; denn wir haben sofort für jeden Rotationszylinder um dieselbe das einfach unendliche System von Schraubenlinien, deren Tangenten zum Gewinde gehören.

Die ∞^4 Lagen der Axe und die ∞^1 Werte des Parameters geben nun in überaus einfacher Weise die fünffache Unendlichkeit der Gewinde.

534 Wenn zwei Nullräume $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ oder zwei Gewinde Γ_1, Γ_2 gegeben sind, so ist durch sie eine Kollineation — ihr Produkt — festgelegt, in welcher die beiden Nullpunkte der nämlichen Ebene, die beiden Nullebenen des nämlichen Punktes entsprechend sind. Die beiden Gewinde haben eine Kongruenz erster Ordnung erster Klasse (lineare Kongruenz) gemein; der Strahl in einer Ebene verbindet die beiden Nullpunkte, derjenige durch einen Punkt ist der Schnitt der beiden Nullebenen. Bewegt sich ein Punkt auf einem Strahle dieser Kongruenz, so dreht sich die Nullebene in bezug auf $\mathfrak{N}_1$ um ihn und deren Nullpunkt in bezug auf $\mathfrak{N}_2$ durchläuft ihn ebenfalls, weil er zu beiden Gewinden gehört. Also ist jeder Strahl dieser Kongruenz in der Kollineation sich selbst entsprechend.

Suchen wir solche Punkte und Ebenen auf, welche in bezug auf $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ dasselbe Nullelement haben und daher in der Kollineation sich selbst entsprechen. Mit jedem Strahl der Kongruenz inzidieren zwei, denn die Nullebenen der Punkte auf ihm in bezug auf $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ bilden um ihn zwei konjektive Büschel, und die Nullpunkte der Ebenen durch ihn zwei konjektive Punktreihen auf ihm. In jeder Ebene Π haben wir nur die beiden Punkte auf dem Strahle P_1P_2 der Kongruenz, weil für jeden außerhalb desselben gelegenen Punkt die Nullebenen nach P_1 und P_2 gehen und verschieden sind. Ebenso gehen durch jeden Punkt nur die beiden Ebenen, welche sich bei dem von ihm ausgehenden Strahle der Kongruenz ergeben. Die sich selbst entsprechenden Punkte der Kollineation bilden folglich eine Kurve 2. Ordnung, welche von jedem Strahle der Kongruenz zweimal getroffen wird, also, weil diese Strahlen nicht alle in derselben Ebene liegen, aus zwei windschiefen Geraden u, v besteht.

Die gemeinsame Nullebene eines Punktes der einen Gerade enthält die von dem Punkte ausgehenden Strahlen der Kongruenz und geht daher durch die andere Gerade; u und v sind polar in bezug auf beide Gewinde oder in beiden Nullräumen.

Daraus erhellt erstens, daß die gemeinsame Kongruenz der Gewinde Γ_1, Γ_2 ein Strahlennetz mit den (reellen oder imaginären) Leitgeraden u, v, und zweitens, daß die durch die beiden Nullräume hervorgerufene Kollineation eine Kollineation mit Axen ist.

Zwei Nullräume bewirken also eine Kollineation mit Axen, in welcher die beiden Nullpunkte der nämlichen Ebene, die beiden Nullebenen des nämlichen Punktes einander entsprechen. Die Axen dieser Kollineation sind die Leitgeraden des Strahlennetzes, welches den zugehörigen Gewinden gemeinsam ist. Dessen Strahlen sind in der Kollineation sich selbst entsprechend: jeder hat sich mit den beiden Polaren vereinigt. Die Punkte und Ebenen der Axen sind ebenfalls sich selbst entsprechend, haben dasselbe Nullelement, welches je mit der andern Axe inzidiert.

Jeder dieser Kollineationen kommt ein bestimmtes konstantes Doppelverhältnis zu; ist es -1, so liegt die windschiefe Involution vor, und man nennt dann die Nullräume $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, oder die Gewinde Γ_1, Γ_2, in Involution, weil eben auf jedem Strahle der Schnittkongruenz eine Involution von Punkten entsteht, die je dieselbe Nullebene haben, und um ihn eine Involution von Ebenen, die je denselben Nullpunkt haben. Weil die Kollineation involutorisch ist, so folgt, daß, wenn X und $\overline{X}$ die Nullpunkte derselben Ebene ξ in bezug auf $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ sind, gelegen auf dem Strahle der Schnittkongruenz in ξ, es durch diesen eine zweite Ebene ξ' gibt, für welche die Nullpunkte in bezug auf $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ gerade umgekehrt $\overline{X}$ und X sind. X und $\overline{X}$ und ebenso ξ und ξ' sind entsprechend in der windschiefen Involution, letztere als Nullebenen von X (oder $\overline{X}$). Sie führt also den Strahlenbüschel (X, ξ) von Γ_1 in den Strahlenbüschel $(\overline{X}, \xi')$, ebenfalls von Γ_1, über; und ebenso (X, ξ') in $(\overline{X}, \xi)$, beide aus Γ_2.

Die windschiefe Involution führt jedes der beiden Gewinde und den zugehörigen Nullraum in sich selber über. Ferner der Nullraum $\mathfrak{N}_1$ führt den Büschel $(\overline{X}, \xi)$ von Γ_2 in den Büschel (ξ', X), ebenfalls von Γ_2, über.

Jeder von zwei Nullräumen $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ (oder Gewinden), welche in Involution sind, führt den andern in sich selbst über.

Es sei g ein Strahl von Γ_1, g' seine Polare nach Γ_2 oder $\mathfrak{N}_2$, ξ eine Ebene durch g, dann liegt X auf g, $\overline{X}$ auf g'. Die Nullebene ξ' von X in bezug auf Γ_2 geht durch g'; daher ist g' ein Strahl von $(\overline{X}, \xi')$, also von Γ_1.

Umgekehrt, es sei g', die Polare eines Strahles g von Γ_1 nach Γ_2, auch in Γ_1 befindlich. Dann sind g und g' Polaren von g nach Γ_1 und Γ_2, g' und g Polaren von g' nach Γ_1 und Γ_2; d. h. g und g' entsprechen sich in der Verwandtschaft mit Axen involutorisch, und ein solches Entsprechen bei einem Elementenpaar bewirkt bei einer derartigen Verwandtschaft, daß die Invariante -1 ist oder die Verwandtschaft die windschiefe Involution ist; also:

Wenn zwei Gewinde oder Nullräume in Involution sind, so fällt die Polare eines Strahles des einen Gewindes in bezug auf das andere wiederum ins erste; und umgekehrt, wenn das einmal geschieht (natürlich bei einem nicht gemeinsamen Strahle), so sind die Gewinde in Involution.

Allgemeiner, gehen bei zwei Nullräumen in Involution zwei in dem einen polare Geraden durch den anderen in Geraden über, die wiederum im ersten polar sind; und umgekehrt.

Von Gewinden oder Nullräumen in Involutionen sagt man auch, daß sie sich stützen oder aufeinander ruhen (oder vereinigt liegen).

Wenn zwei Gewinde Γ_1, Γ_2 bzw. durch verbundene Regelscharen R_1, R_2 gehen, so sind sie in Involution. Denn in R_2 haben wir eine Involution von Polaren in bezug auf Γ_1; also polare Geraden von Γ_1, die beide in Γ_2 liegen.

Damit ergeben sich zwei Netze von Gewinden, von denen alle Gewinde des einen zu allen des anderen in Involution sind, also zwei Gewindenetze in Involution.

In einem Büschel von Gewinden gibt es ein Gewinde, welches zu einem gegebenen Gewinde Γ_0 in Involution ist.

In der Tat, es seien (X, η) und (Y, ξ) zwei in bezug auf Γ_0 polare Strahlenbüschel; jeder Strahl von (X, η) bestimmt ein Gewinde des Büschels, und dieses einen Strahl von (Y, ξ); dadurch kommen diese Strahlenbüschel in Projektivität. In einer zweiten Projektivität zwischen ihnen sind die Strahlen zugeordnet, welche in bezug auf Γ_0 polar sind. Diese beiden Projektivitäten haben zwei Paare entsprechender Strahlen gemeinsam. Das eine Paar besteht aus dem gemeinsamen Strahle der beiden Büschel, dem zu Γ_0 gehörigen aus (X, η), der in der zweiten Projektivität sich selbst korrespondiert; er tut es aber auch in der ersten; denn er ist ja ein zu demselben Gewinde des Büschels gehöriger Strahl beider Strahlenbüschel. Das zweite Paar von Strahlen aus (X, η), (Y, ξ), die in beiden Projektivitäten entsprechend sind, besteht aus zwei verschiedenen, einerseits zu demselben Gewinde des Büschels gehörigen, andererseits in bezug auf Γ_0 polaren Strahlen. Sie beweisen, daß jenes Gewinde zu Γ_0 in Involution ist.

Befinden sich zwei Gewinde im Büschel, welche zu Γ_0 in Involution sind, so bekommen die obigen Projektivitäten drei gemeinsame Paare entsprechender Strahlen, sind also identisch. Jedes Gewinde des Büschels sendet in (X, η), (Y, ξ) zwei Strahlen, die in bezug auf Γ_0 polar sind.

Besitzt also ein Büschel von Gewinden zwei Gewinde, die zu einem gegebenen in Involution sind, so gilt dies für alle Gewinde des Büschels.

Dadurch werden die Systeme 1., 2., 3., 4. Stufe der Gewinde, welche zu 4, 3, 2, 1 gegebenen Gewinden in Involution sind, linear, weil jeder Büschel, der zwei Gewinde eines dieser Systeme verbindet, ganz demselben angehört, und sind die linearen Systeme (Büschel, Netze, Gebüsche, Gewebe), die fächerförmig aus 2, 3, 4, 5 Konstituenten aufgebaut werden können. Zu fünf Gewinden ist eine endliche Anzahl in Involution und zwar eins, denn zwei würden ja sofort einen Büschel bewirken.

2, 3, 4, 5 gegebene Gewinde können dann wieder fächerförmig in lineare Systeme 1., 2., 3., 4. Stufe erweitert werden, und alle Gewinde, die zu ihnen in Involution sind, sind es dann zu allen des betreffenden Systems.

Wir erhalten so sich stützende lineare Systeme i^{ter} und $(4-i)^{\text{ter}}$ Stufe, $(i=0, 1, 2, 3, 4)$, von denen jedes Gewinde des einen zu jedem des anderen in Involution ist; ein System 0^{ter} Stufe besteht aus einem Gewinde.

Das Strahlengebüsche $[a]$, der Inbegriff der Strahlen, 535
welche eine feste Gerade a treffen, ist zweifellos ein Komplex 1. Grades: der spezielle lineare Komplex, wie er ursprünglich und etwas umständlich genannt wurde und noch vielfach genannt wird. Der zugehörige Nullraum artet aus. Für einen beliebigen Punkt des Raumes ist die Nullebene die, welche ihn mit der Axe a verbindet; für einen Punkt auf a ist sie unbestimmt, jede Ebene durch ihn. Der Nullpunkt einer beliebigen Ebene ist ihr Schnitt mit a, derjenigen einer Ebene durch a ist unbestimmt, jeder Punkt auf ihr.

Die Polare einer beliebigen Gerade l ist die Axe; trifft l aber die Axe, so wird die feste Nullebene la der Punkte von l, die vom Punkte la verschieden sind, von der unbestimmten dieses Punktes in den Strahlen des durch l und a bestimmten Büschels geschnitten; jede zwei Strahlen dieses Büschels la sind polar.

Wir werden bei der Besprechung der Ausartungen der räumlichen Kollineation und Korrelation diese Ausartung einzuordnen haben.

Der Nullpunkt $\mathfrak{U}$ der unendlich fernen Ebene ist der unendliche ferne Punkt von a; a ist polarer Durchmesser für eine beliebige unendlich ferne Gerade, insbesondere derjenigen, nach welcher die zu a senkrechten Ebenen gehen; damit wird a als Axe des Gebüsches erkannt, insofern es Spezialfall des Gewindes ist.

In einem Büschel von Gewinden gibt es zwei Gebüsche; ihre Axen sind die Leitgeraden des den Gewinden gemeinsamen Strahlennetzes. Ein Netz von Gewinden enthält ∞^1 Gebüsche; ihre Axen erfüllen die verbundene Regelschar derjenigen, die allen Gewinden des Netzes gemeinsam ist; und beim Gebüsche von Gewinden erzeugen die Axen der ∞^2 Gebüsche das Strahlennetz, für das die beiden gemeinsamen Geraden die Leitgeraden sind.

Wenn ein Strahlengebüsche zu einem Gewinde in Involution ist, so muß seine Axe demselben angehören, weil sie zu einem beliebigen Strahle des Gewindes in bezug auf das Gebüsche polar ist.

Die Gewinde, welche zu allen Gewinden eines Büschels in Involution sind, sind auch zu den beiden Gebüschen desselben in Involution, bilden das Gebüsche der Gewinde, welche die Axen desselben, die Leitgeraden des Grund-Strahlennetzes des Büschels, enthalten; diejenigen, welche sich auf die Gewinde eines Netzes stützen, gehen durch die verbundene Regelschar der Grund-Regelschar, weil sie die Axen der Gebüsche des Netzes enthält.

Die Axen der Gebüsche in einem Gewebe von Gewinden erfüllen das Gewinde, auf welches dies Gewebe sich stützt.

Der Parameter eines Strahlengebüsches ist 0; es bildet den Übergang von rechts- zu linksgewundenen Gewinden.

Die Nullebenen eines Punktes P in bezug auf die Gewinde eines Büschels bilden den Büschel um den durch P gehenden Strahl g des Grund-Strahlennetzes $[u, v]$ und die Nullpunkte einer Ebene Π erfüllen den in dieser Ebene gelegenen Strahl des Netzes.

Durchläuft P eine Gerade l, so beschreibt g die Regelschar $[uvl]$. Die verbundene Regelschar entsteht durch die Polaren l' der Gerade l bezüglich der verschiedenen Gewinde des Büschels. Nehmen wir daher vier Gewinde des Büschels $\Gamma_1, \ldots \Gamma_4$ und zwei Punkte P, P' auf l, so gehen die Nullebenen von P und P' in bezug auf jene von den beiden Geraden g und g' der ersteren Schar nach den vier Polaren $l'_1, \ldots l'_4$ aus der anderen; demnach sind die beiden Ebenenwürfe projektiv. Folglich ist das Doppelverhältnis der Nullebenen eines Punktes in bezug auf vier Gewinde eines Büschels für alle Punkte dasselbe, ebenso das der Nullpunkte einer Ebene für alle Ebenen. Benutzt man einen Punkt und eine Ebene, welche inzidieren, so werden die beiden Würfe perspektiv; und die beiden konstanten Doppelverhältnisse stellen sich als gleich heraus; daher wird diese Konstante als Doppelverhältnis der vier Gewinde des Büschels bezeichnet.

Auch die vier (einer Regelschar angehörigen) Polaren einer Gerade haben dies Doppelverhältnis.

Zwei Gewinde in Involution haben die Nullebenen eines Punktes P entsprechend in der windschiefen Involution (u, v), also harmonisch zu den Ebenen, welche von g nach den Leitgeraden u, v des Schnitt-Strahlennetzes gehen, den Axen der im Büschel enthaltenen Strahlengebüsche, in bezug auf welche diese Ebenen die Nullebenen von P sind.

Zwei Gewinde in Involution sind zu den Gebüschen ihres Büschels harmonisch.

Zwei Gewinde Γ_1, Γ_2 haben ein Strahlennetz $[u, v]$ gemein. Ein drittes Gewinde Γ_3 (nicht durch dieses Strahlennetz gehend und daher nicht dem Büschel jener angehörend) sendet in $[u, v]$ ∞^1 Strahlen. Von jedem U von u geht ein Strahlenbüschel an Γ_3 und an (u, v); der gemeinsame Strahl ordnet eindeutig dem Punkte U einen Punkt V von v zu; die beiden Punktreihen auf u, v werden projektiv, und die Strahlen UV, die gemeinsamen Strahlen von Γ_3 und (u, v) oder von Γ_1, Γ_2, Γ_3 erzeugen eine Regelschar.

Drei Gewinde haben eine Regelschar gemeinsam.

Oder mit Umgehung der ev. imaginären Geraden u, v: Die Nullebenen der Punkte einer Gerade l in bezug auf Γ_1, Γ_2, Γ_3 beschreiben drei zu der Punktreihe l perspektive Ebenenbüschel l_1', l_2', l_3'. Die beiden Treffgeraden von l, l_1', l_2', l_3' fallen je in die drei Nullebenen des Punktes, in denen sie l schneiden, sind Strahlen aller drei Gewinde. Die Gerade l trifft also zwei von den gemeinsamen Strahlen.

In der Leitschar der gemeinsamen Regelschar befinden sich die Leitgeraden der Strahlennetze $\Gamma_1\Gamma_2$, $\Gamma_1\Gamma_3$, $\Gamma_2\Gamma_3$.

Tritt ein viertes Gewinde hinzu, so haben die Leitscharen der Regelscharen $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4$ die Leitgeraden von $\Gamma_1\Gamma_2$ gemeinsam, also sind den Regelscharen selbst zwei Geraden gemeinsam.

Vier Gewinde haben zwei Geraden gemein: offenbar die Treffgeraden der Leitgeraden von $\Gamma_1\Gamma_2$ und $\Gamma_3\Gamma_4$.

Ein räumliches System von Kräften kann man bekanntlich — in 536
∞^4 Weisen — auf zwei Kräfte so reduzieren, daß die eine in einer gegebenen Gerade x wirkt; die Gerade x', in der die andere wirkt, so wie die beiden Kräfte sind eindeutig bestimmt. Ferner kann man es auf ∞^2 Weisen auf eine Resultierende SR und ein resultierendes Paar zurückführen, bei allen diesen Reduktionen bleibt die Resultierende der Größe, der Richtung und dem Sinne nach fest, nur die Gerade, in der sie wirkt, verändert sich; das resultierende Paar hingegen ändert sich nach seinem Momente sowohl als nach der Stellung der parallelen Ebenen, in denen es liegen kann. Es gibt eine ausgezeichnete Resultierende S_0R_0, die zu den Ebenen des zugehörigen Paares normal ist; dasselbe hat in diesem Falle das kleinste Moment.

Es liegt hier ein Nullraum vor; zwei Geraden x, x', in denen zwei mit dem Systeme äquivalente Kräfte wirken, sind in ihm polar; die Geraden der Resultierenden SR haben die Durchmesserrichtung; polar ist jedesmal die unendlich ferne Gerade der Ebenen des zugehörigen resultierenden Paares; die Wirkungslinie von S_0R_0 ist die Axe.

Die Nullstrahlen sind diejenigen Geraden, in bezug auf welche das Moment des Kräftesystems 0 ist; davon rührt der Name „Nullsystem" her[1]).

Bei einer unendlich kleinen Bewegung eines starren Systems tritt auch ein Nullraum auf. Nullebene eines Punktes ist die Normalebene an das unendlich kleine Bahnelement, Nullpunkt einer Ebene der einzige Punkt in ihr, dessen Bahnelement zu ihr senkrecht ist. Die Nullstrahlen haben die Eigenschaft, zu den Bahnelemente aller ihrer Punkte senkrecht zu sein, so daß die Orthogonalprojektionen dieser Elemente auf sie 0 sind.

Die Bewegung kann auf ∞^4 Weisen in zwei Drehungen um Axen zerlegt werden, die dann im Nullraum polar sind. In ∞^2 Weisen läßt sie sich in eine Drehung um eine Axe von fester Richtung und eine Verschiebung zerlegen; die feste Richtung ist die der Durchmesser des Nullraumes und die Verschiebung ist dann stets senkrecht zu den Ebenen, deren unendlich ferne Gerade zu dem Durchmesser, um den die Drehung erfolgt, polar ist. Ist dieser Durchmesser die Axe des Nullraumes, so wird die zugehörige Verschiebung zu ihr parallel; die unendlich kleine Bewegung stellt sich als Schraubenbewegung um diese Axe heraus.[2])

§ 81. Der Polarraum, der andere Fall involutorischer Korrelation, und seine Basisfläche.

537 Es kann bei einer Korrelation durchgängiges involutorisches Entsprechen statthaben ohne durchgängige Inzidenz entsprechender Punkte und Ebenen.

Setzen wir eine solche involutorische Korrelation voraus.

Der Satz, daß zwei inzidenten Elementen α, B des einen Raums zwei ebenfalls inzidente Elemente A', β' des andern entsprechen, kann, wenn involutorisches Entsprechen statthat, mit Weglassung der Genitive und der Striche ausgesprochen werden: Wenn α und A und ebenso B und β entsprechend sind, und B in α liegt, dann geht β durch A.

Ein dritter Punkt C liege auf der Schnittlinie $\alpha\beta$, also zugleich auf α und β, so geht die entsprechende Ebene γ durch A und B; und ist dann D der Schnittpunkt $\alpha\beta\gamma$, so ist δ die Ebene ABC. Es ist ein Tetraeder $ABCD$ entstanden, in welchem jede Ecke die gegenüberliegende Ebene zur Polarebene hat; ein solches

1) Möbius, Lehrbuch der Statik § 81ff. (Gesammelte Werke Bd. 3.)

2) Möbius, Lehrbuch der Statik § 183; Journ. f. Math. Bd. 18 S. 189 (Ges. Werke Bd. 1 S. 543); Chasles, Comptes rendus Bd. 16 S. 1420; Jonquières, Mélanges de Géometrie pure 1856 Kap. I; Mannheim, Géométrie cinématique 1894, S. 97ff. Bei diesen französischen Schriftstellern wird der Nullpunkt foyer genannt, polare Geraden leider auch droites conjuguées.

Tetraeder nennt man ein Polartetraeder. Bei der Nullkorrelation kann es sich nicht ergeben; denn geht α, welche ja durch A geht, auch durch B, dann geht β durch A und B, also ist AB mit $\alpha\beta$ identisch; C auf $\alpha\beta$ gelegt, führt zu einer Ebene γ, welche durch A, B, C geht; zu einem Tetraeder kommen wir nicht.

Wenn eine involutorische Korrelation, bei welcher im allgemeinen entsprechende Punkte und Ebenen nicht inzidieren, möglich ist, so führt sie zu Polartetraedern, und zwar zu ∞^6, weil A in ∞^3, B in ∞^2, C in ∞^1 Lagen gewählt werden kann.

Die Polarität in Bezug auf eine Fläche 2. Grades ist eine solche involutorische Korrelation und beweist die Möglichkeit.

Umgekehrt, jede Korrelation, welche ein Tetraeder besitzt, dessen Ecken als Punkte des einen Raumes: A, B, C, D die gegenüberliegenden Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ als entsprechende im andern haben, ist eine involutorische.

Der Punkt A, welcher als Punkt des zweiten Raumes A' heiße, inzidiert mit β', γ', δ', also geht seine Polarebene α im ersten Raume durch B, C, D, ist daher mit α' identisch. Daraus folgt, daß die Ecken und Gegenebenen des Tetraeders sich involutorisch entsprechen; wir können bei ihnen die Akzente fallen lassen. Die Gegenkanten entsprechen sich auch involutorisch, zwei Ecken ferner sind in beiderlei Sinne konjugiert, ebenso zwei Ebenen des Tetraeders und zwei sich schneidende Kanten. $X \equiv Y'$ sei ein Punkt auf AB, ξ', η seine Polarebenen, welche durch CD gehen, X'_1, Y_1 ihre Schnitte mit AB, welche jenem Punkte konjugiert sind in dem einen und dem andern Sinne. Die beiden Punktreihen auf AB, aus dem ersten und dem zweiten Raume, deren zugeordnete Punkte konjugiert sind, sind projektiv; sie sind überdies involutorisch, weil sie ein Paar in beiderlei Sinne sich entsprechender Punkte haben: A, B; also ist die Beziehung durchweg involutorisch; X'_1 ist mit Y_1 identisch, mithin auch ξ' mit η; folglich haben alle Punkte auf einer Kante des Tetraeders in beiderlei Sinne dieselbe Polarebene, welche durch die Gegenkante geht, und jede Ebene durch eine Kante hat in beiderlei Sinn denselben Pol, der auf der Gegenkante liegt.

Ist nun X ein beliebig im Raum gelegener Punkt, so legen wir durch ihn die Ebenen nach drei ein Dreieck bildenden Kanten des Tetraeders, so daß sie nicht zu einem Büschel gehören, und die Pole nicht auf einer Gerade liegen. Diese Pole sind aber in beiderlei Sinne dieselben; also ist auch die verbindende Ebene dieselbe, die Polarebene von X. Daher ist die Korrelation involutorisch; wir wollen sie, analog zu Polarfeld und Polarbündel, Polarraum nennen.

Wir haben diese durch das Vorhandensein von Polartetraedern charakterisierte involutorische Korrelation aus der bloßen Voraussetzung des durchgängigen involutorischen Entsprechens ohne durchgängige Inzidenz erhalten. **Also sind nur der Nullraum und der Polarraum involutorische Korrelationen.**

Jede zwei Elemente, welche konjugiert sind, sind doppelt konjugiert, so daß der Zusatz „doppelt" überflüssig wird.

Auf jeder Gerade haben wir eine Involution konjugierter Punkte, um sie eine Involution konjugierter Ebenen. Sind zwei Geraden g, g' polar, so daß die Polarebenen der Punkte einer jeden durch die andere gehen, so sind die Punkte X, X_1, in denen zwei konjugierte Ebenen ξ_1, ξ durch die eine g die andere g' schneiden, die Pole und zwar je von der andern Ebene, denn der Pol von ξ liegt auf ξ_1 und auf g', ist also der Schnitt $\xi_1 g' = X$ und ebenso $X_1 = \xi g'$ der Pol von ξ_1. Demnach sind X und X_1 auch konjugiert; und umgekehrt, wenn X und X_1 konjugiert sind, so sind ihre Polarebenen ξ, ξ_1, welche durch X_1, X gehen, auch konjugiert. **Daher sind die Involution konjugierter Punkte auf der einen der beiden polaren Geraden und die Involution konjugierter Ebenen um die andere perspektiv, und zwar so, daß über zwei Punkten eines Paars der ersteren verkehrt ihre Polarebenen stehen, die ein Paar der zweiten bilden.**

538 **Jede Ebene π schneidet aus dieser involutorischen Korrelation eine ebene involutorische Korrelation aus, also ein Polarfeld.** Der Beweis verläuft ähnlich, wie der in Nr. 323, wo gezeigt wurde, daß eine Fläche 2. Grades in einer Ebene ein Polarfeld hervorruft; man hat nur durchweg statt: polar in bezug auf die Fläche 2. Grades zu sagen: polar im Polarraume.

Und er muß so verlaufen, weil sich herausstellen wird, daß jeder Polarraum Polarität in bezug auf eine Fläche 2. Grades ist.

Jedem Punkte X der Ebene π entspricht der Schnitt x' von π mit der Polarebene ξ von X im Polarraume; durchläuft jener Punkt eine Gerade y in π, so beschreibt die Polarebene einen Büschel um die Polare y' der Gerade und schneidet einen Strahlenbüschel um die Spur Y' ein. Die Polarebene dieses Punkts Y' von y' geht durch jene Gerade y, und diese ist ihre Spur in der festen Ebene π; es ergibt sich also y aus Y' ebenso wie x' aus X. Damit ist der involutorische Charakter erkannt.

Ebenso wird in jedem Bündel P durch diese Korrelation ein Polarbündel hervorgerufen, in dem einer Ebene ξ des Bündels der Strahl polar ist, der nach ihrem Pole X im Polarraume geht. Sind die Ebene π und der Punkt P polar im Polarraum, so ist der Polarbündel zum Polarfelde perspektiv. Denn jeder Punkt X der Ebene π schickt seine Polarebene ξ durch P; also gehen die entsprechenden Elemente ξ und PX des Polarbündels durch die entsprechenden Elemente $\pi\xi$ und X des Polarfeldes.

Aber warum schneidet eine Ebene π nicht auch aus einem Nullraum ein Polarfeld aus?

Jeder Punkt X von π liegt in seiner Nullebene ξ', also geht die entsprechende Gerade x' durch X, aber auch stets durch den Nullpunkt P von π; jedem Punkt von π entspricht daher der durch ihn gehende Strahl dieses festen Strahlenbüschels P. Man sieht, daß es sich um eine ausgeartete Korrelation mit singulären Büscheln handelt, mit der doppelten Spezialität, daß erstens die beiden singulären Büscheln identisch sind, und daß zweitens die charakteristische Projektivität zwischen ihnen Identität ist.

In dieser Weise erhält man — analog zum Raum — eine zweite involutorische ebene Korrelation, die man als Nullkorrelation (Nullfeld) bezeichnen kann, aber nur in ausgearteter Form; und felddual zu ihr ergibt sich eine andere, bei welcher die Korrelation eine solche mit singulären Punktreihen ist, die ineinander liegen und deren Projektivität Identität ist.

Bei einem Felde ω und einem Bündel O', welche in allgemeiner Korrelation sich befinden, ist durchgängige Inzidenz entsprechender Punkte und Ebenen nicht möglich, wenn der Scheitel O' außerhalb der Ebene ω liegt; denn dann liegen nur die Punkte der Punkt-Kernkurve der beiden korrelativen Felder in der Ebene in ihren entsprechenden Strahlen und Ebenen. Befindet sich aber O' in ω, so geht, wenn die durchgängige Inzidenz statthat, die Ebene von O', die einem Punkte von ω korrespondiert, durch ihn und O', also durch den Verbindungsstrahl und dreht sich um ihn, wenn der Punkt ihn durchläuft; er entspricht sich selbst. Also fordert die durchgängige Inzidenz, daß das Feld und der Bündel einen Strahlenbüschel sich selbst entsprechender Strahlen gemeinsam haben. Der Bündel schneidet in die Ebene des Feldes ein zweites Feld, das zu dem gegebenen in der oben besprochenen Nullkorrelation der ersten Art sich befindet.

Ein Feld ω und ein Bündel O', welche in solcher Korrelation mit durchgängiger Inzidenz stehen, sind entsprechend in einem eindeutig bestimmten Nullraume. Wir erhalten seine Nullstrahlen (die Strahlen des zugehörigen Gewindes) in den Strahlen durch die verschiedenen Punkte des Feldes je in den entsprechenden und durch sie gehenden Ebenen des Bündels. Diese Strahlen bilden in der Tat in jeder Ebene ξ und um jeden Punkt X einen Strahlenbüschel; denn der Punktreihe, in der ξ die Ebene ω schneidet, entspricht im Bündel ein Ebenenbüschel, welcher in ξ den Strahlenbüschel einschneidet; und dem Ebenenbüschel, den X aus dem Bündel O' ausscheidet, entspricht in ω eine Punktreihe, die aus X durch den Strahlenbüschel projiziert wird.

Wir kehren zum Polarraume zurück. 539

Die Doppelpunkte einer jeden Involution konjugierter Punkte fallen in ihre Polarebenen, liegen also auf der Punkt-Kernfläche; und die Doppelebenen der Involutionen konjugierter Ebenen berühren die Ebenen-Kernfläche. Ein Punkt X und jeder Punkt X_1 seiner Polarebene ξ werden daher durch die Schnitte ihrer Verbindungslinie mit der Punkt-Kernfläche F^2 harmonisch getrennt; d. h. X und ξ sind Pol und Polarebene in bezug auf dieselbe, und ebenso ξ und X Polarebene und Pol in bezug auf Φ_2, die Ebenen-Kernfläche.

Der Schnitt des Polarraums mit einer Ebene π ist ein Polarfeld, also mit identischen Kernkurven (Nr. 313). Folglich schneidet π die F^2 und den Tangentialkegel aus ihrem (einzigen) Pole P an Φ_2 in derselben Kurve (Nr. 524); da aber P Pol von π in bezug auf Φ_2 ist, so ist letzterer Schnitt auch der von π mit Φ_2. Jede Ebene schneidet daher beide Kernflächen in derselben Kurve; also sind sie identisch.

Bei derjenigen involutorischen räumlichen Korrelation, bei welcher entsprechende Punkte und Ebenen im allgemeinen nicht inzidieren, vereinigen sich die beiden Kernflächen, und die Korrelation ist nichts anderes als die Beziehung zwischen Pol und Polarebene in bezug auf diese Fläche: die Basisfläche (Ordnungsfläche) des Polarraums.

Was im Felde und im Bündel gilt, daß Vereinigung der Kernkurven, bzw. Kernkegel Polarkorrelation nach sich zieht, gilt hier nicht: die Vereinigung der Kernflächen ist möglich, ohne daß Polarkorrelation eintritt. Wir kommen darauf zurück.

540 Das Polarfeld wies zwei wesentlich verschiedene Fälle auf: mit imaginärem Basiskegelschnitt, mit reellem; in jenem sind alle Involutionen konjugierter Elemente elliptisch; bei diesem sind sie teils elliptisch, teils hyperbolisch, und zwar so, daß von den Seiten eines Polardreiecks zwei hyperbolische Involutionen tragen und die dritte eine elliptische; die Involutionen um die Gegenecken sind perspektiv und daher gleichartig. Entsprechendes gilt im Bündel.

Hier beim Polarraume gibt es drei Fälle mit verschiedenartigen Basisflächen und verschiedenartigen Polartetraedern.

Wir zeigen zunächst, daß dreierlei Polartetraeder in bezug auf die Involutionen konjugierter Punkte auf den Kanten möglich sind; mit jeder ist die zu ihr perspektive Involution konjugierter Ebenen um die Gegenkante gleichartig.

Durch die Zuordnung der Ecken und Gegenebenen des Polartetraeders $ABCD$, welche die Korrelation zu einer Polarkorrelation macht, ist dieselbe noch nicht bestimmt; man kann noch ein fünftes Paar entsprechender Elemente P und π hinzufügen. Da jeder Punkt seine Polarebene haben muß, steht uns frei, P ins Innere von $ABCD$ zu legen. Für die Involution auf einer Kante, z. B. AB liefern uns, zu dem schon vorhandenen Paare AB, diese Elemente P, π noch ein zweites Paar in den Schnitten mit π und mit PCD; denn PCD ist Polarebene des Schnittes (π, AB). Nun kommt es darauf an, wie dies Paar zum ersten liegt. Nach unserer Annahme über die Lage von P liegen alle sechs Punkte $(AB, PCD), \ldots$ zwischen den Ecken.

Ein Dreieck wird von einer Ebene (oder deren Spur in seiner Ebene) entweder auf den Außenteilen aller der drei Seiten geschnitten, oder nur bei einer so, bei den beiden andern zwischen den Ecken (Nr. 52).

Die Ebene π schneide erstens bei zwei von den vier Dreiecken von $ABCD$ alle drei Seiten auf den Verlängerungen, dann schneidet sie von den übrigen Dreiecken zwei Seiten auf den Verlängerungen, also auch die dritte ihnen gemeinsame in dieser Weise; π schneidet alle sechs Kanten des Tetraeders außerhalb; alle sechs Involutionen sind elliptisch.

Die Ebene π schneide zweitens mindestens eines der Dreiecke in der zweiten Weise, etwa von ABC die Seite AB außerhalb, dagegen AC, BC innerhalb; dann folgt, daß die beiden in AC, BC anstoßenden Dreiecke ACD, BCD auch in der zweiten Weise geschnitten werden, also noch eine Seite innerhalb, die dritte außerhalb. Da werden aber zwei Fälle möglich. Entweder wird die gemeinsame Seite CD innerhalb geschnitten und dann die dritten Seiten AD, BD außerhalb, oder CD außerhalb und AD, BD innerhalb. Also werden im ersten dieser beiden Fälle die drei von C ausgehenden Kanten CA, CB, CD innerhalb, die drei andern außerhalb geschnitten, im zweiten die beiden Gegenkanten AB, CD außerhalb, der vier andern innerhalb geschnitten.

Demnach haben wir hinsichtlich der Involutionen auf den Kanten eines Polartetraeders folgende drei Fälle:

a) alle sind elliptisch,

b) auf drei von einer Ecke ausgehenden Kanten sind sie hyperbolisch, auf den drei andern, die in der Gegenebene liegen, elliptisch,

c) auf zwei Gegenkanten sind sie elliptisch, auf den vier andern hyperbolisch.

Im ersten und dritten Falle verhalten sich Gegenkanten gleichartig, im zweiten ungleichartig. Gegenkanten sind Polaren. Jede zwei Polaren kann man zu Gegenkanten eines Polartetraeders machen. Legt man nämlich die Punkte A und B auf die eine von ihnen so, daß sie konjugiert sind, so fallen die andern C, D auf die andere, der eine beliebig, der andere konjugiert zu ihm.

Wenn, wie oben, im Falle b) C die ausgezeichnete Ecke ist und im Falle c) AB, CD die Gegenkanten mit elliptischen Involutionen, so kann man die drei Fälle einfach durch:

$$(ABCD), \quad (C, ABD), \quad (AB, CD)$$

charakterisieren; in allen drei Fällen sind die Involutionen auf Kanten, deren Eckpunkte nicht durch ein Komma getrennt sind, elliptisch.

541 In demselben Polarraume sind alle Polartetraeder gleichartig. Unmittelbar ersichtlich ist, daß sie alle von der Art a) sind, wenn die Basisfläche reell-imaginär ist (Nr. 315).

Doch möge für diesen Fall eine von der Basisfläche unabhängige Untersuchung vorgenommen werden, ähnlich wie in Nr. 315. Es liege also ein Polartetraeder $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ vor mit lauter elliptischen Involutionen auf den Kanten; P sei im Innern, π außerhalb. Wenn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ die Schnitte von AB mit PCD und π sind, so ist $(AB, \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1)$ die Involution auf dieser Kante, also der Wurf $AB\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ elliptisch und ebenso der über ihm stehende Ebenenwurf $\mathfrak{a}(A, \alpha, \mathfrak{B}, \pi)$, wo $\mathfrak{a}$ der Schnitt $\alpha\pi$ ist. Der Punkt P befindet sich in demjenigen Flächenwinkel $\mathfrak{a}(A, \alpha)$, in dem π nicht liegt, und $\mathfrak{B}$ in dem Teile $\mathfrak{a}(A, P)$ dieses Winkels. Wir halten A und α fest, BCD durchlaufe die Polardreiecke des Polarfeldes (α) in α; es genügt, B und $\mathfrak{B}$ zu verfolgen. B und CD sind polar in (α), es beschreiben also AB und PCD korrelative Bündel, $\mathfrak{B}$ (und ebenso $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ auf AC, AD) die von ihnen erzeugte Fläche 2. Grades (§ 59). Die Basiskurve von (α), als Punkt-Kernkurve der von den Bündeln eingeschnittenen ebenen Korrelation, ist der Schnitt mit dieser Fläche, also ist dieser imaginär und die Fläche elliptisch. Der Pol der $\mathfrak{a}$ im Polarfeld ist der Schnitt von AP; diesem gemeinsamen Strahle der beiden Bündel korrespondieren also die Ebenen $P\mathfrak{a}$ und $A\mathfrak{a}$; sie sind die Berührungsebenen der Punkte P und A, und die Fläche und alle Punkte $\mathfrak{B}$ liegen in demjenigen Flächenwinkel dieser Ebenen, in dem sich derjenige $\mathfrak{B}$ befindet, von dem wir ausgingen; also sind alle $\mathfrak{B}$ in dem Flächenwinkel $\mathfrak{a}(A, \alpha)$ enthalten, welcher π nicht enthält; d. h. die Würfe $AB\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ sind immer elliptisch. Und man kann weiter schließen wie in Nr. 315.

Wenn auch nur auf einer Kante die Involution konjugierter Punkte hyperbolisch ist, so ergibt sich, wie a. a. O., daß jede reelle Gerade, die durch einen der reellen Doppelpunkte geht, eine ebenfalls hyperbolische Involution trägt, weil der Punkt als Punkt der Basisfläche auch für sie Doppelpunkt ist; die zweiten Doppelpunkte auf dieser Geraden machen die Basisfläche zu einer reellen.

Handelt es sich nun um eine Fläche mit zwei reellen verbundenen Regelscharen, so ist unmittelbar klar, daß jeder Tangentialkegel, als Kegel der Ebenen, welche die Spitze mit den Geraden der einen oder andern Regelschar verbinden, ebenso jeder ebene Schnitt reell ist. Definiert man einen Punkt als innern oder äußern Punkt für eine Fläche 2. Grades, je nachdem er einen imaginären oder reellen Tangentialkegel an sie sendet, so haben diese Flächen 2. Grades mit reellen Regelscharen (hyperbolische Flächen 2. Grades) nur äußere Punkte; die Räume zu beiden Seiten der Fläche sind als äußere zu bezeichnen. Jedes Polardreieck eines ebenen Schnittes trägt, weil er reell ist, zwei hyperbolische und eine elliptische Involution konjugierter Punkte. Also sind Polartetraeder von den Arten a), b), welche Polardreiecke mit drei elliptischen Involutionen enthalten, nicht möglich.

Der Polarraum einer hyperbolischen Fläche 2. Grades (mit zwei reellen Regelscharen) besitzt nur Polartetraeder von der Art c).

Daher sind zwei polare Geraden stets gleichartig: sie tragen beide hyperbolische Involutionen und schneiden reell, oder beide elliptische Involutionen, schneiden imaginär und liegen, wie die andern Kanten des Tetraeders beweisen, auf verschiedenen Seiten der Fläche.

Die Polarebene eines Punktes der Basisfläche ist seine Berührungsebene, denn sie muß von jedem ebenen Schnitte, der durch ihn geht, die Tangente des Punktes enthalten, als seine Polare im ausgeschnittenen Polarfelde.

Die Tangentialebenen, die von einer Gerade an eine Fläche 2. Grades gehen, berühren daher in den Schnitten der Polare und sind im Falle der hyperbolischen Flächen reell oder imaginär, je nachdem jene Gerade reell oder imaginär schneidet; reelle schneiden ja auch reelle Geradenpaare aus, denen die Gerade reell begegnen muß.

Da wir in jede der Regelscharen auch elliptische Involutionen legen können, so zeigt sich, daß sie konjugiert imaginäre Geraden enthalten.

Auch die elliptischen Flächen 2. Grades (Ellipsoid, zweimanteliges Hyperboloid) enthalten Geraden; durch jeden reellen Punkt T der Fläche gehen zwei konjugiert imaginäre, welche ihn gemeinsam haben („punktierte“ Geraden).

Weil nämlich die Berührungsebene τ zum Punkte T polar ist, so entspricht im Polarraume jedem Strahle von (T, τ) ein anderer Strahl dieses Büschels involutorisch; die Doppelstrahlen dieser Involution sind sich selbst polar; jedem Punkte auf einem derselben ist eine Ebene durch ihn polar und so inzidiert jeder Punkt einer jeden dieser Geraden mit seiner Polarebene und liegt auf der Basisfläche: wir haben die beiden durch T gehenden Geraden der Fläche. Diese Involution ist bei der jetzigen Fläche elliptisch und bei der vorigen hyperbolisch; was die Namen elliptisch, hyperbolisch rechtfertigt.

Seien g, l die beiden durch T gehenden Geraden, das Geradenpaar, in dem die Berührungsebene τ schneidet, und $g_1 l_1$ das in einer zweiten reellen Tangentialebene τ_1. Die Schnittpunkte von $\tau\tau_1$ mit der Fläche, also des einen Paares mit dem andern, seien gl_1, lg_1. Wenn ein drittes Paar $g_2 l_2$ zu den Schnitten gl_2, lg_2 führt, so muß es auch zu $g_1 l_2$, $l_1 g_2$ führen. Denn träfe g_2 die g_1, so würde sie dritte Gerade in lg_1 sein. Und so sehen wir zwei verbundene Regelscharen von punktierten Geraden entstehen, wobei aber zwei konjugiert imaginäre Geraden zu verschiedenen Scharen gehören: mit gemeinsamem reellem Punkte T und gemeinsamer reeller Ebene τ.

In keiner Berührungsebene kann das Geradenpaar reell sein; denn jede reelle derartige Gerade würde sofort in der Ebene von ihr nach irgend einem reellen Punkt der Fläche eine durch diesen gehende reelle Gerade der Fläche fordern. Für zwei konjugiert imaginäre Geraden der Fläche, die sich schneiden, muß der Schnittpunkt reell sein, weil er als imaginärer auf jeder einen konjugiert imaginären haben müßte, was nicht möglich ist. Zwei windschiefe konjugiert imaginäre Geraden würden aus jedem reellen Punkte der Fläche eine reelle Treffgerade erhalten, die der Fläche ganz angehört.

Die elliptischen Flächen 2. Grades enthalten also nur punktierte Geraden.

Diese punktierten Geradenpaare in den Berührungsebenen bilden den Übergang von reellen ebenen Schnitten zu reell-imaginären, und die zugehörigen auf der Fläche gelegenen Pole den Übergang von äußeren Punkten auf der einen Seite der Fläche zu innern auf der andern. Ist die Ecke C des Polartetraeders $ABCD$ ein innerer Punkt, so ist der Schnitt der Polarebene ABD imaginär und alle drei Seiten darin tragen elliptische Involutionen, das Tetraeder ist also von der Art b), jene Kanten schneiden imaginär, die andern reell. Eine innere Ecke ist aber jedenfalls vorhanden, denn, wenn wir von einer äußeren A ausgehen, so wird der Schnitt der Polarebene BCD reell, von den Seiten des Dreiecks schneiden zwei reell, die dritte imaginär; also liegt eine Ecke auf der andern Seite als die beiden andern; mindestens eine Ecke ist eine innere; dann zeigt die vorangehende Betrachtung, daß nur eine Ecke eine innere sein kann. Also sind alle Polartetraeder einer elliptischen Fläche von der Art b) mit einer innern Ecke, deren Kanten reell schneiden, und drei äußeren, deren Verbindungslinien imaginär schneiden.

Zwei Gegenkanten eines Polartetraeders oder zwei polare Geraden verhalten sich ungleichartig, und eine Gerade sendet zwei reelle oder imaginäre Tangentialebenen an die elliptische Fläche, je nachdem sie imaginär oder reell schneidet;

wie das ja auch die punktierten Geradenpaare in den reellen Berührungsebenen fordern.[1])

Da jede Gerade Kante eines Polartetraeders sein kann, so schneidet jeder Strahl durch einen innern Punkt die Fläche reell, fehlt doch auch, wegen des imaginären Tangentialkegels aus diesem, der Übergang von den zweifellos vorhandenen Geraden durch ihn, welche reell schneiden, zu den imaginär schneidenden.

Für die reell-imaginäre Fläche 2. Grades ist der Polarraum der reelle Repräsentant. Alle Punkte sind innere Punkte; in bezug auf die Gleichartigkeit aller Punkte des Raums zeigt also dieser Fall Analogie zu dem der hyperbolischen Fläche. Sie erstreckt sich auch darauf, daß, wie bei dieser, jede imaginäre Gerade der Fläche, d. i. jetzt jede überhaupt, ihre konjugierte in der nämlichen Schar hat; weil sie als konjugierte zu einer vollständig imaginären Gerade zu ihr windschief sein muß.

Die übliche Bezeichnung des Polarfeldes oder Polarbündels als „elliptisch" oder „hyperbolisch", je nachdem die Basis reell-imaginär oder reell ist, läßt sich auf den Polarraum nicht ausdehnen: es liegt auf der Hand, daß da diese Namen doch geeigneter sind für die Fälle der reellen elliptischen oder hyperbolischen Basisfläche. Es ist daher besser, auch beim Polarfelde und Polarbündel die genannte Bezeichnung aufzugeben (Nr. 315), und zu sagen: Polarfeld, Polarbündel mit (reell-)imaginärer, reeller Basis und jetzt: Polarraum mit (reell-)imaginärer, elliptischer, hyperbolischer Basis; so lange eben geeignete kürzere Namen fehlen.

Man kann zwei korrelative Räume Σ, Σ' mit endlichen 542
Mittelpunkten O, P', der unendlich fernen Ebene $\omega' \equiv \pi$ entsprechend, stets in polarkorrelative Lage bringen. Die Bündel O, P' sind derartig korrelativ, daß den Ebenen von P' die Strahlen aus O nach ihren unendlich fernen Polen entsprechen; ist daher $O(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}) \equiv r, s, t$ das dreirechtwinklige Dreikant in O, dem ein dreirechtwinkliges Dreiflach $\rho'\sigma'\tau'$ in P' korrespondiert, wo $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ die unendlich fernen Pole von ρ', σ', τ' sind, so verlege man Σ' so, daß dieses auf jenes fällt und zwar ρ' auf st, σ' auf tr, τ' auf rs. Das Tetraeder $O\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ hat dann die Eigenschaft, daß jeder Ecke die Gegenebene entspricht; und die Polarkorrelation ist erzielt.[2]) —

Auf die Polarität in bezug auf eine (reelle) Fläche 2. Grades hat Poncelet das Prinzip der Dualität (Polarität, Reziprozität) im Raume begründet.[3])

---

1) Diese Eigenschaft polarer Geraden bei hyperbolischen, bzw. elliptischen Flächen 2. Grades haben wir gelegentlich schon benutzt.

2) Reye, Journal f. Math. Bd. 79 S. 168.

3) Vgl. außer dem Traité des propriétés projectives auch die Abhandlung:

543 Wir wollen einen Polarraum in ähnlicher Weise herstellen, wie wir in Nr. 319 ein Polarfeld konstruiert haben.

Es seien drei in einen Punkt S zusammenlaufende, nicht in derselben Ebene gelegene Geraden p, q, r gegeben, welche Involutionen von Punkten tragen; in diesen seien dem S die Punkte P, Q, R gepaart, deren Verbindungslinien QR, RP, PQ wir mit $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ bezeichnen. Wenn nun der Punkt X gegeben ist, so verbinden wir ihn mit $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ durch Ebenen, welche p, q, r in A, B, C treffen; deren gepaarte Punkte seien A_1, B_1, C_1; ihre Verbindungsebene ξ' ordnen wir dem Punkte X zu; auch X ist eindeutig durch ξ' bestimmt. Läuft X auf einer Gerade, so beschreiben A, B, C drei zu der ihrigen und untereinander projektive Punktreihen, also tun es auch A_1, B_1, C_1; wenn X in die Ebene PQR kommt, so werden in jenen Punktreihen P, Q, R entsprechend, in diesen also S sich selbst entsprechend. Daraus folgt, daß die Ebene ξ' einen Büschel beschreibt; seine Axe schneidet die drei Ebenen qr, rp, pq in den Perspektivitätszentren je der beiden betreffenden Punktreihen. Damit ist schon erkannt, daß die Beziehung zwischen X und ξ' Korrelation ist, und daß, wenn X eine Ebene η durchläuft, ξ' sich um einen Punkt Y' dreht. Es werden dabei die Ebenenbüschel $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ trilinear (Nr. 210), infolge dessen auch die Punktreihen der A, B, C und die der A_1, B_1, C_1 und zwar letztere wiederum perspektiv trilinear, wie jene Ebenenbüschel; weil eben die Verbindungsebenen $A_1 B_1 C_1$ einen Bündel erzeugen.

Jenen Punkt Y' erhalten wir aus drei Punkten der Ebene η; wir nehmen die drei Schnitte A^0, B^0, C^0 der η mit p, q, r. Die drei Ebenen von $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ nach A^0 treffen p, q, r in A^0, S, S, denen gepaart sind $A_1{}^0, Q, R$; folglich ist für A^0 die $\mathfrak{p}A_1{}^0$ die zugehörige Ebene, und ebenso für B^0, C^0 sind es $\mathfrak{q}B_1{}^0, \mathfrak{r}C_1{}^0$. Weil diese Ebenen sich in Y' schneiden, so sind, wenn $Y' \equiv Z$ ist, $A_1{}^0, B_1{}^0, C_1{}^0$ die drei Schnitte der Ebenen $Z(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r})$ mit p, q, r und die Ebene $A^0 B^0 C^0 = \eta$ ist die Z entsprechende Ebene ζ'. Damit ist involutorisches Entsprechen erkannt worden. Entsprechende Elemente sind ersichtlich im allgemeinen nicht inzident; also handelt es sich um Polarkorrelation.

Den Punkten S, P, Q, R entsprechen die Ebenen PQR, QRS, RPS, PQS, folglich ist $PQRS$ ein Polartetraeder; und daraus folgt, daß die Geraden p, q, r im entstandenen Polarraum konjugiert sind.

In dieser Konstruktion steckt die Mannigfaltigkeit

$$3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 15,$$

Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, Journal f. Mathem. Bd. 4 S. 1.

ein gegebener Polarraum läßt sich auf ∞^{3+2+1} Weise so herstellen, weil er so viele Tripel konjugierter Strahlen je aus demselben Punkte enthält. Wir erhalten die Mannigfaltigkeit 9 des Polarraums, gleich der der Fläche 2. Grades.

Bewegt sich X etwa in qr, so ist die Spur seiner Polarebene in dieser Ebene genau so zu konstruieren, wie in Nr. 319; es entsteht also ein Polarfeld. Man kann daher die Konstruktion auch so aussprechen:

Es sei gegeben ein Polarfeld in σ und eine Punktinvolution auf p, S sei der Schnittpunkt σp und $\mathfrak{p}$ und P seien zu S polar, bzw. gepaart. Ist X gegeben, so schneide man PX mit σ, $\mathfrak{p}X$ mit p, bestimme das polare, bzw. gepaarte Element; die verbindende Ebene ist die dem X zugeordnete.

Hier ergibt sich die Mannigfaltigkeit 9 aus

$$3 + 4 + 5 + 2 - (3 + 2).$$

Analog zu Nr. 325 soll die Aufgabe behandelt werden, zwei 544
Polarräume Π und Π' in Kollineation (oder Korrelation) zu bringen, die Erweiterung der Aufgabe von Nr. 500, zwei Flächen 2. Grades kollinear (oder korrelativ) zu machen. Wir wissen von dieser Aufgabe her, daß ∞^6 Kollineationen möglich sind, und da nun ein Polarraum ∞^6 Polartetraeder besitzt, so werden wir die genauere Forderung stellen können, daß zwei gegebene Polartetraeder $OPQR$ und $O'P'Q'R'$ von Π und Π' homolog werden. Damit die Kollineation reell sei, müssen die beiden Polarräume gleichartig sein, in beiden die Basisflächen reell-imaginär oder elliptisch oder hyperbolisch, also auch die Polartetraeder gleichartig sein:

a) beide müssen auf allen Kanten elliptische Involutionen konjugierter Punkte tragen,

b) beide müssen auf drei Kanten, welche von einer Ecke ausgehen, die im Innern der elliptischen Basisfläche liegt, hyperbolische, auf den drei andern Kanten elliptische Involutionen tragen,

c) beide müssen auf zwei Gegenkanten elliptische, auf den vier andern hyperbolische Involutionen tragen.

Am interessantesten ist uns jetzt wieder der erste Fall, wo die Basisflächen reell-imaginär sind. Wir fangen mit ihm an. Wir konstruieren dann, indem die gleichnamigen Ecken als entsprechend angenommen werden, wie in Nr. 325, auf den von O, bzw. O' ausgehenden Kanten $O(P, Q, R)$, $O'(P', Q', R')$ je das Paar der Involution, das zu den Eckpunkten harmonisch und, wegen der elliptischen Involutionen, reell ist: S, S_1; T, T_1; U, U_1; S', S_1'; ... Man ersieht sofort, daß 8 Zuordnungen dieser Punkte möglich sind. Nehmen wir die Zuordnung $\begin{matrix} S & T & U \\ S' & T' & U' \end{matrix}$ an, aus der dann die Zuordnung $\begin{matrix} S_1 & T_1 & U_1 \\ S_1' & T_1' & U_1' \end{matrix}$ folgt, und nennen die Schnittpunkte (QRS, PRT, PQU),

$(Q'R'S', P'R'T', P'Q'U')$ bzw. W und W'; so bringt die Kollineation:

$$\left|\begin{matrix} O & P & Q & R & W \\ O' & P' & Q' & R' & W' \end{matrix}\right|$$

jenes Entsprechen zustande. Sie verwandelt den Polarraum Π in einen Polarraum, bei welchem die drei Geraden $O'(P', Q', R')$ konjugiert sind und die nämlichen Involutionen tragen wie bei Π', der also, weil durch drei von einem Punkte auslaufende konjugierte Geraden und die Involutionen koniugierter Punkte auf ihnen der Polarraum eindeutig bestimmt ist (Nr. 543), mit Π' identisch ist. Es sind daher, nachdem zwei Polartetraeder der beiden Polarräume und ihre Ecken in bestimmter Weise zugeordnet sind, acht reelle Kollineationen möglich, im ganzen $8 \cdot 24$.

In den andern Fällen, wo die Basisflächen reell sind, müssen gleichartige Ecken und Kanten zugeordnet werden. Bei elliptischen Flächen seien O und O' die innern Ecken und entsprechend; dann ziehen wir auf den sechs Kanten durch sie die Doppelpunkte der hyperbolischen Involutionen heran (jene harmonischen Punkte werden imaginär) und erhalten, nach erfolgter Zuordnung der weiteren Ecken, noch acht Arten, diese Doppelpunkte zuzuordnen, und also ebenfalls acht reelle Kollineationen, im ganzen $8 \cdot 6$. Bei hyperbolischen Flächen sind die Ecken insofern gleichartig, daß von jeder zwei Kanten mit hyperbolischer, eine mit elliptischer Involution ausgeht. Hat man zwei Ecken zugeordnet, so muß man nun wieder auf Zuordnung gleichartiger Kanten Bedacht nehmen; es sind noch 2 Zuordnungen der übrigen Ecken möglich, also $4 \cdot 2$ Zuordnungen von Ecken. Nehmen wir wieder an, daß die gleichnamigen Ecken diesen Bedingungen entsprechen und $O(P, Q)$, $O'(P', Q')$ hyperbolische, OR, OR' elliptische Involutionen tragen, so benutzen wir auf jenen die Doppelpunkte, auf diesen die Punkte der zu den Ecken harmonischen Paare und können auch hier 8 Zuordnungen dieser Punkte herstellen und bekommen im ganzen $8 \cdot 8$ reelle Kollineationen.

Ähnlich lassen sich Korrelationen zustandebringen.

§ 82. Weitere Eigenschaften des Polarraums, Polfünfecke, Polsechsecke.[1])

545 Beim Polarfelde ergab sich: Zwei polare Dreiecke liegen perspektiv. Und ebenso sind beim Polarbündel zwei polare Dreikante perspektiv gelegen. Daraus folgt für den Polarraum, daß, wenn zu den Punkten A, B, C die Ebenen α, β, γ polar sind, weil in der Ebene von ABC dies Dreieck zu dem aus $\alpha\beta\gamma$ ausgeschnittenen und

1) Hierzu vgl. Reye, Journal f. Mathem. Bd. 77 S. 269.

zu ABC im Polarfelde dieser Ebene polaren perspektiv liegt, die drei Punkte:

$$(BC, \alpha), \quad (CA, \beta), \quad (AB, \gamma)$$

in gerader Linie liegen. Der Polarbündel um $\alpha\beta\gamma$ lehrt, daß die drei Ebenen

$$(\beta\gamma, A), \quad (\gamma\alpha, B), \quad (\alpha\beta, C)$$

in eine Gerade zusammenlaufen; diese Ebenen projizieren die Verbindungslinien entsprechender Ecken der vorherigen Dreiecke, und es folgt die eine Eigenschaft aus der andern.

Zwischen den Punkten A, B, C und ihren Polarebenen α, β, γ findet in einem Polarraume eine Beziehung statt; wenn A, B, C, α, β gegeben ist, so muß γ einem bestimmten Bündel angehören, demjenigen um den Schnitt der Verbindungslinie von (BC, α) und (CA, β) mit AB; und duales gilt für C, wenn α, β, γ, A, B gegeben sind.[1])

Obwohl drei dreifache, also neun Bedingungen vorliegen, so viele als zur Festlegung eines Polarraumes oder einer Fläche 2. Grades erforderlich sind, entspricht dem Falle:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

bei beliebiger Lage dieser sechs Elemente kein Polarraum.

Wenn aber die sechs Elemente $A, \ldots \gamma$ die obige Beziehung erfüllen, dann genügt nicht bloß eine Fläche, sondern ∞^1. Wir haben in Nr. 322 erörtert, daß in der Ebene ABC die Korrelation, in der den Ecken des Dreiecks ABC und dem Perspektivitätszentrum die Seiten des andern Dreiecks und die Perspektivitätsaxe entsprechen, ein Polarfeld ist. Dasselbe definiert den Kegelschnitt, in welchem die gesuchte Fläche die Ebene schneidet, und der zu ihr perspektive Polarbündel um den Pol $\alpha\beta\gamma$ von ABC definiert den Kegel, welcher längs jenes Kegelschnitts der Fläche umgeschrieben ist. Es ergibt sich daher eine Büschel-Schar von Flächen 2. Grades, welche sich konisch berühren.

In dem besonderen Falle, wo die Ebenen α, β, γ durch A, B, C gehen und die Berührungsebenen dieser Punkte werden, sind Kegelschnitt und Kegel einfacher zu erhalten.

Aus dieser Beziehung zwischen drei Punkten A, B, C und ihren Polarebenen α, β, γ folgt eine weitere Beziehung für zwei Tetraeder, welche in einem Polarraume entsprechend sind. Sie seien $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$, $A'B'C'D' \equiv \alpha'\beta'\gamma'\delta'$, so daß α', β', γ', δ' die Polar-

1) Hiermit kann man beweisen, daß der Satz, welchen Gergonne einem Steinerschen Aufsatze (Gesammelte Werke Bd. I S. 188) als vermutlich richtig zugefügt hat, nicht richtig ist (Archiv f. Math. 3. Reihe Bd. 5 S. 9); vgl. Nr. 120.

ebenen von A, B, C, D und daher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ diejenigen von A', B', C', D' sind.

Wir haben dann zwei Gruppen von vier Geraden:

$$AA', BB', CC', DD' \quad \text{und} \quad \alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta',$$

welche je zu einer Regelschar gehören. Wir können für jede der beiden Gruppen sofort acht Geraden aus der Leitschar nachweisen. Bei der ersten Gruppe sind dies die Perspektivitätsaxen der Bündel um die acht Ecken. Z. B. an der Ecke D sind in dem Polarbündel polar die Dreikante $D(A, B, C)$ und $D(A', B', C')$; der Ebene $DAB = \gamma$ entspricht der Strahl DC' nach dem Pole. Es erhellt, daß die Axe s_D, durch welche die Ebenen DAA', DBB', DCC' gehen, von AA', BB', CC' getroffen wird und ersichtlich auch von DD'.

Im andern Falle gehören zur Leitschar die Perspektivitätsaxen der polaren Dreiecke in den acht Ebenen: $s_\alpha, \ldots$

Die eine Figur ist offenbar zur andern polar: $\alpha\alpha'$ zu $AA', \ldots$, $s_{\delta'}$ zu $s_D, \ldots$

Wenn die Basisfläche in die absolute Kurve (als Fläche mit ∞^2 Berührungsebenen) ausartet, so erhalten wir in den Geraden $AA', \ldots$, von denen die Punkte $A', \ldots$ im Unendlichen liegen, die Höhen des Tetraeders $ABCD$ (Nr. 101).

Fallen die Punkte A', B', C', D' in die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß Berührung statt hat, so handelt es sich um die Verbindungslinien der Ecken eines einer Fläche 2. Grades umgeschriebenen Tetraeders mit den Berührungspunkten der Gegenebenen, und um die Schnittlinien der Ebenen eines eingeschriebenen mit den Berührungsebenen in den Gegenecken.

546 Wenn AA' und BB' sich schneiden, so liegen in ihrer Ebene AB und $A'B'$; letztere ist, als $\gamma'\delta'$, die Polare von CD; also sind AB und CD, zwei Gegenkanten, im Polarraume konjugiert und ebenso $A'B'$, $C'D'$, was jedoch aus jenem folgt (Nr. 471).

Und umgekehrt, wenn AB und CD konjugiert sind, und demnach auch $A'B'$, $C'D'$, so wird AB von $A'B'$ getroffen und auch AA', BB' schneiden sich; aber es wird dann auch CD von $C'D'$ getroffen und CC', DD' schneiden sich, und, weil unsere Voraussetzung in sich dual ist, so schneiden sich auch $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ und $\delta\delta'$; wie das auch die Polarität erfordert.

Es seien S_1, S_2 die Schnittpunkte (AA', BB'), (CC', DD') und σ_1, σ_2 die zugehörigen Ebenen. Zwischen den drei Polen A', B', C' und ihren Polarebenen α, β, γ findet die Beziehung statt, daß die drei Ebenen $(A', \beta\gamma)$, $(B', \gamma\alpha)$, $(C', \alpha\beta)$ in einer durch D gehenden Gerade s_D sich schneiden; das sind die drei Ebenen $A'AD$, $B'BD$, $C'CD$. Die erste enthält AA', die zweite BB', also liegt der Schnitt

S_1 auf der Schnittlinie s_D und damit in $C'CD$, welche CC' und die sie schneidende DD' enthält, also σ_2 ist. Folglich liegt S_1 in σ_2 und ebenso S_2 in σ_1, und die Verbindungslinie $S_1 S_2$ ist mit der Schnittlinie $\sigma_1 \sigma_2$ identisch.

Die beiden Regelscharen zerfallen je in zwei Strahlenbüschel: diejenige der AA', BB'; CC', DD' in die Büschel (S_1, σ_1), (S_2, σ_2) und die Leitschar in die Büschel (S_1, σ_2), (S_2, σ_1), derartig, daß zum ersteren s_C, s_D, $s_{C'}$, $s_{D'}$, zum zweiten s_A, s_B, $s_{A'}$, $s_{B'}$ gehören. Und das Entsprechende gilt für die polare Figur.

Wenn noch zwei andere Gegenkanten AC, BD konjugiert sind und dann auch $A'C'$, $B'D'$, so schneiden sich auch AA', CC', sowie BB', DD'; CC', DD', in σ_2 gelegen, schneiden die Gerade $\sigma_1 \sigma_2$ dort, wo sie von AA', BB' (in σ_1) getroffen wird, d. h. in S_1, mit dem sich S_2 daher vereinigt hat; alle vier Geraden $AA', \ldots DD'$ gehen durch denselben Punkt S, und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}', \ldots \mathfrak{d}\mathfrak{d}'$ liegen in der zu ihm polaren Ebene. Es müssen dann von selbst AD und BC, $A'D'$ und $B'C'$ konjugiert sein.

Wir sehen, es gilt der zum Hesseschen Satze (Nr. 314) analoge Satz: Wenn in einem Polarraum zwei Paare AB, CD; AC, BD von Gegenkanten eines Tetraeders konjugiert sind, so sind es die dritten AD, BC auch.

Das kann man natürlich unmittelbar erkennen. Die Polaren von CD und BD treffen AB und AC: in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$; sie liegen in der Polarebene $\mathfrak{d}'$ von D, und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist ihre Spur in $\mathfrak{d} \equiv ABC$. In dem Polarfelde, welches in $\mathfrak{d}$ entsteht, sind C und $\mathfrak{C}$ konjugiert, als Spuren der CD und ihrer Polare, ebenso B und $\mathfrak{B}$; also ist, nach Hesses Satz, auch $\mathfrak{A} = (BC, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$ zu A konjugiert. Folglich geht die Polarebene von A durch $\mathfrak{A}$, die von D, durch $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ gehend, tut es ebenfalls; daher trifft die Polare von AD die BC in $\mathfrak{A}$; also sind AD und BC konjugiert.

Und das obige Ergebnis ist:

Wenn in einem Polarraume zweimal zwei Gegenkanten eines Tetraeders $ABCD$ konjugiert sind und infolgedessen auch die dritten, und $A'B'C'D'$ das polare Tetraeder ist (welches dann die nämliche Eigenschaft hat), so laufen die Verbindungslinien entsprechender Ecken (von denen jede die Polarebene der andern zur Gegenebene hat) in einen Punkt zusammen, und die Schnittlinien entsprechender Ebenen der Tetraeder liegen in der Polarebene dieses Punktes.

Es genügt zu wissen, daß drei der Verbindungslinien, etwa AA', BB', CC' durch einen Punkt gehen; denn dann müssen AB und CD konjugiert sein, weil AA' und BB' sich schneiden, und ebenso AC und BD, weil AA' und CC' es tun; also geht auch DD' durch den Punkt.

Wenn bei zwei Tetraedern $ABCD$, $A'B'C'D'$ die vier Verbindungslinien AA', BB', CC', DD' einer Regelschar angehören, so sind jene polar in einem Polarraume, und zwar so, daß A zur Polarebene $B'C'D'$ hat, usw.

Die durch D gehende Gerade der Leitschar beweist, daß die beiden Dreikante $D(A, B, C)$ und $D(A', B', C')$ perspektiv sind, oder wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Ebenen des ersten Tetraeders sind, das Dreiflach $\alpha\beta\gamma$ und das Dreikant $D(A', B', C')$ oder auch das Dreieck $A'B'C'$; folglich gibt es ∞^1 Polarräume, in denen den Ebenen α, β, γ die Punkte A', B', C' polar sind. Sei $\mathfrak{D}'$ der bewegliche Pol der festen Ebene δ in diesen Polarräumen, so gilt jedesmal, daß AA', BB', CC', $D\mathfrak{D}'$ einer Regelschar angehören. Also ist auch die vierte von diesen Geraden fest, und $\mathfrak{D}'$ durchläuft sie. Weil aber nach Voraussetzung auch AA', BB', CC', DD' in einer Regelschar sind, so ist $D\mathfrak{D}'$ mit DD' identisch und für einen der Polarräume $\mathfrak{D}'$ mit D'.

Daher gehören auch die Schnittlinien entsprechender Ebenen der Tetraeder zu einer Regelschar.

Und ebenso gibt es, wenn $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ derselben Regelschar angehören, einen Polarraum, in dem die beiden Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ polar sind.

Jetzt seien zwei Tetraeder $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ gegeben, und $A'B'C'D'$, $A_1'B_1'C_1'D_1'$ seien zu ihnen polar in einem Polarraume; wenn dann die vier Verbindungslinien AA_1', BB_1', CC_1', DD_1' zu einer Regelschar gehören, so gilt dies auch für A_1A', B_1B', C_1C', D_1D'. Denn infolge der Voraussetzung sind $ABCD$ und $A_1'B_1'C_1'D_1'$ polar in einem zweiten Polarraum; folglich gehören auch die Schnittlinien entsprechender Ebenen $(BCD, B_1'C_1'D_1'), \ldots$ zu einer Regelschar. Zu diesen sind aber, im gegebenen Polarraum, polar die Geraden $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$, $D'D_1$; also sind dies auch vier Geraden einer Regelschar[1]).

547 Fügt man zu einem von zwei solchen in einem Polarraume polaren Tetraedern $ABCD$, $A'B'C'D'$, bei denen AA', BB', CC', DD' in einen Punkt E zusammenlaufen, etwa zum ersten diesen Punkt E hinzu, so ergibt sich ein vollständiges Fünfeck $ABCDE$ mit der Eigenschaft, daß jede der zehn Verbindunsebenen von drei Ecken (Ebene des Fünfecks) und die Verbindungslinie der beiden übrigen (Gegenseite) konjugiert sind; in der Tat, der Pol D' von ABC liegt auf DE; und die Ebene ABE enthält AA', BB', also auch $A'B'$, folglich liegt der Pol auf der Polare CD von $A'B'$.

Wir nennen ein solches Fünfeck ein Polfünfeck[2]) des Polar-

---

1) Muth, Zeitschr. f. Math., Bd. 38, S. 315; Bd. 39, S. 116.

2) Dual dazu gibt es Polfünfflache; wir bevorzugen hier die Punkt-Figuren,

raums. Umgekehrt, wenn $ABCDE$ ein Polfünfeck ist, so liegen die Pole von BCD, CDA, DAB, ABC auf AE, BE, CE, DE; also ist E der Konkurrenzpunkt; und ähnlich bei den vier andern Tetraedern.

Jede Ebene des Polfünfecks enthält demnach die Polare der Gegenseite und jede Seite den Pol der Gegenebene.

Ferner, in jeder Ebene eines Polfünfecks bilden die drei Ecken desselben und der Spurpunkt der Gegenseite ein Polviereck des Polarfeldes, das in ihr durch den Polarraum entsteht (Nr. 314).

Es sei, in ABC, L der Spurpunkt von DE; so ist CL die Spur von CDE; in dieser Ebene liegt die Polare von AB, und ihr Spurpunkt, der auf CL liegt, ist der Pol von AB in jenem Polarfelde, daher CL zu AB konjugiert, ebenso AL zu BC und BL zu CA.

Die Ebene CDE geht durch die Polare von AB. Wollen wir also, von drei beliebigen Punkten A, B, C ausgehend, in einem gegebenen Polarraume ein Polfünfeck herstellen, so konstruieren wir die Ebenen, welche A, B, C je mit den Polaren von BC, CA, AB verbinden; in dem Polarbündel um den Pol von ABC, der durch den Polarraum bewirkt wird, bilden die genannten Polaren und die Strahlen nach A, B, C zwei polare Dreikante, welche also perspektiv sind, und jene drei Ebenen laufen in die Perspektivitätsaxe g zusammen. Auf den drei Ebenen und daher auf dieser Gerade g müssen D, E liegen, wenn ADE, BDE, CDE zu BC, CA, AB konjugiert werden sollen. Wir legen D beliebig auf g; so muß AE durch den Pol von BCD gehen; dieser Pol liegt auf der Polare von BC, also in der Ebene von A nach g, welche durch diese Polare gelegt ist; daher trifft die Gerade von A nach ihm die g; der Treffpunkt ist die fünfte Ecke E. Und weil diese Gerade die g trifft, so genügt es, irgend eine Ebene durch A und den Pol mit g zu schneiden; denn alle Ebenen dieses Büschels schneiden g in demselben Punkt.

Wir haben nun ein Polfünfeck $ABCDE$; denn das Tetraeder $BCDE$ hat die Eigenschaft, daß die Verbindungslinien von drei Ecken mit den Polen der Gegenebenen in den Punkt A zusammenlaufen; der Pol von $BDE = Bg$, welche die Polare von AC enthält, liegt auf AC und ebenso der von CDE auf AB und der von BCD auf AE.

Die Punkte D und E bewegen sich projektiv auf g; denn BCD und ihr Pol tun es und jene bewegen sich perspektiv zu diesen. Aber D ergibt sich ebenso aus E, wie E aus D; denn nachdem E

---

später sollen bei einer analogen Betrachtung die Ebenen-Figuren bevorzugt werden (Nr. 569ff.).

aus D konstruiert ist, ist $ABCDE$ ein Polfünfeck geworden; also liegt der Pol von BCE auf AD; d. h. D ergibt sich als Schnitt von g und der Verbindungslinie des Pols von BCE mit A. Daher ist die Projektivität der D und E auf g involutorisch.

Weil A, B, C je ∞^3 Lagen im Raume einnehmen können, D dann auf der durch sie bestimmten Gerade g ∞^1 Lagen, E aber durch D bestimmt ist, so erhellt, daß es in einem gegebenen Polarraume ∞^{10} Polfünfecke gibt. Da die Anzahl der Fünfecke im Raume ∞^{15} ist, so ist es für ein Fünfeck eine fünffache Bedingung, Polfünfeck in einem gegebenen Polarraume zu sein.

Ein Polartetraeder $ABCD$ und ein beliebiger Punkt E liefern auch ein Polfünfeck; denn der Pol D von ABC liegt auf DE und der Pol von ABE auf CD, der Polare von AB. Solcher speziellen Polfünfecke gibt es ∞^{6+3}.

Zur Bestimmung der Gerade $g = DE$ reichen die beiden Ebenen ADE und BDE hin, welche zu BC und AC konjugiert gemacht sind (als Ebenen von A, B nach den Polaren dieser Geraden), ferner muß E auf irgend einer durch A gehenden zu BCD konjugierten Ebene liegen oder irgend eine durch AE gehende Ebene muß zu BCD konjugiert sein. Betrachten wir das einfache Fünfeck $AEDBC$, so haben wir also dafür zu sorgen, daß die drei aufeinander folgenden Ebenen AED, EDB, DBC desselben konjugiert seien bzw. zu BC, CA und irgend einer (gegebenen) Ebene φ durch AE. Es ist dann von selbst die dritte Ebene DBC konjugiert zu AE selber; denn der Pol von DBC liegt dann in dieser Ebene φ; weil DBC aber durch BC geht, muß dieser Pol auf der Polare von BC liegen, welche sich in AED befindet; daher liegt er auf der Schnittlinie AE beider Ebenen. Man sieht, daß man, damit dieser Schluß sicher sei, genauer sagen muß: DBC muß konjugiert sein zu einer bestimmten durch AE gehenden, aber von AED verschiedenen Ebene.

Damit ist die fünffache Bedingung zerlegt in zwei doppelte: AED konjugiert zu BC, EDB zu CA, und eine einfache: DBC konjugiert zu einer gegebenen durch AE gehenden (von AED verschiedenen) Ebene.

Auf so viele von einander unabhängige Bedingungen sind die ursprünglichen zehn doppelten Bedingungen des Polfünfecks zurückgeführt. Und wir wollen jetzt direkt folgenden Satz beweisen.

Wenn in einem Polarraume ein einfaches Fünfeck $ABCDE$ die Eigenschaft hat, daß von den drei aufeinander folgenden Ebenen ABC, BCD, CDE die Pole F, G, H auf den Seiten DE, EA und auf einer durch AB gehenden von ABC verschiedenen gegebenen Ebene liegen, so hat jede der acht weiteren Ebenen (einschließlich CDE) des vollständigen Fünfecks ihren Pol auf der Gegenseite.

Denn zunächst muß der Pol H von CDE, welche den Pol F von ABC enthält, auf ABC, also auf AB liegen. Die vierte Ebene DEA des einfachen Fünfecks geht durch F, G und hat ihren Pol I auf CB, der Polare von FG, und ebenso EAB den ihrigen K auf CD. Jede der fünf übrigen Ebenen des vollständigen Fünfecks geht durch eine Seite und Gegenecke des einfachen. Nehmen wir DEB. Weil IKF, KFG, FGH Polarebenen von A, B, C sind, so liegen, nach dem Perspektivitätssatze im Felde ABC, die drei Punkte $(AB, FGH) = H$, $(CB, IKF) = I$, (CA, KFG) in gerader Linie, d. h. der dritte auf HI, oder der Schnittpunkt von HI und KFG auf AC; das ist aber, da HI Polare von DE, KFG Polarebene von B ist, der Pol von DEB.

Oder auch, die Ebenen von A, B, C nach den Polaren von BC, CA, AB gehen durch eine Gerade; die Polare von BC ist FG und die von AB ist FK; die beiden Ebenen AFG und CFK schneiden sich in DE; folglich geht BDE durch die Polare von CA.

Es seien nun α, β, γ, δ, ϵ die Polarebenen der Ecken eines Polfünfecks $ABCDE$; so bilden dieselben ein Fünfflach, das dem Fünfeck so eingeschrieben ist, daß seine Ecken auf dessen Seiten und seine Kanten in dessen Ebenen liegen. In der Tat, die Ecke $\alpha\beta\gamma$, der Pol von ABC, liegt auf DE, und die Kante $\delta\epsilon$, die Polare von DE, in der Ebene ABC.

Dies Fünfflach ist ein Polfünfflach, d. h. durchweg sind Ecke und Gegenkante konjugiert; z. B. $\alpha\beta\gamma$ und $\delta\epsilon$; denn $\alpha\beta\gamma$ liegt auf der Polare DE von $\delta\epsilon$; oder $\delta\epsilon$ in ABC, der Polarebene von $\alpha\beta\gamma$.

Es ist auch umgekehrt für einen Polarraum eine fünffache Bedingung, ein gegebenes Fünfeck zum Polfünfecke zu haben; denn er soll auch den zwei doppelten Bedingungen genügen, daß die Pole von ABC, BCD auf DE, EA, und der einfachen, daß der von CDE auf einer durch AB gehenden Ebene liege. Das tun ∞^4 unter den ∞^9 Polarräumen.

Ein Polsechseck eines Polarraums ist ein solches voll- 548
ständiges Sechseck, von dem jede zwei gegenüberliegenden Ebenen konjugiert sind.[1]) Jedes Polfünfeck $ABCDE$ und ein beliebiger Punkt F geben eine solche Figur; denn ABC hat ihren Pol auf DE, also auf DEF, und ABF hat ihren Pol auf der Polare von AB, die in CDE liegt; noch spezieller liefert ein Polartetraeder mit zwei Punkten ein Polsechseck. Dadurch ergeben sich ∞^{10+3}, bzw. $\infty^{6+2\cdot 3}$ Polsechsecke.

Aber es gibt allgemeinere Polsechsecke. Ist $ABCDEF$ ein solches, so gehen die vier Ebenen von A, B, C, D nach EF durch

1) Paul Serret, welcher diese Figuren der Polfünfecke und Polsechsecke eingeführt hat (Géométrie de direction [1869] S. 56, 57) nannte sie (der Fläche 2. Grades) konjugierte Fünfecke, Sechsecke.

die Pole von BCD, CDA, DAB, ABC; folglich treffen die Verbindungslinien der vier Punkte mit diesen Polen die Gerade EF; also befindet sich dieselbe in der Leitschar λ der Regelschar ρ, zu welcher jene Verbindungslinien gehören. Trifft eine Gerade drei von diesen Verbindungslinien, so trifft sie auch die vierte; sind also in drei von den vier Ebenenpaaren:

$$BCD, AEF;\ CDA, BEF;\ DAB, CEF;\ ABC, DEF$$

die Ebenen konjugiert, so sind sie es von selbst im vierten.

Wir nennen eine Gerade aus der zum Tetraeder $ABCD$ gehörigen Leitschar λ dem Tetraeder zugeordnet. Sie ist mit jeder Ecke des Tetraeders durch eine Ebene verbunden, welche durch den Pol der gegenüberliegenden Ebene geht. Wir halten A, B, C fest und damit auch den Pol D' ihrer Ebene. Es sei σ eine feste durch D' gehende Ebene; in ihr bewegen wir die vierte Ecke D. Die Ebene σ enthält immer die Gerade DD' aus der Regelschar ρ, also auch eine d aus der Leitschar λ. Wir wollen die Verwandtschaft zwischen D und d untersuchen. Man erhält aus dem Punkte D die Gerade d, indem man ihn mit BC, CA durch Ebenen und deren Pole mit A, B durch Geraden verbindet, welche σ in zwei Punkten der Gerade d treffen; weil auch DD' die d trifft, so tut es die Gerade aus C nach dem Pole von ABD ebenfalls. Umgekehrt, wenn d in σ gegeben ist, verbinde man sie mit A, B durch Ebenen; diejenigen Ebenen durch BC, CA, zu welchen diese Ebenen konjugiert sind, die also durch ihre Pole gehen, schneiden sich mit σ in D; und die von C und AB herrührende analoge Ebene geht auch durch D. Rechnen wir d zum ersten und D zum zweiten Felde in σ und sehen wir, was einem Strahlenbüschel des ersten Feldes, der seinen Scheitel in E hat, entspricht; die Ebenen dA, dB bewegen sich projektiv in den Büscheln von EA, EB, ebenso die Pole auf geraden Linien und die Ebenen, die sie aus BC, CA projizieren; geht d durch den Pol D' von ABC, so liegen beide Pole in ABC, und diese Ebene entspricht sich in den Büscheln BC, CA selbst; also erzeugen dieselben einen Strahlenbüschel, und in σ entsteht eine Gerade e, der Ort der Punkte D, die den Strahlen des Büschels E des ersten Feldes im zweiten zugeordnet sind. Es liegt daher Korrelation vor. Für denjenigen Strahl d des Büschels E, welcher BC schneidet, fallen dB, dC in EBC zusammen; die beiden Ebenen aus CA, AB nach ihrem Pole schneiden den zugehörigen D in σ ein; also tut es die Gerade aus A nach diesem Pole; daher liegen auf e die drei Punkte, in welchen die Geraden aus A, B, C nach den Polen von EBC, ECA, EAB die σ treffen; also ergibt sich e aus E genau ebenso, wie oben d aus D sich ergab. Es entspricht nicht bloß dem E aus dem ersten Felde e im zweiten, sondern auch dem E aus dem zweiten e im ersten. Wir haben es mit einem Polarfelde zu tun.

Ist daher DEF ein Polardreieck dieses Polarfeldes, so ist dem Tetraeder $ABCD$ die Gerade EF, dem $ABCE$ die Gerade FD und dem $ABCF$ die Gerade DE zugeordnet.

Die Ebenen ABC und $\sigma = DEF$ sind nach Voraussetzung konjugiert. Aus der Zuordnung von EF zu $ABCD$ folgt, daß BCD, AEF; CDA, BEF; DAB, CEF konjugiert sind, und die beiden andern Zuordnungen beweisen es für die sechs übrigen Paare der Gegenebenen.

Wenn also ein Polarraum gegeben ist, so kann man drei beliebige Punkte A, B, C in folgender Weise zu einem Polsechsecke vervollständigen. In jeder Ebene σ durch den Pol von ABC entsteht ein (nicht dem Polarraum angehöriges) Polarfeld, in dem ein Punkt D und die dem Tetraeder $ABCD$ zugeordnete Gerade d entsprechend sind, d. h. die in der Ebene liegende Gerade der Leitschar der Regelschar, zu welcher die Verbindungslinien der vier Ecken mit den Polen der Gegenebenen gehören. Jedes Polardreieck dieses Polarfeldes gibt mit A, B, C ein Polsechseck.

Ist g eine dem Tetraeder $ABCD$ zugeordnete Gerade, so bilden auf ihr die Punktepaare EF eine Involution, die der konjugierten Punkte in dem eben besprochenen Polarfelde in der Ebene von g nach einer Ecke des Tetraeders. Man erhält irgend eins dieser Paare, wenn man g mit zwei Ebenen schneidet, welche durch Gegenkanten von $ABCD$ gehen und konjugiert sind. Die konjugierten Ebenen durch zwei Gegenkanten bilden zwei projektive Büschel; die Geraden aber, welche von zwei projektiven Ebenenbüscheln in involutorischen Punktreihen geschnitten werden, erzeugen ein Gewinde (Nr. 530).

Die Geraden g, welche dem Tetraeder $ABCD$ zugeordnet sind, bilden eine Regelschar λ; sie stellt sich jetzt heraus als den drei Gewinden gemeinsam, die bei AB, CD; AC, BD; AD, BC sich ergeben.

$ABCDEF$ wird ein Polsechseck, wenn

$$BCD,\ AEF;\ CAD,\ BEF;\ DAB,\ CEF;\ CDE,\ ABF$$

konjugiert sind; denn durch die drei ersten Paare konjugierter Ebenen wird EF dem Tetraeder $ABCD$ zugeordnet und DEF zu ABC konjugiert, und das letzte Paar macht E, F zu einem Paar konjugierter Punkte in dem Polarfelde der Ebene DEF.

Vertauschen wir D und E, so haben wir:

$$BCE,\ CAE,\ ABE,\ CDE$$

zu

$$ADF,\ BDF,\ CDF,\ ABF$$

konjugiert. In jeder der beiden Reihen stehen vier Ebenen eines Bündels E, bzw. F, welche nach solchen vier Kanten des Tetraeders $ABCD$ gehen, unter denen nur zwei Gegenkanten sich befinden.

Wenn also sechs Punkte A, B, C, D, E, F so beschaffen sind, daß die vier Ebenen aus einem Punkte (E oder F) nach vier Kanten des Tetraeders von vier andern, unter denen nur zwei Gegenkanten sich befinden, zu ihren Gegenebenen (im Sechsecke) in einem Polarraume konjugiert sind, so sind auch jede zwei weitern Gegenebenen konjugiert, und die Punkte bilden ein Polsechseck.[1])

Damit stellt es sich als eine vierfache Bedingung für ein Sechseck heraus, daß es für einen gegebenen Polarraum ein Polsechseck sei, sowie für einen Polarraum, daß er ein gegebenes Sechseck zum Polsechseck habe.

Folglich enthält jeder Polarraum ∞^{14} Polsechsecke; in der Tat, es gibt ∞^{12} Tetraeder $ABCD$, jedes hat ∞^1 zugeordnete Geraden und auf jeder sind ∞^1 Paare EF möglich; oder es gibt ∞^9 Tripel ABC, ∞^2 Ebenen durch den Pol von ABC und in jeder ∞^3 Polardreiecke ihres Polarfeldes (D, d).

Jedes Sechseck ist Polsechseck für ∞^5 unter den ∞^9 Polarräumen.

Durch jeden erhält das Sechseck ein Sechsflach, gebildet durch die Polarebenen der sechs Ecken und ihm so eingeschrieben, daß jede der zwanzig Ebenen des gegebenen Sechsecks ihren Pol, eine Ecke des Sechsflachs, in der Gegenebene liegen hat. Dies Sechsflach ist ein Polsechsflach des Polarraums.

Es sei $ABCDEF$ ein Polsechseck eines gegebenen Polarraums; alle Punkte, die mit $ABCD$ ein Polsechseck bilden, liegen auf der durch A, B, C, D gehenden Trägerfläche Φ der beiden verbundenen Regelscharen, von denen die eine die Verbindungslinien der Ecken des Tetraeders $ABCD$ mit den Polen der Gegenebenen enthält, während die dem Tetraeder zugeordneten Geraden die andere Regelschar bilden. Zwei zusammengehörige Punkte liegen immer auf einer Geraden dieser letzteren Schar und bilden ein Paar ihrer Involution. Es ergibt sich so eine eindeutige Verwandtschaft auf dieser Fläche 2. Grades.

Zu den drei Punkten A, B, C fanden wir eine Gerade g_0 mit einer Involution von Punktepaaren, die sie zu einem Polfünfeck ergänzen. Jeder Punkt, z. B. D, ergänzt dieses zu einem Polsechseck. Daher gehört g_0 zur zweiten der vorherigen Regelscharen, aber ebenso

1) Außer ABC, DEF lassen sich noch leicht ABE, CDF als konjugiert nachweisen; dagegen für die vier übrigen Paare habe ich eine direktere Ableitung aus dieser Voraussetzung nicht finden können.

auch zu der bei $ABCE$ sich ergebenden. Die Trägerflächen durchschneiden sich also, außer in g_0, auch in einer kubischen Raumkurve, offenbar der durch $A, \ldots F$ gehenden.

Die einem Polsechseck umgeschriebene kubische Raumkurve liegt auf den Trägerflächen der Paare verbundener Regelscharen, die zu den fünfzehn Tetraedern gehören; und solche drei Trägerflächen, deren Tetraeder drei Punkte gemeinsam haben, gehen durch die diesen Punkten zugehörige Gerade g_0, auf welcher die Punkte liegen, die jene drei zu Polfünfecken vervollständigen.

Es seien E, F; E_1, F_1 zwei Paare, welche $ABCD$ zu einem Polsechsecke ergänzen, aber auf verschiedenen zugeordneten Geraden g, g_1 gelegen; so liegen die beiden kubischen Raumkurven K^3, $K_1{}^3$, welche den Sechsecken umgeschrieben sind, auf der zu $ABCD$ gehörigen Fläche 2. Grades Φ, und treffen deren Geraden g, g_1 zweimal. Die acht Punkte $A, B, C, D, E, F, E_1, F_1$ sind daher Begegnungspunkte der beiden Raumkurven 4. Ordnung (K^3, g_1), $(K_1{}^3, g)$ auf unserer Fläche, also acht assoziierte Punkte, und jede dem Polsechsecke umgeschriebene Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, die nicht auf Φ liegt, schneidet Φ in zwei Punkten, welche mit A, B, C, D ein Polsechseck bilden.

Nun seien $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ zwei Polartetraeder desselben Polarraums; dann bilden A, B, C, D mit A_1, B_1 und A_1, B_1, C_1, D_1 mit A, B je ein Polsechseck, oder A, B, A_1, B_1 werden sowohl durch C, D als durch C_1, D_1 zu einem Polsechseck ergänzt; daher:

Die acht Ecken von zwei Polartetraedern desselben Polarraums sind stets acht assoziierte Punkte.[1])

Jeder Polarraum hat ∞^{10} Polfünfecke; daher durchdringen sich in der 15fach unendlichen Mannigfaltigkeit der Fünfecke die beiden 10fach unendlichen Mannigfaltigkeiten der zu zwei Polarräumen gehörigen Polfünfecke in einer Mannigfaltigkeit vom Grade $2 \cdot 10 - 15$, und diese wiederum mit der der Polfünfecke eines dritten Polarraums in einer Mannigfaltigkeit vom Grade $5 + 10 - 15$.

Demnach haben zwei Polarräume ∞^5 Polfünfecke und drei eine endliche Anzahl von Polfünfecken gemeinsam; welche Zahl mag das sein?

In ähnlicher Weise folgt daraus, daß es ∞^{18} Sechsecke und in jedem Polarraume ∞^{14} Polsechsecke gibt, daß zwei Polarräume ∞^{10}, drei Polarräume ∞^6 und vier Polarräume ∞^2 Polsechsecke gemeinsam haben.[2])

---

1) Hesse, Oberflächen zweiter Ordnung, 16. Vorlesung. — Im Anschluß hieran möge noch erwähnt werden: F. London, Math. Annalen Bd. 38, S. 358.

2) Reye, Journ. f. Math. Bd. 77 S. 269 und Bd. 82 S. 75.

§ 83. Das gemeinsame Polartetraeder zweier Polarräume, ihr Büschel und ihre Schar.

549 Wir wollen aus zwei Polarräumen Π und Π' den Büschel und die Schar, welche sie und ihre Basisflächen (Π) und (Π') bestimmen, konstruieren. Die Polarebenen der Punkte eines festen Raumes P in Π und Π' sind entsprechend in einer Kollineation Γ. In derselben Kollineation sind auch entsprechend die Pole, in Π und Π', der Ebenen von P (und die Polaren der Geraden von P), denn durchläuft ein Punkt eine Ebene von P, so drehen sich die Polarebenen um die Pole derselben, wodurch diese in Γ entsprechend werden.

Das Koinzidenztetraeder dieser Kollineation hat Ebenen, welche in beiden Polarräumen zu demselben Pole als Polarebenen gehören; und diese Pole sind Ecken des Tetraeders, weil dieselben ja als Pole je zu derselben Ebene gehören. Und zwei solche Elemente, welche polar in beiden Polarräumen sind, liegen im Tetraeder einander gegenüber; denn Inzidenz würde bedeuten, daß die Basisflächen einen Punkt mit derselben Berührungsebene gemeinsam haben, was im allgemeinen nicht eintritt.

Das Koinzidenztetraeder von Γ ist also ein gemeinsames Polartetraeder der beiden Polarräume und der Basisflächen; und es gibt nur dies eine, wenn Γ nur ein Koinzidenztetraeder hat.

Betrachten wir zunächst Γ als Kollineation von Ebenen, je der Polarebenen desselben Punktes von P in Π und Π', so daß wir zwei kollineare Ebenenräume haben, und erweitern wir sie nach Nr. 493 zu einem Büschel kollinearer Ebenenräume; entsprechende Ebenen bilden immer einen Büschel: um einen Strahl des tetraedralen Komplexes, der zu Γ gehört; und es entsteht das Gebüsche projektiver Ebenenbüschel, das sich auf jenen Büschel stützt. Die Elemente des Tetraeders sind in allen diesen Räumen sich selbst entsprechend; jeder dieser Räume wird zum Punktraum P korrelativ, und zwar entsteht wegen des Tetraeders, das stets Polartetraeder ist, ein Polarraum. Wir erhalten so einen Büschel $\mathfrak{B}$ von Polarräumen, und die zu demselben Punkt gehörigen Polarebenen bilden einen Büschel: je um einen Komplexstrahl, die dem Punkte gemeinsam konjugierte Gerade.

Fällt ein Punkt auf beide Polarebenen in Π und Π', so fällt er auf den Komplexstrahl, in dem sie sich schneiden, und auf alle Polarebenen; d. h. liegt ein Punkt auf den Basisflächen von Π und Π', so liegt er auf allen Basisflächen der Polarräume; diese Basisflächen bilden also einen Büschel mit einer gemeinsamen Grundkurve 4. Ordnung r^4, der ebenfalls $\mathfrak{B}$ heiße.

Der vierte harmonische Punkt zu jedem Punkte dieser Grundkurve, auf der Gerade nach einer Ecke des Tetraeders, in bezug auf diese Ecke und die gemeinsam polare Gegenebene, ist ebenfalls allen Basisflächen gemeinsam, also auch auf der Grundkurve gelegen. Diese ∞^1 aus jeder Ecke kommenden Doppelsekanten der r^4 erfüllen einen zum Büschel der Flächen gehörigen Kegel 2. Grades. So erweisen sich die Ecken des gemeinsamen Polartetraeders als die Spitzen der vier zum Flächenbüschel gehörigen Kegel.

In den projektiven Ebenenbüscheln um die Strahlen des Komplexes sind entsprechend die Polarebenen der verschiedenen Punkte von P je in bezug auf dieselbe Fläche oder in demselben Polarraume von $\mathfrak{B}$; nach jeder Ecke des Tetraeders gehen entsprechende Ecken der Polarebenen in bezug auf den betreffenden Kegel. Der Polarraum, dessen Basis ein Kegel 2. Grades ist, artet so aus, daß die Polarebenen der beliebigen Punkte in die Spitze zusammenlaufen.

Durchläuft der Pol in P eine Gerade g, so beschreibt der zugehörige Komplexstrahl eine Regelschar ρ_1, erzeugt durch zwei projektive Ebenenbüschel der Polarebenen in Π und Π'; sie geht durch die Ecken des Tetraeders wegen der Punkte der Gerade g in den Ebenen desselben. Enthält die Gerade g eine Ecke, so werden die beiden Ebenenbüschel perspektiv, und die Komplexstrahlen erzeugen einen Strahlenbüschel, dessen Ebene durch diese Ecke geht, während der Scheitel in der Gegenebene liegt, im Schnittpunkte der Axen, der beiden Polaren von g. Aus allen diesen Komplexstrahlen wird die Ecke durch die nämliche Ebene projiziert, d. h. alle Punkte durch die Spitze eines Kegels 2. Grades haben dieselbe Polarebene in bezug auf ihn; wie das ja auch aus der Übertragung der Polareigenschaften des Kegelschnittes auf den Kegel folgt.

Die zu einer Gerade g gehörige Regelschar ρ_1 der Komplexstrahlen oder der Geraden, welche den Punkten von g gemeinsam konjugiert sind in Π und Π' und allen Polarräumen des Büschels, hat zur Leitschar die Regelschar der Polaren der g in diesen Polarräumen. Denn in ihnen schneiden sich die zu den Polarebenen-Büscheln der Punkte der g gehörigen Polarebenen je aus demselben Polarraume.

Die Polarebenen-Büschel für drei Punkte erzeugen den Ort der Pole der Ebene E der drei Punkte, eine kubische Raumkurve. Jene Regelschar der Polaren einer Gerade g und diese kubische Raumkurve der Pole einer Ebene E sind, wenn die Polare und der Pol aus einem der kollinearen Räume genommen werden, also Polare von g und Pol von E in einem der Polarräume, durch die entsprechenden Elemente in allen gebildet (Nr. 494).

Ein Punkt liegt auf einer seiner Polarebenen, also auf einer Fläche des Büschels.

Die beiden Polaren von g, welche von g getroffen werden, die drei Punkte der kubischen Raumkurve in E beweisen, daß zwei Flächen des Büschels eine Gerade und drei eine Ebene berühren.

Betrachten wir nunmehr die Punkträume der Pole der Ebenen von P in Π und Π′ und erweitern sie zu einer Schar kollinearer Punkträume, nach Nr. 496; entsprechende Punkte erfüllen dann eine Gerade, ebenfalls einen Strahl des zu Γ gehörigen tetraedralen Komplexes; den Ebenen von P zugeordnet, führen sie zu einer Schar 𝔖 von Polarräumen, ebenfalls alle mit dem Tetraeder des Komplexes als gemeinsamem Polartetraeder, und zu einer Schar 𝔖 von Flächen 2. Grades, den Basisflächen; denn, wenn eine Ebene durch zwei Pole geht, so enthält sie deren Verbindungslinie und alle Pole, berührt alle Basisflächen; sie haben also einen gemeinsam umgeschriebenen Torsus 4. Klasse τ^4. Die Pole einer Ebene in dieser Schar von Polarräumen erfüllen eine Gerade, die ihr gemeinsam konjugiert ist; woraus dann wiederum für eine Gerade g zwei verbundene Regelscharen sich ergeben: die eine ρ_2 gebildet durch die Geraden der Pole der Ebenen durch g oder der diesen Ebenen gemeinsam konjugierten Geraden, die andere durch die Polaren der g in den einzelnen Polarräumen, und für einen Punkt der Torsus 3. Klasse seiner Polarebenen.

Eine Ebene wird von einer Fläche der Schar berührt, eine Gerade von zwei und durch einen Punkt gehen drei.

Durch jede Schnittlinie einer Ebene des Torsus 4. Klasse und einer der Tetraederebenen geht eine zweite Ebene des Torsus, harmonisch von ihr getrennt durch die Tetraederebene und die Gegenecke, ihren gemeinsamen Pol. Diese Linien umhüllen daher einen Kegelschnitt, der als ausgeartete Fläche 2. Klasse (Inbegriff seiner ∞^2 Tangentialebenen) zur Schar gehört: wir haben den Kegeln des Büschels entsprechend die vier Kegelschnitte der Schar, in den Ebenen des gemeinsamen Polartetraeders gelegen. Und der Polarraum in bezug auf eine solche Fläche 2. Grades artet so aus, daß je alle Ebenen durch dieselbe Gerade der Ebene des Kegelschnittes denselben Pol haben, den Pol dieser Gerade in bezug auf die Kurve.

Bei beiden Ausartungen der Fläche 2. Grades haben sich die verbundenen Regelscharen vereinigt, beim Kegel in die Schar oder Reihe der Kanten, beim Kegelschnitt in die Schar oder den Büschel der Tangenten. Wir wissen, wenn projektive Ebenenbüschel oder Punktreihen sich schneidende Träger bekommen, so entstehen diese Ausartungen.

Die Involution, in welcher ein Flächenbüschel 2. Ordnung von einer Gerade geschnitten wird, ergibt sich unmittelbar aus der Eigenschaft, daß durch einen Punkt eine Fläche des

Büschels geht, und ist uns schon aus Nr. 168 bekannt; aber wir wollen sie auch aus der jetzigen Entstehungsweise des Büschels ableiten. Die Büschel um die Polaren einer Gerade g in den Polarräumen des Büschels, welche eine Regelschar bilden, sind projektiv, indem solche Ebenen in ihnen zugeordnet sind, welche nach derselben Gerade der verbundenen Regelschar ρ_1 gehen; das sind je die Polarebenen desjenigen Punktes auf g, welchem diese Gerade gemeinsam konjugiert ist. Schneiden wir diese Ebenenbüschel mit der Polreihe auf g, zu der sie alle projektiv sind, so entstehen je konjektive Punktreihen, deren Koinzidenzenpaare eine Involution bilden (Nr. 114), die Schnittinvolution der g mit den Basisflächen.

Ebenso bilden die von einer Gerade an die Flächen einer Schar 2. Klasse gelegten Tangentialebenen eine Involution. Dagegen bilden diese Tangentialebenen-Paare bei einem Büschel eine involutorische Korrespondenz [3], weil jede Ebene von g drei Flächen berührt und an jede derselben noch eine zweite Berührungsebene durch g geht. Bei einer Kante des gemeinsamen Polartetraeders ergibt sich wiederum eine Involution, weil zwei der „Berührungen" Geradenpaar-Schnitte mit Kegeln sind, und nur eine Fläche im eigentlichen Sinne berührt wird. Dual wird eine Schar von einer Tetraederkante in einer Involution geschnitten.

Ein Büschel wird von einer Ebene in einem Kegelschnitt-Büschel geschnitten, aber die Tangentialkegel aus einem Punkte bilden nicht einen Büschel; durch jeden Strahl des Bündels gehen zwei, jede Ebene desselben wird von drei Kegeln berührt. Nur bei den Ecken des Polartetraeders ergibt sich ein Büschel; die vier gemeinsamen Kanten gehen nach den Begegnungspunkten der Grundkurve r^4 mit der gegenüberliegenden Ebene, in denen sie diese Kurve und alle Flächen des Büschels tangieren.

Und ebenso entstehen, während von jedem Punkte eine Schar von Tangentialkegeln an eine Schar von Flächen 2. Grades kommt, nur in den Ebenen des Tetraeders Scharen von Kegelschnitten.

Wir haben hier ein interessantes Beispiel für einen 550
Büschel kollinearer Ebenenräume $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots$ und eine Schar kollinearer Punkträume $\Sigma_1, \Sigma_1', \Sigma_1'', \ldots$, die zueinander gehören; wie sie in Nr. 493 und 496 betrachtet wurden. Jene werden gebildet durch die Polarebenen aller Punkte eines festen Raumes P in bezug auf die Polarräume von $\mathfrak{B}$, diese durch die Pole aller Ebenen von P in bezug auf die Polarräume von $\mathfrak{S}$, die von jenen verschieden sind; nur Π und Π' gehören zu beiden.

Die Kollineation Γ führt zu einem tetraedralen Komplexe; in jedem Strahle desselben schneiden sich Polarebenen, in Π und Π', eines und desselben Punktes, und er verbindet Pole einer und derselben Ebene.

Die Polarebenen eines Punktes O in bezug auf die sämtlichen Polarräume von $\mathfrak{B}$ gehen also durch die nämliche Gerade, einen Strahl des Komplexes. Die Pole einer Ebene ω in bezug auf die sämtlichen Polarräume von $\mathfrak{S}$ liegen auf einer Gerade, ebenfalls einem Strahle des Komplexes. Also bilden in der Tat die Polareben-Räume in bezug auf die Polarräume von $\mathfrak{B}$ den Büschel kollinearer Räume, der zum Komplexe gehört; entsprechend sind je die Polarebenen des nämlichen Punktes. Und die Pole-Räume in bezug auf die Polarräume von $\mathfrak{S}$ bilden die Schar kollinearer Räume.

Es muß auch folgendes stattfinden. Wir greifen aus dem Büschel $\mathfrak{B}$ irgend zwei Polarräume Π_1, Π_2 heraus; dann muß es (Nr. 496) in der Schar $\mathfrak{S}$ zwei Polarräume geben, die genau zu derselben Kollineation führen wie sie. In der Tat, es seien, zu einem Punkte O (von P), π_1, π_2 die Polarebenen in Π_1, Π_2 und π, π' diejenigen in Π, Π'; alle vier gehen durch die nämliche Gerade g, einen Komplexstrahl. Infolgedessen gehen die Polaren p, p' von g in Π, Π' durch O, und die Pole von π_1 sowohl wie von π_2, ebenfalls in Π, Π', liegen auf p, p', in von O verschiedenen Punkten. In bezug auf die Polarräume von $\mathfrak{S}$, zu denen Π und Π' gehören, hat die Ebene π_1 eine Polgerade p_1, den Ort der Pole; sie liegt in der Ebene pp', weil sie die auf diesen Geraden p, p' gelegenen Pole in Π und Π' verbindet; und ebenso liegt die Polgerade p_2 von π_2 in der genannten Ebene. Ihr gemeinsamer Punkt sei $\mathfrak{O}$. Dann gehört zu diesem $\mathfrak{O}$ als Punkt von p_1 ein Polarraum $\Pi_{1,1}$ in $\mathfrak{S}$, für den er Pol von π_1 ist, und ebenso ein Polarraum $\Pi_{2,1}$, für den er Pol von π_2 ist. Die Kollineation $\Gamma_{12,1}$, welche durch diese beiden Polarräume $\Pi_{1,1}$ und $\Pi_{2,1}$ bewirkt wird, ist identisch mit derjenigen Γ_{12}, die bei Π_1, Π_2 sich ergibt; denn sie stimmen im Koinzidenztetraeder überein, weil das gemeinsame Polartetraeder aller Polarräume von $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{S}$ Koinzidenztetraeder für alle derartigen Kollineationen ist, die bei zwei Polarräumen von $\mathfrak{B}$ oder von $\mathfrak{S}$ sich ergeben, und außerdem in den beiden entsprechenden Ebenen π_1, π_2, Polarebenen desselben Punktes O in Π_1 und Π_2 und desselben Punktes $\mathfrak{O}$ in $\Pi_{1,1}$ und $\Pi_{2,1}$.

Wir halten nun Π_1 fest, während Π_2 den Büschel $\mathfrak{B}$ durchläuft; mit O, der auch festgehalten wird, bleiben fest g, p, p', π_1 und p_1; dagegen π_2 dreht sich um g und ihre Pole in Π, Π' bewegen sich projektiv auf p, p'; also umhüllt die Polgerade p_2 einen Kegelschnitt, welcher p, p', p_1 tangiert, p_1 wird Polgerade, wenn π_2 durch π_1 geht, p', p werden es, wenn π_2 durch π, π' geht; denn im ersten Falle sind Pole in Π, Π' der O und ein Punkt von p'.

Der Schnittpunkt $\mathfrak{O}$ bewegt sich also auf p_1 projektiv zu den Reihen der Pole auf p und p', also projektiv zu π_2.

Dem auf p_1 beweglichen $\mathfrak{O}$ als Pol von π_1, zu der in bezug auf $\mathfrak{S}$ die p_1 die Polgerade ist, entspricht ein beweglicher Polarraum $\Pi_{1,1}$ in $\mathfrak{S}$.

Es sei $\bar{p}_2$ eine bestimmte Lage von p_2, $\bar{\pi}_2$ die zugehörige π_2 und $\bar{\mathfrak{O}}$ der Punkt $p_1\bar{p}_2$. Wenn also π_2 nach $\pi, \pi', \bar{\pi}_2$ kommt, liegt $\mathfrak{O}$ in $p_1p', p_1p, \bar{\mathfrak{O}}$. Zu $\bar{\mathfrak{O}}$, als Punkt der Polgerade $\bar{p}_2$ von $\bar{\pi}_2$ in bezug auf $\mathfrak{S}$, gehört ein gewisser Polarraum $\overline{\Pi}_{2,1}$ von $\mathfrak{S}$, so daß $\bar{\mathfrak{O}}$ Pol von $\bar{\pi}_2$ ist. Der Ort der Pole der beweglichen Ebene π_2 in $\overline{\Pi}_{2,1}$ ist die Gerade p_1, weil, wenn π_2 in π_1 zu liegen kommt, der Pol auf die Polgerade p_1 von π_1 fällt und, wenn in $\bar{\pi}_2$, in $\bar{\mathfrak{O}}$. Ferner π_2 und ihr Pol in $\overline{\Pi}_{2,1}$ bewegen sich projektiv, und zwar fällt der Pol in die Punkte $p_1p', p_1p, \bar{\mathfrak{O}}$, wenn π_2 nach $\pi, \pi', \bar{\pi}_2$ kommt.

Wir erhalten zwei übereinstimmende Projektivitäten zwischen der Punktreihe auf p_1 und dem Büschel der π_2.

Der Pol der beweglichen π_2 in bezug auf diese feste $\overline{\Pi}_{2,1}$ fällt also immer in den Schnittpunkt $\mathfrak{O}$ der festen p_1 mit der zu π_2 gehörigen p_2. D. h. zu diesem $\mathfrak{O} = (p_1, p_2)$ als Pol von π_2 gehört eine feste $\Pi_{2,1}$. Und wir haben, entsprechend dem Ergebnis von Nr. 496:

Zu zwei Polarräumen Π_1, Π_2 von $\mathfrak{B}$ gehören immer zwei Polarräume $\Pi_{1,1}, \Pi_{2,1}$ von $\mathfrak{S}$, derartig, daß die zugehörigen Kollineationen Γ_{12} und $\Gamma_{12,1}$ identisch sind; wird dort Π_1 festgehalten, Π_2 bewegt, so bleibt gerade hier $\Pi_{2,1}$ fest, während $\Pi_{1,1}$ sich ändert.

In bezug auf den tetraedralen Komplex und die zugehörigen Kollineationen können die ursprünglichen Polarräume Π, Π' durch irgend zwei andere aus $\mathfrak{B}$ oder aus $\mathfrak{S}$ ersetzt werden. Tut man ersteres, so bleibt $\mathfrak{B}$, aber $\mathfrak{S}$ ändert sich; und zu der Kollineation Γ, die aus jenen Polarräumen Π_1, Π_2 von $\mathfrak{B}$ entsteht, muß es ein Paar von Polarräumen der neuen Schar geben, deren Kollineation mit ihr identisch ist. Das ist möglich. Denn zu jeder Kollineation Γ gibt es ∞^3 Paare von Polarräumen, deren Produkt sie ist; den einen von ihnen Π_1 kann man, wofern er nur das Koinzidenztetraeder von Γ zum Polartetraeder hat, sonst beliebig, also in ∞^3 Weisen annehmen. Dann ist das Produkt $\Gamma\Pi_1$ auch ein Polarraum, weil jenes Tetraeder wiederum Polartetrader wird; aus $\Gamma\Pi_1 = \Pi_2$ folgt aber: $\Gamma = \Pi_2\Pi_1$; ebenso ist, wenn $\Pi_1\Gamma = \Pi_2$ ist, $\Gamma = \Pi_1\Pi_2$.

In speziellen Fällen kann die zu zwei Polarräumen Π, Π' gehörige 551
Kollineation eine solche sein, die nicht bloß ein Koinzidenztetraeder hat, also eine Homologie oder eine Kollineation mit Axen. In jenem Falle haben wir erstens das Zentrum S und die Ebene σ der Homologie als Pol und Polarebene, die den beiden Polarräumen gemeinsam sind. Ferner aber ist jeder Punkt in σ sich selbst entsprechend, hat für beide Polarräume dieselbe Polarebene, die dann eine sich selbst entsprechende Ebene ist und durch S geht. Folglich ist beiden Polarräumen das Polarfeld in σ, der Polarbündel um S gemeinsam; d. h. die beiden Basisflächen tangieren sich längs

der Basiskurve des Feldes mit dem Basiskegel des Bündels als zugehörigem Berührungskegel.

Im andern Falle einer Kollineation mit Axen u, v hat jeder Punkt auf einer von diesen eine Ebene durch die andere zur gemeinsamen Polarebene in beiden Polarräumen; die Involutionen konjugierter Elemente auf den Axen und um die Axen, die einen zu den andern perspektiv, weil die Axen polar sind, sind gemeinsam, und die Doppelelemente dieser Involutionen sind die Ecken und Ebenen eines Vierseits, in welchem die beiden Basisflächen sich durchschneiden.

In beiden Fällen sind der Büschel und die Schar, welche durch diese Flächen konstituiert werden, identisch, und wir haben eine Büschel-Schar von Polarräumen.

§ 84. Metrische, insbesondere fokale Eigenschaften des Polarraums.

552 Der Pol der unendlich fernen Ebene in einem Polarraum ist sein Mittelpunkt M; Polarstrahl und Polarebene im Polarbündel um denselben, dessen Basiskegel der Asymptotenkegel ist, heißen im Polarraume (oder in bezug auf seine Basisfläche) Durchmesser und Durchmesser-Ebene, welche konjugiert sind; letztere ist Polarebene des unendlich fernen Punktes des ersteren und dieser die Polare der unendlich fernen Gerade der Ebene. Ein Polardreikant des Polarbündels (M) wird durch drei konjugierte Durchmesser und drei konjugierte Durchmesser-Ebenen gebildet. Die unendlich ferne Ebene vervollständigt es zu einem Polartetraeder.

Beim Ellipsoid ist M ein innerer Punkt, alle Durchmesser und Durchmesser-Ebenen schneiden reell und letztere in Ellipsen. Die reellen unendlich fernen Schnitte der Hyperboloide treffen von den drei unendlich fernen Kanten eines solchen Polartetraeders zwei reell, die dritte imaginär. Beim einmanteligen Hyperboloid, als einer hyperbolischen Fläche, verhalten sich die Gegenkanten ebenso; also treffen von drei konjugierten Durchmessern zwei reell, der dritte imaginär; in einer der drei verbindenden Ebenen befindet sich eine Ellipse, in den andern Hyperbeln. Beim zweimanteligen Hyperboloide schneidet von drei konjugierten Durchmessern nur einer reell; denn von den drei Kanten eines Polartetraeders einer elliptischen Fläche, die von einer äußeren Ecke ausgehen, trägt nur eine eine hyperbolische Involution konjugierter Punkte. Von den verbindenden Ebenen schneiden zwei in Hyperbeln, die dritte in einer reell-imaginären Kurve.

Dies gilt insbesondere für die drei Axen und Hauptebenen, welche das dreirechtwinklige Polardreikant des Polarbündels von M bilden. Dieses Dreikant ist gemeinsam dem Polarbündel (M) und dem konzentrischen orthogonalen Polarbündel; also gehen die Axen nach den Ecken des Diagonaldreiecks der Schnittpunkte der unendlich fernen Kurve der Basisfläche und der absoluten Kurve.

Ein ausgeschnittenes Polarfeld mit rechtwinkliger Durchmesser-Involution, Kreis, muß in einer Ebene liegen, die auf der unendlich fernen Gerade eine beiden Kurven gemeinsame Involution konjugierter Punkte trägt, also ist dieselbe eine der sechs gemeinsamen Sekanten der beiden Kurven, von denen nur zwei reell sind. Es gibt also sechs Büschel von Parallelebenen, davon zwei reelle, welche den Polarraum in solchen Polarfeldern, die Basisfläche in Kreisen schneiden. Zu jeder Axe sind zwei dieser Büschel parallel, die reellen zur selben Axe. Die durch M gehenden Ebenen aus diesen Büscheln sind die zyklischen Ebenen des Polarbündels (M) oder des Asymptotenkegels, denn Fläche und Kegel werden je in Kurven mit denselben unendlich fernen Punkten geschnitten.

Für jeden Schnitt, dessen Ebene durch eine Axe geht, ist diese die eine Axe, die andere befindet sich in der gegenüberliegenden Hauptebene. Daraus folgt, daß beim Ellipsoid die reellen Kreisschnitt-Ebenen zur mittleren, beim einmanteligen Hyperboloid zur größeren reell schneidenden Axe, beim zweimanteligen zu derjenigen imaginär schneidenden Axe parallel sind, deren Halbaxen-Quadrat das absolut größere ist; denn bei einer Hyperbel ist von allen positiven, bzw. negativen Halbmesser-Quadraten das der Axe mit solchem Quadrate das absolut kleinste.

Tangentialebenen, die zu jenen Büscheln gehören, schneiden in einem Geradenpaare von isotropen Geraden; die Berührungspunkte nennt man Nabel- oder Kreispunkte der Fläche. Eine hyperbolische Fläche, deren Berührungsebenen reelle Geradenpaare ausschneiden, kann keine reellen Nabelpunkte besitzen; in der Tat gehen durch jene reellen gemeinsamen Sekanten keine Berührungsebenen, weil ihre Polaren, auf denen die Berührungspunkte liegen, ebenso imaginär schneiden wie sie. Dagegen bei einer elliptischen Fläche verhalten sich diese Polaren ungleichartig. Die Büschel enthalten je zwei reelle Berührungsebenen, die Fläche also vier reelle Nabelpunkte, auf der Hauptebene gelegen, welche der oben beschriebenen Axe, zu der die reellen Kreisschnitt-Ebenen parallel sind, gegenüberliegt.

Die reell-imaginäre Fläche 2. Grades hat ebenfalls ∞^3 reelle Tripel konjugierter Durchmesser, je mit drei negativen Halbmesser-Quadraten, ein Axentripel und zwei reelle Büschel von Kreisschnitt-Ebenen, freilich mit imaginären Kreisen; sie sind, wenn hinsichtlich der Halbaxen-Quadrate gilt: $-a^2 > -b^2 > -c^2$, der mittleren Axe parallel, da ja die Kurve $(-a^2, -c^2)$ ein mit $-b^2$ gleiches Halbmesser-Quadrat hat.

553 Wir betrachten jetzt die Geraden, welche zu ihren polaren Geraden normal sind. Jede solche Gerade muß die Gerade treffen, die der Polare ihres unendlich fernen Punktes im absoluten Polarfelde im Polarraume entspricht. Diese Geraden beschreiben um den Mittelpunkt einen Bündel, der zum Punktfelde der unendlich fernen Ebene kollinear wird; und es entsteht durch die gesuchten Geraden nach Nr. 389 ein tetraedraler Komplex. Das zugehörige Tetraeder ist das der Hauptebenen und der unendlich fernen Ebene; man erkennt auch unmittelbar, daß alle Geraden in diesen Ebenen und durch die Ecken zu ihren Polaren normal sind; zu einer unendlich fernen Gerade ist jede endliche normal.

Jede Axe eines aus dem Polarraume geschnittenen Polarfeldes gehört zu diesen Geraden; denn zu ihr polar ist die Parallele aus dem Pol der Ebene zu der andern Axe, und ebenso jede Axe eines Polarbündels des Polarraums; polar ist der Schnitt der gegenüberliegenden Hauptebene des Bündels mit der Polarebene des Scheitels. Und umgekehrt, jede Gerade des Komplexes ist eine Axe von beiden Arten. Das Polarfeld, von dem sie Axe ist, liegt in der Ebene, die durch sie parallel zur normalen Polare geht; der Polarbündel, in welchem sie Axe ist, gehört zu ihrem Schnitte mit der Ebene, welche durch diese Polare senkrecht zu ihr gelegt ist. Daher werden diese ∞^3 Geraden oft die Axen des Polarraums oder der Basisfläche genannt[1]); dann ist freilich notwendig, die Axen des Polarbündels aus dem Mittelpunkte Hauptaxen zu nennen.

Ferner gehören die Normalen der Fläche zu diesem Axenkomplexe; denn die Polare muß ja in der zugehörigen Berührungsebene liegen.

Durch die einander zugeordneten normalen Polaren entsteht im Komplexe eine involutorische eindeutige Korrespondenz, in welcher jedem Komplexkegel die Komplexkurve der Polarebene seines Scheitels entspricht.

554 Jede der drei Hauptebenen α, β, γ des Polarraums trägt ein fokales Polarfeld, zu dem wir in folgender Weise gelangen.[2])

Es sei q eine Gerade in einer von ihnen, in α, und π eine Ebene durch sie, p das Lot aus dem Pole P auf dieselbe, also die zu ihr rechtwinklige und konjugierte Gerade, offenbar eine Gerade des eben beschriebenen Komplexes, da ihre Polare in π liegt. Diese Geraden p beschreiben einen Strahlenbüschel mit dem Scheitel Q in α. Denn die Pole P der π und die unendlich fernen Punkte P'_∞ in senk-

---

1) Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., Abt. II, 15. Vortrag; Liniengeom., Bd. I, Nr. 275.

2) Reye, a. a. O., 16. Vortrag.

rechter Richtung zu ihnen erzeugen perspektive Punktreihen mit dem Pole A_∞ von α (auf a) als sich selbst entsprechendem Punkt. Daß das Perspektivitätszentrum Q in α liegt, zeigt die zu α in q senkrechte Ebene π. Die Ebene des Strahlenbüschels steht senkrecht zu α; denn sie enthält die Polare von q. Umgekehrt, von einem Punkte Q von α geht an den obigen Komplex ein Kegel 2. Grades, der in einen in α gelegenen Strahlenbüschel und einen zweiten (Q, λ) zerfällt, dessen Ebene nach A_∞ geht, also senkrecht zu α ist (Nr. 239). Zu jedem Strahle p dieses Büschels ist die Polare p' rechtwinklig, und es geht durch sie eine Ebene π, die auf p normal ist und für welche p, die den Pol enthält, die rechtwinklige und konjugierte Gerade ist; diese Ebenen π gehen alle durch dieselbe Gerade q von α, die Verbindungslinie des Pols von λ und des Punktes, der in senkrechter Richtung zu λ unendlich fern ist, beide in α gelegen. So haben wir umgekehrt zu einem Punkte Q von α die Gerade q.

Eine einzige schräge Ebene π durch q liefert schon den korrespondierenden Punkt Q. Läuft also q in einem Strahlenbüschel Q' in α, so wollen wir diejenigen Ebenen π nehmen, welche durch eine vom Scheitel Q' kommende Gerade l gehen. Die Punkte P und P'_∞ beschreiben nun projektive Punktreihen auf windschiefen Geraden, die p also eine Regelschar, von welcher jedoch eine Gerade in α liegt, herrührend von der zu α normalen Ebene des Büschels l, daher bilden die Spuren der p in α eine Gerade der Leitschar; Q bewegt sich also ebenfalls linear, wenn q es tut. Und es liegt Korrelation zwischen q und Q vor.

Eine Ebene π und die zu ihr rechtwinklige und konjugierte Gerade p schneiden in jede der Hauptebenen α, β, γ entsprechende Elemente einer Korrelation ein. Ihre Schnitte mit der unendlich fernen Ebene sind ersichtlich polare Elemente des absoluten Polarfeldes; aber auch jene Korrelationen sind Polarfelder. Denn jeder Polarbündel des Polarraums besitzt ein dreirechtwinkliges Polardreikant, seine Axen, und jede von ihnen ist die rechtwinklige und konjugierte Gerade für die Ebene der beiden andern; folglich ist der Schnitt mit einer Hauptebene ein Polardreieck der betreffenden Korrelation und diese ein Polarfeld.

Jede der drei Hauptebenen trägt also ein Polarfeld, von dem entsprechende Elemente herrühren von irgend einer Ebene und der zu ihr rechtwinkligen und konjugierten Gerade. Polardreiecke entstehen durch die dreirechtwinkligen Polardreikante der Polarbündel des Polarraums. Wir nennen sie fokale Polarfelder (α), (β), (γ).

Diejenigen der Polarbündel um die unendlich fernen Punkte der (Haupt-)Axen liefern in die Hauptebene, welche der Axe gegenüberliegt, ein Polardreieck, das aus ihren beiden Axen und der unendlich fernen Gerade besteht; so daß **die Axen auch Axen des Polarfeldes sind.**

Es sei π eine Ebene durch den Mittelpunkt M, welche α, β, γ in q, r, s schneide; die rechtwinklige und konjugierte Gerade p aus dem Pole P schneidet die Pole Q, R, S der fokalen Polarfelder ein, und $M(Q, R, S)$ sind in ihnen konjugiert zu q, r, s. Die Ebene Mp ist rechtwinklig zu π, enthält P und MP, den Polarstrahl von π im Polarbündel (M) des Asymptotenkegels, ist also rechtwinklig und konjugiert zu π; daher sind q und MQ, r und MR, s und MS gepaart in den Fokalinvolutionen (in α, β, γ) des Polarbündels (M).

Die Involutionen konjugierter Strahlen um M in den fokalen Polarfeldern $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ sind identisch mit den Fokalinvolutionen des Polarbündels (M) in seinen Hauptebenen α, β, γ. Ebenso sind die Involutionen konjugierter Strahlen um A_∞ in $(\beta), (\gamma)$ die Fokalinvolutionen des Polarbündels (A_∞) in diesen seinen endlichen Hauptebenen, und ähnliches gilt für $(B_\infty), (C_\infty)$.

555 **Die Halbaxen-Quadrate auf a, b, c seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und zwar so, daß $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}$.**

Die Potenz der Durchmesserinvolution der Kurve $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, bezogen auf die Axe a und in Tangenten geschrieben, ist $-\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ (Nr. 317); sie ist zugleich die Potenz der damit identischen Involution konjugierter Strahlen in der Ebene γ für den Polarbündel (M); daher sind die Potenzen der Involutionen konjugierter Strahlen dieses Bündels in den Ebenen α, β, γ, bezogen auf die Axe b, c, a bzw.: $-\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}, -\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}, -\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, also beim Ellipsoid und der reell-imaginären Fläche alle drei negativ, der Asymptotenkegel, wie notwendig, imaginär und seine homogenen Halbaxen-Quadrate $-\mathfrak{a}, -\mathfrak{b}, -\mathfrak{c}$, bzw. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ (Nr. 343). Die Ebene $ac = \beta$ des algebraisch größten und des algebraisch kleinsten enthält die hyperbolische Fokalinvolution von (M).

Beim einmanteligen Hyperboloide, wo $\mathfrak{c} < 0$ ist, sind die beiden ersteren Potenzen positiv, also schneiden α, β den Asymptotenkegel reell; die Tangenten der halben Asymptotenwinkel der Hyperbeln $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}), (\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$ in α, β sind $\sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{-\mathfrak{c}}}, \sqrt{\frac{\mathfrak{a}}{-\mathfrak{c}}}$, also ist die Öffnung des Kegels, dessen Kanten die Asymptoten sind, in β größer; diese Ebene enthält (Nr. 343) die hyperbolische Fokalinvolution. Beim zweimanteligen Hyperboloide, wo $\mathfrak{a} > 0 > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}$, sind in β und γ die Potenzen positiv; die Tangenten der halben Asymptotenwinkel sind[1]) $\sqrt{\frac{-\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}}$,

1) Jedesmal sind solche Asymptotenwinkel gemeint, welche die **innere** Axe $\mathfrak{c}$, bzw. $\mathfrak{a}$ des Kegels einschließen.

$\sqrt{\frac{-\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}$, also ist ebenfalls in β die Öffnung die größere. In allen vier Fällen enthält die Ebene β der Axen, deren Halbaxen-Quadrate algebraisch am größten und am kleinsten sind, die reellen Fokalstrahlen des Asymptotenkegels.

Der Polarbündel aus A_∞ projiziert das Polarfeld ($\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) in α; dessen reelle Brennpunkte liegen auf b, also die reellen Fokalstrahlen des Bündels, die nach ihnen gehen, in γ. Demnach erhalten die fokalen Polarfelder (β), (γ) aus A_∞ elliptische, hyperbolische Involutionen konjugierter Strahlen, ebenso die (α), (γ) aus B_∞ und die (α), (β) aus C_∞.

Jetzt wissen wir in jeder der drei Hauptebenen in bezug auf das fokale Polarfeld Bescheid über die Involutionen konjugierter Strahlen um die Ecken des Polardreiecks der Axen und der unendlich fernen Gerade.

	M	A_∞	B_∞	C_∞
(α)	ell.		ell.	ell.
(β)	hyp.	ell.		hyp.
(γ)	ell.	hyp.	hyp.	

Also ist die Basiskurve, Fokalkurve, in α eine reell-imaginäre, in β eine Hyperbel, in γ eine Ellipse.

F sei ein Brennpunkt der Hauptkurve in γ, und q und q' zwei rechtwinklige Strahlen durch ihn, also konjugiert in bezug auf diese Kurve; die Polare $\mathfrak{q}$ von q im Polarraume steht im Pole, der auf q' liegt, auf γ senkrecht. Der Pol einer beliebigen Ebene π durch q liegt auf $\mathfrak{q}$, und das Lot aus ihm auf π trifft, weil q' zu q normal ist, die q', also liegt der Pol von q im fokalen Polarfelde (γ) auf q', und q und q' sind auch in diesem konjugiert.

Die fokalen Polarfelder haben mithin die nämlichen Brennpunkte wie diejenigen, die durch den Polarraum in ihren Ebenen hervorgerufen werden, die Fokalkurven sind mit den Hauptkurven konfokal.

Die Fokalinvolutionen, in β, γ, des Polarbündels (A_∞) sind die zu A_∞ gehörigen Involutionen konjugierter Strahlen der Polarfelder (β), (γ), ihre Doppelstrahlen, die Fokalstrahlen, also die Tangenten aus A_∞ an die Fokalkurven (β), (γ); sie berühren auf c, b, demnach in den auf diesen Axen gelegenen Brennpunkten der Hauptkurve in α, durch welche jene Fokalstrahlen gehen. Somit werden die Brennpunkte einer Hauptkurve Scheitel für die nicht in derselben Ebene gelegenen Fokalkurven.

Danach haben die Fokalkurven folgende Halbaxen-Quadrate:

	a	b	c
(α)		$\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$	$\mathfrak{c}-\mathfrak{a}$
(β)	$\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$		$\mathfrak{c}-\mathfrak{b}$
(γ)	$\mathfrak{a}-\mathfrak{c}$	$\mathfrak{b}-\mathfrak{c}$,	

woraus von neuem die Art und die Konfokalität mit den Hauptkurven sich ergibt.

Auf a sind alle vier Brennpunkte reell.

556 Es sei π eine isotrope Berührungsebene der Basisfläche des Polarraums; dann fallen sowohl der Pol P, als Berührungspunkt mit dieser Fläche, wie P'_∞, als Berührungspunkt mit der absoluten Kurve, in sie, also die ganze rechtwinklige und konjugierte Gerade p, folglich sind in jeder der Hauptebenen die Spuren q, Q; r, R; s, S von π, p inzident; d. h. π berührt die drei Fokalkurven. Jede isotrope Berührungsebene der gegebenen Fläche berührt die drei Fokalkurven. Ebenso läßt sich erkennen, daß jede gemeinsame Berührungsebene jener Fläche und einer der Fokalkurven die beiden andern und die absolute Kurve tangiert. So werden wir zu einer Schar von Flächen 2. Grades geführt, konstituiert durch die gegebene Fläche F^2 und die absolute Kurve oder eine der drei Fokalkurven.

Die zu einer Ebene π rechtwinklige und konjugierte Gerade p enthält die Pole in bezug auf F^2 und die vier Kegelschnitte, ist also der Ort der Pole für alle Flächen der Schar, daher rechtwinklig und konjugiert zu π und Axe für alle. Die Flächen der Schar haben also die Hauptebenen, den Axenkomplex und die fokalen Polarfelder und ihre Basiskurven gemeinsam, weshalb sie konfokale Flächen genannt werden.

Die Hauptkurven in derselben Ebene haben dieselben Brennpunkte, nämlich die der Fokalkurve; aus dieser Konfokalität folgt, daß die Halbaxen-Quadrate der andern Flächen $\mathfrak{a}-\lambda$, $\mathfrak{b}-\lambda$, $\mathfrak{c}-\lambda$ sind, und zu $\lambda=\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die drei Fokalkurven gehören; ferner $\lambda<\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}>\lambda>\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}>\lambda>\mathfrak{b}$, $\lambda>\mathfrak{a}$ gehören zu den Ellipsoiden, einmanteligen, zweimanteligen Hyperboloiden, reell-imaginären Flächen der Schar; und den Übergang bilden die Fokalellipse, die Fokalhyperbel, die reell-imaginäre Fokalkurve. Die Fokalellipse wird von allen Ellipsoiden der Schar eingeschlossen, während die Fokalhyperbel sie reell durchschneidet; ebenso liegt die Fokalhyperbel innerhalb sämtlicher zweimanteligen Hyperboloide, welche von der Fokalellipse reell durchschnitten werden. Die beiden Fokalkurven liegen zu verschiedenen Seiten der einmanteligen Hyperboloide und werden von den betreffenden Hauptkurven ausgeschlossen. Daraus ergibt sich, daß alle Tangentialebenen der Ellipsoide die Fokalhyperbel reell, die Fokalellipse imaginär schneiden und die der zweimanteligen Hyperbolide sich umgekehrt verhalten; denn die Tangentialebenen müssen, wegen des ungleichartigen Verhaltens polarer Geraden bei elliptischen Flächen, die Hauptkurven imaginär schneiden, daher in β, γ die je ungleichartigen konfokalen Fokalkurven reell.

Der Übergang von den einen oder andern Flächen zu den einmanteligen Hyperboloiden durch die Fokalellipse oder Fokalhyperbel führt die Ebenen, welche diese imaginär schneiden, in reell schneidende über, und da keine reelle Tangentialebene einer allgemeinen Fläche der Schar zugleich eine Fokalkurve berührt, so folgt, daß beide reellen Fokalkurven von allen Berührungsebenen der einmanteligen Hyperboloide reell geschnitten werden; dies ergibt sich auch daraus, daß von zwei gleichartigen konfokalen Kegelschnitten derjenige, der den andern einschließt, von jeder Gerade, die diesen reell schneidet, ebenfalls reell geschnitten wird.

Die Involution der Paare der Tangentialebenen aus einer Gerade enthält ein Paar isotroper Ebenen, die Tangentialebenen der absoluten Kurve; daher ist sie hyperbolisch und hat rechtwinklige Doppelebenen. Jede Gerade berührt zwei reelle Flächen der Schar, und die zugehörigen Berührungsebenen sind rechtwinklig, insbesondere die beiden Ebenen, welche zwei Flächen der Schar in einem gemeinsamen Punkte tangieren. Zwei Flächen der Schar schneiden sich in allen Punkten ihrer Schnittkurve rechtwinklig.

Zwei gleichartige Flächen der Schar können sich nicht reell schneiden; denn die (reellen) Hauptkurven der einen umschließen die der andern; daraus läßt sich erkennen, daß in jeder Ebene durch eine Axe dasselbe für die ausgeschnittenen (reellen) Kurven gilt.

Die drei durch einen Punkt gehenden Flächen der Schar sind reell; die Schar der Tangentialkegel aus ihm enthält den isotropen Kegel; daher ist das gemeinsame Polardreiflach reell und dreirechtwinklig: das gemeinsame Axendreikant der Kegel. Seine drei Ebenen tragen die Axen der Ebenenbüschel-Paare, welche in der Schar vorkommen; diese rühren von den durch den Punkt gehenden Flächen der Schar her, und die beiden Ebenenbüschel haben je die Geraden der Fläche zu Axen. Weil die gemeinsamen Berührungsebenen der Kegelschar alle vier imaginär sind, sind diese Ebenenbüschel-Paare reell und gehören zu reellen Flächen, je bestimmt durch die betreffende Ebene des Dreiflachs als Berührungsebene; aber nur eins besteht aus reellen Büscheln und gehört zu dem durch den Punkt gehenden einmanteligen Hyperboloid, die andern zu elliptischen, aber ungleichartigen Flächen, also einem Ellipsoide und einem zweimanteligen Hyperboloide.

Durch jeden Punkt des Raums gehen drei reelle Flächen der Schar konfokaler Fläche und zwar von den drei verschiedenen Arten; sie schneiden sich gegenseitig rechtwinklig, so daß durch die Berührungsebenen und Normalen ein dreirechtwinkliges Dreiflach entsteht.

557 Die Normale der F^2 in einem Punkte P dieser Fläche enthält die Pole der Berührungsebene π in bezug auf die übrigen Flächen der Schar. Sei F'^2 eine von ihnen und P' der zugehörige Pol; so beschreibt derselbe die Polarfläche Φ^2 der F^2 in bezug auf F'^2, und P und P' durchlaufen F^2 und Φ^2 kollinear, weil sie polarkorrelativ in bezug auf F^2 und F'^2 den Berührungsebenen von F^2 zugeordnet sind. So ergibt sich nunmehr die Normalenkongruenz 2. Klasse 6. Ordnung der F^2 als Erzeugnis zweier allgemeiner Flächen 2. Grades in Kollineation, während in Nr. 505 die eine ausgeartet war und wir eine solche ausgeartete Kollineation noch nicht genauer untersucht haben.

Die sämtlichen Normalenkongruenzen erfüllen den allen Flächen der Schar gemeinsamen Axenkomplex.

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß von jedem Punkte einer Fokalkurve an F^2 ein Rotationskegel als Tangentialkegel kommt. Für den Tangentialkegel aus einem beliebigen Punkt P, etwa von γ, sind Axen das Lot auf γ in P und die beiden rechtwinkligen und konjugierten Geraden durch P sowohl in bezug auf die Hauptkurve, als auch (wegen der Konfokalität) in bezug auf die Fokalkurve. Rückt P auf diese, so werden diese letzteren Geraden Tangente und Normale. Zu jeder Ebene π durch die Tangente t geht die rechtwinklige und konjugierte Gerade p durch den Berührungspunkt P, den Pol von t im fokalen Polarfelde. Folglich ist zu jeder Ebene durch t die in t auf ihr senkrechte konjugiert, da sie p und den Pol enthält. So bekommt der Tangentialkegel aus P um seine Axe t eine rechtwinklige Involution konjugierter Ebenen, t ist auch Fokalaxe und der Kegel ein Rotationskegel.[1])

Jede Tangente einer Fokalkurve ist Axe.

Es ergibt sich also eine Büschel-Schar sich doppelt berührender koaxialer Rotationskegel.

Der Tangentialkegel aus P an eine in einen Kegelschnitt ausgeartete Fläche 2. Grades ist der diesen aus P projizierende Kegel.

Heben wir für die reellen Fokalkurven hervor, daß jede von ihnen aus jedem Punkte der andern durch einen Rotationskegel, um die Tangente als Axe, projiziert wird.

Die durch einen Punkt P gehenden Geraden, deren Involutionen konjugierter Ebenen in bezug auf F^2 rechtwinklig sind, haben diese Eigenschaft auch in bezug auf den Tangentialkegel aus P an F^2;

1) Von dieser Eigenschaft der Fokalkurven geht Schröter aus: Oberflächen 2. Ordnung § 61, 62.

weil die Kegel an alle Flächen der Schar selbst eine Schar konfokaler Kegel bilden; da der isotrope Kegel sich unter ihnen befindet, so sind die gesuchten Geraden die gemeinsamen Fokalaxen dieser Schar, zwei reelle und vier imaginäre, die Axen der Ebenenbüschel-Paare in der Kegelschaar, also die sechs Geraden der drei durch den Punkt gehenden konfokalen Flächen.

In eine Ebene fallen zwei, die Geraden der von ihr berührten Fläche der Schar. Sie sind reell, wenn diese Fläche hyperbolisch ist oder die Ebene beide (reellen) Fokalkurven reell schneidet.

Die Geraden, welche in bezug auf eine der konfokalen Flächen und dann in bezug auf alle rechtwinklige Involutionen konjugierter Ebenen tragen, Fokalaxen, sind identisch mit den Geraden der Flächen; sie bilden eine Kongruenz 6. Ordnung und 2. Klasse: die Kongruenz der Schnittlinien der Ebenen des den Flächen gemeinsam umgeschriebenen (imaginären) Torsus 4. Klasse. Zu diesen Geraden gehören die Tangenten der Fokalkurven.

Zwei projektive Punktreihen, welche eine (hyperbolische) Fläche der Schar erzeugen, werden aus einer Fokalaxe durch gleiche und gleichlaufende Ebenenbüschel projiziert; denn eine sich selbst entsprechende Ebene dieser konjektiven Büschel enthält zwei entsprechende Punkte zugleich, also ihre Verbindungslinie, ist daher Tangentialebene der Fläche und zugleich auch derjenigen, welcher die Fokalaxe angehört, und als gemeinsame Berührungsebene von zwei Flächen der Schar eine isotrope Ebene.

In jeder der drei rechtwinkligen Berührungsebenen der durch einen Punkt P gehenden Flächen der Schar sind die Schnittlinien t_1, t_2 mit den andern, als Axen der Kegelschar, zu den beiden Fokalaxen dieser Schar oder den Geraden der die Ebene τ berührenden Fläche F^2 harmonisch, also polar in bezug auf diese Fläche. Seien P_1, P_2 die beiden Nachbarpunkte von P auf t_1, t_2 oder auf den Kurven, in denen F^2 von den beiden andern Flächen geschnitten wird und für welche diese Geraden Tangenten sind, so geht die Tangential- oder Polarebene von P_1 durch t_2. Mithin fallen die Normalen an F^2 in P und P_1 beide in die durch t_1 gehende zu t_2 senkrechte Ebene, welche daher auch zu den beiden in t_2 sich schneidenden Berührungsebenen von P und P_1 normal ist. Jene unendlich nahen Normalen schneiden sich; dadurch aber sind t_1, t_2 als Tangenten der durch P gehenden Krümmungslinien von F^2 charakterisiert.

Jede Fläche der Schar wird von den ungleichartigen Flächen der Schar in den Krümmungslinien geschnitten.

§ 85. Weitere Untersuchung der allgemeinen Korrelation.

558 Wir fanden (Nr. 525) für diese vermittelst der zugehörigen Kollineation, in welcher solche Elemente einander zugeordnet sind, die je in der Korrelation in beiderlei Sinne dem nämlichen Elemente entsprechen, — des Quadrats der Korrelation — daß es vier Paare sich involutorisch entsprechender Elemente gibt; sie seien A, α; B, β; C, γ; D, δ. Daß sie Ecken und Ebenen desselben Tetraeders sind, wurde a. a. O. erkannt. Aber es ist nicht möglich, daß zusammengehörige Elemente durchweg einander gegenüberliegen; denn das würde das Tetraeder zum Polartetraeder, die Korrelation also zu einem Polarraum machen. Demnach muß mindestens einer von den Punkten in seine zugehörige Ebene fallen, etwa A in α. Jedem Strahl des Büschels (A, α), zu Σ gerechnet, entspricht ein Strahl desselben Büschels in Σ', weil A und α sich involutorisch entsprechen; die Projektivität innerhalb (A, α) hat daher zwei Koinzidenzen a_1, a_2. Durchläuft ein Punkt die Gerade a_1, so drehen sich seine beiden Polarebenen um a_1 und erzeugen eine Projektivität; die eine Koinzidenz ist α, die andere lehrt, daß es auf a_1 noch einen zweiten Punkt gibt, der in beiderlei Sinne dieselbe Polarebene hat; es sei dies der B, und ebenso gibt es auf a_2 einen zweiten Punkt D. Die Polarebene β von B geht durch a_1, also durch B und A, diejenige δ von D durch D und A; β und δ sind zwei weitere Ebenen unseres Tetraeders $ABCD$. Die Ebene α geht durch A, B, D, also nicht durch C; folglich müssen β und δ es tun und sind ABC und ADC; für die Polarebene γ von C bleiben die Punkte B, C, D.

Daher bilden die vier Punkte A, B, C, D ein windschiefes Vierseit $ABCD$ und jeder hat die zugehörige Winkelebene DAB, ABC, BCD, CDA zur Polarebene in beiderlei Sinne.

Was für die Seiten DA, AB gefunden wurde, gilt auch für BC, CD: jeder Punkt und jede Ebene einer Seite des Vierseits inzidiert mit dem zugehörigen polaren Elemente. Die vier Seiten des Vierseits liegen folglich auf beiden Kernflächen und bilden deren Durchschnitt, so daß diese Flächen sich in den Ecken berühren. Dies ist analog zu der doppelten Berührung der Kernkurven einer ebenen Korrelation.

Nennen wir $ABCD$ das Kernvierseit der Korrelation.

Die vier Seiten des Vierseits sind sich selbst entsprechend in der Korrelation, die beiden Diagonalen hingegen entsprechen sich involutorisch; in der obigen Kollineation sind sie auch sich selbst entsprechend.

Jeder von den vier Punkten hat jeden Strahl in der zugehörigen Polarebene zum Wechselstrahl, zur Schnittlinie der beiden in ihr vereinigten Polarebenen, jede der vier Ebenen jeden Strahl durch den zugehörigen Punkt zum Wechselstrahl. So zeigt sich, wie die Bündel und die Felder um die Ecken und in den Ebenen des Kernvierseits zum tetraedralen Komplexe der Wechselstrahlen kommen.

In Nr. 523 wurde schon erkannt, wie polare Elemente der Polar- 559
räume der Kernflächen konstruiert werden. In diesen Polarräumen haben wir die reellen Repräsentanten dieser Flächen, wenn sie reell-imaginär sind und dann, weil polar in der Korrelation, beide zugleich.

Im Polarraume (F^2) der Punkt-Kernfläche F^2 ist die Polarebene $\mathfrak{z}$ zu einem Punkte $\mathfrak{Z} \equiv X \equiv Y'$ die vierte harmonische Ebene, der Ebene $\mathfrak{Z}z$ von $\mathfrak{Z}$ nach dem Wechselstrahle z, in dem sich die beiden Polarebenen ξ', η schneiden, in bezug auf diese Ebenen zugeordnet.[1])

Bleiben wir mit $\mathfrak{Z}$ in einer Ebene ρ, so sind $\rho\xi'$, $\rho\eta$ je die beiden Polaren von $\mathfrak{Z}$ in der ebenen Korrelation $[\rho]$, welche durch die räumliche in ρ hervorgerufen wird; die Spur von $\mathfrak{Z}z$ ist der Strahl von ρz nach $\mathfrak{Z}$ und die von $\mathfrak{z}$ der vierte harmonische Strahl, dem eben genannten Strahle in bezug jene Polaren zugeordnet, also die Polare von $\mathfrak{Z}$ im Polarfelde der Punkt-Kernkurve der $[\rho]$ (Nr. 318). Diese ist (Nr. 524) der Schnitt der Ebene ρ mit der Punkt-Kernfläche F^2. Halten wir also $\mathfrak{Z}$ fest und drehen ρ um ihn, so erfüllen wir $\mathfrak{z}$ mit den Polaren von $\mathfrak{Z}$ nach den Schnitten ρF^2; wodurch sie sich als Polarebene von $\mathfrak{Z}$ nach F^2 erweist.

Zeigen wir noch direkt, daß $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{z}$ sich linear bewegen. Die Ebene $\mathfrak{Z}z$ ist (Nr. 526) die Nullebene von $\mathfrak{Z}$ im Nullraume $(\mathfrak{G}^p)$, der zu dem Gewinde $\mathfrak{G}^p$ der Strahlen gehört, welche Involutionen doppelt konjugierter Punkte tragen. Läuft $\mathfrak{Z}$ auf $\mathfrak{x} \equiv l \equiv m'$, so drehen sich ξ', η um die Polaren l', m in der Korrelation und $\mathfrak{Z}z$ um die Polare $\mathfrak{x}_1$ von $\mathfrak{x}$ in jenem Nullraume, also beschreibt z die Regelschar $[l'm\mathfrak{x}_1]$ und $\mathfrak{z}$ dreht sich um diejenige Gerade der Leitschar, welche von $\mathfrak{x}_1$ durch l' und m harmonisch getrennt ist.

Den Punkten einer Gerade gehören Wechselstrahlen zu, welche eine Regelschar bilden; sie ist, durch projektive Ebenenbüschel erzeugt, eine Regelschar ρ_1 des tetraedralen Komplexes der Wechselstrahlen (Nr. 491). In der verbundenen Regelschar befinden sich die beiden Polaren der Gerade in der Korrelation, die Polare in $(\mathfrak{G}^p)$ und die Polare in (F^2), diese von jenen harmonisch getrennt. Die Trägerfläche geht durch die Ecken des Kernvierseits (des Tetraeders); denn für den Punkt der Gerade in einer Ebene dieses Vierseits gehen beide Polarebenen und der Wechselstrahl durch die zugehörige Ecke, den involutorischen Pol.

1) Schröter, Journal f. Mathem. Bd. 77 S. 105.

Bewegt sich $\mathfrak{Z}$ in einer Ebene $\rho \equiv \omega \equiv \pi'$, so beschreiben ξ', η kollineare Bündel um die Pole O', P, und der Wechselstrahl z erzeugt die Doppelsekanten-Kongruenz einer kubischen Raumkurve r^3; dieselbe Kongruenz entsteht durch die kollinearen Bündel der Polarebenen der Punkte der Ebene in $(\mathfrak{S}^p)$ und (F^2), also liegen die Pole von ρ auf r^3 und, wie der Wurf um irgend eine Doppelsekante zeigt, harmonisch zu jenen Polen. Also:

Die Wechselstrahlen, welche zu den Punkten einer Ebene gehören, bilden die Doppelsekanten-Kongruenz einer kubischen Raumkurve r^3, eine $[r_1]$ im tetraedralen Komplexe (Nr. 491); auf dieser Kurve liegen die beiden Pole der Ebene in der Korrelation und diejenigen in $(\mathfrak{S}^p)$ und (F^2), diese zu jenen harmonisch.

Für die Schnittlinie der ρ mit einer Ebene des Kernvierseits gehen alle Wechselstrahlen durch die zugehörige Ecke; die Regelschar wird Kegel, und die Ecke zeigt sich, wie notwendig, als Punkt der r^3.

Wenn $\mathfrak{Z}$ auf F^2 liegt, gehen ξ', η und z durch ihn; aber die Verbindungsebene $\mathfrak{Z}z$, die Nullebene in $(\mathfrak{S}^p)$, ist, trotz der Inzidenz von $\mathfrak{Z}$ und z, bestimmt: vierte harmonische zu der Tangentialebene der F^2 in bezug auf ξ', η. Der Wechselstrahl z berührt F^2 in $\mathfrak{Z}$.

Im Polarraume (Φ_2) ist Pol einer Ebene der Punkt, der auf der Verbindungslinie der beiden Pole der Ebene, ihrem Wechselstrahle, durch diese Pole vom Schnitte mit der Ebene, ihrem Nullpunkte in $(\mathfrak{S}^e)$, harmonisch getrennt wird. Die Wechselstrahlen der Ebenen eines Büschels bilden eine Regelschar — eine ρ_2 —, deren Trägerfläche die Ebenen des Kernvierseits berührt, und diejenigen der Ebenen eines Bündels die Schmiegungsaxen-Kongruenz einer kubischen Raumkurve, welche jene Ebenen oskuliert. Usw.

Der Punkt und die Ebene, welche je zu demselben Wechselstrahl z gehören, bilden eine eindeutige Verwandtschaft mit durchweg inzidenten entsprechenden Elementen; denn (Nr. 526) der Punkt ist der Schnittpunkt der beiden Polaren von z und die Ebene verbindet sie; aber diese Verwandtschaft ist nicht linear, also nicht Nullraum. Läuft der Punkt auf einer Gerade $\mathfrak{r}$, so beschreibt der Wechselstrahl eine Regelschar ρ_1 im Komplexe; die Ebenen, zu denen ihre Geraden als Wechselstrahlen gehören, umhüllen einen Torsus der 3. Klasse. Dies ist derjenige, der den beiden Regelscharen gemeinsam umgeschrieben ist, welche der ρ_1 in der Korrelation entsprechen, außer dem Ebenenbüschel um $\mathfrak{r}$, welche gemeinsame Leitgerade dieser Regelscharen ist. Einer Punktreihe korrespondiert also in dieser Verwandtschaft ein kubischer Torsus, einem Ebenenbüschel eine kubische Raumkurve.

Die beiden Regelscharen ρ_1 und ρ_2 der Wechselstrahlen, welche zu den Punkten und zu den Ebenen einer und derselben Gerade gehören, haben die beiden Polaren derselben in ihren Leitscharen, also selbst zwei Geraden gemeinsam (Nr. 96). Es kommt zweimal vor, daß mit einer gegebenen Gerade zwei entsprechende Elemente dieser Verwandtschaft zugleich inzidieren.

Sehen wir zu, wie die in eine Ebene $\rho \equiv \omega = \pi'$ fallenden 560
Wechselstrahlen entstehen, welche den Komplex-Kegelschnitt des tetraedralen Komplexes umhüllen; derselbe berührt die Spuren der vier Tetraederebenen. Die zugehörigen Ebenen bilden den Büschel um die Verbindunglinie der beiden Pole O', P. Die zugehörigen Punkte hingegen erfüllen eine kubische Raumkurve. Denn die beiden Bündel der einen und der andern Polarebenen der Punkte einer Ebene λ erzeugen die Doppelsekanten-Kongruenz einer kubischen Raumkurve, und da von ihnen drei in ρ zu liegen kommen, so gibt es in der Ebene λ drei Punkte, deren Wechselstrahlen in ρ fallen. Aber diese kubische Raumkurve ist die obige r^3, deren Kongruenz der Doppelsekanten durch die kollinearen Bündel O', P der Polarebenen der Punkte von ρ entsteht. Die Strahlen dieser Bündel sind die Polaren der Geraden in ρ; zwei korrespondierende Strahlen der Bündel, je Polaren derselben Gerade in ρ, geben einen Punkt der Kurve, wenn sie sich schneiden; dann gehen die beiden Polarebenen dieses Schnittpunktes durch die Gerade in ρ und dieselbe wird sein Wechselstrahl.

Die Punkte, deren Wechselstrahlen in ρ fallen, erzeugen die oben beschriebene zur Ebene ρ gehörige kubische Raumkurve.

Von den drei Schnitten der r^3 mit ρ ist einer der Nullpunkt von ρ in $(\mathfrak{G}^p)$; die beiden andern müssen, damit ihre Nullebenen von ρ verschieden seien, auf die zugehörigen Wechselstrahlen fallen und daher auf die Schnittkurve von ρ mit F^2; in der Tat, von den zu den Punkten dieser Kurve gehörigen Wechselstrahlen fallen zwei in ρ. Diese Strahlen sind Schnittlinien entsprechender Berührungsebenen zweier projektiv bezogener Kegel 2. Grades; also erzeugen sie eine Regelfläche 4. Grades, welche von ρ in dem Kegelschnitte ρF^2 und zwei Erzeugenden geschnitten wird. Die beiden Punkte auf ρF^2 sind zugleich die letzten Schnitte von r^3 mit F^2.

Duales gilt für einen Kegel des Komplexes der Wechselstrahlen.

Bewegt sich ein Punkt auf einer Gerade der Punkt-Kernfläche, 561
so dreht sich die eine Polarebene, eine Berührungsebene der Ebenen-Kernfläche, um eine Gerade derselben und die andere Polarebene um eine zweite Gerade. Daraus folgt, daß, wenn die beiden Kernflächen gleichzeitig reell sind, sie auch gleichzeitig hyperbolisch oder elliptisch sind.

Durchläuft die Gerade auf der Punkt-Kernfläche die eine Regelschar, so durchläuft die eine, wie die andere Polare projektiv die eine Regelschar der Ebenen-Kernfläche und zwar diejenige, welche mit jener Regelschar zwei Gegenseiten des Durchschnitts-Vierseits gemein hat; denn jede dieser Geraden entspricht sich selbst.

Es werden also sowohl die einen Regelscharen der beiden Kernflächen, welche zwei Seiten des Kernvierseits gemeinsam haben, als auch die andern, welche ebenfalls zwei Seiten desselben gemeinsam haben, in doppelter Weise projektiv gemacht, wo zwei entsprechende Geraden zueinander in der räumlichen Korrelation polar sind, einmal in dem einen, das andere Mal in dem andern Sinne; die Seiten der Vierseits sind dabei sich selbst entsprechend.

Seien g und g' zwei entsprechende Geraden in einer dieser vier Projektivitäten, etwa g auf der Punkt-Kernfläche und g' in der Ebenen-Kernfläche gelegen, $p \equiv q'$ eine Gerade, welche beide trifft, so ist die Polarebene von gp die Ebene, die diesen Punkt mit der Polare g' von g verbindet, sie nimmt p in sich auf, enthält aber, weil p durch gp geht, die Polare p' von p, so daß diese die p schneidet. Der Pol der Ebene $g'q'$ ist ihr Schnitt mit g, durch ihn muß die Polare q gehen und trifft in ihm die q'. Unsere Gerade $p \equiv q'$ ist also eine Gerade, welche beide Polaren trifft, mithin ein Strahl des Kernkomplexes der Korrelation. Umgekehrt, ist $p \equiv q'$ ein Strahl des Kernkomplexes, welcher also die Polaren p', q trifft, so sind die Punkte $pq, p'q'$ je in den Polarebenen $p'q', pq$ gelegen, also jene die beiden Schnitte mit der Punkt-Kernfläche, diese die Tangentialebenen an die Ebenen-Kernfläche. Den beiden durch pq gehenden Geraden jener, als Geraden von Σ, entsprechen in Σ' die beiden in $p'q'$ liegenden Geraden dieser Fläche, und den beiden durch $p'q'$ gehenden jener, als Geraden von Σ', die in pq liegenden dieser in Σ.

Jeder Strahl, der zwei entsprechende Strahlen in einer dieser Projektivitäten trifft, gehört zum Kernkomplexe der Korrelation, und jeder Strahl dieses Komplexes trifft zwei entsprechende Strahlen in jeder der Projektivitäten.

Jede von den vier Projektivitäten bedingt die drei anderen. Wenn g und g' entsprechend sind in der einen Regelschar der F^2 und der entsprechenden der Φ_2, so schneidet jeder Strahl, der beide trifft, ein Strahl des Kernkomplexes, dieselben Regelscharen auf zwei entsprechenden Strahlen g_1', g_1, die in der andern Projektivität entsprechen; und jeder Strahl, der drei dieser Strahlen trifft, trifft auch den vierten, so daß zwei Paare entsprechender Strahlen aus den beiden Projektivitäten zwischen den nämlichen Regelscharen immer vier Geraden einer Regelschar sind. Ist ferner l ein Strahl aus der andern Regelschar der F^2, so ist der Strahl l' aus der entsprechenden Regelschar der Φ_2, der in der Ebene vom Punkte gl nach der

Gerade g' liegt, der entsprechende in der einen Projektivität zwischen diesen Regelscharen; und der l_1' jener Schar entspricht l_1 dieser, wenn sie in in der Ebene liegt, die den Punkt $l_1'g_1'$ mit g_1 verbindet.

Alle vier Projektivitäten erzeugen den Kernkomplex, und es zeigt sich so, daß *derselbe von vier Reihen von Strahlennetzen durchzogen wird.*

Ein ebener Schnitt durch zwei solche projektive Regelscharen liefert zwei projektive Kegelschnitte mit zwei sich selbst entsprechenden Punkten. Durch diese Punkte erniedrigt sich die Kurve der Verbindungslinien entsprechender Punkte, die Komplexkurve, von der vierten auf die zweite Klasse.

Für einen Punkt $\mathfrak{Z} \equiv X \equiv Y'$ der Punkt-Kernfläche F^2 seien 562
$g \equiv g_1'$, $l \equiv l_1'$ die durchgehenden Geraden dieser Fläche, so sind seine Polarebenen ξ und η die Ebenen $g'l'$ und $g_1 l_1$, welche durch $\mathfrak{Z}$ gehen; die Schnittlinie $\xi'\eta$ geht durch $\mathfrak{Z}$ und die Punkte $l_1 g', g_1 l'$. Jeder Strahl des Büschels $(\mathfrak{Z}, \xi')$ trifft g und g' oder l_1' und l_1 und ist daher Strahl der Kernkomplexes, ebenso jeder Strahl von $(\mathfrak{Z}, \eta)$. *Daher zerfällt der Kegel des Kernkomplexes aus einem Punkt* $\mathfrak{Z}$ *von* F^2 *in die beiden Büschel* $(\mathfrak{Z}, \xi')$ *und* $(\mathfrak{Z}, \eta)$.

Von der Gerade $\xi'\eta$ erkannten wir, daß sie in $\mathfrak{Z}$ die Punkt-Kernfläche berührt, also liegen die beiden Punkte $l_1 g', g_1 l'$ in der Berührungsebene des Punktes $\mathfrak{Z}$, und jeder Strahl derselben durch den einen $l_1 g'$ trifft auch l_1', g und jeder durch den andern $g_1 l'$ trifft auch g_1' und l, ist Komplexstrahl. *Es zerfällt demnach auch die Komplexkurve einer jeden Berührungsebene der Punkt-Kernfläche* F^2, *und der Doppelstrahl dieses Punktepaars ist derselbe wie des vorherigen Ebenenpaars.*

Ebenso zerfällt dual die Komplexkurve in jeder Berührungsebene der Ebenen-Kernfläche Φ_2 in die Strahlenbüschel um die beiden Pole und der Komplexkegel aus dem Berührungspunkte in zwei Strahlenbüschel, und dieses Ebenenpaar hat denselben Doppelstrahl wie jenes Punktepaar: eine Tangente der Ebenen-Kernfläche.

Solche Punkte und Ebenen, welche an einen Komplex 2. Grades zerfallende Komplexkegel und Komplexkurven senden, heißen *singuläre Punkte und Ebenen des Komplexes*. In der allgemeinen Theorie der Komplexe 2. Grades wird gezeigt[1]), daß sie eine und dieselbe Fläche 4. Ordnung und 4. Klasse erzeugen und umhüllen, *die singuläre Fläche des Komplexes*, und daß etwaige Doppelstrahlen des Komplexes Doppelgeraden für die Fläche sind. *Im vorliegenden Falle besteht die singuläre Fläche aus den beiden Kernflächen, und auf der Gesamtfläche sind die vier Seiten des Vierseits doppelt.* Sie sind *in der Tat Doppelstrahlen des Kom-*

---

1) Liniengeometrie Bd. III Nr. 522, 766, 767, 524.

plexes. Denn für jeden Punkt $\mathfrak{z}$ einer dieser Geraden geht die eine und die andere Polarebene ξ', η durch sie; also ist sie der gemeinsame Strahl der beiden den Komplexkegel bildenden Strahlenbüschel, und ebenso ist sie in jeder Ebene durch sie der gemeinsame Strahl der beiden die Komplexkurve zusammensetzenden Büschel. Daraus folgt, daß in jedem Strahlenbüschel, zu welchem die Gerade gehört, die beiden dem Komplexe angehörigen Strahlen sich in ihr vereinigen. Das ist das Kennzeichen eines Doppelstrahls des Komplexes.

Die Doppelstrahlen so zerfallender Komplexkegel sowohl wie diejenigen zerfallender Komplexkurven heißen *singuläre Strahlen des Komplexes*, und jeder singuläre Strahl ist beides, und zwar stets für den Kegel aus einem Punkte der singulären Fläche und für die Kurve in der zugehörigen Tangentialebene, so daß er die singuläre Fläche berührt. Wir haben das für die singulären Strahlen unseres Komplexes erkannt. Nach der allgemeinen Theorie der quadratischen Komplexe bilden diese singulären Strahlen eine Kongruenz 4. Ordnung 4. Klasse. *Diese Kongruenz der singulären Strahlen zerfällt bei unserem Kernkomplexe in zwei Kongruenzen 2. Ordnung 2. Klasse, deren Strahlen Tangenten der einen und der andern Kernfläche sind.* Diejenigen, welche die Punkt-Kernfläche berühren, erhielten wir zunächst als zu den Punkten $\mathfrak{z}$ derselben gehörige Geraden $\xi'\eta$; wir können sofort die von ihnen erzeugte Kongruenz nachweisen. Die beiden Polarebenen ξ', η, beide zu $\mathfrak{z}$ korrelativ sich bewegend, machen die Ebenen-Kernfläche zu sich selbst kollinear, und zwar in der ersten Art; denn bewegt sich $\mathfrak{z}$ auf einer Gerade der F^2, so drehen sich ξ' und η um zwei Geraden der nämlichen Regelschar der Φ_2, so daß in jener Kollineation die beiden Regelscharen sich selbst entsprechen. Die vier Koinzidenzen sind die Winkelebenen des Vierseits. *Also erzeugen die singulären Strahlen $\xi'\eta$, welche die Punkt-Kernfläche berühren, die* Schnittlinien $\xi'\eta$ in der Kollineation entsprechender Berührungsebenen der Ebenen-Kernfläche, *eine Kongruenz 2. Ordnung 2. Klasse, welche die Seiten des Vierseits zu Doppelstrahlen hat* (Nr. 519).

Wir wissen, der Wechselstrahl $\xi'\eta$ liegt stets in der Nullebene ζ_1 des $\mathfrak{z}$ im Nullraum ($\mathfrak{G}^p$), gehört also in dem Falle, wo $\mathfrak{z}$ auf F^2 liegt und $\xi'\eta$ durch ihn geht, dem Büschel ($\mathfrak{z}$, ζ_1) des Gewindes $\mathfrak{G}^p$ an.

Das Gewinde $\mathfrak{G}^p$ der Geraden, welche Involutionen doppelt konjugierter Punkte tragen, geht durch die Kongruenz derjenigen singulären Strahlen des Kernkomplexes, welche die Punkt-Kernfläche berühren.

Die Kongruenz der die andere Kernfläche berührenden singulären Strahlen ergibt sich als Ort der Verbindungslinie der Pole der Tangentialebenen der Ebenen-Kernfläche — entsprechender

Punkte der zu sich selbst in erster Art kollinearen Punkt-Kernfläche —, ist ebenfalls 2. Ordnung 2. Klasse mit den Seiten des Vierseits als Doppelstrahlen, und befindet sich in dem Gewinde $\mathfrak{G}^e$ der Geraden, welche Involutionen doppelt konjugierter Ebenen tragen.[1])

Die Strahlen der ersten dieser beiden Kongruenzen 2. Ordnung 2. Klasse bilden den vollen Schnitt des tetraedralen Komplexes der Wechselstrahlen mit dem Gewinde $\mathfrak{G}^p$, welcher ja auch 2. Ordnung und 2. Klasse ist. Also sind die einzigen Wechselstrahlen, welche zugleich Strahlen von $\mathfrak{G}^p$ sind, diejenigen, welche zu den Punkten der Punkt-Kernfläche gehören; und sie werden Strahlen von $\mathfrak{G}^p$, indem sie je durch diesen zugehörigen Punkt gehen. Diese Strahlen tragen parabolische Involutionen doppelt konjugierter Punkte; der zugehörige Punkt, der Berührungspunkt mit F^2, ist der singuläre Punkt der Involution.

Und umgekehrt, wenn ein Strahl von $\mathfrak{G}^p$ eine parabolische Involution doppelt konjugierter Punkte trägt, muß er F^2 im singulären Punkte tangieren; dessen beide Polarebenen gehen durch ihn und durch jeden Punkt der Gerade, weil ihm in der Involution gepaart, also schneiden sie sich in dem Strahl, und er ist Wechselstrahl des Punktes. Also nur jene Strahlen tragen parabolische Involutionen. Dual sind die in $\mathfrak{G}^e$ befindlichen Wechselstrahlen, welche die andere Kongruenz erzeugen, die zu den Ebenen von Φ_2 gehörigen.

Die Strahlenbüschel um die Ecken des Kernvierseits in den zugehörigen Winkelebenen, ihren involutorischen Polarebenen, gehören ganz zu beiden Gewinden $\mathfrak{G}^p$ und $\mathfrak{G}^e$. Die Diagonalen sind daher die Leitgeraden des Strahlennetzes, in welchem $\mathfrak{G}^p$ und $\mathfrak{G}^e$ sich durchschneiden. 563

Diejenigen Strahlen, welche die beiden Diagonalen des den Kernflächen gemeinsamen Vierseits treffen, tragen sowohl Involutionen doppelt konjugierter Punkte, als Involutionen doppelt konjugierter Ebenen. Das folgt jedoch unmittelbar daraus, daß die beiden Diagonalen in beiderlei Sinne polar sind und so jeder der genannten Strahlen ein Paar doppelt konjugierter Punkte und ein Paar doppelt konjugierter Ebenen bekommt. Dieses Strahlennetz, als Schnitt zweier reellen Gewinde, ist immer reell, also seine Leitgeraden entweder reell oder konjugiert imaginär. Wenn letzteres der Fall ist, so sind die reellen Verbindungslinien der konjugiert imaginären Ecken des Vierseits (und Schnittlinien der zugehörigen konjugiert imaginären Winkel- und Polarebenen) zwei Gegenseiten desselben. Dann werden, wegen ihrer

1) Liniengeometrie Bd. III Nr. 806—811.

reellen Polarräume, die Kernflächen reell und hyperbolisch. Und wir sehen, daß folgende Fälle eintreten können.

1. Beide Kernflächen sind reell und hyperbolisch:
   a) das Schnittvierseit ist vollständig reell;
   b) die Ecken, Ebenen und Seiten des Vierseits sind imaginär, aber seine Diagonalen sind reell;
   c) es hat zwei reelle Gegenseiten, die andern und die Diagonalen sind konjugiert imaginär.

2. Beide Kernflächen sind reell und elliptisch; die Diagonalen des Schnittvierseits sind reell; auf der einen liegen zwei reelle Gegenecken, deren zugehörige reellen Winkel- und Polarebenen durch die andere gehen; denn polare Geraden verhalten sich ungleichartig.

3. Beide Kernflächen sind reell-imaginär, alle Ecken, Ebenen und Seiten des Vierseits imaginär, die Diagonalen reell.

Wenn zwei reelle sich in einem Vierseite durchschneidende Flächen 2. Grades gegeben sind, so kann man eine Korrelation herstellen, in der sie die Kernflächen sind: man ordne den Ecken des Vierseits ihre Winkelebenen als Polarebenen zu und einem weiteren Punkte X der einen Fläche eine durch ihn gehende Berührungsebene ξ' der andern; weil dabei konjugiert imaginären Elementen ebenfalls konjugiert imaginäre zugeordnet werden, so wird die Korrelation reell. Daraus erhellt, daß alle Fälle 1. und 2. möglich sind.

Ein System von Korrelationen, in welchem ein Polarraum mit imaginärer Basisfläche enthalten ist, zeigt, daß auch der Fall 3. eintreten kann.

Da durch X ∞^1 Berührungsebenen ξ' an die zweite Fläche möglich sind, so gehören zwei gegebene Kernflächen zu ∞^1 Korrelationen.

Die Mannigfaltigkeit der Paare von Flächen 2. Grades, die sich in einem Vierseit durchschneiden, ist $9 + 4 + 1$ oder $4 \cdot 3 + 2$, also um 1 kleiner als die der Korrelationen.

Man beachte, daß die Aufsuchung der Ecken (oder Ebenen) des Vierseits keine biquadratische Aufgabe ist, sondern sich in quadratische zerlegt. Es werden zunächst die Diagonalen aufgesucht als Leitgeraden des oben beschriebenen Strahlennetzes, von dem man leicht den Strahl durch jeden Punkt oder in jeder Ebene konstruieren kann; die Leitgeraden sind die Treffgeraden von vier Strahlen desselben, diese sind dann mit der einen oder andern Kernfläche zu schneiden. Sind sie reell, so hat man in dem betreffenden Polarraum die Involution konjugierter Punkte und die Doppelpunkte zu konstruieren. Wenn sie aber imaginär sind, so wird man besser den Schnitt der beiden dann reellen und hyperbolischen Kernflächen aufsuchen; in jeder Ebene besitzt man für die beiden Kegelschnitte in dem Strahle des Strahlennetzes eine Seite des gemeinsamen Polardreiecks; dadurch wird die Aufsuchung der Schnittpunkte quadratisch: in der als Pol leicht zu konstruierenden Gegenecke jener Seite treffen sich die reellen Verbindungssehnen der beiden reellen und der beiden konjugiert imaginären Schnitte.

Die beiden Gewinde $\mathfrak{G}^p$ und $\mathfrak{G}^e$ sind bei einem Polarraume un- 564
bestimmt, da ja jede Gerade zwei Involutionen doppelt konjugierter Elemente trägt.

Kernkomplex eines Polarraums ist der Komplex der Tangenten der Basisfläche. Denn der Schnittpunkt zweier sich schneidenden Polaren ist der Pol der Verbindungsebene derselben, also, weil sie inzidieren, ihr Berührungspunkt mit der Fläche und die beiden Polaren zwei Tangenten in ihm.

Zwei solche zueinander polaren Tangenten desselben Punktes der Fläche sind auch polar in bezug auf das von der Berührungsebene ausgeschnittene Geradenpaar. Daher bilden alle derartigen Paare in einem Tangentenbüschel eine Involution mit den beiden Geraden der Fläche als Doppelstrahlen, die also, gleichartig mit der Fläche, elliptisch oder hyperbolisch ist.

Die Polarebenen der Punkte der einen von zwei polaren Tangenten gehen durch die andere, also insbesondere die Tangentialebene des dem Berührungspunkte unendlich nahen Punktes der einen, der noch der Fläche angehört. Folglich sind zwei solche Tangenten konjugiert[1]) im Sinne, wie die Differentialgeometrie dies Wort, nach Dupins Vorgang, gebraucht; konjugiert im Sinne der Polarentheorie der Flächen 2. Grades sind sie nicht, sondern polar.

Wir fanden (Nr. 523), daß in der Korrelation die beiden Kernflächen sich involutorisch entsprechen und der Kernkomplex sich selbst. Auch der tetraedrale Komplex der Wechselstrahlen entspricht sich selbst. Denn die beiden Polaren p', q eines Wechselstrahls $p \equiv q'$ schneiden sich im zugehörigen Punkte (und in der zugehörigen Ebene). Sie sind beide Wechselstrahlen; wenn nämlich $p' \equiv r$, so hat der Punkt $rq \equiv p'q$ eine durch q' gehende Polarebene, und die in ihr gelegene Polare r' trifft $q' \equiv p$; in $p' \equiv r$ treffen sich die beiden Polarebenen von pr', so daß er ein Wechselstrahl ist, und ebenso q. Also geht jeder Wechselstrahl in dem einen und in dem andern Sinne in einen Wechselstrahl über.

Die beiden Gewinde $\mathfrak{G}^p$ und $\mathfrak{G}^e$ entsprechen sich in der Korrelation involutorisch.

Es seien $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}$ wiederum die Polarebenen von $\mathfrak{Z} \equiv X \equiv Y'$,

1) Sie sind konjugierte Durchmesser der Dupinschen Indikatrix, deren Halbmesser-Quadrate den Krümmungsradien der zugehörigen Normalschnitte gleich (oder proportional) sind.

ζ die Polarebene im Polarraum (F^2) und ζ_1 seine Nullebene im Nullraume ($\mathfrak{G}^p$); dann sind ξ', η; ζ, ζ_1 harmonisch. Es sei $\xi' \equiv \tau \equiv \pi$. Durch die Korrelation geht η in $Y' \equiv X$ über, $\tau \equiv \xi'$ in T', ζ, die Polarebene von $\mathfrak{Z} \equiv X$ in (F^2), in den Pol P von $\pi \equiv \xi'$ in (Φ_2); T' und X sind die beiden Pole von π. Also geht ζ_1 über in den vierten harmonischen Punkt, der dem Pole P in bezug auf jene Pole zugeordnet ist, d. h. in den Nullpunkt P_2 von π in dem Nullraume ($\mathfrak{G}^e$).

Der Strahlenbüschel ($\mathfrak{Z}$, ζ_1) von $\mathfrak{G}^p$ transformiert sich also in den Strahlenbüschel (π, P_2) von $\mathfrak{G}^e$, also $\mathfrak{G}^p$ in $\mathfrak{G}^e$, wenn vom ersten Raum in den zweiten übergegangen wird; aber auch bei der umgekehrten Transformation; statt ξ' wird dann η im Beweise benutzt.

Das den beiden Gewinden $\mathfrak{G}^p$, $\mathfrak{G}^e$ gemeinsame Strahlennetz geht in sich selbst über; dies folgt jedoch unmittelbar daraus, daß seine beiden Leitgeraden, die Diagonalen des Vierseits, einander involutorisch entsprechen.

Die beiden Bestandteile der Kongruenz der singulären Strahlen des Kernkomplexes, von denen die einen F^2, die andern Φ_2 berühren, entsprechen sich auch involutorisch; sie sind die Schnitte dieses sich selbst entsprechenden Komplexes mit $\mathfrak{G}^p$ und $\mathfrak{G}^e$

565 Wir haben ∞^3 ebene Korrelationen in den verschiedenen Ebenen des Raumes, welche durch eine räumliche Korrelation hervorgerufen werden. In den Tangentialebenen der Ebenen-Kernfläche Φ_2 arten sie in zentrale Korrelationen aus. Die Zentren sind die beiden Pole P', R einer solchen Ebene $\pi \equiv \rho'$, die in ihr liegen. Denn die Polarebene ξ' eines Punktes X in ihr geht stets durch P' und schneidet die Ebene in einer durch P' gehenden Gerade, und weil diese Gerade $\rho'\xi'$ die Polare von RX ist, so bleibt sie fest, wenn X sich auf RX bewegt; wir haben die Eigenschaft der zentralen Korrelation. Die Punkt-Kernkurve ist der Schnitt mit der Punkt-Kernfläche F^2, ein allgemeiner Kegelschnitt; die Geraden-Kernkurve ist der Schnitt mit dem Tangentialkegel aus P' oder R an Φ_2 (Nr. 524); $\pi \equiv \rho'$ berührt beide Tangentialkegel und daher wird sie von dem einen in dem Strahlenbüschel um P', von dem andern in dem um R geschnitten; das Punktepaar (P', R) stellt also die zweite Kernkurve dar; dies entspricht dem Verhalten der Kernkurven einer zentralen ebenen Korrelation. Die Involution in der Büschel-Schar der beiden Kernkurven, in welcher einander (involutorisch) in der Korrelation entsprechende Kegelschnitte gepaart sind, ist parabolisch geworden (Nr. 404): mit (P', R) als einzigem Doppelelemente.

Umgekehrt, wenn eine der ausgeschnittenen ebenen Korrelationen in eine zentrale ausartet, so muß die Polare eines beliebigen Punktes der Ebene durch das eine oder andere Zentrum gehen, also die aus-schneidende Polarebene. Diese Zentren sind daher die Pole der Ebene, und diese eine Berührungsebene von Φ_2.

Nur in der Tangentialebenen von Φ_2 entstehen zentrale Korrelationen. Axiale Korrelationen werden nicht ausgeschnitten; denn es müßten die Polarebenen der beliebigen Punkte der Ebene durch die eine oder andere Axe gehen, als zu ihnen polare Geraden in der axialen Korrelation.

Die Berührungsebenen $\pi \equiv \rho'$ der Punkt-Kernfläche F^2 schneiden nicht ausgeartete Korrelationen mit ausgearteten Kernkurven aus (Nr. 432). Die Punkt-Kernkurve, als Schnitt von F^2, zerfällt in die beiden Geraden g, l dieser Fläche. Die Pole P', R liegen auf Φ_2, weil die Kernflächen sich in beiderlei Sinne korrespondieren; die Tangentialkegel aus dem einen oder andern an Φ_2 schneiden die Geraden-Kernkurve ein; sie zerfallen in die Ebenenbüschel um die beiden Geraden der Φ_2 durch den Pol $g'l'$, wenn P' genommen wird, und schneiden Strahlenbüschel ein; die Doppelgerade dieses Punktepaars, die Spur der Ebene $g'l'$, muß durch den Doppelpunkt gl des Geradenpaars gehen, den Pol von $g'l'$.

Ist $g \equiv k'$, $l \equiv m'$, so ist km die zweite Polarebene des Punktes $gl \equiv k'm'$; also ist die Verbindungslinie von $g'm$ und $l'k$ der zu ihm gehörige Wechselstrahl, der in ihm die F^2 tangiert und deshalb in die Ebene $\pi \equiv \rho'$ fällt. So zeigt sich, daß m und k dasselbe Punktepaar einschneiden wie g' und l', und jeder der beiden Punkte den Geraden des Geradenpaars in dem einen und dem andern Sinne korrespondiert, wie das nach Nr. 432 notwendig ist.

Weil das Polarfeld eine dreifache Bedingung involviert, so könnte es möglich sein, daß unter den ∞^3 ebenen Korrelationen sich eine endliche Anzahl von Polarfeldern befinden. Jeder Punkt einer Ebene, welche ein Polarfeld ausschneidet, muß seinen Wechselstrahl in ihr haben; also könnte es sich nur um die Ebenen des Tetraeders des Komplexes der Wechselstrahlen handeln. Aber auch deren Punkte haben im allgemeinen nicht in die Ebene fallende Wechselstrahlen; die Punkte der Ebene DAB z. B. führen zu zwei kollinearen Bündeln, um A, der einen und andern Polarebenen, und jeder Strahl des Bündels A ist einmal Schnitt zweier entsprechender Ebenen, also Wechselstrahl eines gewissen Punktes der Ebene. In dieser Ebene, als Tangentialebene von Φ_2, entsteht eine zentrale Korrelation, deren Zentren beide in A liegen, deren Projektivität aber nicht Involution ist.

Es ergibt sich demnach in keiner Ebene ein Polarfeld und um keinen Punkt ein Polarbündel.

Die beiden Kegelschnitte in einer Ebene, welche in der ausgeschnittenen ebenen Korrelation sich selbst entsprechen (Nr. 308), liefern einen Komplex von ∞^3 Kegelschnitten. Jeder von ihnen wird von den einen und den andern Polaren seiner Punkte, daher von den einen und den andern Polarebenen derselben berührt, ist also beiden ihm korrespondierenden Kegeln 2. Grades eingeschrieben. Es gibt folglich ∞^3 Kegelschnitte — in jeder Ebene zwei —, welche dem einen und dann dem andern korrespondierenden Kegel eingeschrieben sind, und ∞^3 Kegel 2. Grades — aus jedem Punkte zwei —, die durch den einen und dann auch durch den andern entsprechenden Kegelschnitt gehen. Die Tangentialebenen von Φ_2 trennen die Ebenen, in denen diese Kegelschnitte reelle Polarfelder haben, von denen, in welchen sie konjugiert imaginär sind, oder die Ebenen mit hyperbolischer Involution in der Büschel-Schar der Kernkurven von denen mit elliptischer Involution; und ähnliches gilt für die Punkte von F^2 und die genannten Kegel.

Das Quadrat C^2 einer Korrelation C transformiert jede der beiden Kernflächen in sich selbst, ist also eine Hermitesche Kollineation mit dem Schnittvierseit der Kernflächen als dem betreffenden Kantenvierseit (Nr. 514). Liegt umgekehrt eine Hermitesche Kollineation vor mit dem Kantenvierseit $ABCD$ des Koinzidenztetraeders als der Basis der sich selbst entsprechenden Flächen, so kann man eine jede derselben zur Punkt- oder Ebenen-Kernfläche einer Korrelation machen, von welcher die Kollineation das Quadrat ist. F^2 sei eine von ihnen und soll Punkt-Kernfläche werden, R und P' seien Punkte auf ihr, die in der Kollineation entsprechend sind, ρ' eine durch PR' gehende Ebene. Die Korrelation:

$$\left|\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & R \\ DAB & ABC & BCD & CDA & \rho' \end{array}\right|$$

hat $ABCD$ zum Schnittvierseit der Kernflächen, und da R in seiner Polarebene ρ' liegt, so ist F^2 die Punkt-Kernfläche; P' liegt auf ihr, also geht die Polarebene π durch ihn, und weil P' in ρ' liegt, auch durch R, also auch durch $P'R$. Demnach beschreiben ρ' und π konjektive Büschel um $P'R$ und vereinigen sich zweimal. Dann haben P' und R dieselbe Polarebene, sind im Quadrat der Korrelation entsprechend; dies stimmt in diesen Elementen und den vier sich selbst entsprechenden Elementen A, B, C, D mit der gegebenen Kollineation überein und ist mit ihr identisch.

566 Wenn neben dem Vierseit $ABCD$, dessen Ecken A, B, C, D die inzidenten Winkelebenen DAB, ABC, BCD, CDA in beiderlei Sinne korrespondieren, noch ein fünftes involutorisches Paar vorhanden ist, dessen Elemente P, π nicht inzidieren; dann ist von vornherein die Korrelation:

$$\left|\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & P \\ DAB & ABC & BCD & CDA & \pi \end{array}\right|$$

durchweg involutorisch; denn die bestimmenden Elemente sind involutorisch, und wir können wie in Nr. 527 schließen.[1]) Dabei ist vorausgesetzt, daß diese Elemente eine Korrelation vollständig und eindeutig bestimmen. Das ist nicht der Fall, wenn P in eine der vier Winkelebenen, etwa DAB, gelegt ist und π dann durch den entsprechenden Punkt A geht. Nehmen wir zunächst an, daß P auf die Diagonale BD gelegt sei, wo dann π durch die andere Diagonale AC geht; so haben wir auf jener Diagonale ein Paar doppelt konjugierter Punkte $P, (BD, \pi)$, folglich eine Involution doppelt konjugierter Punkte mit B, D als Doppelpunkten, und weil AC, BD sich involutorisch entsprechen, perspektiv zu ihr, eine Involution doppelt konjugierter Ebenen um AC. Es genügt, auf BD zwei konjugierte Punkte zu legen, die harmonisch zu B, D sind. Jeder Punkt von BD hat eine involutorische Polarebene, die dann durch AC geht, und jede Ebene durch diese Gerade einen involutorischen Pol auf jener. Wenn also E, F ein Paar der Involution auf BD bilden und die involutorischen Polarebenen $AC(F, E)$ eins derjenigen um AC, so sind im Vierseite $AECF$ sowohl AE und AF, als CE und CF involutorisch polar; denn z. B. den Ecken A, E entsprechen die Ebenen $DAB \equiv AEF$ und ACF involutorisch, also der AE die AF. Und zu den beiden im allgemeinen allein vorhandenen involutorischen Polaren AC, BD sind noch ∞^1 Paare involutorischer Polaren getreten. Man hat diesen Spezialfall partielle involutorische Korrelation genannt.[2]) Jeder Punkt von BD bekommt, wegen seiner involutorischen Polarebene, ∞^2 doppelt konjugierte Punkte, und der ganze Bündel um ihn besteht aus Strahlen, welche Involutionen doppelt konjugierter Punkte tragen; d. h. das Gewinde $\mathfrak{G}^p$ ist in das Strahlengebüsche $[BD]$ übergegangen; und dual ergibt sich, daß das Gebüsche $[AC]$ den linearen Komplex $\mathfrak{G}^e$ darstellt. Die Kongruenzen der singulären Strahlen des Kernkomplexes, von der einen und andern Art, befinden sich in diesen Strahlengebüschen $\mathfrak{G}^p \equiv [BD]$, $\mathfrak{G}^e \equiv [AC]$ und haben die Axen derselben zu singulären Linien; damit ist der Komplex als ein Battaglini'scher Komplex gekennzeichnet.[3])

Wenn aber P, dem eine involutorische Polarebene π zukommt, bloß in DAB liegt, nicht auf DB, so folgt doch, daß auf BD und um AC die eben besprochenen Involutionen entstehen. Denn der Gerade PA ist dann die (ebenfalls durch A gehende) Gerade (π, DAB) involutorisch entsprechend und daher dem Punkt (PA, DB) die Ebene von (π, DAB) nach AC, also erhalten wir die vorherige

1) Sind P, π inzident, so bestimmt ein zweiter Strahl des Büschels (P, π), neben dem, der BD, AC trifft, ein durch das Netz $[BD, AC]$ gehendes Gewinde und den zugehörigen Nullraum.

2) Battaglini, Memorie dell' Accademia dei Lincei (1882) Ser. III Bd. 12 S. 233.

3) Liniengeometrie Bd. III Nr. 861.

Voraussetzung. Aber nunmehr hat jeder Punkt von PA eine involutorisch entsprechende Polarebene, denn für drei Punkte der Gerade gilt es: A, P und (AP, BD), also für alle. Somit sendet jeder Punkt des Raumes zwei Büschel von Strahlen aus, welche Involutionen doppelt konjugierter Punkte tragen, nämlich in den Ebenen nach BD und PA, und er hat zwei Reihen zu ihm doppelt konjugierter Punkte, die in der einen und in der andern Polarebene liegen; diese müssen sich daher vereinigen. Die Korrelation ist involutorisch, und zwar Polarraum, weil P und π nicht inzident vorausgesetzt werden.

567 Jede nicht involutorische Korrelation, sowie auch der Nullraum haben ein Gewinde $\mathfrak{G}^p$, dessen Strahlen Involutionen doppelt konjugierter Punkte tragen. Existieren also sechs Strahlen mit je einem Paare doppelt konjugierter Punkte, welche jedoch nicht demselben Gewinde angehören, oder sechs ebenso beschaffene Strahlen mit je einem Paare doppelt konjugierter Ebenen, so muß ein Polarraum vorliegen. Die Gewinde $\mathfrak{G}^p$, $\mathfrak{G}^e$ sind dann unbestimmt geworden, sowie auch das Vierseit $ABCD$.

Der einfachste Fall sind die sechs Kanten eines Polartetraeders.

