



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

Phys
1553
2



Phys 1553. E



Harvard College Library

BOUGHT WITH INCOME

FROM THE BEQUEST OF

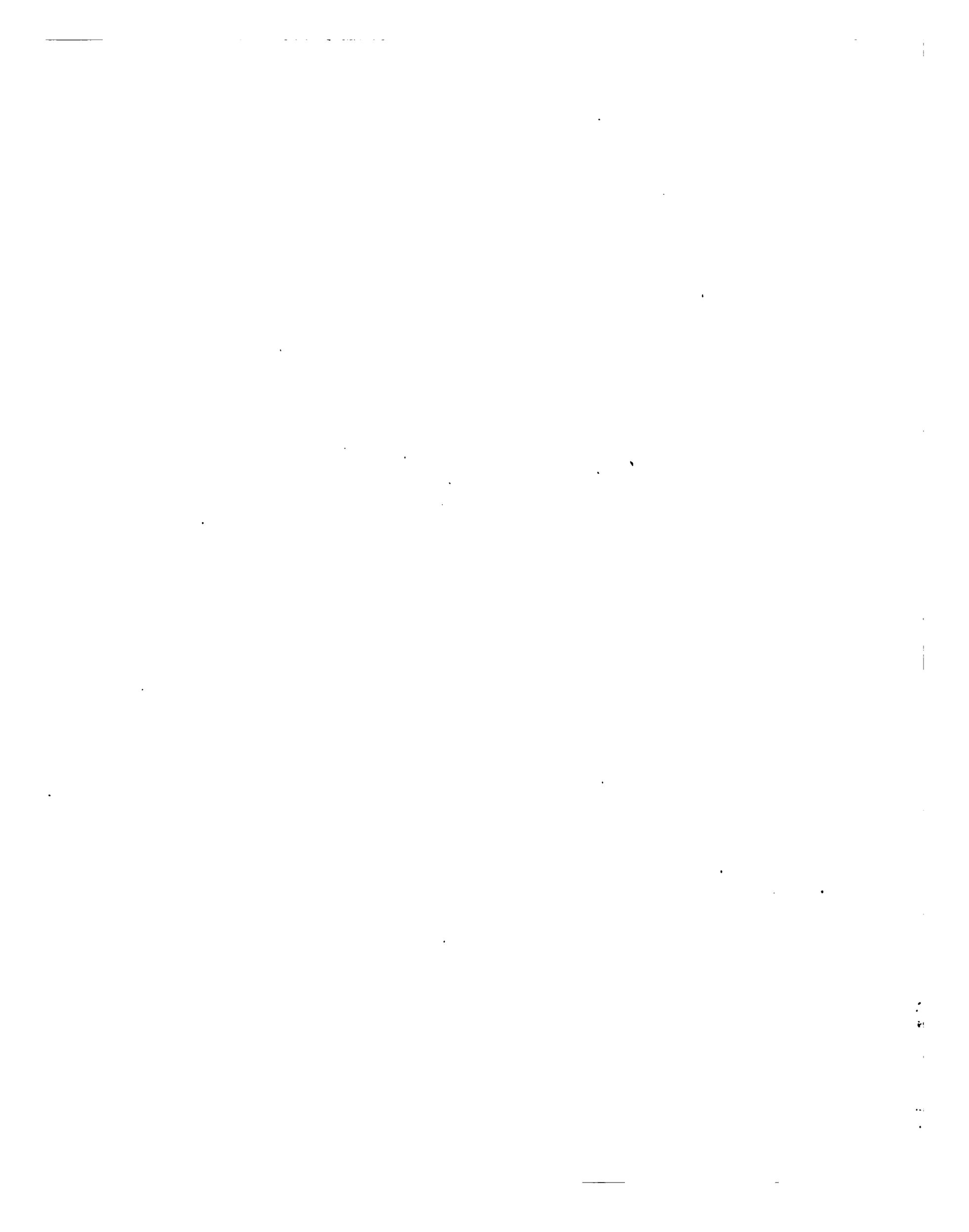
HENRY LILLIE PIERCE.

OF BOSTON.

Under a vote of the President and Fellows,
October 24, 1898.

April, 1899





.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

Die
Poincarésche Theorie des Gleichgewichts

einer

homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse.

Von

Dr. K. Schwarzschild.

(Separat-Abdruck aus den Annalen der Münchener Sternwarte, Band III.)

München 1897.

Verlag der K. b. Akademie der Wissenschaften.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Phy. 1553.2

Tier. 1. 1. 1.

17

Die
Poincarésche Theorie des Gleichgewichts
einer
homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse.

Von
Dr. K. Schwarzschild.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Arbeit ist auf Anregung von Herrn Prof. Seeliger entstanden. Ihr Zweck sollte sein, Beweisführung und Ergebnisse von Herrn Poincarés grosser Arbeit »Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation« (Acta mathematica. Bd. VII. 1885) den dem praktischen Astronomen geläufigen mathematischen Formen näher zu bringen, doch zeigte sich bald, dass eine wesentliche Vereinfachung, wenn sie überhaupt möglich ist, kaum von methodischem Nachdenken über dieses spezielle Problem, sondern höchstens von einem glücklichen Einfall oder dem allgemeinen Fortschreiten der Wissenschaft zu erwarten ist, dass daher fürs erste wieder dieselben Hilfsmittel, wie sie Herr Poincaré benutzt hat, zur Verwendung kommen mussten. So konnte eine Vereinfachung nur mehr im Einzelnen, Unwesentlichen erstrebt werden. Zunächst habe ich eine Beschränkung eintreten lassen, indem ich nur reibende, visköse Flüssigkeitsmassen, aber keine idealen reibungslosen, und nur ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren, aber keine ringförmigen, in den Kreis der Betrachtung zog. Ferner habe ich versucht, durch eine gewisse Erhöhung des Standpunktes Herrn Poincarés Verfahren verständlich zu machen, ohne eine Kenntnis der Laméschen Funktionen vorauszusetzen, indem ich in den »Orthogonalfunktionen« eine (auf Grund der Poincaréschen Arbeit sehr nahe liegende) Verallgemeinerung der Laméschen Funktionen einführte, die sich mit Hilfe der einfachsten Sätze aus der Theorie der orthogonalen Substitutionen gewinnen lässt. Bei der Anwendung der allgemeinen Prinzipien auf spezielle ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren mussten freilich die Laméschen Funktionen wieder herbeigezogen werden. Hierbei habe ich die Anwendungen, die Herr Poincaré selbst gemacht hat, nur flüchtig skizziert und allein einen Punkt, in dem mir Herrn Poincaré ein kleines Versehen untergeschlüpft zu sein scheint, mehr hervorgehoben; dagegen wurde für eine neue Anwendung auf die Gleichgewichtsfiguren eines kleinen Mondes die Rechnung, im engen Anschluss an Herrn Poincarés Entwicklungen für die Jacobischen Ellipsoide, vollständig durchgeführt. Im ersten, allgemeinen Teil der Arbeit mussten einige Sätze, die bei dieser neuen Anwendung zur Verwendung kamen, hinzugefügt werden. Wo ich sonst in der Absicht grösserer Verdeutlichung Betrachtungen angestellt habe, die sich in Herrn Poincarés Arbeit gar nicht oder nur angedeutet finden, habe ich dies an seiner Stelle angemerkt.