Wenn bei einer Korrelation ein Fünfflach $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ vorhanden ist mit der Eigenschaft, daß jedem der zehn Eckpunkte $\alpha_h\alpha_i\alpha_k$, als Punkt des einen Raums, die Gegenseite $\alpha_l\alpha_m$ im andern Raume konjugiert ist (oder ein Fünfeck mit der dualen Eigenschaft), dann handelt es sich um einen Polarraum.

Zunächst überzeugen wir uns, daß die genannten Elemente auch im andern Sinne konjugiert sind. In der Tat, $A_{345} = \alpha_3\alpha_4\alpha_5$ und $A_{245} = \alpha_2\alpha_4\alpha_5$ haben, als Punkte von Σ, die $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$ und $a_{13} = \alpha_1\alpha_3$ in Σ' zu konjugierten Geraden, also gehen die Polaren, in Σ, dieser Geraden durch jene Punkte, und der Punkt $A_{123} = a_{12}a_{13}$, zu Σ' gehörig, hat in Σ eine durch diese Polaren gehende Polarebene; folglich geht sie auch durch A_{345} und A_{245} und durch deren Verbindungslinie $a_{45} = \alpha_4\alpha_5$, die damit in Σ konjugiert zu dem Punkte A_{123} aus Σ' wird.

Wir haben infolgedessen zehn Strahlenbüschel, deren Strahlen doppelt konjugierte Punkte verbinden, die Büschel aus den zehn Punkten A_{ikl} nach den Geraden a_{mn}. Läßt sich für sie beweisen, daß sie nicht zu demselben Strahlengewinde gehören, so ist die Behauptung dargetan. Es genügt, dies für folgende drei von den Büscheln zu beweisen: (A_{123}, a_{45}), (A_{124}, a_{35}), (A_{125}, a_{34}). Wenn diese zu demselben Gewinde gehörten, so müßten, weil die Scheitel auf der Gerade a_{12} liegen, die Ebenen durch dieselbe Gerade gehen; was sie nicht tun. Betrachten wir dazu das Dreiflach $\alpha_3\alpha_4\alpha_5 \equiv a_{45}a_{35}a_{34}$. Die Ebene von seiner Spitze A_{345} nach a_{12} schneidet die drei Flächen α_3, α_4, α_5 in den Geraden von A_{345} nach A_{123}, A_{124}, A_{125}, und jene Büschelebenen verbinden diese Strahlen mit den Gegenkanten a_{45}, a_{35}, a_{34}. Die drei Ebenen gehen durch Kanten des Dreiflachs und schneiden die Gegenflächen in Geraden einer Ebene, also gehen sie nicht durch dieselbe Gerade.

Ebenso ist eine Korrelation, in der ein Sechsflach $\alpha_1 \ldots \alpha_6$ vorhanden ist, von dem jede Ecke als Punkt des einen Raums zur gegenüberliegenden Ecke konjugiert ist, Polarraum. Daß die Gegenecken doppelt konjugiert sind, ist damit schon ausgesprochen; es kommt also nur darauf an, zu zeigen, daß diese zehn Verbindungslinien nicht dem nämlichen Gewinde angehören; wäre dies der Fall, so würden die Strahlennetze, welche durch die beiden Gruppen von vier Strahlen des Gewindes bestimmt sind:

$$A_{123}A_{456},\ A_{124}A_{356},\ A_{125}A_{346},\ A_{126}A_{345};$$
$$A_{123}A_{456},\ A_{134}A_{256},\ A_{135}A_{246},\ A_{136}A_{245},$$

auch demselben angehören. Jedes derartige Netz ist ein parabolisches: mit der Gerade, auf der die vordern Punkte liegen — a_{12}, a_{13} —, als einziger Leitgerade. Denn infolge des Tetraedersatzes (Nr. 237) ist:

$$A_{123}A_{124}A_{125}A_{126} = a_{12}(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \barwedge a_{12}(A_{456}, A_{356}, A_{346}, A_{345});$$

also sind die Punktreihe und der Ebenenbüschel a_{12} projektiv; und die Strahlenbüschel, welche entsprechende Elemente zu Scheitel und Ebene haben, erzeugen das parabolische Strahlennetz.[1]) Die vier oberen Verbindungslinien, vier solchen Strahlenbüscheln angehörig, befinden sich in ihm und bestimmen es. Zu solchen Netzen gehört auch die einzige Leitgerade als Strahl. Befänden sich die Strahlennetze in demselben Gewinde, so würden die beiden Strahlenbüschel aus ihnen, welche vom gemeinsamen Punkte A_{123} der Leitgeraden a_{12}, a_{13} kommen, sich in den Büschel aus diesem Punkte vereinigen, der zum Gewinde gehört. Aber sie sind verschieden; ihre Ebenen verbinden a_{12}, a_{13} mit dem gemeinsamen Strahle $A_{123}A_{456}$ oder mit A_{456}.

In dem einen von zwei korrelativen Räumen A, B seien vier 568
Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 angenommen; die Polarebenen im zweiten bilden das polare Tetraeder, dessen Ecken B_1, B_2, B_3, B_4 so benannt seien, daß $B_2B_3B_4$ die Polarebene von A_1 ist, usw. Wir ziehen ein zweites Paar polarer Tetraeder heran und wollen die Abhängigkeit der sechzehn Punkte untersuchen:

$$\begin{matrix} A_1A_2A_3A_4 & A_5A_6A_7A_8 \\ B_1B_2B_3B_4, & B_5B_6B_7B_8. \end{matrix}$$

Die Pole von $A_2A_3A_5$ und $A_2A_3A_6$ sind die Punkte $C_5 = (B_1B_4, B_6B_7B_8)$, $C_6 = (B_1B_4, B_5B_7B_8)$. Daher ist:

---

1) Beim Strahlennetze mit getrennten Leitgeraden machen die Strahlenbüschel aus Punkten der einen in Ebenen durch die andere die Punktreihe auf jener zum Ebenenbüschel um diese projektiv; dies führt, bei vereinigten Leitgeraden, zur obigen Erzeugung.

(1) $$A_2A_3(A_1, A_4, A_5, A_6) \barwedge B_4B_1C_5C_6$$
$$\barwedge B_1B_4C_6C_5 \barwedge B_7B_8(B_1, B_4, B_5, B_6);$$

in gleicher Weise ergeben sich:

(2) $$A_2A_4(A_1, A_3, A_5, A_6) \barwedge B_7B_8(B_1, B_3, B_5, B_6),$$

(3) $$A_3A_4(A_1, A_2, A_5, A_6) \barwedge B_7B_8(B_1, B_2, B_5, B_6).$$

Ebenso ergeben sich folgende Projektivitäten:

$$A_7A_5(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge B_8B_6(B_1, B_2, B_3, B_4),$$
$$A_7A_4(A_1, A_2, A_3, A_5) \barwedge B_8B_6(B_1, B_2, B_3, B_5);$$

$$A_7A_6(A_1, A_2, A_3, A_4) \barwedge B_8B_5(B_1, B_2, B_3, B_4),$$
$$A_7A_6(A_1, A_2, A_3, A_5) \barwedge B_8B_4(B_1, B_2, B_3, B_5);$$

sie sagen aus, daß in den Bündeln A_7, B_8 die Strahlen nach $A_1, \ldots A_6$; $B_1, \ldots B_6$ linear abhängig sind (Nr. 228).

Bezieht man die Punktreihe auf der kubischen Raumkurve $a^3 = (A_1A_2 \ldots A_6)$ so auf den Ebenenbüschel B_7B_8 projektiv, daß den Punkten A_1, A_5, A_6 die Ebenen $B_7B_8(B_1, B_5, B_6)$ korrespondieren, so entsprechen, infolge der Projektivitäten (1), (2), (3), auch den Punkten A_2, A_3, A_4 die Ebenen $B_7B_8(B_2, B_3, B_4)$, so daß:

$$a^3(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) \barwedge B_7B_8(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6).$$

Sind daher die sechs ersten Paare

$$\begin{matrix} A_1 & \ldots & A_6 \\ B_1 & \ldots & B_6 \end{matrix}$$

gegeben und damit auch a^3 und die sechspunktige Reihe auf ihr, so wird (Nr. 243) die Gerade $b_{78} = B_7B_8$ einer bestimmten Regelschar zugewiesen, und ebenso $a_{78} = A_7A_8$. Nehmen wir umgekehrt an, daß die sechs Paare gegeben und die Gerade b_{78} dieser Bedingung entsprechend konstruiert sei, also der genannten Regelschar angehöre, so legen wir folgende Korrelation Γ fest:

$$\left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ B_2B_3B_4 & B_3B_4B_1 & B_4B_1B_2 & B_1B_2B_3 & B_6b_{78} \end{matrix} \right|.$$

Es seien wieder C_5, C_6 die Schnitte von B_1B_4 mit $b_{78}(B_6, B_5)$, von denen also C_5 Pol von $A_2A_3A_5$ ist. Infolge der Voraussetzung ist:

$$A_2A_3(A_1, A_4, A_5, A_6) \barwedge b_{78}(B_1, B_4, B_5, B_6) \barwedge B_1B_4C_6C_5 \barwedge B_4B_1C_5C_6;$$

weil nun $A_2A_3(A_1, A_4, A_5)$ die B_4, B_1, C_5 zu Polen in Γ haben, so ist auch C_6 Pol von $A_2A_3A_6$; ebenso ergeben sich (B_1B_3, B_5b_{78}) und (B_1B_2, B_5b_{78}) als Pole von $A_2A_4A_6$ und $A_3A_4A_6$; also ist B_5b_{78} Polarebene von A_6, und b_{78} zu A_5A_6 polar.

Zu B_5B_6 sei in der Korrelation Γ polar a_{78}, die damit von selbst in die andere oben erwähnte Regelschar kommt. Jetzt erst nehmen wir auf b_{78} beliebig den Punkt B_7 an; seine Polarebene schneide in a_{78} den Punkt A_8 ein, den Pol von $B_5B_6B_7$, und wenn nun auch noch

B_8 auf b_{78} beliebig gewählt wird, so gibt seine Polarebene auf a_{78} den Punkt A_7, den Pol von $B_5 B_6 B_8$; oder A_7 sei beliebig auf a_{78} gelegt; seine Polarebene gibt B_8 auf b_{78}, den Pol von $A_5 A_6 A_7$; usw. Damit sind $A_5 A_6 A_7 A_8$, $B_5 B_6 B_7 B_8$ polare Tetraeder in Γ geworden. Zu den sechs gegebenen Paaren, von denen die vier ersten zwei polare Tetraeder bilden sollen, gehören demnach, indem b_{78} die Regelschar durchläuft, ∞^1 Korrelationen, in denen die beiden letzten Paare zu polaren Tetraedern vervollständigt werden können, und zwar je auf ∞^2 Weisen; alle diese ∞^2 Tetraeder haben die Kanten, auf denen die ergänzenden Ecken liegen, gemeinsam. Diese beiden Kanten durchlaufen zwei bestimmte Regelscharen, welche durch $A_1, \ldots A_6$, bzw. $B_1, \ldots B_6$ gehen.[1]) Den ∞^1 Korrelationen sind, außer den beiden polaren Tetraedern, noch A_5 und B_6, A_6 und B_5 als konjugierte Punkte gemeinsam.

Lassen wir die $B_1, \ldots B_8$ mit den $A_1, \ldots A_8$ sich vereinigen, so handelt es sich um zwei Polartetraeder eines Polarraums. Die Projektivität:

$$a^3(A_1, \ldots A_6) \barwedge A_7 A_8 (A_1, \ldots A_6)$$

lehrt, daß $A_7 A_8$ eine Doppelsekante von a^3 ist. Die acht Ecken der beiden Polartetraeder liegen daher so, daß jede Verbindungslinie von zweien die kubische Raumkurve durch die sechs andern zweimal trifft. Daraus folgt, daß sie acht assoziierte Punkte sind, also Hesses Satz über zwei Polartetraeder einer Fläche 2. Grades (Nr. 548).

Zwei gegebene polare Tetraeder stellen vier dreifache, also zwölf Bedingungen für eine Korrelation dar und gehören daher ∞^3 Korrelationen an. In jeder Korrelation gibt es ∞^{12} Paare polarer Tetraeder, weil die Ecken des einen beliebig gewählt werden können; da es ∞^{24} Paare von Tetraedern gibt, so ist es für zwei Tetraeder eine zwölffache Bedingung, einer gegebenen Korrelation als polare anzugehören. Von den ∞^{12} Paaren polarer Tetraeder einer Korrelation wird daher eine endliche Anzahl auch in einer zweiten gegebenen Korrelation sich befinden; wir werden später finden, daß diese Anzahl 1 beträgt.

Ein Paar polarer Tetraeder ist eine sich duale Figur; wenn wir 569
nun die Ecken oder Ebenen sich vermehren lassen, werden wir zu zweierlei Figuren geführt, die einander dual sind.

Wir nennen zwei Fünfflache

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{matrix}$$

polar in einer Korrelation, wenn durchweg die Gerade $\alpha_k \alpha_i$ konjugiert ist zum Punkte $\beta_k \beta_l \beta_m$, worin die fünf Zeiger alle ver-

1) Vgl. Rosanes, Journ. f. Math. Bd. 90 S. 318.

schieden sind. Die Polare von $\alpha_1\alpha_2$ geht also durch $\beta_3\beta_4\beta_5$, diejenige von $\alpha_1\alpha_3$ durch $\beta_2\beta_4\beta_5$, also die Polarebene von $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ durch beide Punkte, d. h. durch $\beta_4\beta_5$, so daß auch $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ und $\beta_4\beta_5$ konjugiert sind, usw.

Es sei $\beta_1'\beta_2'\beta_3'\beta_4'$ zu $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ polar; dann sind $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ und $\beta_1'\beta_2'\beta_3'\beta_4'$ perspektiv mit β_5 als Perspektivitätsebene. In der Tat, β_1' als Polarebene von $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ muß durch $\beta_1\beta_5$ gehen, die zu diesem Punkte konjugiert ist; also liegt $\beta_1\beta_1'$ in β_5, und ebenso in den andern Fällen. Ingleichen ist das polare Tetraeder von $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ zu $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ perspektiv mit α_5 als Perspektivitätsebene; und jede der zehn Ebenen wird Perspektivitätsebene.

Jetzt setzen wir voraus, daß das polare Tetraeder $\beta_1'\beta_2'\beta_3'\beta_4'$ von $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ zu $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ perspektiv sei mit β_5 als Perspektivitätsebene; dann behaupten wir erstens, daß auch das zu $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ polare Tetraeder $\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4'$ zu $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ perspektiv ist. Pole von β_1 und β_1' sind $\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4'$ und $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$; also ist die Verbindungslinie dieser Punkte zur Schnittlinie jener Ebenen polar, und da die vier Schnittlinien $\beta_1\beta_1', \ldots$ in einer Ebene liegen, so laufen die vier Verbindungslinien in einen Punkt zusammen; also sind die beiden genannten Tetraeder perspektiv; denn jede der beiden dualen Eigenschaften charakterisiert zwei Tetraeder als perspektiv (Nr. 51). Es sei α_5 die zugehörige Perspektivitätsebene.

In den zehn Ebenen haben wir ein Paar polarer Fünfflache. Weil nämlich $\beta_3\beta_3'$, $\beta_4\beta_4'$ in β_5 liegen, so geht durch ihren Schnittpunkt $\beta_3\beta_4\beta_5$ die Gerade $\beta_3'\beta_4'$, welche polar zu $\alpha_1\alpha_2$ ist; also sind $\alpha_1\alpha_2$ und $\beta_3\beta_4\beta_5$ konjugiert. Ferner, α_1 und α_1' schneiden sich in α_5, d. h. $\alpha_1\alpha_5$ liegt in α_1', der Polarebene von $\beta_2\beta_3\beta_4$; folglich sind $\alpha_1\alpha_5$ und $\beta_2\beta_3\beta_4$ konjugiert.

Wir verschaffen uns also in einer gegebenen Korrelation zwei polare Fünfflache in folgender Weise. Wir geben vier Ebenen α_1, α_2, α_3, α_4 in dem einen Raume und β_5 im anderen, stellen zu dem Tetraeder jener das polare Tetraeder $\beta_1'\beta_2'\beta_3'\beta_4'$ her und legen durch die Schnittlinien $\beta_1'\beta_5, \ldots \beta_4'\beta_5$ je eine Ebene β_1, β_2, β_3, β_4; so sind diese beiden Tetraeder $\beta_1 \ldots \beta_4$ und $\beta_1' \ldots \beta_4'$ perspektiv mit β_5 als Perspektivitätsebene; das zu $\beta_1 \ldots \beta_4$ polare Tetraeder ist nun von selbst zu $\alpha_1 \ldots \alpha_4$ perspektiv, und wir erhalten dadurch α_5. In der Konstruktion steckt die Mannigfaltigkeit $5 \cdot 3 + 4 = 19$. Eine gegebene Korrelation enthält also ∞^{19} Paare polarer Fünfflache; darunter ∞^{18}, welche dadurch entstehen, daß zu zwei polaren Tetraedern $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ beliebige fünfte Ebenen α_5, β_5 gefügt werden; und da es ∞^{30} Paare von Fünfflachen gibt, so ist es eine elffache Bedingung für zwei Fünfflache, polar in einer gegebenen Korrelation zu sein; folglich müssen sich die zehn Konjugiertheiten, die wir in der Definition ausgesprochen haben, jede eine Doppelbedingung, auf elf Bedingungen, etwa fünf doppelte und eine einfache reduzieren. In der Tat, wenn wir voraussetzen, daß

$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \quad \alpha_3\alpha_4\alpha_1, \quad \alpha_4\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

zu

$$\beta_1\beta_5, \quad \beta_2\beta_5, \quad \beta_3\beta_5, \quad \beta_4\beta_5$$

konjugiert sind, so ist die perspektive Lage von $\beta_1' \ldots \beta_4'$ und $\beta_1 \ldots \beta_4$ mit β_5 als Perspektivitätsebene erzielt; da ja $\beta_1', \ldots$ durch $\beta_1\beta_5, \ldots$ gehen. Für die zweite perspektive Lage, eine Folge der ersten, ist noch zu erreichen, daß α_5 Perspektivitätsebene wird; dazu ist nur eine doppelte und eine einfache Bedingung notwendig. Die weitere Voraussetzung, daß $\beta_2\beta_3\beta_4$ zu $\alpha_1\alpha_5$ konjugiert ist, bringt $\alpha_1\alpha_1'$ auf α_5; läßt man $\beta_3\beta_4\beta_1$ zu einem Punkte von $\alpha_2\alpha_5$ konjugiert sein, so heißt das, derselbe liegt in α_2'; also geht $\alpha_2\alpha_2'$ durch diesen Punkt von α_5, und da sie $\alpha_1\alpha_1'$ treffen muß, weil mit ihr in der Perspektivitätsebene gelegen, so fällt sie in α_5, und diese, $\alpha_1\alpha_1'$ und $\alpha_2\alpha_2'$ enthaltend, ist die Perspektivitätsebene.

Aus diesen elf Bedingungen schließen wir wiederum, daß es zu zwei gegebenen Fünfflachen ∞^4 Korrelationen gibt, in denen sie polar sind.

Von den ∞^{19} Paaren polarer Fünfflache einer gegebenen Korrelation gehören, wegen der elffachen Bedingung, ∞^8 zu einer zweiten.

Zwei Korrelationen haben ∞^8 Paare polarer Fünfflache gemeinsam.

Oder in der 30fach unendlichen Mannigfaltigkeit von Paaren von Fünfflachen greifen die beiden 19fach unendlichen der Paare polarer Fünfflache von zwei Korrelationen mit einer achtfach unendlichen Mannigfaltigkeit ineinander über.

Wir sagen weiter von zwei Sechsflachen 570

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$$
$$\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6,$$

daß sie in einer Korrelation polar sind, wenn durchweg $\alpha_h\alpha_i\alpha_k$ zu $\beta_l\beta_m\beta_n$ konjugiert ist, wo wiederum die sechs Zeiger verschieden sind. Diese Punkte mögen Gegenpunkte heißen. Das sind 20 einfache Bedingungen, die sich aber auf zehn unabhängige werden reduzieren lassen. Von zwei Vierseiten $a_1a_2a_3a_4$, $b_1b_2b_3b_4$, die in korrelativen Feldern liegen, wissen wir, daß, wenn bei folgender Paarung der Ecken:

$$a_2a_3, \quad a_3a_1, \quad a_1a_2, \quad a_1a_4, \quad a_2a_4, \quad a_3a_4$$
$$b_1b_4, \quad b_2b_4, \quad b_3b_4, \quad b_2b_3, \quad b_3b_1, \quad b_1b_2$$

fünfmal untereinanderstehende Ecken konjugiert sind, dies auch für das sechste Paar gilt (Nr. 272).

Betrachten wir die Ebenen α_6 und β_5 und die beiden Vierseite, welche beziehentlich durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und $\beta_1, \beta_2\ \beta_3, \beta_4$ eingeschnitten werden. Durch den Bündel, welcher in der gegebenen Korrelation dem Felde α_6 entspricht, wird das Feld β_5 zu α_6 korrelativ, wobei ein Punkt von α_6 und die Spur seiner Polarebene in β_5 entsprechend sind. Paaren wir die Ecken der Vierseite folgendermaßen:

$$\alpha_6(\alpha_2\alpha_3,\ \alpha_3\alpha_1,\ \alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_4,\ \alpha_2\alpha_4,\ \alpha_3\alpha_4)$$

$$\beta_5(\beta_1\beta_4,\ \beta_2\beta_4,\ \beta_3\beta_4,\ \beta_2\beta_3,\ \beta_3\beta_1,\ \beta_1\beta_2).$$

Wenn $\alpha_6\alpha_2\alpha_3$ und $\beta_5\beta_1\beta_4$ konjugiert sind, so geht die Polarebene von $\alpha_6\alpha_2\alpha_3$ durch $\beta_5\beta_1\beta_4$ und folglich auch ihre Spur in β_5, die Punkte werden also auch konjugiert in der Korrelation der Felder α_6 und β_5; setzen wir daher bei den fünf ersten Paaren die Konjugiertheit voraus, so folgt von selbst, daß $\alpha_6\alpha_3\alpha_4$ und $\beta_5\beta_1\beta_2$ konjugiert sind.

Wir behalten α_6 bei, vertauschen aber β_5 mit β_4, schneiden also bzw. mit $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5$, $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_5$ und schließen auf die Konjugiertheit von $\alpha_6\alpha_3\alpha_5$ und $\beta_4\beta_1\beta_2$, und bei β_3 auf diejenige von $\alpha_6\alpha_4\alpha_5$ und $\beta_3\beta_1\beta_2$. Damit haben wir in α_6 drei Punkte, für welche und ihre Gegenpunkte wir folgern, daß sie konjugiert sind, während für die sieben andern und ihre Gegenpunkte dies Voraussetzung sei. Die Ebenen β_2, β_1 mit α_6 kombiniert, geben nichts Neues.

Die Ebene α_5 stellen wir mit $\beta_4, \beta_3, \beta_2$ zusammen und erkennen, daß $\alpha_5(\alpha_3\alpha_4,\ \alpha_4\alpha_2,\ \alpha_2\alpha_3)$ zu ihren Gegenpunkten konjugiert sein müssen, wobei unter den Voraussetzungen sich die vorherigen Ergebnisse befinden und drei neue herangezogen werden, nämlich die auf $\alpha_5(\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_3,\ \alpha_1\alpha_4)$ und ihre Gegenpunkte bezüglichen.

Die Ebene α_4 liefert, ohne daß neue Voraussetzungen notwendig werden, daß $\alpha_4(\alpha_2\alpha_3,\ \alpha_3\alpha_1,\ \alpha_1\alpha_2)$ zu den Gegenpunkten konjugiert sind, und durch α_3 erkennen wir es für $\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ und den Gegenpunkt. Für zehn Paare von Gegenpunkten der beiden Sechsflache ist also die Konjugiertheit vorausgesetzt und folgt dann für die zehn übrigen[1]).

Die Punkte der zehn Paare der Voraussetzung, die zum ersten Raume gehören, sind diejenigen, welche sich auf den Geraden $\alpha_2\alpha_6$, $\alpha_6\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_5$ befinden, von denen die mittlere mit jeder der beiden andern einen der Punkte gemein hat. Die im zweiten Raume sind die Ecken der drei Tetraeder $\beta_1\beta_3\beta_4\beta_5$, $\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5$, $\beta_2\beta_3\beta_4\beta_6$, von denen das mittlere mit den beiden andern je eine Ecke gemein hat. Von den zehn andern Paaren sind die einen die Ecken von $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$, $\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$, die andern liegen auf $\beta_5\beta_6$, $\beta_6\beta_1$, $\beta_1\beta_2$, bilden also ebensolche Gruppen wie vorhin, nur mit vertauschten Räumen; so daß erhellt, daß diese Paare auch zu denen der Voraussetzung gemacht werden

---

1) Rosanes, Journ. f. Mathem. Bd. 100, S. 313.

können. Durch jede dieser zehnpunktigen Gruppen ist das betreffende Sechsflach festgelegt; die zehn Punkte der Tetraeder $\beta_1\beta_3\beta_4\beta_5, \ldots$ zeigen es unmittelbar, und was die zehn Punkte auf $\alpha_2\alpha_6$, $\alpha_6\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_5$ anlangt, so ist α_1 bestimmt durch $\alpha_6\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_5$, α_2 durch $\alpha_2\alpha_6$ und $\alpha_1\alpha_5\alpha_2$, α_3 durch $\alpha_2\alpha_6\alpha_3$, $\alpha_6\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_3\alpha_5$, usw.

Wollen wir also in einer gegebenen Korrelation polare Sechsflache herstellen, so verfahren wir folgendermaßen. Wir legen in einen Raum, etwa den zweiten, sechs Ebenen $\beta_1, \ldots \beta_6$, ziehen im andern eine Gerade, welche wir mit den Polarebenen von $\beta_3\beta_4\beta_5$, $\beta_1\beta_4\beta_5$, $\beta_1\beta_3\beta_5$, $\beta_1\beta_3\beta_4$ schneiden, und erhalten die Punkte $\alpha_2\alpha_6(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$; durch $\alpha_2\alpha_6\alpha_1$ sei eine zweite Gerade gelegt, auf welcher die Polarebenen von $\beta_2\beta_4\beta_5$, $\beta_2\beta_3\beta_5$, $\beta_2\beta_3\beta_4$ die Punkte $\alpha_6\alpha_1(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ einschneiden, und durch $\alpha_6\alpha_1\alpha_5$ eine dritte, auf der wir durch die Polarebenen von $\beta_3\beta_4\beta_6$, $\beta_2\beta_4\beta_6$, $\beta_2\beta_3\beta_6$ die Punkte $\alpha_1\alpha_5(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ erhalten. Dadurch sind diese zehn Punkte $\alpha_2\alpha_6\alpha_1, \ldots$ den zehn Punkten $\beta_3\beta_4\beta_5, \ldots$ in der gegebenen Korrelation konjugiert gemacht; sie bestimmen die sechs Ebenen $\alpha_1, \ldots \alpha_6$, die übrigen Gegenecken sind nun von selbst konjugiert; die beiden Sechsflache $\alpha_1, \ldots \alpha_6$, $\beta_1, \ldots \beta_6$ also polar. Die sechs Ebenen $\beta_1 \ldots$ können wir in $\infty^{6.3}$ Weisen wählen, die drei Geraden in ∞^{4+2+2} Weisen; so ergibt sich die Mannigfaltigkeit 26.

Eine gegebene Korrelation besitzt ∞^{26} Paare polarer Sechsflache; sie werden durch die zehnfache Bedingung aus den $\infty^{6.6}$ Paaren von Sechsflachen ausgeschieden. Unter ihnen befinden sich ∞^{25} solche, welche sich so ergeben, daß zu zwei polaren Fünfflachen sechste Ebenen, und ∞^{24} solche, bei denen zu zwei polaren Tetraedern fünfte und sechste Ebenen hinzugefügt sind.

Die zehnfache Bedingung lehrt, daß zwei gegebene Korrelationen ∞^{16} Paare und drei gegebene Korrelationen ∞^{6} Paare polarer Sechsflache gemeinsam haben, so wie daß zwei gegebene Sechsflache in ∞^{5} Korrelationen polar sind. Daraus schließen wir wiederum, daß jede Korrelation $\infty^{6.6+5-15}$ Paare polarer Sechsecke besitzt. Innerhalb der 36fach unendlichen Mannigfaltigkeit von Sechsflach-Paaren greifen die beiden 26fach unendlichen der in zwei Korrelationen polaren mit einer 16fach unendlichen Mannigfaltigkeit (2.26—36) ineinander, die beiden gemeinsam ist, und diese mit der zu einer dritten Korrelation gehörigen 26fach unendlichen in einer sechsfach unendlichen, die allen dreien gemeinsam ist.

§ 86. Fokaleigenschaften kollinearer Räume.[1])

Die beiden Fluchtebenen von Σ, Σ' seien ρ und ω', also $\rho' \equiv \omega$ 571
die unendlich ferne Ebene, und (ρ), (ω') seien die Polarfelder

1) Dazu vgl. man die schon in Nr. 275 erwähnten Abhandlungen von

in ρ und ω', welche dem absoluten Polarfelde $(\rho') \equiv (\omega)$ in beiderlei Sinne entsprechen; auch die zugehörigen (imaginären) Basiskurven mögen so bezeichnet werden.

Einer Fläche 2. Grades in Σ entspricht nur dann eine Kugel in Σ', wenn jener das Polarfeld (ρ) zugehört (Nr. 338).

Wir nehmen im folgenden an, daß nicht Affinität vorliege; dann sind die unendlich fernen Geraden $q = \rho\omega$ und $q' = \rho'\omega'$ der Fluchtebenen die einzigen unendlich fernen Geraden, die sich entsprechen. In dem Bündel von Σ', welches dem Bündel der zu ρ normalen Geraden in Σ korrespondiert und seinen Scheitel auf ω' hat, befindet sich ein zu ω' senkrechter Strahl n'. Folglich gibt es ein Paar entsprechender Strahlen n, n', welche bzw. zu den Fluchtebenen ρ und ω' normal sind. Wir nennen sie mit Reye die Hauptgeraden der beiden Räume; bei Smith heißen sie Fokalaxen. Weil $n'\rho'$ und q' polar sind im absoluten Polarfelde (ρ'), so sind $M = n\rho$ und q polar in (ρ), also ist der Fußpunkt M von n in ρ der Mittelpunkt des Polarfeldes und der Kurve (ρ), und ebenso ist der Fußpunkt $O' = n'\omega'$ der Mittelpunkt von (ω').

In den projektiven Punktreihen auf n, n' sind M und O' die Fluchtpunkte. In den projektiven Ebenenbüscheln um n, n' haben wir zwei reelle entsprechende rechten Winkel $\sigma\tau, \sigma'\tau'$; es mögen diese vier Ebenen die Hauptebenen der beiden Räume heißen. Sie schneiden in ρ und ω' rechte Winkel ein; $\rho\sigma$ und $\rho\tau$ sind konjugiert im Polarfelde (ρ), weil $\rho'\sigma'$ und $\rho'\tau'$ es in (ρ') sind; also sind $\rho\sigma, \rho\tau$ die Axen von (ρ), und ebenso sind $\omega'\sigma', \omega'\tau'$ diejenigen von (ω').

In den beiden entsprechenden Tetraedern $\sigma\tau\rho\omega$, $\sigma'\tau'\rho'\omega'$ bilden die endlichen Ebenen σ, τ, ρ und σ', τ', ω' dreirechtwinklige Dreiflache mit den Scheiteln M, O'. Bezeichnen wir die acht Oktanten von σ, τ, ρ auf der einen Seite von ρ, sowie sie sich um den einen Halbstrahl von n herum aneinander schließen, mit I, II, III, IV und die auf der andern Seite von ρ an sie anstoßenden mit $V, VI, VII, VIII$. Dann liegen die entsprechenden $I', \ldots IV'$ der ersteren ebenfalls auf der einen Seite von ω', alle den entsprechenden Halbstrahl von n' enthaltend, und $V', \ldots VIII'$ auf der andern Seite; aber jetzt sind I' und V', II' und $VI', \ldots$ Scheiteloktanten, während es vorhin I und VII, II und $VIII, \ldots$ waren. Denn einer Gerade, welche senkrecht zu ρ ist und durch den unendlich fernen Punkt O von n geht, muß eine durch O' gehende Gerade korrespondieren; geht jene etwa durch I und V, so geht diese durch

---

Smith, Kilbinger und Reye, sowie eine Abhandlung von mir: Math. Annalen Bd. 28, S. 261.

I' und V'; diese müssen also Scheiteloktanten sein. Man sieht, daß dann auch in zwei entsprechenden Ebenen, welche durch n, n' gehen, entsprechende Quadranten so gelagert sind, wie es in Nr. 278 erörtert wurde.

Zwei Ebenen oder zwei Strahlen von Σ oder Σ', welche durch konjugierte Elemente von (ρ), bzw. (ω'), so wie einen Strahl und eine Ebene, welche durch polare Elemente dieser Polarfelder gehen, wollen wir, mit Cayley, quasinormal nennen[1]).

Zwei quasinormalen Elementen des einen Raumes entsprechen (wirklich) normale Elemente im andern.

Zu jeder Ebene des einen Raumes gibt es ∞^1 quasinormale Ebenen, darunter eine normale; diesen beiden normalen Ebenen entsprechen wiederum normale. Zu jeder Gerade gibt es ∞^2 quasinormale, darunter ∞^1 normale und unter diesen eine, welche sie schneidet; dies sind rechtwinklige Geraden, denen wieder rechtwinklige Geraden entsprechen. Zu jeder Ebene gibt es ∞^2 quasinormale Geraden, darunter eine normale Gerade; zu jeder Gerade ∞^1 quasinormale Ebenen, darunter aber im allgemeinen keine normale.

Eine Gerade, die zu einer Ebene quasinormal und normal ist, deren entsprechende Gerade also zur entsprechenden Ebene auch normal ist, nennt Reye konjugierten Normalstrahl. Wir wollen für eine bei der Kollineation erhalten bleibende Normalität, wie schon in Nr. 279, das Wort Pernormalität gebrauchen.

Alle Normalen auf σ und τ sind pernormal.

Aber auch jede Senkrechte zu ρ ist pernormal, weil auf der unendlich fernen Ebene jede Gerade normal ist.

Jede Gerade durch M ist pernormal zur unendlich fernen Ebene ω; denn ihr entspricht eine Senkrechte zu ω'.

Daraus, daß die Lote zu σ und τ pernormal sind, folgt, daß die Orthogonalprojektionen entsprechender Punkte auf σ und σ', oder τ und τ' entsprechend sind; man kann daher, darstellend-geometrisch, zu einem Punkte X den in der räumlichen Kollineation entsprechenden X' herstellen, indem man jenen orthogonal auf σ und τ projiziert, zu diesen Projektionen nach Nr. 281ff. in den kollinearen Feldern σ', τ' die korrespondierenden Punkte konstruiert; sie sind die Projektionen von X'.

Eine Schar konfokaler Flächen 2. Grades in Σ ist (Nr. 556) 572
durch die beiden ausgearteten Flächen (ω) und (ρ) konstituiert; ihr entspricht in Σ' die durch (ω') und (ρ') definierte Schar, welche ebenfalls aus konfokalen Flächen besteht, weil (ρ') die absolute Kurve ist. Somit besitzen die beiden Räume zwei entsprechende Scharen konfokaler Flächen 2. Grades: (ω), (ρ); (ω'), (ρ'). Sie

1) Reye nennt sie konjugiert.

haben bzw. $\sigma\tau\rho\omega$ und $\sigma'\tau'\rho'\omega'$ zu gemeinsamen Polartetraedern. In bezug auf einen Kegelschnitt, als Fläche 2. Klasse, ist jedes Tetraeder ein Polartetraeder, zu dem die Ebene des Kegelschnitts gehört und dessen drei andere Ebenen, von einem beliebigen Punkte (der ja immer jene Ebene zur Polarebene hat) ausgehend, ein Polardreieck des Kegelschnitts einschneiden. Daß $\sigma\tau\rho\omega$ für (ω) Polartetraeder ist, wissen wir schon; da aber $\rho\sigma$, $\rho\tau$ die Axen von (ρ) sind und daher mit der unendlich fernen Gerade $q = \rho\omega$ ein Polardreieck von (ρ) bilden, so ist es auch Polartetraeder von (ρ), und daher dasjenige der Schar.

Wir können uns aber auch unmittelbar eine eigentliche Fläche von einer dieser Scharen konstruieren. Es sei e die Pernormale der beliebigen Ebene η in Σ und E ein Punkt auf ihr; so ist durch $\sigma\tau\rho\omega$ als Polartetraeder und η und E als Polarebene und Pol eindeutig ein Polarraum F^2 festgelegt. Er bestimmt eine Schar konfokaler Flächen, und e ist die Polgerade von η für dieselbe. Die Ebenen σ, τ, ρ sind die gemeinsamen Hauptebenen, daher $\sigma\rho$, $\tau\rho$ die Axen für die in ρ gelegene Fokalkurve und der Schnitt ρe der Pol von η oder $\eta\rho$ in bezug auf dieselbe. Jenes, wie dieses gilt ebenso für (ρ); aber die Axen und einmal Pol und Polare bestimmen einen Kegelschnitt oder ein Polarfeld eindeutig; also ist (ρ) diese Fokalkurve, und wir sind zu der vorhin definierten Schar gelangt. In Σ' ist e' ebenfalls normal zu η'; irgend eine Fläche der Schar in diesem Raume ist, außer durch das Polartetraeder $\sigma'\tau'\omega'\rho'$, durch einen Punkt von e' als Pol von η' definiert; usw. Ihre imaginären Kegelschnitte sind (ρ') und (ω').

Die Hauptgeraden n, n' sind diejenigen Axen der beiden konfokalen Scharen, welche die größten Halbaxen-Quadrate haben und daher alle reellen Flächen der betreffenden Schar reell schneiden; weil sie auf den Ebenen ρ und ω' mit den imaginären Fokalkurven senkrecht stehen.

Die hyperbolischen, elliptischen Flächen der einen Schar gehen in hyperbolische, elliptische der andern Schar über; die Ellipsoide, zweimanteligen Hyperboloide treffen die Fluchtebene ρ reell, imaginär[1]), die unendlich ferne Ebene ω imaginär, reell, also schneiden die entsprechenden Flächen die unendlich ferne Ebene ρ' reell, imaginär, die Fluchtebene ω' imaginär, reell. Folglich entsprechen die Ellipsoide und zweimanteligen Hyperboloide der einen Schar den zweimanteligen Hyperboloiden und Ellipsoiden der andern Schar.

Mit den Flächen der einen und der andern Schar werden

---

1) Beim zweimanteligen Hyperboloid sind die Halbaxen in der Hauptebene mit der imaginären Fokalkurve imaginär.

auch ihre Krümmungslinien, als die gegenseitigen Schnittlinien (Nr. 557), entsprechend.

Die Brennpunkte auf n und n' sind alle reell (Nr. 555); 573
es seien die zu den Hauptebenen σ, σ' gehörigen F, F_1; F', F_1' und die zu τ und τ' gehörigen G, G_1; G', G_1'; dabei mögen F und G auf der einen, F_1 und G_1 auf der andern Seite von ρ liegen, woraus, wegen der Projektivität zwischen n und n', dasselbe für Σ' folgt. Da in der Kollineation zwischen σ und σ' die ausgeschnittenen Scharen konfokaler Kegelschnitte entsprechend und $\sigma\rho$, $\sigma'\rho'$ die Fluchtgeraden, n, n' die Hauptgeraden dieser kollinearen Felder sind, so sind die Brennpunkte F, F_1; F', F_1' (auf n, n') dieser Scharen die Brennpunkte der Kollineation (Nr. 282); d. h. die Büschel (F, σ), (F', σ') sind gleich und ebenso (F_1, σ) und (F_1', σ'); und ähnliches gilt in τ und τ' für G, G_1; G', G_1'. Wir führen die halben Entfernungen dieser Brennpunkte als die vier Parameter der räumlichen Kollineation ein, die jedoch, durch eine Beziehung verbunden, nur mit dreien äquivalent sind:

$$c_\sigma = \tfrac{1}{2}FF_1, \quad c_\tau = \tfrac{1}{2}GG_1, \quad c_\sigma' = \tfrac{1}{2}F'F_1', \quad c_\tau' = \tfrac{1}{2}G'G_1'.$$

Für die projektiven Punktreihen auf den Hauptgeraden n, n' sind nämlich die Mittelpunkte M, O' die Fluchtpunkte; den F, F_1, G, G_1 entsprechen F', F_1', G', G_1'; also besteht wegen der Potenz der projektiven Beziehung zwischen den Parametern die Relation:

$$c_\sigma \cdot c_\sigma' = c_\tau \cdot c_\tau' = C.$$

Wenn a, a' die Halbaxen auf n, n' von entsprechenden Flächen aus den konfokalen Scharen sind, — bei sämtlichen reellen Flächen reell —, so ist auch $aa' = C$.

Vermittelst der kanonischen Gleichungen zwischen den Koordinaten entsprechender Punkte in den kollinearen Feldern σ und σ', bzw. τ und τ' (Nr. 281) erhalten wir die kanonischen Gleichungen für die räumliche Kollineation. Machen wir also in Σ die Geraden $n = \sigma\tau$, $\sigma\rho$, $\tau\rho$ zur x-, y-, z-Axe und in Σ' die Geraden $n' = \sigma'\tau'$, $\sigma'\omega'$, $\tau'\omega'$ zur x'-, y'-, z'-Axe, so haben wir in σ und σ':

$$xx' = c_\sigma c_\sigma' = C, \quad yx' = c_\sigma y' \quad (\text{oder } xy' = c_\sigma' y),$$

in τ und τ':

$$xx' = c_\tau c_\tau' = C, \quad zx' = c_\tau z' \quad (\text{oder } xz' = c_\tau' z).$$

Da nun beliebige entsprechende Punkte sich auf σ, σ' und auf τ, τ' orthogonal in entsprechende Punkte projizieren, so sind:

$$xx' = C, \quad yx' = c_\sigma y', \quad zx' = c_\tau z'$$

die gesuchten kanonischen Gleichungen. Werden die Koordinatensysteme so eingerichtet, daß die beiden positiven Oktanten $(+\,+\,+)$ einander entsprechen, so müssen die Parameter positiv sein, und man sieht von neuem, wie z. B. den in ρ zusammenstoßenden Oktanten $(+++)$ und $(-++)$ die Scheiteloktanten $(+++)$ und $(---)$ korrespondieren.

574 Eine Gerade g in Σ treffe die Koordinatenebenen σ, τ in den Punkten (x, y) und (x_1, z_1), so bildet ihre Orthogonalprojektion auf ρ mit der y- und der z-Axe ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten y, z_1 sind; die Hypotenusenhöhe ist gleich dem gemeinsamen Lote zwischen n und g; bezeichnen wir dessen Länge mit $\overline{gn}$ (oder $\overline{ng}$), so ist:

$$\overline{gn} = \frac{y z_1}{\sqrt{y^2 + z_1^2}};$$

die Tangente des Winkels der g gegen ρ ist $\frac{x_1 - x}{\sqrt{y^2 + z_1^2}}$; also ist:

$$\operatorname{tang} gn = \frac{\sqrt{y^2 + z_1^2}}{x_1 - x},$$

und demnach ist der Parameter von g in bezug auf n (Nr. 533):

$$\overline{gn} \cdot \operatorname{tang} gn = \frac{y z_1}{x_1 - x}.$$

Dies Produkt ist positiv, wenn die von g berührte Schraubenlinie um n als Axe so beschaffen ist, daß, wofern bei der Bewegung auf ihr die Verschiebung längs der Axe im Sinne der positiven x erfolgt, die Drehung um die Axe den Sinn von der positiven y- zur positiven z-Axe hat;[1]) denn je nachdem y und z_1 gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, ist dann $x_1 >$ oder $< x$. Entspricht g' der g, so ist ebenso:

$$\overline{g'n'} \cdot \operatorname{tang} g'n' = \frac{y' z_1'}{x_1' - x'}.$$

Also ist, wegen der kanonischen Gleichungen:

$$\overline{gn} \cdot \operatorname{tang} gn : \overline{g'n'} \operatorname{tang} g'n' = -\frac{c_\sigma c_\tau}{C} = -\frac{c_\tau}{c_\sigma'} = -\frac{c_\sigma}{c_\tau'}.$$

Mithin ist das Verhältnis der Parameter zweier entsprechenden Geraden der beiden kollinearen Räume, je in bezug auf die Hauptgerade, konstant.[2])

Wenn dem positiven Oktanten von Σ der positive von Σ' entspricht, ist dies Verhältnis negativ. Damit ist noch nicht gesagt, daß die von g und g' berührten Schraubenlinien um n, bzw. n' ungleiche Windung haben. Denn man kann nur in dem einen Raume die positiven Axen willkürlich bestimmen, im andern sind sie durch die obige

---

1) Die Schraubenlinie heißt rechts- oder linksgewunden, je nachdem dieser Drehungssinn, von der positiven x-Axe her betrachtet, der Sinn der Uhrzeiger-Drehung ist oder nicht (Nr. 533).

2) Segre, Giornale di Matematiche Bd. 25 S. 23 Anm.

Festsetzung bestimmt; und die beiden Koordinatensysteme können gleich orientiert sein, d. h. so, daß sie mit den gleichnamigen Halbaxen zur Deckung gebracht werden können, oder nicht. Je nachdem nun jenes oder dieses gilt, haben die genannten Schraubenlinien ungleiche oder gleiche Windung.

Erst nach der Bestimmung der positiven Sinne auf den Koordinatenaxen hat das Verhältnis ein bestimmtes Vorzeichen.

Die Hauptgerade n als Axe und der Strahl g bestimmen ein Gewinde (Nr. 533), für welches n und die unendlich ferne Gerade $\rho\omega$ der Fluchtebene ρ polar sind; also entspricht ihm ein Gewinde, für welches n' und $\rho'\omega'$, die unendlich ferne Gerade von ω', polar sind, das also n' zur Axe hat. Für jenes ist der Parameter $k = \overline{gn} \cdot \operatorname{tang} gn$ (Nr. 533), für dieses $k' = \overline{g'n'} \cdot \operatorname{tang} g'n'$. Die Gewinde um n als Axe bilden einen Büschel, dessen Grund-Strahlennetz die Leitgeraden n und $\rho\omega$ hat, und ebenso die um die Axe n'. Der Parameter individualisiert in jedem ein Gewinde; und die Kollineation ruft zwischen den Büscheln eine Projektivität hervor, mit der bilinearen Relation zwischen den Parametern:

$$\lambda k k' + \mu k + \mu' k' + \nu = 0.$$

Es sind in ihr entsprechend die Strahlengebüsche mit den Axen n, n', die Inbegriffe der Geraden, welche n, bzw. n' treffen, sowie diejenigen mit den Axen $\rho\omega$, $\rho'\omega'$; für jene ist der Parameter 0, weil die Lote $\overline{gn}$ und $\overline{g'n'}$ diesen Wert haben, für diese ist er ∞, weil gn und $g'n'$ rechte Winkel sind. Wenn aber $k = 0$, $k' = 0$, sowie $k = \infty$, $k' = \infty$ der Relation genügen, so reduziert sie sich auf $\mu k + \mu k' = 0$, oder $k : k' = -\mu' : \mu$, also konstant.

Wenn wieder a die immer reelle Halbaxe, auf n, einer (reellen) 575
Fläche der Schar in Σ ist, so gilt für die Halbaxen-Quadrate auf $\sigma\rho$, $\tau\rho$:

$$b_\sigma^2 = a^2 - c_\sigma^2, \quad b_\tau^2 = a^2 - c_\tau^2;$$

also sind die Quadrate der halben Exzentrizitäten der Fokalkurve (ρ) auf diesen Axen: $c_\tau^2 - c_\sigma^2$, $c_\sigma^2 - c_\tau^2$.

Es sei $c_\sigma < c_\tau$, also $c_\sigma' > c_\tau'$; dann ist $b_\sigma^2 > b_\tau^2$, und a, b_σ, b_τ gehören zu einem Ellipsoide, ein- oder zweimanteligen Hyperboloide, je nachdem $a > c_\tau$, $c_\tau > a > c_\sigma$, $c_\sigma > a$ ist.

Die Halbaxen-Quadrate der Fokalkurven in σ, τ, ρ sind:

$$c_\tau^2,\ c_\tau^2 - c_\sigma^2,\ 0; \quad c_\sigma^2,\ 0,\ c_\sigma^2 - c_\tau^2; \quad 0,\ -c_\sigma^2,\ -c_\tau^2;$$

so daß in σ die Fokalellipse, in τ die Fokalhyperbel sich befindet. Jene schneidet ρ reell, also schneidet die ihr entsprechende Fokalkurve in σ' die unendlich ferne Ebene ρ' reell und ist Hyperbel.

Die imaginäre Fokalkurve (ρ) hat ihre reellen Brennpunkte auf $\rho\sigma$, in den Scheiteln der kleineren Axe der Fokalellipse.

Erwähnen wir kurz hier zwei ausgezeichnete Büschel von Flächen 2. Grades, die sich entsprechen. Der (isotrope) Kegel aus $M = \sigma\tau\rho$ nach (ω) und der Zylinder aus $\sigma\tau\omega$, dem unendlich fernen Punkte von n, nach (ρ) gehen über in den Zylinder aus $\sigma'\tau'\rho'$, dem unendlich fernen Punkte von n', nach (ω') und den (isotropen) Kegel aus $O' = \sigma'\tau'\omega'$ nach (ρ'), also der Büschel jener in den Büschel dieser; $\sigma\tau\rho\omega$ und $\sigma'\tau'\rho'\omega'$ sind die gemeinsamen Polartetraeder. Das sind Büschel „konjunkter" Flächen 2. Grades, je definiert durch eine Fläche 2. Grades und den isotropen Kegel aus ihrem Mittelpunkte.[1])

576 Jeder von den Parametern hat auch Bezug auf den andern Raum (Nr. 277); c_σ', c_σ sind die halben Entfernungen der gleichstreckigen Geraden in σ und σ' und c_τ', c_τ diejenigen der gleichstreckigen Geraden in τ und τ'.

Die rechtwinkligen Ebenen der Involution gemeinsam konjugierter Ebenen um eine Fokalaxe der Schar konfokaler Flächen in Σ sind, weil auch in bezug auf (ρ) konjugiert, pernormal; ihnen entsprechen rechtwinklige Ebenen, welche in bezug auf alle Flächen der entsprechenden Schar konjugiert sind. Einer Fokalaxe der einen Schar entspricht also eine Fokalaxe der andern Schar, oder einfacher, einer Gerade einer Fläche der einen Schar eine Gerade der entsprechenden Fläche der andern Schar.

Da nun jedem rechten Winkel in dem einen der projektiven Ebenenbüschel um zwei entsprechende Fokalaxen ein rechter Winkel im andern korrespondiert, so sind die beiden Büschel gleich. Die entsprechenden Fokalaxen der beiden korrespondierenden Scharen konfokaler Flächen tragen gleiche Ebenenbüschel; die entsprechenden isotropen Ebenen, die Doppelebenen der Involutionen, lehren dies unmittelbar.

Oder auch, entsprechende Geraden auf entsprechenden Flächen der beiden Scharen tragen gleiche Ebenenbüschel.

Und umgekehrt, zwei entsprechende Geraden von Σ und Σ', welche gleiche Ebenenbüschel tragen, haben die isotropen Ebenen entsprechend; weil die einen (ω) und die andern (ρ') berühren, so berühren diese (ω') und jene (ρ); folglich gehören jene und diese zu den Torsen, welche den konfokalen Scharen umgeschrieben sind, die Axen sind, als Schnittlinien zweier Ebenen eines solchen Torsus, Geraden einer Fläche der betreffenden Schar.

Diese Geraden, deren Ebenenbüschel den entsprechenden gleich sind, bilden daher in dem einen und dem andern Raume je eine Kongruenz 6. Ordnung 2. Klasse.

In jedem von zwei entsprechenden Bündeln P und P' der beiden

1) Cremona, Annali di Matematica Ser. I Bd. 3 S. 257.

Räume sind die Axen (Nr. 340) die Kanten des gemeinsamen Polardreikants der Tangentialkegel-Schar an die betreffende Schar konfokaler Flächen oder die Normalen der durch P, bzw. P' gehenden Flächen dieser Schar; weil die Berührungsebene des einmanteligen Hyperboloids die reellen Fokalaxen enthält, so ist (Nr. 346) dessen Normale die mittlere Axe.

Zu den beiden Geraden in einer Ebene ξ, deren Ebenenbüschel den entsprechenden gleich sind, kann man auch so gelangen. Es seien x und x' die beiden entsprechenden Pernormalen auf ξ und der entsprechenden Ebene ξ'. Alle Ebenen, welche mit ξ einen gegebenen (nicht rechten) Winkel α bilden, umhüllen einen unendlich fernen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, und diejenigen, welche ihn mit ξ' bilden, einen $\mathfrak{L}'^2$, dem in ρ der Kegelschnitt $\mathfrak{L}^2$ entspricht; folglich umhüllen die Ebenen in Σ, die mit ξ den Winkel α und deren entsprechende ihn mit ξ' bilden, den Torsus, welcher $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{L}^2$ umgeschrieben ist. Er wird von ξ in einer Kurve 4. Klasse geschnitten und t sei eine durch den Punkt ξx geführte Tangente derselben, so haben wir durch sie eine Ebene ζ, welche mit ξ den Winkel α bildet, und deren entsprechende ζ' ihn mit ξ' bildet; die zu ξ senkrechte Ebene η durch t geht durch x, also geht η' durch x' und ist senkrecht zu ξ'. Aus diesen beiden gleichen Winkeln $\xi\eta, \xi'\eta'$ und $\xi\zeta, \xi'\zeta'$ kann man auf Gleichheit der beiden Büschel um t und t' schließen. Es enthalten zwar zwei projektive Fbenenbüschel zwei Systeme gleicher entsprechender Winkel, und im allgemeinen gehört jedes Paar entsprechender Ebenen zu zwei Paaren gleicher entsprechender Winkel, zu einem aus jedem System; ausgenommen sind die Ebenen, welche die entsprechenden rechten Winkel einschließen, die sich in beiden Systemen befinden; diese Ebenen gehören nur zu den entsprechenden rechten Winkeln (Nr. 61). In unserem Falle aber gehören ξ, ξ' zu den rechten Winkeln $\xi\eta$, $\xi'\eta'$ und zwei andern gleichen $\xi\zeta, \xi'\zeta'$. Das bedingt Gleichheit der Büschel. Durch t geht aber eine zweite Ebene ζ_1, welche mit ξ den Winkel α bildet; wegen der gleichen Büschel ist $\xi'\zeta_1' = \xi\zeta_1 = \alpha$; also ist auch ζ_1 Tangentialebene jenes Torsus und daher t Doppeltangente der Kurve 4. Klasse; die vier von ξx kommenden Tangenten sind daher zwei Doppeltangenten und die Geraden unserer Kongruenz.

Der Punkt, in welchem sich die beiden in einer Ebene ξ befindlichen Geraden schneiden, deren Ebenenbüschel den entsprechenden gleich sind, ist der Fußpunkt der Pernormale von ξ, der Normale der ξ berührenden Fläche der Schar. Die sechs Geraden aus einem Punkte sind die Fokalaxen in seinem Bündel, die ihm und seinem kollinearen Bündel zugehören, (Nr. 345) zwei reell und vier imaginär, die Schnittkanten der vier gemeinsamen Ebenen der Kegel, welche aus dem Punkte die Kurven (ρ) und (ω) projizieren. Liegt der Punkt P auf einer der reellen Fokalkurven, so ist der (ρ) projizierende Kegel ein Rotationskegel (Nr. 557), der also den isotropen Kegel, welcher (ω) projiziert, doppelt berührt; daher vereinigen sich von den sechs Schnittkanten die beiden reellen und zwei imaginäre in die Axe des Rotationskegels — die Schnittlinie der beiden Berührungsebenen —, die beiden andern sind die Kanten, längs denen die Berührungen stattfinden.

Die Kegel aus dem entsprechenden Punkte P' auf der entsprechenden Fokalkurve, welche (ρ') und (ω') projizieren, berühren sich auch doppelt, so daß der letztere auch Rotationskegel ist. Die Kollineation der beiden Bündel P und P' ist also derartig, daß den isotropen Kegeln Rotationskegel entsprechen; Smith nennt sie dann sphäroidal.

577 Jede Normale einer der konfokalen Flächen in Σ oder Σ' ist pernormal zu ihrer Berührungsebene; also geht sie in die Normale an die entsprechende Fläche im entsprechenden Punkte über. Folglich transformieren sich diese konfokalen Flächen mit allen ihren Normalen. Daß die Krümmungslinien der einen Flächen denen der andern entsprechen, wissen wir schon; nunmehr erkennen wir, daß auch der Normalen-Developpabeln einer Fläche der einen Schar längs einer Krümmungslinie diejenige längs der entsprechenden Krümmungslinie auf der entsprechenden Fläche entspricht. Es entsprechen also auch die Krümmungs-Mittelpunkte in entsprechenden Punkten einander und die Flächen der Krümmungs-Mittelpunkte entsprechender Flächen der beiden Scharen.

Eine geodätische Linie auf einer Fläche ist eine solche, deren Schmiegungsebene in jedem Punkte durch die Flächennormale derselben geht.

Folglich geht auch jede geodätische Linie einer von den konfokalen Fläche des einen Raums in eine geodätische Linie der entsprechenden Fläche über.

Mit den Krümmungslinien gehen auch die Nabelpunkte (Nr. 552) einer der Flächen der Schar in die Nabelpunkte der entsprechenden Fläche über; sie sind ja auch die Schnitte mit den Fokalkurven. Die Durchmesser aber, welche nach entsprechenden Nabelpunkten gehen, sind nicht entsprechend, daher auch nicht die ihnen konjugierten Ebenen, welche die zugehörigen Flächen in Kreisen schneiden.

Nimmt man aus der einen Schar zwei gleichartige Flächen, etwa zwei Ellipsoide, so seien diese so affin aufeinander bezogen, daß die Axen sich selbst entsprechen; die Affinität ist dadurch festgelegt, daß der Mittelpunkt sich selbst entspricht, und den einen Scheiteln der einen Fläche die je auf derselben Halbaxe gelegenen Scheitel der andern entsprechen. In dieser Affinität entsprechende Punkte der beiden Ellipsoide heißen korrespondierende Punkte im Sinne von

Ivory (Nr. 481). Die Affinität, in welcher $\sigma, \tau, \rho, \omega$ sich selbst entsprechend sind, geht durch die gegebene Kollineation über in eine Kollineation, in der $\sigma', \tau', \rho', \omega'$ sich selbst entsprechend sind, also in eine Affinität; und in ihr entsprechen die beiden den Ellipsoiden entsprechenden zweimanteligen Hyperboloide einander. Korrespondierende Punkte nach Ivory gehen also in ebenfalls korrespondierende Punkte über.

Die Ebenen in Σ, deren Felder den entsprechenden Feldern affin sind, sind die Parallelebenen λ zur Fluchtebene ρ, und ihre entsprechenden Ebenen λ' sind zu ω' parallel; die Geraden, deren Punktreihen den entsprechenden ähnlich sind, sind die Parallelen zu ρ und erzeugen daher das Strahlengebüsche, dessen Axe oder Leitgrade die unendlich ferne Gerade q von ρ ist, und dem das Gebüsche $[q']$ korrespondiert. 578

In diesem Gebüsche $[q]$ bilden die gleichstreckigen Geraden s, deren Punktreihen den entsprechenden gleich sind, eine Kongruenz (s).

Die Klasse dieser Kongruenz ist 2; denn in jeder Ebene $\mathfrak{x}$ liegen zwei solche Geraden und zwar zwei stets reelle. Sie sind gleichweit von der Fluchtgerade $\mathfrak{x}\rho$ entfernt und zu ihr parallel. Ist $\mathfrak{x}$ senkrecht zu ρ, so erkennt man, daß die Kongruenz normalsymmetrisch ist in bezug auf ρ, und die entsprechende (s') in bezug auf ω'.

Aber auch die Ordnung ist 2; denn die durch einen Punkt X gehenden Geraden s müssen in der Parallelebene λ durch X zu ρ liegen. Bei zwei affinen Feldern λ und λ' gehen aber durch jeden Punkt des einen zwei gleichstreckige Geraden. Diese Geraden sind für alle Punkte derselben Ebene reell oder für alle imaginär. Denn wir haben in λ zwei immer reelle zueinander rechtwinklige Richtungen, denen in λ' wieder solche Richtungen entsprechen (Nr. 284), offenbar die von $\lambda\sigma$ und $\lambda\tau$. Sie sind also für alle Ebenen λ dieselben; die unendlich fernen Punkte seien S_∞, T_∞. Wenn XS, XT zwei Strecken dieser Richtungen in λ sind und $X'S'$, $X'T'$ ihnen entsprechen, so seien:

$$\frac{X'S'}{XS} = \mu, \quad \frac{X'T'}{XT} = \nu^{1)};$$

die beiden gleichstreckigen Geraden s durch X teilen dann (Nr. 284) den Winkel SXT nach dem Teilverhältnisse:

$$\frac{\sin(XS, s)}{\sin(XT, s)} = \operatorname{tg}(XS, s) = \pm\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\nu^2-1}}$$

und sind nur dann reell, wenn eins der Verhältnisse μ, ν echt, das andere unecht ist.

---

1) Das sind die a. a. O. mit σ, τ bezeichneten Verhältnisse.

Wenn A_1A_2, B_1B_2 parallel und gleich und zu ρ parallel sind, so sind auch $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$ parallel, aber $A_1'B_1'$ und $A_2'B_2'$ sind nur dann parallel, wenn jene in derselben Parallelebene λ zu ρ sich befinden; dann und nur dann sind die Verhältnisse $\frac{A_1'A_2'}{A_1A_2}$ und $\frac{B_1'B_2'}{B_1B_2}$ gleich. In derselben Ebene λ sind daher die obigen Verhältnisse μ, ν fest und daher auch die Richtungen der Geraden s. Jeder Parallelebene λ zu ρ gehören daher zwei feste Punkte $\mathfrak{S}_\infty$, $\mathfrak{S}_{1,\infty}$ auf q zu, nach denen die gleichstreckigen Geraden in ihr gehen; sie sind harmonisch zu S_∞, T_∞ und gehören auch zur symmetrischen Ebene λ, auf der andern Seite von ρ.

So werden die Ebeneninvolution um q, deren gepaarte Ebenen λ und λ_1 symmetrisch in bezug auf ρ sind, und die Punktinvolution auf q, deren Doppelpunkte S_∞, T_∞ sind, projektiv zu einander. Und die Kongruenz 2. Ordnung 2. Klasse der gleichstreckigen Geraden s entsteht durch alle die Strahlenbüschel, deren Scheitel und Ebenen zu entsprechenden Paaren dieser Involutionen gehören.[1])

Wir durchschneiden die Ebenen λ (auf der einen Seite von ρ) mit einer Gerade g je in X; jedesmal seien in λ die Strecken XS, XT von gegebener Länge gezogen; S, T durchlaufen daher Parallelen zu g, hingegen S', T' bewegen sich auf zwei Geraden, die sich mit g' auf ω′ begegnen, so daß $X'S'$, $X'T'$ immer parallel zu ω′ sind. Wenn X (und λ) im Unendlichen, X' auf ω′ liegt, fallen S', T' in X', daher sind μ und ν gleich 0, und gleichartig. Es liegen demnach zunächst Ebenen λ vor, in denen die Geraden s nicht reell sind. $X'S'$, $X'T'$ wachsen; wir nehmen an, daß zuerst $X'T'$ die Länge von XT erreicht (das wird mit $c_\tau > c_\sigma$ stimmen), so daß $\nu = 1$ geworden ist; die gleichstreckigen Geraden aus X fallen beide in XT_∞. Die Ebenen seien λ_T, λ_T'. Bei λ_S, λ_S' habe $X'S'$ die Länge XS erreicht, wo dann die beiden s aus X in XS_∞ zusammenfallen. Es gibt mithin im Raume Σ gleichstreckige Geraden nur innerhalb eines jeden von den beiden in bezug auf ρ symmetrischen Streifen $[\lambda_S\lambda_T]$, und in Σ' innerhalb $[\lambda_S'\lambda_T']$.

Während λ den Parallelstreifen $[\lambda_S\lambda_T]$ durchläuft, nehmen die gleichstreckigen Geraden alle Richtungen, die in den Ebenen λ möglich sind, an, die einen innerhalb des einen Scheitelwinkel-Paars der Geraden XS_∞, XT_∞, die andern innerhalb des andern. Folglich entspricht wohl jedem reellen Paare der Punktinvolution ein reelles Paar der Ebeneninvolution, aber nicht umgekehrt.

Die Brennfläche der Kongruenz (s) besteht, als Ort der

---

1) Liniengeometrie Bd. II Nr. 491. 492.

Punkte, von denen zwei vereinigte Kongruenzstrahlen kommen, aus den vier Ebenen λ_S, λ_T, als Ort der Ebenen, in denen zwei vereinigte Kongruenzstrahlen liegen, aus den Bündeln um die vier (imaginären) Punkte der beiden Paare der Punktinvolution, welche den Paaren $\rho\rho, \omega\omega$ der Ebeneninvolution korrespondieren.

Alle Ebenen, welche ρ in parallelen Geraden schneiden, haben ihre beiden Geraden s in zwei festen Ebenen λ — in jedem der Parallelstreifen einer —, welche das Paar bilden, das dem Paare auf q entspricht, zu dem der unendlich ferne Punkt jener Parallelen gehört. Insbesondere gilt dies für Ebenen, welche ρ in derselben Gerade r schneiden.

Die Geraden s in den Ebenen eines Büschels erzeugen eine aus zwei Schalen bestehende Regelfläche 4. Grades mit q und der Axe des Büschels als doppelten Leitgeraden. Sie entsteht durch zwei projektive Punktinvolutionen auf diesen Geraden, von denen die auf q die obige ist, während die auf der Axe durch die Ebeneninvolution um q eingeschnitten wird. Jeder Punkt der unendlich fernen Leitgerade q sendet zwei reelle Erzeugenden aus, auf der andern tun es nur diejenigen Punkte, die auf den in den beiden Parallelstreifen $[\lambda_S\lambda_T]$ befindlichen Strecken liegen.

Insbesondere ist die Fläche hervorzuheben, welche zu dem Büschel um die Hauptgerade n gehört: diese ist auch Hauptgerade in der Kollineation zwischen jeder dieser Ebenen und der entsprechenden durch n'. Die Ebene σ geht durch S_∞, also fallen ihre gleichstreckigen Geraden in die beiden Ebenen λ_S; deren Entfernung ist (Nr. 277) gleich derjenigen der Brennpunkte in σ', mithin $2c'_\sigma$. Also ist $2c'_\sigma$ die Entfernung der beiden Ebenen λ_S, und die der λ_T ist $2c'_\tau$; folglich haben in Σ die beiden Parallelstreifen die Breite $c'_\sigma - c'_\tau$ und die im andern Raume die Breite $c_\tau - c_\sigma$. Mithin haben wir auf n zwei symmetrisch in bezug auf M liegende Strecken, deren Endpunkte von M die Entfernungen c_σ, c_τ haben und innerhalb deren die Brennpunkte der Ebenen ξ durch n sich bewegen; derartig, daß jeder Punkt einer von diesen Strecken für zwei Ebenen ξ Brennpunkt ist, weil durch den gleich weit von O' entfernten Punkt auf n' gleichstreckige Geraden in zwei Ebenen ξ' gehen; auf n' haben diese Brennpunkt-Strecken ihre Endpunkte in den Entfernungen c'_τ, c'_σ von O'.

Suchen wir die Beziehung zwischen der Entfernung d der beiden gleichstreckigen Geraden s in einer Ebene ξ durch n von M oder der beiden Ebenen λ, in denen sie liegen, von ρ und dem Winkel $\theta = \sigma\xi$.

Auf den Geraden $\sigma'\lambda'_S$ und $\sigma'\lambda'$ seien von den Schnitten mit n'

die gleichen Strecken $X_0'S_0'$, $X'S'$ in gleichem Sinne aufgetragen, so daß $S_0'S' \| X_0'X'$ oder n'. Daher trifft S_0S die X_0X oder n im Punkte M. In den Ebenen λ_S und λ_S' ist $X_0S_0 = X_0'S_0'$, denn da tragen gerade die nach S_∞ und S_∞' gehenden Geraden gleiche Punktreihen; daher ist auch $X'S' = X_0S_0$, also gilt in λ und λ':

$$\mu = \frac{X'S'}{XS} = \frac{X_0S_0}{XS} = \frac{X_0M}{XM} = \frac{c_\sigma'}{d},$$

weil X und X_0 von M die Entfernungen d und c_σ' haben; ebenso:

$$\nu = \frac{c_\tau'}{d}.$$

Der Winkel θ ist aber der Winkel der Schnitte $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ von λ mit σ und ξ, denn $\lambda\xi$ ist ja die eine gleichstreckige Gerade in ξ; also ist nach Nr. 284:

$$\operatorname{tg} \theta^2 = \frac{1-\mu^2}{\nu^2-1} = \frac{d^2 - c_\sigma'^2}{c_\tau'^2 - d^2};$$

und:

$$d^2 = c_\sigma'^2 \cos\theta^2 + c_\tau'^2 \sin\theta^2.$$

Dies ist die Beziehung. Nach derselben Nr. 284 ist, wenn θ' der Winkel $\sigma'\xi'$ oder $\mathfrak{f}'\mathfrak{g}'$ ist:

$$\operatorname{tg}\theta'^2 = \frac{\frac{1}{\mu^2} - 1}{1 - \frac{1}{\nu^2}} = \frac{\nu^2}{\mu^2} \cdot \frac{1-\mu^2}{\nu^2 - 1} = \frac{\nu^2}{\mu^2} \operatorname{tg}\theta^2;$$

also ist:

$$\operatorname{tg}\theta'^2 = \frac{c_\tau'^2}{c_\sigma'^2} \operatorname{tg}\theta^2 = \frac{c_\sigma^2}{c_\tau^2} \operatorname{tg}\theta^2,$$

weil ja $c_\sigma \cdot c_\sigma' = c_\tau \cdot c_\tau'$.

Für die Entfernung d' der gleichstreckigen Geraden in ξ' von O' müssen wir entsprechend haben:

$$d'^2 = c_\sigma^2 \cos\theta'^2 + c_\tau^2 \sin\theta'^2.$$

Die gleichstreckigen Geraden in ξ und ξ' treffen n und n' in entsprechenden Punkten, also muß auch dd' gleich der Potenz $c_\sigma \cdot c_\sigma'$ der projektiven Beziehung auf n, n' sein (Nr. 573); was man leicht bestätigt, wenn man die Formel für d^2 umformt in:

$$d^2 = \frac{c_\sigma'^2 + c_\tau'^2 \operatorname{tg}\theta^2}{1 + \operatorname{tg}\theta^2}$$

und ähnlich die für d'^2.

Die Formel für d (oder d') läßt sich verallgemeinern. Ebenen, welche ρ in parallelen Linien schneiden, haben ihre gleichstreckigen Geraden in denselben Parallelebenen zu ρ; also ist θ der Winkel, mit σ, derjenigen Ebene durch n, die zu der Schnittlinie einer beliebigen Ebene ξ mit ρ parallel ist, und d die Entfernung der gleichstreckigen Geraden in ξ von ρ.

Wir haben noch die gleichen Strahlenbüschel der beiden 579
kollinearen Räume Σ und Σ' zu untersuchen. Da tritt uns zunächst der Unterschied der Mannigfaltigkeit entgegen. Es gibt in Σ oder Σ' nur ∞^2 gleichstreckige Geraden (deren Punktreihen denen der entsprechenden gleich sind), jede zu allen ∞^1 Ebenen durch sie gehörig, und ebenso ∞^2 Fokalaxen (deren Ebenenbüschel den entsprechenden gleich sind), jede zu ∞^1 Bündeln gehörig. Dagegen gibt es ∞^3 Strahlenbüschel ($\mathfrak{F}$, φ), welche den entsprechenden Büscheln gleich sind, jeder nur zu einem Punkte und einer Ebene gehörig. Wir wissen schon, in jeder Ebene φ existieren zwei immer reelle Strahlenbüschel: um die in φ gelegenen Brennpunkte $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ der kollinearen Felder φ und φ', aus jedem Punkte $\mathfrak{F}$ kommen sechs, gelegen in den zyklischen Ebenen des Bündels $\mathfrak{F}$, welche er durch seine Kollineation mit $\mathfrak{F}'$ erhält; sie gehen zu je zweien durch die Axen des Bündels, d. i. die Normalen der drei Flächen der Schar, welche durch $\mathfrak{F}$ gehen; reell sind nur die, welche durch die mittlere Axe, die Normale des einmanteligen Hyperboloids, gehen.

Die beiden Punkte $\mathfrak{F}$, die zu einer Ebene φ gehören, ergeben sich dadurch, daß den Strahlen des Büschels ($\mathfrak{F}$, φ), welche nach den absoluten Punkten von φ, d. i. nach den Schnitten von φ mit (ω) gehen, im homologen Büschel ($\mathfrak{F}'$, φ') Strahlen entsprechen, welche ebenfalls nach den absoluten Punkten, also nach den Schnitten von φ' mit (ρ') gehen, so daß jene Strahlen aus ($\mathfrak{F}$, φ) auch (ρ) treffen müssen; schneidet daher φ die Kurve (ω) in O_1, O_2 und die Kurve (ρ) in R_1, R_2, so sind $\mathfrak{F} = (O_1R_1, O_2R_2)$ und $\mathfrak{F}_1 = (O_1R_2, O_2R_1)$ — beide reell als Schnittpunkte konjugiert imaginärer Strahlen — die beiden Punkte $\mathfrak{F}$ in φ; sie sind die beiden Punkte, aus denen die absolute Involution von φ und diejenige, in welcher φ das Polarfeld (ρ) schneidet, je durch die nämliche Strahleninvolution projiziert werden (Nr. 78).

Umgekehrt, die sechs Ebenen φ, welche zu einem Punkte $\mathfrak{F}$ gehören, sind die Verbindungsebenen der vier gemeinsamen Kanten der Kegel aus $\mathfrak{F}$ nach (ω) und (ρ).

Wenn φ durch einen Parallelebenen-Büschel sich bewegt, bleiben O_1, O_2 fest und der Ort der zugehörigen Punkte $\mathfrak{F}$ ist der zweite Kegelschnitt, in dem die beiden Kegel sich schneiden, welche aus O_1, O_2 den (ρ) projizieren, ersichtlich eine Hyperbel h, weil alle Ebenen des Büschels ihn zweimal reell treffen. Er begegnet sich zweimal mit (ρ). Das Viereck der Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte (ρ) und h mit jeder Ebene des Büschels zeigt, daß die beiden Punkte O_1, O_2 zu den Ebenen von (ρ) und h harmonisch sind und die Spuren der Gerade O_1O_2 in diesen Ebenen in bezug auf (ρ), bzw. h zur Schnittlinie der Ebenen polar sind. Daher sind die

Schnittlinien der Ebenen des Büschels mit den Ebenen von (ρ) und h normal zueinander und zur Schnittlinie der beiden Ebenen, als gemeinsamem Durchmesser, in bezug auf (ρ) und h konjugiert.

Handelt es sich z. B. um die Parallelebenen zu σ, so ist $\rho\tau$, weil konjugiert zu $\rho\sigma$ in bezug auf (ρ), Schnittlinie der beiden Ebenen, so daß, weil h — oder h_σ in diesem Falle — durch die Brennpunkte F und F_1 geht, τ die Ebene von h_σ ist; $\rho\tau$ ist Polare des Punktes $n\omega$ nach h_σ, also Axe von h_σ; die Endpunkte dieser Axe sind die Schnitte mit (ρ), das Halbachsen-Quadrat ist also $-c_\tau^2$. Weil M der Mittelpunkt von (ρ) ist, so ist er es auch von dieser Axe, also ist n die andere Axe der Hyperbel, F, F_1 sind ihre Scheitel und c_σ^2 das Halbaxen-Quadrat. In σ liegen also, von allen diesen parallelen Ebenen, die Brennpunkte am nächsten an ρ.

Die Brennpunkte der Parallelebenen zu σ beschreiben eine Hyperbel h_σ in τ mit den Halbaxen-Quadraten c_σ^2 und $-c_\tau^2$ auf n und $\rho\tau$.

Ebenso ergibt sich eine in σ gelegene Hyperbel h_τ, mit den Halbaxen-Quadraten c_τ^2 und $-c_\sigma^2$ auf n und $\rho\sigma$, als Ort der Brennpunkte in den Parallelebenen zu τ.

Betrachten wir jetzt einen Ebenenbüschel, dessen Axe in ρ liegt; dann sind die Punkte R_1, R_2 fest und als Ort der Brennpunkte ergibt sich der zweite Kegelschnitt k, in dem sich die isotropen Kegel aus R_1, R_2 schneiden; er trifft (ω) zweimal und ist ein Kreis. Der unendlich ferne Punkt der Büschelaxe und die unendlich ferne Gerade der Ebene von k sind polar in bezug auf (ω), daher ist die Ebene von k zur Büschelaxe normal. Der Schnitt dieser Axe mit der Ebene von k ist harmonisch zum unendlich fernen Punkte in bezug auf R_1, R_2, daher konjugiert in (ρ) und polar zur Schnittlinie der beiden Ebenen, also zur unendlich fernen Gerade der Ebene von k; folglich ist er Mittelpunkt von k.

Der Ort der Brennpunkte der Ebenen eines Büschels, dessen Axe in ρ liegt, ist ein Kreis, dessen Ebene auf dieser Axe in dem Punkte senkrecht steht, welcher ihrem unendlich fernen Punkte in dem Polarfelde (ρ) konjugiert ist; dieser Punkt ist Mittelpunkt des Kreises.

Zu diesem Brennpunkte-Kreise kann man auch in folgender Weise gelangen.

Dem Ebenenbüschel mit der Axe r in ρ entspricht in Σ' ein Parallelebenen-Büschel mit unendlich ferner Axe r'; wir wissen, die gleichstreckigen Geraden s', s_1' in diesen Ebenen befinden sich in denselben zwei Parallelebenen λ' zur Fluchtebene ω'; also ist die Entfernung $s's_1'$ konstant. Dasselbe gilt für die ihr gleiche Entfernung der Brennpunkte $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ in unsern Ebenen durch r. Die gleichen Büschel um $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ in irgendeiner Ebene φ durch r und ihrer entsprechenden projizieren die entsprechenden Punktreihen auf r und r'; da letztere unendlich fern ist, so hat der projizierende Büschel, wo auch das Zentrum liegt, feste Gestalt. Einen mit ihm gleichen haben wir in φ über r zu stellen. Dem unendlich fernen Punkte von r und dem zu ihm konjugierten $\mathfrak{R}$ in bezug auf (ρ) entsprechen auf r' zwei in bezug auf (ρ') konjugierte, deren Richtungen also rechtwinklige zueinander sind. Daher muß auch im gesuchten Büschel über jenen beiden Punkten ein rechter Winkel stehen; mithin liegen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ auf dem Lote, das auf r in dem Punkte $\mathfrak{R}$ errichtet ist. Man sieht, wie sie den oben beschriebenen Kreis erzeugen.

Wenn die Axe des Büschels die $\sigma\rho$ oder $\tau\rho$ ist, dann liegt der Brennpunkte-Kreis in τ, σ, hat M zum Mittelpunkt und c_σ, bzw. c_τ zum Radius.

Diese Kreise k durchschneiden die Fluchtebene ρ, die immer zum Ebenenbüschel gehört, reell, und wir erhalten in jedem der Büschel für die Fluchtebene zwei Brennpunkte, die sich von einem Büschel zum andern verändern. In der Tat treffen die beiden von irgendeinem Punkte X der ρ nach ihren absoluten Punkten gehenden Strahlen (ω) und (ρ) und zwar (ρ) zweimal, so daß diese beiden Strahlen die vier von einem beliebigen Punkte ausgehenden Treffgeraden von (ω) und (ρ) repräsentieren und die ρ vier von den sechs Verbindungsebenen darstellt; die beiden übrigen Ebenen sind die Berührungsebenen des isotropen Kegels aus X längs jener Kanten. Die Fluchtebene hat jeden ihrer Punkte zum Brennpunkte, jeder Strahlenbüschel in ihr kann als gleich mit seinem entsprechenden unendlich fernen angesehen werden. Das gilt also auch für die unendlich ferne Ebene und ihre Punkte. Dazu führen auch die Hyperbeln h, welche sich bei den Parallelebenen-Büscheln ergeben haben.

Allgemein affine Felder haben keine gleichen entsprechenden Strahlenbüschel (Nr. 287); also haben wir in den Parallelebenen λ zu ρ keine Brennpunkte zu erwarten, wenigstens keine endlichen. In jeder solchen Ebene fallen die vier Punkte O_1, O_2, R_1, R_2 in dieselbe Gerade q und die beiden Punkte $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ erweitern sich auf diese ganze Gerade. Zu jeder der Parallelebenen λ von ρ gehört jeder ihrer unendlich fernen Punkte als Brennpunkt; jedem solchen Büschel mit unendlich fernem Scheitel entspricht ein ebensolcher; wenn sie auch nicht deckbar sind, so sind sie doch winkelgleich.

Wir wollen aber die Korrespondenz von $\mathfrak{F}$ und φ noch etwas weiter verfolgen; wir lassen $\mathfrak{F}$ auf einer Gerade g sich bewegen und untersuchen den von φ beschriebenen Torsus. Von jedem $\mathfrak{F}$ auf g gehen vier Treffgeraden von (ω) und (ρ) aus; nach den sechs Verbindungslinien der Treffpunkte mit (ρ) gehen die sechs von $\mathfrak{F}$ kom- 580 menden Ebenen φ. Die Endpunkte dieser Sehnen von (ρ) bilden auf dieser Kurve eine involutorische Korrespondenz [6]; denn von jedem Punkte von (ρ) geht ein Kegel 2. Grades nach (ω), und von dessen beiden Schnitten mit g gehen je drei weitere Treffgeraden von (ρ) und (ω) und liefern auf (ρ) die sechs jenem Punkte korrespondierenden Punkte; da er ganz ebenso aus jedem von ihnen sich ergibt, ist die Korrespondenz involutorisch, und die Verbindungslinie korrespondierender Punkte, jene Sehnen, umhüllen (Nr. 194) die Direktionskurve 6. Klasse $\mathfrak{G}_6$ dieser Korrespondenz, die reell ist auch bei imaginären Kurven (ρ) und (ω), wie sie uns vorliegen; von den sechs zu demselben $\mathfrak{F}$ gehörigen φ sind ja immer zwei reell. Zwischen den Tangenten dieser Kurve und der Punktreihe auf g besteht nun eine Korrespondenz der Art, daß zu jedem Punkte von g sechs Tangenten gehören, zu jeder Tangente aber nur ein Punkt. Denn der Kegelschnitt, welcher den beiden Kegeln nach (ω) aus zwei Punkten von (ρ) außerdem noch gemeinsam ist, trifft g nur dann, wenn diese Punkte in der Korrespondenz [6] zugeordnet, also durch eine Tangente der Kurve 6. Klasse verbunden sind, und dann im allgemeinen nur einmal. Die Ebenen des Torsus, den wir suchen, verbinden nun entsprechende Elemente von g und $\mathfrak{G}_6$. Projizieren wir die Punktreihe von g aus einem beliebigen Punkte X auf die Ebene ρ in die Gerade l, so entsteht auf dieser eine Korrespondenz [6, 6], in der die Projektion eines Punktes von g und der Schnitt mit der korrespondierenden Tangente von $\mathfrak{G}_6$ einander entsprechen. Zu den zwölf Koinzidenzen gehört der Punkt $g\rho$ doppelt, weil die beiden Geraden aus ihm in ρ nach den Schnitten der ρ mit (ω) ihm entsprechende Tangenten sind. Mit diesem Punkte haben sich, als Punkte der einen und der andern Reihe auf l, zwei entsprechende vereinigt (Nr. 187). Die zehn übrigen Koinzidenzen beweisen, daß durch X zehn Verbindungsebenen entsprechender Elemente von g und $\mathfrak{G}_6$, also zehn Ebenen unseres Torsus gehen.

Die Ebenen φ, die den Punkten $\mathfrak{F}$ einer Gerade g zugeordnet sind, umhüllen einen Torsus 10. Klasse.

Weil jedem Punkte $\mathfrak{F}$ sechs zugeordnet sind, so müssen die vier übrigen, welche durch einen Punkt von g gehen, zu andern Punkten von g gehören, und daher durch g gehen.

Es gibt folglich auf jeder Gerade vier Punkte $\mathfrak{F}$, von deren zugeordneten Ebenen φ eine durch sie geht, oder:

Jede Gerade gehört zu vier Strahlenbüscheln $(\mathfrak{F}, \varphi)$, welche ihren entsprechenden gleich sind.

Die zehn Ebenen des Torsus, welche durch einen Punkt P gehen, lehren:

Die Punkte $\mathfrak{F}$, welche zu den Ebenen φ eines Bündels P gehören, erzeugen eine Fläche 10. Ordnung; denn zehn liegen auf g. Der Scheitel P ist, wegen der sechs ihm zugeordneten Ebenen φ, die alle zum Bündel gehören, ein sechsfacher Punkt der Fläche.

Dreht sich φ um eine Gerade g, so beschreiben die beiden zugehörigen $\mathfrak{F}$ eine Kurve 6. Ordnung, welche der Gerade g viermal begegnet; denn unter den Ebenen des Büschels gibt es, nach dem obigen Satze, vier Ebenen, in denen der eine $\mathfrak{F}$ auf g liegt.

Wenn wir oben bei Geraden g, die in ρ oder ω liegen, als Ort der Brennpunkte $\mathfrak{F}$ nur eine Kurve 2. Ordnung erhalten haben, so so liegt es daran, daß in dem Büschel die ausgezeichnete ρ oder ω mit unendlich vielen Brennpunkten sich befindet.

Bei dem Ebenenbüschel um die Hauptgerade n zerfällt die Kurve in diese Gerade doppelt und vier Geraden, die von den Berührungsebenen aus n an (ρ) und (ω) herrühren; es fallen in ihnen die vier Geraden O_1R_1, O_2R_2, O_1R_2, O_2R_1 zusammen.

Schneiden wir die Kurve 6. Ordnung mit einer Ebene, so ergibt sich:

Die den Punkten $\mathfrak{F}$ eines Feldes zugeordneten Ebenen φ umhüllen eine Fläche 6. Klasse, zu welcher die Ebene des Feldes doppelt gehört.

Es ist noch interessant, in den Ebenen φ eines Büschels g die Verbindungslinie der beiden Brennpunkte $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ und ihre Regelfläche zu verfolgen. Diese Gerade ist die Hauptgerade von φ, diejenige Senkrechte zur Fluchtgerade $\varphi\rho$, der eine ebenfalls zur Fluchtgerade $\varphi'\omega'$ normale Gerade entspricht. Wie viele solche Geraden gehen durch einen bestimmten Punkt G von g? Die Lote aus G auf die verschiedenen Fluchtgeraden erzeugen einen Kegel 2. Grades, der durch g geht; er ist das Erzeugnis des Büschels g und des zu ihm projektiven Büschels der Ebenen aus G, senkrecht zu den $\varphi\rho$. Aus dem entsprechenden Punkte G' konstruieren wir ebenso den Kegel der Lote auf die $\varphi'\omega'$ und dann aus G den ihm in der Kollineation entsprechenden. Beide Kegel aus G haben g gemeinsam; die drei andern gemeinsamen Kanten sind die gesuchten Geraden.

Folglich ist für die Regelfläche der Geraden $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$ die Leitgerade g eine dreifache und daher diese Regelfläche 4. Grades.

Man kann sie auch in folgender Weise entstehen lassen. Die beiden Geraden O_1O_2, R_1R_2, in denen eine Ebene φ durch g die Ebenen ω und ρ trifft, drehen sich um die Punkte $\mathfrak{O} = g\omega$ und $\mathfrak{R} = g\rho$ und schneiden sich stets auf der Schnittlinie $\rho\omega$: in U; $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$ ist die Diagonale des Vierecks $O_1O_2R_1R_2$, welche dem Diagonalpunkt U gegenüberliegt, und ihre Schnitte O, R mit O_1O_2 und R_1, R_2 oder ω, ρ sind daher konjugiert zu U in (ω) und (ρ), bewegen sich demzufolge auf zwei in ω, ρ gelegenen und durch $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{R}$ gehenden Kegelschnitten, auf denen sie eindeutig bezogene Punktreihen erzeugen. Diese Punktreihen rufen in einem Ebenenbüschel eine Korrespondenz [2, 2] hervor; in die Koinzidenzebenen fallen die Geraden OR oder $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$, welche die Axe des Büschels treffen.

581 Zwei entsprechende (nicht affine) Felder der kollinearen Räume Σ, Σ' enthalten zwei entsprechende Kreisbüschel (Nr. 280), deren endliche Grundpunkte die (imaginären) Schnittpunkte der Ebene mit (ρ) und (ω') sind oder deren auf diesen ihren in ρ und ω' gelegenen Potenzlinien befindliche Involutionen konjugierter Punkte diejenigen sind, welche zu den Polarfeldern (ρ) und (ω') gehören. Alle Kreise des einen Raumes Σ, welche (ρ) zweimal treffen oder welche mit (ρ) eine Involution konjugierter Punkte gemein haben, gehen wiederum in Kreise über, die dann (ω') zweimal treffen. Jede Gerade von ρ führt zu ∞^2 solchen Fokalkreisen, und es gibt ihrer also ∞^4.

Durch zwei Punkte P_1, P_2 gehen zwei von diesen Fokalkreisen. Wenn nämlich P_1P_2 die Ebene ρ in O trifft, so enthält die Kurve (ρ) zwei Paare von Punkten X_1, X_2, je gelegen auf einer Gerade durch O, für welche $OX_1 \cdot OX_2 = OP_1 \cdot OP_2$. Denn durch O gehen zwei Geraden, welche (ρ) und den Kreis um O mit dem Radius $\sqrt{OP_1 \cdot OP_2}$ harmonisch schneiden (Nr. 124). Solche Punkte X_1, X_2 liegen mit P_1, P_2 auf einem Kreise.

Eine Gerade a in ρ bestimmt durch ihre Schnitte mit (ρ) oder die sie darstellende Involution konjugierter Punkte einen Kugelbündel (Kugelnetz), der diese Schnitte zu Grundpunkten hat; jeder Fokalkreis, der zu a gehört oder a zu seiner „Fokalkreis-Axe“ hat, ist Grundkreis eines Kugelbüschels in diesem Kugelbündel.

Auf jeder Kugel κ^2 von Σ gibt es sechs Büschel von Fokalkreisen, darunter zwei reelle. Axen der Ebenenbüschel, in denen diese Kreise liegen, sind die gemeinsamen Sekanten, die (ρ) mit dem Kreise $\kappa^2\rho$ hat. Diese sechs Geraden, insbesondere die beiden reellen, heißen die der Kugel zugehörigen Fokalkreis-Axen. Bei zwei solchen, die ein Paar in dem Büschel [(ρ), $\kappa^2\rho$] bilden, — vor allem bei den beiden reellen — sind die Halbierungslinien der Winkel parallel zu $\rho\sigma$ und $\rho\tau$; denn die unendlich fernen Punkte dieser zueinander rechtwinkligen Geraden sind sowohl in bezug auf (ρ) als auf $\kappa^2\rho$ konjugiert, also auch in bezug auf jedes der drei Geradenpaare; sie mögen verbundene Fokalkreis-Axen der Kugel heißen.

Umgekehrt, wenn von zwei Geraden a, a_1 in ρ die unendlich fernen Punkte zu denen von $\rho\sigma$ und $\rho\tau$ harmonisch liegen, so gehören sie als verbundene Fokalkreis-Axen zu den Kugeln eines Büschels, dessen Grundkreis in ρ liegt. Denn die unendlich fernen Punkte von $\rho\sigma$ und $\rho\tau$ sind konjugiert in bezug auf (ρ) und auf das Geradenpaar (a, a_1); folglich gehört die absolute Involution auf q, in der sie ein Paar bilden, als Involution konjugierter Punkte zu einem Kegelschnitte des Büschels $[(\rho), aa_1]$, also einem Kreise; und dieser ist der Grundkreis.

Der Kugel κ^2 entspricht in Σ' eine elliptische Fläche 2. Grades; auf dieser liegen drei Paare verbundener Büschel von Kreisen, je in Parallelebenen, darunter ein reelles. Diesen entsprechen auf κ^2 drei Paare verbundener Büschel von Kreisen, je in Ebenen eines Büschels gelegen, deren Axen in ρ sich befinden; das sind die drei Paare verbundener Fokalkreis-Axen, die zu κ^2 gehören.

§ 87. Sphäroidale Kollineation.

Einer Kugel kann im allgemeinen keine Kugel entsprechen, denn dann müßte sie durch (ρ) gehen, diese Kurve also der absoluten Kurve (ω) zweimal begegnen, was im allgemeinen nicht der Fall ist. 582

Wir wollen uns der Betrachtung dieses Spezialfalles zuwenden, aber zunächst von der Voraussetzung ausgehen, daß

$$c_\sigma = c_\tau, \text{ also auch } c'_\sigma = c'_\tau.$$

Es genügt daher die Bezeichnung c, c'. Die beiden symmetrischen Strecken auf n, innerhalb deren die zu den Ebenen durch n gehörigen Brennpunkte liegen, reduzieren sich auf zwei Punkte F, F_1, in der Entfernung c von M, welche Brennpunkte für alle Ebenen durch n sind; ihnen entsprechen auf n' die allen Ebenen durch diese Gerade gemeinsamen Brennpunkte F', F_1', in der Entfernung c' von O'. Ingleichen reduzieren sich die beiden symmetrischen Parallelstreifen, innerhalb deren sich die gleichstreckigen Geraden von Σ befinden, je auf eine Ebene γ und γ_1 in der Entfernung c' von ρ; ihnen entsprechen γ' und γ_1' in der Entfernung c von ω'. Jede Ebene ξ hat ihre beiden gleichstreckigen Geraden in γ und γ_1; jede Gerade in γ und γ_1 trägt also eine Punktreihe, die der entsprechenden gleich ist. Daher sind jede zwei entsprechenden Strecken in γ und γ' gleich, jede zwei entsprechenden Dreiecke kongruent. Also sind die Felder γ und γ' kongruent, und ebenso die γ_1 und γ_1'.

Die Projektivität auf n und n' bedingt, daß, wenn F näher an γ und daher F_1 näher an γ_1 liegt, das Entsprechende auch im andern Raume gilt. Daher haben F von γ und F' von γ' gleiche Entfernung, die Differenz von c und c'; F und F' liegen auf Loten, die auf γ und γ' in entsprechenden Punkten errichtet sind. Folglich müssen die Bündel F und F', welche die kongruenten Felder γ und γ' projizieren, kongruent sein, und ebenso die Bündel F_1 und F_1'.

Es sind also in diesem Falle zwei Paare kongruenter Felder und zwei Paare kongruenter Bündel vorhanden.

In den Ebenenbüscheln um n und n', welche dadurch gleich geworden sind, gibt es keine ausgezeichneten Ebenen σ, τ; σ', τ' mehr; jede zwei rechtwinkligen Ebenen durch n können σ und τ sein, und ebenso in Σ'.

Folglich haben die Kurven (ρ) und (ω') rechtwinklige Involutionen konjugierter Durchmesser erhalten, sind (imaginäre) Kreise mit den Radiusquadraten $-c^2$, $-c'^2$ geworden. Sie treffen also beide die absolute Kurve $(\omega) \equiv (\rho')$ zweimal. Wenn (ρ) die (ω) zweimal trifft, so müssen (ω') und (ρ') sich ebenfalls zweimal, in den entsprechenden Punkten, treffen.

Der Kugelbüschel mit dem (endlichen) Grundkreise (ρ) geht in den Kugelbüschel mit dem Grundkreise (ω') über. Die Zentralen dieser Kugelbüschel sind n und n'.

Wir fanden schon, wenn einer Kugel in Σ eine Kugel in Σ' entsprechen soll, muß (ρ) die (ω) zweimal treffen.

Weil die beiden Bündel F und F' kongruent sind, so entsprechen die isotropen Kegel in ihnen einander (Nr. 356); da sie nach $(\omega) \equiv (\rho')$ gehen, geht der aus F auch nach (ρ) und der aus F' nach (ω'); dasselbe gilt für F_1 und F_1'. F und F_1 sind die Scheitel der beiden Kegel 2. Grades, welche in diesem Falle durch die sich zweimal schneidenden Kegelschnitte (ρ) und (ω) gelegt werden können (Nr. 501), und F' und F_1' die der Kegel durch (ρ') und (ω'). Und aus der Voraussetzung des zweimaligen Schneidens jener und dieser Kurven folgt, daß die dann möglichen Kegel 2. Grades durch (ρ) und (ω) denen durch (ρ') und (ω') entsprechen, und weil sie isotrope Kegel sind, erhalten wir kongruente Bündel um die einen und die andern entsprechenden Scheitel.

Umgekehrt, zwei kongruente entsprechende Bündel in Σ, Σ' bedingen, daß die isotropen Kegel in ihnen, weil sie wegen der Kongruenz entsprechend sind, auch durch (ρ) und (ω') gehen, daß also (ρ) und (ω), und ebenso (ρ') und (ω'), je auf demselben Kegel 2. Grades gelegen, sich zweimal schneiden.

Die zweiten Kegel 2. Grades durch (ρ) und (ω), bzw. (ρ') und (ω'), sind dann auch entsprechend, ihre Scheitel reell und ihre Bündel kongruent. Ein reelles Paar kongruenter entsprechender Bündel zieht ein zweites Paar nach sich.

Aus den Eigenschaften der zwei Kegel 2. Grades durch zwei Kegelschnitte (Nr. 501) folgt, daß die Verbindungslinie der Scheitel der Bündel in Σ, die den entsprechenden kongruent sind, auf der Gerade, die auf ρ im Mittelpunkt von (ρ) senkrecht steht, von ρ halbiert wird.

Die isotropen Kegel (F) und (F_1), bzw. (F') und (F_1') sind die Punktkugeln der obigen einander entsprechenden Kugelbüschel.

Die Berührungsebenen der Kegel (F) und (F_1) bilden den 583
Torsus 4. Klasse, welcher den Kurven (ρ) und (ω) umgeschrieben ist, und daher auch allen konfokalen Flächen in Σ, denen konfokale Flächen entsprechen. In den beiden Schnittpunkten von (ρ) und (ω) werden die Kegel von denselben Ebenen berührt, den beiden durch $n = FF_1$ gehenden, also alle Flächen der Schar; da der Mittelpunkt M auf n liegt, so gehören diese Ebenen auch zum Asymptotenkegel einer jeden Fläche der Schar; derselbe berührt die absolute Kurve (ω) doppelt. Also sind alle diese Flächen Rotationsflächen.

Das folgt auch daraus, daß sämtliche Schnittkurven von ihnen in den Ebenen durch n nicht bloß dieselben Scheitel auf dieser Axe haben, sondern auch die nämlichen Brennpunkte F, F_1; also sind sie kongruent.

Und ebenso sind die entsprechenden Flächen in Σ' Rotationsflächen. Wegen dieser Eigenschaft hat Smith diese spezielle Kollineation sphäroidal genannt.

Fokalaxen in Σ, d. h. Axen von Ebenenbüscheln, welche den entsprechenden gleich sind, sind ersichtlich die Strahlen der Bündel F und F_1. Die Vervollständigung dieser Bündel zur vollen Kongruenz 6. Ordnung 2. Klasse geschieht durch die imaginäre Kongruenz 4. Ordnung 2. Klasse der gemeinsamen Tangenten der isotropen Kegel (F) und (F_1); sie ist imaginär, weil diese Kegel reell-imaginär sind, also zwei konjugiert imaginäre Berührungsebenen immer demselben Kegel angehören, demnach die Schnittlinien von Berührungsebenen verschiedener Kegel, jene gemeinsamen Tangenten, durchweg imaginär sind.[1])

Die Strahlen der Bündel F und F_1 sind die einzigen reellen Fokalaxen in Σ.

Alle Flächen der Schar in Σ haben die Hauptgerade n zur Drehaxe, und weil das Halbaxen-Quadrat auf ihr das größte ist, also bei allen reellen Flächen reell, so enthält die Schar keine einmanteligen Hyperboloide; in der Tat, der Spielraum, zwischen c_τ und c_σ (Nr. 575), für die Halbaxen derselben auf n ist auf c zusammengeschrumpft. Die reellen Fokalkurven in σ und τ, welche sonst die

---

1) In dem Problem, welches am Schlusse von Nr. 80 erwähnt wird, kommt auch eine Schar konfokaler Rotationsflächen vor, aber die umgeschriebenen isotropen Kegel kommen aus imaginären Punkten, den Doppelpunkten der gegebenen elliptischen Involution, sind daher zueinander konjugiert imaginär, und die Kongruenz 4. Ordnung 2. Klasse — der in Nr. 80 gesuchte Ort der Strahlen, aus denen die Involution durch eine rechtwinklige Ebeneninvolution projiziert wird, — reell. Diese Schar enthält nur einmantelige Hyperboloide und Ellipsoide. Hier ist in der zur Drehaxe senkrechten Hauptebene ein reeller Fokalkreis vorhanden: der Ort der Punkte, aus denen die gegebene Involution durch rechtwinklige Strahleninvolutionen projiziert wird.

Abteilung jener Hyperboloide einschließen, haben sich in das Punktepaar (FF_1) mit den Halbaxen-Quadraten c^2, 0 zusammengezogen; aber, während eine Fokalkurve, die ein eigentlicher Kegelschnitt ist, eine bestimmte Ebene hat, die dann, doppelt gerechnet, die zugehörige Punktfläche darstellt, ist hier, beim Punktepaare die Ebene unbestimmt jede Ebene durch n, wie ja auch σ und τ unbestimmt geworden sind.

Während die einmanteligen Hyperboloide, als Ebenenflächen, auf das Bündelpaar FF_1 sich reduziert haben, sind sie, als Punktflächen, in einfach unendlicher Mannigfaltigkeit verblieben; jede Ebene durch n, doppelt gerechnet, repräsentiert eine.

Und zu den drei durch einen Punkt X gehenden Flächen der Schar gehört immer, als einmanteliges Hyperboloid, die doppelte Meridianebene durch ihn und Normale, also mittlere Axe des Bündels X in der Kollineation zwischen ihm und dem entsprechenden X', ist das Lot auf ihr.

Die Regelscharen eines jeden dieser einmanteligen Hyperboloide haben sich vereinigt in das Strahlenbüschel-Paar von F, F_1 in der betreffenden Meridianebene.

Jeder Kreis in Σ, auf dessen Ebene im Mittelpunkte die Hauptgerade n senkrecht steht, ist Schnitt zweier ungleichartiger elliptischer Flächen der Schar, die noch in einem zweiten zu ihm in bezug auf ρ symmetrischen Kreise sich schneiden. Diese Kreise gehen in die Kreise über, welche den beiden entsprechenden Flächen gemeinsam sind. Nehmen wir dazu die Gleichheit der Ebenenbüschel um n und n', so erkennen wir, daß sphäroidal-kollineare Räume dadurch entstehen, daß zwei kollineare Felder um ihre Hauptgeraden gleichwinklig gedreht werden, d. h. so, daß zwei Lagen des einen und die entsprechenden Lagen des andern immer gleiche Winkel bilden.

Da jede zwei rechtwinkligen Ebenen durch n die Ebenen σ, τ sein können, so durchlaufen die Punkte S_∞, T_∞ (Nr. 578) auf q die absolute Involution. Folglich müssen die beiden zu einer beliebigen Parallelebene λ zu ρ gehörigen Punkte $\mathfrak{S}_\infty$, $\mathfrak{S}_{1,\infty}$, weil zu allen diesen S_∞, T_∞ harmonisch, in die absoluten Punkte von q fallen. Die imaginären gleichstreckigen Geraden in einer beliebigen Parallelebene zur Fluchtebene ρ gehen immer nach deren absoluten Punkten, den Schnitten von (ρ) und (ω).

Weil in den entsprechenden Parallelebenen λ und λ' zu ρ, bzw. ω' die absoluten Punkte $(\rho)(\omega)$ den absoluten Punkten $(\rho')(\omega')$ korrespondieren, so sind die Felder in ihnen ähnlich: die Affinität, die im allgemeinen Falle statt hat, ist durchweg Ähnlichkeit und bei zwei Paaren γ und γ', γ_1 und γ_1' Kongruenz. Die Punktreihen auf q und q' (oder über ihnen stehende Strahlenbüschel) sind gleich.

Für jeden Punkt $\mathfrak{F}$ ergibt sich der eine reelle Büschel $(\mathfrak{F}, \varphi)$ hier unmittelbar in der durch ihn gehenden λ; die beiden durch $\mathfrak{F}$ gehenden Treffgeraden von (ρ) und (ω), von denen er herrührt, sind die, welche nach den Schnitten dieser Kurven gehen. Seine Ebene φ geht, wie notwendig, durch das Lot in $\mathfrak{F}$ auf der Meridianebene, die mittlere Axe des Bündels $\mathfrak{F}$. Die zweite reelle, auch durch dies Lot gehende φ verbindet die beiden andern Treffgeraden, und wir können dem $\mathfrak{F}$ hier eindeutig diese zweite reelle φ zuordnen, während, wie im allgemeinen Falle, jeder reellen φ zwei reelle $\mathfrak{F}$ zugeordnet sind. Bei dieser Zuordnung entspricht der Reihe von Punkten $\mathfrak{F}$ auf einer Gerade g ein Torsus 3. Klasse von Ebenen φ, von welchen zwei durch g gehen, und einem Büschel von Ebenen φ um g eine Raumkurve 4. Ordnung von Punkten $\mathfrak{F}$, von denen zwei auf g liegen. Die Geraden $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1$ in diesen Ebenen erzeugen eine Regelschar.

Im allgemeinen Falle fanden wir ∞^4 Kreise, die in Kreise übergehen; offenbar tun das im vorliegenden Falle die Kreise auf den Kugeln, die in Kugeln übergehen, und alle Kreise, die zu ρ parallel sind. Ein Kreis, der in einen Kreis übergeführt wird, muß (ρ) zweimal treffen, also hier den Grundkreis des Kugelbüschels, der in einen Kugelbüschel übergeht und liegt daher auf einer Kugel desselben; es sei denn, daß er (ρ) in dessen absoluten Punkten trifft. Ferner, wenn vorausgesetzt wird, daß in zwei entsprechenden Parallelebenen λ, λ' zu ρ, ω' — in andern ist es nicht möglich, solange nicht Affinität vorliegt — die Felder ähnlich seien, so bedeutet dies, daß die absoluten Punkte von λ denen von λ' entsprechen, jene sind auf (ω) gelegen, die entsprechenden müssen daher auf (ω') liegen, als absolute Punkte aber auf (ρ'); daher müssen sich (ρ') und (ω') zweimal begegnen, also auch (ρ) und (ω), und es liegt sphäroidale Kollineation vor, und alle Paare entsprechender Ebenen λ, λ', die zu den Fluchtebenen parallel sind, tragen ähnliche Felder.

Mit der Voraussetzung, daß die (affinen) Felder λ und λ' ähnlich sind, ist gleichbedeutend die Voraussetzung, daß sie entsprechende Kreise enthalten; denn das fordert auch das Entsprechen der absoluten Punkte.

Schneidet man die Parallelebenen λ zu ρ mit zwei Parallelen a, b je in A, B und die entsprechenden λ' mit a', b', die sich auf ω' schneiden, in A', B', so zeigt sich, daß das Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{A'B'}{AB}$ alle Werte zweimal durchläuft oder einmal, wenn man berücksichtigt, daß beim Durchgange durch ω' der Sinn von $A'B'$ sich umkehrt und das Vorzeichen sich ändert. Bewegt sich λ auf der Seite von ρ, wo γ liegt, vom Unendlichen auf γ zu und von γ auf ρ zu, so bewegt sich λ' von ω' auf γ' zu und von γ' ins Unendliche.

584 Stellen wir die verschiedenen Kennzeichen, an denen man sphäroidale Kollineation erkennen kann und von denen jedes die andern zur Folge hat, zusammen:

1) Die Parameter c_σ und c_τ sind gleich oder c_σ' und c_τ';

2) die absoluten Punkte auf ρ und ω' sind entsprechend;

3) die Ebenenbüschel um n und n' sind gleich oder die Punktreihen auf q und q';

4) die Kurven (ρ) und (ω) haben zwei Punkte gemein, oder (ω') und (ρ'); (ρ) ist ein Kreis oder (ω') ist ein Kreis;

5) es gibt in Σ eine Kugel, der eine Kugel in Σ' entspricht;

6) es gibt in Σ einen Kreis in einer Parallelebene zu ρ, dem ein Kreis entspricht;

7) es gibt einen Bündel in Σ, der seinem entsprechenden in Σ' kongruent ist;

8) es gibt in Σ ein Feld, das seinem entsprechenden in Σ' kongruent ist;

9) es gibt ein Feld in Σ, das seinem entsprechenden in Σ' ähnlich ist.

Es folgt dann daraus, daß allen Kugeln des Büschels, zu dem die Kugel in 5) gehört und der die Fluchtebene ρ zur Potenzebene hat, Kugeln entsprechen; die Grundkreise der beiden Büschel sind (ρ) und (ω'). Ferner allen zu ρ parallelen Kreisen entsprechen Kreise. Es gibt noch ein zweites Paar kongruenter Bündel und ein zweites Paar kongruenter Felder; sie liegen symmetrisch zu denen von 7) und 8) in bezug auf ρ und ω'. Endlich jedes Feld in einer Parallelebene zu ρ ist seinem entsprechenden ähnlich.

Wenn die Ebenen $\sigma, \tau, \rho, \omega$ den Ebenen $\sigma', \tau', \rho', \omega'$ zugeordnet werden, wobei σ, τ, ρ und σ', τ', ω' zwei dreirechtwinklige Dreiflache sind und $\omega \equiv \rho'$ die unendlich ferne Ebene ist, so hat man der Kollineation 4.3 Bedingungen auferlegt; werden dann noch drei der vier Parameter und damit auch der vierte gegeben, so sind die 15 Bedingungen erschöpft. Es gibt aber acht Kollineationen, weil man einem bestimmten Oktanten von $\sigma\tau\rho$ jeden der acht Oktanten von $\sigma'\tau'\omega'$ als entsprechend zuweisen kann.

Es scheint, als ob, da man zur Bestimmung der sphäroidalen Kollineation noch die beiden Parameter c, c' zur Verfügung hat, ∞^{14} Kollineationen möglich wären und die Bedingung der Sphäroidalität nur eine einfache sei. Dem widerspricht das zweimalige Schneiden von (ρ) und (ω), oder daß die beiden absoluten Punkte von ρ denen von ω' korrespondieren. Auch die Bedingung, daß ein Kegelschnitt ein Kreis sei, ist bekanntlich zweifach.

Aber während eine nicht sphäroidale Kollineation nur ein Paar entsprechender rechter Flächenwinkel $\sigma\tau$; $\sigma'\tau'$ durch die Hauptgeraden n, n' besitzt, hat die sphäroidale deren ∞^1, und jedes von ihnen kann in der obigen Weise zur Herstellung benutzt werden; infolgedessen vermindert sich, weil jede sphäroidale Kollineation in ∞^1 Weisen durch eine Konstruktion, an der wir die Mannigfaltigkeit 14 erkannt haben, hergestellt werden kann, die Mannigfaltigkeit der Kollineation von 14 auf 13. Die Sphäroidalität ist eine doppelte Bedingung.

Zwei homologische Räume haben im Bündel um das Zentrum zwei vereinigte kongruente entsprechende Bündel und im Felde der Ebene der Homologie zwei vereinigte kongruente Felder. 585

Daraus folgt, daß nicht sphäroidal kollineare Räume nicht in Homologie gebracht oder perspektiv gemacht werden können.

Bei einer sphäroidalen Kollineation aber seien wieder F und F' näher an γ und γ' und daher F_1 und F_1' näher an γ_1 und γ_1'; ferner sei $c < c'$, so daß F und F_1 von γ und γ_1 eingeschlossen werden, während im andern Raume γ' und γ_1' zwischen F' und F_1' liegen; $2c$ ist die Entfernung von F und F_1, sowie die von γ', γ_1'; $2c'$ diejenige von F', F_1' und die von γ, γ_1. Die Ebene γ hat F und F_1 auf derselben Seite, während F', F_1' auf verschiedenen Seiten von γ' liegen. Daher werden die kongruenten Felder γ und γ' aus den einen entsprechenden Brennpunkten gleichsinnig, aus den andern ungleichsinnig erscheinen.. Wir müssen aber noch Bescheid wissen, ob die beiden gleichwinkligen Drehungen um n und n' gleichsinnig oder ungleichsinnig sind für Beobachter, welche auf entsprechenden Ebenen λ, λ' in den Drehaxen n, n' so stehen, daß der Sinn FF_1, bzw. $F'F_1'$ von den Füßen nach dem Kopfe geht, und den Drehsinn auf λ, λ' beobachten.

Sind diese Drehungen gleichsinnig, so sind die kongruenten Felder in γ und γ', aus F und F' betrachtet, ungleichsinnig, aus F_1 und F_1' betrachtet, gleichsinnig; und das Umgekehrte gilt für γ_1 und γ_1'. Und beide Fälle vertauschen sich, wenn die Drehungen ungleichsinnig sind. Nehmen wir an, daß γ und γ', aus F_1 und F_1' betrachtet, gleichsinnig sind, dann können die kongruenten Bündel F_1, F_1' mit ihren γ und γ' treffenden entsprechenden Halbstrahlen zur Deckung gebracht werden und diese kongruenten Felder kommen, weil entsprechende Strahlen zwischen F_1 und γ, bzw. F_1' und γ' gleich sind, auch zur Deckung und geben die Ebene der Homologie. Die Vereinigung der Bündel F, F' muß dann so erfolgen, daß ihre die γ_1, γ_1' treffenden Halbstrahlen sich decken; so daß diese Ebenen in der Ebene der Homologie sich vereinigen.

586 In affinen Räumen Σ, Σ' fallen die Kurven (ρ) und (ω') auch in die unendlich ferne Ebene; nach den Ecken des gemeinsamen Polardreiecks von (ρ) und (ω) gehen die drei Axen r, s, t eines jeden Bündels P von Σ, die ihm in seiner Kollineation mit P' zukommen. Es sind also in Σ drei immer reelle ausgezeichnete zueinander rechtwinklige Richtungen vorhanden, denen eben solche Richtungen in Σ' korrespondieren. Die Verhältnisse entsprechender Strecken seien α, β, γ. Das einer Kugel in Σ' mit dem Radius 1 entsprechende Ellipsoid in Σ gibt uns in den Maßzahlen seiner Halbaxen diese drei Verhältnisse (Nr. 481); und dieselben Figuren lehren, daß überhaupt keine anderen Verhältnisse entsprechender Strecken vorkommen, als die, welche vom größten und kleinsten dieser drei Verhältnisse eingeschlossen werden. So kommt z. B. das Verhältnis 1 nicht vor, wenn diese drei Verhältnisse α, β, γ alle drei echt oder alle drei unecht sind; so daß in diesem Falle die beiden affinen Räume keine reellen gleichstreckigen Geraden besitzen.

Die Geraden in Σ, deren Strecken zu den entsprechenden ein gegebenes — von den genannten Grenzen eingeschlossenes — Verhältnis θ haben, treffen einen bestimmten unendlich fernen Kegelschnitt, welcher zum Büschel $(\rho)(\omega)$ gehört, und erzeugen deshalb einen speziellen Komplex 2. Grades mit lauter parallelen Komplexkegeln. In der Tat, wir haben jenes Ellipsoid mit der konzentrischen Kugel, deren Radius θ ist, zu schneiden; die reelle Schnittkurve, symmetrisch gelegen in bezug auf den gemeinsamen Mittelpunkt, wird aus ihm durch einen Kegel 2. Grades projiziert. Das ist der Komplexkegel, der sich nur parallel verschiebt, wenn der Mittelpunkt sich ändert; die gemeinsame unendlich ferne Kurve enthält, weil die beiden Kugeln in Σ und Σ' durch $(\omega) \equiv (\rho')$ gehen und das Ellipsoid durch (ρ), die vier Punkte $(\rho)(\omega)$. Einen derartigen Komplex bilden speziell die gleichstreckigen Geraden in Σ, wenn solche verhanden sind.

Die drei Geradenpaare des Büschels $(\rho)(\omega)$ bestimmen auch drei solche Komplexe; in den Ebenen nach einer der sechs Geraden und ihren entsprechenden sind die absoluten Punkte entsprechend. Es gibt daher sechs Stellungen von Ebenen in Σ, welche Felder tragen, die den entsprechenden ähnlich sind. Sämtliche Strahlenbüschel und nur die Strahlenbüschel dieser Ebenen sind den entsprechenden gleich. Von diesen Stellungen sind zwei m, n reell; die zugehörigen Ebenen mögen μ, ν heißen.

Die Strahlenbüschel eines Bündels von Σ, die den entsprechenden gleich sind, haben also feste Stellungen.

Ebenso sind die Fokalaxen von festen Richtungen; sie gehen nach den sechs Ecken des Vierseits der gemeinsamen Tangenten von (ρ) und (ω), welche zu je zweien auf den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks, harmonisch zu den Ecken liegen; nur zwei sind reell; sie liegen auf derjenigen Seite, in deren Gegenecke sich m, n schneiden.

Der Torsus 4. Klasse, welcher (ρ) und (ω) zugleich umgeschrieben ist, besteht aus den vier Ebenenbüscheln um die gemeinsamen Tangenten dieser Kurven; die weiteren eingeschriebenen Flächen sind also in die Kegelschnitte der Schar (ρ)(ω) ausgeartet. Diese Kegelschnitt-Schar (ρ)(ω) repräsentiert also im Falle affiner Räume die Schar der konfokalen Flächen; und die Regelscharen haben sich je in den Tangentenbüschel vereinigt. Jede Gerade der unendlich fernen Ebene ist Tangente eines Kegelschnitts der Schar, also Gerade der einen und der andern Schar der ausgearteten Fläche. Daher gehört das Strahlenfeld der unendlich fernen Ebene, doppelt, zur Kongruenz der Fokalaxen und setzt mit den obigen sechs Bündeln die Kongruenz 6. Ordnung und 2. Klasse zusammen. Jedem Ebenenbüschel mit unendlich ferner Axe entspricht ein eben solcher; wir haben sie als gleich anzusehen.

Weil jeder Kegelschnitt des Büschels (ρ)(ω) Leitkurve eines Komplexes ist, dessen Strahlen Strecken tragen, die zu den entsprechenden ein gegebenes Verhältnis haben, so gilt dies auch für die drei Geradenpaare. Folglich ist das Ähnlichkeitsverhältnis der ähnlichen Felder in zwei Ebenen, die nach der einen und der andern Gerade des Paars gehen, und ihren entsprechenden Ebenen das nämliche. Insbesondere haben die reellen Ebenen μ und μ', ν und ν' dasselbe Ähnlichkeitsverhältnis.

Jeder von zwei affinen Räumen enthält zwei reelle Parallelebenen-Büschel, deren Ebenen Felder tragen, die den entsprechenden ähnlich sind, alle mit demselben Ähnlichkeitsverhältnisse.

Im allgemeinen ist es nicht 1, und es sind keine kongruenten Felder vorhanden; die Herstellung der perspektiven Lage ist nicht möglich.

Trägt also in speziellem Falle eine dieser Ebenen ein Feld, das zum entsprechenden kongruent ist, so gilt dies für jede Ebene des einen und des andern Büschels.

Die Herstellung der perspektiven Lage ist dann in ∞^1 Weisen möglich: man kann die Felder in zwei entsprechenden Ebenen μ und μ' oder ν und ν' zur Deckung bringen. Sind zwei Ebenen μ und μ' zur Deckung gebracht, so decken sich die entsprechenden Punktreihen m und m'; in der sich selbst entsprechenden unendlich fernen Ebene entsteht also eine Homologie mit dieser Gerade als Axe; mithin ist deren Zentrum auch dasjenige der räumlichen Homologie.

Folglich sind Bündel mit unendlich fernen Scheiteln zur Deckung gebracht worden; kongruente entsprechende Bündel mit endlichen Scheiteln gibt es auch in diesem Falle nicht.

Werden andere kongruente Felder μ_1, μ_1' zur Deckung gebracht, so ändert sich das unendlich ferne Zentrum der Homologie nicht. Wir schneiden mit zwei entsprechenden Geraden l und l' die Ebenen μ und μ' in A und A', die μ_1 und μ_1' in B und B'. Es seien aa_1 und $a'a_1'$ entsprechende und daher gleiche Winkel in μ, μ' aus A und A'; wir schneiden μ_1 mit la, la_1 in bb_1 und μ_1' mit $l'a'$, $l'a_1'$ in $b'b_1'$, so sind diese Winkel aus B und B' auch entsprechend und alle vier sind gleich. Endlich seien noch X und X' beliebige entsprechende Punkte auf l und l'. Wenn $a'a_1'$ auf aa_1 gelegt wird, so falle l' nach l_A' und X' nach X_A'; legt man $b'b_1'$ auf bb_1, so falle l' nach l_B' und X' nach X_B'. Weil die Dreikante $l'a'a_1'$ und $l'b'b_1'$ kongruent sind, werden l_A', l_B' parallel und liegen in derselben Ebene durch l. Nun ist:

$$XA : XB = X'A' : X'B' = X_A'A : X_B'B;$$

also befinden sich X, X_A', X_B' in einer geraden Linie, und der unendlich ferne Punkt derselben ist Zentrum der Homologien, die bei der einen und der andern Deckung entsteht, also bei allen Homologien, die durch Deckung von zwei entsprechenden Feldern μ, μ' sich ergeben.

Ein anderer Spezialfall ist, daß $(\omega) \equiv (\rho')$ von der einen entsprechenden Kurve (ρ) doppelt berührt wird und dann auch von der andern (ω'). Die Stellungen m, n vereinigen sich in die Berührungssehne jener Taktion. Die Ellipsoide, welche den Kugeln von Σ' entsprechen, sind Rotationsflächen, ihre Axen zu der Stellung m normal. Auch die Kegel der Komplexe der Geraden, deren Strecken zu den entsprechenden ein gegebenes Verhältnis haben, sind Rotationskegel.

587 Es erübrigt, noch einiges über ähnliche Räume zu sagen. In kongruenten Bündeln mit endlichen Scheiteln sind die isotropen Kegel entsprechend; existieren kongruente entsprechende Bündel mit solchen Scheiteln in affinen Räumen, so bedingt dies, daß die absolute Kurve sich selbst entspricht; also liegt Ähnlichkeit vor (Nr. 482). Ebenso kommt man zur Ähnlichkeit, wenn in zwei affinen Räumen zwei Kugeln homolog sind; man kann auch leicht, wie in Nr. 287, beweisen, daß jedem der einer Kugel eingeschriebenen Tetraeder ein der andern eingeschriebenes entspricht, das ihm ähnlich ist.

In ähnlichen Räumen sind zwei entsprechende Felder durchweg ähnlich mit immer demselben Ähnlichkeitsverhältnis; also gibt es im allgemeinen keine kongruenten Felder, wenigstens in endlichen Ebenen, und wenn einmal zwei endliche entsprechende

Felder in ähnlichen Räumen kongruent sind, so gilt die Kongruenz durchweg.

Entsprechende Bündel sind durchweg kongruent; daraus folgt, daß die entsprechenden Felder in der unendlich fernen Ebene als kongruent anzusehen sind. Kongruente Bündel kann man immer zur Deckung bringen, wenn man nur die richtigen Halbstrahlen vereinigt (Nr. 356).

Ähnliche Räume lassen sich also immer und zwar auf ∞^3 Weisen homologisch, ähnlich in ähnlicher Lage machen, und je nachdem die ähnlichen Räume von gleichem oder ungleichem Sinne sind, ergibt sich direkte oder inverse ähnliche Lage, d. h. mit entsprechenden Punkten auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des Zentrums (Nr. 485).

Mit der sphäroidalen Kollineation hat das in Nr. 358 erwähnte 588
Cayleysche Problem, zwei Tetraeder perspektiv zu machen, Zusammenhang.

Es gibt ∞^3 Kollineationen, in denen die Tetraeder

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{matrix}$$

entsprechend sind, darunter, wegen der doppelten Bedingung, ∞^1 sphäroidale. Durch die Punkte F, F_1; F', F_1' dieser Kollineationen entstehen in Σ und Σ' zwei Kurven, und die Ebenen Υ, Υ_1; Υ', Υ_1' umhüllen zwei Torsen. Zwei entsprechende Punkte F, F' senden entsprechende Strahlen nach den entsprechenden Ecken der Tetraeder; und da in sphäroidal-kollinearen Räumen die Bündel um diese Punkte kongruent sind, so wäre durch Deckung dieser kongruenten Bündel die perspektive Lage der Tetraeder erzielt. Aber jene F- und F'-Kurven sind nicht niedriger Ordnung; vermutlich haben sie in den Ecken des betreffenden Tetraeders achtfache Punkte; und es muß wohl auf die Konstruktion solcher Punkte verzichtet werden. Wir fügen noch einige Bemerkungen hinzu.

Wird in Σ die Fluchtebene ρ gegeben, so ist, neben den entsprechenden Tetraedern, die Kollineation bestimmt, also auch die andere Fluchtebene ω'. Schneiden ρ und ω' die entsprechenden Geraden AB und $A'B'$ in den Fluchtpunkten R, Q', so ist:

$$ABQ_\infty R \barwedge A'B'Q'R'_\infty \barwedge B'A'R'_\infty Q';$$

daraus folgt, daß R und Q' ähnliche Punktreihen beschreiben, in denen A und B', B und A' entsprechend sind. Dreht sich ρ um eine Gerade, so daß durch die Fluchtpunkte auf AB, AC, AD projektive Punktreihen entstehen, so sind auch die auf $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$ projektiv, wobei aber der A' nicht sich selbst entspricht; also umhüllt ω' einen Torsus 3. Klasse. Liegt die Axe, als q, in der unendlich fernen Ebene, so vereinigen sich einmal beide Fluchtebenen mit dieser Ebene: bei der im dreifach unendlichen System befindlichen Affinität. Folglich schneidet der Torsus der Ebenen ω' in sie einen Kegelschnitt; seine Tangenten sind die q' derjenigen Kollineationen, deren entsprechende q in jene Axe fällt.

Zwei so zueinander gehörige Geraden q und q' werden von den beiden Tetraedern nach gleichem Doppelverhältnisse geschnitten, also auch von den beiden Vierseiten, den Spuren der Tetraeder in der unendlich fernen Ebene, sind daher korrespondierend in bezug auf diese beiden Gruppen von vier Geraden im Sinne des Problems der ebenen Projektivität; und einer gegebenen Gerade q korrespondieren, nach diesem Problem, die Tangenten q' eines Kegelschnitts. Sind die Punktreihen auf q und q' gleich, so haben wir sphäroidale Kollineation (Kennzeichen 3) in Nr. 583). Wir werden daher, indem wir aus endlichen Punkten O, O' projizieren, zur Aufgabe geführt: Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Parallelebenen durch O zu den Ebenen des einen, $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ die durch O' zu den Ebenen des andern Tetraeders sind, solche Ebenen ξ, ξ' der beiden Bündel zu ermitteln, daß die Strahlenbüschel $\xi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und $\xi'(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ gleich sind.

§ 88. Die φ^2-Korrelation und ihre beiden Arten. Zwei Flächen 2. Grades, von denen jede zu sich polar ist in bezug auf die andere.[1])

589 Eine Korrelation $\boldsymbol{C}$, welche eine Fläche 2. Grades φ^2 in sich selbst überführt, transformiert die Punktreihe auf einer Gerade der φ^2 und den Ebenenbüschel um sie in den Ebenenbüschel um eine andere Gerade der Fläche und die Punktreihe auf ihr; diese Gerade kann zu derselben Schar gehören wie jene oder zur andern; und so ergeben sich wiederum zwei Arten: φ^2-Korrelation erster und zweiter Art, je nachdem jede der beiden Regelscharen von φ^2 in sich selbst oder die andere übergeführt wird.

Stellt man die Regelschar-Projektivitäten wie in Nr. 507 her, läßt aber den Punkten

$$g_1 l_1,\ g_1 l_2,\ g_2 l_1,\ g_2 l_2,\ g_3 l_3$$

nicht die Punkte, sondern die Ebenen

$$g_1' l_1',\ g_1' l_2',\ g_2' l_1',\ g_2' l_2',\ g_3' l_3',$$

bzw.

$$l_1' g_1',\ l_1' g_2',\ l_2' g_1',\ l_2' g_2',\ l_3' g_3'$$

entsprechen, so wird φ^2 in sich korrelativ auf die erste oder zweite Art.

Wir kennen schon die Kollineation, welche wir als das Quadrat $\boldsymbol{C}^2$ von $\boldsymbol{C}$ bezeichnet haben (Nr. 525): in ihr sind entsprechend die

1) Voß, Math. Annalen Bd. 13 S. 320; Sturm, ebenda Bd. 26 S. 465.

beiden Polarebenen ξ' und η des Punktes $X \equiv Y'$ und die beiden Pole X und Z' der Ebene $\xi' \equiv \zeta$. Sie transformiert φ^2 in sich selbst und zwar jede der beiden Regelscharen in sich selbst, ist also eine φ^2-Kollineation erster Art oder eine Hermitesche Kollineation (Nr. 514); wie wir das schon vom Quadrate jeder Korrelation wissen (Nr. 565).

Es sei Φ der Polarraum von φ^2; sein Produkt in C in beiden Reihenfolgen ist dieselbe Kollineation. Denn wenn der Punkt X von φ^2 und die Berührungsebene ξ' in C entsprechend sind und zu jenem die Berührungsebene ξ, zu dieser der Berührungspunkt X' gehört, welche dann auch in C entsprechend sind, so korrespondieren sowohl in $C\Phi$, als in ΦC die Punkte X und X' und die Ebenen ξ und ξ'; X geht nämlich durch C in ξ', diese durch Φ in X' über, und X geht durch Φ in ξ, diese durch C in X' über.

Es entsprechen sich also in $C\Phi \equiv \Phi C$ zwei Punkte von φ^2, von denen jeder die dem andern in C entsprechende Ebene zur Tangentialebene hat, während in C^2 die beiden Pole derselben Berührungsebene von φ^2 entsprechend sind.

Diese Kollineation $C\Phi \equiv \Phi C$ ist erster, zweiter Art wie C, und die Projektivitäten innerhalb der Regelscharen oder zwischen ihnen sind bei ihr die nämlichen wie bei C.

Wenn nun C erster Art ist, so liegt auf φ^2 ein Kantenvierseit des Koinzidenztetraeders von $C\Phi$; jeder Ecke desselben entspricht daher in $C\Phi$ sie selbst, also in C ihre Berührungsebene, das ist ihre Winkelebene im Vierseit. Folglich ist es das Schnittvierseit der Kernflächen von C.

Auf einer Fläche 2. Grades φ^2, die durch eine Korrelation auf die erste Art in sich selbst übergeführt wird, muß das Schnittvierseit der beiden Kernflächen liegen.

Seine Seiten sind in C, C^2 und $C\Phi$ sich selbst entsprechend, seine Diagonalen in C involutorisch entsprechend, daher in C^2 sich selbst entsprechend, und weil polar in bezug auf φ^2, auch in $C\Phi$ sich selbst entsprechend.

Es liege eine beliebige Korrelation C vor; $ABCD$ sei das Schnittvierseit der Kernflächen; in der Büschel-Schar von Flächen 2. Grades durch dasselbe entsteht durch die Korrelation eine Projektivität entsprechender Flächen, welche Involution ist, weil die beiden Kernflächen sich involutorisch entsprechen (Nr. 523). Auch bei den ausgearteten Elementen der Büschel-Schar erkennt man sofort das involutorische Entsprechen; das eine ist als Punktort das Ebenenpaar (ACB, ACD), als Ebenenort das Punkte- oder Bündelpaar (A, C), das andere wird durch das Ebenenpaar (BDA, BDC) und das Punktepaar (B, D) gebildet; die Korrelation führt aber involutorisch ACB, ACD, A, C in B, D, BDA, BDC über.

Die ausgearteten Elemente sind also hier — anders als bei der Kollineation — nicht sich selbst, sondern einander entsprechend. Sich selbst entsprechend, Doppelelemente der Involution sind daher zwei allgemeine Flächen der Büschel-Schar. Wir haben also hier ein wesentliches anderes Ergebnis als bei der Kollineation:

Jede Korrelation transformiert auf die erste Art zwei allgemeine Flächen 2. Grades φ^2, $\varphi_1{}^2$ in sich selbst. Sie gehören zur Büschel-Schar der Kernflächen. Die übrigen Flächen dieses Systems gehen zu je zwei involutorisch ineinander über, insbesondere gilt dies für die beiden Kernflächen und für die beiden Ebenen-Punkte-Paare.

$\boldsymbol{C}^2$, $\boldsymbol{C}\Phi$ und $\boldsymbol{C}\Phi_1$ führen alle diese Flächen in sich selbst über, sind Hermitesche Kollineationen.

Wie man eine gegebene Hermitesche Kollineation zum Quadrat einer Korrelation machen kann, ist schon in Nr. 565 besprochen. Sind X und X' entsprechend auf einer in ihr sich selbst korrespondierenden Fläche φ^2 und ξ' die Berührungsebene von X', so hat die Korrelation $\boldsymbol{C}$:

$$\left|\begin{matrix} A & B & C & D & X \\ DAB & ABC & BCD & CDA & \xi' \end{matrix}\right|$$

die φ^2 ebenfalls zur sich selbst entsprechenden Fläche und die gegebene Kollineation ist $\boldsymbol{C}\Phi$.

Jede Korrelation ist also φ^2-Korrelation erster Art und dies keine Spezialität.

Jede Ebene $\xi' \equiv \eta$ berührt eine Fläche der Büschel-Schar; die beiden Pole X, Y' liegen auf der ihr gepaarten Fläche; also bilden sie auf dem sie verbindenden Wechselstrahle ein Paar der Involution, in der dieser die Büschel-Schar schneidet; in dieser Involution sind auch gepaart die Schnitte mit den Ebenenpaaren; also haben wir, wenn $BCD, \ldots$ von XY' in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ geschnitten werden, die Involution:

$$X,\ Y';\quad \mathfrak{A},\ \mathfrak{C};\quad \mathfrak{B},\ \mathfrak{D}.$$

Ingleichen tangieren die beiden Polarebenen eines Punktes dieselbe Fläche der Büschel-Schar; usw.

Als Doppelelemente der Involution sind die sich selbst entsprechenden Flächen φ^2, $\varphi_1{}^2$ harmonisch zu den Kernflächen und zu den Ebenen-Punkte-Paaren der Büschel-Schar.

Diese letztere Harmonizität läßt sich noch in anderer Form aussprechen. Es seien u, v die Diagonalen AC, BD des Vierseits, polar in bezug auf alle Flächen der Büschel-Schar, g ein Strahl des Netzes $[u, v]$, welcher u, v in U, V, die φ^2, $\varphi_1{}^2$ in X, Y; X_1, Y_1 trifft, so sind diese beiden Paare der Schnittinvolution zu den beiden Paaren UU, VV, die von den Ebenenpaaren herrühren, harmonisch; daraus folgt, daß XY und X_1Y_1 zueinander harmonisch sind (Nr. 114).

Die beiden sich selbst entsprechenden Flächen φ^2, φ_1^2 sind daher harmonisch zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt oder in bezug auf u, v (Nr. 478).

Wir wenden uns zur φ^2-Korrelation C zweiter Art. Die zuge- 590
hörige φ^2-Kollineation $C\Phi$, ebenfalls zweiter Art, hat (Nr. 506) nur zwei Koinzidenzpunkte A, C auf φ^2, die beiden Berührungsebenen entsprechen ihnen involutorisch in C; damit haben wir zwei Gegenecken des Vierseits $ABCD$ und ihre Winkelebenen. Die beiden andern Ecken B, D liegen auf der Polare v von $u = AC$ in bezug auf φ^2. Die beiden Geraden r_1, s_1 nuf φ^2 durch A entsprechen sich involutorisch, und ebenso die Geraden r_2, s_2 durch C; daraus folgt, daß die beiden Schnitte E, F von $v = BD$ mit φ^2, in denen sich r_1 mit s_2, s_1 mit r_2 begegnen, doppelt konjugiert sind; also trägt die Diagonale v, welche die nicht auf φ^2 gelegenen Ecken B, D des Vierseits verbindet, eine Involution doppelt konjugierter Punkte. Bei einer beliebigen Korrelation findet das nicht statt.

Eine beliebige Korrelation transformiert keine allgemeine Fläche 2. Grades in sich selbst auf die zweite Art.

Trägt aber die eine der Diagonalen u, v, etwa v, des Schnittvierseits $ABCD$ der Kernflächen ein Paar und infolgedessen eine Involution doppelt konjugierter Punkte, so hat jeder Punkt derselben in beiderlei Sinne die nämliche Polarebene, welche u mit dem doppelt konjugierten Punkte verbindet; wir haben die partielle involutorische Korrelation (Nr. 566).

Folglich werden nur durch eine partielle involutorische Korrelation allgemeine Flächen 2. Grades in sich selbst auf die zweite Art transformiert, und zwar ∞^1 Flächen.

Jedes Punktepaar EF nämlich jener Involution führt zu einem Vierseite $AECF$, in dem sowohl AE und AF, als auch CE und CF sich involutorisch entsprechen, und zu u, v, die im allgemeinen es allein tun, hier hinzukommen. Dasselbe liefert eine Büschel-Schar, deren Flächen in der Korrelation involutorisch einander entsprechen, weil dies je für die ausgearteten Flächen gilt. Wir haben daher in jeder dieser Büschel-Scharen zwei allgemeine Flächen, welche sich selbst entsprechend und einander harmonisch zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt.

Daß die Flächen durch alle diese Vierseite ein Netz erzeugen, das zugleich das duale Gebilde ist, ist wie in Nr. 518 zu erkennen. In ihm bilden die sich selbst entsprechenden Flächen ein in sich duales System erster Stufe, von dem durch jedem Punkt zwei gehen und jede Ebene von zweien berührt wird. Denn das Netz enthält einen Büschel (oder eine Involution) von Ebenenpaaren (mit der gemeinsamen Doppellinie $u = AC$); also enthält jeder Büschel des Netzes ein Ebenenpaar, da zwei Büschel eines Netzes immer eine Fläche gemeinsam haben; folglich wird eine Ebene nur von zwei Flächen eines Büschels tangiert. Ein Punkt $X \equiv Y'$ scheidet aus dem Netze einen Büschel aus, und die beiden Flächen desselben, die von der Polarebene ξ' berührt werden (und dann auch von der andern η), sind sich selbst entsprechend; da sie je auch einem jener das Netz fächerförmig erzeugenden Vierseits-Büschel $(AECF)$ angehören.

Jeder andern Fläche des Netzes entspricht eine zweite aus demselben Vierseits-Büschel und involutorisch, weil die ausgearteten Flächen es tun.

Mit dem Büschel $(ABCD)$ hat das Netz das Ebenenpaar $v(A, C)$ gemeinsam; also befinden sie sich in demselben Gebüsche: dem aller Flächen 2. Grades, welche in A und C die Ebenen $v(A, C)$ tangieren; drei Flächen aus dem Netze und eine aus dem Büschel konstituieren es. Und weil auch innerhalb $(ABCD)$ involutorisches Entsprechen statt hat, so folgert man, ähnlich wie in Nr. 518, daß jeder Fläche dieses Gebüsches eine andere aus ihm involutorisch korrespondiert[1]).

Das Quadrat $\boldsymbol{C}^2$ dieser φ^2-Korrelation zweiter Art, welche eine Spezialität ist, ist nicht die allgemeine φ^2-Kollineation erster Art; vielmehr hat sie folgende speziellen Eigenschaften, welche der allgemeinen Hermiteschen Kollineation nicht zukommen.

Alle Punkte auf v, alle Ebenen durch u sind sich selbst entsprechend, so wie alle Flächen des eben erörterten Gebüsches.

Die Geraden auf den ∞^1 in $\boldsymbol{C}$ sich selbst entsprechenden Flächen 2. Grades erzeugen eine Kongruenz 4. Ordnung und 4. Klasse; jede trifft ihre beiden entsprechenden Geraden, welche der andern Regelschar der betreffenden Fläche angehören; so daß diese Kongruenz im Kernkomplexe enthalten ist.

591 Wenn zwei Flächen 2. Grades φ^2, φ^2_1 harmonisch zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt, so sind sie bei einer Korrelation, deren Kernflächen zu ihrer Büschel-Schar gehören und zu ihnen harmonisch sind, die sich selbst (in erster Art) entsprechenden, da sie zu den Kernflächen und den ausgearteten Flächen zugleich harmonisch sind. Für jedes Paar zu φ^2, φ^2_1 harmonischer Kernflächen gibt es ∞^1 Korrelationen (Nr. 564).

Eine solche Korrelation ist der Polarraum Φ_1, der zu einer der beiden Flächen $\varphi_1{}^2$ gehört; denn bei ihm vereinigen sich die Kernflächen in $\varphi_1{}^2$; wodurch die Harmonizität der Kernflächen zu φ^2 und $\varphi_1{}^2$ erfüllt wird. Daß $\varphi_1{}^2$ durch Φ_1 in sich übergeht, ist selbst-

1) Auch hier wie in Nr. 518 setzen wir die Eigenschaften der linearen Flächensysteme 2. und 3. Stufe (Netze und Gebüsche) als bekannt voraus.

verständlich; dagegen wichtig ist, daß auch φ^2 in Φ_1 sich selbst entspricht. Also:

Von zwei Flächen 2. Grades φ^2, $\varphi_1{}^2$, welche harmonisch zugeordnet sind mit Vierseits-Durchschnitt, ist jede in bezug auf die andere als Basisfläche eines Polarraumes sich selbst polar auf die erste Art.

Es seien wieder X, Y; X_1, Y_1; U, V die Schnitte eines Strahles g des Netzes $[u, v]$ mit den beiden Flächen φ^2, $\varphi_1{}^2$ und den Diagonalen u, v, so daß diese drei Paare zu je zweien harmonisch sind. Der Strahl g hat eine gemeinsame Polare g', die ebenfalls dem Netze angehört und deren Schnitte mit u, v von den U, V durch die Ecken des Vierseits harmonisch getrennt sind; also geht die Polarebene von X in bezug auf $\varphi_1{}^2$ durch g', aber auch durch Y, weil X, Y zu X_1, Y_1 harmonisch sind; als Ebene aus g' nach einem der Schnitte von g mit φ^2, in bezug auf welche g und g' polar sind, ist sie die Berührungsebene von Y, und ebenso ist Y zu der Tangentialebene von X polar. Also entspricht jedem Punkte von φ^2 durch Polarisierung in bezug auf $\varphi_1{}^2$ eine Tangentialebene von φ^2; man ersieht, wie φ^2 in sich selbst übergeht, und weiter, daß ein Punkt X von φ^2 und der Berührungspunkt Y der polaren Tangentialebene, eine Berührungsebene und die Berührungsebene des polaren Punktes einander entsprechen in der windschiefen Involution, von welcher die Diagonalen u, v die Axen sind.

Bei einem Polarraume kann jedes der Basisfläche aufgeschriebene Vierseit als Schnitt-Vierseit der vereinigten Kernflächen angesehen werden. Wenn also eine Fläche 2. Grades φ^2 in bezug auf eine andere $\varphi_1{}^2$ zu sich selbst polar ist auf die erste Art, so muß sie ihr in einem solchen Vierseit begegnen; in der entstehenden Büschel-Schar sind dann φ^2 und $\varphi_1{}^2$ für diese Polarkorrelation die sich selbst entsprechenden Flächen; in bezug auf das Paar der Kernflächen $(\varphi_1{}^2, \varphi_1{}^2)$ sind sie harmonisch; sie müssen aber auch in bezug auf die ausgearteten Flächen harmonisch sein.

Wenn also eine von zwei Flächen 2. Grades auf die erste Art zu sich selbst polar ist nach der andern, so müssen sie harmonisch zugeordnet sein mit Vierseits-Durchschnitt. Infolgedessen ist auch die zweite nach der ersten zu sich selbst polar. Und jede von ihnen ist sich selbst entsprechend in der windschiefen Involution, welche die Diagonalen des Vierseits zu Axen hat, und zwar so, daß hier zwei Elemente homolog sind, von denen vorhin jedes und das Berührungselement des andern einander entsprechen.

Die Projektivität innerhalb jeder der beiden Regelscharen von φ^2 (oder $\varphi_1{}^2$), in beiden Verwandtschaften die nämliche, ist Involution.

Umgekehrt, wenn eine Fläche φ^2 durch eine Korrelation auf die erste Art so in sich selbst übergeführt wird, daß jede der beiden Regelscharen involutorisch wird, so handelt es sich um Polarkorrelation. Denn jeder Berührungsebene gl von φ^2 entspricht involutorisch der nicht inzidente Punkt $g'l'$, wenn g' dem g, l' dem l in den Involutionen gepaart sind, also dem beliebigen Punkt X, von dem g_1l_1, g_2l_2, g_3l_3 drei an die Fläche gehende Tangentialebenen sind, ebenfalls involutorisch die (nicht inzidente) Ebene ξ', welche die drei Punkte $g_1'l_1'$, $g_2'l_2'$, $g_3'l_3'$ verbindet.

Die Basisfläche dieses Polarraumes geht durch das Vierseit der Doppelstrahlen g_1, g_2; l_1, l_2 der beiden Involutionen und ist eine der φ^2 harmonisch zugeordnete Fläche $\varphi_1{}^2$. Die Verbindungslinie der Punkte $gl, g'l'$ (ebenso die Schnittlinie der Ebenen $gl, g'l'$) trifft die Diagonalen dieses Vierseits; denn, weil $g_1g_2gg' \barwedge l_1l_2ll'$, so liegen die vier Punkte g_1l_1, g_2l_2, gl, $g'l'$ auf einem Kegelschnitt von φ^2, also in einer Ebene, und die genannte Verbindungslinie schneidet diejenige von g_1l_1, g_2l_2, die eine Diagonale, und ebenso die andere (g_1l_2, g_2l_1). Und weil diese Diagonalen in bezug auf φ^2 polar sind, so sind die vier Punkte harmonisch.

Daraus folgt, daß die Polarkorrelation in bezug auf $\varphi_1{}^2$ ebenfalls je die Punkte gl, $g'l'$ der φ^2 den Berührungsebenen $g'l'$, gl zuordnet. Das genügt, um ihre Identität mit der gegebenen Korrelation zu erkennen.

592 Um eine Fläche φ^2 in sich selbst auf die zweite Art zu transformieren, muß die Korrelation partiell involutorisch sein. Folglich tut es die total involutorische Polarkorrelation sicher. Wenn also $ABCD$ irgend ein der Basisfläche $\varphi_1{}^2$ aufgeschriebenes Vierseit ist und E, F auf der einen Diagonale $v = BD$ harmonisch zu den Ecken B, D liegen und daher (doppelt) konjugiert sind im Polarraume, so gibt es in der Büschel-Schar durch das Vierseit $AECF$ zwei in sich selbst auf die zweite Art polarisierte Flächen 2. Grades. Es sei φ^2 eine von ihnen. In den Punkten A und C haben φ^2 und $\varphi_1{}^2$ dieselben Berührungsebenen $FAE \equiv BAD$ und $FCE \equiv BCD$; folglich durchschneiden sie sich in zwei Kegelschnitten, die durch A und C gehen (Nr. 504). Der Kegel, der einem derselben in bezug auf $\varphi_1{}^2$ polar ist, ist der längs desselben dieser Fläche umgeschriebene Tangentialkegel. Er muß, weil der Kegelschnitt auf φ^2 liegt, auch dieser Fläche umgeschrieben sein, also längs desselben Kegelschnitts, durch den er ja geht. Die beiden Flächen tangieren sich längs dieses Kegelschnitts, in den sich daher beide vereinigt haben.

Zwei Flächen 2. Grades, von denen eine in bezug auf die andere zu sich selbst auf die zweite Art polar ist, müssen sich längs eines Kegelschnittes berühren.

Es sei σ die Ebene dieses Berührungs-Kegelschnittes, S der gemeinsame Pol, die Spitze des gemeinsam umgeschriebenen Kegels, der Berührungspol, g ein Strahl durch S und X, Y seine Schnitte mit φ^2, ferner g' die in σ gelegene gemeinsame Polare von g. Die Polarebene von X nach $\varphi_1{}^2$ muß also φ^2 tangieren; da X auf g liegt, muß sie durch g' gehen und weil sie das tut und g zu g' auch nach φ^2 polar ist, muß sie auf g tangieren, also in Y; daher sind X, Y konjugiert in bezug auf $\varphi_1{}^2$ oder harmonisch zu den Schnitten X_1, Y_1 von $\varphi_1{}^2$ mit g.

Die beiden Flächen sind harmonisch zugeordnet, aber mit konischer Berührung (Nr. 474).

Nun ist wiederum klar, daß Gegenseitigkeit stattfindet, also auch $\varphi_1{}^2$ zu sich selbst polar ist in bezug auf φ^2.

Und ferner zeigt sich, daß mit dem Polarraum in bezug auf die eine Fläche, etwa wiederum $\varphi_1{}^2$, in dem die andere φ^2 sich selbst entspricht, eine involutorische Homologie (S, σ) verbunden ist, in welcher auch φ^2 sich selbst entspricht. In ihr sind gleichartige Elemente von φ^2 homolog, von denen das eine und das Berührungselement des andern in dem Polarraum (von $\varphi_1{}^2$) korrespondieren.

Wird $\varphi_1{}^2$ festgehalten, so ist die Mannigfaltigkeit der 593
Flächen φ^2, welche in bezug auf $\varphi_1{}^2$ zu sich selbst polar sind oder in bezug auf welche $\varphi_1{}^2$ zu sich selbst polar ist, bei der ersten Art vierfach, bei der zweiten dreifach unendlich. Denn der $\varphi_1{}^2$ können ∞^4 Vierseite und ∞^3 Kegelschnitte aufgeschrieben werden, und in jeder der entstehenden Büschel-Scharen mit vierseitiger Basis oder mit konischer Berührung gibt es eine Fläche, welche der $\varphi_1{}^2$ harmonisch zugeordnet ist. Beide Systeme sind in sich dual.

Bezeichnen wir die zu $\varphi_1{}^2$ gehörigen Flächen φ^2 der einen und der andern Art genauer folgendermaßen. Diejenige φ^2, welche auf die erste Art zu sich selbst polar ist nach $\varphi_1{}^2$ und durch das Vierseit auf $\varphi_1{}^2$ geht, dessen Gegenecken durch die beiden in bezug auf $\varphi_1{}^2$ (und dann auch auf φ^2) polaren Geraden u, v eingeschnitten wird, sei mit $\varphi^2_{u,v}$ bezeichnet, und diejenige, welche auf die zweite Art zu sich selbst polar ist nach $\varphi_1{}^2$ und diese längs des Kegelschnitts in der Ebene σ und mit dem Berührungspole S tangiert, sei mit $\varphi^2_{S,\sigma}$ bezeichnet. Wir haben dann zwischen diesen Flächen folgende Beziehungen.

Es seien S, σ gegeben und $\varphi^2_{X,\xi}$ gehe durch S und berühre infolgedessen σ; die Gerade SX trifft sie zum zweiten Male in T, dem Berührungspunkte von σ; dieselbe Gerade treffe ξ in Y und die Basisfläche $\varphi_1{}^2$ in X_1, Y_1; so sind die drei Punktepaare XY, X_1Y_1, ST zu je zweien harmonisch; folglich liegen X und Y auf der Fläche $\varphi^2_{S,\sigma}$, und sie wird in ihnen von η und ξ tangiert.

Wenn also $\varphi^2_{X,\xi}$ durch S geht und dann σ berührt (oder umgekehrt), so geht $\varphi^2_{S,\sigma}$ durch X und berührt ξ. Und der Ort der Punkte X und der Ebenen ξ, deren $\varphi^2_{X,\xi}$ durch S geht und σ berührt, ist die Fläche $\varphi^2_{S,\sigma}$.

Zweitens, die Fläche $\varphi^2_{X,\xi}$ berühre u und infolgedessen auch die nach $\varphi_1{}^2$ polare Gerade v; die Berührungspunkte U, V sind in der involutorischen Homologie (X, ξ) entsprechende Punkte, so daß UV durch X geht; es seien wieder Y der Schnitt mit ξ und X_1, Y_1 die Schnitte mit $\varphi_1{}^2$; wir haben drei zu je zweien harmonische Paare UV, XY, X_1Y_1; also liegen X und Y auf $\varphi^2_{u,v}$ und sind die Berührungspunkte von η und ξ.

Wenn $\varphi^2_{X,\xi}$ die Gerade u und dann auch v berührt, so geht $\varphi^2_{u,v}$ durch X und berührt ξ. Und der Ort der Punkte X und der Ebenen ξ, deren $\varphi^2_{X,\xi}$ die Geraden u und v berührt, ist die Fläche $\varphi^2_{u,v}$.

Drittens, die Fläche $\varphi^2_{u,v}$ gehe durch X und berühre ξ; es sei η die Berührungsebene von X und Y der Berührungspunkt von ξ, welche polar zueinander sind nach $\varphi_1{}^2$. Es liegen dann X, Y auf einem Strahle g des Netzes $[u, v]$; er treffe u, v in U, V und $\varphi_1{}^2$ in X_1, Y_1; also sind U, V; X, Y; X_1, Y_1 zu je zweien harmonisch und U, V liegen auf $\varphi^2_{X,\xi}$. Aber auch ξ, η schneiden sich in einem Strahle g' des Netzes $[u, v]$, der zu jenem polar ist in bezug auf $\varphi^2_{u,v}$ und daher auch in bezug auf $\varphi_1{}^2$. Er sende an $\varphi_1{}^2$ die Berührungsebenen ξ_1, η_1 von X_1, Y_1 und nach u, v die Ebenen υ, ψ; wir finden, daß diese $\varphi^2_{X,\xi}$ tangieren. Da aber g durch den Berührungspol X von $\varphi_1{}^2$ und $\varphi^2_{X,\xi}$ geht, so ist ihre Polare g' in bezug auf $\varphi_1{}^2$ auch diejenige in bezug auf $\varphi^2_{X,\xi}$; daher sind υ, ψ, die nach U, V gehen, die Berührungsebenen dieser Punkte an $\varphi^2_{X,\xi}$, und u, v, je in der Berührungsebene durch den Berührungspunkt gehend, sind Tangenten.

Wenn daher $\varphi^2_{u,v}$ durch X geht und ξ berührt, so berührt $\varphi^2_{X,\xi}$ die beiden Geraden u, v. Und der Ort der Geraden u, v, deren $\varphi^2_{u,v}$ durch X gehen und ξ berühren, ist der Tangentenkomplex der Fläche $\varphi^2_{X,\xi}$.

Endlich, $\varphi^2_{u,v}$ berühre die beiden (nach $\varphi_1{}^2$) polaren Geraden u', v'; die Berührungspunkte seien U', V', die Berührungsebenen υ', ψ'. Die Strahlen $U'V' = g$ und $\upsilon'\psi' = g'$ gehören zu den Netzen $[u, v]$ und $[u', v']$. Weil sie dem ersten angehören und polar in bezug auf $\varphi^2_{u,v}$ sind, so sind sie es auch in bezug auf $\varphi_1{}^2$. Der Strahl g schneide u, v in U, V und $\varphi_1{}^2$ in X_1, Y_1, von g' gehen υ, ψ nach u, v und die Berührungsebenen ξ_1, η_1 (in X_1, Y_1) an $\varphi_1{}^2$. Wir haben wiederum die drei Punktepaare UV, $U'V'$, X_1Y_1, zu je zweien harmonisch, und die drei Ebenenpaare $\upsilon\psi$, $\upsilon'\psi'$, $\xi_1\eta_1$, zu je zweien harmonisch; wir schließen, daß U, V auf $\varphi^2_{u',v'}$ liegen und υ, ψ sie berühren. Weil aber die in bezug auf $\varphi_1{}^2$ polaren Geraden g, g' dem Netze $[u', v']$

angehören, so sind sie auch polar nach $\varphi^2_{u', v'}$; also wird diese Fläche in U, V von υ, ψ berührt und u, v sind Tangenten von ihr.

Wenn also $\varphi^2_{u, v}$ die Geraden u', v' tangiert, so tangiert $\varphi^2_{u', v'}$ die Geraden u, v. Und der Ort der Geraden u, v, deren $\varphi^2_{u, v}$ die Geraden u', v' berührt, ist der Tangentenkomplex von $\varphi^2_{u', v'}$.

Welche der drei Bedingungen μ, ν, ρ: durch einen gegebenen Punkt zu gehen, eine gegebene Gerade oder Ebene zu berühren, man einer Fläche $\varphi^2_{X, \xi}$ auferlegt, der Punkt X ist dann stets auf eine gewisse Fläche 2. Grades verwiesen (und ξ hat sie zu tangieren). Sollen also drei solche Bedingungen erfüllt werden, so handelt es sich um die acht Flächen $\varphi^2_{X, \xi}$, deren X in den Schnitten von drei Flächen 2. Grades liegen.

Alle zehn Charakteristiken des dreifach unendlichen Systems der $\varphi^2_{X, \xi}$:

$$\mu^3,\ \mu^2\rho,\ \mu\rho^2,\ \rho^3,\ \nu\mu^2,\ \nu\mu\rho,\ \nu\rho^2,\ \nu^2\mu,\ \nu^2\rho,\ \nu^3,$$

wo z. B. $\mu^2\rho$ bedeutet, daß zwei Bedingungen μ und eine Bedingung ρ erfüllt werden sollen, sind acht.

Die Gerade u (oder v), die eine Fläche $\varphi^2_{u, v}$ bestimmt, welche vier jener Bedingungen erfüllen soll, muß den Tangentenkomplexen von vier Flächen 2. Grades gemeinsam sein. Solcher Geraden gibt es 32.[1]) Diese Geraden bilden 16 Paare u, v.

Folglich sind alle fünfzehn Charakteristiken des vierfach unendlichen Systems der $\varphi^2_{u, v}$:

$$\mu^4,\ \mu^3\rho,\ \mu^2\rho^2,\ \mu\rho^3,\ \rho^4,\ \nu\mu^3,\ \nu\mu^2\rho,\ \nu\mu\rho^2,\ \nu\rho^3,$$
$$\nu^2\mu^2,\ \nu^2\mu\rho,\ \nu^2\rho^2,\ \nu^3\mu,\ \nu^3\rho,\ \nu^4$$

gleich 16.

Ein Polartetraeder $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ von φ_1^2 liefert wegen 594
der polaren Gegenelemente vier Flächen $\varphi^2_{A, \alpha}$, $\varphi^2_{B, \beta}$, $\varphi^2_{C, \gamma}$, $\varphi^2_{D, \delta}$ und drei Flächen $\varphi^2_{AB, CD}$, $\varphi^2_{AC, BD}$, $\varphi^2_{AD, BC}$, jene der φ_1^2 harmonisch zugeordnet mit konischer Berührung, diese mit Vierseits-Durchschnitt; und es ist für alle Polartetraeder. Denn zwei sich konisch berührende Flächen 2. Grades haben alle Polartetraeder gemeinsam, welchen der Berührungspol und die Ebene der Berührungskurve angehören, und zwei, die sich in einem Vierseite durchschneiden, alle diejenigen, welche dessen Diagonalen zu Gegenkanten haben.

Die Kollineationen, welche in der obigen Weise mit ihren sieben Polarräumen verbunden sind, sind die involutorischen Homologien (A, α), (B, β), (C, γ), (D, δ) und die windschiefen Involutionen (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC).

1) Liniengeometrie, Bd. I, Nr. 35. — Zum Vorangehenden vgl.: Del Pezzo, Rendiconti dell' Accademia di Napoli 1885; Sturm, Math. Annalen, Bd. 25.

Jene Polarräume sind die Produkte dieser Kollineationen in den Polarraum Φ_1 von $\varphi_1{}^2$ (in beiden Reihenfolgen): $\varphi^2_{A,\alpha} = \Phi_1 \cdot (A, \alpha) = (A, \alpha) \cdot \Phi_1$; usw.

Jeder läßt die andern unverändert. Denn Φ_1 tut es, und $A, \alpha; \ldots$; $AB, CD, \ldots$ sind polar in bezug auf alle sieben Flächen, daher gehen sie durch $(A, \alpha), \ldots$; $(AB, CD), \ldots$ in sich selbst über.

Jede von den acht Flächen $\varphi_1{}^2$, $\varphi^2_{A,\alpha}, \ldots, \varphi^2_{AB,CD}, \ldots$ ist daher in bezug auf jede andere zu sich selbst polar.

Zwei Flächen wie $\varphi^2_{A,\alpha}$ und $\varphi^2_{B,\beta}$ sind harmonisch zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt; denn Φ_1 und (A, α) vertauschen die Regelscharen von $\varphi^2_{B,\beta}$, das Produkt läßt sie. Dasselbe gilt für $\varphi^2_{AB,CD}$ und $\varphi^2_{AC,BD}$; wo Φ_1 und (AB, CD) die Regelscharen von $\varphi^2_{AC,BD}$ in sich überführen. Dagegen sind $\varphi^2_{A,\alpha}$ und $\varphi^2_{AB,CD}$ harmonisch zugeordnet mit konischer Berührung. Jede der acht Flächen berührt daher vier andere konisch und schneidet die drei übrigen in einem Vierseite.[1])

Zu acht solchen Flächen gelangt man bei der Aufgabe, zu zwei gegebenen Flächen 2. Grades die Basisflächen aufzusuchen, in bezug auf welche sie zueinander polar sind.[2]) Diesem Probleme wollen wir uns jetzt zuwenden.

595 Ein gemeinsames Polartetraeder $EFGH$ zweier Flächen 2. Grades φ und φ' wird durch einen Polarraum, welcher diese ineinander überführt, in ein ihnen ebenfalls gemeinsames Polartetraeder transformiert, also in sich selbst, wenn es das einzige ist; wie das bei allgemeiner Lage der beiden Flächen der Fall ist. Aber es ist fraglich, ob jede Ecke in die Gegenebene übergeht, so daß es auch Polartetraeder des Polarraums ist, oder in anderer Weise.

Wenn $EFGH$ ein der Basisfläche des Polarraums aufgeschriebenes Vierseit ist, so ist jeder der vier Ecken E, F, G, H die zugehörige Winkelebene HEF, EFG, FGH, GHE polar; und ist das Tetraeder $EFGH$ ein Polartetraeder für eine Fläche φ, so ist es dies auch für die polare Fläche φ'; denn E und FGH gehen über in HEF und G, usw. Aber φ und φ' haben nicht die allgemeine Lage. Die beiden Diagonalen $u = EG$, $v = FH$ sind polar für alle drei Flächen. Die Involutionen I_φ, I_Φ der konjugierten Punkte auf u für φ und für

1) Es gibt noch eine zweite Gruppe von Flächen 2. Grades, in welcher jede zu sich selbst polar ist in bezug auf die übrigen: die Trägerflächen der zehn Regelscharen, in denen je drei von sechs gegenseitig in Involution befindlichen Gewinden sich schneiden: Liniengeometrie, Bd. I, Nr. 185. — Montesano hat (Annali di Matematica, Ser. II, Bd. 14, S. 131) gezeigt, daß diese beiden Gruppen die einzigen derartigen sind.

2) D'Ovidio, Giornale di Matematiche, Bd. 10, S. 313; H. Thieme, Zeitschrift f. Mathem. und Phys., Bd. 22, S. 377.

die Basisfläche Φ stützen sich (Nr. 85); denn E, G, die ein Paar der ersten bilden, sind die Doppelpunkte der zweiten. Die Polarebenen (nach Φ) zweier konjugierter Punkte X, X_1 der ersten Involution bilden ein Paar der Involution konjugierter Ebenen um v für φ' und schneiden in u konjugierte Punkte Y', Y_1' für φ', also ein Paar von $I_{\varphi'}$ ein, da u zu v polar ist; nun ist Y' zu X, Y_1' zu X_1 konjugiert nach Φ; also ergeben sich Y', Y_1' aus X, X_1 durch I_Φ und bilden ein Paar von I_φ, weil I_Φ und I_φ sich stützen. Folglich haben φ und φ' auf u die nämliche Involution konjugierter Punkte, ebenso auf v, und daher auch die nämlichen Involutionen konjugierter Ebenen um u und v.

Sie berühren sich in den Schnitten der polaren Geraden u, v und haben das Vierseit gemein, das diese Schnitte verbindet. In dieser speziellen Lage haben sie ∞^2 gemeinsame Polartetraeder mit beliebigen zwei konjugierten Punkten auf u und beliebigen auf v als Ecken.

Nehmen wir zweitens an, daß nicht jede Ecke von $EFGH$ mit ihrer in Φ polaren Ebene inzidiere, sondern nur einige. E habe die Gegenebene FGH zur Polarebene, dagegen F inzidiere mit ihrer Polarebene, etwa EFG; die Polarebene von G muß dann durch E und F gehen und wäre mit EFG, die schon zu F gehört, identisch, wenn sie mit G inzidierte; also ist EFH die Polarebene von G, ihm gegenüberliegend, und für H bleibt als Polarebene EGH, die wieder mit ihrem Pol inzident ist.

Ist dann $EFGH$ Polartetraeder für φ, so ist es auch ein solches für φ'; denn die Gegenelemente E und FGH gehen in FGH und E, F und EGH in EFG und H, ... über. Wiederum sind $u = EG$ und $v = FH$ polar für alle drei Flächen; v schneidet Φ in den Ecken F, H, während E, G auf u in bezug auf sie konjugiert sind.

Auf v haben wir genau dieselben Verhältnisse wie vorhin; folglich ergeben sich dieselben konjugierten Punkte auf dieser Gerade für φ und φ' und dieselben konjugierten Ebenen durch u. Die beiden Flächen φ und φ' berühren sich in den Schnitten von v, mit Tangentialebenen, die durch u gehen. Folglich sind sie in spezieller Lage und haben ∞^1 gemeinsame Polartetraeder mit zwei Ecken in den einzigen gemeinsam konjugierten Punkten E, G auf u und den andern in zwei beliebigen (gemeinsam) konjugierten Punkten auf v.

W e n n a l s o φ u n d φ' n u r e i n g e m e i n s a m e s P o l a r t e t r a e d e r h a b e n, s o i s t e s a u c h P o l a r t e t r a e d e r f ü r j e d e n P o l a r r a u m, d e r d i e e i n e i n d i e a n d e r e ü b e r f ü h r t.

Solche Flächen φ und φ' werden im folgenden vorausgesetzt.

Wenn Φ die Basisfläche eines Polarraums (Φ) ist, welcher φ in φ' überführt, so ist $EFGH$ für sie Polartetraeder. Ein Punkt X des Schnittes von φ mit der Ebene EFG hat zur Polarebene in (Φ) eine durch H gehende Berührungsebene von φ', die also in einem

Punkte des Schnittes von φ' mit jener Ebene, der Polarebene von H, berührt, und eine Tangente x' dieses Schnitts einschneidet; die beiden Schnittkurven von φ und φ' sind daher polar in dem Polarfelde, das der Polarraum in der Ebene EFG hervorruft und dessen Basis der Schnitt von Φ ist. Wir haben demnach die beiden Flächen φ und φ' mit den vier Tetraederebenen zu schneiden und in jeder die vier Basen herzustellen, in bezug auf welche die beiden Schnittkurven polar sind (Nr. 333). Jede von den gesuchten Φ muß in vier dieser Kurven schneiden.

Für die in EFG gelegenen Basen ist EFG Polardreieck und auf jeder Seite berühren sich zweimal zwei; die beiden Paare von Berührungspunkten ergeben sich allein aus den beiden Paaren der Schnitte der Seite mit den beiden polaren Kurven in der Ebene (Nr. 333), also den Schnitten mit φ und φ'. Daher sind z. B. auf EF diese beiden Punktepaare dieselben in der Ebene EFH wie in EFG. Betrachten wir eine von den vier Basen in EFG und ihre Schnitte mit EF und EG; durch die auf EF gehen zwei Basen in EFH, welche, wegen der Berührung auf EF, die EH in verschiedenen Punktepaaren treffen, so daß für jede eine Basis in EGH durch das Punktepaar auf EG vorhanden ist, die durch dasselbe Punktepaar auf EH geht. So haben wir unsere Basis in EFG durch Basen in EFH und EGH zu zwei Tripeln vervollständigt, deren drei Basen sich gegenseitig in zwei Punkten schneiden. Ein solches Tripel führt zu einer durchgehenden Fläche 2. Grades, die wir, da sie sich als Basisfläche herausstellen wird, Φ nennen wollen. Für den Punkt F sind EG und EH Polaren in bezug auf die beiden Kegelschnitte in FEG und FEH, folglich ist EGH die Polarebene von F in bezug auf Φ, ebenso EFH von G und EFG von H, also E von FGH, und $EFGH$ ist Polartetraeder von Φ. Weil H der Pol von EFG für Φ, φ und φ' ist und die Schnitte von φ und φ' in EFG in bezug auf den von Φ polar sind, so gehen die Polarebenen der Punkte des Schnitts von φ in bezug auf Φ durch H und die Tangenten des Schnitts von φ'; ihr Kegel berührt die Polarfläche der φ nach Φ längs dieses Schnitts; ebenso geht sie durch die Schnitte von φ' mit EFH, EGH, ist also mit φ' identisch. Mithin ist Φ in der Tat eine Fläche, wie wir sie suchen, und schneidet nun auch die vierte Tetraederebene FGH in einer der vier Basen. Von jeder der vier Basen in EFG ausgehend, kommen wir zu zwei solchen Flächen Φ, daher erhalten wir im ganzen 8. Es gibt also 8 Flächen 2. Grades oder Polarräume, in bezug auf welche die beiden gegebenen Flächen 2. Grades φ, φ' polar sind.

Zwei durch dieselbe Basis, etwa in EFG, gehende von diesen Flächen berühren sich, weil H gemeinsamer Pol der Ebene ist, längs derselben, und so berührt sich jede der acht Flächen mit vier anderen auf den Tetraederebenen.

Die Ebene EFH wird von zwei sich auf EFG berührenden Flächen Φ in zwei ihrer vier Basen geschnitten; diese sind harmonisch zugeordnet mit EF als Berührungssehne und H als Berührungspol; ebenso ist dieser es in EGH und FGH, aber schon eine der drei Ebenen durch H genügt, um zu erkennen, daß die beiden Flächen harmonisch zugeordnet sind in bezug auf H und EFG.

Die 8 Basisflächen bilden also 16 Paare harmonisch zugeordneter Flächen mit konischer Berührung; die Berührungs-Kegelschnitte liegen in den Ebenen des gemeinsamen Polartetraeders der gegebenen Flächen φ und φ' und der 8 Basisflächen, Berührungspole sind je die Gegenecken.

Durch ein bestimmtes der beiden Punktepaare auf EF gehen zwei Basiskurven von EFG und durch jede zwei Basisflächen, welche dann, wegen der Berührung längs der Basiskurve, GH in verschiedenen Punktepaaren treffen; folglich geht eine aus dem einen Paare und eine aus dem anderen Paare durch das nämliche Punktepaar auf GH, und die beiden andern durch das andere; und das zweite Paar auf EF liefert noch zwei solche Paare. Die beiden Gegenkanten EF, GH führen also zu vier Paaren von Flächen Φ, die je durch dasselbe Paar von EF und dasselbe Paar von GH gehen und, weil diese Geraden polar in bezug auf alle Φ sind, sich in einem Vierseite durchschneiden, von dem EF und GH Diagonalen sind. Durch die $3 \cdot 4$ Paare, zu den drei Paaren Gegenkanten gehörig, sind die 28 Paare erschöpft.

Zwei solche gepaarte Flächen schneiden EFG in zwei verschiedenen Basiskurven, die durch dasselbe Paar auf EF gehen; sie sind harmonisch zugeordnet mit EF als Berührungssehne und G als Berührungspole. Folglich schneiden die Strahlen durch G nach EF sie und die Flächen harmonisch; und daher werden diese von allen Strahlen des Netzes $[EF, GH]$ so geschnitten. Die Flächen jedes dieser 12 Paare sind harmonisch zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt; und in allen 28 Paaren ist jede der beiden Flächen zu sich selbst polar in bezug auf die andere, also ist jede der acht Basisflächen zu sich selbst polar in bezug auf die sieben andern, oder in bezug auf jede sind die sieben andern zu sich selbst polar.

Wir unterlassen die Untersuchung der Art der Basisflächen, weil zu viele Fälle zu unterscheiden sind; unter den reellen befindet sich höchstens eine reell-imaginäre und ein Ellipsoid. —

Über die Transformation einer Fläche 2. Grades in sich selbst durch einen Nullraum wird später (Nr. 598) gesprochen werden.

§ 89. Vertauschbare involutorische Verwandtschaften.

In Nr. 83, 86 wurde für zwei ineinander liegende Involutionen I_1, 596
I_2 gefunden, daß, wenn die eine die andere in sich selbst überführt,

dies auch umgekehrt gilt und die beiden Produkte $I_1 I_2$ und $I_2 I_1$ identisch sind. Es wurde ferner auf die Notwendigkeit hingewiesen, daß für die Vornahme einer solchen Multiplikation die Verwandtschaft mit einem Sinne zu behaften sei, indem bestimmt festgesetzt wird, von welchem Gebilde ins andere transformiert wird, und daß gerade für mit einem Sinne behaftete Verwandtschaften das Wort „Transformation" reserviert werden sollte. Es wurde dort auch schon von den acht Produkten zweier in demselben Gebilde befindlicher Projektivitäten gesprochen.

Es mögen jetzt analoge Betrachtungen für eindeutige Verwandtschaften beliebiger Dimension gemacht werden; denn an der Eindeutigkeit muß festgehalten werden, weil für mehrdeutige der Begriff der Multiplikation, als zu unbestimmt, nicht eingeführt werden kann.

Wenn wieder Γ eine solche Transformation ist und Γ^{-1} die im andern Sinne vorgenommene, ihre Umkehrung, so haben wir, wie früher, im allgemeinen Falle 8 Produkte:

$$1)\ \Gamma\Gamma_1,\quad 2)\ \Gamma\Gamma_1^{-1},\quad 3)\ \Gamma^{-1}\Gamma_1,\quad 4)\ \Gamma^{-1}\Gamma_1^{-1},$$
$$5)\ \Gamma_1\Gamma,\quad 6)\ \Gamma_1^{-1}\Gamma,\quad 7)\ \Gamma_1\Gamma^{-1},\quad 8)\ \Gamma_1^{-1}\Gamma^{-1}.$$

Die untereinander stehenden sind je Produkte derselben Transformationen in den beiden Reihenfolgen; dagegen sind 1) und 8), 2) und 7), 3) und 6), 4) und 5) Umkehrungen voneinander; denn z. B. Γ führe A in A', Γ_1 dieses Element in B' über, so wird A durch 1) in B' übergeführt; $\Gamma_1{}^{-1}$ führt B' in B und Γ^{-1} dies B in A über, so daß B' durch 8) in A übergeht.

Wenn Γ, Γ_1 vertauschbar sind, so sind die beiden Produkte $\Gamma\Gamma_1$ und $\Gamma_1\Gamma$ oder 1) und 5) nicht verschieden, also auch die Umkehrungen 8) und 4). Aber auch 2) und 6), 3) und 7) werden identisch. Denn es sei $\Gamma\Gamma_1^{-1} = \mathfrak{G}$, so ist, durch Vormultiplikation mit Γ_1, $\Gamma_1\Gamma\Gamma_1^{-1} = \Gamma_1\mathfrak{G}$, oder, infolge der Voraussetzung, $\Gamma\Gamma_1\Gamma_1^{-1} = \Gamma = \Gamma_1\mathfrak{G}$[1]), also, wiederum durch Vormultiplikation mit Γ_1^{-1}, $\Gamma_1^{-1}\Gamma = \mathfrak{G}$, demnach $\Gamma\Gamma_1^{-1} = \Gamma_1^{-}\Gamma$; und $\Gamma^{-1}\Gamma_1$, $\Gamma_1\Gamma^{-1}$ vereinigen sich in der Umkehrung.

Wenn also Γ und Γ_1 vertauschbar sind, so ist auch jede mit der Umkehrung der andern vertauschbar und die beiden Umkehrungen sind es auch; es ergeben sich nur vier Produkte, zweimal zwei Umkehrungen.

Ist ferner bloß Γ involutorisch, so daß $\Gamma^{-1} = \Gamma$, so ergeben sich gleichfalls nur vier Produkte. Sind beide involutorisch, so fallen 1), 2), 3), 4) zusammen und 5), 6), 7), 8); es bleiben zwei Produkte, welche Umkehrungen voneinander sind. Sind sie überdies vertauschbar, so liegt nur ein Produkt vor, das, weil es

1) Die Assoziativität wird wie in Nr. 86 bewiesen; nach ihr ist $\Gamma\Gamma_1\Gamma_1^{-1} = \Gamma(\Gamma_1\Gamma_1^{-}) = \Gamma$.

mit seiner Umkehrung identisch ist, auch involutorisch ist. Das Produkt zweier vertauschbaren Transformationen ist mit jedem der beiden Faktoren vertauschbar. Die beiden Produkte $\Gamma\Gamma_1$ und $\Gamma_1\Gamma$ sind gleich; ob wir dies Produkt als $\Gamma\Gamma_1$, mit Γ nach- oder, als $\Gamma_1\Gamma$, mit Γ vormultiplizieren, beidemal ergibt sich, wegen der Assoziativität, $\Gamma\Gamma_1\Gamma$.

Heben wir hervor (vgl. Nr. 86): Das Produkt zweier vertauschbaren involutorischen Verwandtschaften, das, wie wir fanden, auch involutorisch ist, ist mit jedem der beiden Faktoren vertauschbar.

Verallgemeinern wir die oben zitierten Sätze. Wenn bei den (mit Sinn behafteten) Verwandtschaften Γ, Γ_1 die in Γ entsprechenden Elemente A und A' durch Γ_1 in B und B' übergehen, welche in Γ ebenfalls entsprechend sind, so werden die in Γ_1 korrespondierenden Elemente A und B durch Γ in die ebenfalls korrespondierenden Elemente A', B' übergeführt. Wenn also Γ durch Γ_1 in sich übergeführt wird, so geht auch Γ_1 durch Γ in sich über.

Ferner $\Gamma\Gamma_1$ führt A über A' in B' und $\Gamma_1\Gamma$ führt A über B in B' über, beide Produkte von Γ und Γ_1 führen A in B' über und sind identisch.

Und umgekehrt, wenn die Produkte identisch sind, so führt jede der beiden Verwandtschaften die andere in sich selbst über. Den A, A', welche in Γ entsprechend sind, mögen durch Γ_1 B und B' korrespondieren; es führt dann $\Gamma\Gamma_1$ A über A' nach B'; da $\Gamma_1\Gamma$ dasselbe tun soll, so muß B, welches dem A in Γ_1 korrespondiert, durch Γ in B' übergehen, d. h. Γ_1 führt zwei entsprechende Elemente A, A' von Γ in ebensolche B, B' über.[1])

Wir beschränken uns im folgenden auf die involutorischen Kolli- 597
neationen und Korrelationen (im Raume), die involutorische Homologie, die windschiefe Involution, den Nullraum und den Polarraum.

Stellen wir nun für je zwei dieser Verwandtschaften fest, unter welcher Bedingung sie vertauschbar sind und welches das Produkt ist.

Wenn zwei involutorische Homologien (S, σ) und (S_1, σ_1) vertauschbar sind, so muß der Bündel S mit lauter sich entsprechenden Elementen durch (S_1, σ_1) in einen eben solchen Bündel, also in sich selbst übergehen, und ebenso das Feld σ; es muß also S in σ_1 liegen und σ durch S_1 gehen. Das Produkt zweier solchen involutorischen Homologien ist (Nr. 509) die windschiefe Involution, deren Axen SS_1 und $\sigma\sigma_1$ sind, also in beiden Reihenfolgen dasselbe.

Zwei involutorische Homologien (S, σ), (S_1, σ_1) sind vertauschbar, wenn von jeder das Zentrum mit der Ebene der andern inzidiert.

---

1) Vgl. Reye, Geom. der Lage 3. Aufl. T. II S. 80, T. III S. 219 und Mathem. Annalen Bd. 43 S. 145.

Produkt ist die windschiefe Involution, von welcher die eine Axe die Zentren S, S_1 verbindet, während in der andern die Ebenen σ, σ_1 sich schneiden.

Zu jeder involutorischen Homologie gibt es ∞^4, welche mit ihr vertauschbar sind.

Bei zwei vertauschbaren windschiefen Involutionen (u, v), (u_1, v_1) müssen die Geraden u, v mit allen Punkten und Ebenen, welche mit der einen, und allen Strahlen, die mit beiden inzidieren, lauter sich selbst entsprechenden Elementen in (u, v), in eben solche Elemente durch (u_1, v_1) übergehen, also entweder jede der beiden Geraden u, v in sich selbst oder in die andere.

Im ersteren Falle sind u, v Geraden, welche u_1, v_1 treffen, es entsteht also ein windschiefes Vierseit durch die Axen.[1]) Es sei u_2 die Diagonale zwischen uu_1 und vv_1 und v_2 die zwischen uv_1, vu_1. Die windschiefe Involution (u_2, v_2) ist das Produkt.

In der Tat, wenn dem X in (u, v) der Punkt X', diesem in (u_1, v_1) der X'' entspricht und die Ebene $XX'X''$ die sechs Axen in $U, V, \ldots V_2$ trifft, den sechs Ecken eines Vierseits, so ist X' ein Diagonalpunkt desselben; weil $(UVXX') = (U_1V_1X'X'') = -1$, sind X und X'' die beiden andern, und $(U_2V_2XX'') = -1$.

Da (u_2, v_2) gleichartig aus (u, v) und (u_1, v_1) entsteht, ist das Produkt in beiden Reihenfolgen dasselbe; wie auch der Sinn $X''X'X$ lehrt. Bezeichnen wir die Punkte uu_1, uv_1, vu_1 mit S, S_1, S_2 und die Ebenen vv_1, vu_1, uv_1 mit σ, σ_1, σ_2, so ist nach dem vorigen Ergebnis:

$$(S_1, \sigma_1) \cdot (S, \sigma) = (u, v), \quad (S, \sigma) \cdot (S_2, \sigma_2) = (u_1, v_1),$$

denn $SS_1 = u$, $\sigma\sigma_1 = v$; $SS_2 = u_1$, $\sigma\sigma_2 = v_1$. Also ist:

$$(u, v) \cdot (u_1, v_1) = (S_1, \sigma_1) \cdot (S, \sigma)^2 \cdot (S_2, \sigma_2) = (S_1, \sigma_1) \cdot (S_2, \sigma_2) = (u_2, v_2),$$

da $S_1S_2 = v_2$, $\sigma_1\sigma_2 = u_2$.

Da jedes der drei Axenpaare aus den Diagonalen des Vierseits der andern besteht, so ist jede der drei Involutionen Produkt der beiden andern; die Sinne $X'XX''$ und $X'X''X$ zeigen dies auch.

Entweder sind alle sechs Axen reell, oder zwei bestehen aus konjugiert imaginären Geraden, das dritte aus reellen.

Wenn aber, im zweiten Falle, u, v in (u_1, v_1) einander entsprechen, so gehören alle vier Axen zu derselben Regelschar, und die

1) Jede zwei Kollineationen mit Axen, von denen die einen die andern treffen, transformieren sich gegenseitig in sich selbst. In der Tat, wenn X, X' in (u, v) entsprechend sind und X, Y und X', Y' in (u_1, v_1), so daß

$$(u_1, v_1, X, Y) = (u_1, v_1, X', Y'),$$

so trifft YY' die u, v und es ist

$$(u, v, Y, Y') = (u, v, X, X').$$

einen Axen sind zu den andern harmonisch. Die vier harmonischen Punkte (X, X', u, v) gehen durch (u_1, v_1) in die harmonischen Punkte (Y, Y', v, u) über, so daß Y, Y' in der Tat in (u, v) entsprechend sind.

Das Produkt ist auch hier eine windschiefe Involution; ihre Axen u_2, v_2 sind die Doppelstrahlen der involutorischen Regelschar $(u, v; u_1, v_1)$. Es seien wieder $U, V, \ldots$ die Schnitte der Ebene $XX'X''$ mit den sechs Axen, gelegen auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der aus der Regelschar ausgeschnitten wird. Die Punkte X, X', harmonisch zu U, V, sind konjugiert in bezug auf $\mathfrak{K}$, ebenso X', X'; also ist XX'' die Polare von X'; sie schneidet daher $\mathfrak{K}$ in Punkten, die sowohl zu U, V, als zu U_1, V_1 harmonisch sind, also in U_2, V_2. Weil U, V zu U_1, V_1 harmonisch sind, liegt der Pol von UV auf U_1V_1, und weil X, X' konjugiert sind, so ist U_1V_1 die Polare von X, also X'' zu X konjugiert; d. h. X und X'' sind entsprechend in (u_2, v_2).

Von den drei Axenpaaren muß eins oder alle drei aus konjugiert imaginären Geraden bestehen. Sind nämlich u, v; u_1, v_1 beide reell, so ist, wegen der harmonischen Lage, die Involution in der Regelschar elliptisch, also sind u_2, v_2 imaginär. Wenn u, v reell, u_1, v_1 imaginär sind, ist die Involution hyperbolisch und u_2, v_2 reell.

Sind aber sowohl u, v als u_1, v_1 konjugiert imaginär, so kann die Regelschar nicht reell sein; denn in einer solchen können zwei Paare konjugiert imaginärer Geraden nicht harmonisch sein. Die Trägerfläche ist reell-imaginär und auch das dritte Paar u_2, v_2 besteht aus konjugiert imaginären Geraden.

Jedes der drei Axenpaare ist zu den beiden andern harmonisch; also ist jede der drei windschiefen Involutionen Produkt der beiden andern.

Zwei windschiefe Involutionen können in zwei Weisen vertauschbar sein. Entweder bilden die einen Axen mit den andern ein windschiefes Vierseit; und Produkt ist die windschiefe Involution, welche die Diagonalen des Vierseits zu Axen hat. Oder die vier Axen befinden sich in derselben Regelschar und sind harmonisch zueinander; Produkt ist diejenige windschiefe Involution, deren Axen so in der Regelschar liegen, daß sie zu beiden Axenpaaren harmonisch sind. Im ersten Falle sind in allen drei Paaren die Geraden reell oder nur in einem, im andern in zweien oder in keinem.

Zu einer gegebenen windschiefen Involution (u, v) gibt es in beiden Fällen ∞^4 mit ihr vertauschbare; denn das Strahlennetz $[u, v]$ enthält $\infty^{2 \cdot 2}$ Paare von Geraden u_1, v_1, und durch u, v gehen ∞^3 Regelscharen und jede enthält ∞^1 zu u, v harmonische Paare u_1, v_1.

Eine auf eine kubische Raumkurve gelegte Involution I bewirkt (Nr. 522) eine windschiefe Involution, deren Axen u, v die zu den Doppelpunkten jener Involution gehörigen konjugierten Schmiegungsstrahlen sind und welche die Kurve so in sich transformiert, daß in I gepaarte Punkte auch in (u, v) entsprechend sind. Befinden sich auf der Kurve zwei sich stützende oder vertauschbare Involutionen, so führen sie zu zwei vertauschbaren windschiefen Involutionen des zweiten Falles. Ihr Produkt ist diejenige windschiefe Involution, die zum Produkt der beiden Involutionen auf der Kurve gehört.

Wenn (S, σ) und (u, v) vertauschbar sind, so müssen S und σ in (u, v) sich selbst entsprechen, also mit u, v inzidieren, und weil sie selbst nicht inzident sind, muß S mit der einen Axe, etwa u, und σ mit der andern v inzidieren. Ihr Produkt ist die involutorische Homologie (S_1, σ_1), bei welcher $S_1 = u\sigma$, $\sigma_1 = vS$. Damit ist die Bedingung der Vertauschbarkeit für (S, σ) und (S_1, σ_1) erfüllt; man hat: $(S, \sigma) \cdot (S_1, \sigma_1) = (S_1, \sigma_1) \cdot (S, \sigma) = (u, v)$; woraus durch Vor-, bzw. Nachmultiplikation mit (S, σ) folgt:

$$(S, \sigma) \cdot (u, v) = (u, v) \cdot (S, \sigma) = (S_1, \sigma_1).$$

Eine involutorische Homologie (S, σ) und eine windschiefe Involution (u, v) sind vertauschbar, wenn S und σ bzw. mit u und v inzidieren. Tut es S mit u, σ mit v, so ist das Produkt die involutorische Homologie, deren Zentrum $u\sigma$ und deren Ebene vS ist.

Zu jeder (S, σ) gibt es ∞^4 vertauschbare (u, v), zu jeder (u, v) aber nur ∞^2 vertauschbare (S, σ).

Die mit einem Tetraeder verbundenen vier involutorischen Homologien und drei windschiefen Involutionen sind zu je zweien vertauschbar:

$$(A, \alpha) \cdot (B, \beta) = (B, \beta) \cdot (A, \alpha) = (AB, CD),$$
$$(A, \alpha) \cdot (AB, CD) = (AB, CD) \cdot (A, \alpha) = (B, \beta),$$
$$(AB, CD) \cdot (AC, BD) = (AC, BD) \cdot (AB, CD) = (AD, BC);$$

speziell gilt dies für die sieben Symmetrien, die zu einem Dreikant gehören, insbesondere einem dreirechtwinkligen.

598 Für zwei vertauschbare Nullräume $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_1$ seien X und X_1 die Nullpunkte der nämlichen Ebene $\mathfrak{x}$, so daß in dem Produkt $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1$ dem Punkte X der Punkt X_1 korrespondiert; das soll auch in $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}$ der Fall sein, also muß es eine Ebene $\mathfrak{x}'$ geben, für welche X Nullpunkt in $\mathfrak{N}_1$ und X_1 der in $\mathfrak{N}$ ist. Ist das der Fall, so befinden sich (Nr. 534) die zugehörigen Gewinde $(\mathfrak{N})$ und $(\mathfrak{N}_1)$ in Involution, und die Kollineation, in welcher demselben Elemente zugehörige Nullelemente entsprechend sind, also das Produkt, ist die involutorische Kollineation mit Axen, also die windschiefe Involution.

Zwei Nullräume sind vertauschbar, wenn die Kollineation mit Axen, zu welcher sie führen, die windschiefe Involution ist; dieselbe ist dann das Produkt. Ihre Axen sind die Leitgeraden u, v des den beiden zugehörigen Gewinden gemeinsamen Strahlennetzes.

Es genügt (Nr. 534), daß einmal zwei Polaren des einen Nullraums sich gleichzeitig im Gewinde des andern befinden.

Jeder Nullraum ist mit ∞^4 andern vertauschbar (Nr. 534).

Ein Polarraum $\mathfrak{P}$, der mit einem andern $\mathfrak{P}_1$ vertauschbar ist, transformiert dessen Basisfläche in sich selbst; also sind (Nr. 591, 592) die beiden Basisflächen harmonisch zugeordnet, entweder mit konischer Berührung oder in bezug auf den Berührungspol S und die Ebene σ der Berührungskurve; oder mit Vierseits-Durchschnitt oder in bezug auf die Diagonalen u, v des Vierseits. Im ersten Falle ist jedem Elemente des Bündels S in beiden Polarräumen dasselbe Element des Feldes σ zugeordnet; also im Produkte jedes Element von S und σ sich selbst entsprechend; daher ist das Produkt die involutorische Homologie (S, σ). Im zweiten Falle ist in beiden Polarräumen jedem Punkt, jeder Ebene der einen Diagonale dieselbe Ebene, derselbe Punkt der andern und jedem Strahle, der beide Diagonalen trifft, derselbe dies gleichfalls tuende Strahl polar; d. h. diese Elemente sind im Produkte sich selbst entsprechend; dies Produkt ist also die windschiefe Involution (u, v).

Zwei Polarräume sind vertauschbar, wenn ihre Basisflächen harmonisch zugeordnet sind. Je nachdem sie es mit konischer Berührung oder mit Vierseits-Durchschnitt sind, ist das Produkt die involutorische Homologie, welche den Berührungspol und die Ebene der Berührungskurve zu Zentrum und Ebene hat, oder die windschiefe Involution, deren Axen die Diagonalen des Vierseits sind.

Es seien X, Y; X_1, Y_1 die Schnitte eines Strahls durch S oder von $[u, v]$ mit den beiden Basisflächen, harmonisch zueinander und die einen, wie die andern harmonisch zu S und σ, bzw. u, v. Die Polarebene von X in $\mathfrak{P}_1$ ist die Tangentialebene von Y an die Basisfläche $(\mathfrak{P})$, der Pol dieser Ebene in $\mathfrak{P}$ der Berührungspunkt Y; X und Y, entsprechende Punkte im Produkte, sind also entsprechend in (S, σ) oder (u, v).

Mit einem gegebenen Polarraume sind ∞^3 in der ersten und ∞^4 Polarräume in der zweiten Art vertauschbar (Nr. 593).

Wenn ein Nullraum $\mathfrak{N}$ und ein Polarraum $\mathfrak{P}$ vertauschbar sind, so transformiert $\mathfrak{N}$ die Basisfläche $(\mathfrak{P})$ in sich selbst. Die Nullebene eines Punktes von $(\mathfrak{P})$ berührt $(\mathfrak{P})$ und geht durch ihn; also enthält sie eine der beiden Geraden von $(\mathfrak{P})$ durch den Punkt, wodurch diese Nullstrahl wird. Bei fünf Punkten der $(\mathfrak{P})$ müssen mindestens drei dieser Geraden der nämlichen Regelschar angehören; dann gehört aber (Nr. 530) die ganze Schar dem Gewinde ($\mathfrak{N}$) an, also transformiert $\mathfrak{N}$ jede Gerade derselben und dadurch ($\mathfrak{P}$) in sich. Die andere Regelschar enthält eine Involution von Polaren von $\mathfrak{N}$ und in den Doppelstrahlen u, v derselben zwei Strahlen von ($\mathfrak{N}$). Für jeden Punkt von u sind diese Gerade und die durch ihn gehende aus der ersteren Schar Nullstrahlen, also ihre Ebene, die Berührungsebene von ($\mathfrak{P}$), Nullebene; sie entspricht dem Punkt in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$ und beide sind sich selbst entsprechend im Produkte. Daraus folgt, daß dies Produkt die windschiefe Involution (u, v) ist.

Ein Nullraum $\mathfrak{N}$ und ein Polarraum $\mathfrak{P}$ sind vertauschbar, wenn die eine Regelschar der Basisfläche ($\mathfrak{P}$) dem Gewinde ($\mathfrak{N}$) angehört. In der andern befinden sich dann zwei Strahlen u, v von ($\mathfrak{N}$). Die windschiefe Involution (u, v) ist das Produkt.

Weil ein Gewinde ∞^6 Regelscharen enthält (Nr. 530), so ist ein gegebener Nullraum mit ∞^6 Polarräumen vertauschbar.

Durch eine Regelschar geht ein Netz von ∞^2 Gewinden (Nr. 531); folglich sind mit einem gegebenen Polarraume zwei Systeme von ∞^2 Nullräumen vertauschbar; die zugehörigen Gewinde bilden die Netze durch die eine oder andere Regelschar der Basisfläche des Polarraums.

In dem Gewinde ($\mathfrak{N}$) kann man u, v auf $\infty^{2\cdot 3}$ Weisen wählen; in der einen oder andern Regelschar von ($\mathfrak{P}$) auf ∞^2 Weisen. Durch $\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{P}$ und das Produkt (u, v) ist eindeutig der andere Faktor $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{N}$ bestimmt. Ist $\mathfrak{N}$ gegeben, so gibt es eine Regelschar von Nullstrahlen, welche u, v treffen: sie wird durch drei von ihnen bestimmt; die Trägerfläche ist ($\mathfrak{P}$). Ist $\mathfrak{P}$ gegeben, so ist durch u, v in der einen Regelschar von ($\mathfrak{P}$) und drei Strahlen aus der andern das Gewinde ($\mathfrak{N}$) bestimmt.

Nun wissen wir (Nr. 595) auch Bescheid, wann ein Nullraum eine Fläche 2. Grades in sich transformiert. Eine Regelschar derselben muß aus lauter Nullstrahlen bestehen oder dem Gewinde angehören. Die Transformation ist erster Art.

Der Nullraum und sein Gewinde wird dann auch durch den Polarraum der Fläche in sich transformiert.

599 Wenn eine Homologie (S, σ) durch einen Nullraum in sich übergeht, so muß der Bündel S mit lauter sich selbst entsprechenden Elementen in ein Feld übergehen mit eben solchen Elementen, also in σ; d. h. σ muß Nullebene von S sein; also nur eine Homologie, bei welcher S und σ inzidieren, kann durch einen Nullraum in sich transformiert werden oder transformiert ihn in sich. Eine involutorische Homologie ist mit einem Nullraume nicht vertauschbar, da sie diese Eigenschaft nicht hat.

Wenn eine windschiefe Involution (u, v) und ein Nullraum $\mathfrak{N}$ vertauschbar sind, so gehen u, v durch $\mathfrak{N}$ in sich selbst über oder ineinander, sind Nullstrahlen oder Polaren von $\mathfrak{N}$. Im ersteren Falle[1]) besteht eine Regelschar von Nullstrahlen, die sich auf u, v stützen. Ist $\mathfrak{P}$ der Polarraum der Trägerfläche, so ist

$$\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{N} = (u, v),$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{N} \cdot (u, v) = (u, v) \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{P}.$$

Im zweiten Falle ist $[u, v]$ ein im Gewinde $(\mathfrak{N})$ enthaltenes Strahlennetz (Nr. 530); der Büschel von Gewinden durch dasselbe enthält ein Gewinde $(\mathfrak{N}_1)$, das zu $(\mathfrak{N})$ in Involution ist (Nr. 534); also sind $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_1$ vertauschbar, und aus:

$$\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N} = (u, v)$$

folgt:

$$\mathfrak{N} \cdot (u, v) = (u, v) \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1.$$

Eine windschiefe Involution (u, v) und ein Nullraum $\mathfrak{N}$ sind vertauschbar, wenn die Axen u, v Nullstrahlen oder Polaren von $\mathfrak{N}$ sind. Im ersteren Falle ist das Produkt der Polarraum $\mathfrak{P}$, dessen Basisfläche in der einen Regelschar nur jene beiden Nullstrahlen u, v hat, während die andere aus lauter Nullstrahlen besteht, im andern aber der Nullraum, in welchem u, v ebenfalls polar sind und der mit dem gegebenen vertauschbar ist, so daß die beiden Gewinde in Involution sind.

Mit einer gegebenen windschiefen Involution (u, v) sind ∞^3 Nullräume in der ersten Weise vertauschbar und ∞^1 in der zweiten; denn durch u, v gehen ∞^3 Gewinde und durch das Strahlennetz $[u, v]$ nur ∞^1.

Mit einem gegebenen Nullraume $\mathfrak{N}$ sind ∞^6 windschiefe Involutionen in der ersten, ∞^4 in der zweiten Weise vertauschbar; denn auf $(\mathfrak{N})$ gibt $\infty^{2 \cdot 3}$ Paare von Strahlen und in bezug auf $\mathfrak{N}$ ∞^4 Paare von Polaren.

Eine involutorische Homologie (S, σ) und ein Polarraum $\mathfrak{P}$ seien vertauschbar; es müssen dann S und σ polar in $\mathfrak{P}$ sein, das Produkt ist der Polarraum $\mathfrak{P}_1$, dessen Basisfläche zu $(\mathfrak{P})$ harmonisch zugeordnet ist in bezug auf S und σ. Denn es ist dann $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P} = (S, \sigma)$; also $(S, \sigma) \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{P} \cdot (S, \sigma) = \mathfrak{P}_1$.

Mit einer gegebenen (S, σ) sind daher ∞^6 Polarräume vertauschbar; denn so viele gehören zu S und σ als Pol und Polarebene, und mit einem gegebenen $\mathfrak{P}$ sind ∞^3 (S, σ) vertauschbar.

1) Jede Kollineation mit Axen, die in einem Nullraume Nullstrahlen sind, wird durch ihn in sich transformiert oder transformiert ihn in sich (Nr. 530).

Die beiden zu (S, σ) und $\mathfrak{P}$ gehörigen Involutionen von Punkten oder Ebenen auf einem Strahle durch S, bzw. in σ stützen sich.

Wenn (u, v) und $\mathfrak{P}$ vertauschbar sind, so sind wiederum u, v sich selbst entsprechend in $\mathfrak{P}$, also auf $(\mathfrak{P})$ gelegen, oder polar in $\mathfrak{P}$. Im ersteren Falle ist das Produkt der Nullraum $\mathfrak{N}$, dessen Gewinde durch u, v und die ganze andere Regelschar von $(\mathfrak{P})$ geht; denn dann ist $\mathfrak{P}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{P} = (u, v)$, also $\mathfrak{P} \cdot (u, v) = (u, v) \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{N}$. Im andern Falle ist das Produkt der Polarraum $\mathfrak{P}_1$, dessen Basisfläche der $(\mathfrak{P})$ harmonisch zugeordnet in bezug auf u und v; denn es ist $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 = (u, v)$; usw.

Mit einer gegebenen (u, v) sind ∞^3 Polarräume in der ersten und ∞^5 in der zweiten Weise vertauschbar, da ∞^3 Flächen 2. Grades durch u, v gehen und ∞^5 sie zu Polaren haben.

Mit jedem $\mathfrak{P}$ sind ∞^2 windschiefe Involutionen in der ersten und ∞^4 in der zweiten Weise vertauschbar, weil $(\mathfrak{P})$ ∞^2 Paare von Geraden aus derselben Regelschar enthält und ∞^4 Paare von Polaren besitzt.

Jeder Strahl von $[u, v]$ trägt zwei sich stützende Involutionen von Punkten oder von Ebenen, zu (u, v) und $\mathfrak{P}$ gehörig.

In einem Nullraum sei $ABCD$ ein Nullstrahlen-Vierseit; es gibt dann zwei Regelscharen von Nullstrahlen, die sich auf AD, CB, bzw. AB, CD stützen. Die Trägerflächen $(\mathfrak{P})$, $(\mathfrak{P}^*)$ sind harmonisch zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt. Denn es ist:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{N} \cdot (AD, CB) = (AD, CB) \cdot \mathfrak{N},$$
$$\mathfrak{P}^* = \mathfrak{N} \cdot (AB, CD) = (AB, CD) \cdot \mathfrak{N},$$

also:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}^* = (AD, CB) \cdot \mathfrak{N}^2 \cdot (AB, CD) = (AD, BC) \cdot (AB, CD) = (AC, BD),$$
$$\mathfrak{P}^*\mathfrak{P} = (AB, CD) \cdot \mathfrak{N}^2 \cdot (AD, CB) = (AC, BD);$$

also sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^*$ vertauschbar, woraus die Behauptung folgt.

Solche im Vorangehenden mehrfach erhaltene Systeme von drei involutorischen Verwandtschaften, von denen je zwei vertauschbar sind und die dritte zum Produkte haben, führen zu Quadrupeln von Elementen (Punkten, Ebenen, Geraden), die in sich geschlossen sind.

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ seien die drei Verwandtschaften, und das Element X habe X_1, X_2, X_3 zu entsprechenden, so sind für jedes dieser vier Elemente die drei andern die entsprechenden. Denn weil X durch $\Gamma_1\Gamma_2 = \Gamma_2\Gamma_1 = \Gamma_3$ in X_3 übergeht, so ist X_3 dem X_1 in Γ_2, dem X_2 in Γ_1 entsprechend, und aus $\Gamma_1\Gamma_3 = \Gamma_2$ folgt, daß X_1 und X_2 in Γ_3 sich entsprechen. Es sind also X, X_1; X_2, X_3 in Γ_1, X, X_2; X_1, X_3 in Γ_2, X, X_3; X_1, X_2 in Γ_3 entsprechend.

Es seien beispielsweise die ∞^3 Punktquadrupel betrachtet, welche bei drei windschiefen Involutionen sich ergeben, deren Axenpaare derselben Regelschar angehören und zu je zweien harmonisch sind. Die Ebenen des Tetraeders $XX_1X_2X_3$ bilden zugleich ein Ebenenquadrupel:

$$X_1X_2X_3 = \xi, \; XX_3X_2 = \xi_1, \; X_3XX_1 = \xi_2, \; X_2X_1X = \xi_3,$$

die Kanten hingegen gehen in sich selbst oder in die Gegenkanten über.

Wenn Y in ξ gelegt wird, so fallen Y_1, Y_2, Y_3 in ξ_1, ξ_2, ξ_3; also ist dieses Tetraeder jenem eingeschrieben. Die Ebene ξ ist polar zu X in bezug auf die Trägerfläche der Regelschar, ebenso $\eta = Y_1Y_2Y_3$ zu Y; da Y in jener liegt, so liegt X in dieser; woraus folgt, daß auch $XX_1X_2X_3$ dem $YY_1Y_2Y_3$ eingeschrieben und so sich zwei Möbiussche Tetraeder ergeben haben.[1])

Handelt es sich um zwei Korrelationen und eine Kollineation, so besteht die aus einem Punkte oder einer Ebene sich ergebende Gruppe aus zwei Punkten und zwei Ebenen.

Erwähnen wir zum Schlusse noch kurz die analogen Sätze in der Ebene:

Das Produkt zweier vertauschbaren involutorischen Homologien (S, s), (S_1, s_1) in einer Ebene, von denen jede das Zentrum auf der Axe der andern haben muß, ist diejenige mit dem Zentrum ss_1 und der Axe SS_1.

Und das Produkt zweier vertauschbaren Polarfelder derselben Ebene, von denen jedes das andere in sich transformiert (Nr. 330), ist die involutorische Homologie, welche den Berührungspol und die Berührungssehne der beiden Basis-Kegelschnitte zu Zentrum und Axe hat.

Daraus ergibt sich dann der dritte Fall. Eine involutorische Homologie und ein Polarfeld sind vertauschbar, wenn das Zentrum S und die Axe s von jener in diesem polar sind. Und Produkt ist dasjenige Polarfeld, welches durch das gegebene in sich selbst übergeht mit S und s als Berührungspol und Berührungssehne der Basiskurven.

§ 90. Transformation einer kubischen Raumkurve in sich selbst durch Korrelation.[2])

Jedem Punkte X einer kubischen Raumkurve r^3, welche durch 600
eine Korrelation in sich selbst übergeht, entspricht, wenn er zum

1) Berzolari, Rendiconti dell' Accademia dei Lincei Ser. V Bd. 16 1. Ser. S. 726.

2) Sturm, Mathem. Annalen Bd. 26 S. 493; Montesano, Sulle correlazioni polari dello spazio, rispetto alle quali una cubica gobba è polare a sè stessa, Memorie dell' Accademia dei Lincei Ser. IV Bd. 3; Su alcuni sistemi di cubiche gobbe, Rendiconti dell' Accademia di Napoli 1886.

ersten der beiden korrelativen Räume gerechnet wird, im andern eine Schmiegungsebene ξ' derselben, und der Tangente x und der Schmiegungsebene ξ, die zu jenem gehören, korrespondieren die Tangente x' und der Punkt X', welche zu dieser gehören. Es ergeben sich damit drei zueinander perspektive Projektivitäten in der Punktreihe der Kurve, ihrer Tangentenreihe und ihrem Schmiegungsebenen-Torsus, in denen X und X', x und x', ξ und ξ' entsprechend sind. Und die den Koinzidenzelementen einer der Projektivitäten zugehörigen Elemente sind Koinzidenzelemente der andern. Es seien A, C die Koinzidenzpunkte der ersten Projektivität; in dieser entsprechen sich zwei Punkte X und X', von deren Schmiegungsebenen ξ, ξ' jede in der Korrelation dem andern Punkte entspricht; jeder von den Koinzidenzpunkten hat daher seine eigene Schmiegungsebene in beiderlei Sinne zur Polarebene, und seine Tangente entspricht sich selbst. Mithin sind A und C zwei Ecken des Schnittvierseits der Kernflächen, die Tangenten zwei Seiten und die Schmiegungsebenen zwei Winkelebenen desselben; da keine dieser Schmiegungsebenen den andern Punkt enthält und zwei Tangenten einer kubischen Raumkurve immer windschief sind, so sind jene Ecken A, C zwei Gegenecken und die Tangenten zwei Gegenseiten dieses Vierseits.

Wenn also eine Korrelation eine kubische Raumkurve in sich selbst überführt, so ist das Schnittvierseit der Kernflächen ein zur Kurve gehöriges Schmiegungsvierseit (Nr. 520), welches die Tangenten und Schmiegungsstrahlen zu den einen und andern Gegenseiten hat, während die Doppelsekante, welche die beiden Punkte der Kurve verbindet, und die Schnittlinie ihrer Schmiegungsebenen seine Diagonalen sind.

Durch ein Schmiegungsvierseit $ABCD$, dessen Ecken im Tetraeder die Ebenen α, β, γ, δ gegenüberliegen, mit bestimmter Zuordnung, etwa so, daß A und C die Kurvenpunkte, AB und CD die zugehörigen Tangenten und daher $ABD \equiv \gamma$ und $CDB \equiv \alpha$ die zugehörigen Schmiegungsebenen sind, ist ein Bündel von kubischen Raumkurven bestimmt, den wir in Nr. 520 beschrieben und $(A - AB, C - CD)$ genannt haben.

Seine Kurven können aber auch in dualer Weise durch ihre Schmiegungsebenen erzeugt werden. In die gemeinsame Schmiegungsebene α schneiden die Schmiegungsebenen einer jeden Kurve des Bündels einen Kegelschnitt (α), der durch den Punkt C geht und in ihm die Tangente CD berührt, welche beide zu α gehören, und auch in B die BD berührt, weil dies die Spuren der Tangente AB und der zugehörigen Schmiegungsebene γ sind; so daß die (α) eine Schar (Büschel-Schar) sich doppelt berührender Kegelschnitte bilden; und ebenso erhält man in γ eine solche Schar von (γ), welche alle in A

und D die AB und DB berühren; so daß DB gemeinsame Tangente der (α) und (γ) ist; und jeder Torsus der Berührungsebenen, welche, außer den Ebenen durch BD, zwei Kurven (α), (γ) gemeinsam sind, ist derjenige der Schmiegungsebenen einer Kurve des Bündels.

Die Büschel (A) und (α) und ebenso die (C) und (γ) sind ersichtlich perspektiv; aber das Paar von Kegeln (A), (C) und das Paar von Kegelschnitten (α), (γ), welche dieselbe Raumkurve liefern, sind nicht perspektiv.

Wir erhalten vielmehr (α), (γ) aus (A), (C), die etwa durch X bestimmt sind, also sich in der durch diesen Punkt gehenden Kurve des Bündels schneiden, folgendermaßen. Es seien X_α und x_α die Spuren der Kante AX von (A) und der zugehörigen Berührungsebene in α [letztere die Tangente des zu (A) perspektiven (α)]; x_α schneide BD in D_1, so ist $D_1 A$ die Spur derselben Berührungsebene in γ. Ebenso seien X_γ, x_γ Spuren der Kante CX von (C) und ihrer Berührungsebene in γ, sodaß, wenn x_γ die BD in B_1 schneidet, $B_1 C$ Spur dieser Ebene in α ist. Daher sind $Y_\alpha = (x_\alpha, CB_1)$ und $Y_\gamma = (x_\gamma, AD_1)$ die Spuren, in α, bzw. γ, der Tangente der Schnittkurve der beiden Kegel (A), (C) in X, in welcher sich die beiden Berührungsebenen begegnen, und die durch Y_α, Y_γ gehenden Kegelschnitte (α), (γ) sind diejenigen, welche diese Kurve liefern. Legt man aus einem Punkte F der $BD = \alpha\gamma$ die zweiten Tangenten, außer BD, an diese Kegelschnitte, so ist ihre Verbindungsebene die dritte Schmiegungsebene aus F an die Kurve.

Es ist wertvoll, noch einige ausgeartete Kurven des Bündels zu besprechen. Der Büschel (A) hat die Ebenenpaare $\beta\gamma$, $\delta\delta$, im Büschel (C) sind sie $\alpha\delta$, $\beta\beta$. Schneidet man $\beta\gamma$ mit einem beliebigen Kegel (C), so ist der Schnitt von γ der zu (C) perspektive Kegelschnitt (γ); der Schnitt von β ist, welches auch (C) sei, (CA, CD); die kubische Raumkurve, welche außer CA den beiden Kegeln $\beta\gamma$ und (C) gemeinsam ist, besteht aus jenem Kegelschnitte und der ihn treffenden Gerade CD, welche letztere fest bleibt für alle Kegel (C). Ist daher (C) das Ebenenpaar $\alpha\delta$, welches γ in BD, BA schneidet, so besteht die kubische Raumkurve aus den drei Geraden BD, BA, CD, von denen BD von den beiden windschiefen BA, CD geschnitten wird. Ist aber (C) das Ebenenpaar $\beta\beta$, so ist die Kurve (γ) die Doppelgerade AD, welche mit der CD die kubische Raumkurve zusammensetzt. Obwohl die beiden Ebenenpaare $\beta\gamma$, $\beta\beta$ eigentlich die ganze Ebene β gemeinsam haben, und außerdem die Gerade $\beta\gamma \equiv AD$, so haben wir doch in einem Kontinuum von Schnittkurven je eines Kegels (A) und eines (C), wenn dabei auch $\beta\gamma$ mit $\beta\beta$ zu schneiden ist, diese ausgeartete Kurve, welche aus AD doppelt und CD besteht; und in ähnlicher Weise ist Schnitt von $\delta\delta$ mit $\alpha\delta$ die Gerade CB doppelt mit AB.

Wenn man mit X in einer Ebene E durch AC bleibt, welche die BD in E schneide, dann sind die Punkte D_1, B_1 auf BD fest, nämlich D_1 der vierte harmonische Punkt zu D in bezug auf B und E, und B_1 derjenige zu B in bezug auf D und E, so daß die Tangente $XY_\alpha Y_\gamma$ der je durch X bestimmten Kurve des Bündels in X das Strahlennetz $[CB_1, AD_1]$ erzeugt. Denn es sei K der Punkt, in welchem x_α die zweite gemeinsame Tangente CD der Kurven (α) trifft, so ist DD_1K dem Kegelschnitte (α), zu dem X_α und x_α gehören, umgeschrieben und berührt ihn in X_α, C, B; es schneiden sich daher DX_α, D_1C, KB in einem Punkte O, und aus dem Vierecke $KCX_\alpha O$ erkennen wir, da E durch CX_α in BD eingeschnitten wird, die erstere der obigen Harmonizitäten und die andere durch eine ähnliche Betrachtung in γ.

Aus $(DEBB_1) = (BEDD_1)$ folgt, daß BD, B_1D_1, EE in Involution sind.

Bewegt man X in dieser Ebene E auf einer Gerade durch A, so daß alle fraglichen Bündelkurven auf einen und denselben Kegel (A) zu liegen kommen, welcher durch diese Gerade geht; so sind X_α, x_α fest und daher auch Y_α und der durch diesen Punkt gehende Kegelschnitt (α).

Alle Kurven des Bündels, welche auf demselben Kegel (A) liegen, umhüllen mit ihren Schmiegungsebenen einen festen Kegelschnitt (α); und umgekehrt. Und ebenso wird jedem (C) oder (γ) ein (γ) oder (C) zugeordnet.

Dies folgt auch daraus, daß je zwei dieser Kurven einander in einer Homologie entsprechen, für welche A und α, bzw. C und γ Zentrum und Ebene sind (Nr. 522).

Ist beispielsweise (A) das Ebenenpaar $\beta\gamma$, so fällt X_α nach E; der durchgehende (α) ist das Tangentenpaar (BD, CD), also ist x_α die BD, Y_α daher B_1 und der dadurch gehende (α) wiederum (BD, CD) oder, als Tangentenkurve, der doppelte Punkt D.

Bewegt sich hingegen X in E auf einer beliebigen Gerade g, so beschreibt die Tangente $XY_\alpha Y_\gamma$ eine Regelschar $[g, CB_1, AD_1]$ und Y_α, Y_γ bewegen sich projektiv auf CB_1, AD_1; dadurch werden die Kegelschnitte (α), (γ), welche durch Y_α, Y_γ bestimmt werden, projektiv bezogen, weil CB_1, AD_1 je durch einen der gemeinsamen Berührungspunkte der Büschel-Scharen gehen; und die zweiten Tangenten aus dem beliebigen Punkte F von BD an diese entsprechenden, je zu derselben Raumkurve des Bündels gehörigen Kegelschnitte (α), (γ) erzeugen projektive Büschel. Also umhüllt die Schmiegungsebene ξ aus F an diese durch X bestimmte Bündelkurve, weil sie entsprechende Strahlen der Büschel verbindet, einen Kegel 2. Grades. Daher entsteht zwischen dem Punktfelde E und dem Ebenenbündel F eine quadratische Verwandtschaft, in welcher einem Punkte X des Feldes die dritte Schmiegungsebene aus F an die durch ihn bestimmte Bündelkurve entspricht. Hauptpunkte in E sind A, C, E, denen je ein ganzer Büschel von Ebenen: um FA, FC, BD, korrespondiert.

Die Schmiegungsebene aus E oskuliert gerade in X, weil die drei Schmiegungsebenen in A, C, X in einem in $\mathsf{E} = ACX$ gelegenen Punkte, also in $(\mathsf{E}, \gamma\alpha) = (\mathsf{E}, BD) = E$ sich schneiden. Daher gehen die Tangenten in Y_α, Y_γ an die der jeweiligen Kurve zugehörigen Kegelschnitte (α), (γ) durch E, als Spuren jener Schmiegungsebene, zu der ja $XY_\alpha Y_\gamma$ als Tangente gehört, in α, γ.

Ist nun eine Korrelation gegeben mit dem Schnittvierseit $ABCD$ 601
der Kernflächen, so fragt es sich, ob in einem der Bündel:

$$(A - AB,\ C - CD),\ (A - AD,\ C - CB),$$
$$(B - BA,\ D - DC),\ (B - BC,\ D - DA)$$

sich selbst entsprechende Kurven vorhanden sind.

Betrachten wir wieder den ersten Bündel $(A - AB,\ C - CD)$. Allen Kurven desselben, welche auf dem nämlichen Kegel (A) oder (C) liegen, zum ersten Raume gerechnet, entsprechen durch die Korrelation im zweiten solche, die sich auf demselben Kegel (C) oder (A) befinden. Da nämlich durch die Korrelation das Verhalten zum Schmiegungstetraeder nicht geändert wird, so befinden sich die entsprechenden Kurven ebenfalls im Bündel. Alle Kurven des Bündels aber, welche auf dem nämlichen (A) liegen, umhüllen mit ihren Schmiegungsebenen denselben (α); die im zweiten Raume ihnen entsprechenden Kurven liegen daher auf dem Kegel (C), der in diesem Raume jenem Kegelschnitte (α) durch die Korrelation entspricht. Dem Ebenenpaare $\beta\gamma$ im Büschel (A) ist in α der doppelte Punkt (Büschel) D als (α) zugeordnet; ihm entspricht in der Korrelation — in beiderlei Sinne — die Doppelebene β.

Folglich entsprechen in der jetzigen Beziehung den Ebenenpaaren $\beta\gamma$ und $\delta\delta$ des Büschels (A), in beiderlei Sinne, die Ebenenpaare $\beta\beta$ und $\alpha\delta$ in (C). Einem beliebigen Kegel (A) entsprechen in den beiden Sinnen zwei verschiedene Kegel (C), erfüllt von den Bündelkurven, welche in dem einen und dem andern Sinne den auf jenem Kegel gelegenen entsprechen. Wir haben also zwei Projektivitäten zwischen den beiden Kegelbüscheln, je nachdem die Kurven auf den (A) zum ersten Raume und die auf den (C) zum zweiten Raume gehören, oder umgekehrt. Im Büschel (C) z. B. entsteht eine neue Projektivität, in der zwei Kegel einander entsprechen, welche in der einen und der andern jener Projektivitäten demselben Kegel (A) korrespondieren. Koinzidenzen dieser Projektivität sind die ausgearteten Kegel $\beta\beta$, $\alpha\delta$; und weitere hat dieselbe im allgemeinen nicht.

Wenn eine eigentliche kubische Raumkurve im Bündel vorhanden ist, welche in der Korrelation sich selbst entspricht, oder allgemeiner, wenn es im Bündel zwei sich involutorisch entsprechende Kurven, so entspricht dem eigentlichen Kegel (A), der sie, bzw. die eine projiziert, in beiderlei Sinne der die Kurve, bzw. die andere Kurve aus C projizierende Kegel, und es gibt im Büschel (C) ein drittes Koinzidenzelement. Also:

Im allgemeinen führt eine Korrelation keine (eigentliche) kubische Raumkurve in sich selbst über.

Ist aber eine solche im Bündel vorhanden, oder allgemeiner, gibt es zwei einander involutorisch entsprechende Kurven, so hat die Projektivität im Büschel (C) drei Koinzidenzen, also ist sie Identität; jedem Kegel (A) entspricht in beiderlei Sinne derselbe Kegel (C), und die einander so zugeordneten Kegel (A) und (C) bewirken eine Projektivität zwischen den beiden Büscheln. Eine beliebige Raumkurve des Bündels ist der Schnitt zweier nicht entsprechenden Kegel $(A)_1$, $(C)_2$; die ihnen in der eben erwähnten Projektivität entsprechenden Kegel seien $(C)_1$, $(A)_2$; es müssen also die der Kurve in dem einen und dem andern Sinne entsprechenden Kurven beide auf $(C)_1$ und $(A)_2$ liegen, also identisch sein. Und die Kurven, in welchen entsprechende Kegel $(A)_1$, $(C)_1$ sich schneiden, sind sich selbst entsprechend.

Wenn also in dem Bündel eine sich selbst entsprechende Kurve vorhanden ist oder allgemeiner, wenn zwei Kurven einander involutorisch entsprechen, so findet durchweg involutorisches Entsprechen im Bündel statt, und ∞^1 Kurven desselben sind sich selbst entsprechend.

Als Kennzeichen kann man auch angeben, daß einmal einem (nicht ausartenden) Kegel (A) oder (C) in beiderlei Sinne derselbe Kegelschnitt (γ) oder (α) in der Korrelation entspricht.

Diese sich selbst entsprechenden Kurven werden von einer Fläche 2. Grades getragen. Sie ist das Erzeugnis der beiden projektiven Kegelbüschel (A) und (C), außer den Ebenen β und δ, welche den entsprechenden ausgearteten Elementen $\beta\gamma$, $\beta\beta$; $\delta\delta$, $\alpha\delta$ gemeinsam sind. Die Fläche entspricht in der Korrelation nicht sich selbst; vielmehr entspricht ihr, in beiderlei Sinne, diejenige Fläche 2. Grades, die von den Schmiegungsebenen dieser sich selbst entsprechenden Kurven umhüllt wird und das Erzeugnis der ebenfalls projektiven Kegelschnitt-Scharen (α), (γ) ist.

Weil durch jeden Punkt der tragenden Fläche eine geht, können wir den Inbegriff dieser Kurven einen Büschel nennen.

Jene Fläche geht durch das Vierseit $ABCD$; denn wir haben gesehen, daß im Kontinuum der erzeugenden Schnittkurven der Schnitt von $\beta\gamma$, $\beta\beta$ aus der doppelten AD und der CD und derjenigen von $\delta\delta$, $\alpha\delta$ aus der doppelten CB und der AB besteht.

Dual geht die andere Fläche ebenfalls durch dies Vierseit. Wir wissen ja auch, daß bei jeder Korrelation jeder Fläche der Büschel-Schar durch das Schnittvierseit der Kernflächen eine andere aus derselben involutorisch entspricht.

Jede Kurve des Bündels oskuliert jede Fläche dieser Büschel-Schar in A und C; die durch einen beliebigen Punkt der Kurve gelegte Fläche der Büschel-Schar nimmt daher die Kurve ganz in sich auf, und ebenso ist der Torsus der Schmiegungsebenen jeder Kurve des Bündels einer Fläche der Büschel-Schar umgeschrieben.

Handelt es sich um eine allgemeine Korrelation, für welche $ABCD$ Schnitt der Kernflächen ist, so hat jede Kurve unseres Bündels zwei entsprechende. Sie liegen beide in derselben Fläche der Büschel-Schar, derjenigen, die involutorisch der Fläche entspricht, welcher der Torsus der ersteren umgeschrieben ist, und ihre Torsen berühren ebenfalls dieselbe Fläche der Büschel-Schar, welche involutorisch derjenigen entspricht, der jene eingeschrieben ist.

Jeder von zwei involutorischen Flächen der Büschel-Schar $(ABCD)$ sind ∞^1 Kurven des Bündels ein- und ∞^1 umgeschrieben (wenn wir diesen kurzen Ausdruck gebrauchen wollen); die entsprechenden in dem einen und in dem andern Sinne sind der andern Fläche um-, bzw. eingeschrieben.

In dem Spezialfalle aber, mit dem wir es im vorangehenden zu tun gehabt haben, hat jede Kurve des Bündels nur eine entsprechende, weil durchgängiges involutorisches Entsprechen innerhalb desselben statthat. Jedes involutorische Paar von Kurven des Bündels ist mit zwei involutorischen Paaren von Flächen verbunden. Die eine Kurve ist einer Fläche eingeschrieben und einer zweiten umgeschrieben; den beiden gepaarten Flächen ist die zweite Kurve um-, bzw. eingeschrieben.

In diesem Spezialfalle gibt es ∞^1 sich selbst entsprechende Kurven, alle zu demselben involutorischen Flächenpaare gehörig, dessen einer sie ein- und dessen anderer Fläche sie umgeschrieben sind.

Eine Ebene $\xi \equiv \eta'$ wird von einer Kurve des Bündels oskuliert; 602
dieser Kurve entspricht in unserm Falle involutorisch eine andere; auf ihr liegen die beiden Pole X', Y und daher beide sowohl auf demselben Kegel (A), als auf demselben Kegel (C).

Umgekehrt, wenn die beiden Pole X', Y einer Ebene $\xi \equiv \eta'$ auf demselben Kegel (C) (oder (A)) liegen, dann haben wir es mit unserem Spezialfalle zu tun, und jene Punkte liegen dann auch auf demselben Kegel (A) (oder (C)). In der Tat, in der Projektivität im Büschel (C) bildet jener Kegel (C) eine dritte Koinzidenz, weil er in beiden Projektivitäten zwischen den Büscheln (A) und (C) demjenigen Kegel (A) korrespondiert, welcher die von $\xi \equiv \eta'$ oskulierte Kurve $p^3 \equiv r'^3$ enthält, und der (C) enthält die ihr entsprechenden p'^3, r^3, die durch X', Y gehen.

Und weil der Spezialfall vorliegt, so sind p'^3 und r^3 identisch.

Daß X', Y auf einem Kegel (C) liegen, kann man durch eine Doppelverhältnis-Gleichheit ausdrücken; es seien wieder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ die Schnitte des Wechselstrahls $X'\,Y$ mit den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; projizieren wir aus den Kanten CD und CA die Kanten CX', CY, CD, CA, so ergibt sich: $CD(X', Y, B, A) = CA(X', Y, D, B)$; also:

$$(X'Y\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (X'Y\mathfrak{B}\mathfrak{D});$$

und weil X', Y auf demselben Kegel (A) liegen, so ist:

$$(X'Y\mathfrak{D}\mathfrak{C}) = (X'Y\mathfrak{B}\mathfrak{D}).$$

Jede dieser Beziehungen zieht aber die andere nach sich, denn bei jeder Korrelation sind auf einem Wechselstrahle X', Y; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ in Involution (Nr. 589), woraus folgt, daß

$$(X'Y\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (YX'\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = (X'Y\mathfrak{D}\mathfrak{C}).$$

Daß die Punkte X', Y auf einem Kegel (A) oder einem Kegel (C) liegen, bedeutet aber nach Pascals Satz, daß die Schnittlinien (ACX', ABY) und (ABX', ACY) in einer Ebene durch AD liegen, bzw. die Schnittlinien (CAX', CDY), (CDX', CAY) in einer Ebene durch CB. Also:

Wenn in einer Korrelation, von welcher $ABCD$ das Schnittvierseit der Kernflächen ist und X', Y die beiden Pole irgend einer Ebene sind, von den eben erwähnten Lagenbeziehungen die eine eintritt, so tritt auch die andere ein, und nicht bloß bei diesem Paare von Polen, sondern bei allen derartigen. Eine solche Korrelation transformiert jede kubische Raumkurve, für welche $ABCD$ so Schmiegungstetraeder ist, daß A, C die Kurvenpunkte und AB, CD die zugehörigen Tangenten sind, involutorisch in eine andere Kurve des Bündels. Es gibt ∞^1 Kurven im Bündel, die in sich selbst übergehen; sie liegen alle auf einer Fläche 2. Grades durch jenes Vierseit und ihre Schmiegungsebenen berühren diejenige Fläche, welche ihr in der durch die Korrelation in der Büschel-Schar durch das Vierseit bewirkten Involution gepaart ist.

Erinnern wir uns aber, daß das Vierseit in vier Weisen Schmiegungsvierseit sein kann, so sehen wir, daß eine der vier Bedingungen

$(ACX', ABY), (ABX', ACY)$ in einer Ebene durch AD,
$(ACX', ADY), (ADX', ACY)$ " " " " AB,
$(BDX', BAY), (BAX', BDY)$ " " " " BC,
$(BDX', BCY), (BCX', BDY)$ " " " " BA,

oder eine der je mit diesen äquivalenten Bedingungen erfüllt werden muß, damit eine und dann ∞^1 kubische Raumkurven in sich selbst übergehen.

Wir erwähnen — ohne Beweis — noch ein Kennzeichen für unseren Spezialfall. Er tritt ein, wenn einmal eine Gerade des Netzes $[AC, BD]$ zwei entsprechende Kurven eines der vier Bündel trifft. Dies geschieht dann durchweg.

Zu den fünf Punkten B, D, E, B_1, D_1 auf BD, bei denen $(DEBB_1) = (BEDD_1) = -1$, fügen wir noch den Punkt Q, für den $(BDEQ) = -1$ ist. Er ist der zweite Doppelpunkt der oben erhaltenen Involution BD, B_1D_1, EE und daher auch harmonisch zu E in bezug auf B_1, D_1.

Aus $(DEBB_1) = (D_1B_1QE)$ folgt, daß DD_1, EB_1, BQ in Involution sind, und ebenso sind es BB_1, ED_1, DQ.

E wurde in BD von einer durch AC gehenden Ebene E eingeschnitten. In ihr liege wieder X, und der Kegelschnitt (α), welcher zu der durch X gehenden kubischen Raumkurve aus dem Bündel $(A-AB, C-CD)$ gehört, ergab sich (Nr. 600) folgendermaßen: $X_\alpha = (AX, CE)$, x_α, die Tangente des durch X_α gehenden (α), geht durch D_1; daher ist $Y_\alpha = (D_1X_\alpha, CB_1)$; durch ihn geht der gesuchte (α) und seine Tangente ist $Y_\alpha E$. Sie treffe CD in W_α. Gehen wir zum Bündel $(A-AD, C-CB)$, so sind nur B und D, B_1 und D_1 zu vertauschen: $Y_\alpha{}^* = (B_1X_\alpha, CD_1)$, $W_\alpha{}^* = (Y_\alpha{}^*E, CB)$; $(\alpha)^*$ sei der durch $Y_\alpha{}^*$ gehende (α), der dort $Y_\alpha{}^*EW_\alpha{}^*$ berührt. Die Vierecke $CX_\alpha Y_\alpha Y_\alpha{}^*$, $CY_\alpha Y_\alpha{}^*W_\alpha$, $CY_\alpha Y_\alpha{}^*W_\alpha{}^*$ und $Y_\alpha Y_\alpha{}^*W_\alpha W_\alpha{}^*$, in Verbindung mit den obigen Harmonizitäten und Involutionen, lehren, daß $Y_\alpha Y_\alpha{}^*$ durch Q, $Y_\alpha{}^*W_\alpha$ durch B, $Y_\alpha W_\alpha{}^*$ durch D, $W_\alpha W_\alpha{}^*$ durch Q geht. Wird nun aus Q an (α), welcher CD, BD, EW_α in C, B, Y_α berührt, die zweite Tangente gelegt, welche DC in V_α trifft, so ist: $(BDEQ) = (DCW_\alpha V_\alpha)$; trifft ebenso die zweite Tangente aus Q an $(\alpha)^*$ die BC in $V_\alpha{}^*$, so ist: $(DBEQ) = (BCW_\alpha{}^*V_\alpha{}^*)$; da aber $(BDEQ) = (DBEQ)$, so ist: $(DCW_\alpha V_\alpha) = (BCW_\alpha{}^*V_\alpha{}^*)$; daraus folgt, daß $V_\alpha V_\alpha{}^*$ durch $Q = (BD, W_\alpha W_\alpha{}^*)$ geht; die zweiten Tangenten aus Q an (α) und $(\alpha)^*$ sind identisch, und ebenso die an (γ) und $(\gamma)^*$; also sind auch die beiden (dritten) Schmiegungsebenen aus Q an die durch X gehenden kubischen Raumkurven der beiden Bündel $(A-AB, C-CD)$ und $(A-AD, C-CB)$ identisch.

Von den beiden involutorischen Korrelationen, dem Nullraum und dem Polarraum, wird die Bedingung, unter welcher es sich selbst entsprechende kubische Raumkurven gibt, immer erfüllt. Denn bei ihnen fallen die beiden Pole X' und Y stets zusammen, so daß das gleichzeitige Liegen auf demselben Kegel (A) oder (C) selbstverständlich ist. 603

Der zu einer gegebenen kubischen Raumkurve gehörige

Nullraum (Nr. 532), in dem jedem Punkte die Ebene zugeordnet ist, welche die Oskulationspunkte der drei von ihm kommenden Schmiegungsebenen verbindet, insbesondere jedem Punkte der Kurve seine Schmiegungsebene, — ihr Schmiegungs-Nullraum (correlazione d'osculamento) — ist der einzige Nullraum, in welchem die Kurve sich selbst entspricht. Denn einem Punkte der Kurve muß einerseits eine Schmiegungsebene derselben, andererseits eine mit ihm inzidente Ebene entsprechen, also seine eigene Schmiegungsebene.

Jeder Nullraum ist (Nr. 532) Schmiegungs-Nullraum für ∞^7 kubische Raumkurven.

Durch drei Punkte A, B, C und ihre Nullebenen α, β, γ, bei denen die Ebene $\omega = ABC$ mit dem Punkte $O = \alpha\beta\gamma$ inzident ist, ist ein Nullraum $\mathfrak{N}$ eindeutig bestimmt (Nr. 531) Eine kubische Raumkurve, welche in den Punkten A, B, C die Ebenen α, β, γ oskuliert, hat diesen Nullraum zum Schmiegungs-Nullraum. Es gibt ∞^1 solche kubischen Raumkurven, und zur vollständigen Bestimmung einer von ihnen haben wir uns noch einen Strahl aus einem der drei Büschel, etwa a in (A, α), als zu A und α gehörige Tangente, zu geben.

Sind nämlich A, B, C drei Punkte einer kubischen Raumkurve, α, β, γ ihre Schmiegungsebenen und a, b, c ihre Tangenten, so wird die Schmiegungsebene α von der Berührungsebene α_1, in A, an das Hyperboloid (abc) durch die Punkte B, C harmonisch getrennt. Denn es sei p die zweite Gerade auf diesem Hyperboloide durch A und in α_1; der Kegel 2. Grades, welcher die Kurve aus A projiziert, berührt die Ebenen α, Ab, Ac längs a, AB, AC, also ist, in bezug auf ihn, ABC die Polarebene von $p = (Ab, Ac)$ und $\alpha_1 = pa$ die Polarebene von (ABC, α); mithin sind die Kanten AB, AC harmonisch zu den Ebenen α und α_1.

Kehren wir zum Nullraum $\mathfrak{N}$ zurück, in dem α, β, γ die Nullebenen von A, B, C sind und a zum Büschel (A, α) gehört. Es sei F auf CO der O zugeordnete vierte harmonische Punkt in bezug auf C und $H = (CO, AB)$ und C' wiederum der C zugeordnete vierte harmonische Punkt in bezug auf F und H, so werde C' mit dem Punkte $a\gamma$ durch r_1 und B mit dem Punkte $r_1\beta$ durch b verbunden, welcher Strahl infolgedessen zu (B, β) gehört.

Es gibt dann eine kubische Raumkurve und nur eine, welche durch A, B, C geht und in A, B die Tangenten a, b und die Schmiegungsebenen α, β hat; sie ist der Schnitt, außer $A\,B$, der beiden Kegel 2. Grades aus A und B, von denen der eine α und Ab längs a und AB, der andere β und Ba längs b und BA berührt und welche beide durch C gehen.

Diese Kurve hat, infolge der Konstruktion von b, die Ebene γ

zur Schmiegungsebene in C. Es sei c ihre Tangente in C; ferner seien p, q, r die Geraden durch A, B, C aus der Leitschar $[abc]$ der Regelschar (a, b, c), also $\alpha_1 = ap$, $\beta_1 = bq$, $\gamma_1 = cr$ die Berührungsebenen der Trägerfläche beider Scharen in A, B, C; mithin werden α und α_1 durch B und C oder AB und C harmonisch getrennt; weil nun α durch O geht, muß α_1, infolge der obigen Konstruktion von F, durch AF gehen und ebenso β_1 durch BF. Daher berührt der Kegelschnitt K, den jene Fläche aus ω schneidet und der durch A, B, C geht, in A und B die Geraden AF, BF und F und H sind konjugiert in bezug auf ihn, also liegt C' auf ihm. Die Gerade r_1, welche durch C' geht und a, b trifft, ist ein Strahl von $[abc]$. Die Ebene γ geht durch die Gerade COC' und enthält von r_1 noch den Punkt $a\gamma$, daher die ganze Gerade r_1 und folglich auch die Tangente c, welche durch C geht und r_1 schneidet. Die Schmiegungsebene in C ist demnach mit γ identisch, weil sie mit ihr die c und den Punkt O gemeinsam hat.

Es genügt, mit den Punkten A, B, C in einer festen Ebene zu bleiben; dies führt zu $\infty^{2\cdot 3}$ Tripeln von Punkten und je den zugehörigen Nullebenen im gegebenen Nullraume $\mathfrak{N}$ als ihren Schmiegungsebenen, und jedesmal kann man der Tangente a noch ∞^1 Lagen geben. So entsteht die siebenfach unendliche Mannigfaltigkeit der kubischen Raumkurven, für welche der gegebene Nullraum der Schmiegungs-Nullraum ist, der Ordnungskurven desselben, nach Staudts Ausdrucke[1]).

Für eine kubische Raumkurve ist es also eine fünffache Bedingung, einen gegebenen Nullraum zum Schmiegungs-Nullraum zu haben. Aber es ist auch für einen Nullraum eine fünffache Bedingung, zu einer gegebenen kubischen Raumkurve als Schmiegungs-Nullraum zu gehören[2]). Für die Nullebenen von A, B ist es je eine zweifache Bedingung, in die Nullebenen α, β, die ihnen in bezug auf die Kurve zugehören, zu fallen, für diejenige von C aber nur eine einfache, in γ zu fallen, wegen der Inzidenz von ABC und $\alpha\beta\gamma$.

Wenn A, B, C und ihre Schmiegungsebenen α, β, γ festbleiben, die Tangente a in (A, α) sich bewegt, so bewegt sich b in (B, β) so, daß die Verbindungslinie ihrer Spuren in γ durch den festen Punkt C' geht; also durchlaufen a und b projektive Strahlenbüschel.

Wir bestimmen eine Homologie, für welche $O = \alpha\beta\gamma$ und $\omega = ABC$ 604
Zentrum und Ebene sind, und zwei Strahlen a, a_1 von (A, α) einander entsprechen. Weil O und ω im gegebenen Nullraume $\mathfrak{N}$ einander

1) Vgl hierzu Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nr. 481, 485, 486.

2) In bezug auf derartige Umkehrungen vgl. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie S. 10.

zugehören, so ist, wenn g ein Strahl des Gewindes $(\mathfrak{N})$ ist, der Punkt $g\omega$ der Ebene gO entsprechend, so daß der ganze Strahlenbüschel, den sie bestimmen, zu $(\mathfrak{N})$ gehört. In der Homologie entspricht der Punkt $g\omega$ sowohl wie die Ebene gO sich selbst; daher geht g über in einen Strahl g_1, der wiederum diesem Strahlenbüschel und damit dem Gewinde $(\mathfrak{N})$ angehört.

Folglich gehen ein Gewinde und sein Nullraum in sich selbst über durch jede Homologie, welche zwei zueinander gehörige Nullelemente zu Zentrum und Ebene hat; während keine allgemeine Homologie (deren Zentrum und Ebene nicht inzidieren) dies bewirken kann.[1])

In der oben bestimmten Homologie sind die beiden kubischen Raumkurven, welche $\mathfrak{N}$ zum Schmiegungs-Nullraum haben, durch A, B, C gehen und deshalb in diesen Punkten den Nullebenen α, β, γ sich anschmiegen, und von denen die eine a, die andere a_1 in A berührt, entsprechend; folglich liegen sie auf einem Kegel 3. Ordnung aus O und ihre Schmiegungstorsen umhüllen alle dieselbe Kurve 3. Klasse in ω.

Alle kubischen Raumkurven, welche zum nämlichen Schmiegungs-Nullraum gehören und durch dieselben drei Punkte gehen und daher in ihnen dieselben Schmiegungsebenen haben, sind auf einem Kegel 3. Ordnung gelegen, welcher den Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen zur Spitze hat, und ihre Schmiegungstorsen umhüllen alle dieselbe Kurve 3. Klasse, welche in der Ebene der drei Punkte sich befindet.

Daher haben auch alle diese Kurven dieselbe Doppel sekante aus O und dieselbe Schmiegungsaxe in ω.

Jene ist der harmonische Strahl der Ebene ω in bezug auf das Dreiflach $\alpha\beta\gamma$, diese die harmonische Gerade des Punktes O in bezug auf das Dreieck ABC.[2])

Bemerkenswert ist der Fall, wenn A, B, C unendlich fern sind; die Kurven gehen dann durch Verschiebung auf dem Zylinder 3. Ordnung, der sie alle enthält, auseinander hervor.

605 Sind bloß zwei Punkte A, C gegeben und ihre Nullebenen in $\mathfrak{N}$, die nun wieder γ, α heißen mögen, so sind ∞^3 kubische Raumkurven möglich, welche $\mathfrak{N}$ zum Schmiegungs-Nullraum haben und durch A, C gehen, weil in fester Ebene durch AC der dritte Punkt in ∞^2 Lagen und dann die Tangente von A in (A, γ) in ∞^1 Lagen gewählt werden kann; es bleiben also nur ∞^1, wenn die Tangenten in (A, γ) und (C, α) festgelegt werden.

---

1) Liniengeometrie, Bd. I, Nr. 242.

2) Liniengeometrie, Bd. III, Nr. 868.

Diese festen Tangenten seien AB, CD, wo B, D wiederum die Schnitte mit den Schmiegungsebenen α, γ sind; also gehören die Kurven zu dem Bündel ($A - AB$, $C - CD$). Und weil sie durch ihren gemeinsamen Schmiegungs-Nullraum in sich selbst übergeführt werden, so bilden sie (Nr. 601) einen Büschel, welcher von einer durch $ABCD$ gehenden Fläche 2. Grades getragen wird. Also:

Die ∞^1 kubischen Raumkurven, für welche ein gegebener Nullraum $\mathfrak{N}$ Schmiegungs-Nullraum ist und welche in A, C zwei feste Strahlen AB, CD der Büschel (A, γ), (C, α) zu Tangenten haben, wo γ, α die Nullebenen von A, C in $\mathfrak{N}$ und B, D die Schnitte der Tangenten mit diesen Ebenen α, γ sind, liegen auf einer durch $ABCD$ gehenden Fläche 2. Grades F_1. Die gemeinsamen Schmiegungsebenen γ, α der Kurven sind Berührungsebenen der F_1 in A, C. Die Schmiegungsebenen umhüllen eine zweite Fläche F_1' durch $ABCD$. Es sei r_0^3 eine von diesen kubischen Raumkurven, r^3 eine andere kubische Raumkurve auf F_1, welche AB, CD in A, C tangiert, so hat dieselbe ebenfalls $\mathfrak{N}$ zum Schmiegungs-Nullraum; denn die Kollineation mit den Axen AB, CD, in welcher die Punkte X_0, X entsprechend sind, in denen eine Gerade aus der Regelschar der einfachen Sekanten beider Kurven auf F_1 sie trifft, führt, da es auf F_1 durch X nur eine kubische Raumkurve gibt mit jenen Berührungen, die eine Kurve in die andere über, also den Schmiegungs-Nullraum $\mathfrak{N}$ von r_0^3 in denjenigen von r^3; weil aber die Axen Nullstrahlen des ersteren sind, so führt sie ihn in sich selbst über (Nr. 530). So zeigt es sich, daß alle kubischen Raumkurven auf einer gegebenen Fläche 2. Grades, welche zwei von ihren Geraden aus der einen Regelschar in den nämlichen Punkten berühren, denselben Schmiegungs-Nullraum besitzen.

Durch das Vierseit $ABCD$ geht eine Büschel-Schar von Flächen 2. Grades und ein Büschel von Gewinden oder Nullräumen, für welche alle vier Seiten Nullstrahlen und daher die Diagonalen AC, BD Polaren sind; so daß das Strahlennetz [AC, BD] allen diesen Gewinden gemeinsam ist. Jeder Nullraum $\mathfrak{N}$ dieses Büschels bestimmt in der Büschel-Schar zwei Flächen F_1 und F_1', die zueinander polar sind in $\mathfrak{N}$, und von denen F_1 die Kurven des Bündels ($A - AB$, $C - CD$) trägt, welche $\mathfrak{N}$ zum Schmiegungs-Nullraum haben, während F_1' von den Schmiegungsebenen-Torsen dieser Kurven umhüllt wird. F_1 (oder F_1') bestimmt $\mathfrak{N}$.

Jeder $\mathfrak{N}$ des Büschels bestimmt noch eine andere Fläche der Büschel-Schar, die Trägerfläche F der Regelschar der Nullstrahlen von $\mathfrak{N}$, welche sich auf AD, CB (die Schmiegungsstrahlen) stützen. Auch F bestimmt $\mathfrak{N}$, nämlich AD, CB und drei Strahlen aus der Regelschar das Gewinde. Die ebenso bei AB, CD sich ergebende Fläche sei F^*.

Die beiden Flächen F und F_1 bestimmen sich gegenseitig eindeutig, denn jede bestimmt eindeutig den Nullraum und dieser die andere; folglich durchlaufen sie die Büschel-Schar projektiv. Koinzidenzen sind die ausgearteten Flächen $\beta\delta$, $\alpha\gamma$, denen die beiden ausgearteten Nullräume zugehören, deren Gewinde die Strahlengebüsche $[\beta\delta]$, $[\alpha\gamma]$ sind. Daraus erhellt, daß das Doppelverhältnis des Wurfs

$$(\beta\delta,\ \alpha\gamma,\ F,\ F_1)$$

sich nicht ändert. Ja, dasselbe ist eine absolute Konstante. Dazu betrachten wir zwei beliebige kubische Raumkurven r^3, $\bar{r}^3$, welche in den Bündeln $(A - AB,\ C - CD)$, bzw. $(\bar{A} - \bar{A}\bar{B},\ \bar{C} - \bar{C}\bar{D})$ sich befinden, und E und $\bar{E}$ seien auch Punkte von r^3, bzw. $\bar{r}^3$. Die Kollineation:

$$\left|\begin{matrix} A\,B\,C\,D\,E \\ \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E} \end{matrix}\right|$$

transformiert dann r^3 in $\bar{r}^3$, den Schmiegungs-Nullraum $\mathfrak{N}$ jener in denjenigen $\bar{\mathfrak{N}}$ dieser, die Fläche 2. Grades F_1 durch $ABCD$, auf welcher r^3 liegt, in diejenige $\bar{F}_1$ durch $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, auf welcher $\bar{r}^3$ liegt, die Trägerfläche F der Nullstrahlen von $\mathfrak{N}$, welche AD, CB treffen, in diejenige $\bar{F}$ der Nullstrahlen von $\bar{\mathfrak{N}}$, welche $\bar{A}\bar{D}$, $\bar{C}\bar{B}$ treffen, endlich $\beta\delta$, $\alpha\gamma$ in $\bar{\beta}\bar{\delta}$, $\bar{\alpha}\bar{\gamma}$. Daraus folgt die Konstanz des genannten Doppelverhältnisses für alle kubischen Raumkurven und je zugehörige Schmiegungsvierseite[1]).

606 Wir führen jetzt die drei anderen Büschel von sich selbst entsprechenden kubischen Raumkurven ein, welche zum Nullraum $\mathfrak{N}$ mit dem Nullstrahlenvierseit $ABCD$ gehören und sich in den Bündeln $(A - AD,\ C - CB)$, $(B - BA,\ D - DC)$, $(B - BC,\ D - DA)$ befinden; die Trägerflächen seien F_2, F_3, F_4 und die in bezug auf $\mathfrak{N}$ polaren, welche von den Schmiegungsebenen-Torsen umhüllt werden: F'_2, F'_3, F'_4.

Beim dritten Büschel haben F und F^* dieselbe Bedeutung wie beim ersten, beim zweiten und vierten vertauschen sie sich miteinander, beim zweiten dagegen bleiben α, γ, β, δ, beim dritten und vierten vertauschen sich α, γ mit β, δ. Daher:

$$(\beta\delta,\ \alpha\gamma,\ F,\ F_1) = (\beta\delta,\ \alpha\gamma,\ F^*,\ F_2) = (\alpha\gamma,\ \beta\delta,\ F,\ F_3) = (\alpha\gamma,\ \beta\delta,\ F^*,\ F_4).$$

Aus $(\beta\delta,\ \alpha\gamma,\ F,\ F_1) = (\beta\delta,\ \alpha\gamma,\ F^*,\ F_2)$ folgt: $(\beta\delta,\ \alpha\gamma,\ F,\ F^*) = (\beta\delta,\ \alpha\gamma,\ F_1,\ F_2)$. Nun sind aber F und F^* harmonisch zugeordnet (Nr. 599), d. h. harmonisch zu den Ebenenpaaren $\beta\delta$, $\alpha\gamma$

1) Es ist $(\beta\delta,\ \alpha\gamma,\ F,\ F_1) = \quad \frac{1}{3}$.

(Nr. 478); also sind auch F_1 und F_2 zu diesen harmonisch, und ebenso F_3 und F_4.[1])

Transformiert man den Wurf $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, F, F_3 durch den Nullraum $\mathfrak{N}$, so gehen $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ (oder genauer die Ebenen-Punkte-Paare $\alpha\gamma$; B, D und β, δ; A, C mit den Doppellinien $\alpha\gamma \equiv BD$, $\beta\delta \equiv AC$) ineinander über, F bleibt, F_3 geht in F_3' über; also hat auch das Doppelverhältnis $(\beta\delta, \alpha\gamma, F, F_3')$ jenen Wert, ist gleich $(\beta\delta, \alpha\gamma, F, F_1)$ und daher F_3' mit F_1 identisch, F_1' mit F_3; die Torsen der Kurven auf F_1 umhüllen F_3 und die Torsen der Kurven auf F_3 umhüllen F_1; und dasselbe gilt für F_2 und F_4. Oder F_1 und F_3, F_2 und F_4 sind in dem gegebenen allen fraglichen Raumkurven gemeinsamen Schmiegungs-Nullraum $\mathfrak{N}$ entsprechend.

Während eine allgemeine Korrelation nur ein Vierseit hat, dessen Seiten sich selbst entsprechen, das Schnittvierseit der Kernflächen, ein Polarraum, deren ∞^4 besitzt, alle der Basisfläche aufgeschriebenen Vierseite, ist die Anzahl solcher Vierseite beim Nullraum sogar ∞^8; man kann zwei Gegenecken beliebig im Raume annehmen und die anderen dann beliebig auf der Polare der Verbindungslinie jener. Jedes solche Nullstrahlen-Vierseit liefert dann, wie uns die vorangehende Betrachtung gelehrt hat, 4 Büschel im Nullraum $\mathfrak{N}$ sich selbst entsprechender kubischer Raumkurven, für welche er also Schmiegungs-Nullraum ist. Weil aber jede kubische Raumkurve ∞^2 Schmiegungs-Vierseite besitzt, so ergeben sich zu jedem Nullraum ∞^{8+1-2} zugehörige kubische Raumkurven, wie wir schon in anderer Weise gefunden haben.

Ein Polarraum $\mathfrak{P}$, welcher eine gegebene kubische Raumkurve r^3 in sich überführt, führt auch deren Schmiegungs-Nullraum $\mathfrak{N}$ in sich über, also sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$ vertauschbar. Es besteht dann (Nr. 598) eine der Regelscharen des Basisfläche ($\mathfrak{P}$) aus lauter Nullstrahlen von $\mathfrak{N}$, und in der verbundenen Regelschar gibt es zwei Nullstrahlen u, v; die windschiefe Involution (u, v) ist das Produkt von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$, transformiert also ebenfalls r^3 in sich selbst. Wir wissen (Nr. 522), daß dann u, v konjugierte Schmiegungsstrahlen von r^3 sein müssen. Und 607

---

1) Hieraus lassen sich verschiedene Involutionen in der Büschel-Schar ableiten:

1) $\beta\delta$, $\beta\delta$; $\alpha\gamma$, $\alpha\gamma$; FF^*; F_1F_2; F_3F_4;

2) FF; F^*F^*; $\beta\delta$, $\alpha\gamma$; F_1F_3; F_2F_4;

3) $\beta\delta$, $\alpha\gamma$; FF^*; F_1F_4; F_2F_3;

4) $\beta\delta$, $\alpha\gamma$; FF_2; F^*F_1;

5) $\beta\delta$, $\alpha\gamma$; FF_1; F^*F_2;

6) $\beta\delta$, $\alpha\gamma$; FF_4; F^*F_3;

7) $\beta\delta$, $\alpha\gamma$; FF_3; F^*F_4.

Die drei ersten stützen sich zu je zweien.

umgekehrt, jede windschiefe Involution, welche zwei konjugierte Schmiegungsstrahlen der r^3 zu Axen hat und deshalb r^3 in sich selbst transformiert, gibt (Nr. 599), mit dem Schmiegungs-Nullraum $\mathfrak{N}$, mit dem sie vertauschbar ist, weil ihre Axen Nullstrahlen desselben sind, multipliziert, einen Polarraum $\mathfrak{P}$, in welchem r^3 sich selbst entspricht. Und weil jener windschiefen Involutionen ∞^2 sind, so gibt es ∞^2 Polarräume, welche eine gegebene kubische Raumkurve in sich selbst überführen. Ihre Basisflächen sind die Trägerflächen von solchen Regelscharen von Nullstrahlen des Schmiegungs-Nullraums, welche je auf zwei konjugierte Schmiegungsstrahlen sich stützen. In jeder befinden sich die beiden Tangenten, die zu den Schmiegungsstrahlen gehören, so daß die Fläche durch das betreffende Schmiegungs-Vierseit geht. Weil jede kubische Raumkurve durch ∞^2 Polarräume in sich selbst übergeführt wird, es ∞^{12} solche Kurven und ∞^9 Polarräume gibt, so führt jeder Polarraum $\mathfrak{P}$ ∞^{12+2-9}, also ∞^5 kubische Raumkurven in sich über.

In der Tat, der Basisfläche ($\mathfrak{P}$) lassen sich ∞^4 Vierseite $ABCD$ aufschreiben; in jedem der vier Bündel $(A - AB,\ C - CD)$, $(A - AD,\ C - CB)$, $(B - BA,\ D - DC)$, $(B - BC,\ D - DA)$, die zu einem dieser Vierseite gehören, gibt es (Nr. 601), weil vom Polarraum die Bedingung für das Vorhandensein sich selbst entsprechender kubischer Raumkurven erfüllt wird, einen Büschel solcher Kurven, getragen von einer Fläche 2. Grades, die durch $ABCD$ geht. Diese Flächen seien $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$, und die ihnen in $\mathfrak{P}$ entsprechenden, welche von den Torsen der Kurven der Büschel umhüllt werden, $\mathfrak{F}_1', \ldots \mathfrak{F}_4'$.

Hinsichtlich der Kurven r_1^3, r_2^3 der beiden ersten Bündel, die durch einen Punkt X der Ebene ACE gehen, fanden wir, daß an sie aus dem Punkte Q (Nr. 602) dieselbe (dritte) Schmiegungsebene kommt. Dieser Punkt Q ist der Pol von ACE in $\mathfrak{P}$, weil AC, BD polar sind und Q, E harmonisch zu B, D, zwei Punkten von ($\mathfrak{P}$); also liegt der Pol jener gemeinsamen Schmiegungsebene in ACE und ist gemeinsamer dritter Schnitt X' der beiden Kurven $r_1'^3$, $r_2'^3$ aus den Bündeln, welche jenen in $\mathfrak{P}$ entsprechen; selbstverständlich haben diese entsprechenden Kurven die Polarebene von X zur gemeinsamen Schmiegungsebene und die ursprünglichen diejenige von X'.

Vereinigen sich r_1^3 und $r_1'^3$, so fallen X und X' zusammen in einen Punkt des Kegelschnitts $(ACE, \mathfrak{F}_1)$; durch ihn gehen auch r_2^3 und $r_2'^3$ und vereinigen sich auch, so daß er ein Punkt von $(ACE, \mathfrak{F}_2)$ ist. In jeder Ebene ACE sind diese beiden Kurven identisch. Also vereinigen sich die beiden Flächen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ in eine Fläche F_{12} und ebenso $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_4$ in F_{34}; und dasselbe gilt für $\mathfrak{F}'_1$ und $\mathfrak{F}'_2$, $\mathfrak{F}'_3$ und $\mathfrak{F}'_4$: F'_{12}, F'_{34}.

Für den ersten Kurvenbüschel auf F_{12} ist die Regelschar auf dieser Fläche, zu welcher die Tangenten AB, CD gehören, die der Doppelsekanten, für den anderen, dessen Kurven AD, CB berühren, die andere Regelschar.

Für die Kurven des ersten und dritten Büschels sind AD, CB konjugierte Schmiegungsstrahlen; sie gehen daher durch die windschiefe Involution (AD, CB) in sich selbst über, folglich auch die einen wie die anderen durch den Nullraum, welcher das Produkt derselben mit $\mathfrak{P}$ ist und von welchem alle Geraden auf $(\mathfrak{P})$, die mit AB, CD zur nämlichen Regelschar gehören, Nullstrahlen sind oder dessen Gewinde durch diese Regelschar geht. Die Kurven des ersten und des dritten Büschels haben daher denselben Schmiegungs-Nullraum $\mathfrak{N}_{13}$, und ebenso haben diejenigen des zweiten und vierten Büschels denselben Schmiegungs-Nullraum $\mathfrak{N}_{24}$, das Produkt von $\mathfrak{P}$ und (AB, CD); dessen Gewinde geht durch die andere Regelschar von $(\mathfrak{P})$, zu welcher AD, BC gehören.

Daß je die Kurven des nämlichen Büschels denselben Schmiegungs-Nullraum haben, folgt schon daraus, daß sie auf einer Fläche 2. Grades durch ihr gemeinsames Schmiegungs-Vierseit liegen.

$\mathfrak{P}$ ist mit jedem der beiden Schmiegungs-Nullräume vertauschbar; diese sind es aber auch untereinander. Denn

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_{13} \cdot \mathfrak{N}_{24} &= (AD, CB) \cdot \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \cdot (AB, CD) = (AD, CB) \cdot (AB, CD) \\ &= (AC, BD) = \mathfrak{N}_{24} \cdot \mathfrak{N}_{13}.\end{aligned}$$

Die Geraden der Regelschar auf F_{12}, zu welcher AB, CD gehören, sind Doppelsekanten der Kurven des ersten Büschels; je die beiden Treffpunkte sind entsprechend in (AD, CB), daher sind in $\mathfrak{P} = (AD, CB) \cdot \mathfrak{N}_{13}$ jeder der beiden Punkte und die Schmiegungsebene des andern entsprechend.

Für $\mathfrak{N}_{13}$ $(\mathfrak{N}_{24})$ als gegebenen Schmiegungs-Nullraum und sein Nullstrahlen-Vierseit $ABCD$ sind unser erster und dritter (zweiter und vierter) Büschel ebenfalls erster und dritter (zweiter und vierter) Büschel; also sind die Trägerflächen F_{12}, F_{34} entsprechend in $\mathfrak{N}_{13}$ $(\mathfrak{N}_{24})$ (Nr. 606). In der Involution (AD, CB) (oder (AB, CD)) ist jede sich selbst entsprechend; daher sind die beiden Flächen F_{12}, F_{34} einander entsprechend in $\mathfrak{P}$, dem Produkte von $\mathfrak{N}_{13}$ mit (AD, CB) (oder von $\mathfrak{N}_{24}$ mit (AB, CD)). Das bedeutet wiederum, daß:

$$F'_{12} \equiv F_{34}, \qquad F'_{34} \equiv F_{12}.$$

Und wir haben also nicht, wie es ursprünglich schien, acht Flächen, sondern nur zwei.

Der Nullraum $\mathfrak{N}_{13}$ habe die sich selbst entsprechenden kubischen Raumkurven aus den vier Bündeln auf den Flächen:

$$F_{12},\ F^*{}_2,\ F_{34},\ F^*{}_4;$$

wobei F_{12} und F^*_2, F_{34} und F^*_4 harmonisch zugeordnet sind; ebenso habe $\mathfrak{N}_{24}$ die seinigen auf:

$$F^*_1, F_{12}, F^*_3, F_{34},$$

wobei wiederum F^*_1 und F_{12}, F^*_3 und F_{34} harmonisch zugeordnet sind; da alle diese Flächen durch $ABCD$ gehen, so folgt, daß F^*_1 und F^*_2, beide F_{12} harmonisch zugeordnet, identisch sind: F^*_{12} und ebenso F^*_2 und F^*_4 sich in F^*_{34} vereinigen.

Diese Flächen F^*_{12} und F^*_{34} gehören, wie F_{12} und F_{34} zu $\mathfrak{P}$, zu einem anderen Polarraume, dessen Basisfläche durch $ABCD$ geht. In der Tat, die Kurven auf F^*_{12}, welche AB, CD berühren, und AD, CB zu konjugierten Schmiegungsstrahlen haben, gehen durch $\mathfrak{N}_{24} = \mathfrak{P} \cdot (AB, CD)$ in sich selbst über, ebenso durch (AD, CB), also auch durch $\mathfrak{P} \cdot (AB, CD) \cdot (AD, CB) = \mathfrak{P} \cdot (AC, BD)$. Da AC und BD in $\mathfrak{P}$ polar sind, so ist dies Produkt ein Polarraum $\mathfrak{P}'$, dessen Basisfläche der von $\mathfrak{P}$ harmonisch zugeordnet ist in bezug auf AC, BD oder mit dem Durchschnitts-Vierseit $ABCD$. Ebenso entsprechen die Kurven auf F^*_{12}, welche in $\mathfrak{N}_{13}$, und diejenigen auf F^*_{34}, welche in $\mathfrak{N}_{24}$ oder $\mathfrak{N}_{13}$ sich selbst entsprechend sind, auch sich selbst in diesem $\mathfrak{P}'$.

Sei $\mathfrak{N}_{13}$ wieder ein beliebiger Nullraum $\mathfrak{N}$, von welchem, wie früher, ausgegangen wird, so ist $\mathfrak{N}_{24}$ derjenige $\mathfrak{N}'$ im Büschel durch das Nullstrahlen-Vierseit $ABCD$, welcher mit ihm vertauschbar oder in Involution ist (so daß das Produkt die windschiefe Involution (AC, BD) ist); und nennen wir die Trägerflächen der vier Büschel von sich selbst in $\mathfrak{N}$ entsprechenden Kurven in den Bündeln, unsere jetzigen F_{12}, F^*_{12}, F_{34}, F^*_{34}, wie früher F_1, F_2, F_3, F_4, so sind die Trägerflächen der in $\mathfrak{N}'$ sich selbst entsprechenden Kurven F^*_{12}, F_{12}, F^*_{34}, F_{34}, also F_2, F_1, F_4, F_3; so daß z. B. die Kurven auf F_1, welche AB, CD in A, C berühren, den $\mathfrak{N}$ zum Schmiegungs-Nullraum haben, diejenigen, welche AD, CB in A, C tangieren, den $\mathfrak{N}'$.

608 Zu einem Polarraume, in welchem eine gegebene kubische Raumkurve r^3 sich selbst entspricht, kann man auch in folgender Weise gelangen. Es sei $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ ein Schmiegungs-Tetraeder der r^3 und zwar so, daß AB und CD die Tangenten, γ und α die Schmiegungsebenen in A und C sind; ferner seien E und ϵ ein beliebiger Punkt der Kurve und eine beliebige Schmiegungsebene derselben. Die Korrelation:

$$\left| \begin{matrix} A\,B\,C\,D\,E \\ \alpha\;\beta\;\gamma\;\delta\;\epsilon \end{matrix} \right|$$

ist, wegen des Polartetraeders $ABCD$, ein Polarraum. Die Kurve, welche in ihm der r^3 entspricht, hat $ABCD$ in derselben Weise zum Schmiegungs-Tetraeder, weil A, C, AB, CD, γ, α in α, γ, CD, AB,

C, A übergehen, und oskuliert ϵ (oder geht durch E), ist daher mit r^3 identisch. Solche Schmiegungstetraeder liefert der Polarraum ∞^1; man kann von jedem Punkte A' der Kurve ausgehen, C' ist der Oskulationspunkt der polaren Ebene, der Tangente von A' entspricht die von C', und weil es sich um eine involutorische Korrelation handelt, der Schmiegungsebene von A' der Punkt C'. Es entsteht dadurch auf r^3 eine Involution. Hält man nun A und E fest und bewegt C und ϵ über die Kurve, so ergeben sich die ∞^2 Polarräume, welche sie in sich selbst überführen.

Beachten wir, daß diese Schmiegungs-Tetraeder in anderer Weise in sich selbst übergeführt werden, als die bisher betrachteten; nämlich so, daß sie eben Polartetraeder des Polarraums werden. Solcher gibt es, wie eben bemerkt, bei jedem Polarraum, welcher r^3 in sich transformiert, ∞^1. Es gibt hingegen, wie bei jeder Korrelation, die eine kubische Raumkurve r^3 in sich überführt, so auch bei einem Polarraum, der es tut, nur ein Schmiegungstetraeder, das in der früheren Weise in sich übergeht, nämlich jeden der beiden Kurvenpunkte in die eigene Schmiegungsebene; das zugehörige Schmiegungsvierseit liegt auf der Basisfläche und die Punkte der Kurve, zu denen es gehört, sind die Doppelpunkte der obigen Involution; in ihnen wird die Basisfläche von der Kurve oskuliert.

Wir betrachten, wenn einer gegebenen Fläche G 2. Grades ein Vierseit $ABCD$ aufgeschrieben ist, die zu den vier Bündeln gehörigen Büschel der auf ihr befindlichen kubischen Raumkurven; ihre Schmiegungs-Nullräume seien $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{N}_4$. Bezeichnen wir mit G_1, G_2 die Trägerflächen der Regelscharen der Nullstrahlen aus $\mathfrak{N}_1$, welche AD, CB treffen, bzw. derjenigen aus $\mathfrak{N}_2$, welche AB, CD treffen; dann ist 609

$$(\beta\delta,\ \alpha\gamma,\ G_1,\ G) = (\beta\delta,\ \alpha\gamma,\ G_2,\ G);$$

denn das sind Würfe von der Art des Wurfs $(\beta\delta, \alpha\gamma, F, F_1)$ in Nr. 606. Daher sind die Flächen G_1 und G_2 identisch; die beiden genannten Regelscharen sind verbunden. Das bedeutet aber (Nr. 534), daß $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ in Involution sind, und ebenso $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{N}_4$.

Haben G_3, G_4 analoge Bedeutung für $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{N}_4$, so haben auch die Doppelverhältnisse $(\alpha\gamma, \beta\delta, G_3, G)$ und $(\alpha\gamma, \beta\delta, G_4, G)$ den nämlichen Wert wie die obigen. Es sind daher $G_1 \equiv G_2$, $G_3 \equiv G_4$ gepaart in der Involution, von welcher G ein Doppelelement ist und $\beta\delta$, $\alpha\gamma$ ein Paar bilden. Diese Involution ist mit derjenigen identisch, in welcher die Flächen der Büschel-Schar durch $ABCD$ gepaart sind, die in bezug auf G einander entsprechen; denn G geht in sich selbst über und das Ebenen-Punkte-Paar $(\beta, \delta; A, C)$ in $(D, B; \gamma, \alpha)$. Also sind auch G_1 und G_3 (oder G_2 und G_4) polar in in bezug auf G. Da nun das Vierseit zu sich selbst polar ist, $\mathfrak{N}_1, \ldots$

durch dasselbe und je eine der Geraden der Regelscharen von $G_1, \ldots$ bestimmt sind, so erweisen sich auch $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ polar in bezug auf G.

§ 91. Korrelationen, welche hinsichtlich der Kernflächen besondere Eigenschaften haben. Zyklische Korrelationen 4. Grades.[1])

610 Wir machten eine Fläche 2. Grades φ^2 zu sich selbst korrelativ auf die erste Art, indem wir in jede der beiden Regelscharen eine Projektivität legten (Nr. 589).

Wir wollen nun annehmen, daß diejenige in der l-Schar Identität sei, die in der g-Schar aber weder Identität, noch Involution. Jedem Punkte von φ^2 entsprechen zwei verschiedene Polarebenen, welche von der ihn enthaltenden Gerade l nach den beiden Geraden g gehen, welche in dem einen und dem andern Sinne der durch ihn gehenden g korrespondieren; sie inzidieren also beide mit ihm und sind Tangentialebenen von φ^2. Es haben sich daher in φ^2 die beiden Kernflächen vereinigt, ohne daß es sich um einen Polarraum handelt.[2])

Es liege umgekehrt eine Korrelation vor, welche nicht Polarraum ist und bei welcher die beiden Kernflächen identisch sind. Diese einzige Kernfläche φ^2 entspricht sich dann selbst; wollte man annehmen, daß sie dies auf die zweite Art tut, so daß die eine Regelschar in die andere übergeht, so würde dem Punkte $P = gl$ auf ihr die Ebene $\pi' = l'g'$ entsprechen, die nur dann durch P geht, wenn l' mit l oder g' mit g identisch ist; aber in dem beliebigen Punkte P schneiden sich nicht zwei entsprechende Geraden g und l' oder l und g' von φ^2. Es muß also zunächst jede der beiden Regelscharen von φ^2 in sich projektiv sein.

In einer von ihnen muß diese Projektivität Identität sein.

In der Regelschar der g sei sie es nicht; die eine Polarebene von $P = gl$ ist dann $\pi' = Pg'$, wo nun g' die der g in dem einen Sinne entsprechende Gerade ist; jene Ebene geht durch P und g', also durch l und dreht sich um diese Gerade, wenn P sie durchläuft; d. h. l entspricht sich selbst.

Die g-Schar hat zwei sich selbst entsprechende Geraden m, n; jedem Punkte einer von ihnen, etwa ml, korrespondiert seine Berührungsebene ml in beiderlei Sinne. Daher entspricht in der Korrelation jedem Strahle des Netzes $[m, n]$ involutorisch seine ebenfalls diesem Netze angehörige Polare nach φ^2.

1) Vgl. Montesano, Su la corrispondenza reciproca fra due sistemi dello spazio. Neapel 1885.

2) Diesen wesentlichen Unterschied von der ebenen Korrelation, welche vereinigte Kernkurven nur beim Polarfelde hat, hat zuerst Battaglini erkannt: Memorie dell' Accademia dei Lincei, Ser. III, Bd. 12, S. 233.

Die mit m oder n inzidenten Punkte oder Ebenen haben je ∞^2 Wechselstrahlen, weil in beiderlei Sinne dasselbe polare Element. Der Komplex der Wechselstrahlen (Nr. 525) besteht deshalb aus den beiden Gebüschen $[m]$, $[n]$.

Die Wechselstrahlen, die zu den übrigen Punkten und Ebenen gehören, reduzieren sich auf das Netz $[m, n]$; denn für einen beliebigen Punkt P, eine beliebige Ebene π ist Wechselstrahl die Polare (in der Korrelation und in bezug auf φ^2) des Strahles von $[m, n]$, welcher mit P oder π inzidiert; sie gehört selbst zu $[m, n]$; und jeder von diesen ∞^2 eigentlichen Wechselstrahlen ist es für ∞^1 Punkte oder Ebenen, alle, die mit der polaren Gerade inzidieren.

Es seien p und p_1 zwei involutorische Polaren aus $[m, n]$; jede Gerade t, welche sie trifft, trifft sie in zwei doppelt konjugierten Punkten und sendet nach ihnen doppelt konjugierte Ebenen, trägt also eine Involution doppelt konjugierter Punkte und eine Involution doppelt konjugierter Ebenen.

Und umgekehrt, jede Gerade t, welche eine Involution der einen oder andern Art trägt, muß von jeder Gerade p aus $[m, n]$, welche sie trifft, auch die polare Gerade p_1 treffen, den Wechselstrahl des Punktes tp oder der Ebene tp, welcher die doppelt konjugierten Elemente dieses Punktes, dieser Ebene enthält.

Ist q eine weitere Gerade aus $[m, n]$, welche t trifft, so begegnet t auch ihrer Polare q_1; und so erhalten wir eine Regelschar von Geraden t und, ihr verbunden, eine involutorische Regelschar von Polaren p, p_1; q, q_1; .... Jedes der ∞^2 Polarenpaare p, p_1 führt zu einem Netze von Geraden t, jede Gerade t ergibt sich bei ∞^1 Polarenpaaren; und in den dadurch entstehenden Komplex von Geraden t vereinigen sich die beiden Gewinde $\mathfrak{G}^p$ und $\mathfrak{G}^e$ der Geraden, welche Involutionen doppelt konjugierter Punkte, bzw. doppelt konjugierter Ebenen tragen.

Wir fanden in Nr. 564, daß diese im allgemeinen verschiedenen Gewinde $\mathfrak{G}^p$, $\mathfrak{G}^e$ durch die Kongruenzen der beiden Arten singulärer Strahlen des Kernkomplexes gehen, welche bzw. die eine und die andere Kernfläche berühren; hier, wo die Kernflächen identisch geworden sind, gilt dies auch für diese Kongruenzen und die durchgehenden Gewinde.

Um zu den in einer Ebene ϵ gelegenen t zu kommen, genügt es, eine Gerade u derselben zu betrachten; die von ihren Punkten ausgehenden p aus $[m, n]$ erzeugen eine Regelschar, die in der Korrelation (oder in bezug auf die Kernfläche φ^2) polaren Geraden p_1 eine zweite und deren Spuren in ϵ einen Kegelschnitt, der projektiv auf u bezogen ist; in den Schnitten von u mit φ^2 vereinigen sich Spuren von (in einer l vereinigten) p, p_1; daher entsteht durch die Verbindungslinien dieser Punkte $p\epsilon$, $p_1\epsilon$, die in ϵ gelegenen Geraden t, nur ein Strahlenbüschel, der Büschel von $\mathfrak{G}^p \equiv \mathfrak{G}^e$.

In bezug auf dies Gewinde sind die involutorischen Polaren der Korrelation, welche das Netz $[m, n]$ erfüllen, auch polar; weil eben jede t, welche p trifft, auch der p_1 begegnet. Die Regelschar der l, die sich selbst polar sind, gehört zu diesem Gewinde. Für einen Punkt der Punkt-Kernfläche ist der zugehörige Wechselstrahl ein Strahl von $\mathfrak{G}^p$ (Nr. 562); in unserm Falle sind m, n für jeden ihrer Punkte (und Ebenen) Wechselstrahlen; also gehören sie zu $\mathfrak{G}^p \equiv \mathfrak{G}^e$, und dies Gewinde wird am einfachsten durch die Regelschar der l und die beiden Geraden m, n aus der verbundenen Schar festgelegt.

Die Identität von $\mathfrak{G}^p$ und $\mathfrak{G}^e$ entspricht auch dem Umstande, daß das Schnittvierseit der Kernflächen und seine Diagonalen u, v unbestimmt geworden sind, also auch das jenen Gewinden gemeinsame Strahlennetz $[u, v]$.

Unbestimmt sind jedoch von jenem Vierseite nur die Gegenseiten aus der l-Schar, die aus der g-Schar sind m, n; und es sind ∞^2 solche Vierseite vorhanden. Jedes enthält in seiner Büschel-Schar eine Fläche φ_1^2, welche zu der φ^2 harmonisch ist in bezug auf die beiden ausgearteten Flächen; nun ist aber φ_1^2 auch harmonisch zu φ^2 in bezug auf die beiden in φ^2 vereinigten Kernflächen. Daher ist φ_1^2 die zweite Fläche in der Büschel-Schar neben φ^2, welche durch die Korrelation in sich (auf die erste Art) übergeführt wird (Nr. 589). Unser Spezialfall, in welchem ∞^2 Flächen 2. Grades in sich selbst übergehen (neben der Kernfläche), nimmt daher eine Mittelstellung ein zwischen der allgemeinen Korrelation, durch welche nur zwei Flächen 2. Grades in sich transformiert werden, und dem Polarraume, welcher zwei Systeme sich selbst entsprechender Flächen 2. Grades besitzt, ein vierfach und ein dreifach unendliches; während der Nullraum sogar ∞^6 Flächen 2. Grades in sich transformiert.

Diese ∞^2 Flächen gehen durch m, n, die gemeinsamen Gegenseiten aller jener Vierseite; ihre auf diese Geraden sich stützenden Regelscharen gehören zum Netze $[m, n]$; also sind die in diesen Regelscharen durch die Korrelation entstehenden Projektivitäten Involutionen.

Unsere spezielle Korrelation macht daher bei jeder der ∞^2 Flächen 2. Grades (durch m, n), welche sie in sich selbst auf die erste Art transformiert, diejenige Regelschar, zu welcher m, n nicht gehören, involutorisch, und gepaarte Geraden dieser Involution sind zugleich polar nach der Kernfläche.

611 Wenn eine Korrelation eine Fläche 2. Grades φ_1^2 so auf die erste Art in sich transformiert, daß in der einen Regelschar Involution entsteht, so liegt unser Spezialfall vor.

Denn es seien l_1, l_2 die Doppelstrahlen dieser Involution, l, l' irgendein Paar derselben, m, n die sich selbst entsprechenden Geraden der Projektivität in der andern Regelschar; so ist ml_1nl_2 Schnittvierseit der Kernflächen. Der Verbindungslinie der Punkte ml, nl' entspricht die mit ihr identische Schnittlinie der Ebenen ml', nl. Die Punktreihe der ml ist durch die Korrelation projektiv zu dem Ebenenbüschel der ml' und dieser perspektiv zur Punktreihe der nl'. Also erzeugen jene sich selbst entsprechenden Verbindungslinien eine Regelschar; ihre Trägerfläche φ^2 geht durch m, n und durch l_1, l_2. In ihr haben sich die beiden Kernflächen vereinigt.

In der Büschel-Schar $\varphi^2\varphi_1^2$ besteht eine Involution sich entsprechender Flächen, weil die ausgearteten Flächen sich involutorisch korrespondieren; die Doppelelemente sind φ^2, φ_1^2, die sich jedoch darin unterscheiden, daß in der l-Schar von φ^2 jede Gerade sich selbst entspricht, in derjenigen von φ_1^2 involutorisches Entsprechen statthat. Die involutorische Zuordnung der andern Flächen der Büschel-Schar ergibt sich auch daraus, daß ihre l-Scharen dem Netze $[m, n]$ angehören, innerhalb dessen ja durch die Korrelation eine involutorische Zuordnung zustande kommt.

Es wurde in Nr. 591 erkannt, daß ein Polarraum vorliegen muß, wenn beide Regelscharen einer sich selbst entsprechenden Fläche φ_1^2 involutorisch werden. Dies folgt auch aus unsern jetzigen Ergebnissen. 612

Vorhin, wo nur in der l-Regelschar von φ_1^2 Involution vorausgesetzt wurde, ergab sich eine durch das Vierseit der Koinzidenzstrahlen der beiden Regelscharen gehende Fläche 2. Grades, bei welcher alle Geraden der l-Schar sich selbst entsprechen und die deshalb „vereinigte Kernfläche“ ist; setzen wir nun auch in der g-Schar von φ_1^2 Involution voraus, so ergibt sich eine Fläche, in deren g-Schar alle Geraden sich selbst entsprechen, die also auch vereinigte Kernfläche und infolgedessen mit der vorherigen identisch ist. Wir haben demnach eine Kernfläche φ^2, auf welcher jede Gerade sich selbst entspricht, also jedem ihrer Punkte seine Berührungsebene. Daraus folgt dann, daß einem beliebigen Punkte des Raumes die Ebene involutorisch zugeordnet ist, welche die Berührungspunkte der von ihm kommenden Tangentialebenen enthält, seine Polarebene in bezug auf φ^2.

Wenn ein Nullraum eine Fläche 2. Grades φ_1^2 in sich überführt, so muß die eine Regelschar aus Nullstrahlen, also sich selbst entsprechenden Geraden bestehen, während die andere involutorisch ist (Nr. 598).

Umgekehrt, wenn φ_1^2 durch eine Korrelation auf die erste Art so in sich übergeführt wird, daß die eine Regelschar involutorisch ist und in der andern jede Gerade sich selbst entspricht, so muß es sich um einen Nullraum handeln. Die

Gerade x treffe die involutorisch gepaarten Geraden g, g' der ersten Schar, und durch die Treffpunkte mögen l_1, l_2 aus der andern gehen; also entspricht der x die Schnittlinie $(g'l_1, gl_2)$, welche mit ihr identisch ist. Die in eine Ebene ϵ fallenden Geraden, welche gepaarte Geraden der g-Schar treffen, bilden den Büschel um das Zentrum der Involution, die auf der Spurkurve der Regelschar in ϵ entsteht; und dieser Scheitel, in den lauter in sich selbst entsprechende Geraden zusammenlaufen, entspricht der Ebene; der Nullraum ist ersichtlich.

613 Im allgemeinen Falle (Nr. 610, 611), in welchem in der l-Schar der Kernfläche φ^2 Identität, in der g-Schar nichtinvolutorische Projektivität besteht, bilden die Geraden, welche entsprechende Geraden dieser Regelschar treffen, den Kernkomplex der Korrelation.

Wenn nämlich $x \equiv y'$ eine Gerade ist, welche von der einen Polare x' und daher auch von der andern y geschnitten wird, also ein Strahl des Kernkomplexes, so sind die Punkte xy, $x'y'$, weil in ihren Polarebenen gelegen, Punkte der (vereinigten) Kernfläche φ^2; geht durch xy die Gerade g aus jener Schar, so muß die g' in der Ebene $x'y'$ liegen, so daß $x \equiv y'$ die beiden Geraden g, g' trifft. Und umgekehrt, wenn x die entsprechenden Geraden g, g' aus der Regelschar trifft, und l durch gx geht, so muß x', weil l sich selbst entspricht, in der Ebene $g'l$ liegen, welche x enthält, so daß x von x' getroffen wird und zum Kernkomplexe gehört. Der Kernkomplex wird daher durch alle die Strahlennetze erzeugt, deren Leitgeraden entsprechende Geraden der Projektivität in der g-Schar von φ^2 sind. Die Komplexkurve ist die Direktionskurve zweier projektiver Punktreihen auf einem Kegelschnitte (Nr. 107).[1])

In dem speziellen Falle, wo die Projektivität Involution und die Korrelation Nullraum wird, geht dieser Direktions-Kegelschnitt in einen doppelten Strahlenbüschel und der Kernkomplex in das doppelte Gewinde des Nullraums über (Nr. 530).

Für zwei verschiedene Flächen 2. Grades, die sich in einem Vierseite schneiden, ergaben sich (Nr. 563) zwei einfach unendliche Systeme von Korrelationen, deren Kernflächen sie sind. Sind die beiden Flächen in einer Fläche φ^2 vereinigt, so liefert jedes der ∞^4 ihr aufgeschriebenen Vierseite ∞^1 Korrelationen, deren Kernflächen sich in φ^2 vereinigt haben.

Eine Korrelation mit vereinigten Kernflächen hat ∞^2 Vierseite, aus denen sie abgeleitet werden kann. Wir kommen so zur Mannigfaltigkeit $9 + 4 + 1 - 2 = 12$. Es gibt daher ∞^{12} Korrelationen mit vereinigten Kernflächen, so daß diese Spezialität eine

1) Liniengeometrie Bd. III Nr. 837. — Dieser Komplex 2. Grades hat alle Strahlen der l-Regelschar und m, n aus der g-Regelschar zu Doppelstrahlen.

dreifache Bedingung ist, während der Polarraum eine sechsfache ist.

Ein weiterer Spezialfall, auf welchen wir jedoch nicht eingehen 614
wollen, ergibt sich, wenn m und n zusammenfallen und das Netz $[m, n]$ aus den Strahlen besteht, die φ^2 in den Punkten von m berühren.

Eine interessantere Spezialität unserer Korrelation ergibt sich in folgender Weise. Nehmen wir an, daß einmal zwei Punkten $A \equiv B'$, $C \equiv D'$ dieselben Polarebenen, aber verkehrt, entsprechen, so daß:

$$\alpha' \equiv \delta, \quad \beta \equiv \gamma'.$$

Wir wissen, der Wechselstrahl eines Punktes oder einer Ebene ist immer ein Strahl des Netzes $[m, n]$; daher muß die Verbindungslinie e der beiden obigen Punkte als Wechselstrahl für jede der beiden Ebenen, und die Schnittlinie e_1 der beiden Ebenen, als Wechselstrahl für jeden der beiden Punkte, zu $[m, n]$ gehören; diese beiden Geraden sind involutorisch polar in der Korrelation. Die Ebenenbüschel, um e_1, der beiden Polarebenen der Punkte von e sind involutorisch, wegen des Paares $\alpha' \equiv \delta$, $\beta \equiv \gamma'$, das als α', β bei $A \equiv B'$, als δ, γ' bei $D' \equiv C$ sich ergibt; Doppelebenen sind $e_1 m$, $e_1 n$. Ebenso sind die Punktreihen, auf e, der Pole der Ebenen durch e_1 involutorisch, wegen des Paares $A \equiv B'$, $C \equiv D'$, das als A, D' bei $\alpha' \equiv \delta$, als B', C bei $\beta \equiv \gamma'$ sich ergibt; Doppelpunkte sind em, en. Folglich gehören diese Involutionen zu der windschiefen Involution (m, n), von welcher m, n die Axen sind.

Es sei nun $K \equiv L'$, $M \equiv N'$ ein anderes Paar entsprechender Punkte dieser Involution (m, n), auf dem Strahle l des Netzes $[m, n]$ gelegen, und $\varkappa', \lambda, \mu', \nu$ seien die Polarebenen, welche alle durch die involutorische Polare l_1 gehen, die ebenfalls zu $[m, n]$ gehört. Jene Punkte liegen in zwei entsprechenden Ebenen der zu (m, n) gehörigen obigen Involution um e_1, in $\alpha_1' \equiv \delta_1$, $\gamma_1' \equiv \beta_1$, welche zu $A_1 \equiv B_1'$, $C_1 \equiv D_1'$ auf e gehören. Dann gehen $\varkappa', \lambda$ bzw. durch D_1', A_1 und μ', ν durch B_1', C_1; und weil sie alle vier durch l_1 gehen, so ist: $\lambda \equiv \mu'$, $\varkappa' \equiv \nu$; so daß auch $K \equiv L'$ und $M \equiv N'$ vertauschte Polarebenen haben.

Wenn also einmal bei unserer speziellen Korrelation mit vereinigten Kernflächen zwei Punkte oder zwei Ebenen dieselben polaren Elemente haben, aber vertauscht, so sind zwei so zusammengehörige Punkte oder Ebenen in der windschiefen Involution (m, n) entsprechend, deren Axen die beiden Geraden m, n auf der Kernfläche sind, welche in der zweiten Regelschar mit nicht durchweg sich selbst entsprechenden Geraden sich selbst entsprechen; und jede zwei entsprechenden Punkte oder Ebenen dieser Involution (m, n)

haben vertauschte polare Elemente in der Korrelation (wiederum in (m, n) entsprechend).

Wir kommen so zu viergliedrigen Zyklen von Punkten und Ebenen, von denen jedem Elemente das folgende im andern Raume entspricht:

$$A, \alpha' \equiv \delta, \quad D' \equiv C, \quad \gamma' \equiv \beta, \quad B' \equiv A;$$

und auch bei den Geraden ergeben sich solche Zyklen, nämlich, wenn auch $A_1 \equiv B_1'$, $C_1 \equiv D_1'$, $\alpha_1' \equiv \delta_1$, $\beta_1 \equiv \gamma_1'$ ist:

$$AA_1, \alpha'\alpha_1' \equiv \delta\delta_1, \quad D'D_1' \equiv CC_1, \quad \gamma'\gamma_1' \equiv \beta\beta_1, \quad B'B_1' \equiv AA_1.$$

Wir haben also eine zyklische Korrelation 4. Grades.

615 Wenn die Punkt-Kernfläche einer Korrelation ein Kegel (O) (mit der Spitze O) ist, so muß, so lange die Korrelation nicht selbst ausartet, die Ebenen-Kernfläche ein Kegelschnitt (ω) (in der Ebene ω) sein; denn in einen solchen geht durch eine nicht ausartende Korrelation ein Kegel über. (O) und (ω) entsprechen einander involutorisch, jedem Punkte von (O), der durch ihn gehenden Kante und der Berührungsebene korrespondieren zwei mit dem Punkte inzidierende Berührungsebenen von (ω), die Tangenten, durch welche sie gehen, und deren Berührungspunkte; ebenso jeder Berührungsebene von (ω), der Tangente, durch die sie geht, und dem Berührungspunkte derselben zwei Punkte von (O), ihre Kanten und Berührungsebenen. Der Spitze O entspricht daher involutorisch die durch sie gehende Ebene ω, so daß der Büschel (O, ω) sich selbst entspricht. Die Koinzidenzstrahlen der Projektivität in ihm sind zugleich Kanten von (O) und Tangenten von (ω); weil jedem Punkte oder jeder Ebene eines solchen Strahls zwei Ebenen, zwei Punkte entsprechen, die ebenfalls durch den Strahl gehen, bzw. auf ihm liegen, also mit dem Punkt, der Ebene inzidieren.

Die Ebene des Kernkegelschnitts (ω) geht also durch den Scheitel des Kernkegels (O) und zwei Tangenten t_1, t_2 jenes sind zugleich Kanten dieses.

Das Schnittvierseit der Kernflächen ist derartig, daß in jeder dieser beiden Geraden sich zwei Nachbarseiten vereinigt haben. Von den beiden ausgearteten Flächen der Büschel-Schar besteht die eine, als Ebenenpaar, aus den Berührungsebenen τ_1, τ_2 des (O) längs t_1, t_2, während die Punkte des Punktepaars in O zusammenfallen; Doppellinie u ist die Schnittlinie $\tau_1\tau_2$, welche zugleich Verbindungslinie der vereinigten Punkte ist. Die andere besteht aus dem Paare der Berührungspunkte T_1, T_2 der t_1, t_2 mit (ω) und aus zwei Ebenen, die sich in ω vereinigt haben; Doppellinie v ist die Verbindungslinie $T_1 T_2$, welche zugleich Schnittlinie der vereinigten Ebenen ist.

Als Diagonalen des Vierseits sind diese Geraden u, v in der Korrelation involutorisch polar.

Durch den Wechselstrahl, in welchem die beiden Polarebenen eines Punktes sich schneiden, geht stets seine Polarebene nach der Punkt-Kernfläche; für einen Punkt von (ω) sind, wie wir oben fanden, die beiden Polarebenen Tangentialebenen von (O), und da sie sich auf der Polarebene des Punktes nach (O) schneiden, so geht die Ebene, welche ihre Berührungskanten verbindet, d. i. die Polarebene dieser Schnittlinie, durch den Punkt. Diese Kanten entsprechen seiner Tangente.

Die beiden Kanten also von (O), welche einer Tangente von (ω) korrespondieren, liegen in einer Ebene, welche durch den Berührungspunkt der Tangente geht.

Bewegt sich die Tangente um (ω), so bewegen sich jene Kanten projektiv auf (O) und vereinigen sich in t_1 und t_2; die verbindende Ebene umhüllt daher einen dem (O) konzentrischen Kegel 2. Grades, der ihn längs t_1 und t_2 berührt (Nr. 107).

Jede von diesen Ebenen geht durch den entsprechenden Punkt auf (ω), so daß man diesen Kegel und den Kegelschnitt (ω), welche hinsichtlich der Berührungsebenen und Punkte projektiv sind, perspektiv nennen kann.

Ebenso schneiden sich die beiden Tangenten von (ω), welche einer Kante von (O) entsprechen, stets auf deren Berührungsebene.

Dieser Schnittpunkt erzeugt einen Kegelschnitt in der Ebene ω, welcher den (ω) in T_1, T_2 berührt, projektiv zu (O) ist und perspektiv zu ihm liegt.

Wir erkannten in Nr. 469, daß man eine Korrelation in folgender Weise herstellen kann. Man bezieht drei Punktreihen a, b, c, welche einen Punkt O gemeinsam haben, bzw. projektiv auf drei Ebenenbüschel a', b', c', deren Axen in einer Ebene ω liegen, und zwar derartig, daß in allen drei Projektivitäten jenem Punkte O diese Ebene ω entspricht. Der Ebene, welche irgend drei Punkte der Punktreihen verbindet, entspricht der Schnittpunkt der ihnen korrespondierenden Ebenen der Büschel.

Jedem Punkte einer der Punktreihen ist dann in der Korrelation die ihm in der betreffenden Projektivität entsprechende Ebene zugeordnet.

Wenn die drei Projektivitäten durch perspektive Lage zustande kommen, wozu erforderlich ist, das O und ω inzidieren, so erhält man den jetzigen Spezialfall. Denn alle Punkte der drei Punktreihen kommen dann auf die Punkt-Kernfläche zu liegen, und die Ebenen der Büschel werden Berührungsebenen der Ebenen-Kernfläche; folglich enthält jene drei in den Punkt O zusammenlaufende Geraden, ist ein Kegel mit der Spitze O, und diese hat drei Büschel von Tangentialebenen, deren Axen in ω liegen, ist ein Kegelschnitt in dieser Ebene.

Die Projektivität im Büschel (O, ω), deren Koinzidenzen t_1, t_2 sind, hat die Strahlen, welche in den Ebenen ab, ac, bc liegen, bzw. nach den Punkten $a'b', a'c', b'c'$ gehen, zu entsprechenden und ist dadurch bestimmt.[1])

616 Der Kernkegel zerfalle weiter in zwei Ebenen τ_1, τ_2 und der Kernkegelschnitt dann in zwei Punkte T_1, T_2. Es entspricht dem Ebenenpaar $\tau_1 \tau_2$ involutorisch das Punktepaar $T_1 T_2$, der Schnittlinie $u = \tau_1 \tau_2$ die Verbindungslinie $v = T_1 T_2$. Da u der Punkt-Kernfläche angehört, so müssen die beiden Polarebenen jedes Punktes auf ihr durch ihn gehen, andererseits durch v; also entspricht jedem Punkte von u involutorisch die Ebene, welche ihn mit v verbindet.[2]) Dagegen entsprechen einem Punkte von v zwei verschiedene Ebenen durch u, einer Ebene durch u zwei Punkte auf v.

Die beiden Polarebenen eines beliebigen Punktes schneiden sich stets auf u, in dem Punkte nämlich, welcher der jenen Punkt enthaltenden Ebene von v entspricht; die beiden Pole einer Ebene liegen in derselben Ebene durch v, derjenigen, die dem Schnitte jener mit u entspricht. Oder der Wechselstrahl eines beliebigen Punktes trifft u, der einer Ebene v; der Komplex der Wechselstrahlen besteht also aus den Gebüschen $[u]$, $[v]$; hier ist jedoch nicht jeder Strahl des Komplexes Wechselstrahl von beiden Arten. Der Wechselstrahl eines Punktes von u ist jeder beliebige Strahl seiner involutorischen Polarebene und trifft v, derjenige einer Ebene durch v jeder Strahl durch ihren involutorischen Pol und trifft u.

Was im vorigen allgemeineren Falle für O und ω galt, gilt jetzt für jeden Punkt der Gerade u, als Doppelpunkt des Ebenenpaars $\tau_1 \tau_2$, und die mit ihm inzidente Ebene von v, als Doppelebene des Punktpaars $T_1 T_2$. Sie bestimmen stets einen sich selbst entsprechenden Strahlenbüschel. Jedem Punkt eines Koinzidenzstrahls eines solchen Büschels entsprechen zwei Ebenen durch denselben Strahl; also inzidieren sie mit dem Punkte, und ebenso die beiden Pole einer Ebene dieses Strahls mit dieser. Daher liegen diese ∞^1 Koinzidenzstrahlen in den Kernebenen τ_1, τ_2 und gehen durch die Kernpunkte T_1, T_2. Daraus folgt, daß jede von jenen mit einem von diesen inzidiert: τ_1 mit T_1, τ_2 mit T_2; so daß T_1, T_2 die Punkte $v(\tau_1, \tau_2)$, τ_1, τ_2 die Ebenen $u(T_1, T_2)$ sind.

1) Der tetraedrale Komplex der Wechselstrahlen und der Kernkomplex, welche diesem Falle entsprechen, sind in der Liniengeometrie Bd. III Nr. 819 und Nr. 845—48 behandelt.

2) Wenn jedem Punkte von u und v eine die ihn mit v oder u verbindende Ebene involutorisch entspricht, so ist die Korrelation ein Nullraum (Nr. 528).

Die Strahlen t_1, t_2 des vorigen Falls haben sich in die Büschel (T_1, τ_1), (T_2, τ_2) erweitert; alle Strahlen derselben sind sich selbst entsprechend. Daher korrespondieren $T_1 \equiv T_1'$ und $\tau_1' \equiv \tau_1$ einander involutorisch, und ebenso $T_2 \equiv T_2'$ und $\tau_2' \equiv \tau_2$.

Die Inzidenz entsprechender Elemente des Feldes τ_1 und des Bündels T_1', des Feldes τ_1' und des Bündels T_1, welche korrelativ sind, kommt durch den Büschel sich selbst entsprechender Strahlen (T_1, τ_1) zustande; die beiden einem Punkte der Ebene $\tau_1 \equiv \tau_1'$ entsprechenden Ebenen schneiden sich in dem Strahle dieses Büschels, der ihn enthält; die beiden Pole einer Ebene von $T_1 \equiv T_1'$ liegen auf dem Strahle des Büschels, der sie enthält. Und ähnliches gilt für T_2 und τ_2.

Die Korrelation zwischen τ_1 und T_1' mit durchweg inzidenten entsprechenden Punkten und Ebenen führt zu ∞^2 Strahlenbüscheln, je durch zwei solche korrespondierende Elemente bestimmt. Dieselben erzeugen ein Gewinde H. Denn ist (L, λ) ein beliebiger Strahlenbüschel, so geht von den Ebenen von T_1', die den Punkten der Spur $\lambda\tau_1$ entsprechen, eine ξ', dem X entsprechend, durch L; der durch L gehende Strahl des erzeugenden Büschels (X, ξ') ist der einzige in (L, λ) fallende Strahl des erzeugten Komplexes, so daß dieser linear ist. Im Nullraume von H sind die korrespondierenden Elemente von τ und T_1' auch zugeordnet. Ebenso liefern τ_1' und T_1 ein Gewinde H^*.

Ein Strahl von H hat, als Strahl des ersten der beiden korrelativen Räume, seinen entsprechenden im zweiten in der seinem Schnittpunkte mit τ_1 entsprechenden Ebene von T_1', in der er, nach der Entstehung von H, selbst liegt; also trifft er diesen entsprechenden Strahl und dann auch auch den im anderen Sinne entsprechenden.

Der Kernkomplex unserer speziellen Korrelation zerfällt also in diese beiden Gewinde H und H^*.

Daraus ist zu schließen, daß H und H^* auch bei τ_2 und T_2 sich ergeben. Sie tun es aber in umgekehrter Weise: die Strahlen von H gehen durch die Punkte von τ_2' in den korrespondierenden Ebenen von T_2. Denn ist $x \equiv y'$ ein Strahl des Kernkomplexes und sind x', y seine von ihm geschnittenen Polaren, so schneidet er die Punkt-Kernfläche in $xy, x'y'$, denen die Berührungsebenen $x'y'$, xy der andern Kernfläche polar sind. Gehört er also zu H, so ist sein Schnitt mit τ_1 der xy und er liegt in $x'y'$, die durch T_1' geht; der zweite Schnitt $x'y'$ liegt daher in τ_2' und der Strahl liegt in xy, die durch T_2 geht.

Die Strahlen y, x' gehören auch zum Kernkomplexe; y trifft τ_1 ebenfalls in dem Punkte xy, liegt aber nicht in $x'y'$ und ebenso x' nicht in xy; also gehören diese Geraden zum andern Bestandteile H^*.

Jeder Strahl von H oder H^* hat seine beiden (von ihm geschnittenen) Polaren in H^*, bzw. H.

Weil jedem Punkte von u dieselbe Ebene von v in beiderlei Sinne entspricht, so gehört das Strahlennetz $[u, v]$ zu beiden Gewinden H, H^*.

Auch die beiden Gewinde $\mathfrak{G}^p$ und $\mathfrak{G}^e$ der Strahlen, welche Involutionen doppelt konjugierter Punkte, bzw. Ebenen tragen, gehen durch $[u, v]$; denn bei jedem Strahle dieses Netzes sind die beiden Punkte, bzw. Ebenen, die mit u, v inzidieren, doppelt konjugiert.

Die Schnittkurven der Polarebenen λ', μ von $L \equiv M'$ mit der Punkt-Kernfläche liegen auf dem Kegel des Kernkomplexes aus diesem Punkte (Nr. 523). Diese Kurven zerfallen in unserm Falle immer, also muß auch der Kernkomplex sich zerspalten. Der Schnittpunkt xy, mit τ_1, eines Strahl von H aus $L \equiv M'$ liegt in μ und der Schnitt $x'y'$ mit τ_2' in λ'; bei H^* umgekehrt. Die Nullebenen des Punktes $L \equiv M'$ in bezug auf H und H^* gehen also nach den Schnittlinien von τ_1 mit μ und λ' und nach denen von τ_2 mit λ' und μ. Sie sind daher zwei Diagonalebenen des Bündelvierflachs, das durch τ_1, τ_2 und die beiden Polarebenen λ', μ gebildet wird und dessen Scheitel der Punkt U von u ist, durch den der Wechselstrahl $\lambda'\mu$ geht. Die dritte Diagonalebene verbindet diesen Wechselstrahl mit u. Ebenso bilden T_1, T_2 und die beiden Pole einer Ebene ein ebenes Viereck, von dem zwei Diagonalpunkte die Nullpunkte der Ebene in bezug auf H und H^* sind, während im dritten v mit dem Wechselstrahl der Ebene sich schneidet.

Nach der Eigenschaft des Vierflachs sind die Nullebenen des $L \equiv M'$ für H und H^* harmonisch zu den Ebenen aus ihrer durch $L \equiv M'$ gehenden Schnittlinie nach den in der dritten Diagonalebene gelegenen Gegenkanten $\lambda'\mu$ und u. Die erstere verbindet $L \equiv M'$ mit seinem Wechselstrahle, ist also die Nullebene dieses Punktes in bezug auf $\mathfrak{G}^p$ (Nr. 526); die andere diejenige in bezug auf das Gebüsche $[u]$.

Vier Gewinde eines Büschels sind (Nr. 535) harmonisch, wenn die vier Nullebenen eines Punktes es sind. Zu dem Büschel durch das Netz $[u, v]$ gehören $H, H^*, \mathfrak{G}^p, \mathfrak{G}^e, [u], [v]$. Also sind H, H^* zu $\mathfrak{G}^p$ und $[u]$ harmonisch und, dual, zu $\mathfrak{G}^e$ und $[v]$, daher die Doppelelemente der Involution $\mathfrak{G}^p, [u]$; $\mathfrak{G}^e, [v]$.

617 Zwei Gewinde in Involution (deren Nullräume vertauschbar sind) sind zu den Gebüschen ihres Büschels harmonisch (Nr. 535).

Erteilen wir also unserer Korrelation mit den Kernflächen $\tau_1\tau_2$, T_1T_2 noch die spezielle Eigenschaft, daß die den Kernkomplex zusammensetzenden Gewinde H, H^* in Involution sind, dann wird $\mathfrak{G}^p$ mit $[v]$, $\mathfrak{G}^e$ mit $[u]$ identisch.

Die Nullebene eines Punktes von v in bezug auf das Gebüsche $[v]$ ist unbestimmt, also, unter der jetzigen Voraussetzung, auch die in bezug auf $\mathfrak{G}^p$, d. h. der Wechselstrahl jenes Punktes ist unbestimmt, seine beiden Polarebenen, welche durch u gehen, sind vereinigt (ohne jedoch durch den Punkt zu gehen); und ebenso vereinigen sich die beiden Pole einer Ebene durch u in einem Punkte von v.

Wir wollen aber zu diesem interessanten Spezialfalle noch auf eine andere Weise gelangen. Wir setzen bei der Korrelation mit den Kernflächen $\tau_1\tau_2$, T_1T_2, wie in Nr. 614, voraus, daß einmal zwei Punkten $A \equiv B'$, $C \equiv D'$ die nämlichen Ebenen verkehrt entsprechen:

$$\alpha' \equiv \delta,\ \beta \equiv \gamma'$$

oder daß ein Zyklus 4. Grades vorliegt:

$$A, \alpha' \equiv \delta,\ D' \equiv C,\ \gamma' \equiv \beta,\ B' \equiv A.$$

Die Verbindungslinie der beiden Punkte sei e, die Schnittlinie der beiden Ebenen e_1, welche beiden Geraden also einander involutorisch entsprechen. Die Gerade e_1 trifft, als $\alpha'\beta$ oder $\gamma'\delta$, die $u = \tau_1\tau_2$, die e, als $D'A$ oder $B'C$, die $v = T_1T_2$.

Der Ebene ev entspricht der mit ihr inzidente Punkt e_1u, aber es entspricht nunmehr auch dem Punkte ev involutorisch die Ebene e_1u, weil die beiden sonst verschiedenen Ebenen, die sich in u schneiden, jetzt auch e_1 gemeinsam haben und sich vereinigen. Somit haben drei Punkte von v, nämlich T_1, T_2, ev involutorisch ihnen entsprechende Ebenen durch u, nämlich τ_1, τ_2, e_1u; die projektiven Büschel der Ebenen durch u, welche den Punkten von v in beiden Sinnen entsprechen, haben drei Koinzidenzen; also entspricht jedem Punkte von v involutorisch eine Ebene durch u, die jedoch im allgemeinen nicht durch ihn geht.

Jedem Strahle l des Netzes $[u, v]$ korrespondiert folglich involutorisch ein anderer Strahl l_1 desselben. Der Wechselstrahl eines Punktes P, einer Ebene π ist daher die Gerade, welche involutorisch dem mit P, π inzidenten Strahl des Netzes entspricht. Jeder Wechselstrahl trifft (ähnlich wie in Nr. 610) u, v, und jeder Strahl von $[u, v]$ ist Wechselstrahl für alle Punkte und Ebenen der involutorischen Polare. Durch die Unbestimmtheit der zu den Punkten und Ebenen von u, v gehörigen Wechselstrahlen wird das Netz $[u, v]$ zum Gebüschepaare $[u]$, $[v]$ erweitert.

Da nun e und e_1 auch Wechselstrahlen sind, trifft e auch u und e_1 auch v.

Wie in Nr. 614 ergibt sich, daß die Punkte $A \equiv B'$, $C \equiv D'$ auf e, die Ebenen $\alpha' \equiv \delta$, $\beta \equiv \gamma'$ durch e_1 in der windschiefen Involution (u, v) entsprechend sind.

Die Ebene ev geht durch den entsprechenden Punkt e_1u; das fordert, daß e durch diesen Punkt geht, weil sonst ev auch u enthielte, u und v aber windschief sind. Also treffen sich e und e_1 und zwar so, daß der Punkt ee_1 auf u liegt, die Ebene ee_1 durch v geht.

Es sei nun $K \equiv L'$, $M \equiv N'$ ein anderes Paar entsprechender Punkte der windschiefen Involution (u, v), $\varkappa'$, λ, μ', ν die Polarebenen, so folgt, ebenso wie in Nr. 614, daß $\lambda \equiv \mu'$, $\varkappa' \equiv \nu$ ist.

Wenn also bei unserer speziellen Korrelation mit den Kernflächen $\tau_1 \tau_2$, $T_1 T_2$ einmal zwei Punkte vertauschte Polarebenen haben (oder einmal zwei Ebenen vertauschte Pole), so sind zwei so zusammengehörige Punkte oder Ebenen entsprechend in der windschiefen Involution (u, v), und jede zwei entsprechenden Elemente dieser Verwandtschaft haben vertauschte polare Elemente in der Korrelation.

Jeder Strahl l oder l_1 von $[u, v]$ ist jetzt (auf ∞^1 Weisen) e oder e_1.

Also begegnen sich jede zwei involutorischen Polaren l, l_1 auf u, während die Ebene durch v geht. Sie entspricht dem Schnittpunkte. Durch diese involutorischen Polaren oder einfacher, durch die Punkte auf v und ihre involutorischen Polarebenen durch u entsteht auf v eine Involution doppelt konjugierter Punkte und, perspektiv zu ihr, um u eine Involution doppelt konjugierter Ebenen, so daß l und l_1 mit einem Paare der einen und der andern inzidieren. T_1, T_2, τ_1, τ_2 sind die Doppelelemente.

Damit subsumiert sich unser Spezialfall der partiellen involutorischen Korrelation (Nr. 566).

Für jeden Punkt oder jede Ebene von l oder l_1 ist die andere Gerade Wechselstrahl; der Büschel von einem Punkte auf l oder l_1 nach l_1 oder l, d. h. der Büschel des Strahlen aus ihm, welche eine Involution doppelt konjugierter Punkte tragen, liegt in der Ebene ll_1, die durch v geht; demnach ist $\mathfrak{G}^p$ identisch mit $[v]$, und ebenso $\mathfrak{G}^e$ mit $[u]$.

Der Büschel der Strahlen aus einem Punkte von τ_1, die zum Gewinde H oder H^* gehören, liegt, nach der Entstehung dieser Gewinde, in der einen oder andern Polarebene des Punktes; diese sind im vorliegenden Falle in (u, v) entsprechend. Wenn aber die Nullebenen irgend eines Punktes in bezug auf zwei Gewinde einander in der windschiefen Involution entsprechen, deren Axen die Leitgeraden des Schnitt-Strahlennetzes sind, so befinden sich die Gewinde in Involution.

Die Gewinde H und H^* sind also in Involution.

618 Und umgekehrt, wenn H und H^* in Involution sind, muß die oben vorausgesetzte Eigenschaft vorliegen. Auch wenn H und H^* nicht in Involution sind, bilden die beiden Polaren x', y eines Strahls $x \equiv y'$ in der Korrelation und die beiden Polaren z und $\bar{z}$, welche er in bezug auf die Gewinde H, H^* hat, ein windschiefes Vierseit, und Diagonalen desselben sind zwei Strahlen t_1, t_2 der Büschel (T_1, τ_1), (T_2, τ_2). Denn die Nullebene des Schnitts jenes Strahls mit τ_1 in bezug auf H ist seine Polarebene im zweiten Raume

und diejenige des Schnitts mit τ_2 in bezug auf H^* dessen Polarebene ebenfalls im zweiten Raume; ihre Schnittlinie ist x', und z und $\bar{z}$, in diesen Nullebenen bzw. liegend, werden von x' und ebenso von y getroffen. Zu den Gewinden H und H^* gehören die Büschel (T_1, τ_1), (T_2, τ_2); daher treffen die beiden Polaren z und $\bar{z}$ dieselben Strahlen t_1, t_2 dieser Büschel, welche von $x \equiv y'$ geschnitten werden, und weil alle Strahlen dieser Büschel in der Korrelation sich selbst entsprechen, so werden t_1, t_2 auch von x' und y getroffen. Und zwar treffen x' und z, beide in der Nullebene des Punktes xt_1 in Bezug auf H gelegen, in der auch t_1 liegt, die t_2 in ihrem Schnitte mit dieser Ebene; ebenso liegt $y\bar{z}$ auf t_2, und yz, $x'\bar{z}$ liegen auf t_1.

Nun sei $x \equiv y'$ ein Strahl von H, so fällt z mit ihm zusammen. Wenn H und H^* in Involution sind, gehört die Polare $\bar{z}$ in bezug auf H^* wieder zu H (Nr. 534). Weil $x \equiv y'$ zu H gehört, liegt xy in τ_1, also auf t_1, und $x'y'$ auf τ_2 und t_2. Nach dem obigen Ergebnisse sind t_1, t_2 die Diagonalen des Vierseits aus z und $\bar{z}$, wo z in vorliegendem Falle identisch mit $x \equiv y'$ ist, als den einen Gegenseiten und x', y als den andern, oder x', y sind die Diagonalen des Vierseits aus t_1, t_2 und z, $\bar{z}$. Die Polaren von $\bar{z}$ in bezug auf H und H^* sind nun ebenfalls $\bar{z}$ und z; ist also $\bar{z} \equiv r \equiv s'$, so sind r', s ebenfalls Diagonalen des Vierseits aus t_1, t_2 und z, $\bar{z}$; und da rs auf t_1 und $r's'$ auf t_2 liegen muß, so ist:

$$x' \equiv s, \quad y \equiv r'.$$

Folglich haben zwei Strahlen ($x \equiv y'$ und $r \equiv s'$) von H (H^*), welche polar sind in bezug auf H^* (H), in der Korrelation dieselben Polaren, aber verkehrt.

Es seien nunmehr X und X_1 zwei Punkte, welche in bezug auf H und H^* dieselbe Nullebene ξ haben, also, weil H und H^* in Involution sind, zwei entsprechende Punkte der windschiefen Involution (u, v); ist dann ξ_1 die der ξ entsprechende Ebene in dieser Involution, so ist diese Ebene Nullebene von X_1 und X in bezug auf H und H^*; d. h. es gehören (X, ξ) und (X_1, ξ_1) zu H und (X, ξ_1), (X_1, ξ) zu H^*. Die Polare jedes Strahls von (X, ξ) in bezug auf H^* befindet sich in (X_1, ξ_1). Wenn also $x \equiv y'$, $x_1 \equiv y_1'$ zwei Strahlen von (X, ξ) sind und ihre Polaren in bezug auf H^*, die in (X_1, ξ_1) sich befinden, $r \equiv s'$, $r_1 \equiv s_1'$; dann gilt für die Polaren x', y, x_1', y_1, r', s, r_1', s_1 in der Korrelation, daß:

$$x' \equiv s, \quad y \equiv r', \quad x_1' \equiv s_1, \quad y_1 \equiv r_1'.$$

Daher sind die Polarebenen von $X \equiv xx_1 \equiv y'y_1'$ die Ebenen $x'x_1'$, yy_1 und die Polarebenen von $X_1 \equiv rr_1 \equiv s's_1'$ die Ebenen $r'r_1'$, ss_1; aber es ist: Ebene $x'x_1' \equiv ss_1$, $yy_1 \equiv r'r_1'$; d. h. die beiden Punkte X, X_1 haben dieselben Polarebenen, aber verkehrt.

Wenn also bei unserer Korrelation mit den Kernflächen

$\tau_1 \tau_2$, $T_1 T_2$ noch der besondere Fall eintritt, daß die beiden Gewinde H, H^*, welche den Kernkomplex bilden, in Involution sich befinden, dann haben je zwei Punkte oder Ebenen, welche in der windschiefen Involution (u, v) entsprechend sind, dieselben (ebenfalls in (u, v) entsprechenden) polaren Elemente, aber verkehrt. Und die Gewinde $\mathfrak{G}^p$, $\mathfrak{G}^e$ sind in die Gebüsche $[v]$, $[u]$ ausgeartet.

619 Jetzt setzen wir umgekehrt eine Korrelation mit durchweg gepaarten Punkten (oder Ebenen) voraus, welche je dieselben Polarebenen (Pole), aber verkehrt haben.

Jedem Punkte $X \equiv Y'$ ist ein Punkt $X_1 \equiv Y_1'$ zugeordnet, derartig, daß für die vier Polarebenen gilt: $\xi' \equiv \eta_1$, $\eta \equiv \xi_1'$. Die Beziehung zwischen den beiden Punkten und die zwischen den beiden Ebenen ist Kollineation, und zwar diejenige, welche wir das Quadrat der Korrelation genannt haben (Nr. 525); denn X und Y_1' sind Pole derselben Ebene $\xi' \equiv \eta_1$ und η und ξ' Polarebenen desselben Poles $Y' \equiv X$. Diese Kollineation ist aber im vorliegenden Falle involutorisch; denn dieselben Punkte und Ebenen entsprechen sich auch im umgekehrten Sinne: als Y' und X_1 sind sie Pole von $\eta \equiv \xi_1'$ und als ξ_1' und η_1 Polarebenen von $X_1 \equiv Y_1'$.[1]) Folglich kann es sich nur um windschiefe Involution oder involutorische Homologie handeln. Jede Verbindungslinie zweier in dieser Kollineation entsprechender Punkte trägt eine Involution solcher Punkte, jede Schnittlinie zweier entsprechender Ebenen eine Involution solcher Ebenen. Es gibt Geraden, für welche das eine und das andere gilt. Ist nämlich $X \equiv Y'$ ein Punkt der Punkt-Kernfläche, so berühren ξ', η die Ebenen-Kernfläche und sind mit ihm inzident; der Pol $Y_1' \equiv X_1$ der mit ihnen identischen Ebenen η_1, ξ_1' liegt daher auch auf jener Kernfläche und ist mit ihnen inzident. Folglich ist die Verbindungslinie der beiden Punkte mit der Schnittlinie der beiden Ebenen identisch und sich selbst entsprechend in der Korrelation: als XX_1 (oder $Y'Y_1'$) und $\xi'\xi_1'$ (oder $\eta\eta_1$). Wir erhalten so ∞^1 Geraden, den beiden Kernflächen gemeinsam, welche Geraden von beiden Arten sind. Daraus folgt, daß es sich nur um windschiefe Involution handeln kann; denn bei der involutorischen Homologie sind die Geraden durch das Zentrum von der einen und die in der Ebene der Homologie von der andern Art, und gemeinsame Geraden sind nicht vorhanden.

Das Quadrat unserer Korrelation ist also eine windschiefe Involution. Wenn $X \equiv Y'$ auf eine der Axen der windschiefen Involution fällt, so vereinigt er sich mit $X_1 \equiv Y_1'$; so daß zu: $\xi' \equiv \eta_1$, $\eta \equiv \xi_1'$ noch tritt: $\xi' \equiv \xi_1'$, $\eta \equiv \eta_1$; also $\xi' \equiv \eta$. Folglich

---

1) Das Quadrat einer zyklischen Korrelation 4. Grades muß eine zyklische Kollineation 2. Grades sein, also eine involutorische.

entspricht jedem Punkte oder jeder Ebene einer Axe involutorisch dieselbe Ebene oder derselbe Punkt.

Jedem Leitstrahle dieser windschiefen Involution und seiner Involution von Punkten entspricht ein anderer in der Korrelation involutorisch und seine Involution von Ebenen, von welcher jedes Paar einem Paare der vorigen zugeordnet ist.

Aus dieser involutorischen Paarung der Leitstrahlen folgt dann für die Axen der Involution, daß entweder jede sich selbst entspricht oder daß sie einander involutorisch entsprechen.

Im ersteren Falle wollen wir die Axen m, n nennen. Jedem Punkte von m entspricht involutorisch eine Ebene, die durch m geht und sich projektiv zu ihm bewegt. Also entsteht auf n eine zu der Punktreihe auf m projektive Punktreihe, und die einem Punkte auf n involutorisch entsprechende Ebene geht durch n und den dem Punkte in dieser Projektivität entsprechenden Punkt auf m. Die Verbindungslinie so entsprechender Punkte ist identisch mit der Schnittlinie der ihnen in der Korrelation entsprechenden Ebenen, also sich selbst entsprechend. Dies sind die oben erwähnten sich selbst entsprechenden Geraden, welche den Kernflächen gemeinsam sind; sie erzeugen in diesem Falle eine Regelschar. Dieselbe liegt auf beiden Kernflächen, und wir haben den in Nr. 614 behandelten Fall zyklischer Korrelation mit vereinigten Kernflächen vor uns. Die Axen m, n sind die sich selbst entsprechenden Geraden in der andern Regelschar.

Im andern Falle, wo die sich involutorisch entsprechenden Geraden u, v heißen mögen, entspricht jedem Punkt von u oder v involutorisch eine durch v oder u gehende Ebene. Ferner trifft jede Gerade l des Netzes $[u, v]$ die Leitgeraden in doppelt konjugierten Punkten und sendet nach ihnen doppelt konjugierte Ebenen. Folglich gehört dies Netz zu den Gewinden $\mathfrak{G}^p$, $\mathfrak{G}^e$. Die Gerade l hat wiederum, als Verbindungslinie zweier Punkte von u, v, eine ebenfalls dem Netz angehörende involutorische Polare l_1, in der die beiden involutorischen Polarebenen durch v, bzw. u sich schneiden. Für jeden Punkt von l gehen die eine wie die andere Polarebene durch die Schnittlinie l_1 der involutorischen Polarebenen von lu und lv, also ist l_1 sein Wechselstrahl. Die Nullebene des Punktes in bezug auf $\mathfrak{G}^p$ geht durch l_1; wäre l_1 zu l windschief, so würde, während der Punkt die l durchläuft, die mit ihm inzidente Nullebene um l_1 sich drehen, also Polare von l nach $\mathfrak{G}^p$ sein; da aber l zu $\mathfrak{G}^p$ gehört, würde sich l_1 mit l identisch ergeben; dann müßte l auf die Kernfläche fallen, welche doch höchstens ∞^1 Strahlen aus dem Netze enthalten kann; es ist l_1 im allgemeinen von l verschieden und kann daher nicht windschief gegen sie sein.

Folglich müssen l und l_1 sich schneiden; dann bleibt jene Nullebene fest, und l_1 wird nicht Polare von l in bezug auf $\mathfrak{G}^p$.

Dies Begegnen von l und l_1 muß dann auf einer der Geraden u, v erfolgen; nehmen wir an: auf u, so daß dann die Ebene ll_1 durch v geht und die dem Punkte ll_1 involutorisch entsprechende Ebene ist.

Wenn einem Punkte von u die Ebene von ihm nach v (involutorisch) entspricht, so ist er bei jedem Strahle l durch ihn in dieser Ebene gemeinsamer Punkt der Polarebenen von lu und lv, denn letztere geht durch u; d. h. l_1 geht auch durch ihn in dieser Ebene, und wir erhalten in dem Büschel eine Involution von Polaren l, l_1.

Die Stetigkeit fordert es, daß durchweg der Punkt ll_1 auf u liegt und die Ebene ll_1 durch v geht. Man braucht aber nur dreimal dies anzunehmen oder daß drei Punkten von u die durch sie gehenden Ebenen von v entsprechen; dann folgt es für alle Punkte von u. Dadurch kommt ein Unterschied in die Geraden u und v.

Irgend eine von den Involutionen ll_1 um einen Punkt von u in der entsprechenden Ebene durch v bewirkt dann auf v eine Involution von doppelt konjugierten Punkten lv, l_1v, und, perspektiv zu ihr, um u eine Involution von doppelt konjugierten Ebenen lu, l_1u. Perspektiv mit beiden sind die Involutionen ll_1 um die andern Punkte von u in den zugehörigen Ebenen durch v. Sind nun T_1, T_2; τ_1, τ_2 die Doppelelemente jener Involutionen auf v und um u, so sind die Doppelstrahlen dieser Involutionen ll_1 stets Strahlen der Büschel (T_1, τ_1), (T_2, τ_2). Als sich selbst entsprechende Geraden der Korrelation sind sie Geraden der Kernflächen. Wir sehen, die Kernflächen sind das Ebenenpaar τ_1, τ_2 und das Punktepaar T_1, T_2. Diese sich selbst entsprechen den Kernflächen gemeinsamen Geraden sind die Strahlen jener Büschel und bilden diesmal keine Regelschar.

Durch jeden Punkt X geht ein Strahl l von $[u, v]$; die Nullebene des X im Gewinde $\mathfrak{G}^p$ ist die Ebene nach dem Wechselstrahl l_1, also ll_1, so daß sie stets durch v geht und $\mathfrak{G}^p$ das Gebüsche $[v]$ ist. Ebenso ist $\mathfrak{G}^e$ das Gebüsche $[u]$.

Wenn also eine Korrelation so beschaffen ist, daß zu jedem Elemente (Punkt oder Ebene) ein zweites gleichartiges Element vorhanden ist, welches dieselben polaren Elemente besitzt, aber verkehrt, so sind so zusammengehörige Elemente entsprechend in einer windschiefen Involution, und die Korrelation ist entweder ein Spezialfall derjenigen mit vereinigten Kernflächen, wo dann die Axen der windschiefen Involution die sich selbst entsprechenden Geraden in derjenigen Regelschar der Kernfläche sind, in welcher nicht alle Geraden sich selbst entsprechen; oder sie ist ein Spezialfall der Korrelation, deren Kernflächen ein Ebenenpaar und ein Punktepaar sind; die Axen sind dann die Doppellinie u jenes und die Doppellinie v dieses Paars.[1])

Es läßt sich dartun, daß jede Korrelation, in der, wenn u und v windschief sind, der Punktreihe auf u involutorisch und perspektiv der Ebenenbüschel um v und der Punktreihe auf v involutorisch, aber nicht perspektiv, der Ebenenbüschel um u entspricht, von dieser zweiten Art ist.

§ 92. Metrische Eigenschaften der Korrelation. Parabolische Korrelation.[2])

Bei zwei korrelativen Bündeln wurden die beiden entsprechenden dreirechtwinkligen Dreikante gefunden, indem zuerst festgestellt wurde daß in jedem der beiden Bündel drei Strahlen existieren, welche so beschaffen sind, daß jedem von ihnen und der zu ihm senkrechten Ebene ebenfalls normale Elemente im andern Bündel entsprechen; es wurde dann weiter erkannt, daß diese drei Strahlen und die zu ihnen senkrechten Ebenen ein dreirechtwinkliges Dreikant bilden (Nr. 340). 620

Liegen nun zwei korrelative Räume vor und sind O, P' ihre Mittelpunkte, welche je der unendlich fernen Ebene ω', π des andern Raums entsprechen, so werden, wie schon in Nr. 542 bemerkt wurde, die Bündel um diese Punkte, die endlich vorausgesetzt werden, korrelativ, und zwar so, daß jedem Elemente (Strahl, Ebene) von O dasjenige Element (Ebene, Strahl) von P' korrespondiert, das nach dem jenem in der räumlichen Korrelation entsprechenden unendlich fernen Elemente (Strahl, Punkt) geht; und diesem Elemente entspricht das unendlich ferne von jenem. Nehmen wir aus diesen beiden Bündeln O, P' die entsprechenden dreirechtwinkligen Dreikante:

$$rst \equiv \rho\sigma\tau, \quad \rho'\sigma'\tau' \equiv r's't',$$

wo r und $\rho, \ldots$ normal sind.

Der $r(r')$ entspricht in der räumlichen Korrelation die unendlich ferne Gerade von $\rho'(\rho)$, nach deren Pole im absoluten Polarfelde die $r'(r)$ geht. Den Punkten von $r(r')$ entsprechen also Ebenen, welche auf $r'(r)$ normal sind; und dasselbe gilt für s und s', t und t'.

Umgekehrt, wenn r und r' so beschaffen sind, daß den Punkten einer jeden von ihnen Ebenen korrespondieren, welche auf der andern normal sind, so müssen diese Geraden, weil ihnen unendlich ferne Geraden entsprechen, durch die Mittelpunkte O, P' gehen. In der

1) Montesano hat den ersten Fall in der Abhandlung von 1885 noch nicht erwähnt und in einer Korrespondenz mit mir, in der ich ihn auf diesen andern Fall zyklischer Korrelation 4. Grades aufmerksam machte, ihn selbst abgeleitet.

2) Segre, Giornale di Matematiche, Bd. 25, S. 20.

Korrelation der Bündel um diese entspricht der Gerade r und der zu ihr senkrechten Ebene, welche in der räumlichen Korrelation dem unendlich fernen Punkt von r' korrespondiert, die zu r' senkrechte Ebene, dem unendlich fernen Punkt, von r entsprechend, und r'. Folglich gehören unsere Geraden r und r' zu den beiden entsprechenden dreirechtwinkligen Dreikanten der korrelativen Bündel O, P'; und die drei bei ihnen sich ergebenden Paare r, r'; s, s'; t, t' — alle drei reell — sind die einzigen Paare von Geraden mit der Eigenschaft, daß den Punkten einer jeden der Geraden eines Paares Ebenen in der Korrelation entsprechen, welche zur andern normal sind.

Man nennt sie die Axenpaare der Korrelation; bei der Polarkorrelation vereinigen sich zwei zusammengehörige je in eine Axe der Basisfläche.

Weil der Gerade r und der unendlich fernen Gerade $\rho\pi$ von ρ die unendlich ferne Gerade $\rho'\omega'$ von ρ' und r' korrespondieren, so geht durch die Korrelation ein Gewinde, welches r zur Axe hat, über in ein Gewinde mit r' als Axe. Und die beiden Büschel von koaxialen Gewinden um r und r' werden, ähnlich wie in Nr. 574, projektiv; wir bestimmen die einzelnen Gewinde, wie dort, durch die Parameter k, k' (Nr. 533) und haben die bilineare Relation:

$$\lambda k k' + \mu k + \mu' k' + \nu = 0.$$

Diesmal aber entsprechen den Gebüschen $[r]$ und $[\rho\pi]$ mit den Parametern $k = 0, \infty$ die Gebüsche $[\rho'\omega']$ und $[r']$ mit den Parametern $k' = \infty, 0$. Also reduziert sich die Relation auf: $\lambda k k' + \nu = 0$ oder:

$$k k' = -\frac{\nu}{\lambda}.$$

Das Produkt der Parameter zweier entsprechender Gewinde aus jenen Büscheln ist konstant. Also:

Das Produkt der Parameter zweier entsprechender Geraden einer räumlichen Korrelation in bezug auf zwei Axen eines Paares ist konstant.

621 Wir wollen dazu noch auf eine andere Weise gelangen, welche zugleich den Wert der Konstante liefert. Wir machen die beiden dreirechtwinkligen Dreikante rst, $r's't'$ zu Koordinatensystemen. In jedem von zwei Punkten auf r und r' (der x- und der x'-Axe), die in der Korrelation konjugiert sind, steht die dem andern polare Ebene senkrecht auf der betreffenden Axe. Diese Punkte sind entsprechend in projektiven Punktreihen, von denen O, P' die Fluchtpunkte sind; die Potenz sei Π_r. Sind x, x' die Koordinaten solcher konjugierten Punkte, so ist $xx' = \Pi_r$. Jede dieser Koordinaten kann man aber auch als Axenabschnitt der Polarebene des andern Punktes auffassen. Ebenso ist bei s, s', bzw. t, t': $yy' = \Pi_s$, $zz' = \Pi_t$. Diese Potenzen sind

Größen, die erst dann bestimmte Vorzeichen haben, wenn positive Sinne auf die Koordinatenaxen gelegt sind.

Durch einen beliebigen Punkt (x, y, z) in Σ legen wir die drei Ebenen senkrecht zu den Axen r, s, t, von denen sie also die Strecken x, y, z abschneiden; ihnen entsprechen auf r', s', t' Punkte mit den Koordinaten x', y', z'; das sind dann auch die Abschnitte der Ebene, welche dem (x, y, z) polar ist. Somit haben wir zwischen den Koordinaten x, y, z eines Punktes in Σ (oder x', y', z' eines Punktes in Σ') und den Axenabschnitten x', y', z' (bzw. x, y, z) der zu ihm polaren Ebene die Beziehungen:

$$xx' = \Pi_r, \quad yy' = \Pi_s, \quad zz' = \Pi_t.$$

Durch die beiden Dreikante mit zugeordneten Axen und die drei Potenzen Π_r, Π_s, Π_t der Projektivitäten konjugierter Punkte auf zugeordneten Axen (d. h. je ein Paar konjugierter Punkte) ist die Korrelation vollständig bestimmt. Für die drei Ebenen durch einen Punkt X, senkrecht zu den Axen r, s, t, haben wir ihre Pole auf r', s', t' und in deren Verbindungsebene die Polarebene $\mathfrak{x}'$ von X. Wir können diese Gleichungen die kanonischen Gleichungen der Korrelation nennen[1]).

Wir haben in Nr. 574 den Parameter einer Gerade g in bezug auf eine Koordinatenaxe, die x-Axe, ausgedrückt durch die Koordinaten der Punkte $(x, y, 0)$, $(x_1, 0, z_1)$, in denen sie die beiden in dieser Axe sich schneidenden Koordinatenebenen trifft; er war $\frac{yz_1}{x_1 - x}$.
Wir wollen ihn nunmehr ausdrücken durch die Axenabschnitte x, y; x_1, z_1 der beiden Ebenen, welche durch sie parallel zur z-, y-Axe gehen, je mit den andern Axen. Es seien jetzt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{z}_1)$ die Punkte, in denen g jene Koordinatenebenen trifft; die erste jener Ebenen trifft die xz-Ebene in einer Parallele durch $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{z}_1)$ zur z-Axe verbindet man deren Schnitt mit der x-Axe, der selbst den Abschnitt x liefert, mit dem Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, in dem g die xy-Ebene trifft, so erhält man den Axenabschnitt y; und ähnlich x_1, z_1. Man hat in der xy-Ebene:

$$\mathfrak{x}_1 = x, \quad y : y - \mathfrak{y} = x : x_1, \quad \text{also: } \mathfrak{y} = \frac{y(x - x_1)}{x};$$

und ebenso in der xz-Ebene:

---

1) Man kann natürlich auch x', y', z' durch $-\frac{1}{u'}, -\frac{1}{v'}, -\frac{1}{w'}$ ersetzen, wo u', v', w' die Koordinaten der Ebene sind, die dem Punkte (x, y, z) entspricht, oder x, y, z durch $-\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}, -\frac{1}{w}$. — Gleichungen, zu denen Koordinatensysteme führen, welche in einer gegebenen Figur sich von selber darbieten, sind Eigenschaften derselben, welche auch die synthetische Behandlung zu berücksichtigen hat.

$$\mathfrak{x} = x_1, \quad z_1 : z_1 - \mathfrak{z}_1 = x_1 : x, \quad \text{also: } \mathfrak{z}_1 = \frac{z_1(x_1 - x)}{x_1}.$$

Folglich ist der Parameter:

$$\frac{\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}} = \frac{(x_1 - x) y z_1}{x x_1}.$$

Wenn nun g in Σ die xy- und die yz-Ebene wieder in $(x, y, 0)$ und $(x_1, 0, z_1)$ trifft, so entsprechen diesen Punkten in Σ' Ebenen, welche die Axenabschnitte x', y', ∞; x_1', ∞, z_1' haben; ihre Schnittlinie ist die g'. Der Parameter von g in bezug auf die x-Axe oder r ist:

$$\frac{y z_1}{x_1 - x};$$

derjenige von g' in bezug auf die x'-Axe oder r' ist:

$$\frac{(x_1' - x') y' z_1'}{x' x_1'};$$

weil aber $x x' = x_1 x_1' = \Pi_r$, $y y' = \Pi_s$, $z_1 z_1' = \Pi_t$, so geht dieser Ausdruck über in:

$$-\frac{\Pi_s \Pi_t}{\Pi_r} \cdot \frac{x_1 - x}{y z_1}.$$

Folglich ist das Produkt der beiden Parameter in bezug auf r und r'

$$-\frac{\Pi_s \Pi_t}{\Pi_r};$$

und in den beiden andern Fällen ergeben sich die Produkte:

$$-\frac{\Pi_t \Pi_r}{\Pi_s}, \quad -\frac{\Pi_r \Pi_s}{\Pi_t}.$$

Da jede Korrelation mit endlichen Mittelpunkten in einen Polarraum übergeführt werden kann und die Bewegung des einen Raumes an den hier in Frage kommenden Größen nichts ändert, so kann man, wenn man will, zunächst den Satz für den einfacheren Fall des Polarraums beweisen und auf den allgemeinen Fall übertragen.

Was die Vorzeichen anlangt, so wollen wir die positiven Sinne auf den Koordinatenaxen so bestimmen, daß alle drei Potenzen Π_r, Π_s, Π_t positiv sind; dann sind unsere Parameter Produkte negativ; und wir schließen, wie in Nr. 574, daß, je nachdem die beiden Koordinatensysteme gleich oder ungleich orientiert sind, die von entsprechenden Geraden g und g' berührten Schraubenlinien um zusammengehörige Axen r und r', ... ungleiche oder gleiche Windung haben.

Decken sich aber, wie beim Polarraum, die beiden Dreikante, so daß natürlich r und r', ... je denselben positiven Sinn haben, dann haben Π_r, Π_s, Π_t, die Halbaxen-Quadrate der Basisfläche, bestimmte von diesem Sinne unabhängige Vorzeichen. Die Koordinatensysteme sind selbstverständlich gleich orientiert.

Beim Ellipsoide und zweimanteligen Hyperboloide sind dann alle drei Produkte negativ, beim einmanteligen Hyperboloide und bei der reell-imaginären Fläche alle drei positiv. In jenen Fällen haben also zwei polare Geraden in bezug auf eine Axe Parameter von ungleichem Vorzeichen, die berührten Schraubenlinien sind ungleich gewunden, in diesen Fällen haben die Parameter gleiche Vorzeichen und die berührten Schraubenlinien gleiche Windung. Bei den zu sich selbst polaren Geraden des einmanteligen Hyperboloids werden die Produkte Quadrate. Alle Geraden des einmanteligen Hyperboloids haben in bezug auf eine Axe denselben Parameter, die Geraden der einen Regelschar von dem einen, die der andern von dem andern Vorzeichen; die absoluten Werte sind $\frac{bc}{a}, \frac{ca}{b}, \frac{ab}{c}$, wenn $a^2, b^2, -c^2$ die Halbaxen-Quadrate sind.

Der erstere Beweis, in welchem die beiden Büschel koaxialer Gewinde um zusammengehörige Axen benutzt werden, setzt nicht voraus, daß die Mittelpunkte der Korrelation endlich sind, wohl aber der andere. 622

Wir wenden uns jetzt zu dem Falle der parabolischen Korrelation, bei welcher die Mittelpunkte unendlich fern sind. Ihm subsumiert sich der Nullraum und der Polarraum in bezug auf ein Paraboloid.

Bei der parabolischen Korrelation gibt es ein Paar endlicher Axen r, r'. Wenn o, p' die Polaren der Mittelpunkte im absoluten Polarfelde und r, r' die Polaren, in der räumlichen Korrelation, von p', o sind, so sind dies die Axen; sie gehen nach O, P'. In den genannten Fällen vereinigen sie sich in der Axe des Nullraums, bzw. des Paraboloids.

Die projektiven Punktreihen $(r), (r')$ der konjugierten Punkte auf r, r' sind ähnlich, beim Nullraum identisch, also gleich. Eine parabolische Korrelation, bei welcher $(r), (r')$ nicht gleich sind, kann daher durch Verlegung des einen Raums nicht in einen Nullraum übergeführt werden. Und ähnlich schließen wir, daß eine parabolische Korrelation, bei der die projektiven Ebenenbüschel $(r), (r')$ der konjugierten Ebenen durch r, bzw. r' nicht gleich sind, nicht in einen Nullraum übergeführt werden kann.

Beim Polarraum in bezug auf ein Paraboloid bilden die konjugierten Punkte auf der Axe eine gleichseitig-hyperbolische Involution, mit dem Scheitel als endlichem Doppelpunkte, also zwei gleiche Punktreihen, die konjugierten Ebenen durch die Axe aber bilden eine beliebige Involution, hyperbolisch, elliptisch, je nach der Art des Paraboloids. Wenn also bei einer parabolischen Korrelation die

Punktreihen (r) und (r') nicht gleich sind, so ist die Überführung in den Polarraum in bezug auf ein Paraboloid nicht möglich.

Nun sei eine parabolische Korrelation vorgelegt, bei welcher die Punktreihen (r), (r') gleich sind. Dann legt man dieselben so aufeinander, r' auf r, daß sie ungleichsinnig werden; sie bilden eine gleichseitig-hyperbolische Involution. Es seien A, B zwei gepaarte Punkte dieser Involution; so sind die Ebenen α, β, welche in B, A auf $r(\equiv r')$ senkrecht stehen, die Polarebenen von A, B, je in beiderlei Sinne; ihr unendlich ferner Schnitt $o(\equiv p')$ ist involutorische Polare von r. Die projektiven Ebenenbüschel (r), (r') machen wir nun durch Drehung um r involutorisch (am besten, indem wir die entsprechenden rechten Winkel verkehrt zur Deckung bringen); sind dann γ, δ irgend zwei gepaarte Ebenen dieser Involution, so sind die Schnitte C, D je der andern Ebene mit o die Pole in beiderlei Sinne. $ABCD = \alpha\beta\gamma\delta$ ist ein Polartetraeder geworden und die Korrelation Polarraum.

Eine parabolische Korrelation, bei welcher die beiden Punktreihen (r), (r') gleich sind, kann immer in einen Polarraum übergeführt werden.

Durch die Aufeinanderlegung der Punktreihen (r), (r'), durch welche sie ungleichsinnig werden, wird über das Verhalten der Sinne der Ebenenbüschel verfügt; sie werden entweder gleichsinnig oder ungleichsinnig, die Involution also elliptisch oder hyperbolisch und das Paraboloid ebenfalls elliptisch oder hyperbolisch.

Nehmen wir weiter an, daß diese Ebenenbüschel auch gleich sind, so wird im ersten Falle die Involution rechtwinklig, das Paraboloid ein Rotationsparaboloid, im zweiten sind die beiden Büschel von selber involutorisch und zwar gleichseitig-hyperbolisch; eine Drehung ist nicht erforderlich; die Doppelebenen, von den Stellungen der Leitebenen der einen und der andern Regelschar, sind rechtwinklig: das Paraboloid ist gleichseitig.

In diesem letzteren Falle, in dem die gleichen Punktreihen und Ebenenbüschel (r), (r') gleichzeitig ungleichsinnig sind, können sie auch gleichzeitig gleichsinnig gemacht werden; es kann dann durch Schiebung, bzw. Drehung beidemal Identität erreicht werden. Jeder Punkt auf r, weil sich selbst konjugiert, hat dann in der Ebene, welche in ihm auf r senkrecht steht, seine involutorische Polarebene, jede Ebene durch r, weil sich selbst konjugiert, in dem Punkt, in dem sie o schneidet, ihren involutorischen Pol. Folglich liegt ein Nullraum vor (Nr. 528). Seine Axe ist r. Also:

Jede parabolische Korrelation, bei welcher sowohl die Punktreihen als die Ebenenbüschel (r), (r') gleich sind, und zwar so, daß durch Vereinigung von r' mit r die Punktreihen und die Ebenenbüschel zugleich ungleichsinnig oder zugleich gleichsinnig sind, läßt sich sowohl in den Polarraum in bezug auf ein gleichseitiges Paraboloid, als auch in einen Nullraum überführen. Oder wenn die eine Überführung möglich ist, ist es auch die andere.

Nimmt man mit dem einen Raume Σ' eine solche symmetrische 623
Transformation in Σ_1' vor, bei der der Sinn sich ändert, also Symmetrie in bezug auf eine Ebene oder in bezug auf einen Punkt, wodurch r' in r_1' übergehe, und r und r_1' die Axen der parabolischen Korrelation zwischen Σ und Σ_1' werden, so geht eine Schraubenlinie um r' in eine Schraubenlinie um r_1' von anderer Windungsart über; daraus folgt, daß, wenn bei Vereinigung von r und r' die Punktreihen und Ebenenbüschel sich gleichartig verhalten, bei der von r und r_1' sie sich ungleichartig verhalten werden. Die Korrelation zwischen Σ und Σ_1' kann also in den Polarraum in bezug auf ein Rotationsparaboloid übergeführt werden.

Als einfache Spezialfälle haben wir:

Es sei ein Nullraum gegeben; man spiegele den einen Raum in bezug auf eine Ebene ω, welche senkrecht zur Axe r ist, oder in bezug auf einen Punkt O, der auf der Axe liegt; dadurch gehen die Axe und alle Ebenen durch sie in sich selbst über, die Identität auf r aber in eine gleichseitig-hyperbolische Involution, von welcher ωr oder O der endliche Doppelpunkt ist. Sodann vollziehe man eine Drehung des einen Raums um 90^0 um die Axe, wodurch die beim vorigen Prozeß noch erhaltene Identität des Büschels r in eine rechtwinklige Involution übergeht; die Beziehung ist nun Polarraum in bezug auf ein Rotationsparaboloid geworden; der Scheitel ist ωr oder O. Wenn diese Punkte identisch sind, so führen die Spiegelung in ω und Drehung in dem einen, Spiegelung in bezug auf O und Drehung in dem andern Sinne ersichtlich zu demselben Ergebnis.

Das Gewinde des Nullraums sei etwa rechtsgewunden; die Axe sei die x-Axe eines (rechtwinkligen) Koordinatensystems, bei welchem der Sinn von $+y$ nach $+z$ (aus $+x$ betrachtet) der der Uhrzeigerdrehung ist; wir betrachten den Punkt $(-x, p, 0)$, wo x und p positiv sind; das Lot p aus ihm auf die x-Axe ist das kürzeste Lot zwischen dieser und dem Strahl des Gewindes, welcher in dem Punkte den durch ihn gehenden Rotationszylinder um die Axe berührt. Die Parallele zu ihm durch den Fußpunkt des Lotes auf der Axe (in der xz-Ebene gelegen) muß diese unter dem Winkel φ schneiden, wo $p \operatorname{tang} \varphi$ gleich dem (positiven) Parameter k des Gewindes ist, und zwar so, daß sie der positiven z-Axe begegnet, weil das Gewinde rechtsgewunden ist. Jene Parallele ist die Spur, in der xz-Ebene, der Nullebene von $(-x, p, 0)$. Dieser Punkt geht durch die Spiegelung an der yz-Ebene und Drehung im Sinne der Uhrzeigerdrehung (von $+x$

her betrachtet) in den Punkt $(+x, 0, p)$ über. Wenn nun x so beschaffen ist, daß $(+x, 0, p)$ auf jene Nullebene, also ihre Spur fällt, so kommt er auf die Meridianparabel des Rotationsparaboloids in der xz-Ebene zu liegen. Es muß $\frac{p}{2x} = \operatorname{tang}\varphi = \frac{k}{p}$ sein oder $p^2 = 2kx$. Dies ist die Gleichung der Meridianparabel (mit p und x als Koordinaten). Sie lehrt, daß die positive x-Axe im Innern liegt und daß der Parameter k des Nullraums der Halbparameter der Parabel ist.

Umgekehrt, wenn der Polarraum in bezug auf ein Rotationsparaboloid vorliegt, so führt die Spiegelung des einen Raums in bezug auf die Scheitel-Berührungsebene oder in bezug auf den Scheitel und Drehung um die Axe um 90^0 zu einem Nullraum.

Wenn wiederum ein Nullraum gegeben ist, so werde auf den einen Raum Symmetrie in bezug auf eine Gerade angewandt, welche die Axe rechtwinklig schneidet. Hierdurch werden beide Identitäten in der Punktreihe und im Ebenenbüschel der Axe verwandelt in gleichseitig-hyperbolische Involutionen; es ergibt sich der Polarraum in bezug auf ein gleichseitiges Paraboloid, für welches die Axe ebenfalls Axe und jene Gerade eine der Geraden auf ihm ist, die durch den Scheitel gehen; denn sie bleibt auch in der neuen Verwandtschaft sich selbst entsprechend, wie im Nullraum.

Und wird beim Polarraum in bezug auf ein gleichseitiges Paraboloid der eine Raum gespiegelt in bezug auf eine der Scheitelerzeugenden, so ergibt sich ein Nullraum, für welchen die Axe des Paraboloids ebenfalls Axe ist.[1])

624 In einer parabolischen Korrelation ist die unendlich ferne Ebene $\pi \equiv \omega'$ Berührungsebene der Ebenen-Kernfläche Φ_2 und diese ein Paraboloid.

Die von jener aus der Korrelation ausgeschnittene ebene Korrelation ist daher ausgeartet, mit den Polen O, P' als Zentren (Nr. 565); die Büschel (O, π) und (P, ω') sind projektiv; die parallelen Ebenen durch einen Strahl des einen, etwa (O, π), haben ihre Pole auf dem entsprechenden Strahle des andern.

Die Axen r, r' gehen nach O, P'; ist also ξ_0 eine Ebene durch r, so gehen die ihr parallelen ξ durch einen Strahl von (O, π); ihr Büschel ist projektiv zu der Polreihe auf dem entsprechenden Strahle von (P', ω') und zu dem Strahlenbüschel, welcher diese aus irgend einem Punkte U' projiziert, den wir am besten auf r' annehmen, weil dann die Ebene durch r' geht. Wir bestimmen die entsprechenden Elemente ξ und $U'X'$ durch die Entfernung $y = \xi_0\xi$ und die Tangente des Winkels $\varphi' = (r', U'X') = P'U'X'$. Wir haben durch die Projektivität die bilineare Relation:

---

1) Segre, a. a. O.; Hauck, Zeitschr. f. Math. und Phys. Bd. 31 S. 362; Th. Schmid, Monatshefte für Math. und Phys. Bd. 8 S. 267.

$$\lambda y \operatorname{tang} \varphi' + \mu y + \mu' \operatorname{tang} \varphi' + \nu = 0.$$

Der Pol von ξ_0, die durch r geht, liegt auf der Polare p' von r, der unendlich fernen Gerade der zu r' senkrechten Ebenen, also ist für ihn $\varphi' = \frac{\pi}{2}$; der Pol der unendlich fernen Ebene im Büschel ist P' und für ihn $\varphi' = 0$. Somit gehören zu $y = 0, \infty$ die Parameter $\operatorname{tang} \varphi' = \infty, 0$.

Folglich vereinfacht sich die Relation in:

$$\lambda y \operatorname{tang} \varphi' + \nu = 0$$

oder:

$$y \operatorname{tang} \varphi' = B.$$

Man kann die Vorzeichenbestimmung für y und φ' so einrichten, daß B positiv wird.

Diese Parameter y und φ' lassen sich anders deuten: y als kürzestes Lot zwischen einer Gerade g in ξ und r, das wir dann wieder mit $\overline{rg}$ bezeichnen, und φ' als Winkel der nach X' gehenden Polare g' von g mit r'; die Ebene $\xi_0' = (r', P'X_0'X')$ ist zu ξ_0 konjugiert und g', die nach X' geht, zu ihr parallel.

Für alle entsprechenden Geraden g und g', welche zu zwei bestimmten konjugierten Ebenen ξ_0, ξ_0', die bzw. durch r, r' gehen, parallel sind, gilt:

$$\overline{rg} \operatorname{tang} r'g' = B.$$

Dabei wechselt $\overline{gr}$, durch 0 gehend, sein Vorzeichen und $\operatorname{tang} r'g'$, durch ∞ gehend, tut es auch.

Ebenso hat $\overline{g'r'} \cdot \operatorname{tang} gr$ einen konstanten Wert.

Wenn die Büschel der konjugierten Ebenen ξ und ξ' um r und r' gleich sind, erstreckt sich die Konstanz noch weiter. Diese Büschel schneiden in die unendlich ferne Ebene die projektiven Büschel (O, π), (P', ω') ein; sind jene gleich, so sind in diesen die Tangenten der absoluten Kurve oder, reell, die dem absoluten Polarfelde angehörigen Involutionen entsprechend.

Wenn eine Ebene ξ um einen Rotationszylinder P^2, der r zur Axe und den Radius y hat, sich bewegt, so beschreibt der Pol X' in der unendlich fernen Ebene ω' eine Kurve 2. Ordnung $\mathfrak{C}'^2$. Da jenem in dem Büschel (O, π) die zum absoluten Polarfelde gehörige Involution zugehörig ist, so gehört zu dieser im Büschel (P', ω') die in ihm befindliche zum absoluten Polarfelde gehörige Involution; ferner sind r und π polar in bezug auf P^2, also sind p' und P' polar in bezug auf $\mathfrak{C}'^2$; sie sind es auch im absoluten Polarfelde. Dies bedeutet, daß der Kegel, welcher $\mathfrak{C}'^2$ aus irgend einem Punkte projiziert, ein Rotationskegel ist, dessen Axe nach P' geht, oder daß die Strahlen nach den verschiedenen Punkten von $\mathfrak{C}'^2$ mit r' einen konstanten Winkel φ' bilden. Liegt also g in einer Berührungsebene ξ des

Zylinders, so daß y seine konstante Entfernung von r ist, so ist auch der Winkel φ' der Polare g' mit r' fest. Die g werden nach und nach zu allen Ebenen ξ_0 durch r parallel und die g' zu den konjugierten ξ_0' durch r'; die obige Konstante $\overline{rg} \cdot \operatorname{tang} r'g'$ ist für alle ξ_0, ξ_0' die nämliche. Also:

Wenn bei einer parabolischen Korrelation die Ebenenbüschel um die Axen r, r', in denen konjugierte Ebenen einander entsprechen, gleich sind, so haben für alle Paare entsprechender Geraden g, g' die Produkte:

$$\overline{rg} \cdot \operatorname{tang} r'g' \quad \text{und} \quad \overline{r'g'} \cdot \operatorname{tang} rg$$

absolut konstante Werte. Es kann sich nur um die absoluten Werte handeln, weil die Vorzeichenbestimmung für $\overline{rg}\ldots$ willkürlich ist.

Speziell gilt:

Beim Nullraum, sowie bei dem Polarraum in bezug auf ein gleichseitiges oder ein Rotationsparaboloid ist das Produkt der Entfernung einer Gerade von der Axe in die Tangente des Winkels der polaren Gerade mit der Axe konstant.

625 Man kann diese Betrachtung noch etwas verallgemeinern, indem man die Axe r durch eine beliebige Parallele d zu ihr ersetzt. Wir wollen diese Parallelen zur Axe in der üblichen Weise Durchmesser nennen.

Die Ebene ξ_0 sei durch d gelegt und ξ bewege sich parallel zu ihr, je in der Entfernung y. Die Pole X' der verschiedenen Ebenen ξ liegen auf dem Strahle von (P', ω'), der dem Strahle von (O, π) entspricht, nach dem die Ebenen ξ gehen; derjenige X_0' von ξ_0 liegt diesmal auf der Polare d' von d, der unendlich fernen Gerade der Polarebenen δ' der Punkte von d. Jene unendlich ferne Polreihe der X' projizieren wir wieder aus einem beliebigen Punkte U' auf r' durch Strahlen x' eines Büschels (U', τ'). Als Repräsentant der Stellung δ' gelte die durch U' gehende Ebene, in welcher der den Punkt X_0' projizierende Strahl x_0' liegt. Als Parameter des Strahls x' im Büschel (U', τ') könnten wir $\frac{\sin r'x'}{\sin x_0'x'}$ nehmen; weil aber $\sin \delta'x' = \sin x'_0x' \cdot \sin(\delta', \tau')$, so ist $\frac{\sin r'x'}{\sin \delta'x'}$ dazu proportional und werde als Parameter genommen. Die Projektivität zwischen dem Ebenenbüschel der ξ und dem Strahlenbüschel der x' gibt:

$$\lambda y \frac{\sin r'x'}{\sin \delta'x'} + \mu y + \mu' \frac{\sin r'x'}{\sin \delta'x'} + \nu = 0;$$

zu ξ_0 oder $y = 0$ gehört x_0', der in δ' liegt, also $\frac{\sin rx'}{\sin \delta'x'} = \infty$, und zur unendlich fernen Ebene oder $y = \infty$ gehört $x' \equiv r'$, also $\frac{\sin r'x'}{\sin \delta'x'} = 0$;

folglich reduziert sich, wie oben, die bilineare Relation auf:

$$y \cdot \frac{\sin r x'}{\sin \mathfrak{d}' x'} = \text{konst.};$$

also ist, wenn $g \| \mathfrak{x}_0$ und daher $g' \| x'$ ist:

$$\overline{dg} \cdot \frac{\sin r' g'}{\sin \mathfrak{d}' g'} = \text{konst.}$$

Wenn also d ein Durchmesser der parabolischen Korrelation im Raume Σ ist und $\mathfrak{d}'$ die Stellung der Polarebenen seiner Punkte, wenn ferner g einer festen Ebene durch ihn parallel und g' die Polare ist, so hat

$$\overline{dg} \cdot \frac{\sin r' g'}{\sin \mathfrak{d}' g'}$$

konstanten Wert. Fällt d in die Axe r, so werden die Ebenen $\mathfrak{d}'$ zu r' normal und $\mathfrak{d}' g'$ ist Komplementwinkel zu $r' g'$.

Wir setzen nun wieder voraus, daß die Büschel (r) und (r') gleich sind, und lassen, $\mathfrak{x}_0$ um d drehend, $\mathfrak{x}$ einen Rotationszylinder um d umhüllen, so daß y konstant wird; diesem Zylinder entspricht, durch die Pole X' erzeugt, eine Kurve $\mathfrak{C}'^2$ in der unendlich fernen Ebene. Für diese ist im Büschel (P', ω') die zum absoluten Polarfelde gehörige Involution ebenfalls die zugehörige; daraus folgt, daß für den Kegel, der sie aus einem Punkte U' auf r' projiziert, dieser Strahl r' Fokalaxe ist (Nr. 343). Ferner, weil d und π in bezug auf den Zylinder polar sind, so sind es d' und P' in bezug auf $\mathfrak{C}'^2$ und $\mathfrak{d}'$ und r' in bezug auf den Kegel, wenn $\mathfrak{d}'$ die durch den Scheitel gehende Ebene von dieser Stellung ist. Schneidet man also den Kegel mit einer zu r' normalen Ebene φ', so wird der Schnittpunkt R' mit r' Brennpunkt der Schnittkurve und die Schnittlinie l' mit $\mathfrak{d}'$ zugehörige Leitlinie (Polare). Für alle Punkte der Ebene φ' ist das Verhältnis der Entfernungen von l' und $\mathfrak{d}'$ konstant, für alle Punkte X_1' der Schnittkurve dasjenige der Entfernungen von R' und d', also auch das der Entfernungen von R' und $\mathfrak{d}'$, und daher für die Kanten x' des Kegels, welche nach den Polen X' gehen, das Verhältnis $\frac{\sin r' x'}{\sin \mathfrak{d}' x'}$ oder $\frac{\sin r' g'}{\sin \mathfrak{d}' g'}$, wenn g eine Gerade in einer der Tangentialebenen $\mathfrak{x}$ des Zylinders ist und g' die entsprechende Gerade, die zu x' parallel ist.

Sind also bei einer parabolischen Korrelation die beiden Büschel (r) und (r') gleich, so bleibt mit der Entfernung $\overline{dg}$ auch das Verhältnis $\frac{\sin r' g'}{\sin \mathfrak{d}' g'}$ fest, wo d ein Durchmesser und $\mathfrak{d}'$ die Stellung der Polarebenen seiner Punkte ist und g und g' entsprechende Geraden sind.

Stellen wir dies wiederum mit dem obigen Ergebnisse zusammen, so erhalten wir:

In dem genannten Spezialfalle hat $\overline{dg} \cdot \frac{\sin r'g'}{\sin \mathfrak{d}'g'}$ für alle Paare entsprechender Geraden g und g' denselben (absoluten) Wert.

In den bekannten involutorischen Fällen können wir schreiben:

$$\overline{dg} \cdot \frac{\sin dg'}{\sin \mathfrak{d}'g'}.$$

626 Ermitteln wir nun den Zusammenhang dieser Konstante k_d mit der spezielleren $k = \overline{rg} \cdot \operatorname{tang} r'g'$, die zu r gehört. Dazu betrachten wir die drei Parallelebenen ξ_r, ξ_d und ξ, welche durch r, d und g gehen, und die unendlich ferne Ebene π; ihr Doppelverhältnis $(\xi_r \xi_d \xi \pi)$ ist $\overline{rg} : \overline{dg}$. Die vier Pole sind X_r' auf p', X_d' auf d', X', P', und die projizierenden Strahlen des Büschels (U', τ') sind: der zu r' senkrechte Strahl $\mathfrak{r}'$, der Schnitt $\mathfrak{d}'$ mit δ', x' und r' selbst. Also ist absolut:

$$\overline{rg} : \overline{dg} = \frac{\sin \mathfrak{r}'x'}{\sin \mathfrak{d}'x'} : \frac{\sin \mathfrak{r}'r'}{\sin \mathfrak{d}'r'}$$

$$= \frac{\cos r'x'}{\sin \mathfrak{d}'x'} : \frac{1}{\sin \mathfrak{d}'r'}$$

$$= \frac{\cos r'x'}{\sin \delta'x'} : \frac{1}{\sin \delta'r'},$$

weil:

$$\sin(\tau', \delta') = \frac{\sin \delta'x'}{\sin \mathfrak{d}'x'} = \frac{\sin \delta'r'}{\sin \mathfrak{d}'r'};$$

also:

$$\overline{rg} : \overline{dg} = \frac{\cos r'g'}{\sin \delta'g'} : \frac{1}{\sin \delta'r'} = \frac{\sin r'g'}{\sin \delta'g'} : \frac{\operatorname{tang} r'g'}{\sin \delta'r'};$$

und

$$\overline{dg} \cdot \frac{\sin r'g'}{\sin \delta'g'} = \overline{rg} \cdot \operatorname{tang} r'g' \cdot \frac{1}{\sin \delta'r'};$$

$$k_d = \frac{k}{\sin \delta'r'}.$$

Die zum Durchmesser d gehörige Konstante k_d ist gleich der zur Axe r gehörigen k, dividiert durch $\sin \delta'r'$.

Um eine andere Beziehung zwischen k_d und k zu erhalten, denken wir uns die drei Parallelebenen ξ_r, ξ_d und ξ senkrecht auf die Ebene rd gestellt. Den beiden zueinander rechtwinkligen Ebenen rd und ξ_r sind, wegen unserer jetzigen Voraussetzung, zwei ebenfalls rechtwinklige Ebenen im Büschel (r') konjugiert; die letztere ist die Ebene des Büschels (U', τ'), die ja die Pole der Ebenen ξ enthält. Der Pol der Ebene rd ist der Schnitt $p'd'$; nach ihm geht die der rd konjugierte Ebene im Büschel (r') und die Schnittlinie v' der Ebene δ' mit der in U' auf r' senkrechten Ebene. Weil v' zu r' normal ist, so ist die zur Ebene $v'r'$ (der konjugierten von rd) normale Ebene τ' auch zu v' und zu δ' normal. D. h. $\sphericalangle\ \mathfrak{d}'r' = \delta'r'$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{r}' = \delta'\mathfrak{r}'$.

Bilden wir die gleichen Doppelverhältnisse anders wie vorhin:

$$(\xi_d \xi \xi_r \pi) = (\mathfrak{d}' x' \mathfrak{r}' r'),$$

so ergibt sich:

$$\overline{dr} : \overline{gr} = \frac{\sin \delta'\mathfrak{r}'}{\sin x'\mathfrak{r}'} : \frac{\sin \delta' r'}{\sin x' r'},$$

$$= \operatorname{tang} x'r' : \operatorname{tang} \delta' r'$$

$$= \operatorname{tang} g'r' : \operatorname{tang} \delta' r';$$

also:

$$\overline{dr} = \overline{gr} \cdot \frac{\operatorname{tang} g'r'}{\operatorname{tang} \delta' r'}.$$

Nun ist:

$$k_d^{\,2} = k^2 + \frac{k^2}{\operatorname{tang} \delta' r'^2}$$

$$= k^2 + \frac{\overline{rg}^2 \operatorname{tang} r'g'^2}{\operatorname{tang} \delta' r'^2};$$

daher ist:

$$k_d^{\,2} = k^2 + \overline{dr}^2,$$

wo $\overline{dr}$ die Entfernung der beiden Parallelen d und r ist.

Kehren wir zu dem allgemeinen Falle zurück, in dem die Projektivität der Büschel (r) und (r') eine beliebige ist. Wir haben dann in ihnen zwei entsprechende rechte Winkel $\sigma\tau$, $\sigma'\tau'$. 627
Wenn die Mittelpunkte O, P' endlich sind, so gehören diese Winkel zu den entsprechenden dreirechtwinkligen Dreikanten, und die andern Axen s, s'; t, t' sind die Schnitte $\tau\rho$, $\tau'\rho'$; $\sigma\rho$, $\sigma'\rho'$. Die Ebene ρ verbindet O mit der Gerade, welche dem unendlich fernen Punkte von r im absoluten Polarfelde zugehört, fällt also bei der parabolischen Korrelation in die unendlich ferne Ebene, und ebenso ρ'; also sind die andern Axen unendlich fern in den Ebenen τ, τ'; σ, σ'. Nehmen wir nun diese Ebenen τ, σ; τ', σ' als xy-, xz-; $x'y'$-, $x'z'$-Ebenen von zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen, deren Anfangspunkte in entsprechende Punkte der ähnlichen Punktreihen auf r, r' fallen.

Durch den Punkt (x, y, z) legen wir wieder die Ebenen senkrecht zu den drei Axen in Σ; die zu r senkrechte ξ hat ihren Pol X' auf r' im konjugierten Punkte zum Fußpunkte; sind x, ξ' die zugehörigen Koordinaten, von denen wir die letztere mit ξ' bezeichnen, weil sie Axenabschnitt der Polarebene von (x, y, z) wird und die Axenabschnitte in diesem Falle, wo die drei Axen nicht gleichartig erhalten sind, doch besser andere Namen als die Koordinaten bekommen, so haben wir wegen der Ähnlichkeit: $x = A\xi'$.

Die auf der y- und der z-Axe senkrechten Ebenen η, ζ sind parallel zu σ, τ und haben ihre Pole Y', Z' unendlich fern auf σ', τ'; wenn nun bei dem Büschel der Ebenen, die zu σ parallel sind, zur

Entfernung y der Winkel φ' und bei demjenigen der zu τ parallelen Ebenen zu z der Winkel ψ' gehört, wo dann y tang φ' und z tang ψ' die konstanten Werte B, C haben, so bilden die Spurlinien der Polarebene von (x, y, z) in σ', τ', welche X' mit Y', Z' verbinden, mit r' auch die Winkel φ', ψ' und schneiden von der z'-, y'-Axe die Abschnitte ζ', η' ab. Ersichtlich ist:

$$\operatorname{tang} \varphi' = \frac{\zeta'}{\xi'}, \quad \operatorname{tang} \psi' = \frac{\eta'}{\xi'};$$

wir treffen die Vorzeichenbestimmung für φ', ψ' so, daß diese Formeln auch dem Vorzeichen nach richtig sind. Hat der Winkel von dem Strahl der Richtung φ', der durch den Anfangspunkt gezogen ist, nach der x'-Axe den Sinn von $+x'$ nach $+z'$, so ist φ' positiv; und ähnliches gilt für ψ'. Somit haben wir:

$$x = A\xi', \quad y = B \cdot \frac{\xi'}{\zeta'}, \quad z = C \cdot \frac{\xi'}{\eta'}.$$

Das sind für die parabolische Korrelation und unsere Koordinatensysteme die Beziehungen zwischen den Koordinaten x, y, z eines Punktes in Σ und den Axenabschnitten ξ', η', ζ' seiner Polarebene (für welche auch deren Koordinaten u', v', w' eingeführt werden können). Wir nennen sie die kanonischen Gleichungen der parabolischen Korrelation.

Die Gerade g verbinde die Punkte $(xy0)$, $(x_1 0 z_1)$; deren Polarebenen haben die Axenabschnitte ξ', ∞, ζ'; ξ_1', η_1', ∞, wobei:

$$x = A\xi', \quad y = B\frac{\xi'}{\zeta'}; \quad x_1 = A\xi_1', \quad z_1 = C\frac{\xi_1'}{\eta_1'};$$

sie schneiden sich in g'.

Der Parameter von g in bezug auf r ist:

$$\frac{y z_1}{x_1 - x} = \frac{BC\xi'\xi_1'}{A\zeta'\eta_1'(\xi_1' - \xi')},$$

der von g' in bezug auf r' ist:

$$\frac{(\xi' - \xi_1')\zeta'\eta_1'}{\xi'\xi_1'},$$

wobei zu beachten ist, daß hier die Ebenen in umgekehrter Reihenfolge zu den Koordinatenaxen parallel sind, als in Nr. 621.

Das Produkt beider Parameter ist:

$$-\frac{BC}{A};$$

und damit ist die Konstanz des Parameterprodukts zweier entsprechender Geraden in bezug auf die Axen auch für die parabolische Korrelation in der zweiten Weise erkannt. Die Bedeutung von A, B, C ist oben erläutert; man kann die Vorzeichenbestimmung so treffen, daß A, B, C alle drei positiv sind. Das Parameterprodukt ist dann negativ, und wir schließen, wie in Nr. 621, daß, je nachdem die Koordinatensysteme mit den so festgelegten Sinnen gleich oder ungleich orientiert sind, die von entsprechenden Geraden g und g' berührten Schraubenlinien um r und r' ungleiche oder gleiche Windung haben.

Für den Fall gleicher Ebenenbüschel (r), (r') folgt aus der Konstanz von $k = \overline{rg} \operatorname{tang} r'g'$ die Konstanz von $k_1 = \overline{r'g'} \operatorname{tang} rg$; ihr Produkt ist die jetzige Konstante. In diesem Falle sind B, C beide absolut gleich k; wir haben also absolut:

$$kk_1 = \frac{k^2}{A}$$

und daher $k : k_1 = A$, d. h. gleich dem Ähnlichkeitsverhältnis der Punktreihen (r), (r').

Beim Polarraum eines Paraboloids hat sich r' mit r in der Axe vereinigt, τ' mit σ in der einen, σ' mit τ in der andern Hauptebene, und daher die y'- und die z'-Axe mit der z- und der y-Axe. Anfangspunkt sei der Scheitel. Wegen der gleichseitig-hyperbolischen Involution auf der Axe ist $A = -1$. Eine zur y-Axe senkrechte Ebene η hat ihren Pol in der xy-Ebene, in dem Pol des Durchmessers der Hauptparabel, in dem sie diese Ebene schneidet Die positive x-Achse liege innerhalb dieser Parabel; der Parabelpunkt auf jenem Durchmesser sei (xy); man zieht die Gerade aus dem Scheitel nach dem Pole und findet leicht, unter Berücksichtigung der Vorzeichenbestimmung für ihren Winkel φ mit der x-Axe: 628

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{y}{2x},^{1)} \quad B = y \operatorname{tang} \varphi = -\frac{y^2}{2x},$$

also gleich dem negativ genommenen Halbparameter der Parabel. Ebenso ergibt sich, je nach der Art des Paraboloids,

$$C = \mp \frac{z^2}{2x}.^{2)}$$

Aber da die z'-Axe auf die y-Axe und die y'-Axe auf die z-Axe gefallen, so haben wir — wenn wir alles auf das System der x, y, z beziehen, um für beide Polaren gleichartig gebildete Parameter zu erhalten — die obigen Formeln etwas zu modifizieren. Den Punkten $(xy0)$, $(x_1 0 z_1)$ von g sind polar die Ebenen (ξ', η', ∞), $(\xi_1', \infty, \zeta_1')$, auch bezogen auf jenes System. Es ist:

$$y = B\frac{\xi'}{\eta'}, \quad z = C\frac{\xi'_1}{\zeta'_1};$$

---

1) φ in der xy-Ebene ist gleich φ' in der $x'z'$-Ebene.

2) Beim Rotationsparaboloid ist $B = C$, beim gleichseitigen $B = -C$.

die beiden Parameter sind

$$\frac{BC\xi'\xi_1'}{A\eta'\zeta_1'(\xi_1'-\xi')} \quad \text{und} \quad \frac{(\xi_1'-\xi')\eta'\zeta_1'}{\xi'\xi_1'},$$

das Produkt also

$$\frac{BC}{A}.$$

Folglich ist, wegen $A = -1$, das konstante Produkt der Parameter zweier Polaren eines Paraboloids in bezug auf die Axe gleich dem Produkte der Halbparameter der beiden Hauptparabeln, negativ beim elliptischen, positiv beim hyperbolischen Paraboloide; so daß in jenem Falle die Polaren ungleich, in diesem gleich gewundene Schraubenlinien berühren. Für die Geraden des letzteren Paraboloids ist dann der Parameter in bezug auf die Axe gleich der einen oder der andern Wurzel aus dieser Konstante.

Beim Nullraume haben sich r und r' in der Axe vereinigt, und irgend zwei rechtwinklige Ebenen durch r sind $\sigma \equiv \sigma'$, $\tau \equiv \tau'$. Hier decken sich gleichnamige Koordinatenaxen, und es gilt wiederum der Ausdruck $-\frac{BC}{A}$. Die Punktreihen (r), (r') sind identisch; also $A = 1$. Weil die Büschel (r), (r') ebenfalls identisch sind, haben B, C absolut denselben, und zwar den für alle Stellungen durch r geltenden Wert $k = \overline{rg} \operatorname{tang} r'g'$ (Nr. 624). Also ist das auch dem Vorzeichen nach konstante Parameterprodukt absolut k^2. Aber es ist tatsächlich positiv; denn es gibt Strahlen, für welche die beiden Faktoren gleich werden, das Produkt ein Quadrat ist, nämlich die Strahlen des zugehörigen Gewindes. Folglich müssen B und C entgegengesetzte Vorzeichen haben. Um das zu erkennen, nehme man zwei Strahlen des Gewindes In Parallelebenen zu τ, σ in positiven Entfernungen y, z (Koordinatensystem von Nr. 623) von diesen Ebenen; die Parallelen aus dem Anfangspunkte zu den mit ihnen identischen Polaren sind daher zu ihnen selbst parallel, und beachtet man die konstante Windungsart sämtlicher Gewindestrahlen, so findet man, daß nur eine der beiden Parallelen in den Winkel der positiven Axen fällt, d. h., daß $\operatorname{tang} \varphi'$ und $\operatorname{tang} \psi'$ verschiedene Vorzeichen haben und daher auch $y \operatorname{tang} \varphi'$, $z \operatorname{tang} \psi'$.

Das Parameterprodukt ist andererseits kk_1; also hat

$$k_1 = \overline{rg'} \operatorname{tang} rg$$

denselben Wert wie k und zwar auch dem Vorzeichen nach; was ja auch durch $A = 1$ gefordert wird.

Hinsichtlich des Vorzeichens von k und k_1 kann man auch folgende Überlegung machen. Zwei Polaren g, g' sind parallel zu einer Ebene ξ_0 durch r, einer Leitebene des Paraboloids, zu dessen einer Schar

r, g, g' gehören. Für alle Polarenpaare g, g', die derselben ξ_0 parallel sind, sind aber $\overline{rg}$ tang rg' und tang $\overline{rg'}$ tang rg auch dem Vorzeichen nach konstant; je beide Faktoren wechseln das Vorzeichen gleichzeitig. Liegen nun g und g' auf derselben Seite von ξ_0, so gibt es Geraden — die Strahlen des Gewindes —, für welche beide Produkte zusammenfallen. Folglich gilt die Vorzeichengleichheit auch schon im allgemeinen Falle.

Nehmen wir aber, wie in Nr. 533, den Entfernungsfaktor absolut und bestimmen den Sinn und das Vorzeichen des Winkels wie dort, so zeigt sich, daß $\overline{rg}$ tang $g'r = \overline{rg'}$ tang gr (so wurde dort geschrieben), wenn g und g' auf derselben Seite von ξ_0 liegen, das eine Vorzeichen hat, nämlich das des Parameters $\overline{rg}$ tang gr des Gewindes (wo nun g ein Strahl desselben ist), hingegen das andere, wenn g und g' durch ξ_0 getrennt werden.

§ 93. Kollineation in eingeschriebener Tetraederlage.

Wir nehmen an, bei einer räumlichen Kollineation sei ein Te- 629
traeder $ABCD$ vorhanden, dessen entsprechendes $A'B'C'D'$ ihm eingeschrieben ist und zwar so, daß A' in $BCD, \ldots$ liegt. Es sei A^{-1} der Punkt in Σ, der dem A als Punkt von Σ' korrespondiert. Mit den kollinearen Bündeln A^{-1} und A schneiden wir die Ebene BCD und erhalten eine ebene Kollineation in eingeschriebener Dreieckslage (Nr. 365); wenn nämlich $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ die Spuren von $A(B', C', D')$ sind, so entspricht, weil in der räumlichen Kollineation den Punkten A^{-1}, B, C, D die Punkte A, B', C', D' korrespondieren, in dieser ebenen Kollineation das Dreieck $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ dem BCD und ist ihm eingeschrieben, denn $\mathfrak{B}'$ liegt auf CD, weil B' in ACD, usw. Also haben wir in BCD ∞^4 Dreiecke XYZ, deren entsprechende $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'$ ihnen je eingeschrieben sind; da aber $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ die Spuren von $A(X', Y', Z')$ sind, so ist $A'X'Y'Z'$ dem $AXYZ$ eingeschrieben. Für jene beiden Bündel A^{-1} und A (wo A zum zweiten Raume gehört) gibt es einen Bündel von Ebenen, auf denen durch sie Kollineation in eingeschriebener Dreiecklage entsteht (Nr. 368). Da BCD zu ihnen gehört, so enthält sie den Scheitel, ferner ist AA' im Bündel A dem Strahl $A^{-1}A$ entsprechend; also ist er der den Scheitel enthaltende Strahl des Bündels A. Demnach ist der Punkt A' der Scheitel.

Wenn nun, in irgend einer Ebene durch A', XYZ ein Dreieck ist, dem sein entsprechendes $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'$ eingeschrieben ist, so heißt das wiederum: $A'X'Y'Z'$ ist dem $AXYZ$ eingeschrieben. Weil die Ebene eine beliebige Ebene durch A' ist, so sind X, Y, die in ihr beliebige Punkte sind, auch beliebige Punkte im Raume.

Wir halten nun X und X' fest und können Tetraeder $XYZW$,

$X'Y'Z'W'$ konstruieren, in denen Y und Y', Z und Z' beliebige Paare entsprechender Punkte sind (von welchen die ersteren auch die vorhinigen sein können), und sehen, daß drei Paare entsprechender Ecken beliebig genommen werden, so daß ∞^9 solche Tetraederpaare möglich sind. Die vierten Ecken sind dann bestimmt. W ist der Schnittpunkt der Ebenen YZX', ZXY', XYZ' und W' der entsprechende Punkt.

Wenn also bei einer räumlichen Kollineation ein Tetraeder $ABCD$ vorhanden ist, welchem das entsprechende $A'B'C'D'$ eingeschrieben ist, so gibt es deren ∞^9; drei Ecken können beliebig gewählt werden.

Wir nennen sie dann, als Transformation von Σ in Σ', Kollineation in eingeschriebener Tetraederlage, und die inverse Kollineation in umgeschriebener Tetraederlage.

Ein sich selbst entsprechender Punkt $X \equiv X'$ ist ungeeignet, weil in ihn auch W und W' fallen würden.

Wenn bei zwei entsprechenden Tetraedern $XYZW$, $X'Y'Z'W'$ drei Inzidenzen erreicht sind: X' in YZW, Y' in ZWX, Z' in WXY, so ist $W = (YZX', ZXY', XYZ')$, und die vierte Inzidenz wird auch erfüllt, wofern Kollineation in eingeschriebener Tetraederlage vorliegt.

Es sei wieder $\ldots X^{-2}, X^{-1}, X, X', X'', \ldots$ eine Folge entsprechender Punkte, in welcher jedem Punkte, zu Σ gerechnet, der folgende in Σ' korrespondiert; so sind $XX'X''X'''$ und $X'X''X'''X^{IV}$ entsprechende Tetraeder und die Ecken X', X'', X''' des zweiten liegen in den den entsprechenden Ecken gegenüberliegenden Ebenen des ersten; folglich liegt, wenn es sich um eine Kollineation in eingeschriebener Tetraederlage handelt, X^{IV} in $XX'X''$ und umgekehrt, wenn diese vier Punkte aus der Reihe: X, X', X'', X^{IV}, also drei aufeinander folgende und der zweitnächste in einer Ebene liegen, so ist das Tetraeder $X'X''X'''X^{IV}$ seinem entsprechenden $XX'X''X'''$ in der erforderlichen Weise eingeschrieben; es liegt Kollineation in eingeschriebener Tetraederlage vor.

Diese Bedingung darf aber nicht dadurch erfüllt werden, daß alle vier Punkte in einer Gerade liegen; also versagt dies Kennzeichen bei der Homologie und Kollineation mit Axen.

Dualisiert man, so ergeben sich aus solchen zwei Tetraedern, von denen das in Σ' dem entsprechenden in Σ eingeschrieben ist, zwei, von denen das in Σ' dem in Σ umgeschrieben ist, die vier in einer Ebene liegenden Punkte gehen über in vier durch einen Punkt gehende Ebenen. Wenn also ξ, ξ', ξ'', ξ^{IV} (mit dem Sinne der Reihe von Σ nach Σ') durch einen Punkt gehen, so ist die Kollineation von Σ nach Σ' eine solche in umgeschriebener Tetraederlage.