Die Gesichtspunkte, unter denen mir das hier behandelte Problem und die sich anschliessenden gestreiften Fragen erschienen sind, verdanke ich mehr, als sich im Einzelnen sagen lässt, Herrn Prof. Seeligers Vorlesungen und gesprächsweisen Mitteilungen. Auch darf ich nicht unerwähnt lassen, wie sehr mir durch Herrn Prof. Lindemanns Seminar das Studium der Laméschen Funktionen erleichtert worden ist.

Da nun die Arbeit eine vorwiegend didaktische ist oder sein soll, möge es mir gestattet sein, ihr als eine Art Moral die Bemerkung mitzugeben: Es sind nicht die fernabliegenden Hilfsmittel einer verfeinerten Analysis, sondern gerade wegen ihrer Einfachheit bewundernswerte Gedanken, welche Herrn Poincaré in diesem Gebiete, dessen Schwierigkeiten Lord Kelvin »von ganz besonders schrecklicher Natur« nennt, zu seinen Erfolgen geführt haben.

I. Teil. Principien.

§ 1. Einleitendes.

Die Aufgabe. Man denke sich irgend eine frei im Raume schwebende Masse einer homogenen inkompressibeln Flüssigkeit, deren Teilchen sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetz anziehen und die von allen möglichen Strömungen durchzogen sei, während ihr Schwerpunkt ruhe. Die Reibung der Teilchen wird mit der Zeit bewirken, dass die Strömungen, die Verschiebungen der Teilchen gegen einander, aufhören und die Flüssigkeit sich schliesslich wie ein fester Körper verhält: die Flüssigkeit wird in sogenanntes relatives Gleichgewicht geraten, d. h. mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine bestimmte feste Axe rotieren. Die physikalische Anschauung lehrt, dass es für jeden Anfangszustand, für den die Anfangsgeschwindigkeiten der einzelnen Teilchen nicht gar zu gross sind, eine gewisse stabile Endform des relativen Gleichgewichtes geben muss. Da es aber nicht möglich ist, die Bewegung einer reibenden Flüssigkeit von einem beliebigen Anfangszustand aus im einzelnen zu verfolgen, fasst man die Sache am andern Ende an, man sucht Formen relativen Gleichgewichtes, sieht nach, ob dieselben stabil sind, ob kleine Verschiebungen und Stösse, die man ihre Teilchen erleiden lässt, nicht einen vollständigen Umsturz, sondern geringe Aenderungen der Gestalt, der Rotationsgeschwindigkeit und der Lage der Rotationsaxe hervorrufen, und weiss, wenn letzteres der Fall ist, dass man es mit einer möglichen Endform der Entwicklung einer Flüssigkeit zu thun hat.

Man gewinnt mit Hülfe der Flächensätze sofort gewisse Beziehungen zwischen dem Anfangs- und dem Endzustand der Flüssigkeit. Man nenne nämlich m die Masse eines Flüssigkeitsteilchens, r seinen Abstand von irgend einer durch den Schwerpunkt gelegten Axe, χ die Rotationsgeschwindigkeit des Teilchens um diese Axe und bilde die Summe:

$$\sum m r^2 \chi \quad (1)$$

über alle Teilchen der Flüssigkeit erstreckt, welche kurz als das zu dieser Axe gehörige Rotationsmoment der Flüssigkeit bezeichnet werden möge. Die Flächensätze sagen aus, dass das zu irgend einer Axe gehörige Rotationsmoment während der Bewegung eines isolierten Systems unverändert bleibt, welche inneren Kräfte auch in demselben wirken mögen. Wenn man daher diejenige Axe sucht, zu der das grösste Rotationsmoment für den Anfangszustand gehört, so wird diese Axe diese Eigenschaft zu jeder späteren Zeit behalten müssen, und sie wird offenbar schliesslich zur Rotationsaxe der ganzen Flüssigkeit werden, weil bei einer gleichförmigen rotierenden Masse das grösste Rotationsmoment zur Rotationsaxe gehört. Wenn man ferner dieses grösste zur schliesslichen Umdrehungsaxe gehörige Rotationsmoment »Rotationsmoment« schlechthin nennt und es mit dem Buchstaben c bezeichnet, so kann man für den Anfangszustand nach (1) den Wert von c berechnen und muss dann für den Endzustand denselben Wert des Rotationsmomentes erhalten. Im Endzustand sind aber alle die verschiedenen Geschwindigkeiten χ der einzelnen Teilchen in die eine gemeinsame Winkelgeschwindigkeit ω der gleichförmigen Rotation übergegangen, mithin erhält man für den Endzustand statt (1):

$$c = \omega \cdot \sum m r^2$$

Die hier auftretende Summe ist nichts anderes als das Trägheitsmoment I der schliesslichen Figur relativen Gleichgewichts in Bezug auf ihre Umdrehungsaxe, es ist also:

$$c = \omega \cdot I$$

Jede Form relativen Gleichgewichts einer Flüssigkeit ist natürlich nur Gleichgewichtsfigur für einen bestimmten Wert der Rotationsgeschwindigkeit ω ; da zudem I für jede Gleichgewichtsfigur bestimmt ist, lässt sich für jede Gleichgewichtsfigur nach dieser Formel der Wert von c berechnen oder, umgekehrt ausgedrückt: Jede Gleichgewichtsfigur gehört zu einem bestimmten Wert des Rotationsmomentes c .

Wenn man sich nun die Aufgabe stellt, nachzusehn, was schliesslich aus einer anfangs beliebig bewegten reibenden Flüssigkeit wird, so kann sich eine Endform der Entwicklung der Flüssigkeit höchstens unter denjenigen bekannten Gleichgewichtsformen befinden, welche zum selben Wert des Rotationsmomentes gehören, wie ihn die Flüssigkeit in ihrem Anfangszustand besass. Man wird daher die bekannten Gleichgewichtsfiguren zunächst nach den Werten des Rotationsmomentes, zu denen sie gehören, ordnen und dann untersuchen, ob und welche von den zu einem bestimmten c gehörigen Figuren stabil sind.

Unser erstes Ziel ist, die Maclaurinschen, Jacobischen und Rocheschen Ellipsoide in dieser Hinsicht zu sichten, was durch Herrn Poincarés in der Vorbemerkung genannte Arbeit ermöglicht worden ist.

Die analytische Herleitung der ellipsoidalen Gleichgewichtsfiguren führt dazu, diese Figuren zunächst nicht als abhängig vom Rotationsmoment, sondern von der Rotationsgeschwindigkeit ω aufzufassen. Diese Auffassung wäre praktisch, wenn man z. B. die Frage stellte, welche Form die Erde, falls sie homogen wäre, bei ihrer bekannten Rotationsgeschwindigkeit annehmen müsste; doch ist sie in der That wertlos, weil man für alle derartigen Fälle über die der Wirklichkeit viel mehr entsprechende Theorie der inhomogenen Sphäroide verfügt. Die Betrachtung der Abhängigkeit vom Rotationsmoment, die allein durchgeführt werden soll, erweist sich bei den folgenden Stabilitätsuntersuchungen als notwendig, ferner ist sie die natürliche für die

Beziehungen unsrer Aufgabe zur Kosmogonie. Eine strenge Begründung der Laplaceschen Kosmogonie würde die Angabe der Formen relativen Gleichgewichts erfordern, die eine sich abkühlende und zusammenziehende, rotierende, inhomogene Masse durchmacht. Da man aber hier bald von der Theorie der inhomogenen Sphäroide im Stich gelassen wird, ist man zufrieden, wenn man die Vorstellungen durch die für homogene Massen erhältlichen Resultate leiten lassen kann. Es wird sich nachträglich zeigen, dass die Untersuchung der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren in der eben angegebenen Art alles liefert, was man von der Kenntnis dieser Figuren Aufklärendes für die Kosmogonie erwarten kann.

Vor Beginn der Stabilitätsuntersuchung wird es gut sein, die bisher bekannten Gleichgewichtsfiguren einer homogenen Flüssigkeit, gleich nach dem Werte des Rotationsmomentes geordnet, Revue passieren zu lassen. Speziell die Jacobischen Ellipsoide möge man sich bei den folgenden allgemeinen Betrachtungen immer als konkrete Beispiele hinzudenken.

Wahl der Einheiten. Die drei Grundeinheiten wähle man so, dass das zu betrachtende Flüssigkeitsquantum die Masse 1 und die Dichte 1 hat und zugleich die Gauss'sche Attraktionskonstante 1 wird. Zur Verdeutlichung diene folgendes. Ballt man die ganze Masse zu einer Kugel und lässt einen unendlich kleinen Mond an der Oberfläche derselben entlang eine Kreisbahn beschreiben, so wird sich die Winkelgeschwindigkeit ω dieses Mondes bei dieser Wahl der Einheiten aus der Gleichung bestimmen:

$$\frac{\omega^3}{2\pi} = \frac{2}{3}$$

Die Maclaurinschen Ellipsoide. Zu jedem Werte des Rotationsmomentes gehört als Gleichgewichtsfigur ein gewisses Revolutionsellipsoid. Ist c null, so geht dasselbe in eine Kugel über. Wächst c , so wird die Umdrehungsaxe kürzer, der Aequatorialdurchmesser wächst, und das geht

so lange fort, bis für unendlich grosses c das Revolutionsellipsoid in eine unendlich grosse unendlich dünne Kreisscheibe übergeht. Die Rotationsgeschwindigkeit ist für die Kugel null, sie wächst anfangs mit Zunahme der Abplattung bis zu einem Maximum, nimmt dann ab, um für die unendliche Kreisscheibe wieder null zu werden.

Die Jacobischen Ellipsoide. Verfolgt man die Reihe der Revolutionsellipsoide von $c = 0$ an mit wachsendem c , so kommt man noch bei wachsender Rotationsgeschwindigkeit zu einem gewissen Wert c_0 , dessen zugehöriges Ellipsoid das Axenverhältnis $1 : 0,5827$ hat. An dieses Ellipsoid schliesst sich eine Reihe neuer Gleichgewichtsfiguren an, zu jedem Wert von c über c_0 gehört nämlich ein gewisses dreiaxiges Ellipsoid als Gleichgewichtsfigur. Für $c = c_0$ verwandelt sich das dreiaxige Ellipsoid in das eben bezeichnete Revolutionsellipsoid; wächst c , so verkürzt sich die Rotationsaxe, eine Aequatorialaxe wird länger und länger, während die andere Aequatorialaxe immer kleiner wird und sich immer mehr der Rotationsaxe nähert, bis schliesslich für unendliches c das dreiaxige Ellipsoid sich in einen nadelförmigen unendlich langen und dünnen Kreiscylinder verwandelt. Die Rotationsgeschwindigkeit nimmt innerhalb dieser Reihe mit wachsendem Rotationsmoment ständig bis auf Null ab.

Andere Gleichgewichtsfiguren. Herr Poincaré hat noch andere Reihen von Gleichgewichtsfiguren entdeckt, die sich an diese Ellipsoide anschliessen und deren Entstehungsart später dargelegt werden wird. Ferner kennt man Ringfiguren mit und ohne Zentralkörper, auf deren Behandlung wir aber verzichten müssen. Eine letzte Art von Gleichgewichtsfiguren bildet ein Planet mit einem Monde, welche sich beide stets dieselbe Seite zukehren, und mit Systemen dieser Art für den speziellen Fall, dass der Mond unendlich klein ist, wird sich der zweite Teil dieser Arbeit eingehender beschäftigen.

§ 2. Das Stabilitätsprinzip.