Vertauscht man die Räume, und damit den Sinn einer Folge entsprechender Punkte, so ist Kennzeichen für umgeschriebene Tetraederlage, daß X, X'', X''', X^{IV} in einer Ebene liegen, und für eingeschriebene, daß ξ, ξ'', ξ''', ξ^{IV} durch einen Punkt gehen.

Da nur eine einfache Bedingung zu erfüllen ist, so gibt es ∞^{14} Kollineationen in eingeschriebener Tetraederlage.

Man lege eine Kollineation durch:

$$\left| \begin{matrix} X & X' & X'' & X''' & Y \\ X' & X'' & X''' & X^{IV} & Y' \end{matrix} \right|;$$

davon sind X, X'', X''', Y' je in ∞^3 Lagen möglich, X^{IV} nur in ∞^2, wenn unsere Bedingung erfüllt werden soll; so daß die Mannigfaltigkeit vom Grade 14 sich ergibt. Oder zu vier Punkten A, B, C, E können wir A', B', C', E' beliebig geben; bestimmen wir dann D als Schnittpunkt von BCA', CAB', ABC', so können wir D' nur in ABC geben; was auch zur Mannigfaltigkeit 14 führt.

Betrachten wir das System von Kollineationen mit festen Axen 630
u, v und veränderlicher Invariante $\lambda = XX'$ (u, v, X, X').

A, B, C seien feste Punkte, während A', B', C' die Leitstrahlen (A, u, v), ... projektiv durchlaufen; für $\lambda = 1, 0, \infty$ gelangen sie nach A, B, C, auf u, auf v. Wir haben $D = (BCA', CAB', ABC')$ zu konstruieren, dann den je entsprechenden D' und zuzusehen, wie oft er in die Ebene ABC fällt, oder, was damit gleichbedeutend ist, D in die Ebene $A^{-1}B^{-1}C^{-1}$, wo A^{-1}, ... im ersten Raume den Punkten A, B, C aus dem zweiten entsprechen. Die Ebenenbüschel, die von BCA', CAB', ABC' beschrieben werden, sind perspektiv, da ABC sich selber entspricht; also beschreibt D eine gerade Punktreihe d, perspektiv zu ihnen; und projektiv dazu dreht sich die Ebene $A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ um den Leitstrahl in ABC. Also inzidieren sie zweimal; das eine Mal aber entspricht dem Werte $\lambda = 1$, wo D in die Ebene ABC fällt und $A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ sich mit dieser vereinigt. Dieser Fall der Identität der beiden Räume ist natürlich nicht der gesuchte. Die andere Inzidenz hingegen führt zu einer Kollineation unseres Systems, die sich in eingeschriebener Tetraederlage befindet.

Diese ausgezeichnete Kollineation ist die windschiefe Involution, welche dem Werte $\lambda = -1$ entspricht. In der Tat, bei ihr liegt D in $A'B'C' \equiv A^{-1}B^{-1}C^{-1}$, oder BCA', CAB', ABC' schneiden in $A'B'C'$ drei konkurrente Geraden ein. Diese Geraden verbinden A', B', C' bzw. mit den Spuren von BC, CA, AB. Auf dem Leitstrahle s, in welchem die entsprechenden Ebenen ABC und $A'B'C'$ sich schneiden, sind die Schnitte von BC und $B'C'$, ... Paare der Involution, welche er infolge unserer involutorischen Verwandtschaft trägt. Die Schnitte mit BC, CA, AB sind jene Spuren; sie sind in der Involution den Schnitten der s mit den Seiten von $A'B'C'$ gepaart, also laufen (Nr. 48) die drei Verbindungslinien mit A', B', C'

in einen Punkt zusammen, oder D liegt, wie behauptet, in $A'B'C'$, und daher D' in ABC, welche der $A'B'C'$ involutorisch entspricht. Daher ist $A'B'C'D'$ dem $ABCD$ eingeschrieben.

Von D wissen wir schon, daß er in $A'B'C'$ liegt; auch A liegt in $B'C'D'$, weil A' in BCD liegt, usw. Also ist auch $ABCD$ dem $A'B'C'D'$ eingeschrieben.

Von den Kollineationen mit Axen ist nur die windschiefe Involution in eingeschriebener Tetraederlage, und sie ist es stets in beiderlei Sinne; sie besitzt ∞^9 Paare entsprechender Tetraeder, von denen jedes dem andern ein- und umgeschrieben ist

Durch diese vier Paare entsprechender Punkte $A, A'; \ldots D, D'$ gehen vier Ebenenpaare:

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} B & C & D & A' & C & D & A & B' & D & A & B & C' & A & B & C & D' \\ B' & C' & D' & A & C' & D' & A' & B & D' & A' & B' & C & A' & B' & C' & D \end{array};$$

folglich sind sie acht assoziierte Punkte und bestimmen ein Netz von Flächen 2. Grades. Weil die beiden Ebenen jedes dieser Paare einander entsprechen, so treffen ihre Doppellinien die Axen u, v. In bezug auf diese Ebenenpaare sind u und v polar; weil die Polarebenen der Punkte, in denen u von $AA', BB' \ldots$ getroffen wird, durch v gehen. Also sind sie auch polar für alle Flächen des Netzes, und diese gehen deshalb (Nr. 479, 516) durch die windschiefe Involution in sich selbst über, also auf die erste Art, d. h. so, daß jede der beiden Regelscharen in sich transformiert wird. Durch die Bedingung, daß u und v polar sind, und die Punkte A, B, C wird ja auch ein Netz von Flächen 2. Grades bestimmt, die alle in sich übergehen und daher auch die Punkte A', B', C' enthalten; zu ihnen gehören jene Ebenenpaare, und D, D' sind die beiden ferneren Grundpunkte.

Zu drei beliebigen Paaren entsprechender Punkte einer windschiefen Involution gehört ein viertes Paar, das mit jenen eine Gruppe von acht assoziierten Punkten bildet. Die Flächen des zugehörigen Netzes 2. Ordnung gehen in sich durch die Involution über; zu ihnen gehören vier Ebenenpaare. Deren vier Doppellinien setzen mit den Axen u, v der Involution die Kegelspitzen-Kurve des Netzes zusammen.[1])

Denn u, v sind für jeden Büschel des Netzes Gegenkanten des Polartetraeders und enthalten je zwei Kegelspitzen.

Vier beliebige Paare entsprechender Punkte einer windschiefen

1) Dieses vierte Paar DD' hat J. Cordier gefunden: Über eine Gruppe von 96 Kollineationen und Korrelationen. Dissert. von Straßburg 1905.

Involution bedingen einen Büschel von sich selbst in erster Art entsprechender Flächen 2. Grades; er wird durch die Bedingung der Polarität von u, v und vier Punkte der Paare bestimmt; seine Flächen gehen von selbst durch die andern; und die Raumkurve 4. Ordnung 1. Art R^4 durch die acht Punkte ist die Grundkurve, korrespondiert sich selbst und trägt ∞^1 Paare entsprechender Punkte. Dies gilt auch noch, wenn die vier Verbindungslinien derselben Regelschar angehören; deren Trägerfläche entspricht sich auch, aber nicht die weiteren Flächen des Netzes, welches sie mit dem Büschel bestimmt.

§ 94. Zyklische Kollineationen mit unebenen Zykeln.

Indem wir im allgemeinen unebene Zykeln von Punkten haben 631
wollen, setzen wir den Grad n, die Anzahl der Elemente eines Zyklus, > 3 voraus. Kein Punkt eines solchen Zyklus kann in eine der Koinzidenzebenen fallen, weil der Zyklus sonst ganz derselben angehört. Folglich bewirkt ein unebener Zyklus n^{ten} Grades, der in einer räumlichen Kollineation Γ vorhanden ist, daß ihre n^{te} Potenz $4 + n$ Koinzidenzpunkte besitzt, also Identität ist und demnach jeder weitere Punkt zu einem Zyklus in Γ führt.

Es wird sich übrigens zeigen, daß die Kollineationen mit durchweg ebenen Zykeln nicht spezieller sind. Sie haben auch die duale Eigenschaft, daß die Ebenenzykeln je einem Bündel angehören.

Wir erhalten z. B. eine zyklische Kollineation vom 4. oder 5. Grade durch die Zuordnung:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & B_5 \\ A_2 & A_3 & A_4 & A_1 & B_5' \end{vmatrix},$$

bzw.

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_1 \end{vmatrix}.$$

Im ersteren Falle können wir A_1 und B_5' fest annehmen, im zweiten A_1, und da jeder der Punkte A_2, A_3, A_4, B_5, bzw. A_5 in ∞^3 Lagen gewählt werden kann, gibt es ∞^{12} zyklische Kollineationen der beiden Grade 4, 5. Wenn $n > 5$ wird, dürfen die Punkte eines Zyklus nicht alle beliebig angenommen werden.

Jene beiden Kollineationen sind also dreifache Bedingungen. Die vom 4. Grade genügt, weil $A_5 \equiv A_1$, sowohl der Bedingung für ein-, als der für umgeschriebene Tetraederlage:

$$\left.\begin{array}{r} A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_5 \\ \text{bzw.}\quad A_1,\ A_3,\ A_4,\ A_5 \end{array}\right\}\ \text{in einer Ebene.}$$

Aber jede von diesen Lagen ist nur eine einfache Bedingung und ihre Vereinigung eine doppelte; also ist nicht jede Kollineation, welche zugleich in ein- und umgeschriebener Tetraederlage sich befindet, eine zyklische Kollineation 4. Grades; hat ja eine beliebige windschiefe Involution jene Eigenschaft, aber nicht diese. In der Ebene galt beim Grade 3 die Umkehrung; der in Nr. 366 geführte Beweis läßt sich nicht für den Raum umgestalten.

Jeder Punktzyklus $X_1 \ldots X_n$ bewirkt einen Ebenenzyklus $\xi_1 = X_1 X_2 X_3, \ldots \xi_n = X_n X_1 X_2$, und ebenso umgekehrt.

Jeder Punkt- (oder Ebenen-)zyklus $X_1 \ldots X_n$ bewirkt auch einen Strahlenzyklus $x_1 = X_1 X_2, \ldots x_n = X_n X_1$. Das ist aber nicht der allgemeine, dessen Geraden windschief sind, während bei ihm aufeinderfolgende sich schneiden. Derartige Zykeln kommen durch Geraden zustande, die dem tetraedralen Komplexe der Kollineation angehören (Nr. 490), und befinden sich dann ganz in demselben.

Der Fall eines ungeraden Grades $n\,(> 3)$ ist der einfachere. In ihm müssen alle vier Koinzidenzpunkte imaginär sein.

Denn es seien r, s die zweifellos reellen Koinzidenzgeraden, so kann die zyklische Projektivität auf ihnen und um sie weder vom Grade 1, Identität, sein, weil die Zykeln im allgemeinen uneben sein sollen, noch vom Grade 2, Involution, weil 2 nicht Teiler von n ist. Also liegen auf beiden Geraden imaginäre Koinzidenzpunkte (Nr. 141): T und U auf s, V und W auf r. Durch jeden Punkt geht eine reelle Gerade nach den konjugiert imaginären Geraden TV, UW, sowie eine nach VU, TW; folglich ist die Büschel-Schar $|T\ V\ U\ W|$ der Flächen 2. Grades durch das Vierseit $TVUW$ reell und besteht aus hyperbolischen Flächen, darunter zwei reell-imaginären Ebenenpaaren $r(T, U)$, $s(V, W)$ (oder genauer: Ebenen-Punkte-Paaren). Ebenso beschaffen sind die Büschel-Scharen durch die beiden andern Vierseite $TUVW$ und $TUWV$; aber deren Ebenenpaare bestehen nicht aus konjugiert imaginären Ebenen und sind imaginär. Die Polarebenen irgend eines reellen Punktes in bezug auf jene Ebenenpaare sind reell, in bezug auf diese imaginär.

Von den Punkten eines Zyklus $X_1 \ldots X_n$ liegen entweder zwei aufeinanderfolgende auf der nämlichen Fläche jener Büschel-Schar $|T\ V\ U\ W|$ und dann alle, weil dadurch diese Fläche sich selbst entsprechend wird, oder sie verteilen sich zyklisch auf ν Flächen von $|T\ V\ U\ W|$, wo ν ein Teiler von n, also > 2 ist. Im letzteren Falle würde in ihr eine zyklische Projektivität ν^{ten} Grades entstehen, die auch in dem Büschel der Polarebenen eines festen Punktes eine solche bewirkt. In diesem aber sind die Koinzidenzen reell, nämlich die Polarebenen in bezug auf die Ebenenpaare, welche Koinzidenzen der Projektivität in der Büschel-Schar sind. Daher kann nur der erstere Fall eintreten

Eine räumliche Kollineation Γ, welche einen unebenen Zyklus von ungeradem Grade $n > 3$ besitzt, ist durchweg zyklisch. Die Koinzidenzpunkte sind sämtlich imaginär, und das Vierseit der imaginären Koinzidenzgeraden bestimmt eine reelle Büschel-Schar von hyperbolischen Flächen 2. Grades, von welchen jede ganz einen Zyklus von Punkten oder Ebenen (als Berührungsebenen) in sich aufnimmt, wenn ein Element desselben mit ihr inzidiert.

Diese Flächen entsprechen in der Kollineation sich selbst, und zwar, wie die Seiten des Vierseits beweisen, in erster Art. Durch die auf ihnen befindlichen Zykeln werden auch ihre Regelscharen zyklisch, nicht notwendig vom nämlichen Grade.

Wenn in jede von zwei verbundenen Regelscharen (g) 632
und (l) eine Projektivität gelegt wird, so wird die Trägerfläche in sich kollinear, derartig, daß die Punkte gl, $g'l'$ entsprechend sind, wenn g und g', l und l' in jenen Projektivitäten korrespondieren. Der ganze Raum wird in sich kollinear (Nr. 501, 507); und die Koinzidenzen $g_0, \bar{g}_0$; $l_0, \bar{l}_0$ in (g), (l) geben ein Kantenvierseit des Koinzidenztetraeders, und alle Flächen 2. Grades durch dasselbe sind sich selbst entsprechend (Nr. 514). Das dritte Paar Gegenkanten des Tetraeders sind $(g_0 l_0, \bar{g}_0 \bar{l}_0)$, $(g_0 \bar{l}_0, \bar{g}_0 l_0)$, polar in bezug auf jene Flächen.

Sind die Projektivitäten in (g), (l) zyklisch von den Graden n_1, n_2, so wird die räumliche Kollineation zyklisch vom Grade n, dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von n_1, n_2; so daß wir auch zu einer zyklischen Kollineation geraden Grades auf diese Weise gelangen können. Sind n_1, n_2 beide > 2, so sind g_0, $\bar{g}_0$, l_0, $\bar{l}_0$ imaginär, und die oben zuletzt genannten Kanten sind dann die reellen Kanten r, s. Die Koinzidenzpunkte:

$$T = g_0 \bar{l}_0, \quad U = \bar{g}_0 l_0, \quad V = g_0 l_0, \quad W = \bar{g}_0 \bar{l}_0$$

sind sämtlich imaginär.

Besteht aber, etwa in (l), Involution, so können l_0, $\bar{l}_0$ auch reell sein, in welchem Falle sie lieber r, s heißen mögen. Auch dann sind die Koinzidenzpunkte:

$$T = s g_0, \quad U = s \bar{g}_0, \quad V = r g_0, \quad W = r \bar{g}_0$$

sämtlich imaginär.

Wenn beide Projektivitäten in (g) und (l) zyklisch von gleichem Grade $n (> 2)$ sind, was dann auch der Grad der Kollineation ist, so kann auch die Invariante die nämliche sein; in diesem Falle sind die Zykeln der einen Projektivität zu denen der andern projektiv (Nr. 141). Da nun die entsprechenden Geraden zweier projektiven verbundenen Regelscharen sich in den Punkten eines ebenen Schnitts der Trägerfläche begegnen, so sind die Zykeln, die auf dieser Fläche liegen, eben; sind die Invarianten $(g_0 \bar{g}_0 g_1 g_2)$ und $(l_0 \bar{l}_0 l_1 l_2)$, so entsprechen sich in dieser Projektivität zwischen (g) und (l) auch g_0 und l_0, $\bar{g}_0$ und $\bar{l}_0$; d. h. diese ebenen Schnitte gehen durch V und W und ihre Ebenen, durch r; und jede Ebene durch r wird sich selbst entsprechend, jeder Punkt auf s; alle Zykeln sind eben. Sind $(g_0\bar{g}_0g_1g_2)$ und $(l_0\bar{l}_0l_1l_2)$ reziprok, so ersetzt man eine, etwa die letztere durch die reziproke $(\bar{l}_0l_0l_1l_2)$ und erhält das nämliche Resultat, nur daß s die Axe der Ebenen der Zykeln wird.

So zeigt sich, daß die „planaren" zyklischen Kollineationen nicht spezieller sind.

In den Fällen $n = 3, 4, 6$ gibt es nur zwei reziproke (primitive) Invarianten. Also ergeben sich, wenn zyklische Projektivitäten eines dieser Grade in (g) und (l) gelegt werden, keine Kollineationen mit unebenen Zykeln.

Bei $n = 4$ gelangt man zu solchen, wenn $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, bei $n = 6$, wenn $n_1 = 3$, $n_2 = 2$; $n_1 = 6$, $n_2 = 2$; $n_1 = 6$, $n_2 = 3$ genommen werden.

Eine „gescharte" zyklische Kollineation n^{ten} Grades, deren Zykeln alle geradlinig sind, ergibt sich, wenn in die eine Regelschar (l) die Identität, in die andere (g) eine zyklische Projektivität n^{ten} Grades gelegt wird. Die Träger der Zykeln bilden das Strahlennetz, dessen (imaginäre) Leitgeraden die Koinzidenzen dieser Projektivität sind. Sie ist eine Kollineation mit diesen Axen und einer primitiven n^{ten} Wurzel der Einheit als Invariante.

Sind die Projektivitäten in (g) und (l), wie vorher, vom nämlichen, aber geraden Grade $n > 2$, so erkennt man leicht als $\frac{n}{2}^{\text{te}}$ Potenz der Kollineation die windschiefe Involution mit den reellen Koinzidenzgeraden r, s als Axen. Durch diese Potenzierung gehen nämlich die Projektivitäten in Involutionen über; g_i, $g_{\frac{n}{2}+i}$; l_i, $l_{\frac{n}{2}+i}$ sind also harmonisch zu g_0, $\bar{g}_0$, bzw. l_0, $\bar{l}_0$; daher ist:

$$g_0\bar{g}_0g_ig_{\frac{n}{2}+i} \barwedge l_0\bar{l}_0l_il_{\frac{n}{2}+i} \barwedge \bar{l}_0l_0l_il_{\frac{n}{2}+i};$$

es liegen g_0l_0, $\bar{g}_0\bar{l}_0$, g_il_i, $g_{\frac{n}{2}+i}l_{\frac{n}{2}+i}$ sowohl wie $g_0\bar{l}_0$, $\bar{g}_0l_0$, g_il_i, $g_{\frac{n}{2}+i}l_{\frac{n}{2}+i}$ in einer Ebene, oder die Gerade $\left(g_il_i,\ g_{\frac{n}{2}+i}l_{\frac{n}{2}+i}\right)$ trifft sowohl r, wie s.

Daraus folgt weiter, daß die Projektivitäten um und auf r, s nur zyklisch vom Grade $\frac{n}{2}$ sind, da z. B. die Ebene rX_i mit $rX_{\frac{n}{2}+i}$ identisch ist.

Sind aber n_1 und n_2 ungleich mit einem geraden kleinsten gemeinsamen Vielfachen n, so kann die $\frac{n}{2}^{\text{te}}$ Potenz auch anders ausfallen, z. B. windschiefe Involution mit imaginären Gegenkanten als Axen sein. Es empfiehlt sich jedoch mehr, das in den einzelnen Fällen zu untersuchen.

Bei geradem Grade n ist, außer dem im vorangehenden be- 633
sprochenen Falle, der in der Haupteigenschaft: vier imaginäre Koinzidenzpunkte, mit dem für ungeraden Grad übereinstimmt, noch ein zweiter Fall möglich, daß nämlich zwei der Koinzidenzpunkte reell sind.

Bei $n = 4$ lehrt das die Bestimmung der Kollineation durch:

$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 A_3 A_4 T \\ A_2 A_3 A_4 A_1 T \end{vmatrix}.$$

Nehmen wir also T und U reell an, so ist die zyklische Projektivität auf $s = TU$ und um $r = VW$ Involution. Es liegen daher $X_1, X_3, X_5 \ldots$ in einer Ebene ξ_1 und $X_2, X_4, X_6 \ldots$ in der gepaarten Ebene ξ_2 der Involution um r. Wären auch V, W reell, so müßten wir im reellen Bündel T wegen der reellen Koinzidenzen $T(V, W)$ zyklische Projektivität 2. Grades, d. h. involutorische Homologie haben, so daß $X_1, X_3, X_5 \ldots$ auf einem Strahle x_1, $X_2, X_4, X_6 \ldots$ auf dem entsprechenden x_2 liegen; folglich fielen jene Punkte in $\xi_1 x_1$, diese in $\xi_2 x_2$ zusammen, und wir hätten nur involutorische Kollineation, mit der wir uns jetzt nicht beschäftigen.

Also können bei geradem n zwei, aber nur zwei Koinzidenzpunkte reell sein.

In dem reellen Bündel T liegt der Zyklus der Strahlen nach $X_1 \ldots X_n$ auf einem Kegel 2. Grades, welcher längs $T(V, W)$ die Ebenen $s(V, W)$ tangiert (Nr. 359). Die Punkte $X_1, X_3, X_5, \ldots$; $X_2, X_4, X_6, \ldots$ liegen daher auf den beiden Kegelschnitten K_1, K_2, in denen dieser Kegel von ξ_1, ξ_2 geschnitten wird; ebenso auf denen, die vom Bündel U herrühren. Aber diese sind mit jenen identisch, weil die einen wie die andern jene Ebenen $s(V, W)$ in V, W tangieren und durch die Punkte des Zyklus gehen. Läge nun der ganze Zyklus auf der nämlichen Fläche der Büschel-Schar $|TVUW|$, so würden, da letztere dieselben Berührungen eingeht, auch K_1, K_2 auf ihr liegen. Die einzige Fläche 2. Grades durch K_1, K_2 und T ist aber der oben erwähnte Kegel aus T, mit dem die Fläche nicht identisch sein kann.

Die Büschel-Schar besteht diesmal aus elliptischen Flächen, da zweimal zwei benachbarte Seiten des Vierseits $T(V, W)$, $U(V, W)$ konjugiertpunktiert sind; die Ebenenpaare $r(T, U)$, $s(V, W)$ sind reell und reell-imaginär. Weil sie wiederum die Koinzidenzen der in der

Büschel-Schar entstehenden Projektivität sind, so kann diese, da Identität ausgeschlossen ist, nur Involution sein; die Kegelschnitte $K_1(X_1, X_3, X_5, \ldots)$ und $K_2(X_2, X_4, X_6, \ldots)$ liegen also in gepaarten Flächen dieser Involution.

Wenn bei geradem Grade n einer zyklischen Kollineation Γ mit unebenen Zykeln zwei Koinzidenzpunkte T, U reell sind und die andern V, W imaginär, so bestehen drei Involutionen: im Ebenenbüschel um $r = VW$, perspektiv zu ihr in der Punktreihe auf $s = TU$, und in der Büschel-Schar der (elliptischen) Flächen 2. Grades durch das Vierseit $TVUW$ der punktierten Koinzidenzgeraden. Die Punkte eines Zyklus liegen alle auf einem Kegel 2. Grades aus T und einem aus U, die in V, W von $s(V, W)$ tangiert werden, und abwechselnd in zwei gepaarten Ebenen ξ_1, ξ_2 der ersten Involution[1]) und zwei gepaarten Flächen f_1, f_2 der dritten, also abwechselnd auf den Kegelschnitten $K_1 = \xi_1 f_1$, $K_2 = \xi_2 f_2$, durch die auch jeder von jenen Kegeln geht.

Die zweite Potenz lehrt, daß auf K_1 und K_2 sich zyklische Projektivitäten $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grades befinden.

Und Duales gilt für die Ebenen-Zykeln.

Ist $n = 2^h \cdot n'$, wo n' ungerade, so ist die $(2^h)^{\text{te}}$ Potenz von ungeradem Grade n', aber mit ebenen Zykeln und lauter sich selbst entsprechenden Ebenen durch r und Punkten auf s.

Die $\frac{n}{2}^{\text{te}}$ Potenz $\Gamma^{\frac{n}{2}}$, in welcher X_i und $X_{\frac{n}{2}+i}$ entsprechend sind, fällt verschiedenartig aus, je nachdem $\frac{n}{2}$ gerade oder ungerade ist. Sie ist im ersteren Falle die windschiefe Involution mit den reellen Axen r, s, im zweiten die involutorische Homologie mit dem einen reellen Koinzidenzpunkte, etwa T, als Zentrum und der Gegenebene τ als Ebene der Homologie; so daß T und U nicht gleiches Verhalten zeigen.

Wenn nämlich $\frac{n}{2}$ gerade ist, so sind X_i und $X_{\frac{n}{2}+i}$ auf demselben der beiden Kegelschnitte K_1, K_2 gelegen, und es werden in $\Gamma^{\frac{n}{2}}$ alle Ebenen durch r und alle Punkte auf s sich selbst entsprechend; damit ist $\Gamma^{\frac{n}{2}}$, welche ja involutorisch sein muß, als windschiefe Involution mit diesen Axen r, s gekennzeichnet.

Da also in ihr auch in der Punktreihe von r und im Ebenen-

1) Wegen dieses Oszillierens der Zykeln zwischen zwei gepaarten Ebenen kann man die Kollineation als halbplanar bezeichnen.

büschel um s Identität besteht, die durch die $\frac{n}{2}$-malige Wiederholung bewirkt ist, so muß die zyklische Projektivität, die in ihnen durch Γ selbst hervorgerufen wird, nur vom Grade $\frac{n}{2}$ sein.

Ist aber $\frac{n}{2}$ ungerade, so geht die Involution um r und auf s von Γ auf $\Gamma^{\frac{n}{2}}$ über. Wäre diese auch windschiefe Involution, so würden r und s Leitstrahlen sein, der eine wegen der Involution von Ebenen, die er trägt, der andere wegen der Involution von Punkten. Jener trüge dann auch eine Involution von Punkten, dieser eine von Ebenen, und die beiden von dem nämlichen dieser Leitstrahlen getragenen Involutionen wären ungleichartig, z. B. die von r getragene Ebeneninvolution mit reellen Doppelebenen $r(T, U)$ und die Punktinvolution mit imaginären Doppelpunkten V, W; was nicht möglich ist.

Somit muß $\Gamma^{\frac{n}{2}}$ die andere Form involutorischer Kollineation sein, die involutorische Homologie; und von den vier Koinzidenzpunkten ist der eine reelle, T, Zentrum und die Gegenebene τ Ebene der Homologie. Es liegen also durchweg X_i und $X_{\frac{n}{2}+i}$ mit T in einer Gerade, und die Kollineation, die durch Γ im Bündel T entsteht, ist nur vom $\frac{n}{2}$ten Grade zyklisch. Im Bündel U hingegen ist sie vom Grade n.

Die zyklische Projektivität vom Grade $\frac{n}{2}$ um s sagt uns, daß X_i und $X_{\frac{n}{2}+i}$ je in derselben Ebene durch s liegen; vorhin so, daß sie weder mit T, noch mit U in gerader Linie liegen, jetzt so, daß sie mit T, aber nicht mit U allineiert sind.

Wenn also auch jetzt die Kollineation im Bündel T nur vom Grade $\frac{n}{2}$ ist, so bleibt doch, weil $\frac{n}{2}$ ungerade und mindestens 3 ist, bestehen, was oben benutzt wurde, daß jeder Strahlenzyklus dieses Bündels von einem Kegel 2. Grades getragen wird, der längs der imaginären Kanten $T(V, W)$ die Ebenen $s(V, W)$ berührt.

Für die zyklische Kollineation Γ von geradem Grade n mit zwei reellen Koinzidenzpunkten T, U gilt daher noch folgendes:

Die zyklische Projektivität auf $r = VW$ und um $s = TU$ ist vom Grade $\frac{n}{2}$, so daß X_i und $X_{\frac{n}{2}+i}$ stets in derselben Ebene durch s liegen. Die $\frac{n}{2}$te Potenz ist die windschiefe Involution (r, s), wenn $\frac{n}{2}$ gerade ist, hingegen, wenn $\frac{n}{2}$ ungerade ist, die involutorische Homologie mit einem der reellen Koinzidenzpunkte T als Zentrum und der Gegenebene τ als Ebene der Homologie; so daß jene Punkte X_i und $X_{\frac{n}{2}+i}$ stets mit T in gerader Linie liegen und im Bündel T, sowie im Felde τ nur zyklische Kollineation vom Grade $\frac{n}{2}$ besteht.

Ein einfaches Beispiel erhält man folgendermaßen. Die Kollineation Γ sei zusammengesetzt aus der Drehung um s durch den Winkel $\frac{2\nu\pi}{n}$, wo n gerade und ν teilerfremd zu n ist, und der Symmetrie in bezug auf eine Ebene υ, welche zu s normal ist. Die reellen Koinzidenzpunkte sind $T = \upsilon s$ und der unendlich ferne Punkt U von s, die imaginären die absoluten Punkte auf υ. Die Flächen der Büschel-Schar $|TVUW|$ sind Rotationsparaboloide mit der Axe s und dem Scheitel T, und gepaart in der Involution sind je zwei in bezug auf υ symmetrische. Die $\frac{n}{2}$te Potenz ist, wenn $\frac{n}{2}$ gerade ist, die Symmetrie in bezug auf s, wenn $\frac{n}{2}$ ungerade ist, die Symmetrie in bezug auf T.

Läßt man durch eine Kollineation den Punkten U, V, W des allgemeinen Falles einen beliebigen Punkt U' der unendlich fernen Ebene und die Schnitte V', W' der absoluten Kurve mit seiner Polare nach ihr korrespondieren, so erhält man diesen speziellen Fall, und kann ν auch die Art des allgemeinen Falles (Nr. 142) nennen.

634 Es ist noch zu untersuchen, ob bei geradem n und vier imaginären Koinzidenzpunkten nicht auch die Möglichkeit vorliegt, daß die Punkte eines Zyklus zwischen zwei involutorisch gepaarten, also zu den ausgearteten Flächen harmonischen Flächen f_1, f_2 der Büschel-Schar $|TVUW|$ oszillieren. Schneidet man mit einer Ebene, etwa durch $r = VW$, so ergeben sich bei zwei solchen Flächen Kegelschnitte in doppelter imaginärer Berührung in V, W, welche zu den ausgearteten Kurven der Büschel-Schar harmonisch sind und daher von jedem Strahle durch den auf s gelegenen Berührungspol harmonisch geschnitten werden (Nr. 303). Folglich ist der eine reell, der andere reell-imaginär; und da es sich um hyperbolische Flächen handelt, so gilt dasselbe für f_1, f_2 selbst. Jenes Oszillieren fordert aber die gleichzeitige Realität der Flächen f_1, f_2.

Im andern Falle, wo T, U reell, V, W imaginär sind, kann man von den Schnitten nicht auf die nunmehr elliptischen Flächen schließen; wir haben ferner f_1, f_2 bzw. zu schneiden mit Ebenen ξ_1, ξ_2, welche zu $\upsilon = rT$, $\tau = rU$, reellen Tangentialebenen der f_1, f_2 in T, U, harmonisch, also konjugiert in bezug auf sie sind. Dieselbe Ebene ξ_1

oder ξ_2 schneidet, wie oben, gepaarte Flächen f_1, f_2 ungleichartig, ebenso wird dieselbe Fläche f_1 oder f_2 von zwei gepaarten Ebenen ξ_1, ξ_2 ungleichartig geschnitten; also sind die Schnitte $K_1 = \xi_1 f_1$ und $K_2 = \xi_2 f_2$ gleichartig.

Demnach sind zwei Fälle zyklischer Kollineationen geraden Grades (mit unebenen Zykeln) möglich:

1. Die vier Koinzidenzpunkte sind sämtlich imaginär; die Flächen 2. Grades durch das Vierseit der imaginären Koinzidenzgeraden — sämtlich hyperbolisch — entsprechen sich selbst und nehmen die Zykeln ganz in sich auf.

2. Zwei Koinzidenzpunkte T, U sind reell, die andern V, W imaginär; jene Flächen — nunmehr alle elliptisch — korrespondieren sich involutorisch und die Punkte eines Zyklus oszillieren zwischen gepaarten Flächen, sowie auch zwischen involutorisch gepaarten Ebenen des Büschels VW.

Bei ungeradem Grade $n (> 3)$ ist nur der erste Fall möglich.[1]) Die Invarianten $\lambda_{\tau\upsilon}$[2]) ... (Nr. 490) sind von 1 verschieden, n^{te} Wurzeln der Einheit, da zur n^{ten} Potenz, der Identität, die Invarianten $\lambda_{\tau\upsilon}^n = \cdots = 1$ gehören. Ist die zyklische Projektivität um die Kante $\tau\upsilon = UW$ z. B. vom Grade n, so muß $\lambda_{\tau\upsilon}$ primitive n^{te} Wurzel sein, wenn aber nur vom Grade n_1, einem Teiler von n, eine primitive $n_1{}^{\text{te}}$ Wurzel, also z. B. -1, wenn $n_1 = 2$. Die $n - 1$ von 1 verschiedenen Wurzeln sind:

$$\omega_h = \cos\frac{2h\pi}{n} + i \sin\frac{2h\pi}{n}, \quad h = 1, 2, \ldots, n-1;$$

ω_h ist primitive n^{te} Wurzel (Nr. 140), wenn h teilerfremd zu n ist; ω_h und ω_{n-h} sind zugleich primitiv oder nicht primitiv, konjugiert imaginär und reziprok.

Es sollen nun die Grade 4, 5, 6 noch etwas genauer untersucht werden.

α. Quaternär zyklische Kollineationen ($n = 4$).

I. Zur ersten Art der zyklischen Kollineation 4. Grades mit 635 vier imaginären Koinzidenzpunkten (und unebenen Zykeln) gelangen wir, wenn eine der Regelscharen einer der sich selbst entsprechenden Flächen eine zyklische Projektivität 4. Grades, die andere eine Involution enthält (Nr. 632). Die imaginären Koinzidenzgeraden jener seien g_0, $\bar{g}_0$, diejenigen der Involution können reell oder imaginär sein.

1) Bei durchweg ebenen Zykeln trägt die eine reelle Koinzidenzgerade lauter sich selbst entsprechende Ebenen, die andere lauter sich selbst entsprechende Punkte (Nr. 632).

2) $\lambda_{\tau\upsilon} = XX'(\tau, \upsilon, X, X')$ oder einfacher (τ, υ, X, X').

a) Im ersten Falle sind sie r und s, und g_0, $\bar{g}_0$ schneiden in sie die imaginären Koinzidenzpunkte V, W; T, U ein. Die zyklische Projektivität in (g) bewirkt eine ebensolche in den Büscheln r und s mit der primitiven Invariante i oder $-i$. Ist $g_1 g_2 g_3 g_4$ ein Zyklus in (g), während in der Involution l_1 und l_2 gepaart sind, so ist $X_1 = g_1 l_1$, $X_2 = g_2 l_2$, $X_3 = g_3 l_1$, $X_4 = g_4 l_2$ ein Zyklus der Kollineation.

Es ist

$$\lambda_{\tau v} = \lambda_{\varphi\psi} = r(g_1, g_2, \bar{g}_0, g_0) = s(g_1, g_2, \bar{g}_0, g_0);$$

wir nehmen als gemeinsamen Wert i, was nur Sache der Bezeichnung ist.

Ebenso ist wegen der Involution in (l):

$$\lambda_{v\psi} = \lambda_{\tau\varphi} = g_0(l_1, l_2, r, s) = \bar{g}_0(l_1, l_2, r, s) = -1.$$

Aus $\lambda_{\tau\psi} \cdot \lambda_{\psi\varphi} \cdot \lambda_{\varphi\tau} = 1$ (Nr. 490) folgt dann: $\lambda_{\tau\psi} = -i$, und ähnlich ergibt sich: $\lambda_{\varphi v} = -i$. Die zwölf Invarianten haben also folgende Werte:

$$\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\varphi\tau} = \lambda_{v\psi} = \lambda_{\psi v} = -1,$$

$$\lambda_{\tau v} = \lambda_{\varphi\psi} = \lambda_{\psi\tau} = \lambda_{v\varphi} = i, \quad \lambda_{v\tau} = \lambda_{\psi\varphi} = \lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\varphi v} = -i.$$

b) Im zweiten Falle, wo die Doppelstrahlen l_0, $\bar{l}_0$ der Involution in (l) imaginär sind, seien die Punkte $g_0 l_0$, $\bar{g}_0 \bar{l}_0$, $g_0 \bar{l}_0$, $\bar{g}_0 l_0$ mit V, W, T, U bezeichnet; wir erhalten genau dieselben Werte der Invarianten.

Die beiden Fälle a) und b) unterscheiden sich in der Tat nicht.

Die Gleichheiten

$$\lambda_{\tau v} = \lambda_{\varphi\psi}, \quad \lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\psi v}$$ [1]

sagen aus (Nr. 514), daß die Flächen der reellen Büschel-Scharen $|TUWV|$, $|TVUW|$ sich selbst auf die erste Art entsprechen. Daß aber eine Fläche aus der ersten oder zweiten Büschel-Schar sich selbst entspricht, ist im Falle a), bzw. b) Voraussetzung; daraus folgt, daß es nicht bloß für alle Flächen dieser, sondern auch für alle der andern Büschel-Schar gilt. Das Vierseit $TUWV$ hat zwei reelle r, s und zwei konjugiert imaginäre Gegenseiten g_0, $\bar{g}_0$, das Vierseit $TVUW$ nur konjugiert imaginäre l_0, $\bar{l}_0$; g_0, $\bar{g}_0$.

Die eine Voraussetzung zieht also die andere nach sich. Und jeder Punktzyklus liegt ganz sowohl auf einer Fläche der einen, als auf einer der andern Büschel-Schar. Zwei solche Flächen haben die zu beiden Vierseiten gehörigen Geraden TV, UW, welche einfacher p, q heißen mögen, und zwei Geraden der l-Schar gemein, von denen die eine X_1 und X_3, die andere X_2 und X_4 trägt. Daraus folgt, daß die zweite Potenz Γ^2 der Kollineation die windschiefe Involution (p, q) ist, also mit konjugiert imaginären Axen; auf welches Ergebnis schon in Nr. 632 hingewiesen

---

1) mit denen $\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{v\psi}$, $\lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\varphi v}$ äquivalent sind.

wurde. In Γ entsprechen die Geraden X_1X_3, X_2X_4 sich involutorisch und sind gemeinsame entsprechende Geraden der windschiefen Involution (TU, VW) mit reellen Axen und der (TW, VU) mit imaginären Axen.

Für die zum tetraedralen Komplexe der Kollineation Γ gehörige Invariante ergibt sich (Nr. 490):

$$\lambda = (\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = \frac{(1-\lambda_{\tau\varphi})(1-\lambda_{\upsilon\psi})}{(1-\lambda_{\tau\psi})(1-\lambda_{\upsilon\varphi})} = 2;$$

daher ist:

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{U}\mathfrak{W}) = XX'(\tau, \varphi, \upsilon, \psi) = -1.$$

Zugeordnet sind also in dieser Harmonizität Schnitte mit nicht konjugiert imaginären Ebenen τ und φ, υ und ψ; während bekanntlich Harmonizität nicht möglich ist, wenn die einen und die andern zugeordneten Elemente konjugiert imaginär sind.

II. Betrachten wir nun den andern Fall, bei dem T und U reell sind; da $\frac{n}{2} = 2$ und gerade ist, so bestehen um beide reellen Koinzidenzgeraden r, s und auf ihnen Involutionen, und die zweite Potenz der Kollineation ist die windschiefe Involution (r, s) mit reellen Axen. Man hat die beiden Fälle I und II daher als elliptische und hyperbolische zyklische Kollineation 4. Grades unterschieden. Wir haben wegen jener Involutionen um r, s:

$$\lambda_{\tau\upsilon} = \lambda_{\upsilon\tau} = \lambda_{\varphi\psi} = \lambda_{\psi\varphi} = -1.$$

Nehmen wir, was wiederum nur Sache der Bezeichnung ist, $\lambda_{\tau\varphi} = i$ an, so ergeben die Relationen zwischen den Invarianten:

$$\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\varphi\upsilon} = \lambda_{\upsilon\psi} = \lambda_{\psi\tau} = i, \quad \lambda_{\varphi\tau} = \lambda_{\upsilon\varphi} = \lambda_{\psi\upsilon} = \lambda_{\tau\psi} = -i.$$

Daraus folgt:

$$\lambda = (\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = -1.$$

Aus $\lambda_{\tau\upsilon} = \lambda_{\psi\varphi}$ und $\lambda_{\tau\upsilon} = \lambda_{\varphi\psi}$ ergibt sich, daß die Flächen 2. Grades durch die Vierseite $TUVW$, $TUWV$ sich selbst auf die erste Art entsprechen. Aber das sind keine reellen Flächen 2. Grades, weil sie zugleich reelle Geraden TU, VW und punktierte TW, UV, bzw. TV, UW enthalten.

III. Eine kurze Erwähnung möge hier auch dem Falle gewidmet werden, in dem die Zykeln eben, also in beide Regelscharen zyklische Projektivitäten 4. Grades gelegt worden sind (planare zyklische Kollineationen). Es ist dann:

$$\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\psi\upsilon} = \bar{g}_0(l_0, \bar{l}_0, l_1, l_2) = g_0(l_0, \bar{l}_0, l_1, l_2) = i,$$
$$\lambda_{\psi\tau} = \lambda_{\upsilon\varphi} = l_0(g_0, \bar{g}_0, g_1, g_2) = \bar{l}_0(g_0, \bar{g}_0, g_1, g_2) = i;$$

daß wir beide Werte gleich i annehmen, ist nur Sache der Bezeichnung. Es liegen g_0l_0, $\bar{g}_0\bar{l}_0$, g_1l_1, g_2l_2, g_3l_3, g_4l_4 auf einem ebenen

Schnitte, der also durch V, W geht (Nr. 632). Jene Werte führen zu: $\lambda_{\tau\upsilon} = 1$, $\lambda_{\varphi\psi} = -1$. Also:

$$\lambda_{\tau\upsilon} = \lambda_{\upsilon\tau} = 1, \quad \lambda_{\varphi\psi} = \lambda_{\psi\varphi} = -1,$$
$$\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\psi\upsilon} = \lambda_{\psi\tau} = \lambda_{\upsilon\varphi} = i, \quad \lambda_{\varphi\tau} = \lambda_{\upsilon\psi} = \lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\varphi\upsilon} = -i.$$

T, U sind beliebige zwei Punkte auf s, τ, υ beliebige Ebenen durch r; aus $\lambda_{\tau\upsilon} = 1$ folgt, daß XX' diese Ebenen τ, υ immer auf der gemeinsamen Gerade r trifft.

Hier wird nur $\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\psi\upsilon}$ erfüllt; die Flächen 2. Grades durch $TVUW$ sind sich selbst entsprechend, was Voraussetzung ist. Da $\lambda^2_{\varphi\psi} = +1$ ist, so liegen X_1 und X_3, X_2 und X_4 auch in einer Ebene durch s, und zweite Potenz der Kollineation ist die windschiefe Involution (r, s). Ferner:

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = -1.$$

G e s c h a r t z y k l i s c h vom Grade 4, d. h. mit geradlinigen Zykeln, ist die Kollineation mit imaginären Axen, deren Invariante $+i$ oder $-i$ ist. Sie entsteht, wenn (g) und (l) eine zyklische Projektivität 4. Grades, bzw. die Identität tragen.

Im übrigen wollen wir, entsprechend der Überschrift, nur I und II weiter betrachten.

In I werden die Doppelbedingungen:

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{U}\mathfrak{W}) = -1, \quad \lambda_{\tau\varphi} = -1, \quad \text{bzw.} \quad (\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathfrak{U}\mathfrak{W}) = -1, \quad \lambda_{\upsilon\psi} = -1$$

erfüllt; sie sagen aus (Nr. 518), daß es z w e i N e t z e v o n F l ä c h e n 2. G r a d e s g i b t, w e l c h e a u f d i e z w e i t e A r t s i c h s e l b s t e n t s p r e c h e n. Dieselben entstehen, wenn P_1, P_2 zu T, V, Q_1, Q_2 zu U, W harmonisch sind, durch die Büschel-Scharen $|UP_1WP_2|$, $|TQ_1VQ_2|$. Da aber P_1 und P_2, Q_1 und Q_2 nicht konjugiert imaginär sind, so sind diese Vierseite nicht reell-imaginär, und e s h a n d e l t s i c h n i c h t u m r e e l l e F l ä c h e n. Sie gehören aber zu dem reellen linearen Systeme 5. Stufe der Flächen 2. Grades, für welche die konjugiert imaginären Geraden p, q polar sind. Diese werden durch die Kollineation einander involutorisch zugeordnet, weil durch (p, q) sich selbst.

In II haben wir:

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = -1, \quad \lambda_{\tau\upsilon} = -1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = -1, \quad \lambda_{\varphi\psi} = -1;$$

d i e s m a l s i n d d i e N e t z e r e e l l, und die Grundvierseite der Büschel-Scharen sind VS_1WS_2, TR_1UR_2, wo R_1, R_2 ein Paar der Involution auf r und S_1, S_2 eins derjenigen auf s ist. Das zweite Vierseit ist ganz reell und das betreffende Netz enthält nur hyperbolische Flächen; im ersten Vierseit können S_1, S_2 reell oder konjugiert imaginär sein, und danach enthält die Büschel-Schar nur elliptische oder nur hyperbolische Flächen.

In beiden Fällen I, II wird auf vier Weisen die Doppelbedingung für sich selbst entsprechende kubische Raumkurven erfüllt (Nr. 521):

In I gilt:

$$\lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\psi\varphi} = \lambda_{\varphi\upsilon} = -i, \quad \lambda_{\psi\tau} = \lambda_{\tau\upsilon} = \lambda_{\upsilon\varphi} = i,$$
$$\lambda_{\tau\upsilon} = \lambda_{\upsilon\varphi} = \lambda_{\varphi\psi} = i, \quad \lambda_{\upsilon\tau} = \lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\psi\varphi} = -i;$$

die Kurven bilden, nach der Bezeichnung von Nr. 521, die Bündel:

$$(T - TW,\ U - UV),^{1)}\ (V - VU,\ W - WT),\ (T - TU,\ W - WV),$$
$$(U - UT,\ V - VW)$$

und sind nur in den beiden ersten reell.

In II gilt:

$$\lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\psi\upsilon} = \lambda_{\upsilon\varphi} = -i, \quad \lambda_{\psi\tau} = \lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\varphi\upsilon} = i,$$
$$\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\varphi\upsilon} = \lambda_{\upsilon\psi} = i, \quad \lambda_{\varphi\tau} = \lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\psi\upsilon} = -i;$$

die Bündel:

$$(T - TW,\ V - VU),\ (U - UV,\ W - WT),\ (T - TV,\ W - WU),$$
$$(U - UW,\ V - VT)$$

enthalten sämtlich nur imaginäre Kurven.

Im Strahlennetze $[p, q]$, bzw. $[r, s]$ ruft die zweite Potenz Identität, die Kollineation selbst also eine involutorische Paarung der Strahlen $l_1 = X_1 X_3$, $l_2 = X_2 X_4$ hervor, welche die Leitgeraden in gepaarten Punkten je ihrer Involution treffen. In I sind die Involutionen (p), (q) konjugiert zueinander, d. h. die konjugiert imaginären Punkte zu zwei gepaarten Punkten der einen bilden ein Paar der andern; so daß, wie notwendig, einem reellen Strahle l_1 ein reeller l_2 zugehört.

Jedes der ∞^2 Netze $[l_1, l_2]$ entspricht sich selbst und enthält mit x_1 auch den ganzen Zyklus $x_1 x_2 x_3 x_4$. Jeder Strahl x_1 gehört, umgekehrt, zu einem dieser Strahlennetze, denn die Regelschar, die er aus $[p, q]$ oder $[r, s]$, etwa aus $[r, s]$ ausscheidet, überträgt die Involution (r) auf s in die Involution $(r)'$, welche dann mit (s) ein Paar gemeinsam hat; dies liefert die Geraden l_1, l_2, in deren Netze sich x_1 befindet.

Die speziellen Strahlenzykeln, die je aus einem Punkt- oder Ebenen-Zyklus sich ergeben und deren aufeinanderfolgende Strahlen sich schneiden, befinden sich im tetraedralen Komplexe der Kollineation. Je zwei gepaarte Geraden l_1, l_2 liefern ∞^1 solche Zykeln,

1) Die Kurven dieses Bündels gehen durch T, U, haben TW, UV zu Tangenten und TWV, UVW zu Schmiegungsebenen, immer konjugiert imaginäre Elemente.

die zwei Regelscharen erzeugen, aus welchen sich die Regelfläche 4. Grades zusammensetzt, in der jener Komplex und das Netz $[l_1, l_2]$ sich schneiden. Die X_1X_2, X_3X_4 bilden die eine, die X_2X_3, X_4X_1 die andere Regelschar, und erzeugt werden diese durch die beiden Projektivitäten, welche auf den involutorisch sich entsprechenden Geraden l_1, l_2 durch die Kollineation hervorgerufen werden.

Ihre Trägerflächen sind involutorisch gepaart und bilden ∞^2 Paare in dem reellen linearen Systeme 3. Stufe der Flächen 2. Grades durch p, q, bzw. r, s, die sämtlich durch die Kollineation involutorisch einander zugeordnet werden, da sie in der zweiten Potenz sich selbst entsprechen. Sich selbst entsprechend in Γ selber auf die erste Art sind darin die Flächen der obigen Büschel-Scharen $|T\ U\ W\ V|$, $|T\ V\ U\ W|$, bzw. $|T\ U\ V\ W|$, $|T\ U\ W\ V|$.

636 Der Eigenschaft der ebenen zyklischen Kollineation 3. Grades (Nr. 360), daß zwei zyklische Dreiecke in drei Weisen perspektiv sind, ist bei der räumlichen zyklischen Kollineation 4. Grades (I und II) analog die Eigenschaft, daß zwei zyklische Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ in vier Weisen hyperboloidisch sind, d. h. die Ecken durch Geraden einer Regelschar verbunden sind.

Wegen der Kollineation ist:

$$A_4A_1(A_2, A_3, B_2, B_3) \barwedge A_1A_2(A_3, A_4, B_3, B_4),$$

also auch:

$$A_4A_1(A_2, A_3, B_2, B_3) \barwedge A_1A_2(A_4, A_3, B_4, B_3).$$

Diese Ebenenbüschel sind perspektiv, also liegen die Schnittlinien A_1A_3, $(A_4A_1B_2, A_1A_2B_4)$, A_1B_3 in einer Ebene oder die drei Ebenen $A_1(A_2B_4,\ A_3B_3,\ A_4B_2)$ gehen durch eine Gerade $a_{1,1}$, ebenso $A_2(A_1B_1, A_3B_3, A_4B_2)$ durch $a_{2,4}$, $A_3(A_1B_1, A_2B_4, A_4B_2)$ durch $a_{3,3}$ und $A_4(A_1B_1, A_2B_4, A_4B_2)$ durch $a_{4,2}$. Diese Geraden sind mit $a_{h,i}$ bezeichnet, wenn sie durch A_h gehen und die Summe der innern Zeiger in den Klammern $\equiv h + i \pmod 4$ ist. Also gehören A_1B_1, A_2B_4, A_3B_3, A_4B_2 einer Regelschar an, und in der Leitschar befinden sich $a_{1,1}$, $a_{2,4}$, $a_{3,3}$, $a_{4,2}$, übrigens auch $b_{1,1}, \ldots$

Das Vorrücken im Zyklus der B lehrt, daß es vier solche Regelscharen gibt:

$$A_1B_1,\ A_2B_4,\ A_3B_3,\ A_4B_2; \quad A_1B_2,\ A_2B_1,\ A_3B_4,\ A_4B_3;$$
$$A_1B_3,\ A_2B_2,\ A_3B_1,\ A_4B_4; \quad A_1B_4,\ A_2B_3,\ A_3B_2,\ A_4B_1.$$

Sie mögen, nach der Zeigersumme, mit $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$, $\mathfrak{R}_1$ bezeichnet werden. $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_4$, $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_1$ sind in der Kollineation involutorisch entsprechend.

Durch die zweite Potenz Γ^2 gehen die Trägerflächen in sich selbst über, aber weder die eine, noch die andere Regelschar Gerade für Gerade; denn z. B. bei $\mathfrak{R}_2$ und ihrer Leitschar vertauschen sich

A_1B_1 und A_3B_3, A_2B_4 und A_4B_2, $a_{1,1}$ und $a_{3,3}$, $a_{2,4}$ und $a_{4,2}$ involutorisch. Daher gehören die Flächen nicht in das System 3. Stufe, das durch die Axen von Γ^2 geht, weil dann die Geraden der einen Regelschar sich selbst entsprächen, sondern in das System 5. Stufe, für welches die Axen polar sind. Es fragt sich, ob die acht Punkte der beiden Zyklen, welche den vier Flächen $\mathfrak{R}$ gemeinsam sind, nicht assoziierte Punkte sind. Sie bilden vier Paare entsprechender Punkte in Γ^2; die sich in dieser selbst entsprechenden Flächen 2. Grades (mit den Axen als Polaren) durch die drei Paare A_1A_3, A_2A_4, B_1B_3 bilden ja ein Netz. Wären B_2B_4 die beiden weiteren Grundpunkte desselben, so müßte (Nr. 630) die Ebene $A_1A_2B_1$ einen von ihnen enthalten, dann würde A_1B_1 oder A_1B_4 von der ihr in Γ korrespondierenden A_2B_2, bzw. A_2B_1 getroffen; aber jene Geraden sind beliebige Geraden und gegen ihre entsprechenden windschief.

Aber vier Paare einer windschiefen Involution bilden auch dann acht assoziierte Punkte, wenn ihre Verbindungslinien der nämlichen Regelschar angehören (Nr. 630). Das ist nicht der Fall. A_1A_3 und A_2A_4 treffen die Axen in Paaren ihrer Involution, welche beliebige sind, da A_1, der die einen Punkte bestimmt, ein beliebiger Punkt ist; ebenso B_1B_3, B_2B_4, weil B_1 beliebig ist. Folglich besteht nicht Gleichheit der Doppelverhältnisse der einen und der andern vier Punkte auf den Axen.

Demnach bestimmen die acht Punkte der beiden Zykeln eindeutig eine Raumkurve K^4 4. Ordnung 1. Art, die sich selbst entspricht als Schnitt $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_3$ oder $\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_4$, ∞^1 Zykeln trägt, sowie einen Büschel sich involutorisch entsprechender Flächen. Die Involution, welche dieser Büschel in eine der Axen einschneidet, geht durch die auf ihr von Γ herrührende in sich selbst über, so daß die beiden Involutionen sich stützen. Sei, indem wir den Fall II nehmen, in dem die Axen die reellen Geraden r, s sind, R_1R_2 das gemeinsame Paar der beiden Involutionen auf r, S_1S_2 das auf s, so geht von den beiden sich selbst entsprechenden Flächen des involutorischen Büschels (K^4) die eine durch V, W, S_1, S_2, die andere durch T, U, R_1, R_2; denn zwei Koinzidenzpunkte müssen mindestens auf ihnen liegen (Nr. 506). Also gehen diese Flächen auf die zweite Art in sich über und gehören in die oben besprochenen Netze, und die Flächen der Büschel durch die verschiedenen K^4 in das lineare System 5. Stufe mit den Axen r, s, bzw. p, q als Polaren.

Die ∞^3 Zykeln bestimmen $\infty^{2\cdot 3-2}$ Kurven K^4; wir erhalten sie, jede Fläche des einen Netzes mit jeder des andern verbindend. Im Falle I sind die Netze zueinander konjugiert imaginär, und reelle Kurven K^4 entstehen durch den Schnitt konjugiert imaginärer Flächen aus den Netzen.

β) Quinär zyklische Kollineationen ($n = 5$).

637 Es sind in zwei verbundene Regelscharen (g) und (l) zyklische Projektivitäten 5. Grades gelegt, unter Vermeidung, daß sie dieselbe primitive fünfte Wurzel der Einheit (oder reziproke) zu Invarianten haben. Diese primitiven Wurzeln, mit denen ja die Invarianten der räumlichen Kollineation Γ gleich sein müssen, sind:

$$\omega_h = \cos\frac{2h\pi}{5} + i\sin\frac{2h\pi}{5}, \quad h = 1, 2, 3, 4.$$

Da alle λ imaginär sind, so wissen wir sofort, daß $\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\psi v}$, $\lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\varphi v}$; denn weil υ zu τ, ψ zu φ konjugiert ist, so ist es auch $\lambda_{v\psi}$ zu $\lambda_{\tau\varphi}$, konjugiert imaginäre ω_h und ω_{5-h} aber sind reziprok; also ist $\lambda_{\psi v} = \lambda_{\tau\varphi}$.

Jede der vier Wurzeln wird ersichtlich drei Invarianten als Wert zukommen, also auch mindestens einmal einer solchen, deren Ebenen nicht konjugiert sind. Es sei $\lambda_{\tau\varphi} = \omega_1$, d. h. wir nennen die beiden Ebenen, denen ω_1 als Wert zukommt, τ, φ; also ist auch $\lambda_{\psi v} = \omega_1$, und $\lambda_{\varphi\tau} = \lambda_{v\psi} = \omega_4$. Nun kann $\lambda_{\tau\psi}$ keinen dieser Werte ω_1, ω_4 haben, denn aus $\lambda_{\tau\psi} \cdot \lambda_{\psi\varphi} \cdot \lambda_{\varphi\tau} = 1$, $\lambda_{\tau\psi} \cdot \lambda_{\psi v} \cdot \lambda_{v\tau} = 1$ würde im ersten Falle $\lambda_{\psi\varphi} = 1$, im andern $\lambda_{v\tau} = 1$ folgen, was nicht möglich ist, weil es zu ebenen Zykeln führen würde. Je nachdem nun $\lambda_{\tau\psi} = \omega_2$ oder ω_3 ist, ergibt sich $\lambda_{v\varphi} = \omega_3$, $\lambda_{\tau v} = \omega_3$, $\lambda_{\varphi\psi} = \omega_1$ oder $\lambda_{v\varphi} = \omega_2$, $\lambda_{\tau v} = \omega_4$, $\lambda_{\varphi\psi} = \omega_2$. Vertauscht man aber τ, υ, φ, ψ mit ψ, φ, υ, τ, so geht die eine Lösung in die andere über. Bleiben wir bei der ersten, so haben wir folgendes Wertesystem:

$$\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\psi v} = \lambda_{\varphi\psi} = \omega_1, \quad \lambda_{\varphi\tau} = \lambda_{v\psi} = \lambda_{\psi\varphi} = \omega_4,$$
$$\lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\varphi v} = \lambda_{v\tau} = \omega_2, \quad \lambda_{\psi\tau} = \lambda_{v\varphi} = \lambda_{\tau v} = \omega_3.$$

Daraus folgt:

$$\lambda = (\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = \frac{1 - \cos\frac{2\pi}{5}}{1 - \cos\frac{4\pi}{5}} = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{5}\right).$$

Von den Bedingungen für Hermitesche Kollineation gilt nur: $\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\psi v}$; also nur die Flächen 2. Grades durch $TVUW$ entsprechen sich selbst: die Voraussetzung. Die beiden linken (oder rechten) Doppelgleichungen sagen aus, daß die kubischen Raumkurven der Bündel: $(T - TV,\ U - UW)$, $(V - VU,\ W - WT)$ sich selbst entsprechen. Die einen haben s, die andern r zur Doppelsekante.

Daß eine kubische Raumkurve, welche durch die fünf Punkte eines Zyklus geht und eine der Koinzidenzgeraden zur Doppelsekante hat, in sich selbst transformiert sind, ist unmittelbar ersichtlich. Die

Kurven des ersten Bündels haben TU, TV, UW zu Doppelsekanten und zwar TV, UW zu Tangenten; die des zweiten VW, VU, WT.

Das Strahlennetz $[r, s]$ entspricht sich selbst; die zyklische Projektivität im zugehörigen Gewindebüschel muß, weil sie reelle, sich selbst entsprechende Elemente, die Strahlengebüsche $[r]$, $[s]$, hat und durch den ungeraden Grad Involution ausgeschlossen ist, Identität sein. Folglich liegt jeder Strahlenzyklus ganz in einem dieser Gewinde durch $[r, s]$.

Umgekehrt, das Gewinde, welches durch einen Strahlenzyklus bestimmt ist, wird in sich selbst transformiert, also auch jedes Strahlennetz, in dem zwei von ihnen sich schneiden, und da die Leitgeraden sich nicht involutorisch korrespondieren können, müssen sie sich selbst entsprechen.

γ) Senär zyklische Kollineationen ($n = 6$).

Von den zyklischen Kollineationen 6. Grades möge zuerst der Fall, wo T und U reell sind, untersucht werden. Die fünf von 1 verschiedenen sechsten Wurzeln der Einheit: 638

$$\omega_h = \cos\frac{h\pi}{3} + i\sin\frac{h\pi}{3}, \quad h = 1, 2, \ldots 5,$$

von denen $\omega_3 = -1$, ω_1 und ω_5, ω_2 und ω_4 konjugiert und reziprok, ω_1 und ω_4, ω_2 und ω_5 entgegengesetzt gleich, ω_1 und ω_5 vom 6., ω_2 und ω_4 vom 3. und ω_3 vom 2. Grade primitiv sind, verteilen sich folgendermaßen auf die Invarianten. Wegen der Involution um r ist $\lambda_{\tau v} = -1$; um s besteht zyklische Projektivität vom Grade $\frac{n}{2} = 3$, also kommen auf $\lambda_{\varphi\psi}$ und $\lambda_{\psi\varphi}$ die Werte ω_2, ω_4; wir nehmen, weil es nur Sache der Bezeichnung ist, $\lambda_{\varphi\psi} = \omega_2$. Da X_1, X_4 mit T in gerader Linie liegen (Nr. 633), so ist $\lambda_{v\varphi}^3 = (X_1, X_4, \upsilon, \varphi) = 1$, weil jene Gerade υ und φ in demselben Punkte (T) trifft; also ist $\lambda_{v\varphi}$ und ebenso $\lambda_{\psi v}$ vom 3. Grade primitiv, während $\lambda_{\tau\varphi}$ und $\lambda_{\psi\tau}$ es vom 6. Grade sind.

Aus:

$$\lambda_{v\varphi} \cdot \lambda_{\varphi\psi} \cdot \lambda_{\psi v} = 1, \quad \lambda_{\tau\varphi} \cdot \lambda_{\varphi\psi} \cdot \lambda_{\psi\tau} = 1,$$

oder:

$$\lambda_{v\varphi} \cdot \lambda_{\psi v} = \frac{1}{\omega_2} = \omega_4, \qquad \lambda_{\tau\varphi} \cdot \lambda_{\psi\tau} = \omega_4$$

folgt:

$$\lambda_{v\varphi} = \lambda_{\psi v} = \omega_2, \qquad \lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\psi\tau} = \omega_5,$$

da $\omega_2{}^2 = \omega_4$, $\omega_5{}^2 = \omega_{10} = \omega_4$.

Also haben wir:

$$\lambda_{\tau v} = \lambda_{v\tau} = \omega_3 = -1,$$

$$\lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\varphi\tau} = \omega_1, \quad \lambda_{\psi\tau} = \lambda_{\tau\varphi} = \omega_5,$$

$$\lambda_{v\varphi} = \lambda_{\varphi\psi} = \lambda_{\psi v} = \omega_2, \quad \lambda_{v\psi} = \lambda_{\psi\varphi} = \lambda_{\varphi v} = \omega_4.$$

Daher:

$$\lambda = (\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = \frac{1-(\omega_4+\omega_5)+\omega_4\omega_5}{1-(\omega_1+\omega_2)+\omega_1\omega_2} = \frac{1}{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{\omega_3} = -1.$$

Zu dieser Kollineation kommen wir durch die Voraussetzung:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ A_2 & A_3 & A_1 & A_5 & A_4 \end{vmatrix};$$

denn erst die sechste Potenz ist die Identität.

Die Ebene $A_1A_2A_3$ ist τ; in ihr besteht zyklische Kollineation 3. Grades, deren Koinzidenzpunkte die imaginären V, W und der reelle $U = (A_1A_2A_3, A_4A_5)$ sind; der andere T ist der vierte harmonische zu U in bezug auf A_4, A_5. Sein Bündel wird auch zyklisch kollinear vom 3. Grade, woraus folgt, daß X_1 und X_4, X_2 und X_5, X_3 und X_6 je auf demselben Strahl durch T liegen, oder daß die dritte Potenz Γ^3 der Kollineation die involutorische Homologie (T, τ) ist (Nr. 633).

Invarianten-Relationen, welche aussagen, daß Flächen 2. Grades auf die erste Art, oder daß kubische Raumkurven in sich übergehen, gibt es nicht. Aber

$$(\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = -1, \quad \lambda_{\tau v} = -1$$

weisen auf ein Netz von Flächen 2. Grades hin, die auf die zweite Art in sich transformiert werden; sie gehen durch die Vierseite VS_1WS_2, wo S_1, S_2 ein Paar der Involution auf s ist; nur die Paare S_1S_2 aus konjugiert imaginären Punkten liefern hyperbolische Flächen.

Die zweite Potenz Γ^2 ist eine zyklische Kollineation 3. Grades mit lauter sich selbst entsprechenden Ebenen durch r und Punkten auf s, auf welcher Gerade beliebige zwei Punkte dann (für Γ^2) als T und U angesehen werden können. Und $\lambda^2_{\tau\varphi} = \lambda^2_{\psi v} = \omega_5{}^2 = \omega_2{}^2 = \omega_4$ sagt aus, daß die sämtlichen Flächen 2. Grades durch die ∞^2 Vierseite $VTWU$, d. h. die Flächen, welche in V, W die Ebenen $s(V, W)$ berühren, in Γ^2 in sich selbst auf die erste Art übergehen. Die Kegelschnitte, welche sie in die Ebenen durch r einschneiden, sind in Γ^2 sich selbst entsprechend: die Träger der Zykeln.

In Γ selbst korrespondiert jeder von diesen Flächen eine andere involutorisch; die beiden Ebenen τ, v schneiden sie in den nämlichen sich selbst entsprechenden Kegelschnitten, von denen der in τ Zykeln 3. Grades, der in v Zykeln 6. Grades trägt. Die derartigen Kegelschnitte in den andern Ebenen durch r sind involutorisch gepaart und tragen (Nr. 633) die abwechselnden Punkte eines Zyklus.

Zwei involutorische Flächen bedingen einen Büschel involutorischer Flächen; das eine Doppelelement ist das Ebenenpaar $\tau\upsilon$, das andere gehört (in sich selbst auf die zweite Art übergehend, die in der zweiten Potenz erste Art wird) in eine der obigen Büschel-Scharen $|V S_1 W S_2|$.

Von jedem Geradenzyklus $x_1 \ldots x_6$ sind x_1 und x_4, x_2 und x_5, x_3 und x_6 in der involutorischen Homologie $\Gamma^3 = (T, \tau)$ entsprechend, schneiden sich also auf τ und liegen in einer Ebene durch T.

In einem der speziellen Strahlenzykeln, die je zu einem Punkt-(oder Ebenen-)Zyklus gehören und vollständig im tetraedralen Komplexe sich befinden (Nr. 631), wird jede Gerade von drei andern getroffen, z. B. x_1 von x_6, x_2, x_4, so daß x_1, x_2, x_5 der einen, x_2, x_4, x_6 der andern von zwei verbundenen Regelscharen angehören. Die Trägerfläche geht durch Γ in sich selbst auf die zweite Art über und trägt ∞^1 solche Zykeln; wir haben ∞^2 derartige Flächen: die Flächen des obigen Netzes.

In der Tat, die Koinzidenzgeraden der zyklischen Projektivitäten 3. Grades (von Γ^2) in den Regelscharen einer solchen Fläche sind imaginär, also gehen sie durch V, W auf r.

Somit haben wir verbundene Regelscharen, die gleichzeitig beide in dem tetraedralen Komplexe sich befinden, was damit zusammenhängt, daß dieser Komplex, wegen $(\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}) = -1$, ein harmonischer ist.[1])

Diese Regelscharen des Komplexes, welche nur durch zwei Ecken V, W des Tetraeders gehen, befinden sich in einem der sechs weiteren vierfach unendlichen Systeme von Regelscharen desselben, die in seinen sechs Systemen von ∞^1 Strahlennetzen enthalten sind.[2])

Ein Zyklus $X_1 \ldots X_6$ und T und τ als Pol und Polarebene bestimmen eine Fläche 2. Grades, welche in (T, τ) sich selbst (in zweiter Art) entspricht. Geht sie durch S_1 auf s, so enthält sie auch den gepaarten Punkt S_2. Die Flächen 2. Grades, für welche T und τ polar sind, ordnen sich also zyklisch zu Tripeln an und drei Flächen eines Tripels haben zwei gepaarte Punkte auf s und sechs Punkte eines Zyklus gemeinsam. In diesem linearen Systeme 6. Stufe befindet sich das obige Netz sich selbst entsprechender Flächen 2. Grades.

Außer diesem ersten Falle senärer zyklischer Kollineation mit 639
zwei reellen Koinzidenzpunkten gibt es drei, bei denen die Koinzidenzpunkte alle vier imaginär sind. Sie ergeben sich, indem in zwei verbundene Regelscharen (g), (l) gelegt werden: 1. eine zyklische Projektivität 3. Grades und eine Involution, 2. eine zyklische

1) Liniengeometrie Bd. III, Nr. 763, 863.

2) Ebenda, Nr. 818.

Projektivität 6. Grades und eine Involution, 3. eine zyklische Projektivität 6. Grades und eine vom 3. Grade. Zwei vom 6. Grade führen zu ebenen Zykeln (Nr. 633). In 1. und 2. sind aber noch die Fälle a), b) zu unterscheiden, daß die Doppelstrahlen r, s der Involution reell sind, oder daß sie, dann l_0, $\bar{l}_0$ genannt, imaginär sind. Die imaginären Koinzidenzstrahlen von (g) mögen g_0, $\bar{g}_0$ und die Bezeichnung der Koinzidenzpunkte wie in Nr. 635 sein.

Die Wertsysteme der Invarianten sind:

$$\begin{aligned}
&1\text{a})\ \lambda_{\tau\varphi}=\lambda_{\varphi\tau}=\lambda_{\upsilon\psi}=\lambda_{\psi\upsilon}=-1,\\
&\quad\ \lambda_{\upsilon\varphi}=\lambda_{\psi\tau}=\omega_1,\ \lambda_{\varphi\upsilon}=\lambda_{\tau\psi}=\omega_5,\\
&\quad\ \lambda_{\tau\upsilon}=\lambda_{\varphi\psi}=\omega_2,\ \lambda_{\upsilon\tau}=\lambda_{\psi\varphi}=\omega_4;\\
&1\text{b})\ \lambda_{\tau\varphi}=\lambda_{\varphi\tau}=\lambda_{\upsilon\psi}=\lambda_{\psi\upsilon}=-1,\\
&\quad\ \lambda_{\upsilon\tau}=\lambda_{\psi\varphi}=\omega_1,\ \lambda_{\tau\upsilon}=\lambda_{\varphi\psi}=\omega_5,\\
&\quad\ \lambda_{\tau\psi}=\lambda_{\varphi\upsilon}=\omega_2,\ \lambda_{\psi\tau}=\lambda_{\upsilon\varphi}=\omega_4;\\
&2\text{a})\ \text{ebenso wie in 1b});\\
&2\text{b})\ \text{ebenso wie in 1a});\\
&3)\ \lambda_{\tau\upsilon}=\lambda_{\upsilon\tau}=-1,\\
&\quad\ \lambda_{\tau\varphi}=\lambda_{\psi\upsilon}=\omega_2,\ \lambda_{\varphi\tau}=\lambda_{\upsilon\psi}=\omega_4,\\
&\lambda_{\tau\psi}=\lambda_{\psi\varphi}=\lambda_{\varphi\upsilon}=\omega_1,\ \lambda_{\upsilon\varphi}=\lambda_{\varphi\psi}=\lambda_{\psi\tau}=\omega_5.
\end{aligned}$$

Wir sehen, die fünf Fälle reduzieren sich auf drei.

Wir haben in 1a) $\equiv$ 2b) zwei Büschel-Scharen von hyperbolischen Flächen 2. Grades, die auf die erste Art in sich selbst übergehen: $|TUWV|$, $|TVUW|$, wegen $\lambda_{\tau\upsilon}=\lambda_{\varphi\psi}$ und $\lambda_{\tau\varphi}=\lambda_{\psi\upsilon}$. Die Flächen der ersten tragen in der Regelschar (TV, UW) eine zyklische Involution 3. Grades, in (TU, VW) eine Involution mit reellen Doppelstrahlen, die der andern in der Regelschar (TV, UW) eine zyklische Projektivität 6. Grades, in (TW, VU) eine Involution mit imaginären Doppelstrahlen.

Die Geraden $TV=p$, $UW=q$ sind den einen und den andern Flächen gemeinsam; die Regelscharen, welche auf sie sich stützen, — es sind diejenigen, welche Involutionen tragen —, erfüllen das Strahlennetz $[p, q]$ und jeder Strahl desselben gehört zu einer Regelschar der einen und der andern Art. Je zwei verschiedene haben zwei Geraden gemeinsam: $l_1=X_1X_3X_5$ und $l_2=X_2X_4X_6$, wo dann aus den g-Scharen der ersten Büschel-Schar durch X_1, X_2, X_3 dieselben Geraden gehen, wie durch X_4, X_5, X_6, hingegen aus denen der zweiten sechs verschiedene, die eben einen Zyklus 6. Grades bilden.

Die l_1 und l_2 sind je in der einen und der andern Involution gepaart; sie sind gemeinsam entsprechend in der windschiefen Involution (TU, VW) und in (TW, UV); sie treffen eben p, q in gepaarten Punkten ihrer Involutionen: mit den Doppelpunkten T, V, bzw. U, W.

Weil l_2 die Punkte X_4, X_6, X_2 trägt, welche in Γ^3 den X_1, X_3, X_5 von l_1 korrespondieren, so sind sie in Γ^3 involutorisch entsprechend. Es folgt aus:

$$\lambda_{\tau v}^3 = \lambda_{\varphi\psi}^3 = \omega_2{}^3 = 1,$$

daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte von Γ^3 den Geraden $\tau\upsilon = r$ und $\varphi\psi = s$ begegnen. Dritte $\left(\frac{n}{2}{}^{\text{te}}\right)$ Potenz Γ^3 ist also die windschiefe Involution (r, s) mit reellen Axen.

Nach Nr. 635 ist Γ als hyperbolisch zu bezeichnen.

Die zweite Potenz ist eine ternäre gescharte, d. h. mit lauter geradlinigen Zykeln $X_1X_3X_5$, $X_2X_4X_6$, deren Träger das Strahlennetz $[p, q]$ erfüllen; was mit $\lambda_{\tau\varphi}^2 = \lambda_{v\psi}^2 = 1$ stimmt.

Im Falle 1b) $\equiv$ 2a) sind die ebenfalls hyperbolischen Flächen der Büschel-Scharen $|TVUW|$ und $|TUWV|$, wegen $\lambda_{\tau\varphi} = \lambda_{\psi v}$, $\lambda_{\tau v} = \lambda_{\varphi\psi}$, sich selbst entsprechend. Auch hier sind den Vierseiten p, q gemeinsam. Unterscheidend ist, daß $\lambda_{\tau\psi}^3 = \lambda_{\varphi v}^3 = 1$ ist und daß also dritte Potenz die windschiefe Involution mit den imaginären Axen $\tau\psi = UV$, $\varphi\upsilon = TW$ ist. Also ist Γ elliptisch.

Man hat die beiden Fälle 1), 2), weil die Zykeln sich auf zwei Geraden (mit abwechselnden Punkten) verteilen, halbgeschart genannt. Bei $n = 4$ würde mit „halbgeschart" nichts ausgesagt sein.

Im Falle 3) besteht nur eine Büschel-Schar $|TVUW|$ sich selbst entsprechender Flächen. Drei Geraden l_1, l_2, l_3 der l-Schar, die sich auf p, q stützt, tragen gegenüberliegende Punkte X_1 und X_4, X_2 und X_5, X_3 und X_6 eines Zyklus. Schon daraus entnehmen wir, daß diesmal die windschiefe Involution, welche dritte Potenz ist, die imaginären Geraden $p = TV$, $q = UW$ zu Axen hat; dies ergibt sich auch aus: $\lambda_{\tau\varphi}^3 = \lambda_{\psi v}^3 = 1$. Also ist Γ elliptisch.

Bemerkenswert ist die Involution um r, auf welche $\lambda_{\tau v} = -1$ hinweist. Die ternären Zykeln $X_1X_3X_5$, $X_2X_4X_6$ der zweiten Potenz Γ^2 liegen also in den Ebenen durch r.

Es ist $\Gamma^2 \cdot \Gamma^3 = \Gamma^3 \cdot \Gamma^2 = \Gamma^5 = \Gamma^{-1}$. Das Produkt der zweiten und 640
dritten Potenz einer senären zyklischen Kollineation ist ihre Umkehrung.

Wir können also, in beliebiger Reihenfolge, die Kollineation 1) zusammensetzen aus der ternären zyklischen Kollineation mit geradlinigen Zykeln, deren Träger zwei konjugiert imaginäre Koinzidenzgeraden treffen, und der hyperbolischen windschiefen Involution, welche die reellen

Koinzidenzgeraden zu Axen hat, die 2) aus jener ternären zyklischen Kollineation und der elliptischen windschiefen Involution, welche die andern konjugiert imaginären Koinzidenzgeraden zu Axen hat, die 3) endlich aus einer allgemeinen ternären und der elliptischen windschiefen Involution mit zwei konjugiert imaginären Koinzidenzgeraden als Axen.

Zu dieser allgemeinen (planaren) ternären zyklischen Kollineation gelangt man übrigens, einfacher als durch zwei ternäre zyklische Projektivitäten in (g), (l), durch die Bestimmung:

$$\left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 T U \\ A_2 A_3 A_1 T U \end{matrix} \right|;$$

denn dadurch wird die Ebene $A_1 A_2 A_3$ sich selbst entsprechend und das Feld in ihr zyklisch kollinear vom 3. Grade; wenn r diejenige Koinzidenzgerade in ihm ist, welche die imaginären Koinzidenzpunkte V, W verbindet, so werden alle Punkte auf $s = TU$ und alle Ebenen durch r sich selbst entsprechend, und die Projektion der Zykeln in $A_1 A_2 A_3$ aus einem Punkte von TU liefert in jede Ebene durch r Zykeln.

Die zyklische Kollineation 6. Grades (Nr. 638) mit zwei reellen Koinzidenzpunkten T, U können wir zusammensetzen aus ihrer zweiten Potenz, einer (planaren) ternären zyklischen Kollineation, deren Zykeln-Ebenen durch r gehen, und der dritten, der involutorischen Homologie (T, τ).

Sechs Punkte bestimmen eine kubische Raumkurve; also könnte man erwarten, daß die sechs Punkte eines Zyklus eine kubische Raumkurve liefern, welche in sich selbst übergeführt wird. Aber bei der Kollineation mit reellen Koinzidenzpunkten T, U ist schon gefunden, daß es keine solchen in sich selbst übergehenden kubischen Raumkurven gibt. In der Tat, die sechs Punkte eines Zyklus liegen ja zu zweien auf drei Strahlen des Bündels T; diese drei Geraden repräsentieren die Kurve.

Aber auch die Fälle 1) und 2) der Kollineation mit lauter imaginären Koinzidenzpunkten liefern nicht drei gleiche Invarianten, also bestehen bei ihnen auch nicht kubische Raumkurven, die in sich selbst übergehen; die Punkte eines Zyklus liegen zu drei auf zwei Geraden.

Dagegen haben wir im Falle 3) der Kollineation mit imaginären Koinzidenzpunkten:

$$\lambda_{\tau\psi} = \lambda_{\psi\varphi} = \lambda_{\varphi v},$$

(womit die andere derartige Gleichheit äquivalent ist); sie lehrt, daß die kubischen Raumkurven des Bündels $(T - TW,\ U - UV)$

in sich selbst übergehen; und die sechs Punkte eines Zyklus müssen je auf einer solchen kubischen Raumkurve liegen, und jede trägt eine zyklische Projektivität 6. Grades.

Für die von einer (unikursalen) kubischen Raumkurve getragene Projektivität: $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 \barwedge X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_1$ gilt, was wir in Nr. 139 gefunden haben, daß sie mit drei Harmonizitäten äquivalent ist:

$$(X_1 X_5 X_3 X_6) = -1, \quad (X_2 X_4 X_3 X_6) = -1, \quad (X_2 X_5 X_4 X_6) = -1;$$

folglich haben wir, durch Projektion aus Doppelsekanten der kubischen Raumkurve, die drei harmonischen Ebenenwürfe:

$$X_2 X_4 (X_1, X_5, X_3, X_6), \quad X_1 X_5 (X_2, X_4, X_3, X_6), \quad X_1 X_3 (X_2, X_5, X_4, X_6).$$

Daraus folgt, daß aus den fünf Punkten $X_1, \ldots X_5$ der sechste X_6 linear vermittels dreier vierten harmonischen Ebenen konstruiert werden kann.[1])

Aus einer zyklischen Kollineation n^{ten} Grades Γ geht durch Multiplikation mit einer involutorischen Korrelation Π, mit welcher sie vertauschbar ist, eine zyklische Korrelation C hervor, und zwar vom Grade n oder $2n$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. 641

Denn weil $\Gamma\Pi = \Pi\Gamma$ und $\Pi^2 = 1$ ist, so können wir die n^{te}, bzw $2n^{\text{te}}$ Potenz von C in der Form schreiben:

$$\Gamma\Pi \cdot \Pi\Gamma \cdot \Gamma\Pi \cdot \Pi\Gamma \ldots \Pi\Gamma;$$

es ergibt sich die n^{te} oder $2n^{\text{te}}$ Potenz von Γ, also die Identität.

Die zweite Potenz einer so entstandenen zyklischen Korrelation C, d. h. diejenige Kollineation, in welcher solche Elemente zugeordnet sind, welche in der Korrelation demselben Elemente in beiderlei Sinne korrespondieren, ist mit dem Quadrat der Kollineation Γ, aus welcher C entstanden ist, identisch.

Jede zyklische Korrelation C hat — ihre Zykeln aus Punkten und Ebenen beweisen es — einen geraden Grad.

Sie sei vom Grade $2n$, wo n ungerade ist.

Dann ist auch C^n eine Korrelation und zwar eine involutorische, denn diese Potenzierung zerlegt jeden Zyklus $2n^{\text{ten}}$ Grades von C in n Zyklen 2. Grades. Ferner ist C^{n+1} eine Kollineation und zwar zyklisch vom Grade n; denn $n(n+1)$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache von $n+1$ und $2n$, welche 2 als größten gemeinsamen

1) Vgl. zum vorangehenden: Lüroth, Math. Annalen Bd. 11, S. 84, Bd. 13, S. 305; Schröter, ebenda Bd. 20, S. 231; Ameseder, Wiener Sitzungsbericht Bd. 98, S. 301 und S. 588; H. Küppers, Kollineationen, durch welche fünf gegebene Punkte des Raums in dieselben fünf Punkte transformiert werden, Diss. Münster 1890; Reye, Geometrie der Lage 3. Aufl.. 3. Abt., Anhang; R. Krause, Über senäre zyklische Kollineationen im Raume, Dissert. von Straßburg 1903; auch Cordiers in Nr. 630 genannte Dissertation.

Teiler haben. C^n und C^{n+1}, als Potenzen derselben Verwandtschaft, sind vertauschbar. Nun ist $C = C^{n+1} \cdot C^n$; also hat sich die Korrelation C als Produkt einer Kollineation n^{ten} Grades in eine mit ihr vertauschbare involutorische Korrelation herausgestellt.

Jetzt sei zweitens C vom Grade $2n$ zyklisch, wo n gerade ist. Besitzt man eine mit C vertauschbare und involutorische Korrelation Π, dann ist dieselbe auch mit jeder Potenz C^h von C vertauschbar, denn man kann ja in $C^h\Pi$ nach und nach Π mit jedem der h Faktoren von C^h vertauschen.

C^n ist eine involutorische Kollineation, also zyklisch vom Grade 2; ihr Produkt in Π ist daher eine ebenfalls involutorische Korrelation (Nr. 596); C^{n+1} ist eine zyklische Korrelation vom Grade $2n$, da $2n$ und $n+1$ teilerfremd sind und deshalb $2n(n+1)$ ihr kleinstes gemeinsame Vielfache ist.

Demnach ist $C^{n+1}\Pi$ eine zyklische Kollineation vom Grade $2n$. Weil nun $C^{n+1}\Pi \cdot \Pi C^n = C^n\Pi \cdot \Pi C^{n+1} = C^{2n+1} = C$, so haben wir C als Produkt einer Kollineation, welche zyklisch vom Grade $2n$ ist, in eine mit ihr vertauschbare involutorische Korrelation erhalten.

Die obige Bedingung, daß eine mit C vertauschbare involutorische Korrelation Π existiert, wird erfüllt, wenn auch nicht immer reell. Denn es gibt stets zwei Flächen 2. Grades, welche durch C (auf die erste Art) in sich übergeführt worden; also gilt dies auch für die Polarräume derselben, und sie sind mit C vertauschbar. Diese Flächen sind harmonisch zu den beiden Kernflächen, und eine von ihnen ist daher die Kernfläche, wenn es sich um den Fall vereinigter Kernflächen handelt, bei dem wir ja einen Spezialfall kennen gelernt haben, wo die Korrelation zyklisch vom Grade 4 ist (Nr. 614).

§ 95. Gruppen von Kollineationen und Korrelationen.

642 Unter einer Gruppe von Verwandtschaften versteht man ein in sich geschlossenes System von einer endlichen Anzahl von Verwandtschaften von der Beschaffenheit, daß jede Verwandtschaft, welche durch die Folge zweier seiner Verwandtschaften entsteht, also ihr Produkt wieder dem Systeme angehört.

Die Potenzen einer Verwandtschaft der Gruppe sind in ihr alle enthalten; also kann sie, wegen ihrer Endlichkeit, nur zyklische Verwandtschaften besitzen, die eine endliche Anzahl von Potenzen haben.

Wir haben hier nur die Absicht, interessante Beispiele von

Gruppen vorzuführen. Wir fangen mit involutorischen Verwandtschaften an, weil da der Produktbegriff am einfachsten ist (Nr. 596).

Ein beliebiges Tetraeder $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ führt zu den einfachsten Gruppen vertauschbarer involutorischer Verwandtschaften. Die Identität (oder 1) und die drei windschiefen Involutionen (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC), von welchen jede die Identität zum Quadrate und je zwei die dritte zum Produkt haben (Nr. 597), bilden eine Gruppe. Ferner haben wir sechs Gruppen wie: 1, (A, α), (B, β), $(AB, CD) \equiv (AB, \alpha\beta)$ mit derselben Eigenschaft. Alle diese Untergruppen werden umfaßt von der Gruppe von acht Verwandtschaften:

$$1,\ (A, \alpha),\ (B, \beta),\ (C, \gamma),\ (D, \delta),\ (AB, CD),\ (AC, BD),\ (AD, BC).$$

Diese acht Transformationen führen jede Fläche 2. Grades, für welche $ABCD$ Polartetraeder ist, in sich selbst über.

Wird δ unendlich fern, so ergeben sich, außer der Identität, lauter Symmetrien und zwar 1) die Symmetrie in bezug auf D, 2) die drei Symmetrien in bezug auf α, β, γ mit Symmetriestrahlen, die zu $D(A, B, C)$ parallel sind, 3) die drei Symmetrien in bezug auf diese drei Geraden, wobei die Symmetriestrahlen zu den Ebenen $D(BC, CA, AB)$ parallel sind. Heben wir hervor, daß jede zwei von den 2) die dritte zum Produkt haben, daß dasselbe für die drei Symmetrien in bezug auf D, α, DA gilt, oder in bezug auf α, β, DC.

Die Symmetrien 2), 3) werden sämtlich normal, Symmetrien schlechthin, wenn das Dreikant $D(A, B, C)$ dreirechtwinklig ist.

Jedes Dreikant von konjugierten Durchmessern einer Fläche 2. Grades, insbesondere das der drei Axen, führt zu einer Gruppe von Symmetrien, in denen die Fläche sich selbst entspricht.

Schneidet man mit einer Ebene des Tetraeders oder projiziert aus einer Ecke, so ergibt sich eine Gruppe, bestehend aus der Identität und drei involutorischen Homologien, in der Ebene oder im Bündel.

Zu einer interessanten Gruppe[1]) von 32 Verwandt- 643
schaften, 16 Kollineationen und Korrelationen, führen sechs Nullräume $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots \mathfrak{N}_6$, welche gegenseitig vertauschbar oder in Involution sind. Der erste $\mathfrak{N}_1$ kann willkürlich gewählt werden aus den ∞^5 Nullräumen, der zweite $\mathfrak{N}_2$ aus dem linearen Systeme 4. Stufe der Nullräume, die zu $\mathfrak{N}_1$ in Involution sind, $\mathfrak{N}_3$ aus dem linearen Systeme 3. Stufe derjenigen, die zu $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ zugleich in Involution sind, usw., $\mathfrak{N}_6$ endlich ist, nachdem $\mathfrak{N}_1, \dots \mathfrak{N}_5$ gegeben sind, eindeutig bestimmt (Nr. 534); so daß ∞^{15} Sextupel von solchen Nullräumen möglich sind.

Derartige Sextupel von 6 Nullräumen oder Gewinden in Involution

1) F. Klein, Math. Annalen Bd. 2 S. 198.

kommen in der Liniengeometrie wiederholt vor: bei sechs konfokalen Kongruenzen 2. Ordnung 2. Klasse (mit derselben Brennfläche), bei einem Systeme konsingulärer Komplexe 2. Grades (mit derselben singulären Fläche).[1])

Das Produkt zweier von den sechs Nullräumen, $\mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{N}_k$, ist (Nr. 598) die windschiefe Involution $\mathfrak{J}_{ik}$, welche zu Axen die Leitgeraden des Strahlennetzes hat, in dem sich die zugehörigen Gewinde $(\mathfrak{N}_i)$, $(\mathfrak{N}_k)$ schneiden. Und das Produkt von $\mathfrak{N}_i$ und $\mathfrak{J}_{ik}$ ist der andere Nullraum $\mathfrak{N}_k$.

Multipliziert man aber $\mathfrak{N}_i$ mit $\mathfrak{J}_{kl}$, so ergibt sich etwas Neues. Vertauschbar sind die beiden Faktoren. Denn $\mathfrak{N}_i$, vertauschbar mit $\mathfrak{N}_k$ und $\mathfrak{N}_l$, führt die Gewinde $(\mathfrak{N}_k)$, $(\mathfrak{N}_l)$ in sich selbst über, also auch das Schnitt-Strahlennetz und die zugehörige windschiefe Involution $\mathfrak{J}_{kl}$; und zwar befinden sich die Axen von $\mathfrak{J}_{kl}$ in $(\mathfrak{N}_i)$; denn weil $(\mathfrak{N}_k)$ und $(\mathfrak{N}_l)$ zu $(\mathfrak{N}_i)$ in Involution sind, so gilt (Nr. 534) dies für den ganzen Büschel, den sie bilden, also auch für die beiden Gebüsche, so daß deren Axen, die Leitgeraden des Strahlennetzes und Axen von $\mathfrak{J}_{kl}$, sich in $(\mathfrak{N}_i)$ befinden. Dann ist (Nr. 599) das Produkt ein Polarraum; seine Basisfläche trägt diejenige Regelschar aus $(\mathfrak{N}_i)$, welche jene Leitgeraden in ihrer Leitschar hat, welche also dem $(\mathfrak{N}_i)$ und dem Strahlennetze $(\mathfrak{N}_k)(\mathfrak{N}_l)$, daher den drei Gewinden $(\mathfrak{N}_i)$, $(\mathfrak{N}_k)$, $(\mathfrak{N}_l)$ gemeinsam ist. Wir nennen diesen Polarraum $\mathfrak{P}_{ikl}$.

Nun läßt sich beweisen, daß die beiden Regelscharen $(\mathfrak{N}_1)(\mathfrak{N}_2)(\mathfrak{N}_3)$, $(\mathfrak{N}_4)(\mathfrak{N}_5)(\mathfrak{N}_6)$ von derselben Fläche getragen werden; weil nämlich $\mathfrak{N}_4$, $\mathfrak{N}_5$, $\mathfrak{N}_6$ zu $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ in Involution sind, so befinden sich die Leitgeraden der Strahlennetze $(\mathfrak{N}_1)(\mathfrak{N}_2)$, $(\mathfrak{N}_1)(\mathfrak{N}_3)$, $(\mathfrak{N}_2)(\mathfrak{N}_3)$ in den Gewinden $(\mathfrak{N}_4)$, $(\mathfrak{N}_5)$, $(\mathfrak{N}_6)$, also in der ihnen gemeinsamen Regelschar; andererseits enthalten alle drei Strahlennetze die den $(\mathfrak{N}_1)$, $(\mathfrak{N}_2)$, $(\mathfrak{N}_3)$ gemeinsame Regelschar; folglich befinden sich die sechs Geraden in der dieser verbundenen Regelschar, welche daher mit der vorherigen identisch ist.

Danach ist $\mathfrak{P}_{123} \equiv \mathfrak{P}_{456}$; derartig, daß die eine Regelschar der Basisfläche den Gewinden $(\mathfrak{N}_1)$, $(\mathfrak{N}_2)$, $(\mathfrak{N}_3)$, die andere den $(\mathfrak{N}_4)$, $(\mathfrak{N}_5)$, $(\mathfrak{N}_6)$ gemeinsam ist; und wir haben nur zehn Polarräume.[2])

Aus $\mathfrak{N}_i\mathfrak{J}_{kl} = \mathfrak{J}_{kl} \cdot \mathfrak{N}_i = \mathfrak{P}_{ikl}$ folgt dann: $\mathfrak{N}_i\mathfrak{P}_{ikl} = \mathfrak{P}_{ikl}\mathfrak{N}_i = \mathfrak{J}_{kl}$, $\mathfrak{J}_{kl}\mathfrak{P}_{ikl} = \mathfrak{P}_{ikl}\mathfrak{J}_{kl} = \mathfrak{N}_i$.

Weiter ist $\mathfrak{P}_{123} \cdot \mathfrak{N}_4 = \mathfrak{P}_{456}\mathfrak{N}_4 = \mathfrak{J}_{56}$, $\mathfrak{P}_{123} \cdot \mathfrak{J}_{45} = \mathfrak{P}_{456} \cdot \mathfrak{J}_{45} = \mathfrak{N}_6$, $\mathfrak{J}_{12}\mathfrak{J}_{13} = \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{J}_{23}$, $\mathfrak{J}_{12} \cdot \mathfrak{J}_{34} = \mathfrak{J}_{12}\mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_4 = \mathfrak{P}_{123}\mathfrak{N}_4 = \mathfrak{J}_{56}$, $\mathfrak{J}_{12} \cdot \mathfrak{P}_{134} = \mathfrak{J}_{12} \cdot \mathfrak{J}_{13}\mathfrak{N}_4 = \mathfrak{J}_{23}\mathfrak{N}_4 = \mathfrak{P}_{234}$; $\mathfrak{P}_{123} \cdot \mathfrak{P}_{145} = \mathfrak{P}_{123} \cdot \mathfrak{P}_{236}$

1) Liniengeometrie Bd. I Nr. 185, Bd. II Nr. 385, Bd. III Nr. 540.

2) Vgl. hierzu die Anmerkung in Nr. 597.

$= \mathfrak{N}_1 \mathfrak{I}_{23} \mathfrak{I}_{23} \mathfrak{N}_6 = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_6 = \mathfrak{I}_{16}$. Damit sind alle Fälle erschöpft, und durchweg gilt Vertauschbarkeit. Die Gruppe besteht also aus der Identität, 15 windschiefen Involutionen, sechs Nullräumen, zehn Polarräumen.

Die Trägerflächen zweier der Polarräume sind stets harmonisch zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt, weil das Produkt eine windschiefe Involution ist (Nr. 598). Es treten je beide Fälle der Vertauschbarkeit einer $\mathfrak{I}$ mit einem $\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{P}$ auf.

Die Gruppe enthält Untergruppen von 4, 8, 16 Verwandtschaften, von je zwei, drei, vier Nullräumen herrührend:

von $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 : 1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{I}_{12}$;

von $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3 : 1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{I}_{12}, \mathfrak{I}_{13}, \mathfrak{I}_{23}, \mathfrak{P}_{123}$;

von $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{N}_4 : 1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{N}_4, \mathfrak{I}_{12}, \mathfrak{I}_{13}, \mathfrak{I}_{23}, \mathfrak{I}_{14}, \mathfrak{I}_{24}, \mathfrak{I}_{34}, \mathfrak{P}_{123}, \mathfrak{P}_{124}, \mathfrak{P}_{134}, \mathfrak{P}_{234}$ und $\mathfrak{I}_{56}$.[1]) Diese letzte muß zur Gruppe gehören, weil $\mathfrak{P}_{123} \mathfrak{N}_4 = \mathfrak{I}_{56}$, $\mathfrak{I}_{12} \cdot \mathfrak{I}_{34} = \mathfrak{I}_{56}$. Ihre Axen sind den vier Gewinden $(\mathfrak{N}_1), \ldots (\mathfrak{N}_4)$ gemeinsam, als die Leitgeraden des Strahlennetzes $(\mathfrak{N}_5)(\mathfrak{N}_6)$, dessen sämtliche Gewinde zu jenen vier in Involution sind; weshalb $\mathfrak{I}_{56}$ auch $\mathfrak{I}_{1234}$ genannt werden kann.

Fünf gegenseitig sich stützende Nullräume $\mathfrak{N}_1, \ldots \mathfrak{N}_5$ führen zur vollen Gruppe; $\mathfrak{N}_6$ ist ja durch sie bestimmt.

Die 16 Kollineationen für sich bilden eine Gruppe, und von ihr sind die in jenen Untergruppen enthaltenen wiederum Untergruppen.

Die Axen von $\mathfrak{I}_{56}$ (die Leitgeraden des Strahlennetzes $(\mathfrak{N}_5)(\mathfrak{N}_6)$) befinden sich in den Strahlennetzen $(\mathfrak{N}_1)(\mathfrak{N}_2)$ und $(\mathfrak{N}_3)(\mathfrak{N}_4)$, treffen also die Axen von $\mathfrak{I}_{12}$, $\mathfrak{I}_{34}$ und diese tun es auch untereinander. Bei $\mathfrak{I}_{12}, \mathfrak{I}_{34}, \mathfrak{I}_{56}$ bilden die drei Axenpaare die Gegenseitenpaare eines windschiefen Vierecks: die eine Bedingung, daß zwei von ihnen vertauschbar sind und die dritte zum Produkte haben. Dagegen bei $\mathfrak{I}_{12}, \mathfrak{I}_{13}, \mathfrak{I}_{23}$ befinden sie sich in derselben Regelschar, der verbundenen derjenigen, die den Gewinden $(\mathfrak{N}_4)(\mathfrak{N}_5)(\mathfrak{N}_6)$ gemeinsam ist; es wird die andere Bedingung erfüllt (Nr. 597).

Wir wenden uns jetzt zu Gruppen, welche nicht bloß in- 644
volutorische Verwandtschaften enthalten. Es muß dann jeder Verwandtschaft ein bestimmter Transformationssinn gegeben werden, und wir unterscheiden sie von ihrer Umkehrung, die wir wieder als ihre $(-1)^{\text{te}}$ Potenz bezeichnen.

Die einfachsten räumlichen sind diejenigen Gruppen, zu welchen die regelmäßigen Polyeder führen, wenn man diese mit sich selbst zur Deckung bringt: durch Drehungen um Axen, welche durch den Mittelpunkt gehen. Eine der

1) Diese Gruppe von 16 Elementen wird auf eine andere Weise in der in Nr. 630 erwähnten Dissertation von Cordier hergestellt und aus ihr als Untergruppe eine Gruppe von 96 Elementen.

ältesten Dualitäts-Beobachtungen ist (Maurolycus im 16. Jahrhundert und Kepler), daß die regelmäßigen Polyeder sich paaren (Hexaeder-Oktaeder, Dodekaeder-Ikosaeder, Tetraeder zu sich selbst), derartig, daß von zwei gepaarten das eine m μ-kantige Flächen und n ν-kantige Ecken und das andere m μ-kantige Ecken und n ν-kantige Flächen hat, während die Kantenzahl bei beiden gleich ist.

Derselben Kugel können zwei duale Polyeder so eingeschrieben werden, daß die Ecken eines jeden die sphärischen Mittelpunkte der den Polygonen des andern umgeschriebenen Kreise sind. Daraus folgt dann, daß zu dualen Polyedern dieselbe Gruppe der Drehungen gehört.

Die Anzahl der Drehungen ist doppelt so groß als die der Kanten; weil eine bestimmte Kante auf zwei Weisen mit jeder der Kanten zur Deckung gebracht werden kann, AB mit AB selbst und mit BA und, wenn CD eine zweite Kante ist, mit CD und DC. Durch jede solche Deckung ist eindeutig die Deckung des ganzen Polyeders mit sich selbst festgelegt.

Danach umfaßt die Tetraeder-Gruppe 12, die Hexaeder-Oktaeder-Gruppe 24 und die Dodekaeder-Ikosaeder-Gruppe 60 Deckungsdrehungen, unter denen immer die Identität sich befindet.

Wir wollen die mittlere Gruppe genauer vornehmen und dabei zunächst vom Hexaeder ausgehen. Die Gegenecken seien gleichartig bezeichnet A und A', ... D und D', die verbindenden Diagonalen a, b, c, d; wenn $AC'BD'$ und $A'CB'D$ zwei Gegenflächen sind,[1]) so sind die andern $AB'CD'$ und $A'BC'D$, $AB'DC'$ und $A'BD'C$; die Verbindungslinien ihrer Mittelpunkte, die Axen des Hexaeders und Diagonalen XX', YY', ZZ' des Oktaeders seien einfach mit x, y, z bezeichnet.

Die vier Diagonalen a, b, c, d haben 24 Permutationen und daher auch 24 Substitutionen, welche eine Grundpermutation, etwa $abcd$, in sämtliche Permutationen überführen. Diese Substitutionen kann man in Zykeln schreiben, und sie zerfallen in fünf Typen:

$$(a)(b)(c)(d),\ (a)(b)(cd),\ (ab)(cd),\ (a)(bcd),\ (abcd),$$

von denen z. B. $(ab)(cd)$, $(a)(bcd)$ folgende Überführungen bezeichnen:

$$\begin{matrix} abcd & abcd \\ badc, & acdb. \end{matrix}$$

Die Zahl der Substitutionen der Typen ist:

$$1,\ 6,\ 3,\ 8,\ 6.$$

Jede Substitution entspricht einer Drehung unserer Gruppe, die eben

1) Es ist die Bezeichnung von Möbius; s. Nr. 647. — X ist sphärischer Mittelpunkt von $AC'BD'$, usw.

die Diagonalen a, b, c, d in die Diagonalen der zweiten Permutation überführt. Die Substitutionentheorie sagt dann: die Gruppe der Drehungen ist dem Systeme der Substitutionen holoedrisch isomorph.

Dem ersten Typus entspricht die Identität, die auch $\triangle_0$ genannt werde. Bezeichnen wir die Vertauschungen der Ecken auch durch Zykeln, so daß z. B. (BCD) bedeutet, daß B, C, D sich auf C, D, B legen, so entsprechen den obigen vier Substitutionen $(a)(b)(cd)$, $(ab)(cd)$, $(a)(bcd)$, $(abcd)$ folgende Drehungen:

$$\begin{aligned}
&\triangle_1 \quad (AA')(BB')(CD')(C'D),\\
&\triangle_2 \quad (AB)(A'B')(CD)(C'D'),\\
&\triangle_3 \quad (A)(A')(BCD)(B'C'D'),\\
&\triangle_4 \quad (AB'CD')(A'BC'D).
\end{aligned}$$

$\triangle_1$ ist die Umwendung (Drehung um π) um die Querlinie, welche die Gegenkanten CD', $C'D$ senkrecht halbiert, oder die (normale) Symmetrie in bezug auf diese Gerade.

$\triangle_2$ ist die Umwendung um die Axe x, welche die Mittelpunkte der Gegenflächen $AC'BD'$ und $A'CB'D$ verbindet.

$\triangle_3$ ist die Drehung um die Diagonale AA' durch den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ in dem einen Sinne; dreht man um denselben Winkel im andern Sinne (oder um $\frac{4\pi}{3}$ im ersten), so ergibt sich die Umkehrung $\triangle_3^{-1}$ oder zweite Potenz $\triangle_3^2$:

$$(A)(A')(BDC)(B'D'C').$$

$\triangle_4$ endlich ist die Drehung um die Axe y zwischen den Gegenflächen $AB'CD'$, $A'BC'D$ um $\frac{\pi}{2}$ in dem einen Sinne. Die Umkehrung: Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im andern Sinne oder um $\frac{3\pi}{2}$ im ersten ist die dritte Potenz:

$$(AD'CB')(A'DC'B).$$

Die zweite Potenz läßt jeden der Zykeln 4. Grades in zwei Zykeln 2. Grades zerfallen:

$$(AC)(B'D')(A'C')(BD)$$

und ist Umwendung um die Axe y, also eine Drehung von der Art $\triangle_2$.

Die Potenzierung eines Zyklus von m Elementen oder m^{ten} Grades ist in Nr. 143 besprochen worden; $(A_1 A_2 \ldots A_m)^k$ ist $(A_1 A_{1+k} A_{1+2k} \ldots)$ und ist wiederum ein Zyklus m^{ten} Grades, wenn k zu m teilerfremd ist, zerfällt hingegen in d Zykeln $\left(\frac{m}{d}\right)^{\text{ten}}$ Grades, wenn dies nicht der Fall und d der größte gemeinsame Teiler von m und k ist. So ist $(AB'CD')^2 = (AC)(B'D')$, $(AB'CD')^3 = (AD'CB')$.

Die m^{te} Potenz ist die Identität, äquivalent der 0^{ten}, und ähnlich kann der Exponent jeder höheren modulo m reduziert werden; die $(m-1)^{\text{te}}$ oder $(-1)^{\text{te}}$ Potenz liefert die Umkehrung.

Die Erhebung einer Transformation zur k^{ten} Potenz verlangt, daß alle ihre Zykeln zu dieser Potenz erhoben werden; man erhält die Identität, wenn man mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen n der Grade der verschiedenen Zykeln potenziert; dies ist dann der Grad der Transformation; in den Fällen 2, 3, 4, ... gebraucht man dann auch die Worte binär, ternär, ...

Die Transformation hat also nur n Potenzen. Ersichtlich ist:

$$S^i S^k = S^k S^i = S^{i+k};$$

daher sind zwei Potenzen derselben Transformation stets vertauschbar.

Weil in einer Gruppe alle Potenzen einer ihr angehörigen Transformation enthalten sind, so folgt, daß ihr die Identität und die Umkehrung jeder ihrer Transformationen angehört.

645 In unserem Systeme haben wir außer der Identität $\triangle_0$ oder 1: 1) 6 Drehungen von der Art $\triangle_1$, 2) 3 von der Art $\triangle_2$, 3) $4 \cdot 2 = 8$ von der Art $\triangle_3$ und 4) $3 \cdot 2 = 6$ von der Art $\triangle_4$, entsprechend den 1, 6, 3, 8, 6 Anzahlen der Diagonalen-Substitutionen von den verschiedenen Typen.

Die Drehungen 1), 2) sind involutorisch: windschiefe Involutionen mit der Drehaxe und der unendlich fernen Gerade der zu ihr normalen Ebenen als Axen.

Die Drehungen 3), 4) sind ternäre, bzw. quaternäre planare zyklische Kollineationen. Die eine reelle Koinzidenzgerade ist die Drehaxe, welche eine Identität trägt, wie das die Planarität fordert, die andere ist die genannte unendlich ferne Gerade; sie trägt im ersten Falle diejenige ternäre zyklische Projektivität, über der regelmäßige Dreistrahlen stehen, in dem zweiten Falle die absolute Involution; die Ebenen durch sie enthalten die Zykeln.

Da zwei der Drehungen hintereinander (in beiden Reihenfolgen) vorgenommen das Hexaeder in sich überführen, müssen beide Produkte Drehungen aus unserm Systeme sein, also bildet es eine Gruppe. Auch die beiden zugehörigen Diagonalen-Substitutionen geben multipliziert wieder eine Substitution. Aber es ist wertvoll, solche Produkte auszuführen. Multiplizieren wir z. B. $\triangle_1$ und $\triangle_2$:

$$\begin{array}{l} \triangle_1 \left\{ \begin{array}{l} AA'BB'CC'DD' \\ A'AB'BD'DC'C, \end{array} \right. \\ \triangle_2 \left\{ \begin{array}{l} \\ B'BA'AC'CD'D \end{array} \right. \end{array} \quad \text{also} \quad \triangle_1 \triangle_2 \left\{ \begin{array}{l} AA'BB'CC'DD' \\ B'BA'AC'CD'D \end{array} \right. ;$$

daher ist $\triangle_1\triangle_2$ in Zykeln geschrieben: $(CC')(DD')(AB')(A'B)$, eine Drehung $\triangle_1$, die Umwendung um die Querlinie zwischen AB' und $A'B$; und $\triangle_2\triangle_1$ ist dieselbe Umwendung. Man überzeugt sich leicht, daß die Axenpaare dieser drei windschiefen Involutionen die Gegenseitenpaare eines unebenen vollständigen Vierecks sind: die notwendige Bedingung dafür, daß je zwei von ihnen vertauschbar sind und die dritte ihr Produkt ist.

Aber z. B. $\triangle_1$ und $\triangle_3$ sind nicht vertauschbar. $\triangle_1\triangle_3$ ist $(AA')(DD')(BC')(B'C)$, $\triangle_3\triangle_1$ hingegen

$$(AA')(CC')(BD')(B'D);$$

das sind die Umwendungen um die Querlinien zwischen BC', $B'C$, bzw. BD', $B'D$. Nennen wir sie $\triangle_1'$, $\triangle_1''$, so folgt aus:

$$\triangle_1\triangle_3 = \triangle_1', \quad \triangle_3\triangle_1 = \triangle_1''$$

durch Vor-, bzw. Nachmultiplikation mit $\triangle_1$, deren Quadrat die Identität ist:

$$\triangle_3 = \triangle_1\triangle_1' = \triangle_1''\triangle_1.$$

Wenn S, T zwei der Drehungen sind, so findet man diejenigen V, W, mit denen S nach-, bzw. vormultipliziert werden muß, damit sich T ergebe:

$$SV = T, \qquad WS = T$$

offenbar durch:

$$V = S^{-1}T, \quad W = TS^{-1},$$

also durch Vor-, Nachmultiplikation von T mit der Umkehrung S^{-1}, oder auch folgendermaßen: es sei z. B. $S = \triangle_3$, $T = \triangle_4$,

$$\triangle_3 \begin{cases} AA'BB'CC'DD' \\ AA'CC'DD'BB' \end{cases}, \quad \triangle_4 \begin{cases} AA'BB'CC'DD' \\ B'BC'CD'DA'A \end{cases};$$

also ist:

$$V \begin{cases} AA'CC'DD'BB' \\ B'BC'CD'DA'A \end{cases} \quad \text{oder} \quad (AB')(A'B)(CC')(DD').$$

Schreibt man aber in $\triangle_3$ die zweite Zeile ebenso wie in $\triangle_4$:

$$\triangle_3 \begin{cases} D'DB'BC'CA'A \\ B'BC'CD'DA'A \end{cases},$$

so ist:

$$W \begin{cases} AA'BB'CC'DD' \\ D'DB'BC'CA'A \end{cases} \quad \text{oder} \quad (AD')(A'D)(BB')(CC').$$

Wir übertragen den Begriff des Operierens mit einer Substitution auf eine andere auf unsere Verwandtschaften (mit Sinn) oder besser Transformationen. Eine Transformation S sei durch die beiden Zeilen

$$\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{B},$$

in denen korrespondierende Elemente untereinander stehen, bezeichnet. Wir verändern die Elemente von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ so, wie es durch eine zweite Transformation $T = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ vorgeschrieben wird; wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dadurch in $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ übergehen, so ist:

$$\begin{array}{c}\mathfrak{A}' \\ \mathfrak{B}'\end{array}$$

das Ergebnis Z der Operation von T auf S. Weil die Veränderung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}'$ in derselben Weise erfolgt, so müssen die Zykeln von $\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'}$ ebenso beschaffen sein wie die von $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$; die beiden Transformationen S und Z sind gleichartig.

Es sei wieder $S = \triangle_3$, $T = \triangle_4$; so ist:

$$\begin{array}{ll}\mathfrak{A} & AA'BB'CC'DD' \\ \mathfrak{B} & AA'CC'DD'BB';\end{array}$$

dies geht durch T über in:

$$\begin{array}{ll}\mathfrak{A}' & B'BC'CD'DA'A \\ \mathfrak{B}' & B'BD'DA'AC'C;\end{array}$$

daher ist Z $(B')(B)(C'D'A')(CDA)$, gleichartig mit S.

Man kann auch direkt die Zykeln von S so ändern, wie es T vorschreibt, und erhält die von Z; in der Tat:

$\triangle_3$ $(A)(A')(BCD)(B'C'D')$ geht durch $\triangle_4$ in $(B')(B)(C'D'A')(CDA)$ über.

Der Übergang von $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{B}'$ kann aber in drei Schritten vollzogen werden: von $\mathfrak{A}'$ zu $\mathfrak{A}$, von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$, von $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{B}'$; das sind aber die drei Transformationen T^{-1}, S, T, und so ergibt sich Z als dreifaktoriges Produkt:

$$Z = T^{-1}ST.$$

Daraus folgt durch Vormultiplikation mit T:

$$TZ = ST.$$

Wir operieren auf das Produkt TS mit T, so ist das Ergebnis $T^{-1}(TS)T = T^{-1}TST = ST$, das Produkt in umgekehrter Reihenfolge.

Die beiden Produkte ST und TS sind stets gleichartig. Dies zeigte sich oben bei $\triangle_1$ und $\triangle_3$.

Wenn S und T vertauschbar sind, so daß $ST = TS$, so ergibt sich: $TZ = TS$, also durch Vormultiplikation mit T^{-1}: $Z = S$; das Ergebnis der Operation von T auf S ist S. Und umgekehrt, reproduziert sich S, wenn darauf mit T operiert wird, dann ist $TS = ST$, also sind S und T vertauschbar. Und wir haben folgendes wertvolle Kennzeichen für Vertauschbarkeit von S und T: Reproduktion einer der beiden Verwandtschaften, wenn mit der andern auf sie operiert wird.

Diese Reproduktion kann ja auch dahin ausgesprochen werden: Zwei entsprechende Elemente von S werden durch T in zwei wiederum in S entsprechende Elemente übergeführt (Nr. 596); denn der Erfolg der Operation von T auf S, wodurch im allgemeinen Z sich ergibt, ist: Zwei korrespondierende Elemente von S werden durch T in zwei korrespondierende Elemente von Z übergeführt.

Ferner, wenn S und T vertauschbar sind, so reproduziert sich auch das Produkt, wenn mit T (oder S) darauf operiert wird; also sind zwei vertauschbare Transformationen auch mit ihrem Produkte vertauschbar, wie wir schon wissen (Nr. 596).

In unserer Gruppe von 24 Kollineationen haben wir mehrfach 646
Untergruppen; z. B. die n Potenzen einer von ihnen, wenn n der Grad ist.

Die drei Umwendungen um die Axen des Hexaeders bilden mit der Identität eine solche Untergruppe (Nr. 642); ferner z. B. die Identität, $\triangle_1$, $\triangle_2$ und ihr Produkt.

Zu einer Untergruppe von 12 Drehungen führen die beiden regelmäßigen Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$, welche dem Hexaeder eingeschrieben sind; die Identität und die elf Drehungen 2) und 3) führen jedes von ihnen in sich selbst über. Also bilden die zwölf Drehungen des regelmäßigen Tetraeders (beiden gemeinsam) eine Untergruppe der Hexaederdrehungen; die drei Axen des Hexaeders sind die Querlinien für beide Tetraeder und die Diagonalen des Hexaeders sind die Höhen der Tetraeder. Diese Gruppe enthält die Gruppe der Drehungen um die Axen als weitere Untergruppe.

Betrachten wir $ABCD$ allein, so ergibt sich:

Die zwölf Drehungen des regelmäßigen Tetraeders sind durch folgende drei Typen ausgedrückt:

$$(A)(B)(C)(D), \quad (AB, CD), \quad (A)(BCD);$$

sie sind holoedrisch isomorph den geraden Substitutionen der vier Elemente $ABCD$ (die sich in eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente zerlegen lassen), der Hälfte aller Substitutionen, daher hemiedrisch isomorph zu dem System aller.

Für das Oktaeder (mit der obigen Bezeichnung) sind $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ in folgender Weise zu schreiben:

$$\begin{array}{ll}
\triangle_1 & (XX')(YZ')(Y'Z), \\
\triangle_2 & (X)(X')(YY')(ZZ'), \\
\triangle_3 & (XYZ)(X'Y'Z'), \\
\triangle_4 & (Y)(Y')(XZX'Z');
\end{array}$$

denn z. B. $\triangle_1$ transformiert die (sphärische) Mitte Y von AC in die Mitte Z' von $A'D'$.

Auf jede der sechs Diagonalen-Substitutionen kommen hier vier Drehungen, z. B. auf $(x)(yz)$:

$$(XX')(YZ)(Y'Z'),\ (XX')(YZ')(Y'Z),\ (X)(X')(XZX'Z'),$$
$$(X)(X')(XZ'X'Z),$$

zwei 1) und zwei 4).

647 Wir wollen nunmehr die Gruppe der 24 Hexaeder-Drehungen zu einer Gruppe von 48 Kollineationen erweitern. Dies geschieht am einfachsten mit Hilfe der Symmetrie $\overline{O}$ in bezug auf den Mittelpunkt O, offenbar: $(AA')(BB')(CC')(DD')$. Dieselbe ist mit allen 24 Drehungen vertauschbar; denn alle gehen, wenn mit $\overline{O}$ auf sie operiert wird, in sich selbst über, weil jedem Zyklus ein Gegenzyklus entspricht. Die Vertauschbarkeit mit den 1) und 2), windschiefen Involutionen, ergibt sich auch aus bekannten Sätzen. Die windschiefe Involution $\triangle_1$ mit der Drehaxe d, der Querlinie zwischen CD', $C'D$, und der unendlichen Gerade d' der normalen Ebenen als Axen, hat diese Axen inzident bzw. zu dem Zentrum O und der unendlich fernen Homologie-Ebene der Symmetrie $\overline{O}$; das bedingt Vertauschbarkeit; und Produkt ist (Nr. 597) die involutorische Homologie, deren Zentrum der unendlich ferne Punkt von d und deren Ebene die d' mit O verbindet, also die (normale) Symmetrie in bezug auf die Diagonalebene zwischen den Kanten AB', $A'B$.

Das Produkt einer Drehung 1) in die Mittelpunkts-Symmetrie $\overline{O}$ ist die Symmetrie in bezug auf die Diagonalebene, die zur Drehaxe normal ist. Wir erhalten sechs solcher Symmetrien. Die zu $\triangle_1$ gehörige ist:

$$\triangle_1' \quad (A)(A')(B)(B')(CD)(C'D').$$

Die Drehungen 2) sind Symmetrien in bezug auf die Axen des Hexaeders; da O mit ihnen inzidiert, so ist $\overline{O}$ mit allen vertauschbar und Produkt ist die Symmetrie in bezug auf die Ebene, die in O zur Drehaxe senkrecht steht, also eine Mittel-Parallelebene zwischen zwei Gegenflächen. Solcher haben wir drei; bei $\triangle_2$ handelt es sich um die Parallelebene durch O zu $AC'BD'$ und $A'CB'D$. Wir haben:

$$\triangle_2' \quad (AB')(A'B)(CD')(C'D).$$

Multiplizieren wir $\triangle_3$ und $\triangle_4$ mit $\overline{O}$, so ergeben sich:

$$\triangle_3' \quad (AA')(BC'DB'CD')$$

und

$$\triangle_4' \quad (ABCD)(A'B'C'D').$$

$\triangle_3'$ ist eine senäre und $\triangle_4'$ eine quaternäre zyklische Kollineation, diesmal mit unebenen Zykeln, aber immer noch regelmäßigen Figuren.

Die Axen a, bzw. y von $\triangle_3$ und $\triangle_4$ können wir auch als Axen für $\triangle_3'$ und $\triangle_4'$ auffassen; aber es ist folgende Veränderung eingetreten: aus der Identität auf ihnen ist Involution geworden und zwar gleichseitig-hyperbolische mit dem Mittelpunkte O als endlichem Doppelpunkt: Symmetrie (auf der Axe) in bezug auf diesen Punkt. Wir wollen eine derartige Axe (mit Möbius) eine zentrierte nennen.

Sie ist die reelle Koinzidenzgerade s und hat zwei reelle Koinzidenzpunkte, eben den Mittelpunkt O und den unendlich fernen Punkt, die andere reelle Koinzidenzgerade r ist die unendlich ferne Gerade der zur Axe normalen Ebenen; sie trägt eine gleichseitig-hyperbolische Involution von Ebenen. In zwei gepaarten Ebenen liegen die abwechselnden Ecken eines Zyklus und haben die Punkte eines Paars auf der Axe zu Orthogonalprojektionen.

Um die Axe s besteht bei $\triangle_3'$ die zyklische Involution 3. Grades, deren Tripel regelmäßige „Dreiebenen" bilden, bei $\triangle_4'$ die rechtwinklige Involution; perspektiv dazu ist die Involution auf der unendlich fernen Koinzidenzgerade.

Weil $\frac{1}{2} \cdot 6$ ungerade ist, so müssen bei $\triangle_3'$ die reellen Koinzidenzpunkte verschieden sein (Nr. 633); die dritte Potenz muß involutorische Homologie sein mit dem einen als Zentrum; das ist ersichtlich die Mittelpunkts-Symmetrie $(AA')(BB')(CC')(DD')$; was sich auch so ergibt:

$$\triangle_3'^3 = (\triangle_3 \bar{O})^3 = \triangle_3{}^3 \bar{O}^3 \text{ wegen der Vertauschbarkeit von } \triangle_3,\ \bar{O},$$
$$= \bar{O}, \text{ da } \triangle_3{}^3 \text{ und } \bar{O}^2 \text{ die Identität sind.}$$

Die zweite Potenz $\triangle_3'^2$ ist $\triangle_3{}^2 \cdot \bar{O}^2 = \triangle_3{}^2$, die Umkehrung von $\triangle_3$:

$$(A)(A')(BDC)(B'D'C').$$

Die zweite $\left(\frac{n}{2}^{\text{te}}\right)$ Potenz von $\triangle_4'$ muß windschiefe Involution sein mit den beiden reellen Koinzidenzgeraden von $\triangle_4'$ als Axen; sie ist identisch mit der zweiten Potenz von $\triangle_4$, der Umwendung um y.

Es sind also zu den 24 Drehungen durch die Multiplikation mit $\bar{O}$ hinzugekommen: diese Mittelpunkts-Symmetrie selbst (als Produkt mit der Identität), die sechs Symmetrien in bezug auf die Diagonalebenen, die vier Symmetrien in bezug auf die drei Mittelebenen zwischen parallelen Flächen des Hexaeders, acht senäre zyklische (nicht planare) Kollineationen mit den Diagonalen a, b, c, d als zentrierten Axen und sechs quaternäre zyklische (nicht planare) Kollineationen mit den Axen x, y, z des Hexaeders als zentrierten Axen.

Die vier letzten mögen 1′), 2′), 3′), 4′) heißen.

Die 24 Drehungen sind gleichsinnige Kongruenzen (Nr. 483); weil aber die Symmetrie in bezug auf einen Punkt eine ungleichsinnige Kongruenz ist, so gilt dies für alle 24 neuen Kollineationen; indem also hier der Inhalt eines Körpers das Vorzeichen wechselt, so kann man von positiven und negativen Symmetrien sprechen, wenn wir mit Möbius[1]) diesen Namen allen Verwandtschaften der Gruppe geben.

Auch diese negativen Symmetrien sind mit $\bar{O}$ vertauschbar (Nr. 645). Daraus folgt, daß die 48 Symmetrien eine Gruppe bilden. Denn es ist $S' = S\bar{O}$, $T' = T\bar{O}$; also:

$$S'T = S\bar{O}T = (ST)\bar{O}, \quad S'T' = S\bar{O} \cdot T\bar{O} = (ST)\bar{O}^2 = ST;$$

nun gehört ST der früheren Gruppe an, also das Produkt $S'T'$ ebenfalls, hingegen $S'T$ der Erweiterung, die selbst keine Gruppe ist, weil ja das Produkt von zwei Kollineationen aus ihr nicht zu ihr gehört. Der doppelte Vorzeichen-Wechsel der Inhalte fordert auch, daß $S'T'$ zur alten Gruppe gehört.

Für das Oktaeder sind $\triangle_1', \ldots \triangle_4'$ folgendermaßen zu schreiben:

$$\begin{array}{ll} \triangle_1' & (X)(X')(YZ)(Y'Z'), \\ \triangle_2' & (Y)(Y')(Z)(Z')(XX'), \\ \triangle_3' & (XY'ZX'YZ'), \\ \triangle_4' & (YY')(XZ'X'Z). \end{array}$$

Von den neuen Verwandtschaften transformieren die sechs 1') und die sechs 4') jedes der beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ in sich selbst; und so vervollständigen wir die zwölf Tetraeder-Drehungen durch die zwölf negativen Symmetrien zu einem Systeme von 24 Symmetrien. Wir haben also beim Tetraeder:

die Identität, drei Umwendungen um Querlinien, acht Drehungen um Höhen (ternäre zyklische Kollineationen),

sechs Symmetrien in bezug auf Ebenen, welche je eine Kante senkrecht halbieren und durch die Gegenkante gehen,

---

1) Möbius' Untersuchungen sind von C. Reinhardt aus dem Nachlasse veröffentlicht: Gesammelte Werke Bd. II, S. 561. Aber leider ist die Darstellung nicht vollkommen. Z. B. ist die Zusammenfassung auf S. 679 unvollständig; statt: 3) vier ternäre Axen (die Diagonalen) und 4) drei quaternäre Axen (die Axen des Hexaeders) muß es heißen: vier ternäre nicht zentrierte Axen für je zwei Symmetrien, welche Axen aber senär und zentriert für je zwei andere Symmetrien sind, drei quaternäre nicht zentrierte Axen wiederum für je zwei Symmetrien, welche zugleich quaternär und zentriert für je zwei andere sind. Möbius hat ja gerade den Unterschied zwischen nicht zentrierten und zentrierten Axen eingeführt. Auch macht die gesonderte Behandlung von Hexaeder und Oktaeder nicht den Eindruck, daß beide Figuren zu derselben Gruppe führen; die erste Betrachtung schließt mit einer Gruppe von 24, die zweite mit einer von 48 Elementen. — Zu einer zentrierten Axe können nur Zykeln geraden Grades gehören; das stimmt aber nicht mit dem auf S. 643 Gesagten.

sechs quaternäre zyklische Kollineationen mit einer zentrierten Axe.

Sie entsprechen den Substitutionen der Ecken von folgenden Typen:

$$(A)(B)(C)(D), \quad (AB)(CD), \quad (A)(BCD);$$
$$(A)(B)(CD), \quad (ABCD).$$

Die Symmetrieebene von $(A)(B)(CD)$ geht durch AB und halbiert CD, die zentrierte Axe für $(ABCD)$ ist die Querlinie zwischen AC und BD.

Indem nunmehr jede der 24 Symmetrien einer Substitution der vier Elemente A, B, C, D entspricht, stellt sich das ganze System als Gruppe heraus, die holoedrisch isomorph zur Gruppe der 24 Substitutionen ist. Die gleichartige Multiplikation der positiven mit irgend einer negativen führt zu allen negativen. Vertauschbar sind 1) jede zwei Umwendungen um Querlinien, 2) $(AB)(CD)$ mit $(A)(B)(CD)$ und $(AB)(C)(D)$, sowie 3) diese untereinander; Produkt ist in 1) die Umwendung um die dritte Querlinie, in 2) je die andere Ebenen-Symmetrie, in 3) die Umwendung um die den beiden Ebenen gemeinsame Querlinie.

In der Gruppe der 48 Hexaeder-Symmetrien kennen wir 648
jetzt schon zwei Untergruppen von 24 Elementen:

die Gruppe der positiven Symmetrien: Identität, 1) 2) 3) 4);

die Gruppe aller Tetraeder-Symmetrien: Identität, 2), 3), 1'), 4').

Auch letztere wird durch Multiplikation mit $\bar{O}$ zur vollen Gruppe vervollständigt.

Man kann aber die positiven Tetraeder-Symmetrien, ebenfalls durch Multiplikation mit $\bar{O}$, zu einer dritten Gruppe von 24 Elementen vervollständigen, nämlich:

$$\text{Identität, 2), 3);} \quad \bar{O}, \text{ 2'), 3').}$$

Diese Gruppe umfaßt alle Drehungen, die jedes der Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$ in sich selbst überführen, sowie diejenigen negativen Symmetrien, die jedes ins andere (mit Änderung des Vorzeichens des Inhalts) überführen, denn die Produkte zweier gleichartiger dieser Symmetrien gehören der ersten, zweier ungleichartiger der zweiten Art an.

Oder, es seien S_1, S_2 zwei positive Tetraeder-Symmetrien, $S_1 S_2 = S_3$ ebenfalls eine, so ist $S_1 \bar{O} \cdot S_2 = \bar{O} S_1 \cdot S_2 = \bar{O} S_3$, $S_1 \cdot S_2 \bar{O} = S_3 \bar{O}$, $S_1 \bar{O} \cdot S_2 \bar{O} = S_1 \bar{O} \cdot \bar{O} S_2 = S_1 S_2 = S_3$.

Ferner entsteht eine Untergruppe durch die acht Symmetrien, welche ein Quadrat des Hexaeders in sich überführen und dann auch die Gegenfläche. Bei $AB'CD'$ und $A'BC'D$ sind dies:

$$\alpha)\ \text{Identität},\quad \beta)\ (AC)(A'C')(BD)(B'D'),$$
$$\gamma)\ (AB'CD')(A'BC'D),\quad \delta)\ (AD'CB')(A'DC'B),$$
$$\epsilon)\ (AC)(A'C')(B)(B')(D)(D'),\quad \zeta)\ (BD)(B'D')(A)(A')(C)(C'),$$
$$\eta)\ (AB')(A'B)(CD')(C'D),\quad \theta)\ (AD')(A'D)(BC')(B'C);$$

es handelt sich, bei $\beta) \ldots \theta)$, um die $3 + 4$ Symmetrien, welche zu der Axe zwischen jenen Ebenen und zu den Ebenen durch diese Axe gehören.

Untergruppen darin bilden: $\alpha)$, $\beta)$, $\epsilon)$, $\zeta)$, von denen $\beta)$, $\epsilon)$, $\zeta)$ nur die Gegenecken vertauschen, ferner: $\alpha)$, $\beta)$, $\eta)$, $\theta)$; denn bei $\beta)$, $\eta)$, $\theta)$ handelt es sich um zwei normale Ebenen und ihre Schnittlinie als Basen von Symmetrien.

Durch Multiplikation mit $\overline{O}$ vervollständigt man die obige Gruppe von 8 Elementen zu einer von 16; die neu hinzugekommenen Symmetrien transformieren jedes der beiden Quadrate in das andere.

Ingleichen führen zwei Gegenflächen des Oktaeders, wie XYZ, $X'Y'Z'$, zunächst zu einer Gruppe von sechs und durch dieselbe Erweiterung zu einer von zwölf Symmetrien; die erstere ist:

$$\text{Identität},\ (XYZ)(X'Y'Z'),\ (XZY)(X'Z'Y'),\ (X)(X')(YZ)(Y'Z'),$$
$$(Y)(Y')(ZX)(Z'X'),\ (Z)(Z')(XY)(X'Y').$$

Zu jeder Substitution der Oktaederdiagonalen x, y, z gehören vier positive und vier negative Symmetrien, z. B. zu (xyz):

$$(XYZ)(X'Y'Z'),\ (X'YZ)(XY'Z'),$$
$$(XY'Z)(X'YZ'),\ (XYZ')(X'Y'Z);$$
$$(XYZX'Y'Z'),\ (X'YZXY'Z'),$$
$$(XY'ZX'YZ'),\ (XYZ'X'Y'Z).$$

Das ist keine Gruppe.

Längst bekannt ist die aus der Identität, $\overline{O}$, 1), 1') bestehende Gruppe von acht Elementen; es handelt sich um die Symmetrien in bezug auf die Elemente eines dreirechtwinkligen Dreikants.

649 In bezug auf Ikosaeder (und Dodekaeder) begnügen wir uns mit der Aufzählung der 120 Symmetrien:

Identität,

1) je vier Drehungen um die sechs Hauptdiagonalen, quinäre zyklische planare Kollineationen,

2) je zwei Drehungen um die 10 Verbindungslinien der Mitten von Gegenflächen (ternäre zyklische Kollineationen),

3) die Umwendungen um die 15 Querlinien zwischen Gegenkanten; Mittelpunkts-Symmetrie,

1') 24 denäre zyklische Kollineationen, die nicht planar sind, mit den Hauptdiagonalen als zentrierten Axen,

2') 20 senäre zyklische Kollineationen, ebenfalls nicht planar, mit den Verbindungslinien der Mitten als zentrierten Axen,

3') 15 Symmetrien in bezug auf die Diagonalebenen zwischen Gegenkanten.

Wenn A eine Ecke des Ikosaeders, B, C, D, E, F die ihr benachbarten Ecken in dieser Reihenfolge sind und $A', \dots F'$ ihnen gegenüberliegen, so haben wir für 1), 2), 3), 1'), 2'), 3') folgende Typen:

$$(A)(A')(BCDEF)(B'C'D'E'F'),$$
$$(ABC)(DE'F)(A'B'C')(D'EF'),$$
$$(AB)(A'B')(CF)(C'F')(DD')(EE'),$$
$$(AA')(BE'CF'DB'EC'FD'),$$
$$(AB'CA'BC')(DF'E'D'FE),$$
$$(A)(A')(B)(B')(CF)(C'F')(DE)(D'E').$$

Die geraden Potenzen einer denären Kollineation sind quinäre Kollineationen, die fünfte ist die Mittelpunkts-Symmetrie, eine involutorische Homologie, wie notwendig; und ähnliches gilt für eine senäre Kollineation.

Scheiden wir aus den 24 Hexaederdrehungen als räumlichen Kollineationen die Kollineationen der Bündel um den sich selbst entsprechenden Mittelpunkt O, die ja auch eine Gruppe von Bündelkollineationen bilden, so können wir diese durch Multiplikation mit dem orthogonalen Polarbündel Ω um O erweitern. Denn weil alle Drehungen Kongruenzen sind, so entspricht einem Strahl und einer Ebene durch O, welche normal sind, ein Strahl und eine Ebene, für welche das ebenfalls gilt; folglich führt Ω zwei entsprechende Elemente jeder der Drehungen in zwei in ihr ebenfalls entsprechende über; d. h. (Nr. 596) Ω ist mit allen 24 Bündel-Drehungen vertauschbar. Daraus folgt dann wiederum, daß wenn S_1, S_2 zwei der Drehungen und $S_1\Omega$, $S_2\Omega$ die durch diese Multiplikation entstehenden Korrelationen sind, die Produkte von S_1 und $S_2\Omega$ immer $S\Omega$, die Produkte von $S_1\Omega$ und $S_2\Omega$ aber S sind. Es ist also eine Gruppe entstanden, die aus 24 Kollineationen und 24 Korrelationen im Bündel besteht. 650

Die windschiefen Involutionen 1) und 2) geben im Bündel O involutorische Homologien, für welche die endliche Axe und die zu ihr senkrechte Ebene nach der unendlich fernen Axe Axe und Ebene der Homologie sind. Entsprechend sind daher zwei Strahlen, welche in bezug auf die Axe symmetrisch sind; die Multiplikation mit Ω ordnet jedem die auf dem andern senkrechte

Ebene zu. Es entsteht daher der Polarbündel in bezug auf den Rotationskegel um die Axe mit der Öffnung $\frac{\pi}{2}$; denn die unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ gegen die Axe geneigten Strahlen fallen je in die zugeordnete Ebene.

Bilden bei einer ternär zyklischen Bündel-Kollineation S die drei Strahlen g_1, g_2, g_3 einen Zyklus und sind $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ zu ihnen normal, weshalb sie auch einen Zyklus bilden, so entsteht in der Korrelation $S\Omega$ der senäre Zyklus $g_1\gamma_2 g_3\gamma_1 g_2\gamma_3$. Bei einer quaternär zyklischen S aber entstehen die beiden quaternären Zykeln $g_1\gamma_2 g_3\gamma_4$, $g_2\gamma_3 g_4\gamma_1$.

Durch Drehung um die Axe von S gehen die entsprechenden Elemente g_1 und γ_2 in die ebenfalls entsprechenden Elemente g_2 und γ_3 über. Werden also g_1 und γ_2 inzident, werden es auch g_2 und γ_3, sodann g_3 und γ_1 im ersten Falle, g_3 und γ_4, g_4 und γ_1 im zweiten. Daraus folgt, daß die Kernkegel einer solchen zyklischen Korrelation Rotationskegel um die Axe sind.[1])

651 Nachdem wir an zahlreichen Beispielen erkannt haben, daß die Zahl μ der Elemente einer Untergruppe G' in der Zahl m derjenigen der sie umfassenden Gruppe G als Teiler enthalten ist, soll dafür der Beweis gegeben werden; wobei wir den Umstand benutzen, daß mit einer Transformation S zugleich ihre Umkehrung S^{-1} einer Gruppe angehört; denn es gehört ja die ganze Gruppe der Potenzen von S der Gruppe an, darunter die Umkehrung, als S^{n-1}, wenn n der Grad von S ist.

Die Untergruppe G' sei:

$$1)\qquad S_1,\ S_2,\ \ldots\ S_\mu;$$

T gehöre zu G, aber nicht zu G'; wir bilden die Produkte:

$$2)\qquad S_1T,\ S_2T,\ \ldots\ S_\mu T.$$

Sie sind alle voneinander und von den 1) verschieden. Wäre etwa $S_iT = S_kT$, wo natürlich S_i und S_k verschieden sind, so würde die Multiplikation mit T^{-1} zu: $S_i = S_k$ führen. Wäre $S_iT = S_k$, so würde $S_i^{-1}S_iT = S_i^{-1}S_k = S_l$, also $T = S_l$ sein. Da S_i^{-1} auch zu 1) gehört, so gilt dies auch für $S_i^{-1}S_k = S_l$, also gehörte T zu 1), was gegen die Voraussetzung ist.

Ist G mit 1), 2), von denen nur 1) eine Gruppe ist, noch nicht erschöpft, so sei T_1 ein weiteres Element von G außerhalb 1), 2); wir erhalten die neue Reihe:

1) Vgl. L. Renner, Über die Gruppe von 24 Kollineationen, durch welche ein ebenes Viereck oder ein Vierkant in sich selbst übergeht. Dissertation von Straßburg 1896.

$$3)\qquad S_1 T_1,\ S_2 T_1,\ \ldots\ S_\mu T_1.$$

Diese Produkte sind voneinander und von den 1) verschieden, aber auch von den 2). Denn wäre $S_i T_1 = S_k T$, so würde $T_1 = S_i^{-1} S_k T = S_l T$ sein, wo S_l zu 1) und daher $S_l T$ zu 2) gehört, was aber nicht der Fall ist. Usw.

Alle entstandenen Reihen gehören zu G, und so lange G noch nicht erschöpft ist, kann diese Reihenbildung fortgesetzt werden; ist G erschöpft, nachdem ν Reihen gebildet sind, so hat sich eben ergeben:

$$m = \mu\nu.$$

Eine solche Zerlegung soll an der Gruppe von 32 Elementen vorgenommen werden, die in Nr. 643 betrachtet wurde. Eine Untergruppe von acht Elementen war:

$$1)\qquad 1,\ \mathfrak{N}_1,\ \mathfrak{N}_2,\ \mathfrak{N}_3,\ \mathfrak{J}_{12},\ \mathfrak{J}_{13},\ \mathfrak{J}_{23},\ \mathfrak{P}_{123};$$

die Multiplikationen mit $\mathfrak{N}_4$, $\mathfrak{J}_{15}$, $\mathfrak{P}_{145}$ geben:

$$2)\qquad \mathfrak{N}_4,\ \mathfrak{J}_{14},\ \mathfrak{J}_{24},\ \mathfrak{J}_{34},\ \mathfrak{P}_{124},\ \mathfrak{P}_{134},\ \mathfrak{P}_{234},\ \mathfrak{J}_{56},$$

$$3)\qquad \mathfrak{J}_{15},\ \mathfrak{N}_5,\ \mathfrak{P}_{125},\ \mathfrak{P}_{135},\ \mathfrak{J}_{25},\ \mathfrak{J}_{35},\ \mathfrak{J}_{46},\ \mathfrak{P}_{235},$$

$$4)\qquad \mathfrak{P}_{145},\ \mathfrak{J}_{45},\ \mathfrak{J}_{36},\ \mathfrak{J}_{26},\ \mathfrak{P}_{245},\ \mathfrak{P}_{345},\ \mathfrak{N}_6,\ \mathfrak{J}_{16}.$$

Die 120 Kollineationen, welche fünf feste Punkte des 652
Raums permutieren, bilden eine Gruppe. Sie besteht aus:

1) der Identität,

2) 10 involutorischen Homologien, wie:

$$(A_1 A_2)(A_3)(A_4)(A_5),$$

3) 15 windschiefen Involutionen, wie:

$$(A_1 A_2)(A_3 A_4)(A_5),$$

4) 20 ternären zyklischen Kollineationen, wie:

$$(A_1 A_2 A_3)(A_4)(A_5),$$

5) 20 senären zyklischen Kollineationen mit zwei reellen Koinzidenzpunkten, wie:

$$(A_1 A_2 A_3)(A_4 A_5),$$

6) 30 quaternären zyklischen Kollineationen, ebenfalls mit zwei reellen Koinzidenzpunkten, wie:

$$(A_1 A_2 A_3 A_4)(A_5),$$

7) 24 quinären zyklischen Kollineationen, wie:

$$(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5).$$ [1]

Untergruppen entstehen natürlich durch solche Kollineationen, welche einen oder mehrere der Punkte festlassen. Bleibt einer fest,

---

1) Vgl. die in Nr. 640 erwähnte Dissertation von Küppers.

so haben wir eine Untergruppe von 24 Kollineationen, holoedrisch isomorph der Gruppe der Substitutionen von vier Elementen oder der Gruppe der Symmetrien des regelmäßigen Tetraeders, oder der Gruppe der Kollineationen eines Bündels oder Feldes, welche vier (gleichartige) Elemente in sich überführen. Sie entnimmt 1, 6, 3, 8, 6 Kollineationen aus 1), 2), 3), 4), 6).

Eine Untergruppe von 12 Kollineationen entsteht z. B. durch diejenigen, welche nur drei Punkte unter sich permutieren, und die beiden andern ebenfalls. Sie entnimmt 1, 4, 3, 2, 2 Kollineationen aus 1), 2), ... 5).

§ 96. Fortsetzung.

653 Es sei ein Tetraeder $\triangle = \alpha\beta\gamma\delta \equiv ABCD$ gegeben. Eine Ebene δ^1 schneide die Kanten BC, CA, AB in A_1, B_1, C_1, die Kanten AD, BD, CD in $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ und harmonisch zu diesen sechs Punkten je in bezug auf die Ecken seien A_2, B_2, C_2; $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$. Dann haben wir in jeder der vier Seitenebenen sechs Punkte und vier Geraden mit je drei von diesen sechs Punkten,

$$\left.\begin{array}{l} \text{in } \alpha : A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1,\ A_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2,\ A_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2,\ A_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1, \\ \text{in } \beta : B_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1,\ B_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2,\ B_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_2,\ B_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1, \\ \text{in } \gamma : C_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1,\ C_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2,\ C_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2,\ C_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1, \\ \text{in } \delta : A_1B_1C_1,\ A_1B_2C_2,\ B_1C_2A_2,\ C_1A_2B_2. \end{array}\right\} \triangle.$$

Sie bilden in jeder Ebene ein Vierseit, von welchem auf die Kanten des Tetraeders $\triangle$ zwei Gegenecken fallen, so daß dessen Kanten-Dreiseit das Diagonal-Dreiseit ist.

Die 16 Geraden liegen aber noch zu je vieren in zweimal vier andern Ebenen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^1 : A_1B_2C_2,\ A_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2,\ B_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1,\ C_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2, \\ \beta^1 : B_1C_2A_2,\ B_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2,\ C_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1,\ A_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2, \\ \gamma^1 : C_1A_2B_2,\ C_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2,\ A_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1,\ B_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_2, \\ \delta^1 : A_1B_1C_1,\ A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1,\ B_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1,\ C_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1, \end{array}\right\} \triangle^1,$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 : A_1B_2C_2,\ A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1,\ B_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_2,\ C_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1, \\ \beta^2 : B_1C_2A_2,\ B_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1,\ C_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2,\ A_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1, \\ \gamma^2 : C_1A_2B_2,\ C_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1,\ A_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2,\ B_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1, \\ \delta^2 : A_1B_1C_1,\ A_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2,\ B_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2,\ C_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2, \end{array}\right\} \triangle^2.$$

Je zwei von den vier Geraden derselben Zeile haben einen Punkt gemein; woraus erhellt, daß sie in eine Ebene fallen.

Man ersieht, daß durch jede der 16 Geraden von jedem der drei Tetraeder $\triangle$, $\triangle^1$, $\triangle^2$ eine Ebene geht; und zwar gehen durch die Geraden in der Reihenfolge, wie sie oben, in α, β, γ, δ liegend, aufgezählt sind, die Ebenen:

$$\begin{array}{llll}
\alpha,\ \delta^1,\ \alpha^2; & \alpha,\ \alpha^1,\ \delta^2; & \alpha,\ \beta^1,\ \gamma^2; & \alpha,\ \gamma^1,\ \beta^2; \\
\beta,\ \delta^1,\ \beta^2; & \beta,\ \beta^1,\ \delta^2; & \beta,\ \gamma^1,\ \alpha^2; & \beta,\ \alpha^1,\ \gamma^2; \\
\gamma,\ \delta^1,\ \gamma^2; & \gamma,\ \gamma^1,\ \delta^2; & \gamma,\ \alpha^1,\ \beta^2; & \gamma,\ \beta^1,\ \alpha^2; \\
\delta,\ \delta^1,\ \delta^2; & \delta,\ \alpha^1,\ \alpha^2; & \delta,\ \beta^1,\ \beta^2; & \delta,\ \gamma^1,\ \gamma^2.
\end{array}$$

Die 12 Punkte $A_1, \ldots \mathfrak{C}_2$ liegen auch auf den Kanten der neuen Tetraeder zu je zweien, wie auf denen des gegebenen.

$$\beta^1\gamma^1 \equiv A_2\mathfrak{A}_2,\ \gamma^1\alpha^1 \equiv B_2\mathfrak{B}_2,\ \alpha^1\beta^1 \equiv C_2\mathfrak{C}_2,\ \alpha^1\delta^1 \equiv A_1\mathfrak{A}_1,\ \beta^1\delta^1 \equiv B_1\mathfrak{B}_1,$$
$$\gamma^1\delta^1 \equiv C_1\mathfrak{C}_1;\ \beta^2\gamma^2 \equiv A_2\mathfrak{A}_1,\ \gamma^2\alpha^2 \equiv B_2\mathfrak{B}_1,\ \alpha^2\beta^2 \equiv C_2\mathfrak{C}_1,\ \alpha^2\delta^2 \equiv A_1\mathfrak{A}_2,$$
$$\beta^2\delta^2 \equiv B_1\mathfrak{B}_2,\ \gamma^2\delta^2 \equiv C_1\mathfrak{C}_2.$$

Daraus folgt, daß auch die Vierseite, welche in den Ebenen von $\triangle^1$, $\triangle^2$ liegen, ihre Gegenecken auf den Kanten haben, so daß die Kanten-Dreiseite ebenfalls die Diagonal-Dreiseite sind. Demnach kann man von jedem der drei Tetraeder ausgehen, eine Ebene aus einem zweiten nehmen und die sieben übrigen Ebenen so konstruieren, wie oben aus $\triangle$ und δ^1 die Ebenen α^1, β^1, γ^1; $\alpha^2, \ldots \delta^2$ konstruiert sind.

In bezug auf das jeweilige Ausgangstetraeder sind zwei Ebenen aus demselben der beiden andern Tetraeder entsprechend in der windschiefen Involution, welche zwei Gegenkanten jenes Tetraeders zu Axen hat, dagegen zwei Ebenen aus verschiedenen Tetraedern entsprechend in der involutorischen Homologie, welche zu einer Ecke und Gegenebene des Ausgangstetraeders gehört.

Z. B. α^1 und β^1 sind entsprechend in der windschiefen Involution (AB, CD), ebenso γ^1 und δ^1, α^2 und β^2, γ^2 und δ^2.

Dagegen α^1 und α^2, β^1 und $\beta^2, \ldots$ sind entsprechend in der involutorischen Homologie (D, δ), α^1 und β^2 oder β^1 und α^2 in (C, γ).

Die Eigenschaft unserer Figur von 12 Ebenen $\alpha, \ldots \delta^2$, 12 Punkten $A_1, \ldots \mathfrak{C}_2$ und 16 Geraden, daß jede von den 16 Geraden mit drei Punkten und drei Ebenen inzident ist, während jede von den Ebenen mit sechs Punkten, jeder von den Punkten mit sechs Ebenen (von jedem Tetraeder zwei) inzidiert,[1]) hat man dadurch bezeichnet, daß man sie eine Konfiguration (12_6, 16_3) nennt.[2])

Die 18 Kanten der drei Tetraeder, nicht zur Konfiguration ge-

1) Um diese Punkte oder Ebenen aufzufinden, werden die obigen Tabellen hinreichen.

2) Reye, Acta Mathem. Bd. 1 S. 96.

hörige Geraden, sind mit je zwei Punkten und zwei Ebenen derselben inzident.

Indem durch jede der 16 Geraden drei Ebenen der Konfiguration gehen, welche zu den drei Tetraedern gehören, stellt sich heraus, daß je zwei von diesen Tetraedern in vier Weisen perspektiv sind und die vier Perspektivitätsebenen das dritte Tetraeder bilden, die drei Tetraeder also in der einen der beiden zueinander dualen Weisen desmisch sind.[1])

Es liegen z. B. die Schnittlinien:

$$\begin{array}{l} \alpha^1\delta^2,\ \beta^1\gamma^2,\ \gamma^1\beta^2,\ \delta^1\alpha^2 \text{ in } \alpha, \\ \alpha^1\gamma^2,\ \beta^1\delta^2,\ \gamma^1\alpha^2,\ \delta^1\beta^2 \text{ in } \beta, \\ \alpha^1\beta^2,\ \beta^1\alpha^2,\ \gamma^1\delta^2,\ \delta^1\gamma^2 \text{ in } \gamma, \\ \alpha^1\alpha^2,\ \beta^1\beta^2,\ \gamma^1\gamma^2,\ \delta^1\delta^2 \text{ in } \delta. \end{array}$$

Gegen jede Konfigurationsgerade sind sechs andere windschief; sie bilden zweimal drei Geraden von verbundenen Regelscharen, und die neun Schnittpunkte sind die übrigen Konfigurationspunkte; z. B. $A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ liefert die beiden verbundenen Geradentripel:

$$\begin{vmatrix} B_1 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{A}_2 \\ C_2 & \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_2 \\ A_2 & B_2 & C_1 \end{vmatrix}.$$

Die 12 Punkte der Konfiguration führen auch zu drei Tetraedern:

$$A_1A_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2,\ B_1B_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2,\ C_1C_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2,$$

welche $\triangle_A$, $\triangle_B$, $\triangle_C$ heißen mögen.

Sie sind in der dualen Weise desmisch, d. h. zu je zweien vierfach so perspektiv, daß die vier Perspektivitätszentren die Ecken des dritten Tetraeders bilden; z. B. gehen

$$\begin{array}{ll} B_1C_1,\ B_2C_2,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2 & \text{durch } A_1, \\ B_1C_2,\ B_2C_1,\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1 & \text{durch } A_2, \\ B_1\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{B}_1C_1,\ B_2\mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{B}_2C_2 & \text{durch } \mathfrak{A}_1, \\ B_1\mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{B}_1C_2,\ B_2\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{B}_2C_1 & \text{durch } \mathfrak{A}_2. \end{array}$$

Die Kanten dieser Tetraeder sind dieselben wie die der früheren, in der Weise, daß die drei Paare von Gegenkanten eines der jetzigen Tetraeder sich auf die drei früheren verteilen; so gehören A_1A_2, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ zu $\triangle$, $A_1\mathfrak{A}_1$, $A_2\mathfrak{A}_2$ zu $\triangle^1$, $A_1\mathfrak{A}_2$, $A_2\mathfrak{A}_1$ zu $\triangle^2$.

Es sind z. B. B_1 und C_1 in der involutorischen Homologie $(A_1, A_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)$ korrespondierend. Denn die Ebene $A_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ geht durch

1) Stephanos, Bulletin des sciences mathém. Ser. II Bd. 3.

$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = AD$ und schneidet ABC in A_2A, also $A_1B_1C_1$ in dem Punkte, der zu A_1 in bezug auf B_1, C_1 harmonisch ist; demnach werden B_1 und C_1 durch A_1 und jene Ebene harmonisch getrennt.

B_1 und B_2, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind korrespondierend in der windschiefen Involution $(A_1A_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2) \equiv (BC, AD)$; usw.

Durch jede der zwölf Ecken gehen vier von den 16 Geraden, und das Kanten-Dreikant der Ecke ist das Diagonal-Dreikant dieses Vierkants. Durch A_1 gehen $A_1(B_1C_1, B_2C_2, \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1, \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2)$; die drei Paare Gegenebenen dieses Vierkants sind α und δ, α^1 und δ^1, α^2 und δ^2, und deren Schnittlinien sind $A_1(A_2, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$.

Von den sechs Tetraedern $\triangle$, $\triangle^1$, $\triangle^2$; $\triangle_A$, $\triangle_B$, $\triangle_C$ (von denen 654
jene zusammen $\triangle$, diese $\triangle_1$ heißen mögen) werden die drei ersteren durch die Ebenen, die drei letzteren durch die Punkte unserer Konfiguration gebildet. Nimmt man die Ecken jener Tetraeder und die Ebenen dieser, so ergibt sich eine ebensolche Konfiguration. Am schnellsten ersieht man dies, indem man die Existenz eines Polarraums Π nachweist, welcher die sechs Tetraeder zu Polartetraedern hat. Wir legen Π fest durch das Polartetraeder $\triangle$ und die Zuordnung von δ^1 und $\alpha^1\beta^1\gamma^1$, Gegenelementen von $\triangle^1$. Den sechs Punkten $A_1, \ldots \mathfrak{C}_1$, in denen δ^1 die Kanten von $\triangle$ schneidet, entsprechen in Π die Ebenen vom Punkte $\alpha^1\beta^1\gamma^1$ nach den Gegenkanten; z. B. dem Punkte A_1 auf BC die Ebene von $\alpha^1\beta^1\gamma^1$ nach $AD \equiv \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$. In δ^1 liegen die drei Kanten $A_1\mathfrak{A}_1$, $B_1\mathfrak{B}_1$, $C_1\mathfrak{C}_1$ von $\triangle^1$ und in die Gegenecke laufen zusammen $A_2\mathfrak{A}_2$, $B_2\mathfrak{B}_2$, $C_2\mathfrak{C}_2$; also geht die Ebene $A_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, die Gegenebene von A_1 in $\triangle_A$, durch diese Gegenecke, weil durch $A_2\mathfrak{A}_2$, und ist die dem A_1 in Π entsprechende Ebene; und so bekommt jeder von jenen sechs Punkten zur Polarebene seine Gegenebene in demjenigen $\triangle_1$, zu dem er gehört.

Der zweite Punkt A_2 auf $A_1A_2 \equiv BC$ liegt harmonisch zu A_1 in bezug auf die Ecken B, C von $\triangle$; ihm liegt in $\triangle_A$ gegenüber die Ebene $A_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \equiv A_1AD$, welche zu $A_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \equiv A_2AD$ harmonisch ist in bezug auf die beiden Ebenen von $\triangle$ durch AD, und wird ihm entsprechend in Π. Also transformiert Π auch jeden der Punkte $A_2, \ldots \mathfrak{C}_2$ in seine Gegenebene im betreffenden Tetraeder $\triangle_1$. Damit sind die drei $\triangle_1$ als Polartetraeder erkannt. Ferner fanden wir α^1 und β^1, γ^1 und δ^1 in der windschiefen Involution (AB, CD) entsprechend, folglich auch die Punkte $\alpha^1\beta^1\gamma^1$ und $\beta^1\alpha^1\delta^1$. Die beiden Verwandtschaften sind aber vertauschbar, weil die Axen der letzteren in Π Polaren sind (Nr. 599); also sind (Nr. 597), mit δ^1 und $\alpha^1\beta^1\gamma^1$, auch γ^1 und $\beta^1\delta^1\alpha^1$ in Π polar, und ebenso die andern Gegenelemente von $\triangle^1$. Endlich sind α^1 und α^2, β^1 und β^2, γ^1 und γ^2, δ^1 und δ^2 homolog in der involutorischen Homologie (D, δ), welche ebenfalls mit Π vertauschbar ist, weil D und δ polar sind; daher sind α^2 und $\beta^2\gamma^2\delta^2$ in Π polar, woraus dasselbe dann auch für die übrigen Gegenelemente von $\triangle^2$ folgt. So sind in der Tat alle sechs Tetraeder Polartetraeder von Π.

Die Basisfläche dieses Polarraums Π ist reell-imaginär; denn auf allen Kanten der Tetraeder sind die Ecken des einen, sowie die Ecken des andern Tetraeders konjugiert; also ist, weil jene zu diesen harmonisch liegen, die Involution konjugierter Punkte elliptisch (Nr. 540).

Daß die zwölf Ecken der $\triangle$ und die zwölf Ebenen der $\triangle_1$ eine neue Konfiguration $(12_6, 16_3)$ bilden, ist damit bewiesen. Sie enthält aber 16 andere Geraden. Z. B. $A_1B_1C_1$, die gemeinsame Gerade der drei Ebenen δ, δ^1, δ^2, geht über in die Schnittlinie der drei Ebenen $A_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $B_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $C_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$, welche zugleich Verbindungslinie der drei Punkte $\alpha\beta\gamma$, $\alpha^1\beta^1\gamma^1$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ ist.

Nun zeigt sich, daß jedes der beiden Tetraedertripel auch in der andern Weise desmisch ist.

Die beiden Konfigurationen mögen assoziiert zueinander heißen und Cf_{I}, Cf_{II} genannt werden.

Die 24 Ecken der sechs Tetraeder, ihre 24 Ebenen und die 18 gemeinsamen Kanten bilden eine dritte Konfiguration (24_9), (18_4); d. h. jede Ebene trägt neun Punkte, die sechs derjenigen der beiden obigen Konfigurationen, zu der sie gehört, und die drei Ecken des Tetraeders, dem sie angehört, aus der andern Konfiguration; durch jeden Punkt gehen neun Ebenen, und mit jeder Kante sind vier Punkte, die Eckenpaare der beiden Tetraeder, und vier Ebenen, die Ebenenpaare derselben, inzident, und ersichtlich jene beiden Paare, wie diese harmonisch. Jeder Punkt, jede Ebene inzidiert mit drei Geraden. Diese Konfiguration wird als harmonische bezeichnet.

655 Durch ein Tetraeder, etwa $\triangle$, und eine ihm nicht angehörige Ebene ϵ, wie oben δ^1, ist die ganze Figur bestimmt. Ordnen wir also einem bestimmten Tetraeder $\triangle$ jedes der drei Tetraeder des Tripels, zu dem es gehört, zu, also seinen Ebenen in bestimmter Reihenfolge die vier Ebenen des zweiten in bestimmter Reihenfolge, der Ebene ϵ eine fünfte dem zweiten nicht angehörige Ebene ϵ' derjenigen beiden assoziierten Konfigurationen, zu der alle diese Ebenen gehören, so haben wir eine Kollineation, welche sie und die andere Konfiguration in sich transformiert. Die Zahl der zugeordneten Tetraeder beträgt drei, jedesmal sind 24 Permutationen seiner Ebenen möglich und ϵ' kann aus acht Ebenen genommen werden; so ergeben sich $3 \cdot 24 \cdot 8 = 576$ Kollineationen, welche beide Konfigurationen Cf_{I}, Cf_{II} in sich transformieren. Ordnen wir aber den Ebenen des $\triangle$ die Punkte eines $\triangle_1$ zu und der nicht zu $\triangle$ gehörigen ϵ einen nicht zu $\triangle_1$ gehörigen Punkt, so ergeben sich 576 Korrelationen, für welche dasselbe gilt.

Unter den 576 Kollineationen und 576 Korrelationen befinden sich auch die Umkehrungen. In der Tat, es seien dem „Aggregate" (α, β, γ, δ, ϵ), wo α, β, γ, δ die Ebenen des $\triangle$ sind, alle 576 Aggregate (α', β', γ', δ', ϵ') zugeordnet, so ergeben sich einem bestimmten zweiten Aggregate $(\alpha_1, \ldots \epsilon_1)$ zugeordnet alle 576 Aggregate $(\alpha_1', \ldots \epsilon_1')$, und so jedem $(\alpha_1, \ldots \epsilon_1)$; also wird auch dem $(\alpha_1, \ldots \epsilon_1) \equiv (\alpha', \ldots \epsilon')$, wo letzteres ein bestimmtes dem $(\alpha, \ldots \epsilon)$ zugeordnetes Aggregat ist, das mit diesem zur Kollineation Γ führt, nach und nach jedes Aggregat zugeordnet, folglich auch $(\alpha, \ldots \epsilon)$. Damit haben wir die Umkehrung von Γ. Und ähnliches gilt für die Korrelationen.

Jede von den 1152 Verwandtschaften transformiert ein Tetraeder $\triangle$, $\triangle_1$ in ein anderes (ev. dasselbe), die Ebenen in die Ebenen oder Punkte und daher die Gegenecken jener in die Gegenelemente dieser, also zwei polare Elemente von Π in zwei ebenfalls polare Elemente von Π. Daher sind alle jene 1152 Verwandtschaften mit Π vertauschbar.

Multiplizieren wir die 576 Kollineationen und die 576 Korrelationen, gleichgültig in welcher Reihenfolge, mit der Polarkorrelation Π, so ergeben sich 576 Korrelationen und 576 Kollineationen, welche jede der beiden assoziierten Konfigurationen in die andere transformieren, die harmonische also auch in sich selbst.

Nun muß gezeigt werden, daß jede Kollineation oder Korrelation, welche die harmonische Konfiguration in sich selbst überführt, eine der im vorangehenden erhaltenen $4 \cdot 576 = 2304$ Verwandtschaften ist.

Es sei Γ eine Kollineation, durch welche die genannte Überführung geschieht, und zwar eine solche, welche eine Ebene ϵ in eine Ebene ϵ' derselben Konfiguration Cf transformiert. Es gehen dann die drei in ϵ gelegenen Tetraederkanten in die in ϵ' gelegenen über, also die drei weiteren Ebenen der vollen Konfiguration durch eine von jenen k in die drei durch die entsprechende k'. An beiden Kanten liegt ein harmonischer Wurf, und zugeordnete Ebenen gehören je zu demselben Tetraeder; also werden auch diejenigen Ebenen, die mit ϵ und ϵ' je zu dem nämlichen Tetraeder gehören, entsprechend sein, und die Tetraeder, zu denen ϵ und ϵ' gehören, werden in Γ homolog. Das andere Ebenenpaar an k, der zweiten Cf angehörig, geht in das zweite an k' über, das zur nämlichen Cf gehört; die sämtlichen homologen Ebenen jener ϵ- und ϵ'-Tetraeder lehren dann, daß jede Ebene der zweiten Konfiguration in eine Ebene derselben übergeht, diese also in sich und daher auch die erste. Folglich gehört die Γ zu den 576 zuerst erwähnten Kollineationen. Gäbe es mehr als 576 Korrelationen, welche jede der Cf in sich transformieren, so würden sie durch (gleichartige) Multiplikation mit irgend einer von ihnen zu mehr als 576 Kollineationen dieser Art führen. Ist nun Γ eine Kollineation, welche die harmonische Konfiguration so in sich transformiert, daß zwei zu verschiedenen Cf gehörige Elemente homolog sind, so ist $\Gamma\Pi = C$ eine Korrelation, die jene Transformation so bewirkt, daß zwei zur nämlichen Cf gehörige Elemente homolog sind; also ist $\Gamma = \Gamma\Pi^2 = C\Pi$ eine der 576 Kollineationen der zweiten Art; und ähnliches gilt für eine Korrelation der obigen Beschaffenheit.

Wir haben daher im ganzen 2304 lineare Verwandtschaften, welche die harmonische Konfiguration in sich überführen, 1152 Kollineationen und 1152 Korrelationen; von ihnen führen je 576 jede der beiden Cf in sich über, und je 576 die eine in die andere.

Die 2304 Verwandtschaften bilden eine Gruppe[1]; darin sind Untergruppen die 1152 Kollineationen und die 1152 Verwandtschaften, welche jede der Cf in sich überführen; diese beiden Untergruppen haben als gemeinsame Untergruppe die 576 ursprünglichen Kollineationen.

656 Beschränken wir uns zunächst auf diese Gruppe G_{576} der 576 Kollineationen, welche jede der beiden Konfigurationen Cf_{I}, Cf_{II} in sich selbst transformieren. Zu ihr gehören die schon erwähnten involutorischen Homologien und windschiefen Involutionen. Von jenen haben wir 24, je vier bei jedem der sechs Tetraeder $\triangle$, $\triangle_1$. Bei $(D, \mathfrak{d})$ z. B. haben wir die Zykeln:

$$(A_1)(A_2)(B_1)(B_2)(C_1)(C_2)(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2)(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2),$$
$$(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)(\alpha^1\alpha^2)(\beta^1\beta^2)(\gamma^1\gamma^2)(\delta^1\delta^2),$$

und daher:

$$(\triangle)(\triangle^1\triangle^2)(\triangle_A)(\triangle_B)(\triangle_C).$$

Die zwölf einen verhalten sich dual wie die zwölf andern.

Der uns schon bekannten windschiefen Involutionen a) mit Gegenkanten eines Tetraeders als Axen haben wir neun, weil so viele Paare von Gegenkanten, welche ja immer einem $\triangle$ und einem $\triangle_1$ gemeinsam sind. Bei (AD, BC) z. B. bestehen die Zykeln:

$$(A_1)(A_2)(\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{A}_2)(B_1B_2)(C_1C_2)(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2)(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2),$$
$$(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)(\alpha^1\delta^1)(\beta^1\gamma^1)(\alpha^2\delta^2)(\beta^2\gamma^2),$$

also:

$$(\triangle)(\triangle^1)(\triangle^2)(\triangle_A)(\triangle_B)(\triangle_C).$$

Aber die windschiefen Involutionen sind noch nicht

1) Vgl. J. Feder, Die Konfiguration $(12_6, 16_3)$ und die zugehörige Gruppe von 2304 Kollineationen und Korrelationen. Dissertation von Straßburg 1896; Mathem. Annalen Bd. 47, S. 375.

erschöpft; wir haben noch 36 weitere hyperbolische (mit reellen Axen) b) und sechs elliptische mit imaginären Axen c). Betrachten wir die beiden Gegenkanten BCA_1A_2, $AD\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ von $\triangle$, so liefern sie uns vier Axenpaare:

$$A_1A,\ A_2D;\quad A_1D,\ A_2A;\quad \mathfrak{A}_1B,\ \mathfrak{A}_2C;\quad \mathfrak{A}_1C,\ \mathfrak{A}_2B.$$

In der windschiefen Involution $(A_1A,\ A_2D)$ sind, von Cf_{I}, die Punkte A_1, A_2 je sich selbst entsprechend, dagegen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ einander entsprechend. Der Schnittpunkt der Geraden AA_1 und $A_2B_1C_2$, welche beide in $\mathfrak{d}$ liegen, ist der vierte harmonische zu A_2 in bezug auf B_1 und C_2; daher sind diese mit A_2 in gerader Linie liegenden Punkte entsprechend in der Involution, ebenso B_2 und C_1, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{C}_2$. Die Tetraeder $\triangle$ und $\triangle_A$ gehen in sich über, so jedoch, daß zwei Ecken (Ebenen) fest bleiben, die andern sich vertauschen.

Die neun Gegenkanten-Paare liefern die 36 Involutionen b).

Wir lassen nunmehr $\triangle$ so in sich übergehen, daß A und D B und C sich vertauschen und fügen noch $\mathfrak{d}^1$, β^1 als entsprechend hinzu, so daß die Kollineation:

$$\left|\begin{matrix} ABCD & \mathfrak{d}^1 \\ DCBA & \beta^1 \end{matrix}\right|$$

vorliegt. Dadurch werden BC und AD sich selbst entsprechend, AC und BD, AB und CD involutorisch entsprechend. Ferner werden die Schnitte A_1, A_2; $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ von $\mathfrak{d}^1$, β^1 mit BC, AD entsprechend und zwar involutorisch, wegen der von diesen Geraden getragenen Involutionen. B_1 und $\mathfrak{B}_1$, auf $\mathfrak{d}^1$ und β^1 gelegen, sind in dem einen Sinne entsprechend als Schnitte $(CA, \mathfrak{d}^1)$ und (BD, β^1), im andern als (CA, β^1) und $(BD, \mathfrak{d}^1)$, also involutorisch entsprechend. Damit ist die Verwandtschaft als involutorisch erkannt und kann, wegen der windschiefen Träger von Involutionen BC, AD, $B_1\mathfrak{B}_1$, die wir schon kennen, nur windschiefe Involution sein. Auf BC und AD ist die Involution elliptisch und die Axen verbinden auf die eine Weise die einen imaginären Doppelpunkte mit den andern. Werden $\mathfrak{d}^1$ und γ^1, welche ebenfalls BC und AD in A_1 und A_2, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ treffen, zugeordnet, so ergeben sich dieselben Involutionen auf BC, AD, die Axen verbinden nun die Doppelpunkte in anderer Weise. Hier werden z. B. B_1 und $\mathfrak{B}_2$, B_2 mit $\mathfrak{B}_1$ entsprechend.

Die vollständige involutorische Paarung der Elemente von Cf_{I} im ersteren Falle ist:

$$A_1A_2,\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2,\ B_1\mathfrak{B}_1,\ B_2\mathfrak{B}_2,\ C_1\mathfrak{C}_2,\ C_2\mathfrak{C}_1;$$
$$\alpha\mathfrak{d},\ \beta\gamma,\ \mathfrak{d}^1\beta^1,\ \alpha^1\gamma^1,\ \alpha^2\beta^2,\ \mathfrak{d}^2\gamma^2;$$

so daß statt $\mathfrak{d}^1$, β^1 auch α^1, γ^1 oder α^2, β^2; $\mathfrak{d}^2$, γ^2 genommen werden konnten, welche immer BC und AD in A_1, A_2; $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ schneiden.

Es gehen also alle sechs Tetraeder in sich über; in jedem sind zwei Gegenkanten sich selbst entsprechend:

$$\begin{array}{lll} A_1 A_2 \equiv \alpha\delta, & \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \equiv \beta\gamma & \text{von } \triangle_A \text{ und } \triangle, \\ B_1 \mathfrak{B}_1 \equiv \beta^1\delta^1, & B_2 \mathfrak{B}_2 \equiv \alpha^1\gamma^1 & \text{von } \triangle_B \text{ und } \triangle^1, \\ C_1 \mathfrak{C}_2 \equiv \gamma^2\delta^2, & C_2 \mathfrak{C}_1 \equiv \alpha^2\beta^2 & \text{von } \triangle_C \text{ und } \triangle^2; \end{array}$$

so daß, wie behauptet, sechs solche windschiefen Involutionen c) mit imaginären Axen vorhanden sind. Die G_{576} enthält daher 75 involutorische Kollineationen.

657 Ternär zyklisch ist die Kollineation:

$$\begin{vmatrix} ABCD & \delta^1 \\ BCAD & \alpha^1 \end{vmatrix};$$

man sieht sofort, daß auch $\triangle^1$ sich ternär zyklisch in sich transformiert und daher auch $\triangle^2$, wobei jedesmal eine Ebene fest bleibt; $A_1 = (\delta^1, BC)$ geht in $(\alpha^1, CA) = B_2$ über und daher A_2 in B_1. Wir erhalten hinsichtlich der Punkte von Cf_{I} folgende Zykeln:

$$(A_1 B_2 C_1)(B_1 C_2 A_2)(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_1)(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{A}_2)$$

und hinsichtlich der Ebenen:

$$(\alpha\beta\gamma)(\delta^1\alpha^1\gamma^1)(\delta^2\alpha^2\gamma^2)(\delta)(\beta^1)(\beta^2);$$

demnach hinsichtlich der Tetraeder die Zykeln:

$$(\triangle)(\triangle^1)(\triangle^2), \quad (\triangle_A \triangle_B \triangle_C).$$

Von den Punktzykeln liegt einer auf einer Konfigurationsgerade $B_1 C_2 A_2$, derjenigen, durch welche die drei festen Ebenen gehen; so daß diese Gerade lauter sich selbst entsprechende Ebenen trägt, in denen dann alle Zykeln enthalten sind; z. B. die drei Seiten des Zyklus $A_1 B_2 C_1$, welche Konfigurationsgeraden sind, sie gehen durch die Punkte B_1, C_2, A_2 des geradlinigen Zyklus auf dieser sich selbst entsprechenden Gerade.

Fest bleibt von jedem der drei Tetraeder $\triangle$ eine Ecke: $D \equiv \alpha\beta\gamma$, $\delta^1\alpha^1\gamma^1$, $\delta^2\alpha^2\gamma^2$; sie liegen auf einer Gerade der Cf_{II}, welche also die zweite reelle Koinzidenzgerade der Kollineation (polar in Π zur ersten) wird und lauter sich selbst entsprechende Punkte trägt.

Wir können der δ^1 alle vier Ebenen α^1, β^1, γ^1, δ^1 zuordnen, im ersten Tetraeder jede der vier Ebenen fest lassen und den Zyklus der drei andern auch noch umkehren; dadurch kommen wir zu $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ ternären Kollineationen a).

Es ergeben sich 32 weitere a), wenn Cf_{I}, Cf_{II}, welche ungleichartig sich verhalten, vertauscht werden.

Eine zweite Art b) von ternären zyklischen Kollineationen in unserer Gruppe, welche Kollineationen mit Axen sind und daher lauter geradlinige Zykeln enthalten (gescharte Kollineationen), ergibt sich durch die in Nr. 653 erwähnten verbundenen Geradentripel. Betrachten wir etwa die zu $C_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2$ gehörigen beiden Geradentripel:

$$\begin{vmatrix} A_1 & \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_1 \\ B_1 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{A}_2 \\ C_1 & A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

und zunächst die Regelschar der horizontalen Konfigurationsgeraden. Die zyklische Projektivität auf der ersten, durch den Zyklus $(A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)$ bestimmt, möge die imaginären Koinzidenzpunkte M', M'' haben, zu deren mit $A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ gebildeten äquianharmonischen Würfen die Doppelverhältnisse ϵ', ϵ'', die imaginären kubischen Wurzeln der negativen Einheit, gehören (Nr. 144); ingleichen seien N', N'' die Koinzidenzpunkte der zyklischen Projektivität $(B_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2)$; also ist:

$$A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 M'M'' \barwedge B_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2 N'N'';$$

d. h. $M'N'$, $M''N''$ gehören zur verbundenen Regelschar der vertikalen Geraden und schneiden in die dritte horizontale Gerade deren Koinzidenzpunkte O', O'' ein. Nun ist $\lambda = (A_1\mathfrak{B}_1M'M'') = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$, d. i. gleich einer der imaginären kubischen Wurzeln der positiven Einheit, und ebenso auf den andern beiden horizontalen Geraden. Daher liegt die ternäre zyklische Kollineation mit den Axen $M'N'O'$, $M''N''O''$ und mit dieser Invariante λ vor. Sie hat die Zykeln $(A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)$, $(B_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2)$, $(C_1A_2B_2)$, und indem die Konfigurationsebenen durch diese Geraden je in die beiden andern Geraden deren Zykelnpunkte einschneiden, ergeben sich als ihre Zykeln $(\delta^1\alpha\alpha^2)$, $(\delta^2\beta^1\beta)$ und $(\delta\gamma^2\gamma^1)$. Jeder von diesen Ebenenzykeln schneidet in die „äußere“ Gerade $C_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2$ der drei übrigen Konfigurationspunkte diese Punkte ein; sie bilden daher in der Kollineation den Zyklus $(C_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2)$ und die durchgehenden Ebenen, welche wiederum in jene Geraden die Zykelnpunkte einschneiden, den Zyklus $(\alpha^1\gamma\beta^2)$. Diese Gerade wird somit auch sich selbst entsprechend und trifft die Axen.

Wir haben die Zykeln $(\triangle_A\triangle_B\triangle_C)$ und $(\triangle\triangle^2\triangle^1)$.

Nun bilden die vier Geraden ein solches Quadrupel, daß jede drei die Regelschar bilden können und die vierte außerhalb liegt; nämlich:

$$\begin{vmatrix} A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 \\ B_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2 \\ C_1A_2B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 \\ \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2B_1 \\ \mathfrak{B}_2C_2\mathfrak{A}_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 \\ C_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 \\ B_2C_1A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 \\ B_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2 \\ A_2B_2C_1 \end{vmatrix},$$

und außerhalb liegen: $C_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2$, $C_1A_2B_2$, $B_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2$, $A_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$. Wir erhalten also jede der Kollineationen viermal. Für jede „äußere“ Gerade liefert uns die eine und die andere Regelschar je eine Kollineation und ihre Umkehrung, und es bestehen $16 \cdot 2 \cdot 2 : 4 = 16$ derartige gescharte ternär zyklischen Kollineationen b) mit imaginären Axen, demnach im ganzen $2 \cdot 32 + 16 = 80$ ternäre zyklische Kollineationen.

658 Quaternäre zyklische Kollineationen ergeben sich auf drei verschiedene Weisen.

Wir geben den Ebenen von $\triangle$ den Zyklus $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und lassen der Ebene α^1 die Ebene β^1 korrespondieren; dann gehen die Konfigurationsgeraden $\alpha\alpha^1\delta^2$, $\beta\alpha^1\gamma^2$, $\gamma\alpha^1\beta^2$, $\delta\alpha^1\alpha^2$ in $\beta\beta^1\delta^2$, $\gamma\beta^1\alpha^2$, $\delta\beta^1\beta^2$, $\alpha\beta^1\gamma^2$ über; es bleiben also δ^2 und β^2 fest und α^2 und γ^2 vertauschen sich involutorisch. Daraus, daß $\alpha\gamma^2\beta^1$, $\alpha\beta^2\gamma^1$, $\alpha\alpha^2\delta^1$ in $\beta\alpha^2\gamma^1$, $\beta\beta^2\delta^1$, $\beta\gamma^2\alpha^1$ übergehen, ersehen wir, daß die Ebenen von $\triangle^1$ den Zyklus $(\alpha^1\beta^1\gamma^1\delta^1)$ bilden. Demnach haben wir:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha^1\beta^1\gamma^1\delta^1)(\alpha^2\gamma^2)(\beta^2)(\delta^2).$$

Also gehen alle drei Tetraeder $\triangle$, $\triangle^1$, $\triangle^2$ in sich selbst über, $\triangle^2$ aber anders als $\triangle$ und $\triangle^1$. Die Gegenkanten $\alpha^2\gamma^2$ und $\beta^2\delta^2$ von $\triangle^2$ sind die reellen Koinzidenzgeraden, die letztere trägt die beiden reellen Koinzidenzebenen, also wird die erstere die reellen Koinzidenzpunkte enthalten, die Ecken von $\triangle^2$, Punkte von Cf_{II}.

$A_1 = (\alpha\delta^1\alpha^2, \alpha\alpha^1\delta^2)$ geht in $(\beta\alpha^1\gamma^2, \beta\beta^1\delta^2) = \mathfrak{C}_2$ über, usw. Wir erhalten:

$$(A_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2C_1)(A_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1C_2)(B_1\mathfrak{B}_2)(B_2\mathfrak{B}_1).$$

Diese letzteren sich involutorisch vertauschenden Punkte liegen auf jenen Koinzidenzgeraden, und die Involution auf $\beta^2\delta^2$ erkennt man als elliptisch, da auch die auf dieser Gerade gelegenen Ecken von $\triangle^2$ sich involutorisch vertauschen und harmonisch zu jenen liegen. Es bleibt also $\triangle_B$ fest, während $\triangle_A$ und $\triangle_C$ sich vertauschen.

Die zweite Potenz dieser Kollineation ist eine windschiefe Involution, in der B_1, B_2, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ sich selbst entsprechend sind; die reellen Geraden $B_1\mathfrak{B}_2 \equiv \beta^2\delta^2$, $B_2\mathfrak{B}_1 \equiv \alpha^2\gamma^2$ sind die Axen. Die Verbindungslinien der involutorisch sich entsprechenden Punkte A_1, $\mathfrak{A}_2$; $\mathfrak{C}_2$, C_1; usw. sind die andern Kanten von $\triangle^2$ und treffen jene. Also liegt eine hyperbolische zyklische Kollineation 4. Grades vor.

Der α^1 dürfen wir alle vier Ebenen von $\triangle^1$ zuordnen, wobei z. B. die Zuordnung $\begin{smallmatrix}\alpha^1\\\alpha^1\end{smallmatrix}$ dem $\triangle^1$ das vorhinige Verhalten von $\triangle^2$ und dem $\triangle^2$ das von $\triangle^1$ gibt.

Die beiden Punktzykeln 4. Grades, die aus Punkten von Cf_{I} bestehen, sind zwar eben: in δ^2, β^2 gelegen; aber im allgemeinen liegen unebene Zykeln vor, wie das oben die Ecken von $\triangle$, $\triangle^1$ beweisen, Punkte von Cf_{II}.

Wenn wir haben wollen, daß $\triangle$ sich ebenso transformiere, wie eben $\triangle^2$, also etwa: $(\alpha)(\beta)(\gamma\delta)$, so können wir dem α^1 nur γ^1 oder δ^1 zuordnen, sobald bei $\triangle^1$ und $\triangle^2$ sich Zykeln 4. Grades ergeben sollen. Beachten wir ferner: die reellen Koinzidenzebenen gehören der Cf_{I}, die reellen Koinzidenzpunkte der Cf_{II} an.

Die sechs Substitutionen von der Art $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und die sechs Substitutionen wie $(\alpha)(\beta)(\gamma\delta)$, jene mit vier Ebenen, die der α^1 zugeordnet werden können, diese mit zwei, geben $6 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 36$ Kollineationen. Vertauschen wir nun noch Cf_{I} mit Cf_{II}, so erhalten wir nochmals 36 Kollineationen, also im ganzen 72 hyperbolische quaternäre zyklische Kollineationen a).

Wir behalten den Zyklus $(\alpha\beta\gamma\delta)$ bei, ordnen nun aber der α^1 aus $\triangle^1$ die Ebene α^2 aus $\triangle^2$ zu. Es ergibt sich:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha^1\alpha^2\delta^1\beta^2)(\beta^1\delta^2\gamma^1\gamma^2),$$
$$(A_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1C_2)(A_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2C_1)(B_1\mathfrak{B}_2B_2\mathfrak{B}_1),$$

demnach $(\triangle)(\triangle^1\triangle^2)(\triangle_A\triangle_C)(\triangle_B)$.

In der zweiten Potenz der Kollineation sind z. B. B_1 und B_2 entsprechend, aber auch die Ecken $A \equiv \beta\gamma\delta$ und $C \equiv \delta\alpha\beta$ von $\triangle$ auf derselben Gerade; weil diese zu jenen harmonisch liegen, so ist diese Potenz eine windschiefe Involution mit imaginären Axen, unsere Kollineation also eine elliptische zyklische Kollineation 4. Grades (mit lauter imaginären Koinzidenzen von Punkten und Ebenen).

Wir haben die sechs Substitutionen $(\alpha\beta\gamma\delta)$, können der α^1 jede der vier Ebenen von $\triangle^2$ zuordnen und schließlich $\triangle$ durch $\triangle^1$, $\triangle^2$ ersetzen und erhalten, da Cf_{I}, Cf_{II} gleichartig beschaffen sind, die Vertauschung also nichts neues bringt, $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ elliptische quaternäre zyklische Kollineationen b).

Endlich führt uns jede der 18 Tetraederkanten zu einer planaren zyklischen Kollineation 4. Grades und ihrer Umkehrung. Nehmen wir z. B. die Kante BC von $\triangle$, welche die Punkte A_1, A_2 trägt. In den Ebenen α, δ durch sie haben wir noch je vier Punkte $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, bzw. C_1, B_1, C_2, B_2 von Cf_{I}, verbunden je durch vier Konfigurationsgeraden zu einem einfachen Vierseite. Wir wollen uns nach Nr. 468 eine Kollineation der Räume Σ, Σ' folgendermaßen herstellen; wir lassen die Punkte A_1, A_2 sich involutorisch entsprechen und machen den Bündel A_1 aus Σ und den Bündel A_2 aus Σ' so kollinear, daß den Geraden $A_1(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1, \mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2, C_1B_1, C_2B_2)$ die Geraden $A_2(\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_1, B_1C_2, B_2C_1)$ korrespondieren, und die Bündel A_2 aus Σ und A_1 aus Σ' so, daß den Strahlen $A_2(\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_1, B_1C_2, B_2C_1)$ die Strahlen $A_1(\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2, \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1, C_2B_2, C_1B_1)$ entsprechen; $A_1A_2 = \alpha\delta$ wird sich selbst entsprechend, so daß räumliche Kollineation erzielt wird. Es entstehen die Zykeln $(\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2)$, $(C_1B_1C_2B_2)$.

$\mathfrak{A}_1$, als Schnittpunkt von $\mathfrak{B}_1C_1$, $\mathfrak{C}_1B_1$, geht über in den Schnittpunkt $\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{C}_1B_1, \mathfrak{B}_2C_2)$; und ebenso entspricht $\mathfrak{A}_2$ sich selbst.

Also wird durch die Kollineation das System der 12 Punkte von Cf_{I} in sich selbst übergeführt: die reellen Koinzidenzgeraden sind die Gegenkanten $A_1 A_2$, $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ von $\triangle$; durch die erstere $A_1 A_2$ gehen vier sich selbst entsprechende Ebenen: α, δ und die Ebenen nach $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, daher sind alle Ebenen durch sie sich selbst entsprechend, also alle Punktzykeln planar und alle Punkte auf $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ sich selbst entsprechend, weshalb die Ebenenzykeln immer einen gemeinsamen Punkt auf dieser Gerade haben. Die der Cf_{I} bilden die Zykeln $(\alpha^1\gamma^2\delta^1\beta^2)$ um $\mathfrak{A}_1$, $(\beta^1\alpha^2\gamma^1\delta^2)$ um $\mathfrak{A}_2$, $(\beta\gamma)$, $(\alpha)(\delta)$. Hinsichtlich der Tetraeder gilt $(\triangle)(\triangle^1\triangle^2)$, $(\triangle_A)(\triangle_B\triangle_C)$. Die beiden Gegenkanten, welche Koinzidenzgeraden sind, verhalten sich ungleichartig, Cf_{I} und Cf_{II} aber gleichartig. Daher haben wir (wegen der Umkehrungen) $18 \cdot 2 = 36$ planare zyklische Kollineationen 4. Grades c).

659 Zu einer senären zyklischen Kollineation führt die Zuordnung:

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta\gamma\delta & \delta^1 \\ \beta\gamma\alpha\delta & \alpha^2 \end{vmatrix}.$$

Es ergeben sich die Zykeln:

$$(\alpha\beta\gamma)(\delta)(\alpha^1\gamma^2\delta^1\alpha^2\gamma^1\delta^2)(\beta^1\beta^2),$$
$$(A_1 B_2 C_1)(A_2 B_1 C_2)(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2),$$

also $(\triangle)(\triangle^1\triangle^2)$, $(\triangle_A\triangle_B\triangle_C)$.

Die eine reelle Koinzidenzgerade ist die Konfigurationsgerade $\delta\beta^1\beta^2$ und die Ebenen δ und nach $D = \alpha\beta\gamma$ durch sie sind reelle Koinzidenzebenen. Die Involution um jene (in der β^1, β^2 gepaart sind) beweist, daß die Punkte eines Zyklus 6. Grades zwischen gepaarten Ebenen oszillieren und die Kollineation halbplanar ist (Nr. 639). In δ liegen die beiden ternären Zykeln von Punkten von Cf_{I}. Die zweite reelle Koinzidenzgerade, polar zur ersten in Π, verbindet die drei Punkte von Cf_{II}: $D = \alpha\beta\gamma$, $\alpha^1\gamma^1\delta^1$, $\alpha^2\gamma^2\delta^2$, von denen die letzteren sich involutorisch entsprechen; der zweite reelle Koinzidenzpunkt auf ihr, außer D, ist der Schnitt mit δ.

In der dritten Potenz werden A_1, B_2, C_1, A_2, B_1, C_2 sich selbst entsprechend, ebenso α, β, γ, δ, dagegen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$; $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$; $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$; α^1, α^2; γ^1, γ^2; δ^1, δ^2; β^1, β^2 involutorisch entsprechend. Sie ist die involutorische Homologie (D, δ).

Man kann in $\triangle$ jede der vier Ebenen als fest ansehen, dazu kommt dann der Zyklus der drei andern und seine Umkehrung; einer bestimmten Ebene von $\triangle^1$ kann jede der vier Ebenen von $\triangle^2$ zugeordnet, sodann kann $\triangle$ durch $\triangle^1$ oder $\triangle^2$ ersetzt werden, und schließlich sind noch die beiden Konfigurationen Cf_{I}, Cf_{II}, welche sich ungleichartig verhalten, zu vertauschen; somit ergeben sich $4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 192$ halbplanare senäre Kollineationen 6. Grades a).

Betrachten wir endlich folgende zwei Sechsecke, deren Seiten

Geraden von Cf_{I} sind, jede durch eine Ecke des andern Sechsecks gehend:

$$A_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{C}_1 B_1, \quad C_1 \mathfrak{B}_2 A_2 C_2 B_2 \mathfrak{A}_1;$$

sie sind erhalten durch Verbindung der Punkte auf zwei der vier in Nr. 657 betrachteten windschiefen Konfigurationsgeraden $C_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2, \ldots$ durch Konfigurationsgeraden und derjenigen auf den beiden andern. Bilden wir aus ihnen zwei Zykeln 6. Grades, so ergeben sich weiter die Zykeln: $(\alpha, \beta^1, \alpha^2, \beta, \delta^1, \delta^2)$; $(\gamma, \gamma^1, \beta^2, \delta, \alpha^1, \gamma^2)$; und umgekehrt die durch:

$$\begin{vmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta & \alpha^1 \\ \beta^1\delta^1\gamma^1\alpha^1 & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

festgelegte Kollineation führt zu diesen Zykeln.

Die Tetraederzykeln sind: $(\triangle\triangle^1\triangle^2)(\triangle_A\triangle_C\triangle_B)$.

Die zweite Potenz ist die a. a. O. besprochene gescharte ternäre zyklische Kollineation; so daß die Punkte eines Zyklus 6. Grades zwischen zwei Geraden schwanken und ähnliches für die Ebenen gilt, die Kollineation also halbgeschart zu nennen ist.

Die vier erwähnten windschiefen Konfigurationsgeraden können auf drei Weisen in zwei Paare zerlegt werden, und wir erhalten zu jeder der obigen 16 gescharten ternären Kollineationen drei der jetzigen halbgescharten senären, von denen sie die zweite Potenz ist, also 48 halbgescharte senäre b).

In der dritten Potenz sind involutorisch entsprechend:

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2; \quad B_1, \mathfrak{B}_1; \quad A_1, \mathfrak{A}_2; \quad C_1, C_2; \quad B_2, \mathfrak{B}_2; \quad \mathfrak{A}_1, A_2.$$

Diese Paare liegen auf Gegenkanten der drei Tetraeder $\triangle, \triangle^1, \triangle^2$, auf denen dann auch die harmonisch liegenden Ecken involutorisch gepaart sind. Es handelt sich also um eine windschiefe Involution mit imaginären Axen; die zweite Potenz war auch eine Kollineation mit Axen und zwar ebenfalls imaginären. Wegen der imaginären Axen der dritten Potenz ist unsere Kollineation elliptisch. Die vier Axen der zweiten und dritten Potenz sind die imaginären Koinzidenzgeraden der senären Kollineation, und da so gegenüberliegende Kanten des Koinzidenztetraeders konjugiert imaginär sind, so sind die mit den reellen Koinzidenzgeraden inzidenten Koinzidenzelemente imaginär.

Die 576 Kollineationen sind nunmehr erschöpft. Insgesamt haben wir:

1) die Identität, 2) 24 involutorische Homologien, 3) 51 windschiefe Involutionen und zwar $9 + 36$ hyperbolische und 6 elliptische, 4) 80 ternäre zyklische Kollineationen, davon 64 allgemeine (planare) und 16 gescharte, 5) 180 quaternäre und zwar 72 hyperbolische, 72 elliptische und 36 planare, 6) endlich 240 senäre, davon 192, deren dritte

Potenz eine involutorische Homologie ist, und 48 halbgescharte elliptische.

660 Wir wollen diese Kollineationen noch danach unterscheiden, ob sie für die Punkte und Ebenen von Cf_{I} geraden oder ungeraden Substitutionen entsprechen. Eine Substitution ist gerade oder ungerade, je nachdem sie sich in eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier benachbarter Elemente zerlegen läßt. Ein Zyklus k^{ten} Grades ist mit $k-1$ Vertauschungen äquivalent, indem das erste Element nach und nach mit dem zweiten, mit dem dritten, ... mit dem k^{ten} vertauscht wird; von Zykeln 1. Grades kann also abgesehen werden.

Bei einer zu einem $\triangle$ gehörigen involutorischen Homologie besteht die Substitution der Punkte aus drei Zykeln 2. Grades, die der Ebenen aus vier. Jene ist daher ungerade, diese gerade. Also sind 12 der Homologien ungerade in Punkten, gerade in Ebenen,[1]) die 12 andern umgekehrt.

Eine windschiefe Involution mit Tetraederkanten als Axen enthält je vier Zykeln 2. Grades. Diese neun hyperbolischen windschiefen Involutionen sind also gerade in beiderlei Sinne; ebenso sind es die sechs elliptischen mit je sechs Zykeln 2. Grades von Punkten und Ebenen, dagegen sind die 36 andern hyperbolischen mit je fünf Zykeln 2. Grades ungerade in beiderlei Sinne.

Bei den 64 ternären Kollineationen *a*) bestehen vier Zykeln 3. Grades von Punkten mit drei Zykeln 3. Grades von Ebenen oder umgekehrt, daher sind sie gerade in beiderlei Sinne, ebenso die 16 gescharten *b*) mit beidemal vier ternären Zykeln; also sind alle ternären in beiderlei Sinne gerade.

Von den 192 hyperbolischen quaternären Kollineationen *a*) ist die eine Hälfte in Ebenen ungerade, in Punkten gerade, die andere Hälfte verhält sich umgekehrt.

Die 72 elliptischen *b*) und die 36 planaren *c*) sind ungerade in beiderlei Sinn.

Endlich für die 192 halbplanaren senären Kollineationen *a*) gilt dasselbe wie für die 192 quaternären.

Und die 48 halbgescharten senären Kollineationen *b*) sind gerade-gerade.

Die Identität ist natürlich auch gerade-gerade.

Es gibt daher von jeder der vier Arten: gerade-gerade,... 144 Kollineationen.

Ersichtlich bilden die 144, welche doppelt gerade sind, eine Untergruppe. Es sind das übrigens alle diejenigen Kollinea-

1) D. h. in Punkten, bzw. Ebenen der Cf_{I}.

tionen, welche entweder alle sechs Tetraeder in sich überführen oder nur die des einen Tripels, die des andern hingegen ternär ineinander transformieren oder beide Tripel so verändern: die Identität, die windschiefen Involutionen *a*) und *c*), die sämtlichen ternären und die senären *b*); $1 + 9 + 6 + 64 + 16 + 48 = 144$.

Ferner gibt es zwei Untergruppen von je 96 Kollineationen, welche die Tetraeder des einen Tripels in sich transformieren; sie bestehen je aus der Identität, zwölf involutorischen Homologien, den $9 + 6$ windschiefen Involutionen *a*), *c*), 32 ternären Kollineationen *a*) und 36 quaternären *a*). Gemeinsam ist ihnen die Gruppe aus der Identität und den 15 windschiefen Involutionen *a*), *c*), welche alle Tetraeder in sich überführen.

Jedes Tetraeder führt zu einer interessanten Gruppe von 192 Kollineationen, bei denen es in sich übergeht. Sie besteht aus der eben genannten Gruppe von 16 Kollineationen, $12 + 4$ involutorischen Homologien, 12 windschiefen Involutionen *b*), 32 ternären Kollineationen *a*), $36 + 12$ quaternären Kollineationen *a*), 24 quaternären *b*), 12 quaternären *c*) und 32 senären *a*). Sie enthält eine der vorhin genannten Gruppen von 96 Kollineationen als Untergruppe, ferner drei Untergruppen von 64 Kollineationen, bei denen je noch ein bestimmtes Tetraeder aus dem andern Tripel in sich übergeht. Diese setzen sich je zusammen aus jenen 16 Kollineationen, 8 involutorischen Homologien, 4 windschiefen Involutionen *b*), $12 + 12$ quaternären Kollineationen *a*), 8 quaternären *b*) und 4 quaternären *c*).

Von den 2304 Kollineationen und Korrelationen sind noch ein- 661
facherer Art die 576 Korrelationen, welche jede der beiden Konfigurationen Cf_{I}, Cf_{II} in die andere überführen und durch Multiplikation der behandelten 576 Kollineationen mit dem Polarraume Π, mit dem diese alle vertauschbar sind, sich ergeben. Diese Korrelationen sind dann (Nr. 596) auch mit Π vertauschbar.

Die 24 involutorischen Homologien sind mit Π vertauschbar, weil je Zentrum S und Ebene σ von ihnen in Π polar sind. Das Produkt ist also derjenige Polarraum, dessen Basisfläche der von Π harmonisch zugeordnet ist in bezug auf jene Elemente S, σ (§ 89).

Die Axen der neun windschiefen Involutionen *a*) sind Gegenkanten u, v von Tetraedern und daher polar in Π, wie es zur Vertauschbarkeit notwendig ist; Produkt ist ebenfalls ein Polarraum: seine Basisfläche ist der von Π harmonisch zugeordnet in bezug auf u und v.

Ähnlich sind die Axen der 36 windschiefen Involutionen *b*) polar in Π; z. B. A_1A, A_2D. Denn A, D gehen durch Π in α, δ über, A_1, A_2 in ihre Gegenebenen in $\triangle_A$, also in $A_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \equiv A_2AD$,

$A_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \equiv A_1 AD$, demnach AA_1 in A_2D und umgekehrt. Produkt ist wiederum ein Polarraum.

Bei der in Nr. 656 behandelten windschiefen Involution c) gehen die Punktinvolutionen (BC, A_1A_2) und (AD, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$) in die zu ihnen perspektiven Ebeneninvolutionen je um die Gegenkante AD, BC über, daher die imaginären Axen, als Verbindungslinien ihrer Doppelpunkte, in sich selbst, als Schnittlinien der Doppelebenen, sind also Geraden der Basisfläche von Π. Das Produkt ist daher derjenige Nullraum, welcher durch jene beiden Axen und die andere Regelschar der Basisfläche geht (Nr. 599).

Wir erhalten aus den sechs Involutionen c) sechs Nullräume.

Aber diese Involutionen c) sind untereinander vertauschbar, und ihre 15 Produkte sind die a) und c). Die Punktzykeln der c) sind:

$$\begin{array}{ll}
c_1 & (A_1A_2)(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)(B_1\mathfrak{B}_1)(B_2\mathfrak{B}_2)(C_1\mathfrak{C}_2)(C_2\mathfrak{C}_1),\\
c_2 & (B_1B_2)(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2)(C_1\mathfrak{C}_1)(C_2\mathfrak{C}_2)(A_1\mathfrak{A}_2)(A_2\mathfrak{A}_1),\\
c_3 & (C_1C_2)(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2)(A_1\mathfrak{A}_1)(A_2\mathfrak{A}_2)(B_1\mathfrak{B}_2)(B_2\mathfrak{B}_1),\\
c_4 & (A_1A_2)(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)(B_1\mathfrak{B}_2)(B_2\mathfrak{B}_1)(C_1\mathfrak{C}_1)(C_2\mathfrak{C}_2),\\
c_5 & (B_1B_2)(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2)(C_1\mathfrak{C}_2)(C_2\mathfrak{C}_1)(A_1\mathfrak{A}_1)(A_2\mathfrak{A}_1),\\
c_6 & (C_1C_2)(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2)(A_1\mathfrak{A}_2)(A_2\mathfrak{A}_1)(B_2\mathfrak{B}_1)(B_2\mathfrak{B}_2).
\end{array}$$

Sie bilden zwei Systeme von je dreien c_1, c_2, c_3; c_4, c_5, c_6. Jedesmal sind die sechs genannten Leitstrahlen drei Paare Gegenkanten, zugleich von einem $\triangle$ und einem $\triangle_1$. Zwei windschiefe Involutionen aus verschiedenen Systemen haben zwei Gegenkanten gemeinsam, z. B. c_1 und c_4 die A_1A_2, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, sowie die Involutionen auf ihnen (und um sie), konstituiert durch die Eckenpaare des $\triangle$ und des $\triangle_1$. Folglich bilden die einen Axen mit den andern ein Vierseit, dessen (imaginäre) Ecken die Doppelpunkte jener Involutionen sind. Daraus folgt die Vertauschbarkeit, und Produkt ist die windschiefe Involution, welche die Gegenkanten zu Axen hat, also eine a). Die neun Kombinationen führen zu den neun Involutionen a).

Dagegen haben zwei c_i aus demselben Systeme keine Gegenkanten gemeinsam. Man überzeugt sich leicht direkt, daß je zwei aus demselben Systeme zum Produkte (in beiden Reihenfolgen) die dritte haben, und das Produkt aller drei die Identität ist. Beachten wir, daß es sich um drei elliptische windschiefe Involutionen handelt,

Nennen wir die sechs Nullräume, welche sich als Produkte der sechs Involutionen c_i in Π ergeben, $\mathfrak{N}_i$, so ist:

$$\mathfrak{N}_i\mathfrak{N}_k = c_i\Pi \cdot \Pi c_k = c_i c_k,$$

also eine windschiefe Involution; die sechs Nullräume sind daher vertauschbar.

Das Produkt von drei verschiedenen c_i ist die Identität oder eine der neun Involutionen a).

Das erstere ist der Fall, wenn c_i, c_k, c_l zu demselben Systeme gehören. Im andern Falle mögen c_i, c_k zu dem einen, c_l zum andern System gehören. Das Produkt $c_i c_k$ ist die dritte c aus demselben Systeme und ihr Produkt in c_l aus dem andern Systeme eine a).

Nun ist: $\mathfrak{N}_i \mathfrak{N}_k \mathfrak{N}_l = c_i \cdot \Pi \cdot \Pi \cdot c_k \cdot c_l \cdot \Pi = c_i c_k c_l \Pi$, also entweder Π oder einer der neun Polarräume, welche durch Multiplikation der a) mit Π entstehen.

Die Produkte $c_1 c_2 c_4$ und $c_3 c_5 c_6$ sind beide $c_3 c_4$, also sind auch $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_4$ und $\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_5 \mathfrak{N}_6$ gleich, und es ergeben sich nur zehn Produkte.

So zeigt sich, daß in der vollen Gruppe von 2304 Verwandtschaften sich die Gruppe (Nr. 643) befindet, welche aus der Identität, 15 windschiefen Involutionen, sechs Nullräumen und zehn Polarräumen besteht. Die Involutionen sind die $9 + 6$ windschiefen Involutionen a), c) aus G_{576}, die Nullräume die Produkte der c) in den Polarraum Π, die Polarräume Π selbst und die Produkte der a) in Π.

Nur Π hat eine reell-imaginäre Basisfläche (Nr. 654); die eine Regelschar ist den Gewinden $(\mathfrak{N}_1)$, $(\mathfrak{N}_2)$, $(\mathfrak{N}_3)$ gemeinsam, in der andern befinden sich die Axen von c_1, c_2, c_3 oder die Leitgeraden der Strahlennetze, in denen jene Gewinde sich zu je zweien schneiden; die Axen der c_4, c_5, c_6 bilden mit jenen Vierseite und sind daher in der ersteren Regelschar enthalten, so daß die zweite den Gewinden $(\mathfrak{N}_4)$, $(\mathfrak{N}_5)$, $(\mathfrak{N}_6)$ gemeinsam ist.

Jene Axen sind alle konjugiert imaginär und die in derselben Regelschar befindlichen zu je zweien harmonisch. Das ist nur möglich bei einer Regelschar einer reell-imaginären Fläche, denn bei einer reellen elliptischen gehören konjugiert imaginäre Geraden zu verschiedenen Regelscharen, bei einer reellen hyperbolischen würden auf einer reellen Gerade der andern Regelschar drei reell-imaginäre gegenseitig harmonische Punktepaare sich ergeben, was nicht möglich ist.

Die neun andern Basisflächen tragen in ihren Regelscharen die reellen Axen der Involutionen a) und sind reell.[1])

Daß aus einer zyklischen Kollineation n^{ten} Grades eine zyklische 662
Korrelation n^{ten} oder $2\,n^{\text{ten}}$ Grades sich ergibt, je nachdem n gerade oder ungerade ist, wissen wir aus Nr. 641.

Weil jede von den Kollineationen Γ von G_{576} mit Π vertauschbar ist, so führt sie zwei Gegenelemente eines Tetraeders, polar in Π, in zwei ebensolche über; aus jedem Zyklus von Ebenen oder Punkten der Cf_{I} ergibt sich der ebenso beschaffene Zyklus der ihnen in den Tetraedern gegenüberliegenden Punkte, Ebenen von Cf_{II}. Begnügen

1) Vgl. Liniengeometrie Bd. I, Nr 174.

wir uns mit den Punkten von Cf_{II} und führen also noch die Gegenecken $A^1, \ldots D^2$ von $\alpha^1, \ldots \delta^2$ ein.

Nunmehr sind leicht die Zykeln der Korrelationen $C = \Gamma\Pi$ zu bilden; z. B. aus $(\alpha\beta\gamma)$ entsteht $(\alpha B\gamma A\beta C)$ bei der Reihenfolge $\Gamma\Pi$, und $(A\beta C\alpha B\gamma)$ bei der Reihenfolge $\Pi\Gamma$, wie notwendig derselbe Zyklus, aus (δ) der Zyklus (δD), aus $(\alpha^1\alpha^2\delta^1\beta^2)$ die beiden Zykeln $(\alpha^1 A^2\delta^1 B^2)$ und $(A^1\alpha^2 D^1\beta^2)$, aus $(\beta\gamma)$ die (βC) und $(B\gamma)$.

Es sei Γ etwa die in Nr. 657 betrachtete ternäre Kollineation a):

$$(\alpha\beta\gamma)(\delta) \quad (\alpha^1\gamma^1\delta^1)(\beta^1) \quad (\alpha^2\gamma^2\delta^2)(\beta^2),$$

so ergeben sich für ihr Produkt C in Π:

$$(\alpha B\gamma A\beta C)(\delta D) \quad (\alpha^1 C^1\delta^1 A^1\gamma^1 D^1)(\beta^1 B^1) \quad (\alpha^2 C^2\delta^2 A^2\gamma^2 D^2)(\beta^2 B^2).$$

Wir heben hervor die drei involutorischen Paare δ, D; β^1, B^1; β^2, B^2, bestehend aus nicht inzidenten Elementen. Die beiden in Π polaren Konfigurationsgeraden $\delta\beta^1\beta^2$ und DB^1B^2 sind Koinzidenzgeraden der Γ gewesen und werden involutorisch entsprechend in C; sie werden die Diagonalen des den Kernflächen gemeinsamen Vierseits. Jene involutorischen Paare lehren, daß die erstere Diagonale eine Involution doppelt konjugierter Ebenen, die andere eine Involution doppelt konjugierter Punkte trägt, so daß die Korrelation partiell involutorisch ist. Von einem Zyklus 6. Grades $(\xi U\eta V\zeta W)$ gehe ξ durch einen Punkt S der zweiten der beiden Diagonalen, dann liegt U, ihr Pol in Π, in der durch die erste gehenden Polarebene σ; η, V, ζ, W sind dann wiederum mit S, σ, S, σ inzident.

Die quaternäre Kollineation a) von Nr. 658:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha^1\beta^1\gamma^1\delta^1)(\alpha^2\gamma^2)(\beta^2)(\delta^2)$$

führt zur Korrelation:

$$(\alpha B\gamma D)(\beta C\delta A)(\alpha^1 B^1\gamma^1 D^1)(\beta^1 C^1\delta^1 A^1)(\alpha^2 C^2)(\gamma^2 A^2)(\beta^2 B^2)(\delta^2 D^2)$$

mit vier involutorischen Paaren, von denen zwei inzidente, die andern nicht inzidente Elemente haben. Die beiden Pole der Ebene α in ihr sind B und D, die von γ: D und B; daher entspricht der $\alpha\gamma$ die $BD \equiv \alpha\gamma$, also sie selbst, und ebenso sind $\beta\delta$, $\alpha^1\gamma^1$, $\beta^1\delta^1$ sich selbst entsprechend. Sie bilden ein den Kernflächen gemeinsames Vierseit $B_1 B_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1$. Seinen Ecken entsprechen, in beiderlei Sinne, die zugehörigen Winkelebenen. Die Diagonalen $B_1\mathfrak{B}_2$ und $B_2\mathfrak{B}_1$ sind $\beta^2\delta^2$, $\alpha^2\gamma^2$. Jene trägt die beiden Punkte A^2, C^2, denen die inzidenten Ebenen γ^2, α^2 (durch die andere Diagonale) involutorisch entsprechen. Daraus schließen wir, daß jeder Punkt der $\beta^2\delta^2$ eine durch ihn und $\alpha^2\gamma^2$ gehende involutorische Polarebene hat, denn für die vier Punkte A^2, C^2, B_1, $\mathfrak{B}_2$ gilt dies. Folglich liegt die Diagonale $\beta^2\delta^2$ auf der Punkt-Kernfläche, die $\alpha^2\gamma^2$ auf der Ebenen-Kernfläche, so daß jene das Ebenenpaar $(B_1\mathfrak{B}_2 B_2,\ B_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1)$, diese das Punktepaar $(B_2, \mathfrak{B}_1)$ ist.

Mit dieser Ausartung der Kernflächen subsumiert sich unsere Korrelation der zweiten Art, in welcher nach Nr. 619 eine Korrelation zyklisch vom 4. Grade sein kann.

Die Diagonale $\alpha^2\gamma^2$ trägt wegen B^2D^2 eine Involution doppelt konjugierter Punkte, und daher $\beta^2\delta^2$ eine Involution doppelt konjugierter Ebenen, und die Korrelation ist ebenfalls partiell involutorisch; und für die Punkte und Ebenen eines Zyklus 4. Grades gilt entsprechendes wie oben bei denen eines Zyklus 6. Grades.

Das Kernvierseit aber ist unbestimmt geworden; B_2, $\mathfrak{B}_1$ sind die einen Gegenecken, die andern zwei beliebige Punkte auf $\beta^2\delta^2$.

Die quaternäre Kollineation b):

$$(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha^1\alpha^2\delta^1\beta^2)(\beta^1\delta^2\gamma^1\gamma^2)$$

führt zur Korrelation:

$$(\alpha B\gamma D)(\beta C\delta A)(\alpha^1A^2\delta^1B^2)(\beta^1D^2\gamma^1C^2)(\alpha^2D^1\beta^2A^1)(\gamma^2B^1\delta^2C^1).$$

Es entsprechen $\alpha\gamma \equiv BD$ und $\beta\delta \equiv CA$ sich selbst. Dagegen sind A^2 und B^2 die Pole von α^1 und B^2 und A^2 die von δ^1; daraus folgt, daß $\alpha^1\delta^1$ und $A^2B^2 \equiv \gamma^2\delta^2$ sich involutorisch entsprechen und ebenso tun es $\beta^1\gamma^1$ und $D^2C^2 \equiv \alpha^2\beta^2$. Diese beiden Paare befinden sich in derselben Regelschar; denn in der windschiefen Involution a) mit den Axen $\alpha^1\delta^1 \equiv A_1\mathfrak{A}_1$, $\beta^1\gamma^1 \equiv A_2\mathfrak{A}_2$ sind α^2 und δ^2, welche diese Axen in A_1, $\mathfrak{A}_2$ treffen, und β^2 und γ^2, welche sie in A_2, $\mathfrak{A}_1$ treffen, entsprechend, daher auch $\alpha^2\beta^2$ und $\gamma^2\delta^2$; so daß diese mit den Axen $\alpha^1\delta^1$, $\beta^1\gamma^1$ der nämlichen Regelschar ρ^2 angehören, und zu ihnen harmonisch sind.

Weil nun die einen wie die andern in der Korrelation involutorisch zugeordnet sind, so entsteht durch dieselbe in ρ^2 eine (elliptische) Involution. Und dies ist nach Nr. 611 das Kennzeichen dafür, daß es sich um eine Korrelation mit vereinigten Kernflächen handelt; durch die Zykeln 4. Grades sind Nullraum und Polarraum ausgeschlossen.

In der verbundenen Regelschar befinden sich die sich selbst entsprechenden Geraden m, n derjenigen Regelschar der Kernfläche, deren Geraden in (nicht involutorischer) Projektivität stehen, während die der andern alle sich selbst entsprechen (Nr. 610). Zu diesen gehören $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$, welche ja die vier Geraden $\alpha^1\delta^1, \ldots \gamma^2\delta^2$ nicht treffen.

Damit erhalten wir ein Beispiel der ersten Art, wie nach Nr. 619 eine Korrelation zyklisch vom 4. Grade sein kann.

Aus der quaternären zyklischen Kollineation c):

$$(\alpha)(\delta)(\beta\gamma)(\alpha^1\gamma^2\delta^1\beta^2)(\beta^1\alpha^2\gamma^1\delta^2)$$

ergibt sich die Korrelation:

$$(\alpha A)(\delta D)(\beta C)(\gamma B)(\alpha^1C^2\delta^1B^2)(\beta^2A^1\gamma^2D^1)(\beta^1A^2\gamma^1D^2)(\alpha^2C^1\delta^2B^1).$$

Demnach sind A und α, D und δ, B und γ, C und β involutorisch entsprechend, von ihnen die letzteren inzident, also sind auch AD und BC so entsprechend. In der Kollineation korrespondierten sich A_1 und A_2 involutorisch, jedem korrespondiert in Π die Ebene, welche den andern mit $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \equiv AD$ verbindet, also entspricht in der Korrelation jedem die Ebene von ihm selbst nach AD. So ergeben sich auf CB vier Punkte, die in ihre (durch AD) gehenden Polarebenen fallen. Auf AD aber sind A, D doppelt konjugiert, sowie $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, denn diese sind in der Kollineation sich selbst entsprechend und konjugiert in Π; also haben wir auf AD eine elliptische Involution doppelt konjugierter Punkte; die imaginären Ebenen von CB nach den Doppelpunkten dieser Involution setzen die Punkt-Kernfläche zusammen und die Bündel um die Doppelpunkte die Ebenen-Kernfläche. Wir haben wieder die zweite Art zyklischer Korrelation 4. Grades.

Daß $B^1C^1 \equiv A_1\mathfrak{A}_1$ und $B^2C^2 \equiv A_1\mathfrak{A}_2$, $A^1D^1 \equiv A_2\mathfrak{A}_2$ und $A^2D^2 \equiv A_2\mathfrak{A}_1$, wie aus diesen Ergebnissen folgt, involutorisch polar sind, kann auch direkt aus den Zykeln abgeleitet werden. —

Es lassen sich natürlich auch schon in der Ebene Gruppen von Verwandtschaften herstellen, z. B. eine Gruppe von 360 ebenen Kollineationen.[1]) Ich habe, der Kürze halber, auf die Besprechung solcher Gruppen verzichtet. Eine ebene Gruppe von 18 Kollineationen wird uns in Nr. 860 begegnen.

---

1) Mit ihr haben sich Valentiner, (Abh. der dänischen Akad. 6. Reihe, Bd. 5), Wiman (Math. Ann. Bd 47), Klein, Gordan (ebenda Bd. 61) und Gerbaldi (Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo Bd. 12, 13, 14, 16) beschäftigt. — In bezug auf Gruppen von ebenen Korrelationen vgl. S. Kantor, Journ. f. Math. Bd. 116, S. 171.

Sechster Teil.

Lineare Systeme von Kurven und Flächen; Ausartungen und Abzählungen, lineare Systeme von linearen Verwandtschaften und von in solchen befindlichen Gebilden.

§ 97. Herstellung und Eigenschaften linearer Systeme, insbesondere von Kurven und Flächen. Kollineare Beziehung von Netzen und Gebüschen.

Wir setzen die Begriffe eines Büschels von (ebenen) Kurven n^{ter} Ordnung mit n^2 Grundpunkten, von denen $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ die übrigen bestimmen, eines Büschels von Flächen n^{ter} Ordnung mit einer Grundkurve von der Ordnung n^2, welche durch $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-2$ Punkte bestimmt ist, voraus; wir können dies auch für den eines Netzes (oder Bündels) von Flächen n^{ter} Ordnung mit n^3 Grundpunkten tun, von denen $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-3$ die übrigen bestimmen. Aus Nr. 168 wissen wir, daß es möglich ist, Büschel projektiv zu beziehen. 663

Zwei Kurven[1]) oder Flächen n^{ter} Ordnung bestimmen einen Büschel, weil sie seine Grundpunkte oder Grundkurve bestimmen, drei Flächen n^{ter} Ordnung ein Netz durch seine Grundpunkte.

Stellen wir nunmehr ein Kurvennetz, n^{ter} Ordnung, dessen Kurven im allgemeinen keine gemeinsamen Punkte haben, aus drei Kurven C_0, C_1, C_2 her. Wir verbinden eine dieser drei Konstituenten, etwa C_0, mit den einzelnen Kurven des Büschels C_1C_2 durch Büschel, nennen den Inbegriff dieser ∞^1 Büschel ein Netz und diese Herstellungsweise seine fächerförmige Erzeugung. Daß dabei die Konstituenten C_1, C_2 durch jede beliebige zwei ihres Büschels ersetzt werden können, ist klar; ferner erhellt, daß C_0 diesem Büschel nicht angehören darf, weil wir sonst immerfort nur ihn selbst erhalten und keine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven. Drei nicht demselben Büschel angehörige Kurven gleicher Ordnung mögen als unabhängige bezeichnet werden.

Es sei $\overline{C}$ irgend eine Kurve des Büschels $C_0\,C_2$, der ja ganz zum Netze gehört; wir verbinden sie mit C_1 zu einem Büschel und dessen einzelne Kurven mit C_0 und wollen zeigen, daß diese neuen

---

1) Den Zusatz „derselben Ebene" unterlassen wir meistens, weil er selbstverständlich ist.

Büschel, die von C_0 ausstrahlen, mit den obigen identisch sind, also ebenfalls das Netz erzeugen. Wenn X ein beliebiger Punkt von C_0 ist und C', $\bar{C}'$ die beiden Kurven von $C_1 C_2$, $C_1 \bar{C}$ sind, die durch ihn gehen, so beziehen wir die beiden Büschel $C_1 C_2$, $C_1 \bar{C}$ so projektiv auf einander, daß den C_1, C_2, C' die C_1, $\bar{C}$, $\bar{C}'$ entsprechen. Zum Erzeugnis $2n^{\text{ter}}$ Ordnung gehört die sich selbst entsprechende Kurve C_1; das eigentliche Erzeugnis ist n^{ter} Ordnung. Auf ihm liegen die n^2 Schnittpunkte von C_2 und $\bar{C}$, die sich auch auf C_0 befinden; ferner der Punkt X, der ebenfalls auf C_0 liegt; also hat es mit C_0 $n^2 + 1$ Punkte gemeinsam und ist mit ihr identisch, d. h. zwei entsprechende Kurven der beiden Büschel schneiden sich immer auf C_0 und bilden mit ihr je denselben Büschel.

Daraus erhellt, daß man C_2 zunächst durch eine beliebige Kurve von $C_1 C_2$ und diese wiederum durch eine beliebige Kurve des sie mit C_0 verbindenden Büschels ersetzen kann, also durch jede beliebige Kurve des Netzes, und ebenso C_1. Wir werden natürlich vermeiden, daß C_1 und C_2 durch dieselbe Kurve von $C_1 C_2$ ersetzt werden, weil sie dann nicht mehr einen Büschel bestimmen; dadurch wird auch vermieden, daß die neuen Konstituenten mit C_0 in denselben Büschel kommen. Da nach der ursprünglichen Erzeugungsweise der ganze Büschel $C_1 C_2$ zum Netze gehört, und die Konstituenten C_1, C_2 mit beliebigen Kurven des Netzes vertauscht werden können, so folgt:

Der Büschel, welcher irgend zwei Kurven des Netzes verbindet, gehört ihm ganz an.

Also gehören auch die Büschel, welche die Kurven von $C_0 C_2$ mit C_1 verbinden, dem Netze ganz an, und jede Kurve C des Netzes ist in einem dieser Büschel enthalten. Es sei X einer der Schnitte von C mit C_1 und C_x die Kurve von $C_0 C_2$, die durch ihn geht. Der Büschel aus C_0 nach einer Kurve von $C_1 C_2$, welcher C enthält, geht, wie wir gefunden haben, auch nach einer Kurve von $C_x C_1$; diese muß durch X gehen, weil C_x und C_1 es tun, und ist daher mit C identisch, da in jedem Büschel aus C_0 nur eine Kurve durch X geht; C befindet sich demnach im Büschel $C_1 C_x$. Man kann also das Netz auch dadurch erzeugen, daß man C_1 oder C_2 als bevorzugte Konstituente nimmt, von welcher die erzeugenden Büschel ausstrahlen. C_0 kann durch eine von den andern Konstituenten und daher durch eine beliebige Kurve des Netzes ersetzt werden.

Die drei Konstituenten verhalten sich gleichartig und können durch beliebige drei unabhängige Kurven des Netzes ersetzt werden.

Es seien $C_1 C_2$, $C_1' C_2'$ zwei beliebige Büschel des Netzes; indem dasselbe sowohl durch die Büschel entsteht, welche von C_0 nach den Kurven von $C_1 C_2$, als durch diejenigen, die von C_0 nach den Kurven von $C_1' C_2'$ gehen, werden die beiden Büschel $C_1 C_2$, $C_1' C_2'$ projektiv mit solchen Kurven als entsprechenden, die in demselben Büschel durch C_0 sich befinden. Damit ist gesagt, daß C_0 der Ort der Schnittpunkte entsprechender Kurven ist; und die Ergänzung zur $2n^{\text{ten}}$ Ordnung kann nur dadurch geschehen, daß die beiden Büschel eine Kurve gemeinsam haben, welche durch den aus C_0 nach ihr gehenden Büschel sich selbst entsprechend wird. Also:

Zwei Büschel eines Netzes haben stets eine Kurve gemein.

Nimmt man zwei Konstituenten aus dem einen, die dritte aus dem andern Büschel, so wird dieser einer von den erzeugenden bei der fächerförmigen Erzeugung um die die dritte Konstituente und geht nach einer Kurve des ersten Büschels.

Am Kurvennetze erster Ordnung, dem Geradenfelde einer Ebene, sind diese Ergebnisse leicht zu bestätigen.

Dasselbe hat ∞^2 Strahlenbüschel, um jeden Punkt der Ebene einen.

Jedes Kurvennetz enthält ∞^2 Büschel. Beliebige zwei von den ∞^2 Kurven des Netzes bestimmen einen demselben angehörigen Büschel, so daß jeder durch beliebige zwei von seinen Kurven, also auf ∞^2 Weisen konstituiert werden kann; wodurch die vorhin erhaltene Mannigfaltigkeit ∞^4 wieder auf ∞^2 reduziert wird.

Die durch einen Punkt P gehenden Kurven des Netzes bilden einen Büschel. Wir benutzen die fächerförmige Erzeugung; der Punkt P scheidet aus zweien der erzeugenden Büschel je eine Kurve aus, der durch sie bestimmte Büschel hat P zu einem Grundpunkte und, weil dem Netze angehörig, mit jedem der andern erzeugenden Büschel eine Kurve gemein: die durch P gehende.

Jedem Punkte P sind n^2-1 andere Grundpunkte desselben Büschels zugeordnet.

Die ∞^2 Punkte der Ebene führen zu ∞^2 Büscheln, jedoch, wenn n gerade ist, die reellen Punkte nicht notwendig zu allen.

Ein zweiter Punkt P' scheidet, da er im allgemeinen nicht zu den n^2-1 dem P zugeordneten Punkten gehört, aus dem zu P gehörigen Büschel eine Kurve aus.

Zwei (nicht zugeordnete) Punkte bestimmen eine durch sie gehende Kurve im Netze.

Im allgemeinen haben die drei Konstituenten keinen Punkt gemein; jeder Punkt aber, der ihnen etwa gemeinsam ist, befindet sich, wie die fächerförmige Erzeugung zeigt, auf allen Kurven des Netzes.

Erwähnen wir das spezielle Kegelschnitt-Netz mit drei Grundpunkten; die in ihm enthaltenen Büschel haben nur einen veränderlichen Grundpunkt. Hier sieht man sofort die zwei Büscheln gemeinsame Kurve.

Wir setzen als bekannt den Satz voraus, daß, wenn zwei Kreise einen dritten orthogonal schneiden, auch jeder Kreis ihres Büschels, von dem zwei Grundpunkte ja die absoluten Punkte sind, dies tut. Schneiden drei Kreise einen dritten orthogonal, so tun es alle Kreise des durch sie konstituierten Netzes; und da es zu drei Kreisen immer einen Orthogonalkreis gibt, so hat jedes Kreisnetz einen Orthogonalkreis. Ein Kreisnetz hat zwei Grundpunkte und erhält noch einen dritten, wenn der Orthogonalkreis auf einen Punkt sich reduziert.

664 Man kann mit geringen Modifikationen die gemachten Betrachtungen beim Flächennetz wiederholen. Die gemeinsamen Punkte aber gestatten eine einfachere Erörterung. Zwei Flächen des Netzes haben eine Kurve von der Ordnung n^2 gemein, welche durch die n^3 Grundpunkte des Netzes geht; also tut es auch jede Fläche ihres Büschels und gehört deshalb zum Netze. Jeder Punkt scheidet aus dem Netze einen Büschel; denn es tritt zu $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-3$ unabhängigen Grundpunkten noch ein weiterer, und durch $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-2$ Grundpunkte ist ein Büschel und seine Grundkurve $n^{2\text{ter}}$ Ordnung bestimmt; zwei weitere Punkte bestimmen eine Fläche im Netze, wofern sie nicht derselben Grundkurve angehören; und zwei Büschel des Netzes haben die Fläche gemeinsam, welche durch die Punkte bestimmt ist, die einzeln die Büschel bestimmen. Das Netz enthält ∞^2 Büschel und zugehörige Grundkurven.[1])

Ein Flächennetz kann eine Grundkurve haben. Z. B. Das Flächennetz 2. Ordnung hat, wenn sieben seiner Grundpunkte auf einer kubischen Raumkurve liegen, diese zur Grundkurve; sie ist auf allen seinen Flächen gelegen, und der achte assoziierte Punkt ist ein beliebiger Punkt auf ihr. Ebenso bringen fünf Grundpunkte, die einem Kegelschnitte angehören, oder drei, die auf einer Gerade liegen, diese ganz auf alle Flächen des Netzes 2. Ordnung. Es hat dann noch zwei, bzw. vier weitere einzelne Grundpunkte, und der achte ist wiederum ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts, der Gerade. Die absolute Kurve und zwei Punkte bestimmen ein Kugelnetz.

Eine Ebene schneidet aus einem Flächennetze n^{ter} Ordnung ein Kurvennetz n^{ter} Ordnung aus; die fächerförmige Erzeugung geht in die Ebene über. Das Kurvennetz erhält einen Grundpunkt, wenn die Ebene durch einen Grundpunkt des Flächennetzes geht.

Dual zum Büschel ist die Schar von Kurven, bzw. Flächen n^{ter} Klasse mit n^2 gemeinsamen Tangenten, bzw. einem sämtlichen Flächen umgeschriebenen Torsus der Klasse n^2.

Dual zum Netze ist das Gewebe (Scharschar) von Kurven,

---

1) Wenn Schröter in seinem Buche über die Oberflächen 2. Ordnung in dem Paragraphen über das Flächennetz (Flächenbündel) 2. Ordnung von den Grundkurven 4. Ordnung auf S. 702 sagt, daß sie „einen Büschel, ein Gebilde von einfach-unendlicher Mächtigkeit“ bilden, so ist das eben nicht richtig. Leider wiederholt er es in seinem Buche über die Raumkurve 4. Ordnung 1. Spezies S. 40.

Flächen n^{ter} Klasse. Die Flächen des letztern haben, im allgemeinen, n^3 gemeinsame Berührungsebenen, von denen $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-3$ die übrigen bestimmen.

Bei der fächerförmigen Erzeugung des Gewebes wird mit Scharen, statt mit Büscheln, gearbeitet.

Das lineare System 3. Stufe von Kurven oder Flächen n^{ter} Ordnung wird jetzt meistens Gebüsche genannt.[1]) 665

Wir stellen das (ebene) Kurvengebüsche n^{ter} Ordnung aus vier (nicht demselben Netze angehörigen, also unabhängigen) Konstituenten C_0, C_1, C_2, C_3 in folgender Weise her. Drei von ihnen C_1, C_2, C_3 bestimmen ein Netz, und jede Kurve desselben verbinden wir mit C_0 durch einen Büschel. Dieser Bündel von ∞^2 Büscheln erzeugt das Gebüsche, zu dem ersichtlich das Netz $(C_1 C_2 C_3)$ ganz gehört. Durchläuft in diesem Netze die Kurve einen der ∞^2 Büschel, so erzeugt der sie mit C_0 verbindende Büschel ein Netz, und wir erhalten ∞^2 von C_0 ausgehende Netze im Gebüsche, einen Bündel von Netzen.

Wenn wir auch zunächst nicht über die Gebüsche hinausgehen werden, so wollen wir, weil wir noch vielfach mit linearen Systemen zu tun haben werden (dann und wann ist es auch schon im vorangehenden geschehen), auch mit solchen von höherer als 3. Stufe, die Betrachtung für eine beliebige Stufe machen und dabei die Methode des Beweises „von $m-1$ auf m“ anwenden.

In unserer gegenwärtigen Betrachtung sind Kurven und Flächen die Elemente der linearen Systeme; wir benutzen dies unbestimmte Wort „Element“, damit ersichtlich sei, daß die Erörterung auch richtig bleibt, wenn aus andern Elementen lineare Systeme aufgebaut werden[2]); die für die Kurven benutzte Bezeichnung $C_0, \ldots$ möge beibehalten werden.

Wie eben Netze und Gebüsche aus 3, 4 Konstituenten, so bauen wir ein lineares System m^{ter} Stufe Σ_m aus $m+1$ Konstituenten auf: $C_0, C_1, \ldots C_m$, indem wir eine von ihnen, C_0, mit sämtlichen Elementen des linearen Systems Σ_{m-1}^0 $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe, das durch $C_1, C_2, \ldots C_m$ konstituiert wird, durch

1) Die Terminologie schwankte früher. In ihrem Briefwechsel haben Steiner und Schläfli die Worte „Netz“ und „Gebüsche“ in umgekehrter Bedeutung gebraucht; auch ich habe in meinem Buche über die Flächen 3. Ordnung „Flächenbündel“ und „Flächennetz“ statt „Flächennetz“ und „Flächengebüsche“ gesagt; Cremona sagte in den Preliminari: „lineares System“ schlechthin für „Gebüsche“. Das Wort „Gebüsche“ im jetzigen Sinne stammt wohl aus Reyes Geometrie der Lage. — „Scharschar“ und „Gewebe“ sind auch noch nicht gesichert.

2) Das ist bisweilen schon im vorangehenden geschehen; so haben wir in Nr. 433 ff. Netze und höhere lineare Systeme von Korrelationen zwischen zwei Feldern fächerförmig aufgebaut.

Büschel verbinden. Die Elemente dieser ∞^{m-1} Büschel bilden Σ_m.

Nun sollen für Σ_m folgende Sätze bewiesen werden:

1) Die bevorzugte Konstituente C_0 kann durch jede andere ersetzt werden.

2) Die ursprünglichen Konstituenten können durch beliebige $m+1$ unabhängige Elemente von Σ_m ersetzt werden; unabhängig sind solche, die nicht demselben in Σ_m enthaltenen linearen Systeme niedrigerer Stufe angehören.

3) Jedes durch $i+1$ Elemente von Σ_m $(i<m)$ konstituierte lineare System i^{ter} Stufe gehört ganz zu Σ_m.

4) Zwei in Σ_m enthaltene lineare Systeme von der h^{ten} und der i^{ten} Stufe, bei denen $h+i=m$ ist, haben ein Element gemeinsam; wofern sie sich nicht beide in demselben in Σ_m enthaltenen Systeme niedrigerer Stufe befinden. Die Fälle: $h+i>m$, $<m$ werden später besprochen werden.

Für das Netz sind diese Sätze richtig; wir nehmen an, daß sie bis zur Stufe $m-1$ richtig seien; wir haben zu beweisen, daß sie dann auch für die Stufe m richtig sind; woraus die Richtigkeit für jede Stufe folgt.

Es sei C ein Element von Σ_m; der es enthaltende Büschel der fächerförmigen Erzeugung aus dem Scheitelelemente C_0 gehe nach dem Elemente C' von Σ^0_{m-1}. Indem wir Σ^0_{m-1} fächerförmig aus C_1 erzeugen, gehöre C' zu dem Büschel, der von C_1 nach dem Elemente C'' des linearen Systems $(m-2)^{\text{ter}}$ Stufe $(C_2 C_3 \ldots C_m) = \Sigma^{0,1}_{m-2}$ geht, das ganz in Σ^0_{m-1} enthalten ist. Der Büschel $(C_0 C'')$, einer der erzeugenden Büschel von Σ_m, befindet sich in dem linearen Systeme $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe, das durch die Büschel von C_0 nach den Elementen von $(C_2 C_3 \ldots C_m)$ erzeugt wird, die sämtlich erzeugende Büschel von Σ_m sind. Das Netz $(C_0 C_1 C'')$ enthält den Büschel $(C_1 C'')$ und darin C', also den Büschel $(C_0 C')$ und darin C, mithin wiederum den Büschel $(C_1 C)$, welcher mit dem ebenfalls zum Netze gehörigen Büschel $(C_0 C'')$ ein Element C''' gemein hat, das mit diesem letzteren Büschel dem linearen System $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe $(C_0 C_2 \ldots C_m)$ angehört. Also:

Jedes Element, das sich bei der fächerförmigen Erzeugung aus C_0 ergeben hat, ergibt sich auch bei derjenigen aus C_1. Damit ist 1) bewiesen.

Bei der Erzeugung von Σ_m aus C_0 tritt Σ^0_{m-1} als Ganzes auf; wir können jede seiner Konstituenten durch ein anderes Element ersetzen, etwa C_m durch das obige Element C'. Folglich kann Σ_m fächerförmig durch die Büschel erzeugt werden, welche von C_1 nach dem linearen Systeme $(C_0 C_2 \ldots C_{m-1} C')$ $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe gehen; zu diesem gehört C, weil im Büschel $(C_0 C')$ befindlich; daher können wir in ihm und damit auch in Σ_m die Konstituente C' durch C ersetzen, so daß das beliebige Element C an Stelle von C_m getreten ist. Das kann man fortsetzen und hat 2) bewiesen.

Wir mußten, um ein System m^{ter} Stufe zu erhalten, C_0 außerhalb Σ_{m-1}^0 annehmen; weil andernfalls alle erzeugenden Büschel in dieses System $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe fallen und ein System m^{ter} Stufe nicht entsteht.

Es seien C und C' zwei beliebige (nicht schon in demselben Büschel aus C_0 enthaltenen) Elemente von Σ_m, $\bar{C}$, $\bar{C}'$ die (verschiedenen) Elemente von Σ_{m-1}^0, nach denen die sie enthaltenden Büschel aus C_0 gehen; dann gehört der Büschel $(\bar{C}\bar{C}')$ zu Σ_{m-1}^0, also das Netz $(C_0\bar{C}\bar{C}')$, erzeugt durch seine Büschel aus C_0 nach den Elementen von $(\bar{C}\bar{C}')$, welche erzeugende Büschel von Σ_m sind, zu Σ_m und daher auch der im Netze enthaltene Büschel (CC'). 666

Demnach ist Satz 3) für Büschel bewiesen, und da zur Herstellung von Netzen nur Büschel notwendig sind, auch für Netze, infolgedessen auch für Gebüsche, usw.; denn jedesmal ist nur erforderlich, daß er für die vorangehende Stufe richtig ist.

Das System $(C_0 \ldots C_i)$ gehört zu Σ_m, weil $(C_1 \ldots C_i)$ und die Büschel von C_0 nach seinen Elementen.

Also gilt der Satz 3) für jede Stufe $i < m$.

Die $i+1$ Konstituenten eines linearen Systems Σ_i in Σ_m können aus den ∞^m Elementen von Σ_m in $\infty^{(i+1)m}$ Weisen gewählt werden; dabei ergibt sich aber jedes Σ_i $\infty^{(i+1)i}$-mal, weil seine ∞^i Elemente so viele Gruppen von $i+1$ Konstituenten liefern.

Folglich besitzt Σ_m $\infty^{(i+1)(m-i)}$ lineare Systeme Σ_i, demnach lineare Systeme i^{ter} Stufe und $(m-i-1)^{\text{ter}}$ Stufe in gleicher Mannigfaltigkeit; für $i=0$ bedeutet dies, daß Σ_m ebensoviele Σ_{m-1} enthält als Elemente.

So enthält das Gebüsche ∞^3 Elemente und Netze, ∞^4 Büschel, das lineare System 4. Stufe ∞^4 Elemente und Gebüsche, ∞^6 Büschel und Netze, das der 5. Stufe ∞^5 Elemente und lineare Systeme 4. Stufe, ∞^8 Büschel und Gebüsche, ∞^9 Netze und das der 6. Stufe ∞^6 Elemente und lineare Systeme 5. Stufe, ∞^{10} Büschel und lineare Systeme 4. Stufe, ∞^{12} Netze und Gebüsche.

Handelt es sich um die Systeme Σ_i in Σ_m, die durch ein dem Σ_m angehöriges Σ_h gehen, $m > i > h$, so legen wir von den $i+1$ Konstituenten $h+1$ in Σ_h, wodurch Σ_h dem Σ_i angehörig wird, und können nur noch über die $i-h$ übrigen verfügen; es ergibt sich:

Das lineare System Σ_m enthält $\infty^{(i-h)(m-i)}$ lineare Systeme Σ_i, welche durch ein ihm angehöriges lineares System Σ_h gehen; durch ein Σ_{m-2} gehen immer ∞^1 Σ_{m-1}, ein Büschel von Σ_{m-1}. So gehen in einem Gebüsche durch einen Büschel ∞^1 Netze, in einem Σ_4 durch ein Netz ∞^1 Gebüsche, während durch einen Büschel ∞^2 Netze und Gebüsche gehen.

Die fächerförmige Erzeugung des Σ_m, aus C_0 nach den Elementen von Σ^0_{m-1}, können wir umgestalten. Jeder von den erzeugenden Büscheln hat mit Σ^0_{m-1} nur das Element gemein, nach welchem er geht; denn hätte er zwei Elemente gemein, so würde er ganz in Σ^0_{m-1} fallen, was, wegen C_0, nicht der Fall ist.

Wir zerlegen nun Σ^0_{m-1} in die Büschel aus C_1 nach den Elementen des Systems $(m-2)^{\text{ter}}$ Stufe $\Sigma^{0,1}_{m-2} = (C_2 \ldots C_m)$; jeder bestimmt mit C_0 ein Netz, und diese Netze gehen alle durch den Büschel $(C_0 C_1)$. Jedes dieser Netze gehört zu Σ_m, die es erzeugenden Büschel aus C_0, erzeugende Büschel von Σ_m, haben je nur ein Element mit Σ^0_{m-1} gemein, also hat das Netz mit diesem Systeme allein den Büschel aus C_1 gemein, nach dem es geht, und mit $\Sigma^{0,1}_{m-2}$, das sich in Σ^0_{m-1} befindet, nur das Element, nach dem dieser Büschel geht. Σ_m wird also durch die ∞^{m-2} Netze erzeugt, welche durch den Büschel $(C_0 C_1)$ nach den Elementen von $\Sigma^{0,1}_{m-2}$ gehen. Sie haben mit diesem linearen System $(m-2)^{\text{ter}}$ Stufe je nur dieses Element gemein.

Zerlegen wir dieses System $\Sigma^{0,1}_{m-2}$ wiederum in die Büschel aus C_2 nach den Elementen des linearen Systems $\Sigma^{0,1,2}_{m-3} = (C_3, \ldots C_m)$, so geben diese Büschel (oder je zwei Elemente derselben) mit C_0, C_1 (oder ihrem Büschel) verbunden Gebüsche, die alle durch das Netz $(C_0 C_1 C_2)$ gehen und dasselbe mit den Elementen von $\Sigma^{0,1,2}_{m-3}$ verbinden, nach denen jene Büschel gehen. Jedes von diesen Gebüschen hat mit $\Sigma^{0,1}_{m-2}$ nur den Büschel gemein, nach dem es geht; denn jedes der es aus $(C_0 C_1)$ erzeugenden Netze hat, wie wir eben fanden, nur dasjenige Element dieses Büschels gemein, nach dem es geht; daher hat das Gebüsche mit $\Sigma^{0,1,2}_{m-3}$ nur dasjenige Element gemein, welches dem Büschel angehört, nach dem wir es gelegt haben. Also entsteht Σ_m durch die ∞^{m-3} Gebüsche, welche das Netz $(C_0 C_1 C_2)$ mit den einzelnen Elementen des linearen Systems $\Sigma^{0,1,2}_{m-3}$ verbinden und mit ihm je nur dies Element gemeinsam haben.

Fährt man so fort, so ergibt sich:

Jede Zerlegung der $m+1$ Konstituenten eines linearen Systems m^{ter} Stufe Σ_m in h und $i+1$ Konstituenten, so daß $h+i=m$ ist, führt zu einer Erzeugung.

Die ∞^i linearen Systeme h^{ter} Stufe Σ_h, welche durch die h Konstituenten oder ihr lineares System $(h-1)^{\text{ter}}$ Stufe Σ_{h-1} und ein bewegliches Element des linearen Systems i^{ter} Stufe Σ_i der $i+1$ übrigen Konstituenten bestimmt werden, erfüllen das System Σ_m und haben je nur dies Element mit Σ_i gemeinsam.

Aus der Erzeugung des Gebüsches durch die ∞^1 Netze, welche durch einen Büschel nach den Elementen eines andern (windschiefen) Büschels gehen, folgt die Erzeugung durch die ∞^2 Büschel, welche die Elemente des einen dieser Büschel mit denen des andern verbinden.

Jedes Element von Σ_m befindet sich in einem dieser Σ_h und, wenn es nicht zu Σ_{h-1} gehört, nur in einem; weil Σ_{h-1} und ein außerhalb gelegenes Element nur ein Σ_h bestimmen. Nun gehen, innerhalb Σ_m, durch Σ_{h-1} ∞^{m-h} oder ∞^i Systeme Σ_h. Die erzeugenden Σ_h, deren wir auch ∞^i haben, erschöpfen sie. Denn sei Σ_h irgend ein lineares System h^{ter} Stufe in Σ_m durch Σ_{h-1} und C ein Element von ihm außerhalb Σ_{h-1}, so muß dasselbe, als Element von Σ_m, zu einem der erzeugenden Σ_h gehören, das $\overline{\Sigma}_h$ heiße; woraus dann, wegen der Gemeinsamkeit des Σ_{h-1} und dieses Elements, die Identität von Σ_h mit diesem $\overline{\Sigma}_h$ sich ergibt. Folglich hat Σ_h mit Σ_i dasjenige Element gemein, nach dem $\overline{\Sigma}_h$ geht. Wir haben nun den Satz 4):

Zwei in Σ_m befindliche lineare Systeme Σ_h, Σ_i, deren Stufen sich zu m ergänzen, haben ein Element gemeinsam; falls sie nicht beide in demselben linearen System niedrigerer Stufe sich befinden, das in Σ_m enthalten ist.

Was dann gemeinsam ist, wird das Folgende lehren.

Ist $h + i < m$, so gibt es im allgemeinen kein gemeinsames Element.

Es sei nun $h + i > m$; wenn dann $h_1 + i = m$ ist, so legen wir in Σ_h ein lineares System Σ_{h_1-1} (ohne gemeinsames Element mit Σ_i) und innerhalb Σ_h alle Systeme h_1^{ter} Stufe durch Σ_{h_1-1}; es gibt deren ∞^{h-h_1}. Jedes hat mit Σ_i ein Element gemeinsam und zwar je ein besonderes; denn dasselbe Element, bei zwei Σ_{h_1} sich ergebend, macht sie identisch. Dieses Element ist dann auch Σ_h mit Σ_i gemeinsam; und umgekehrt, jedes gemeinsame Element von Σ_h und Σ_i bestimmt in Σ_h ein durch Σ_{h_1-1} gehendes Σ_{h_1} und ist diesem mit Σ_i gemeinsam. Nun ist $h - h_1 = h + i - m = g$; es haben sich also ∞^g gemeinsame Elemente von Σ_h und Σ_i ergeben; ihr System sei $\mathfrak{S}_g$. Nehmen wir aus ihm $g + 1$ unabhängige Elemente, was möglich ist, weil es in $\mathfrak{S}_g$ außerhalb jedes etwa in ihm enthaltenen Systems niedrigerer Stufe Elemente geben muß; durch sie ist ein lineares System g^{ter} Stufe Σ_g bestimmt, das ganz in Σ_h und in Σ_i enthalten, weil dies für seine Konstituenten gilt; also ist Σ_g in $\mathfrak{S}_g$ enthalten. Ein Element von $\mathfrak{S}_g$, das nicht zu Σ_g gehört, würde sofort mit Σ_g zu einem linearen System $(g + 1)^{\text{ter}}$ Stufe führen, dessen sämtliche Konstituenten sowohl in Σ_h als in Σ_i sich befinden, also würde es ganz in beiden liegen, d. h. in $\mathfrak{S}_g$, was nicht möglich ist. Sonach ist $\mathfrak{S}_g$ mit Σ_g identisch. Also haben wir, den obigen Satz mit umfassend:

Zwei in Σ_m enthaltene lineare Systeme Σ_h, Σ_i, für deren

Stufen h, i gilt: $h+i \geqq m$, haben ein lineares System von der Stufe $h+i-m$ gemeinsam.[1]) Unter einem System 0^{ter} Stufe ist ein einziges Element gemeint.

Werden freilich die beiden Systeme Σ_h und Σ_i aus Σ_m von einem linearen System niedrigerer, m'^{ter} Stufe umfaßt, das zu Σ_m gehört, so ist ihnen ein lineares System von der Stufe $h+i-m'$ gemeinsam; und umgekehrt. Ist zwar $h+i<m$ und haben doch Σ_h und Σ_i gemeinsame Elemente, so ist, wenn unter diesen sich (höchstens) $g+1$ unabhängige befinden, ihnen ein lineares System g^{ter} Stufe gemein, und die beiden Systeme müssen von einem linearen System von der Stufe m' umfaßt sein, wo $h+i-m'=g$.

Wenn später lineare Systeme aus andern Elementen aufgebaut werden, so wird es genügen, die Netzeigenschaften als bestehend nachzuweisen. Die vorangehende allgemeine Erörterung zeigt dann, daß auch die der höheren Systeme gelten.

667 Kehren wir nun zum Kurvengebüsche zurück. Es hat ∞^4 Büschel und ∞^3 Netze. Ein Büschel und ein Netz aus ihm (von denen jener nicht in diesem liegt) haben eine Kurve gemeinsam, zwei Netze einen Büschel, zwei beliebige Büschel, wie $(C_1 C_2)$ und $(C_3 C_4)$, sind windschief; nur wenn sie demselben Netze angehören, schneiden sie sich.

Drei Netze aus dem Gebüsche haben eine Kurve gemein, diejenige, in der irgend eins der drei Netze mit dem Schnittbüschel der beiden andern sich begegnet.

Durch einen Büschel des Gebüsches gehen ∞^1 Netze desselben, ein Büschel von Netzen; diese Netze gehen nach den Kurven irgend eines andern zu jenem Büschel windschiefen Büschel des Gebüsches, zu welchem Büschel also der Netzebüschel perspektiv ist.

Ein Punkt P scheidet aus dem Gebüsche ein Netz. Wir denken das Gebüsche fächerförmig hergestellt, und scheiden durch P aus drei erzeugenden Büscheln (die nicht demselben Netze angehören) die Kurven aus; diese drei Kurven bestimmen ein dem Gebüsche angehöriges Netz, für das P Grundpunkt ist und welches mit jedem der andern ∞^2 erzeugenden Büschel eine Kurve gemein hat: immer die durch P gehende; und jede Kurve dieses Netzes muß, als Kurve des Gebüsches, in einem dieser Büschel sich befinden.

Zwei Punkte scheiden daher einen Büschel und drei (unter denen nicht zwei zugeordnete sich befinden) eine Kurve aus dem Gebüsche aus.

Ein Gebüsche hat im allgemeinen keinen Grundpunkt; jeder gemeinsame Punkt aber von vier unabhängigen Kurven

1) In § 34 ist schon ein Spezialfall erhalten worden.

eines Gebüsches ist, wie die fächerförmige Erzeugung zeigt, allen Kurven desselben gemeinsam.

Im grundpunktelosen Gebüsche haben wir ∞^3 Netze ohne Grundpunkt, ∞^2 mit einem Grundpunkt (jeder Punkt der Ebene bestimmt ein solches), ∞^1 mit zwei und eine endliche Anzahl mit drei Grundpunkten. Diese Zahl ist meines Wissens nach nicht bekannt.

Vier Kreise bestimmen, da alle durch zwei oder drei Kreise bestimmten Büschel oder Netze ganz aus Kreisen bestehen, ein Gebüsche aus lauter Kreisen, ersichtlich mit zwei Grundpunkten, den absoluten Punkten. Es enthält alle Kreise der Ebene, denn drei auf einen beliebig gegebenen Kreis gelegte Punkte scheiden aus dem Gebüsche einen Kreis, der mit dem gegebenen identisch ist.

Weil jedes Flächennetz Grundpunkte hat, so sind die durch Punkte ausgeschiedenen Netze eines Flächengebüsches nicht spezielle, sondern die allgemeinen. Jeder von den ∞^3 Punkten des Raumes scheidet ein Netz aus, und dies hat $n^3 - 1$ andere Grundpunkte, die ebenfalls zu ihm führen. Zwei Punkte, die man in ∞^6 Weisen auswählen kann, bestimmen einen Büschel im Gebüsche mit seiner Grundkurve, welche jedoch auf ∞^2 Weisen durch beliebige zwei ihrer Punkte bestimmt werden kann, wodurch die ∞^4 Büschel sich ergeben.

Die durch drei Punkte ausgeschiedene Fläche des Gebüsches ist gemeinsam dem durch einen von ihnen ausgeschiedenen Netze und dem durch die beiden andern ausgeschiedenen Büschel.

Das Gebüsche 1. Ordnung ist der Ebenenraum; er hat ∞^3 Ebenennetze oder -bündel (Punkte), ∞^4 Ebenenbüschel (Geraden); man bestätige auch die andern Eigenschaften, konstituiere ihn insbesondere aus vier unabhängigen Ebenen.

Alle Kugeln, welche zu einer gegebenen Kugel orthogonal sind, bilden ein Gebüsche. Denn für zwei Kugeln gilt, daß, wenn sie zu einer dritten orthogonal sind, alle Kugeln ihres Büschels diese Eigenschaft haben; und das pflanzt sich fort auf drei und vier Kugeln, ihr Netz (Bündel) und ihr Gebüsche. Vier beliebige Kugeln haben eine Orthogonalkugel.[1])

Die Orthogonalkugel kann ein positives oder negatives Radiusquadrat haben oder auf einen Punkt sich reduzieren; im zweiten Falle wird die konzentrische Kugel mit ebenso großem positiven Radiusquadrat von allen Kugeln des Gebüsches diametral, d. h. in einem größten Kreise geschnitten. Man nennt das Gebüsche in den drei Fällen hyperbolisch, elliptisch, parabolisch. Faßt man die Kugeln, Kugelbüschel, Kugelnetze eines Gebüsches oder dual die Paare der Grundpunkte der Netze, die Grundkreise der Büschel, die Kugeln als Punkte, Geraden, Ebenen auf, die zur Unterscheidung Scheinpunkte usw. genannt werden mögen, so

1) Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln (1879).

hat man Realisierungen der beiden nichteuklidischen Geometrien, der hyperbolischen und der elliptischen, und der euklidischen oder parabolischen.[1]) Nehmen wir bei einem hyperbolischen Gebüsche (Raum) die zweite Auffassung an, und lassen die Orthogonalkugel als das Unendliche gelten, so hat auf einer Kugel des Gebüsches (Scheinebene) jeder Grundkreis (Scheingerade) zwei reelle Schnitte mit der Orthogonalkugel (zwei Paare mit vereinigten Punkten, zwei Scheinpunkte) gemein, also zwei unendlich ferne Scheinpunkte. Durch ein Grundpunkte-Paar (Scheinpunkt) der Kugel geht auf ihr nach dem einen und dem andern jener Punkte je ein Grundkreis. Zu jeder Scheingerade der Scheinebene gehen daher durch einen Scheinpunkt auf ihr zwei Scheinparallelen, wie in der hyperbolischen Geometrie.

Erwähnen wir noch einige besondere Flächengebüsche 2. Ordnung mit Grundkurven und Grundpunkten: 1) alle Flächen 2. Grades durch einen Kegelschnitt und einen Punkt, 2) durch zwei windschiefe Geraden, 3) durch eine Gerade und drei Punkte, 4) durch vier Punkte, in deren einem sie eine gegebene Ebene berühren, 5) durch zwei Punkte, in denen beiden gegebene Ebenen berührt werden. Die Gebüsche 1), 3), 4) haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß ein in ihnen enthaltenes Netz (außer den allen Flächen des Gebüsches gemeinsamen Elementen) nur einen mit ihm veränderlichen Grundpunkt hat; wir werden derartige Gebüsche später homaloidisch nennen.

668 Es soll jetzt die Möglichkeit erörtert werden, diese linearen Systeme auf andere Gebilde und unter sich projektiv oder kollinear zu beziehen. Den Satz, daß ineinander liegende projektive Gebilde zwei sich selbst entsprechende Elemente haben, und, wenn drei, dann jedes Element sich selbst entspricht, haben wir schon wiederholt auf Büschel von Kurven und Flächen übertragen. Indem wir ein Netz fächerförmig durch die Büschel erzeugen, die von einem Element des Netzes nach denen eines Büschels gehen, welcher dieses Scheitelelement nicht enthält, durch eine Schar von Büscheln, erkennen wir, daß eine solche Büschelschar, weil sie perspektiv über einem Büschel steht, selbst projektiv beziehbar wird. Wir nehmen nun aus demselben Netze zwei solche Büschelscharen, machen sie projektiv, indem wir sie durchschneidende Büschel des Netzes projektiv beziehen. Erzeugnis ist der Inbegriff der Elemente, in denen entsprechende Büschel der beiden Scharen sich durchschneiden. Schneiden wir beide Scharen mit dem nämlichen Büschel des Netzes, so wird dieser in sich projektiv, und die beiden sich selbst entsprechenden Elemente gehören dem Erzeugnisse an; dies Erzeugnis hat also in

1) Wellstein in Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Bd. II. Zweiter Abschnitt.

jedem Büschel des Netzes zwei Elemente, weshalb wir es quadratisch nennen können.

Es seien insbesondere die beiden Büschelscharen (A), (B) (d. h. deren Scheitelelemente A, B sind) perspektiv, indem der gemeinsame Büschel (AB) sich selbst entspricht; folglich gehört er zum Erzeugnisse und liefert in jeden Büschel das eine jener Elemente; das eigentliche Erzeugnis sendet daher in jeden Büschel nur ein Element, ist linear, ein Büschel. In der Tat, verbinden wir zwei seiner Elemente durch einen Büschel $\mathfrak{B}$, so wird dieser Büschel so in sich projektiv, daß er drei sich selbst entsprechende Elemente besitzt, diese beiden und das Schnittelement mit (AB); also sind alle seine Elemente sich selbst entsprechend, gehören zum Erzeugnisse.

Gehörte ein Element des Erzeugnisses nicht zu diesem Büschel $\mathfrak{B}$, so würde jeder Büschel des Netzes, der es enthält, zwei Elemente des Erzeugnisses enthalten, nämlich außer jenem noch das Schnittelement mit dem $\mathfrak{B}$.

Das Erzeugnis zweier in demselben Netze befindlichen projektiven Büschelscharen, welche in perspektiver Lage sind, ist, abgesehen von dem gemeinsamen und sich selbst entsprechenden Büschel, ein Büschel, der perspektive Durchschnitt der beiden perspektiven Büschelscharen.

Nun seine zwei Netze N, N' vorgelegt (von ungleicher oder gleicher Ordnung, eventuell auch ineinander liegend); in jedem nehmen wir zwei Büschelscharen (A), (B); (A'), (B'), machen (A) und (A'), (B) und (B') projektiv und zwar so, daß beidemal die Büschel (AB), $(A'B')$ entsprechend sind. Wir nennen dann zwei Elemente X und X' der Netze entsprechend, wenn den nach X gehenden Büscheln von (A), (B) die nach X' gehenden von (A'), (B') in diesen Projektivitäten korrespondieren. Wir können diese Beziehung Kollineation (Projektivität[1]) der Netze nennen. Die gegenseitige Eindeutigkeit ist unmittelbar klar; eines Beweises bedarf nur noch die Linearität, d. h. daß entsprechende Elemente X und X' sich gleichzeitig linear, in Büscheln bewegen. X durchlaufe in N einen Büschel $\mathfrak{B}$, dann werden die beiden Büschelscharen (A) und (B) perspektiv, indem solche Büschel sich entsprechen, die je nach demselben X gehen; kommt X in das Schnittelement von $\mathfrak{B}$ mit (AB), so wird dieser gemeinsame Büschel sich selbst entsprechend.

Durch die gegebenen Projektivitäten werden nun auch (A') und (B') projektiv, wobei solche Büschel entsprechend sind, die vermöge jener Projektivitäten Büscheln von (A) und (B) korrespondieren, welche einander in der jetzigen Perspektivität zugeordnet sind. Da aber in jenen beiden Projektivitäten die Büschel (AB) und $(A'B')$ entsprechend

1) So sagte Cremona in den Preliminari.

sind, so bewirkt der Umstand, daß jetzt (AB) sich selbst entsprechend ist, daß das auch für $(A'B')$ gilt; auch (A') und (B') sind in perspektiver Lage, und ihr Erzeugnis, der Ort von X', ist ein Büschel.

669 In einem Gebüsche haben wir, um einen Büschel als Axe oder Träger, einen Netzebüschel (Netzeschar); er ist zu jedem Büschel des Gebüsches, der zu jenem Büschel windschief ist, perspektiv: seine Netze gehen durch die einzelnen Elemente desselben (Nr. 667), und er wird dadurch projektiv beziehbar. Wir betrachten zwei solche Netzebüschel um die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ im Gebüsche und machen sie projektiv. Zwei entsprechende Netze schneiden sich in einem Büschel, und den Inbegriff dieser ∞^1 Büschel und ihrer ∞^2 Elemente wollen wir untersuchen. Ein (beide Netzebüschel durchschneidender) Büschel des Gebüsches wird durch sie in sich projektiv, und enthält zwei Elemente, die in entsprechenden Büscheln liegen; von jenen ∞^2 Elementen fallen in jeden Büschel des Gebüsches zwei. Ihr System ist 2. Grades.

Nehmen wir an, daß jene beiden Trägerbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ein Element C gemeinsam haben; sie befinden sich in diesem Falle in demselben Netze γ des Gebüsches, das dann zu beiden Netzebüscheln gehört. Lassen wir dies in der Projektivität sich selbst entsprechend sein, so löst es sich von dem System 2. Grades ab; das eigentliche Erzeugnis sendet in jeden Büschel des Gebüsches nur ein Element. Das Element C, allen Netzen der beiden Büschel gemeinsam, ist allen Schnittbüscheln gemeinsam. Verbindet man irgend ein Element eines dieser Schnittbüschel mit irgend einem eines zweiten durch einen Büschel $\mathfrak{S}$, so hat die Projektivität, welche in $\mathfrak{S}$ durch die Netzebüschel hervorgerufen wird, drei sich selbst entsprechende Elemente, jene beiden und das Schnittelement mit γ; folglich sind alle Elemente von $\mathfrak{S}$ sich selbst entsprechend. Durch jedes Element von $\mathfrak{S}$ geht ein Netz von $(\mathfrak{A})$ und das entsprechende von $(\mathfrak{B})$ und daher ihr Schnittbüschel. Die Schnittbüschel homologer Netze verbinden also C mit den Elementen von $\mathfrak{S}$ und erzeugen ein Netz.

Wenn in demselben Gebüsche zwei Netzebüschel, deren Träger ein Element gemeinsam haben und daher in demselben Netze sich befinden, das dann den beiden Büscheln gemeinsam ist, so projektiv bezogen werden, daß dieses Netz sich selbst entspricht (perspektive Lage), so ist das Erzeugnis der Schnittbüschel homologer Netze ein Netz.

Jetzt nehmen wir im Gebüsche drei Elemente A, B, C und ihre Verbindungsbüschel $BC = \mathfrak{A}$, $CA = \mathfrak{B}$, $AB = \mathfrak{C}$; wir haben dann drei Netzebüschel $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, denen das Netz (ABC) gemeinschaftlich ist. Wir machen sie so projektiv, daß dieses sich selbst entspricht, sie also zu je zweien perspektiv sind. Es erzeugen $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ ein Netz und ebenso $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{C})$; der Schnittbüschel dieser beiden Netze ist der Ort der Elemente, welche drei homologen Netzen gemeinsam sind; er befindet sich auch in dem durch ($\mathfrak{B}$) und ($\mathfrak{C}$) erzeugten Netze.

Zwei Gebüsche G und G' seien gegeben, in jedem drei Elemente gewählt: A, B, C; A', B', C', ihre Verbindungsbüschel und die zugehörigen Netzebüschel ($\mathfrak{A}$), ... konstruiert; ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{A}'$), ($\mathfrak{B}$) und ($\mathfrak{B}'$), ($\mathfrak{C}$) und ($\mathfrak{C}'$) seien so projektiv bezogen, daß in allen drei Fällen die Netze (ABC) und $(A'B'C')$ einander korrespondieren. Zwei Elemente X und X' nennen wir entsprechend, wenn die Netze, die von ($\mathfrak{A}$) ... nach X gehen, in jenen Projektivitäten denen, die von ($\mathfrak{A}'$) ... nach X' gehen, homolog sind. Wiederum ist nur die Linearität zu beweisen; wir können dann die Gebüsche kollinear nennen. Durchläuft X einen Büschel $\mathfrak{T}$, so werden die Netzebüschel ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$) projektiv mit solchen Netzen als entsprechenden, die nach demselben X gehen; kommt X nach dem Schnittelement ($\mathfrak{T}$, (ABC)), so wird (ABC) sich selbst entsprechend. Nun werden, durch die gegebenen Projektivitäten, auch die Netzebüschel ($\mathfrak{A}'$), ($\mathfrak{B}'$), ($\mathfrak{C}'$) projektiv und $(A'B'C')$ sich selbst entsprechend; das Erzeugnis von X' ist daher ein Büschel.

Die fächerförmige Entstehung eines Netzes des einen Gebüsches durch Büschel lehrt dann, daß ihm im andern Gebüsche gleichfalls ein Netz entspricht.

Dieser Beweis und der in Nr. 668 sind früheren Beweisen (Nr. 264 und 469) nachgebildet und so geführt, daß sie für alle Netze und Gebüsche gelten, welches auch die Elemente seien, z. B. auch für Netze und Gebüsche von Strahlengewinden.

Als eine interessante Anwendung kollinearer Beziehung sei ein 670
Kegelschnitt-Gebüsche G kollinear in den Punktraum abgebildet, jeder Büschel also in eine Gerade, jedes Netz in eine Ebene. Weil der Büschel drei Geradenpaare besitzt, so entsteht durch die Bildpunkte der Geradenpaare von G eine Fläche 3. Ordnung F'^3.

Das Gebüsche enthält vier Doppelgeraden (Geradenpaare mit vereinigten Geraden): sie sind sich selbst konjugiert in bezug auf die Schar S, welche auf das Gebüsch sich stützt (Nr. 450), also die Grundtangenten dieser Schar. Ein Büschel des Gebüsches, zu welchem eine Doppelgerade gehört, ist ein Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte mit dieser Gerade als Berührungssehne; in ihr haben zwei der Geradenpaare des Büschels sich vereinigt. Daher sind die vier Punkte der kubischen Fläche, in welche diese ausgezeichneten Geradenpaare sich abbilden, Doppelpunkte derselben. Zwei Doppelgeraden bestimmen einen Büschel von Geradenpaaren, die eine Involution bilden; die Verbindungslinien der Doppelpunkte der kubischen Fläche gehören ihr also ganz an.

Jeder Seite des Polardreiecks $\triangle$ der Schar S ist eine beliebige Gerade durch die Gegenecke in bezug auf S konjugiert. So erhalten wir drei Büschel von Geradenpaaren in G, und für je zwei bilden die Seiten von $\triangle$ ein gemeinsames Paar. Ihnen entsprechen auf der kubischen Fläche drei Geraden, die sich gegenseitig schneiden, also in dieselbe Ebene fallen: unäre Geraden, weil sie je nur eine von den 27 Geraden der allgemeinen Fläche repräsentieren, während die sechs Verbindungslinien der Doppelpunkte quaternär sind, je vier Geraden darstellen.[1])

Jede Seite von $\triangle$ verbindet zwei Gegenecken des Vierseits der gemeinsamen Tangenten von S; kombinieren wir sie, an jeder Ecke, mit der vierten harmonischen Gerade zu ihr in bezug auf die beiden Tangenten, so haben wir ein Geradenpaar von G, gehörig zu einem der jetzigen Geradenpaar-Büschel und einem der früheren. Jede der unären Geraden trifft zwei gegenüberliegende Kanten des Tetraeders der Doppelpunkte der F'^3.

Einem Netze von G entspricht, wie gesagt, eine Ebene, seinen Geradenpaaren die Schnittkurve der Ebene mit der kubischen Fläche.

Untersuchen wir die Netze von G, welche einen Grundpunkt Q besitzen. Dieser Punkt, sich selbst konjugiert in bezug auf alle Kurven des Netzes, bildet einen Doppelpunkt (Punktepaar mit vereinigten Punkten) des Gewebes (schar-linearen Systems 2. Stufe) von Kegelschnitten, das sich auf das Netz stützt (Nr. 450). Die Tangentenpaare aus diesem Punkte an die Kegelschnitte einer (ihn nicht enthaltenden) Schar des Gewebes sind die gemeinsamen Tangenten von Büschel-Scharen von (sich doppelt berührenden) Kegelschnitten aus dem Gewebe, mit dem Punkte als festem Berührungspol; diese Scharen erfüllen fächerförmig das Gewebe. Jene Tangenten bilden eine Involution, und ihre Doppelstrahlen sind konjugiert in bezug auf alle Kurven des Gewebes, folglich bilden sie ein Geradenpaar des Netzes; das Netz enthält also ein Geradenpaar, das den Grundpunkt Q zum Doppelpunkt hat.

Jede Gerade durch Q ist gemeinsame Tangente eines Büschels aus dem Netze, dessen Kurven sich in Q tangieren, und zu allen diesen das Netz fächerförmig erfüllenden Büscheln gehört das eben genannte Geradenpaar und zählt immer für zwei Geradenpaare. Ist Q' der Bildpunkt dieses Paares in der Ebene, welche dem Netze entspricht, so hat jeder Strahl durch ihn in der Ebene mit der Schnittkurve 3. Ordnung zwei vereinigte Punkte in ihm gemein, Q' wird Doppelpunkt dieser Kurve und Berührungspunkt der Ebene mit der kubischen Fläche.

Den Netzen von G, welche einen Grundpunkt besitzen,

1) Flächen 3. Ordnung, Nr. 123ff.

korrespondieren die Tangentialebenen der Fläche 3. Ordnung. Die Ebenen durch die unären Geraden, welche die Fläche doppelt berühren: in den Punkten, in denen die Gerade von dem weiterhin ausgeschnittenen Kegelschnitte getroffen wird, korrespondieren den Netzen mit zwei Grundpunkten. Den Punkten der Gerade entsprechen die Geradenpaare, zu denen die Verbindungslinie der beiden Grundpunkte gehört, denen des Kegelschnitts die andern, deren Geraden bzw. durch diese Punkte gehen.

Die Ebenen durch einen Doppelpunkt der F'^3 gehören zu Netzen, welche eine Doppelgerade enthalten und deshalb ein System von Büschel-Scharen mit ihr als fester Berührungssehne;[1]) für das sich stützende Gewebe wird sie Grundtangente. Die Ebenen durch die quaternären Geraden entsprechen Netzen mit zwei Systemen von Büschel-Scharen.

Endlich die Ebene der drei unären Geraden entspricht dem einzigen Netze mit drei Grundpunkten; jede der vier Ebenen aber mit drei Doppelpunkten weist auf ein Netz in G hin mit drei Systemen von Büschel-Scharen, wodurch es in sich dual wird. Es stützt, als Netz, ein Gewebe mit drei Grundtangenten und ruht, als Gewebe, auf einem Netze mit drei Grundpunkten.

Diejenigen Kegelschnitte des Gebüsches G, welche eine feste Gerade t berühren, bilden sich in Punkte ab, welche einen Kegel 2. Grades erzeugen; seine Spitze ist das Bild desjenigen Geradenpaares von G, zu welchem t gehört, seine Kanten korrespondieren den Büscheln von G, welche t je in demselben Punkte berühren. Er geht durch die vier Doppelpunkte von F'^3 und hat seine Spitze auf ihr. Daraus läßt sich ableiten, daß er diese Fläche längs einer kubischen Raumkurve tangiert, welche durch jene Punkte geht.

Nehmen wir an, daß G einen Grundpunkt P hat; der Doppelpunkt, den in diesem Falle die sich stützende Schar erhält, macht sie zu einer Büschel-Schar mit ihm als Berührungspole; die Berührungssehne sei p. Jede Gerade durch P hat für alle Kegelschnitte derselben den nämlichen Punkt auf p zum Pole und führt mit den Geraden durch ihn zu einem Büschel von Geradenpaaren des G. Diese ∞^1 Geradenpaar-Büschel liefern ebensoviele Geraden auf F'^3; sie wird Regelfläche. In jedem dieser Büschel befindet sich ein Paar, dessen zweite Gerade durch P geht; diese Geraden-

1) Im allgemeinen enthält ein Netz nicht einen Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte, weil keine Doppelgerade; wenn aber eine solche Büschel-Schar vorhanden ist, so sind deren sofort ∞^1 vorhanden: mit gemeinsamer Berührungssehne. Die Kegelschnitte eines beliebigen Büschels des Netzes konstituieren sie mit der Berührungssehne der gegebenen Büschel-Schar, einer Doppelgerade des Netzes.

paare, mit Doppelpunkt in P, bilden eine Involution: die zu S gehörige um P, also ebenfalls einen Büschel. Es ergibt sich auf der Regelfläche eine Gerade, welche alle Erzeugenden trifft; und jeder Büschel von G durch ein solches Geradenpaar, mit Doppelpunkt im Grundpunkt P, ist ein Büschel, dessen Kegelschnitte sich in P berühren und in dem dies Paar zweifach zählt: jene Gerade ist die doppelte Leitgerade. Andererseits enthält jeder von jenen Büscheln ein Paar, dessen zweite Gerade die p ist. Diese Paare bilden wiederum einen Büschel; wir erhalten die einfache Leitgerade der kubischen Regelfläche.

Bekommt das Gebüsche zwei Grundpunkte P, Q, so gibt es zweierlei Geradenpaare: (P, Q)-Geradenpaare, deren Geraden bzw. durch P, Q gehen, und o-Geradenpaare, zu denen $o = PQ$ gehört, in jedem Büschel zwei von jenen, eins von diesen. Die Bildpunkte erfüllen also eine Fläche 2. Grades F'^2 und eine Ebene F'. Jede Gerade p durch P gehört zu einem Büschel von Geradenpaaren, deren andere Geraden durch Q gehen; wir erhalten die Geraden p' der einen Regelschar von F'^2, darunter p_0', wenn die p in o fällt; ebenso führen die Geraden q durch Q zur andern Regelschar der q' wiederum mit der ausgezeichneten q_0'. Der Punkt $p_0'q_0'$ entspricht also dem Geradenpaare (o, o). Und weil diese Geradenpaare (o, q), (o, p) auch zur zweiten Art gehören, so liegen p_0', q_0' in der Ebene F', und sie ist die Berührungsebene $p_0'q_0'$ der F'^2.

§ 98. Erzeugnisse projektiv oder kollinear bezogener linearer Systeme von Kurven oder Flächen.[1]

671 Zwei projektive Büschel von Kurven oder Flächen von den Ordnungen n_1, n_2 erzeugen eine Kurve, Fläche von der Ordnung $n_1 + n_2$, welche durch die Grundpunkte oder Grundkurven der Büschel geht. Ein gemeinsamer Grundpunkt oder ein gemeinsamer Punkt der Grundkurven ist doppelt auf dem Erzeugnisse (Nr. 169, 171). Durch einen solchen gemeinsamen Punkt gehen alle erzeugenden Kurven, im andern Falle sind sie windschief. Der einfachste Fall: zwei projektive Ebenenbüschel mit windschiefen, bzw. sich schneiden-

1) Für diesen Paragraphen und den folgenden ist zu verweisen auf Cremonas Schriften: Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane (Memorie dell'Accademia di Bologna. Serie I, Bd. 12, S. 305), in deutscher Übersetzung: Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven, 1865, und noch mehr auf deren Fortsetzung: Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie (Memorie di Bologna, Ser. II, Bd. 6, S. 91, Bd. 7, S. 29), in deutscher Übersetzung (beide Übersetzungen von Curtze): Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen, 1870.

den Axen und einer Regelschar, bzw. einem Kegel 2. Grades aus dem Schnittpunkte als Erzeugnis ist uns längst bekannt.

Drei projektive Büschel B_1, B_2, B_3 von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 seien gegeben. Sind sie Büschel von Kurven in derselben Ebene, so haben drei beliebige entsprechende Kurven keinen Punkt gemeinsam; es wird aber eine endliche Zahl von Tripeln entsprechender Kurven geben, die durch denselben Punkt gehen, und wir haben diese Zahl zu ermitteln.

Bei Flächenbüscheln führt jedes Tripel homologer Flächen zu $n_1 n_2 n_3$ gemeinsamen Punkten; sie erzeugen eine Kurve, und ihre Ordnung ist, wie ein ebener Schnitt lehrt, denn projektive Flächenbüschel werden in projektiven Kurvenbüscheln geschnitten, jene Zahl.

Die projektiven Kurvenbüschel B_1, B_2 erzeugen eine Kurve von der Ordnung $n_1 + n_2$, ebenso B_1 und B_3 eine von der Ordnung $n_1 + n_3$; die n_1^2 Grundpunkte von B_1 sind beiden gemeinsam; es bleiben

$$(n_2 + n_1)(n_1 + n_3) - n_1^2 = n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$$

weitere gemeinsame Punkte; in jedem derselben schneidet die einzige durch ihn gehende Kurve aus B_1 sich mit den entsprechenden aus B_2 und B_3. Durch diese Punkte geht natürlich die durch B_2, B_3 erzeugte Kurve ebenfalls.

Bei drei projektiven Kurvenbüscheln von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 gibt es $n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$ Punkte, durch welche drei entsprechende Kurven gehen.

Wir wollen die Summe aller Produkte von m Ordnungen zu je i mit $s_{m,i}$ bezeichnen, unsere Zahl also mit $s_{3,2}$.

Drei projektive Flächenbüschel von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 erzeugen durch die Gruppen der $n_1 n_2 n_3$ Schnittpunkte entsprechender Flächen eine Kurve von der Ordnung $s_{3,2}$.

Ein selbständiger Beweis dafür kann analog zu dem obigen geführt werden.

Die Zahl ist $3n^2$, wenn alle drei Ordnungen n sind; die Fälle $n = 1$ sind in Nr. 200 und 201 behandelt.

Die dritte Fläche von der Ordnung $n_2 + n_3$ schneidet die Grundkurve von B_1 in $n_1^2(n_2 + n_3)$ Punkten; in jedem von ihnen begegnen sich zwei entsprechende Flächen aus B_2 und B_3 mit der, welche ihnen in B_1 entspricht. Diese Punkte liegen also auf der erzeugten Kurve und sind deren Schnitte mit der Grundkurve von B_1. In ihnen und in den $n_1 n_2 n_3$ Punkten, in denen eine Fläche aus B_1 den beiden entsprechenden Flächen begegnet, schneidet diese Fläche die erzeugte Kurve.

Im Raume kann man noch einen Schritt weiter gehen.

Vier projektive Flächenbüschel $B_1, \ldots B_4$ von den Ordnungen

n_1, n_2, n_3, n_4 seien gegeben. Wir haben eine endliche Anzahl von Punkten, welche vier entsprechenden Flächen gemeinsam sind. Die Kurve, welche bei B_1, B_2, B_3 sich ergibt, schneidet die von B_1 und B_4 erzeugte Fläche in $(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)(n_1 + n_4)$ Punkten; dazu gehören die $n_1^2(n_2 + n_3)$ Punkte, in denen jene der Grundkurve von B_1 begegnet. Es bleiben $n_2 n_3 n_4 + n_3 n_4 n_1 + n_4 n_1 n_2 + n_1 n_2 n_3 = s_{4,3}$ Punkte.

In jedem von ihnen schneidet sich die einzige durch ihn gehende Fläche von B_1, weil er auf der Kurve liegt, mit den entsprechenden Flächen in B_2, B_3 und, weil er auf der Fläche liegt, mit derjenigen aus B_4.

Bei vier projektiven Flächenbüscheln von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 gibt es $s_{4,3}$ Punkte, welche entsprechenden Flächen gemeinsam sind, also $4n^3$, wenn die vier Ordnungen gleich sind. Für $n = 1$ ergab sich dies Resultat schon in Nr. 208.

672 Es liegen drei kollineare Kurvennetze N_1, N_2, N_3 von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 vor. Wir haben ∞^1 Tripel entsprechender Kurven mit gemeinsamem Punkte; und es ist die Ordnung des Orts dieser Punkte zu bestimmen. Auf einer Gerade g ergibt sich folgende Korrespondenz zweier Punktreihen. Durch einen Punkt geht aus N_1 ein Büschel und aus dem ihm entsprechenden Büschel von N_2 eine Kurve, so daß durch jeden Punkt der Ebene einmal zwei entsprechende Kurven aus zwei kollinearen Netzen gehen, und das analoge gilt im Raume.

Zu den beiden entsprechenden Kurven aus N_1, N_2 durch einen Punkt X der ersten Punktreihe auf g suchen wir die entsprechende Kurve in N_3, welche in g die ihm entsprechenden n_3 Punkte X' der zweiten Reihe einschneidet. Durch einen X' geht aus N_3 ein Büschel; die beiden ihm entsprechenden Büschel in N_1 und N_2, welche projektiv sind, erzeugen eine Kurve von der Ordnung $n_1 + n_2$, welche in g die dem X' korrespondierenden X schneidet. Es ist eine Korrespondenz $[n_1 + n_2, n_3]$ entstanden, und ihre $n_1 + n_2 + n_3$ Koinzidenzen sind die auf g gelegenen Punkte, in denen drei entsprechende Kurven sich begegnen.

Drei kollineare Kurvennetze derselben Ebene von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 erzeugen durch solche Punkte, die drei entsprechenden Kurven gemeinsam sind, eine Kurve von der Ordnung $s_{3,1} = n_1 + n_2 + n_3$.

Wenn zwei der Netze, etwa die beiden ersten, einen gemeinsamen Punkt G haben, so wird er für die Kurve $(n_1 + n_2)^{\text{ter}}$ Ordnung doppelt; und sieht man auf einer durch ihn gehenden Gerade in der vorangehenden Erörterung von ihm ab, so ergibt sich eine Korrespondenz $[n_1 + n_2 - 2, n_3]$ mit zwei Koinzidenzen weniger; d. h. G ist Doppelpunkt auf der Kurve von der Ordnung $s_{3,1}$.

Wir können sofort den räumlichen Satz anfügen, der sich ähnlich beweisen oder durch einen Schnitt auf den ebenen zurückführen läßt.

Drei kollineare Flächennetze von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 erzeugen durch die Gruppen von je $n_1 n_2 n_3$ Schnittpunkten entsprechender Flächen eine Fläche von der Ordnung:

$$s_{3,1} = n_1 + n_2 + n_3.$$

Sie geht durch die Grundpunkte der drei Netze, weil durch jeden zwei entsprechende Flächen aus den beiden andern Netzen gehen.

Bei gleichen Ordnungen ist diese Ordnungszahl $3n$, und für $n = 1$ haben wir die Ergebnisse schon erhalten (Nr. 377).

Wir kehren aber zu zwei kollinearen Netzen zurück und betrachten zunächst zwei kollineare Flächennetze N_1, N_2 von den Ordnungen n_1, n_2. Sie haben ∞^2 Paare entsprechender Büschel und zugehöriger Grundkurven, im allgemeinen ohne gemeinsamen Punkt; aber ∞^1 Paare haben Grundkurven, welche sich begegnen; wir suchen die Ordnung der durch diese Schnittpunkte entstehenden Kurve. Zwei entsprechende Büschel $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ aus den Netzen erzeugen eine Fläche $\Phi_{\mathfrak{B}}(n_1 + n_2)^{\text{ter}}$ Ordnung, zwei andere $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ eine zweite $\Phi_{\mathfrak{C}}$. Zum Schnitte $(n_1 + n_2)^{2\,\text{ter}}$ Ordnung dieser beiden Flächen gehört die Schnittkurve, von der Ordnung $n_1 n_2$, der beiden entsprechenden Flächen $A_1 \equiv \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1$, $A_2 = \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2$; es bleibt eine Kurve von der Ordnung $n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2$. In einem Punkte P derselben schneiden sich zwei entsprechende Flächen S_1, S_2 von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ und zwei (von ihnen verschiedene) entsprechende Flächen T_1, T_2 von $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$, daher auch die entsprechenden Grundkurven $S_1 T_1$, $S_2 T_2$. Und umgekehrt, wenn zwei Grundkurven, zu den entsprechenden Büscheln $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ der Netze gehörig, sich in P schneiden, so gehen durch diesen Punkt die Flächen $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{B}_1 = S_1$, $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{C}_1 = T_1$, $\mathfrak{G}_2 \mathfrak{B}_2 = S_2$, $\mathfrak{G}_2 \mathfrak{C}_2 = T_2$, also die Schnittkurven $S_1 S_2$, $T_1 T_2$; folglich liegt er auf $\Phi_{\mathfrak{B}}$ und $\Phi_{\mathfrak{C}}$.

Sind $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ weitere entsprechenden Büschel aus N_1, N_2, so gehen die entsprechenden Flächen $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{D}_1 = U_1$, $\mathfrak{G}_2 \mathfrak{D}_2 = U_2$ durch den Schnittpunkt P der Grundkurven von $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, also liegt derselbe auf $\Phi_{\mathfrak{D}}$; und so unsere ganze Kurve.

Zwei kollineare Flächennetze N_1, N_2 von den Ordnungen n_1, n_2 führen zu einer Kurve R von der Ordnung $n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2$, in deren Punkten entsprechende Grundkurven der beiden Netze sich schneiden. Jede zwei entsprechenden Büschel von N_1, N_2 erzeugen eine Fläche Φ von der Ordnung $n_1 + n_2$; alle ∞^2 Flächen Φ gehen durch jene Kurve R.

R geht durch die Grundpunkte beider Netze; denn durch jeden geht eine Grundkurve aus dem andern Netze.

Drehen sich die entsprechenden Büschel $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ in N_1, N_2 um die entsprechenden Flächen A_1, A_2, so entsteht durch die Flächen $\Phi_{\mathfrak{B}}$ ein Büschel, dessen Grundkurve sich aus der Kurve R und der $A_1 A_2$ zusammensetzt.

Die Flächen Φ bilden ebenfalls ein Netz, freilich, wegen der gemeinsamen Kurve, ein spezielles. Es seien $\Phi_{\mathfrak{A}}, \ldots \Phi_{\mathfrak{D}}$ vier von ihnen, zugehörig den Büscheln $\mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{D}_1$ in N_1 und ihren entsprechenden in N_2; so haben wir in N_1 die Flächen $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1$ und den sie verbindenden Büschel; ihm gehört eine Fläche Φ zu, die den beiden Büscheln $\Phi_{\mathfrak{A}} \Phi_{\mathfrak{B}}$ und $\Phi_{\mathfrak{C}} \Phi_{\mathfrak{D}}$ gemeinsam ist; folglich befindet sich jede $\Phi_{\mathfrak{D}}$ in einem der Büschel, die von $\Phi_{\mathfrak{C}}$ nach den Flächen des Büschels $\Phi_{\mathfrak{A}} \Phi_{\mathfrak{B}}$ gehen.

Ein Punkt X scheidet zwei entsprechende Flächen A_1, A_2 aus N_1, N_2 aus, Y ebenso die B_1, B_2; folglich geht durch X und Y die Fläche Φ, welche aus den Büscheln $A_1 B_1, A_2 B_2$ sich ergibt.

Für $n_1 = n_2 = 1$ erhalten wir die kubische Raumkurve, insofern sie durch zwei kollineare Bündel erzeugt wird, entsprechende Strahlen sind ja Axen entsprechender Ebenenbüschel der Bündel; die Φ sind die Trägerflächen der Regelscharen, die durch die projektiven Ebenenbüschel in den Bündeln entstehen.

Schneiden wir mit einer Ebene, so ergibt sich:

Zwei kollineare Kurvennetze von den Ordnungen n_1, n_2 führen zu $n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2$ Punkten, welche zugleich Grundpunkte von entsprechenden Büscheln in ihnen sind; durch sie geben alle Kurven $(n_1 + n_2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch entsprechende Büschel der Netze erzeugt werden.

Die Flächen $\Phi_{\mathfrak{B}}$ und $\Phi_{\mathfrak{C}}$ schneiden sich in R und der Kurve $A_1 A_2$, wo $A_1 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1$, $A_2 = \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2$. Jeder Begegnungspunkt der beiden Bestandteile dieses Schnitts ist Schnitt der $A_1 A_2$ mit einer dritten Fläche $\Phi_{\mathfrak{D}}$, weil diese durch R geht; wenn die Büschel $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$, nicht durch A_1, A_2 gehen, so ist jeder der $n_1 n_2 (n_1 + n_2)$ Begegnungspunkte von A_1, A_2 mit $\Phi_{\mathfrak{D}}$ auch auf R gelegen; denn er ist erstens gemeinsamer Punkt von A_1 und A_2 und zweitens, als Punkt von $\Phi_{\mathfrak{D}}$, gemeinsamer Punkt zweier entsprechender Flächen S_1, S_2 aus $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$, die von A_1, A_2 verschieden sind, also ein gemeinsamer Punkt der beiden entsprechenden Grundkurven $A_1 S_1$, $A_2 S_2$, demnach auf R gelegen.

Die beiden Bestandteile des Schnitts zweier Flächen Φ, der feste R von der Ordnung $n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2$, der veränderliche von der Ordnung $n_1 n_2$, haben $n_1 n_2 (n_1 + n_2)$ Punkte gemein.

Oder jede Kurve, in der zwei entsprechende Flächen der beiden Netze sich schneiden, trifft die feste Kurve R in

$n_1 n_2 (n_1 + n_2)$ Punkten; z. B. jede Schnittlinie entsprechender Ebenen in zwei kollinearen Bündeln die kubische Raumkurve zweimal.

Die $n_1(n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2)$ Schnittpunkte irgend einer Fläche A_1 aus N_1 mit R zerfallen in die n_1^3 Grundpunkte von N_1 und die $n_1 n_2 (n_1 + n_2)$ Begegnungspunkte von $A_1 A_2$ mit R.

Nunmehr wenden wir uns zu vier kollinearen Flächennetzen 673
$N_1, \ldots N_4$ von den Ordnungen $n_1, \ldots n_4$. Durch N_1, N_2, N_3 entsteht eine Fläche Ψ_{123} von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3$ als Ort der Schnittpunkte entsprechender Flächen, durch N_1, N_2, N_4 eine andere Ψ_{124} von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_4$; auf beiden liegt die zu N_1, N_2 gehörige Kurve R_{12}; denn in einem Punkte P von R_{12} schneiden sich die Grundkurven von zwei entsprechenden Büscheln $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ aus N_1, N_2; also begegnet sich in ihm sowohl die durch ihn gehende Fläche aus $\mathfrak{B}_3$ mit den ihr entsprechenden Flächen aus $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$, also auch die durch ihn gehende (aber jener nicht entsprechende) Fläche aus $\mathfrak{B}_4$ ebenfalls mit den ihr entsprechenden Flächen aus $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$; damit kommt er auf die beiden Flächen Ψ. Die weitere Schnittkurve derselben hat die Ordnung

$$(n_1 + n_2 + n_3)(n_1 + n_2 + n_4) - (n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2) = s_{4,2}.$$

Durch jeden Punkt dieser Kurve geht nur ein Paar entsprechender Flächen aus N_1, N_2; denn ein zweites Paar würde ihn auf die beiden entsprechenden Schnittkurven und auf R_{12} bringen.

Dieses eine Paar begegnet sich in dem Punkte, weil er der einen und der andern Fläche Ψ angehört, mit der korrespondierenden Fläche in N_3 und derjenigen in N_4.

Bei vier kollinearen Flächennetzen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 gibt es eine Kurve Q von der Ordnung $s_{4,2}$, in deren Punkten entsprechende Flächen sich begegnen.

Und bei vier kollinearen Kurvennetzen gibt es $s_{4,2}$ Punkte, welche zugleich auf entsprechenden Kurven liegen.

Diese Zahl ist $6n^2$, wenn die Ordnungen gleich sind, und bei vier kollinearen Ebenenbündeln entsteht eine Kurve 6. Ordnung, die mit einer kubischen Raumkurve den vollen Schnitt zweier kubischen Flächen bildet (Nr. 383).

Bei vier kollinearen Feldern derselben Ebene kommen sechsmal vier homologe Geraden in einen Punkt zusammen.

Wir fanden die Kurve Q als teilweisen Schnitt zweier Flächen Ψ_{123} und Ψ_{124} neben der Kurve R_{12}. Die Fläche Ψ_{134} geht ebenfalls durch Q, aber nicht durch R_{12}; gemeinsame Punkte von Q und R_{12} sind also gemeinsame Punkte von R_{12} und Ψ_{134}. Zu den gemeinsamen Punkten von Ψ_{134} und R_{12} gehören die n_1^3 Grundpunkte von N_1; die übrigen, deren Anzahl $(n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2)(n_1 + n_3 + n_4) - n_1^3 =$

$$n_1^2(n_2 + n_3 + n_4) + n_2^2(n_1 + n_3 + n_4) + n_1 n_2 (n_3 + n_4)$$

beträgt, sind die gemeinsamen Punkte von R_{12} und Q; denn in jedem dieser Punkte begegnen sich zwei entsprechende Grundkurven von N_1, N_2, weil er auf R_{12} liegt; es geht durch ihn nur eine Grundkurve von N_1, weil er nicht Grundpunkt ist; da er aber auf Ψ_{134} liegt, so gehen drei entsprechende Flächen aus N_1, N_3, N_4 durch ihn; und die aus N_1 muß durch jene Grundkurve gehen und trifft sich in dem Punkte, durch den ja auch die entsprechende Grundkurve aus N_2 geht, mit der entsprechenden Fläche aus diesem Netze; alle vier entsprechenden Flächen gehen durch ihn, und er gehört zu Q.

Die zu den vier kollinearen Flächennetzen gehörige Kurve Q wird von der Kurve R_{12}, die zu den beiden ersten Netzen gehört, in

$$n_1^2(n_2 + n_3 + n_4) + n_2^2(n_1 + n_3 + n_4) + n_1 n_2 (n_3 + n_4)$$

Punkten getroffen.

Die Zahl 8 der Begegnungspunkte im Falle von Ebenenbündeln wurde in Nr. 383 auf anderem Wege gefunden.

Sind nun fünf kollineare Netze $N_1, \ldots N_5$ von den Ordnungen $n_1, \ldots n_5$ gegeben, so schneiden wir die Kurve Q_{1234}, welche zu N_1, N_2, N_3, N_4 gehört, mit der Fläche Ψ_{125}, die zu N_1, N_2, N_5 gehört; zu den Schnitten gehören, weil Ψ_{125} durch R_{12} geht, die Begegnungspunkte der R_{12} und der Q_{1234}, deren Zahl eben gefunden worden ist; ziehen wir sie von $(n_1 n_2 + \ldots n_3 n_4)(n_1 + n_2 + n_5)$ ab, so bleibt $s_{5,3}$. Für jeden dieser übrigen Punkte gilt, daß durch ihn entsprechende Flächen aus N_1, N_2, N_3, N_4 gehen, weil er auf Q_{1234} liegt, und drei entsprechende aus N_1, N_2, N_5, weil er auf Ψ_{125} liegt, und da er nicht auf R_{12} liegt, so geht durch ihn nur ein Paar entsprechender Flächen von N_1, N_2; folglich handelt es sich beidemal um dieselben, und er liegt auf entsprechenden Flächen aus allen fünf Netzen.[1]

Bei fünf kollinearen Netzen von Flächen der Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 gibt es $s_{5,3}$ Punkte, durch welche entsprechende Flächen aus allen fünf Netzen gehen.

Die Zahl ist $10\,n^3$, wenn die Ordnungen gleich sind, und 10, wenn es sich um kollineare Ebenenbündel handelt (Nr. 383).

674 Es seien zwei kollineare Gebüsche G_1, G_2 von Flächen, bzw. von den Ordnungen n_1, n_2 gegeben. Jeder Punkt scheidet aus G_1 ein Netz aus, von welchem er ein Grundpunkt ist und dem dann ein Netz in G_2 entspricht; es fragt sich, wie oft jener Punkt auch Grundpunkt dieses Netzes ist. Wir stellen in G_1 drei von derselben Fläche S_1 ausstrahlende (nicht demselben Netze angehörige) Büschel $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$,

1) So läßt sich Cremona's Beweis (Preliminari Nr. 107, Grundzüge Nr. 131), in dem ein komplizierterer Satz über die Zahl der gemeinsamen Punkte dreier Flächen, die eine Kurve gemeinsam haben, sowie der Rang herangezogen wird, vereinfachen.

$\mathfrak{C}_1$ her und in G_2 entsprechend: $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2$, von S_2 ausgehend. Diese Paare projektiver Büschel $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2, \ldots$ führen zu drei Flächen $\Phi_{\mathfrak{A}}$, $\Phi_{\mathfrak{B}}$, $\Phi_{\mathfrak{C}}$ $(n_1 + n_2)^{\text{ter}}$ Ordnung, auf denen allen die Kurve $S_1 S_2$ liegt. Zwei entsprechende Netze aus G_1, G_2 mit gemeinsamem Grundpunkte senden in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2, \ldots$ je entsprechende Flächen, der gemeinsame Grundpunkt liegt auf deren Schnittkurven und kommt so auf die drei Flächen Φ. Die Büschel $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ liegen in einem Netze von G_1 und $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ im entsprechenden; also kann auf $\Phi_{\mathfrak{A}}, \Phi_{\mathfrak{B}}$ der Satz von Nr. 672 angewandt werden, daß sie sich, außer in $S_1 S_2$, noch in einer Kurve von der Ordnung $n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2$ schneiden, welche der Kurve $S_1 S_2$ in $(n_1 + n_2) n_1 n_2$ Punkten begegnet. Diese Kurve schneidet daher die $\Phi_{\mathfrak{C}}$ in $(n_1 + n_2)(n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2) - (n_1 + n_2) n_1 n_2 = (n_1 + n_2)(n_1^2 + n_2^2)$ Punkten, die nicht auf $S_1 S_2$ liegen. Durch jeden dieser gemeinsamen Punkte der drei Flächen Φ gehen zwei entsprechende Flächen U_1, U_2 von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, zwei von ihnen verschiedene Flächen V_1, V_2 von $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ und zwei wiederum verschiedene Flächen W_1, W_2 von $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$; folglich ist er Grundpunkt der entsprechenden Netze $U_1 V_1 W_1$, $U_2 V_2 W_2$.

Zwei kollineare Gebüsche von Flächen von den Ordnungen n_1, n_2 besitzen $(n_1 + n_2)(n_1^2 + n_2^2)$ Punkte, welche zugleich Grundpunkte entsprechender Netze in ihnen sind.

Zwei solche Netze senden in irgend zwei entsprechende Büschel der Gebüsche entsprechende Flächen; daher liegen jene Punkte auf allen ∞^4 Flächen Φ, welche von entsprechenden Büscheln der Gebüsche herrühren.

Diese Zahl beträgt $4n^3$, wenn die beiden Ordnungen gleich sind.

Bei $n_1 = n_2 = 1$ handelt es sich um die vier sich selbst entsprechenden Punkte kollinearer Räume; da wir die Ebenen als die primären Elemente annehmen, so sind entsprechende Punkte Scheitel entsprechender Ebenenbündel.

Es seien drei kollineare Flächengebüsche G_1, G_2, G_3 von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 vorgelegt.

Ein Punkt P scheidet aus G_1 ein Netz, aus dessen entsprechendem Netze in G_2 einen Büschel und aus dem Büschel von G_3, der diesem entspricht, eine Fläche aus; so daß durch einen Punkt ein, und im allgemeinen nur ein, Tripel korrespondierender Flächen aus den drei kollinearen Gebüschen geht. Es wird aber Punkte geben, durch welche von dem Büschel in G_3 nicht bloß eine Fläche, sondern die Grundkurve geht; die entsprechenden Grundkurven in G_1 und G_2 tun es von selbst; ein solcher Punkt ist also gemeinsamer Punkt dreier entsprechenden Grundkurven und der Flächen der zugehörigen Büschel. In diese drei Büschel senden entsprechende Netze der Gebüsche entsprechende Flächen, und unser Punkt ist Schnittpunkt dieser entsprechenden Flächen.

Drei entsprechende Netze $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3$ aus G_1, G_2, G_3 erzeugen durch die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Flächen eine Fläche Ψ von der Ordnung $s_{3,1}$, und drei andere entsprechende Netze $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \mathfrak{O}_3$ aus G_1, G_2, G_3 geben eine zweite solche Fläche Ψ'. Die entsprechenden Büschel $\mathfrak{N}_1\mathfrak{O}_1, \mathfrak{N}_2\mathfrak{O}_2, \mathfrak{N}_3\mathfrak{O}_3$ geben eine Kurve von der Ordnung $s_{3,2}$, also bleibt als fernerer Schnitt der beiden Ψ, außer dieser Kurve, eine Kurve von der Ordnung

$$s_{3,1}{}^2 - s_{3,2} = n_1{}^2 + n_2{}^2 + n_3{}^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2.$$

Durch jeden Punkt derselben gehen drei entsprechende Flächen U_1, U_2, U_3 von $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3$ und drei entsprechende Flächen V_1, V_2, V_3 von $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \mathfrak{O}_3$, die von jenen verschieden sind, da jene wie diese nicht zu den Büscheln $\mathfrak{N}_1\mathfrak{O}_1, \ldots$ gehören. Folglich gehen durch ihn die entsprechenden Grundkurven $U_1 V_1$, $U_2 V_2$, $U_3 V_3$. Und weil in deren Büschel drei entsprechende Netze entsprechende Flächen senden, so geht die zugehörige Ψ durch den Punkt und die ganze Kurve.

Bei drei kollinearen Gebüschen von Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 besteht eine Kurve T von der Ordnung

$$n_1{}^2 + n_2{}^2 + n_3{}^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2,$$

in deren Punkten sich je drei entsprechende Grundkurven aus den Gebüschen schneiden; und durch sie gehen alle ∞^3 Flächen Ψ, welche von entsprechenden Netzen aus den Gebüschen herrühren.

Durch jeden der $(n_1 + n_2)(n_1{}^2 + n_2{}^2)$ gemeinsamen Grundpunkte entsprechender Netze aus G_1, G_2 geht eine Grundkurve aus dem entsprechenden Netze von G_3; also schneiden sich in ihm drei entsprechende Grundkurven aus G_1, G_2, G_3; und diese Punktgruppe, sowie die beiden analogen liegen auf unserer Kurve.

Ihre Ordnung ist $6n^2$, wenn die Ordnungen der Gebüsche gleich sind.

Für $n = 1$ ergibt sich:

Drei kollineare Ebenenräume führen zu einer Kurve 6. Ordnung, in deren Punkten sich die Axen entsprechender Ebenenbüschel oder, einfacher, entsprechende Geraden schneiden. Durch sie gehen ∞^3 kubische Flächen, die Erzeugnisse entsprechender Ebenenbündel aus den drei Räumen. Jede zwei von ihnen schneiden sich außerdem in einer kubischen Raumkurve, dem Erzeugnisse der den Bündeln gemeinsamen entsprechenden Ebenenbüschel; so daß die Kurve 6. Ordnung von derselben Art ist wie die in Nr. 673 betrachtete. Je drei von den Flächen haben, außer der Kurve 6. Ordnung, nur einen Punkt gemeinsam: den Schnittpunkt der drei entsprechenden Ebenen, welche den drei Tripeln entsprechender Bündel gemeinsam sind.

Sich deckende Scheitel entsprechender Bündel von zwei kollinearen Räumen sind sich selbst entsprechende Punkte.

Auf der Kurve 6. Ordnung liegen also die Ecken der Koinzidenztetraeder von je zwei der Räume.

Durch einen ebenen Schnitt erhält man:

Bei drei kollinearen Kurvengebüschen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 gibt es

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$$

Punkte, welche gemeinsame Grundpunkte entsprechender Büschel der Gebüsche sind; durch sie gehen alle Kurven von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3$, welche durch entsprechende Netze aus den Gebüschen erzeugt werden.

Unter den ∞^3 Quadrupeln entsprechender Flächen von vier kol- 675
linearen Gebüschen $G_1, \ldots G_4$ von den Ordnungen $n_1, \ldots n_4$ haben nur ∞^2 einen gemeinsamen Punkt; diese Punkte erzeugen eine Fläche.

Durch einen Punkt X einer Gerade g geht ein Tripel entsprechender Flächen aus G_1, G_2, G_3; die ihnen entsprechende Fläche aus G_4 schneidet in g die n_4 entsprechenden Punkte X' ein; durch jeden X' von g aber geht ein Netz aus G_4, und die entsprechenden Netze aus G_1, G_2, G_3 erzeugen eine Fläche von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3$, welche auf die g die dem X' korrespondierenden Punkte X liefert. Die Koinzidenzen der entstandenen Korrespondenz $[n_1 + n_2 + n_3, n_4]$ führen zur Ordnung der gesuchten Fläche.

Für vier kollineare Flächengebüsche, deren Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 sind, ist der Ort der Punkte, in denen sich entsprechende Flächen schneiden, eine Fläche X von der Ordnung $s_{4,1} = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

Diese Fläche X enthält auch die sechs Gruppen von Punkten, welche gemeinsame Grundpunkte entsprechender Netze zweier der Gebüsche sind; denn durch jeden der etwa zu G_1, G_2 gehörigen Punkte, deren Anzahl $(n_1 + n_2)(n_1^2 + n_2^2)$ ist, gehen dann auch zwei entsprechende Flächen aus den korrespondierenden Netzen von G_3, G_4. Ferner enthält sie die vier Kurven, die zu je drei Gebüschen gehören und durch gemeinsame Punkte entsprechender Grundkurven derselben gebildet werden; denn durch jeden dieser Punkte geht auch eine Fläche aus dem Büschel durch die entsprechende Grundkurve im vierten Gebüsche. Die Kurve, die zu G_1, G_2, G_3 gehört, hat die Ordnung:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2.$$

Die obige Ordnungszahl wird $4n$, wenn die Ordnungen der Gebüsche gleich sind.

Vier kollineare Räume führen daher zu einer Fläche 4. Ordnung, dem Orte der Punkte, in denen vier entsprechende Ebenen zusammenkommen. Sie enthält die sechs Quadrupel der Koinzidenzpunkte von je zwei der Räume und die vier Kurven 6. Ordnung, die zu dreien gehören und je Örter der Punkte sind, in welchen entsprechende Geraden aus diesen Räumen sich schneiden.

Die vier kollinearen Räume werden später zu einem Gebüsche von kollinearen Räumen erweitert werden, zu denen allen die Fläche 4. Ordnung gehört, derartig, daß in jeden ihrer Punkte korrespondierende Ebenen aus allen zusammenlaufen. Sie wird dann mit ∞^4 Quadrupeln und ∞^3 Kurven 6. Ordnung erfüllt werden.

Unmittelbar ergibt sich auf der Fläche 4. Ordnung ein dreifach unendliches System von Kurven 6. Ordnung, von denen jede Ort gemeinsamer Punkte entsprechender Ebenen von korrespondierenden Bündeln aus den vier Räumen ist (Nr. 383, 673), und ebenso ein vierfach unendliches System von Quadrupeln von Punkten, in welchen je vier entsprechende Ebenen aus korrespondierenden Ebenenbüscheln der Räume sich schneiden (Nr. 207). Diese sind nicht mit den obigen identisch.

Vier kollineare Kurvengebüsche der nämlichen Ebene führen zu einer Kurve von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, erzeugt durch gemeinsame Punkte entsprechender Kurven.

676 Bei fünf kollinearen Flächengebüschen $G_1, \ldots G_5$, von den Ordnungen $n_1, \ldots n_5$, wird es nur ∞^1 Quintupel entsprechender Flächen geben, die noch einen Schnittpunkt haben.

Die Gebüsche G_1, G_2, G_3, G_4 geben eine Fläche X_{1234} von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, die Gebüsche G_1, G_2, G_3, G_5 eine zweite X_{1235} von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 + n_5$. Gemeinsam ist ihnen die Kurve, von der Ordnung $n_1{}^2 + n_2{}^2 + n_3{}^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$, welche zu G_1, G_2, G_3 gehört. Es bleibt eine Rest-Schnittkurve von der Ordnung $s_{5,2}$; durch jeden ihrer Punkte geht nur ein Tripel entsprechender Flächen aus G_1, G_2, G_3 und weil er auf den beiden Flächen liegt, auch je die entsprechende Fläche aus G_4 und G_5.

Bei fünf kollinearen Flächengebüschen von den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots n_5$ gibt es eine Kurve W von der Ordnung $s_{5,2}$, in deren Punkte entsprechende Flächen aus allen fünf zusammenkommen.

Für gleiche Ordnungen der Gebüsche ist diese Ordnung $10\,n^2$, und bei fünf kollinearen Räumen haben wir eine Kurve 10. Ordnung von Punkten, in welchen fünf entsprechende Ebenen sich schneiden.

Fünf kollineare Kurvengebüsche führen zu $s_{5,2}$ Punkten, in denen entsprechende Kurven sich schneiden.

Die beiden obigen Flächen X_{1234} und X_{1235} schneiden sich in zwei Kurven T und W, von denen erstere, bloß zu G_1, G_2, G_3 gehörig, die Ordnung $t = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$, die andere, zu allen fünf Gebüschen gehörig, die Ordnung $s_{5,2}$ hat. Wir wollen die Anzahl ihrer Begegnungspunkte ermitteln. Dazu nehmen wir die Fläche X_{1245}; sie geht, ebenso wie jene beiden X, durch W und enthält die gesuchten gemeinsamen Punkte. Andererseits geht sie aber auch durch die $(n_1 + n_2)(n_1^2 + n_2^2)$ Punkte, welche gemeinsame Grundpunkte entsprechender Netze aus G_1, G_2 sind. Diese Punkte liegen auch auf T, und folglich hat sie mit T außerdem gemeinsam:

$$\begin{aligned} z &= (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)(n_1 + n_2 + n_4 + n_5) \\ &\qquad - (n_1 + n_2)(n_1^2 + n_2^2) \\ &= (n_2 + n_3) n_2 n_3 + (n_3 + n_1) n_3 n_1 + (n_1 + n_2) n_1 n_2 + 2 n_1 n_2 n_3 \\ &\qquad + (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)(n_4 + n_5) \end{aligned}$$

Punkte. In jedem dieser Punkte schneiden sich, weil er auf T liegt, die Grundkurven von drei entsprechenden Büscheln $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ aus G_1, G_2, G_3, und, weil er auf X_{1245} liegt, entsprechende Flächen aus G_1, G_2, G_4, G_5. Die aus G_1 und G_2 müssen in jenen Büscheln $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ sich befinden; denn wäre das nicht der Fall, so würde der Punkt gemeinsamer Grundpunkt entsprechender Netze aus G_1, G_2 sein; aber die so beschaffenen Punkte haben wir abgezogen. Daher befindet sich die entsprechende Fläche aus G_3 in $\mathfrak{B}_3$ und geht auch durch den Punkt; so daß er fünf entsprechenden Flächen aus $G_1, \ldots G_5$ gemeinsam ist und auf W liegt. Somit haben die beiden Kurven T und W die obige Anzahl z von Punkten gemeinsam.

Wenn nun jetzt sechs kollineare Flächengebüsche $G_1, \ldots G_6$ von den Ordnungen $n_1, \ldots n_6$ gegeben sind, so schneiden wir die zu G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 gehörige Kurve W von der Ordnung $s_{5,2}$ mit der Fläche X_{1236} von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 + n_6$, welche durch T geht; zu den Schnitten gehören die gemeinsamen Punkte von T und W; es bleiben $s_{5,2}(n_1 + n_2 + n_3 + n_6) - z = s_{6,3}$ gemeinsame Punkte. Durch jeden von ihnen gehen, weil er auf W liegt, fünf entsprechende Flächen aus G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 und, weil er auf X_{1236} liegt, vier entsprechende Flächen von G_1, G_2, G_3, G_6. Wären die zu G_1, G_2, G_3 gehörigen in den beiden Fällen verschieden, so würden in dem Punkte sich entsprechende Grundkurven aus diesen Gebüschen schneiden, er liegt aber nicht auf T; folglich gehen durch ihn entsprechende Flächen aus allen sechs Gebüschen.[1])

Bei sechs kollinearen Flächengebüschen von den Ordnungen n_1, $n_2, \ldots n_6$ gibt es $s_{6,3}$ Punkte, in welchen entsprechende Flächen aus allen sich schneiden.

1) Auch hiermit möge der Beweis von Cremona: Preliminari Nr. 117, Grundzüge Nr. 142 verglichen werden. — Cremona gibt auch die entsprechenden Sätze für lineare Systeme m^{ter} Stufe.

Diese Zahl wird $20n^3$, wenn die Ordnungen gleich sind, und sechs kollineare Räume enthalten 20 Punkte, in welchen entsprechende Ebenen aus allen zusammenlaufen, und daher auch 20 Ebenen, in denen sechs entsprechende Punkte liegen.

§ 99. Polarentheorie der geraden Punktgruppen, ebenen Kurven und Flächen.

677 Die Harmonizität soll in folgender Weise verallgemeinert werden. Zwei Punkte O und P sind harmonisch in bezug auf zwei andere A_1, A_2, wenn (Nr. 7):

$$\frac{2}{OP} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2}$$

oder in etwas anderer Form:

$$\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_1}\right) + \left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_2}\right) = 0.$$

Wir setzen an Stelle des Punktepaars $A_1 A_2$ eine Gruppe von n Punkten A_1, $A_2, \ldots A_n$ auf einer Gerade, in deren Punktreihe wir zunächst verbleiben; es gibt dann n Differenzen $\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_h}$; aus ihnen bilden wir alle möglichen Produkte von je $n-i$, bezeichnen die Summe derselben abkürzend mit $\Sigma_{n-i}\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_h}\right)$ und suchen, wenn noch der Pol O gegeben ist, die Punkte P auf, welche der Relation:

$$\text{I} \qquad \Sigma_{n-i}\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_h}\right) = 0$$

genügen.[1]) Wenn z. B. $n = 3$ und $i = 1, 2$ ist, so lautet diese Relation:

$$\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_1}\right)\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_2}\right) + \left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_1}\right)\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_3}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_2}\right)\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_3}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_1}\right) + \left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_2}\right) + \left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OA_3}\right) = 0,$$

oder kürzer:

$$\frac{3}{OP} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OA_3}.$$

Wir werden gleich erkennen, daß die Gleichung I vom $(n-i)^{\text{ten}}$ Grade in bezug auf die Unbekannte OP ist und daher $n-i$ Punkte P

1) Graßmann, Journal f. Math., Bd. 24, S. 262, 372; Bd. 25, S. 57; Gesammelte math. und phys. Werke 2. Bd., 1. Hälfte S. 3; de Jonquières, Journal de Mathématiques, Ser. II, Bd. 2, S. 249.

liefert: sie bilden die i^{te} Polargruppe oder Polare des Punktes O in bezug auf die Grundgruppe[1]), so daß die Ordinalzahl der Polare und die Zahl ihrer Punkte sich zu n ergänzen. Diese Ordinalzahl i kann von 1 bis $n-1$ laufen, und wir haben $n-1$ Polaren zu jedem Pole.

Wir formen I um in:

$$\Sigma_{n-i} \frac{OA_n - OP}{OP \cdot OA_h} = 0;$$

jedes Glied hat $n-i$ solche Faktoren; wir multiplizieren daher mit $(-OP)^{n-i} \cdot OA_1 \cdot OA_2 \ldots OA_n$ und erhalten:

$$\text{II} \qquad \Sigma_{n-i,\,i}(OP - OA_h) \cdot OA_{h'} = 0,$$

worin der Doppelzeiger ausdrückt, daß jedes Glied der Summe $n-i$ Faktoren $OP - OA_h$ und i Faktoren $OA_{h'}$ hat, die i Zeiger h' von den $n-i$ Zeigern h verschieden sind und mit ihnen alle n Zeiger umfassen. Im Falle $n=3$, $i=1$ haben wir:

$$(OP - OA_2)(OP - OA_3) \cdot OA_1 + (OP - OA_3)(OP - OA_1) \cdot OA_2 \\ + (OP - OA_1)(OP - OA_2) \cdot OA_3 = 0.$$

II läßt sich noch umwandeln in:

$$\text{II}' \qquad \Sigma_{n-i,\,i} PA_h \cdot OA_{h'} = 0$$

und

$$\text{II}'' \qquad \Sigma_{n-i} \frac{PA_h}{OA_h} = 0;$$

in dem eben erwähnten Falle:

$$PA_1 \cdot PA_2 \cdot OA_3 + PA_1 \cdot PA_3 \cdot OA_2 + PA_2 \cdot PA_3 \cdot OA_1 = 0,$$
$$\frac{PA_1}{OA_1} \cdot \frac{PA_2}{OA_2} + \frac{PA_1}{OA_1} \cdot \frac{PA_3}{OA_3} + \frac{PA_2}{OA_2} \cdot \frac{PA_3}{OA_3} = 0.$$

Schreibt man II′ in der Form:

$$\Sigma_{i,\,n-i} OA_{h'} \cdot PA_h = 0,$$

so folgt:

Gehört P zur i^{ten} Polare von O, so gehört O zur $(n-i)^{\text{ten}}$ Polare von P.

Die Relation II soll nun, damit der Grad $n-i$ erkennbar werde, nach Potenzen von OP entwickelt werden. Mit $\Sigma_l OA_h$ bezeichnen wir die Summe über alle Produkte von je l Faktoren OA_h, mit m_α die Zahl der Kombinationen von m Elementen zu je α (Binomial-Koeffizient):

$$m_\alpha = \frac{m(m-1)\ldots(m-\alpha+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha}.$$

1) Zuerst nannte man diese $n-i$ Punkte die harmonischen Mittelpunkte $(n-i)^{\text{ten}}$ Grades des O in bezug auf die Grundgruppe.

Dann ist die Entwickelung folgende:

$$\begin{aligned} &OP^{n-i}\Sigma_i OA_h - (i+1)_1 OP^{n-i-1}\Sigma_{i+1} OA_h \\ \text{III}\quad &+ (i+2)_2 OP^{n-i-2}\Sigma_{i+2} OA_h + \cdots + (-1)^\alpha (i+\alpha)_\alpha OP^{n-i-\alpha}\Sigma_{i+\alpha} OA_h \\ &+ \cdots + (-1)^{n-i} n_{n-i} \cdot OA_1 \cdot OA_2 \ldots OA_n = 0. \end{aligned}$$

Denn in dem allgemeinen Gliede mit $OP^{n-i-\alpha}$ kommt $(-1)^\alpha$ davon her, daß α Größen $-OA_h$ miteinander multipliziert sind, die in den Differenz-Faktoren stehen. Zu ihnen kommen dann noch die i außerhalb stehenden Faktoren $OA_{h'}$, so daß insgesamt $i+\alpha$ derartige Faktoren multipliziert sind, und zwar erhält man nicht bloß alle solchen Produkte — daher $\Sigma_{i+\alpha} OA_h$ —, sondern jedes Glied dieser Summe noch $(i+\alpha)_\alpha$-mal, nämlich so oft, als es möglich ist, von $i+\alpha$ Faktoren α Faktoren auszuzeichnen, die von den Differenzen herkommenden; daher der numerische Koeffizient $(i+\alpha)_\alpha$.

Wenn $i=1$, dann ist $(i+\alpha)_\alpha = (\alpha+1)_\alpha = \alpha+1$, und die Relation ist:

$$\begin{aligned} &OP^{n-1}\Sigma_1 OA_h - 2\,OP^{n-2}\Sigma_2 OA_h + \cdots + (-1)^{\alpha-1}\cdot \alpha\, OP^{n-\alpha}\Sigma_\alpha OA_h \\ &+ \cdots + (-1)^{n-1} n\, OA_1 \cdot OA_2 \ldots OA_n = 0, \end{aligned}$$

und wenn $n=3$:

$$\begin{aligned} &OP^2(OA_1 + OA_2 + OA_3) - 2\,OP(OA_1\cdot OA_2 + OA_1 \cdot OA_3 + OA_2 \cdot OA_3) \\ &+ 3\,OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_3 = 0. \end{aligned}$$

678 Nehmen wir an, daß die Strecken $OA_1, OA_2, \ldots OA_n$ die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades seien, welche in der üblichen Weise so geschrieben ist, daß aus den Koeffizienten die entsprechenden Binomial-Koeffizienten herausgenommen sind:

$$\begin{aligned} Q = a_0 x^n + n_1 a_1 x^{n-1} + n_2 a_2 x^{n-2} + \cdots + n_\alpha a_\alpha x^{n-\alpha} \\ + \cdots + n_{n-1} a_{n-1} x + a_n = 0. \end{aligned}$$

Nun ist bekanntlich:

$$\Sigma_l OA_h = (-1)^l \frac{n_l a_l}{a_0}.$$

Daher wird der Koeffizient von $OP^{n-i-\alpha}$ in III:

$$\begin{aligned} &(-1)^\alpha (i+\alpha)_\alpha \cdot (-1)^{i+\alpha} n_{i+\alpha} \cdot \frac{a_{i+\alpha}}{a_0} \\ &= (-1)^i \frac{(i+\alpha)(i+\alpha-1)\ldots(i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots \alpha} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-i-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(i+\alpha)} \cdot \frac{a_{i+\alpha}}{a_0} \\ &= (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\ldots i} \cdot \frac{(n-i)(n-i-1)\ldots(n-i-\alpha+1)}{1\cdot 2\ldots \alpha} \frac{a_{i+\alpha}}{a_0} \\ &= (-1)^i n_i (n-i)_\alpha \frac{a_{i+\alpha}}{a_0}. \end{aligned}$$

Also hat man:

$$\text{IV}\quad \begin{aligned}\Pi = OP^{n-i}a_i + OP^{n-i-1}(n-i)_1 a_{i+1} + \cdots + OP^{n-i-\alpha}(n-i)_\alpha a_{i+\alpha}\\ + \cdots + OP\cdot(n-i)_{n-i-1}a_{n-1} + a_n = 0.\end{aligned}$$

Ist also die gegebene Gruppe $Q + \lambda Q_1 = 0$, so ist die Polargruppe:

$$\Pi + \lambda \Pi_1 = 0;$$

d. h. durchläuft jene eine Involution n^{ten} Grades, so durchläuft, bei festgehaltenem Pole, diese eine Involution $(n-i)^{\text{ten}}$ Grades.

Der Übergang des Parameters λ lehrt die Projektivität dieser Involution zur gegebenen.

Schreiben wir diese Gleichung IV für einen Augenblick in folgender Form:

$$b_0 x^{n-i} + (n-i)_1 b_1 x^{n-i-1} + \cdots + (n-i)_\alpha b_\alpha x^{n-i-\alpha} + \cdots + b_{n-i} = 0,$$

so daß $x = OP$, $b_\alpha = a_{i+\alpha}$, und betrachten diese Polargruppe von $n-i$ Punkten als eine neue Grundgruppe, in bezug auf welche wir die k^{te} Polargruppe desselben Pols O haben wollen ($k < n-i$), so ist deren Gleichung:

$$\begin{aligned}b_k \cdot OP^{n-i-k} + (n-i-k)_1 b_{k+1}\cdot OP^{n-i-k-1}\\ + \cdots + (n-i-k)_\alpha b_{k+\alpha}\cdot OP^{n-i-k-\alpha} + \cdots + b_{n-i} = 0,\end{aligned}$$

oder, indem wir wieder die a einführen:

$$\begin{aligned}a_{i+k} OP^{n-i-k} + (n-i-k)_1 a_{i+k+1} OP^{n-i-k-1}\\ + \cdots + (n-i-k)_\alpha a_{i+k+\alpha} OP^{n-i-k-\alpha} + \cdots + a_n = 0;\end{aligned}$$

das ist ersichtlich die Gleichung der $(i+k)^{\text{ten}}$ Polare von O in bezug auf die ursprüngliche Grundgruppe; und daraus folgt, daß auch die Reihenfolge, in der die eine und die andere Polare genommen werden, gleichgültig ist. Also:

Es sind identisch die k^{te} Polare von O, genommen nach der i^{ten} Polare von O in bezug auf die Grundgruppe, die i^{te} Polare von O, genommen nach der k^{ten} Polare bezüglich der Grundgruppe, und endlich die $(i+k)^{\text{te}}$ Polare von O nach der Grundgruppe.

Daraus erhellt, daß man noch mehr zerspalten kann, insbesondere, daß man die i^{te} Polare durch i-maliges Konstruieren der ersten Polare erhält, immer in bezug auf die eben erhaltene; und so erklärt sich, warum die aus $n-i$ Punkten bestehende Polare die i^{te} genannt wird.[1])

---

1) Graßmann zählte umgekehrt.

681 Es seien r Punkte der Grundgruppe in dem Punkte A vereinigt, so hat, in III, $OA_1 \ldots OA_n$ den Faktor OA^r, $\Sigma_{n-1} OA_h$ den Faktor $OA^{r-1}, \ldots \Sigma_{n-r+1} OA_h$ den Faktor OA. Liegt also der Pol O in diesem Punkte A, so werden die r untersten Glieder der Gleichung III sämtlich 0, sie hat r Wurzeln 0; also fallen r Punkte der i^{ten} Polare in diesen Punkt, so lange $i < n - r + 1$; hat aber i diesen Wert erreicht oder überschritten, so ist die Gleichung III eine Identität, die Polare also unbestimmt geworden. Daher:

Besitzt die Grundgruppe einen r-fachen Punkt, so hat, für ihn als Pol, jede Polare, deren Ordinalzahl $i < n - r + 1$ ist, ihn auch zum rf-achen Punkte, die weiteren Polaren sind unbestimmt.

In bezug auf die ersteren Polaren ($i \leqq n - r$) gilt weiter: Die übrigen (nicht 0 werdenden) Summen $\Sigma_l OA_h$ reduzieren sich auf $\Sigma_l OA_h^*$, wo die A^* die $n - r$ von $O \equiv A$ verschiedenen Punkte der Grundgruppe sind. Das letzte nicht verschwindende Glied von III enthält $\Sigma_{n-r} OA_h$ oder $\Sigma_{n-r} OA_h^*$, also ist bei ihm $i + \alpha = n - r$, $\alpha = n - r - i$, $n - i - \alpha = r$, und III wird:

$$OP^r \{ OP^{n-r-i} \Sigma_i OA_h^* - (i+1)_1 OP^{n-r-i-1} \Sigma_{i+1} OA_h^* + \cdots$$
$$+ (-1)^\alpha (i+\alpha)_\alpha OP^{n-r-i-\alpha} \Sigma_{i+\alpha} OA_h^*$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-r-i} (n-r)_{n-r-i} \Sigma_{n-r} OA_h^* \} = 0;$$

die Klammer, gleich 0 gesetzt, liefert die i^{te} Polare von $O \equiv A$ in bezug auf die $n - r$ Punkte A_h^*.

Demnach wird der r-fache Punkt A zur eigenen i^{ten} Polare ($i \leqq n - r$) durch die $n - r - i$ Punkte seiner i^{ten} Polare in bezug auf die übrigen $n - r$ Punkte der Grundgruppe vervollständigt.

Fällt der Pol in einen einfachen Punkt der Grundgruppe, so gibt es noch keine unbestimmten Polaren, alle Polaren enthalten ihn als einfachen Punkt.

Umgekehrt, wenn der Pol zu der i^{ten} Polare gehört, so hat III eine Wurzel 0, das letzte Glied, also einer seiner Faktoren $OA_1, \ldots$ muß verschwinden, der Pol zur Grundgruppe gehören.

Der Pol gehört dann und nur dann zu einer und folglich zu jeder der Polaren, wenn er der Grundgruppe angehört.

Unbestimmt kann die i^{te} Polare von O nur dann werden, wenn in III alle Koeffizienten 0 sind, d. h. das Produkt $OA_1 \ldots OA_n$ und alle Summen von $\Sigma_{n-1} OA_h$ bis $\Sigma_i OA_h$. Das Verschwinden jenes Produkts fordert, daß einer seiner Faktoren 0 ist, etwa OA_1. Dann reduziert sich $\Sigma_{n-1} OA_h$ auf $OA_2 \cdot OA_3 \ldots OA_n$, also ein zweiter Faktor muß 0 sein, etwa OA_2; usw. Im ganzen müssen $n - i + 1$ der Strecken OA_h gleich 0 sein. Folglich, indem wir i durch $n - r + 1$ ersetzen, also $n - i + 1$ durch r:

Die $(n-r+1)^{\text{te}}$ Polare (und die weiteren) von O ist dann und nur dann unbestimmt, wenn die Grundgruppe einen r-fachen Punkt hat und der Pol in ihm liegt.

Für einen beliebigen Pol folgt, wenn die Grundgruppe einen r-fachen Punkt A hat, aus II, wofern $i < r$, daß jedes Glied die Differenz $OP - OA$ mindestens in der $(r-i)^{\text{ten}}$ Potenz enthält, so daß $OP = OA$ $(r-i)$-fache Wurzel ist. Also:

Ein r-facher Punkt der Grundgruppe ist für die i^{te} Polare eines beliebigen Pols, wofern $i < r$ ist, ein $(r-i)$-facher.

Wir nehmen an, daß in bezug auf die Grundgruppen:

$$Q = a_0 x^n + n_1 a_1 x^{n-1} + \cdots = 0,$$
$$Q_1 = b_0 x^n + n_1 b_1 x^{n-1} + \cdots = 0$$

der Pol O dieselbe i^{te} Polare habe; d. h. in:

$$OP^{n-i} a_i + OP^{n-i-1}(n-i)_1 a_{i+1} + \cdots + OP^{n-i-\alpha}(n-i)_\alpha a_{i+\alpha} + \cdots = 0,$$
$$OP^{n-i} b_i + OP^{n-i-1}(n-i)_1 b_{i+1} + \cdots = 0$$

seien die Koeffizienten proportional; also:

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \cdots = \frac{a_n}{a_n};$$

wenn nun $-\lambda_0$ der gemeinsame Wert dieser Quotienten ist, so ist: $a_i + \lambda_0 b_i = a_{i+1} + \lambda_0 b_{i+1} = \cdots a_n + \lambda_0 b_n = 0$; folglich ist die Relation der i^{ten} Polare von O, die zu $Q + \lambda_0 Q_1 = 0$ gehört:

$$(a_i + \lambda_0 b_i)\, OP^{n-i} + \cdots = 0$$

eine Identität, die Polare unbestimmt.

Für andere Werte von λ sind die $a_i + \lambda b_i, \ldots$ den $b_i, \ldots$ oder $a_i, \ldots$ proportional; denn aus $\frac{a_i}{b_i} = \cdots \frac{a_n}{b_n}$ folgt $\frac{a_i}{b_i} + \lambda = \cdots = \frac{a_n}{b_n} + \lambda$.

Wenn ein Punkt in bezug auf zwei Gruppen (von je n Punkten) die nämliche i^{te} Polare hat, so hat er in bezug auf alle Gruppen der durch dieselben konstituierten Involution diese selbe i^{te} Polare, mit Ausnahme von einer, in bezug auf welche die Polare unbestimmt ist.

Und umgekehrt, wenn die Polare von O in bezug auf eine Gruppe der Involution unbestimmt ist, so fallen die Polaren in bezug auf die übrigen zusammen.

Sie sei unbestimmt in bezug auf die zu λ_0 gehörige Gruppe, so ist

$$a_i + \lambda_0 b_i = a_{i+1} + \lambda_0 b_{i+1} = \cdots a_n + \lambda_0 b_n = 0.$$

Daraus folgt die Proportionalität von $a_i, a_{i+1}, \ldots;$ $b_i, b_{i+1}, \ldots;$ $a_i + \lambda b_i,$ $a_{i+1} + \lambda b_{i+1}, \ldots$.

Wenn ein Punkt, etwa A_1, der Grundgruppe auch der ersten

681 Es seien r Punkte der Grundgruppe in dem Punkte A vereinigt, so hat, in III, $OA_1 \dots OA_n$ den Faktor OA^r, $\Sigma_{n-1} OA_h$ den Faktor $OA^{r-1}, \dots \Sigma_{n-r+1} OA_h$ den Faktor OA. Liegt also der Pol O in diesem Punkte A, so werden die r untersten Glieder der Gleichung III sämtlich 0, sie hat r Wurzeln 0; also fallen r Punkte der i^{ten} Polare in diesen Punkt, so lange $i < n - r + 1$; hat aber i diesen Wert erreicht oder überschritten, so ist die Gleichung III eine Identität, die Polare also unbestimmt geworden. Daher:

Besitzt die Grundgruppe einen r-fachen Punkt, so hat, für ihn als Pol, jede Polare, deren Ordinalzahl $i < n - r + 1$ ist, ihn auch zum rf-achen Punkte, die weiteren Polaren sind unbestimmt.

In bezug auf die ersteren Polaren ($i \leqq n - r$) gilt weiter: Die übrigen (nicht 0 werdenden) Summen $\Sigma_l OA_h$ reduzieren sich auf $\Sigma_l OA_h^*$, wo die A^* die $n - r$ von $O \equiv A$ verschiedenen Punkte der Grundgruppe sind. Das letzte nicht verschwindende Glied von III enthält $\Sigma_{n-r} OA_h$ oder $\Sigma_{n-r} OA_h^*$, also ist bei ihm $i + \alpha = n - r$, $\alpha = n - r - i$, $n - i - \alpha = r$, und III wird:

$$OP^r \{ OP^{n-r-i} \Sigma_i OA_h^* - (i+1)_1 OP^{n-r-i-1} \Sigma_{i+1} OA_h^* + \cdots$$
$$+ (-1)^\alpha (i+\alpha)_\alpha OP^{n-r-i-\alpha} \Sigma_{i+\alpha} OA_h^*$$
$$+ \dots + (-1)^{n-r-i} (n-r)_{n-r-i} \Sigma_{n-r} OA_h^* \} = 0;$$

die Klammer, gleich 0 gesetzt, liefert die i^{te} Polare von $O \equiv A$ in bezug auf die $n - r$ Punkte A_h^*.

Demnach wird der r-fache Punkt A zur eigenen i^{ten} Polare ($i \leqq n - r$) durch die $n - r - i$ Punkte seiner i^{ten} Polare in bezug auf die übrigen $n - r$ Punkte der Grundgruppe vervollständigt.

Fällt der Pol in einen einfachen Punkt der Grundgruppe, so gibt es noch keine unbestimmten Polaren, alle Polaren enthalten ihn als einfachen Punkt.

Umgekehrt, wenn der Pol zu der i^{ten} Polare gehört, so hat III eine Wurzel 0, das letzte Glied, also einer seiner Faktoren $OA_1, \dots$ muß verschwinden, der Pol zur Grundgruppe gehören.

Der Pol gehört dann und nur dann zu einer und folglich zu jeder der Polaren, wenn er der Grundgruppe angehört.

Unbestimmt kann die i^{te} Polare von O nur dann werden, wenn in III alle Koeffizienten 0 sind, d. h. das Produkt $OA_1 \dots OA_n$ und alle Summen von $\Sigma_{n-1} OA_h$ bis $\Sigma_i OA_h$. Das Verschwinden jenes Produkts fordert, daß einer seiner Faktoren 0 ist, etwa OA_1. Dann reduziert sich $\Sigma_{n-1} OA_h$ auf $OA_2 \cdot OA_3 \dots OA_n$, also ein zweiter Faktor muß 0 sein, etwa OA_2; usw. Im ganzen müssen $n - i + 1$ der Strecken OA_h gleich 0 sein. Folglich, indem wir i durch $n - r + 1$ ersetzen, also $n - i + 1$ durch r:

Die $(n-r+1)^{\text{te}}$ Polare (und die weiteren) von O ist dann und nur dann unbestimmt, wenn die Grundgruppe einen r-fachen Punkt hat und der Pol in ihm liegt.

Für einen beliebigen Pol folgt, wenn die Grundgruppe einen r-fachen Punkt A hat, aus II, wofern $i<r$, daß jedes Glied die Differenz $OP-OA$ mindestens in der $(r-i)^{\text{ten}}$ Potenz enthält, so daß $OP=OA$ $(r-i)$-fache Wurzel ist. Also:

Ein r-facher Punkt der Grundgruppe ist für die i^{te} Polare eines beliebigen Pols, wofern $i<r$ ist, ein $(r-i)$-facher.

Wir nehmen an, daß in bezug auf die Grundgruppen:

$$Q = a_0x^n + n_1a_1x^{n-1} + \cdots = 0,$$
$$Q_1 = b_0x^n + n_1b_1x^{n-1} + \cdots = 0$$

der Pol O dieselbe i^{te} Polare habe; d. h. in:

$$OP^{n-i}a_i + OP^{n-i-1}(n-i)_1a_{i+1} + \cdots + OP^{n-i-\alpha}(n-i)_\alpha a_{i+\alpha} + \cdots = 0,$$
$$OP^{n-i}b_i + OP^{n-i-1}(n-i)_1\, b_{i+1} + \cdots = 0$$

seien die Koeffizienten proportional; also:

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \cdots = \frac{a_n}{a_n};$$

wenn nun $-\lambda_o$ der gemeinsame Wert dieser Quotienten ist, so ist: $a_i+\lambda_0b_i = a_{i+1}+\lambda_0b_{i+1} = \cdots a_n+\lambda_0b_n = 0$; folglich ist die Relation der i^{ten} Polare von O, die zu $Q+\lambda_0Q_1=0$ gehört:

$$(a_i+\lambda_0b_i)\,OP^{n-i} + \cdots = 0$$

eine Identität, die Polare unbestimmt.

Für andere Werte von λ sind die $a_i+\lambda b_i, \ldots$ den $b_i, \ldots$ oder $a_i, \ldots$ proportional; denn aus $\frac{a_i}{b_i} = \cdots \frac{a_n}{b_n}$ folgt $\frac{a_i}{b_i}+\lambda = \cdots = \frac{a_n}{b_n}+\lambda$.

Wenn ein Punkt in bezug auf zwei Gruppen (von je n Punkten) die nämliche i^{te} Polare hat, so hat er in bezug auf alle Gruppen der durch dieselben konstituierten Involution diese selbe i^{te} Polare, mit Ausnahme von einer, in bezug auf welche die Polare unbestimmt ist.

Und umgekehrt, wenn die Polare von O in bezug auf eine Gruppe der Involution unbestimmt ist, so fallen die Polaren in bezug auf die übrigen zusammen.

Sie sei unbestimmt in bezug auf die zu λ_0 gehörige Gruppe, so ist

$$a_i+\lambda_0b_i = a_{i+1}+\lambda_0b_{i+1} = \cdots a_n+\lambda_0b_n = 0.$$

Daraus folgt die Proportionalität von $a_i, a_{i+1}, \ldots$; $b_i, b_{i+1}, \ldots$; $a_i+\lambda b_i,\ a_{i+1}+\lambda b_{i+1}, \ldots$.

Wenn ein Punkt, etwa A_1, der Grundgruppe auch der ersten

Polare eines (von ihm verschiedenen) Pols O angehört, so muß er für P eingesetzt der Relation II′ für $i = 1$ genügen:

$$\Sigma_{n-1,1} \; PA_h \cdot OA_{h'} = 0;$$

durch $PA_1 = 0$ reduziert sich die linke Seite auf ein Glied:

$$PA_2 \cdot PA_3 \dots PA_n \cdot OA_1 = 0,$$

woraus folgt, daß noch einer der Faktoren $PA_2, \dots PA_n$ null sein, also etwa A_2 noch mit $P \equiv A_1$ sich vereinigen muß. Und umgekehrt, wenn $A_1 \equiv A_2$, so ist PA_1 in allen Gliedern der Summe Faktor und $PA_1 = 0$ genügt, A_1 gehört zur ersten Polare. Ein Punkt der Grundgruppe (der nicht Pol ist) gehört dann und nur dann auch der ersten Polare an, wenn er Doppelpunkt der Grundgruppe ist.

682 Ist eine ebene Kurve oder eine Fläche n^{ter} Ordnung C^n, F^n gegeben, so wie ein Pol O in der Ebene von C^n, bzw. im Raum, so seien zu ihm auf allen Strahlen des Büschels oder Bündels je in bezug auf die n Schnittpunkte mit C^n oder F^n die i^{ten} Polargruppen konstruiert. Durch diese ∞^1 oder ∞^2 Gruppen entsteht eine Kurve oder Fläche von der Ordnung $n - i$; weil der Pol, der im allgemeinen nicht auf der gegebenen Kurve oder Fläche liegt und daher in keiner der ausgeschnittenen Gruppen sich befindet, auch keiner der Polargruppen angehört, so daß die Kurve oder Fläche von den genannten Strahlen je nur in der Polargruppe geschnitten wird.[1])

Es liegt hier ein Beweis „durch spezielle Lage" vor, aber an der Richtigkeit des auf diese Weise erhaltenen Ergebnisses hat wohl noch niemand gezweifelt; das in sich harmonische und abgerundete Gebäude der Polarentheorie zwingt zur Überzeugung von der Richtigkeit.

Überdies liefert die analytische Behandlung einen einwandfreien Beweis.[2])

Wir nennen diese Kurve oder Fläche $(n-i)^{\text{ter}}$ Ordnung die i^{te} Polare (Polarkurve, Polarfläche) des Pols O in bezug auf C^n oder F^n. Die letzte Polare heißt auch Polargerade oder gerade Polare, bzw. Polarebene.

Fällt der Pol auf C^n oder F^n, so gehört er jeder der ausgeschnittenen Gruppen und zugehörigen Polargruppen an, und jeder Strahl durch ihn schneidet die Polare in ihm und den $n - i - 1$ weiteren Punkte der Polargruppe.

Die erste Polare, in bezug auf eine C^3 oder F^3, für einen auf ihr gelegenen Punkt O entsteht durch die vierten harmonischen Punkte,

---

1) Z. B. Cremonas Introduzione Nr. 68.

2) Erwünscht bleibt ein derartiger synthetischer Beweis.

die ihm auf den verschiedenen Strahlen durch ihn je in bezug auf die beiden ferneren Schnitte zugeordnet sind.[1])

Ziehen wir die Tangente in einem solchen O an C^n oder eine der Tangenten an F^n, so bekommt die ausgeschnittene Grundgruppe in ihm einen Doppelpunkt, die letzte Polargruppe wird unbestimmt. Alle Punkte der Gerade, bzw. der von den Tangenten erfüllten Berührungsebene gehören zur letzten Polare.

Die letzte Polare eines Punktes der Grundkurve oder Grundfläche ist die Tangente bzw. Berührungsebene.

Der Doppelpunkt ist aber auch Doppelpunkt für alle vorangehenden Polargruppen.

Die Polaren, von der ersten bis zur $(n-2)^{\text{ten}}$, eines Punktes von C^n oder F^n berühren in ihm die Tangente, bzw. jede von den Tangenten, also die Berührungsebene.

Auf der Tangente eines Wendepunktes der C^n ist, weil ein dreifacher Punkt der Grundgruppe entsteht, schon die vorletzte Polargruppe unbestimmt; also zerfällt die vorletzte Polare (bei C^3 die erste) eines Wendepunktes in die Wendetangente und eine zweite Gerade. Bei der C^3 wird dann diese zweite Gerade der ersten Polare durch die vierten harmonischen Punkte erzeugt, und heißt deshalb die harmonische Polare des Wendepunktes. Und umgekehrt, ist für einen (einfachen) Punkt der C^n die vorletzte Polare ein Geradenpaar, von dessen Geraden dann eine durch ihn, als Punkt der Kurve, gehen muß, so ist auf dieser Gerade die vorletzte Polargruppe unbestimmt, der Punkt ein dreifacher Punkt der Grundgruppe, also ein Wendepunkt der Grundkurve.

Die beiden Geraden der vorletzten Polarfläche (2. Grades) eines Punktes der F^n, die sich in ihm schneiden, sind die dreipunktig berührenden Geraden (Inflexions-[2]) oder Haupttangenten) der Fläche.

Besitzt C^n oder F^n einen r-fachen Punkt O, so entstehen auf allen Strahlen durch ihn r-fache Punkte der ausgeschnittenen Gruppen; die Polargruppen des O, deren Ordinalzahl $i \leqq n-r$, haben ihn zum r-fachen Punkt, diejenigen, deren $i > n-r$, sind unbestimmt. Folglich ist er auch ein r-facher Punkt der entsprechenden Polaren, bzw. diese sind unbestimmt.

Die Polaren eines r-fachen Punktes der C^n oder F^n bis

---

1) Darauf läßt sich, indem diese Kurve oder Fläche aus einer Erzeugung der C^3 oder F^3 abgeleitet wird, die Polarentheorie für die C^3 oder F^3 begründen: Journal f. Math. Bd. 88 S. 222, Bd. 90 S. 86.

2) Dieser ältere Name ist besser als der seit etwa 1870 üblich gewordene Name „Haupttangenten", der früher, und richtiger, den Tangenten der Hauptnormalschnitte gegeben wurde, für welche jetzt ein bequemer Name fehlt. Der beste Name wäre wohl „Oskulanten".

zur $(n-r)^{\text{ten}}$ haben ihn ebenfalls zum r-fachen Punkt, die weiteren sind unbestimmt. Die letzte Polare eines Doppelpunktes ist unbestimmt.

Umgekehrt, wenn die $(n-r+1)^{\text{te}}$ Polare eines Punktes O als erste unbestimmt ist und infolge dessen auch die weiteren, so ist O ein r-facher Punkt der C^n oder F^n; denn diese Unbestimmtheit findet auf allen Strahlen durch ihn hinsichtlich der Polargruppen statt, die ausgeschnittenen Gruppen haben ihn also zum r-fachen Punkte, wodurch er es auch für C^n oder F^n wird.

Die $(n-r)^{\text{te}}$ Polare, die letzte, welche noch nicht unbestimmt ist, ist r^{ter} Ordnung. Wegen des r-fachen Punktes muß sie dann in r durch ihn gehende Geraden zerfallen, bzw. ein Kegel mit ihm als Spitze sein. Auf jenen Geraden oder auf jeder Kante dieses Kegels ist, weil jeder Punkt der Polare angehört, schon die $(n-r)^{\text{te}}$ Polargruppe des O unbestimmt; er ist ein $(r+1)$-facher Punkt der ausgeschnittenen Gruppe. Die r Geraden sind die Tangenten der C^n im r-fachen Punkt, der Kegel ist der Anschmiegungskegel der F^n in ihm, derjenige Kegel, dessen Kanten vor den übrigen Strahlen des Bündels dadurch sich auszeichnen, daß auf ihnen $r+1$ Schnittpunkte mit F^n in O sich vereinigen.

Es sei Π_i eine der vorangehenden Polaren von O, von der Ordinalzahl $i < n-r$ und der Ordnung $n-i$; die $(n-r)^{\text{te}}$ Polare Π_{n-r} von O in bezug auf C^n oder F^n ist für Π_i die $(n-i-r)^{\text{te}}$; die folgenden, ebenfalls dieselben für Π_i wie für C^n oder F^n, sind also auch für Π_i unbestimmt. Und die Π_{n-r} ist die letzte bestimmte für Π_i, also ist nicht nur O auch r-fach für Π_i, sondern er hat auch dieselben Tangenten oder denselben Anschmiegungskegel.

Die $(n-r)^{\text{te}}$ Polare eines r-fachen Punktes von C^n oder F^n, die letzte noch bestimmte, besteht aus den r Tangenten des Punktes oder seinem Anschmiegungskegel r^{ter} Ordnung. Der Punkt ist auf allen vorangehenden Polaren r-fach mit denselben Tangenten, demselben Anschmiegungskegel.

Wir fanden ferner: Durchläuft auf einer Gerade die Grundgruppe eine Involution n^{ten} Grades, so beschreibt die i^{te} Polare eines festen Pols O eine Involution $(n-i)^{\text{ten}}$ Grades. Daraus folgt: Wenn C^n oder F^n einen Büschel beschreibt, so tut dies auch die i^{te} Polare eines festen Pols O. Denn jeder Strahl des Büschels oder Bündels O schneidet den C^n- oder F^n-Büschel in einer Involution n^{ten} Grades, also das System der i^{ten} Polaren in einer Involution $(n-i)^{\text{ten}}$ Grades.

Auf einem Strahle nun, der von O nach einem gemeinsamen Punkte zweier von den Polaren geht, haben die beiden zugehörigen Gruppen einen Punkt gemeinsam, der dann allen Gruppen gemeinsam ist (Nr. 136).

Alle diese Büschel, für alle Lagen des Pols und für alle Ordinalzahlen, sind dem gegebenen Büschel und untereinander projektiv.

Auf einem Elemente des C^n- oder F^n-Büschels sei O Doppelpunkt, dann hat er in bezug auf die übrigen Elemente die nämliche letzte Polare. Denn in bezug auf jenes Element ist die letzte Polare unbestimmt, demnach auf allen Strahlen durch O diejenige in bezug auf die ausgeschnittene Gruppe; die übrigen haben denselben Punkt als letzte Polare von O.

Umgekehrt, wenn zwei Elemente eines C^n- oder F^n-Büschels für einen Pol O dieselbe letzte Polare haben, so muß für dasjenige Element des Büschels, welches durch O geht, dieser ein Doppelpunkt sein. In der Tat, auf jedem Strahle durch ihn hat er in bezug auf die aus diesem Elemente ausgeschnittene Punktgruppe eine unbestimmte letzte Polare, gehört ihr als Doppelpunkt an und ist daher doppelt auf der Kurve oder Fläche.

Wenn C^n oder F^n ein Netz oder ein Gebüsche durchläuft, so beschreibt die i^{te} Polare eines festen Pols gleichfalls ein Netz oder Gebüsche. Die fächerförmige Erzeugung jenes linearen Systems, die ja auf der Herstellung von Büscheln beruht, geht auf die Polaren über.

Aus der fächerförmigen Erzeugung folgern wir weiter:

Wenn in bezug auf drei unabhängige Kurven C_0, C_1, C_2 eines Kurvennetzes ein Pol O drei in O' konkurrente geraden Polaren hat, so gehen durch O' die geraden Polaren von O in bezug auf alle Kurven des Netzes. Ist nämlich C eine beliebige Kurve des Netzes und C' diejenige, in welcher der sie enthaltende Büschel aus C_0 den Büschel $C_1 C_2$ schneidet, so laufen die geraden Polaren von O in bezug auf C_1, C_2, C', die zu demselben Büschel gehören, in O' zusammen und dann wiederum diejenigen für $C' C_0 C$. Indem sich zu ∞^2 Kurven auf diese Weise nur ∞^1 gerade Polaren ergeben, erhalten wir Kurvenpaare, für welche O dieselbe gerade Polare hat, und für die durch O gehende Kurve ihres Büschels muß dieser Punkt dann Doppelpunkt sein.

Ein solcher Punkt O mit konkurrenten geraden Polaren für alle Kurven eines Netzes ist Doppelpunkt für eine Kurve desselben, und von ihr strahlen die Büschel aus, für deren Kurven er je dieselbe Polare hat.

Ebenso, wenn ein Punkt O in bezug auf drei unabhängige Flächen eines Netzes Polarebenen besitzt, welche in eine Gerade zusammenlaufen, so gehen auch seine Polarebenen in bezug auf die übrigen Flächen des Netzes durch diese Gerade, und er ist Doppelpunkt einer Fläche des Netzes, von welcher dann wiederum die Büschel fächerförmig ausgehen, für deren Elemente er je dieselbe Polarebene hat.

Und endlich wenn bei einem Flächengebüsche die Polarebenen eines Punktes O in bezug auf vier unabhängige Flächen desselben in O' konkurrent sind, so ist dieser Punkt allen Polarebenen des O gemeinsam und Doppelpunkt einer Fläche des Gebüsches.

683 Wir kehren zu einer einzelnen Grundkurve oder Grundfläche zurück.

Auf einer Tangente vom Pole O an C^n oder F^n ist der Berührungspunkt P Doppelpunkt der ausgeschnittenen Gruppe, also gehört er der ersten Polargruppe und der ersten Polare an. Die Berührungspunkte der Tangenten aus O an C^n oder F^n sind Schnittpunkte der Kurve C^n oder liegen auf der Schnittkurve der F^n mit der ersten Polare von O. Offenbar gilt dies auch für Doppelpunkte von C^n oder F^n; so daß eine etwaige Doppelkurve zur Schnittkurve gehört.[1]

Umgekehrt, wenn P der C^n oder F^n und der ersten Polare von O gemeinsam ist, ist er Doppelpunkt der aus C^n oder F^n ausgeschnittenen Gruppe (Nr. 681), also OP Tangente in P, wenn nicht P Doppelpunkt ist.

Wenn P der i^{ten} Polare von O angehört, so gehört O der $(n-i)^{\text{ten}}$ Polare von P an. Denn auf der Verbindungslinie OP gilt der analoge Satz für Polargruppen auf einer Gerade (Nr. 677).

Ist z. B. P ein Punkt der Schnittkurve der F^n mit der ersten Polare von O, so geht die Polarebene von P, d. h. seine Berührungsebene durch O, und liegt O in der Tangential- oder Polarebene von P, so befindet sich P auf der ersten Polare von O. Also ist die Schnittkurve der Grundfläche mit der ersten Polare eines Punktes O (oder derjenige Teil derselben, der nicht in eine etwaige Doppelkurve jener Fläche fällt) Ort der Berührungspunkte der von O kommenden Tangenten und Tangentialebenen; diese erzeugen und umhüllen den Kegel, welcher jene Kurve aus O projiziert.

Die ersten Polaren von C^n oder F^n für die sämtlichen Punkte der Ebene oder des Raumes zeichnen sich vor den übrigen dadurch aus, daß sie lineare Systeme bilden.

Wenn der Pol eine Gerade, eine Ebene (die Ebene), den Raum durchläuft, wie viele i^{te} Polaren gehen dann durch einen Punkt P, zwei Punkte P, P', drei Punkte P, P', P''? Wegen des obigen Satzes so viele, als die $(n-i)^{\text{te}}$ Polare von P mit der Gerade, die Schnittkurve der $(n-i)^{\text{ten}}$ Polaren von P und P' mit der Ebene Punkte gemein hat, endlich als es gemeinsame Punkte der $(n-i)^{\text{ten}}$ Polaren von P, P', P'' gibt, also i, i^2, i^3.

---

1) Von Punkten und Kurven höherer Vielfachheit möge abgesehen werden.

Wenn $i = 1$ ist, ist diese Zahl in allen drei Fällen 1; und das deutet auf die Linearität hin.

In der Tat, wenn O', O'' zwei Punkte der Gerade g sind, so schneiden sich ihre ersten Polaren in $(n-1)^2$ Punkten, bzw. in einer Kurve von der Ordnung $(n-1)^2$. Für jeden jener Punkte oder auf dieser Kurve geht die letzte Polare durch O', O'', ist also, im Falle der C^n, die Gerade $O'O'' = g$, und geht, im andern Falle, durch g. Jedenfalls liegt ein beliebiger weiterer Punkt O von g auf dieser letzten Polare; daher geht seine erste Polare durch P; d. h. durch alle $(n-1)^2$ Punkte, bzw. die Kurve von der Ordnung $(n-1)^2$.

Damit ist erstens erkannt, daß die ersten Polaren der Punkte einer Gerade einen Büschel bilden. Die Projektivität der Polreihe zur Involution der Polargruppen auf g geht über auf den Polarenbüschel, der sie einschneidet.

Ferner ergab sich, im Falle einer Grundkurve C^n, die Gerade g als letzte Polare aller $(n-1)^2$ Punkte, und umgekehrt, jeder Pol, der ihr etwa zukommt, muß auf der ersten Polare jedes ihrer Punkte liegen, also einer der gemeinsamen Punkte sein. Daher:

Jede Gerade der Ebene von C^n ist letzte Polare und zwar für $(n-1)^2$ Punkte, die Grundpunkte des Büschels der ersten Polaren der Punkte der Gerade.

Im Falle von F^n zeigte sich, daß die letzten Polaren aller Punkte der Grundkurve, von der Ordnung $(n-1)^2$, des Büschels der ersten Polaren der Punkte einer Gerade g durch diese gehen: wir können jene die Polarkurve der g in bezug auf F^n nennen.

Wenn weiter O', O'', O''' drei unabhängige Punkte der Ebene von C^n oder in einer beliebigen Ebene E sind, so liegt jeder Punkt O der Ebene auf einer Gerade aus O''' nach einem Punkte O_1 von $O'O''$, und folglich gehört die erste Polare von O zu dem Büschel derjenigen von O''' und O_1 und die von O_1 zu dem Büschel der ersten Polaren von O' und O'': es entsteht ein Netz.

Die ersten Polaren der Punkte einer Ebene (der Ebene) bilden ein Netz.

Die ersten Polaren der drei Punkte O', O'', O''' von E in bezug auf F^n schneiden sich in $(n-1)^3$ Punkten; die Polarebene eines jeden derselben geht durch O', O'', O''', fällt also mit E zusammen, woraus dann wieder folgt, daß die erste Polarebene eines beliebigen Punktes O von E durch jeden jener Punkte geht; so daß das Netz von neuem erkannt ist, aber nun auch seine Grundpunkte gefunden sind: sie haben sich als Pole der E herausgestellt.

In bezug auf F^n ist jede Ebene Polarebene von $(n-1)^3$ Polen; sie sind die Grundpunkte des Netzes der ersten Polaren der Punkte der Ebene.

Dreht sich die Ebene um eine Gerade, so bewegt sich die Gruppe der Pole auf der Polarkurve $(n-1)^{\text{2ter}}$ Ordnung dieser Gerade.

Ähnlich ergibt sich, daß die ersten Polarflächen aller Punkte des Raumes ein Gebüsche bilden.

Daraus, daß im Polfelde und im zugehörigen Polarennetze der Pol und die erste Polare gleichzeitig Punktreihen und Büschel beschreiben, welche projektiv sind, folgt, daß ein (das) Polfeld und das entsprechende Netz der ersten Polaren kollinear sind; und ebenso sind, in bezug auf eine F^n, der ganze Punktraum und das Gebüsche der ersten Polarflächen kollinear.

Diese durch erste Polaren gebildeten linearen Systeme sind die anschaulichsten, weil sie in dem Felde, bzw. dem Raume der Pole eine Abbildung haben, aus der ihre Eigenschaften unmittelbar abgelesen werden können: man sieht, wie der Verbindungsbüschel zweier Elemente eines solchen Systems ihm ganz angehört, welches Element zweien Büscheln eines Netzes gemeinsam ist, oder einem Büschel und einem Netze eines Gebüsches, usw.

Wenn eine Punktgruppe einen Doppelpunkt enthält, so gehört er zu der ersten Polare eines jeden Punktes der Gerade einfach (Nr. 681). Daraus folgt, daß ein etwaiger Doppelpunkt von C^n oder F^n allen ersten Polaren gemeinsam ist; es ergibt sich ein Polarennetz, bzw. Polarengebüsche mit Grundpunkt.

684 Aber auch die letzten Polaren führen zu einfachen Gebilden.

Wenn der Pol wiederum eine Gerade g durchläuft, so umhüllt die Polargerade in bezug auf C^n eine Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse, die Polarebene in bezug auf F^n einen Torsus $(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse; denn durch einen Punkt P gehen so viele, als Punkte O von g auf der ersten Polare von P liegen, also $n-1$ (Polarenveloppe, Polartorsus einer Gerade). Beide Gebilde sind, wegen der eindeutigen Beziehung auf die Punktreihe g, vom Geschlechte 0, unikursal.

Ein Punkt P auf dieser Kurve oder dieser abwickelbaren Fläche ist zwei unendlich nahen letzten Polaren von Punkten von g gemeinsam; also berührt seine erste Polare die g. In dem Büschel der ersten Polaren einer Gerade l berühren $2(n-2)$ die Gerade g, weil die Involution so viele Doppelpunkte hat (Nr. 136); folglich sind die Kurve und die abwickelbare Fläche von der Ordnung $2(n-2)$.

Wie bei einem Kegelschnitte möge die Polargerade eines unendlich fernen Punktes ein Durchmesser der Kurve C^n genannt werden und ein zweiter Durchmesser ihm konjugiert, wenn er durch den unendlich fernen Pol geht; es ist, wenn $n > 2$, im allgemeinen nicht auch der erste dem zweiten konjugiert. Die Durchmesser der C^n umhüllen also eine Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse; durch jeden Punkt gehen $n-1$, und jeder Durchmesser hat $n-1$ konjugierte. Diese Kurve besitzt, wegen des Geschlechts 0, $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$

Doppeltangenten. Es gibt also $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Durchmesser, von deren $(n-1)^2$ Polen zwei unendlich fern sind.

Auf der unendlich fernen Gerade entsteht durch diese Pole und zugehörigen Durchmesser eine Korrespondenz $[n-1, 1]$. Sie hat (Nr. 181) $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ involutorische Paare. Die Kurve C^n besitzt also, wenn $n > 2$, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Paare gegenseitig konjugierter Durchmesser. Die Koinzidenzen jener Korrespondenz sind die unendlich fernen Punkte der Kurve, die zugehörigen Durchmesser die Asymptoten. Die $[n-1, 1]$ hat ferner (Nr. 180) mit einer auf der unendlich fernen Gerade befindlichen Projektivität $2n$ Paare, mit einer Involution n Paare entsprechender Punkte gemein. Rührt jene von gleichen und gleichlaufenden Büscheln her und ist diese die absolute Involution, so haben wir:

Zur Richtung nach dem unendlich fernen Pole sind parallel oder normal n Durchmesser, einen andern gegebenen Winkel bilden mit ihr $2n$ Durchmesser.[1])

Wir lassen nun den Pol eine Ebene E durchlaufen, so umhüllt die Polarebene in bezug auf F^n eine Fläche von der Klasse $(n-1)^2$; denn durch eine Gerade gehen soviele, als deren Polarkurve $(n-1)^{2\text{ter}}$ Ordnung mit E Punkte gemein hat. Man nennt diese Fläche die Polarfläche der Ebene E in bezug auf F^n. Suchen wir, ihre Ordnung zu bestimmen.

P sei der Berührungspunkt dieser Fläche mit einer der einhüllenden Ebenen, der Polarebene ω von O in E. Wie die Nachbarpunkte eines Punktes auf einer Fläche in dessen Berührungsebene liegen, so gehen dual die benachbarten Tangentialebenen einer Berührungsebene durch deren Berührungspunkt. Diese durch P gehenden Nachbar-Tangentialebenen von ω haben Pole in E, welche dem O benachbart sind; alle diese Pole liegen auf der ersten Polarfläche von P und diese berührt E in O. Damit ist unsere Polarfläche von E auch Ort der Pole P, deren erste Polarflächen die E berühren. Die ersten Polarflächen der Punkte einer Gerade bilden einen Büschel; es gibt in demselben so viele Flächen, welche eine Ebene berühren, als der durch die Ebene ausgeschnittene Kurvenbüschel Kurven mit Doppelpunkt enthält.

Für einen Kurvenbüschel n^{ter} Ordnung werden wir in der nächsten Nummer beweisen, daß diese Zahl $3(n-1)^2$ ist. Hier ist die Ordnung des Flächen- und Kurvenbüschels $n-1$; also liegen auf einer Gerade $3(n-2)^2$ Pole P. Und die Polarfläche der Ebene E in bezug auf F^n hat die Ordnung $3(n-2)^2$.

Die Ebene E und diese Fläche befinden sich in eindeutiger Beziehung der Punkte jener und der Berührungsebenen, also auch der Punkte dieser.

1) Steiner, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 599.

Es wird Berührungsebenen dieser Fläche geben, die von ihren $(n-1)^3$ Polen nicht bloß einen in E haben, sondern zwei, sie sind dann doppelte Berührungsebenen.

Durchläuft der Pol die ganze Ebene von C^n, den ganzen Raum, so wird durch die letzte Polare das Strahlenfeld $(n-1)^2$-fach, der Ebenenraum $(n-1)^3$-fach erfüllt.

685 Es liegen zwei Kurven von den Ordnungen n_1, n_2 (in derselben Ebene) vor; wir suchen die Anzahl der Punkte auf, welche in bezug auf sie dieselbe Polargerade haben. Dann müssen sie gemeinsame Grundpunkte der beiden Büschel der ersten Polaren der Punkte der gemeinsamen Polargerade sein; in den beiden kollinearen Netzen der ersten Polaren, von den Ordnungen $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, in denen je die ersten Polaren, die zu demselben Pole, und die Polarenbüschel, die zu derselben Gerade gehören, entsprechend sind, gibt es (Nr. 672) $(n_1-1)^2 + (n_2-1)^2 + (n_1-1)(n_2-1)$ entsprechende Büschel mit gemeinsamem Grundpunkte. Also:

Zwei Kurven derselben Ebene von den Ordnungen n_1, n_2 besitzen

$$(n_1-1)^2 + (n_2-1)^2 + (n_1-1)(n_2-1)$$

Punkte, welche für sie dieselbe Polargerade haben.

Ist $n_1 = n_2 = n$, so bestimmen die beiden Kurven einen Büschel, ein solcher Punkt ist Doppelpunkt für eine Kurve des Büschels und hat für alle übrigen dieselbe Polargerade.

In einem Kurvenbüschel n^{ter} Ordnung gibt es $3(n-1)^2$ Kurven mit Doppelpunkt.[1]

Dies ergibt sich auch auf folgende Weise.

Die ersten Polaren dreier unabhängiger Punkte O', O'', O''' in bezug auf die Kurven des Büschels bilden drei projektive Büschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; also kommt es (Nr. 671) $3(n-1)^2$-mal vor, daß drei entsprechende Kurven derselben durch den nämlichen Punkt P gehen, dessen gerade Polare muß dann durch die drei Punkte O gehen, also wegen deren Lage unbestimmt sein; daher sind die $3(n-1)^2$ Punkte P für die zugehörigen Kurven des Büschels Doppelpunkte.

Für den Büschel, der von einer Ebene aus einem Flächenbüschel n^{ter} Ordnung ausgeschnitten wird, sind diese $3(n-1)^2$ Doppelpunkte Berührungspunkte der Ebene mit Flächen des Büschels.

Wir nehmen dieselbe Frage für zwei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2 vor. Ein Punkt, der in bezug auf sie die nämliche Polarebene hat, ist gemeinsamer Grundpunkt der beiden Netze erster Polaren, die zu der Ebene gehören. In den beiden kollinearen Gebüschen der ersten Polaren, von den Ordnungen $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, gibt es

1) In bezug auf Spezialfälle sehe man: Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven, deutsche Übersetzung, Anhang.

$(n_1 + n_2 - 2)[(n_1 - 1)^2 + (n_2 - 1)^2]$ Punkte, welche gemeinsame Grundpunkte entsprechender Netze sind (Nr. 674). Also:

Für zwei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2 gibt es

$$(n_1 + n_2 - 2)[(n_1 - 1)^2 + (n_2 - 1)^2]$$

Punkte, welche in bezug auf sie die nämliche Polarebene haben. Ist $n_1 = n_2 = n$, so haben wir:

In einem F^n-Büschel gibt es $4(n-1)^3$ Flächen mit einem Doppelpunkt; und ein solcher Doppelpunkt hat dann für alle übrigen Flächen des Büschels dieselbe Polarebene.

Die ersten Polaren von vier unabhängigen Punkten des Raums in bezug auf die Flächen des Büschels bilden vier projektive Flächenbüschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Bei solchen gibt es (Nr. 671) $4(n-1)^3$ Punkte, in welche vier entsprechende Flächen, erste Polaren je in bezug auf dieselbe Fläche des Büschels, zusammenlaufen; folglich geht die Polarebene eines solchen Punktes für die betreffende Fläche durch die vier Punkte, ist unbestimmt und der Punkt ist Doppelpunkt dieser Fläche.

Es seien gegeben drei Kurven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3. 686
Die Punkte, welche in bezug auf sie in einen Punkt O' konkurrente Polargeraden haben, sind je den ersten Polaren von O' gemeinsam. Bei den drei kollinearen Netzen der ersten Polaren, von den Ordnungen $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, $n_3 - 1$, in denen die demselben Pole zugehörigen ersten Polaren entsprechend sind, bilden die Punkte, welche drei entsprechenden Kurven gemeinsam sind, eine Kurve von der Ordnung $n_1 - 1 + n_2 - 1 + n_3 - 1$. (Nr. 672).

Für drei Kurven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 gibt es eine Kurve von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 - 3$, deren Punkte O in bezug auf sie gerade Polaren haben, welche in einen Punkt O' zusammenlaufen: die Jacobische Kurve der drei Kurven.[1])

Diese Ordnung ergibt sich auch folgendermaßen. Die Polargeraden der Punkte einer Gerade umhüllen drei eindeutig bezogene Kurven von den Klassen $n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1$; und bei solchen kommt es $[(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1)]$-mal vor, daß entsprechende Tangenten konkurrent sind (Nr. 177).

Wenn $n_1 = n_2 = n_3 = n$ ist, so konstituieren die Kurven ein Netz n^{ter} Ordnung, und die Polaren eines solchen Pols O in bezug auf alle Kurven des Netzes laufen in den O' zusammen. Die Punkte O sind die Doppelpunkte von Kurven des Netzes (Nr. 682)

1) So von Sylvester nach Jacobi genannt wegen dessen Untersuchung der Funktionaldeterminanten, weil ihre Gleichung eine verschwindende Funktionaldeterminante ist.

und ihre Kurve, die Jacobische Kurve des Netzes, hat die Ordnung $3(n-1)$.[1])

Die Ordnung $3(n-1)$ der Doppelpunkts-Kurve erhält man auch so. Die Netze der ersten Polaren von drei unabhängigen Punkten in bezug auf die Kurven des gegebenen Netzes bilden drei Netze $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche kollinear sind, indem je die drei zu derselben Kurve gehörigen Polaren und die zu demselben Kurvenbüschel gehörigen Polarenbüschel entsprechend sind. Also führen sie (Nr. 672) zu einer Kurve von der Ordnung $3(n-1)$, in deren Punkten sich entsprechende erste Polaren schneiden. Die gerade Polare eines solchen Punktes in bezug auf die betreffende Kurve muß durch die drei Pole gehen, also unbestimmt sein; daher ist der Punkt für diese Kurve Doppelpunkt.

Die Punkte O der Jacobischen Kurve eines Netzes haben noch eine dritte Eigenschaft: sie sind Berührungspunkte zwischen zwei Kurven des Netzes und dann allen Kurven ihres Büschels. Ein solcher Punkt O scheidet, wie jeder Punkt der Ebene, aus dem Netze einen Büschel, seine Polargeraden in bezug auf dessen Kurven sind die Tangenten in O; sie gehen durch O und durch O', fallen also in die Gerade OO' zusammen; folglich berühren sich in einem Punkte der Jacobischen Kurven alle durch ihn gehenden Kurven des Netzes; für diejenige Kurve, die ihn zum Doppelpunkte hat, gilt diese Berührung im eigentlichen Sinne nicht. Sie aber und irgend eine zweite Kurve des Büschels zeigen sofort, daß zwei Grundpunkte des Büschels unendlich nahe aneinander auf der Tangente der zweiten Kurve liegen und diese Tangente auch alle weitern Kurven des Büschels berührt. Umgekehrt, ein Punkt, in welchem zwei Kurven eines Büschels und dann alle sich berühren, ist für eine von ihnen Doppelpunkt: wir bestimmen sie durch einen Nachbarpunkt des Berührungspunktes auf einer von der Tangente verschiedenen Gerade, welche dadurch eine zweite Gerade wird, die mit der Kurve zwei in dem Punkte vereinigte Schnitte hat.

Ein Doppelpunkt einer Kurve des Netzes besitzt für diese und zwei beliebige andere Kurven desselben konkurrente Polargeraden, denn die unbestimmte in bezug auf die erste Kurve kann durch den Schnittpunkt der beiden andern Polargeraden gehend angenommen werden.

Ein Berührungspunkt zweier Kurven des Netzes besitzt für sie und eine beliebige dritte konkurrente Polargeraden, weil zwei von ihnen zusammenfallen.

Um auf andere Weise zu erkennen, daß auf einer Gerade l $3(n-1)$

1) Cremona hat in der Introduzione sie Hessesche Kurve des Netzes genannt, später aber Jacobische.

Berührungspunkte liegen, genügt es, zwei Büschel B_1, B_2 aus dem Netze zu nehmen und zu fragen, wie oft zwei (verschiedene) Kurven aus ihnen sich auf der Gerade berühren.

Der Ort der Berührungspunkte der Tangenten aus einem Punkte O an die Kurven von B_1 ist eine Kurve von der Ordnung $2n-1$, als Erzeugnis dieses Büschels und des zu ihm projektiven Büschels der ersten Polaren von O (Nr. 683). Ihre Schnitte mit l lehren, daß die Tangenten, welche die Kurven von B_1 in ihren Schnittpunkten mit l berühren, eine Kurve von der Klasse $2n-1$ umhüllen; l berührt $2(n-1)$ Kurven des Büschels, wie die eingeschnittene Involution lehrt, also ist sie so vielfache Tangente dieser Kurve, und von jedem ihrer Punkte kommt nur noch die eine Tangente, welche die durchgehende Kurve berührt. Die zu B_2 gehörige derartige Kurve hat mit jener, außer der gemeinsamen vielfachen Tangente, noch $4n-3$ Tangenten gemein; von ihnen berühren n die Kurve, welche den beiden Büscheln gemeinsam ist; die $3(n-1)$ übrigen sind solche, welche eine Kurve des einen und eine von ihr verschiedene Kurve des andern Büschels auf l berühren.

Die Jacobische Kurve des Kurvennetzes, in welchem ein Flächennetz von einer Ebene geschnitten wird, ist der Ort der Punkte, in denen die Ebene von Flächen des Netzes berührt wird; denn der Berührungspunkt ist stets Doppelpunkt der Schnittkurve.

Wenn ein Kurvennetz einen Grundpunkt P hat, so gibt es in ihm eine Kurve, für welche er Doppelpunkt ist; sie ist bestimmt durch zwei dem P in verschiedenen Richtungen unendlich nahe Punkte.

Für die Jacobische Kurve des Netzes ist P Doppelpunkt.

In der Tat, in bezug auf die genannte Kurve umhüllen die geraden Polaren der Punkte einer Gerade l, welche durch ihren Doppelpunkt P geht, eine Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Klasse, weil die erste Polare eines beliebigen Punktes in bezug auf sie durch P geht und der l noch in $n-2$ Punkten begegnet, deren gerade Polaren dann durch jenen Punkt gehen. Durch die Pole auf l und die Schnitte ihrer geraden Polaren entsteht auf l eine Korrespondenz $[n-2, 1]$, deren $n-1$ Koinzidenzen Punkte der Kurve sein müssen, also der Doppelpunkt P und die $n-2$ übrigen Schnitte. Dem P kommt zwar eine unbestimmte gerade Polare zu, aber im Kontinuum der Punkte von l wird ihm eine bestimmte Tangente dieser Polarenenveloppe zugeordnet, und zwar eine durch ihn gehende. Die Polarenenveloppen der Punkte von l in bezug auf zwei andere Kurven des Netzes, $(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse, sind eindeutig auf jene bezogen, und $[2(n-1)+n-2]$mal sind entsprechende Tangenten, die geraden Polaren desselben Punktes von l, konkurrent (Nr. 177), darunter auch die drei, welche von P herrühren, die oben genannte und die Tangenten der beiden andern Konstituenten in P. Es befinden sich daher $3n - 4 - 1$ von P verschiedene Punkte auf l, deren gerade Polaren konkurrent sind, also $3(n-1) - 2$ weitere Schnitte mit der Jacobischen Kurve; d. h. P ist doppelt auf ihr.[1])

Der Jacobischen Kurve von drei Kurven, erzeugt durch die Punkte O, ist die Kurve der Konkurrenzpunkte O' zugeordnet, die Steinersche Kurve der drei Kurven.[2])

Der Punkt O' ist ein solcher Punkt, von welchem die drei ersten Polaren den Punkt O gemeinsam haben. In den drei projektiven Büscheln der ersten Polaren der Punkte einer Gerade, von den Ordnungen $n_1 - 1, \ldots$, kommt es (Nr. 671)

$$\{(n_2 - 1)(n_3 - 1) + (n_3 - 1)(n_1 - 1) + (n_1 - 1)(n_2 - 1)\}\text{-}$$

mal vor, daß entsprechende, d. h. demselben Pole zugehörige Kurven einen Punkt gemeinsam haben.

Die Steinersche Kurve dreier Kurven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 ist von der Ordnung $(n_2 - 1)(n_3 - 1) + (n_3 - 1)(n_1 - 1) + (n_1 - 1)(n_2 - 1)$, und die Steinersche Kurve eines Netzes n^{ter} Ordnung von der Ordnung $3(n-1)^2$.

Diese beiden zu drei Kurven gehörigen Kurven von Jacobi und Steiner befinden sich in eindeutiger Beziehung ihrer Punkte.

687 Die Ordnungen $3(n-1)$ und $3(n-1)^2$ der zu einem Netze n^{ter} Ordnung gehörigen Kurven werden gleich, wenn $n = 2$, also beim Kegelschnitt-Netze. In diesem Falle sind die beiden Kurven vollständig identisch, weil dann erste und letzte Polare dasselbe bedeutet. Die Punkte O und O' sind völlig gleich definiert: die Polaren eines jeden von ihnen in bezug auf die Kegelschnitte des Netzes laufen in den andern zusammen; und statt einer eindeutigen Beziehung der Punkte zweier verschiedener Kurven erhalten wir eine eindeutige involutorische Beziehung der Punkte einer und derselben Kurve 3. Ordnung, der Jacobi-Steinerschen Kurve J^3 des Kegelschnitt-Netzes. Aber diese Kurve ist nicht unikursal und auf eine zweimalige Vereinigung von O und O' darf nicht geschlossen werden. Es gibt keinen sich selbst konjugierten, d. h. den sämtlichen Kurven des Netzes gemeinsamen Punkt.

Die Verbindungslinien der zugeordneten Punkte O, O' auf J^3, die zu einander konjugiert sind in bezug auf alle

1) Dieser Satz subsumiert sich dem allgemeinen Satz, daß ein Punkt P, der für alle Kurven des Netzes α-fach ist, für die Jacobische Kurve $(3\alpha - 1)$-fach ist.

2) Von Cremona so genannt, weil Steiner in der Abhandlung: Journal f. Math. 47 S. 1, Gesamm. Werke Bd. II S. 495 sie zuerst besprochen hat; Steiner nennt die beiden Kurven konjugierte Kernkurven.

Kegelschnitte des Netzes, führen zu einer ebenfalls dem Netze zugehörigen Kurve, seiner Cayleyschen Kurve.[1]) Sie ist zugleich die Enveloppe der Geraden der Geradenpaare des Netzes. Denn ein auf eine solche Verbindungslinie gelegter Grundpunkt eines Büschels des Netzes bedingt sofort einen zweiten auf ihr liegenden Grundpunkt desselben, nämlich den vierten harmonischen zu ihm in bezug auf die beiden verbundenen konjugierten Punkte; also gehört die Gerade zu einem Geradenpaare des Büschels und Netzes. Umgekehrt, jede Gerade eines Geradenpaares des Netzes wird von einem Büschel desselben, zu welchem dies Paar nicht gehört, in einer Involution geschnitten, deren Doppelpunkte in bezug auf die Kegelschnitte des Büschels und auf das Geradenpaar, also in bezug auf das Netz konjugiert sind.

Die Cayleysche Kurve ist 3. Klasse, weil durch jeden Punkt drei Geraden von Geradenpaaren des von ihm aus dem Netze ausgeschiedenen Büschels gehen. Die drei Tangenten aus einem Punkte O von J^3 sind die Gerade, die ihn mit dem konjugierten Punkt O' verbindet, und die beiden Geraden des Paares, für welches er Doppelpunkt ist. Die drei Tangenten in einem beliebigen Büschel sind doppelte Koinzidenzen der involutorischen Korrespondenz [3], auf deren entsprechenden Strahlen konjugierte Punkte liegen; die Zweifachheit ist leicht durch die Zeuthensche Regel (Nr. 160) zu bestätigen.

Jede Gerade OO' ist gemeinsame Tangente für jeden der beiden Büschel im Netze, deren Kegelschnitte sich in O, bzw. O' berühren. Die in O z. B. ist harmonisch zur Tangente der J^3 in diesem Punkte in bezug auf die Geraden des Paares (O); wie ein Büschel aus dem Netze mit zwei nahen Grundpunkten lehrt, wenn zur Grenze gegangen wird.

Die Cayleysche Kurve ist, wie oben gefunden, auch Ort der Geraden, welche vom Netze in einer Involution geschnitten werden; Doppelpunkte sind je die beiden verbundenen konjugierten Punkte O, O'. Durch jedes Paar der Involution geht ein Büschel des Netzes, und allen diesen Büscheln ist das Geradenpaar gemeinsam, zu welchem OO' gehört.

Nur die Tangenten der Cayleyschen Kurve sind Verbindungslinien von Büschel-Grundpunkten des Netzes, und jede trägt eine Involution von Grundpunkte-Paaren.

Bei Netzen höherer Ordnung enthält jede Gerade der Ebene eine endliche Anzahl von Grundpunkte-Paaren (vgl. z. B. Nr. 824).

---

1) Cayley, Philos. Transactions, Bd. 147 S. 415; Mathematical Papers Bd. 2 S. 391; von ihm selbst the Pippian genannt.

Betrachten wir einige Spezialfälle des Kegelschnitt-Netzes. Besitzt ein Netz einen Grundpunkt P, so ist er (Nr. 686) Doppelpunkt der Jacobischen Kurve. Er ist sich selbst konjugiert, und die involutorische Korrespondenz der konjugierten Punkte, nunmehr getragen von einer unikursalen Kurve, wird gewöhnliche Involution mit zwei Doppelpunkten, die jedoch im Doppelpunkte der Kurve übereinander liegen. Durch diesen sich selbst konjugierten Punkt P kommt sein ganzer Büschel zur Cayleyschen Kurve, geht ja auch von jedem Geradepaare des Netzes eine Gerade durch P.