Es ist wie gesagt unser Ziel, die bekannten Gleichgewichtsfiguren in stabile und instabile zu trennen, weil nur eine stabile Figur die Endform der Entwicklung einer reibenden Flüssigkeit sein kann, während eine instabile Figur höchstens als Uebergangsfigur auftritt und physikalisch von untergeordneter Bedeutung ist. Wir verzichten darauf, uns die Gleichgewichtsfiguren aus einer idealen reibungslosen Flüssigkeit gebildet zu denken und ihre Stabilität auch in diesem Falle zu untersuchen, weil man es ja in Wirklichkeit stets mit reibenden Flüssigkeiten zu thun hat und zudem die Untersuchung dieser Art Stabilität, wenn sie strenge sein soll, auf die grössten mathematischen Schwierigkeiten stösst; wir betrachten mithin die Flüssigkeit, aus der die Gleichgewichtsfiguren gebildet sind, stets als reibend (zähe, viskös), beschäftigen uns also nur mit derjenigen Stabilität, welche von Thomson und Tait im Gegensatz zur »gewöhnlichen« Stabilität einer reibungslosen Flüssigkeit die »säkulare« genannt worden ist.

Nach einem bekannten Theoreme von Dirichlet ist ein ruhendes mechanisches System dann in stabilem Gleichgewicht, wenn für die Ruhelage die potentielle Energie grösser ist als für alle benachbarten Anordnungen. Für uns handelt es sich nicht um das absolute Gleichgewicht einer Ruhelage, sondern nur um das relative Gleichgewicht, in dem sich eine gleichförmig rotierende Flüssigkeit zu einem mit ihr rotierenden Axensystem befindet, und wenn wir kurz von »Gleichgewicht« reden, so verstehen wir im folgenden darunter immer ein solches relatives Gleichgewicht. Dass auch in diesem Falle ein ähnliches Prinzip gilt, ist zuerst von Thomson und Tait¹⁾ angegeben und dann von Herrn Poincaré²⁾ näher dargelegt worden. Herr Basset³⁾ hat eine anschauliche Ableitung desselben Prinzips gegeben, die im folgenden zu Rate gezogen wurde.

1) Treatise on Natural Philosophy. 2. Ausgabe. Cambridge 1890. Teil II. § 778²⁾ 3).

2) Acta mathematica. Bd. VII. pag. 305

3) On the stability of Maclaurin's Liquid Spheroid. Proc. of the Cambridge Philos. Society. Vol. VIII.

doch musste, um einigen Mängeln derselben, was die Strenge betrifft, abzuweichen, ein Teil von Herrn Poincarés analytischem Beweise, nämlich die Berechnung des Ausdrucks der Energie, mit herübergenommen werden.

Für absolutes Gleichgewicht reicht allein das Gesetz der Erhaltung der Energie aus, um zu entscheiden, ob eine Bewegung, die nahe von der Gleichgewichtslage mit geringer Geschwindigkeit ihren Ausgang nimmt, stets nahe bei derselben bleibt oder in grössere Entfernung von derselben gerät, während man für relatives Gleichgewicht auch noch die Flächensätze zu Hilfe nehmen muss.

Wir beginnen damit, die gesamte

Kinetische und potentielle Energie einer Flüssigkeitsmasse zu berechnen, die sich in allen ihren Teilen beliebig bewegt und deren Partikelchen sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Ist v die ganze Geschwindigkeit eines Massenteilchens m , so ist die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum m v^2$$

wo die Summe sich über alle Massenteilchen erstreckt. Die potentielle Energie, d. h. diejenige Arbeit, die die Attraktionskräfte leisten würden, wenn man alle Teilchen aus ihrem wirklichen Zustand bis zu unendlicher Zerstreuung von einander entfernte, ist offenbar negativ und hat den Ausdruck:

$$-V = -\sum \frac{m \cdot m'}{\Delta}$$

wo Δ die Distanz der Teilchen m und m' bedeutet und die Summe über jede Kombination zweier Massenteilchen einmal zu erstrecken ist. Die gesamte Energie ist dann:

$$U = T - V$$

Es möge nun die Bewegung der Flüssigkeit näherungsweise in einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω erfolgenden Rotation um die z -Axe mit grösstem Rotationsmoment, welche als z -Axe bezeichnet werden möge, bestehen. Man lege eine Ebene durch die z -Axe und das Teilchen m und zerlege die Geschwindigkeit v dieses Teilchens in zwei Komponenten, von denen die eine in diese Ebene falle und den Betrag u haben mag, während die andere senkrecht zu dieser Ebene stehe und den Betrag habe:

$$v = r(\omega + \delta\omega)$$

worin r den Abstand des Teilchens von der z -Axe, $\omega + \delta\omega$ die Winkelgeschwindigkeit seiner Rotation um die z -Axe bedeutet. Es gilt dann:

$$v^2 = \omega^2 + u^2 = r^2(\omega + \delta\omega)^2 + u^2$$

Setzt man dies in den Ausdruck der Energie ein, so folgt:

$$U = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum m r^2 - V + \omega \cdot \sum m r^2 \delta\omega + \frac{1}{2} \sum m (u^2 + r^2 \delta\omega^2) \quad (1)$$

Jetzt nehmen wir die Flächensätze zu Hilfe. Wir bilden nämlich das zur z -Axe gehörige Rotationsmoment:

$$c = \sum m r^2 (\omega + \delta\omega) = \omega \cdot \sum m r^2 + \sum m r^2 \delta\omega \quad (2)$$

können dieses c für den Anfangszustand berechnen und wissen, dass es während jeder Bewegung der Flüssigkeit konstant bleibt. Man bemerke ferner, dass:

$$I = \sum m r^2$$

das Trägheitsmoment der Masse in ihrer jeweiligen Anordnung in Bezug auf die z -Axe ist. Quadriert man nun (2), dividiert durch $2I$, und subtrahiert von (1), so erhält man:

$$U = \frac{c^2}{2I} - V + \frac{1}{2} \sum m (u^2 + r^2 \delta\omega^2) - \frac{1}{2I} \cdot (\sum m r^2 \delta\omega)^2$$