Die Verbindungslinien der voneinander verschiedenen konjugierten Punkte bilden den zweiten Bestandteil der Cayleyschen Kurve, einen Kegelschnitt C_2.

Bekommt das Netz zwei Grundpunkte P, Q, so zerfällt die Jacobische Kurve, wegen der zwei Doppelpunkte, in die Gerade $PQ = o$ und einen durch P, Q gehenden Kegelschnitt J^2. Das Netz enthält (Nr. 670) zweierlei Geradenpaare: (P, Q)-Geradenpaare und o-Geradenpaare. Zwei Punkte, auf eine Gerade p durch P gelegt, bestimmen ein Geradenpaar der ersteren Art im Netze und eindeutig die andere Gerade q durch Q; und diese projektiven Büschel der p, q erzeugen den J^2, den Ort der Doppelpunkte der (P, Q)-Geradenpaare, während o der der o-Geradenpaare ist. Die involutorische Korrespondenz der in bezug auf das Netz konjugierten Punkte zerfällt ebenfalls: in eine Involution auf J^2 und eine auf o, beide mit P, Q, den sich selbst konjugierten Punkten, als Doppelpunkten. Das Zentrum der ersteren, der Pol von o in bezug auf J^2, sei O. Wenn U, V in dieser Involution gepaart sind, also konjugiert in bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes, so sind sie harmonisch zu den Schnitten ihrer Gerade mit (o, g), irgend einem o-Geradenpaare; also liegt der vierte harmonische Punkt in bezug auf U, V zu (o, UV) auf der g. Dieser vierte harmonische Punkt ist, da alle UV durch O gehen, dieser Punkt, der Pol von o nach J^2, auf dem U, V liegen. Der Punkt O, in den alle UV zusammenlaufen, ist auch gemeinsam allen zweiten Geraden g der o-Geradenpaare. Dieser Büschel O der Geraden g oder UV gehört zur Cayleyschen Kurve; sie wird vervollständigt durch die Büschel P, Q, deren Geraden die andern Geradenpaare bilden, und auch aufgefaßt werden können als die — unbestimmt gewordenen — Verbindungslinien der sich selbst konjugierten Punkte P, Q. Die ferneren Grundpunkte der Büschel im Netze, von denen jeder zwei (P, Q)- und ein o-Geradenpaar enthält, sind durch diese zweiten Geraden g verbunden und je harmonisch zu den auf g gelegenen konjugierten Punkten U, V, den Schnitten mit J^2, also konjugiert in bezug auf J^2.

Wenn drei Grundpunkte P, Q, R bei einem Netze vorhanden sind, so besteht die Jacobische Kurve aus den drei Verbindungslinien und die Cayleysche aus den drei Büscheln um sie.

Das Gewebe (schar-lineare System 2. Stufe), das sich auf ein Kegelschnitt-Netz stützt, (Nr. 450) hat dieselben beiden zugeordneten Kurven, aber in dualer Bedeutung. Die Geraden der Geradenpaare des Netzes sind konjugiert in bezug auf die Kurven des Gewebes; die Punkte der Punktepaare des Gewebes in bezug auf diejenigen des Netzes. So wird die Jacobische Kurve des Netzes, als Ort der Doppelpunkte der Geradenpaare und Träger der konjugierten Punkte, für das Gewebe Ort der Schnittpunkte konjugierter Geraden und Träger der Punkte der Punktepaare, also (dualisierte) Cayleysche Kurve, und die Cayleysche Kurve jenes, als Enveloppe der Geraden der Geradenpaare und der Verbindungslinien konjugierter Punkte, wird Träger der konjugierten Geraden und der Doppelgeraden der Punktepaare, also Jacobische Kurve des Gewebes: $J^3 \equiv C^3$, $C_3 \equiv J_3$.

Auf ein Netz mit einem Grundpunkte P stützt sich ein Gewebe mit einem Doppelpunkt (P, P) und infolgedessen mit einem einfach unendlichen System von Büschel-Scharen, für welche P Berührungspol ist (Nr. 670). Dual dazu ist ein Netz mit einer Doppelgerade (p, p) und einem System von Büschel-Scharen, für welche p Berührungssehne ist. Für jenes Netz hat J^3 den Punkt P zum Doppelpunkt und trägt die konjugierten Punkte, die Cayleysche Kurve C_3 zerfällt in den Büschel P und einen Kegelschnitt C_2, derartig, daß dieser von den Verbindungslinien der konjugierten Punkte umhüllt wird, von den Geraden eines Geradenpaars immer die eine durch P geht, die andere den C_2 berührt. Für das sich stützende Gewebe wird (P, C_2) die Jacobische Kurve, derartig, daß die Doppelgeraden der Punktepaare die C_2 umhüllen und von Geraden, die in bezug auf das Gewebe konjugiert sind, die eine durch P geht, die andere C_2 tangiert, so daß die Büschel 1. und 2. Klasse projektiv werden.

Für das duale Netz, am einfachsten konstituiert durch (p, p) und zwei Kegelschnitte, besteht also die Jacobische Kurve aus der Gerade p (als Ort des unbestimmten Doppelpunktes des Geradenpaars (p, p)) und einem Kegelschnitt J^2, der die konjugierten Punkte zu denen von p trägt in projektiver Beziehung. J^2 ist der Ort der Pole der Gerade p in bezug auf irgend einen (das Geradenpaar (p, p) nicht enthaltenden) Büschel des Netzes und damit der Ort der Berührungspole der Büschel-Scharen; jeder von diesen Polen hat die p zur Polare für den betreffenden Büschel und den Punkt, in dem sie von seiner Polare nach einem andern Kegelschnitte des Netzes geschnitten wird, zum konjugierten in bezug auf das Netz.

Die Kurve 3. Klasse, welche von den Verbindungslinien konjugierter Punkte auf p und J^2 eingehüllt wird und p zur Doppeltangente hat, ist die Cayleysche Kurve.

Auf p bilden die Berührungspunkte der Büschel-Scharen eine Involution; ihre Doppelpunkte sind konjugiert: die Schnittpunkte von p und J^2.

Sind in einem Netze zwei Doppelgeraden p, q vorhanden und zwei Systeme von Büschel-Scharen, so ist $R = pq$ Doppelpunkt der beiden Involutionen; r sei die Verbindungslinie der beiden andern Q, P. Am einfachsten konstituieren wir ein solches Netz durch (p, p), (q, q) und einen Kegelschnitt, in bezug auf welchen dann r die Polare von R ist. Jedem Punkte von r ist R konjugiert, einem Punkte von p projektiv ein bestimmter von q, in dem seine Polare nach dem Kegelschnitte die q schneidet. So ergibt sich als Cayleysche Kurve ein Kegelschnitt, welcher p und q tangiert, ergänzt durch den Büschel von R. Dieser entsteht durch die eine Involution bildenden Geradenpaare des Netzes, welche alle R zum Doppelpunkte haben; jene wird umhüllt von den Berührungstangenten der einen oder andern Büschel-Scharen; die Berührungspole laufen auf r. Die Jacobische Kurve setzt sich aus p, q, r zusammen, wobei p, q nur von den Geradenpaaren (p, p), (q, q) herrühren.

Das sich auf dieses Netz stützende Gewebe hat p, q zu Grundtangenten und ist dual zu einem Netze mit zwei Grundpunkten.

Für das in sich duale Netz-Gewebe mit drei Doppelgeraden p, q, r und drei Doppelpunkten P, Q, R besteht die Jacobische Kurve aus jenen Geraden und die Cayleysche aus diesen Punkten.

Im Anschluß an das Netz mit zwei Grundpunkten möge das Gebüsche G mit zwei Grundpunkten P, Q betrachtet werden. Der Jacobische Kegelschnitt J^2 eines jeden seiner ∞^3 Netze gehört dann ebenfalls zum Gebüsche. Jeder Punkt der Ebene ist Doppelpunkt eines (P, Q)-Geradenpaares des Gebüsches, und ein beliebiger Kegelschnitt desselben wird Jacobischer für dasjenige Netz, das durch drei Geradenpaare konstituiert wird, deren Doppelpunkte auf ihm liegen. Diese eindeutige Verwandtschaft zwischen den Kegelschnitten von G und seinen Netzen ist Polarkorrelation innerhalb des Gebüsches (oder geht in eine solche über, wenn wir die Abbildung von Nr. 670 benutzen).

Durchläuft nämlich J^2 in G einen Büschel, so gehören zu allen zugeordneten Netzen die beiden Geradenpaare, welche ihre Doppelpunkte in den ferneren Grundpunkten jenes Büschels haben, und ihr Büschel; also bewegen sich die Netze linear.

Die Involution der in bezug auf ein Netz konjugierten Punkte, die auf dem Jacobischen Kegelschnitte liegt, hat den Pol O von o

nach demselben zum Zentrum, und jedes Paar konjugierter Punkte scheidet aus dem Gebüsche das zugehörige Netz aus. Ist also K^2 ein Kegelschnitt des Netzes, so sei O' der Pol von o in bezug auf ihn, und A, A'; B, B' die Schnitte von OO' mit J^2, K^2, also A, A' harmonisch zu B, B'. Daher scheiden B, B' als konjugierte Punkte das Netz aus, zu welchem K^2 als Jacobischer Kegelschnitt gehört; und J^2, nach dem sie konjugiert sind, gehört zu ihm.

Wenn also K^2 ein Kegelschnitt des Netzes ist, zu dem J^2 als Jacobischer Kegelschnitt gehört, so findet auch das Umgekehrte statt: J^2 gehört zu dem Netze, für welches K^2 Jacobischer Kegelschnitt ist. Durchläuft also J^2 ein Netz, so dreht sich das korrespondierende Netz um den Kegelschnitt, der als Jacobischer zu jenem Netz gehört; und die Beziehung zwischen einem J^2 und seinem Netze ist involutorisch.

Bemerkenswert sind die Netze, welche zu den einen oder andern Geradenpaaren als J^2 gehören. Es sei (o, j) ein o-Geradenpaar; in jedem Büschel des zugehörigen Netzes liegen von zwei Geradenpaaren die Doppelpunkte auf j. Vom Viereck der Grundpunkte ist daher j eine Diagonale und der gegenüberliegende Diagonalpunkt ist der vierte harmonische Punkt U zu oj in bezug auf P und Q; demnach ist j die Polare von U für alle Kurven des Netzes. Durch U und irgend einen Punkt auf j als konjugierte Punkte ist das Netz bestimmt, zu welchem (o, j) als J^2 gehört. Ein solcher J^2 gehört nicht zu seinem Netze; woraus folgt, daß oben nicht Null-, sondern Polarkorrelation vorliegt.

Es sei (PR, QR) ein Geradenpaar der zweiten Art; zu ihm als J^2 gehört ein Netz mit zwei Büscheln von Geradenpaaren; für die eine ist PR feste Gerade, für die andere QR; jenes Geradenpaar ist ihnen gemeinsam. Konstituieren wir das Netz aus (PR, QR) und je einem andern aus den beiden Büscheln, so zeigt sich R als Grundpunkt. Die Netze im Gebüsche, welche einen dritten Grundpunkt besitzen, haben die (P, Q)-Geradenpaare, je mit diesem Grundpunkt als Doppelpunkt, zu J^2 und nehmen diese J^2 in sich auf.

Daher ist der Inbegriff der (P, Q)-Geradenpaare die Basis der Polarkorrelation, oder bei der im Bild-Punktraume entstehenden Polarkorrelation ist die Fläche 2. Grades, welche durch die Bildpunkte jener Paare erzeugt wird, die Basisfläche (Nr. 670).[1]

Im Raume wollen wir zunächst vier Flächen betrachten, weil 688

---

1) Vgl. A. Jopke, Synthetische Untersuchungen über lineare Kegelschnitt-Systeme 1., 2., 3. Stufe. Dissert. Breslau 1908.

da die Verhältnisse etwas einfacher liegen. Ihre Ordnungen seien $n_1, \dots n_4$.

Auf einer Gerade gibt es $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4$ Punkte O, deren Polarebenen einen Punkt O' gemeinsam haben. Denn die Polarebenen sämtlicher Punkte der Gerade bilden vier eindeutig bezogene Torsen von den Klassen $n_1 - 1, \dots$; nach Nr. 177 haben $[(n_1 - 1) + \cdots + (n_4 - 1)]$-mal entsprechende Berührungsebenen derselben einen Punkt gemein. Oder, da wiederum O den vier ersten Polaren von O' gemeinsam sein muß, so führen die vier kollinearen Gebüsche der ersten Polaren, von den Ordnungen $n_1 - 1, \dots$, (Nr. 675) zu einer Fläche, von der Ordnung $(n_1 - 1) + \dots$, solcher Punkte, welche vier entsprechenden, d. h. zu demselben Pole gehörigen Flächen dieser Gebüsche gemeinsam sind.

Damit haben wir die Jacobische Fläche von vier Flächen der Ordnungen $n_1, \dots n_4$, für deren Punkte O die Polarebenen in O' konkurrieren; ihre Ordnung ist $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4$.

Und die zugehörige Steinersche Fläche der Punkte O' hat die Ordnung

$$(n_2 - 1)(n_3 - 1)(n_4 - 1) + (n_3 - 1)(n_4 - 1)(n_1 - 1) \\ + (n_4 - 1)(n_1 - 1)(n_2 - 1) + (n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1);$$

denn so oft kommt es vor (Nr. 671), daß in den vier projektiven Büscheln der ersten Polaren der Punkte einer Gerade, von den Ordnungen $n_1 - 1, \dots$, vier entsprechende Flächen, demselben Pole O' auf der Gerade zugehörig, einen Punkt O gemeinsam haben.

Auch hier stehen diese beiden konjugierten Kernflächen in eindeutiger Beziehung ihrer Punkte O und O'.

Die ersten Polaren der Punkte O' einer Ebene bilden vier kollineare Flächennetze von der Ordnung $n_1 - 1, \dots$; nach Nr. 673 besteht dann eine Kurve von der Ordnung

$$(n_1 - 1)(n_2 - 1) + (n_1 - 1)(n_3 - 1) + \cdots + (n_3 - 1)(n_4 - 1),$$

deren Punkte entsprechenden Flächen gemeinsam sind.

Einem ebenen Schnitte der Steinerschen Fläche korrespondiert eine Kurve von der Ordnung $(n_1 - 1)(n_2 - 1) + \cdots + (n_3 - 1)(n_4 - 1)$ auf der Jacobischen Fläche. Daraus folgt, daß auch einem ebenen Schnitte auf dieser Fläche eine Kurve von derselben Ordnung auf jener entspricht.

Sind die vier Ordnungen gleich, so ergibt sich die Jacobische Fläche, von der Ordnung $4(n - 1)$, und die Steinersche, von der Ordnung $4(n - 1)^3$, eines Gebüsches n^{ter} Ordnung mit einer solchen eindeutigen Beziehung ihrer Punkte O, O', daß einem ebenen Schnitte der einen Fläche eine Kurve von der Ordnung $6(n - 1)^2$ auf der andern entspricht.

Die Jacobische Fläche ist (Nr. 682) der Ort der Doppelpunkte von Flächen des Gebüsches.

Im Falle $n = 2$ findet wiederum Vereinigung der beiden Flächen statt. Die involutorische eindeutige Verwandtschaft der in bezug auf alle Flächen des F^2-Gebüsches konjugierten Punkte O, O', welche von dieser Kegelspitzen-Fläche 4. Ordnung[1]) getragen wird, ist so beschaffen, daß einem ebenen Schnitte eine Raumkurve 6. Ordnung entspricht; wir wissen aus Nr. 673, daß es diejenige ist, welche mit einer kubischen Raumkurve den vollen Schnitt zweier kubischen Flächen bildet.

Die Verbindungslinien OO' konjugierter Punkte schneiden das Gebüsche 2. Ordnung in einer Involution mit den Doppelpunkten O, O'; zwei gepaarte Punkte sind zu demselben Netze gehörige Grundpunkte, und jeder Punkt von OO', als Grundpunkt eines Netzes des Gebüsches, fordert einen zweiten Grundpunkt auf OO'; die Gerade wird ∞^1-mal Verbindungslinie von zwei zusammengehörigen Grundpunkten. Weil zu jedem Punkte sieben andere Grundpunkte gehören, so gehen durch ihn sieben solche Verbindungslinien OO'. In einer Ebene liegen drei, weil das ausgeschnittene Kegelschnitt-Gebüsche soviele Paare konjugierter Punkte hat: die Punktepaare der sich stützenden Schar.

Bei einem Flächengebüsche 2. Ordnung bilden die Verbindungslinien der konjugierten Punkte — zugleich die Geraden, welche das Gebüsche in einer Involution schneiden — eine Kongruenz 7. Ordnung 3. Klasse.

Diese ist das eine Analogon der Cayleyschen Kurve beim Kurvennetze 2. Ordnung. Das andere ist der Komplex 6. Grades der Kanten der Kegel im Gebüsche; der Kegel aus einem Punkte projiziert die Kegelspitzen-Kurve 6. Ordnung des durch den Punkt ausgeschiedenen Netzes des Gebüsches (Nr. 235, 689).

Die Gebüsche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der ersten Polaren von vier unabhängigen Punkten in bezug auf die Flächen eines Gebüsches n^{ter} Ordnung sind kollinear; sie führen daher (Nr. 675) zu einer Fläche von der Ordnung $4(n-1)$ der Punkte, in denen entsprechende, d. h. zur nämlichen Fläche des Gebüsches gehörige erste Polaren sich schneiden. Die Polarebene eines solchen Schnittpunktes, in bezug auf die betreffende Fläche, muß dann durch die vier Pole gehen, also wegen deren Unabhängigkeit unbestimmt und der Punkt ein Doppelpunkt dieser Fläche sein.

Die Tangentialebenen eines Punktes O der Jacobischen Fläche an die Flächen des Netzes aus dem Gebüsche, welches er ausscheidet, gehen alle durch OO', welche damit gemeinsame Tangente in O wird; und jede Ebene dieses Büschels berührt ∞^1 Flächen des Netzes in O, welche einen Büschel bilden, der aus dem Netze durch einen Nach-

1) Die für den Fall eines Gebüsches mit 6 Grundpunkten schon in Nr. 235 gefunden wurde.

barpunkt von O in der Ebene, aber nicht auf OO' ausgeschieden wird. Zu allen diesen Büscheln gehört die Fläche des Gebüsches, welche O zum Doppelpunkte hat und durch zwei solche Nachbarpunkte, in verschiedenen Ebenen durch OO' gelegen, bestimmt wird.

Es mögen einige interessante Gebüsche erwähnt werden, deren Jacobische Fläche unbestimmt ist, bei denen also jeder Punkt des Raums konkurrente Polarebenen hat.

Das spezielle F^2-Gebüsche, dessen Flächen durch zwei windschiefe Geraden l_1, l_2 gehen, (d. h. durch drei Punkte auf jeder) hat diese Eigenschaft; der Konkurrenzpunkt O' zu irgend einem Punkte O ist derjenige, der ihm in der windschiefen Involution $[l_1, l_2]$ entspricht.

Ebenso kommt sie dem F^2-Gebüsche zu, dessen Flächen sich in zwei festen Punkten T_1, T_2 berühren. Ist O der beliebige Pol, so schneidet die Ebene OT_1T_2 aus den ∞^3 Flächen des Gebüsches nur die ∞^1 Kurven des Büschels sich in T_1, T_2 berührender Kegelschnitte aus; nach dem gemeinsamen Punkte O' der Polaren von O in bezug auf dieselben gehen die Polarebenen in bezug auf die Flächen.

Die Flächen 3. Ordnung, welche durch die ∞^3 Projektivitäten zwischen zwei festen Büscheln 1. und 2. Ordnung entstehen, bilden auch ein Gebüsche von dieser Beschaffenheit, weil die Ebene vom Pole O nach der Axe des Ebenenbüschels nur die Kegelschnitte eines Büschels ausschneidet.[1])

689 Wir kehren zu drei Flächen zurück, deren Ordnungen n_1, n_2, n_3 seien. Die Polarebenen eines beliebigen Punktes O in bezug auf sie haben einen Punkt O' gemeinsam, der so dem O eindeutig zugeordnet wird. In den O laufen dann die drei ersten Polaren von O' zusammen, und es sind daher dem Punkte O' $m = (n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)$ Punkte O zugeordnet. Die Haupteigenschaften dieser m-eindeutigen Verwandtschaft lassen sich leicht gewinnen. Es handelt sich um zwei Ordnungen. In den Raum (O) sei eine Ebene E, in den Raum (O') eine Gerade l' gelegt, wieviele korrespondierende Punkte O, O' inzidieren bzw. mit E und l', oder welches ist die Ordnung der Fläche der Punkte O', die den in E gelegenen Punkten O, und zugleich der Kurve der Punkte O, welche den Punkten O' von l' korrespondieren? Und wenn zweitens l in (O), E' in (O') gelegt wird, so haben wir zwei andere gleiche Ordnungen.

Die ersten Polaren der Punkte von l' bilden drei projektive Flächenbüschel von den Ordnungen $n_1 - 1, \ldots$; die Schnittpunkte entsprechender Flächen, je demselben Pole O' auf l' zugehörig, erzeugen (Nr. 671) eine Kurve von der Ordnung:

1) O. Töplitz, Über Systeme von Formen, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet. Diss. von Breslau 1905.

$$(n_2-1)(n_3-1)+(n_3-1)(n_1-1)+(n_1-1)(n_2-1).$$

Folglich entspricht einer Gerade l' des (O')-Raums eine Kurve von der Ordnung:

$$\mathfrak{N}=n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2-2(n_1+n_2+n_3)+3$$

im (O)-Raume und einer Ebene E dieses Raums eine Fläche der nämlichen Ordnung in jenem.

Entsprechende Flächen in den kollinearen Netzen der ersten Polaren der Punkte einer Ebene E', d. h. solche, die zu demselben Punkte gehören, erzeugen eine Fläche von der Ordnung $n_1+n_2+n_3-3$ (Nr. 672).

Oder die letzten Polaren der Punkte einer Gerade l in (O) umhüllen drei Torsen von den Klassen $n_1-1, \ldots$ und durch die Schnittpunkte entsprechender Polarebenen entsteht (Nr. 177) eine Kurve von der Ordnung $n_1+n_2+n_3-3$.

Demnach entspricht einer Ebene E' des Raumes (O') eine Fläche von der Ordnung:

$$\mathfrak{N}^*=n_1+n_2+n_3-3$$

im Raume (O) und einer Gerade l dieses Raumes eine Kurve von der nämlichen Ordnung in (O').

Die beiden Flächen in (O), welche zwei Ebenen E', E_1' korrespondieren, haben ersichtlich die Kurve von der Ordnung $\mathfrak{N}$ gemein, welche der Schnittlinie $\mathsf{E}'\mathsf{E}_1'$ entspricht; es verbleibt noch eine gemeinsame Kurve von der Ordnung:

$$\mathfrak{N}^{**}=\mathfrak{N}^{*2}-\mathfrak{N}=n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_2n_3+n_3n_1+n_1n_2-4(n_1+n_2+n_3)+6.$$

Jeder Punkt O derselben hat einen O' in E' und einen davon verschiedenen (nicht auf $\mathsf{E}'\mathsf{E}_1'$ gelegenen) O_1' in E_1'; d. h. seine drei Polarebenen gehen durch beide Punkte und daher durch die Verbindungsgerade $o'=O'O_1'$.

Diese Kurve von der Ordnung $\mathfrak{N}^{**}$ ist der Ort der Punkte O, deren Polarebenen in bezug auf die drei gegebenen Flächen in eine Gerade o' zusammenlaufen: die Jacobische Kurve der drei Flächen.

Ein solcher Punkt O muß dann gemeinsamer Punkt der Grundkurven der drei Büschel der ersten Polaren der Punkte von o' sein; und in den drei kollinearen Gebüschen der ersten Polaren gibt es (Nr. 674) eine Kurve von der Ordnung

$$(n_1-1)^2+(n_2-1)^2+(n_3-1)^2+(n_2-1)(n_3-1)+(n_3-1)(n_1-1) \\ +(n_1-1)(n_2-1)=\mathfrak{N}^{**},$$

in deren Punkten die Grundkurven dreier entsprechender Büschel, je derselben Gerade zugehörig, sich schneiden.

Weil jede Ebene E' in (O') eine solche Gerade o' schneidet, so geht die korrespondierende Fläche von der Ordnung $\mathfrak{N}^*$ je durch den Punkt O und die ganze Kurve $\mathfrak{N}^{**\text{ter}}$ Ordnung.

Nun ist noch zu ermitteln, welches der Grad der Regelfläche dieser Geraden o' ist; wir haben dazu zu untersuchen, wieviele Punkte O einen O' auf einer beliebigen Gerade l' und einen davon verschiedenen in einer beliebigen Ebene E' haben. Die zu l' und E' gehörige Kurve und Fläche von der Ordnung $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{N}^*$ haben $\mathfrak{N}\mathfrak{N}^*$ Punkte gemein, darunter die $(n_1-1)(n_2-1)(n_3-1)$ Punkte O, welche dem Schnittpunkte $l'\mathsf{E}'$ korrespondieren. Die Anzahl der übrigen beträgt:

$$\mathfrak{N}^{***} = n_2^2 n_3 + n_2 n_3^2 + n_3^2 n_1 + n_3 n_1^2 + n_1^2 n_2 + n_1 n_2^2 + 2 n_1 n_2 n_3$$
$$- 2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) - 6(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2) + 8(n_1 + n_2 + n_3) - 8;$$

dies sind die gesuchten.

Folglich ist die Regelfläche der Geraden o', welche den Punkten O der Jacobischen Kurve zugehören, vom Grade $\mathfrak{N}^{***}$.

Diese Zahl $\mathfrak{N}^{***}$ ist auch die Zahl, wie oft die einer Gerade l' korrespondierende Kurve von der Ordnung $\mathfrak{N}$, der veränderliche Schnitt zweier Flächen $\mathfrak{N}^{*\text{ter}}$ Ordnung, der Jacobischen Kurve, der festen Kurve dieser Flächen, mit der sich jene immer zu einem vollen Schnitte ergänzt, begegnet.

Sind die drei Ordnungen gleich, so daß die Flächen ein Netz n^{ter} Ordnung konstituieren, so ist die Anzahl der einem O' korrespondierenden Punkte O $(n-1)^3$. Ferner ist:

$$\mathfrak{N} = 3(n-1)^2, \quad \mathfrak{N}^* = 3(n-1), \quad \mathfrak{N}^{**} = 6(n-1)^2, \quad \mathfrak{N}^{***} = 8(n-1)^3.$$

Die Kurve von der Ordnung $6(n-1)^2$ ist die Kurve der Doppelpunkte des Netzes. Zu ihr führen wiederum vier beliebige Pole; sie liefern vier kollineare Netze von ersten Polaren, also $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und für solche gibt es eine Kurve $6(n-1)^{2\,\text{ter}}$ Ordnung (Nr. 673), in deren Punkte entsprechende erste Polaren zusammenlaufen. Ein derartiger Punkt, mit unbestimmter Polarebene für die betreffende Fläche des Netzes, wird Doppelpunkt derselben.

Die Ebene von einem Punkte O der Jacobischen Kurve des Netzes nach der zugehörigen Gerade o' ist Tangentialebene, in O, aller Flächen des Büschels, der durch diesen Punkt aus dem Netze ausgeschieden wird, und so zeigt sich die Jacobische Kurve wiederum als Ort der Berührungspunkte zwischen zwei Flächen des Netzes und dann allen Flächen ihres Büschels.

Bei $n = 2$ wird die Beziehung der Punkte O und O', die konjugiert in bezug auf ein Flächennetz 2. Ordnung sind, in beiderlei Sinn eindeutig, involutorisch und vom dritten Grade. Einer Gerade entspricht (nur) eine kubische Raumkurve, einer Ebene (nur) eine kubische Fläche. Die Jacobische Kurve ist 6. Ordnung: der Ort der Doppelpunkte im Flächennetze. Und die Fläche der Geraden, die ihren einzelnen Punkten konjugiert sind, ist 8. Grades. Auf die Beziehnung zwischen Kurve und Regelfläche kommen wir noch zurück.

Wenn in der Ebene bloß $n_2 = n_3 = n$, so haben wir die Jacobische 690 Kurve, von der Ordnung $2n + n_1 - 3$, eines Büschels von Kurven n^{ter} Ordnung und einer einzelnen Kurve von der Ordnung n_1; sie ist der Ort der Punkte, deren gerade Polare in bezug auf diese Kurve dem Polarenbüschel in bezug auf den Kurvenbüschel angehört, also mit derjenigen in bezug auf eine gewisse Kurve des Büschels identisch ist. Ihre Schnittpunkte mit der einzelnen Kurve führen zu Berührungen. Also:

Eine Kurve von der Ordnung n_1 (ohne vielfache Punkte) wird von $n_1(2n + n_1 - 3)$ Kurven eines Büschels n^{ter} Ordnung berührt. Ist $n_1 = 1$ oder 2, so haben wir $2(n-1)$, bzw. $2(2n-1)$ Berührungen. Da auf der Gerade, dem Kegelschnitt, unikursalen Kurven, durch den Büschel Involutionen n^{ten}, $2n^{\text{ten}}$ Grades eingeschnitten werden, so liefern uns deren Doppelpunkte auch die Berührungen.

Ebenso erhalten wir, wenn ein Flächenbüschel n^{ter} Ordnung und eine einzelne Fläche $n_1{}^{\text{ter}}$ Ordnung vorliegen, durch die Schnitte dieser mit der zu ihnen gehörigen Jacobischen Kurve $n_1[3n^2 + n_1{}^2 + 2nn_1 - 4(2n + n_1) + 6]$ Berührungen, bei $n_1 = 1$ $3(n-1)^2$, wie wir schon wissen (Nr. 685).

Man bestätigt, ähnlich wie eben, die Ordnung $6(n-1)^2$ der Kurven der Berührungspunkte zwischen Flächen eines Netzes n^{ter} Ordnung.

Bei vier Flächen sei zunächst $n_3 = n_4 = n$; wir schneiden die Jacobische Fläche, von der Ordnung $2n + n_1 + n_2 - 4$, mit der gemeinsamen Kurve der beiden ersten Flächen und erhalten, daß es in einem Büschel n^{ter} Ordnung $n_1 n_2 (2n + n_1 + n_2 - 4)$ Flächen gibt, welche die (allgemeine) Schnittkurve zweier Flächen $n_1{}^{\text{ter}}$ und $n_2{}^{\text{ter}}$ Ordnung tangieren.

Ist aber $n_2 = n_3 = n_4 = n$, so ergibt sich auf der Fläche $n_1{}^{\text{ter}}$ Ordnung eine Kurve von der Ordnung $n_1(3n + n_1 - 4)$, in deren Punkten sie von Flächen eines Netzes n^{ter} Ordnung berührt wird.

Es liege ein C^n-Büschel und eine Gerade l (in seiner Ebene) 691 vor; auf diese seien zwei Punkte O, O_1 gelegt. Die Büschel ihrer ersten Polaren in bezug auf die Kurven jenes Büschels erzeugen eine Kurve $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die Schnittpunkte entsprechender Polaren, je zu derselben Kurve des C^n-Büschels gehörig, also durch die Gruppen der $(n-1)^2$ Pole der Gerade l in bezug auf die Kurven des Büschels entsteht. Die Kurve ist so unabhängig von den Punkten O, O_1 geworden, beliebige zwei Punkte von l führen zu ihr. Sie wird daher noch von einem zweiten Systeme von Gruppen von je $(n-1)^2$ Punkten erfüllt, den Grundpunkten der Büschel der ersten Polaren der Punkte von l in bezug auf die Kurven des C^n-Büschels. Jeder Punkt auf der erhaltenen Kurve ist sowohl Pol der Gerade l in bezug auf eine gewisse Kurve C_x^n des Büschels, als auch Grundpunkt des Büschels der ersten Polaren eines gewissen Punktes Y auf l. Die erste Polare von Y für C_x^n schneidet zwei solche Gruppen aus verschiedenen Systemen aus; hält man Y fest, während C_x^n sich verändert, so entsteht das System der Gruppen der Pole; ist C_x^n fest, während Y sich bewegt, das System der Grundpunkte-Gruppen.

Liegen ein F^n-Büschel und eine Gerade l vor, so ergibt sich eine Fläche von der Ordnung $2(n-1)$. Sie ist mit zwei Systemen von Kurven $(n-1)^{2\text{ter}}$ Ordnung erfüllt: die einen sind die Polarkurven p_x der Gerade l in bezug auf die einzelnen F_x^n des Büschels, die andern die Grundkurven g_Y der Büschel der ersten Polaren der verschiedenen Punkte Y von l. Die erste Polare von Y in bezug auf F_x^n schneidet p_x und g_Y ein. Die beiden Kurven begegnen sich in $(n-1)^3$ Punkten, welche gemeinsam sind dieser Polare, der ersten Polare eines andern Punktes von l in bezug auf F_x^n und der ersten Polare des Y in bezug auf eine andere Fläche des Büschels.

Die p_x sind im allgemeinen alle gegen einander windschief, und ebenso die g_Y.

Im Falle $n=2$ handelt es sich um die beiden Regelscharen eines Hyperboloids; p_x ist die Polare der l in bezug auf die F_x^2, g_Y die Axe des Büschels der Polarebenen von Y in bezug auf die verschiedenen F_x^2.

Drei unabhängige Punkte, in eine Ebene E gelegt, führen zu drei projektiven Büscheln der ersten Polaren in bezug auf die F_x^n, und das Erzeugnis der Schnittpunkte entsprechender, die zu derselben Fläche F_x^n des F^n-Büschels gehören, der Pole der Ebene E in bezug auf die F_x^n ist eine Kurve $3(n-1)^{2\text{ter}}$ Ordnung (Nr. 671).

Der Ort der je $(n-1)^3$ Pole einer Ebene E in bezug auf die Flächen eines F^n-Büschels ist eine Kurve von der Ordnung $3(n-1)^2$. Ihre Schnitte mit E sind die Berührungspunkte der E mit Flächen des Büschels.

Für jede Ebene E durch die obige Gerade l kommt die Polkurve auf die dortige Fläche $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, auf welcher wir so ein drittes einfach unendliches Kurvensystem erhalten; denn wir brauchen nur zwei von drei Punkten auf l zu legen, den dritten beliebig in die Ebene, so wird die zu F_x^n gehörige Polgruppe eingeschnitten von der ersten Polare dieses dritten Punktes für F_x^n in die Polarkurve p_x, in der sich die beiden andern Polaren schneiden. Jede dieser Polkurven p_F schneidet daher eine p_x in $(n-1)^3$ Punkten, also eine g_Y, weil p_x und g_Y immer den vollen Schnitt der Fläche $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer ersten Polare bilden, in $(n-1)\cdot 3(n-1)^2-(n-1)^3=2(n-1)^3$ Punkten.

Auf dem obigen Polarhyperboloide ($n=2$) treffen diese Kurven 3. Ordnung die Geraden p_x einmal, die g_Y zweimal.

Bei einem F^n-Netze bilden die Gruppen der $(n-1)^3$ 692
Pole einer festen Ebene E in bezug auf die einzelnen Flächen eine Fläche von der Ordnung $3(n-1)$, die Polfläche der Ebene E in bezug auf das Netz; sie entsteht durch die kollinearen Bündel der ersten Polaren von drei unabhängigen Punkten der Ebene, die aber durch beliebig drei andere ersetzt werden können. Daraus folgt, daß die Gruppen der $(n-1)^3$ Grundpunkte der Netze der ersten Polaren der verschiedenen Punkte von E auch auf dieser Fläche liegen und sie so mit zwei doppelt unendlichen Systemen von $(n-1)^3$-punktigen Gruppen erfüllt ist. Wir erkennen unsere Fläche als die einer Ebene aus dem (O')-Raum zugeordnete von der Ordnung $\mathfrak{N}^*$ für $n_1=n_2=n_3=n$ (Nr. 689).

Sie enthält die ∞^2 Polkurven von E in bezug auf die Büschel des Netzes, von der Ordnung $3(n-1)^2$, aber noch ein zweites doppelt unendliches System von Kurven ebenfalls von der Ordnung $3(n-1)^2$, von denen jede der Ort der je $(n-1)^3$ Grundpunkte der Netze der ersten Polaren der verschiedenen Punkte einer Gerade der Ebene E ist, die Kurve von der Ordnung $\mathfrak{N}$, die einer Gerade in (O) korrespondiert.

Eine Kurve des einen Systems und eine des andern bilden den vollen Schnitt der Polfläche mit der Fläche von der Ordnung $2(n-1)$, welche dem Flächenbüschel und der Gerade zugehört, von denen die eine und die andere Kurve herrühren. Zwei Kurven des ersten Systems haben die $(n-1)^3$ Pole der Ebene E in bezug auf die Fläche des Netzes, in der die beiden Flächenbüschel sich schneiden, gemeinsam, zwei des zweiten die $(n-1)^3$ Grundpunkte des Netzes der ersten Polaren des Schnittpunktes der beiden Geraden. Betrachten wir eine aus dem ersten und zwei aus dem zweiten System, so wird die Fläche $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche jene mit der ersten von diesen verbindet, von der zweiten in $6(n-1)^3$ Punkten geschnitten; davon kommen $(n-1)^3$ auf die erste Kurve des zweiten Systems und daher $5(n-1)^3$ auf die aus dem ersten. Zwei Kurven aus verschiedenen Systemen schneiden sich in $5(n-1)^3$ Punkten.

Die Polfläche enthält die Kurve der Doppelpunkte von Flächen des Netzes, von der Ordnung $6(n-1)^2$ ($\mathfrak{N}^{**}$ in

Nr. 689); ein Doppelpunkt ist ja auch Pol jeder Ebene in bezug auf seine Fläche.

Diese Kurve begegnet den Kurven des zweiten Systems in $\mathfrak{N}^{***} = 8(n-1)^3$ Punkten (Nr. 689), einer Fläche $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in $12(n-1)^3$ Punkten, also einer Kurve des ersten Systems in $4(n-1)^3$ Punkten.

Für $n = 2$ ist die Fläche kubisch; die Punktgruppen bestehen nur aus einem Punkte; jeder Punkt der Fläche ist Pol der Ebene E für eine Fläche des Netzes und Grundpunkt des Bündels der Polarebenen für einen Punkt der Ebene. Wir haben zwei sich stützende Netze von kollinearen Ebenenbündeln, welche die Fläche erzeugen. Ein Bündel des einen Netzes besteht aus den Polarebenen der Punkte der Ebene E in bezug auf eine bestimmte Fläche des Netzes, einer des zweiten aus den Polarebenen eines bestimmten Punktes von E in bezug auf das F^2-Netz. Die beiden Kurvensysteme bestehen aus kubischen Raumkurven und sind die beiden uns bekannten Systeme, die mit zwei sich stützenden Netzen kollinearer Ebenenbündel verbunden sind (Nr. 380).

Die Doppelpunkte- oder Kegelspitzen-Kurve 6. Ordnung des F^2-Netzes trifft die Polkurve der Ebene E in bezug auf einen Büschel im F^2-Netze in den vier Kegelspitzen dieses Büschels, dagegen die Kurve der Scheitel der Polarebenenbündel (in bezug auf das F^2-Netz) der verschiedenen Punkte einer Gerade von E in acht Punkten.

Die Geraden o', in welche die Polarebenen der Kegelspitzen in bezug auf das F^2-Netz zusammenlaufen, erzeugen eine Regelfläche 8. Grades.

Der Satz, daß die Scheitel der Bündel der Polarebenen der verschiedenen Punkte einer Gerade l (in bezug auf das F^2-Netz) eine kubische Raumkurve bilden, kann so ausgesprochen werden, daß es auf l drei Punkte gibt, für welche dieser Scheitel in eine beliebig gegebene Ebene E fällt; das gilt auch für die Konkurrenzgerade o' der Polarebenen einer Kegelspitze O. Die drei Punkte auf ihr seien S_1, S_2, S_3 und die in E gelegenen Scheitel $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$. Nun gehen aber für alle Punkte von o', weil sie in allen Polarebenen von O liegen, die Polarebenen für alle F^2 des Netzes durch O, also die von S_1, S_2, S_3 durch O und bzw. $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$, daher durch $O\mathfrak{S}_1$, $O\mathfrak{S}_2$, $O\mathfrak{S}_3$. Das heißt, die drei Punkte S auf o' sind Kegelspitzen O_1, O_2, O_3 und die eben genannten Geraden durch O (welche die zu o' gehörige kubische Raumkurve zusammensetzen) sind die zugehörigen Geraden o'_1, o'_2, o'_3.

Zwischen der Kegelspitzen-Kurve 6. Ordnung eines F^2-Netzes und der zugehörigen Regelfläche 8. Grades besteht daher die Beziehung, daß durch jeden Punkt O der ersteren drei Erzeugenden der letzteren gehen und auf jeder Erzeugenden o' dieser drei Punkte von jener liegen, und zwar derartig, daß, wenn O und o' zusammengehören, auch zu den drei Punkten O_1, O_2, O_3 auf o' die drei Geraden o'_1, o'_2, o'_3 durch O gehören.[1])

Nun wird es notwendig, den Begriff der gemischten Polaren 693
und den Fundamentalsatz über dieselben heranzuziehen, daß nämlich die erste Polare von O', genommen nach der von O, identisch ist mit der ersten Polare von O, genommen nach der von O'. Der synthetische Beweis dieses Satzes ist nicht leicht; in der Introduzione gab Cremona einen ungenügenden (Nr. 69). Der Anhang der deutschen Übersetzung bringt einen besseren (S. 258)[2]), zu dem sich dann in den Preliminari Nr. 77 (Grundzüge Nr. 83) der analoge räumliche Beweis findet. Man wird auch bei diesen Beweisen, an deren Herstellung Hirst mitgeholfen hat, den Wunsch nach größerer Einfachheit haben, den Cremona gewiß selbst gehabt hat. Ich möchte die Beweise, die auch etwas zu sehr aus dem Rahmen meiner Betrachtungen heraustreten, hier nicht reproduzieren, sondern mich mit dem Hinweise auf Cremonas Schriften begnügen.

Aus diesem Fundamentalsatze folgt dann unmittelbar, weil ja die i^{te} Polare das Ergebnis der i-maligen Bildung einer ersten Polare ist, daß die k^{te} Polare von O', genommen nach der i^{ten} von O, identisch ist mit der i^{ten} Polare von O, genommen nach der k^{ten} Polare von O'.

Die Kurve C^n oder die Fläche F^n habe einen r-fachen 694
Punkt Q $(r > 1)$, so ist dessen $(n - r + 1)^{\text{te}}$ Polare unbestimmt (Nr. 682) und keine frühere; also ist es auch die i^{te} Polare $(i < r - 1)$ von O nach dieser; mithin ist auch die $(n - r + 1)^{\text{te}}$ Polare von Q nach der i^{ten} Polare von O unbestimmt und keine frühere; da letztere $(n - i)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, so nennen wir jene die $[n - i - (r - i) + 1]^{\text{te}}$. Aus dieser Unbestimmtheit folgt, daß Q ein $(r - i)$-facher Punkt der i^{ten} Polare von O ist.

Daß auf dem Strahle OQ in Q sich $r - i$ Schnitte mit der i^{ten} Polare vereinigen $(i < r)$, wissen wir aus Nr. 681; ist also $i = r - 1$, so ergibt sich Q als einfachen Punkt der $(r - 1)^{\text{ten}}$ Polare von O; aber auf die $(r - i)$-Fachheit kann aus jenem Ergebnisse noch nicht geschlossen werden, wenn $r - i > 1$ ist.

Ist Q r-facher Punkt von C^n oder F^n und $i < n - r$, so hat (Nr. 682) die i^{te} Polare von Q auch diesen Punkt zum r-fachen, mit denselben Tangenten oder demselben Anschmiegungskegel.

Für Q als $(r - i)$-fachen Punkt auf der i^{ten} Polare von O $(i < r)$ besteht dann, weil diese Polare die Ordnung $n - i$ hat, die $[(n - i) - (r - i)]^{\text{te}}$ oder $(n - r)^{\text{te}}$ Polare von Q in bezug auf sie aus den

1) Journal f. Math. Bd. 70 S. 212.

2) Vorher erschienen: Annali di Matematica Ser. I Bd 6 S. 193.

$r-i$ Tangenten oder dem Anschmiegungskegel $(r-i)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese Polare ist aber identisch mit der i^{ten} Polare von O nach der $(n-r)^{\text{ten}}$ Polare von Q für C^n oder F^n, d. i. nach den r Tangenten von C^n oder dem Anschmiegungskegel r^{ter} Ordnung von F^n in Q. Ist beispielsweise Q Doppelpunkt von F^n, also einfach auf der ersten Polare von O, so ist die Tangentialebene dieser Polare in Q die Polarebene von O in bezug auf den Anschmiegungskegel zweiter Ordnung von F^n in Q.

Wenn die i^{te} Polare von O nach C^n oder F^n in O' einen Doppelpunkt hat, ohne daß O' ein $(i+2)$-facher Punkt von C^n oder F^n ist, so ist O Doppelpunkt der $(n-i-1)^{\text{ten}}$ Polare von O'.

In bezug auf die i^{te} Polare von O sei die letzte oder $(n-i-1)^{\text{te}}$ Polare von O' gebildet; sie ist unbestimmt, weil O' auf jener doppelt ist. Mit ihr identisch ist die i^{te} Polare von O, genommen nach der $(n-i-1)^{\text{ten}}$ Polare von O' in bezug auf C^n oder F^n. Letztere Polare $(i+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist nicht unbestimmt, weil O' nicht $(i+2)$-facher Punkt der C^n oder F^n ist. Folglich ist die i^{te} Polare von O in bezug auf sie, also die letzte Polare unbestimmt; demnach ist O Doppelpunkt der $(n-i-1)^{\text{ten}}$ Polare von O'.

Daher ist der Ort der Pole, deren i^{te} Polaren einen Doppelpunkt besitzen, — eine Kurve oder Fläche, weil das eine einfache Bedingung ist — zugleich der Ort der Doppelpunkte von $(n-i-1)^{\text{ten}}$ Polaren, und der Ort jener Doppelpunkte ist auch der Ort der Pole dieser Polaren. Die beiden Ordinalzahlen haben die Summe $n-1$; wir heben den Fall hervor, wo die beiden Summanden $n-2$ und 1 sind. Die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare ist 2. Ordnung und ein Doppelpunkt auf ihr verwandelt sie in ein Geradenpaar, bzw. einen Kegel 2. Ordnung. Wir haben daher zwei Oerter:

1. Der eine ist der Ort der Pole O, deren vorletzte Polaren Geradenpaare bzw. Kegel sind, und zugleich der Ort der (nicht in vielfache Punkte der Basis fallenden) Doppelpunkte von ersten Polaren;

2. der andere ist der Ort der Pole O' dieser ersten Polaren, zugleich der Ort der Doppelpunkte jener Geradenpaare oder Kegel.

Der erstere wird die Hessesche[1]), der letztere die Steinersche Kurve oder Fläche von C^n oder F^n genannt; man nennt sie auch die konjugierten Kernkurven oder Kernflächen der Basis. Sie sind eindeutig auf einander bezogen.

Ist $n=3$, so ist die vorletzte Polare zugleich die erste, und beide Kurven sind gleichartig definiert, fallen also inein-

1) Weil die linke Seite ihrer Gleichung diejenige Determinante ist, welche nach Hesse benannt wird.

ander (Hesse-Steinersche Kernkurve oder -fläche der C^3, F^3), und die Punkte O, O', von denen jeder auf dieselbe Weise aus dem andern entsteht, (jeder ist Pol einer ersten Polare, die im andern einen Doppelpunkt hat) bilden auf dieser Kurve oder Fläche eine eindeutige involutorische Verwandtschaft.

Die Hessesche Kurve oder Fläche ist der Ort der Doppelpunkte in dem Netze oder Gebüsche der ersten Polaren, also die Jacobische Kurve oder Fläche dieses Netzes, Gebüsches; weil es $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, so ist dieser Ort von der Ordnung $3(n-2)$, bzw. $4(n-2)$ (Nr. 686, 688). Die Pole zu diesen ersten Polaren mit Doppelpunkten erfüllen die Steinersche Kurve oder Fläche; in dem Büschel der ersten Polaren der Punkte einer Gerade gibt es $3(n-2)^2$ Kurven, bzw. $4(n-2)^3$ Flächen mit Doppelpunkt; also ist dies die Ordnung der Steinerschen Kurve bzw. Fläche.

Somit haben die Hessesche und die Steinersche Kurve einer C^n die Ordnungen $3(n-2)$, $3(n-2)^2$, die Hessesche und die Steinersche Fläche einer F^n die Ordnungen $4(n-2)$, $4(n-2)^3$.[1])

Die Hessesche Kurve, als Ort der Punkte, deren vorletzte Polare ein Geradenpaar ist, schneidet in die Grundkurve, außer vielfachen Punkten, die Wendepunkte ein (Nr. 682); die allgemeine C^n hat daher $3n(n-2)$ Wendepunkte. Und die Formel $r' = 3n(n-2) - 6d - 8r$ (Nr. 162) zeigt, daß jeder Doppelpunkt 6, jeder Rückkehrpunkt 8 Schnitte der Grundkurve mit der Hesseschen Kurve absorbiert.

Der Schnitt einer F^n mit ihrer Hesseschen Fläche, von der Ordnung $4n(n-2)$, ist der Ort der Punkte der F^n, deren vorletzte Polaren Kegel sind; da je die Tangentialebene aus dem Kegel zwei vereinigte Geraden ausschneidet, so sind die Punkte dieser Kurve solche mit vereinigten Haupttangenten (Nr. 682) oder deren Berührungsebenen je in einer Kurve schneiden, für welche der Berührungspunkt Rückkehrpunkt ist, sogenannte parabolische Punkte; und die Kurve wird die parabolische Kurve der Fläche genannt.

Der Schnitt, von der Ordnung $4n(n-2)$, der Grundfläche mit der Hesseschen Fläche ist die parabolische Kurve der ersteren.

Die Hessesche Kurve oder Fläche, als Jacobische Kurve oder Fläche des Netzes, des Gebüsches der ersten Polaren, hat (Nr. 686, 688) die Eigenschaft, daß die letzten Polaren eines jeden ihrer Punkte O in bezug auf alle ersten Polaren in einen Punkt zusammenlaufen. Das ist gerade der dem O korrespondierende Punkt O' auf der Steinerschen Kurve oder Fläche. In der Tat, die vorletzte Polare von O ist ein Geradenpaar bzw. ein Kegel 2. Grades mit dem Doppel-

1) Steiner, a. in Nr. 687 a. O.

punkt O', folglich geht die erste (und einzige) Polare des beliebigen Punktes X in bezug auf dieses Geradenpaar, diesen Kegel durch O'. Mit dieser Polare ist aber identisch die $(n-2)^{\text{te}}$ Polare von O nach der ersten Polare von X, d. h. die letzte Polare von O in bezug auf diese erste Polare. Also laufen, wie behauptet, die letzten Polaren des O in bezug auf alle ersten Polaren durch O'. Somit ist die Steinersche Kurve oder Fläche von C^n, F^n auch die Steinersche Kurve oder Fläche des Netzes, Gebüsches $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der ersten Polaren (Nr. 687, 688), und die Ordnung $3(n-2)^2$, $4(n-2)^3$ ergibt sich auch daraus. Aber die Benennung ist ungleichmäßig; in dem einen Fall ist für den Spezialfall ein neuer Name eingeführt worden, im andern nicht.[1])

695 Für die zweite Polare P von O in bezug auf drei Punkte A_1, A_2, A_3 einer Gerade gilt (Nr. 677):

$$\frac{3}{OP} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OA_3}.$$

Ein Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ fassen wir als Kurve 3. Ordnung auf; O sei sein Schwerpunkt und A_1, A_2, A_3 die Schnitte von Strahlen durch ihn mit den Seiten; so erkennt man auf sechs Strahlen sofort:

$$\frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OA_3} = 0,$$

nämlich auf den Strahlen nach den Ecken und auf den Parallelen zu den Seiten; daher ist auf ihnen P unendlich fern. Und die unendlich ferne Gerade ist die gerade Polare von O nach der Kurve.

Nun ist diese Gerade die harmonische Polare des Schwerpunktes in bezug auf das Dreieck (Nr. 52). Da wir hierbei durchweg mit projektiven Eigenschaften zu tun haben, können wir schließen:

Die harmonische Polare eines Punktes in bezug auf ein Dreiseit ist seine letzte Polare in bezug auf dasselbe als ausgeartete Kurve 3. Ordnung.

Bei einem Tetraeder kann die Relation:

$$\frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OA_3} + \frac{1}{OA_4} = 0$$

ohne weiteres erkannt werden: für die Strahlen aus dem Schwerpunkt O welche nach den Ecken gehen, welche Gegenkanten treffen, und welche zu einer Seitenfläche parallel sind. Also ist die harmonische Ebene eines Punktes in bezug auf ein Tetraeder (Nr. 55) die letzte Polare desselben in bezug auf dasselbe als Fläche 4. Ordnung.

---

1) Für weitere Untersuchungen über die Hessesche Fläche vgl. Cremonas Preisschrift über die Flächen 3. Ordnung (Journal f. Math. Bd. 68 S. 1) Kap. III usw. oder: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen II. Teil Kap. 9 ff. Dazu eine Bemerkung von mir: Journal f. Math. Bd. 134 S. 288.

Die ersten Polaren gehen durch die Ecken des Dreiseits als Doppelpunkte der Kurve bzw. durch die Kanten des Tetraeders als Doppelkurven der Fläche. Die Kegelschnitte durch jene Punkte bilden das Netz der ersten Polaren, und jeder Büschel desselben hat nur einen beweglichen Grundpunkt, den einzigen Pol, den die Gerade der Pole in diesem Falle hat, wie ja jede Gerade nur einen harmonischen Pol besitzt.

Die Flächen 3. Ordnung durch die Kanten des Tetraeders haben, weil durch jede Ecke drei der Fläche angehörige Geraden gehen, welche nicht in einer Ebene liegen, die Ecken zu Doppelpunkten und bilden ein Gebüsche (bestimmt durch die vier Ecken und zwei weitere Punkte auf jeder Kante), eben das Gebüsche der ersten Polaren. Jede zwei dieser Flächen haben, außer den Kanten, noch eine kubische Raumkurve gemein, welche durch die vier Doppelpunkte geht und der veränderliche Bestandteil der Grundkurve ihres Büschels ist. Einer dritten Fläche des Gebüsches begegnet sie, außer in jenen Punkten, noch in einem Punkte, dem einzigen beweglichen Grundpunkt des Netzes der drei Flächen, oder dem einzigen Pol der Ebene, welche von den Polen dieser ersten Polaren erfüllt wird, dem einzigen harmonischen Pol, den sie in bezug auf das Tetraeder hat.

Es sei dem Dreieck $A_1A_2A_3 \equiv a_1a_2a_3$ ein Kegelschnitt K^2 umgeschrieben; weil die erste Polare eines Punktes, in bezug auf das Dreiseit, durch die Ecken geht und K^2 nur noch einmal trifft, so geht von den zweiten Polaren der Punkte dieser Kurve nur eine durch den Punkt; sie bilden einen Büschel P. Ein beliebiger Kegelschnitt würde zu einer Kurve 4. Klasse führen; hier aber lösen sich die Büschel um die Ecken ab; von jedem bleibt, im Kontinuum der geraden Polaren der Punkte von K^2, ein Strahl in jenem Büschel P. Die Konstruktion der harmonischen Polare, zunächst angewandt auf den Punkt, welcher auf K^2 der Ecke benachbart ist, lehrt, daß sie der vierte harmonische Strahl ist zu der Tangente von K^2 in bezug auf die beiden Seiten des Dreiseits. Der zu A_1 gehörige geht also durch den vierten harmonischen Punkt A_1' auf K^2 zu A_1 in bezug auf A_2, A_3. Nun bilden, wenn wir K^2 als Träger annehmen, A_1, A_1' die erste Polargruppe des A_1 in bezug auf das Tripel $A_1A_2A_3$. Die ersten Polargruppen aller Punkte von K^2 erzeugen eine Involution; drei Paare derselben A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' werden durch die geraden oder harmonischen Polaren in bezug auf $a_1a_2a_3$ eingeschnitten; also ist P das Zentrum der Involution.

Die ersten Polaren der Punkte eines Kegelschnitts in bezug auf ein Tripel von Punkten, das von ihm getragen wird, werden durch die geraden Polaren der Punkte in bezug auf das Dreiseit ihrer Verbindungslinien eingeschnitten.

Dem Tetraeder $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \equiv A_1A_2A_3A_4$ sei eine kubische Raumkurve R^3 umgeschrieben. Auf der ersten Polare eines beliebigen Punktes in bezug auf dies Vierflach als Fläche 4. Ordnung sind die vier Ecken, als dreifache Punkte derselben, doppelt; und sie schneidet R^3 noch einmal. Daraus schließen wir, daß die Polarebenen der Punkte von R^3 nach $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ einen Büschel erzeugen. Die ersten Polargruppen derselben Punkte in bezug auf das Quadrupel $A_1A_2A_3A_4$ bilden eine Involution und werden also durch die Ebenen eines Büschels eingeschnitten. Er ergibt sich mit dem vorhinigen identisch, wenn für $A_1, \ldots$ als Pole diese Identität nachgewiesen wird. Die erste Polargruppe von A_1 besteht aus A_1 und den beiden Punkten der ersten Polargruppe von A_1 nach $A_2A_3A_4$; projizieren wir diese aus A_1 auf die Ebene α_1, so wird sie die erste Polargruppe der Spur der Tangente an R^3 in A_1 in bezug auf die $A_1A_2A_3$ als Tripel auf auf einem Kegelschnitte; also liegen die beiden Punkte in den Schnitten der harmonischen Polare der Spur in bezug auf das Dreiseit. Nach dieser harmonischen Polare kommt aber von A_1 die im Kontinuum der Punkte von R^3 sich ergebende harmonische Polarebene von A_1, die Polarebene von A_1 nach der Fläche $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$; also enthält sie die vollständige Polargruppe des A_1 nach $A_1A_2A_3A_4$.

Die ersten Polargruppen, in bezug auf ein Quadrupel auf einer kubischen Raumkurve, für die Punkte dieser Kurve werden durch die Polarebenen derselben in bezug auf die Fläche 4. Ordnung eingeschnitten, welche aus den vier Verbindungsebenen besteht.[1])

§ 100. Ausartungen der räumlichen Korrelation und Kollineation.

696 Zwei korrelative Räume mit endlichen Mittelpunkten kann man (Nr. 542) so legen, daß sie einen Polarraum bilden. Eine parabolische Korrelation mit unendlich fernen Mittelpunkten (Nr. 622) wird man, durch kollineare Transformation des einen Raumes, vorher in eine nicht parabolische überführen.

Daher werden uns die Ausartungen des Polarraums zu denen der allgemeinen Korrelation führen. Ausartungen 1. Stufe der Fläche 2. Grades sind der Kegel 2. Grades, der Kegelschnitt und das Ebenen-Punkte-Paar: zwei Ebenen und zwei Pnnkte auf ihrer Schnittlinie, der Doppellinie des Paars. Aus jedem der ∞^3 Punkte des Raumes kommen ∞^5 Kegel 2. Grades, jede der ∞^3 Ebenen trägt ∞^5 Kegelschnitte, und jede von den ∞^4 Geraden trägt ∞^2 Ebenen- und ∞^2 Punktepaare. Die Mannigfaltigkeit ist also $5 + 3 = 4 + 2 + 2 = 9 - 1$, um 1 kleiner als die der allgemeinen Fläche 2. Grades. Der Kegel — hier immer 2. Grades — und der Kegelschnitt sind dual zu einander, jener in erster Linie Ausartung der Fläche

1) E. Wälsch, Sitzungsber. der Wiener Akademie Bd. 100.

2. Ordnung, dieser der Fläche 2. Klasse. Die ∞^2 Punkte des Kegels reihen sich an in ∞^1 Punktreihen auf den Kanten, die ∞^2 Tangentialebenen des Kegelschnitts in ∞^1 Ebenenbüscheln um seine Tangenten. In jener Kantenreihe bzw. in diesem Tangentenbüschel haben sich die beiden verbundenen Regelscharen vereinigt, denn z. B. beliebige zwei Kanten sind Axen projektiver Ebenenbüschel, welche die Kantenreihe erzeugen. Die ∞^2 Tangentialebenen des Kegels, insofern er Ausartung der allgemeinen Fläche ist, sind die sämtlichen Ebenen durch die Spitze: uneigentliche oder Tangentialebenen im weiteren Sinne; sie schneiden den Kegel in Geradenpaaren, wie es die Berührungsebenen der allgemeinen Fläche tun; und indem jede der beiden ausgeschnittenen Kanten zu beiden Regelscharen gehört, die eine $g \equiv l_1$, die andere $g_1 \equiv l$, ist die Ebene sowohl gl_1 als g_1l, vertritt also zwei Berührungsebenen des allgemeinen Falls, und der Bündel ist doppelt zu rechnen, und so ergibt sich die Klasse 2.

Ingleichen ist der Punktort 2. Ordnung des Kegelschnitts, als ausgearteter Fläche, das doppelte Punktfeld der Ebene, in der die Kurve liegt; sind $g \equiv l_1$, $g_1 \equiv l$ die beiden Tangenten durch einen Punkt derselben, so ist dieser sowohl Punkt gl_1, als g_1l.

Beim Ebenen-Punkte-Paare erfüllen die ∞^2 Punkte die beiden Ebenen, die ∞^2 Berührungsebenen die beiden Bündel.

Um die Polarität dieser ausgearteten Flächen bequem zu beschreiben, benützen wir beim Kegel den ihm, als Bündelgebilde: mit ∞^1 Kanten und ∞^1 (eigentlichen) Berührungsebenen, zukommenden Polarbündel Π_S, beim Kegelschnitt das ihm, als ebenem Gebilde mit ∞^1 Tangenten und ∞^1 Punkten, zukommende Polarfeld Π_σ (die sie eventuell reell repräsentieren), beim Ebenen-Punkte-Paare die beiden Involutionen d_b, d_r, welche die beiden Ebenen, bzw. Punkte definieren.

In bezug auf einen Kegel, als ausgeartete Fläche, sind polar eine Ebene durch die Spitze S und irgend einer der ∞^1 Punkte auf ihrem Polarstrahle in Π_S; denn auf jeder Sekante durch einen dieser Pole haben wir den harmonischen Wurf, der sich perspektiv verschiebt, wenn der Pol den Polarstrahl durchläuft. Jede Ebene des Bündels S hat also ∞^1 Pole, jede andere nur einen, immer die Spitze; denn in dieser schneiden sich die Polarebenen von irgend drei Punkten in ihr; und auf jedem Bündelstrahle haben wir die harmonischen Würfe aus drei in S vereinigten Punkten und einem unbestimmten vierten.

Die Schnittlinie zweier Polarebenen geht durch S; zu einer beliebigen Gerade ist also polar eine durch die Spitze gehende Gerade und zwar der Polarstrahl, in Π_S, zu der nach jener gehenden Bündelebene, und jeder Bündelstrahl hat ∞^2 Polaren, welche die Polarebene erfüllen.

Konjugiert sind, im ausgearteten Polarraume, zwei Ebenen, von denen eine durch die Spitze geht; denn von ihren ∞^1 Polen fällt einer in die andere Ebene, und deren Pol ist die Spitze.

Zur Spitze ist jeder Punkt konjugiert; zwei andere Punkte sind konjugiert, wenn die Bündelstrahlen nach ihnen in Π_S konjugiert sind; weil dann jeder dieser Strahlen in die Polarebene des andern in Π_S und damit jeder der beiden Punkte in die Polarebene des andern fällt.

Zwei Geraden sind konjugiert, wenn sie in konjugierten Ebenen von Π_S liegen; denn dann trifft jede die Polare der andern.

Im Polarraume des Kegelschnitts ist polar zu einem Punkte des Feldes σ, dem er als Kurve angehört, jede Ebene durch seine Polare in Π_σ; um einen Punkt dieser Gerade haben wir den harmonischen Wurf, bestehend aus den Tangenten an den Kegelschnitt, der Polare und dem Strahle nach dem Pol; ein dazu perspektiver Ebenenwurf besteht aus den beiden Tangentialebenen aus einer Gerade in einer jener Polarebenen, dieser Ebene selbst und der Ebene nach dem Pole. Für einen beliebigen Punkt ist Polarebene die σ, als Verbindungsebene der Pole von drei Ebenen durch ihn. Zu einer beliebigen Gerade ist polar die Polare, in Π_σ, ihres Spurpunktes in σ; wie dies zwei Ebenen durch sie zeigen.

Von zwei konjugierten Punkten liegt der eine in σ; zwei konjugierte Ebenen gehen durch konjugierte Geraden von Π_σ, zwei konjugierte Geraden durch konjugierte Punkte dieses Polarfeldes.

In bezug auf ein Ebenen-Punkte-Paar ist polar zu einem Punkte die Ebene durch die Doppellinie, die durch die Ebenen des Paars vom Pole harmonisch getrennt wird, oder einfacher, welche in d_b der nach dem Punkte gehenden Ebene gepaart ist, und hat ∞^2 Pole. Einer beliebigen Ebene ist polar der Punkt auf d, der in d_r ihrem Schnittpunkte gepaart ist.

Zu einer beliebigen Gerade ist die Doppellinie d polar; hinsichtlich der d treffenden Geraden gilt, daß zwei Geraden polar sind, wenn sie durch gepaarte Punkte von d_r gehen und in gepaarten Ebenen von d_b liegen; denn so allein wird die Inzidenz der einen Gerade mit den Polarebenen, Polen der Punkte, der Ebenen der andern, auch der mit d inzidierenden erfüllt. Jede dieser Geraden hat also ∞^1 Polaren, die einen Büschel bilden.

Darnach sind konjugiert zwei Punkte, die in gepaarten Ebenen von d_b liegen, zwei Ebenen, die durch gepaarte Punkte von d_r gehen, zwei Geraden, von denen eine d trifft.

697 Wird nun das Ineinanderliegen der beiden Bündel, der beiden Felder, der beiden Büschel und der beiden Reihen aufgegeben und damit das involutorische Entsprechen, so ergeben sich die drei Ausartungen erster Stufe der Korrelation.

Wenn bei der Beschreibung derselben im folgenden zwei als polar oder konjugiert zusammengehörige Elemente genannt werden, so gehören sie immer dem einen und dem andern Raume an; jeder kann der sein, dem das zuerst genannte Element angehört, und Inzidenz mit einem singulären Elemente bedeutet natürlich stets: mit dem des eigenen Raums.

1) In jedem der beiden Räume befindet sich ein singulärer Punkt und Bündel S, S'; diese Bündel stehen in einer Korrelation, welche mit (S, S') bezeichnet werde und die charakteristische Korrelation der Ausartung heiße.

Es sind polar: eine beliebige Ebene und der singuläre Punkt, eine Ebene durch den singulären Punkt und jeder Punkt des Strahls, der ihr in (S, S') entspricht; eine Gerade durch den singulären Punkt und jede Gerade in der ihr in (S, S') entsprechenden Ebene.

Konjugiert sind zwei Ebenen, von denen eine durch den singulären Punkt geht, zwei Punkte, welche auf konjugierten Strahlen von (S, S'), zwei Geraden, welche in konjugierten Ebenen von (S, S') liegen.

2) In jedem der beiden Räume befindet sich eine singuläre Ebene σ, σ'; die beiden Felder stehen in einer Korrelation (σ, σ').

Es sind polar: ein beliebiger Punkt und die singuläre Ebene, ein Punkt der singulären Ebene und jede Ebene durch die in (σ, σ') entsprechende Gerade, eine Gerade in der singulären Ebene und jede Gerade durch den ihr in (σ, σ') entsprechenden Punkt.

Konjugiert sind zwei Punkte, von denen der eine in der singulären Ebene liegt, zwei Ebenen, zwei Geraden, welche mit in (σ, σ') konjugierten Geraden, Punkten inzidieren.

3) In jedem Raume gibt es eine singuläre Gerade oder Axe s, s', und sowohl die Ebenenbüschel als die Punktreihen derselben sind projektiv; diese charakteristischen Projektivitäten seien mit (s_b, s_b'), (s_r, s_r') bezeichnet.

Polar sind: ein Punkt und die Ebene, welche der ihn mit der singulären Axe verbindenden Ebene in (s_b, s_b') entspricht, eine Ebene und der Punkt, der ihrem Schnittpunkte mit der Axe in (s_r, s_r') entspricht, eine beliebige Gerade und die singuläre Gerade, sowie zwei Geraden, welche zugleich mit entsprechenden Ebenen von (s_b, s_b') und entsprechenden Punkten von (s_r, s_r') inzidieren.

Konjugiert sind zwei Punkte in entsprechenden Ebenen von (s_b, s_b'), zwei Ebenen durch entsprechende Punkte von (s_r, s_r'), zwei Geraden, von denen die eine die Axe trifft.

Hirst, welcher diese Ausartungen zuerst eingehend untersucht hat,[1]) nennt sie zentrale, planare, axiale Korrelation; sie seien dementsprechend mit Γ_c, Γ_p, Γ_a bezeichnet.

Die Mannigfaltigkeit in der Wahl der Bündel, der Felder ist $2 \cdot 3$, die der Axen $2 \cdot 4$, dazu tritt dort die Mannigfaltigkeit 8 der Korrelation, hier diejenige $2 \cdot 3$ der beiden Projektivitäten; es ergibt sich, wie notwendig, die Mannigfaltigkeit 14 der Ausartung 1. Stufe.

Von der axialen Korrelation sei gleich ein einfacher Spezialfall erwähnt; die beiden Axen fallen zusammen: in s und beide Projektivitäten seien Identitäten; es entspricht dann jedem Punkt die ihn enthaltende Ebene durch s, jeder Ebene ihr Schnittpunkt mit s, einer beliebigen Gerade die s, einer s treffenden Gerade jeder Strahl des Büschels, den sie bilden. Es handelt sich um den Nullraum des Strahlengebüsches $[s]$, als Spezialfall eines Gewindes.

698 Durch Dualisierung (korrelative Transformation) des einen Raums erhalten wir die Ausartungen der Kollineation, aber nur zwei; denn die beiden ausgearteten Kollineationen, welche aus 1) und 2) durch Dualisirung desselben Raumes sich ergeben, unterscheiden sich nur durch Vertauschung der beiden Räume. Die im folgenden beschriebene 1′) entsteht aus 1) durch Dualisirung des zweiten, aus 2) durch Dualisierung des ersten Raums.

1′) Die ausgeartete Kollineation hat im ersten Raume einen singulären Punkt und Bündel S, im zweiten eine singuläre Ebene σ' und ihr Feld. Jener Bündel und dieses Feld stehen in einer charakteristischen Kollineation (S, σ').

Entsprechend sind: S und ein beliebiger Punkt, ein beliebiger Punkt X und der Punkt in σ', der durch (S, σ') dem Strahle SX korrespondiert, eine beliebige Ebene ξ und σ', eine durch S gehende Ebene ξ, und jede Ebene durch die ihr in (S, σ') entsprechende Gerade in σ, eine Gerade x und diejenige Gerade in σ', welche in (S, σ') der Ebene Sx entspricht, eine Gerade durch S und jede Gerade durch den ihr in (S, σ') entsprechenden Punkt von σ'.

2′) Es sind zwei singuläre Axen s, s' vorhanden; jetzt sind aber ungleichartige Gebilde projektiv bezogen; wir haben die charakteristischen Projektivitäten (s_b, s_r'), (s_r, s_b').

Entsprechend sind: ein Punkt X und der Punkt auf s', welcher in (s_b, s_r') der Ebene sX entspricht, ein Punkt X auf s und jeder Punkt der Ebene, die ihm in (s_r, s_b') entspricht; eine Ebene ξ und die dem Schnitte $s\xi$ durch diese Projektivität entsprechende Ebene, eine Ebene durch s und

1) Proceedings of the London Math. Society, Bd. 6, S. 7, Bd. 21, S. 92.

jede Ebene durch den Punkt, der ihr in der ersteren Projektivität entspricht, eine beliebige Gerade und die singuläre Axe, zwei Geraden x, x', welche s, s' so treffen, daß der Ebene sx und dem Punkte sx der Punkt $s'x'$ und die Ebene $s'x'$ entsprechen.

Für 2′) bietet sich der Name axiale Kollineation dar; während für 1′) noch kein geeigneter Name vorhanden ist.

Die Homologie und die Kollineation mit Axen liefern einfache Beispiele dieser Ausartungen, wenn die Invariante den Wert 0 oder ∞ annimmt. Bei der Homologie wird durch den Wert 0 von $(S\sigma' XX')$ der Bündel S singulär im ersten Raume, das Feld in σ' singulär im zweiten. Dem Zentrum entspricht jeder Punkt im zweiten Raume, einem andern Punkte X der Schnitt (SX, σ'); einer beliebigen Ebene ξ korrespondiert σ', einer durch S gehenden ξ jede Ebene durch $\sigma'\xi$.

Die charakteristische Kollineation (S, σ') wird durch die perspektive Lage von S und σ' bewirkt.

Die malerische Perspektive, welche den ganzen Raum in eine Ebene abbildet, ist eine so ausgeartete Homologie; während die Relief-Perspektive der Bildhauer allgemeine Homologie ist.

Der Wert ∞ vertauscht die Räume.

Besitzt bei einer Kollineation mit Axen s, s' die Invariante $(ss'XX')$ den Wert 0, so ergibt sich axiale Kollineation, und die charakteristischen Projektivitäten werden durch die perspektive Lage der Punktreihen von s, s' je zum Ebenenbüschel um die andere Gerade bewirkt. Es sind entsprechend: ein beliebiger Punkt X und der Punkt $X' = (sX, s')$, ein beliebiger Punkt X' und der Punkt $X = (s'X', s)$, eine beliebige Ebene ξ und $\xi' = (s\xi, s')$, eine beliebige ξ' und $\xi = (s'\xi', s)$. Bei ∞ vertauschen sich s und s'.

Eine andere Ausartung dieser Kollineation ergibt sich, wenn die beiden Axen sich vereinigen. Dann ist aber zuerst eine Festlegung des Strahlennetzes erforderlich. Bei getrennten Leitgeraden haben wir die beiden eben erwähnten durch perspektive Lage bewirkten Projektivitäten. Diese vereinigen sich in eine Projektivität des Ebenenbüschels und der Punktreihe der nunmehr einzigen Leitgerade. Erst wenn eine solche Projektivität Π gegeben, ist das „parabolische“ Strahlennetz mit in s vereinigten Leitgeraden festgelegt: es besteht aus allen Strahlenbüscheln, deren beide mit s inzidente Trägerelemente in Π entsprechend sind (Nr. 567). Nun kann die Kollineation hergestellt werden; und für eine solche Kollineation mit Axen ist es gleichgültig, welchen Wert die Invariante hat.

Es sind (involutorisch) entsprechend ein Punkt auf s und jeder beliebige Punkt der Ebene, die ihm in Π korrespondiert, eine Ebene durch s und jede beliebige Ebene durch den ihr korrespondierenden

Punkt, eine beliebige Gerade und die s, zwei Geraden, welche mit in Π entsprechenden Elementen von s inzidieren. In s haben sich die Axen, in Π die beiden charakteristischen Projektivitäten vereinigt.

Wegen der Mannigfaltigkeit 4 und 3 von s und Π hat diese Ausartung die Mannigfaltigkeit 7; als Ausartung einer Kollineation mit Axen und bestimmtem Werte der Invariante (also auch der windschiefen Involution) ist sie einfache Bedingung.

Nimmt man bei der Festlegung der Kollineation durch fünf Paare entsprechender Punkte:

$$\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D\,E \\ A'B'C'D'E' \end{vmatrix}$$

an, daß B', C', D', E' in derselben Ebene σ' liegen, ohne daß dies zugleich für die entsprechenden gilt (Nr. 473), so gelangt man zu einer ausgearteten Kollineation: mit σ' als singulärer Ebene und $S \equiv A$ als singulärem Punkte.

Die Bündel A und A' (Nr. 468) befinden sich in allgemeiner Kollineation:

$$\mathfrak{A} \quad \begin{matrix} A\,(B, & C, & D, & E) \\ A'(B', & C', & D', & E'); \end{matrix}$$

auf sie hat die jetzige Annahme noch keinen Einfluß.

Durch den Bündel A' wird das Feld σ', zu ihm perspektiv, kollinear zu A, und diese Kollineation wird die charakteristische (S, σ'). Die Bündel B und B' aber, in welchen den Strahlen $B(A, C, D, E)$ die Strahlen $B'(A', C', D', E')$ entsprechen, kommen, weil $B'(C', D', E')$ in derselben Ebene σ' liegen, in ausgeartete Kollineation $\mathfrak{B}$: mit σ' als singulärer Ebene und BA als singulärer Axe; charakteristische Projektivität ist:

$$BA(C, D, E) \barwedge B'(C', D', E').$$

Ist X ein beliebiger Punkt, so korrespondiert dem Strahle AX in $\mathfrak{A}$ ein Strahl x', welcher in derjenigen Ebene ξ' durch $A'B'$ liegt, für die:

$$AB(C, D, E, X) \barwedge A'B'(C', D', E', \xi')$$

gilt, und daher σ' auf dem Strahle x_1' trifft, für welchen:

$$AB(C, D, E, X) \barwedge B'(C', D', E', x_1')$$

ist. Dem Strahle BX korrespondiert in $\mathfrak{B}$ gerade dieser Strahl x_1', und der entsprechende Punkt X' ist der Schnittpunkt $x'x_1'$, demnach derjenige Punkt, der in (S, σ') dem Strahle SX entspricht.

Den Strahlen $A'X'$, $B'X'$ nach einem beliebigen Punkte X' korrespondieren in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ein bestimmter Strahl von A und der singuläre Strahl BA; Schnittpunkt X ist $S \equiv A$.

Von drei Punkten einer beliebigen Ebene ξ liegen die entsprechenden in σ', also ist diese die entsprechende Ebene; geht sie aber durch S, so liegen die drei entsprechenden Punkte auf derselben Gerade in σ', derjenigen, welche der ξ in (S, σ') korrespondiert, die verbindende Ebene ist jede Ebene durch diese Gerade; was mit der Unbestimmtheit des entsprechenden Punktes des S stimmt.

Wir haben die Eigenschaften der ausgearteten Kollineation 1').

Wird die Kollineation durch:

$$\left|\begin{matrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\epsilon \\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\epsilon' \end{matrix}\right|$$

festgelegt, wobei β, γ, δ, ϵ durch denselben Punkt gehen, so wird dieser und α' singulär.

Ebenso wird die Korrelation:

$$\left|\begin{matrix} ABCDE \\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\epsilon' \end{matrix}\right|$$

zentral oder planar, wenn β', γ', δ', ϵ' in einen Punkt S' zusammenlaufen oder B, C, D, E in einer Ebene σ liegen; das andere singuläre Element ist $S \equiv A$, $\sigma' \equiv \alpha'$, und die charakteristische Korrelation (S, S'), (σ, σ') ist:

$$\left|\begin{matrix} S(B,\,C,\,D,\,E) \\ \beta',\,\gamma',\,\delta',\,\epsilon' \end{matrix}\right|, \quad \text{bzw.} \quad \left|\begin{matrix} B,\,C,\,D,\,E \\ \sigma'(\beta',\,\gamma',\,\delta',\,\epsilon') \end{matrix}\right|.$$

Wir gehen zu den Ausartungen 2. Stufe, wiederum zunächst 699
bei der Korrelation, und lassen die charakteristische Korrelation (S, S') der zentralen Korrelation ausarten, was auf zwei Weisen möglich ist (Nr. 400). Sie bekomme erstens zwei singuläre Ebenen σ, σ' und habe die charakteristische Projektivität $\mathfrak{P}_0$ zwischen den Strahlenbüscheln (S, σ), (S', σ'). Einer Ebene des einen Bündels entspricht derjenige Strahl des singulären Strahlenbüschels im andern, durch dessen entsprechenden Strahl sie geht, der singulären Ebene jeder Strahl. Daher sind in der ausgearteten räumlichen Korrelation polar: eine Ebene und der singuläre Punkt, ein Punkt und die singuläre Ebene, ein Punkt und eine Ebene, welche mit Strahlen der singulären Büschel inzidieren, die in $\mathfrak{P}_0$ einander entsprechen, eine Gerade und der Strahl des singulären Büschels, dessen entsprechender sie trifft, ein Strahl, der mit dem singulären Punkte oder der singulären Ebene inzidiert, und jeder Strahl in der singulären Ebene, bzw. durch den singulären Punkt.

Von zwei konjugierten Strahlen der Bündel S, S' liegt immer der eine in der singulären Ebene, zwei konjugierte Ebenen gehen durch entsprechende Strahlen der singulären Büschel.

Also sind in der räumlichen Korrelation konjugiert: zwei Ebenen, von denen die eine durch den singulären Punkt geht, zwei Punkte, von denen der eine in der singulären Ebene liegt, zwei Geraden, wenn sie entsprechende Strahlen der singulären Büschel treffen.

Hirst hat diese in sich duale Ausartung 2. Stufe: mit singulärem Punkte und singulärer Ebene, welche inzidieren, in jedem der beiden Räume, zentral-planar genannt; sie werde mit Γ_{cp} bezeichnet.

Die ausgeartete Korrelation (S, S') habe zweitens zwei singuläre Ebenenbüschel s, s' mit der charakteristischen Projektivität (s_b, s_b'). Sie bekommt also zu den zwei singulären Punkten noch mit ihnen bzw. inzidente singuläre Axen. In dieser ausgearteten Bündelkorrelation (S, S') sind entsprechend eine Ebene und die singuläre Axe, eine durch die singuläre Axe gehende Ebene und jeder Strahl in der ihr in (s_b, s_b') entsprechenden Ebene.

Demnach sind in der räumlichen Korrelation polar: eine Ebene und der singuläre Punkt, eine Ebene durch den singulären Punkt und jeder Punkt der singulären Axe, eine Ebene durch die singuläre Axe und jeder Punkt der ihr in (s_b, s_b') entsprechenden Ebene (d. h. jeder Punkt auf jedem Strahle des Büschels in dieser Ebene); also ein Punkt und die Ebene durch die singuläre Axe, welche der ihn enthaltenden durch die andere in (s_b, s_b') entspricht, ein Punkt auf der singulären Axe und jede Ebene durch den singulären Punkt; der singuläre Punkt und jede beliebige Ebene; endlich eine beliebige Gerade und die singuläre Axe, zwei Geraden, welche die Axen so treffen, daß sie in entsprechenden Ebenen von (s_b, s_b') liegen.

Konjugiert sind zwei Ebenen, wenn eine den singulären Punkt enthält, zwei Geraden, wenn eine mit der singulären Axe inzidiert, zwei Punkte, wenn sie in entsprechenden Ebenen von (s_b, s_b') liegen.

Diese Ausartung heißt zentral-axial und werde mit Γ_{ca} bezeichnet.

Wenn bei der planaren Korrelation die charakteristische Korrelation (σ, σ') zentral wird, so ergibt sich, in dualer Weise, die zentral-planare Korrelation. Wird sie axial, mit der charakteristischen Projektivität (s_r, s_r') der Punktreihen auf den Axen s, s', so entsteht die zur zentral-axialen Korrelation duale Korrelation Γ_{pa}. Es sind in ihr polar: ein Punkt und die singuläre Ebene, ein Punkt auf der singulären Ebene und jede Ebene durch die singuläre Gerade, ein Punkt auf der singulären Gerade und jede Ebene durch den ihm in (s_r, s_r') entsprechenden Punkt auf der andern; also eine Ebene und der Punkt der singulären Gerade, der ihrem Schnittpunkt mit der andern in (s_r, s_r') entspricht; eine Ebene durch die singuläre Gerade und jeder Punkt in der singulären Ebene, die singuläre Ebene und ein beliebiger Punkt; eine beliebige Gerade und die singuläre Gerade, zwei Geraden, welche die singulären Geraden in entsprechenden Punkten von (s_r, s_r') treffen.

Konjugiert sind zwei Punkte, wenn einer in der singulären Ebene liegt, zwei Geraden, wenn eine die singuläre Axe trifft, zwei Ebenen, welche durch entsprechende Punkte von (s_r, s_r') gehen.

Diese Korrelation Γ_{pa} heißt planar-axial.

Die Korrelationen Γ_{ca} und Γ_{pa} ergeben sich aber auch durch Ausartung von Γ_a, jene, wenn (s_r, s_r') ausartet, diese, wenn (s_b, s_b') es tut; die andere nicht ausartende wird charakteristische.

Es haben sich also drei Ausartungen zweiter Stufe der Korrelation ergeben: Γ_{cp}, Γ_{ca}, Γ_{pa}, jede zu zweien der ersten Stufe als weitere Ausartung gehörig, immer mit zwei inzidenten singulären Elementen in jedem Raume:

$$S, \sigma;\ S', \sigma' \qquad S, s;\ S', s' \qquad \sigma, s;\ \sigma', s'.$$

Die charakteristische Projektivität besteht zwischen den Strahlenbüscheln (S, σ), (S', σ'), den Ebenenbüscheln s, s', den Punktreihen s, s'.

Jedes der drei Paare inzidenter Elemente hat die Mannigfaltigkeit $3 + 2$ oder $4 + 1$, also die ausgeartete Korrelation die Mannigfaltigkeit $2 \cdot 5 + 3 = 13$; wie sie der zweiten Stufe zukommt.

Lassen wir die drei ausgearteten Polarräume weiter ausarten. Der zentrale Polarraum, zum Kegel gehörig, artet planar aus, wenn der Kegel Geradenpaar (Büschelpaar) wird, axial, wenn ein Ebenenpaar; die charakteristische Projektivität ist die Strahleninvolution in der Doppelebene, welche die beiden Geraden, die Ebeneninvolution um die Doppelgerade, welche die beiden Ebenen definiert.

Der planare Polarraum, zum Kegelschnitt gehörig, artet zentral aus, wenn dieser ein Geradenpaar, axial, wenn er ein Punktepaar wird; charakteristische Projektivität ist die das Paar definierende Involution um den Doppelpunkt, auf der Doppellinie.

Der axiale Polarraum, zum Ebenen-Punkt-Paar gehörig, artet zentral aus, wenn die beiden Punkte sich vereinigen, planar, wenn die Ebenen es tun; die Involution, welche das andere Paar definiert, ist die charakteristische Projektivität. Man sieht, wie jeder der drei Fälle: Paar inzidenter Geraden (Γ_{cp}), Ebenenpaar und Punkt auf der Doppellinie (Γ_{ca}), Punktepaar und Ebene durch die Doppellinie (Γ_{pa}) sich zweimal ergibt.

Dualisiert man den zweiten Raum, so ergeben sich die Ausartungen zweiter Stufe der Kollineation mit den singulären Elementen

$$S, \sigma';\ \sigma', S' \qquad S, s;\ \sigma', s' \qquad \sigma, s;\ S', s',$$

von denen die beiden letzten Fälle nicht wesentlich verschieden sind;

die charakteristische Projektivität besteht zwischen (S, σ) und (σ', S'), dem Ebenenbüschel s und der Punktreihe s', der Punktreihe s und dem Büschel s'.

Die erste Art kann wieder zentral-planar heißen.

Wenn bei der Kollineation:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & E' \end{vmatrix}$$

die Punkte C', D', E' in einer Gerade s' liegen, so befinden sich B', C', D', E' in einer Ebene σ', und wir haben die singuläre Ebene σ' und den singulären Punkt $S \equiv A$; aber wegen der Geradlinigkeit von C', D', E' ist die charakteristische Kollineation ausgeartet: mit der singulären Punktreihe s', dem singulären Ebenenbüschel AB und der Projektivität

$$AB(C, D, E) \barwedge C'D'E'.$$

Es liegt also eine Ausartung zweiter Stufe von der zweiten Art vor. Aber es kann auch $s'A'$ singuläre Ebene und B singulärer Punkt sein; so daß bei dieser Lage der gegebenen Punkte zwei derartige ausgeartete Kollineationen vorhanden sind, welche jedoch in den Axen und der charakteristischen Projektivität übereinstimmen.

Untersuchen wir eine Kollineation mit Axen u, v in dem Falle, wo diese sich schneiden; das Strahlennetz zerfällt dann in den Bündel um den Schnittpunkt S und das Feld in der Verbindungsebene σ. Im Büschel (S, σ) sei die Projektivität Π hergestellt, für welche u, v Koinzidenzstrahlen sind und die gegebene Invariante $\lambda = (u, v, X, X')$ auch Invariante ist. Einem beliebigen Punkt X oder X' entspricht S, einer beliebigen Ebene ξ oder ξ' die σ, ferner sind entsprechend zwei Punkte oder zwei Ebenen, welche mit entsprechenden Strahlen von Π inzidieren. Es liegt zentral-planare Kollineation vor mit identischen singulären Strahlenbüscheln und der charakteristischen Projektivität Π.

700 Artet bei Γ_{cp}, Γ_{ca}, Γ_{pa} auch noch die charakteristische Projektivität aus, so kommt in jeden der beiden Räume noch ein drittes singuläres Element, ungleichartig und inzident mit den beiden schon vorhandenen; es ergibt sich in allen drei Fällen die nämliche Ausartung dritter Stufe: die zentral-planar-axiale Γ_{cpa}.

Polar sind nun eine beliebige Ebene und der singuläre Punkt, ein beliebiger Punkt und die singuläre Ebene, wie bisher, wenn etwa von der zentral-planaren ausgegangen wird, und nunmehr, ein Punkt in der singulären Ebene und eine Ebene durch den singulären Strahl, eine Ebene durch den singulären Punkt und ein Punkt auf dem singulären Strahl, endlich eine Gerade und der singuläre Strahl.

Konjugiert sind zwei Punkte, Ebenen oder Geraden, wenn eins dieser Elemente bzw. mit der singulären Ebene, dem singulären Punkt, der singulären Axe inzidiert.

Es handelt sich also nur um Inzidenzen.

Die Mannigfaltigkeit dieser Ausartung ist $2(3 + 2 + 1) = 2(4 + 1 + 1) = 12$.

Die Basisfläche der Ausartung 3. Stufe des Polarraums besteht aus der doppelten Ebene σ, dem doppelten Bündel S und einem bestimmten Strahle s des Büschels (S, σ) als Doppellinie des Paars der vereinigten Ebenen und des Paars der vereinigten Punkte.

Die Flächen 2. Grades, welche sich als Basisflächen der aus- 701
gearteten Polarräume ergeben haben, finden wir wieder, wenn wir eine allgemeine Fläche 2. Grades f^2 durch die ausgearteten Korrelationen (oder Kollineationen) transformieren. Sie liege im Raume Σ. Die zentrale Korrelation führt sie über in einen Kegel k'^2 im Bündel S', und zwar ergibt sich dieser Punkt S' aus allen nicht durch S gehenden Tangentialebenen der f^2; die durch S gehenden, die einen Kegel t^2 umhüllen, liefern die Kanten des Kegels k'^2 oder richtiger die Punkte auf ihnen; die (eigentlichen) Berührungsebenen dieses Kegels kommen her von den Punkten der Berührungskurve jenes Tangentialkegels t^2 mit f^2.

Je die beiden (reellen oder imaginären) Punkte der f^2 auf einem Strahle durch S transformieren sich in dieselbe, also doppelt zu rechnende (uneigentliche) Tangentialebene von k'^2.

Die planare Korrelation führt f^2 über in einen Kegelschnitt $k_1'^2$, wo je der ganze Büschel von Tangentialebenen um eine Tangente von demselben Punkte der Schnittkurve $f^2\sigma$ herrührt; die Punkte von $k_1'^2$ entsprechen den Tangentialebenen von f^2 längs dieser Schnittkurve. Die übrigen Punkte von f^2 transformieren sich alle in σ' und die zwei Tangentialebenen je aus einer Gerade von σ in denselben Punkt von σ'.

Die axiale Korrelation verwandelt f^2 in ein Ebenen-Punkte-Paar; die Punkte der einen und der andern Ebene entstammen allein den beiden Tangentialebenen aus s an f^2, die Ebenen durch den einen und den andern Punkt allein den beiden Punkten $(f,^2 s)$.

Die zentral-planare Korrelation transformiert f^2 in die doppelte Ebene σ' und den doppelten Bündel S'. Die beiden in σ gelegenen Punkte der Berührungskurve des Kegels t aus S an f^2 geben die beiden Büschel von Ebenen, in welche der Kegel k'^2 zerfällt, der von der zentralen Korrelation herrührt, und die Tangentialebenen in ihnen die beiden Geraden, welche den Kegelschnitt $k_1'^2$ bilden, zu dem die planare Korrelation führt.

Die zentral-axiale Korrelation transformiert die beiden Tangentialebenen aus s an f^2 in zwei Punktfelder, deren Ebenen durch s' gehen und ihnen in (s_b, s_b') entsprechen; die Punkte $(f_r^2 s)$ geben den doppelten Ebenenbündel um S'; also ergibt sich ein Ebenen-Punkte-Paar, dessen Punkte sich in S' vereinigt haben. Die planar-axiale Korrelation führt dual in ein solches Paar über, dessen Ebenen sich in σ' vereinigt haben, während die beiden Punkte (f^2, s) zwei Ebenenbündel liefern, deren Scheitel auf s' liegen und ihnen in (s_r, s_r') entsprechen.

Die zentral-planar-axiale Korrelation endlich liefert ein Ebenen-Punkte-Paar, von welchem die Ebenen in σ', die Punkte in S' vereinigt sind: mit s' als Doppellinie für beide.

702 Betrachten wir die Kernflächen der Ausartungen. Bei Γ_c ist die Punkt-Kernfläche F^2 allgemein und das Erzeugnis der beiden korrelativen Bündel S, S' (§ 59); denn von jeder Ebene eines von ihnen fällt einer der ∞^1 Pole in sie; und wir wissen, es ergibt sich die nämliche Fläche, ob wir die Ebenen von S oder S' je mit den entsprechenden Strahlen im andern Bündel schneiden.

Ebenen-Kernfläche Φ_2 ist das Paar der Bündel oder Punkte S, S', das wir sofort zum Ebenen-Punkte-Paar vervollständigen werden.

Die vier Geraden auf F^2 durch S, S' bilden das Schnittvierseit der Kernflächen. Daß jeder Punkt von F^2 in beide entsprechenden Ebenen fällt, wissen wir aus Nr. 390; aber jede Ebene z. B. von S geht nicht bloß als Ebene von Σ durch einen ihrer entsprechenden Punkte in Σ', sondern auch als Ebene von Σ' durch den ihr entsprechenden Punkt, nämlich S.

Die beiden Ebenen ω, ω_1 (Nr. 393) jenes Vierseits, welche durch SS' gehen, Berührungsebenen von F^2, bewirken die Vervollständigung der Φ_2. Die beiden Kernflächen sind, in beiderlei Sinne, polar; wenn g eine Gerade von F^2 ist, so entspricht ihr in der räumlichen Korrelation derjenige Strahl von S', welcher in (S, S') der Ebene Sg korrespondiert; durchläuft g ihre Regelschar γ, so dreht sich Sg um eine Gerade l der andern Schar (eine Seite des Vierseits), und der entsprechende Strahl bewegt sich in der der l entsprechenden Ebene, das ist die durch l gehende von jenen Tangentialebenen, etwa ω. Rechnet man die Regelschar zu Σ', so liegt die Gerade l' aus der verbundenen Schar, die durch S' geht und nun Büschel-Axe wird, gerade in der andern Ebene ω_1, welche der l' in S entspricht; also geht die Regelschar in den Büschel (S, ω_1) über. Unsere Regelschar von F^2 geht daher durch die zentrale Korrelation in das Büschel-Paar $(S', \omega), (S, \omega_1)$ über, und zwar in den ersten oder zweiten Büschel, je nachdem sie zu Σ oder Σ' gehört, und die andere Regelschar λ in $(S', \omega_1), (S, \omega)$. Damit ist Φ_2 als das Ebenen-Punkte-Paar $(\omega, \omega_1; S, S')$ erkannt.

Bei der planaren Korrelation Γ_p ist Φ_2 das Erzeugnis der beiden korrelativen Felder σ, σ'; während F^2 aus den Ebenen σ, σ' und den Schnittpunkten von $\sigma\sigma'$ mit Φ_2 besteht.

Die axiale Korrelation Γ_a dagegen führt wiederum zu Kernflächen, welche beide allgemein sind. F^2 ist das Erzeugnis der beiden projektiven Ebenenbüschel s, s'; denn jede Schnittlinie entsprechender Ebenen trägt diejenigen der einen oder andern Ebene entsprechenden Punkte, die in sie fallen. Φ_2 ist das Erzeugnis der projektiven Punktreihen s, s'. Das Schnittvierseit wird durch s, s' und zwei Geraden gebildet, die sowohl Schnittlinien homologer Ebenen, als Verbindungslinien homologer Punkte sind.

Bei Γ_{cp} besteht F^2 aus den beiden Ebenen σ, σ', Φ_2 aus den beiden Punkten S, S', bei Γ_{ca} ist F^2 eine allgemeine Regelschar-Fläche, während Φ_2 das Punktepaar (S, S') ist, und duales gilt bei Γ_{pa}; bei Γ_{cpa} sind beide zerfallen in σ, σ', bzw. S, S'.

Für die Ausartungen erster Stufe, zentrale (zu der ja die planare dual ist) und axiale Korrelation, mögen noch die andern zugeordneten Örter (§ 79) kurz besprochen werden. Bei der ersteren, in der einer Gerade g der Strahl von S' entspricht, der in der charakteristischen Korrelation (S, S') der Ebene Sg korrespondiert, sind Strahlen, welche die entsprechenden schneiden, solche in den Ebenen des einen oder andern Bündels je durch den Schnittpunkt mit dem homologen Strahl. Es entsteht durch diese Strahlen (beidemal) der durch die korrelativen Bündel erzeugte Hirstsche Komplex (Nr. 393), der so Kernkomplex wird.[1])

Es seien φ', ϵ die beiden dem gemeinsamen Strahle $e \equiv f'$ entsprechenden Ebenen (τ', τ in Nr. 390), die andern Ebenen des Kernvierseits.

Der Wechselstrahl einer beliebigen Ebene ist SS'; der Wechselstrahl einer durch S gehenden Ebene ist jeder Strahl aus S nach dem ihr in (S, S') korrespondierenden Strahle von S'; endlich der Wechselstrahl einer durch SS' gehenden Ebene erweitert sich zu einem ganzen Strahlennetze; Leitgeraden sind die beiden Strahlen, die ihr in (S, S') in dem einen und andern Sinne korrespondieren, erfüllt mit den einen und den andern Polen; erst durch diese Strahlennetze kommt der Komplex des Wechselstrahles zu stande. Durchwandert die Ebene den Büschel um $SS' = e \equiv f'$, so bewegen sich die beiden Leitgeraden projektiv durch die Büschel (S, ϵ), (S', φ'), und wir haben die Erzeugung des tetraedralen Komplexes von Nr. 254.

Der Wechselstrahl eines Punktes X ist die Schnittlinie der beiden Ebenen, welche den SX, $S'X$ in (S, S') entsprechen; diese Schnitt-

1) In der Liniengeometrie Bd. III Nr. 806—819 ist die Subsumption unter den allgemeinen Kernkomplex dargelegt.

linie wird von den beiden Strahlen getroffen, welche der $SS'X$ korrespondieren; es ergibt sich, wie notwendig, derselbe Komplex wie vorhin.

Der lineare Komplex $\mathfrak{G}^e$ entsteht durch die Strahlenbüschel in jeder Ebene um die Spur des zugehörigen Wechselstrahls. Alle diese Büschel haben ihren Scheitel oder ihre Ebene mit SS' inzident, so daß das Strahlengebüsche $[SS']$ dieser Komplex ist.

Der andere lineare Komplex $\mathfrak{G}^p$ — der Ort der Strahlenbüschel aus jedem Punkt X nach dem zugehörigen Wechselstrahle — ist allgemein und entsteht aus den beiden korrelativen Bündeln durch die Strahlen aus einem beliebigen Punkt X nach der Schnittlinie der den Strahlen $SX, S'X$ entsprechenden Ebenen — eine bemerkenswerte Herstellungsweise des Gewindes.

Bei der axialen Korrelation ist der Kernkomplex das Gebüschepaar $[s][s']$; jeder Gerade g, welche s trifft, entsprechen alle Strahlen des Büschels um den Punkt auf s' und in der Ebene durch s', welche in den charakteristischen Projektivitäten dem Punkt gs und der Ebene gs korrespondieren; einer von ihnen trifft g. Als Gerade von Σ' trifft g die entsprechende Gerade, nämlich s.

Ein beliebiger Punkt, eine beliebige Ebene hat einen Strahl des Netzes $[s, s']$ zum Wechselstrahl; in diesem Netze entstehen nämlich zwei eindeutige involutorischen Korrespondenzen. In der einen sind entsprechend zwei Geraden g und g_1, bei denen die Ebenen sg und $s'g_1$, $s'g$ und sg_1 in (s_b, s_b') korrespondieren, und jeder Punkt der einen Gerade hat die andere zum Wechselstrahl. In der andern sind die Punkte sg und $s'g_1$, $s'g$ und sg_1 in (s_r, s_r') entsprechend, und jede Ebene durch die eine von den Geraden g und g_1 hat die andere zum Wechselstrahl.

Einem Punkt X auf s, zu Σ gehörig, entspricht der ganze Ebenenbündel um den homologen Punkt auf s', als Punkt von Σ' aber korrespondiert ihm eine bestimmte Ebene durch s, die der $s'X$ entsprechende, und jede Gerade in dieser ist sein Wechselstrahl. So zeigt sich, daß als Komplex der Wechselstrahlen (der Punkte oder Ebenen) ebenfalls das Gebüschepaar $[s][s']$ sich ergibt.

Konjugierte Punkte der axialen Korrelation liegen in entsprechenden Ebenen der Projektivität (s_b, s_b'); Geraden, welche Involutionen doppelt konjugierter Punkte tragen, müssen also von den beiden projektiven Ebenenbüscheln s, s' in involutorischen Punktreihen geschnitten werden. Wir wissen (Nr. 90 und 530), daß diese Geraden einen linearen Komplex bilden, und das Gewinde $\mathfrak{G}^p$ ist also der der charakteristischen Ebenenbüschel-Projektivität in dieser Weise zugeordnete lineare Komplex. Jede Gerade, welche zwei entsprechende Geraden g und g_1 der ersten der obigen Korrespondenzen trifft, gehört, weil mit einem Punkte auf g oder g_1 und seinem Wechselstrahl g_1 oder g inzident, zu $\mathfrak{G}^p$, und g und g_1 sind polar in bezug auf $\mathfrak{G}^p$; s und s' gehören auch zu $\mathfrak{G}^p$, und von zwei entsprechenden Ebenen der (s_b, s'_b) geht jede durch den Nullpunkt der andern.

Dual entsteht $\mathfrak{G}^e$ aus (s_r, s_r').

Der tetraedrale Komplex kann durch ∞^2 Kollineationen erzeugt 703
werden; oder genauer (Nr. 493), wir haben einen Büschel kollinearer Räume $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots$, und, dual, eine Schar kollinearer Räume $\Sigma_1, \Sigma_1', \Sigma_1'', \ldots$, durch deren je zwei er erzeugt werden kann. In jeden seiner Strahlen laufen entsprechende Ebenen der ersteren Räume zusammen, und auf ihm liegen entsprechende Punkte der andern. Wir wollen im Büschel einen Raum $\bar{\Sigma}$ wiederum auszeichnen, er ergebe sich bei der Ebene $\bar{\epsilon}$ durch g_0; die bewegliche Ebene ϵ durch g_0 gibt die übrigen Räume Σ, und die Kollineationen zwischen ihnen und $\bar{\Sigma}$ bilden den Kollineationenbüschel. Es komme ϵ in die Lage, daß sie durch eine der Ecken, T, des Tetraeders geht; die Kollineation zwischen Σ und $\bar{\Sigma}$ ist dann ausgeartet, denn sie ist bestimmt durch:

$$\left|\begin{array}{l} \tau, \upsilon, \varphi, \psi, \epsilon \\ \tau, \upsilon, \varphi, \psi, \bar{\epsilon} \end{array}\right|$$

und $\upsilon, \varphi, \psi, \epsilon$ gehen durch den Punkt T; dieser wird Scheitel des singulären Bündels in Σ und das singuläre Feld in $\bar{\Sigma}$ befindet sich in τ; die beiden Räume mögen deshalb Σ_T und Σ_τ heißen. Die charakteristische Kollineation (T, τ) zwischen dem Bündel und dem Felde ist gegeben durch:

$$\upsilon, \varphi, \psi, \epsilon \text{ koll. } \tau(\upsilon, \varphi, \psi, \bar{\epsilon}).$$

oder, anders geschrieben:

$$T(VW, WU, UV, g_0) \text{ koll. } VW, WU, UV, \tau\bar{\epsilon},$$

oder auch:

$$T(U, V, W, g_0) \text{ koll. } U, V, W, \tau\bar{\epsilon}.$$

In der räumlichen Kollineation entspricht einer Ebene durch den singulären Punkt T[1]) jede Ebene durch die ihr in (T, τ) entsprechende Gerade von τ. Die Schnittlinien bilden einen zum Komplex gehörigen Strahlenbüschel in jeder Ebene um ihren Schnittpunkt mit dieser Gerade. Das ist die eine Form der Erzeugung des tetraedralen Komplexes durch Feld und Bündel, welche kollinear sind (Nr. 389). Diese subsumiert sich also der Reyeschen Erzeugung durch zwei kollineare Räume; und lassen wir $\bar{\epsilon}$ sich um g_0 drehen und $\bar{\Sigma} = \Sigma_\tau$ durch den Büschel kolli-

1) Einer andern Ebene von Σ_T korrespondiert die singuläre Ebene τ; dies führt zum Strahlenfelde von τ, welches ja im Komplexe sich befindet.

nearer Räume laufen, so ergeben sich die ∞^1 derartigen Erzeugungen, welche zu T und τ gehören.

Im dualen Falle wird durch den Punkt $\bar{E}$ auf g_0 in der Schar kollinearer Räume der Raum $\bar{\Sigma}_1$ ausgeschieden; der bewegliche Punkt E, welcher den veränderlichen Raum Σ_1 bestimmt, komme in die Ebene τ; so artet wiederum die Kollineation aus. In Σ_1 wird die Ebene τ der vier Punkte U, V, W, E singulär, in $\bar{\Sigma}_1$ der Punkt T; wir nennen deshalb diese Räume wieder $\Sigma_{\tau,1}$ und $\Sigma_{T,1}$. Die Kollineation $(T, \tau)_1$ zwischen T und τ ist:

$$T(U, V, W, E) \text{ koll. } U, V, W, E.$$

Einem Punkte in τ entspricht in der räumlichen Kollineation jeder Punkt des Strahls von T, der ihm in $(T, \tau)_1$ korrespondiert; die Verbindungslinien solcher entsprechenden Punkte bilden einen zum Komplexe gehörigen Strahlenbüschel um jenen Punkt in der Ebene nach diesem Strahle. Das ist die andere Form der Erzeugung des tetraedralen Komplexes durch Feld und Bündel, welche kollinear sind. Hier lassen wir $\bar{E}$ auf g_0 und $\bar{\Sigma}_1 = \Sigma_{T,1}$ durch die Schar kollinearer Räume gehen, und erhalten wiederum die ∞^1 derartigen Erzeugungen.

Zu jeder $\bar{\epsilon}$ können wir einen $\bar{E}$ finden (und umgekehrt), so daß die beiden charakteristischen Kollineationen (T, τ) und $(T, \tau)_1$ übereinstimmen und also auch die zugehörigen ausgearteten räumlichen Kollineationen. Der Punkt E ist Spur von g_0 in τ und liegt daher auf $\tau\bar{\epsilon}$; folglich muß der Strahl von T, der in (T, τ) dem Punkte E entspricht, in die Ebene Tg_0 fallen; nehmen wir daher als $\bar{E}$ seinen Schnitt mit g_0, so wird $(T, \tau)_1$ mit (T, τ) identisch. Wir erhalten, wie notwendig, nur eine zu T und τ gehörige Reihe ausgearteter Kollineationen, welche den Komplex erzeugen. Sind also $\bar{\epsilon}$ und $\bar{E}$ in dieser Weise gewählt, so ist die räumliche Kollineation zwischen Σ_T und Σ_τ identisch mit der zwischen $\Sigma_{T,1}$ und $\Sigma_{\tau,1}$; werden jene geändert, aber so, daß sie immer in der erörterten Weise zueinander gehören, so bleiben Σ_T und $\Sigma_{\tau,1}$ fest, und Σ_τ und $\Sigma_{T,1}$ ändern sich; wie es dem in Nr. 496 Gesagten entspricht.

Wir wissen, daß die Erzeugung des tetraedralen Komplexes durch Bündel und Feld, welche kollinear sind, ausarten kann in die durch zwei projektive Strahlenbüschel; es wird immer noch der allgemeine Komplex erzeugt; d. h. wir können die allgemeine Kollineation in zweiter Stufe so ausarten lassen, daß zwei singuläre Strahlenbüschel in Projektivität vorliegen; wir erhalten dann die Hirst'sche Erzeugung des tetraedralen Komplexes (Nr. 254). Aber weil nun die Anzahl der Erzeugungen des allgemeinen Komplexes eine endliche ist, so ist eine weitere Ausartung beim allgemeinen Komplexe nicht möglich.

Der tetraedrale Komplex, welcher bei den andern Ausartungen der Kollineation entsteht, zerfällt immer in die beiden Strahlengebüsche, die zu den singulären Axen gehören und ist von den etwaigen weiteren singulären Elementen, sowie eventuellen charakteristischen Projektivitäten unabhängig.

§ 101. Anzahl der Korrelationen, welche 15 gegebenen Elementarbedingungen genügen.

Elementarbedingen sind, daß gegebene Elemente entsprechend (polar) oder konjugiert sind. Wir haben in Nr. 471 folgende Elementarbedingungen gefunden: 704

1) drei einfache, daß zwei gleichartige Elemente: zwei Punkte A und A', zwei Ebenen α und α', zwei Geraden a und a' konjugiert seien;

2) zwei zweifache, daß ein Punkt oder eine Ebene und eine Gerade konjugiert seinen, wobei aber die Räume noch vertauscht werden können, so daß vier solche Bedingungen vorliegen: A und a', a und A', α und a', a und α' konjugiert;

3) eine dreifache Bedingung, daß ein Punkt und Ebene polar seien, in zwei Formen: P und π', π und P' polar;

4) eine vierfache, daß zwei Geraden p und p' polar seien.

Die 15 Bedingungen können also in überaus mannigfaltiger Weise aus Elementarbedingungen sich zusammensetzen.

Es seien α vierfache, β dreifache, γ zweifache und δ einfache von diesen Elementarbedingungen gegeben, so daß:

$$4\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta = 15.$$

Wir wollen $(\alpha\beta\gamma\delta)$ eine Hauptsignatur nennen. Es sind also zunächst α Paare polarer Geraden gegeben; ferner sei $\beta = e + e'$, $\gamma = f + f' + g + g'$, $\delta = l + m + n$; d. h. es sind gegeben: e Paare polarer Elemente P, π' und e' Paare π, P'; f Paare konjugierter Elemente A und a', f' Paare a und A', g Paare α und a', g' Paare a und α', endlich je l, m, n Paare konjugierter gleichartiger Elemente A und A', α und α', a und a'. Die eigentliche Signatur oder Untersignatur ist daher $(\alpha e e' f f' g g' l m n)$; weil diese Zahlen auch den Wert 0 haben können, so ist es möglich, β auf $\beta + 1$ Weisen in zwei, γ auf $\frac{1}{6}(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)$ Weisen in vier und δ auf $\frac{1}{2}(\delta+1)(\delta+2)$ Weisen in drei Summanden zu zerlegen.

Die Hauptsignatur $(\alpha\beta\gamma\delta)$ hat daher

$$(\beta+1)\cdot\tfrac{1}{6}(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\cdot\tfrac{1}{2}(\delta+1)(\delta+2)$$

Untersignaturen. Wir haben für die Hauptsignaturen je folgende Anzahl von Untersignaturen.

(3100)	2	2
(3011)	$4 \cdot 3 = 12$	22
(3003)	10	
(2201)	$3 \cdot 3 = 9$	9
(2120)	$2 \cdot 10 = 20$	98
(2112)	$2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$	
(2104)	$2 \cdot 15 = 30$	
(2031)	$20 \cdot 3 = 60$	280
(2023)	$10 \cdot 10 = 100$	
(2015)	$4 \cdot 21 = 84$	
(2007)	36	
(1310)	$4 \cdot 4 = 16$	40
(1302)	$4 \cdot 6 = 24$	
(1221)	$3 \cdot 10 \cdot 3 = 90$	273
(1213)	$3 \cdot 4 \cdot 10 = 120$	
(1205)	$3 \cdot 21 = 63$	
(1140)	$2 \cdot 35 = 70$	924
(1132)	$2 \cdot 20 \cdot 6 = 240$	
(1124)	$2 \cdot 10 \cdot 15 = 300$	
(1116)	$2 \cdot 4 \cdot 28 = 224$	
(1108)	$2 \cdot 45 = 90$	
(1051)	$56 \cdot 3 = 168$	1596
(1043)	$35 \cdot 10 = 350$	
(1035)	$20 \cdot 21 = 420$	
(1027)	$10 \cdot 36 = 360$	
(1019)	$4 \cdot 55 = 220$	
$(100\overline{11})$	78	

(0500)	6	6
(0411)	$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$	110
(0403)	$5 \cdot 10 = 50$	
(0330)	$4 \cdot 20 = 80$	672
(0322)	$4 \cdot 10 \cdot 6 = 240$	
(0314)	$4 \cdot 4 \cdot 15 = 240$	
(0306)	$4 \cdot 28 = 112$	
(0241)	$3 \cdot 35 \cdot 3 = 315$	2142
(0233)	$3 \cdot 20 \cdot 10 = 600$	
(0225)	$3 \cdot 10 \cdot 21 = 630$	
(0217)	$3 \cdot 4 \cdot 36 = 432$	
(0209)	$3 \cdot 55 = 165$	
(0160)	$2 \cdot 84 = 168$	4620
(0152)	$2 \cdot 56 \cdot 6 = 672$	
(0144)	$2 \cdot 35 \cdot 15 = 1050$	
(0136)	$2 \cdot 20 \cdot 28 = 1120$	
(0128)	$2 \cdot 10 \cdot 45 = 900$	
$(01\overline{10}0)$	$2 \cdot 4 \cdot 66 = 528$	
$(010\overline{12})$	$2 \cdot 91 = 182$	
(0071)	$120 \cdot 3 = 360$	6072
(0063)	$84 \cdot 10 = 840$	
(0055)	$56 \cdot 21 = 1176$	
(0047)	$35 \cdot 36 = 1260$	
(0039)	$20 \cdot 55 = 1100$	
$(002\overline{11})$	$10 \cdot 78 = 780$	
$(001\overline{13})$	$4 \cdot 105 = 420$	
$(000\overline{15})$	136	

Insgesamt 16866 Signaturen.

Man muß es also aufgeben, die Anzahl der Korrelationen für alle diese Signaturen zu ermitteln.

Freilich tritt eine Verkleinerung der Anzahl der zu behandelnden Signaturen dadurch ein, daß duale Signaturen und solche, die sich nur durch Vertauschung der Räume unterscheiden, zu gleichen Korrelations-Anzahlen führen. Es führen also folgende Signaturen:

$(\alpha e e' f f' g g' l m n)$, $(\alpha e' e g g' f f' m l n)$, $(\alpha e' e f' f g' g l m n)$, $(\alpha e e' g' g f' f m l n)$

zu denselben Anzahlen; was aber, da dies nicht notwendig vier verschiedene Signaturen sein müssen, die Anzahl der Signaturen noch nicht auf ein Viertel reduziert.

Es mag wenigstens für eine engere Zahl von Signaturen der Erfolg dieser Reduktion gezeigt werden; wir setzen $\gamma = 0$, d. h. nehmen keine doppelten Bedingungen an. Ferner soll von den Paaren von polaren Punkten und Ebenen und von den Paaren konjugierter Punkte und konjugierter Ebenen der erstere Raum mehr oder ebenso viele Punkte als Ebenen enthalten; d. h. es sei $e \geqq e'$ und $l \geqq m$; bei einer der vier Signaturen trifft dies ein. Wir haben dann nicht $\beta + 1$, sondern nur $\frac{\beta}{2} + 1$ oder $\frac{\beta + 1}{2}$ Zerlegungen von β in e und e', je nachdem β gerade oder ungerade ist. Ebenso haben wir, wenn $l + m = \delta - n = n_1$ ist, $\frac{n_1}{2}$ bzw. $\frac{n_1 - 1}{2} + 1$ Zerlegungen von n_1 in l und m. Nun durchläuft n_1 alle Werte von 0 bis δ, also ergeben sich:

$$\sum\left(\frac{1}{2} n_1 + 1\right) + \sum\left(\frac{n_1 - 1}{2} + 1\right)$$

Zerlegungen, wo in der ersten Summe n_1 durch die geraden, in der zweiten durch die ungeraden Zahlen der Reihe 0 bis δ geht. Das kann man $\frac{1}{2}\Sigma n_1 + (\delta + 1) - \frac{1}{2} U$ schreiben, wo U die Anzahl der ungeraden Zahlen in jener Reihe ist und die Summe sich über alle Zahlen n_1 von 0 bis δ erstreckt. Also ist $\Sigma n_1 = \frac{1}{2}\delta(\delta + 1)$, und U ist $\frac{1}{2}\delta$ oder $\frac{1}{2}(\delta + 1)$.

Daher ist die Anzahl der Zerlegungen $(h + 1)^2$, wenn $\delta = 2h$, und $(h + 1)(h + 2)$, wenn $\delta = 2h + 1$. Mithin enthalten die Hauptsignaturen, in denen $\gamma = 0$, nur noch folgende Anzahlen wesentlich verschiedener Untersignaturen:

(3100)	1	$(100\overline{11})$	42
(3003)	6	(0500)	3
(2201)	$2 \cdot 2 = 4$	(0403)	$3 \cdot 6 = 18$
(2104)	$1 \cdot 9 = 9$	(0306)	$2 \cdot 16 = 32$
(2007)	20	(0209)	$2 \cdot 30 = 60$
(1302)	$2 \cdot 4 = 8$	$(010\overline{12})$	$1 \cdot 49 = 49$
(1205)	$2 \cdot 12 = 24$	$(000\overline{15})$	72;
(1108)	$1 \cdot 25 = 25$		

insgesamt 373, immer noch eine Zahl, die vor der vollständigen Berechnung zurückschreckt. Hirst, der zuerst dies Problem a. a. O. in Angriff genommen, hat sich mit den 72 Signaturen des letzten Falls, in denen also nur konjugierte gleichartige Elemente, lauter einfache Bedingungen, gegeben sind, begnügt.

Man betrachtet wiederum, wie in § 62, Systeme von ∞^1 705
Korrelationen, welche 14 Elementarbedingungen genügen. In einem solchen Systeme $\mathfrak{S}$ seien μ, ρ, ν die Charakteristiken, d. h. die

Anzahlen der Korrelationen, welche den drei einfachen Bedingungen genügen, bzw. zwei gegebene Punkte, zwei gegebene Ebenen, zwei gegebene Geraden zu konjugierten zu haben[1]); ferner π, ω, ψ die Anzahlen der zentralen, planaren, axialen Korrelationen in $\mathfrak{S}$.

Dann bestehen zwischen diesen sechs Zahlen drei Beziehungen. Wir geben zwei Punkte A, B im Raume Σ, eine Gerade c' in Σ' und nehmen auf c' einen beweglichen Punkt X'_A; es gibt in $\mathfrak{S}$ dann μ Korrelationen, in denen A und X'_A konjugiert sind; in jeder derselben schneide man die Polarebene von B mit c' in X'_B, der so zu B konjugiert wird; wir haben also μ dem X'_A zugeordnete Punkte X'_B und ebenso umgekehrt. Die 2μ Koinzidenzen dieser Korrespondenz $[\mu, \mu]$ kommen folgendermaßen zu stande. Eine Koinzidenz X' ist den beiden Punkten A, B konjugiert; wenn das in einer nicht ausgearteten Korrelation geschieht, dann geht die Polare von AB durch X', und c' ist zu AB konjugiert; und umgekehrt, ist dies der Fall, so wird der Punkt von c', in dem sie von der Polare der AB getroffen wird, zu A und B konjugiert, also Koinzidenz. Solcher Koinzidenzen gibt es ν. Ferner in jeder der ω planaren Korrelationen hat der Schnittpunkt von c' mit der singulären Ebene von Σ' alle Ebenen durch die ihm in der charakteristischen Korrelation entsprechende Gerade derjenigen von Σ zu Polarebenen, von denen also je eine durch A und B geht; wodurch jener Punkt Koinzidenz wird. So kommen ω Koinzidenzen zu stande. Die andern Ausartungen liefern keine Koinzidenzen. Denn bei einer zentralen Korrelation entspricht der Punktreihe von c' projektiv ein Ebenenbüschel, derjenige nämlich, der in der charakteristischen Korrelation dem jene Punktreihe projizierenden Büschel des singulären Bündels korrespondiert; seine Axe trifft nicht die AB, und so haben die beiden nach A und B gehenden Ebenen verschiedene Pole auf c'. Und ebenso entspricht bei jeder der axialen Korrelationen die Punktreihe auf c' projektiv dem singulären Ebenenbüschel von Σ durch Vermittelung desjenigen in Σ', der zur Punktreihe perspektiv, zu jenem projektiv ist; es gilt dasselbe. Demnach haben wir:

$$2\mu = \nu + \omega.$$

Die duale Betrachtung gibt:

$$2\rho = \nu + \pi.$$

Es seien ferner a, b zwei sich schneidende Geraden in Σ und (C', γ') ein Strahlenbüschel in Σ'. Ein Strahl x'_a dieses Büschels ist

1) Die Charakteristiken lassen sich wieder als Gradzahlen deuten; μ ist die Klasse des Torsus der Polarebenen eines festen Punktes (in Σ oder Σ'), ρ die Ordnung der Kurve der Pole einer festen Ebene, ν der Grad der Regelfläche der Polaren einer festen Gerade in den Korrelationen von $\mathfrak{S}$.

in ν Korrelationen von $\mathfrak{S}$ dem a konjugiert; die Polare von b in einer dieser Korrelationen trifft einen Strahl x'_b jenes Büschels, der so zu b konjugiert wird. Wir erhalten in (C', γ') eine Korrespondenz $[\nu, \nu]$. Die 2ν Koinzidenzen entstehen diesmal auf drei Weisen. Eine Koinzidenz x' ist gleichzeitig zu a und b konjugiert; also muß, wenn die Korrelation nicht ausgeartet ist, ihre Polare a und b treffen, folglich entweder durch den Punkt ab gehen oder in der Ebene ab liegen; jenes bedeutet, daß die Punkte ab und C', dieses, daß die Ebenen ab und γ' konjugiert sind. Und umgekehrt, wenn die Punkte ab und C' konjugiert sind, so geht die Polarebene von ab durch C' und schneidet in (C', γ') einen Strahl x' ein, dessen Polare durch ab geht, der also dadurch zu a und b konjugiert wird. Duales gilt im andern Falle. Wir werden so zu $\mu + \rho$ Koinzidenzen geführt.

Für jede der axialen Korrelationen gibt es im Büschel (C', γ') einen Strahl x', welcher die singuläre Gerade trifft; ihm entspricht nicht eine einzige Gerade, sondern ein Strahlenbüschel, und darin je ein a, b treffender Strahl, wodurch diese Geraden zu x' konjugiert werden. Dagegen gehört bei einer zentralen Korrelation (C', γ') nicht zum singulären Bündel; dann hat jeder seiner Strahlen einen bestimmten entsprechenden, und von diesen Strahlen trifft keiner zugleich a und b. Und ebenso führen die planaren Korrelationen nicht zu Koinzidenzen. Demnach ist:

$$2\nu = \mu + \rho + \psi.$$

Diese Betrachtung ist in sich dual.

Lösen wir diese Formeln nach μ, ρ, ν auf, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &1)\quad 4\mu = \pi + 3\omega + 2\psi,\\ &2)\quad 4\rho = 3\pi + \omega + 2\psi,\\ &3)\quad 2\nu = \pi + \omega + 2\psi. \end{aligned}$$

Es lassen sich also die Charakteristiken eines Systems von Korrelationen, welche 14 Elementarbedingungen genügen, also die Anzahlen der Korrelationen für drei gewisse Signaturen, aus den Anzahlen der Ausartungen des Systems berechnen. Hat das System die Signatur $(\ldots.\ lmn)_{14}$, so handelt es sich um die drei Signaturen: $(\ldots., l+1, m, n)_{15}$, $(\ldots., l, m+1, n)_{15}$, $(\ldots., l, m, n+1)_{15}$.

Signaturen $(\ldots.)_{15}$, welche keine einfachen Bedingungen 706
enthalten, bei denen also $\delta = 0$, fügen sich dieser Methode nicht ein; deren sind (in nicht reduzierter Anzahl):

$$2 + 20 + 16 + 78 + 6 + 80 + 168 = 362.$$

Unter ihnen heben wir diejenigen hervor, bei denen auch $\gamma = 0$, also keine doppelte Bedingungen auftreten. Dies sind die sechs Signaturen (0500) und die zwei Signaturen (3100). Jene können wir einfacher mit (ee') bezeichnen, wo $e + e' = 5$ ist, und haben (50), (41), ... (05), welche sich auf (50), (41), (32) reduzieren. Wir wissen aus Nr. 468, daß (41) von (50) sich nicht wesentlich unterscheidet, und daß die Anzahl 1 ist und ebenso, daß bei (32) keine Korrelation möglich ist.

(3100) ist, reduziert, nur eine Signatur: dreimal sind polare Geraden gegeben: p, p'; q, q'; r, r' und einmal Pol und Polarebene: T, τ'. Die beiden Regelscharen (pqr) und $(p'q'r')$ werden entsprechend, und die Projektivität zwischen ihnen ist bestimmt; dadurch ist es auch die des Kegels der Ebenen aus T nach den Geraden von (pqr) und des Kegelschnitts der Schnittpunkte von τ' mit denen von $(p'q'r')$ und infolge dessen wiederum die Projektivität der Leitscharen. Damit ist aber (Nr. 501) die räumliche Korrelation völlig und eindeutig bestimmt. Der Signatur (3100) entspricht demnach die Anzahl 1.

Es bleiben also (nicht reduziert) 354 andere Signaturen mit doppelten und ohne einfache Bedingungen, die unserm Verfahren sich nicht einfügen.

707 Wir kehren zu diesem zurück. Um die Ausartungszahlen π, ω, ψ zu bestimmen, bilden wir, wiederum eine einfache Bedingung, wenn das möglich ist, fallen lassend, Systeme $\mathfrak{S}_c$, $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{S}_a$ von ausgearteten Korrelationen erster Stufe, je zentralen, planaren, axialen, welche 13 Bedingungen genügen. Wir nennen diesmal, etwas anders als in § 62, unter Anwendung der Produktbezeichnung der abzählenden Geometrie,[1]) mit Hirst die Charakteristiken in einem $\mathfrak{S}_c$, $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{S}_a$:

$$\pi\mu,\ \pi\rho,\ \pi\nu; \quad \omega\mu,\ \omega\rho,\ \omega\nu; \quad \psi\mu,\ \psi\rho,\ \psi\nu.$$

In einem $\mathfrak{S}_c$ haben wir zwei Ausartungen zweiter Stufe: Γ_{cp}, Γ_{ca}; deren Anzahlen seien mit $\pi\omega = \omega\pi$, $\pi\psi = \psi\pi$ bezeichnet, in $\mathfrak{S}_p$: $\omega\pi$, $\omega\psi$, und in $\mathfrak{S}_a$: $\psi\pi$, $\psi\omega$; so daß es sich im ganzen nur um drei Anzahlen handelt, die Anzahlen:

$$\pi\omega = \omega\pi, \quad \pi\psi = \psi\pi, \quad \omega\psi = \psi\omega$$

der Γ_{cp}, Γ_{ca}, Γ_{ap}, welche den 13 gegebenen Bedingungen genügen. Die Betrachtungen von Nr. 705, dort auf ein System allgemeiner Korrelationen angewandt, wiederholen wir jetzt für ein System $\mathfrak{S}_c$, $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{S}_a$; „nicht ausgeartet" dort bedeutet jetzt: „nicht ausgeartet in zweiter Stufe".

Die Formel $2\mu = \nu + \omega$ führt dann für $\mathfrak{S}_c$ zu der Formel:

$$2\pi\mu = \pi\nu + \pi\omega.$$

---

1) Sie wurde a. a. O. nicht benutzt, um die Vergleichung mit Hirsts und meinen Arbeiten zu erleichtern.

Die Dualisierung führt nicht zu einer Formel für $\mathfrak{S}_c$, sondern für $\mathfrak{S}_p$. Die dritte Formel $2\nu = \mu + \rho + \psi$ führt zu:

$$2\pi\nu = \pi\mu + \pi\rho + \pi\psi.$$

Wir haben also nur zwei Formeln für $\mathfrak{S}_c$, und ebenso für $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{S}_a$. Die eben erhaltenen sind aber uns schon bekannte Formeln. Die erste stimmt überein mit der Formel:

$$2\mu_{13} = \nu_{13} + \lambda_{13}$$

in Nr. 461 IX $(\alpha\beta\gamma\delta)_{13}$. Es handelt sich hier wie dort um die Korrelation zweier Bündel, welche 13 Bedingungen genügt, und die Bündel-Ausartung mit zwei singulären Strahlenbüscheln, deren dortige Anzahl λ_{13} ist, ist unsere jetzige zentral-planare Korrelation mit der Anzahl $\pi\omega$; μ_{13}, ν_{13} sind die jetzigen $\pi\mu$, $\pi\nu$.

Unsere zweite jetzige Formel ist mit der zweiten dortigen:

$$2\nu_{13} = \mu_{13} + \zeta_{13,A}' + \zeta_{13,B}$$

nicht identisch, sondern ist allgemeiner und umfaßt sie. Zwei Ebenen sind in einer Γ_c konjugiert, wenn in einer der Scheitel des singulären Bündels liegt, was also auf zwei Weisen geschehen kann; wir fanden damals zwei Kurven, von den Ordnungen $\zeta_{13,A}$, $\zeta_{13,B}$, als Örter der Scheitel, daher ist $\pi\rho = \zeta_{13,A} + \zeta_{13,B}$. Gegeben waren früher, bei den korrelativen Bündeln, folgende vier Elementarbedingungen: nach A_i und b_i, a_i und B_i sollen polare Elemente gehen, nach $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$; $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ konjugierte, d. h. jetzt, wenn wir die korrelativen Bündel als zentralkorrelative Räume auffassen: A_i, b_i; a_i, B_i; $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$; $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ sollen konjugiert sein. Wir hatten also damals nicht mit allen den Elementarbedingungen zu tun, die wir jetzt heranziehen. Bei denen, auf die wir uns dort beschränkten, waren, wie es damals auch erkannt wurde, keine axialen Bündel-Korrelationen möglich, das sind jetzt zentral-axiale Raumkorrelationen. In jenen Fällen war $\pi\psi = 0$, im allgemeinen nicht.

Die Dualisierung liefert die beiden Formeln für ein $\mathfrak{S}_p$:

$$2\omega\rho = \omega\nu + \omega\pi, \quad 2\omega\nu = \omega\rho + \omega\mu + \omega\psi.$$

Endlich für ein System $\mathfrak{S}_a$ liefert die erste Methode von Nr. 705 und die Dualisierung die Formeln:

$$2\psi\mu = \psi\nu + \psi\omega, \quad 2\psi\rho = \psi\nu + \psi\pi.$$

Die andere Methode kann zu nichts führen, weil die Geraden a, b, im allgemeinen nicht mit der singulären Axe inzident, die andere singuläre Axe zur Polare haben, so daß durchweg der je von dieser getroffene Strahl von (C', γ') zu beiden Geraden konjugiert ist, also in diesem Büschel Identität, keine Korrespondenz mit endlicher Zahl von Koinzidenzen entsteht.

Die beiden Formeln sind identisch mit den Formeln:

$$2\mu = \omega + \chi, \quad 2\rho = \theta + \chi$$

des verallgemeinerten Problems der räumlichen Projektivität in Nr. 246. Es stimmen überein: $\psi\mu$, $\psi\rho$, $\psi\omega$, $\psi\pi$, $\psi\nu$ mit den dortigen μ, ρ, ω, θ, $\chi = \chi_a + \chi_b$; denn was das letzte anlangt, so wird die Bedingung $\psi\nu$ der Konjugiertheit zweier Geraden erfüllt, wenn eine von ihnen der singulären Axe begegnet, was χ_a- oder χ_b-mal geschieht.

Die Formeln für $\mathfrak{S}_c$ und $\mathfrak{S}_p$ etwas ändernd, haben wir also folgende drei Formelpaare:

$$\mathfrak{S}_c \begin{cases} 4) & 3\pi\mu = \pi\rho + \pi\psi + 2\pi\omega \\ 5) & 3\pi\nu = 2\pi\rho + 2\pi\psi + \pi\omega, \end{cases}$$

$$\mathfrak{S}_p \begin{cases} 6) & 3\omega\rho = \omega\mu + \omega\psi + 2\omega\pi, \\ 7) & 3\omega\nu = 2\omega\mu + 2\omega\psi + \omega\pi, \end{cases}$$

$$\mathfrak{S}_a \begin{cases} 8) & 2\psi\mu = \psi\nu + \psi\omega, \\ 9) & 2\psi\rho = \psi\nu + \psi\pi. \end{cases}$$

Aus den beiden Ausartungszahlen und einer Charakteristik finden wir die beiden andern.

In ähnlicher Weise erhalten wir für ein System $\mathfrak{S}_{ca}$, $\mathfrak{S}_{pa}$, $\mathfrak{S}_{cp}$ von Γ_{ca}, Γ_{pa}, Γ_{cp}, welche 12 Bedingungen genügen und unter denen allen die Γ_{cpa} als einzige Ausartung auftritt, je eine Relation:

$$\mathfrak{S}_{ca} \quad 10) \quad 2\pi\psi\mu = \pi\psi\nu + \pi\psi\omega,$$

$$\mathfrak{S}_{pa} \quad 11) \quad 2\omega\psi\rho = \omega\psi\nu + \omega\psi\pi,$$

$$\mathfrak{S}_{cp} \quad 12) \quad 2\pi\omega\nu = \pi\omega\mu + \pi\omega\rho + \pi\omega\psi,$$

worin $\pi\psi\omega = \omega\psi\pi = \pi\omega\psi$ die Anzahl der genannten Ausartung im System ist, und $\pi\psi\mu, \ldots$ sind die Charakteristiken; von denen aber je nur zwei auftreten.

Die erste Methode und ihre Dualisierung führt zu den beiden ersten Formeln, die zweite zur dritten.

708 Beschränken wir uns, wie gesagt, auf solche Signaturen, welche nur einfache Elementarbedingungen enthalten, die wir daher kurz mit (lmn) bezeichnen können, und ermitteln zunächst die Anzahl der Γ_{cpa}, welche zwölf solchen Bedingungen genügen; eine solche Korrelation ist vollständig durch die beiden Systeme ihrer singulären Elemente bestimmt, und jedes hat, wegen der gegenseitigen Inzidenz der Elemente, die Mannigfaltigkeit $6 = 3 + 2 + 1 = 4 + 1 + 1$. Jedes muß bestimmt sein; also müssen von den zwölf Bedingungen sechs auf das eine und sechs auf das andere kommen. Zwei Punkte, zwei Ebenen, zwei Geraden sind aber in einer Γ_{cpa} konjugiert, wenn einer der Punkte mit der singulären Ebene, eine der Ebenen mit dem singulären Punkte, eine der Geraden mit der singulären Axe (ihres Raums) inzident ist (Nr. 700). Wir müssen also $l + m + n = 12$ zerlegen in $l' + m' + n' = 6$ und $l'' + m'' + n'' = 6$, die je zur Bestimmung des einen und des andern singulären

Gebildes dienen. Ferner für die Bestimmung eines Punktes oder einer Ebene dürfen nicht mehr als drei, für die einer Grade nicht mehr als vier Inzidenzen gegeben sein; d. h. l', l'', m', m'' dürfen nicht drei, n' und n'' nicht vier überschreiten, wenn eine Γ_{cpa} möglich sein soll.

Wenn eine der Zahlen $l', \ldots n''$ null ist, so bedeutet dies für das eine singuläre Element Unbestimmtheit und für mindestens eins der andern, die ja inzident sein sollen, Überbestimmung.

Bei solchen Signaturen (l, m, n), welche Γ_{cpa} zulassen, müssen also l und m im Spielraume 2 bis 6, n in dem Spielraume 2 bis 8 sich bewegen. Nehmen wir $l \geqq m$, so schließen wir die durch Dualität sich ergebenden Fälle aus. Ferner können wir auch $l' \geqq l''$ annehmen; es wird dann, vorausgesetzt, daß die beiden Teilsignaturen $(l'm'n)$ und $(l''m''n'')$ verschieden sind, die gewonnene Zahl mit 2 zu multiplizieren sein, da diese Teilsignaturen den beiden Räumen ja auch in umgekehrter Weise zugewiesen werden können. Liegt also z. B. die Signatur (534) vor, so ist sie auf zwei Weisen in Teilsignaturen zu zerlegen: (321) und (213) oder (312) und (222), wofern die obigen Beschränkungen eingehalten werden. Die fünf Paare konjugierter Punkte liefern, wenn wir die erste Zerlegung betrachten, auf zehn Weisen drei Punkte in Σ und zwei Punkte in Σ', die drei Paare konjugierter Ebenen auf drei Weisen zwei Ebenen in Σ, eine Ebene in Σ' und die vier Paare konjugierter Geraden auf vier Weisen eine Gerade in Σ, drei Geraden in Σ'; das gibt 10.3.4 Kombinationen. Jedesmal ist in Σ die singuläre Ebene durch die drei Punkte bestimmt, der singuläre Punkt durch die zwei Ebenen und die Inzidenz mit der singulären Ebene, endlich die singuläre Gerade durch die Inzidenz mit den beiden schon bestimmten singulären Elementen und der einen Gerade, also eindeutig. In Σ' ist die singuläre Gerade zweideutig durch die Inzidenz mit den drei Geraden und der Verbindungslinie der beiden Punkte bestimmt, auf ihr der singuläre Punkt durch die Ebene, und durch sie und jene Verbindungslinie die singuläre Ebene. Da nun (321) und (213) verschieden sind, so ist noch mit 2 zu multiplizieren; also führt die erste Zerlegung zu $10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 480$ Korrelationen Γ_{cpa}, die andere, wie eine ähnliche Betrachtung lehrt, zu $10 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 720$; so daß es bei der Signatur (534) 1200 solche Korrelationen gibt.

Wir haben 13 Signaturen, welche den obigen Bedingungen genügen, dazu 9 duale, die verschieden sind; damit auch diese in der folgenden Tabelle vorkommen, ist die Signaturbezeichnung oben (lmn), unten (mln). In der ersten Kolonne der Tabelle steht die Signatur, in der zweiten die Anzahl der möglichen Zerlegungen in Teilsignaturen, in der dritten die Zahl $\pi\omega\psi$.

(lmn)		$\pi\omega\psi$	(lmn)		$\pi\omega\psi$
(228)	1	1120	(534)	2	1200
(327)	1	1680	(624)	1	240
(336)	2	2520	(543)	2	960
(426)	2	1440	(633)	1	360
(435)	3	2160	(552)	1	400
(525)	1	800	(642)	1	240.
(444)	4	1824	(mln)		
(mln)					

Für die übrigen Signaturen ist die Anzahl $\pi\omega\psi$ gleich 0.

709 Wir gehen jetzt zu den Γ_{ca}, für welche die Formel:

$$10)\quad 2\pi\psi\mu = \pi\psi\nu + \pi\omega\psi$$

gilt. Nach konjugierten Punkten müssen entsprechende Ebenen der singulären Büschel gehen; damit die Projektivität bestimmt sei, müssen mindestens zwei Paare konjugierter Punkte gegeben sein, das dritte liefert, wenn diese kleinste Zahl vorliegt, das Paar der Bedingung, die zur Charakteristik μ gehört. Also ist $l \geqq 2$. Wie oben ist $6 \geqq m \geqq 2$, weil die singulären Punkte nicht von der Projektivität abhängen; für n ist obere Grenze wie oben 8, dagegen ist keine untere Grenze, weil die singulären Axen auch durch die Projektivität bestimmt werden.

Wenn $l = 2$, so liefert die Charakteristik ν keine Bedingung zur vollständigen Festlegung der Projektivität; diese bleibt unbestimmt, was aussagt, daß die singulären Elemente überbestimmt sind. Also jedesmal wenn $l = 2$ ist, ist $\nu = 0$; daher kann μ durch die Formel berechnet werden; das μ für (lmn) ist ν für $(l+1, m, n-1)$, und wir haben wieder durch die Formel μ für diese Signatur.

So gelangen wir z. B., von (2 2 8) ausgehend, zu folgender Tabelle, in der durchweg $m = 2$ ist:

(lmn)	$\pi\omega\psi$	$\pi\psi\nu$	$\pi\psi\mu$
(228)	1120	0	560
(327)	1680	560	1120
(426)	1440	1120	1280
(525)	800	1280	1040
(624)	240	1040	640
(723)	0	640	320
(822)	0	320	160
(921)	0	160	80
$(\overline{10}20)$	0	80	40.

Diese letzte Zahl 40 läßt sich mit einem Ergebnis des Problems der räumlichen Projektivität in Zusammenhang bringen.

Die beiden Paare konjugierter Ebenen α, α'; β, β' dienen dazu, auf den singulären Axen die singulären Punkte festzulegen, was anf zwei Weisen möglich ist, der eine auf α, der andere auf β', der eine auf β, der andere auf α'. Die Axen selbst sind durch die Projektivität bestimmt. Es gibt — immer bestimmte Zuordnung vorausgesetzt — $\frac{1}{2} \cdot 40 = 20$ Paare von Geraden, von denen nach 11 Paaren von Punkten entsprechende Ebenen projektiver Büschel gehen (Nr. 251).[1])

Wir bilden ebenso die Gruppen der Signaturen, die zu $m = 3$, 4, 5, 6 gehören, von (2 3 7) bis (9 3 0), von (2 4 6) bis (8 4 0), von (2 5 5) bis (7 5 0), von (2 6 4) bis (6 6 0) und erhalten folgende Tabelle der von 0 verschiedenen Anzahlen $\pi\psi$, $\omega\psi$ der zentral-axialen und der planar-axialen Korrelationen, welche 13 Bedingungen genügen.

(lmn)	$\pi\psi$	(lmn)	$\pi\psi$
(328)	560	(346)	720
(427)	1120	(445)	1440
(526)	1280	(544)	1632
(625)	1040	(643)	1296
(724)	640	(742)	768
(823)	320	(841)	384
(922)	160	(940)	192
$(\overline{10}21)$	80		
$(\overline{11}20)$	40	(355)	400
		(454)	800
(337)	840	(553)	880
(436)	1680	(652)	640
(535)	1920	(751)	320
(634)	1560	(850)	160
(733)	960		
(832)	480	(364)	120
(931)	240	(463)	240
$(\overline{10}30)$	120	(562)	240
(mln)	$\omega\psi$	(661)	120
		(760)	60
		(mln)	$\omega\psi$.

Das letzte Ergebnis bedeutet, da die singulären Punkte durch die sechs Paare konjugierter Ebenen in 20 Weisen bestimmt sind, daß in jedem solchen Paare singulärer Bündel drei Paare singulärer Axen sich befinden, welche nach den sieben Paaren konjugierter Punkte projektive Ebenenbüschel senden (Nr. 233).

1) (kl) bedeutete dort, daß $k + 3$ Paare von Punkten und $l + 3$ Paare von Ebenen gegeben sind.

Wir sehen, daß nicht bloß bei $m = 0$, bzw. $l = 0$ kein Γ_a oder Γ_{pa} möglich sind.

710 Für ein System $\mathfrak{S}_{cp}$ von zentral-planaren Korrelationen gilt die Beziehung:

$$12) \qquad 2\pi\omega\nu = \pi\omega\mu + \pi\omega\rho + \pi\omega\psi.$$

In den singulären Strahlenbüscheln sind entsprechende Strahlen mit konjugierten Geraden inzident; damit diese Projektivität festgelegt sei, sind, außer dem Paare konjugierter Geraden in der Charakteristik ν, mindestens zwei Paare notwendig, also muß $n \geqq 2$ sein; daher ist $l + m \leqq 10$; l und m können, wie schon früher erörtert, sechs nicht überschreiten; wir fangen an mit dem höchsten Wert 6 von m (oder l bei den dualen Signaturen) und dem niedrigsten Wert 2 von n, also ist (462) die Ausgangssignatur. Die andere mit $n = 2$ ist (552). Da aber die Charakteristiken μ, ρ nicht das dritte Paar für die Bestimmung der Projektivität bringen, so bleibt diese unbestimmt, und die andern Elemente sind überbestimmt; folglich haben in diesen beiden Signaturen die genannten Charakteristiken den Wert 0. Also ergibt sich durch 12) aus dem bekannten Werte von $\pi\omega\psi$ der Wert von $\pi\omega\nu$, nämlich 120 bei (462), 200 bei (552).

Für $n = 3$ haben wir die Signaturen (363) und (453); nun ist allgemein μ für (lmn) gleich ν für $(l+1, m, n-1)$ und ρ für (lmn) gleich μ für $(l-1, m+1, n)$; daher ist, für (363), μ gleich ν für (462), also 120, und ρ gleich μ für (273), also 0, da bei dieser Signatur, wegen $m > 6$, keine Γ_{cp} möglich ist; mithin ist, bei (363), ν infolge der Formel 240. Bei (453) finden wir μ gleich ν von (552), also 200, und ρ gleich μ von (363), also 120, daher $\nu = 640$. Und so geht es weiter durch alle Gruppen der Signaturen bis $n = 12$; immer sind μ und ρ aus vorangehenden Ergebnissen zu bestimmen.

Wir erhalten folgende von 0 verschiedenen Anzahlen der zentral-planaren Korrelationen:

(lmn)	$\pi\omega$	(lmn)	$\pi\omega$
(463)	120	(067)	60
(553)	200	(157)	580
(364)	240	(247)	2428
(454)	640	(337)	3646
(265)	240	(058)	320
(355)	1040	(148)	1504
(445)	1552	(238)	3872
(166)	120	(049)	912
(256)	1040	(139)	2688
(346)	2376	(229)	4432
(lmn)	$\pi\omega$	(lmn)	$\pi\omega$

(lmn)	$\pi\omega$	(lmn)	$\pi\omega$
$(0\,3\,\overline{10})$	1800	$(0\,1\,\overline{12})$	3120
$(1\,2\,\overline{10})$	3560	$(0\,0\,\overline{13})$	3120
$(0\,2\,\overline{11})$	2680	(mln)	$\pi\omega$.
$(1\,1\,\overline{11})$	3560		
(mln)	$\pi\omega$		

Das letzte Ergebnis sagt aus, daß, wenn 13 Paare von Geraden gegeben sind, 3120 Paare von Strahlenbüscheln existieren, welche so projektiv sind, daß entsprechende Strahlen je gepaarte Geraden treffen (Nr. 467).

Für ein System von Γ_c, welche 13 Bedingungen genügen, fanden 711
wir die beiden Formeln 4), 5):

$$3\pi\mu = \pi\rho + \pi\psi + 2\pi\omega,$$
$$3\pi\nu = 2\pi\rho + 2\pi\psi + \pi\omega.$$

Wiederum dürfen nicht mehr als sechs Paare konjugierter Ebenen gegeben sein, weil sonst die singulären Punkte überbestimmt sind; also $m \leqq 6$, und wenn $m = 6$, so bringt die Charakteristik ρ ein siebentes Paar, also ist sie null; aus den vorangehenden Tabellen haben wir $\pi\psi$ und $\pi\omega$; folglich können wir für die Signaturen, in denen $m = 6$ ist, von (067) bis (760) vermöge der Formeln $\pi\mu$, $\pi\nu$ berechnen.

Wir bilden Gruppen für fallende Werte von m.

Für die Gruppen, in denen $m \leqq 5$ ist, gilt, daß $\pi\rho$ für (lmn) wieder gleich $\pi\mu$ für $(l-1, m+1, n)$ oder $\pi\nu$ für $(l, m+1, n-1)$, so daß wir in jeder Gruppe die $\pi\rho$ aus der vorangehenden entnehmen können. Die Übereinstimmung der beiden genannten $\pi\mu$ und $\pi\nu$ gibt zahlreiche Kontrollen.

Somit ergeben sich folgende nicht verschwindenden Anzahlen π, ω für zentrale, bzw. planare Korrelationen, welche 14 Bedingungen genügen:

(lmn)	π	(lmn)	π	(lmn)	π	(lmn)	π
(068)	20	(059)	120	$(0\,4\,\overline{10})$	384	$(0\,3\,\overline{11})$	856
(167)	40	(158)	220	(149)	648	$(1\,3\,\overline{10})$	1328
(266)	80	(257)	400	(248)	1076	(239)	2008
(365)	160	(356)	720	(347)	1752	(338)	2940
(464)	200	(455)	880	(446)	2064	(437)	3288
(563)	160	(554)	760	(545)	1808	(536)	2832
(662)	80	(653)	480	(644)	1224	(635)	1936
(761)	40	(752)	240	(743)	672	(734)	1088
(860)	20	(851)	120	(842)	336	(833)	544
(mln)	ω	(950)	60	(941)	168	(932)	272
		(mln)	ω	$(\overline{10}\,4\,0)$	84	$(\overline{10}\,3\,1)$	136
				(mln)	ω	$(\overline{11}\,3\,0)$	68
						(mln)	ω

(lmn)	π	(lmn)	π	(lmn)	π
$(02\overline{12})$	1464	$(01\overline{13})$	2016	$(00\overline{14})$	2384
$(12\overline{11})$	2072	$(11\overline{12})$	2568	$(10\overline{13})$	2752
$(22\overline{10})$	2816	$(21\overline{11})$	3064	$(20\overline{12})$	2936
(329)	3624	$(31\overline{10})$	3312	$(30\overline{11})$	2808
(428)	3748	(419)	3000	$(40\overline{10})$	2304
(527)	3088	(518)	2252	(509)	1608
(626)	2064	(617)	1416	(608)	964
(725)	1152	(716)	768	(707)	512
(824)	576	(815)	384	(806)	256
(923)	288	(914)	192	(905)	128
$(\overline{10}22)$	144	$(\overline{10}13)$	96	$(\overline{10}04)$	64
$(\overline{11}21)$	72	$(\overline{11}12)$	48	$(\overline{11}03)$	32
$(\overline{12}20)$	36	$(\overline{12}11)$	24	$(\overline{12}02)$	16
(mln)	ω	$(\overline{13}10)$	12	$(\overline{13}01)$	8
		(mln)	ω	$(\overline{14}00)$	4.
				(mln)	ω

Die letzte Gruppe $m = 0$ muß natürlich dieselben Zahlen liefern, welche sich im Problem der korrelativen Bündel ergeben haben, wenn l Paare Punkte und $14 - l$ Paare Geraden gegeben sind, nach denen konjugierte Strahlen und konjugierte Ebenen gehen sollen, also bei den Signaturen $(0 0 \gamma \delta)_{14}$ der dortigen Bezeichnung (Nr. 466, Tab. (14)).

In der ersten Gruppe: $m = 6$ sind alle Zahlen durch 20 teilbar; in der Tat, durch die sechs Paare konjugierter Ebenen haben wir 20 Lagen für die singulären Punkte. Jedesmal handelt es sich dann um Bündel mit festen Scheiteln, welche nach l Paaren von Punkten und $8 - l$ Paaren von Geraden konjugierte Elemente von korrelativen Bündeln senden. Die Quotienten durch 20 müssen also die in Nr. 418, Tab. (ζ) gefundenen Zahlen für korrelative Felder oder Bündel und die Signaturen $(0, 0, \gamma, \delta)_8$ sein.

Vermittelst ähnlicher Divisionen können auch andere der jetzigen Ergebnisse mit früheren verglichen werden.

Für ein System $\mathfrak{S}_a$ von axialen Korrelationen haben wir die Formeln:

$$8)\qquad 2\psi\mu = \psi\nu + \psi\omega$$

$$9)\qquad 2\psi\rho = \psi\nu + \psi\pi.$$

Ersichtlich ist $\psi\mu$ für (lmn) gleich $\psi\rho$ für (mln); also genügt die Berechnung der einen Charakteristik, etwa $\psi\rho$, und die Formel 9). Jetzt wird nach fallenden Werten von n angeordnet, und der höchste Wert von n, der Γ_a zuläßt, ist, aus mehrfach erwähntem Grunde, 8. Wenn $m < 3$ ist, so ist die Projektivität der Punktreihen auf den singulären Axen noch nicht bestimmt; bei der Charakteristik $\psi\rho$ ist sie bestimmt, wenn $m = 2$. Daraus folgt, daß $m \geqq 2$ genommen werden muß, und daß, wenn $m = 2$, $\psi\nu = 0$ ist. Für andere $\psi\nu$ gilt, daß $\psi\nu$ für (lmn) gleich $\psi\rho$ für $(l, m-1, n+1)$; also sind sie aus vorangehenden Zahlen zu entnehmen. Die Zahlen $\psi\pi$ sind aus früheren Tabellen bekannt; die Formel 9) liefert dann $\psi\rho$. Die Anzahlen der axialen Korrelationen sind also:

(lmn)	ψ	(lmn)	ψ		
(338)	280	(383)	160		
(347)	560	(473)	640		
		(563)	1168		
(356)	640			(lmn)	ψ
(446)	1120	(392)	80	$(3\overline{11}0)$	20
		(482)	520	$(4\overline{10}0)$	80
(365)	520	(572)	704	(590)	176
(455)	1280	(662)	904	(680)	256
				(770)	286
(374)	320	$(3\overline{10}1)$	40	(mln)	ψ
(464)	1040	(491)	160		
(554)	1456	(581)	352		
(mln)	ψ	(671)	512		
		(mln)	ψ		

Die letzte Gruppe $n = 0$ liefert uns nur Ergebnisse, die wir schon aus dem Problem der räumlichen Projektivität kennen; denn es sind in ihr l Paare von Punkten, $m = 14 - l$ Paare von Ebenen gegeben, und es handelt sich um die Anzahl der Paare von Geraden, die nach den Punkten projektive Ebenenbüschel senden und von den Ebenen in projektiven Punktreihen geschnitten werden. Dort waren $k + 3$ Paare von Punkten, $l + 3$ Paare von Ebenen gegeben, und unsere jetzigen Signaturen $(3\overline{11}0)$, $(4\overline{10}0)$, ... $(\overline{11}30)$ hießen dort (08), (17) ... (80). In Nr. 251 $(k + l = 8)$ finden wir unsere Zahlen.

Die Zahl 280 bei (338) läßt sich folgendermaßen direkt ermitteln. Die acht Geraden in Σ lassen sich auf 70 Weisen zu vier zusammenstellen, dazu nimmt man die vier nicht konjugierten in Σ'; man kann dann jede der beiden Treffgeraden jener Geraden mit jeder der Treffgeraden dieser kombinieren und hat 280 Paare singulärer Axen; und die drei Paare konjugierter Punkte und drei Paare konjugierter Ebenen legen gerade die beiden Projektivitäten fest.

Wenn $l + m = 13$, $n = 1$, so gehören zu $(3\overline{10}1)$, (491), ... in der jetzigen Bezeichnung oder zu (07), (16) ... in der früheren zwei Regelflächen vom Grade 20, 80, 176, 256, ... mit entsprechenden Geraden, die den Projektivitäts-Bedingungen in bezug auf die l Punktepaare und m Ebenenpaare genügen (Nr. 251, $k + l = 7$). Die 20, ...

Geraden der einen Regelfläche, welche die eine der gegebenen Geraden treffen, und ihre entsprechenden auf der andern Regelfläche, die 20, ... dieser, welche die andere Gerade treffen, und ihre entsprechenden auf jener geben unsere 2.20, 2.80, ... Paare singulärer Axen.

Es können noch andere Bestätigungen gewonnen werden.

712 Wir kommen nun zum eigentlichen Problem, der Bestimmung der Anzahl der allgemeinen Korrelationen, welche 15 Elementarbedingungen genügen. Für ein System $\mathfrak{S}$ von Korrelationen, von denen 14 solche Bedingungen erfüllt werden, gelten die drei Formeln 1), 2), 3) in Nr. 705:

$$4\mu = \pi + 3\omega + 2\psi,$$
$$4\rho = 3\pi + \omega + 2\psi,$$
$$2\nu = \pi + \omega + 2\psi.$$

Da wir die Werte von π, ω, ψ kennen, so liefern uns diese Formeln die Charakteristiken und damit die Anzahlen für $(lmn)_{15}$ und zwar, wenn alle drei Zahlen l, m, n größer als 0 sind, dreimal: als μ bei $(l-1,\ m,\ n)_{14}$, als ρ bei $(l,\ m-1,\ n)_{14}$, als ν bei $(l,\ m,\ n-1)_{14}$; sonst zwei- oder einmal.

Das Resultat ist in der folgenden Tabelle zusammen gestellt, welche nach n angeordnet ist:

(lmn)		(lmn)		(lmn)	
$(\overline{15}00)$	1	$(\overline{14}01)$	2	$(\overline{13}02)$	4
$(\overline{14}10)$	3	$(\overline{13}11)$	6	$(\overline{12}12)$	12
$(\overline{13}20)$	9	$(\overline{12}21)$	18	$(\overline{11}22)$	36
$(\overline{12}30)$	27	$(\overline{11}31)$	54	$(\overline{10}32)$	108
$(\overline{11}40)$	61	$(\overline{10}41)$	122	(942)	244
$(\overline{10}50)$	103	(951)	206	(852)	412
(960)	133	(861)	266	(762)	532
(870)	143	(771)	286	(mln)	
(mln)		(mln)			

(lmn)		(lmn)		(lmn)	
$(\overline{12}03)$	8	$(\overline{11}04)$	16	$(\overline{10}05)$	32
$(\overline{11}13)$	24	$(\overline{10}14)$	48	(915)	96
$(\overline{10}23)$	72	(924)	144	(825)	288
(933)	216	(834)	432	(735)	864
(843)	488	(744)	976	(645)	1752
(753)	824	(654)	1488	(555)	2116
(663)	984	(mln)		(mln)	
(mln)					

(lmn)		(lmn)		(lmn)	
(906)	64	(807)	128	(708)	256
(816)	192	(717)	384	(618)	728
(726)	576	(627)	1072	(528)	1744
(636)	1568	(537)	2416	(438)	3080
(546)	2624	(447)	3184	(mln)	
(mln)		(mln)			

(lmn)		(lmn)		(lmn)	
(609)	492	$(50\overline{10})$	864	$(40\overline{11})$	1344
(519)	1236	$(41\overline{10})$	1824	$(31\overline{11})$	2320
(429)	2412	$(32\overline{10})$	2816	$(22\overline{11})$	2816
(339)	3220	(mln)		(mln)	
(mln)					

(lmn)		(lmn)		(lmn)		(lmn)	
$(30\overline{12})$	1832	$(20\overline{13})$	2200	$(10\overline{14})$	2384	$(00\overline{15})$	2384.
$(21\overline{12})$	2568	$(11\overline{13})$	2568	(mln)			
(mln)		(mln)					

In dem System $(00\overline{14})$ haben nicht bloß die drei Charakteristiken, sondern auch die beiden Ausartungszahlen π und ω den Wert 2384, während $\psi = 0$ ist; und ähnliches gilt für $(22\overline{10})$, wo ebenfalls $\psi = 0$ und jene fünf den Wert 2816 haben.

Die höchste Anzahl ist 3220 bei (339).

Eine räumliche Korrelation wird Polarraum, wenn sechs (beliebig 713
gelegene) Paare doppelt konjugierter Punkte (oder Ebenen) vorhanden sind (Nr. 567). Ist daher $l \geqq 12$, so können wir $l - 6$ Paare konjugierter Punkte geben und bei sechs von ihnen die Punkte auch in umgekehrter Weise den beiden Räumen zuordnen; wir bestimmen dann durch $l - 6$ Paare konjugierter Punkte, m Paare konjugierter Ebenen, n Paare konjugierter Geraden eine Polarkorrelation. Daher haben wir folgende Anzahlen in bezug auf die Festlegung eines Polarraums oder einer Fläche 2. Grades durch konjugierte gleichartige Elemente.

(lmn)		(lmn)		(lmn)	
(900)	1	(801)	2	(702)	4
(810)	3	(711)	6	(612)	12
(720)	9	(621)	18	(603)	8
(630)	27	(mln)		(mln)	
(mln)					

Das sind jedoch von den $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 = 55$ Signaturen des Polarraums mit gegebenen konjugierten Elementen nur 20, oder von den 30 wesentlich verschiedenen nur 10.

Läßt man bei allen Paaren konjugierter Elemente die beiden Elemente sich vereinigen, so ergeben sich l Punkte, m Ebenen, n Geraden, durch welche die Fläche 2. Grades gehen, bzw. welche sie berühren soll.[1])

714 Wenn bei der allgemeinen Korrelation auch vielfache Elementarbedingungen vorliegen, aber mindestens drei einfache, so kann die vorangehende Methode angewandt werden, indem man durch allmähliches Aufgeben von drei einfachen bis zu zwölf Bedingungen herabgeht, die Ausartungszahlen und eventuellen Charakteristiken ermittelt und die andern vermittelst der Formeln berechnet. Ist die Anzahl der einfachen Bedingungen kleiner, so wird man nur bis zu den Ausartungen zweiter oder erster Stufe zurückgehen, was übrigens, wenn diese sich leicht bestimmen lassen, auch sonst sich empfiehlt.

Nehmen wir z. B. an, daß zweimal zwei Polaren, zwei Pole in Σ und ihre Polarebenen in Σ' gegeben sind, was 14 Bedingungen sind:

$$(14) \qquad \left|\begin{matrix} p_1 p_2 P_1 \ P_2 \\ p_1' p_2' \Pi_1' \Pi_2' \end{matrix}\right|$$

Bei der zentralen Korrelation muß von zwei Polaren eine durch den singulären Punkt gehen; daher liegt S auf p_1 und S' auf p_2' (da S nicht zugleich auf p_2 liegen kann), oder S auf p_2 und S' auf p_1'. Da nun P_1 und P_2 von S verschieden sind, so müssen Π_1', Π_2' und ihre Schnittlinie durch S' gehen; sie trifft aber weder p_1' noch p_2'. Demnach ist $\pi = 0$ und ebenso $\omega = 0$.

Lassen wir die Axe s einer axialen Korrelation in p_1 fallen; da p_2 nicht p_1 trifft, so muß p_2' die andere Axe s' sein; aber Π_1', Π_2' gehen nicht durch sie.

Wenn P_1 und P_2 beide nicht auf s liegen, so muß s' die Schnittlinie $\Pi_1'\Pi_2'$ sein, die aber nicht von p_1', p_2' getroffen wird.

Also bleibt nur übrig, daß einer der Punkte P_1, P_2 auf s liegt, etwa P_1, so daß s die Gerade durch P_1 ist, welche p_1, p_2 trifft; es muß dann s' die Gerade in Π_2' sein, welche p_1', p_2' trifft; die (s_r, s_r') ist:

$$s(p_1, p_2, P_1) \barwedge s'(p_1', p_2', \Pi_1'),$$

und die (s_b, s_b') ist:

$$s(p_1, p_1, P_2) \barwedge s'(p_1', p_2', \Pi_2').$$

Eine zweite axiale Korrelation ergibt sich, wenn P_1 durch P_2 ersetzt wird; also ist $\psi = 2$. Demnach sind die Charakteristiken $\mu = 1$, $\rho = 1$, $\nu = 2$. Es gibt also 1, 1, 2 Korrelationen, welche den obigen

1) Vgl. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, S. 105. Schuberts Betrachtungen hätten übrigens ebensogut mit den allgemeinen Bedingungen gemacht werden können, daß konjugierte Punkte, Ebenen, Geraden, wie mit den speziellen, daß Punkte, Berührungsebenen, Tangenten gegeben sind.

14 Bedingungen genügen und noch zwei gegebene Punkte, Ebenen oder Geraden zu konjugierten haben.

Sind hingegen die 14 Bedingungen:

$$(14) \qquad \left| \begin{matrix} p_1\, p_2\, P_1\, \Pi_2 \\ p_1'\, p_2'\, \Pi_1'\, P_2' \end{matrix} \right|$$

gegeben, so ist $\pi = \omega = \psi = 0$. Eine zentrale Korrelation würde fordern, daß S auf p_1 (oder p_2) und S' auf p_2' (oder p_1') liegt; dann würde S der Schnitt $p_1 \Pi_2$, und S' der Schnitt $p_2' \Pi_1'$ sein, und in der charakteristischen Korrelation (S, S') wären entsprechend:

$$S(p_1,\, p_2,\, P_1,\, \Pi_2)$$
$$S'(p_1',\, p_2',\, \Pi_1',\, P_2'),$$

also zwei Strahlen, zwei Ebenen des einen Bündels und zwei Ebenen, zwei Strahlen des andern, was bei der beliebigen Lage der gegebenen Elemente zu keiner Korrelation führt.

Und weder wenn s in p_1 oder p_2, noch wenn sie in einer der Geraden (P_1, p_1, p_2), (Π_2, p_1, p_2) liegt, gelangen wir, ohne Widersprüche, zu einer axialen Korrelation; daher ist auch $\mu = \nu = \rho = 0$. Jenen 14 Bedingungen genügt keine Korrelation. In der Tat, der Gerade $l = (P_1, p_1, p_2)$ müßte ja $l' = (\Pi_1', p_1', p_2')$ korrespondieren, und daher die Punktreihe $l(p_1, p_2, P_1, \Pi_2)$ dem Büschel $l'(p_1', p_2', \Pi_1', P_2')$ projektiv sein, was nicht der Fall ist.

Legen wir folgende 13 Bedingungen zugrunde: 715

$$(13) \qquad \left| \begin{matrix} p\, P_1\, P_2\, P_3 \\ p'\, \Pi_1'\, \Pi_2'\, \Pi_3' \end{matrix} \right|,$$

zu denen noch auf sechs Weisen zwei einfache gefügt werden können. Es ist auf eine Weise möglich, den 13 Bedingungen durch eine zentralplanare Korrelation zu genügen:

$$\sigma = P_1 P_2 P_3, \quad S' = \Pi_1' \Pi_2' \Pi_3'; \quad S = \sigma p, \quad \sigma' = S' p',$$

und die Projektivität wird durch:

$$(S, \sigma)(P_1, P_2, P_3) \barwedge (S', \sigma')(\Pi_1', \Pi_2', \Pi_3')$$

festgelegt; also $\pi\omega = 1$. Dagegen ist nicht möglich, den Bedingungen durch eine zentral-axiale oder eine planar-axiale Korrelation zu genügen; daher $\pi\psi = \omega\psi = 0$.

Fügen wir jenen Bedingungen hinzu, daß die Ebenen α und α' konjugiert sein sollen; so gibt es eine zentrale Korrelation, welche den 14 Bedingungen genügt. Von den beiden polaren Geraden p, p' muß eine den singulären Punkt enthalten. Die Inzidenz von S' mit p', selbst mit Hinzunahme, daß S' in $p' \Pi_1'$ fällt, würde die Vereinigung von P_2, P_3 in S fordern. Es muß also S auf p zu liegen kommen;

dann folgt, daß $S' = \Pi_1'\Pi_2'\Pi_3'$, also fest ist. Und die charakteristische Korrelation muß, wenn wir zunächst noch von $\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{\alpha'}$ absehen, sein:

$$S(p, P_1, P_2, P_3) \text{ corr. } S'(p', \Pi_1', \Pi_2', \Pi_3');$$

den vier Strahlen sind vier Ebenen zugeordnet; wodurch, bei jeder Lage von S auf p, die Korrelation eindeutig festgelegt ist. Von den konjugierten Ebenen α, α' muß eine durch den singulären Punkt gehen, also α durch S, so daß dieser auf p bestimmt ist. Daher $\pi\rho = 1$.

Demnach liefern die Formeln 4) und 5):

$$\pi\mu = 1, \quad \pi\nu = 1.$$

Wir können dies Ergebnis durch ein früheres aus der Theorie der korrelativen Bündel bestätigen. S' im zweiten Raume ist fest und S bewegt sich auf einer Gerade, welche ständig der Ebene $S'p'$ in der Bündelkorrelation entspricht; legen wir auf p den Punkt $\mathfrak{P}$, so können wir die obige Korrelation mit Hinzunahme von $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{A'}$ bzw. $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{a'}$ (zu $\pi\mu$, $\pi\nu$ gehörig) so schreiben:

$$S(\mathfrak{P}, P_1, P_2, P_3, A) \text{ corr. } S'(p', \Pi_1', \Pi_2', \Pi_3', A'),$$
$$S(\mathfrak{P}, P_1, P_2, P_3, a) \text{ corr. } S'(p', \Pi_1', \Pi_2', \Pi_3', a');$$

d. h. es liegt aus jener Theorie (Nr. 461 Tab. (9)) die Signatur (4010), bzw. (4001) vor. Dann beschreibt, dem festen S' entsprechend, S eine kubische Fläche, auf welcher $\mathfrak{P}$ doppelt ist, bzw. eine Fläche 2. Grades, auf der er einfach ist; folglich hat p mit dieser Fläche noch einen Punkt gemeinsam, welcher der gesuchte S ist.

Ebenso ist $\omega\mu = \omega\rho = \omega\nu = 1$.

Schon den 13 Bedingungen kann nicht mit einer axialen Korrelation genügt werden; man sieht unmittelbar, daß für die zwei Projektivitäten nicht hinreichend Bestimmungsstücke vorhanden sind. Auch sonst ergeben sich Widersprüche.

Es ist daher

$$\psi\mu = \psi\rho = \psi\mu = 0.$$

Also ist in allen drei Systemen von Korrelationen

$$(13)\left|\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right|, \quad (13)\left|\begin{matrix} \alpha \\ \alpha' \end{matrix}\right|, \quad (13)\left|\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix}\right|$$

$\pi = \omega = 1$, $\psi = 0$; woraus dann, wegen 1), 2), 3), folgt:

$$\mu = \rho = \nu = 1.$$

Welche zwei einfachen Bedingungen also auch zu (13) gefügt werden, die Korrelation ist immer eindeutig festgelegt.

716 Endlich möge noch die Signatur:

$$(12)\left|\begin{matrix} P_1\,P_2\,P_3\,P_4 \\ \Pi_1'\Pi_2'\Pi_3'\Pi_4' \end{matrix}\right|$$

behandelt werden. Diesen zwölf Bedingungen genügen 24 Korrelationen Γ_{cpa}. Z. B. $S = P_1$, $s = P_1 P_2$, $\sigma = P_1 P_2 P_3$; $\sigma' = \Pi'_4$, $s' = \Pi_3' \Pi_4'$, $S' = \Pi_4' \Pi_3' \Pi_2'$; also $\pi\omega\psi = 24$.

Wird $\left|\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right|$ hinzugefügt, so sind nur Γ_{ca} möglich und zwar zwölf; z. B. $S = P_1$, $s = P_1 P_2$; $s' = \Pi_3' \Pi_4'$, $S' = \Pi_2' \Pi_3' \Pi_4'$ mit der Projektivität (s_b, s_b'):

$$s(P_3, P_4, A) \barwedge s'(\Pi_3', \Pi_4', A');$$

demnach:

$$\pi\psi\mu = 12, \quad \omega\psi\mu = 0, \quad \pi\omega\mu = 0.$$

Ingleichen dual:

$$\pi\psi\rho = 0, \quad \omega\psi\rho = 12, \quad \pi\omega\rho = 0.$$

Bei $\left|\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix}\right|$ sind nur Γ_{cp} möglich und zwar ebenfalls zwölf; z. B.

$$S = P_1, \; \sigma = P_1 P_2 P_3; \; \sigma' = \Pi_4', \; S' = \Pi_4' \Pi_3' \Pi_2'$$

mit der Projektivität:

$$(S, \sigma)(P_2, P_3, a) \barwedge (S', \sigma')(\Pi_2', \Pi_3', a');$$

folglich:

$$\pi\psi\nu = 0, \quad \omega\psi\nu = 0, \quad \pi\omega\nu = 12.$$

Den 10), 11), 12) wird damit Genüge geleistet.

Wir wenden nun auf (12) $\left|\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right|$ die Formeln 4), 5) an:

$$3\pi\mu = \pi\rho + \pi\psi + 2\pi\omega, \quad 3\pi\nu = 2\pi\rho + 2\pi\psi + \pi\omega;$$

darin sind $\pi\psi$ und $\pi\omega$ die vorhinigen $\pi\psi\mu$, $\pi\omega\mu$; also hat man:

$$3\pi\mu = \pi\rho + 12, \quad 3\pi\nu = 2\pi\rho + 24.$$

Man ermittelt leicht: $\pi\rho = 0$, also ist $\pi\mu = 4$ und $\pi\nu = 8$. In der Tat, wenn zu $\left|\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right|$ noch tritt $\left|\begin{matrix} A_1 \\ A_1' \end{matrix}\right|$ oder $\left|\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix}\right|$, so hat man vier, bzw. acht zentrale Korrelationen, z. B. $S = P_1$, $S' = \Pi_2' \Pi_3' \Pi_4'$ in beiden Fällen und bzw.:

$$S(P_2, P_3, P_4, A, A_1) \text{ corr. } S'(\Pi_2', \Pi_3', \Pi_4', A', A_1'),$$
$$S(P_2, P_3, P_4, A, a) \text{ corr. } S'(\Pi_2', \Pi_3', \Pi_4', A', a');$$

das sind die Signaturen $(3020)_8$ und $(3011)_8$ für korrelative Bündel mit festen Scheiteln, denen die Anzahlen 1, 2 zugehören (Nr. 418 Tab. ($\mathfrak{T}$)); also in den vier Fällen 4. 1, 4. 2.

Bei (12) $\left|\begin{matrix} \alpha \\ \alpha' \end{matrix}\right|$ sind $\pi\psi$ und $\pi\omega$ (die obigen $\pi\psi\rho$ und $\pi\omega\rho$) beide null; $\pi\mu$ ist $\pi\rho$ im vorigen Falle, also $= 0$; daher geben die Formeln: $\pi\rho = 0$, $\pi\nu = 0$, was leicht direkt zu bestätigen ist.

Bei (12) $\left|\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix}\right|$ ist $\pi\psi = 0$, $\pi\omega = 12$; $\pi\mu = 8$, denn es ist $\pi\nu$ bei (12) $\left|\begin{matrix} A \\ A' \end{matrix}\right|$; also ist $\pi\rho = 0$, $\pi\nu = 4$; ersteres ist leicht einzusehen, und letzteres bedeutet die Signatur $(3002)_8$ bei korrelativen Bündeln mit festen Scheiteln, deren Anzahl, in jedem der vier Fälle, 1 ist (a. eben a. O.).

Damit haben wir für π folgende Werte:

$$\begin{vmatrix} A, A_1 \\ A', A_1' \end{vmatrix} 4, \quad \begin{vmatrix} A, a \\ A', a' \end{vmatrix} 8, \quad \begin{vmatrix} a, a_1 \\ a', a_1' \end{vmatrix} 4,$$

$$\begin{vmatrix} A, \alpha \\ A', \alpha' \end{vmatrix} 0, \quad \begin{vmatrix} a, \alpha \\ a', \alpha' \end{vmatrix} 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha, \alpha_1 \\ \alpha', \alpha_1' \end{vmatrix} 0.$$

Daraus ergeben sich die Werte von ω in diesen sechs Fällen:

$$\begin{matrix} 0, & 0, & 4, \\ 0, & 8, & 4. \end{matrix}$$

Axiale Korrelationen sind nur bei $\begin{vmatrix} A, \alpha \\ A', \alpha' \end{vmatrix}$ möglich und zwar sechs; z. B. $s = P_1 P_2$, $s' = \Pi_3' \Pi_4'$; die Projektivitäten sind:

$$(s_b, s_b') \quad s(P_3, P_4, A) \barwedge s'(\Pi_3', \Pi_4', A'),$$
$$(s_r, s_r') \quad s(P_1, P_2, \alpha) \barwedge s'(\Pi_1', \Pi_2', \alpha').$$

Die Formeln 8), 9) bestätigen es.

Aus diesen Werten von π, ω, ψ ergeben sich vermittelst 1), 2), 3) die Werte der Charakteristiken μ, ρ, ν in den obigen sechs Fällen:

$$\begin{matrix} 1, 3, 2; & 2, 6, 4; & 4, 4, 4; \\ 3, 3, 6; & 6, 2, 4; & 3, 1, 2; \end{matrix}$$

und damit haben wir für unser System (12) folgende zehn Anzahlen:

(lmn)	
(300)	1
(210)	3
(201)	2
(111)	6
(102)	4
(003)	4
(mln)	

Wenn wir die vier dreifachen Bedingungen (12) in je drei einfache zerlegen, z. B. in drei Paare konjugierter Punkte, so ergeben sich für (12) [(003), (030), (120), (021), (012)] die Signaturen $(\bar{1}203)$, $(\bar{1}230)$, $(\bar{1}320)$, $(\bar{1}221)$, $(\bar{1}212)$, die aber zu hohe Zahlen 8, 27, 9, 18, 12 liefern statt 4, 1, 3, 2, 4. Daraus folgt, daß man mit solchen Zerlegungen zu irrigen Ergebnissen gelangen kann.

Ein Spezialfall des im vorangehenden betrachteten dreifach unendlichen Systems von Korrelationen ist das der Polarräume (Flächen

2. Grades) mit einem gegebenen Polartetraeder. Fallen durchweg in den drei weiteren Bedingungen die konjugierten Elemente zusammen, so hat man in den obigen Zahlen die zehn Charakteristiken dieses Flächensystems.[1])

§ 102. Kollineations-Anzahlen.

Durch Dualisierung des einen Raumes gehen die Ergebnisse auf 717
die Kollineation über.

Elementarbedingungen sind: eine vierfache, daß zwei gegebene Geraden p und p' entsprechend sind, zwei diesmal wesentlich verschiedene dreifache, daß zwei gegebene Punkte oder zwei gegebene Ebenen entsprechend sind, zwei zweifache, jede in zwei Formen: 1. es sind gegeben ein Punkt A und eine Gerade a', auf der der entsprechende liegen soll, woraus dann folgt, daß die a' entsprechende Gerade durch A geht, oder a und A' sind gegeben; 2. es sind gegeben eine Ebene α und eine Gerade a', durch welche die entsprechende Ebene von α gehen soll, so daß dann die entsprechende Gerade von a' in α liegt, oder a und α' sind gegeben; endlich zwei einfache Bedingungen, von denen eine in zwei Formen: 1. es sind gegeben ein Punkt A und eine Ebene α', die den entsprechenden Punkt von A enthalten soll, wo dann die entsprechende Ebene von α' durch A geht, oder es sind α und A' gegeben; 2. zwei Geraden a und a' sind gegeben, von denen eine und dann jede die entsprechende Gerade der andern treffen soll.

Wir haben uns schon entschlossen, in Ermangelung eines geeigneteren Namens, die zugeordneten Elemente in den zweifachen und einfachen Bedingungen, um so umständliche Redewendungen, wie im vorangehenden, zu vermeiden, konjugiert zu nennen.

Die Zahlen der Kollineationen eines Systems 1. Stufe, welche den Bedingungen

$$\begin{vmatrix} A \\ \alpha' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha \\ A' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a \\ a' \end{vmatrix}$$

genügen, mögen die Charakteristiken μ, ρ, ν sein; π und ω seien die Anzahlen der Ausartungen (S, σ'), bzw. (σ, S') (Nr. 698), während ψ die der (s, s') ist; dies entspricht der Dualisierung des zweiten Raums.

Die Affinität ist eine dreifache Bedingung, daß nämlich die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht. Also sind ∞^{12} Affinitäten möglich.

Sie ist eindeutig bestimmt durch vier Paare entsprechen-

1) Meister-Rasche, Zeitschr. f. Math. und Phys. Bd. 34 S. 6, 73.

der Ebenen oder Punkte, durch drei Paare entsprechender Ebenen und ein Paar entsprechender Punkte; sie ist unmöglich, wenn drei Paare entsprechender Punkte und ein Paar entsprechender Ebenen oder je zwei Paare entsprechender Punkte und Ebenen, in allgemeiner Lage, gegeben sind (Nr. 468).

Sie ist auch eindeutig bestimmt durch drei Paare entsprechender Geraden gegeben sind (Nr. 706).

Eine Projektivität zwischen zwei Regelscharen macht diese zu entsprechenden Gebilden in affinen Räumen.

Daß in einer Kollineation zwei gegebene Flächen 2. Grades einander entsprechen oder eine sich selbst, ist eine neunfache Bedingung, weil es ∞^6 Kollineationen gibt, in denen dies Entsprechen stattfindet (Nr. 500).

718 Es gibt ∞^7 Ähnlichkeiten. Wir erhalten sie, wenn wir einem Tetraeder, das einem festen ähnlich ist, alle ∞^6 Lagen im Raume geben (eine Kante in die ∞^4 Geraden legen und dann Schiebungen und Drehungen folgen lassen), und nun noch dem Ähnlichkeitsverhältnis alle ∞^1 Werte geben. Leiten wir aber diese siebenfache Unendlichkeit auch aus dem Umstand ab, daß die absolute Kurve sich selbst entspricht. Zwei Felder Π, Π' seien kollinear; um zwei kollineare Räume zu erlangen, denen sie angehören, haben wir noch zwei Punkten A, B zwei solche Punkte A', B' zuzuordnen, daß AB und $A'B'$ die Π und Π' in homologen Punkten treffen (Nr. 469); wir können also A', B' nur in ∞^{3+1} Weisen wählen. Sind in Π und Π' Kegelschnitte $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ gegeben, so bestehen ∞^3 Kollineationen, in denen sie entsprechend sind (Nr. 268). Daher gibt es ∞^7 räumliche Kollineationen, in denen zwei gegebene Kegelschnitte einander entsprechen oder einer sich selbst.

Die Ähnlichkeit ist also eine achtfache Bedingung.

Den sieben Bedingungen $\left|\begin{matrix} p\,\Pi \\ p'\Pi' \end{matrix}\right|$, sowie den sechs Bedingungen $\left|\begin{matrix} \Pi\,\Pi_1 \\ \Pi'\Pi_1' \end{matrix}\right|$ kann durch eine Ähnlichkeit nicht genügt werden, weil, im allgemeinen, die notwendigen Winkelgleichheiten nicht erfüllt sind.

Betrachten wir die sieben Bedingungen:

$$\left|\begin{matrix} p\,P \\ p'P' \end{matrix}\right|;$$

es seien PQ, $P'Q'$ die Lote aus P auf p, aus P' auf p'. Auf p und p' lassen sich auf zwei Weisen ähnliche Punktreihen herstellen, mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $PQ : P'Q'$ und in denen Q und Q' entsprechend sind; nimmt man aus ihnen zwei entsprechende Punkte R und R', so kann man über den ähnlichen Dreiecken PQR, $P'Q'R'$

ähnliche Tetraeder von durchweg gleichem oder durchweg ungleichem Sinne aufbauen. Es wird also durch vier stets reelle Ähnlichkeiten genügt.

Es sei gegeben:

$$\left|\begin{matrix} P\,Q\,A \\ P'\,Q'\alpha' \end{matrix}\right|;$$

der Ort des Punktes A', für den $P'Q'A' \sim PQA$, ist ein Kreis, auf dessen Ebene im Mittelpunkte $P'Q'$ senkrecht steht; jeder seiner Schnitte mit α' führt wiederum zu einer gleichsinnigen und einer ungleichsinnigen Ähnlichkeit; wir haben also vier reelle oder vier imaginäre Lösungen. Auf diesen Fall läßt sich

$$\left|\begin{matrix} P\,\Pi\,A \\ P'\Pi'\alpha' \end{matrix}\right|$$

zurückführen; denn die Fußpunkte der Lote (P, Π), (P', Π') sind entsprechend.

Erwähnen wir, daß zu:

$$\left|\begin{matrix} P\;a\;b \\ P'A'B' \end{matrix}\right| \quad \text{und} \quad \left|\begin{matrix} P\;a\;B \\ P'A'b' \end{matrix}\right|$$

zwölf, bzw. acht Lösungen gehören.

Die Kongruenz ist von sechsfach unendlicher Mannigfaltigkeit und eine neunfache Bedingung. In allen drei Fällen mit zwei dreifachen Bedingungen:

$$\left|\begin{matrix} P_1\,P_2 \\ P_1'P_2' \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} \Pi_1\,\Pi_2 \\ \Pi_1'\Pi_2' \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} P\,\Pi \\ P'\Pi' \end{matrix}\right|$$

ist keine Lösung möglich.

Bei

$$\left|\begin{matrix} p\;A \\ p'a' \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} p\;\alpha \\ p'a' \end{matrix}\right|$$

gibt es $2 \cdot 4$ Lösungen; denn auf a' gibt es im ersten Falle zwei Punkte A' in der Entfernung (A, p) von p'; die gleichen Punktreihen auf p und p' können in zwei Weisen hergestellt werden; im anderen Falle gehen durch a' zwei Ebenen α' mit der Neigung (α, p) gegen p', usw.

Auch:

$$\left|\begin{matrix} PAB \\ P'a'\beta' \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} P\;A\;\beta \\ P'a'B' \end{matrix}\right|$$

führen zu $2 \cdot 4$ Lösungen; denn auf a' gibt es zwei Punkte A' in der Entfernung PA von P' und in β' dann je zwei Punkte B', die mit $P'A'$ zu PAB kongruente Dreiecke, oder in β je zwei Punkte B, die mit PA zu $P'A'B'$ kongruente Dreiecke bilden.

719 Die Homologie hat die Mannigfaltigkeit 7, wegen der Mannigfaltigkeit 3, 3, 1 des Zentrums S, der Ebene σ und der Invariante $\lambda = (S\sigma XX')$. Es dürfen nicht zwei windschiefe entsprechenden Geraden oder zwei beliebige Paare entsprechender Punkte oder Ebenen gegeben werden. Die Homologie kann so ausarten, daß Zentrum und Ebene singulär sind, und zwar (S, σ') oder (S', σ), je nachdem $\lambda = 0$ oder ∞ ist; die charakteristische Kollineation ist die durch die perspektive Lage bestimmte. Es entsprechen sich im ersten Falle (S, σ') der S und ein beliebiger X', ein beliebiger X und der Schnitt (SX, σ'), eine beliebige Ebene ξ und σ', eine ξ durch S und jede ξ' durch $\xi\sigma'$ (Nr. 698).

Eine axiale Ausartung kann nicht eintreten.

Es reduzieren sich daher die Formeln 1), 2), 3), hier für 6 Bedingungen geltend, auf:

$$\text{I.}\quad 4\mu = \pi + 3\omega,\quad 4\rho = 3\pi + \omega,\quad 2\nu = \pi + \omega.$$

Dabei ist π die Anzahl der Homologien (S, σ') und ω die der (σ, S'). Die perspektive Kollineation zwischen einem Bündel und einem Felde artet nur aus, wenn Scheitel und Trägerebene inzident werden; die beiden Strahlenbüschel vereinigen sich und die charakteristische Projektivität ist Identität. Von den drei Ausartungen 2. Stufe besteht daher nur die zentral-planare. Demnach sind die Formeln für 5 Bedingungen:

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} 3\pi\mu &= \pi\rho + 2\pi\omega, & 3\omega\rho &= \omega\mu + 2\pi\omega, \\ 3\pi\nu &= 2\pi\rho + \pi\omega, & 3\omega\nu &= 2\omega\mu + \pi\omega. \end{aligned}$$

Bei der zentral-planaren Homologie sind die beiden singulären Punkte und die beiden singulären Ebenen vereinigt, so daß die Bezeichnung S und σ genügt. Von zwei konjugierten Elementen A und α', α und A' (Nr. 699) muß das eine mit dem ungleichartigen singulären Elemente inzident sein: A, bzw. A' mit σ, oder α', bzw. α mit S. Für die Projektivität ist nicht zu sorgen, weil sie Identität ist, so daß hier schon bei der einzigen Ausartung 2. Stufe nur Inzidenzen vorliegen.

Wir wollen uns zunächst auf die beiden einfachen Bedingungen $\left|\begin{matrix} A \\ \alpha' \end{matrix}\right|$, $\left|\begin{matrix} \alpha \\ A' \end{matrix}\right|$ beschränken, also $n = 0$. Wir greifen (320) heraus:

$$(320)\quad \left|\begin{matrix} A_1\ A_2\ A_3\ \alpha_4\ \alpha_5 \\ \alpha_1'\ \alpha_2'\ \alpha_3'\ A_4'\ A_5' \end{matrix}\right|;$$

es gibt zwei Weisen, zentral-planare Homologien zu bilden: 1. Durch drei von den 5 Punkten $A_1 \ldots A_5'$, gleichgültig, wie sie in den Räumen liegen, z. B. A_1, A_2, A_4', ist σ bestimmt, S liegt dann auf α_3', α_5 und auf σ, ist also auch bestimmt. 2. Durch drei der fünf Ebenen ist S bestimmt, z. B. wiederum durch α_1', α_2', α_4, σ verbindet dann S mit

$A_3 A_5'$. In beiden Fällen sind 10 Kombinationen möglich, und wir erhalten, bei allen Signaturen $(l m 0)$, 20 zentral-planare Homologien: $\pi\omega = 20$.

Zu der obigen Signatur $(3\,2\,0)$ fügen wir $\overset{\alpha_6}{A_6'}$ hinzu, so daß wir haben

$$(3\,3\,0)\quad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \alpha_4 \;\alpha_5\; \alpha_6, \\ \alpha_1' \alpha_2' \alpha_3' A_4' A_5' A_6' \end{matrix} \right|;$$

wir wollen ermitteln, wie viele ausgeartete Homologien (S, σ') diesen 6 Bedingungen genügen. Wenn eine α durch S geht, so ist der zugehörige A' keiner Bedingung unterworfen; wenn A' in σ' liegt, dann gilt dies für α; eins von beiden muß eintreten. Dagegen ein SA muß α' auf σ' treffen. Wir können diesen Anforderungen auf 4 Weisen genügen.

1. S sei der Schnitt $\alpha_4 \alpha_5 \alpha_6$; dann liefern die Schnittpunkte (SA_1, α_1'), (SA_2, α_2'), (SA_3, α_3') die Ebene σ'.

2. S liege auf $\alpha_4 \alpha_5$; dann muß σ' durch A_6' gehen; eine um A_6' bewegliche Ebene schneidet in α_1', α_2', α_3' kollineare Geradenfelder ein, welche, aus A_1, A_2, A_3 projiziert, kollineare Ebenenbündel geben. Jeder Punkt der erzeugten kubischen Fläche hat dann die Eigenschaft, daß die Verbindungslinien mit A_1, A_2, A_3 die α_1', α_2', α_3' in Punkten treffen, welche auf entsprechenden Geraden jener Felder liegen, also in einer Ebene durch A_6'. Und die drei Schnitte dieser Fläche mit $\alpha_4 \alpha_5$ geben die gesuchten Punkte S und zugehörigen Ebenen σ'. Wir erhalten so $3 \cdot 3$ Homologien (S, σ').

3. S liege auf α_6; dann muß σ' durch $A_4' A_5'$ gehen. Die Ebenen durch diese Gerade schneiden in α_1', α_2', α_3' drei projektive Büschel ein; während die Strahlen aus A_1, A_2, A_3 nach einem die α_6 durchlaufenden Punkte auf jenen Ebenen kollineare Punktfelder erzeugen. Dreimal fallen entsprechende Punkte dieser Felder auf entsprechende Strahlen jener Büschel. In der That, nehmen wir zunächst zwei α_1', α_2' von den Ebenen. Zu jedem der beiden Büschel stellen wir den durch die Kollineation entsprechenden im andern Felde her; die beiden Büschel der ersten Ebene sind projektiv und erzeugen einen Kegelschnitt; mit ihm hat der analoge Kegelschnitt, der sich in der ersten Ebene ergibt, wenn sie mit der dritten zusammengestellt wird, außer dem Büschelscheitel, noch 3 Punkte gemein, von denen jeder mit seinen beiden entsprechenden die genannte Eigenschaft hat. Auf diese Weise ergeben sich $3 \cdot 3$ Homologien (S, σ').

4. Endlich, σ' sei die Ebene $A_4' A_5' A_6'$; dann gibt es einen Punkt S, dessen Verbindungslinien $SA_1, \ldots$ die $\alpha_1', \ldots$ auf σ' schneiden; denn es handelt sich darum, dem Dreiseit in σ', das durch α_1', α_2', α_3' eingeschnitten wird, ein Dreieck einzubeschreiben, dessen Seiten durch die Spuren von $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ gehen; da diese in gerader Linie

liegen, so gibt es nur ein derartiges Dreieck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ (Nr. 129); und weil es zu $A_1A_2A_3$ perspektiv liegt, so laufen $A_1\mathfrak{A}_1, \ldots$ in einen Punkt S zusammen.

Im ganzen sind wir zu $1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 1 = 20$ Lösungen gekommen. Diese Zahl ist, wenn wir zu (3 2 0) zurückkehren, $\pi\rho$ (oder $\pi\mu$ für (2 3 0)). Und da in (3 3 0) die beiden Räume gleichartig die gegebenen Stücke enthalten, so ist auch $\omega\rho = 20$ für (3 2 0) (oder $\omega\mu$ für (2 3 0)). Die obigen Formeln II ergeben dann für diese Signatur (3 2 0):

$$\pi\mu = \pi\nu = \omega\mu = \omega\nu = 20.$$

Nun ist aber $\pi\mu$ für (320) wieder $\pi\rho$ für (410) und weil dafür auch $\pi\omega = 20$ ist, so ist wieder $\pi\mu = 20$, also auch für (5 0 0); und ebenso ist auch $\omega\mu = 20$ für (4 1 0), (5 0 0). Ingleichen können wir auch nach der andern Seite gehen; aus $\pi\mu = 20$ für (230) folgt $\pi\rho = 20$; dies ist $\pi\mu$ für (1 4 0) usw. Wir sehen, die Anzahl der Homologien (S, σ') und ebenso der (σ, S') beträgt 20 für alle Signaturen

$$(6\,0\,0),\ (5\,1\,0),\ \ldots\ (0\,6\,0),$$

aber auch für:

$$(5\,0\,1),\ (4\,1\,1),\ \ldots\ (0\,5\,1).$$

Das Ergebnis für (600) kann so ausgesprochen werden. Wenn gegeben sind:

$$(6\,0\,0)\ \left|\begin{matrix} A_1, & A_2, & \ldots & A_6 \\ \alpha_1', & \alpha_2', & \ldots & \alpha_6' \end{matrix}\right|,$$

so gibt es 20 Punkte S, für welche die 6 Schnitte (SA_1, α_1'), $\ldots$ (SA_6, α_6') in einer Ebene σ' liegen.

Die 20 Homologien (σ, S') für (6 0 0) sind leicht herzustellen; eine von ihnen ist: $\sigma = A_1A_2A_3$, $S' = \alpha'_4\alpha'_5\alpha'_6$.

720 Ermitteln wir nunmehr für die Signatur:

$$(401)\ \left|\begin{matrix} A_1A_2A_3A_4a_5 \\ \alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4'a_5' \end{matrix}\right|$$

die Zahl der zentral-planaren Homologien. Die beiden konjugierten Geraden a_5, a_5' müssen, wegen der zur Identität gewordenen Projektivität, denselben Strahl des Büschels (S, σ) treffen. Es kann sein $\sigma = A_1A_2A_3$; dann liegt S in σ auf $\sigma\alpha_4'$ und (σ, a_5, a_5'), der Verbindungslinie der Spuren von a_5, a_5', und ist bestimmt; oder es ist $S = \alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'$, σ geht durch A_4 und die Gerade (S, a_5, a_5') und ist bestimmt. Dies führt zu $2 \cdot 4$ Lösungen.

Wir legen σ bloß durch A_1A_2, so daß S auf $\alpha_3'\alpha_4'$ liegen muß; die Punkte, in denen die beiden Treffgeraden von A_1A_2, $\alpha_3'\alpha_4'$, a_5, a_5' die $\alpha_3'\alpha_4'$ schneiden, und die Ebenen, welche sie mit A_1A_2 verbinden, geben uns zwei Paare singulärer Elemente S und σ; und wir erhalten hierdurch und durch den dualen Prozeß zentral-planare Homologien, also wiederum im ganzen 20. Daran ändert sich nichts, wenn ein $\overset{A}{\alpha'}$ in ein $\overset{\alpha}{A'}$ übergeht.

Bei

$$(302) \qquad \begin{vmatrix} A_1 A_2 A_3 a_4 a_5 \\ \alpha_1' \alpha_2' \alpha_3' a_4' a_5' \end{vmatrix}$$

haben wir erstens: $\sigma = A_1 A_2 A_3$ und darin als S den Schnitt der Geraden (σ, a_4, a_4'), (σ, a_5, a_5'); oder $S = \alpha_1' \alpha_2' \alpha_3'$, usw.

Es gehe zweitens σ durch $A_1 A_2$, so haben wir zwei Regelscharen $(A_1 A_2, a_4, a_4')$, $(A_1 A_2, a_5, a_5')$, und in den Schnitten der gemeinsamen kubischen Raumkurve der Trägerflächen mit α_3' Punkte S, nach denen dann von $A_1 A_2$ die zugehörigen Ebenen σ gehen. Das führt zu $2 \cdot 3 \cdot 3$ Lösungen, so daß sich wiederum 20 ergeben haben.

$$(203) \qquad \begin{vmatrix} A_1 A_2 a_3 a_4 a_5 \\ \alpha_1' \alpha_2' a_3' a_4' a_5' \end{vmatrix}.$$

Die Trägerflächen der Regelscharen $(A_1 A_2, a_3, a_3')$, $(A_1 A_2, a_4, a_4')$, $(A_1 A_2, a_5, a_5')$ haben, außer $A_1 A_2$, noch vier Punkte gemeinsam. Das sind Punkte S, nach denen wiederum von $A_1 A_2$ die zugehörigen Ebenen σ gehen: in ihnen laufen je die drei Geraden (σ, a_3, a_3'), (σ, a_4, a_4'), (σ, a_5, a_5') zusammen. Wir haben $2 \cdot 4$ Lösungen.

Oder wir suchen in den Ebenen ξ durch A_1 auf, wie oft die Geraden (ξ, a_3, a_3'), (ξ, a_4, a_4'), (ξ, a_5, a_5') in einen Punkt zusammenlaufen, der in α_2' liegt. Läuft Z auf einer Gerade, so beschreiben die Geraden (Z, a_3, a_3'), (Z, a_4, a_4') zwei Regelscharen und ihre Verbindungsebenen einen kubischen Torsus; da drei Ebenen desselben durch A_1 gehen, so erzeugt der Schnittpunkt der Geraden (ξ, a_3, a_3') und (ξ, a_4, a_4') eine kubische Fläche, auf welcher a_3, a_3', a_4, a_4' und die Geraden (A_1, a_3, a_3'), (A_1, a_4, a_4') liegen. Für jeden Punkt X derselben ist zugehörige Ebene ξ die Ebene von A_1 nach der Gerade (X, a_3, a_3'), in der auch (X, a_4, a_4') liegt. Bei a_3, a_3'; a_5, a_5' kommen wir zu einer zweiten derartigen kubischen Fläche, welche gleichfalls durch a_3, a_3', (A_1, a_3, a_3') geht und mit der vorigen eine Raumkurve 6. Ordnung gemeinsam hat. Für jeden Punkt X auf ihr ist in beiden Fällen zugehörige Ebene ξ diejenige, die von A_1 nach (X, a_3, a_3') geht; d. h. X ist für sie sowohl Schnittpunkt von (ξ, a_3, a_3') und (ξ, a_4, a_4'), als auch von (ξ, a_3, a_3') und (ξ, a_5, a_5'). Diese Kurve 6. Ordnung schneidet α_2' in sechs Punkten; in ihnen und den zugehörigen Ebenen haben wir wiederum S und σ zentral-planarer Homologien und erhalten, da A_2, α_1' deren auch 6 liefert, 12 auf diese Weise; im ganzen 20.

$$(104) \qquad \begin{vmatrix} A_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \\ \alpha_1' a_2' a_3' a_4' a_5' \end{vmatrix}.$$

Der Bündel um A_1 liefert drei kubische Flächen, zu den Kombinationen 23, 24, 25 gehörig, denen die zerfallende kubische Raumkurve $a_2, a_2', (A_1, a_2, a_2')$ gemeinsam ist. Der Restschnitt 6. Ordnung zweier der Flächen begegnet ihr achtmal (je dreimal auf a_2, a_2' und zweimal auf (A_1, a_2, a_2'), also der dritten Fläche sonst noch zehnmal. Dadurch und durch den dualen Prozeß erhalten wir wiederum 20 zentral-planare Homologien.

$$(005) \quad \left| \begin{matrix} a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \\ a_1' a_2' a_3' a_4' a_5' \end{matrix} \right| .$$

Von der Signatur (203) her wissen wir, daß die Ebenen ξ, in denen die Geraden (ξ, a_1, a_1'), (ξ, a_2, a_2'), (ξ, a_3, a_3') in einen Punkt zusammenlaufen, eine Fläche 4. Klasse umhüllen (durch $A_1 A_2$ gingen 4), und dual, daß die Punkte X, für welche die drei Geraden $(X, a_1, a_1')\ldots$ in eine Ebene fallen, eine Fläche 4. Ordnung F_{123} erzeugen, und von der Signatur (104), daß die Punkte X, bei denen für vier Paare von Geraden dies gilt, eine Kurve 10. Ordnung bilden. Auf jener Fläche sind die sechs Geraden $a_1, \ldots a_3'$ einfach; denn z. B. bei einem Punkt X von a_1 gibt es in dem Büschel (X, a_1') stets einen Strahl, der mit (X, a_2, a_2'), (X, a_3, a_3') in dieselbe Ebene fällt. Ferner liegen auf ihr je die beiden Transversalen t_{12}, t_{13}, t_{23} von $a_1, a_1', a_2, a_2'; \ldots;$ denn für jeden Punkt einer von ihnen fallen ja zwei der fraglichen Geraden zusammen. Die Kurve 10. Ordnung, etwa r_{1245}, trifft z. B. die a_1 in den vier Schnitten dieser Gerade mit der Fläche F_{245}, und eine der t_{12} trifft sie zweimal, nämlich in den beiden Schnitten, in denen diese Transversale der nämlichen Fläche F_{245} begegnet, außer auf a_2, a_2'. Somit ergeben sich $4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 20$ abzuziehende Schnitte der F_{123} und r_{1245}; die 20 übrigen führen wiederum zu zentral-planaren Homologien.

Da nun überall noch ein $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{\alpha'}$ mit einem $\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{A'}$ vertauscht werden kann, so hat sich bei allen Signaturen $(lmn)_5$ die Anzahl $\pi\omega$ der zentral-planaren Homologien gleich 20 ergeben.

Das Resultat für (005) läßt sich so aussprechen:

Wenn fünf Strahlennetze gegeben sind, so gibt es 20 Strahlenbüschel, welche in jedes einen Strahl senden.

Wir fanden, π (und ω) ist 20 für (501), (411), ...; das ist $\pi\nu$ für (500), (410), ..., aber auch $\pi\mu$ für (401), (311), ...; für diese Signaturen ist durchweg $\pi\omega = 20$; also folgt aus den Formeln II, daß auch $\pi\rho$ und $\pi\nu$ gleich 20 sind; diese $\pi\nu$ sind wieder $\pi\mu$ für (302), (212), ... Da für diese auch $\pi\omega = 20$, so ergibt sich wiederum auch für sie 20 als Wert von $\pi\rho$, $\pi\nu$; u. s. f.

Also ist auch, für alle Signaturen $(lmn)_6$, $\pi = \omega = 20$, d. i. die Anzahl der ausgearteten Homologien (S, σ') oder (σ, S').

Daraus folgt aber auf Grund der Formeln I, daß für alle diese Signaturen gilt: $\mu = \rho = \nu = 20$.

Demnach ist bei allen Signaturen $(lmn)_7$ die Anzahl der Homologien gleich 20.

Zentrum und Ebene sind für eine Homologie dreifache Bedin- 721
gungen, die Invariante eine einfache. Ist das Zentrum gegeben, so kann der einem gegebenen Punkte entsprechende nur ∞^1 Lagen einnehmen; folglich ist es nur eine einfache Bedingung, wenn zwei entsprechende Punkte, in gerader Linie mit dem Zentrum, gegeben sind. Sind daher das Zentrum S und vier Paare entsprechender Punkte $A, A'; \ldots D, D'$ gegeben, so haben wir 7 Bedingungen; die Homologie ist bestimmt, und zwar eindeutig. Die beiden Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$ sind perspektiv, also liegen die Schnittlinien entsprechender Ebenen auf einer Ebene σ; dies ist die Ebene der Homologie. Weil AB und $A'B'$ sich auf σ schneiden, so ist $(S\sigma AA') = (S\sigma BB')$ und daher auch $= (S\sigma CC') = (S\sigma DD')$; wir haben S, σ und die Invariante.

Dagegen ist es eine doppelte Bedingung, daß zwei (inzidente) Geraden a, a', deren Ebene durch S geht (oder deren Schnittpunkt auf σ liegt), einander entsprechen; weil a' in Sa ∞^2 Lagen einnehmen kann. Sind S und zwei Paare entsprechender Geraden a, a'; b, b' gegeben; so ist σ zunächst durch die Punkte $\mathfrak{S}_a = aa'$, $\mathfrak{S}_b = bb'$ bestimmt. Die projektiven Strahlenbüschel $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_b$:

$$\mathfrak{S}_a(S, a, a') \barwedge \mathfrak{S}_b(S, b, b')$$

machen den Ebenenbüschel um $\mathfrak{S}_a\mathfrak{S}_b$ in sich projektiv, und zweimal fallen entsprechende Strahlen in dieselbe Ebene, welche dann Ebene der Homologie wird.

Somit gibt es zwei Homologien, in denen S oder σ und zweimal entsprechende Geraden, in der notwendigen Lage zu S oder σ, gegeben sind.

Die windschiefe Involution (u, v) ist durch ihre Axen voll- 722
ständig bestimmt und hat die Mannigfaltigkeit 8, ist also als Kollineation eine siebenfache Bedingung. Zwei Paare entsprechender Geraden p_1, p_1'; p_2, p_2' müssen sie in endlicher Anzahl festlegen. Die Axen u, v befinden sich sowohl mit p_1, p_1', als mit p_2, p_2' in einer Regelschar; die Leitscharen müssen also auch zwei Geraden gemeinsam haben, offenbar die beiden Treffgeraden t_1, t_2 der vier p; sind daher O_1, P_1 auf t_1, R_2, S_2 auf t_2 die gemeinsamen harmonischen Punkte zu den Schnitten mit p_1, p_1'; p_2, p_2', so sind sowohl O_1R_2, P_1S_2, als O_1S_2, P_1R_2 Axen. Es gibt mithin zwei windschiefe Involutionen, in denen p_1 und p_1', p_2 und p_2' entsprechend sind.

Wegen des involutorischen Charakters unterscheiden sich $\overset{A}{\,},$ und $\overset{\alpha}{A'}$ nicht, und daher auch nicht die μ und ρ einfach unendlicher Systeme.

Sehr einfach ist das doppelt unendliche System der windschiefen Involutionen:

$$\begin{vmatrix} P_1 & \Pi_2 \\ P_1' & \Pi_2' \end{vmatrix}.$$

Sind auf der Gerade $l_1 = P_1 P_1'$ die Punkte U_1, V_1 die Doppelpunkte der durch die Paare $P_1 P_1'$ und $l_1(\Pi_2, \Pi'_2)$ festgelegten Involution, so liefert jeder Strahl des Büschels von U_1 nach $l_2 = \Pi_2 \Pi_2'$ und jeder Strahl des Büschels von V_1 nach l_2 ein Axenpaar. Und die einem Pnnkte A zugeordneten Punkte erfüllen die Ebene $\bar{\alpha}$ durch l_2, welche von ihm durch die Ebenen dieser Büschel harmonisch getrennt wird, so daß es im Systeme eine windschiefe Involution gibt, in der A und a' oder α und a' konjugiert sind.

Eine Ebene α', die dem A konjugiert sein soll, schneidet in jene Ebene $\bar{\alpha}$ eine Gerade ein, und die Strahlen aus A nach ihr ordnen die Strahlen jener Büschel als Axen u, v projektiv einander zu. Wird noch $\frac{A_1}{\alpha_1}$ gegeben, so haben die beiden Projektivitäten zwei gemeinsame Paare entsprechender Strahlen; es gibt also im Systeme zwei windschiefe Involutionen

$$\begin{vmatrix} A & A_1 \\ \alpha' & \alpha_1' \end{vmatrix}.$$

Weil eine Involution im Systeme vorhanden ist, in welcher der a ein Punkt oder eine Ebene konjugiert ist, so erzeugen die einer Gerade a entsprechenden Geraden a' eine Kongruenz 1. Ordnung, 1. Klasse, also ein Strahlennetz. In der Tat, die zwei Punkten A und A_1 von a zugeordneten Ebenen $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}_1$ tragen kollineare Felder, in denen die den A und A_1 je in derselben Involution des Systems entsprechenden Punkte zugeordnet sind und die gemeinsame Gerade l_2 sich selbst entspricht (Nr. 375, 477).

723 Etwas weniger einfach ist das ebenfalls in sich duale doppelt unendliche System $\mathfrak{S}$ der windschiefen Involutionen $\mathfrak{J}$:

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_1' & P_2' \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_1' & \Pi_2' \end{vmatrix},$$

worin, wenn $l_1 = P_1 P_1'$, $l_2 = P_2 P_2'$ ist, die Π_1, Π_1' die Ebenen $l_2(P_1, P_1')$ und Π_2, Π_2' die Ebenen $l_1(P_2, P_2')$ sind.

Wenn U_1, V_1 auf l_1 zu P_1, P_1' und U_2, V_2 auf l_2 zu P_2, P_2' harmonisch sind, so haben wir sofort zwei Axenpaare windschiefer Involutionen aus $\mathfrak{S}$, nämlich $U_1 U_2$, $V_1 V_2$ und $U_1 V_2$, $V_1 U_2$. In bezug auf jede Fläche 2. Grades $\mathfrak{A}^2$ durch das Vierseit $P_1 P_2 P_1' P_2'$, für welche also die Diagonalen l_1, l_2 Polaren sind, sind U_1 und V_1, U_2 und V_2 konjugiert, also sowohl $U_1 U_2$ und $V_1 V_2$, wie $U_1 V_2$ und $V_1 U_2$ polar, und so jede zwei Axen u, v einer windschiefen Involution des Systems, und die Fläche $\mathfrak{A}^2$

entspricht in (u, v) sich selbst (Nr. 479). Ein Strahl des Netzes $[u, v]$ trifft $\mathfrak{A}^2$ in zwei korrespondierenden Punkten von (u, v). Ist also $\mathfrak{A}^2$ durch einen gegebenen Punkt A gelegt, so sind die Punkte dieser Fläche die dem A in den verschiedenen $\mathfrak{J}$ zugeordneten, und jedem Punkte und jeder Berührungsebene der $\mathfrak{A}^2$ entsprechen die übrigen. A entspricht sich selbst in der einzigen $\mathfrak{J}$, deren eine Axe durch ihn geht. Ist weiter a' gegeben, als konjugiert zu A, so lehren die beiden Schnitte mit $\mathfrak{A}^2$, daß es zwei $\mathfrak{J}$ gibt, die den 8 Bedingungen:

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & A \\ P_1' & P_2' & a' \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \alpha \\ P_1' & P_2' & a' \end{vmatrix}$$

genügen. Ein Strahl g trifft ein Axenpaar; denn die Regelschar $[l_1 l_2 g]$ macht die Punktreihen auf l_1, l_2 projektiv, und durch diese Projektivität entsteht aus der Involution der $U_1 V_1$ eine auf l_2, die mit der der $U_2 V_2$ ein Paar gemein hat. Geht g durch A, so ist der zweite Schnitt von g mit $\mathfrak{A}^2$ dem A in der betreffenden $\mathfrak{J}$ entsprechend. Ist die Gerade g aber eine der Geraden auf $\mathfrak{A}^2$ durch A, so sind die beiden Involutionen (U_1, V_1) und (U_2, V_2) in jener Projektivität entsprechend, und wir haben ∞^1 Involutionen $\mathfrak{J}$.

Diese Geraden treffen $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$, bzw. $P_1 P_2'$, $P_1' P_2$, und so ergeben sich die Strahlennetze $[P_1 P_2, P_1' P_2']$ und $[P_1 P_2', P_1' P_2]$ als Örter derjenigen Strahlen, welche von ∞^1 Axenpaaren getroffen werden.

Viermal vereinigen sich u, v in den Geraden $P_1 P_2$, $P_1' P_2$, $P_1 P_2'$, $P_1' P_2'$, den Seiten des Vierseits; es ergibt sich die in Nr. 698 beschriebene axiale Kollineation mit vereinigten Achsen.

Wir fanden diese Ausartung als einfache Bedingung für eine windschiefe Involution. Also wird unser doppelt unendliches System $\mathfrak{S}$ ∞^1 solche Ausartungen enthalten. In der Tat, von der für die vollständige Bestimmung der axialen Kollineation erforderlichen Projektivität auf und um die Axe $P_1 P_2$ wissen wir erst, daß den Punkten P_1, P_2 die Ebenen von dieser Axe nach P_1', P_2' korrespondieren. Dem beliebigen Punkte A werden daher in den zu $P_1 P_2$ gehörigen Ausartungen, deren System $[P_1 P_2]$ heiße, alle Punkte der Axe entsprechen, wie das aus dem Liegen auf $\mathfrak{A}^2$ zu erwarten ist.

Ordnen wir nun dem A die Ebene α' als konjugiert zu, so liegt der A' auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{A}^2\alpha'$; jede Kante des Kegels aus A nach ihm liefert das Axenpaar einer $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{S}$, welche der Bedingung $\dfrac{A}{\alpha'}$ genügt. Diese Axenpaare erzeugen eine Regelfläche 4. Grades, für welche l_1, l_2 doppelte Leitgeraden sind. Es genügt, dies letztere darzutun, weil aus der dann sich ergebenden Korrespondenz $[2, 2]$ der Grad 4 folgt. Dem Strahlenbüschel aus einem festen Punkte U_1

auf l_1 nach l_2 entspricht polar nach $\mathfrak{A}^2$ der Strahlenbüschel aus V_1 nach l_2. Die Ebenenbüschel, die sie aus A projizieren, erzeugen einen Kegel 2. Grades, den Ort der Geraden (A, u, v); zu ihnen gehören die beiden Geraden g, h der $\mathfrak{A}^2$ durch A, weil jede mit einer u zugleich die polare v trifft; diese Geraden gehören auch zum obigen Kegel aus A nach $\mathfrak{A}^2\alpha'$; die beiden ferneren gemeinsamen Kanten beweisen die Zweifachheit von U_1 (oder V_1) auf der Regelfläche. Von den ∞^1 Axenpaaren, die zu g (oder h) gehören, kommt nur eins auf sie, dasjenige, welches durch A und $g\alpha'$ harmonisch getrennt wird; ebenso kommen die vier singulären Axen $P_1 P_2, \ldots$ auf sie, je wegen ihres in α' gelegenen Punktes.

Die zu A_1, α_1' gehörige Regelfläche hat mit der vorigen 8 Erzeugenden gemein; weil die beiden Kurven, welche von einer Ebene ausgeschnitten werden, außerhalb der Leitgeraden 8 Punkte gemeinsam haben. Vier von ihnen sind die eben genannten; die 4 anderen bilden zwei Paare uv, von denen jedes sowohl einen gewissen Strahl von A nach α', als einen von A_1 nach α_1' harmonisch teilt. Daraus folgt, daß den 8 Bedingungen:

$$\left|\begin{matrix} P_1 & P_2 & A & A_1 \\ P_1' & P_2' & \alpha' & \alpha_1' \end{matrix}\right|$$

2 windschiefe Involutionen entsprechen.

Die windschiefe Involution kann auch dadurch ausarten, daß die beiden Axen sich schneiden (Nr. 699). In unserem Systeme $\mathfrak{S}$ gibt es 4 Systeme von ∞^1 solchen Ausartungen.

Das Schneiden kann nur auf l_1 oder l_2 erfolgen und dann in einem der Punkte P_1, P_2, P_1', P_2'. Diese Ausartung ist ein Spezialfall der Kollineation (S, σ'), die aber zugleich (S', σ) ist; wobei $S \equiv S'$, $\sigma \equiv \sigma'$ und Inzidenz dieser singulären Elemente statt hat; die charakteristische Projektivität ist Involution im Büschel (S, σ) geworden. Im System $[P_1]$ ist dieser (P_1, Π_1), seine Axenpaare projizieren aus P_1 die Involution (U_2, V_2) und die charakteristischen Involutionen stützen sich auf diese. Einem beliebigen Punkte entspricht der singuläre Punkt, in der singulären Ebene sind zwei beliebige Punkte auf gepaarten Strahlen entsprechend.

724 Nennen wir in einem einfach unendlichen Systeme von windschiefen Involutionen π und ψ die Anzahlen der ausgearteten mit sich schneidenden, bzw. vereinigten Axen, so werden von den drei Formeln 1), 2), 3) die beiden ersten identisch, weil $\rho = \mu$, $\omega = \pi$, und wir haben die beiden Formeln:

$$2\mu = 2\pi + \psi, \quad \nu = \pi + \psi.$$

Das System sei nun: $\left|\begin{matrix} P_1, & P_2, & A \\ P_1', & P_2', & \alpha' \end{matrix}\right|.$

In jedem der vier Systeme der ersten Art von Ausartungen in $\mathfrak{S}$ haben wir feste singuläre Elemente; A liegt nun in keiner der singulären Ebenen, und α' geht durch keinen der singulären Punkte; also ist $\pi = 0$.

Von den axialen Ausartungen, welche in $\mathfrak{S}$ ebenfalls vier Systeme bilden, je mit fester Axe, gehört in jedem diejenige zu unserem Systeme, in welcher dem A der Schnitt der Axe mit α' entspricht; daher $\psi = 4$.

Daraus folgt: $\mu = 2$, $\nu = 4$. Das erstere Resultat kennen wir schon.

Betrachten wir das System:

$$\begin{vmatrix} P_1, & P_2, & a \\ P_1', & P_2', & a' \end{vmatrix},$$

wo a, a' konjugiert sein sollen, nicht entsprechend. In jedem der Systeme $[P_1], \ldots$ haben wir ein Axenpaar, das zu den Spuren von a, a' in der singulären Ebene harmonisch ist, so daß a, a' gepaarte Strahlen der betreffenden charakteristischen Involution treffen und daher in der ausgearteten windschiefen Involution konjugiert sind; also ist $\pi = 4$.

Dagegen trifft keine von ihnen eine der vier festen Axen der axialen Ausartungen; mithin ist $\psi = 0$. Und $\mu = 4$, $\nu = 4$; wobei dies μ das vorige ν ist.

Daher haben wir in dem doppelt unendlichen Systeme $\mathfrak{S}$ von windschiefen Involutionen:

$$\begin{vmatrix} P_1, & P_2 \\ P_1', & P_2' \end{vmatrix}$$

folgende Anzahlen:

$$\underset{2}{\begin{vmatrix} A & A_1 \\ \alpha' & \alpha_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \alpha_1 \\ \alpha' & A_1' \end{vmatrix}}, \quad \underset{4}{\begin{vmatrix} A & a \\ \alpha' & a' \end{vmatrix}}, \quad \underset{4}{\begin{vmatrix} a & a_1 \\ a' & a_1' \end{vmatrix}}, \quad \underset{2}{\begin{vmatrix} A \\ a' \end{vmatrix}}, \quad \underset{2.}{\begin{vmatrix} \alpha \\ a' \end{vmatrix}}$$

Die beiden letzten Zahlen lehren, daß die Geraden, welche einer festen Gerade a' in den Involutionen von $\mathfrak{S}$ korrespondieren, eine Kongruenz 2. Ordnung, 2. Klasse erzeugen. Die vier Seiten des Vierseits $P_1 P_2 P_1' P_2'$ sind Doppelstrahlen derselben.[1])

Die allgemeine Kollineation mit Axen hat die Mannig- 725
faltigkeit 9. Interessant ist, daß durch die drei dreifachen Bedingungen:

1) Die beiden Flächen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, die zu den Punkten A, B gehören, sind kollinear (entsprechend in kollinearen Räumen) mit solchen homologen Punkten, welche den A, B je in derselben windschiefen Involution entsprechen. Liegen A, B auf a', so ergibt sich durch die Verbindungslinien der homologen Punkte die obige Kongruenz. Liniengeometrie Bd. II, Nr. 401 ff.

$$\left|\begin{matrix} P_1\, P_2\, P_3 \\ P_1' P_2' P_3' \end{matrix}\right|$$

eine einzige Kollineation mit Axen festgelegt wird. Es seien l_1, l_2, l_3 die drei Verbindungslinien $P_1 P_1'$, ...; ein vierter Leitstrahl ist die Schnittlinie m der Ebenen $P_1 P_2 P_3$, $P_1' P_2' P_3'$; also sind u, v die Treffgeraden von l_1, l_2, l_3, m; und jede der drei Geraden l liefert die Invariante; die drei Würfe auf ihnen sind perspektiv zu demselben Ebenenwurf von m.

Wenn eine der beiden Axen gegeben ist, so ist dies eine vierfache Bedingung. Treten dazu zwei Punkte in einer Ebene durch diese Axe als entsprechend (oder zwei Ebenen durch einen Punkt auf ihr), so liegt eine zweifache Bedingung vor, weil der zweite Punkt ∞^2 Lagen haben kann, wenn der erste gegeben ist. Dagegen ist die Bedingung, daß zwei gegebene Geraden entsprechend sind, noch, wie im allgemeinen Falle, vierfach; denn der ersten kann jede zweite zugeordnet werden; also repräsentieren die Axe u und die beiden entsprechenden Geraden p und p' 8 Bedingungen; in der Tat, es sind nur noch ∞^1 Kollineationen mit Axen möglich; die zweite Axe v kann jede Gerade der Regelschar (upp') sein; die Invariante ist dann bestimmt.

Wir erinnern an die drei Ausartungen der allgemeinen Kollineation mit Axen, welche durch den Wert 0 (oder ∞) der Invariante, das Schneiden der Axen oder durch die Vereinigung derselben sich ergeben (Nr. 698, 699). Daß die letzte vom Werte der Invariante unabhängig ist, kann man folgendermaßen aussprechen:

Die neunfach unendliche Mannigfaltigkeit der allgemeinen Kollineationen mit Axen zerlegt sich, den verschiedenen Werten der Invariante λ entsprechend, in ∞^1 achtfach unendliche Mannigfaltigkeiten, darunter eine mit allen Ausartungen der ersten Art, dann, für $\lambda = -1$, der Inbegriff aller windschiefen Involutionen. Allen gemeinsam ist die siebenfach unendliche Mannigfaltigkeit der dritten Ausartungen; und die achtfach unendliche der zweiten zieht sich durch alle hindurch, in jede ∞^7 sendend.

Ein einfach unendliches System hat, im allgemeinen, mit dem siebenfach unendlichen der Ausartungen der dritten Art nichts gemein, enthält also nur Ausartungen der beiden ersten Arten. Besitzt es aber eine feste Invariante, wie z. B. ein System von windschiefen Involutionen, so fehlen ihm die Ausartungen der ersten Art; es enthält solche der beiden andern Arten.

§ 103. Lineare Systeme von räumlichen Korrelationen.

Zwei räumliche Korrelationen Γ_1 und Γ_2 haben ∞^4 gemeinsame Paare konjugierter Punkte, zu jedem Punkte des einen Raumes ∞^1 gemeinsam konjugierte auf der Schnittlinie der beiden Polarebenen. Jede Gerade des Raumes trägt zwei solche Paare; sie sind gemeinsam den beiden Projektivitäten konjugierter Punkte auf ihr, die zu Γ_1 und Γ_2 gehören. Aus diesen ∞^4 Paaren nehmen wir 14 Paare, so bestimmen diese ein System von Korrelationen $(\overline{1}400)$, und da der Signatur $(\overline{1}500)$ eine einzige Korrelation entspricht, so heißt das, von den Polarebenen in Σ', die einem Punkte A des einen Raumes Σ in den verschiedenen Korrelationen des Systems entsprechen, geht eine durch einen gegebenen Punkt B, der damit jenem in dieser Korrelation konjugiert wird. Folglich bilden diese Polarebenen einen Büschel. Zum Systeme $(\overline{1}400)$ gehören die beiden gegebenen Korrelationen; die Polarebenen von A in ihnen bestimmen diesen Büschel, und die Punkte der Axe sind dem A in allen Korrelationen des Systems $(\overline{1}400)$ konjugiert. Folglich haben diese Korrelationen die gemeinsam konjugierten Punkte von Γ_1 und Γ_2 auch zu konjugierten, so daß sie dem ganzen Systeme gemeinsam konjugiert sind. Wir nennen dies System einen Korrelationenbüschel, der ersichtlich durch jede zwei seiner Korrelationen konstituiert werden kann; sowie nun auch klar ist, daß beliebige (unabhängige) 14 Paare aus den gemeinsam konjugierten von Punkten Γ_1, Γ_2 zur Definition genommen werden können. Das Wort „beliebige" wird jedoch noch genauer erläutert werden. 726

Die beiden Korrelationen Γ_1, Γ_2 haben auch ∞^4 gemeinsame Paare konjugierter Ebenen; nehmen wir 14 dieser Paare, so gelangen wir zu der durch Γ_1, Γ_2 konstituierten Schar von Korrelationen $(0\overline{1}40)$, die vom Büschel wesentlich verschieden ist.

Wir haben bei den Signaturen $(\overline{1}410)$ und $(\overline{1}401)$ drei, bzw. zwei Korrelationen gefunden; ersteres bedeutet, daß von den Polen einer Ebene α in den verschiedenen Korrelationen eines Büschels drei in eine Ebene β fallen, so daß die Pole einer Ebene α eine kubische Raumkurve B^3 erzeugen; das andere, daß von den Polaren einer Gerade a zwei eine Gerade b treffen, so daß die Polaren eine Regelschar erzeugen. Die Leitschar derselben entsteht in folgender Weise. Jeder Punkt A hat eine gemeinsam konjugierte Gerade, die Axe des Büschels der Polarebenen; durchläuft A die Gerade a, so beschreiben die Polarebenen in Γ_1, Γ_2 projektive Büschel um die Polaren b_1, b_2, und die von ihnen erzeugte Regelschar ist der Ort der konjugierten Geraden der Punkte A von a; zur verbundenen

Schar gehören die beiden Polaren a_1, b_1, aber ebenso gut jede Polare von a in bezug auf eine Korrelation des Büschels.

Folglich sind, in bezug auf einen Büschel von Korrelationen, jeder Gerade a zwei verbundene Regelscharen zugeordnet: die eine wird durch die Polaren von a in den verschiedenen Korrelationen des Büschels, die andere durch die Geraden gebildet, die den Punkten von a gemeinsam konjugiert sind.

Geht α durch a, so liegt die zugehörige kubische Polkurve auf der Trägerfläche der beiden Scharen; den Polaren begegnet sie je einmal, im Pole der α für diejenige Korrelation, zu der die Polare gehört; den konjugierten Geraden also zweimal. Die B^3 können wir erzeugen durch die Polarebenen-Büschel von drei beliebigen Punkten in α; alle die ∞^3 Polarebenen-Büschel sind projektiv, denn jede Ebene eines solchen Büschels bestimmt — durch einen Punkt in ihr als konjugiert zu dem gemeinsamen Pole — eine Korrelation, in der sie Polarebene ist, und also eine Ebene in den übrigen Büscheln, die je dem betreffenden Pole in dieser Korrelation zugehört. Jene drei Büschel erzeugen also die B^3, und die Axen der Büschel, den drei Punkten konjugiert, sind Doppelsekanten der Kurve. Und da wir diese Punkte durch beliebige andere in α ersetzen können, so erhalten wir in den Geraden, welche den Punkten von α gemeinsam konjugiert sind, die Doppelsekanten von B^3.

Dreht sich α um a, so entsteht auf der a zugeordneten Fläche 2. Grades ein einfach unendliches System von Kurven B^3.

Der Korrelationenbüschel $(\overline{1}400)$ enthält, da für diese Signatur gefunden wurde: $\pi = 4$, $\omega = \psi = 0$, von ausgearteten Korrelationen nur zentrale, und zwar 4.[1]) Es seien S_1, S_1'; S_2, S_2'; S_3, S_3'; S_4, S_4' die singulären Punkte oder Zentren derselben. Für die beliebige Ebene α in Σ sind Pole in diesen Korrelationen die S_1', ..., S_4', also gehen alle Polkurven B^3 in Σ' durch diese vier Zentren S'; und die eben erhaltenen auf der zu a gehörigen Fläche b^2 der beiden Regelscharen bilden daher einen Büschel. Auch alle Flächen b^2 gehen durch die vier Punkte S'.

Zwei Punkte, welche in zweien der Korrelationen des Büschels konjugiert sind, sind es in allen; daraus folgt, daß, wenn ein Punkt und eine Gerade in zweien konjugiert, ein Punkt und eine Ebene in ihnen polar sind, dies für alle Korrelationen des Büschels gilt.

Der Punkt S_1 habe in irgend einer Korrelation des Büschels die Ebene σ_1 zur Polarebene, diejenige in bezug auf (S_1, S_1') ist un-

1) Diese 4 ist die Zahl ζ_{14} für $(00\overline{1}40)$ im Problem korrelativer Bündel (Nr. 466).

bestimmt, kann also σ_1 sein, diese Ebene ist daher gemeinsame Polarebene des S_1; als Polarebene in bezug auf die andern zentralen Korrelationen muß sie durch S_2', S_3', S_4' gehen und ist deren Verbindungsebene.

Also sind $S_1S_2S_3S_4$, $S_1'S_2'S_3'S_4'$ gemeinsame polare Tetraeder aller Korrelationen des Büschels; jedem Zentrum ist polar die Ebene der drei Zentren im andern Raume, von denen keins mit ihm zur nämlichen zentralen Korrelation gehört.

Ein Punkt, der in allen Korrelationen des Büschels die nämliche Polarebene hat, muß Zentrum einer zentralen Korrelation aus demselben sein; denn wäre er es nicht, so würde die gemeinsame Polarebene durch alle vier Zentren im andern Raume gehen, die aber im allgemeinen nicht in derselben Ebene liegen. Also bilden die Zentren der zentralen Korrelationen des Büschels das einzige gemeinsame Paar polarer Tetraeder.

In Σ' haben wir zwei kollineare Räume Σ_1', Σ_2', die der Polar- 727
ebenen der Punkte von Σ in Γ_1, Γ_2; Konzidenztetraeder ist das der S', und die Schnittlinien entsprechender Ebenen, die den Punkten A von Σ gemeinsam in allen Korrelationen des Büschels konjugierten Geraden bilden einen zu diesem Tetraeder gehörigen tetraedralen Komplex; und einen ebensolchen enthält der Raum Σ.

Gehört a zu diesem, so sind alle ihre Punkte zu einem Punkte B gemeinsam konjugiert; es gehen also die ihnen gemeinsam konjugierten Geraden alle durch B, und statt einer allgemeinen Regelschar erhält man einen Kegel, der dann auch durch die Polaren von a entsteht; so daß jede Kante des Kegels sowohl gemeinsam konjugierte Gerade eines gewissen Punktes von a, als auch Polare von a in einer gewissen Korrelation des Büschels ist. Daß die Polaren der a alle durch B gehen, folgt auch daraus, daß a in allen Polarebenen von B liegt.

Wenn zwei Punkte sowohl in Γ_1, als in Γ_2 doppelt konjugiert sind, so sind sie es in allen Korrelationen des Büschels. Zu jeder der beiden Korrelationen gehört ein Gewinde $\mathfrak{G}_1^p$, $\mathfrak{G}_2^p$ von Strahlen, welche Involutionen doppelt konjugierter Punkte tragen; auf jedem Strahle des gemeinsamen Strahlennetzes dieser beiden Gewinde haben die beiden Involutionen ein Paar gemeinsam. Es sind daher ∞^2 Paare in allen Korrelationen des Büschels doppelt konjugierter Punkte vorhanden; die Verbindungslinien bilden ein Strahlennetz $[q, \bar{q}]$.

Zwei nicht zusammengehörige Zentren (aus verschiedenen Räumen) sind konjugiert in den beiden zugehörigen zentralen, also in allen Korrelationen des Büschels.

Wenn ein Punkt C zu einem andern in Γ_1 und Γ_2 (und allen

Korrelationen des Büschels) doppelt konjugiert ist, so müssen alle vier Polarebenen durch letzteren gehen, folglich gehen durch diesen sowohl die beiden gemeinsam konjugierten Geraden, die er in beiderlei Sinne besitzt, als auch die Wechselstrahlen, die er in Γ_1 und Γ_2 hat. Durchläuft C eine Gerade c, so beschreiben die vier Polarebenen projektive Ebenenbüschel, und viermal kommen entsprechende Ebenen in einen Punkt zusammen (Nr. 208); folglich gibt es auf jeder Gerade c vier Punkte, welche je einen doppelt konjugierten Punkt für den ganzen Büschel besitzen. Diese ∞^2 Paare doppelt konjugierter Punkte erzeugen eine Fläche 4. Ordnung. Damit die vier Schnitte bei jedem Strahle des oben erhaltenen Strahlennetzes $[q, \bar{q}]$ zustande kommen, müssen, weil jeder immer nur ein Paar doppelt konjugierter Punkte trägt, die beiden andern Schnittpunkte auf den Leitgeraden q liegen, dieselben also ganz der Fläche 4. Ordnung angehören. Diese Leitgeraden q sind daher mit lauter Punkten erfüllt, welche doppelt konjugierte Punkte haben. Diese Fläche 4. Ordnung enthält die Ecken der Schnittvierseite $ABCD$ der Kernflächen aller Korrelationen des Büschels.

728 Die Punkt-Kernflächen der verschiedenen Korrelationen des Büschels bilden selbst einen Büschel, denn ein beliebiger Punkt ist in einer Korrelation des Büschels sich selbst konjugiert. Jeder Punkt der Grundkurve ist sich selbst in allen Korrelationen konjugiert, liegt also auf allen seinen Polarebenen beider Arten. Schneidet man die Figur mit einer Ebene, so ergibt sich ein ebener Korrelationenbüschel mit vier sich selbst konjugierten Punkten, den Grundpunkten des Büschels der Punkt-Kernkurven. Dieser ebene Korrelationenbüschel hat ein einziges gemeinsames Paar doppelt konjugierter Punkte $G'G''$ (Nr. 432), fällt ja auch in die Ebene nur ein Strahl des Strahlennetzes, den die Punkte W der verschiedenen ebenen Korrelationen erfüllen. Geht die Ebene aber durch eine der Leitgeraden q, so trägt jeder der Strahlen des Netzes in ihr, die einen Büschel um die Spur der andern Leitgerade bilden, ein solches gemeinsames Paar doppelt konjugierter Punkte; es tritt der in Nr. 432 erwähnte Fall ein: diese Paare bilden eine Kurve 3. Ordnung, den ferneren Schnitt unserer Fläche 4. Ordnung mit der Ebene, und der erwähnte Scheitel ist gemeinsamer Punkt W der ebenen Korrelationen.

Eine Ebene trifft ihre Polkurve dreimal, ist also in bezug auf drei Korrelationen des Büschels sich selbst konjugiert und berührt drei Ebenen-Kernflächen.

Bei den zentralen Korrelationen artet die Punkt-Kernfläche nicht aus, wohl aber die Ebenen-Kernfläche und zwar in ein Ebenen-Punkte-Paar (Nr. 702).

Die vier Kegel des Büschels der Punkt-Kernflächen gehören also zu nicht ausgearteten Korrelationen des Büschels; da nun die Ebenen-Kernflächen zu ihnen in der betreffenden Korrelation polar sind, so müssen sie in Kegelschnitte ausarten. Die Ebene eines solchen geht durch die Spitze des Kegels und seine Tangenten aus derselben sind Kanten des Kegels (Nr. 615).

Auf jeder Gerade, welche eine Involution doppelt konjugierter Punkte einer Korrelation trägt, sind die Schnitte mit der Punkt-Kernfläche die Doppelpunkte dieser Involution, weil die doppelt konjugierten Punkte in bezug auf die genannte Kernfläche konjugiert sind. Folglich bilden die Doppelpunkte der Involution, in welcher ein Strahl des Netzes $[q, \bar{q}]$ den Büschel der Punkt-Kernflächen schneidet, das gemeinsame Paar doppelt konjugierter Punkte; und die obige Fläche 4. Ordnung ist der Ort der Berührungspunkte von Strahlen des Netzes $[q, \bar{q}]$ mit den Punkt-Kernflächen.

Wenn drei Korrelationen Γ_1, Γ_2, Γ_3 gegeben sind, so 729
gibt es zu jedem Punkt A einen gemeinsam konjugierten B, den Schnittpunkt der drei Polarebenen. Das führt zu einer eindeutigen Verwandtschaft der beiden Räume; die drei Polarebenen von B durchschneiden sich natürlich in A. Wenn A auf einer Gerade a sich bewegt, so beschreiben die Polarebenen drei projektive Büschel um die Polaren b_1, b_2, b_3, und Ort der Punkte B ist eine kubische Raumkurve b^3, welche die drei Polaren zu Doppelsekanten hat; einer Gerade a, b aus Σ, Σ' entspricht eine kubische Raumkurve b^3, a^3 im andern Raume. Daraus folgt schon, daß einer Ebene α (oder β) eine kubische Fläche β^3 (oder α^3) korrespondiert, denn sie trifft eine b so oft, als deren a^3 die α. Aber die Polarebenen der Punkte von α bilden ja drei kollineare Bündel um die Pole B_1, B_2, B_3 von α und durch sie entsteht die β^3.

Die beiden zu α und α_1 gehörigen kubischen Flächen β^3 und $\beta_1{}^3$ haben zunächst die kubische Raumkurve gemein, welche der Gerade $\alpha\alpha_1$ entspricht; jedem Punkte B des ferneren Schnitts 6. Ordnung vom Range 16[1]) gehört ein Punkt in α und ein davon verschiedener in α_1 zu; durch beide müssen alle drei Polarebenen des B gehen, also in eine Gerade $\bar{a}$ zusammenlaufen. Und weil jede Ebene in Σ diese Gerade trifft, so gehen alle zugehörigen kubischen Flächen β^3 durch die eben erwähnte Kurve. Sie bilden ein Gebüsche, weil das Hindurchgehen durch diese Kurve mit 16 linearen Bedingungen (16 Punkten auf ihr) äquivalent ist.[2])

In jedem der beiden Räume gibt es also eine Raumkurve 6. Ordnung und 16. Ranges $a_0{}^6$, $b_0{}^6$, gebildet durch diejenigen Punkte, deren drei Polarebenen in eine Gerade

1) Flächen 3. Ordnung, Nr. 64.

2) Ebenda, Nr. 73.

zusammenlaufen. Alle kubischen Flächen, welche den Ebenen des andern Raumes entsprechen, gehen durch sie, und je zwei schneiden sich noch in der kubischen Raumkurve, welche der Schnittlinie der beiden Ebenen korrespondiert. Diese beiden den vollen Schnitt zweier kubischen Flächen bildenden Kurven begegnen sich in acht Punkten (Nr. 383, 692).[1]) Das ergibt sich auch folgendermaßen.

Nehmen wir drei Flächen α^3, $\alpha_1{}^3$, $\alpha_2{}^3$, entsprechend den Ebenen β, β_1, β_2; es seien $a_1{}^3$, $a_2{}^3$ die ferneren Schnitte von α^3 mit $\alpha_1{}^3$, $\alpha_2{}^3$, entsprechend den Geraden $\beta\beta_1$, $\beta\beta_2$. Dem Schnittpunkt dieser Geraden korrespondiert ein Punkt: der einzige Begegnungspunkt, den $a_1{}^3$ und $a_2{}^3$ haben; folglich kommt von den neun Begegnungspunkten der $a_1{}^3$ mit $\alpha_2{}^3$, welche auf dem vollen Schnitt von α^3, auf welcher $a_1{}^3$ liegt, und $\alpha_2{}^3$ sich befinden, einer auf den Bestandteil $a_2{}^3$, die acht andern auf $a_0{}^6$.

Die acht Begegnungspunkte der $a_0{}^6$ mit jeder a^3 beweisen, daß die der a^3 entsprechende Gerade b acht von den Geraden $\bar{b}$ trifft, welche den Punkten von $a_0{}^6$ gemeinsam konjugiert sind.

Diese Konkurrenzgeraden $\bar{b}$, welche den Punkten von $a_0{}^6$ gemeinsam konjugiert sind, erzeugen also eine Regelfläche 8. Grades $\bar{b}_0{}^8$; und ebenso enthält der Raum Σ eine: $\bar{a}_0{}^8$.

Jede von ihnen hat zu der ausgezeichneten Kurve ihres Raums eine engere Beziehung.

Es sei $\bar{a}$ eine Erzeugende von $\bar{a}_0{}^8$, B der entsprechende Punkt auf $b_0{}^6$, so gehen die drei Polaren von $\bar{a}$ durch diesen gemeinsam konjugierten Punkt B, die drei projektiven Ebenenbüschel um sie, welche die korrespondierende kubische Raumkurve b^3 zu erzeugen haben, gehören demselben Bündel an, und dreimal gehen entsprechende Ebenen durch eine Gerade, welche drei Geraden durch B gehen und die b^3 für diesen Fall darstellen; sie entspricht der Punktreihe auf $\bar{a}$ derartig, daß einem beliebigen Punkte derselben der Punkt B, drei ausgezeichneten je eine ganze Gerade korrespondiert.

Das bedeutet, daß auf $\bar{a}$ drei Punkte von $a_0{}^6$ liegen und durch B drei Geraden $\bar{b}$ gehen.

Daher ist die Kurve $a_0{}^6$ eine dreifache Kurve auf der Regelfläche $\bar{a}_0{}^8$ und jede Erzeugende dieser Fläche ist dreifache Sekante jener Kurve. Dasselbe gilt für $b_0{}^6$ und $\bar{b}_0{}^8$. Die Punkte der Kurve in dem einen Raume und die Geraden der Fläche im andern sind eindeutig einander zugeordnet: als konjugiert in den drei Korrelationen.[2])

Wenn einem Punkte A von $a_0{}^6$ eine Gerade $\bar{b}$ konjugiert ist, so gehen die Polarebenen aller Punkte von $\bar{b}$ in den drei Korrelationen

1) Und: Flächen 3. Ordnung, Nr. 64.

2) Was wir in Nr. 692 erhalten haben, ist Spezialfall: für drei Polarräume.

durch ihn, oder die drei Polaren von $\bar{b}$. Demnach ist $a_0{}^6$ auch Ort der Punkte, in welche die drei Polaren derselben Gerade $\bar{b}$ zusammenkommen.

Diese drei Korrelationen erweitern wir zu einem Korrelationen- 730
netz mit denselben gemeinsam konjugierten Punkten. Wir nehmen aus dem dreifach unendlichen System gemeinsam konjugierter Punkte der Γ_1, Γ_2, Γ_3 13 Paare heraus, so daß wir die Signatur $(\overline{13}\,0\,0)$ haben. Sie bedingt ein doppelt unendliches System von Korrelationen, zu denen die drei gegebenen gehören. Es sei Γ irgend eine von ihnen. Der Büschel $\Gamma_1\Gamma_2$ ist definiert durch die 13 Paare und ein vierzehntes aus der vierfachen Unendlichkeit der gemeinsamen Paare konjugierter Punkte, und gehört, wegen der 13 Paare, ganz zu unserm System, ebenso der Büschel $\Gamma_3\Gamma$, der auch durch ein vierzehntes Paar definiert sei; dann ist diesen Büscheln diejenige Korrelation Γ_{12} gemeinsam, welche durch die 13 Paare und die beiden vierzehnten Paare definiert ist; wir können also unser System fächerförmig aus den drei gegebenen Korrelationen (und jeden drei unabhängigen) konstituieren und nennen es deshalb Netz.

Beliebige zwei Korrelationen in ihm bestimmen einen Büschel, der ihm ganz angehört, weil allen seinen Korrelationen die 13 Paare konjugierter Punkte gemeinsam sind. Zwei Büschel haben eine Korrelation gemeinsam; ein Paar konjugierter Punkte scheidet einen Büschel und zwei eine einzige Korrelation aus: die Netzeigenschaften.

Jetzt sei A, B ein gemeinsames Paar konjugierter Punkte der drei gegebenen Korrelationen Γ_1, Γ_2, Γ_3, dann gehört es auch zu allen Korrelationen des Büschels $\Gamma_1\Gamma_2$ und daher zu allen des Büschels $\Gamma_3\Gamma_{12}$ und zu Γ, einer beliebigen Korrelation des Netzes.

Das dreifach unendliche System gemeinsamer Paare konjugierter Punkte für Γ_1, Γ_2, Γ_3 gehört auch zu allen Korrelationen ihres Netzes, und daher auch die obige Verwandtschaft.

Fanden wir, daß die Polaren einer a in Γ_1, Γ_2, Γ_3 drei Doppelsekanten der zugeordneten b^3 sind, so sind auch die Polaren von a in allen Korrelationen des Netzes Doppelsekanten von b^3. Jede Doppelsekante ergibt sich so; wir lassen einen Punkt auf ihr zu zwei Punkten von a konjugiert sein; dadurch wird aus dem Netze eine Korrelation ausgeschieden, und die Polare der a in ihr geht durch jenen Punkt und ist Doppelsekante von b^3 durch ihn, also die gegebene.

Ebenso enthält die einer Ebene α zugehörige Fläche β^3 auch die Pole von α in den übrigen Korrelationen. Wir legen in α eine Gerade a, so daß die entsprechende b^3 auf β^3 liegt. Von einem beliebigen Punkt B der β^3 geht eine Doppelsekante an b^3;

diejenige Korrelation des Netzes, für welche diese die Polare von a ist, hat den Punkt zum Pol von α.

Wenn zunächst 13 Paare konjugierter Punkte gegeben sind und damit ein Korrelationennetz, so darf das vierzehnte Paar, durch welches ein Büschel ausgeschieden werden soll, nicht zu dem dreifach unendlichen Systeme von Paaren konjugierter Punkte gehören, die allen Korrelationen des Netzes gemeinsam sind, und ähnliches gilt, wenn aus einem Büschel eine Korrelation, und wird auch für höherstufige Systeme gelten, wenn eins niedrigerer Stufe ausgeschieden werden soll.

731 Eine einzelne Korrelation besitzt ∞^4 Paare doppelt konjugierter Punkte, je eine Involution auf allen Strahlen eines Gewindes; bei einem Büschel von Korrelationen fanden wir eben ∞^2 Paare, und daher ist für ein Netz nur eine endliche Anzahl von Paaren zu erwarten; wir gewinnen sie folgendermaßen.

Die drei konstituierenden Korrelationen führen zu drei Gewinden $\mathfrak{G}_1^p$, $\mathfrak{G}_2^p$, $\mathfrak{G}_3^p$, und die Verbindungslinien der gesuchten Paare können sich nur in der Regelschar ρ_{123} befinden, welche diesen Gewinden gemeinsam ist (Nr. 535). Jede Gerade derselben trägt, von den drei Korrelationen her, drei Involutionen doppelt konjugierter Punkte, welche im allgemeinen kein Paar gemeinsam haben.

Zur Leitschar dieser Regelschar ρ_{123} gehören die Leitgeraden $q_{12}, \bar{q}_{12}$; $q_{13}, \bar{q}_{13}; \ldots$ der drei Strahlennetze $\mathfrak{G}_1^p\mathfrak{G}_2^p$, $\mathfrak{G}_1^p\mathfrak{G}_3^p$, $\mathfrak{G}_2^p\mathfrak{G}_3^p$. Wir schneiden die Trägerfläche der Regelschar mit den beiden Flächen 4. Ordnung, welche zu Γ_1 und Γ_2, Γ_1 und Γ_3 gehören; die eine geht durch $q_{12}, \bar{q}_{12}$, die andere durch $q_{13}, \bar{q}_{13}$; also schneiden sie noch in Raumkurven 6. Ordnung, welche die Geraden der Regelschar in zwei Punkten, also die der andern Schar in vier Punkten treffen; die zwei Punkte sind bei der einen Kurve doppelt konjugiert in Γ_1 und Γ_2, bei der andern in Γ_1 und Γ_3. Diese beiden Kurven haben, wegen ihres Verhaltens zu den beiden verbundenen Regelscharen, $2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 16$ Punkte gemeinsam (Nr. 165); davon kommen vier auf folgende Weise zustande. Von den Geraden der Regelschar gehören vier zum tetraedralen Komplexe der Wechselstrahlen von Γ_1.[1]) Ein Strahl ist Wechselstrahl, wenn seine beiden Polaren einander schneiden (Nr. 325). Die Korrelation Γ_1 führt unsere Regelschar, zu Σ bzw. Σ' gerechnet, in zwei zu ihr, also zu einander projektive Regelscharen über; diese haben (Nr. 108) vier Paare entsprechender Geraden, die sich schneiden; die ihnen entsprechenden in ρ_{123} sind Wechselstrahlen. Jeder der vier Strahlen befindet sich, als Strahl von ρ_{123}, auch in $\mathfrak{G}_1^p$, gehört zu einem Punkt P der Punkt-Kernfläche F^2 von Γ_1, der auf ihm liegt, und trägt für Γ_1

1) Dies folgt auch aus dem Satze der Liniengeometrie, daß ein Komplex p^{ten} und eine Regelfläche q^{ten} Grades pq Geraden gemeinsam haben: Liniengeometrie Bd. I, Nr. 36.

eine parabolische Involution doppelt konjugierter Punkte mit P als singulärem Punkt (Nr. 562). Weil er aber zum Strahlennetz $\mathfrak{G}_1^p\mathfrak{G}_2^p$ gehört, enthält er ein gemeinsames Paar doppelt konjugierter Punkte für Γ_1 und Γ_2, das dann auf der ersten jener Kurven 6. Ordnung liegt; zu ihm muß, weil die eine Involution parabolisch ist, P gehören, und ebenso zu dem gemeinsamen Paare für Γ_1 und Γ_3, dessen zweiter Punkt aber ein anderer ist als vorhin. Jedenfalls ist P gemeinsamer Punkt der beiden Kurven 6. Ordnung. Sei Q einer von den zwölf übrigen, so gehört er je zu einem gemeinsamen Paare für Γ_1 und Γ_2, und zu einem für Γ_1 und Γ_3, und der zweite Punkt ist derselbe: der, welcher ihm in der nicht parabolischen Involution doppelt konjugierter Punkte auf der durch ihn gehenden Gerade von ρ_{123} für Γ_1 gepaart ist. Dieser zweite Punkt ist dann ebenfalls Schnitt der Kurven 6. Ordnung, und die zwölf Punkte liefern sechs Paare. Also:

Drei Korrelationen besitzen sechs gemeinsame Paare doppelt konjugierter Punkte.

Dies ergibt sich, unter Benutzung jenes Satzes der Liniengeometrie, auch durch folgende Überlegung.

Für jede der drei Involutionen doppelt konjugierter Punkte auf einer Gerade der ρ_{123} sind Doppelpunkte die Schnitte mit der betreffenden Punkt-Kernfläche; und nur diejenigen Geraden von ρ_{123}, welche die drei Kernflächen in Paaren einer Involution schneiden, führen — in den Doppelpunkten derselben — zu einem gemeinsamen Paare doppelt konjugierter Punkte.

Nun fanden wir, daß die Geraden, welche drei Kegelschnitte in den Paaren einer Involution schneiden, eine Kurve 3. Klasse umhüllen, die Cayleysche Kurve ihres Netzes (Nr. 687); daher erzeugen die Geraden, welche drei Flächen 2. Grades in Punktepaaren einer Involution schneiden, einen Komplex 3. Grades. Die sechs Geraden, welche dieser mit der Regelschar gemeinsam hat, führen zum Ziele.

Die Punkte eines solchen Paares doppelt konjugierter Punkte sind in der obigen eindeutigen kubischen Verwandtschaft involutorisch entsprechend. Sie sind dann auch in allen Korrelationen des Netzes doppelt konjugiert. Ihre Verbindungslinien befinden sich in deren Gewinden $\mathfrak{G}^p$, so daß dieselben alle durch die Regelschar gehen, die den drei zu Γ_1, Γ_2, Γ_3 gehörigen Gewinden gemeinsam ist und zu welcher die sechs Geraden gehören. Die zu den Korrelationen eines Netzes gehörigen Gewinde $\mathfrak{G}^p$ der Strahlen, welche Involutionen doppelt konjugierter Punkte tragen, bilden selbst ein Netz.

Das gilt aber auch für die Punkt-Kernflächen dieser Korrelationen; denn die acht Punkte, welche denen von Γ_1, Γ_2, Γ_3

gemeinsam sind, sind in diesen sich selbst konjugiert und daher in allen des Netzes und liegen auf jeder der Punkt-Kernflächen.

Diese acht Punkte sind in der eindeutigen Verwandtschaft sich selbst entsprechend.

In dem Netze von Korrelationen sind ∞^1 zentrale Korrelationen enthalten. Ihre Zentren erfüllen zwei Kurven 6. Ordnung. Im Problem korrelativer Bündel führt nämlich die (dortige) Signatur $(0\,0\,\overline{13}\,0)$ oder vielmehr jede Signatur $(\alpha\beta\gamma 0)_{13}$ (Nr. 466) zu zwei Raumkurven 6. Ordnung, aus deren entsprechenden Punkten Bündel kommen, die so korrelativ sind, wie es die Signatur $(\alpha\beta\gamma 0)$ verlangt, welche also, wenn es sich um $(0\,0\,\overline{13}\,0)$ handelt, nach den 13 gegebenen Paaren konjugierte Strahlen senden. Denn faßt man diese Bündelkorrelationen als zentrale Raumkorrelationen auf, so werden die Punkte der 13 Paare konjugiert.

Diese beiden Kurven 6. Ordnung sind aber mit den ausgezeichneten Kurven a_0^6 und b_0^6 der eindeutigen Verwandtschaft identisch. Denn ist S das Zentrum einer zentralen Korrelation im Netze, so ist seine Polarebene in dieser unbestimmt, kann also durch die Schnittlinie der Polarebenen in zwei andern Korrelationen des Netzes gehend angenommen werden, so daß in diese Gerade alle Polarebenen von S zusammenlaufen; folglich liegt S auf a_0^6. Und umgekehrt, weil für einen Punkt A auf a_0^6 die Polarebenen in bezug auf alle Korrelationen des Netzes eine Gerade gemeinsam haben, so gehört jede Ebene dieses Büschels zu ∞^1 Korrelationen des Netzes als Polarebene von A; in dem Büschel von zwei derselben muß also A Zentrum einer zentralen Korrelation sein, und alle fraglichen Korrelationen gehören diesem Büschel an.

Die Tabellen von Nr. 711 lehren, daß in dem Korrelationennetz keine planaren oder axialen Korrelationen enthalten sind, also auch nicht Ausartungen 2. Stufe.

732 Wir gehen über zu vier Korrelationen Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4. Ein beliebiger Punkt A hat nun keinen gemeinsam konjugierten mehr; denn die vier Polarebenen sind nicht konkurrent. Wir müssen daher zwei Flächen in Σ und Σ' bekommen mit eindeutig zugeordneten Punkten, welche in bezug auf die vier Korrelationen konjugiert sind. Wenn A eine Gerade durchläuft, so erhalten wir vier projektive Büschel der Polarebenen und daher viermal entsprechende Ebenen, welche einen Punkt gemeinsam haben. Die beiden Flächen sind 4. Ordnung.

Bei vier Korrelationen enthalten die beiden Räume zwei Flächen 4. Ordnung $\mathfrak{A}^4$, $\mathfrak{B}^4$ mit eindeutig einander zugeordneten Punkten, die in allen vier Korrelationen konjugiert sind. Jede der beiden Flächen für sich kann man durch vier kollineare Räume herstellen, die $\mathfrak{B}^4$ z. B. durch die vier kollinearen Ebenenräume (Ebenengebüsche) der Polarebenen der Punkte von Σ und zwar als Ort der Punkte, in welchen entsprechende Ebenen sich schneiden (Nr. 675).

Aus den ∞^2 gemeinsamen Paaren konjugierter Punkte nehmen wir nunmehr zwölf Paare heraus, welche ein dreifach unendliches System $(\overline{12}00)$ von Korrelationen bestimmen, zu denen die vier gegebenen gehören. Es sei Γ irgend eine von ihnen; wir betrachten das Netz $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, bestimmt durch ein weiteres Paar konjugierter Punkte, und den Büschel $\Gamma_4\Gamma$, bestimmt durch zwei weitere Paare; dann ist ihnen gemeinsam die Korrelation Γ_{123}, welche durch alle drei Paare festgelegt wird. Wir sehen unser System fächerförmig aus den vier Konstituenten $\Gamma_1, \ldots \Gamma_4$ hergestellt, können es Gebüsche nennen, und finden hier vermittelst der gemeinsam konjugierten Punkte, daß jeder Büschel, jedes Netz, durch zwei bzw. drei seiner Korrelationen bestimmt, ihm angehört, daß ein Büschel und ein Netz, die sich in ihm befinden, eine Korrelation gemeinsam haben, also die Gebüsche-Eigenschaften (Nr. 664 ff.) Aber insbesondere folgt, daß für einen solchen Punkt A, dessen Polarebenen in $\Gamma_1, \ldots \Gamma_4$ in einen Punkt B zusammenlaufen, alle Polarebenen es tun; denn es gilt zunächst für diejenigen des Netzes $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, also für Γ_{123} und dann für diejenigen des Büschels $\Gamma_4\Gamma_{123}$, also für Γ.

Demnach sind zwei Punkte, welche zugleich für Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 konjugiert sind, es für alle Korrelationen des durch sie konstituierten Gebüsches. Sie erfüllen die Flächen 4. Ordnung $\mathfrak{A}^4$, $\mathfrak{B}^4$.

Das Gebüsche enthält ∞^2 zentrale Korrelationen und ihre Zentren erzeugen zwei Flächen 4. Ordnung; es sind dies die Flächen α^4, β^4, die wir in Nr. 466 für $(00\overline{12}0)$ fanden, erzeugt durch die Scheitel A, B von Bündeln, die so korrelativ sind, daß nach den zwölf Paaren konjugierte Strahlen gehen.[1]) Auf α^4 sind, wie a. a. O. schon erwähnt wurde, die Punkte A der zwölf Paare aus dem Raume Σ gelegen und auf β^4 die B aus Σ'. In der Tat, es sei A_1, B_1 eins dieser Paare, so hat der Punkt A_1 in bezug auf die elf andern Paare einen zugeordneten B_1', bei jeder Signatur $(\alpha, \beta, \gamma - 1, 0)_{11}$, insbesondere bei $(00\overline{11}0)$ (Nr. 465); die Bedingung bezüglich des Paars A_1B_1 wird, wegen des unbestimmten Strahls A_1A_1, von selbst erfüllt.

Was aber für die zwölf Paare gilt, gilt für alle ∞^2 Paare konjugierter Punkte, die den Korrelationen des Gebüsches gemeinsam sind; alle korrelativen Bündel um entsprechende Punkte auf α^4, β^4 senden nach ihnen konjugierte Strahlen; sie liegen auf α^4, β^4. Folglich sind diese Flächen mit den $\mathfrak{A}^4$, $\mathfrak{B}^4$ identisch.

Ein Zentrum hat in bezug auf drei beliebige Korrelationen des

---

1) Bei allen dortigen Signaturen $(\alpha\beta\gamma 0)_{12}$, mit Ausnahme von (3300), ergaben sich Flächen 4. Ordnung.

Gebüsches einen konjugierten Punkt, der ihm aber auch konjugiert ist in der zentralen Korrelation, zu der es gehört, also in bezug auf alle Korrelationen des Gebüsches. Und umgekehrt, wenn ein Punkt A von $\mathfrak{A}^4$ konkurrente Polarebenen in bezug auf alle Korrelationen des Gebüsches hat, so ist jede Ebene dieses Bündels für ∞^1 Korrelationen Polarebene; woraus wie in Nr. 731 folgt, daß A Zentrum einer zentralen Korrelation des Gebüsches ist.

Wir haben also bei einem Gebüsche von Korrelationen zwei ausgezeichnete Flächen 4. Ordnung α^4, β^4, welche folgende Eigenschaften haben. Sie sind erstens die Örter der Punkte, welche in allen Korrelationen des Gebüsches konjugiert sind, und zweitens die Örter der Zentren der zentralen Korrelationen im Gebüsche, oder der Scheitel von Bündeln, welche so korrelativ sind, daß nach zwölf von jenen Paaren konjugierter Punkte, und dann nach allen, konjugierte Strahlen gehen.

Gemeinsame doppelt konjugierte Punkte gibt es nicht mehr.

Die den Korrelationen des Gebüsches zugehörigen Punkt-Kernflächen bilden ein Gebüsche. Die zum Netze $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ gehörigen bilden ein Netz, die zum Büschel $\Gamma_4\Gamma_{123}\Gamma$ gehörigen einen Büschel. Dasselbe gilt für die den Korrelationen zugehörigen Gewinde $\mathfrak{G}^p$. Zwei Strahlen sind den vier konstituierenden und daher allen Gewinden gemein (Nr. 535); das sind zwei Geraden, welche bei allen Korrelationen des Gebüsches Involutionen doppelt konjugierter Punkte tragen.

Auch im Gebüsche sind noch keine andern Ausartungen als zentrale Korrelationen vorhanden.

733 Im nächsten Falle, wo wir fünf Korrelationen $\Gamma_1 \ldots \Gamma_5$ zu Grunde legen, haben wir nur ∞^1 gemeinsame Paare konjugierter Punkte und daher zwei Kurven in Σ und Σ'. Eine Ebene α führt zu fünf kollinearen Bündeln der Polarebenen ihrer Punkte; zehnmal laufen entsprechende Ebenen in einen Punkt zusammen (Nr. 383, 673).

Die gemeinsamen konjugierten Punkte erfüllen demnach zwei Kurven 10. Ordnung a^{10}, b^{10}.

Wir nehmen aus diesen ∞^1 Paaren 11 heraus, welche ein lineares System 4. Stufe von Korrelationen bestimmen; wir können es wieder fächerförmig erzeugen durch die Büschel, welche eine der fünf Konstituenten mit den Korrelationen des Gebüsches der vier andern verbinden, und erkennen, daß sie alle die ∞^1 Paare konjugierter Punkte gemeinsam haben, welche den Konstituenten gemeinsam sind.

Dies System enthält ∞^3 zentrale Korrelationen; jeder Punkt A, B von Σ oder Σ' kann Zentrum einer solchen sein, denn es entspricht ihm, nach dem Problem korrelativer Bündel (Nr. 465) bei der Signatur $(00\overline{11}0)$[1]), ein Punkt B oder A, so beschaffen, daß die Bündel A, B korrelativ sind mit nach jenen 11 Paaren und dann nach allen ∞^1 Paaren gehenden konjugierten Strahlen.

Wir fanden a. a. O. in jedem der beiden Räume eine Kurve 10. Ordnung a_0^{10}, b_0^{10} — hier, wo $\alpha = \beta = 0$ ist, nicht zerfallend —, mit der Eigenschaft, daß jedem Punkte der einen oder andern, statt eines Punktes, eine ganze kubische Raumkurve korrespondiert; d. h. wenn A etwa der a_0^{10} angehört, senden alle Punkte B der zugehörigen b^3 Bündel aus, die zum Bündel A so korrelativ sind, daß nach den Punkten der 11 Paare, und daher aller ∞^1 konjugierte Strahlen gehen.

Diese Eigenschaft kommt aber unsern obigen Kurven a^{10}, b^{10} zu, so daß sie mit den a_0^{10}, b_0^{10} identisch sind. In der Tat, wenn A ein beliebiger Punkt von a^{10} ist und B der zugehörige Punkt auf b^{10}, so nehmen wir dies Paar als eins der 11 Paare an; es wird die Bedingung hinsichtlich dieses Paars von selber erfüllt, und es bleibt die Signatur mit 10 Paaren konjugierter Punkte. Da entspricht dem A eine kubische Raumkurve (Nr. 463).

Hier, beim linearen System 4. Stufe treten, neben zentralen, noch axiale Ausartungen auf. Denn es gibt (Nr. 251)[2]) 20 Paare von Axen a, b, welche nach den gegebenen Punktepaaren projektive Büschel senden. Damit ist zunächst nur die Ebenenbüschel-Projektivität bestimmt; die der Punktreihen bleibt noch unbestimmt, jedes Paar repräsentiert ∞^3 vollständig bestimmte axiale Korrelationen, welche Mannigfaltigkeit dem System 4. Stufe auch entspricht; darunter, bei ausgearteter Punktreihen-Projektivität, ∞^2 zentral-axiale. Konjugierte Ebenen legen diese zweite Projektivität fest; zwei Paare führen z. B. zu je 2, also im ganzen zu $2 \cdot 20$ zentral-axialen Korrelationen, vgl. Signatur $(\overline{11}20)$ in der Tabelle für $\pi\psi$ in Nr. 709.

Nach den weitern ∞^1 gemeinsamen Paaren konjugierter Punkte gehen entsprechende Ebenen aus den projektiven Ebenenbüscheln um diese Axen a, b.

Endlich seien sechs Korrelationen $\Gamma_1, \ldots \Gamma_6$ gegeben; durchläuft 734
A den ganzen Raum Σ, so entstehen in Σ' sechs kollineare Räume von Polarebenen. Da gibt es 20 Punkte, in welche entsprechende Ebenen aus allen zusammenkommen (Nr. 676). Also besitzen die Korrelationen 20 gemeinsame Paare konjugierter Punkte. Greifen wir 10 heraus, so ist durch sie ein fünffach unendliches System $(\overline{1}000)$ bestimmt, das wieder fächerförmig aus den sechs Konstituenten aufgebaut werden kann und daher linear ist; die zehn

1) Bei jeder Signatur $(\alpha\beta\gamma 0)_{11}$ besteht diese Eindeutigkeit.

2) Die dortige Signatur (80) sagt aus, daß 11 Punktepaare gegeben sind.

übrigen Paare, die den Konstituenten gemeinsam sind, sind auch den andern Korrelationen des Systems gemein.

Zehn Punktepaare ziehen also zehn andere nach sich, derartig, daß in allen Korrelationen, in welchen die Punkte von jenen konjugiert sind, es auch die Punkte von diesen sind; diese Korrelationen bilden ein lineares System 5. Stufe.

Bei zehn Punktepaaren gibt es (Nr. 251) zwei Regelflächen 20. Grades, in jedem Raume eine, deren Erzeugenden so eindeutig einander zugeordnet sind, daß zwei korrespondierende projektive Ebenenbüschel tragen, in denen entsprechende Ebenen nach jenen zehn Punktepaaren gehen und dann auch nach den zehn andern. Wir erhalten so ∞^1 axiale Korrelationen im System, deren jede wiederum ∞^3 vollständig bestimmte vertritt.

Dies System 5. Stufe enthält ∞^4 zentrale Kollineationen. Jeder Punkt des einen Raums ist für ∞^1 Zentrum, das andere, der korrespondierende Punkt im Problem korrelativer Bündel, erzeugt eine kubische Raumkurve (Nr. 463). Jeder Raum ferner enthält zehn Punkte, welche für ∞^2 zentrale Korrelationen Zentren sind; die andern Zentren erfüllen eine kubische Fläche (Nr. 465).

Höherstufige lineare Systeme haben, im allgemeinen, keine gemeinsamen Paare konjugierter Punkte, die linearen Systeme 6., 7., ... Stufe, welche durch 9, 8, ... Paare konjugierter Punkte bestimmt werden, sind speziell.

Dual zu diesen büschel-linearen Systemen können wir, mit gemeinsamen Paaren konjugierter Ebenen arbeitend, schar-lineare Systeme herstellen.

§ 104. Lineare Systeme von Polarräumen und Nullräumen.

735 Die Festlegung eines Polarraums durch neun Paare konjugierter Punkte (oder Ebenen) subsumiert sich derjenigen der allgemeinen Korrelation durch 15 Paare, indem bei sechs Paaren doppelte Konjugiertheit angenommen wird (Nr. 713). Demzufolge subsumieren sich die linearen Systeme 1. bis 3. Stufe von Polarräumen denen von allgemeinen Korrelationen. Sie sind festgelegt durch 8, 7, 6 Paare konjugierter Punkte (oder Ebenen), von denen wir dann eben bei sechs Paaren doppelte Konjugiertheit voraussetzen. Dadurch werden alle konjugierten Elemente doppelt konjugiert und dies Attribut „doppelt“ wird überflüssig. Die Örter der im allgemeinen Falle als doppelt konjugiert sich auszeichnenden Elemente kommen in Wegfall.

Im büschel-linearen Systeme 1. Stufe (Büschel) von Polarräumen, festgelegt durch acht Paare konjugierter Elemente, haben wir die Polarräume der Flächen eines Büschels 2. Ordnung: mit ∞^4 gemeinsamen Paaren konjugierter Punkte, ∞^1 gemeinsamen sich selbst konjugierten Punkten, gelegen auf der Grundkurve des Flächenbüschels.

Das büschel-lineare System 2. Stufe (Netz) von Polarräumen, festgelegt durch sieben Paare konjugierter Punkte, ist das der Polarräume der Flächen eines Netzes 2. Ordnung: mit ∞^3 gemeinsamen Paaren konjugierter Punkte und acht gemeinsamen sich selbst konjugierten Punkten, den Grundpunkten des Flächennetzes. Jene ∞^3 Paare führen zu einer eindeutigen kubischen Verwandtschaft, die nunmehr involutorisch ist, weil es sich um durchweg doppelt konjugierte Punkte handelt.

Der involutorische Charakter der Verwandtschaft bedingt, daß die beiden Gebüsche der Flächen 3. Ordnung und die beiden Systeme von ∞^4 kubischen Raumkurven, die den Ebenen und den Geraden entsprechen (Nr. 729), sich vereinigen, also auch die beiden Raumkurven 6. Ordnung und die beiden Regelflächen 8. Grades in eine Kurve, eine Fläche.

Diese Raumkurve 6. Ordnung (16. Ranges) ist der Ort der Zentren der zentralen Polarräume des Netzes, welche zu den Kegeln des Flächennetzes gehören, also die Kegelspitzen-Kurve dieses Netzes (Nr. 689, 691). Die Geraden der Regelfläche, welche dreifache Sekanten der Raumkurve 6. Ordnung sind, drei durch jeden Punkt derselben gehend, sind die Geraden, in welche die Polarebenen der Kegelspitzen in bezug auf alle Polarräume oder Flächen des Netzes zusammenlaufen.

Das büschel-lineare System 3. Stufe (Gebüsche) von Polarräumen, festgelegt durch sechs Paare konjugierter Punkte und gehörig zu einem Flächengebüsche 2. Ordnung, besitzt ∞^2 gemeinsame Paare konjugierter Punkte, welche involutorisch eine (einzige) Fläche 4. Ordnung erfüllen, den Ort der Zentren der zentralen Polarräume des Gebüsches, also der Spitzen der Kegel des Flächengebüsches (Nr. 688).

Es seien drei spezielle lineare Systeme 1., 2., 3. Stufe erwähnt, welche in sich dual sind.

Das der 1. Stufe ist durch zwei Paare von Polaren festgelegt: p, p'; q, q'. Wenn P, P_1; P', P_1'; Q, Q_1; Q', Q_1' auf diese Geraden gelegte Punkte sind, so sind:

$$PP',\ P_1P',\ PP_1'\ P_1P_1',\ QQ',\ Q_1Q',\ QQ_1',\ Q_1Q_1'$$

die acht Paare konjugierter Punkte, die den Büschel geben, welche aber durch Paare konjugierter Ebenen, die ähnlich durch die Geraden gehen, ersetzt werden können, so daß nun das System als Schar definiert ist.

Das System 2. Stufe (vgl. S. 84) ist durch Pol P und Polarebene π und zwei Polaren q, q' festgelegt. Liegen P_1, P_2, P_3 in π, die $Q, \ldots$ ebenso auf q, q', wie vorhin, so sind die sieben festlegenden Paare: PP_1, PP_2, PP_3, QQ', Q_1Q', QQ_1', Q_1Q_1', mit denen eine ähnliche Veränderung vorgenommen werden kann.

Das System 3. Stufe endlich ist durch zweimal Pol und Polarebene: P, π; P_1, π_1 festgelegt.

Im erstgenannten Systeme sind auch die beiden Treffgeraden von p, p', q, q' gemeinsam polar.

Die Flächen des Systems 3. Stufe berühren sich in zwei Punkten von PP_1 mit Berührungsebenen, welche durch $\pi\pi_1$ gehen; denn gemeinsam sind die beiden perspektiven Involutionen konjugierter Punkte und konjugierter Ebenen auf PP_1, um $\pi\pi_1$.[1])

736 Wir legen nun fünf Paare konjugierter Punkte zu grunde; sie bestimmen ein System 4. Stufe von Polarräumen; von ihnen nehmen wir fünf beliebige als Konstituenten; mit Hilfe weiterer Paare konjugierter Punkte können wir dem Systeme angehörige lineare Systeme niedrigerer Stufe herstellen und es demnach fächerförmig aufbauen; daher ist das System selbst linear und zwar büschel-linear. Jedes Paar konjugierter Punkte, das den Konstituenten gemeinsam ist, gehört, wegen dieses fächerförmigen Aufbaues, zu allen Polarräumen des Systems. Wir haben deren ∞^1. Denn auch hier führt eine Ebene α zu fünf kollinearen Polarebenen-Bündeln, also mit zehn Quintupeln entsprechender Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, dem dann ein gewisser Punkt in α in den konstituierenden Polarräumen und in allen Polarräumen des Systems konjugiert ist. Wir erhalten eine Raumkurve 10. Ordnung, welche mit den ∞^1 Paaren gemeinsam konjugierter Punkte — darunter die gegebenen — involutorisch erfüllt ist.

In einem Ebenenbüschel bewirken diese Paare eine involutorische Korrespondenz [10]. Sie hat zehn doppelte Koinzidenzen: doppelt aus demselben Grunde, wie bei der Korrespondenz, die in einem Strahlenbüschel durch die in bezug auf ein Kegelschnitt-Netz konjugierten Punkte entsteht (Nr. 687); man kann aber diese Duplizität auch durch Zeuthens Regel (Nr. 160) bestätigen.

Da es keine sich selbst konjugierten Punkte gibt, die allen Polarräumen des Systems gemeinsam sind, d. h. keine gemeinsamen Punkte der Basisflächen, so bedeutet dies: Die Verbindungslinien dieser gemeinsamen konjugierten Punkte erzeugen eine Regelfläche 10. Grades.

Wenn endlich von vier Paaren konjugierter Punkte ausgegangen wird, so ergibt sich, durch ähnliche Überlegungen, ein

1) Math. Annalen Bd. 19 S. 483, Bd. 28 S. 270.

büschel-lineares System 5. Stufe von Polarräumen. Die sechs kollinearen Räume der Polarebenen aller Punkte des Raumes in den sechs konstituierenden Polarräumen führen, wie im allgemeinen Falle, zu 20 Punkten, in welche entsprechende Ebenen zusammenlaufen. Aber diese 20 Punkte bilden hier zehn Paare konjugierter Punkte, welche allen Polarräumen des Systems gemeinsam sind.

Sechs Polarräume haben zehn Paare konjugierter Punkte gemeinsam.

Die vier gegebenen Paare konjugierter Punkte bedingen sechs weitere Paare, die allen ∞^5 Polarräumen noch gemeinsam sind, welche jene gemeinsam haben.

Durch Dualisierung des in Nr. 548 erhaltenen Resultats folgt: Ein Sechsflach $\alpha\beta\ldots\varphi$ wird Polsechsflach für einen Polarraum, wenn vier gewisse Ecken ihren Gegenecken konjugiert sind. Aber diese Ecken liegen in einer Ebene des Sechsflachs und die Gegenecken auch. Da nun in unserm Falle von den vier gegebenen Paaren keine vier Punkte in einer Ebene liegen, so handelt es sich nicht um vier Paare Gegenecken eines Sechsflachs und die übrigen Paare von Gegenecken. Und ähnlich handelt es sich in Nr. 734 nicht um die Ecken zweier polarer Sechsflache.

Bei diesen zehn abhängigen Paaren, von denen vier die übrigen bestimmen, wollen wir einen Punkt aus einem der vier gegebenen Paare zum Zentrum eines zentralen Polarraums des Systems machen; die betreffende Konjugiertheit wird durch diese Lage von selbst erfüllt; die drei andern bedingen ein Netz von zentralen Polarräumen (aus jenem Zentrum) (Nr. 449). Wir haben drei Paare gemeinsam konjugierter Strahlen eines Netzes von konzentrischen Polarbündeln, aus denen die ∞^1 übrigen Paare gemeinsam konjugierter Strahlen sich ergeben, getragen von dem Jacobischen Kegel 3. Ordnung des Netzes; zu ihnen gehören die Strahlenpaaren nach den sechs übrigen abhängigen Paaren. Projiziert man also aus einem Punkte eines der zehn Paare die neun andern, so erhält man neun Paare gemeinsam konjugierter Strahlen eines Netzes von Polarbündeln. Wiederholt man es beim zweiten Punkte jenes Paares, so kann man im Ebenenbüschel um die Verbindungslinie eine Korrespondenz [9,9] herstellen, in der Ebenen sich entsprechen, welche Strahlen des einen und des andern Kegels 3. Ordnung enthalten, deren konjugierte sich schneiden; die 18 Koinzidenzen bilden die neun Ebenenpaare nach den neun andern Punktepaaren.

Zwei Punkte, welche in gepaarten Ebenen einer Involution liegen, sind konjugiert in einem axialen Polarraume, dessen charakteristische Ebeneninvolution sie ist.

Drei, vier, fünf, sechs Ebeneninvolutionen (als Konstituenten eines büschel-linearen Systems 2., 3., 4., 5. Stufe von Polarräumen) führen daher zu einer kubischen Verwandtschaft von Punktepaaren, zu einer involutorisch erfüllten Fläche 4. Ordnung, einer ebenso beschaffenen Kurve 6. Ordnung von Punktepaaren, zu zehn Punktepaaren, nach denen aus allen gepaarte Ebenen kommen.

737 Wir stellen das lineare System 9. Stufe aller Polarräume mit dem System 8. Stufe der zentralen Korrelationen, deren Zentren zwei gegebene Punkte sind, zusammen; sie befinden sich beide im System der ∞^{15} Korrelationen und müssen ein System 2. Stufe gemeinsam haben. Es besteht aus lauter zentral-axialen Korrelationen: sie haben die gegebenen Zentren, die Axen sind in der Verbindungslinie vereinigt, und die charakteristische Projektivität ist je eine Ebeneninvolution.

Ein Polartetraeder ist mit sechs Paaren konjugierter Punkte äquivalent; wir haben es also zur Festlegung eines Polarraums durch drei weitere Paare zu ergänzen: A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3; wenn zunächst nur A_1B_1 herangezogen wird, entsteht ein Netz von Polarräumen. Jede Kante des Polartetraeders bestimmt einen dem Netze angehörigen axialen Polarraum, von dem jedoch nur die Ebeneninvolution vollständig bestimmt ist: durch die beiden Ebenen des Tetraeders und die nach A_1B_1 gehenden (für die Punktinvolution ist nur das Eckenpaar gegeben, so daß es sich eigentlich um ∞^1 axiale Polarräume handelt).

Wir benutzen die axialen Polarräume, die zu drei in einer Ebene gelegenen Kanten gehören, als Konstituenten des Netzes; denn sie befinden sich nicht in einem Büschel. Die Polarebenen eines Punktes A in bezug auf sie, die je der Ebene nach A gepaarten Ebenen in den Ebeneninvolutionen laufen in den Punkt B' zusammen, der dem A in bezug auf das Netz konjugiert ist. Wenn B'', B''' sich ebenso bei A_2B_2, A_3B_3 ergeben, ist $B'B''B'''$ die Polarebene von A in dem vollständig bestimmten Polarraume.

Ferner seien für einen Polarraum das Vierseit $A_1A_2B_1B_2$, durch welches die Basisfläche gehen soll, und zwei konjugierte Punkte (oder Ebenen) A_0, B_0 gegeben. Die Polarräume, für welche das erstere gilt, bilden eine Büschel-Schar. Die gemeinsam konjugierte Gerade (Axe des Polarebenen-Büschels) eines Punktes A ergibt sich sofort durch die beiden dem A gemeinsam konjugierten Punkte auf den Geraden (A, A_1A_2, B_1B_2) und $A(A_1B_2, B_1A_2)$. Man kann also für jeden der Punkte A_0, B_0 seine Polarebene α_0, β_0 herstellen. Auf jeder der vier sich selbst polaren Seiten des Vierseits ist dann die Projektivität der Punkte und Polarebenen festgelegt; z. B. auf A_1A_2 sind den Punkten A_1, A_2, (A_1A_2, α_0) die Ebenen $B_2A_1A_2$, $A_1A_2B_2$ und $A_1A_2A_0$ polar. Ebenso besitzt man jene Projektivität für die zu einander polaren Geraden A_1B_1, A_2B_2. Man hat daher von dem Punkte A, für den man die Polarebene haben will, nach drei nicht konkurrenten von diesen Geraden die Ebenen zu legen und ihre Pole zu verbinden.

Wenn Γ_1, Γ_2 zwei Nullräume und in beiden A, B konjugiert 738
sind, so gehen beide Polarebenen von A durch A und B; also ist AB die gemeinsame konjugierte Gerade des A (oder B), und die Polarebenen von A in allen Korrelationen des Büschels $\Gamma_1\Gamma_2$ gehen durch AB; folglich ist auch in diesen jeder Punkt A mit seiner Polarebene inzident: sie sind ebenfalls Nullräume.

Bei einem Nullraume ist die Verbindungslinie zweier konjugierter Punkte stets Strahl des zugehörigen Gewindes, jede zwei Punkte auf ihr sind konjugiert, aber ebenso auch jede zwei Ebenen durch sie, und der Strahl ist jedem seiner Punkte und jeder seiner Ebenen konjugiert.

Die Verbindungslinie AB ist also den beiden Gewinden (Γ_1) und (Γ_2), und allen Gewinden, die zu den weiteren Nullräumen des Büschels gehören, gemeinsam, so daß diese Gewinde selbst einen Büschel bilden, und die Verbindungslinien der gemeinsam konjugierten Punkte das Grund-Strahlennetz dieses Gewindebüschels erzeugen; weil diese Geraden aber auch Schnittlinien gemeinsam konjugierter Ebenen sind, so ist der Büschel zugleich eine Schar.

Zwei Nullräume erzeugen einen Büschel, der aus lauter Nullräumen besteht und zugleich eine Schar ist; die zugehörigen Gewinde bilden auch einen Büschel (mit gemeinsamem Strahlennetz), den man auch eine Schar nennen kann.

Wir können diese Büschel-Schar durch vier Paare konjugierter Punkte oder Ebenen, bzw. ihre vier Verbindungs- oder Schnittlinien definieren, die ja das Strahlennetz festlegen.

Drei Nullräume führen zu einem zugleich büschel- und schar-linearen Systeme 2. Stufe von lauter Nullräumen, gewöhnlich Netz genannt; die zugehörigen Gewinde bilden ebenfalls ein Netz, dessen Grund-Regelschar durch drei gemeinsame Paare konjugierter Punkte oder Ebenen und die durch sie bestimmten Geraden festgelegt ist (Nr. 535).

Vier Nullräume liefern ein in sich duales lineares System 3. Stufe (Gebüsche); die Gewinde erzeugen ebenfalls ein Gebüsche, mit zwei gemeinsamen Geraden, den Grundgeraden (Nr. 535).

Auf jeder gemeinsamen Gerade der Gewinde sind zwei beliebige Punkte (oder Ebenen) konjugiert, so daß sie ∞^2 Paare trägt; es ergeben sich auf diese Weise die ∞^4, ∞^3, ∞^2 Paare beim Büschel, Netze, Gebüsche als je ∞^2 auf ∞^2, ∞^1, zwei Geraden.

§ 105. Apolare lineare Systeme von räumlichen Korrelationen.

739 Zwei räumliche Korrelationen C, Γ mögen die Eigenschaft haben, daß einmal einem Tetraeder $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ von Σ' durch sie Tetraeder $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ polar sind, von welchen letzteres dem ersteren eingeschrieben ist, so daß A_1 auf BCD liegt usw. Es sei $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$, und zwar $\alpha \equiv BCD, \ldots$; dann sind α und $\alpha', \ldots$, δ und δ' in Γ konjugiert. Oder es sei $\alpha'\beta'\gamma'\delta' \equiv A_1'B_1'C_1'D_1'$, so stellen sich A_1 und $A_1', \ldots$, D_1 und D_1' als in C konjugiert heraus. Die Voraussetzung kann also auch lauten: C besitzt zwei polare Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, bei denen α und α', β und β', γ und γ', δ und δ' in Γ konjugiert sind, oder: Γ besitzt zwei polare Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$ und $A_1'B_1'C_1'D_1'$, bei denen A_1 und A_1', B_1 und B_1', C_1 und C_1', D_1 und D_1' in C konjugiert sind.

Die ursprüngliche Form der Voraussetzung beweist, daß in Σ eine Kollineation (bei welcher Elemente entsprechend sind, die in C und Γ dem nämlichen Elemente in Σ' korrespondieren) entsteht, die in eingeschriebener Tetraederlage ist (§ 93), wobei die von Γ herrührenden Tetraeder den durch C sich ergebenden eingeschrieben sind. Es gibt daher in Σ' ∞^9 Tetraeder $\xi'\eta'\zeta'\omega'$, so beschaffen, daß von den in C und Γ entsprechenden $XYZW$ und $X_1Y_1Z_1W_1$ letzteres dem ersteren eingeschrieben ist. Gehen wir von $XYZW$ aus, so ist $\xi'\eta'\zeta'\omega'$ das entsprechende in C; das ihm in Γ entsprechende sei $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'\omega_1'$. Weil X_1 auf YZW liegt, so geht ξ' durch $\eta_1'\zeta_1'\omega_1'$ usw; also ist $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'\omega_1'$ dem $\xi'\eta'\zeta'\omega'$ eingeschrieben.

Ebenso ist von den beiden polaren Tetraedern des $X_1Y_1Z_1W_1$ das in Γ polare dem in C polaren eingeschrieben.

In jedem der Räume Σ, Σ' gibt es daher ∞^9 Tetraeder, welche zugleich folgende Eigenschaften haben:

Das einem dieser Tetraeder in Γ polare ist dem in C polaren eingeschrieben.

Jedem ist dasjenige Tetraeder, welches dem zu ihm in C polaren in Γ polar ist, eingeschrieben.

Hingegen ist ihm das Tetraeder, das dem zu ihm in Γ polaren in C polar ist, umgeschrieben.

Zwei in C polare Tetraeder dieser Figur haben Seitenflächen, die in Γ konjugiert sind, zwei in Γ polare haben Ecken, die in C konjugiert sind.

Alle diese Tetraeder gehören dem neunfach unendlichen System ihres Raums an.

Bei zwei Korrelationen C und Γ dieser Art reicht es hin, daß die Inzidenz der Ecken und Flächen von Tetraedern, die demselben Tetraeder in C und Γ polar sind, dreimal erfüllt wird; die vierte Inzidenz trifft dann von selber ein (Nr. 629).

Zwei solche Korrelationen heißen apolar, und genauer sagt man: C stützt Γ und Γ ruht auf C.

Es gibt ∞^{14} Korrelationen Γ, welche auf einer gegebenen C ruhen, und ebenso ∞^{14} Korrelationen C, welche eine gegebene Γ stützen. Wenn nämlich C gegeben ist, so stellen wir in Σ (oder Σ') eine der ∞^{14} Kollineationen in eingeschriebener Tetraederlage her, welche also Σ in Σ_1 so transformiert, daß Σ_1 ∞^9 Tetraeder enthält, die den entsprechenden in Σ eingeschrieben sind; dadurch wird Σ_1 zu Σ' korrelativ, und diese Korrelation Γ ruht auf C.

Wenn daher i Korrelationen gegeben sind, so gibt es ∞^{15-i}, welche auf ihnen ruhen, bzw. sie stützen.

Liegen nun zwei Korrelationen C_1, C_2 vor, welche beide die Γ 740
stützen, so haben wir, etwa in Σ', zwei neunfach unendliche Mannigfaltigkeiten von Tetraedern, die in der obigen Weise zu C_1 und Γ, bzw. C_2 und Γ gehören; also ist, weil es ∞^{12} Tetraeder gibt, eine Mannigfaltigkeit von Tetraedern vom Grade $2 \cdot 9 - 12 = 6$ beiden Mannigfaltigkeiten gemeinsam.

Einem dieser Tetraeder $\xi'\eta'\zeta'\omega'$ seien nun in C_1, C_2, Γ polar die Tetraeder $X_1 Y_1 Z_1 W_1$, $X_2 Y_2 Z_2 W_2$, $XYZW$; so ist das letzte den beiden andern eingeschrieben; d. h. der Pol X von ξ' in Γ liegt auf den Polarebenen $Y_1 Z_1 W_1$, $Y_2 Z_2 W_2$ von $\eta'\zeta'\omega'$ in C_1, C_2, mithin auf ihrer Schnittlinie und daher auch, wenn C_3 irgend eine dritte Korrelation aus dem Büschel $C_1 C_2$ ist, auf der Polarebene des nämlichen Punktes $\eta'\zeta'\omega'$ in dieser; und ebenso in den andern Fällen. Demnach ist $XYZW$ auch dem Tetraeder $X_3 Y_3 Z_3 W_3$ eingeschrieben, das zu $\xi'\eta'\zeta'\omega'$ in C_3 polar ist; d. h. C_3 stützt Γ.

Wenn also C_1, C_2 die Γ stützen, so tun es alle Korrelationen ihres Büschels.

Wenn Γ_1, Γ_2 auf C ruhen, so tun es alle Korrelationen ihrer Schar.

Genau ebenso ergibt sich:

Wenn C_1, C_2, C_3 die Γ stützen, so tun es alle Korrelationen ihres büschel-linearen Systems 2. Stufe (Netzes).

Wenn $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ auf C ruhen, so tun es alle Korrelationen ihres schar-linearen Systems 2. Stufe.

Erinnern wir uns nun des fächerförmigen Aufbaues büschel- und schar-linearer Systeme, so folgt:

Alle ∞^k Korrelationen Γ, welche auf $i+1$ (unabhängigen) Korrelationen C_0, $C_1, \ldots C_i$ ruhen, wo $i+k=14$, ruhen auf allen Korrelationen des durch diese konstituierten büschel-linearen Systems i^{ter} Stufe und bilden selbst ein schar-lineares System k^{ter} Stufe, das durch $k+1$ (unabhängige) seiner Korrelationen konstituiert werden kann.

Ist i oder k gleich 14, so ist das andere System 0^{ter} Stufe, besteht aus einer Korrelation, denn zwei würden sofort eine Schar oder einen Büschel bewirken.

15 Korrelationen und ihr büschel-, bzw. schar-lineares System 14. Stufe stützen eine Korrelation, bzw. werden durch eine gestützt.

Wenn von zwei Systemen, die beide büschel- oder beide schar-linear sind, das eine i^{ter} Stufe in dem andern i_1^{ter} Stufe enthalten ist, so ist von den apolaren Systemen dasjenige $(14-i_1)^{\text{ter}}$ Stufe in dem von der Stufe $14-i$ enthalten. Haben jene ein System h^{ter} Stufe gemeinsam, so sind die apolaren Systeme beide in dem apolaren Systeme $(14-h)^{\text{ter}}$ Stufe enthalten.

In Nr. 568 betrachteten wir das spezielle lineare System 3. Stufe der Korrelationen, für welche zwei gegebene Tetraeder polar sind; sie stellen vier dreifache Bedingungen dar oder auch 12 einfache; jede Ecke des einen Tetraeders ist zu dreien des andern oder jede Ebene des einen zu dreien des andern konjugiert. Also ist das System in sich dual; sowohl drei Paare konjugierter Punkte, als auch drei Paare konjugierter Ebenen bestimmen in ihm eindeutig eine Korrelation; daher ist es zugleich büschel- und schar-linear. Es stützt folglich ein schar-lineares System 11. Stufe und wird gestützt von einem büschel-linearen System dieser Stufe; in allen Korrelationen des ersteren sind die entsprechenden Ebenen der Tetraeder konjugiert, in allen des zweiten die entsprechenden Ecken. Auch diese Systeme, mit gemeinsamen konjugierten Elementen, sind speziell (Nr. 734).

741 Es seien S, S' zwei konjugierte Punkte der Korrelation C und Γ eine der ∞^8 zentralen Korrelationen, welche sie zu Zentren haben. Das Tetraeder $\xi'\eta'\zeta'\omega'$ habe seine Ecke $\eta'\zeta'\omega'$ in S', das polare in C sei $XYZW$; so geht YZW, die Polarebene von $\eta'\zeta'\omega'$, durch S. Der Pol X_1, in Γ, von ξ', die nicht durch das Zentrum S' geht, ist S, daher in YZW gelegen; Pole der η', ζ', ω', die durch S' gehen, sind beliebige Punkte der Strahlen, welche in der charakteristischen Korrelation der Bündel S, S' jenen Ebenen entsprechen; wir nehmen diejenigen als Y_1, Z_1, W_1, welche in den Ebenen ZWX, WXY, XYZ gelegen sind. Dann ist $X_1Y_1Z_1W_1$ dem $XYZW$ eingeschrieben und Γ ruht auf C.

Umgekehrt, eine zentrale Korrelation Γ ruhe auf C und S, S' seien ihre Zentren; die Ecke $\eta'\zeta'\omega'$ von $\xi'\eta'\zeta'\omega'$ liege wieder in S'; polar in C sei $XYZW$; der Pol X_1 von ξ' in Γ liegt in S, als Pole Y_1, Z_1, W_1 von η', ζ', ω' nehmen wieder die in ZWX, WXY, XYZ gelegenen, dann sind von den vier Inzidenzen drei erfüllt, also, weil Γ auf C ruht, auch die vierte, d. h. die Ecke $X_1 \equiv S$ von $X_1Y_1Z_1W_1$

liegt auf YZW, der Polarebene, in C, von $S' = \eta'\zeta'\omega'$; S und S' sind konjugiert in C.

Wenn also S und S' in C konjugiert sind, so ruhen alle ∞^8 zentralen Korrelationen Γ, welche diese Punkte zu Zentren haben, auf C, und umgekehrt, die Zentren einer auf C ruhenden zentralen Korrelation sind in C konjugiert.

Aber es zählen in schar-linearen Systemen, welche auf C ruhen, solche zentrale Korrelationen, deren Zentren in konjugierten Punkten der C sich befinden, trotz der Unbestimmtheit, nur einfach; insbesondere ist diese Korrelation (S, S') die einzige, welche auf dem speziellen büschel-linearen Systeme 14. Stufe aller Korrelationen ruht, denen S, S' als konjugierte Punkte gemeinsam sind.

Wenn σ und σ' in Γ konjugiert sind, so stützen alle ∞^8 planaren Korrelationen mit den singulären Feldern σ und σ' die Γ; und umgekehrt, wenn eine planare Korrelation die Γ stützt, so sind ihre singulären Ebenen in Γ konjugiert.

Wir nehmen nun an, daß eine beliebige Korrelation Γ auf einer zentralen C ruhe; diese habe S, S' zu Zentren und (S, S') zur charakteristischen Korrelation. Es sei δ' eine beliebige Ebene in Σ' und α', β' durch S' gelegt. Der Pol D von δ' in C ist S, die Pole A, B von α', β' sind beliebige Punkte der Strahlen a, b, die ihnen in (S, S') entsprechen. Die Pole von δ', α', β' in Γ seien D_1, A_1, B_1. Wir nennen c die Schnittlinie (bA_1, aB_1), γ' die ihr in (S, S') entsprechende Ebene, und C_1 ihren Pol in Γ; legt man dann eine beliebige Ebene durch D_1 und faßt ihre Schnitte mit a, b, c als die Pole A, B, C der α', β', γ' in C auf, so ist erreicht, daß D_1 in ABC, A_1 in $BCD = bc$, B_1 in $CDA = ca$ liegt; folglich muß, da Γ auf C ruht, C_1 in $DAB = ab$ liegen. Damit sind die drei Ebenen bc, ca, ab zu α', β', γ' in Γ konjugiert geworden.

Wenn also Γ auf der zentralen Korrelation C ruht, und in der zu dieser gehörigen charakteristischen Korrelation (S, S') die Strahlen a, b zu den Ebenen α', β' polar sind, so konstruiere man durch b, a die zu α', β' in Γ konjugierten Ebenen α_1, β_1 und ihren Schnittstrahl c; dann ist die Polarebene γ' von c in (S, S') zu ab in Γ konjugiert.

Und umgekehrt, wenn γ' (von α', β' verschieden) zu ab in Γ konjugiert ist, ruht Γ auf C.

Es sind also, wenn $\mathfrak{C}'$ Pol von ab in Γ ist, c und $S'\mathfrak{C}'$ in der charakteristischen Korrelation (S, S') konjugiert; und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so ruht Γ auf C.

Wir untersuchen jetzt eine axiale Korrelation Γ mit den Axen s, s', welche auf C ruht. Durch s' seien zwei Ebenen ζ', ω' gelegt, ferner sei η' beliebig, ihr Schnitt $\eta'\zeta'\omega'$ mit s' werde mit $\overline{Y}'$ bezeichnet. Der Punkt Y_1, der ihm in der zu Γ gehörigen Projektivität

(s_r, s_r') auf s entspricht, ist der Pol von η' in Γ. Die Pole von η', ζ', ω' in C seien Y, Z, W. In die Ebene Y_1ZW legen wir X und konstruieren auf s', der Polare von ZW in C, den Pol $\overline{X}'$ von Y_1ZW in C, durch den die Polarebene ξ' von X in C geht, und nun wiederum den Punkt X_1, welcher $\overline{X}'$ in (s_r, s_r') korrespondiert, also den Pol von ξ' in Γ. Es liegt dann Y_1 in ZWX; ferner Pol Z_1, W_1 von ζ', ω' in Γ kann jeder Punkt der Ebene ζ^*, ω^* sein, welche der ζ', ω' in der andern charakteristischen Projektivität (s_b, s_b') entspricht; wir wählen als Z_1 einen beliebigen Punkt von (WXY, ζ^*) und als W_1 einen von (XYZ, ω^*); folglich liegt weiter Z_1 in WXY, W_1 in XYZ; demnach muß, weil Γ auf C sich stützt, X_1 auf ZWY liegen, oder Y auf ZWX_1; dadurch wird der Punkt $\overline{Y}'$, durch den die Polarebene η' von Y in C geht, Pol von ZWX_1 und konjugiert zu X_1 in C, während oben $\overline{X}'$ sich konjugiert zu Y_1 ergab.

Wir haben also für die axiale Korrelation Γ, die auf C ruht, folgendes erhalten: Es seien auf den Axen s, s' von Γ in der zugehörigen Projektivität (s_r, s_r') die Punkte Y_1 und $\overline{Y}'$ entsprechend, diesen, je auf der andern Axe von Γ, in C konjugiert die Punkte $\overline{X}'$ und X_1, so sind diese wiederum in (s_r, s_r') entsprechend.

Und umgekehrt, wenn bei einer beliebigen Korrelation C und einer axialen Γ dies einmal eintritt, so ruht Γ auf C, und jenes tritt durchweg ein.

Dual, wenn auf der axialen Korrelation C die Γ ruht, so seien η_1 und $\overline{\eta}'$ in der Projektivität (s_b, s_b') entsprechend, ihnen in Γ konjugiert, je durch die andere Axe von C, die Ebenen $\overline{\xi}'$ und ξ_1, dann sind diese wiederum in (s_b, s_b') korrespondierend; und umgekehrt.

742 Wenn

$$A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5\,A_6$$
$$B_1\,B_2\,B_3\,B_4\,B_5\,B_6$$

gegeben sind, so bilden die Korrelationen C, für welche A_1 und B_1, $\cdots$, A_6 und B_6 konjugiert sind, ein spezielles büschel-lineares System 9. Stufe. Dasselbe enthält 20 planare Korrelationen mit den singulären Ebenen $A_1A_2A_3$, $B_4B_5B_6$; .... Sie sind sämtlich unbestimmt, da für die charakteristische Korrelation der Felder keine Bedingungen vorliegen. Das schar-lineare System 5. Stufe, welches auf jenem System 9. Stufe ruht, ruht auch auf diesen planaren Korrelationen und seine Korrelationen Γ haben deshalb die genannten singulären Ebenen zu konjugierten Ebenen; daraus folgt, daß die beiden Sechsecke $A_1 \ldots . A_6$, $B_1 \ldots . B_6$ für alle Γ polar sind; das ist mit 10 Konjugiertheiten von solchen Gegenebenen wie $A_1A_2A_3$ und $B_4B_5B_6$ äquivalent (Nr. 570), durch welche 10 Bedingungen ja ein schar-lineares System

5. Stufe festgelegt wird, aber ebenfalls ein spezielles; denn für ein allgemeines schar-lineares System 5. Stufe können beliebige 10 Paare konjugierter Ebenen gegeben sein; während wir es hier mit Gegenebenen zweier Sechsecke zu tun haben.

Wir haben so ein zweites interessantes Beispiel apolar verbundener Systeme: das büschel-lineare System 9. Stufe der Korrelationen, für welche die entsprechenden Ecken zweier Sechsecke konjugiert sind, und das schar-lineare System 5. Stufe der Korrelationen, für welche diese Sechsecke polar sind, und die beiden dualen Systeme.

Wenn zwei gegebene Fünfflache

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5$$

$$\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5$$

für eine Korrelation C polar sind, so daß durchweg solche Gegenelemente wie $\alpha_1\alpha_2$ und $\beta_3\beta_4\beta_5$ konjugiert sind, so war dies (Nr. 569) äquivalent damit, daß fünfmal Punkt und Gerade und einmal zwei Punkte konjugiert sind. Da jene Doppelbedingungen sich aber je in zwei einfache zerlegen lassen, daß dem Punkte zwei Punkte der Gerade konjugiert sind, so haben wir 11 Konjugiertheiten von Punkten. Es entsteht durch die C ein büschel-lineares System 4. Stufe, auf welchem ein schar-lineares System 10. Stufe ruht. Wir können planare Korrelationen herstellen, für welche die Fünfflache polar sind und die daher dem ersten System angehören. Zwei entsprechende Ebenen der Fünfflache sind singuläre Ebenen, z. B. α_1 und β_1. Denn einem Punkte wie $\beta_2\beta_3\beta_4$, der nicht in β_1 liegt, muß dann die singuläre Ebene α_1 korrespondieren; sie geht durch $\alpha_1\alpha_5$, die damit zu $\beta_2\beta_3\beta_4$ konjugiert wird. Einem Punkte wie $\beta_1\beta_4\beta_5$, der in β_1 liegt, korrespondiert eine beliebige Ebene durch die Gerade von α_1, die ihm in der charakteristischen Korrelation (α_1, β_1) entspricht; damit eine von ihnen durch $\alpha_2\alpha_3$ gehe, muß der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2\alpha_3)$ auf dieser entsprechenden Gerade liegen, er muß zu $\beta_1\beta_4\beta_5$ konjugiert sein. Wir erhalten also für die Korrelation (α_1, β_1) 6 Paare von konjugierten Punkten:

$$\alpha_1(\alpha_2\alpha_3, \ldots, \alpha_4\alpha_5)$$

$$\beta_1(\beta_4\beta_5, \ldots, \alpha_2\alpha_3);$$

das sind die Gegenecken von zwei Vierseiten; so daß diese 6 Konjugiertheiten mit 5 äquivalent sind (Nr. 272), und daher jedesmal ∞^3 charakteristische Korrelationen (α_i, β_i) und zugehörige planare Korrelationen möglich sind.

Folglich sind α_1 und $\beta_1, \ldots, \alpha_5$ und β_5 gemeinsam konjugiert für alle Korrelationen des Systems 10. Stufe und bestimmen es.

Wir haben so ein drittes bemerkenswertes Beispiel apolarer Systeme: das büschel-lineare System 4. Stufe der Korrelationen, für welche zwei Fünfflache polar sind, und das schar-lineare System 10. Stufe, für dessen Korrelationen die entsprechenden Ebenen derselben konjugiert sind; sowie die beiden dualen Systeme. Wiederum handelt es sich um spezielle Systeme.

Es sei Γ eine Korrelation, in welcher die Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ polar sind, C stütze sie und habe A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3 zu konjugierten Punkten, dann sind es auch A_4 und B_4.

Denn das büschel-lineare System 11. Stufe der Korrelationen, welche Γ stützen und in denen A_1 und $B_1, \ldots, A_3$ und B_3 konjugiert sind, hat mit dem System ebenfalls 11. Stufe der Korrelationen, welche alle ∞^3 Korrelationen stützen, für welche die beiden Tetraeder polar sind, und in welchen infolge dessen die vier entsprechenden Ecken A_1 und $B_1, \ldots, A_4$ und B_4 konjugiert sind, vier lineare Bedingungen gemeinsam, nämlich die Konjugiertheit von A_1 und $B_1, \ldots, A_3$ und B_3 und daß Γ, welche zu den ∞^3 Korrelationen gehört, auf beiden Systemen ruht. Folglich sind sie identisch; denn die drei Konjugiertheiten scheiden aus dem Systeme 14. Stufe der Korrelationen, welche Γ stützen, nur ein System 11. Stufe aus. Es sind also A_4, B_4 auch konjugiert für die zuerst genannten Korrelationen.

Ebenso sind, wenn Γ zwei Fünfecke oder Sechsecke zu polaren hat, C sie stützt und in ihr viermal, bzw. fünfmal entsprechenden Ecken konjugiert sind, auch die fünften, bzw. sechsten Ecken konjugiert.

Jetzt betrachten wir die acht abhängigen Paare von Punkten, welche zwei Paare polarer Tetraeder

$$\begin{matrix} A_1A_2A_3A_4 & A_5A_6A_7A_8 \\ B_1B_2B_3B_4, & B_5B_6B_7B_8 \end{matrix}$$

in einer Korrelation Γ bilden (Nr. 568) und von denen nur 6 Paare willkürlich gegeben werden können. Jede Korrelation C, in welcher von 7 Paaren die Punkte konjugiert sind, hat auch die der achten zu konjugierten Punkten[1]). Denn weil für sie A_1 und $B_1, \ldots, A_4$ und B_4 konjugiert sind, so stützt C die Γ, in der diese Punkte polare Tetraeder bilden. Weil aber für Γ auch $A_5 \ldots A_8$, $B_5 \ldots B_8$ polare Tetraeder sind, C sie stützt und A_5 und B_5, A_6 und B_6, A_7 und B_7 zu konjugierten Punkten hat, so sind es auch A_8 und B_8.

Nehmen wir an, C sei ein Nullraum, so bedeutet die Voraussetzung: A_1 und $B_1, \ldots, A_7$ und B_7 sind konjugiert, daß die 7 Ver-

1) Rosanes, Journ. f. Math., Bd. 88, S. 261.

bindungslinien zu einem Gewinde gehören; folglich gehört auch $A_8 B_8$ zu demselben.

Oder, C sei eine zentrale Korrelation, für welche A_1 und $B_1, \ldots$, A_5 und B_5 konjugiert sind, die Konjugiertheit von A_7 und B_7, A_8 und B_8 aber dadurch erfüllt wird, daß A_7 und B_8 oder A_8 und B_7 die Zentren sind, so sind auch A_6 und B_6 konjugiert; d. h. die 6 Punktepaare A_1 und $B_1, \ldots, A_6$ und B_6 werden aus A_7 und B_8 oder A_8 und B_7 durch 6 linear abhängige Strahlenpaare projiziert (Nr. 434).

Wenn drei Korrelationen C_1, C_2, Γ gegeben sind, so seien X', 743
Y', Z' in Σ' beliebig genommen, ihre Polarebenen in den Korrelationen seien ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$; diejenigen ξ, η, ζ in den Korrelationen des Büschels $\mathfrak{B} = C_1 C_2$ durchlaufen projektive Ebenenbüschel um $\xi_1 \xi_2$, $\eta_1 \eta_2$, $\zeta_1 \zeta_2$. Für jede Korrelation C des Büschels finden wir eine Ebene $\bar{\omega}$, für welche wenigstens die drei Inzidenzen von ξ mit $\bar{\eta}\bar{\zeta}\bar{\omega}$, von η mit $\bar{\zeta}\bar{\omega}\bar{\xi}$, von ζ mit $\bar{\omega}\bar{\xi}\bar{\eta}$ eintreten; sie ist die Ebene, welche die Punkte $\xi\bar{\eta}\bar{\zeta}$, $\eta\bar{\zeta}\bar{\xi}$, $\zeta\bar{\xi}\bar{\eta}$ verbindet; und W' sei ihr Pol in Γ. Wenn C den Büschel $\mathfrak{B}$ durchläuft, so beschreiben die genannten Punkte projektive Punktreihen auf $\bar{\eta}\bar{\zeta}$, $\bar{\zeta}\bar{\xi}$, $\bar{\xi}\bar{\eta}$, die Ebene $\bar{\omega}$ umhüllt einen Torsus 3. Klasse, und W' beschreibt eine Raumkurve 3. Ordnung. Die Punktreihe auf ihr ist zu dem Büschel der Polarebenen des Punktes $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ in den Korrelationen von $\mathfrak{B}$ projektiv, und daher auch zu der kubischen Involution, welche dieser in die kubische Raumkurve einschneidet. Von den 4 Koinzidenzen der entstehenden Korrespondenz [1, 3] sind 3 die Punkte X', Y', Z'. Es gibt nämlich im Büschel eine Korrelation, für welche X' und $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ konjugiert sind, also die Polarebene ξ von X' durch $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ geht; dann wird $\xi\bar{\eta}\bar{\zeta}$ mit $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ identisch, und alle drei Punkte, welche $\bar{\omega}$ bestimmen, liegen in $\bar{\xi}$, mit der $\bar{\omega}$ deshalb identisch wird und demnach W' mit X'; so kommen X', Y', Z' auf die kubische Raumkurve. Wenn aber die Polarebene von X' durch $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ geht, so geht die von $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ durch X'; und wir haben eine Koinzidenz erhalten.

Die vierte Koinzidenz W' ergebe sich bei der Korrelation C des Büschels $\mathfrak{B}$; weil sie in der Polarebene von $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$ liegt, so geht die Polarebene $\bar{\omega}$ von W' durch $\bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta}$, und es wird die vierte Inzidenz erfüllt; diese Korrelation C aus $\mathfrak{B}$ stützt Γ.

Jeder Büschel von Korrelationen enthält eine Korrelation, welche eine gegebene Korrelation stützt. Sie ist dem Büschel gemeinsam mit dem büschel-linearen System 14. Stufe der Korrelationen, auf denen Γ ruht.

Ebenso enthält jede Schar von Korrelationen eine, welche auf einer gegebenen ruht.

Daran knüpfen sich wieder ähnliche Folgerungen wie in Nr. 446.

Es wird möglich sein, die drei Aufgaben: Wenn 13, 14 oder 15 Paare konjugierter Punkte gegeben sind, wodurch ein Netz, ein Büschel von Korrelationen, bzw. eine einzige festgelegt sind, zu einem gegebenen Punkt den gemeinsam konjugierten Punkt im ersten Falle, die gemeinsam konjugierte Gerade im zweiten, die Polarebene im dritten zu konstruieren, in ähnlicher Weise wie in Nr. 444, durch lineare Konstruktion zur Erledigung zu bringen; aber wegen der großen Umständlichkeit verzichten wir darauf.

744 Das wertvollste Beispiel zweier apolarer Systeme ist das büschel- und schar-lineare System 9. Stufe aller Polarräume und das ebenfalls zugleich büschel- und schar-lineare System 5. Stufe aller Nullräume. In der Tat, $\mathfrak{P}$ sei ein Polarraum und $\mathfrak{N}$ ein Nullraum; $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sei ferner ein Polartetraeder des ersteren, ihm polar in dieser ist es selbst als $ABCD$, wo $BCD \equiv \alpha'$ usw., polar in $\mathfrak{N}$ sei $A_1B_1C_1D_1$; dann ist ja dieses Tetraeder jenem zugleich ein- und umgeschrieben: A_1 liegt in $BCD, \ldots$, aber auch A in $B_1C_1D_1, \ldots$ (Nr. 532). Folglich ist die Apolaritäts-Beziehung zwischen den Systemen, wie ja auch aus der Eigenschaft, daß sie beide in sich dual sind, zu erwarten war, gegenseitig: jedes der beiden Systeme stützt das andere und ruht auf ihm.

Nun befinde sich in dem büschel-linearen System 5. Stufe der Korrelationen, für welche zwei Sechsflache $\alpha_1 \ldots \alpha_6$, $\beta_1 \ldots \beta_6$ polar sind, ein Polarraum $\mathfrak{P}$. Wir haben dann das schar-lineare System 9. Stufe der Korrelationen, in denen die entsprechenden Ebenen α_1 und $\beta_1, \ldots \alpha_6$ und β_6 konjugiert sind, ferner das System 5. Stufe aller Nullräume, beide umfaßt von dem schar-linearen Systeme 14. Stufe der auf $\mathfrak{P}$ ruhenden Korrelationen; folglich haben sie eine Korrelation gemein (Nr. 666); d. h. es gibt einen Nullraum, in welchem α_1 und $\beta_1, \ldots, \alpha_6$ und β_6 konjugiert sind. Das bedeutet, daß die sechs Schnittlinien $\alpha_1\beta_1, \ldots \alpha_6\beta_6$ in dem zugehörigen Gewinde sich befinden.

Und umgekehrt, wenn die beiden Sechsflache $\alpha_1 \ldots \alpha_6$, $\beta_1 \ldots \beta_6$ die Eigenschaft haben, daß die sechs Schnittlinien $\alpha_1\beta_1, \ldots \alpha_6\beta_6$ demselben Gewinde angehören, so sind $\alpha_1, \beta_1; \ldots \alpha_6, \beta_6$ in dem mit ihm verbundenen Nullraum $\mathfrak{N}$ konjugiert; er gehört zu dem schar-linearen Systeme 9. Stufe der Korrelationen mit diesen Konjugiertheiten; folglich befinden sich das büschel-lineare System 5. Stufe, für dessen Korrelationen die Sechsflache polar sind, und das System 9. Stufe der Polarräume in dem büschel-linearen Systeme 14. Stufe, auf welchem $\mathfrak{N}$ ruht; sie haben daher eine Korrelation gemein; d. h. es gibt einen Polarraum, in welchem die Sechsflache polar sind. Also:

Wenn zwei Sechsflache in einem Polarraume polar sind, so befinden sich die Schnittlinien entsprechender Ebenen in einem Gewinde; und umgekehrt, haben zwei Sechsflache

Schnittlinien mit dieser Eigenschaft, so sind sie polar in einem Polarraume.[1])

In dem büschel-linearen System 4. Stufe, für dessen Korrelationen zwei Fünfflache $\alpha_1 \ldots \alpha_5$, $\beta_1 \ldots \beta_5$ polar sind, befinde sich ein Polarraum. Nunmehr hat das System der Nullräume mit dem schar-linearen System 10. Stufe, in dessen Korrelationen α_1 und $\beta_1, \ldots \alpha_5$ und β_5 konjugiert sind, weil beide in jenem System 14. Stufe sich befinden, eine Schar gemein; die Schnittlinien $\alpha_1\beta_1, \ldots \alpha_5\beta_5$ gehören zu sämtlichen verbundenen Gewinden, befinden sich daher im gemeinsamen Strahlennetze.

Und umgekehrt, wenn $\alpha_1\beta_1, \ldots \alpha_5\beta_5$ zu demselben Strahlennetze gehören, so befinden sich das System 9. Stufe aller Polarräume und das büschel-lineare System 4. Stufe, in dessen Korrelationen die beiden Fünfflache $\alpha_1 \ldots \alpha_5$, $\beta_1 \ldots \beta_5$ polar sind, in dem büschel-linearen System 13. Stufe, auf welchem die Büschel-Schar der Nullräume ruht, die zu den Gewinden jenes Strahlennetzes gehören.

Wenn zwei Fünfflache in einem Polarraume polar sind, so gehören die Schnittlinien entsprechender Ebenen zu einem Strahlennetz; und zwei Fünfflache, deren Schnittlinien diese Eigenschaft haben, sind in einem Polarraume polar.

Drittens ergibt sich der uns schon bekannte Satz (Nr. 545, 546), daß bei zwei in einem Polarraume polaren Tetraedern die Schnittlinien entsprechender Ebenen zu einer Regelschar gehören, und seine Umkehrung.

Dazu kommen dann noch die dualen Sätze.

Wenn zwei Polarräume C und Γ apolar sind, und zwar so, 745
daß Γ auf C ruht, so hat das neunfach unendliche System der ausgezeichneten Tetraeder (Nr. 739) mit dem sechsfach unendlichen System der Polartetraeder von C ein dreifach unendliches System von Tetraedern gemeinsam.

Es sei T eins von ihnen, so ist dasjenige Tetraeder T_1, welches zu dem in C polaren in Γ polar ist, ihm eingeschrieben; das in C polare ist aber T selbst; daher ist dem T das in Γ polare T_1 eingeschrieben: die Ebenen von T gehen durch ihre Pole in Γ, also ist T der Basisfläche (Γ) von Γ umgeschrieben. So ergeben sich ∞^3 Polartetraeder von C, welche der Basisfläche (Γ) um-, und ∞^3 Polartetraeder von Γ, welche der Basisfläche (C) eingeschrieben sind. Und die Existenz eines einzigen Polartetraeders der einen oder andern Art läßt auf Apolarität von C und Γ schließen (Nr. 739).

Also: Wenn ein Polartetraeder von C vorhanden ist, das der Basisfläche von Γ umgeschrieben ist, so ruht Γ auf C, und

1) Rosanes, Journ. f. Math. Bd. 100, S. 314.

es gibt ∞^3 solche Polartetraeder von C. Eine Ebene α' legen wir beliebig tangential an (Γ), die zweite β' so tangential, daß sie durch den Pol A von α' in C geht; als dritte γ' nehmen wir eine der Berührungsebenen von (Γ) durch die Verbindungslinie der beiden Pole A, B von α', β' in C; wenn dann C ihr Pol ist, also $D = \alpha'\beta'\gamma'$ und $\delta' = ABC$ die beiden noch fehlenden Elemente sind, so ist $ABCD \equiv \alpha'\beta'\gamma'\delta'$ zu sich selbst polar in C; und ist $A_1 B_1 C_1 D_1$ das polare in Γ, so sind A_1, B_1, C_1 die Berührungspunkte, die also mit α', β', γ' inzidieren, folglich müssen (Nr. 739), da vorausgesetzt ist, daß Γ auf C ruht, auch die vierten Elemente δ' und D_1 inzident sein; d. h. auch die vierte Ebene δ' muß (Γ) tangieren.

Sind also bei zwei Polarräumen C und Γ, von denen Γ auf C ruht, von einem Polartetraeder von C drei Ebenen Berührungsebenen von (Γ), so gilt dies auch für die vierte. Oder auch, zwei zueinander in C konjugierte Tangentialebenen von (Γ) vervollständigt man zu einem dem C zugehörigen und der (Γ) umgeschriebenen Polartetraeder durch die beiden Tangentialebenen dieser Fläche, welche durch die Verbindungslinie der Pole jener Ebenen in C gehen.

Wenn ein Polartetraeder von Γ vorhanden ist, das der Basisfläche von C eingeschrieben ist, so stützt C den Γ und es gibt ∞^3 solche Polartetraeder von Γ; jede zwei zueinander in Γ konjugierten Punkte, welche auf (C) liegen, werden zu einem durch die Schnittpunkte der (C) mit der Gerade vervollständigt, welche den Polarebenen derselben in Γ gemeinsam ist.

Das schar-lineare System 14. Stufe der auf dem Polarraume C ruhenden Korrelationen hat mit dem (zugleich büschel- und schar-) linearen Systeme 9. Stufe der Polarräume ein schar-lineares System 8. Stufe gemeinsam (Nr. 666).

Jeder Polarraum stützt also ein schar-lineares System 8. Stufe von Polarräumen, ruht auf einem büschel-linearen Systeme 8. Stufe von Polarräumen. Und wenn $i + k = 8$ ist, so sind apolar verbunden ein büschel-lineares System i^{ter} Stufe von Polarräumen C und ein schar-lineares System k^{ter} Stufe von Polarräumen Γ.

Wenn durch zwei Polaren eines Polarraums die Basisfläche eines andern geht, so ist dieselbe allen Polartetraedern des ersteren, für welche jene Polaren Gegenkanten sind, ein- und umgeschrieben; ihr Polarraum ruht auf jenem und stützt ihn; die beiden Polarräume sind in beiderlei Sinne oder doppelt apolar. Weil der gegebene Polarraum ∞^4 Paare von Polaren besitzt und durch jedes Paar ∞^3 Flächen 2. Grades gehen, so ergeben sich auf diese Weise ∞^7 dem gegebenen doppelt apolare Polarräume. Die beiden achtfach unendlichen

Systeme der zu ihm in dem einen und dem andern Sinne apolaren Polarräume durchschneiden sich in einer siebenfachen Unendlichkeit, so daß zu vermuten ist, daß die obige Form doppelt apolarer Polarräume die einzige ist.[1])

Es liegen zwei doppelt apolare Polarräume C und Γ vor; wir suchen Polartetraeder des C herzustellen, welche der (Γ) um- und eingeschrieben sind.

Auf (Γ) befindet sich eine Raumkurve 4. Ordnung R^4 von Punkten, deren Polarebenen in C die (Γ) tangieren; diese Ebenen umhüllen den Torsus 4. Klasse, welcher der (Γ) mit ihrer Polarfläche in C gemeinsam ist. A gehöre jener Kurve an, und seine Polarebene α in C diesem Torsus. Jetzt sei B einer der Punkte von R^4 in α, so daß die Polarebene β durch A geht und ebenfalls (Γ) tangiert. Wir haben also, weil Γ den C stützt, A, B durch die Schnittpunkte von $\alpha\beta$ mit (Γ) zu dem der (Γ) eingeschriebenen Polartetraeder zu vervollständigen.

Die Berührungsebenen α, β von (Γ) mögen diese Fläche in den Geraden g_α, l_α; g_β, l_β schneiden; dann sind jene Schnitte die Punkte $C = g_\alpha l_\beta$, $D = l_\alpha g_\beta$. Der Punkt B liegt auf einer der Geraden in α etwa auf g_α, so muß A in β auf der Gerade g_β aus derselben Regelschar liegen.

Nehmen wir an, daß A auf l_β liegt. Dann berührt das zu C gehörige Polartetraeder $ABCD$ mit drei Ebenen α, β, $\delta = ABC = g_\alpha l_\beta$ die (Γ); folglich muß es, weil auch umgekehrt C den Γ stützt, die vierte Ebene $\gamma = ABD$ auch tun. Die in ihr befindlichen Geraden g_γ, l_γ des (Γ) schneiden sich mit denen von δ auf AB, g_γ mit l_β in A, l_γ mit g_α in B; auf welcher von ihnen auch D liegend angenommen wird, wir erhalten beidemal in einer Tangentialebene von (Γ) noch eine dritte Gerade $g_\gamma = AD$ in β, $l_\gamma = BD$ in α.

Es liegt also, wie behauptet wurde, A auf g_β; dann sind die Gegenkanten BC und AD, polar in C, auf der Fläche (Γ) in derselben Regelschar gelegen; und wir haben den obigen Fall.

Diese beiden in C polaren Geraden g_1, g_2 aus der einen Regelschar (g) von (Γ) führen sofort zu zwei polaren l_1, l_2 in der andern (l); denn zu jeder Gerade des Netzes $[g_1, g_2]$ ist in C polar eine ebenfalls demselben angehörige Gerade; die (l) hat also mit der zu ihr nach C polaren Regelschar die Leitgeraden g_1, g_2 gemeinsam, mithin zwei Geraden, die dann zueinander polar sind.

Diese vier Geraden g_1, g_2, l_1, l_2 bilden in unserem Falle die oben erwähnte Raumkurve 4. Ordnung und ihre Ebenenbüschel den Torsus 4. Klasse.

Wenn zwei Polarräume doppelt apolar sind, so enthält

1) G. Kohn, Jahresber. der deutschen Mathem. Vereinig. Bd. 15 S. 469.

jede der vier Regelscharen der beiden Basisflächen zwei Geraden, die im andern Polarraume polar sind.

746 Es seien zwei Punktepaare A_1B_1, A_2B_2 gegeben; dann ist ein drittes Punktepaar A_3B_3, für welches verlangt wird, daß ein Zentrum existiert, aus dem die drei Paare durch die Gegenkanten eines Vierflachs projiziert werden, einer Bedingung unterworfen; denn es müssen entweder die Ebenen $A_1A_2A_3$, $A_1B_2B_3$, $B_1A_2B_3$, $B_1B_2A_3$ oder die Ebenen $A_1A_2B_3$, $A_1B_2A_3$, $B_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ in einen Punkt zusammenlaufen, was bei beliebiger Lage der drei Punktepaare nicht geschieht. Die vier zuerst genannten Ebenen haben einen Punkt gemeinsam, wenn die Schnittlinie zweier von ihnen und diejenige der beiden andern sich treffen, also etwa (A_3, A_1A_2, B_1B_2) und (B_3, A_1B_2, B_1A_2). Das bedeutet, daß A_3 und B_3 auf derselben Fläche 2. Grades liegen, welche durch das Vierseit $A_1A_2B_1B_2$ geht. Dies ist die Bedingung für A_3, B_3, und sie ergibt sich ebenso aus dem Zusammenlaufen der vier andern Ebenen. Das Projektionszentrum ist der eine oder andere Konkurrenzpunkt A_4, B_4; wir erkennen diese leicht als die beiden Schnittpunkte der Geraden der Fläche, die durch A_3 gehen, mit denen, die durch B_3 gehen: in A_4 schneiden sich (A_3, A_1A_2, B_1B_2) und (B_3, A_1B_2, B_1A_2) und in B_4 die Geraden (A_3, A_1B_2, B_1A_2) und (B_3, A_1A_2, B_1B_2).

Fügen wir dies Punktepaar zu den drei hinzu, so haben wir die vier Paare Gegenecken von zwei Vierseiten, welche derselben Fläche 2. Grades aufgeschrieben sind: $A_1A_2B_1B_2$, $A_3A_4B_3B_4$. Und aus jedem der acht Punkte werden die drei Punktepaare, zu denen er nicht gehört, in die Paare der Gegenkanten eines Vierflachs projiziert.

Die Vierseite $A_1A_3B_1B_3$ und $A_2A_4B_2B_4$ liegen auf einer zweiten Fläche 2. Grades und $A_1A_4B_1B_4$, $A_2A_3B_2B_3$ auf einer dritten.

Ferner liegen A_1, A_2, A_3, A_4 in einer Ebene und ebenso B_1, B_2, B_3, B_4.

Diese vier Punktepaare, von denen, wie gesagt, schon die drei ersten einer Bedingung unterworfen sind, haben folgende Abhängigkeit: In jedem Polarraume, in dem die Punkte von drei Paaren konjugiert sind, sind es auch die des vierten.

Alle Polarräume, die der Voraussetzung genügen, bilden ein büschel-lineares System 6. Stufe. Das vierte Paar sei A_4, B_4. Für jeden zentralen Polarraum, für den etwa A_1, B_1 konjugiert, sind im charakteristischen Polarbündel um das Zentrum die Strahlen nach A_1, B_1 konjugiert, und im Polarraume dann jede zwei Punkte auf diesen Strahlen. Weil aus A_4 die drei Punktepaare durch die Paare der Gegenkanten eines Vierflachs projiziert werden, so werden für jeden zentralen Polarraum mit dem Zentrum A_4, bzw. den zugehörigen Polarbündel, für den zweimal zwei Gegenkanten konjugiert sind, die dritten von selbst konjugiert (nach Hesses Satz, Nr. 314); folglich handelt es sich um ein büschel-lineares System 3. Stufe (A_4), das aus lauter zentralen Polarräumen, mit gemeinsamem Zentrum, besteht. Jetzt sei $\mathfrak{P}$ ein Polarraum aus jenem Systeme 6. Stufe; wir verbinden ihn durch Büschel mit allen Polarräumen des eben genannten Systems 3. Stufe und erhalten ein büschel-lineares System 4. Stufe. Für alle Polarräume desselben sind A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3 konjugiert. Der Punkt B_4 liefert ein zweites büschel-lineares System 3. Stufe von zentralen Polarräumen (B_4); dieses und das System 4. Stufe, beide umfaßt vom System 6. Stufe, haben einen Büschel gemein, also von lauter zentralen Polarräumen aus (B_4). Jeder derselben befindet sich daher in einem jener Büschel aus $\mathfrak{P}$; das sind Büschel, in denen $\mathfrak{P}$, ein zentraler Polarraum aus (A_4) und einer aus (B_4) sich befinden; die beiden Zentren A_4, B_4 sind konjugiert für alle Polarräume des Büschels, als Ecken des gemeinsamen Polartetraeders, demnach auch für $\mathfrak{P}$. Also:

Zu zwei Punktepaaren A_1B_1, A_2B_2 und einem Punkte A_3 kann auf ∞^2 Weisen ein Punkt B_3 gefügt werden, — nämlich jeder Punkt der Fläche 2. Grades, die durch das Vierseit $A_1A_2B_1B_2$ und den Punkt A_3 geht, — der so beschaffen ist, daß es möglich ist, die drei Punktepaare in Gegenkanten-Paare eines Vierflachs zu projizieren. Die beiden Zentren A_4, B_4, bei denen diese Projektion möglich ist, liegen gleichfalls auf jener Fläche und sind die andern Gegenecken des der Fläche aufgeschriebenen Vierseits, in dem A_3 und B_3 einander gegenüberliegen. Aus jedem der acht Punkte werden die drei andern Paare in der genannten Weise projiziert. Diese vier Punktepaare haben die Abhängigkeit, daß jeder Polarraum, in dem die Punkte von dreien konjugiert sind, auch die des vierten zu konjugierten Punkten hat.[1])

Es sei A, B ein Paar konjugierter Punkte eines Polarraums C; 747
betrachten wir den axialen Polarraum Γ, für den AB Axe und die charakteristische Punkt-Involution diejenige mit den Doppelpunkten A, B ist. Der Polarraum C ruft auf AB eine Involution konjugierter Punkte hervor, in welcher A und B gepaart sind; folglich stützen die beiden Involutionen einander (Nr. 85); bilden daher Y_1, $\overline{Y}'$ ein Paar der ersten Involution, so bilden die Punkte $\overline{X}'$ und X_1, welche ihnen durch die andere gepaart, also im Polarraum C konjugiert sind, wiederum ein Paar der ersten; folglich ruht (Nr. 740) Γ auf C. Aber der axiale Polarraum ist noch unbestimmt; nur die charakteristische Punktinvolution auf der Axe ist festgelegt, nicht die Ebeneninvolution; von seiner Basisfläche ist nur das Punktepaar, nicht das Ebenenpaar bestimmt. Jede beliebige zwei Ebenen durch die Axe können als

1) Rosanes, Journ. f. Math. Bd. 88, S. 266.

das Ebenenpaar bildend aufgefaßt werden, oder jede Ebeneninvolution um sie als die zweite noch fehlende charakteristische Involution.

Jedes Paar konjugierter Punkte A, B, das allen Polarräumen eines büschel-linearen Systems gemeinsam ist, bewirkt in dem auf demselben ruhenden schar-linearen Systeme einen axialen Polarraum mit der Verbindungslinie AB als Axe, der Punktinvolution, von welcher A, B Doppelpunkte sind, und einer, im allgemeinen, unbestimmten Ebeneninvolution, also ein Punktepaar AB im System der Basisflächen.

So ruht z. B. auf dem speziellen büschel-linearen Systeme 7. Stufe von Polarräumen, denen die konjugierten Punkte A_1, B_1; A_2, B_2 gemeinsam sind, eine Schar mit zwei Punktepaaren, deren Basisflächen durch das Vierseit $A_1 A_2 B_1 B_2$ gehen; übrigens mit bestimmten zugehörigen Ebenenpaaren.

Zu diesen Punktepaaren wollen wir noch auf andere Weise gelangen. Betrachten wir ein büschel-lineares System 4. Stufe mit ∞^6 Büscheln und Netzen und ∞^4 Gebüschen; so enthält jede Ebene ein Polarfeld oder einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der sich auf das büschel-lineare System 4. Stufe der ausgeschnittenen Polarfelder oder Kegelschnitte stützt. Jeder dieser Kegelschnitte ist einem Polardreiecke (und dann ∞^1) von $\mathfrak{K}$ umgeschrieben, und legen wir auf die zugehörige Fläche einen beliebigen Punkt, so vervollständigt er das Polardreieck zu einem Polartetraeder der zum Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ ausgearteten Fläche 2. Grades; also ist die Fläche des Systems diesem Polartetraeder der Fläche $\mathfrak{K}$ umgeschrieben; und letztere gehört zum schar-linearen Systeme 4. Stufe, das sich auf das gegebene System stützt; und wir haben so dessen ∞^3 zu Kegelschnitten ausgeartete Flächen erhalten, in jeder Ebene einen.[1])

Artet $\mathfrak{K}$ in ein Punktepaar aus, das dann aber zu allen Ebenen durch die Verbindungslinie gehört, so bekommen wir dadurch ein Punktepaar in das schar-lineare System. Ein Polardreieck jenes Paars besteht aus zwei zu seinen Punkten harmonischen Punkten und irgend einem dritten. Die Punkte des Punktepaars sind in bezug auf alle Flächen des büschel-linearen Systems konjugiert; wir wissen, dieses hat ∞^1 solche Paare konjugierter Punkte, die eine Kurve 10. Ordnung erfüllen (Nr. 736); sie sind Punktepaare des schar-linearen Systems und die ∞^1 gemeinsamen Paare konjugierter Ebenen des letzteren Systems, von denen fünf es bestimmen, schneiden in die Verbindungslinie eines solchen Punktepaars die Involution ein, von welcher die beiden Punkte die Doppelpunkte sind; da es nun für fünf

1) Wendet man auf die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ in den Ebenen eines Büschels die Chaslesschen Charakteristiken-Formeln von Nr. 186 Anm. an, so hat man:

$$\rho = 4, \quad \mu = 1, \quad \delta = 0, \quad \nu = 8, \quad \eta = 10.$$

Paare von Ebenen eine Regelfläche 10. Grades von Geraden gibt, die von ihnen in Punktepaaren in Involution geschnitten werden (Nr. 253), so erkennen wir, daß die Doppellinien der Punktepaare des schar-linearen Systems oder die Verbindungslinien der Paare konjugierter Punkte des büschel-linearen Systems eine Regelfläche 10. Grades bilden; für die letzteren ist es schon in Nr. 736 erkannt. Und dasselbe gilt für die Doppelgeraden der Ebenenpaare des letzteren Systems und die Schnittlinien der konjugierten Ebenen des ersteren.

Der Ebenenbüschel um eine Erzeugende jener Regelfläche 10. Grades und die in ihm durch die konjugierten Punkte (auf der Kurve 10. Ordnung) entstehende involutorische Korrespondenz [8] lehren, da die Koinzidenzen wieder doppelt zu rechnen sind (Nr. 736), daß die Erzeugende von acht andern getroffen wird. Das gibt Ebenen mit zwei Paaren von Punkten, die für alle Kegelschnitte des ausgeschnittenen Systems konjugiert sind; sie haben also, nach Hesses Satz (Nr. 112), noch ein drittes gemeinsames Paar konjugierter Punkte, also nimmt jede solche Ebene noch eine dritte Erzeugende der Regelfläche in sich auf und ist dreifache Berührungsebene derselben. Aber das ausgeschnittene Kegelschnitt-System mit diesen drei (abhängigen) Paaren von konjugierten Punkten ist nur 3. Stufe. Durch jeden seiner Kegelschnitte gehen ∞^1 einen Büschel bildende Flächen des Systems mit einem zweiten gemeinsamen Kegelschnitt. Solcher Büschel mit zwei Grund-Kegelschnitten hat das System ∞^4, und diese Kegelschnitte liegen, zu je ∞^3, in ∞^1 Ebenen, offenbar den Ebenen der Ebenenpaare des Systems; denn jeder von den Büscheln enthält ja ein Ebenenpaar. Diese Ebenen umhüllen einen Torsus 10. Klasse, wie dual die Punktepaare des schar-linearen Systems eine Kurve 10. Ordnung.

Die Regelfläche 10. Grades der Verbindungslinien der Paare konjugierter Punkte des büschel-linearen Systems (oder der Punktepaare des schar-linearen Systems) enthält einen Torsus 10. Klasse von Ebenen durch drei Erzeugenden. Diese Ebenen bilden die Ebenenpaare des büschel-linearen Systems und schneiden es nur in einem büschel-linearen System 3. Stufe von Kegelschnitten, und diese ∞^4 Kegelschnitte bilden zu je zweien die Grundkurven von speziellen Büscheln des Systems. Und ebenso enthält die andere Regelfläche die obige Kurve 10. Ordnung als dreifache Kurve.

Es gibt ebenfalls ∞^4 Büschel im Systeme, deren Grundkurven je in eine Gerade und eine kubische Raumkurve zerfallen; eine beliebige Gerade gehört zu einer dieser Grundkurven.

Jede Gerade, welche zwei konjugierte Punkte verbindet, ist den Flächen eines Netzes aus dem System gemeinsam.

Ein Gebüsche enthält zehn Ebenenpaare; ihre Doppellinien sind die Geraden, aus denen (Nr. 253) die sechs Paare konjugierter Punkte, durch welche das Gebüsche bestimmt ist, durch sechs Paare in Involution projiziert werden. Ihre Ebenen schneiden das Gebüsche in einem Netze.

Diese zehn Ebenenpaare im Gebüsche repräsentieren, mit allen möglichen Punktepaaren je auf der Doppellinie, ∞^2 Ebenen-Punkte-Paare, die notwendige Mannigfaltigkeit, welche diese Ausartung 1. Stufe (Nr. 696) in einem System 3. Stufe haben muß, wenn sie überhaupt in ihm vorhanden ist. In den niedrigeren Systemen ist sie noch nicht vorhanden.

In ähnlicher Weise bedingt ein Kegelschnitt als ausgeartete Fläche, der in einem büschel-linearen Systeme vorhanden ist, daß seine Ebene, als Doppelebene desselben, zu sich selbst konjugiert ist in bezug auf alle Flächen des sich stützenden schar-linearen Systems, also alle berührt. Solche gemeinsamen Berührungsebenen sind bei schar-linearen Systemen von höherer als 2. Stufe im allgemeinen nicht mehr vorhanden, also auch nicht Kegelschnitte in büschel-linearen Systemen von niedrigerer als 6. Stufe.

Zu einem System 6. Stufe gehören dann alle ∞^5 Kegelschnitte in jeder der acht gemeinsamen Tangentialebenen des sich stützenden Systems 2. Stufe; und diese Mannigfaltigkeit 5 ist wiederum die richtige für einen Kegelschnitt als einer Ausartung 1. Stufe in einem System 6. Stufe.

In dem speziellen büschel-linearen System 6. Stufe, das durch drei Paare konjugierter Punkte definiert ist, verbinden die acht Ebenen je drei Punkte aus verschiedenen Paaren.

748 Jetzt seien $\begin{matrix} A_1 \cdots A_7 \\ B_1 \cdots B_7 \end{matrix}$ sieben Paare konjugierter Punkte, welche ein Netz von Polarräumen festlegen; wir wollen zu A_8 den in diesem Netze konjugierten Punkt B_8 haben; dazu wird vorher eine Eigenschaft solcher acht Paare in einem Netze konjugierter Punkte abgeleitet. Wir teilen sie in zwei Gruppen von zwei und sechs Paaren:

$$\begin{matrix} A_1 A_2, & A_3 \ldots A_8 \\ B_1 B_2, & B_3 \ldots B_8. \end{matrix}$$

Jene bestimmen ein spezielles büschel-lineares System 7. Stufe, diese ein (allgemeines) von der 3. Stufe, denen das Netz gemeinsam ist, so daß sie von einem System 8. Stufe umfaßt werden (Nr. 666); auf jenem ruht eine spezielle Schar $\mathfrak{S}$, deren Basisflächen, wie wir eben fanden, durch das Vierseit $A_1 A_2 B_1 B_2$ gehen, auf diesem ein schar-lineares System 5. Stufe; ihnen ist ein

Polarraum Γ gemeinsam, nämlich derjenige, der auf dem genannten System 8. Stufe ruht.

Diesen Γ erhalten wir daher als denjenigen Polarraum in der Schar, der auf einem (nicht zum System 7. Stufe gehörigen) Polarraum des Systems 3. Stufe ruht; als bequemen nehmen wir den von B_8 unabhängigen zentralen Polarraum mit dem Zentrum in A_8, in dem $\frac{A_3 \ldots A_7}{B_3 \ldots B_7}$ konjugiert sind. Dadurch ist sein charakteristischer Polarbündel bestimmt, und es können, nach Nr. 423 oder 452, beliebige entsprechende oder konjugierte Elemente in ihm konstruiert werden. Es sei Γ zunächst ein die Schar $\mathfrak{S}$ durchlaufender Polarraum; ferner seien, wie in Nr. 740, a, b zwei feste Strahlen des Bündels A_8 und α', β' ihre Polarebenen im genannten Polarbündel (A_8). Ihre Pole in den Polarräumen von $\mathfrak{S}$ beschreiben projektive Punktreihen auf Geraden und die Ebenen α_1, β_1, welche sie aus b, a projizieren und daher zu α', β' je konjugiert sind, projektive Ebenenbüschel, so daß die Schnittlinie c einen Kegel 2. Grades (c) im Bündel A_8 erzeugt, und die Polarebene γ' zu ihr im Polarbündel um einen solchen (γ') projektiv zu jeder der genannten Punktreihen sich bewegt, sowie auch zu der, welche der Pol $\mathfrak{C}'$ der festen Ebene ab in den verschiedenen Γ beschreibt; folglich geht, weil auf dieser Gerade ein Korrespondenz [1, 2] entsteht, γ' dreimal durch $\mathfrak{C}'$. Zwei von diesen Inzidenzen kommen aber in folgender Weise zustande. Wenn c nach a kommt, die ja auf (c) liegt, dann fällt α_1 in ba, die damit der α' konjugiert wird, so daß $\mathfrak{C}'$ in α' liegt, welche in diesem Falle die γ' ist; und ebenso inzidieren γ' und $\mathfrak{C}'$, wenn c nach b kommt. Die dritte Inzidenz führt nach dem Satz von Nr. 740 zu einem Γ aus $\mathfrak{S}$, der auf dem zentralen Polarraum (A_8) ruht.

Da man für die Polarräume unserer Schar $\mathfrak{S}$ polare Elemente konstruieren kann, so ist die Projektivität zwischen dem Kegel (γ') und der Punktreihe der $\mathfrak{C}'$ leicht herzustellen, wobei die bekannten Inzidenzen wertvoll sind; das Aufsuchen der unbekannten Inzidenz läuft hinaus auf die Ermittelung der vierten gemeinsamen Tangente von zwei Kegelschnitten, von denen drei bekannt sind; eine lineare Aufgabe (Nr. 128).

Hat man also diese Ebene γ' bestimmt, die durch den zugehörigen $\mathfrak{C}'$ geht, so ist der gesuchte Γ, außer durch das Vierseit $A_1 A_2 B_1 B_2$, durch die konjugierten Ebenen γ' und ab festgelegt (Nr. 737).

Nunmehr benutzen wir andere zentrale Polarräume aus dem System 3. Stufe, z. B. denjenigen, der sein Zentrum in A_3 hat; für seinen Polarbündel liegen, da B_8 noch nicht bekannt ist, die vier Bedingungen vor, daß A_4 und $B_4, \ldots, A_7$ und B_7 konjugiert sind, so daß zunächst ein Büschel $\mathfrak{B}$ entsteht; die fünfte Bedingung ist die, daß er den vorhin bestimmten Polarraum Γ stützt.

Es seien a, b zwei Strahlen im Bündel A_3, ihre Polarebenen α', β' in den verschiedenen Polarräumen von $\mathfrak{B}$, oder vielmehr deren Polarbündeln, bilden zwei projektive Ebenenbüschel, die ihnen in Γ konjugierten Ebenen α_1, β_1 durch b, a zwei ebenfalls projektive Büschel; der Schnittstrahl c beschreibt wiederum einen Kegel 2. Grades. Der Pol $\mathfrak{C}'$ von ab in Γ ist bekannt; es soll ein solcher c ermittelt werden, der zu $A_3\mathfrak{C}'$ in dem gesuchten zentralen Polarraum konjugiert ist; die Polarebenen des $A_3\mathfrak{C}'$ in diesen Polarräumen beschreiben einen der Kantenreihe der c ebenfalls projektiven Ebenenbüschel; wir stellen drei Paare entsprechender Elemente her. Wiederum haben wir drei Inzidenzen dieser Polarebene mit c. Wenn c nach a kommt, so ist ba die Ebene α_1; α' ist ihr konjugiert in Γ und polar zu a in einem gewissen Polarraum $\overline{C}$ von $\mathfrak{B}$; weil sie zu ab in Γ konjugiert ist, geht sie durch $\mathfrak{C}'$ und als Polarebene in $\overline{C}$ durch das Zentrum A_3, also durch $A_3\mathfrak{C}'$; weil aber $A_3\mathfrak{C}'$ in der Polarebene liegt, die in $\overline{C}$ zu a gehört, so geht seine Polarebene, ebenfalls in $\overline{C}$, durch a. Damit haben wir eine der drei Inzidenzen, b liefert eine zweite; die dritte c ist diejenige, die wir wünschen; sie entspricht dem Polarraume von $\mathfrak{B}$, auf den sich Γ stützt. Wir können sie, wie oben, linear konstruieren und haben dann in c und $A_3\mathfrak{C}'$ das noch fehlende Paar konjugierter Strahlen im Polarbündel dieses gesuchten Polarraumes aus $\mathfrak{B}$.

Ist er nun vollständig bestimmt, so liefert die Ebene, welche in seinem Polarbündel dem A_3A_8 korrespondiert, einen Ort für B_8. Ersetzen wir A_3 durch zwei aus den neun Punkten B_3, $A_4 \ldots B_7$ und wiederholen die Konstruktion, so haben wir B_8 festgelegt; und die obige Aufgabe gelöst.[1])

Auf sie lassen sich die beiden weiteren Aufgaben zurückführen:

Wenn für einen Büschel von Polarräumen acht Paare konjugierter Punkte gegeben sind:

$$A_1 \ldots A_8$$
$$B_1 \ldots B_8;$$

zu einem neunten Punkt A_9 die gemeinsam konjugierte Gerade zu konstruieren;

und wenn für einen Polarraum neun Paare konjugierter Punkte gegeben sind:

$$A_1 \cdot \cdot A_9$$
$$B_1 \ldots B_9;$$

zu einem zehnten Punkte A_{10} die Polarebene zu konstruieren.

1) Schon diese Auflösuug ist nicht gerade einfach, umsomehr würde das für diejenige der Aufgabe in Nr. 743 gelten.

Wir lassen im ersten Fall einmal A_8, B_8; dann A_7, B_7 weg und konstruieren zu A_9 je den gemeinsam konjugierten Punkt für alle Polarräume des sich ergebenden Netzes; die Verbindungslinie ist die gesuchte Gerade. Und im andern Falle lassen wir dreimal zwei Paare weg oder einmal ein Paar und dann zwei andere Paare, und erhalten für die Polarebene drei Punkte, bzw. eine Gerade und einen Punkt.

Die beiden Tetraeder $XYZW$, $X_1Y_1Z_1W_1$, welche in zwei Null- 749
räumen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{\Gamma}$ einem Tetraeder $\xi'\eta'\zeta'\omega'$ polar sind, sind zugeordnet in der Kollineation mit Axen, zu der sie führen (Nr. 534) und in welcher sowohl die beiden derselben Ebene zugehörigen Nullpunkte, als die demselben Punkte zugehörigen Nullebenen korrespondierend sind. Ihre Axen sind in beiden Nullräumen polar und die Leitgeraden des den verbundenen Gewinden gemeinsamen Strahlennetzes. Wenn $X_1Y_1Z_1W_1$ dem $XYZW$ eingeschrieben ist, so handelt es sich um eine Kollineation in eingeschriebener Tetraederlage; wir wissen aber (Nr. 630), von den Kollineationen mit Axen hat nur die windschiefe Involution diese Eigenschaft, dann aber in beiderlei Sinne, so daß auch $XYZW$ dem $X_1Y_1Z_1W_1$ eingeschrieben ist.

Zwei Nullräume $\mathbf{C}$, $\mathbf{\Gamma}$ sind dann und nur dann apolar, wenn die Kollineation mit Axen, zu welcher sie führen, die windschiefe Involution ist; wenn dann $\xi'\eta'\zeta'\omega'$ eins der ∞^9 ausgezeichneten Tetraeder ist, von dessen entsprechenden $XYZW$, $X_1Y_1Z_1W_1$ eins dem andern eingeschrieben ist, so ist auch dieses jenem eingeschrieben; jeder von den beiden Nullräumen stützt den andern und ruht auf ihm, so daß die Bezeichnung: apolar genügt.

Beide Tetraeder $XYZW$, $X_1Y_1Z_1W_1$ sind auch dem $\xi'\eta'\zeta'\omega$ ein- und umgeschrieben.

Von zwei solchen Nullräumen (und ihren Gewinden) sagt man auch (Nr. 534), daß sie in Involution sind; wir haben gelernt (Nr. 598), daß sie vertauschbar sind, d. h. daß die Produkte $\mathbf{C\Gamma}$ und $\mathbf{\Gamma C}$ gleich sind, nämlich beide die windschiefe Involution. Die Nr. 534 beschriebenen durch Involution zueinander gehörigen linearen Systeme i^{ter} und $(4-i)^{\text{ter}}$ Stufe sind apolar.

Gehen wir von $XYZW$ aus, das ja auch zur neunfachen Unendlichkeit gehört, so ist polar in $\mathbf{C}$ $\xi'\eta'\zeta'\omega'$, polar in $\mathbf{\Gamma}$ sei $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'\omega_1'$, beide dem $XYZW$ ein- und umgeschrieben und einander. Da aus $XYZW$ durch $\mathbf{C\Gamma}$ sich $X_1Y_1Z_1W_1$ ergibt, so muß dasselbe Tetraeder auch durch $\mathbf{\Gamma C}$ sich ergeben; d. h. $X_1Y_1Z_1W_1$ und $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'\omega_1'$ sind polar in $\mathbf{C}$; so daß wir von $X_1Y_1Z_1W_1$ ausgehend durch $\mathbf{\Gamma}$ zu $\xi'\eta'\zeta'\omega'$, durch $\mathbf{C}$ zu $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'\omega_1'$ kommen. Wir erhalten geschlossene Gruppen von je vier Tetraedern, von denen beliebige zwei einander ein- und umgeschrieben sind: $XYZW$ und $\xi'\eta'\zeta'\omega'$, $X_1Y_1Z_1W_1$ und $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'\omega_1'$ sind polar in $\mathbf{C}$, $XYZW$ und $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'\omega_1'$,

$X_1Y_1Z_1W_1$ und $\xi'\eta'\zeta'\omega'$ in Γ, $XYZW$ und $X_1Y_1Z_1W_1$, $\xi'\eta'\zeta'\omega'$ und $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'\omega_1'$ entsprechend in der windschiefen Involution $C\Gamma = \Gamma C$. Alle vier gehören zur neunfachen Unendlichkeit, und jedes Tetraeder derselben führt zu einem solchen Zyklus.

§ 106. Übertragung auf die Kollineationen.

750 Wenn wir nun diese Ergebnisse, durch Dualisierung des einen Raumes, auf die Kollineationen übertragen, so können wir, wie in Nr. 454, Konnexe einführen, deren zwei mit jeder Kollineation verbunden sind. In dem einen (A, α')-Konnexe sind jedem Punkte A alle ∞^2 ihm konjugierten Ebenen (durch den entsprechenden Punkt) zugeordnet, und jeder Ebene α' alle ihr konjugierten Punkte A; und im andern (α, A')-Konnexe sind die Ebenen im ersten, die Punkte im zweiten Raume gelegen.

Wir nennen dann auch eine durch konjugierte Elemente der einen oder andern Art bestimmte Kollineation eine (A, α')-, bzw. (α, A')-Kollineation.

Bei den Ausartungen unterscheiden sich die beiden ersten, welche den zentralen und den planaren Korrelationen entsprechen, nicht wesentlich, nur durch die Zugehörigkeit zu den Räumen; sie haben einen singulären Punkt in dem einen Raum und eine singuläre Ebene im andern: S, σ' oder σ, S'. In einer zentralen Korrelation (S, S') sind konjugiert zwei Ebenen, von denen die eine durch den singulären Punkt geht, also sind in einer Kollineation (S, σ') eine Ebene α und ein Punkt A' konjugiert, von denen das eine Element mit dem singulären seines Raumes inzidiert; folglich belehrt uns der (α, A')-Konnex nur über die singulären Elemente, nicht über die charakteristische Kollineation; er ersetzt uns die ausgeartete Kollineation nicht. Hingegen zwei in (S, S') konjugierte Punkte liegen auf konjugierten Strahlen der charakteristischen Korrelation, also inzidieren bei der Kollineation (S, σ') ein Punkt A und eine konjugierte Ebene α' mit konjugierten Geraden der charakteristischen Kollineation. Daher läßt sich aus dem Konnexe (A, α') die ausgeartete Kollineation (S, σ') herstellen, also aus demjenigen, dessen zugeordnete Elemente A, α' mit den gleichartigen singulären in demselben Raume sich befinden.

Bei der axialen Korrelation (s, s') sind konjugierte Punkte mit entsprechenden Ebenen von (s_b, s_b'), konjugierte Ebenen mit entsprechenden Punkten von (s_r, s_r') inzident; folglich in einer axialen Kollineation konjugierte Elemente A, α' mit entsprechenden Elementen von (s_b, s_r') und konjugierte Elemente α, A' mit entsprechenden Elementen von (s_r, s_b') inzident. Man sieht, der Konnex (A, α') liefert die Projektivität (s_b, s_r') und (α, A') die (s_r, s_b').

14 Paare konjugierter Elemente A, α' liefern ein lineares System 1. Stufe[1]) von (A, α')-Kollineationen, durch zwei von ihnen konstituiert; jedem Punkte A ist eine Gerade konjugiert, auf der alle entsprechenden Punkte A' liegen, und ∞^1 gemeinsam konjugierte Ebenen α' durch sie; einer Ebene α' ebenfalls eine Gerade, durch welche die entsprechenden Ebenen α gehen, und ∞^1 gemeinsam konjugierte Punkte A auf ihr. Solcher gemeinsam konjugierter Ebenen A, α' gibt es ∞^4.

13 Punkte A, α' bestimmen ein lineares System 2. Stufe von (A, α')-Kollineationen; jedem Punkte A ist eine gemeinsam konjugierte Ebene α' zugeordnet, welche durch die drei Punkte bestimmt ist, die in den konstituierenden Kollineationen ihm entsprechen, und die übrigen entsprechenden Punkte trägt, jeder α' ein Punkt A, durch den die entsprechenden Ebenen gehen. Wir erhalten eine eindeutige kubische Verwandtschaft zwischen den Punkten A von Σ und den Ebenen α' von Σ'.

Die drei Konstituenten legen auch ein System 2. Stufe von (α, A')-Kollineationen fest, das auch durch 13 Paare Elemente α, A' bestimmt werden kann; es führt zu einer Verwandtschaft der Ebenen in Σ und der Punkte in Σ'. Wir wollen jedoch diese durch Dualisierung des einen oder andern Raumes sich ergebenden Resultate nicht weiter im einzelnen verfolgen, sondern nur noch erwähnen, daß 10 Paare konjugierter Elemente A, α' ein lineares System 5. Stufe von (A, α')-Kollineationen bestimmen, denen alle 10 weitere Paare solcher konjugierter Elemente gemeinsam sind.

Apolar sind eine (A, α')-Kollineation C und eine (α, A')-Kollineation Γ[2]), wenn ein Tetraeder in Σ' vorhanden ist, von dessen in C und Γ entsprechenden das letztere dem ersteren eingeschrieben ist. Es gibt in jedem der beiden Räume ∞^9 solcher Tetraeder und die entsprechenden der einen oder andern Art gehören dann auch zu den ∞^9 ihres Raumes.

Von zwei Tetraedern $XYZW$ und $X'Y'Z'W'$ (aus diesen Tetraeder-Mannigfaltigkeiten), welche in C entsprechend sind, sind die Ebenen $YZW, \ldots$ den Ecken $X' \ldots$ in Γ konjugiert, und von zwei Tetraedern $X_1Y_1Z_1W_1$ und $X'Y'Z'W'$, die in Γ entsprechend sind, die Ecken $X_1 \ldots$ den Ebenen $Y'Z'W' \ldots$ in C konjugiert.

Zu jedem linearen System i^{ter} Stufe von (A, α')-Kollineationen ist ein lineares System $(14 - i)^{\text{ter}}$ Stufe von (α, A')-Kollineationen apolar.

Jedes gemeinsame Paar A, α' konjugierter Elemente des ersteren

1) Die Ausdrücke „Büschel", „Schar", „büschel-" und „schar-linear" sind hier nicht geeignet.

2) So muß man sagen, da die Unterscheidung durch die Worte „stützen" und „ruhen" versagt.

Systems liefert singuläre Elemente für eine unbestimmte ausgeartete Kollineation des zweiten Systems, und ebenso jedes gemeinsame Paar α, A' konjugierter Elemente des zweiten Systems singuläre Elemente für eine unbestimmte ausgeartete Kollineation im ersten.

751 Legen wir etwa sieben Paare zu grunde:

$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 \dots A_7 \\ \alpha_1' \alpha_2' \dots \alpha_7' \end{vmatrix},$$

so haben wir ein lineares System 8. Stufe von (A, α')-Kollineationen; es enthält 20 Homologien (Nr. 720); wir erweitern es durch Hinzufügung der Identität I zu einem System 9. Stufe, indem wir I mit jeder seiner Kollineationen durch ein lineares System 1. Stufe verbinden. Zu diesem System ist apolar ein System 5. Stufe von (α, A')-Kollineationen; ihnen allen sind gemeinsam 20 Paare konjugierter Elemente α, A', von denen 10 die andern bedingen (Nr. 734). Also haben wir im Systeme 9. Stufe 20 unbestimmte ausgeartete Kollineationen, für welche die Elemente dieser Paare singulär sind. Sei σ, S' ein solches Paar, so heben wir die Unbestimmtheit der betreffenden Ausartung auf, indem wir acht Paare konjugierter Elemente α_1, A_1'; ..., α_8, A_8' hinzufügen, wodurch die charakteristische Kollineation zwischen σ und S' festgelegt wird; wir nehmen diese Elemente so gelegen an, daß die Punkte $(\alpha_1, S'A_1')$, ..., $(\alpha_8, S'A_1')$ alle in σ liegen, dann gehen acht Strahlen von S' durch ihre entsprechenden Punkte in σ; jene Kollineation (σ, S') ist perspektive Lage, und die so bestimmte Ausartung ist eine ausgeartete Homologie (σ, S') (Nr. 698).

Das lineare System 1. Stufe von (A, α')-Kollineationen, welches durch diese Homologie und die Identität I bestimmt wird, besteht aus lauter Homologien. Denn der einem beliebigen Punkt A entsprechende Punkt in der Identität fällt mit ihm zusammen, der ihm in der Homologie (σ, S') entsprechende fällt nach S'; also liegt der in irgend einer der übrigen Kollineationen des Systems entsprechende auf der Verbindungslinie $S'A$; somit liegen immer zwei entsprechende Punkte mit S' in gerader Linie, es handelt sich um eine Homologie mit S' als Zentrum. In I und der Homologie (σ, S') entspricht jeder Punkt von σ sich selbst, also auch in allen andern Kollineationen unseres Systems, σ ist gemeinsame Ebene der Homologie.

Dieses System ist aber eins von denen, durch welche wir das System 9. Stufe aus dem der 8. Stufe fächerförmig erzeugt haben; folglich gehört eine von seinen Homologien diesem letzteren System an. Und wir erkennen den Zusammenhang der beiden Anzahlen 20, der Anzahl der gemeinsamen Paare konjugierter Elemente eines linearen Systems 5. Stufe und der Anzahl der Homologien in dem speziellen Systeme 8. Stufe, das durch sieben (gleichartige) Paare konjugierter Elemente bestimmt ist. Wir erinnern aber (Nr. 720), daß diese letztere Zahl 20 sich nicht ändert, wenn wir in beliebig vielen von den sieben gegebenen Paaren A, α' die Zugehörigkeit zu den Räumen umkehren, sie in Paare α, A' umwandeln, sowie auch, wenn wir sie durch Paare konjugierter Geraden ersetzen. Durch solche gemischten Bedingungen werden aber keine linearen Systeme definiert.

Wir haben hier, wegen der obigen Vergleichung, zunächst ein lineares System 8. Stufe angenommen, das durch sieben Paare konjugierter Elemente A, α bestimmt ist, also ein spezielles und zwar siebenfach spezialisiert, weil ein allgemeines keine gemeinsamen konjugierten Elemente hat. Aber für unseren Schluß auf die 20 Homologien ist diese Voraussetzung nicht notwendig. Wir haben vielmehr:

Jedes lineare System 7. Stufe von (A, α')-Kollineationen (oder von (α', A')-Kollineationen) enthält 20 Homologien. In Nr. 455 konnte eine solche Verallgemeinerung nicht gemacht werden; denn das durch fünf (gleichartige) Paare konjugierter Elemente bestimmte lineare System 3. Stufe von Kollineationen zwischen zwei Feldern ist das allgemeine.

§ 107. Lineare (Reyesche) Systeme projektiver oder kollinearer Gebilde, welche sich stützen.

Solche Systeme haben wir schon mehrere gelegentlich kennen 752
gelernt. Es handelt sich dabei immer um zwei zusammengehörige, die sich stützen, wie z. B. das System 2. Stufe der projektiven Büschel um die Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve und das System 1. Stufe der kollinearen Bündel aus den Punkten der Kurve. Das, was diese beiden Systeme verbindet, ist, daß je die homologen Ebenen der Büschel einen der Bündel und diejenigen der Bündel einen der Büschel bilden. Und das wird durchgehende Eigenschaft aller Paare von sich stützenden Systemen sein. Als Elemente der Gebilde nehmen wir immer Ebenen an; wir haben, ihnen dual gegenüberstehend, Systeme mit Punkten als Elementen. Die Theorie dieser sich stützenden Systeme hat Reye geschaffen[1]); und ich werde mich der Hauptsache nach seiner Darstellung anschließen. Wir nehmen zunächst diejenigen Paare durch, bei denen das eine System aus projektiven Ebenenbüscheln besteht. Indem wir diese Büschel mit u bezeichnen, möge, nach Reyes Vorgang, ein System

1) Journal f. Mathem. Bd. 104 S. 211, Bd. 106 S. 30, 315, Bd. 107 S. 162, Bd. 108 S. 89; Sitzungsber. der Berliner Akademie vom 17. Oktober 1889. Vgl. aber auch die vorangehende Abhandlung von Schur, Math. Annalen Bd. 18 S. 1. Dem Reyeschen Worte „Mannigfaltigkeit“ ziehe ich das kürzere Wort „System“ vor; auch habe ich jenes Wort bisher in etwas anderer Bedeutung gebraucht (= Mannigfaltigkeitsgrad).

i^{ter} Stufe von projektiven Büscheln mit $|u_i|$ bezeichnet werden. Die Attribute „projektiv“ und „kollinear“ sind selbstverständlich, auch wenn sie nicht hinzugefügt werden.

Linear sind diese Systeme, weil ein System i^{ter} Stufe durch $i+1$ konstituierende Gebilde eindeutig bestimmt ist, die höherstufigen Systeme sich fächerförmig aufbauen lassen und infolge dessen (Nr. 665) jedes System niedrigerer Stufe, dessen Konstituenten einem von höherer Stufe angehören, ganz in demselben enthalten ist, also dem Systeme die allgemeinen Eigenschaften der linearen Systeme von Kurven, Flächen usw. zukommen. Von jedem Systeme niedrigerer Stufe, das während der Betrachtung eines höherstufigen erwähnt wird, gilt, daß es ihm angehört.

Man kann die lineare Kongruenz (Strahlennetz) und den linearen Komplex (Gewinde), die 2., 3. Stufe sind, durch Elemente konstituieren und fächerförmig herstellen; aber jene durch $2+2$, diesen durch $3+2$ Strahlen; aus den vier bestimmenden Strahlen g_0, g_1, g_2, g_3 konstruiert man die lineare Kongruenz derartig, daß man g_0 mit einem festen und einem veränderlichen Strahle der Regelschar $(g_1 g_2 g_3)$ durch Regelscharen verbindet, und ähnliches gilt vom linearen Komplexe.[1]

Die fächerförmige Herstellung der linearen Systeme ist anders: ein System i^{ter} Stufe wird durch $i+1$ Elemente konstituiert. Daher kann ich mich nicht zu den Worten „lineare Kongruenz“ und „linearer Komplex“, welche Reye benutzt, „als Notbehelf“, wie er mir schreibt, entschließen; ich werde durchweg „Netz“ und „Gebüsche“ für die 2. und 3. Stufe anwenden, bei der 1. Stufe aber, um Kollision gleicher oder ähnlicher Worte zu vermeiden, außer „Büschel“ auch „Schar“ und „Reihe“.

753 Ehe wir uns zu den räumlichen Gebilden Reyes wenden, mögen analoge Gebilde in der Ebene untersucht werden.[2])

Zwei ineinander liegende kollineare Felder $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1$ haben drei Koinzidenzpunkte F, F', F'', zusammen $(3F)$. Es seien a_0, a_1 entsprechende Geraden und a_2 eine dritte Gerade durch ihren Schnittpunkt, so sei ein drittes Feld $\mathfrak{F}_2$ so kollinear auf $\mathfrak{F}_0$ und damit auch auf $\mathfrak{F}_1$ bezogen, daß die $(3F)$ Koinzidenzpunkte bleiben und a_2 den a_0, a_1 entspricht. Es gehen dann homologe Geraden x_0, x_1, x_2 durchweg durch den nämlichen Punkt. In der Tat, die projektiven Büschel um die entsprechenden Punkte a_0x_0, a_1x_1 erzeugen einen Kegelschnitt, die um a_0x_0 und a_2x_2 einen zweiten. Beide gehen durch $(3F)$, den $a_0a_1 \equiv a_0a_2$ und a_0x_0, fallen also zusammen: in $\mathfrak{K}$, und die zweiten Schnitte von x_0, außer a_0x_0, nämlich x_0x_1 und x_0x_2 tun es auch; d. h. x_0, x_1, x_2 sind konkurrent.

---

1) Liniengeometrie Bd. I Nr. 92, 93.

2) Vgl. Schur, a. a. O.

Ordnen wir immer andere Strahlen aus dem a-Büschel den a_0, a_1, a_2 zu, die $(3F)$ als Koinzidenzpunkte festhaltend, so ergibt sich ein System 1. Stufe kollinearer Felder mit diesen gemeinsamen Koinzidenzpunkten und durchweg konkurrenten entsprechenden Geraden. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ lehrt, daß zwei beliebige dieser Büschel konkurrenter homologen Strahlen projektiv sind und daher alle: mit solchen Strahlen als entsprechenden, welche dem nämlichen Felde angehören.

Wir haben die Reihe kollinearer Felder $|\mathfrak{F}_1|$ und ein Netz projektiver Strahlenbüschel, welche sich stützen.

Jeder Punkt der Ebene, Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen aus $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, trägt einen Büschel des Netzes.

Die Reihe kollinearer Ebenenbündel und das Netz projektiver Ebenenbüschel, die zu einer kubischen Raumkurve gehören, geben, mit einer Ebene geschnitten, zwei solche Systeme.

Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ durch die $(3F)$ enthält die drei homologen Punkte a_0x_0, a_1x_1, a_2x_2 aus $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ und, schon durch $(3F)$, a_0x_0, a_1x_1 bestimmt, alle weiteren entsprechenden Punkte aus den anderen Feldern.

Homologe Punkte aus den Feldern von $|\mathfrak{F}_1|$ bilden also einen Kegelschnitt, der durch $(3F)$ geht und zugleich der Ort der Konkurrenzpunkte entsprechender Strahlen aus den projektiven Büscheln um diese homologen Punkte ist.

Jeder Kegelschnitt durch $(3F)$ ist ein solcher Ort; denn als Kegelschnitt von $\mathfrak{F}_0$ geht er in einen Kegelschnitt von $\mathfrak{F}_1$ über, der ebenfalls durch $(3F)$ geht; sei X_1 der vierte Schnitt und X_0 der entsprechende in $\mathfrak{F}_0$, so hat er mit dem Kegelschnitte der $X_0, X_1, X_2, ..$ die fünf Punkte $(3F)$, X_0, X_1 gemeinsam.

Die drei Koinzidenzpunkte $(3F)$ legen die beiden Systeme vollständig und eindeutig fest; die Strahlen eines Büschels, den verschiedenen Feldern als entsprechend zugewiesen, determinieren die Kollineation zwischen je zweien, neben den $(3F)$, eindeutig. Andererseits ist auch die Projektivität der Büschel des sich stützenden Netzes (aus jedem Punkte der Ebene einer) durch die $(3F)$ festgelegt.

Wegen der $\infty^{2 \cdot 3}$ Tripel $(3F)$ haben wir also ∞^6 solche sich stützenden Systeme in der Ebene; dies folgt auch daraus, daß es zwischen $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$ ∞^8 Kollineationen gibt, die Reihe aber beliebige zwei ihrer Felder zu konstituierenden haben kann.

Die Eigenschaft eines Systems von ∞^1 kollinearen Feldern einer Ebene, daß entsprechende Geraden immer einen Büschel bilden, hat die andere Eigenschaft, daß die Koinzidenzpunkte gemeinsam sind, zur Folge und bedingt, daß jene Felder eine Reihe bilden. Denn ist F Koinzidenzpunkt von $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, zwei Feldern des Systems, sind ferner x_0, y_0 zwei Geraden von $\mathfrak{F}_0$ durch ihn, so gehen die entsprechenden x_1, y_1 aus $\mathfrak{F}_1$ auch durch ihn und wegen der Voraussetzung auch $x_2, y_2; \ldots$ in den übrigen Feldern $\mathfrak{F}_2, \ldots$, da er ja $x_0 x_1$, $y_0 y_1$ ist. Es decken sich also in ihm die homologen Punkte $x_0 y_0, x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots$

Der Strahl $\bar{a}$ des a-Büschels gehe durch einen der Koinzidenzpunkte F, so entsteht in der Reihe ein Feld $\bar{\mathfrak{F}}$, das zu jedem andern, etwa $\mathfrak{F}_0$, in ausgearteter Kollineation sich befindet. Denn sind f, f', f'' die Gegenseiten der $F, \ldots$ im Koinzidenzdreiecke, so liegt die Kollineation:

$$\begin{vmatrix} f f' f'' \bar{a} \\ f f' f'' a_0 \end{vmatrix}$$

zwischen $\bar{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{F}_0$ vor, in der den drei durch F gehenden Geraden f' f'', $\bar{a}$ drei nicht konkurrente Geraden f', f'', a_0 zugeordnet sind; also ist sie ausgeartet und hat jenen Punkt F in $\bar{\mathfrak{F}}$ zum singulären Punkte und f in $\mathfrak{F}_0$ zur singulären Gerade; die charakteristische Projektivität ist:

$$F(f', f'', \bar{a}) \;\overline{\wedge}\; f(f', f'', a_0).$$

Das Feld $\bar{\mathfrak{F}}$, in welchem es im Grunde nur auf die Strahlen des Büschels F ankommt, ist — mit Reyes Ausdruck — ein reduziertes Feld, und die Reihe hat deren drei.

Dual zu einer derartigen Reihe ist diejenige kollinearer Felder mit gemeinsamem Koinzidenzdreiecke, bei denen homologe Punkte durchweg in gerader Linie liegen.

754 Aus drei ineinander liegenden (nicht zur nämlichen Reihe gehörigen) kollinearen Feldern $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ bauen wir, eins von ihnen $\mathfrak{F}_0$ durch Reihen mit den Feldern der Reihe $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ verbindend, also fächerförmig, ein Netz $|\mathfrak{F}_2|$ kollinearer Felder auf. Wir wissen (Nr. 665, 666), daß beliebige drei (unabhängige) Felder des Netzes als Konstituenten dienen können, daß die Reihe, welche zwei Felder des Netzes verbindet, ihm ganz angehört, das Netz ∞^2 Reihen enthält und je zwei ein Feld gemeinsam haben.

Auf einer Gerade l gibt es drei Punkte, in welche homologe Geraden aus $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ zusammenkommen. Denn (vgl. Nr. 377) dem Büschel um einen Punkt X_0 auf ihr aus $\mathfrak{F}_0$ korrespondieren zwei Büschel in $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$, deren Erzeugnis die l in zwei Punkten X_{12} schneidet, und in einem Punkte X_{12} von l schneiden sich zwei entsprechende Strahlen aus $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$: sie gehen nach den ihm als Punkt von $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_1$ entsprechenden Punkten von $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$; und der ihnen in $\mathfrak{F}_0$ korrespondierende Strahl schneidet l in X_0. Die drei Koinzidenzen dieser Korrespondenz $[1, 2]$ sind die auf l gelegenen Konkurrenzpunkte. Der fächerförmige Aufbau des Netzes aus $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ beweist dann, daß durch einen solchen Punkt die entsprechenden Geraden aus allen Feldern des Netzes laufen.

Das Netz führt also zu einer Kurve 3. Ordnung C^3, in deren Punkte homologe Strahlen aus allen seinen Feldern zusammenkommen: seiner Kernkurve.

In jedem Felde des Netzes umhüllen diese Strahlen eine Kurve 3. Klasse; denn drei projektive Büschel haben drei Tripel konkurrenter entsprechenden Strahlen.

Die Koinzidenzpunkte der Reihen des Netzes liegen auf der Kernkurve. Denn ist F ein solcher Koinzidenzpunkt, und sind $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1$ zwei Felder der Reihe, $\mathfrak{F}_2$ ein drittes aus dem Netz, so geht von dem Büschel dieses Feldes, der den beiden projektiven Büscheln jener um F korrespondiert, ein Strahl durch ihn und trifft sich mit den entsprechenden.

Jeder Punkt von C^3 ist ∞^1-mal Koinzidenzpunkt. Jeder Strahl nämlich, der mit seinen homologen in einen Punkt von C^3 zusammenläuft, ist sich selbst entsprechend in ∞^1 Feldern des Netzes, die dann eine Reihe bilden, die durch irgend zwei dieser Felder konstituierte; befände sich eins von jenen Feldern außerhalb dieser Reihe, so würde die Gerade allen Feldern des Netzes entsprechend gemeinsam sein. Die beiden Koinzidenzpunkte auf dieser Koinzidenzgerade der Reihe sind die beiden weiteren Schnitte mit C^3, und so wird jeder Punkt von C^3 bei jedem andern Punkte als Konkurrenzpunkt Koinzidenzpunkt einer Reihe. Er gehört zu ∞^1 Tripeln $(3F)$.

Durch jeden Punkt der C^3, als Konkurrenzpunkt, wird das Netz fächerförmig in Reihen zerlegt.

Die Verbindunglinien der einen Punkt F zu Tripeln ergänzenden Punkte F', F'' gehen durch denselben Punkt von C^3.

Jede solche Verbindungslinie f, sich selbst entsprechend in allen Feldern einer Reihe $|\mathfrak{F}_1|$ von $|\mathfrak{F}_2|$, ist eine Gerade, die mit den entsprechenden konkurrent ist, denn zwei Felder der Reihe und ein drittes außerhalb geben drei konkurrente entsprechende Geraden, von denen zwei in f vereinigt sind. Jetzt sei f_1 eine zweite derartige Gerade, $|\mathfrak{F}_1|_1$ die zugehörige Reihe und $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1$ beliebige Felder aus $|\mathfrak{F}_1|$ und $|\mathfrak{F}_1|_1$, so bewirkt die ausgeartete Kollineation zwischen dem reduzierten Felde (F) und $\mathfrak{F}$, mit den singulären Elementen F, f, durch die allgemeine Kollineation, welche $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{F}_1$ überführt, eine ausgeartete zwischen (F) und $\mathfrak{F}_1$ mit den singulären Elementen F und f_1; d. h. in der Kollineation $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1)$ sind f und f_1 homolog und f_1 geht durch den Punkt G auf C^3, in den f und die homologen Geraden zusammenlaufen, den dritten Schnitt von f, der so dritter Schnitt aller dieser Verbindungslinien wird.

Homologe Geraden, aus den Feldern von $|\mathfrak{F}_2|$ genommen, bilden ein neues Feld. Es sei x_0 aus $\mathfrak{F}_0$ genommen und x eine beliebige Gerade der Ebene; die zu x_0 homologen Geraden der Felder der Reihe $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ bilden einen Büschel, also geht eine x' durch den

Schnitt $x_0 x$; sie gehöre zum Felde $\mathfrak{F}'$ der Reihe; weil nun wieder x dem Büschel $x' x_0$ angehört, so gibt es in der Reihe $\mathfrak{F}_0 \mathfrak{F}'$, einer der erzeugenden Reihen des Netzes, ein Feld $\mathfrak{F}$, in welchem x der x_0 und x' korrespondiert.

Jede Gerade der Ebene gehört daher einfach zu dem Felde $\mathfrak{G}_x$ der homologen Geraden $x_0, x' \ldots$. Ist y_0 eine zweite Gerade aus $\mathfrak{F}_0$, so bilden sie und ihre homologen Geraden ein zweites Feld $\mathfrak{G}_y$; der x, von $\mathfrak{G}_x$, aus dem Felde $\mathfrak{F}$ stammend, ist in $\mathfrak{G}_y$ die aus demselben Felde $\mathfrak{F}$ stammende y zugeordnet, und umgekehrt. Der x_0 sind homolog in den Feldern einer Reihe von $|\mathfrak{F}_2|$ die Strahlen eines Büschels, ebenso der y_0; also entspricht einem Büschel von $\mathfrak{G}_x$ ein Büschel von $\mathfrak{G}_y$. Je zwei dieser ∞^2 Felder $\mathfrak{G}$ sind also kollinear.

Durchläuft x_0 in $\mathfrak{F}_0$ einen Büschel, so tut es die homologe Gerade in den andern $\mathfrak{F}$ ebenfalls; folglich ist das System der zugehörigen $\mathfrak{G}$ so beschaffen, daß entsprechende Geraden (je aus demselben $\mathfrak{F}$) einen Büschel bilden. Dies bedeutet, daß diese $\mathfrak{G}$ eine Reihe bilden.

Jeder Büschel in $\mathfrak{F}_0$ führt also zu einer Reihe von Feldern $\mathfrak{G}$, zwei Büschel zu zwei Reihen mit einem gemeinsamen Felde, vom gemeinsamen Strahle der Büschel stammend. Daraus erhellt, daß, wenn $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}$ vier dieser Felder sind, und $\mathfrak{G}'$ den Reihen $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ gemeinsam ist, $\mathfrak{G}$ zu einer der Reihen aus $\mathfrak{G}_0$ nach den Feldern von $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ gehört, also die $\mathfrak{G}$ ein Netz bilden. Und wir haben zwei sich stützende Netze $|\mathfrak{F}_2|$, $|\mathfrak{G}_2|$ von kollinearen Feldern erhalten. Entsprechende Geraden aus den Feldern des einen Netzes bilden ein Feld des andern. Aus dem zweiten kennen wir schon die ∞^1 reduzierten Felder um die Punkte G der Kernkurve C^3 des ersten Netzes, je bestehend aus den Strahlen eines Büschels, jeder allen Feldern einer Reihe aus $|\mathfrak{F}_2|$ entsprechend gemeinsam, mit festem allen diesen Koinzidenzgeraden gegenüberliegenden Koinzidenzpunkt F.

Ingleichen enthält $|\mathfrak{F}_2|$ ∞^1 reduzierte Felder, deren Scheitel auf der Kernkurve von $|\mathfrak{G}_2|$ liegen. Aber wir haben ja auch reduzierte Felder aus $|\mathfrak{F}_2|$ mit Scheiteln auf dessen Kernkurve kennen gelernt. Die beiden Kernkurven sind identisch.

In der Tat, es sei G ein Punkt von C^3 und (G) das reduzierte Feld aus $|\mathfrak{G}_2|$, das ihn zum Scheitel hat, $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1$ zwei andere Felder aus diesem Netze, die nicht mit (G) zur nämlichen Reihe gehören. Die beiden in G sich schneidenden homologen Geraden aus ihnen treffen sich in G mit der homologen Gerade aus (G), wodurch dieser Punkt auf die Kernkurve von $|\mathfrak{G}_2|$ kommt.

Die gemeinsame Kernkurve C^3 der beiden sich stützenden Netze $|\mathfrak{F}_2|$ und $|\mathfrak{G}_2|$ trägt daher, wie schon die Tripel

$(3F)$ der Reihen von $|\mathfrak{F}_2|$, auch diejenigen $(3G)$ der Reihen von $|\mathfrak{G}_2|$.