Es ist aber, wenn m' irgend ein von m verschiedenes Massenteilchen und $r', \delta\omega'$ die zugehörigen Werte von r und $\delta\omega$ bedeuten:

$$\begin{aligned} I \cdot \sum m r^2 \delta\omega^2 - (\sum m r^2 \delta\omega)^2 &= \sum m r^2 \cdot \sum m' r'^2 \delta\omega'^2 - \sum m r^2 \delta\omega \cdot \sum m' r'^2 \delta\omega' \\ &= \sum \sum m m' r^2 r'^2 \delta\omega^2 - \sum \sum m m' r^2 r'^2 \delta\omega \delta\omega' \end{aligned}$$

wobei die Doppelsummen über alle Teilchen m und m' , zu nehmen sind, Durch Vertauschung der Indices erhält man:

$$I \cdot \sum m r^2 \delta\omega^2 - (\sum m r^2 \delta\omega)^2 = \sum \sum m m' r^2 r'^2 \delta\omega^2 - \sum \sum m m' r^2 r'^2 \delta\omega \delta\omega'$$

und wenn man addiert und durch $2I$ dividiert:

$$\sum m r^2 \delta\omega^2 - \frac{1}{I} (\sum m r^2 \delta\omega)^2 = \sum \sum \frac{m m' r^2 r'^2}{2I} (\delta\omega - \delta\omega')^2$$

Hiermit wird der Ausdruck der Energie:

$$U = \frac{c^2}{2I} - V + \frac{1}{2} \sum m u^2 + \frac{1}{2I} \sum m m' r^2 r'^2 (\delta\omega - \delta\omega')^2$$

wobei jetzt die letzte Summe über jede Kombination zweier Massenteilchen m und m' einmal zu nehmen ist. Wir setzen:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{c^2}{2I} - V & U_1 &= \frac{1}{2} \sum m u^2 + \frac{1}{2I} \sum m m' r^2 r'^2 (\delta\omega - \delta\omega')^2 \\ U &= U_0 + U_1 \end{aligned} \quad 3)$$

und bemerken, dass, wenn c gegeben ist, zu jeder beliebigen Massenordnung ein bestimmter berechenbarer Wert von U_0 gehört.

Nachdem wir den Ausdruck der Energie in dieser Weise mit Hülfe der Flächensätze umgeformt haben, haben wir im wesentlichen nur noch die Thatsache zu benützen, dass bei der Bewegung einer reibenden Flüssigkeit fortwährend mechanische Energie verloren geht, dass also U beständig abnimmt, um das **Stabilitätsprinzip** beweisen zu können, welches folgendermassen lautet:

«Ist eine Gleichgewichtsfigur gegeben, welche zum Rotationsmoment c gehört, so berechne man für diese Gleichgewichtsfigur und unter Beibehaltung desselben Wertes von c auch für alle möglichen benachbarten (durch mässige Deformationen aus der Gleichgewichtsfigur entstehenden) Massenordnungen den Wert des Ausdrucks U_0 . Die Gleichgewichtsfigur ist dann und nur dann stabil, wenn für sie U_0 im Verhältnis zu allen möglichen benachbarten Massenordnungen ein Minimum ist.»

1. Bemerkung. Was ist eigentlich die physikalische Bedeutung des Ausdrucks U_0 ? — Setzt man $u = 0$ und $\delta\omega = \delta\omega$, d. h. lässt man die ganze Masse mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit um die z -Axe rotieren, so erhält man: $U_1 = 0$ $U = U_0$. Es ist also U_0 die gesamte Energie einer Massenverteilung, wenn man dieselbe mit einer solchen einheitlichen Rotationsgeschwindigkeit um die z -Axe in Bewegung setzt, dass ihr Rotationsmoment gleich c wird. Ist ω diese Rotationsgeschwindigkeit, so fand sich schon in § 1:

$$c = I \cdot \omega$$

Hiermit erhält man auch: $U_0 = \frac{\omega^2}{2} I - V = \frac{1}{2} \sum m (r\omega)^2 - V$

ein Ausdruck, der diese Bedeutung von U_0 unmittelbar erkennen lässt.

Natürlich wird eine willkürliche Massenordnung, die nicht gerade eine zu c gehörige Gleichgewichtsfigur ist, die einheitliche Rotation und diesen Wert der Energie nur für einen Augenblick beibehalten können.

2. Bemerkung. Es wird später gezeigt werden, dass eine Massenordnung eine zu c gehörige Gleichgewichtsfigur ist, wenn bei dem betreffenden Werte von c für sie U_0 »stationär« ist, worunter folgendes verstanden ist. Man stelle benachbarte Massenordnungen her, indem man auf die ursprüngliche Massenordnung dünne Schichten auflegt oder solche von ihr wegnimmt,

und messe in jedem Falle die Grösse der Deformation durch die durchschnittliche Dicke der aufgelegten oder weggenommenen Schicht. U_0 heisst stationär, wenn das Verhältnis der Aenderung von U_0 bei einer Deformation beliebiger Art zur Grösse der Deformation selbst null wird, sobald die Deformation selbst unendlich klein wird. Wir werden von dieser Thatsache gleich Gebrauch machen müssen.

3. Bemerkung. Den Fall, dass U_0 für eine ganze Reihe sich stetig an die Gleichgewichtsfigur und an einander anschliessenden Massenanordnungen denselben Wert behält, schliessen wir grundsätzlich aus, weil derselbe einer besonderen Betrachtung bedürfte und im Folgenden nicht zur Verwendung kommt; wir nehmen vielmehr an, dass U_0 für jede hinreichend kleine endliche Deformation der Gleichgewichtsfigur um eine endliche Grösse wächst oder abnimmt.

Wir schreiten nun zum

Beweis des Stabilitätsprinzips und zwar zeigen wir im 1. Teil desselben, dass eine Gleichgewichtsfigur immer stabil ist (oder, um es genauer auszudrücken, dass eine Flüssigkeitsmasse auf kleine Stösse und Deformationen hin Gestalt, Rotations-Axe und Geschwindigkeit für alle Zeiten beliebig nahe behält, wofern nur die Stösse und Deformationen hinreichend klein sind), wenn für sie U_0 ein Minimum ist.

Sei wirklich für eine Gleichgewichtsfigur U_0 ein Minimum gleich \bar{U}_0 . Man hat nun die Flüssigkeitsmasse in alle möglichen dem Zustand relativen Gleichgewichts benachbarten Anfangszustände zu versetzen und nachzusehen, wie sie sich von denselben aus bewegt. Man berechne den zu jedem Anfangszustand gehörigen Wert von

$$c = \Sigma m r^2 (\omega + \delta\omega)$$

und teile die sämtlichen Anfangszustände in zwei Klassen, je nachdem für sie c gleich dem zur Gleichgewichtsfigur gehörigen Wert von c oder davon verschieden ist, und betrachte zunächst einen Anfangszustand der ersten Klasse.

Für einen Anfangszustand erster Klasse liefert 3) den vollständigen Ausdruck der Energie, was für einen Anfangszustand zweiter Klasse nicht der Fall ist, weil für einen solchen in U_0 , der Definition dieser Grösse widersprechend, ein veränderter Wert von c eingeführt werden müsste.

Der Wert der Energie für die Gleichgewichtsfigur ist gemäss der 1. Bemerkung: $U = U_0 = \bar{U}_0$; für eine benachbarte Massenanordnung ist nach Voraussetzung U_0 grösser als \bar{U}_0 , ferner ist U_1 als Summe von Quadraten stets positiv. Hiermit liefert Gleichung 3), dass für jeden Anfangszustand erster Klasse die Gesamtenergie grösser ist als für die Gleichgewichtsfigur. Nun nimmt aber die Gesamtenergie der Flüssigkeit bei der Bewegung infolge der Reibung fortwährend ab. Es kann diese Abnahme hauptsächlich auf Kosten der Geschwindigkeiten u und $\delta\omega - \delta\omega'$, also auf Kosten von U_1 erfolgen, sodass U_0 möglicherweise während der Bewegung zeitweise wächst; doch da U_1 stets positiv ist, wird U_0 stets kleiner als der Anfangswert der Energie U bleiben müssen. Sei im Anfang: $U = \bar{U}_0 + \varepsilon$. Dann folgt:

$$U_0 < \bar{U}_0 + \varepsilon \quad 4)$$

Hierbei ist ε eine positive Grösse, die um so kleiner ist, je weniger die Anfangslage von der Gleichgewichtslage abweicht und je kleiner die Anfangsstösse u und $\delta\omega$ sind. Da nun \bar{U}_0 ein Minimum sein soll, so wächst U_0 von \bar{U}_0 an um einen gewissen endlichen Betrag, wenn ich die Gleichgewichtsfigur deforme und die Deformation bis zu einer gewissen endlichen Grösse anwachsen lasse. Ich kann daher alle die benachbarten Massenanordnungen abtrennen, für welche U_0 unter $\bar{U}_0 + \varepsilon$ liegt. Dieselben werden, solange ε sehr klein ist, gegen die Gleichgewichtsfigur wenig deformiert sein, während für stärker deformierte Anordnungen U_0 über $\bar{U}_0 + \varepsilon$ hinausgehen muss. Die Gleichung (4), welche stets während der Bewegung erfüllt sein muss, lehrt dann, dass die Flüssigkeitsmasse sich immer innerhalb der wenig deformierten Massenanordnungen halten und niemals zu stärker deformierten übergehen kann, weil sonst U_0 grösser als $\bar{U}_0 + \varepsilon$ werden müsste. Da ferner

U_0 für alle Nachbarformen grösser als U_0 ist und nach dem eben Bewiesenen die Flüssigkeit sich stets unter den Nachbarformen hält, so gilt während der ganzen Bewegung:

$$U_0 > \bar{U}_0$$

Die ständige Abnahme der Energie liefert ferner:

$$U_0 + U_1 < U_0 + \varepsilon \quad 5)$$

Die Subtraktion ergibt:

$$U_1 < \varepsilon$$

Es können also auch die Geschwindigkeiten u und $\delta\omega$ nicht sehr gross werden, die gleichförmige Rotation um die z -Axe wird immer angenähert bestehen bleiben. Hiermit sind die Anfangszustände der ersten Klasse erledigt.

Um die der zweiten Klasse zu erledigen, müssen wir einen Poincaréschen Satz vorwegnehmen, den wir nur allmählich werden beweisen können und der so lautet:

Hilfssatz: »Wenn zu einem Werte c eine Gleichgewichtsfigur G gehört, für die $U_0 = \frac{c^2}{2I} - V$ ein Minimum ist, so gehört auch zu jedem von c wenig abweichenden Werte c' eine von dieser wenig abweichende Gleichgewichtsfigur G' , für welche $U_0 = \frac{(c')^2}{2I} - V$ ein Minimum ist.«

Hat man es nun mit einem Anfangszustand zweiter Klasse zu thun, der zu einem gegen c wenig veränderten Werte c' gehört, so kann man denselben, statt als dem Zustand der Figur G benachbart, auch als dem Zustand der zu c' gehörigen Gleichgewichtsfigur G' benachbart auffassen. Wiederholt man dann die ganze obige Betrachtung für den Wert c' und die Figur G' , so kommt man zu dem Resultat, dass von diesem Anfangszustand aus die Flüssigkeitsmasse sich stets in der Nähe des Zustandes G' , mithin auch in der Nähe des Zustandes G , halten wird.

Es ist somit vollständig bewiesen, dass eine Gleichgewichtsfigur stabil ist, wenn für sie U_0 ein Minimum ist.

Zusatz, betr. reibungslose Bewegungen. Im Falle einer reibungslosen Flüssigkeit würde keine Abnahme der Energie stattfinden, es könnte in (4) und (5) an Stelle der Ungleichheit eine Gleichheit treten, doch würde hierdurch am ganzen Beweise nichts geändert.

Wir gehen weiter zum

2. Teil des Beweises und zeigen, dass eine Gleichgewichtsfigur instabil ist, wenn für sie U_0 kein Minimum ist.

Es möge also der für die Gleichgewichtsfigur gültige Wert \bar{U}_0 kein Minimum sein, d. h. es existiere mindestens eine Reihe sich stetig an die Gleichgewichtsfigur und an einander anschliessender Massenanordnungen, für die U_0 von U_0 aus abnimmt. Man bringe die Flüssigkeit in eine einer solchen Reihe angehörige Gestalt und lasse sie im ersten Moment, ohne ihr unregelmässige Stösse zu erteilen, mit einer solchen durch die ganze Masse gleichen Geschwindigkeit um die z -Axe rotieren, dass das Rotationsmoment den zur Gleichgewichtsfigur gehörigen Wert c behält. Für diesen Anfangszustand ist U_0 kleiner als U_0 , ferner U_1 null, mithin die ganze Energie kleiner als U_0 .