Zwei Punkte F oder G der Kurve C^3 bestimmen eindeutig den dritten F, bzw. G; denn sie bestimmen zwei reduzierte Felder aus $|\mathfrak{F}_2|$, $|\mathfrak{G}_2|$ und die Reihe.

Zwei Tripel $(3F)$ und $(3G)$ aus verschiedenen Systemen liegen stets auf einem Kegelschnitte und sind dessen Schnittpunkte mit C^3.

Es seien $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$ zwei Felder der Reihe $|\mathfrak{F}_1|$, zu welcher $(3F)$ gehört; weil die drei reduzierten Felder von $|\mathfrak{G}_2$ um die Punkte von $(3G)$ in der nämlichen Reihe sich befinden, so kommen aus $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}_1$ je drei Strahlen eines Büschels nach ihnen: um X_0, X_1. In den projektiven Büscheln um diese Punkte aus $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$ sind daher diese Strahlen entsprechend, aber auch die nach den Koinzidenzpunkten $(3F)$; folglich liegen alle sechs auf einem Kegelschnitt.

Der durch $(3F)$ und zwei Punkte G von C^3 gehende Kegelschnitt schneidet zum sechsten Male im dritten Tripelpunkt zu diesen G; also schneiden die Kegelschnitte durch ein festes $(3F)$ oder $(3G)$ alle $(3G)$ oder $(3F)$ aus.

Wenn ein Tripel $(3F)$ mit einem $(3G)$ identisch ist, so ist jedes der einen Art mit einem der andern identisch; denn jeder durch jenes Tripel gelegte Kegelschnitt schneidet aus C^3 ein zweites Tripel, das sowohl zum ersten als zum zweiten Systeme gehört.

Alle Paare F', F'', die einen festen F zu Tripeln ergänzen, liegen auf Geraden durch einen festen Punkt G von C^3; wenn G', G'' den G ergänzen, so ist das Geradenpaar $(F'F''G, G'G'')$ ein Kegelschnitt durch fünf dieser Punkte, also liegt F auf $G'G''$; alle $G'G''$ gehen daher durch F; die beiden Punkte F, G haben reziprokes Verhalten und legen auf C^3 eine eindeutige Korrespondenz fest, die jedoch nicht involutorisch ist, weil G aus F durch das Netz $|\mathfrak{F}_2|$, F aus G durch $|\mathfrak{G}_2|$ sich ergibt.

Da auf $\mathfrak{F}_0$ auf $\infty^{2 \cdot 8}$ Weisen zwei andere Felder $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ kollinear bezogen werden können, andererseits aber das Netz $\mathfrak{F}_0\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ auf ∞^6 Weisen konstituiert werden kann, so gibt es ∞^{10} Netze kollinearer Felder in der Ebene; demnach müssen auf jede gegebene Kurve 3. Ordnung C^3, weil es deren ∞^9 gibt, ∞^{10-9} solche Netze oder vielmehr Paare sich stützender Netze kommen, deren gemeinsame Kernkurve sie ist. Wir werden später erkennen, daß ∞^1 eindeutige Korrespondenzen auf einer C^3 möglich sind. Zwei beliebige Punkte F, G auf einer C^3 determinieren ein Netzepaar, in dessen Korrespondenz sie entsprechend sind. Die Strahlen aus G mit ihren weiteren Schnitten F', F'' legen je eine Reihe mit dem Tripel $FF'F''$ fest; alle diese Reihen haben das reduzierte Feld (F) gemeinsam und bilden das Netz $|\mathfrak{F}_2|$.

Man kann auch sagen, daß ein Tripel $FF'F''$ auf C^3 die Figur festlegt; denn $F'F''$ bestimmt in dem dritten Schnitt G den zugeordneten von F.

755 Wenn ein Netz $\mathfrak{N}$ von Kegelschnitten vorliegt, so ergeben sich zwei sich stützende Netze von kollinearen Feldern: die Felder des einen Netzes $|\mathfrak{F}_2|$ bestehen aus den Polaren der Punkte der Ebene je in bezug auf einen Kegelschnitt von $\mathfrak{N}$, die des andern $|\mathfrak{G}_2|$ aus den Polaren je eines festen Punktes der Ebene in bezug auf sämtliche Kurven von $\mathfrak{N}$. Entsprechend sind in jenen Feldern die Polaren desselben Punktes, in diesen die Polaren in bezug auf dieselbe Kurve. Jeder Büschel in $\mathfrak{N}$ führt zu einer Reihe von Feldern des ersten Netzes: das Koinzidenzdreieck ist das gemeinsame Polardreieck. Die Ecken dieser ∞^2 Polardreiecke erfüllen die Jacobische Kurve 3. Ordnung des Netzes $\mathfrak{N}$, insofern sie ja Doppelpunkte von Geradenpaaren des Netzes sind (Nr. 687). Sie wird also die Kernkurve C^3 von $|\mathfrak{F}_2|$. Reduzierte Felder in diesem Netze sind die Polarfelder in bezug auf die Geradenpaare von $\mathfrak{N}$. Die Jacobische Kurve ist ferner erfüllt von involutorisch zugeordneten Punkten, derartig, daß die Polaren eines jeden der beiden Punkte in bezug auf die Kegelschnitte von $\mathfrak{N}$ sich auf einen Büschel reduzieren: mit dem Scheitel im andern Punkte. Insofern sie Ort dieser Scheitel ist, erweist sich die Kurve als Kernkurve von $|\mathfrak{G}_2|$. Solche Punkte sind konjugiert in bezug auf $\mathfrak{N}$.

Zu den Ecken des Polardreiecks $FF'F''$ eines Büschels aus $\mathfrak{N}$ sind konjugiert die dritten Schnitte je der Gegenseite, indem in dieser sich die Polaren in bezug auf zwei Kegelschnitte des Büschels vereinigen und im genannten Punkte mit der Polare in bezug auf irgend einen dritten Kegelschnitt des Netzes konkurrieren. Bezüglich dieses Kegelschnitts bilden die drei Polaren das polare Dreiseit zu $FF'F''$, das also zu ihm perspektiv liegt; d. h. die drei konjugierten Punkte G, G', G'' zu F, F', F'', die dritten Schnitte von $F'F'', \ldots$ liegen in gerader Linie. Und umgekehrt, zu drei Punkten G, G', G'' von C^3 in gerader Linie sind konjugiert, in bezug auf $\mathfrak{N}$, die drei Ecken des Polardreiecks eines Büschels aus $\mathfrak{N}$. Denn die konjugierten F, F' zu G, G' und die ihnen zugehörigen Geradenpaare bestimmen den Büschel und die dritte Ecke F'' des Polardreiecks, deren konjugierter Punkt der dritte Schnitt G'' von GG' sein muß.

Zu einer Reihe von $|\mathfrak{G}_2|$ gelangt man durch jede gerade Polreihe l, denn sie führt zu Büscheln entsprechender (demselben Kegelschnitt von $\mathfrak{N}$ zugehöriger) Polaren. In bezug auf die drei Geradenpaare aus $\mathfrak{N}$, deren Doppelpunkte G, G', G'' auf l liegen, haben alle Punkte von l je die nämliche Polare; diese Polaren bilden also das Koinzidenzdreiseit der Reihe. Die konjugierten Punkte F, F', F'' bilden, wie wir eben fanden, ein Tripel von $|\mathfrak{F}_2|$. Die gemeinsame

Polare von G', G'' in bezug auf das Geradenpaar (G), eine Seite unseres jetzigen Tripeldreiecks von $|\mathfrak{G}_2|$, muß durch die konjugierten Punkte F', F'' gehen und ist damit auch Seite von $FF'F''$. Also ist jedes Tripel von $|\mathfrak{G}_2|$ auch ein Tripel von $|\mathfrak{F}_2|$, und umgekehrt, da ja $FF'F''$ zur geraden Linie $GG'G''$ führt.

Im vorliegenden Falle haben also die beiden sich stützenden Netze $|\mathfrak{F}_2|$ und $|\mathfrak{G}_2|$ dasselbe Tripelsystem: jedes Tripel des einen ist ein Tripel des andern, und in den Punkten eines Tripels wird die Kernkurve C^3, die Jacobische Kurve von $\mathfrak{N}$, von einem Kegelschnitte berührt.

Aus der Identität der Tripelsysteme folgt die Identität der beiden Netze. Denn die zu einem Tripel $(3F) \equiv (3G)$ gehörigen Reihen aus den beiden Netzen sind identisch (Nr. 753). Drei Tripel liefern drei identische Reihen; die drei Felder, in denen sie sich schneiden, sind Konstituenten des einen wie des andern Netzes; diese sind also identisch.

Daß es sich dabei stets um die beiden zu einem Kegelschnitt-Netze gehörigen Netze von Polaren handelt, soll später erörtert werden.

Der einfachste Fall sich stützender Systeme von Ebenengebilden, der von zwei sich stützenden Scharen $|u_1|$, $|v_1|$ projektiver Ebenenbüschel um die Geraden zweier verbundener Regelscharen, von denen jede das Erzeugnis irgend zweier Büschel um Geraden der andern Schar ist, ist in Nr. 95 besprochen. Die Fläche F^2, welche beide Regelscharen trägt, möge, wie bisher, Trägerfläche heißen (bei Reye Ordnungsfläche). Wir haben uns noch über einige Ausartungen zu äußern. 756

Wenn die konstituierenden Büschel u_0, u_1 von $|u_1|$ einen Punkt S gemeinsam haben, so wird F^2 ein Kegel, und $|v_1|$ wird mit $|u_1|$ identisch.

Werden aber u_0 und u_1 perspektiv, so daß die gemeinsame Ebene π sich selbst entspricht, so trennen sich $|u_1|$ und $|v_1|$ wieder. Erzeugnis von u_0 und u_1 ist dann ein Strahlenbüschel (S, θ) und F^2 ist das Ebenenpaar $\pi\theta$. Die Schar $|u_1|$ wird durch die Büschel um die weiteren Strahlen von (S, π) vervollständigt, wobei je nach demselben Strahle von (S, θ) homologe Ebenen gehen. Die Büschel von $|v_1|$ kommen von den Strahlen des (S, θ) und projizieren (S, π).

Jede der Scharen hat einen ausgezeichneten Büschel. Wird (S, θ) aus dem gemeinsamen Strahle $\bar{u} = \pi\theta$ projiziert, so fallen alle Ebenen in θ zusammen, und wir erhalten in $|u_1|$ einen Büschel, der sich auf die Ebene θ reduziert, mit jedem Strahle von (S, θ) als Axe, wodurch der 2. Grad der Axen-Regelschar erhalten bleibt. Wir wollen das Wort „reduziert“ behalten, weil es den allgemeinen Fall ausdrückt; aber (S, θ) enthält einen Strahl, nämlich $\bar{u}$ selbst, dessen Projektion den ganzen Büschel um $\bar{u}$ liefert; und die Projektivität zwischen diesem Büschel $\bar{u}$ von $|u_1|$ und irgend einem andern ist ausgeartet: mit der Ebene θ in jenem und der π in diesem als singulärer Ebene, der je alle Ebenen des andern Büschels korrespondieren. Die Schar $|v_1|$ hat den Büschel, der sich auf π reduziert; sind ja doch in dieser Ebene homologe Ebenen aus alleu Büscheln von $|u_1|$ vereinigt.

Ein wichtiger Spezialfall ist, daß die konstituierenden Büschel eine gemeinsame Axe haben, also konjektiv sind. Erzeugnis ist das Paar der Koinzidenzebenen; die übrigen Büschel von $|u_1|$ haben ebenfalls diese Axe und die genannten Ebenen sind allen entsprechend gemeinsam; $|v_1|$ hat sich hier wiederum mit $|u_1|$ vereinigt.

Im allgemeinen Falle, wo jeder Büschel einer Schar seine besondere Axe hat, führen die ∞^1 projektiven Büschel zu ∞^2 Projektivitäten zwischen je zweien. Im jetzigen Falle bestehen nur ∞^1, weil neben den festen Koinzidenzebenen nur ein Paar entsprechender Ebenen verfügbar ist, irgend einer (festgehaltenen) Ebene alle übrigen aus dem Büschel zugeordnet werden können.

757 Das System 2. Stufe $|u_2|$ ist durch drei (unabhängige, d. h. nicht zu derselben Schar gehörige) projektive Ebenenbüschel u_0, u_1, u_2 festgelegt. Sie erzeugen eine kubische Raumkurve r^3, für welche die drei Axen Doppelsekanten sind; die übrigen Doppelsekanten führen dann zu den weiteren Büscheln von $|u_2|$, und homologe Ebenen in allen gehen je nach demselben Punkte der Kurve; wodurch die Bündel $O_0, O_1, \ldots$ der sich auf $|u_2|$ stützenden Reihe $|O_1|$ kollinearer Bündel entstehen, in denen entsprechende Ebenen nach derselben Doppelsekante von r^3 gehen (Nr. 371).

Es wurde schon erwähnt, daß ein ebener Schnitt zu der Figur von Nr. 753 führt. Ist u ein beliebiger Büschel von $|u_2|$, so bestimmen sowohl u_1 und u_2, als u_0 und u eine Schar, deren Axen eine Sehnen-Regelschar bilden; diese Regelscharen haben eine Gerade gemein: den Restschnitt der Trägerflächen, außer r^3; also haben die beiden Scharen einen Büschel gemeinsam, oder u befindet sich in einer der Scharen, die von u_0 nach den Büscheln von $u_1 u_2$ gehen; das System $|u_2|$ ist fächerförmig aus den drei Konstituenten u_0, u_1, u_2 abgeleitet und kann Netz genannt werden.

Die Axen homologer Ebenenbüschel oder, einfacher, homologe Geraden aus den kollinearen Bündeln von $|O_1|$ bilden eine Regelschar einfacher Sekanten von r^3 (Nr. 371), deren verbundene Regelschar von Doppelsekanten die sich auf jene Büschel stützenden Büschel trägt.

Also bilden je die homologen Büschel der Bündel von $|O_1|$ eine Schar von Ebenenbüscheln; auf sie stützt sich eine Schar von $|u_2|$; und umgekehrt.

Wir können auch von zwei Bündeln von $|O_1|$ ausgehen, sie erzeugen die r^3, welche dann die übrigen Bündel von O_1 und das Netz $|u_2|$ liefert.

Die Kurve r^3 soll die Trägerkurve (Ordnungskurve) von $|u_2|$ und $|O_1|$ heißen.

Die Axen von u_0, u_1, u_2 mögen in einen Punkt S zusammenlaufen; die Trägerflächen aller im Netze enthaltenen Scharen sind Kegel, alle Axen von $|u_2|$ gehen durch S.

Dreimal laufen aus den drei Büscheln u_0, u_1, u_2 homologe Ebenen in eine Gerade zusammen: d, d', d'', und die in den andern Büscheln von $|u_2|$ tuen es dann auch. Die drei Geraden bilden die Trägerkurve: Doppelsekanten sind die Geraden durch S und in den drei Verbindungsebenen. Durch diese drei Geraden ist also die Projektivität aller Büschel von $|u_2|$ festgelegt; diejenige zwischen dem Büschel um eine Axe in $d'd''$ und einem anderen u ist ausgeartet, so, daß in jenem die Ebene $d'd''$, in diesem die Ebene nach d singulär ist und jener als auf die Ebene $d'd''$ reduziert bezeichnet werden kann. Damit werden die Ebenen $d'd''$, $d''d$, dd' sich selbst homolog in allen Bündeln von $|O_1|$ und diese konzentrisch: mit dem gemeinsamen Scheitel S; also sind auch die drei Geraden d sich selbst entsprechend. Für jede von ihnen wird die Projektivität zu u unbestimmt; d. h. sie trägt eine Schar von Büscheln aus $|u_2|$.

Die Reihe $|O_1|$ besteht aus solchen konzentrischen kollinearen Bündeln mit festen Koinzidenzelementen: d, d', d'' und ihren Verbindungsebenen, deren entsprechende Ebenen je einen Büschel bilden; das ist die Bündelfigur, deren entsprechende ebene Figur wir in Nr. 753 kennen gelernt haben.

In dieser Reihe stellen, weil eben nach d, d', d'' homologe Ebenen aus den Büscheln von $|u_2|$ gehen, die Büschel um diese Geraden reduzierte Bündel dar; d. h. die Kollineation zwischen einem dieser „Bündel", etwa d, und einem andern $\overline{O}$ von $|O_1|$ ist ausgeartet, und die d ist in jenem singuläre Axe, in diesem die Verbindungsebene $d'd''$ singuläre Ebene; sie entspricht sich selbst, nicht einer Ebene durch jene.

Die Büschel von $|u_2|$, deren Axen in einer Ebene π durch d liegen, sind perspektiv und erzeugen einen Strahlenbüschel (aus S), der in der Ebene $d'd''$ liegt, weil unter jenen Büscheln sich der auf die Ebene $d'd''$ reduzierte Büschel befindet; oder weil nach d', d'', $(\pi, d'd'')$ immer entsprechende Ebenen gehen. Die zu einem bestimmten Bündel $\overline{O}$ gehörigen Ebenen der Büschel gehen durch einen bestimmten Strahl dieses Perspektivitäts-Büschels. Also einer Ebene durch die singuläre Axe d des reduzierten Büschels (d) entspricht in $\overline{O}$ ein ganzer Büschel um eine Gerade von $d'd''$. Dadurch erweist sich diese Ebene auch als singuläre Ebene in $\overline{O}$ für die ausgeartete Kollineation zwischen (d) und $\overline{O}$.

Wenn die Axen von u_0, u_1, u_2 in einer Ebene π liegen und diese sich selbst in den Büscheln entspricht, so ist Erzeugnis eine Gerade r, die Perspektivitätsaxe, die Schnittlinie der Ebenen der drei Perspektivitäts-Strahlenbüschel von u_0 und u_1, u_0 und u_2, u_1 und u_2.

Die weiteren Geraden von π tragen die übrigen Büschel von $|u_2|$ und homologe Ebenen gehen je nach demselben Punkte von r; die Geraden in π, welche r treffen, tragen Büschel, die sich auf die Ebene nach r reduziert haben.

Die sich stützenden kollinearen Bündel kommen von den Punkten von r und homologe Ebenen gehen je nach derselben Gerade von π, einer Büschelaxe von $|u_2|$; die Bündel sind also in perspektiver Lage, r und alle Ebenen durch sie sind sich selbst entsprechend, woraus ja auch wiederum folgt, daß sie reduzierte Büschel von $|u_2|$ darstellen.

Wenn zwei kollineare Bündel eine Ebene π entsprechend gemein haben, so zerfällt (Nr. 375) die erzeugte Kurve r^3 in einen Kegelschnitt r^2, der in π liegt und durch die Scheitel geht, und eine ihn — in Q — treffende Gerade r. Die Scheitel der Bündel der Reihe $|O_1|$ erfüllen den Kegelschnitt, und homologe Ebenen gehen nach Doppelsekanten von (r^2, r), die auf beide Teile sich stützen. Das sind die Axen der Büschel von $|u_2|$, und entsprechende Ebenen in diesen haben den zweiten Schnitt mit r^2 gemeinsam.

Der Bündel Q artet in den Büschel r aus, jede von seinen Ebenen ist ∞^1 Büscheln von $|u_2|$ entsprechend gemein. Ebenso reduzieren diejenigen Büschel von $|u_2|$, deren Axen die r in Q treffen, also in π fallen, sich auf diese Ebene, die ja allen Bündeln von $|O_1|$ entsprechend gemeinsam ist.

Zwei Bündel mit Scheiteln, die bzw. auf r^2 und r liegen, stehen in ausgearteter Kollineation, wobei π und r die singulären Büschel tragen und die charakteristische Projektivität zwischen ihnen durch r^2 vermittelt wird.

758 Der tetraedale Komplex T hat uns zu folgenden Ergebnissen geführt (§ 74).

Er entsteht durch die Schnittlinien homologer Ebenen zweier kollinearer Räume, welche sich dann zu einem Büschel $|\Sigma_1|$ kollinearer Räume erweitern derartig, daß in jeden Strahl u des Komplexes aus allen diesen Räumen entsprechende Ebenen zusammenkommen.

Die Komplexstrahlen tragen andererseits projektive Büschel u, in denen je die zum nämlichen Raum Σ gehörigen Ebenen entsprechend sind. Die Ecken T, U, V, W des Tetraeders des Komplexes sind sich selbst entsprechend in allen Räumen von $|\Sigma_1|$; nach ihnen gehen homologe Ebenen aus den Büscheln u. Damit werden sie Scheitel von Bündeln, auf welche sich vier Räume des Büschels reduziert haben, oder genauer, im Büschel $|\Sigma_1|$ gibt es vier ausgezeichnete Räume $\Sigma_T, \ldots$, die zu irgend einem anderen Raume des Büschels in ausgearteter Kollineation stehen: wobei die Ecke $T, \ldots$ den singulären Bündel jenes Raumes und die Gegenebene des Tetraeders das singuläre Feld des andern trägt (Nr. 703).

Wir haben uns schon in Nr. 497 überzeugt, daß das System 3. Stufe $|u_3|$ der projektiven Büschel u aus vier (unabhängigen) seiner Büschel, u_0, u_1, u_2, u_3, fächerförmig hergestellt werden kann, d. h. durch die Scharen, die von u_0 nach den Büscheln des Netzes $(u_1 u_2 u_3)$ gehen. Es ist also linear und heiße deshalb Gebüsche projektiver Ebenenbüschel (bei Reye: linearer Komplex).

Wie die vier Punkte $T, \ldots$, nach denen aus allen Büscheln von $|u_3|$ homologe Ebenen laufen, aus den vier konstituierenden Büscheln sich ergeben, ist in Nr. 497 gezeigt.

Dual führt der tetraedale Komplex zu einer Schar kollinearer Punkträume und zu einem linearen Systeme 3. Stufe von projektiven Punktreihen, welche je durch entsprechende Punkte aus jenen Räumen gebildet werden und in denen die Schnitte mit den Tetraederebenen — deren Felder reduzierte Räume sind — homolog sind. Sie werden gleichfalls von den Strahlen des Komplexes getragen, und homologe Punkte auf ihnen gehören je demselben Raume an.

Alle Ebenenbüschel aus $|u_3|$ sind zu allen diesen Punktreihen projektiv, wobei die mit Ecke und Gegenebene des Tetraeders inzidierenden Ebenen und Punkte homolog sind; und ein Ebenenbüschel und eine Punktreihe, die von verschiedenen Komplexstrahlen getragen werden, befinden sich in involutorischer Lage (Nr. 495).

Die allgemeinen Sätze über lineare Systeme (Nr. 666) liefern: Das Gebüsche $|u_3|$ enthält ∞^4 Scharen und ∞^3 Netze. Innerhalb $|u_3|$ gehen durch jeden einzelnen Büschel u ∞^2 Scharen und ∞^2 Netze, durch jede Schar ∞^1 Netze. Die Axen der Büschel einer Schar von $|u_3|$ bilden eine der Regelscharen ρ_1 des Komplexes T (Nr. 491), welche hier, wo von den ρ_2 nicht die Rede sein wird, ρ oder, um den Grad zu kennzeichnen, ρ^2 genannt werden sollen. Eine solche Regelschar — deren wir ja ∞^4 fanden — wird durch zwei entsprechende Ebenenbüschel der ursprünglichen oder von irgend zweien der Räume von $|\Sigma_1|$ erzeugt; die verbundene Regelschar λ^2 besteht daher aus entsprechenden Geraden der sämtlichen Räume; oder die sich auf eine Schar aus $|u_3|$ stützende Schar besteht aus entsprechenden Ebenenbüscheln der Räume von $|\Sigma_1|$. Die Trägerfläche F^2 von ρ^2 und λ^2 ist dem Tetraeder umgeschrieben (Nr. 491).

Die Axen der Büschel eines Netzes aus $|u_3|$ sind die Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve r_1, die dem Tetraeder umgeschrieben ist (Nr. 491) und hier r^3 heiße. Diese Sehnenkongruenz $[r^3]$ wird durch entsprechende Bündel aus zweien der Räume und infolge dessen aus allen erzeugt; die Scheitel dieser Bündel erfüllen die Kurve r^3. Auf die Büschel eines Netzes in $|u_3|$ stützen sich entsprechende Bündel in den Räumen von $|\Sigma_1|$.

Zwei Netze von $|u_3|$ haben eine Schar gemeinsam (Nr. 666); dem entspricht in jedem der Σ: zwei Bündel haben einen Büschel gemein. Die beiden Trägerkurven r^3 der Netze liegen auf der Trägerfläche F^2 der Schar, und die Axen der Büschel der Schar bilden die zweimal getroffene Regelschar der F^2, während die einmal getroffene aus homologen Geraden der Σ besteht.

Ein Netz und eine Schar aus $|u_3|$ haben einen Büschel u gemein; sie senden in jeden Σ einen Bündel und einen Büschel, deren gemeinsame Ebene von u kommt. Die Sehnenkongruenz $[r^3]$ hat mit der ρ^2 eine Gerade gemein.

Die vier Ebenen $\tau, \upsilon, \varphi, \psi$ des Tetraeders (T, U, V, W gegenüberliegend) sind in den Räumen von $|\Sigma_1|$ sich selbst entsprechend; daher enthält $|u_3|$ vier Ebenenbüschel, die sich auf eine dieser Ebenen reduzieren: Axe ist dann wieder jeder beliebige Strahl der Ebene, so daß es sich eigentlich um ∞^2 Ebenenbüschel handelt; gehören doch alle diese Geraden zum Komplexe. Die Projektivität zwischen einem dieser Büschel, der sich etwa auf τ reduziert habe, und irgend einem andern Büschel u von $|u_3|$ ist ausgeartet: mit τ in jenem und der nach T gehenden Ebene in diesem als singulären Ebenen; weil im ersteren die nach U, V, W gehenden Ebenen in τ sich vereinigt haben.

Einer beliebigen Ebene von u entspricht τ, einer beliebigen Ebene des reduzierten Büschels (mit irgend einer Gerade in τ als Axe) die Ebene uT.

Die Strahlen durch eine Tetraederecke T gehören auch alle zum Komplexe; die von ihnen getragenen Büschel von $|u_3|$ bilden ein solches spezielles Netz, wie es in Nr. 757 beschrieben wurde. Jede Schar aus diesem Netze vereinigt sich mit der sich auf sie stützenden. Die sich auf das Netz stützenden Bündel haben alle den Scheitel T, der ja in den Räumen sich selbst entspricht. Die Tetraederkanten tragen je eine Schar von Büscheln u, von denen die bei $T(U, V, W)$ zu diesem Netze gehören.

In einer beliebigen Ebene π haben wir die Axen von ∞^1 Büscheln u, die Tangenten der Komplexkurve; sie senden die Ebene π in die verschiedenen Räume Σ; indem wir zu π als Ebene von $\overline{\Sigma}$ die entsprechende in irgend einem andern Σ aufsuchen, haben wir im Schnitte beider die Axe des Büschels, der die π in $\overline{\Sigma}$ sendet. Zu den Tangenten gehört $\tau\pi$. Dieser Büschel sendet π in den Raum Σ_T; denn in der ausgearteten Kollineation (Σ_T, Σ) korrespondiert der nicht durch T gehenden π von Σ_T die τ in Σ, welche $\pi\tau$ einschneidet.

Aus allen Büscheln von $|u_3|$ kommen homologe Ebenen nach T, alle nach dem reduzierten Raume Σ_T gehend. Daher muß jede Ebene π durch T ∞^1 Axen von Büscheln von $|u_3|$ enthalten, welche sie in den Raum Σ_T senden. Die Komplexkurve in π zerfällt in zwei Büschel, den um T und einen zweiten, dessen Scheitel $\mathfrak{T}$ in τ liegt. Bei einem Strahle des ersten Büschels gehen alle Ebenen durch T; also braucht π nicht die zu Σ_T gehörige zu sein; diese Büschel senden, wie vorhin, ihre Ebenen nach den verschiedenen Σ. In dem Büschel um einen Strahl von $(\mathfrak{T}, \pi)$ ist π die einzige nach T gehende Ebene; diese Büschel senden also alle die π in den Raum Σ_T; sie haben sie also zur sich selbst entsprechenden Ebene und sind perspektiv; es liegt die spezielle Schar perspektiver Büschel aus Nr. 756 vor. Die dortige Ebene θ des Perspektivitäts-Strahlenbüschels ist τ. Nach einem Strahle des Büschels $(\mathfrak{T}, \tau)$ gehen ja homologe Ebenen aller Büschel unserer Schar, die also zu demselben Raume Σ, etwa zu $\overline{\Sigma}$, gehören; für die ausgeartete Kollineation zwischen Σ_T und $\overline{\Sigma}$ sind der Bündel T und das Feld τ singulär, und der durch T gehenden Ebene π von Σ_T korrespondiert in $\overline{\Sigma}$ der ganze Ebenenbüschel um die Gerade von τ, die in der charakteristischen Kollineation (T, τ) der Kollineation $(\Sigma_T, \overline{\Sigma})$ ihr korrespondiert; das ist der von den Ebenen von $\overline{\Sigma}$ in unseren Büscheln herrührende Strahl des Perspektivitäts-Büschels.

Die Strahlen dieses Büschels, als Schnitte der zu den verschiedenen Σ gehörigen Ebenen irgend eines dieser Büschel mit der sich selbst entsprechenden τ, sind entsprechend in den Σ.

Jeder Punkt in τ ist Scheitel eines Büschels von Strahlen, die in den verschiedenen Σ entsprechend sind; denn die kollinearen Σ bewirken in der gemeinsamen Koinzidenzebene τ eine Reihe kollinearer Felder mit den gemeinsamen Koinzidenzpunkten U, V, W und Büscheln entsprechender Strahlen (eingeschnitten durch die Büschel der entsprechenden Ebenen der Σ), welche das auf die Reihe sich stützende Netz projektiver Büschel bilden (Nr. 754). Homologe Punkte der Felder erfüllen einen durch U, V, W gehenden Kegelschnitt; sie tragen homologe Bündel der Räume; wir haben eine Reihe kollinearer Bündel mit zerfallender Trägerkurve.

Zwei reduzierte Räume Σ_T und Σ_U stehen in zentral-planarer Kollineation: singulär in Σ_T sind der Punkt T und die Ebene TVW, in Σ_U die Ebene UVW und der Punkt U. Die charakteristische Projektivität der singulären Strahlenbüschel wird durch die Strahlen nach V, W und den Spuren irgend eines Komplexstrahles festgelegt.

759 Untersuchen wir den Grad der Mannigfaltigkeit[1]) der drei behandelten linearen Systeme 1., 2., 3., Stufe von projektiven Ebenenbüscheln, oder gleich allgemein eines Systems i^{ter} Stufe $|u_i|$. Die Auswahl der $i+1$ konstituierenden Ebenenbüschel involviert die Mannigfaltigkeit $4(i+1)$, die i Projektivitäten eines von ihnen zu den übrigen die Mannigfaltigkeit $3i$; von $7i+4$ ist aber $i(i+1)$ wiederum abzuziehen, weil jedes System auf $\infty^{i(i+1)}$ Weisen aus seinen ∞^i Büscheln konstituiert werden kann. Daher ist der Grad der Mannigfaltigkeit von $|u_i|$ gleich

$$i(6-i)+4,$$

also in den schon behandelten Fällen $i=1, 2, 3$:

$$9, 12, 13;$$

wie notwendig, denn das sind die Grade der Mannigfaltigkeit der Grundgebilde, durch welche die Systeme völlig bestimmt sind: der Fläche 2. Grades, der kubischen Raumkurve (Nr. 202), des tetraedralen Komplexes (Nr. 493).

Die weiteren noch möglichen Fälle $i=4, 5, 6$ führen zu den Mannigfaltigkeitsgraden 12, 9, 4.

Die Grade 12, 13 müssen gleich sein den Graden der Mannigfaltigkeit der sich auf das lineare System 2., 3. Stufe projektiver Ebenenbüschel stützenden linearen Systeme 1. Stufe kollinearer Bündel oder Räume.

Die Mannigfaltigkeit von $i+1$ Bündeln ist $3(i+1)$, die der Kollineationen eines von ihnen zu den andern ist $8i$; bei $i+1$ Räumen ist die der Kollineationen eines von ihnen zu den i übrigen $15i$; beidemal ist $i(i+1)$ abzuziehen. Also:

Der Mannigfaltigkeitsgrad der linearen Systeme i^{ter} Stufe von kollinearen Bündeln ist $i(10-i)+3$ und der der linearen Systeme i^{ter} Stufe von kollinearen Räumen $i(14-i)$.

Für $i=1$ ergibt sich 12, 13.

760 Aus fünf unabhängigen projektiven Ebenenbüscheln $u_0, \ldots u_4$ konstruieren wir das lineare System 4. Stufe $|u_4|$, indem wir u_0 durch Scharen mit den Büscheln des Gebüsches $(u_1 u_2 u_3 u_4)$ verbinden. Es kann (Nr. 665) aus beliebigen fünf unabhängigen seiner Büschel so hergestellt werden.

Es enthält (Nr. 666) ∞^6 Scharen und Netze, ∞^4 Gebüsche. Innerhalb $|u_4|$ gehen durch einen Büschel u ∞^3 Scharen und Gebüsche, ∞^4 Netze, durch eine Schar ∞^2 Netze und Gebüsche, und

1) Die Benutzung des Wortes „Mannigfaltigkeit" in dieser Bedeutung hat mich (abgesehen von der Länge des Wortes) abgehalten, es zur Bezeichnung der Systeme selbst zu verwenden; was Reye tut.

durch ein Netz ∞^1 Gebüsche. Zwei Gebüsche $|u_3|$ und $|u_3|_1$[1]) haben ein Netz $|u_2|$ gemeinsam. Die Axen jener erfüllen zwei tetraedrale Komplexe T, T_1, die von diesem eine Sehnenkongruenz $[r^3]$ 1. Ordnung 3. Klasse; also ist den Komplexen noch eine Kongruenz 3. Ordnung 1. Klasse gemeinsam. Jeder von ihren Strahlen d trägt einen Büschel aus $|u_3|$ und einen aus $|u_3|_1$, ohne daß diese Büschel identisch sind, weil es sich dann um einen Büschel von $|u_2|$ mit einer Axe aus $[r^3]$ handelte. Diese Büschel bestimmen (Nr. 756) sofort eine Schar koaxialer Büschel, die ganz zu $|u|_4$ gehört; die beiden gemeinsamen Koinzidenzebenen dieser Büschel stellen reduzierte Büschel dar.

Das System $|u_4|$ enthält also ∞^2 Scharen koaxialer Büschel, getragen von den Strahlen d einer Kongruenz 3. Ordnung 1. Klasse (d).

Durch sie gehen die tetraedralen Komplexe aller $|u|_3$, weil jedes mit einer solchen Schar einen Büschel gemeinsam hat (Nr. 666); während der fernere Schnitt zweier Komplexe sich ändert.

Wenn eine Ebene zwei Geraden d enthält, so haben die beiden Kurven der Komplexe T, T_1 in ihr drei Strahlen von $[r^3]$ und zwei von (d) gemeinsam, fallen in eine zusammen, und alle Tangenten dieses Kegelschnittes gehören zur Kongruenz (d), weil $[r^3]$ keinen Kegelschnitt enthält.

Jede Ebene γ, welche zwei Geraden d enthält, enthält deren ∞^1, welche einen Kegelschnitt umhüllen: die gemeinsame Komplexkurve, in γ, der ∞^4 tetraedralen Komplexe, die zu den $|u_3|$ gehören.

Durch jeden Punkt von γ gehen also zwei Geraden d; daraus folgt, daß die drei Ebenen, welche die drei von einem Punkte ausgehenden Geraden d verbinden, die einzigen Ebenen γ durch ihn sind.

Daher umhüllen die Ebenen γ einen Torsus 3. Klasse γ_3 oder sind die Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve; und die d sind deren Schmiegungsaxen. Wir wollen diese Geraden, wegen ihrer Beziehung zu γ_3, die Biplanaren[2]) von γ_3 und von $|u_4|$ nennen.

Dieser Torsus γ_3 und seine Biplanaren-Kongruenz (d) bilden die grundlegende Figur; daher kommt der Grad 12 der Mannigfaltigkeit. Auf den Geraden d befinden sich projektive Punktreihen, in denen die Schnitte mit derselben γ homolog sind (Nr. 205).

Weil ∞^4 Büschel vorliegen, muß jede Gerade des Raums Axe sein und zwar einmal; denn zwei von ihr getragene Büschel bewirken sofort eine ganze Schar.

---

1) Immer gemeint: von $|u_4|$.

2) So nennt sie Reye in einem Briefe an mich; in den Abhandlungen werden sie Doppelaxen genannt.

Aus der fächerförmigen Erzeugung von $|u_4|$ läßt sich dies so ableiten. Die Trägerflächen jener ∞^3 Scharen, die von u_0 nach den Büscheln von $(u_1 u_2 u_3 u_4)$ gehen, bilden ein System, von welchem eine Fläche durch drei gegebene Punkte A, B, C geht. Zu den Ebenen von u_0, die nach A, B, C gehen, konstruieren wir die homologen in allen Büscheln von $(u_1 u_2 u_3 u_4)$, sie bilden drei Räume aus dem Büschel $|\Sigma_1|$, der sich auf dies Gebüsche stützt. Aber in drei kollinearen Räumen gibt es ein einziges Tripel homologer Ebenen, welche bzw. durch A, B, C gehen[1]), also im Gebüsche $(u_1 \ldots u_4)$ einen Büschel u', der so beschaffen ist, daß entsprechende Ebenen aus ihm und aus u_0 sich in A, B, C schneiden, so daß die Trägerfläche der Schar $u_0 u'$ durch diese Punkte geht.

Liegen sie auf der gegebenen Gerade u, so kommt diese auf die Fläche und, weil windschief zu u_0, in die Regelschar der Axen der Büschel der Schar, wird also Axe eines Büschels von $|u_4|$.

Die tetraedralen Komplexe aller $|u_3|$ gehen durch den Kegelschnitt der d in einer γ; ist u ein Büschel von $|u_4|$, dessen Axe in γ fällt, ohne diese Kurve zu berühren, so enthält der tetraedrale Komplex eines $|u_3|$, in welchem dieser Büschel enthalten ist, das ganze Feld γ, die Ebene γ ist eine Tetraederebene desselben geworden. Und umgekehrt, jede Tetraederebene des T eines $|u_3|$ enthält von dem T_1 eines andern $|u_3|_1$ dessen Komplexkurve, die dann beiden gemeinsam ist, weshalb sie zu (d) gehört; die Ebene ist eine γ.

Die Tetraeder der tetraedralen Komplexe der $|u_3|$ sind alle dem Torsus γ_3 umgeschrieben und erschöpfen die ∞^4 Quadrupel seiner Ebenen. Die Kanten der Tetraeder sind Biplanaren.

Ein $|u_3|$ sei durch zwei von einer Biplanare getragene Büschel und daher die ganze Schar koaxialer Büschel gelegt; die beiden gemeinsamen Koinzidenzebenen sind reduzierte Büschel der Schar, also sich selbst entsprechende Ebenen der auf $|u_3|$ sich stützenden Räume Σ, Ebenen des zugehörigen Tetraeders.

Die beiden Koinzidenzebenen einer Biplanare sind die Ebenen γ, die in ihr sich schneiden.

Weil jede Gerade einen Büschel von $|u_4|$ trägt, so führt jeder Bündel P des Raumes zu einem Netze von $|u_4|$, dessen Büschel von seinen Strahlen getragen werden; die drei Biplanaren des Bündels tragen Scharen koaxialer Büschel aus diesem Netze. Eine Schar des Netzes hat mit diesen drei Scharen je einen Büschel gemeinsam, der Trägerkegel geht durch die drei Biplanaren, und da die

---

1) Vom Bündel, der dem Bündel A des ersten Raums im zweiten entspricht, geht ein Büschel durch B und von dessen entsprechendem Büschel im dritten eine Ebene durch C.

Projektivität durch die Kantenschar, welche ja auch die verbundene Regelschar ist, festgelegt wird, so gehen in allen Büscheln unseres Netzes homologe Ebenen nach den drei Geraden d, und diese drei Biplanaren bestimmen vollständig die Projektivität der Büschel des Netzes (vgl. Nr. 754).

Zu einem zweiten Bündel P_1 führt dann der gemeinsame Strahl PP_1 über; aber auch der Umweg von P über P_2 zu P_1 führt zu demselben Ergebnis wie der direkte Weg von P zu P_1. Dies beruht auf dem Satze, von welchem in Nr. 207 der duale bewiesen wurde:

Wenn ein kubischer Torsus mit seinen Biplanaren und drei Geraden g einer Ebene vorliegen, so ist von den drei Projektivitäten, welche zwischen je zweien der Ebenenbüschel g dadurch festgelegt werden, daß homologe Ebenen nach den Biplanaren aus dem Schnittpunkte der Axen gehen, jede die Folge der beiden andern.

Die homologen Ebenen aus den ∞^4 projektiven Ebenenbüscheln von $|u_4|$ bilden je ein Ebenensystem 4. Stufe $\mathfrak{V}$ (bei Reye: $|E_4|$)[1]), zu dem jede Ebene des Raums ∞^1-fach gehört; aus ihm wird durch diejenigen Ebenen, welche zu den Büscheln eines $|u_3|$, $|u_2|$, $|u_1|$ von $|u_4|$ gehören, ein Raum Σ, ein Bündel O, ein Büschel v ausgeschieden. Die ∞^1 Systeme $\mathfrak{V}$ führen dann zu einem $\mathfrak{V}$-Büschel. Wir wollen jetzt zeigen, daß jeder Ebene γ ein $\mathfrak{V}$ zugeordnet ist. Wir fassen eine bestimmte γ ins Auge, die $\bar{\gamma}$ heiße; es gibt ∞^3 Gebüsche $|u_3|$, zu deren Tetraedern sie gehört. Eins von ihnen sei betrachtet. Ist dann u' der auf γ reduzierte Büschel (der größeren Deutlichkeit halber mit einer bestimmten Gerade von $\bar{\gamma}$ als Axe behaftet), also zu $|u_3|$ gehörig, u ein beliebiger anderer Büschel von $|u_3|$; so ist die Projektivität zwischen u' und u so ausgeartet, daß in u' die $\bar{\gamma}$ singuläre Ebene ist, in u diejenige, welche die Gegenecke, etwa T, von $\bar{\gamma}$ im Tetraeder enthält. Das $\mathfrak{V}$, nach dem diese geht, sei $\bar{\mathfrak{V}}$; darin geht sie nach dem Raume Σ_T, den $|u_3|$ aus $\mathfrak{V}$ ausscheidet. 761

Nunmehr sei u_1 ein beliebiger Büschel aus einem andern Gebüsche $|u_3|_1$, zu dessen Tetraeder $\bar{\gamma}$ ebenfalls gehört: mit der Gegenecke T_1; durch die allgemeine Projektivität zwischen u und u_1 geht die ausgeartete zwischen u' und u in eine ebenfalls ausgeartete zwischen u' und u_1 über, wobei $\bar{\gamma}$ singuläre Ebene in u' bleibt, in u_1 aber diejenige Ebene singulär wird, die durch jene allgemeine Projektivität aus der vorhinigen von u hervorgeht, mithin, weil ihr homolog, ebenfalls nach $\bar{\mathfrak{V}}$ geht; sie enthält aber den T_1. Da es durch jeden

1) Ebensowenig wie man ein Punktfeld, von welchem jeder Punkt ∞^1-mal gerechnet ist, oder einen Ebenenbündel, für dessen Ebenen dies gilt, „als Raum von drei Dimensionen" bezeichnen wird, darf auch ein solches Ebenensystem $\mathfrak{V}$ nicht als Ebenenraum von vier Dimensionen bezeichnet werden.

Büschel u von $|u_4|$ ∞^3 Gebüsche $|u_3|$ gibt, für welche $\bar{\gamma}$ Tetraederebene ist, so hat man: die Projektivität zwischen ihm und dem auf $\bar{\gamma}$ reduzierten Büschel u' ist so ausgeartet, daß die nach $\bar{\mathfrak{B}}$ gehende Ebene von u und die Ebene $\bar{\gamma}$ von u' singulär sind. Dies ist die Zuordnung der $\mathfrak{B}$ zu den γ.

Eine beliebige Ebene π sei gegeben, $\bar{\mathfrak{B}}$ wiederum ein bestimmtes von den $\mathfrak{B}$; so gibt es ∞^1 Büschel von $|u_4|$, welche die π in $\bar{\mathfrak{B}}$ senden. Nehmen wir zwei von ihnen, so bestimmen diese sofort eine Schar perspektiver Büschel mit der sich entsprechenden Ebene π, die also in allen nach $\bar{\mathfrak{B}}$ geht. Sie gehört, mit ihren Konstituenten, ganz zu $|u_4|$ und erschöpft jene ∞^1 Büschel; denn ein außerhalb befindlicher Büschel würde ein in $|u_4|$ enthaltenes Netz derartiger Büschel bewirken. Also erzeugen (Nr. 756) die Axen dieser Büschel einen Strahlenbüschel $(\bar{S}, \pi)$. Sein Scheitel $\bar{S}$ liegt auf der in π befindlichen Biplanare d; denn diese trägt ∞^1 koaxiale Büschel, welche die π in die verschiedenen $\mathfrak{B}$ senden, also einer nach $\bar{\mathfrak{B}}$.

Wir denken durch diese Schar $|\bar{u}_1|$ ein Gebüsche $|u_3|$ in $|u_4|$ gelegt, d. h. lassen zwei seiner Konstituenten der $|\bar{u}_1|$ angehören, und wegen des Folgenden gehe es durch einen beliebigen Büschel u von $|u_4|$. Die nach $\bar{\mathfrak{B}}$ gehenden Ebenen der vier Konstituenten, von denen zwei in π zusammenfallen, laufen in einen Punkt dieser Ebene zusammen, der also Ecke T des Tetraeders von $|u_3|$ wird. In die Gegenebene, eine Ebene γ, fällt (Nr. 758) der Perspektivitätsbüschel für die Büschel von $|\bar{u}_1|$. Weil π, die nach $\bar{\mathfrak{B}}$ geht, diese Ecke T enthält, so ist die $\bar{\gamma}$, der nach obigem das System $\bar{\mathfrak{B}}$ zugeordnet ist, diese Ebene γ. Als Ebene des Perspektivitätsbüschels muß sie durch $\bar{S}$ gehen und ist die dritte Ebene γ durch diesen Punkt, außer den beiden durch die Biplanare d gehenden.

Die den verschiedenen $\mathfrak{B}$ zugehörigen Scheitel S in π erfüllen die in π gelegene Biplanare d und die dritte durch einen dieser S gehende Ebene γ ist jedesmal die ihm und dem $\mathfrak{B}$ zugeordnete γ.

Die Korrespondenz zwischen den $\mathfrak{B}$ und γ ist oben schon in anderer Weise festgestellt, also unabhängig von der Ebene π, oder für alle dieselbe.

Der $\mathfrak{B}$-Büschel, der schon projektiv ist zu jedem Büschel u von $|u_4|$, ist also auch zum Torsus γ_3 projektiv und zu allen den projektiven Punktreihen, welche seine Ebenen auf den Biplanaren hervorrufen.

Wir ließen das Gebüsche $|u_3|$ durch den beliebigen Büschel u gehen, also befindet sich dessen Axe u im zugehörigen tetraedralen Komplexe T, dem auch die Biplanare d angehört; T und $\bar{\gamma}$ sind Gegenelemente des Tetraeders. Folglich sind in der involutorischen Projektivität, die nach Nr. 495 oder 758 zwischen dem Ebenenbüschel u und der Punktreihe d besteht, die Ebene $\pi = uT$ und der Schnittpunkt $d\bar{\gamma}$ entsprechend, also die Ebene von u, die zu $\bar{\mathfrak{B}}$ gehört, und der Schnittpunkt von d mit der $\bar{\mathfrak{B}}$ zugeordneten $\bar{\gamma}$. Also:

Jeder Büschel u von $|u_4|$ und die Punktreihe auf irgend einer Biplanare d sind so involutorisch projektiv, daß eine Ebene π von u und der Schnittpunkt von d mit derjenigen Ebene γ homolog sind, welche dem $\mathfrak{B}$ zugeordnet ist, nach welchem π geht, oder einfacher, weil ja zwischen γ_3 und u selbst Projektivität statthat, welche der π homolog ist.

Die projektiven Punktreihen auf drei Geraden d bestimmen den Torsus und die projektiven Punktreihen auf den andern d. Wir werden uns überzeugen, daß die involutorische Projektivität zu den projektiven Punktreihen auf drei Geraden d genügt; weil sie die andern zur Folge hat.

Innerhalb $|u_4|$ gehen durch jedes Netz $|u_2|$ ∞^1 Gebüsche, ein $|u_3|$-Büschel; zu $|u_2|$ gehört eine Trägerkurve r^3, zu jedem $|u_3|$ ein Tetraeder, dem die r^3 umgeschrieben ist (Nr. 758); folglich hat jede der ∞^6 Trägerkurven r^3, den $|u_2|$ von $|u_4|$ zugehörig, zum festen Torsus γ_3 die Beziehung, daß ihr ∞^1 Tetraeder eingeschrieben sind, welche dem γ_3 umgeschrieben sind.

Die vierstufigen Ebenensysteme $\mathfrak{B}$ bedürfen noch weiterer Be- 762
sprechung. Eine Ebene π gehört zu jedem ∞^1-fach, die Axen der Büschel von $|u_4|$, welche sie in das $\mathfrak{B}$ senden, bilden den Büschel (S, π), wo S der Schnittpunkt der in π befindlichen Biplanare mit der dem $\mathfrak{B}$ zugeordneten γ ist. Eine Ebene γ gehört ∞^2-fach in jedes $\mathfrak{B}$, weil, für jede Gerade in ihr als Axe, alle Ebenen des Büschels sich in ihr vereinigt haben.

Unterscheidet man die ∞^1 Ebenen, die in einer Ebene von $\mathfrak{B}$ vereinigt sind, durch die Büschel von $|u_4|$, von denen sie stammen, so kann man sagen, daß die verschiedenen $\mathfrak{B}$ in eindeutiger Beziehung stehen, und diese Beziehung Kollineation nennen, weil homologe Ebenen sich zugleich linear bewegen. Denn durchläuft ein Büschel in $|u_4|$ eine Schar, so erzeugen die homologen Ebenen je einen Büschel der sich stützenden Schar; wodurch sich entsprechende Büschel in den verschiedenen $\mathfrak{B}$ ergeben. Wird ein Netz oder Gebüsche durchlaufen, so werden die sich stützenden kollinearen Bündel oder Räume homolog in den $\mathfrak{B}$.

Wir erhalten also einen Büschel $|\mathfrak{B}_1|$ kollinearer Ebenensysteme $\mathfrak{B}$.

Jede Ebene π, ∞^1-mal zu einem bestimmten $\mathfrak{B}$, etwa $\bar{\mathfrak{B}}$ gehörend, hat ∞^1 entsprechende Ebenen in einem andern $\mathfrak{B}$, das $\mathfrak{B}_1$ heiße.

Sie bilden einen Büschel; seine Axe ist ein bestimmter Strahl f_1 des Perspektivitätsbüschels in $\bar{\gamma}$, der zu den Büscheln u gehört, welche π in $\overline{\mathfrak{V}}$ senden.

Das System $|u_4|$ enthält ∞^6 Scharen; jede Schar schickt in $\overline{\mathfrak{V}}$ einen Büschel (aus der sich stützenden Schar); folglich gehört jeder der ∞^4 Ebenenbüschel des Raums ∞^2-fach zu $\overline{\mathfrak{V}}$; wenn π und π' zwei Ebenen aus ihm sind, so erhalten wir zwei Scharen, mit den Axenbüscheln $(\bar{S}, \pi)$, $(\bar{S}', \pi')$, welche π bzw. π' in $\overline{\mathfrak{V}}$ senden. Die ∞^2 Scharen, welche einen Büschel der einen mit einem der andern verbinden, führen alle zu jenem Büschel in $\overline{\mathfrak{V}}$, dagegen zu ∞^2 verschiedenen Büscheln in $\mathfrak{V}_1$, deren Axen den Bündel um den Punkt $f_1 f_1'$ (in $\bar{\gamma}$) bilden (wo f_1' sich aus π' ergibt, wie oben f_1 aus π).

Es gibt ∞^6 Netze in $|u_4|$; folglich gehört jeder der ∞^3 Bündel des Raums ∞^3-fach zu $\overline{\mathfrak{V}}$; drei Ebenen π, π', π'' aus ihm und die Scharen der Büschel, in denen sie nach $\overline{\mathfrak{V}}$ kommen, führen zu ∞^3 Netzen, welche den Bündel (als sich stützenden) in $\overline{\mathfrak{V}}$ liefern, in $\mathfrak{V}_1$ aber ∞^3 verschiedene Bündel. Die Scheitel erfüllen den ganzen Raum; denn jeder Punkt ist Schnittpunkt von drei Ebenen aus f_1, f_1', f_1''. Und einer fällt in den Scheitel des gegebenen Bündels, so daß Koinzidenz statt hat.

Und endlich, der Raum gehört, wegen der ∞^4 Gebüsche, ∞^4-fach als ein Raum Σ zu $\overline{\mathfrak{V}}$.

Eine Ebene γ stellt einen reduzierten Büschel aus $|u_4|$ dar; daher ist sie sich selbst entsprechend in allen $\mathfrak{V}$, und zwar so, daß sie in ∞^3 Büscheln kollinearer Räume oder entsprechender Räume aus den $\mathfrak{V}$ sich selbst entspricht, weil sie zu so vielen Tetraedern von Gebüschen $|u_3|$ gehört.

Infolge dessen werden auch die Biplanaren in den $\mathfrak{V}$ sich selbst entsprechend. In der Tat, eine d als gemeinsame Axe einer Schar von Büscheln, ist auch gemeinsame Axe der sich stützenden Büschel und wird dadurch sich selbst entsprechend in den $\mathfrak{V}$. Durch jene Schar gehen, in $|u_4|$, ∞^2 Gebüsche; sie haben d zur Tetraederkante, und den sich auf eins dieser Gebüsche stützenden kollinearen Räumen (in den $\mathfrak{V}$) ist sie entsprechend gemeinsam.

Jeder Punkt des Raumes ist, als Schnittpunkt von drei γ, sich selbst entsprechend; wie wir oben schon auf andere Weise fanden.

Entsprechend in den $\mathfrak{V}$ sind die Scheitel der kollinearen Bündel, die sich auf ein Netz von $|u_4|$ stützen; vereinigen sich zwei, dann tun es alle. Jeder Punkt des Raumes führt ja zu einem Netze, dessen Axen in ihn zusammenlaufen, und einer sich stützenden Reihe kollinearer Bündel, für die er gemeinsamer Scheitel wird.

Das lineare System 5. Stufe $|u_5|$ von projektiven Ebenen- 763
büscheln, das wir wieder fächerförmig aus sechs unabhängigen projektiven Büscheln herstellen und dann aus beliebigen sechs seiner Büschel konstruieren können, besitzt (Nr. 666) ∞^8 Scharen, ∞^9 Netze, ∞^8 Gebüsche, ∞^5 lineare Systeme 4. Stufe. Und innerhalb des Systems gehen durch jeden Büschel u ∞^4 Scharen und $|u_4|$, ∞^6 Netze und Gebüsche, durch jede Schar ∞^3 Netze und $|u_4|$, ∞^4 Gebüsche, durch jedes Netz ∞^3 Gebüsche und $|u_4|$ und endlich durch jedes Gebüsche ∞^1 Systeme $|u_4|$, ein $|u_4|$-Büschel.

Die homologen Ebenen bilden je ein Ebenensystem 5. Stufe 𝔚 ($|E_5|$ bei Reye), so daß ein 𝔚-Büschel entsteht. Die Kollineation der 𝔚 ist ebenso darzutun, wie die der 𝔙.

Jede Gerade des Raumes trägt nunmehr ∞^1 Büschel aus $|u_5|$, die eine Schar bilden. Jede Ebene durch die Gerade kommt, als Ebene der verschiedenen Büschel, in die verschiedenen 𝔚. Die Koinzidenzebenen stellen reduzierte Büschel dar (mit je ∞^2 Axen). Solcher Ebenen, deren $|u_3|$ vier aufwies, die Ebenen des Tetraeders, und $|u_4|$ ∞^1, die Ebenen γ, enthält $|u_5|$ ∞^2, durch jede Gerade zwei, so daß sie eine Fläche 2. Grades umhüllen: Φ_2, welche die Grundfigur bilden wird, mit der Mannigfaltigkeit 9, wie wir sie in Nr. 759 für $|u_5|$ gefunden haben.

Dieser Fläche Φ_2 sind die Torsen γ_3 aller $|u_4|$ von $|u_5|$ umgeschrieben; zwei von ihnen, zu $|u_4|$, $|u_4|_1$ gehörig, haben die vier Ebenen des Tetraeders gemeinsam, das zu dem $|u_3|$ gehört, in dem $|u_4|$ und $|u_4|_1$ sich schneiden. Der Satz (Nr. 165) über zwei kubische Raumkurven auf derselben F^2 und ihr Verhalten zu deren Regelscharen, je nachdem sie vier oder fünf gemeinsame Punkte haben, lehrt, daß beide Torsen zu den Regelscharen von Φ_2 sich gleichartig verhalten: durch die Geraden t der einen gehen zwei Ebenen von jedem der beiden Torsen, durch die andern eine; die t gehören also zu den Biplanaren von $|u_4|$ und zu denen von $|u_4|_1$. Jede trägt eine Schar von Büscheln aus $|u_4|$ und eine aus $|u_4|_1$; der Büschel um sie aus $|u_3|$, dem gemeinsamen Netze, ist beiden Scharen gemeinsam; daher bestimmen sie ein Netz von Büscheln, welche alle die t zur Axe haben.

Durch die Geraden t der einen Regelschar von Φ_2 gehen zwei Ebenen von jedem der Torsen γ_3. Jede von diesen Geraden trägt ein Netz koaxialer Büschel aus $|u_5|$.

Mit diesem Netze hat jedes $|u_4|$ von $|u_5|$ einen Büschel gemein; also ist t auch Biplanare für $|u_4|$.

Die Geraden t sind Biplanaren für alle $|u_4|$ von $|u_5|$, also den Kongruenzen (d) derselben angehörig, und die tetraedralen Komplexe aller $|u_3|$ von $|u_5|$ gehen durch sie.

Die ∞^5 Torsen 3. Klasse, welche der Φ_2 so umgeschrieben sind

(Nr. 165), daß durch die t zwei Ebenen gehen, gehören als γ_3 zu den ∞^5 Systemen $|u_4|$, und die ∞^8 der Φ_2 umgeschriebenen Tetraeder zu den ∞^8 Gebüschen $|u_3|$.

Die Ebene π gehe wiederum nach $\overline{\mathfrak{W}}$, die Systeme $|u_4|$, $|u_4|_1$, welche aus $\mathfrak{W}$ die $\overline{\mathfrak{V}}$, $\overline{\mathfrak{V}_1}$ ausscheiden, enthalten je eine Schar perspektiver Büschel, in denen π nach $\overline{\mathfrak{V}}$, bzw. $\overline{\mathfrak{V}}_1$ geht und daher nach $\overline{\mathfrak{W}}$. Gemeinsam ist diesen Scharen der Büschel aus $|u_3|$, der π nach $\bar{\Sigma}$ sendet; wo $|u_3|$ den $|u_4|$ und $|u_4|_1$ gemeinsam ist und daher Σ den $\overline{\mathfrak{V}}$ und $\overline{\mathfrak{V}_1}$. Also bestimmen sie ein Netz von perspektiven Büscheln, denn alle Scharen, die einen Büschel aus der einen Schar mit einem aus der andern Schar verbinden, haben π zur sich selbst entsprechenden Ebene.

Daher führt jede Ebene π zu einem Netz perspektiver Büschel aus $|u_5|$, welche alle die π nach $\overline{\mathfrak{W}}$ senden. Jede Gerade in π ist Axe eines Büschels dieses Netzes, da einer ihrer Büschel die π nach $\overline{\mathfrak{W}}$ sendet.

Jedes $|u_4|$ hat mit dem Netze die Schar der Büschel, und jedes $|u_3|$ den einen Büschel gemeinsam, für die bzw. für den π nach $\overline{\mathfrak{W}}$ geht oder in das ausgeschiedene $\overline{\mathfrak{V}}$, $\bar{\Sigma}$.

Die homologen Ebenen von dreien jener perspektiven Büschel und daher von allen des Netzes laufen je in einem Punkte zusammen. Diese Punkte erfüllen eine Gerade $\bar{w}$. Denn jedes $|u_4|$ scheidet aus dem Netze eine Schar aus, mit einem Perspektivitäts-Strahlenbüschel, durch dessen Strahlen homologe Ebenen gehen. Auf ihnen müssen daher jene Punkte liegen. Die Ebene dieses Büschels ist die Ebene $\bar{\gamma}$, die zu $|u_4|$ und dem von ihm aus $\overline{\mathfrak{W}}$ geschiedenen $\overline{\mathfrak{V}}$ gehört. Die Ebenen $\bar{\gamma}$, die den verschiedenen $|u_4|$ von $|u_5|$ so zugeordnet werden, laufen alle durch jene Punkte, welche demzufolge eine Gerade $\bar{w}$ bilden, die damit dem $\overline{\mathfrak{W}}$ zugeordnet wird.

Die Ebenen γ der $|u_4|$ sind aber Berührungsebenen von Φ_2; daher liegt $\bar{w}$ auf Φ_2, und da der γ_3 einer $|u_4|$ nur die $\bar{\gamma}$ durch $\bar{w}$ schickt, so gehört sie zur andern Regelschar als die t.

Somit ist jedem Ebenensystem $\mathfrak{W}$ eine Gerade w aus der zweiten Regelschar von Φ_2 zugeordnet, so daß sich Projektivität zwischen dem $\mathfrak{W}$-Büschel und der Regelschar (w) ergibt.

Nun sei u ein beliebiger Büschel von $|u_5|$, t irgend eine Gerade der ersten Regelschar, ferner gehe $|u_4|$ durch u; t ist Biplanare für dies System. Folglich haben wir eine involutorische Projektivität zwischen u und der Punktreihe auf t, derartig, daß eine Ebene π von u, die nach $\mathfrak{W}$ geht und daher nach dem durch $|u_4|$ ausgeschiedenen $\mathfrak{V}$, und der Schnittpunkt von t mit der Ebene γ, die für $|u_4|$

dem $\mathfrak{V}$ zugeordnet ist, homolog sind. Dieser Schnittpunkt ist dann der von t mit derjenigen w, die für $|u_5|$ dem $\mathfrak{W}$ zugeordnet ist; weil γ durch diese w geht.

Die Punktreihen auf den Geraden t der Fläche Φ_2 werden durch die Geraden w der andern Regelschar projektiv, und zu diesen projektiven Punktreihen, welche eine Schar projektiver Punktreihen bilden, sind alle Büschel des Systems $|u_5|$ so involutorisch projektiv, daß je die Ebene eines dieser Büschel und der Schnittpunkt einer t mit derjenigen w homolog sind, die dem Systeme $\mathfrak{W}$ zugeordnet ist, nach welchem jene Ebene geht.

Diese projektiven Punktreihen bestimmen die Figur.

Jede Ebene π gehört ∞^2-mal zu $\overline{\mathfrak{W}}$. Die entsprechenden Ebenen in einem andern Systeme $\mathfrak{W}_1$ bilden einen Bündel, dessen Scheitel F_1 auf der dem $\overline{\mathfrak{W}}$ zugeordneten $\overline{w}$ liegt, der Perspektivitätsaxe der ∞^2 Büschel, welche π nach $\overline{\mathfrak{W}}$ senden. Jeder gegebene Ebenenbüschel zählt ∞^{8-4}-mal in $\overline{\mathfrak{W}}$, wegen der ∞^8 Scharen in $|u_5|$, und hat in $\mathfrak{W}_1$ ∞^4 verschiedene entsprechenden Büschel. Ein Ebenenbündel zählt ∞^{9-3}-mal. Usw.

Das lineare System 6. Stufe $|u_6|$ von projektiven Ebenen- 764
büscheln, auf das sich ein Büschel von kollinearen Ebenensystemen 6. Stufe $\mathfrak{Z}$ stützt, enthält (Nr. 666) ∞^{10} Scharen, ∞^{12} Netze und Gebüsche, ∞^{10} lineare Systeme 4. Stufe und ∞^6 von der 5. Stufe, und innerhalb $|u_6|$ gehen durch jedes $|u_i|$ $\infty^{(6-h)(h-i)}$ Systeme $|u_h|$.

Zwei Systeme 5. Stufe $|u_5|$ und $|u_5|_1$ haben ein $|u_4|$ gemeinsam; den Φ_2, die zu jenen gehören, ist der Torsus γ_3, der zu diesem gehört, umgeschrieben, folglich haben sie eine Gerade aus den Scharen der t gemeinsam. Diese Gerade p wird das die ganze Figur bestimmende Gebilde: mit der Mannigfaltigkeit 4 (Nr. 759).

Von $|u_5|$ und $|u_5|_1$ trägt sie, als t, je ein Netz von Büscheln, von $|u_4|$ eine Schar, welche den beiden Netzen gemeinsam ist, so daß durch sie ein Gebüsche von projektiven Büscheln konstituiert wird, welche alle die p zur Axe haben; es handelt sich um alle ∞^3 im Büschel p möglichen Konjektivitäten.

Dieses Gebüsche koaxialer Büschel hat mit jedem $|u_5|$, $|u_4|$, $|u_3|$ von $|u_6|$ ein Netz, eine Schar von Büschel, einen einzelnen Büschel gemeinsam (Nr. 666); also ist p bzw. eine Gerade t für jedes $|u_5|$, eine Gerade d für jedes $|u_4|$, ein Strahl des tetraedralen Komplexes von jedem $|u_3|$ aus $|u_6|$.

Die homologen Ebenen der u von $|u_6|$ bilden je ein $\mathfrak{Z}$.

Es sei $|u_5|$ wieder durch den beliebigen Büschel u von $|u_6|$ gelegt; dieser ist dann zur Punktreihe auf p, als einer t von $|u_5|$, so involutorisch projektiv, daß eine Ebene von u, welche etwa nach $\overline{\mathfrak{Z}}$ geht und daher in das durch $|u_5|$ ausgeschiedene $\overline{\mathfrak{W}}$, und der Punkt C auf p homolog sind, in dem p von der zu $|u_5|$ gehörigen $\overline{w}$ geschnitten. Dieser Punkt C ändert sich nicht, wenn $|u_5|$ durch ein anderes u enthaltendes $|u_5|_1$ ersetzt wird. Denn $|u_5|$ und $|u_5|_1$ haben ein $|u_4|$ gemeinsam; jene scheiden aus $\overline{\mathfrak{Z}}$ die Systeme $\overline{\mathfrak{W}}$, $\overline{\mathfrak{W}_1}$ aus, dieses das System $\overline{\mathfrak{V}}$, in welchem $\overline{\mathfrak{W}}$ und $\overline{\mathfrak{W}}_1$ sich schneiden. Die Geraden $\overline{w}$ und $\overline{w}_1$, von $|u_5|$ und $|u_5|_1$ herrührend und den $\overline{\mathfrak{W}}$ und $\overline{\mathfrak{W}}_1$ zugeordnet, befinden sich beide in der Ebene $\overline{\Upsilon}$, die von $|u_4|$ herrührt und $\overline{\mathfrak{V}}$ zugeordnet ist; also treffen sie p in demselben Punkte $p\overline{\Upsilon}$ und alle weiteren $\overline{w}$ gehen durch diesen Punkt, der dadurch dem $\overline{\mathfrak{Z}}$ zugeordnet wird.

Die Punktreihe der C auf p wird so zum $\mathfrak{Z}$-Büschel projektiv.

Und zu dieser Punktreihe auf p sind alle Ebenenbüschel u von $|u_6|$ so involutorisch projektiv, daß eine Ebene von u und der Punkt von p homolog sind, der dem $\mathfrak{Z}$ entspricht, nach welchem jene Ebene geht.

Das System $|u_6|$ entsteht also einfach auf die Weise, daß man alle ∞^2 Punktreihen auf p, die zu einer festen Punktreihe dieser Gerade involutorisch projektiv sind, aus allen Geraden des Raumes projiziert. Entsprechend sind in den ∞^6 projektiven Büscheln je die Ebenen nach den Punkten, welche demselben Punkte der festen Reihe gepaart sind.

765 Wir gehen jetzt rückwärts. Zwei projektive Punktreihen auf t_1, t_2 sind gegeben. Wir legen auf beide Geraden eine Involution; wenn X_1, X_2 in jenen homolog und Y_1, Y_2 ihnen in den Involutionen gepaart sind, so bewegen sich diese projektiv und $y = Y_1 Y_2$ erzeugt eine Regelschar (y). Ist u eine Gerade der Leitschar, so schneidet eine Ebene durch sie in t_1, t_2 die Punkte Y_1, Y_2 ein, und der Ebenenbüschel u schneidet in t_1, t_2 Punktreihen, die zu den gegebenen involutorisch projektiv sind; und wir können $\infty^{2\cdot 2+1}$ solche Ebenenbüschel herstellen.

Diese Punktreihen t_1, t_2 erzeugen eine Schar projektiver Punktreihen, getragen von den Geraden der Regelschar, die der von jenen erzeugten verbunden ist. Jede weitere t dieser Punktreihen ist zu jenem Ebenenbüschel u projektiv und zwar gleichfalls involutorisch. Die beiden Regelscharen (x), (y) der $x = X_1 X_2$ und der $y = Y_1 Y_2$ haben zwei Geraden l, m gemeinsam, da den verbundenen t_1, t_2 gemeinsam sind. Die Schnitte von l mit

t_1, t_2 sind in beiden Projektivitäten (X), (Y) entsprechend, daher gilt dies auch für die gepaarten Punkte; ihre Verbindungslinie ist m. Der Schnitt von l mit t sei X; von X kommen wir durch l als Gerade von (x) zu X_1, X_2, dann zu den gepaarten Y_1, Y_2; die Ebene von u, welche diese Punkte und ihre Verbindungslinie m als Gerade von (y) projiziert, schneidet t in $Y = tm$. Fassen wir diesen Punkt Y als X' auf, dann liefert m, als Gerade von (x), die X_1', X_2', welche mit Y_1, Y_2 identisch sind; ihnen gepaart sind Y_1', Y_2', identisch mit X_1, X_2, und die Ebene von u nach diesen Punkten schneidet in t den mit X identischen Y ein; wir haben für die beiden projektiven Punktreihen der X und Y auf t ein involutorisches Paar, durch das sie ganz involutorisch werden.

Wie die beiden projektiven Punktreihen, so können wir auch irgend zwei über ihnen involutorisch projektiv stehenden Ebenenbüschel zu einer Schar erweitern; denn die eine Figur ist ja zur andern dual; also hat unser System 5. Stufe von Büscheln die Linearitäts-Eigenschaft.

Wird die Axe u gegeben, so sind l, m die von ihr getroffenen Geraden der Regelschar (x); ihre Schnitte X_1, Y_1; X_2, Y_2 mit t_1, t_2 sind in den Involutionen gepaart. Wir ordnen also im Büschel die Ebene ξ nach $m = Y_1 Y_2$ den entsprechenden Punkten X_1, X_2, und die Ebene η nach $l = X_1 X_2$ den Y_1, Y_2 zu; damit ist das involutorische Entsprechen gesichert. Einem weiteren Paare entsprechender Punkte Z_1, Z_2 von t_1, t_2 kann man nun noch eine beliebige Ebene ζ von u zuordnen. Also trägt u ∞^1 Büschel des Systems.

Fügt man eine dritte projektive Punktreihe t_3 hinzu, in welcher X_3, Y_3 den X_1, X_2; Y_1, Y_2 homolog sind, so werden alle ∞^1 Ebenenbüschel um u zu ihr so projektiv, daß ξ, η den X_3, Y_3 korrespondieren; läßt man der Ebene von u nach X_3 den Schnitt von t_3 mit ξ entsprechen, so erhält man denjenigen Büschel um u, der auch zu t_3 involutorisch projektiv ist; das System 5. Stufe reduziert sich auf eins 4. Stufe. Weil nun aus den drei projektiven Punktreihen t_1, t_2, t_3 oder d_1, d_2, d_3, um uns der früheren Bezeichnung anzupassen, das Netz der projektiven Punktreihen auf den Biplanaren des Torsus 3. Klasse, den jene erzeugen, fächerförmig aufgebaut werden kann, so folgt, daß jeder der ∞^4 Büschel, welcher zu den projektiven Punktreihen d_1, d_2, d_3 involutorisch projektiv ist, es auch zu allen Punktreihen des Netzes ist; und da jede Schar, welche zwei Büschel des Systems der u verbindet, ihm ganz angehört, so kann dieses System fächerförmig aufgebaut werden und ist linear, ein $|u_4|$, wie wir es oben betrachtet haben.

$i + 1$ projektive Punktreihen (oder Ebenenbüschel) und ihr lineares System i^{ter} Stufe führen zu einem linearen Systeme $(6 - i)^{\text{ter}}$ Stufe von projektiven Ebenenbüscheln (oder

Punktreihen), so daß jeder von diesen und jede von jenen involutorisch projektiv sind.[1])

§ 108. Fortsetzung.

766 Es sollen nun solche Paare sich stützender linearer Systeme betrachtet werden, von denen eins aus kollinearen Ebenenbündeln besteht. Den einfachsten Fall haben wir schon gehabt: eine Reihe $|O_1|$ kollinearer Bündel und ein Netz projektiver Ebenenbüschel $|u_2|$ (Nr. 757). Wir ersetzen jene Reihe durch ein lineares System 2. Stufe, ein Netz von kollinearen Bündeln, das durch irgend drei seiner Bündel konstituiert wird. Bei der Erzeugung der kubischen Fläche 3. Ordnung durch drei kollineare Ebenenbündel haben wir dies Netz schon kennen gelernt, sowie auch das sich darauf stützende Netz von ebenfalls kollinearen Bündeln (Nr. 380). Sie mögen $|O_2|$ und $|P_2|$ heißen. Es wurde dort schon gezeigt, wie $|O_2|$ aus den drei ursprünglichen Bündeln oder drei beliebigen aus ihm fächerförmig erzeugt wird; und ebenso entsteht $|P_2|$.

Die Scheitel O sowohl wie die P erfüllen die Träger- oder Kernfläche F^3.[2])

Es gilt wiederum die Grundeigenschaft: Die homologen Ebenen der Bündel des einen Netzes bilden je einen Bündel aus dem andern. Mit diesen beiden sich stützenden Netzen sind, wie a. a. O. gefunden wurde, verbunden erstens die beiden Sextupel eines Doppelsechs der F^3

$$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6$$
$$b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6,$$

sodann zwei Netze von kubischen Raumkurven R^3, r^3 auf ihr. Nach den Geraden a_i gehen homologe Ebenen aus allen Bündeln von $|O_2|$, nach den b_i aus allen Bündeln von $|P_2|$. Zwei Punkte der F^3 bestimmen eine R^3 und eine r^3; zwei R^3 oder zwei r^3 begegnen sich einmal, und die durch einen Punkt der Fläche gehenden R^3 oder r^3 bilden einen Büschel. Eine R^3 und eine r^3 begegnen sich fünfmal und sind durch eine Fläche 2. Grades verbunden; die R^3 haben die a_i zu Doppelsekanten und begegnen den b_i nicht, die r^3 verhalten sich umgekehrt.

Entsprechende Ebenenbüschel aus den Bündeln von $|O_2|$ senden ihre homologen Ebenen nach den Punkten einer r^3 und haben deren Doppelsekanten zu Axen; sie bilden ein Netz projektiver Büschel und

---

1) In dieser Form zuerst von W. Stahl gefunden, wie Reye mitteilt.

2) Trägerfläche, insofern sie die Scheitel der Bündel trägt, Kernfläche als Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen.

die kollinearen Bündel der darauf sich stützenden Reihe von $|P_2|$ kommen aus den Punkten von r^3, welche für beide Trägerkurve ist. Diese Bündel senden jene Büschel in die Bündel von $|O_2|$. Und ebenso bilden entsprechende Büschel aus $|P_2|$ ein Netz projektiver Büschel mit einer R^3 als Trägerkurve, deren Punkte die Scheitel der sich stützenden Bündel aus $|O_2|$ sind; durch diese Bündel entstehen jene Büschel in den Bündeln von $|P_2|$.

Homologe Strahlen der Bündel von $|O_2|$ sind also Doppelsekanten einer r^3. Einem Strahle eines Bündels O entsprechen in den andern O die Doppelsekanten derjenigen r^3, die durch seine weiteren Schnitte mit F^3 geht, und jede gehört zum Bündel um den dritten Schnitt. Und Entsprechendes gilt für $|P_2|$.

Unter den R^3 befinden sich ∞^1, welche in eine der Geraden b_i, etwa b_1, und einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}_1^2$ zerfallen, dessen Ebene durch a_1 geht (Nr. 384); und analoges gilt für die r^3.

Die Reihe kollinearer Bündel aus $|O_2|$, für welche $(b_1, \mathfrak{A}_1^2)$ Trägerkurve ist, hat im allgemeinen die Scheitel auf dem Bestandteile $\mathfrak{A}_1^2$; die Kollineation zwischen je zweien ist nicht ausgeartet, nur insofern speziell, daß die Ebene α_1 von $\mathfrak{A}_1^2$ sich selbst entspricht. Homologe Ebenen gehen nach derselben Doppelsekante zwischen b_1 und $\mathfrak{A}_1^2$.

Kommt der Scheitel in den gemeinsamen Punkt $\overline{O}$ von b_1 und $\mathfrak{A}_1^2$, so tritt ausgeartete Kollineation ein zwischen diesem Bündel $\overline{O}$ und dem Bündel um einen beliebigen Punkt O von $\mathfrak{A}_1^2$; b_1 wird der singuläre Ebenenbüschel von $\overline{O}$ und (O, α_1) der singuläre Strahlenbüschel von O, und die charakteristische Projektivität zwischen ihnen wird dadurch bestimmt, daß entsprechende Elemente sich auf $\mathfrak{A}_1^2$ schneiden.

Nunmehr ist ersichtlich, daß der Scheitel des ersteren Bündels auf der singulären Gerade b_1 beliebig angenommen werden kann, womit dann die Kurve 3. Ordnung der Bündelscheitel vervollständigt wird.

Da jeder Punkt der Fläche auf einem $\mathfrak{A}_1^2$ liegt, so besteht ausgeartete Kollineation zwischen einem beliebigen Bündel von $|O_2|$ und diesem in den Ebenenbüschel b_1 reduzierten Bündel.

Das Netz $|O_2|$ enthält also sechs auf einen Büschel $b_1, b_2, \ldots b_6$ reduzierte Bündel (mit beliebigem Punkte auf der Axe als Scheitel); und einer Ebene des Büschels b_i entsprechen in der Kollineation zu einem andern Bündel O alle Ebenen um einen bestimmten Strahl aus dessen singulärem Büschel, der in der Ebene Oa_i liegt.

Zu diesen reduzierten Bündeln führt auch der Umstand, daß aus den Bündeln des Netzes $|P_2|$ nach einer b_i homologe Ebenen gehen, die daher in eine Gerade, nicht in einen Punkt konkurrieren, also einen Büschel statt eines Bündels erzeugen.

Und ebenso stellen die Büschel a_i reduzierte Bündel von $|P_2|$ vor.

Wenn P ein bestimmter Scheitel eines der Bündel von $|P_2|$ ist und π eine durch ihn gehende Ebene, so enthält die Schnittkurve 3. Ordnung mit F^3 einen Punkt O, dessen Bündel gerade die π nach P schickt. Er ist der dritte Schnitt, mit π, der Kurve R^3, welche durch die beiden weiteren Schnitte, mit F^3, irgend eines Strahls von (P, π) geht; sämtliche derartigen R^3 haben denselben dritten Schnitt (Nr. 380).

Wenn π durch a_1 geht und $\mathfrak{A}_1^2$ der ergänzende Kegelschnitt in π ist, so sind, für jeden P auf a_1 und einen Strahl von (P, π), die beiden ferneren Schnitte mit F^3 die auf $\mathfrak{A}_1^2$ gelegenen und die durchgehende R^3 ist immer $(b_1, \mathfrak{A}_1^2)$, dritter Schnitt also jeder beliebige Punkt von $\mathfrak{A}_1^2$. Für alle Punkte O dieses Kegelschnitts $\mathfrak{A}_1^2$ ist die Ebene π diejenige, die nach dem reduzierten Bündel a_1 aus dem Netze $|P_2|$ geht.

Zu den Kurven R^3 gehört z. B. die zerfallende Kurve (b_1, b_2, c_{12})[1]; die zugehörige Reihe $|O_1|$ kollinearer Bündel aus $|O_2|$ enthält die beiden reduzierten Bündel b_1, b_2, während die Scheitel O der übrigen die Gerade c_{12} erfüllen. Die Kollineation zwischen jenen ist in 2. Stufe ausgeartet, zentral-planar: mit den singulären Elementen b_1, (b_1, c_{12}); b_2, (b_2, c_{12}). Diejenige zwischen einem dieser reduzierten Bündel, etwa b_1, und einem andern mit dem Scheitel auf c_{12} ist in 1. Stufe ausgeartet: die singuläre Axe in jenem ist b_1 und die singuläre Ebene in diesem (c_{12}, b_2), die Ebene des b_1 zu einer R^3 ergänzenden Kegelschnitts $\mathfrak{A}_1^2 = (b_2, c_{12})$; die Punktreihe auf b_2 legt die charakteristische Projektivität fest. Die Kollineation endlich zwischen zwei Bündeln, deren Scheitel beide auf c_{12} liegen, ist allgemein: entsprechende Ebenen gehen nach derselben Doppelsekante zwischen b_1, b_2, also demselben Strahle des Strahlennetzes $[b_1, b_2]$, zu dessen Strahlen auch die Verbindungslinie c_{12} der Scheitel gehört. Speziell ist sie dadurch, daß dieser Strahl c_{12} und die beiden Ebenen nach b_1, b_2 sich selbst entsprechend sind.

767 Wenn die drei kollinearen Bündel O, O', O'' drei homologe Strahlen besitzen, die sich in einem Punkte D schneiden, welcher dann Doppelpunkt der Fläche F^3 wird, so gehen alle Kurven R^3 und r^3 durch ihn (Nr. 385); also laufen aus allen Bündeln von $|O_2|$ und ebenso allen von $|P_2|$ homologe Strahlen in ihn zusammen.

∞^1-mal laufen homologe Ebenen aus den Bündeln von $|O_2|$ in ihn zusammen; folglich ist er Scheitel von ∞^1 Bündeln von $|P_2|$, die eine Reihe bilden, da jene Ebenen von Ebenenbüscheln

---

1) c_{12}, gemeinsame dritte Gerade auf F^3 in den Ebenen $a_1 b_2$, $a_2 b_1$.

der Bündel O herkommen. Die Trägerkurve R^3 dieser Reihe besteht aus denjenigen drei von den sechs binären Geraden durch D, welche nicht a sind, also nach der Bezeichnung von Nr. 385 aus $b_4 \equiv c_{56}$, $b_5 \equiv c_{46}$, $b_6 \equiv c_{45}$; sie vereinigt die drei Kurven (b_4, b_5, c_{45}), (b_4, b_6, c_{46}) und (b_5, b_6, c_{56}).

Aus den Bündeln P laufen entsprechende Ebenen nach jeder der sechs Geraden b_i zusammen; folglich sind für die konzentrischen Bündel P, die ihren Scheitel in D haben, die drei durch diesen gehenden Geraden b_4, b_5, b_6 die gemeinsamen Koinzidenzgeraden.

Aber es laufen auch aus allen Bündeln von $|P_2|$ ∞^1-mal homologe Ebenen in D zusammen; folglich ist er auch gemeinsamer Scheitel von ∞^1 Bündeln aus $|O_2|$. Die beiden Netze $|O_2|$ und $|P_2|$ sind gleichartig.

Die beiden Methoden, durch drei kollineare Bündel eine kubische Fläche mit Doppelpunkt zu erzeugen, die a. a. O. erörtert wurden, ergeben sich dadurch, daß bei der ersteren und daher allgemeineren die Bündel drei beliebige aus $|O_2|$ oder $|P_2|$ sind, bei der andern zwei von ihnen aus der Reihe konzentrischer Bündel des einen oder andern Netzes genommen sind.

Die eine Weise, zu einer kubischen Regelfläche zu gelangen, war (Nr. 386), daß die drei erzeugenden Bündel O, O', O'' drei homologe Strahlenbüschel besitzen, welche zu der nämlichen Punktreihe d perspektiv sind. Diese wird die doppelte Leitgerade.

Das geht durch die fächerförmige Erzeugung auf die weiteren Bündel von $|O_2|$ über, und jeder Punkt P von d wird, da in ihn aus allen Bündeln O Axen von homologen Ebenenbüscheln zusammenlaufen, Scheitel einer Reihe konzentrischer Bündel aus $|P_2|$. In allen jenen Bündeln sind die Ebenen nach d entsprechend. Die drei gemeinsamen Koinzideuzgeraden einer solchen Reihe konzentrischer Bündel aus $|P_2|$ sind d, bei allen ihren Punkten P sich ergebend, und je die beiden Erzeugenden der Fläche durch den betreffenden Punkt, da in sie homologe Ebenen zusammenkommen.

Die durch zwei Bündel aus $|O_2|$ erzeugte R^3 besteht aus der Gerade d, die zu zwei entsprechenden Strahlenbüscheln aus ihnen perspektiv ist, und einem Kegelschnitte in ihrer sich selbst entsprechenden Ebene θ. Dieser trägt die Scheitel der Bündel der Reihe, die sie bestimmen. Die Doppelsekanten zwischen ihm und d tragen die Büschel aus Bündeln von $|P_2|$, die das auf die Reihe sich stützende Netz projektiver Ebenenbüschel bilden.

Nehmen wir aber aus $|O_2|$ ein Netz homologer Ebenenbüschel, so ist (Nr. 201) die Trägerkurve r^3 zusammengesetzt aus d und zwei Erzeugenden g_1, g_2 der Regelfläche. Die Axen jener Büschel sind die Doppelsekanten zwischen g_1 und g_2, und die Scheitel P der sich stützenden Bündel erfüllen die Gerade d; entsprechende Ebenen gehen nach jenen Doppelsekanten, zu denen auch d gehört, wodurch sie sich selbst entsprechend in den kollinearen Bündeln P wird.

Das Netz $|P_2|$ hat daher alle seine Scheitel auf d, je ∞^1, die zu einer Reihe von Bündeln gehören, in dem nämlichen Punkte; und d ist sich selbst entsprechend.

Also entspricht dieses Netz der zweiten Methode, eine kubische Regelfläche durch drei kollineare Bündel zu erzeugen, bei welchen die Scheitel P, P', P'' in gerader Linie d liegen und diese sich selbst korrespondiert.

Zwei von ihnen, etwa P', P'', erzeugen, weil eben $d = P'P''$ sich selbst entspricht, eine Trägerkurve r^3, welche aus d und zwei sie schneidenden windschiefen Geraden g_1, g_2 besteht (Nr. 375); die Scheitel der durch sie bestimmten Reihe liegen auf d, nach den Doppelsekanten zwischen g_1, g_2 gehen homologe Ebenen und d ist in allen sich selbst entsprechend. Kombinieren wir zur fächerförmigen Erzeugung des Netzes $|P_2|$ einen Bündel dieser Reihe mit P zu einer Reihe, so setzt sich diese Eigenschaft fort.

Nehmen wir entsprechende Büschel aus den P, so zerfällt, weil stets homologe Ebenen aus ihnen nach d gehen, die Trägerkurve R^3 des durch sie gebildeten Netzes in d und einen Kegelschnitt, und die Doppelsekanten zwischen ihnen sind die Axen der Büschel.

Aus den Bündeln des Netzes $|O_2|$ gehen nach jeder Erzeugenden g der Fläche homologe Ebenen; daher stellen die Büschel um die Erzeugenden reduzierte Bündel von $|P_2|$ dar.

Aber nach d gehen auch entsprechende Ebenen aus allen Bündeln O, wobei die Punkte O auf einer Erzeugenden immer dieselbe Ebene liefern; daher repräsentiert der Büschel d auch einen reduzierten Bündel von $|P_2|$.

Aus den Bündeln von $|P_2|$ gehen homologe Ebenen nach der einfachen Leitgerade e; die doppelte Leitgerade d ist auch Konkurrenzgerade homologer Ebenen, aber ∞^1-fach; jede Ebene durch sie, einem bestimmten Bündel P zugerechnet, läuft mit ihren entsprechenden in den andern Bündeln in d zusammen. So wird der Büschel d ∞^1-mal reduzierter Bündel von $|O_2|$, der Büschel e nur einmal. Da jene ∞^1 reduzierten Bündel von den Ebenen des sich selbst entsprechenden Büschels d in den Bündeln P herrühren, so bilden sie eine Reihe in $|O_2|$.

Wir kehren zum allgemeinen Falle zurück. Schneidet man zwei sich stützende Netze $|O_2|$ und $|P_2|$ kollinearer Bündel, deren Trägerfläche F^3 ist, mit einer Ebene E, so ergeben sich zwei sich stützende Netze kollinearer Felder $|\mathfrak{F}_2|$ und $|\mathfrak{G}_2|$ (Nr. 754); ihre Kernkurve C^3 ist der Schnitt der Ebene mit F^3. Die Tripel $(3F)$ rühren von den kubischen Raumkurven R^3 her, den Trägerkurven der Reihen in

$|O_2|$, da in ihre Punkte homologe Strahlen aus allen Bündeln der Reihe zusammenlaufen; und ebenso rühren die $(3G)$ von den r^3 her, welche zu $|P_2|$ in derselben Weise gehören, wie die R^3 zu $|O_2|$. Der Kegelschnitt, welcher zwei Tripel $(3F)$ und $(3G)$ verbindet, ist der Schnitt der Fläche F^2 durch die zugehörigen R^3 und r^3 (Nr. 378). Sie haben fünf Punkte gemein, in denen dann die F^2 die F^3 berührt, weil sie Doppelpunkte des vollen Schnitts der beiden Flächen sind. Legt man die Ebene E durch drei von diesen Punkten, so ergibt sich ein Tripel, das beiden Systemen gemein ist, und ein Kegelschnitt, der in seinen drei Punkten die C^3 tangiert. Die beiden Tripelsysteme werden also identisch und infolgedessen auch die beiden Netze von kollinearen Feldern (Nr. 755); wir kommen auf diese Figur zurück.

Der Grad 19 der Mannigfaltigkeit der Netze kollinearer Ebenenbündel, wie ihn die Formel $i(10-i)+3$ von Nr. 759 für $i=2$ liefert, wurde, übrigens durch dieselben Überlegungen, schon in Nr. 381 ermittelt: er ist der kubischer Flächen. Unterlassen wir aber nicht die Bemerkung, daß eine kubische Fläche nicht eindeutig unsere Figur zweier sich stützenden Netze kollinearer Ebenenbündel bestimmt, sondern 36, soviele als sie Doppelsechsen besitzt.

Vier kollineare Ebenenbündel O_0, O_1, O_2, O_3 führen (Nr. 383, 673) zu einer Raumkurve 6. Ordnung s^6, in deren Punkten homologe Ebenen aus ihnen zusammenkommen. Es ist diejenige Raumkurve 6. Ordnung, welche durch eine kubische Raumkurve zum vollen Schnitte zweier Flächen 3. Ordnung ergänzt wird (vom Range 16 und Geschlechte 3); einer solchen ergänzenden Kurve begegnet sie in acht Punkten. 768

Aus den vier Ebenenbündeln bauen wir fächerförmig ein Gebüsche $|O_3|$ von kollinearen Ebenenbündeln auf, indem wir jeden Bündel des Netzes $(O_1O_2O_3)$ durch eine Reihe mit O_0 verbinden. Die Kurve s^6 liegt auf der Kern- oder Trägerfläche F^3_{123} des genannten Netzes; denn jeder ihrer Punkte ist Konkurrenzpunkt homologer Ebenen von O_1, O_2, O_3 und allen Bündeln des Netzes; da aber auch die homologe Ebene aus O_0 durch ihn geht, und homologe Ebenen von Bündeln einer Reihe in einer Gerade sich schneiden, so folgt, daß entsprechende Ebenen aus allen Bündeln jener ∞^2 Reihen, also aus allen Bündeln von $|O_3|$ durch ihn gehen.

In jeden Punkt von s^6 kommen also aus allen Bündeln von $|O_3|$ homologe Ebenen: sie heiße die Kernkurve des Gebüsches $|O_3|$.

Das Gebüsche $|O_3|$ enthält ∞^4 Reihen $|O_1|$ und ∞^3 Netze $|O_2|$. Die Kernflächen F^3 dieser Netze gehen durch s^6.[1]) Zwei

1) Diese Kurve ist (vgl. Nr. 729), für die Bestimmung einer durchgehenden Fläche 3. Ordnung, mit 16 Punkten äquivalent; so daß ∞^3 kubische Flächen

Netze von $|O_3|$ haben eine Reihe gemein; die Trägerflächen jener haben also die Trägerkurve R^3 dieser gemeinsam, die so die s^6 ergänzt; der F^3-Büschel (s^6, R^3) entsteht durch die ∞^1 Netze, welche durch die Reihe gehen. Alle ∞^4 Trägerkurven R^3 treffen s^6 achtmal.

Der neunte Punkt, in dem eine Trägerfläche und eine Trägerkurve sich begegnen, ist der Scheitel des Bündels, welcher dem Netze und der Reihe gemeinsam ist (Nr. 666).

Auf jeder Trägerfläche F^3 haben wir 6 Geraden a, 6 Geraden b, 15 Geraden c. In die ersteren laufen entsprechende Ebenen aus den Bündeln des betreffenden Netzes zusammen, sie begegnen den auf F^3 befindlichen Trägerkurven R^3 zweimal, die b bilden mit ihnen eine Doppelsechs und treffen diese R^3 nicht, während die c ihnen einmal begegnen (Nr. 379). Die Schnitte dieser Geraden mit einer beliebigen andern Trägerfläche zeigen, daß s^6 von den a, b, c bzw. ein-, drei-, zweimal getroffen wird.

Die Geraden b der Flächen F^3 sind also Trisekanten der s^6.

Ein beliebiger Punkt O des Raums ist Scheitel eines Bündels von $|O_3|$. Denn die Strahlen der Bündel des Netzes $(O_1O_2O_3)$, welche dem Strahle O_0O korrespondieren, sind Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve r^3 (Nr. 766); weil eine von ihnen durch O geht, so gibt es im Netze einen Bündel O', welcher mit O_0 eine durch O gehende R^3 erzeugt; so daß es in der Reihe (O_0O') einen Bündel gibt, dessen Scheitel in O liegt.

Drei Punkte O, O', O'' führen also zu einer durch sie gehenden Trägerfläche F^3; alle durch s^6 gehenden Flächen 3. Ordnung sind daher Trägerflächen von Netzen von $|O_3|$. Durch eine Trisekante gehen ∞^2, die ein Netz bilden; sie ist auf allen eine Gerade b.

Trisekanten der Kernkurve s^6 sind stets Geraden b auf Trägerflächen F^3.

Fällt O in einen Punkt S von s^6, so kommen O_0S und die homologen Geraden aus den andern Bündeln in die in S zusammenlaufenden homologen Ebenen zu liegen; S wird ein Punkt der durch die Büschel um diese Strahlen erzeugten r^3, und durch ihn gehen ∞^1 Doppelsekanten dieser Kurve.

Ein Punkt S von s^6 trägt ∞^1 Bündel von $|O_3|$, welche dann eine Reihe bilden, durch irgend zwei von ihnen konstituiert; denn eine solche Reihe muß ja ganz zu $|O_3|$ gehören (Nr. 666).

Jeder Punkt, der eine Reihe von Bündeln aus $|O_3|$ trägt, liegt auf s^6. Konstituieren wir nämlich $|O_3|$ durch zwei von diesen Bündeln und zwei andere, so gehen durch ihn zwei entsprechende

durch sie gehen, die ein spezielles Gebüsche bilden; drei Punkte bestimmen eine von ihnen.

Ebenen aus diesen letzteren und treffen sich in ihm mit den ihnen in den ersteren entsprechenden.

Homologe Ebenenbüschel aus einer Reihe oder einem Netze von $|O_3|$ bilden eine Schar $|u_1|$ oder ein Netz $|u_2|$; folglich bilden homologe Ebenenbüschel aus allen Bündeln von $|O_3|$ ein Gebüsche $|u_3|$; ihre Axen erzeugen den zugehörigen tetraedralen Komplex T. Die Ecken des Tetraeders desselben sind Punkte, in welche Ebenen aus allen Büscheln zusammenkommen, also Punkte von s^6. Wir erhalten ∞^2 tetraedrale Komplexe und ∞^2 auf s^6 gelegene Quadrupel von Tetraederecken, so daß jeder Punkt von s^6 zu ∞^1 Quadrupeln gehört.

Jeder Büschel eines Bündels von $|O_3|$ enthält vier Ebenen, die mit den homologen einen Punkt von s^6 gemeinsam haben, eine Ecke des betreffenden Tetraeders; also umhüllen in jedem Bündel des Gebüsches diejenigen Ebenen, welche je mit den homologen aus den andern in einem Punkte von s^6 sich schneiden, einen Kegel 4. Klasse, der, wegen seiner eindeutigen Beziehung zu s^6, ebenfalls das Geschlecht 3 hat.

Werden aus allen Bündeln von $|O_3|$ homologe Ebenen 769
genommen, so ergibt sich ein Raum Σ von Ebenen, und es gibt, den ∞^2 Ebenen eines Bündels entsprechend, ∞^2 Räume Σ.

Eine beliebige Ebene π gehört einfach zu einem bestimmten $\overline{\Sigma}$ dieser Räume. Es sei $\overline{\pi}_0$ die Ebene von O_0, die nach $\overline{\Sigma}$ geht; die zu ihr homologen und daher ebenfalls nach $\overline{\Sigma}$ gehenden der Bündel des Netzes $(O_1 O_2 O_3)$ konkurrieren nach einem Punkte $\overline{P}$ der Trägerfläche F^3_{123}; die Ebene von $\overline{P}$ nach $\overline{\pi_0 \pi}$ gehört also zu einem bestimmten Bündel O' jenes Netzes; für die kubische Raumkurve R^3, welche durch die Bündel O_0 und O' erzeugt wird, ist $\overline{\pi_0 \pi}$ Doppelsekante, und der dritte Schnitt derselben mit $\overline{\pi}$ ist der Scheitel O des einzigen Bündels aus $|O_3|$, welcher die Ebene $\overline{\pi}$ nach $\overline{\Sigma}$ schickt.

Zwei Räume Σ enthalten zwei Ebenen aus irgend einem der Bündel, etwa aus O_0; der Büschel, den diese bestimmen, und die homologen in den andern O führen zu einem Gebüsche $|u_3|$ von projektiven Ebenenbüscheln; auf ihn stützt sich ein Büschel $|\Sigma_1|$ kollinearer Räume (Nr. 758), zu dem die beiden Σ gehören. Damit ist die Kollineation dieser und aller Σ bewiesen.

Das System der Σ enthält ∞^2 Büschel $|\Sigma_1|$, weil ein Bündel von $|O_3|$ so viele Büschel enthält; je zwei haben einen Raum gemeinsam, wie die beiden Büschel im Bündel eine Ebene; der gemeinsame von Raum von $(\Sigma_0 \Sigma)$ und $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ lehrt wieder, daß Σ sich in einem der Büschel von Σ_0 nach den Räumen von $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ befindet, so daß das

System fächerförmig aus drei Konstituenten hergestellt werden kann. Es ist also ein Netz $|\Sigma_2|$, und $|\Sigma_2|$ und $|O_3|$ stützen sich.

Gehen wir von drei kollinearen Räumen Σ_0, Σ_1, Σ_2 und dem aus ihnen hergestellten Netze $|\Sigma_2|$ aus, so ergibt sich durch den Inbegriff homologer Ebenen ein Bündel; denn durch den Punkt O, welcher drei homologen Ebenen von $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ gemeinsam ist, gehen die homologen Ebenen aller Räume Σ' des Büschels $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ und dann wieder die homologen Ebenen aller Räume der verschiedenen Büschel $(\Sigma_0 \Sigma')$, d. i. aller Räume von $|\Sigma_2|$. Jeder Punkt O ist ein solcher Konkurrenzpunkt; denn von dem Bündel in Σ_1, der dem Bündel O von Σ_0 entspricht, geht ein Büschel durch O und von dessen entsprechendem Büschel in Σ_2 eine Ebene. So ergeben sich die Bündel von $|O_3|$, um jeden Punkt einer.

Die homologen Ebenen aber aus den Bündeln von $|O_3|$, die in einen Punkt S von s^6 konkurrieren, erzeugen einen Raum Σ_S, der sich auf den Bündel um diesen Punkt S reduziert hat. Unser Netz $|\Sigma_2|$ enthält ∞^1 reduzierte Räume, jeder Büschel von ihm vier; die Scheitel sind die Ecken des Koinzidenztetraeders.

Wenn π_S eine durch S gehende Ebene ist, so muß sie zu ∞^1 Bündeln von $|O_3|$ gehören, welche sie in Σ_S schicken. Zwei von ihnen, mit π_S als sich selbst entsprechender Ebene, erzeugen eine Raumkurve R^3, die in einen in π_S gelegenen Kegelschnitt $\mathfrak{S}^2$ und eine ihn treffende Gerade s zerfällt. Ersterer ist der Ort der Scheitel jener ∞^1 Bündel, die eine Reihe bilden. Von den 8 Begegnungspunkten dieser R^3 mit s^6 fallen 5 auf $\mathfrak{S}^2$ in die 5 weiteren Schnitte der Ebene π_S, und 3 auf s, so daß diese Gerade s eine dreifache Sekante von s^6 ist. Betrachten wir eine durchgehende F^3, so wissen wir (Nr. 384), daß von einer so zerfallenden R^3 der gerade Bestandteil eine b, also eine Trisekante der s^6 sein muß.

Es sei $|\Sigma_1|$ ein Büschel aus $|\Sigma_2|$, in welchem der reduzierte Raum Σ_S sich befindet; S ist dann Ecke des Koinzidenztetraeders, σ sei die Gegenebene. Für die ausgeartete Kollineation zwischen Σ_S und einem andern Σ des Büschels ist S singulärer Punkt in Σ_S und σ singuläre Ebene in Σ. Der Ebene π_S von jenem korrespondieren in diesem alle Ebenen eines Büschels, dessen Axe in σ liegt und der π_S in der charakteristischen Kollineation entspricht; das sind die Ebenen der Bündel jener Reihe (mit den Scheiteln auf $\mathfrak{S}^2$), die nach Σ gehen. Diese Axe ist Doppelsekante der Trägerkurve ($\mathfrak{S}^2$, s) und zwar zwischen den beiden Bestandteilen $\mathfrak{S}^2$ und s. Durchläuft Σ den Büschel $|\Sigma_1|$, so bewegt sie sich in einem Strahlenbüschel in σ, der durch denjenigen Ebenenbüschel irgend eines Bündels jener Reihe, dessen Ebenen nach den Σ des $|\Sigma_1|$ gehen, in σ eingeschnitten wird. In diesem Büschel befindet sich π_S, also liegt der Scheitel des Strahlenbüschels auf $\pi_S \sigma$. Folglich muß der Stützpunkt der verschiedenen Strahlen auf $\mathfrak{S}^2$ fest sein, der eine Schnittpunkt von $\mathfrak{S}^2$ mit σ, während der andere an s gleitet; der andere Schnittpunkt ist $s\mathfrak{S}^2$.

Also liegt s in der Ebene σ, und von den 6 Schnitten der s^6 mit σ sind 3 die übrigen Tetraederecken, und 3 liegen auf s; und damit ist s eine ganz bestimmte Gerade in σ geworden, die sich nicht ändert, wenn π_S um S gedreht wird.

So ist dem Punkte S von s^6 eine bestimmte Trisekante s dieser Kurve zugeordnet. Sie wird getroffen von allen den Kegelschnitten $\mathfrak{S}^2$, die in den Ebenen von S durch die fünf weiteren Schnittpunkte mit s^6 gehen[1]), von denen jeder in seiner Ebene der Ort der Scheitel der Bündel ist, welche diese Ebene in den Raum Σ_S schicken.

Die Gerade s ergänzt diese $\mathfrak{S}^2$ zu Trägerkurven R^3.

Den ∞^1 Büscheln von $|\Sigma_2|$, die durch Σ_S gehen, gehören die Ebenen σ durch s als Gegenebenen des S in den Koinzidenztetraedern zu; jeder Punkt von s^6 wird einmal zweiter Tetraeder-Eckpunkt neben dem festen S.

Jeder Punkt S von s^6 ist Träger einer Reihe konzentrischer Bündel aus $|O_3|$; die Trägerkurve R^3_S besteht aus den drei gemeinsamen Koinzidenzgeraden; sie sind Trisekanten s_1, s_2, s_3 von s^6, weil für den Kegelschnitt, der aus je zweien besteht, die dritte die Ergänzung zur R^3_S ist. Die sechsten Schnitte der s^6 mit den Ebenen $s_2 s_3$, $s_3 s_1$, $s_1 s_2$ sind die den s_1, s_2, s_3 zugeordneten Punkte S.

Auf den F^3 des Büschels (s^6, R^3_S) ist S Doppelpunkt; wie auch die Erzeugung durch zwei jener konzentrischen Bündel und einen dritten lehrt.

Entsprechende Bündel $P_0, P_1, P_2, \ldots$ aus den Räumen Σ_0, Σ_1, $\Sigma_2, \ldots$, bilden das Netz $|P_2|$, das sich auf ein gewisses Netz $|O_2|$ von $|O_3|$ stützt; sie erzeugen dieselbe Fläche F^3.

Korrespondierende Punkte der Räume Σ erzeugen eine Trägerfläche F^3, und ebenso sind korrespondierende Geraden die Doppelsekanten einer Trägerkurve R^3.

Eine r^3 auf einer F^3 hat zu Doppelsekanten entsprechende Strahlen der Bündel des zu F^3 gehörigen $|O_2|$; diese Kongruenz ist in dem tetraedralen Komplexe enthalten, den die entsprechenden Strahlen aller Bündel von $|O_3|$ bilden, und die r^3 ist dem Tetraeder umgeschrieben, welches zugleich dem $|\Sigma_1|$ zugehört, das sich auf das Gebüsch $|u_3|$ der projektiven Büschel um diese Geraden stützt; r^3 trifft also s^6 in vier Punkten, und wir haben für zwei Kurven R^3

1) In den „Flächen dritter Ordnung“ S. 232 habe ich umgekehrt gezeigt, daß jeder dreifachen Sekante der Raumkurve 6. Ordnung, die mit einer kubischen Raumkurve den Schnitt zweier Flächen 3. Ordnung bildet, ein Punkt der Kurve in dieser Weise zugeordnet ist.

und r^3 auf derselben F^3 die $8 + 4$ Begegnungspunkte der verbindenden Fläche 2. Grades mit s^6.

Erzeugen wir eine F^3 durch das Netz $|P_2|$ entsprechender Bündel aus den Σ, so werden die Trisekanten b nunmehr die Geraden, in welche entsprechende Ebenen aus diesen Bündeln und daher auch aus den Σ zusammenkommen. Jede Trisekante der s^6 ist ∞^2mal eine Gerade b auf einer F^3. Also:

In jede Trisekante der s^6 laufen entsprechende Ebenen aus allen Räumen von $|\Sigma_2|$ zusammen.

Dadurch entstehen in Büschel reduzierte Bündel von $|O_3|$.

770 Das Netz $|\Sigma_2|$ führt, von sich aus, zu einer Raumkurve 6. Ordnung. In Nr. 674 wurde die Ordnung der Kurve der Punkte ermittelt, welche entsprechenden Büschel-Grundkurven von drei kollinearen Flächengebüschen gemeinsam sind, und als Spezialfall die Raumkurve 6. Ordnung erwähnt, in deren Punkten entsprechende Geraden aus drei kollinearen Räumen zusammenkommen. Diese läßt sich auch folgendermaßen gewinnen. Die Geraden von Σ_0, welche sich mit ihren entsprechenden in Σ_1 auf einer gegebenen Ebene φ treffen, verbinden die Punkte dieser Ebene $\varphi \equiv \varphi_1$, als Ebene von Σ_1, mit den korrespondierenden in φ_0, und erzeugen (Nr. 383) die Kongruenz der Schmiegungsaxen einer kubischen Raumkurve, für welche φ und φ_0 Schmiegungsebenen sind; Σ_0 und Σ_2 führen ebenfalls zu einer solchen Kongruenz, wo φ wiederum Schmiegungsebene ist, und der duale Satz zu einem in Nr. 378 erhaltenen über gemeinsame Doppelsekanten zweier kubischen Raumkurven führt zu 6 nicht in φ gelegenen gemeinsamen Schmiegungsaxen, also zu 6 Geraden von Σ_0, welche im Schnittpunkte mit φ von beiden entsprechenden Geraden in Σ_1 und Σ_2 getroffen werden. Durch den Schnittpunkt von $g_0 = \alpha_0\beta_0$, $g_1 = \alpha_1\beta_1$, $g_2 = \alpha_2\beta_2$ gehen alle entsprechenden Ebenen α und β, also alle $g = \alpha\beta$.

Das Netz $|\Sigma_2|$ besitzt eine Kurve 6. Ordnung t^6, in deren Punkte entsprechende Geraden aus allen seinen Σ zusammenlaufen.

Bei einem solchen Konkurrenzpunkt haben wir in jedem der Räume Σ einen Büschel von Ebenen, welche je mit der korrespondierenden in den andern Räumen diesen Punkt gemein haben; dadurch wird er Träger einer Reihe von konzentrischen Bündeln in $|O_3|$, also Punkt von s_6 (Nr. 768).

Umgekehrt, nehmen wir für einen Punkt S von s^6 zwei Räume Σ_0, Σ_1 aus $|\Sigma_2|$, für die er Koinzidenzpunkt ist, und entspricht ihm S_2 in Σ_2, so trifft sich der S_2S mit den entsprechenden in Σ_0, Σ_1 in S; wodurch er auf die Kurve t^6 kommt.

Die beiden für $|O_3|$ und $|\Sigma_2|$ gefundenen Kurven 6. Ordnung s^6 und t^6 sind identisch.

Die entsprechenden Büschel um drei in S konkurrente Geraden g_0, g_1, g_2 von $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ besitzen 3 Tripel homologer Ebenen, welche eine Gerade gemeinsam haben, durch die dann auch die entsprechenden Ebenen aus den anderen Räumen gehen.

Durch jeden Punkt S von s^6 gehen drei Geraden, welche entsprechenden Ebenen aus allen Räumen von $|\Sigma_2|$ gemeinsam sind, also Trisekanten von s^6.

So ergeben sich, von neuem, durch jeden Punkt von s^6 drei Trisekanten dieser Kurve.

Diese drei Trisekanten werden auch durch das Geschlecht 3 des Kegels 5. Ordnung gefordert, der die s^6 aus einem Punkte auf ihr projiziert.

Daß solche gemeinsamen Geraden entsprechender Ebenen der Σ Trisekanten von s^6 sind, ergibt sich auch folgendermaßen. Es seien $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ drei entsprechende Ebenen aus $\Sigma_0, \ldots$, denen k gemeinsam ist. Die Geraden in α_0, welche ihren entsprechenden in α_1 begegnen, sind Tangenten der α_0-Kurve des zu $(\Sigma_0\Sigma_1)$ gehörigen tetraedralen Komplexes (Nr. 490); k gehört als $\alpha_0\alpha_1$ zu ihnen und ebenso als $\alpha_0\alpha_2$ zu den Tangenten der α_0-Kurve des zu $(\Sigma_0\Sigma_2)$ gehörigen Komplexes. Die drei weiteren gemeinsamen Tangenten sind Geraden von α_0, die je in ihrem Schnittpunkte mit k die korrespondierenden aus α_1 und α_2 treffen. Damit kommen diese drei Punkte von k auf s^6; die k sind s.

Also enthält jede Ebene α aus einem der Räume Σ, die mit ihren entsprechenden aus den andern eine Gerade s gemeinsam hat, drei Geraden desselben Raumes, welche mit ihren entsprechenden in den andern, in einen der Punkte von s auf s^6, zusammenkommt.

Indem wir die Trisekanten von s^6 als Geraden b der Trägerflächen F^3 und als Konkurrenzgeraden homologer Ebenen der Σ erkannt haben, sind wir imstande, den Grad ihrer Regelfläche zu ermitteln.[1]) Weil ein Ebenenbüschel oder Ebenenbündel aus Σ_0 mit den homologen in Σ_1, Σ_2 eine kubische Raumkurve, bzw. eine kubische Fläche erzeugt, so umhüllen die Ebenen von Σ_0, welche mit den entsprechenden sich auf einer gegebenen Ebene E oder Gerade l schneiden, eine Fläche 3. Klasse, bzw. einen Torsus 3. Klasse; von den neun gemeinsamen Tangentialebenen dieser kommt eine mit den entsprechenden im Punkte $\mathsf{E}l$ zusammen, die acht anderen treffen sich

1) Für den speziellen Fall der Kegelspitzen-Kurve eines F^2-Netzes ist es schon geschehen (Nr. 692).

mit den homologen in einem Punkte von E und einem davon verschiedenen von l, also in einer Gerade, welche l trifft.

Die Regelfläche der Trisekanten der s^6 oder der Geraden b auf den Trägerflächen F^3 oder derjenigen Geraden, die mit einem Kegelschnitte eine Trägerkurve R^3 zusammensetzen, oder endlich der Geraden, welche entsprechenden Ebenen aus den Räumen Σ gemeinsam sind, ist 8. Grades und hat die s^6 zur dreifachen Kurve.

Ihr Schnitt mit irgend einer Trägerfläche F^3 besteht aus s^6 und den sechs Geraden b dieser Fläche.

Die dreifache Kurve bewirkt das Geschlecht 3 dieser Regelfläche, welches ihr, wegen der eindeutigen Beziehung ihrer Geraden zu den Punkten von s^6, zukommen muß.

Die Regelfläche 8. Grades befindet sich in den tetraedralen Komplexen aller Büschel von $|\Sigma_2|$.

Weil ein Bündel P_0 von Σ_0 sechs Ebenen enthält, welche mit den entsprechenden in P_1, P_2 eine Gerade gemein haben, nämlich eine b der erzeugten F^3, so enthält jeder von den Räumen Σ einen Torsus 6. Klasse (vom Geschlechte 3) von solchen Ebenen, welche mit den entsprechenden aus den andern Räumen in eine Gerade s zusammenkommen.

Sind l_0, l_1, l_2 in Σ_0, Σ_1, Σ_2 entsprechend und g_0, g_1, g_2 drei sie bzw. treffende und ebenfalls entsprechende Geraden, welche einen Punkt S gemeinsam haben, so muß dieser der Schnittpunkt der drei homologen Ebenen $l_0 g_0$, $l_1 g_1$, $l_2 g_2$ sein, also auf der durch die drei entsprechenden Büschel l_0, l_1, l_2 erzeugten Kurve R^3 liegen, der Trägerkurve der $|O_1|$ von (O_3), welche auf das $|u_2|$ aus $|\Sigma_2|$ sich stützt, das durch jene Büschel konstituiert wird. Weil sie acht Punkte mit s^6 gemein hat, so gibt es acht solche Tripel g_0, g_1, g_2, welche l_0, l_1, l_2 bzw. treffen.

In jedem der Räume Σ bilden diejenigen Geraden g, welche mit ihren entsprechenden in einem Punkte von s^6 sich treffen, eine Regelfläche 8. Grades.

Wir fanden die Büschel s als reduzierte Bündel aus $|O_3|$; die ausgeartete Kollineation zwischen einem reduzierten Bündel und einem beliebigen O hat s in jenem zur singulären Gerade und die nach Σ_S gehende Ebene in diesem zur singulären Ebene, wo s und S in der obigen Weise zusammengehören. In der charakteristischen Projektivität zwischen dem Ebenenbüschel um s und dem Strahlenbüschel von O in dieser Ebene sind entsprechend: eine σ durch s und die Axe des Ebenenbüschels in O, dessen Ebenen nach den Räumen desjenigen $|\Sigma_1|$ gehen, der Σ_S enthält und σ zur Tetraederebene hat.

Die Kollineation zwischen zwei reduzierten Bündeln s, s', deren Axen den S, S' zugeordnet sind, ist in zweiter Stufe ausgeartet; singuläre Elemente sind s, sS' in dem einen und $s'S, s'$ im andern Bündel.

Die Formeln von Nr. 759 geben für beide Gebilde: $|O_3|$ und $|\Sigma_2|$ den Mannigfaltigkeitsgrad 24; das ist der einer allgemeinen Raumkurve 6. Ordnung, die mit einer kubischen Raumkurve den Schnitt zweier kubischen Flächen bildet.[1])

Hier wird wiederum durch s^6 als Grundgebilde der Figur der $|O_3|$ und $|\Sigma_2|$ diese eindeutig bestimmt. Denn s^6 hat auf jeder durch sie gehenden F^3 eine ausgezeichnete Doppelsechs der Geraden b, welche sie dreimal, und der Geraden a, welche sie einmal treffen. Wir legen zwei kubische Flächen durch s^6, bestimmen den weiteren Schnitt R^3, der den a zweimal begegnet, legen O_0, O_1 auf R^3, O_2, O_3 auf die eine und die andere Fläche, machen O_0, O_1, O_2 durch die eine, O_0, O_1, O_3 durch die andere kollinear; in beiden Fällen ist die Kollineation zwischen O_0, O_1 dieselbe, nämlich die, welche R^3 erzeugt; wir haben die vier konstituierenden Bündel von $|O_3|$. Die Netze und Reihen führen zu den übrigen F^3 und R^3, wobei immer nach den a einer F^3 entsprechende Ebenen geben; so daß es gleichgültig, von welchen zwei Flächen durch s^6 ausgegangen wird.

Wir wollen hier zwei anschauliche Beispiele dieser Figur vorführen. Es liege erstens ein Netz N von Flächen 2. Grades vor. Dann haben wir das Netz $|\Sigma_2|$ der Räume der Polarebenen sämtlicher Punkte des Raums in bezug auf seine einzelnen Flächen, und, darauf sich stützend, das Gebüsche $|O_3|$ der Bündel der Polarebenen, in bezug auf die Flächen von N, für die einzelnen Punkte des Raums. 771

Entsprechend sind in den Bündeln von $|O_3|$ die Polarebenen verschiedener Punkte je in bezug auf die nämliche Fläche, in den Räumen von $|\Sigma_2|$ die Polarebenen desselben Punktes in bezug auf die verschiedenen Flächen von N.

Die Kegelspitzen-Kurve von N ist die Kernkurve s^6; denn nur in bezug auf einen Kegel des Netzes laufen die Polarebenen aller Punkte des Raums in einen Punkt, die Spitze, zusammen. Diese Spitzen haben aber die zweite Eigenschaft (Nr. 693), daß die Polarebenen einer jeden von ihnen in bezug auf alle Flächen des Netzes nicht bloß einen Punkt, sondern eine Gerade gemeinsam haben, eine Trisekante s der Kegelspitzen-Kurve s^6, und so erhalten wir die homologen Ebenen aus den Σ, welche durch dieselbe s gehen, so daß jede einem S zugeordnet wird, zu welchem sie in bezug auf das Netz konjugiert ist. Daraus folgt dann, daß die Polaren der s in bezug auf alle Flächen von N, homologe Geraden der Σ, in den S konkurrieren.

1) Math. Annalen Bd. 21, Tabelle S. 494 $n = 6$, Nr. 5, Kolonne u_3.

Es gibt $\infty^{3(9-2)}$ F^2-Netze und zugehörige Kegelspitzen-Kurven, so daß diese einen um 3 kleineren Mannigfaltigkeitsgrad haben, als die allgemeinen s^6.

Es liege zweitens ein Gebüsche G von Flächen 2. Grades vor und eine Ebene E. Das Netz $|\Sigma_2|$ entsteht hier durch die Polarebenen, in bezug auf die Flächen von G, zu den verschiedenen Punkten von E und das Gebüsche $|O_3|$ durch die Bündel um die Pole dieser Ebene E in bezug auf die verschiedenen Flächen von G. Entsprechend in den Σ sind die Polarebenen der verschiedenen Punkte von E in bezug auf dieselbe Fläche, in den Bündeln O die Polarebenen desselben Punktes von E in bezug auf die verschiedenen Flächen von G. Die Punkte einer Gerade in E führen dann zu einem Gebüsche von projektiven Ebenenbüscheln in den Bündeln von $|O_3|$, ihren Polarebenen in bezug auf die Flächen von G, und für vier Punkte der Gerade sind die Polarebenen konkurrent. So ergibt sich in E eine Kurve 4. Ordnung, deren Punkte zusammenlaufende Polarebenen haben; die Konkurrenzpunkte bilden die Kernkurve s^6. Das Gebüsche besitzt (Nr. 688) eine Kegelspitzen-Fläche 4. Ordnung, und jeder Punkt derselben ist einem andern involutorisch zugeordnet, derartig, daß die Polarebenen des einen in den andern zusammenlaufen; unsere Kurve 4. Ordnung s^4 in E ist der Schnitt mit dieser Kegelspitzen-Fläche, und die Kernkurve, ebenfalls auf ihr gelegen, entsteht durch die ihren Punkten involutorisch zugeordneten Punkte. In ihren dreifachen Sekanten s schneiden sich die Polarebenen aller Punkte von E in bezug auf gewisse Flächen von G, nämlich die Kegel, welche ihre Spitzen in E haben: auf jener Kurve 4. Ordnung s^4. Die dreifachen Sekanten s der s^6 sind also die Polarstrahlen der Ebene E in bezug auf diese Kegel; da sie je durch die Spitze gehen, so muß s^4 ein Teil des Schnitts der Regelfläche 8. Grades der Trisekanten mit E sein, und vier von diesen müssen in die Ebene E fallen. Dann werden sie, als Polarstrahlen von E, Berührungskanten dieser Ebene mit Kegeln des Gebüsches; und in der Tat enthält ein F^2-Gebüsche vier Kegel, welche eine gegebene Ebene berühren, oder das Kegelschnitt-Gebüsche, in dem es von ihr geschnitten wird, vier Doppelgeraden (die Grundtangenten der Kegelschnitt-Schar, zu der es apolar ist).

Die sechs Schnittpunkte der Kurve s^6 mit der Ebene E müssen zu je dreien auf diesen vier in E gelegenen Trisekanten liegen; daher sind sie die Ecken des Vierseits dieser Geraden.

Zwei Gegenecken sind konjugiert in bezug auf das Gebüsche der Flächen 2. Grades und der Kegelschnitte.

Endlich ist die Kurve s^6 auch Ort der Konkurrenzpunkte von entsprechenden Geraden aus den Σ, also der Axen der Polarebenen-büschel der Punkte von E in bezug auf gewisse Flächenbüschel aus G. Diese Punkte sind dann gemeinsame Pole der Ebene E bezüglich der Flächen dieser Büschel. In der Tat, G enthält ∞^1 Büschel, zu deren allen Flächen gemeinsamen Polartetraedern die Ebene E gehört; die Gegenecken erfüllen die Kurve s^6. In den sechs Schnitten derselben mit E wird diese Ebene von allen Flächen eines Büschels aus G berührt, in jedem andern Punkte nur von einer Fläche.

Die $\infty^{4(9-3)}$ Gebüsche von Flächen 2. Grades und die ∞^3 Ebenen führen zunächst zu dem Grad 27 der Mannigfaltigkeit. Aber die der Kurven 6. Ordnung vom Geschlecht 3 ist 24, und hier liegt noch die spezielle Eigenschaft vor, daß s^6 von der Ebene E in den Ecken eines Vierseits geschnitten wird, welche den Grad 23 bewirkt.[1])

Aus fünf kollinearen Bündeln $O_0, \ldots, O_4$ bauen wir ein lineares System 4. Stufe $|O_4|$ auf. Es enthält ∞^6 Reihen und Netze, ∞^4 Gebüsche; jeder seiner Bündel befindet sich in ∞^3 Reihen, ∞^4 Netzen, ∞^3 Gebüschen, eine Reihe in ∞^2 Netzen und Gebüschen, ein Netz in ∞^1 Gebüschen. 772

Wir haben schon gefunden (Nr. 383, 673), daß es zehn Punkte K gibt, nach denen homologe Ebenen aus den fünf konstituierenden und dann aus allen Bündeln von $|O_4|$ zusammenlaufen. Durch diese Kernpunkte K gehen die Trägerflächen F^3 der ∞^6 Netze und die Kernkurven s^6 der ∞^4 Gebüsche.

Sei F^3_{012} die Trägerfläche des Netzes $(O_0 O_1 O_2)$, so erhält man die durch dies Netz gehenden Gebüsche vermittelst der vierten Konstituente O, welche die Reihe $(O_3 O_4)$ durchläuft; ihre Kernkurven s^6 werden, außer der Trägerkurve R^3_{01} der Reihe $(O_0 O_1)$, in F^3_{012} eingeschnitten durch die Trägerflächen F^3 der Netze $(O_0 O_1 O)$, welche einen Büschel bilden mit R^3_{01} und der zu $(O_0 O_1 O_3 O_4)$ gehörigen Kernkurve als Grundkurve.

Diesen s^6 auf F^3_{012} sind gemeinsam die zehn Kernpunkte und die sechs Geraden b auf dieser Fläche als dreifache Sekanten s. Jede von ihnen bildet mit R^3_{01} die Grundkurve eines F^3-Büschels, und diese Büschel, denen F^3_{012} gemeinsam ist, erzeugen ein Netz, dessen Basis aus R^3_{01} und den zehn Kernpunkten besteht. Die Netze von $|O_4|$, zu denen diese F^3 als Trägerflächen gehören, sind diejenigen, welche die Reihe $(O_0 O_1)$ mit den Bündeln von $(O_2 O_3 O_4)$ verbinden.

Diese Eigenschaft der R^3, mit den Kernpunkten ein F^3-Netz zu bestimmen, drückt ihre Beziehung zu den Kernpunkten aus.

1) Die Mitteilung des Beweises von Schur (Math. Annalen Bd. 18 S. 20), daß zu einer Kurve s^6, die von einer Ebene E so geschnitten wird, ∞^4 Gebüsche G hergestellt werden können, würde uns hier zu weit führen.

Das System der ∞^6 Flächen F^3 ist nicht linear, enthält aber ∞^6 Netze der eben beschriebenen Art und ∞^4 Gebüsche, je mit einer s^6 als Grundkurve.

Wir haben zwar ∞^4 Kurven s^6, jede mit ∞^1 dreifachen Sekanten s; aber das System dieser Geraden ist nur doppelt unendlich; jede gehört zu ∞^3 Kurven s^6 als dreifache Sekante.

Es habe sich s bei einer gewissen s^6 ergeben; dann stellt ihr Büschel einen reduzierten Bündel in dem zugehörigen Gebüsche dar, der dann also auch zu $|O_4|$ gehört, und damit wird s dreifache Sekante für die Kernkurve eines jeden der ∞^3 Gebüsche, welche durch jenen reduzierten Bündel gehen.

Jeder Punkt O des Raumes muß nunmehr Scheitel von ∞^1 Bündeln aus $|O_4|$ sein, die eine Reihe $|O_1|$ bilden; diese Bündel haben drei Koinzidenzgeraden. Die ∞^2 Netze durch $|O_1|$, konstituiert durch zwei Bündel aus $|O_1|$ und einen dritten, haben Trägerflächen, für welche O Doppelpunkt ist, als gemeinsamer Scheitel zweier erzeugenden Bündel (Nr. 385); und die drei Koinzidenzgeraden sind die drei binären Geraden b durch ihn, also dreifache Sekanten aller der auf diesen Flächen gelegenen Kernkurven. Diejenigen der ∞^2 Gebüsche, welche die Reihe enthalten und durch sie und zwei weitere Bündel konstituiert sind, gehen durch O, weil die in O sich schneidenden homologen Ebenen aus diesen letzteren Bündeln mit denen der Bündel aus $|O_1|$ sich in O schneiden. Und umgekehrt, wenn die Kernkurve eines Gebüsches durch O geht, so besitzt dieses eine Reihe von Bündeln mit O als gemeinsamem Scheitel (Nr. 768).

Daraus folgt, daß durch einen Punkt O ∞^2 Kernkurven gehen und allen die von ihm ausgehenden dreifachen Sekanten gemeinsam sind.

Die beiden zu zwei Punkten O, O' gehörigen Reihen bestimmen ein Gebüsche; dessen Kernkurve geht durch O und O', so daß zwei Punkte eindeutig eine Kernkurve aus dem vierfach unendlichen Systeme derselben ausscheiden.

Sind aber O, O' auf einer s gelegen, so gehört der reduzierte Bündel s zu beiden Reihen, so daß diese sich in dem nämlichen Netze befinden. Die ∞^1 durchgehenden Gebüsche führen zu so vielen durch O, O' gehenden s^6. Die zu einem dritten Punkte O'' von s gehörige Reihe hat mit jedem dieser Gebüsche den reduzierten Bündel gemeinsam und fällt in eins von ihnen; dessen Kernkurve geht durch O''. So zeigt sich, daß durch beliebige drei Punkte einer s eine Kernkurve geht; womit die dreifache Unendlichkeit der s^6, welche eine und dieselbe s zur Trisekante haben, noch anschaulicher erkannt ist.

Die Ordnung 3 der Kongruenz der Geraden s ist nun schon zutage getreten.

Von den ∞^1 Gebüschen, welche durch das Netz $(O_0 O_1 O_2)$ gehen, enthält eins den reduzierten Bündel s; seine auf F^3_{012} gelegene s^6 hat daher die s zur dreifachen Sekante. Folglich reicht dieser Büschel von Kernkurven s^6 auf F^3_{012} schon hin, um durch ihre dreifachen Sekanten die ganze Kongruenz $|s_2|$ der s zu liefern.

Jede dreifache Sekante s muß sich daher auf einer der Flächen des oben erwähnten Netzes befinden, das durch die F^3-Büschel entsteht, welche R^3_{01} zusammen mit den s^6 auf F^3_{012} zu Grundkurven haben.

Die Geraden s sind die Geraden b auf den Flächen dieses Netzes, d. h. je die sechs gegen R^3_{01} windschiefen Geraden.

Ein Punkt X scheidet aus diesem Netze einen Büschel aus; dessen Grundkurve s^6 geht durch ihn, und die dreifachen Sekanten dieser Kurve, welche er aussendet, sind die einzigen Geraden s durch ihn.

Was aber die Klasse der Kongruenz $|s_2|$ anlangt, so ist festzustellen, wie oft in dem durch das F^3-Netz in eine Ebene ϵ eingeschnittenen Kurvennetze 3. Ordnung mit drei Grundpunkten R, den Spuren von R^3_{01}, eine Kurve so in Kegelschnitt und Gerade zerfällt, daß die Gerade durch keinen der Punkte R geht.

Wir wollen von einer der in ϵ gelegenen Geraden s — sie heiße s^* — ausgehen und ermitteln, wie viele sich noch in ϵ befinden; wir benutzen die Fläche $F_0{}^3$, welche sie enthält, als die eine Konstituente des Netzes und zwar diejenige, welche für die fächerförmige Erzeugung den Scheitel bildet. Ihr Schnitt besteht aus s^* und einem Kegelschnitt k^*, der durch die $(3R)$ geht.[1]) Der Büschel der Schnitte der beiden andern Konstituenten schneidet in s^* und k^* je eine kubische Involution I_s, I_k, zwischen denen Projektivität besteht. Es ist zu entscheiden, wie oft zwei Punkte eines Tripels von I_k mit einem des entsprechenden Tripels von I_s in gerader Linie liegen. Die Seiten der Tripeldreiecke von I_k umhüllen einen andern Kegelschnitt (Nr. 193); ihre drei Schnitte mit s^* ordnen wir den drei Punkten des entsprechenden Tripels von I_s zu, so ergibt sich auf s^* eine Korrespondenz [6, 3]. Zusammengehörige Tripel rühren ja von einer der s^6 auf $F_0{}^3$ her.

Jeder von den beiden Punkten (s^*, k^*) ist zwei entsprechenden Tripeln gemeinsam, und liefert eine doppelte Koinzidenz, von der abzusehen ist. Die fünf andern weisen auf so viele weitere in ϵ gelegene Geraden s hin, und die Kongruenz $|s_2|$ ergibt sich als

1) Der Fall einer nicht zerfallenden Spurkurve der $F_0{}^3$ in ϵ ist erheblich schwieriger.

6. Klasse; wie auch Reye schon, aus speziellen Ebenen schließend, vermutet hat.

Man betrachte zur Bestätigung noch eine Ebene ϵ, welche F_0^3 in drei Geraden schneidet.

773 Die homologen Ebenen aus den Bündeln von $|O_4|$ bilden wiederum Ebenensysteme 4. Stufe $\mathfrak{V}$, wie wir sie in Nr. 761 kennen gelernt haben. Sie bilden ein Netz $|\mathfrak{V}_2|$, das sich auf $|O_4|$ stützt; und auf jedes System $|u_4|$ homologer Ebenenbüschel aus $|O_4|$ stützt sich eine Reihe $|\mathfrak{V}_1|$ aus diesem Netze, und da jede zwei $\mathfrak{V}$ eine Reihe bestimmen, so ist durch die Kollineation der $\mathfrak{V}$ einer Reihe schon die Kollineation aller $\mathfrak{V}$ bewiesen.

Auf eine Reihe $|O_1|$ aus $|O_4|$ stützt sich ein Netz $|v_2|$ homologer Ebenenbüschel aus den $\mathfrak{V}$, und homologe Geraden der $\mathfrak{V}$ bilden die Kongruenz der Doppelsekanten einer Trägerkurve R^3, im vorliegenden Falle von $|O_1|$ und $|v_2|$.

Ferner, auf ein Netz $|O_2|$ aus $|O_4|$ stützt sich ein Netz $|P_2|$ homologer Ebenenbündel aus den $\mathfrak{V}$; homologe Punkte der $\mathfrak{V}$ erfüllen also eine Trägerfläche F^3 (von $|O_2|$ und $|P_2|$). Endlich auf ein Gebüsche $|O_3|$ von $|O_4|$ stützt sich ein Netz $|\Sigma_2|$ homologer Räume aus den $\mathfrak{V}$.

Eine Ebene $\overline{\pi}$, einem bestimmten $\overline{\mathfrak{V}}$ zugehörig, kommt (vgl. Nr. 769) von ∞^1 Bündeln O, deren Scheitel einen Kegelschnitt $\mathfrak{S}^2$ in π erfüllen, der mit einer ihn treffenden Gerade s die Trägerkurve dieser Reihe von Bündeln bildet. Durch die Reihe gehen ∞^2 Gebüsche von $|O_4|$, ihre Kernkurven s^6 treffen $\mathfrak{S}^2$ fünfmal, s dreimal, und nach dem sechsten Punkte jeder s^6 in $\overline{\pi}$ laufen die zu $\overline{\mathfrak{V}}$ gehörigen homologen Ebenen der Bündel des betreffenden Gebüsches zusammen. Zu den Bündeln der Reihe gehört, für den Punkt $s\mathfrak{S}^2$ und dann einen beliebigen Punkt von s als Scheitel, der reduzierte Bündel s. Homologe Ebenen der Bündel der Reihe, etwa die zu $\mathfrak{V}_1$ gehörigen, laufen nach einer bestimmten Doppelsekante f_1 zwischen $\mathfrak{S}^2$ und s; diese f_1 beschreibt eine Regelschar, wenn $\mathfrak{V}_1$ durch einen Büschel von $|\mathfrak{V}_2|$ geht, und einen Strahlenbüschel, wenn $\overline{\mathfrak{V}}$ zu diesem Büschel gehört.

In der ausgearteten Kollineation zwischen dem reduzierten Bündel s und einem beliebigen andern O der Reihe ist s die singuläre Axe in jenem, $\overline{\pi}$ die singuläre Ebene in diesem.

Es sei $\overline{\pi}'$ eine andere Ebene, ebenfalls zu $\overline{\mathfrak{V}}$ gerechnet, O' ein beliebiger Punkt auf ihrem Kegelschnitte $\mathfrak{S}'^2$, so führt die allgemeine Kollineation zwischen den Bündeln O, O', in welcher $\overline{\pi}$ und $\overline{\pi}'$, als nach $\overline{\mathfrak{V}}$ gehende Ebenen, homolog sind, von der ausgearteten zwischen s und O, in der s und $\overline{\pi}$ singulär sind, zu der ebenfalls ausgearteten Kollineation zwischen s und O', in der dann s und $\overline{\pi}'$ singulär sind.

Daraus folgt, daß der Kegelschnitt $\mathfrak{S}'^2$ in $\bar{\pi}'$ ebenso durch s ergänzt wird und alle ∞^3 derartigen Kegelschnitte, die den sämtlichen Ebenen $\bar{\pi}$ des Raumes, zu $\overline{\mathfrak{B}}$ gerechnet, zugehören. So wird s dem $\overline{\mathfrak{B}}$ zugeordnet und heiße deshalb $\bar{s}$.

Jedes $\mathfrak{B}$ induziert in jeder Ebene π einen Kegelschnitt, den Ort der Scheitel der Bündel O von $|O_4|$, welche die π in jenes $\mathfrak{B}$ schicken; auf alle diese Kurven stützt sich eine und dieselbe Gerade s und vervollständigt sie zu Trägerkurven R^3. Jedem $\mathfrak{B}$ von $|\mathfrak{B}_2|$ ist demnach eine Gerade s von $|s_2|$ zugeordnet.

Jede Ebene führt so zu einer Bündelreihe und alle diese Bündelreihen, vom reduzierten Bündel $\bar{s}$ ausgehend, erschöpfen das System $|O_4|$. Die Ebenen eines Büschels l führen zu einem Netze, dessen Trägerfläche alle die zugehörigen Kegelschnitte, die Gerade $\bar{s}$ und die l enthält, diese als a der $\bar{s}$ als b im Doppelsechs gegenüber liegend.

Die Gerade $\bar{s}$, dem $\overline{\mathfrak{B}}$ zugeordnet, trägt einen reduzierten Bündel; dies bedeutet, daß in sie homologe Ebenen aus allen $\mathfrak{B}$ zusammenkommen. Jede Ebene σ durch $\bar{s}$ ist also in ∞^1 Systemen $\mathfrak{B}$, welche einen Büschel $|\mathfrak{B}_1|$ bilden, sich selbst entsprechend. Dieser Büschel sendet in jeden Bündel O einen Ebenenbüschel u, denjenigen nämlich, der in der ausgearteten Kollineation zwischen diesem Bündel und dem reduzierten Bündel $\bar{s}$ der Ebene σ dieses letzteren entspricht. Ist $\bar{\pi}$ die Ebene aus $\overline{\mathfrak{B}}$, auf deren Kegelschnitt $\mathfrak{S}^2$ der Scheitel O liegt, so ist in jener Kollineation diese $\bar{\pi}$ die singuläre Ebene; also gehört sie zum Ebenenbüschel u und $\overline{\mathfrak{B}}$ zu $|\mathfrak{B}_1|$.

Die verschiedenen Ebenen durch $\bar{s}$ sind immer den $\mathfrak{B}$ eines Büschels $|\mathfrak{B}_1|$ entsprechend gemeinsam, und diese $|\mathfrak{B}_1|$ gehen alle von dem $\overline{\mathfrak{B}}$ aus, zu welchem $\bar{s}$ gehört.

Wir können daher auch sagen: Eine Gerade s ist demjenigen $\mathfrak{B}$ zugeordnet, nach welchem aus allen O die Ebenen kommen, die für die ausgearteten Kollineationen dieser Bündel zum reduzierten Bündel s singuläre Ebenen sind.

Ferner, jede Ebene durch $\bar{s}$, sich selbst entsprechend in allen $\mathfrak{B}$ eines Büschels $|\mathfrak{B}_1|$, ist eine Ebene γ des Torsus γ_3, der zu diesem Büschel $|\mathfrak{B}_1|$ und dem sich darauf stützenden $|u_4|$ homologer Ebenenbüschel aus $|O_4|$ gehört (Nr. 760).

Also ist die Ebene durch $\bar{s}$ auch diesem Torsus γ_3 zugeordnet.

Solcher Torsen γ_3 haben wir ∞^2, so viele als $|\mathfrak{B}_1|$. Jede Gerade s sendet ihre Ebenen in ∞^1; andrerseits führt jeder Torsus γ_3 zu ∞^1 Geraden s, durch die seine Ebenen bzw. gehen. Das sind die Geraden s, welche den $\mathfrak{B}$ eines $|\mathfrak{B}_1|$ zugeordnet sind.

Seien $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ zu diesem $|\mathfrak{B}_1|$ gehörig, $\mathfrak{B}_2$ aber außerhalb, so laufen, wenn γ' der in $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ sich selbst entsprechenden Ebene γ des γ_3 von $|\mathfrak{B}_1|$ in $\mathfrak{B}_2$ entspricht, die drei homologen Ebenen γ, γ, γ' aus $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ in eine Gerade zusammen, eben eine s; γ' beschreibt einen kubischen Torsus, welcher dem γ_3 durch die Kollineation in $\mathfrak{B}_2$ korrespondiert, und daher erzeugt s als Schnittlinie $\gamma\gamma'$ entsprechender Ebenen dieser projektiven Torsen eine Regelfläche 6. Grades.

Die Geraden s, welche den $\mathfrak{B}$ eines Büschels $|\mathfrak{B}_1|$ zugeordnet sind, erzeugen eine Regelfläche 6. Grades.

Einem Büschel in O, dessen Axe u in $\bar{\pi}$ liegt, entspricht in der ausgearteten Kollineation zwischen O und $\bar{s}$ nur eine Ebene σ von $\bar{s}$, oder zwischen ihm und $\bar{s}$ besteht eine ausgeartete Projektivität, in welcher $\bar{\pi}$ und σ singuläre Ebenen sind. Dieser Büschel geht nach einem $|\mathfrak{B}_1|$, zu welchem $\overline{\mathfrak{B}}$ gehört. Die Ebene σ, als reduzierter Ebenenbüschel in dem Systeme $|u_4|$, das durch den Büschel u und die homologen Büschel gebildet wird, oder als Ebene γ, die zu diesem $|u_4|$ und dem darauf sich stützenden $|\mathfrak{B}_1|$ gehört, ist demjenigen $\mathfrak{B}$ dieses $|\mathfrak{B}_1|$ zugeordnet, zu dem die singuläre Ebene des Büschels u in jener ausgearteten Projektivität gehört; diese ist $\bar{\pi}$ und gehört zu $\overline{\mathfrak{B}}$.

Demnach sind die Geraden s, die in den verschiedenen γ des zu einem $|\mathfrak{B}_1|$ gehörigen Torsus γ_3 sich befinden, je demselben $\mathfrak{B}$ dieses $|\mathfrak{B}_1|$ zugeordnet, wie die durchgehende γ.

Da in jede Ebene sechs Geraden s fallen, so gehört sie zu sechs Torsen γ_3 oder ist in sechs $\mathfrak{B}$-Büscheln sich selbst entsprechend.

Jeder Punkt O des Raumes ist Scheitel für ∞^1 Bündel aus $|O_4|$; wie ergeben sie sich bei der fächerförmigen Erzeugung aus den Konstituenten $O_0, O_1, \ldots, O_4$? Die Strahlen der Bündel des Gebüsches $(O_1 O_2 O_3 O_4)$, welche dem Strahle $O_0 O$ entsprechen, bilden einen tetraedralen Komplex, so daß durch O ein Kegel geht. Es gibt daher in jenem Gebüsche ∞^1 Bündel, die mit dem Bündel O_0 eine durch O gehende kubische Raumkurve erzeugen; dadurch wird O Scheitel für ∞^1 Bündel aus den $|O_4|$ erzeugenden Reihen, die von O_0 ausgehen.

774 Der Grad der Mannigfaltigkeit des $|O_4|$ ist 27 (Nr. 759). Daraus folgt, daß die zehn Kernpunkte nicht alle willkürlich gegeben werden können, denn das würde zum Grade 3.10 führen. Um zu einer Gruppe von zehn Punkten in dieser Abhängigkeit zu gelangen, gehen wir von einer kubischen Raumkurve R^3 aus. Die Bedingung für eine kubische Fläche, sie zu enthalten, ist äquivalent damit, daß sie durch zehn Punkte gehe[1]); daher gehen durch sie ∞^{19-10} kubische Flächen, aus denen wir $\infty^{3(9-2)}$ Netze bilden können.

1) Flächen 3. Ordnung, Nr. 73.

Jedes hat, außer der Grundkurve R^3, noch zehn Grundpunkte K, in denen der weitere Schnitt 6. Ordnung zweier seiner Flächen einer dritten, außer auf R^3, begegnet. In solchen zehn Punkten haben wir eine Gruppe der gesuchten Art. Die Konstruktion enthält, wegen der ∞^{12} kubischen Raumkurven, den Grad der Mannigfaltigkeit $12 + 21$. Wir erzeugen die drei konstituierenden Flächen des Netzes durch zwei Bündel, deren Scheitel O_0, O_1 auf R^3 liegen, und je einen dritten O_2, O_3, O_4 bzw. auf den drei Flächen. In jeder der Doppelsekanten aus den zehn Punkten K nach R^3 schneiden sich entsprechende Ebenen aus O_0, O_1 und, da sie mit den drei Flächen je denselben dritten Schnitt K hat, so gehen nach dem Punkte K entsprechende Ebenen aus allen fünf Bündeln und daher aus allen des durch sie konstituierten Systems $|O_4|$; sie sind die Kernpunkte desselben. Durch die Bündel von $|O_4|$ entstehen dann alle Flächen durch R^3, aber auch diejenigen, die bei sämtlichen ∞^6 Trägerkurven R^3 der Reihen von $|O_4|$ sich ergeben. Und so zeigt sich, daß der erhaltene Mannigfaltigkeitsgrad 33 um 6 zu vermindern ist auf 27.

Es wäre nicht richtig, anzunehmen, daß jede F^3 oder jede s^6, durch neun Punkte einer Kernpunkt-Gruppe gelegt, von selber durch den zehnten geht. Es hat sich auch direkt herausgestellt (Nr. 772), daß die zehn Punkte in bezug auf die Bestimmung einer Kurve s^6 als unabhängig anzusehen sind, indem durch sie und zwei weitere Punkte nur eine einzige Kurve s^6 geht; bei dem Mannigfaltigkeitsgrade 24 muß ja durch zwölf (unabhängige) Punkte eine endliche Anzahl gehen.

Daß aber eine einzige geht, ist ein bemerkenswertes Ergebnis; erwünscht wäre daher ein von unsern jetzigen Betrachtungen unabhängiger Beweis dieses Satzes für die Kurve 6. Ordnung 16. Ranges.

Wir lassen den Punkt O, der als beliebiger Punkt des Raumes 775
Scheitel von ∞^1 Bündeln aus $|O_4|$ ist, in einen der Kernpunkte K fallen; so werden der Strahl O_0K und die homologen in den übrigen Bündeln inzident mit den in K zusammenlaufenden homologen Ebenen; für die homologen Büschel um diese Strahlen aus den Bündeln des Gebüsches $(O_1 \ldots O_4)$, die ein $|u_3|$ bilden, bedeutet dies, daß K eine Ecke des Tetraeders des tetraedralen Komplexes ist, der zu $|u_3|$ gehört; in ihm ist der ganze Bündel K enthalten. So ergeben sich in den erzeugenden Reihen (aus O_0) ∞^2 Bündel mit dem Scheitel K. Diese ∞^2 konzentrischen Bündel bilden ein Netz $|O_2|_K$; denn gehörten vier nicht zu demselben Netz, so würde sich ein dem $|O_4|$ ganz angehöriges Gebüsche von Bündeln um K ergeben.

Die Trägerfläche dieses $|O_2|_K$ ist ein Kegel 3. Ordnung K^3 aus K; seine Kanten sind die Geraden, in welche homologe Ebenen aus allen Bündeln des Netzes zusammenkommen (Nr. 388, 754). Die Trägerkurven der Reihen dieses Netzes sind Tripel von

Kanten des Kegels. K^3 geht durch die übrigen neun Kernpunkte.

Die Kurven s^6 auf K^3 gehören zu den Gebüschen, welche durch $|O_2|_K$ gehen; ein anderes Netz in einem dieser Gebüsche hat mit $|O_2|_K$ eine Reihe gemein, seine F^3 daher mit K^3 ein solches Kantentripel, wodurch F^3 den K zum Doppelpunkte bekommt. Damit wird K für den restierenden Schnitt s^6 noch dreifach, so daß alle auf K^3 gelegenen Kernkurven dreimal durch K gehen und jede Kante noch einmal treffen

Die Kanten von K^3, als gerade Bestandteile zerfallender R^3, sind Geraden s und die Punkte K singuläre Punkte 3. Grades der Kongruenz $|s_2|$.

In drei Bündeln O_0, O_1, O_2, deren Scheitel auf einer Verbindungslinie $v = K_1 K_2$ zweier K liegen, ist v, weil sowohl in den homologen Ebenen gelegen, die nach K_1, als in denen, die nach K_2 gehen, sich selbst entsprechend. Folglich ist die Trägerfläche des Netzes eine Regelfläche 3. Grades mit v als Doppelgerade (Nr. 386); und die Scheitel der übrigen Bündel des Netzes liegen auch auf v, in jedem Punkte ∞^1. Die geraden Erzeugenden sind Geraden b der Fläche, also Geraden s.

In jedem Punkte von v trifft sich eine Ebene eines vierten Bündels O_3 aus dem Büschel, der den sich selbst entsprechenden Büscheln von O_0, O_1, O_2 homolog ist, mit ihren entsprechenden Ebenen aus diesen Büscheln; also gehört v zur Kurve s^6 des Gebüsches $(O_1 \ldots O_3)$, und so zu jeder Kurve s^6 auf der Regelfläche. Die restierende Kurve 5. Ordnung s^5 wird von jeder Erzeugenden noch zweimal getroffen; denn diese ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen von drei homologen Büscheln aus O_0, O_1, O_2 (Nr. 386), und der entsprechende Büschel aus O_3 bewirkt auf ihr eine Konjektivität mit den Schnitten als Koinzidenzen.

Diese Regelfläche 3. Grades bildet mit den beiden Kegeln aus K_1, K_2 die Regelfläche 9. Grades der Strahlen der Kongruenz $|s_2|$ 3. Ordnung 6. Klasse, welche v treffen. Die drei Geraden durch einen Punkt von v sind v selbst und die beiden Erzeugenden der Regelfläche, die sechs in einer Ebene durch v diese, je zwei weitere Kanten der Kegel und die Erzeugende der Regelfläche. So bestätigt sich die Klasse 6 der $|s_2|$.

776 Unter den Systemen $\mathfrak{B}$ zeichnen sich die zehn auf die Bündel um einen der Kernpunkte K reduzierten aus; sie mögen mit $\mathfrak{B}_K$ bezeichnet werden. In jedem Bündel von $|O_4|$ geht eine Ebene nach einem bestimmten der $\mathfrak{B}_K$ und damit durch den zugehörigen K. Jede Ebene π durch den K gehört also ∞^2-mal zu dem $\mathfrak{B}_K$, hingegen ∞^1-mal zu jedem andern $\mathfrak{B}$.

Jeder Punkt O in π ist Scheitel eines Bündels, der sie nach

$\mathfrak{B}_K$ schickt. Die Bündel von $|O_4|$, welche ihren Scheitel in O haben, bilden eine Reihe und die nach $\mathfrak{B}_K$ gehenden, also einander homologenen Ebenen aus ihnen einen Büschel, offenbar mit der Axe OK; unter ihnen befindet sich π, und der zugehörige Bündel ist der gesuchte.

Durch diese ∞^2 Bündel entsteht ein Netz. Denn es seien O_0, O_1, O_2 drei von ihnen, so folgt aus der fächerförmigen Erzeugung des durch sie konstituierten Netzes, daß allen Bündeln desselben die Ebene π entsprechend gemeinsam ist; also haben sie ihre Scheitel in π und sind die obigen Bündel. Die Trägerkurve R^3 jeder Reihe dieses Netzes besteht aus einem in π gelegenen Kegelschnitte $\mathfrak{S}^2$ und einer Gerade s. Die drei Büschel O_0, O_1, O_2 in π sind projektiv, und dreimal laufen homologe Strahlen in einen Punkt Q zusammen durch diese drei Q gehen dann auch die homologen Strahlen der Büschel in π aus den übrigen Bündeln des Netzes, so daß die drei Punkte Q allen Kegelschnitten $\mathfrak{S}^2$ gemeinsam sind.

Die Trägerfläche F^3 dieses Netzes zerfällt (Nr. 387) in die Ebene π und eine Fläche 2. Grades F^2. Auf dem Schnitte πF^2 liegen die drei Punkte Q.

Die beiden Regelscharen, der l und der g a. a. O., entstehen folgendermaßen. Die l sind die Geraden s, welche die $\mathfrak{S}^2$ in π zu Kurven R^3 ergänzen, und zwar jede ∞^1 Kegelschnitte $\mathfrak{S}^2$, welche denselben vierten Schnitt mit πF^2 haben; wir bezeichnen diese aus Geraden s bestehende Regelschar mit $|s_1|$. Die andere Regelschar kommt von den homologen Büscheln der Bündel her, deren Axen in π liegen und denen dann diese Ebene entsprechend gemeinsam ist, so daß keine r^3 durch sie erzeugt wird, sondern eine Gerade r; diese r bilden die zweite Schar. Die F^2 geht durch die neun andern Kernpunkte.

In dem zu π gehörigen Netze $|O_2|$ befinden sich ∞^1 reduzierte Bündel um die Geraden von $|s_1|$; wenn O einen ergänzenden Kegelschnitt $\mathfrak{S}^2$ einer von ihnen durchläuft und in $\mathfrak{S}^2 s$ kommt, ergibt sich der reduzierte Bündel.

Wenn nun π (als Ebene von $\mathfrak{B}_K$) sich um K bewegt, so bleibt diese Regelschar $|s_1|$. Denn sind O, O' in zwei verschiedenen Ebenen π, π' durch K gelegen, so lehrt die Kollineation derjenigen Bündel um sie, in denen π und π' nach $\mathfrak{B}_K$ gehen und deshalb entsprechend sind, daß, weil in der ausgearteten Kollineation zwischen O und dem reduzierten Bündel um eine s von $|s_1|$ die Ebene π und s die singulären Elemente sind, in derjenigen zwischen O' und s dann π' und s die singulären Elemente sind. Also muß der reduzierte Bündel s sich auch in dem zu π' gehörigen Netze befinden.

Die reduzierten Bündel, deren Axen die Regelschar $|s_1|$ bilden, befinden sich also in den ∞^2 Netzen von $|O_4|$, welche bei den verschiedenen durch K gehenden und zu $\mathfrak{B}_K$ gehörigen Ebenen sich ergeben.

Einem $\mathfrak{B}_K$ ist somit nicht eine einzige Gerade s zugeordnet, sondern eine Regelschar $|s_1|$ von solchen Geraden.

Die reduzierten Büschel um die Geraden der $|s_1|$ bilden in $|O_4|$ eine Reihe.

Es seien nämlich s_1, s_2 zwei Geraden von $|s_1|$; so konstituieren wir das zu π gehörige Netz durch die beiden reduzierten Bündel s_1, s_2 und einen beliebigen dritten O (der π nach $\mathfrak{B}_K$ sendet).

Einer Ebene σ_1 durch s_1 entspricht in O ein ganzer Ebenenbüschel um einen Strahl von π und diesem in s_2 wieder eine Ebene σ_2; denn π ist für beide Kollineationen (O, s_1), (O, s_2) singulär. Dieser Ebenenbüschel in O und die beiden auf die Ebenen σ_1, σ_2 reduzierten Ebenenbüschel in s_1, s_2 gehen nach einem $\mathfrak{B}$-Büschel, zu dem $\mathfrak{B}_K$ gehört. Zu diesen entsprechenden Büscheln (und allen homologen in den andern Bündeln des Netzes) gehört eine Gerade r der zweiten Regelschar, in deren Punkte entsprechende Ebenen aus allen zusammenlaufen, also ist sie die Schnittlinie $\sigma_1 \sigma_2$; nehmen wir eine dritte s_3 aus $|s_1|$, so wird σ_3 die wieder nach r gehende Ebene. Wir sehen, daß aus allen den reduzierten Bündeln $s_1, s_2, s_3, \ldots$ homologe Ebenen (welche je ∞^1 Systeme homologer Ebenen der Bündel repräsentieren) nach derselben Gerade r gehen. Damit ist die Reiheneigenschaft dargetan.

Diese Reihe der Bündel s ist allen Netzen von $|O_4|$ gemeinsam, die zu den Ebenen π gehören, welche durch den Kernpunkt K gehen und zu $\mathfrak{B}_K$ gehören.

Wenn π einen Büschel in diesem Bündel K um die Gerade k beschreibt, so bilden die Netze ein Gebüsche. Denn wenn π, π' zwei Ebenen durch k sind, O, O' Scheitel von Bündeln aus ihren Netzen, so laufen aus allen Bündeln der Reihe $(O O')$ die zu π, π' homologen Ebenen nach k, welche Doppelsekante der R^3 wird; der dritte Schnitt dieser Kurve mit einer weiteren Ebene durch k liefert den Bündel der Reihe, der zu deren Netze gehört. Somit handelt es sich um die Netze, welche die Reihe der Bündel s mit den Bündeln dieser Reihe $(O O')$ verbinden, also um ein Gebüsche.

Die Kernkurve s^6, welche zu diesem Gebüsche gehört, zerspaltet sich in die Gerade k und eine Kurve 5. Ordnung s^5. Denn in die Gerade k konkurrieren aus allen Bündeln des Gebüsches die nach $\mathfrak{B}_K$ gehenden homologen Ebenen.

Die restierende Kurve s^5 liegt auf dem allen diesen Netzen gemeinsamen Bestandteile F^2 der Trägerflächen, und zwar so, daß sie die Geraden s dreimal trifft und die r zweimal.

Die zehn Regelscharen $|s_1|$ bilden eine bemerkenswerte

Eigenschaft der Kongruenz 3. Ordnung 6. Klasse $|s_2|$ der Geraden s. —

Wir müßten in der Betrachtung linearer Systeme von kollinearen Bündeln noch weiter aufsteigen bis zur 9. Stufe. Die sich stützenden Systeme werden Netze von Ebenensystemen 5. bis 9. Stufe sein, d. h. von Ebenenräumen 3. Stufe, von denen die Ebenen ∞^2-mal, . . ., ∞^6-mal zu rechnen sind. Mit solchen Ebenensystemen $\mathfrak{W}$ 5. Stufe und $\mathfrak{Z}$ 6. Stufe, die einen Büschel bilden, haben wir schon zu tun gehabt, als wir uns mit linearen Systemen 5. und 6. Stufe von projektiven Ebenenbüscheln beschäftigten. Aber unser Abschnitt würde zu ausgedehnt werden; wir müssen auf die Reyeschen Abhandlungen verweisen und uns damit begnügen, von der dritten Serie, den linearen Systemen kollinearer Räume, doch noch einiges durchzunehmen.

Büschel und Netze von kollinearen Räumen sind schon im Voran- 777
gehenden besprochen; jene stützen sich auf ein Gebüsche von projektiven Ebenenbüscheln, diese auf eins von kollinearen Ebenenbündeln.

Auf ein Gebüsche $|\Sigma_3|$ von kollinearen Räumen wird sich daher ein ebensolches Gebüsche stützen. Wir bauen jenes in der bekannten Weise fächerförmig aus vier kollinearen Räumen Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 durch Büschel aus Σ_0 auf.

Diese Räume führen zu einer Fläche 4. Ordnung Φ^4, in deren Punkte aus allen vier homologe Ebenen zusammenkommen (Nr. 675).

Durch ihre Punkte gehen dann wiederum die entsprechenden Ebenen auch aus den übrigen Räumen von $|\Sigma_3|$; sie heiße die Kernfläche des Gebüsches.

Dies Gebüsche $|\Sigma_3|$ enthält ∞^4 Büschel uud ∞^3 Netze, durch jeden seiner Räume gehen ∞^2 Büschel und Netze, durch jeden Büschel ∞^1 Netze.

Die Fläche Φ^4 enthält die Kernkurven s^6 aller ∞^3 Netze von $|\Sigma_3|$[1]); denn durch einen Punkt, welcher drei homologen Geraden aus den Konstituenten Σ_0, Σ_1, Σ_2 eines Netzes gemeinsam ist, geht aus dem Büschel um die entsprechende Gerade aus einem vierten Raume Σ_3 eine Ebene. Und der vierte Schnitt einer Trisekante der Kernkurve s^6 des Netzes mit Φ^4 rührt von der Ebene in Σ_3 her, welche den in ihr sich schneidenden homologen Ebenen der Räume des Netzes entspricht.

Die Kurve dieser vierten Schnitte ist von der Ordnung:

$$8 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 14.$$

Den Torsen 6. Klasse von Σ_0, Σ_1, Σ_2, deren entsprechende Ebenen in

1) Von ihnen wurden in Nr. 675 zunächst vier erwähnt, die zu den Tripeln $\Sigma_0 \Sigma_1 \Sigma_2$, $\Sigma_0 \Sigma_1 \Sigma_3$ . . . und ihren Netzen gehörigen.

die Trisekanten von s^6 zusammenlaufen (Nr. 770), entspricht ein ebensolcher Torsus in Σ_3, der eindeutig auf die Regelfläche 8. Grades der dreifachen Sekanten von s^6 bezogen ist; das Erzeugnis ist die eben erwähnte Kurve von der Ordnung $6 + 8 = 14$ (Nr. 177).

Unter den ∞^1 Ebenen des Torsus in Σ_3 erfüllt keine die doppelte Bedingung, durch die korrespondierende Trisekante zu gehen. Es kommt also, im allgemeinen, nicht vor, daß vier homologe Ebenen aus $\Sigma_0, \ldots \Sigma_3$ eine Gerade gemeinsam haben.

Und ebenso kommen nicht vier homologe Geraden in einen Punkt zusammen.

Zwei Kurven s^6 auf Φ^4 haben die vier Ecken des Tetraeders gemeinsam, das zu dem Büschel gehört, der den beiden Netzen von Räumen gemeinsam ist, von denen sie herrühren.

Damit ist schon ausgesprochen, daß die ∞^4 Quadrupel der Tetraederecken der Büschel von $|\Sigma_3|$ auf Φ^4 liegen.

Entsprechende Ebenen, aus allen Räumen von $|\Sigma_3|$ genommen, erfüllen den Raum einfach. Die Ebenen der Räume von $(\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3)$, welche der Ebene ξ_0 von Σ_0 korrespondieren, laufen in einen Punkt zusammen, den Scheitel eines Bündels des $|O_3|$, das sich auf jenes Netz von Räumen stützt; die Ebene ξ', die von ihm nach der Schnittlinie einer beliebigen Ebene ξ mit ξ_0 geht, bestimmt aus diesem Netze einen Raum Σ'; nunmehr bestimmt die Ebene ξ des Büschels $\xi' \xi_0$ einen Raum aus dem Büschel $\Sigma' \Sigma_0$, einem der erzeugenden Büschel von $|\Sigma_3|$, in dem sie zu ξ_0 homolog ist.

Wir erhalten ∞^3 Räume P, von denen wir sofort erkennen, daß sie ebenfalls ein Gebüsche $|\mathsf{P}_3|$ bilden. Denn, wenn ξ_0 in Σ_0 einen Büschel, einen Bündel beschreibt und die homologen Ebenen es ebenfalls tun, so entstehen Gebüsche von projektiven Ebenenbüscheln, kollinearen Ebenenbündeln, auf die sich Büschel, Netze von kollinearen Räumen aus $|\Sigma_3|$ stützen; jede zwei oder drei Räume des neuen Systems sind daher durch Büschel, Netze verbunden, welche ganz demselben angehören. Also ist es ein Gebüsche. Weil die Räume dieser Büschel, Netze kollinear sind, so sind alle Räume des $|\mathsf{P}_3|$ kollinear. Entsprechend sind Ebenen je aus demselben Raume von $|\Sigma_3|$.

Die beiden Gebüsche $|\Sigma_3|$, $|\mathsf{P}_3|$ stützen sich.

Das Gebüsche $|\mathsf{P}_3|$ enthält ∞^2 Räume, welche sich auf Bündel reduzieren: um die Punkte von Φ^4. Ebenso enthält $|\Sigma_3|$ ∞^2 reduzierte Räume: um die Punkte, in welche homologe Ebenen aus allen Räumen von $|\mathsf{P}_3|$ zusammenkommen. Sei S der Scheitel eines solchen reduzierten Raums Σ_S, so kommen in ihm drei entsprechende Ebenen aus Σ_1, Σ_2, Σ_3 zusammen, wie in jedem Punkte des Raums. Durch den Punkt S geht aber auch die Ebene, welche diesen drei Ebenen in Σ_S entspricht; folglich ist er ein Punkt von Φ^4.

Die beiden sich stützenden Gebüsche $|\Sigma_3|$, $|\mathsf{P}_3|$ führen also zu der nämlichen Kernfläche Φ^4.

Der Grad der Mannigfaltigkeit eines Gebüsches $|\Sigma_3|$ oder $|\mathsf{P}_3|$ von kollinearen Räumen ist 33 (Nr. 769), also um 1 kleiner als der einer allgemeinen Fläche 4. Ordnung; so daß die Kernfläche nicht eine solche Fläche ist.

Wir haben auf Φ^4 zwei Systeme von ∞^3 Kernkurven s^6, r^6, zu den Netzen $|\Sigma_2|$, $|\mathsf{P}_2|$ von $|\Sigma_3|$, $|\mathsf{P}_3|$ gehörig.

Die Kernkurve r^6 eines $|\mathsf{P}_2|$ gehört auch zu dem sich darauf stützenden Gebüsche kollinearer Ebenenbündel $|P_3|$ aus den Σ von $|\Sigma_3|$; sie ist Ort der Konkurrenzpunkte homologer Ebenen aus ihnen, oder, was genügt, der vier konstituierenden Bündel, genommen aus vier konstituierenden Räumen. Also sind die r^6 die schon in Nr. 675 gefundenen Kurven.

Ebenso stützt sich ein Netz $|\Sigma_2|$ auf ein Gebüsche kollinearer Bündel $|O_3|$. Von dem Gebüsche $|P_3|$ rührt ein Netz $|P_2|$ aus dem $|\Sigma_2|$ und von $|O_3|$ ein Netz $|O_2|$ aus $|\mathsf{P}_2|$ her. Damit haben sich zwei sich stützende Netze $|O_2|$ und $|P_2|$ kollinearer Bündel ergeben, und ihre Trägerfläche F^3 trägt die beiden Kurven s^6, r^6; so daß dieselben den vollen Schnitt dieser F^3 mit der Φ^4 bilden.

Zwei Kernkurven auf Φ^4, aus verschiedenen Systemen, sind stets durch eine kubische Fläche F^3 verbunden, und die ∞^3 Flächen F^3, welche durch die eine Kurve gehen, schneiden die Kurven des andern Systems auf Φ^4 aus. Die Zahl der verbindenden Flächen F^3 ist in der Tat ∞^6; denn in jedem der ∞^3 Netze $|\Sigma_2|$ befinden sich ∞^3 $|P_2|$.

Die 18 Begegnungspunkte einer Kurve s^6 und einer F^3, die sie nicht enthält, verteilen sich auf die s^6 und r^6, in denen sie die Φ^4 schneidet; 4 kommen auf die s^6, also 14 auf die r^6.

Zwei Kernkurven aus verschiedenen Systemen schneiden sich in 14 Punkten.[1]) In ihnen wird Φ^4 von der verbindenden F^3 berührt.

Es sei S ein Punkt von Φ^4 und P_S der zugehörige reduzierte 778
Raum aus $|\mathsf{P}_3|$, ferner seien $|\Sigma_1|$, $|\Sigma_1|'$, $|\Sigma_1|''$ drei windschiefe Büschel aus dem Gebüsche $|\Sigma_3|$, so sendet jeder einen Ebenenbüschel nach P_S, also mit einer Axe durch S; jeder Strahl von S ist Schnitt von drei Ebenen aus diesen Büscheln; die drei Räume in jenen Büscheln $|\Sigma_1|, \ldots$, zu denen sie gehören, bestimmen ein Netz aus $|\Sigma_3|$, von dem dann alle nach P_S gehenden Ebenen seiner Räume nach jenem Strahle gehen, welcher damit Trisekante der zugehörigen s^6 wird.

1) Vgl. Math. Annalen Bd. 21, S. 501, Tabelle am Ende der Seite:

$$\binom{6,3}{6,3}$$

14.

Alle Netze von $|\Sigma_3|$ ergeben sich aber durch Konstituenten, die aus jenen Büscheln genommen sind; da ja innerhalb $|\Sigma_3|$ ein Netz in jeden Büschel einen Raum sendet. So wird jede Gerade viermal, bei jedem ihrer vier Schnitte mit Φ^4, Trisekante der s^6 eines Netzes aus $|\Sigma_3|$ und ebenso Trisekante der r^6 eines Netzes aus $|\mathsf{P}_3|$.

Vier projektive Ebenenbüschel besitzen vier Quadrupel homologer Ebenen mit Schnittpunkt. Daher enthält jeder Raum von $|\Sigma_3|$ eine Fläche 4. Klasse von Ebenen, welche mit den homologen aus den andern in einen Punkt S von Φ^4 zusammenkommen.

Zu den ∞^2 Tripeln entsprechender Ebenen der Flächen 4. Klasse $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ in Σ_0, Σ_1, Σ_2 gehören die ∞^1 Tripel entsprechender Ebenen dieser Räume, die in einer Trisekante s der zu dem Netze $(\Sigma_0 \Sigma_1 \Sigma_2)$ gehörigen Kernkurve s^6 sich schneiden, so daß deren Torsen 6. Klasse jenen Flächen umgeschrieben sind.

Das Erzeugnis der Schnittpunkte homologer Ebenen der drei Flächen $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ muß eine Fläche 12. Ordnung sein. In der Tat, von einem Punkte X auf einer Gerade l geht an $\mathfrak{F}_0$ ein Berührungskegel 4. Klasse, dem (kollinear) ebensolche Kegel an $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ korrespondieren; das Erzeugnis der Schnittgeraden entsprechender Ebenen derselben ist eine Regelfläche 8. Grades, welche l in acht Punkten X' trifft. X' sendet an $\mathfrak{F}_1$ einen Berührungskegel 4. Klasse, und von dessen entsprechendem Kegel an $\mathfrak{F}_2$ gehen vier Ebenen durch X', so daß durch diesen Punkt vier Schnittlinien entsprechender Ebenen von $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ gehen; die homologen von $\mathfrak{F}_0$ schneiden l in den vier dem X' korrespondierenden Punkten X; die zwölf Koinzidenzen dieser Korrespondenz [4, 8] geben die gesuchte Ordnung.

In unserm Falle zerspaltet sich diese Fläche 12. Ordnung in die Fläche Φ^4 und die Regelfläche 8. Grades der dreifachen Sekanten der obigen s^6.

Weil Φ^4 ∞^3 Kurven s^6 trägt, so müssen durch jeden Punkt S der Fläche ∞^2 Kurven s^6 gehen und ihm ∞^2 Geraden s zugeordnet sein (Nr. 769), was auch damit übereinstimmt, daß es ∞^4 Geraden s gibt und daß vom reduzierten Raume Σ_S ∞^2 Netze ausgehen. Es handelt sich also um die Kongruenz, welche durch diese ∞^2 Geraden s gebildet wird.

Jene ∞^2 Netze können wir konstituieren durch Σ_S und zwei andere Räume, welche die (windschiefen) Büschel $|\Sigma_1|'$, $|\Sigma_1|''$ durchlaufen. Jeder Büschel eines dieser Netze, welcher von dem Raume Σ_S ausgeht, sendet die der Ecke S gegenüberliegende Tetraederebene σ (gemeinsame singuläre Ebene aller Kollineationen zwischen seinen Räumen und Σ_S) durch die dem S in bezug auf das Netz zugeordnete Trisekante s; es genügen also zu ihrer Bestimmung zwei Ebenen σ', σ'', also zwei Büschel aus Σ_S; wir nehmen die nach den beiden andern Konstituenten in $|\Sigma_1|'$, bzw. $|\Sigma_1|''$ gehenden. Diese Büschel durchstreichen die Netze $|\Sigma_2|'$, $|\Sigma_2|''$, welche von Σ_S nach $|\Sigma_1|'$, $|\Sigma_2|''$ gehen; also drehen sich σ', σ'' um die Trisekanten s', s'', die dem S in bezug auf diese Netze zugeordnet sind. Nun haben dieselben einen durch Σ_S gehenden Büschel $|\Sigma_1|_0$ gemeinsam; in dessen Tetraederebene σ_0 liegen s', s'' und schneiden sich in S^*, und die fraglichen Trisekanten s sind die Schnittlinien der Ebenen durch s' mit denen durch s'', also die Strahlen des Bündels S^*.

Nehmen wir nun von den vier Konstituenten Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 von $|\Sigma_3|$ zwei aus dem $|\Sigma_1|_0$ und je eine aus $|\Sigma_2|'$, $|\Sigma_2|''$, so ist σ_0 sich selbst entsprechend in Σ_0, Σ_1 und trifft sich in s' mit der entsprechenden Ebene in Σ_2 (als Raum von $|\Sigma_2|'$) und in s'' mit der in Σ_3 (als Raum von $|\Sigma_2|''$). Also wird $S^* = s's''$ gemeinsamer Punkt von vier entsprechenden Ebenen aus den Konstituenten, von denen zwei identisch sind; demnach ist S^* ein Punkt von Φ^4.

Durch einen Punkt S von Φ^4 gehen ∞^2 Kurven s^6; die Trisekanten dieser Kurven, die ihm in bezug auf die zugehörigen Netze zugeordnet sind, gehen durch einen zweiten Punkt S^* von Φ^4.

Durch zwei Punkte S und S' auf Φ^4 gehen ∞^1 Kurven s^6; sie gehören zu den Netzen, welche durch den Büschel gehen, der durch Σ_S und $\Sigma_{S'}$ bestimmt wird, und haben noch die beiden andern Tetraederecken dieses Büschels gemeinsam.

Ebenso bestimmen die drei reduzierten Räume Σ_S, $\Sigma_{S'}$, $\Sigma_{S''}$ das Netz, zu welchem die einzige durch die Punkte S, S', S'' von Φ^4 gehende Kernkurve s^6 gehört.

Oder, es seien $\rho_0, \ldots \rho_3$ die nach Σ_S gehenden homologen Ebenen aus $\mathsf{P}_0, \ldots \mathsf{P}_3$, ebenso $\rho_0', \ldots \rho_3'$ die nach $\Sigma_{S'}$ und $\rho_0'', \ldots \rho_3''$ die nach $\Sigma_{S''}$ gehenden, so bestimmen die Bündel um $O_0 = \rho_0\rho_0'\rho_0'', \ldots O_3 = \rho_3\rho_3'\rho_3''$ in $|\mathsf{P}_3|$ ein $|O_3|$; und die Kernkurve s^6, welche zu diesem Gebüsche $|O_3|$ und dem darauf sich stützenden Netze $|\Sigma_2|$ aus $|\Sigma_3|$ gehört, ist die, welche durch S, S', S'' geht.

Entsprechende Geraden der Räume von $|\Sigma_3|$ bilden einen tetraedalen Komplex; er gehört zu dem Gebüsche projektiver Ebenenbüschel um sie und dem darauf sich stützenden Büschel aus $|\mathsf{P}_3|$.

Entsprechende Punkte jener Räume erfüllen den Raum einfach; denn von dem Gebüsche kollinearer Bündel um sie trägt jeder Punkt einen. Ausgenommen sind die Punkte der Kernkurve r^6 dieses Gebüsches und des Netzes aus $|\mathsf{P}_3|$, auf welches es sich stützt; jeder kommt in dem System entsprechender Punkte ∞^1-mal vor.

Die Kernfläche Φ^4 können wir durch eine projektive Erzeugung herstellen.[1]) Es seien g_0, g_1, g_2, g_3 entsprechende 779

1) Schur, Math. Annalen, Bd. 18, S. 27.

Geraden von $\Sigma_0, \ldots \Sigma_3$ und $P_0, \ldots P_3$ korrespondierende Punkte, welche sie durchlaufen. Die drei kollinearen Bündel P_0, P_1, P_2 erzeugen je eine kubische Fläche F^3, und die sämtlichen F^3 bilden einen Büschel, dessen Grundkurve sich aus der Kurve s^6_{012}, die zu dem Netze $(\Sigma_0 \Sigma_1 \Sigma_2)$ gehört, und der Kurve R^3_{012} zusammensetzt, welche durch die drei projektiven Ebenenbüschel g_0, g_1, g_2 entsteht (oder durch sich auf sie und ihr Netz stützende Bündel O).

Die Tripel P_0, P_1, P_3 führen zu einem zweiten derartigen Büschel mit (s^6_{013}, R^3_{013}) als Grundkurve. Die beiden R^3 liegen auf der durch die Büschel g_0, g_1 erzeugten Fläche 2. Grades F^2.

Diese beiden F^3-Büschel sind projektiv, indem solche F^3 sich entsprechen, die von demselben Quadrupel P_0, P_1, P_2, P_3 herrühren; und das Erzeugnis ist eine Fläche 6. Ordnung, welche jedoch zerfällt.

In einem gemeinsamen Punkte X homologer Flächen F^3 treffen sich entsprechende Ebenen ξ_0, ξ_1, ξ_2 aus den Bündeln P_0, P_1, P_2 und entsprechende Ebenen ξ_0', ξ_1', ξ_3' aus P_0, P_1, P_3. Sind ξ_0', ξ_1' von ξ_0, ξ_1 verschieden, so schneiden sich in X die entsprechenden Strahlen $\xi_0 \xi_0'$ und $\xi_1 \xi_1'$ von P_0, P_1; er ist ein Punkt der kubischen Raumkurve r^3, welche durch die Bündel P_0, P_1 erzeugt wird (oder durch entsprechende Ebenenbüschel aus den P, welche sich auf diese Bündel und ihre Reihe stützen).

Wenn aber die ξ_0', ξ_1' mit ξ_0, ξ_1 identisch sind, so kommen in X die vier entsprechenden Ebenen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ aus $P_0, \ldots P_3$ zusammen; er ist daher, weil diese Bündel zu den Räumen $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_3$ gehören, ein Punkt der Kernfläche Φ^4, andererseits aber ein Punkt der Kernkurve r^6, welche zu den Bündeln $P_0, \ldots$ und ihrem Gebüsche und dem sich darauf stützenden Netze aus $|\mathsf{P}_3|$ gehört.

Jene Kurven r^3 erfüllen die obige Fläche 2. Grades F^2, die durch die entsprechenden Büschel g_0, g_1 erzeugt wird; denn zwei entsprechende Strahlen aus P_0, P_1 liegen in entsprechenden Ebenen dieser Büschel und ihr Schnitt, wenn sie einen solchen haben, ein Punkt der r^3, auf der Schnittlinie.

Das Erzeugnis der beiden projektiven F^3-Büschel besteht daher aus dieser Fläche 2. Grades und der Kernfläche Φ^4, wobei erzeugende Kurven der letzteren Kurven r^6 sind, während zwei Kurven s^6 zu den Grundkurven der erzeugenden Büschel gehören.

Es ist möglich, bis zu linearen Systemen 13. Stufe kollinearer Räume aufzusteigen, auf die sich dann stützen Gebüsche von Ebenensystemen 4., ... 13. Stufe; aber wir müssen darauf verzichten und wiederum auf Reyes Abhandlungen verweisen.

Enriques, F., Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fleischer in Königsberg i. Pr. Mit einem Einführungswort von F. Klein. Mit 187 Textfiguren. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. Geh. n. *M.* 8.—, in Leinwand geb. n. *M.* 9.—

Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzung der Textausgabe von Heiberg. Von Dr. Max Simon, Professor an der Universität Straßburg i. E. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XI. Heft Mit 192 Figuren. [VII u. 141 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. *M.* 5.—

Fiedler, Dr. W., vorm. Professor am Polytechnikum zu Zürich, die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen und zum Selbststudium. In 3 Teilen. gr. 8. Geh. n. *M.* 40.—, geb. n. *M.* 43.80.

I. Teil. Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektivischen Geometrie. 4. Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 lithogr. Tafeln. [XXIV u. 431 S.] 1904. Geh. n. *M.* 10.—, in Leinwand geb. n. *M.* 11.—

II. — Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 3. Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 16 lithogr. Tafeln. [XXXIII u. 560 S.] 1885. Geh. n. *M.* 14.—, in Leinwand geb. n. *M.* 15.40.

III. — Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 3. Auflage. Mit zahlreichen Figuren und 1 lithogr. Tafel. [XXX u. 660 S.] 1888. Geh. n. *M.* 16.—, in Leinwand geb. n. *M.* 17.40.

Geometrie. Unter Mitwirkung von L. Berzolari, H. Burkhardt, G. Castelnuovo, M. Dehn, F. Dingeldey, F. Enriques, G. Fano, C. Guichard, P. Heegaard, K. Heun, G. Kohn, H. Liebmann, R. v. Lilienthal, G. Loria, H. v. Mangoldt, E. Müller, J. Neuberg, E. Papperitz, K. Rohn, G. Scheffers, A. Schoenflies, C. Segre, M. Simon, J. Sommer, P. Stäckel, O. Staude, H. Steinitz, A. Voss, E. Wälsch, H. G. Zeuthen, K. Zindler, redigiert von W. Fr. Meyer. A. u. d. T.: Encyklopädie der math. Wissenschaften. Band III. In 3 Teilen.

Graßmann, H., gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung von Jakob Lühroth, Eduard Study, Justus Graßmann, Hermann Graßmann dem Jüngeren, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel, Professor an der Universität Greifswald. In 3 Bänden. I. Band. In 2 Teilen. gr. 8. Geh. n. *M.* 28.—

Einzeln:

I. Band. I. Teil: Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Mit dem Bildnis Graßmanns in Holzschnitt und 35 Textfiguren. [XV u. 435 S.] 1894. n. *M.* 12.—

I. — II. — Die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Textfiguren. [VIII u. 511 S.] 1896. n. *M.* 16.—

——— II. Band. In 2 Teilen. gr. 8. Geh. n. *M.* 30.—

Einzeln:

II. Band. I. Teil: Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Mit 45 Textfiguren. [X u. 452 S.] 1904. n. *M.* 16.—

II. — II. — Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Textfiguren. [VIII u. 266 S.] 1902. n. *M.* 14.—

——— ——— III. Band. [ca. 320 S.] [Erscheint März 1909.]

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. In 2 Teilen. Mit vielen Textfiguren. gr. 8. In Leinw. geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Bearbeitet von E. Netto und C. Färber. 2 Bände. [In Vorbereitung.]

II. Teil: Die Grundlehren der Geometrie. Bearbeitet von W. Fr. Meyer und H. Thieme. 2 Bände.

I. Band: Die Elemente der Geometrie. Von Dr. Hermann Thieme, Professor an der Kgl. Berger-Oberrealschule zu Posen. Mit 323 Textfiguren. [XII u. 394 S.] [Erscheint Ostern 1909.]

II. Band: [In Vorbereitung.]

Heffter, Dr. **L.,** Professor an der Universität Kiel, u. Dr. **C. Koehler,** Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. In 2 Bänden.

I. Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Textfiguren. [XVI u. 526 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

II. — Geometrie im Bündel und im Raume. [In Vorbereitung.]

Hilbert, Geheimer Regierungsrat Dr. **D.,** Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Dritte, durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte und mit sieben Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen Textfiguren. [VI u. 279 S.] gr. 8. 1909. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

Höfler, Dr. **A.,** Professor an der Universität Wien, Didaktik des mathematischen Unterrichts. A. u. d. T.: Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen. Herausgegeben von A. Höfler und F. Poske. Band I. [ca. 496 S.] gr. 8. 1909. In Leinw. geb. [Erscheint Ostern 1909.]

Jahnke, Dr. **E.,** Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin und **F. Emde,** Ingenieur in Berlin, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. gr. 8. In Leinw. geb. [Unter der Presse.]

Killing, Geheimer Regierungsrat Dr. **W.,** Professor an der Universität Münster i. W. und Dr. **H. Hovestadt,** Professor am Realgymnasium zu Münster i. W., Handbuch des mathematischen Unterrichts. 2 Bände. I. Band. [ca. 330 S.] gr. 8. In Leinw. geb. [Band I erscheint Ostern 1909, Band II in Vorbereitung.]

Kötter, Dr. **E.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Aachen, die Entwicklung der synthetischen Geometrie. In 2 Teilen. Teil I: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. V, 2. [XXVIII u. 486 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. ℳ 18.80. Erschien auch in 2 Lieferungen: 1. Lieferung: (128 S.) 1898. ℳ 4.40. 2. Lieferung: (XXVIII u. S. 129—414.) 1901. ℳ 14.40.

Lobatschefskij, N. I., imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Dr. Heinrich Liebmann, Professor an der Universität Leipzig. Mit 39 Figuren im Text und auf einer Tafel. [XI u. 187 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. ℳ 8.—

Loria, Dr. **G.,** Professor an der Universität Genua, spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Professor Fritz Schütte, Oberlehrer am Königlichen Gymnasium zu Düren. Mit 174 Figuren auf 17 lithogr. Tafeln. [XXII u. 744 S.] gr. 8. 1902.

I. Abteilung. Geh. n. ℳ 16.—

II. — Geh. n. ℳ 10.—. Zusammen in Leinwand geb. n. ℳ 28.—

—— Vorlesungen über darstellende Geometrie. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Professor Fr. Schütte, Oberlehrer am Gymnasium zu Düren. In 2 Teilen.

I. Teil: Die Darstellungsmethoden. Mit 163 Textfiguren. [XI u. 219 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. ℳ 6.80.

Schoenflies, Dr. **A.**, o. ö. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 2. Teile.
I Teil. Mit Figuren. [VI u. 251 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. ℳ 8.—
II. — Mit 26 Figuren. [X u. 231 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. ℳ 12.—

——— Einführung in die Hauptgesetze der zeichnerischen Darstellungsmethoden. Mit 28 Textfiguren. [V. u. 92 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. ℳ 2.20, in Leinw. geb. n. ℳ 2.80.

Schroeter, Dr. **H.**, weiland Professor an der Universität Breslau, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. Nach Jacob Steiners Prinzipien auf synthetischem Wege abgeleitet. Mit vielen Textfiguren. [XVI u. 720 S.] gr. 8. 1880. Geh. n. ℳ 16.—

——— Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies. [VI u. 101 S.] gr. 8. 1890. Geh. n. ℳ 2.80.

——— die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. Auf synthetisch-geometrischem Wege abgeleitet. [VIII u. 296 S.] gr. 8. 1888. Geh. n. ℳ 8.—

Schur, Geh. Hofrat Dr. **F.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Schwering, Prof. Dr. **K.**, Direktor des Gymnasiums an der Apostelkirche in Cöln a. Rh., Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Mit 193 Textfiguren. [VIII u. 408 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. ℳ 8.—

Simon, Dr. **M.**, Prof. am Lyzeum und Honorarprofessor an der Universität Straßburg i. E., über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. (A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I.) Mit 28 Textfiguren [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. ℳ 8.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Stäckel, Dr. **P.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe und Dr. **F. Engel**, Professor an der Universität Greifswald, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. [X u. 325 S.] gr. 8. 1895. Geh. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb. n. ℳ 11.—

Staude, Dr. **Otto**, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Textfiguren. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Steiner, **J.**, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2 Teile. gr. 8. Geh. n. ℳ 20.—, in Leinwand geb. n. ℳ 22.—

Einzeln:

I. Teil. Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuskripte Jakob Steiners bearbeitet von Dr. C. F. Geiser, Professor am Schweizerischen Polytechnikum. 3. Auflage. Mit 141 Holzschnitten im Text. [VIII u. 208 S.] 1887. Geh. n. ℳ 6.—, in Leinwand geb. n. ℳ 7.—

II. — Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuskripte Jakob Steiners bearbeitet von Dr. Heinrich Schroeter, weiland Professor an der Universität Breslau. 3. Auflage. Durchgesehen von Dr. Rudolf Sturm, Professor an der Universität Breslau. Mit 103 Figuren. [XVII u. 537 S.] 1898. Geh. n. ℳ 14.—, in Leinwand geb. n. ℳ 15.—

Sturm, Geh. Regierungsrat Dr. **R.**, Professor an der Universität Breslau, Elemente der darstellenden Geometrie. 2., umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 61 Textfiguren und 7 lithogr. Tafeln. [V u. 157 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. *M.* 5.60.

—— synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. [XX u. 388 S.] gr. 8. 1867. Geh. n. *M* 8.—

—— die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Teilen. gr. 8. Geh. n. *M* 42.—

Einzeln:

I. Teil: Der lineare Komplex oder das Strahlengewinde und der tetraedrale Komplex. [XIV u. 386 S.] 1892. n. *M.* 12.—

II. — Die Strahlenkongruenzen erster und zweiter Ordnung. [XIV u. 367 S.] 1893. n. *M.* 12.—

III. — Die Strahlenkomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 518 S.] 1897. n. *M.* 18.—

Tannery, J., Professor an der Universität Paris, Direktor der École normale supérieure zu Paris, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klaess, Gymnasiallehrer in Echternach (Luxemburg). Mit einem Einführungswort von F. Klein und 184 Textfiguren. [XII u. 364 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M* 7.—, in Leinwand geb. n. *M* 8.—

Vahlen, Dr. K. Th., Professor an der Universität Greifswald, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Voß, Dr. **A.**, Professor der Mathematik in München, über das Wesen der Mathematik. Rede, gehalten am 11. März 1908 in der öffentlichen Sitzung der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Erweitert und mit Anmerkungen versehen. [98 S.] 8. 1908. Geh. n *M.* 3.60.

Weber, Dr. **H.**, und Dr. **J. Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. n. *M.* 9.60.

II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Textfiguren. [XII u. 596 S.] 1907. n. *M.* 12.—

III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber (Rostock). Mit 358 Textfiguren. [XIII u. 666 S.] 1907. n. *M.* 14.—

Wiener, Geh. Hofrat Dr. **Chr.** weil. Professor an der Großh. Polytechnischen Schule zu Karlsruhe, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8. Geh. n. *M.* 30.—

I. Band. Geschichte der darstellenden Geometrie, ebenflächige Gebilde, krumme Linien (erster Teil), projektive Geometrie. Mit Textfiguren. [XX u. 477 S.] 1884. Anastatischer Neudruck 1906, mit hinzugefügtem Register. Geh. n. *M* 12.—

II. — Krumme Linien (zweiter Teil) und krumme Flächen. Beleuchtungslehre, Perspektive. Mit Textfiguren (und 4 bez. 2 Tafeln). [XXX u. 649 S.] 1887. Geh. n. *M.* 18.—