Ferner kann dieser Anfangszustand, wenn man ihn nur nahe genug bei der Gleichgewichtsfigur wählt, selbst kein Gleichgewichtszustand sein. Denn wie aus der zweiten obigen Bemerkung ersichtlich ist, kann eine Reihe von Figuren, innerhalb welcher U_0 abnimmt, nicht aus lauter Gleichgewichtsfiguren bestehen, weil sonst U_0 von Figur zu Figur stationär, also in der ganzen Reihe konstant sein müsste. Es wird daher in einer solchen Reihe erst in einer gewissen endlichen Entfernung von der ursprünglichen eine neue Gleichgewichtsfigur auftreten können.

Ist also die neue Massenanordnung, in die man die Flüssigkeit gebracht hat, der ursprünglichen Figur relativen Gleichgewichts hinreichend benachbart, so ist sie selbst keine Lage relativen Gleichgewichts, es werden von diesem Anfangszustand aus, abgesehen von der Rotation um die z -Axe, in der Flüssigkeit von selbst gewisse Bewegungen entstehen, die Reibung zur Folge haben

(vergl. Zusatz), die Energie U der Flüssigkeit wird abnehmen. Nun war schon im Anfang U kleiner als U_0 , ferner ist U_0 kleiner als U , es wird also U und erst recht U_0 stets kleiner als U_0 bleiben müssen, d. h. die Flüssigkeit kann nie in die ursprüngliche Gleichgewichtslage, für die ja U_0 gleich U_0 ist, zurückkehren. Da sie aber infolge der Reibung schliesslich einmal zur (relativen) Ruhe kommen muss, so wird sie in eine neue von der ursprünglichen verschiedene Gleichgewichtsform übergehen müssen. Diese Schlussfolgerung bleibt gültig, wie nahe man auch den Anfangszustand bei der ursprünglichen Gleichgewichtsfigur wählen mag; jede noch so geringe Deformation im Beginn einer Reihe, innerhalb welcher U_0 abnimmt, hat schliesslich den Uebergang in eine andere Gleichgewichtsform zur Folge, und das ist es, was bewiesen werden sollte.

Zusatz, betr. reibungslose Bewegungen. Für diesen zweiten Teil des Beweises ist es wesentlich, dass die Flüssigkeit eine reibende sei. Eine reibungslose Flüssigkeit wird nämlich von einem Anfangszustand der betrachteten Art aus zwar nicht in den Gleichgewichtszustand zurückkehren, aber doch für unbegrenzte Zeit in dessen Nähe bleiben können. Auch für eine reibende Flüssigkeit würde der Beweis hinfällig, wenn die Flüssigkeit im Stande wäre, von dem neuen Anfangszustand aus ohne relative Verschiebung ihrer Teilchen wie ein fester Körper sich weiter zu bewegen, wobei dann keine Reibung stattfände; doch lässt sich einsehen, dass das nicht möglich ist.¹⁾

Hiermit ist das Stabilitätsprinzip vollständig begründet. Wir erinnern uns aber, dass wir zu dieser Ableitung zwei noch unbewiesene Sätze zu Hilfe nehmen mussten. Doch werden wir das Stabilitätsprinzip schon als feststehend betrachten und geraden Wegs darauf ausgehen, dasselbe zur praktischen Anwendung auf eine gegebene Gleichgewichtsfigur geschickt zu machen, wobei sich von selbst die Hilfsmittel bieten werden, um auch jene zwei noch ausstehenden Sätze zu beweisen.

§ 3. Ausarbeitung des Stabilitätsprinzips.

Das Stabilitätsprinzip führt die Frage nach der Stabilität einer Gleichgewichtsfigur darauf zurück, zu entscheiden, ob für dieselbe U_0 ein Minimum ist oder nicht. U_0 soll gemäss der ersten Bemerkung des vorigen Paragraphen kurz als die zu c gehörige Energie einer Massenordnung bezeichnet werden, auch soll der Index 0 weglassen, so dass also von jetzt an gilt:

$$U = \frac{c^2}{2I} - V$$

Um festzustellen, ob U für eine Gleichgewichtsfigur ein Minimum ist, bedarf es eines Ausdrucks für U , welcher den Wert dieser Grösse für irgend eine deformierte Figur mit dem für die Gleichgewichtsfigur gültigen unmittelbar zu vergleichen erlaubt. Die Aufstellung eines solchen Ausdrucks ist die Aufgabe dieses Paragraphen, sie wird in zwei Etappen der Annäherung erledigt werden.

a) Die Energie einer deformierten Figur in erster Näherung.

Es sei eine Gleichgewichtsfigur G gegeben und dieselbe werde auf irgend welche Art ein wenig deformiert. Man errichte die Normalen auf der Oberfläche von G und messe den Abstand ζ zwischen der deformierten und der Gleichgewichtsfigur längs dieser Normalen, nach aussen positiv,

¹⁾ Man könnte zunächst vermuten, dass vielleicht die Flüssigkeitsmasse in der neuen Gestalt, wie ein freier fester Körper, eine allgemeine Poinso'sche Kreisbewegung auszuführen im Stande sei. Man erinnere sich aber an den Helmholtz'schen Satz von der Erhaltung der Wirbel, nach welchem in einer homogenen inkompressibeln Flüssigkeit unter dem Einfluss von Kräften, die ein Potential haben, jedes Flüssigkeitsteilchen Rotations-Axe und -Geschwindigkeit für alle Zeit unverändert beibehält. Dann erkennt man sofort, dass die einzige Bewegung, welche eine solche Flüssigkeit ohne Verschiebung ihrer Teilchen gegeneinander ausführen kann, die gleichförmige Rotation um eine feste Axe ist. Da nun für den benutzten Anfangszustand gezeigt wurde, dass er kein Zustand derartigen relativen Gleichgewichts ist, so können sich von ihm aus die Flüssigkeitsteilchen nicht ohne Veränderung ihrer Lagerung und ohne Reibung weiterbewegen.

nach innen negativ gezählt. ζ wird bei einer willkürlichen Deformation eine willkürliche Funktion des Orts auf der Oberfläche von G sein, welche nur dadurch einer Beschränkung unterworfen ist, dass bei jeder Deformation die Gesamtmasse der Flüssigkeit konstant bleiben muss.

Die ganze Energie, die Attraktionsenergie und das Trägheitsmoment in Bezug auf die s -Axe, seien für die ursprüngliche Gleichgewichtsfigur U, V, I , für die deformierte Figur $\bar{U}, \bar{V}, \bar{I}$, der Ueberschuss letzterer Werte über erstere sei: $\delta U, \delta V, \delta I$. Man hat dann für die zu c gehörige Energie der deformierten Figur:

$$\bar{U} = U + \delta U = \frac{c^2}{2(I + \delta I)} - V - \delta V$$

und hieraus:
$$\delta U = -\frac{c^2}{2I^2} \delta I + \frac{c^2}{2I^3} (\delta I)^2 - \frac{c^2}{2I^4} (\delta I)^3 + \dots - \delta V$$

oder, da die Beziehung gilt:
$$c = \omega \cdot I$$

wenn ω die Rotationsgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfigur bezeichnet:

$$\delta U = -\frac{1}{2} \omega^2 \delta I - \delta V + \frac{\omega^3 (\delta I)^2}{2I^2} - \frac{\omega^3 (\delta I)^3}{2I^3} + \dots \quad 1)$$

Es erweist sich als praktisch, die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks, die die Aenderung von $\frac{\omega^2}{2} I + V$ infolge der Deformation bei konstant gehaltener Rotationsgeschwindigkeit angeben, zusammennzunehmen. Sind dm und dm' zwei beliebige Massenteilchen der Flüssigkeit und J ihr Abstand, bezeichnet ferner r den Abstand des Teilchens dm von der Rotationsaxe, so gilt:

$$\frac{1}{2} \omega^2 I + \bar{V} = \frac{1}{2} \int \omega^2 r^2 dm + \frac{1}{2} \iint \frac{dm \cdot dm'}{J}$$

wo jede Integration über die ganze Masse der deformierten Flüssigkeit zu erstrecken ist.

Es möge nun dm_1 ein Element der ursprünglichen Gleichgewichtsfigur, dm_2 ein Element der Massenschicht sein, die man auf die ursprüngliche Figur aufzulegen hat, um die deformierte zu erhalten, wobei dm_2 positiv oder negativ sein wird, je nachdem ζ positiv oder negativ, die Deformation nach aussen oder innen erfolgt ist, und wobei wegen der Unveränderlichkeit der Gesamtmasse die Bedingung:

$$\int dm_2 = 0 \quad 2)$$

erfüllt sein muss. Scheidet man aus den Integralen die Teile aus, die sich über die Gleichgewichtsfigur erstrecken, so erhält man:

$$\frac{\omega^2}{2} \bar{I} + \bar{V} = \frac{1}{2} \int \omega^2 r^2 dm_1 + \frac{1}{2} \int \omega^2 r^2 dm_2 + \frac{1}{2} \iint \frac{dm_1 dm'_1}{J} + \frac{1}{2} \iint \frac{dm_1 dm'_2}{J} + \frac{1}{2} \iint \frac{dm'_1 dm_2}{J} + \frac{1}{2} \iint \frac{dm_2 dm'_2}{J}$$

und hieraus:
$$\frac{\omega^2}{2} dI + dV = \frac{1}{2} \int \omega^2 r^2 dm_2 + \iint \frac{dm'_1 dm_2}{J} + \frac{1}{2} \iint \frac{dm_2 dm'_2}{J}$$

was sich auch schreiben lässt:

$$\frac{\omega^2}{2} dI + dV = \int dm_2 \left[\frac{\omega^2}{2} r^2 + \iint \frac{dm'_1}{J} \right] + \frac{1}{2} \iint \frac{dm_2 dm'_2}{J}$$

Die unter dem ersten Integralzeichen auftretende Klammer hat eine einfache Bedeutung. Es ist nämlich $\int \frac{dm'_1}{\Delta}$ das Potential der für die Gleichgewichtsfigur bestehenden Massenverteilung an der Stelle des Teilchens dm_2 , $\frac{\omega^2}{2} r^2$ ist das Potential der Zentrifugalkraft, es ist mithin:

$$P = \frac{\omega^2}{2} r^2 + \int \frac{dm'_1}{\Delta}$$

das für die Gleichgewichtsfigur bestehende Potential sämtlicher wirkenden Kräfte. Und zwar liefert diese Formel den Wert des Potentials in irgend einem Punkt, wenn r der Abstand dieses Punktes von der Rotationsaxe, Δ sein Abstand vom Massenteilchen dm'_1 ist.

Wir wollen nun von dem Umstand Vorteil ziehen, dass sich die Massenelemente dm_2 sämtlich sehr nahe bei der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur befinden. Der Wert des Potentials P auf der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur sei P_0 , der Differentialquotient von P nach der inneren Normale, also die in dieser Richtung wirkende Kraft, sei g . Man bezeichne ferner die Entfernung eines Punktes von der Gleichgewichtsfläche, auf der Normale der letzteren nach aussen positiv gezählt, mit λ . Dann hat man für das Potential in diesem Punkte, wenn λ klein ist und man höhere Potenzen dieser Grösse vernachlässigt:

$$P = P_0 - g \cdot \lambda$$

Weiter bezeichne man ein Oberflächenelement der Gleichgewichtsfigur mit $d\omega$. Trägt man auf sämtlichen Normalen dieses Elements die Strecken λ und $\lambda + d\lambda$ ab, so erhält man für das auf diese Weise abgegrenzte Massenelement:

$$dm_2 = d\omega \cdot d\lambda \quad 3)$$

wofür man die verschiedene Neigung der Normalen dieses Elements und hiermit einen Faktor von der Form $1 + a\lambda$ (a endlich) vernachlässigt. Setzt man dies alles oben ein, so folgt:

$$\frac{\omega^2}{2} \delta I + \delta V = \int dm_2 P_0 - \int g d\omega \lambda d\lambda + \frac{1}{2} \int \int \frac{d\omega \cdot d\omega'}{\Delta} d\lambda \cdot d\lambda'$$

In den zwei letzten Integralen hat man jetzt, statt über alle Massenelemente dm_2 , über alle Oberflächenelemente $d\omega$ und über λ von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \zeta$ zu integrieren. Führt man letztere Integration aus, so erhält man:

$$\frac{\omega^2}{2} \delta I + \delta V = \int dm_2 P_0 - \frac{1}{2} \int g d\omega \zeta^2 + \frac{1}{2} \int \int \frac{d\omega \cdot d\omega'}{\Delta} \zeta \zeta'$$

Dieser Ausdruck ist offenbar genau bis auf Grössen dritter Ordnung in ζ .

Wir haben nun noch die übrigen Glieder in Gleichung (1) zu berücksichtigen. Man hat:

$$\delta I = \int r^2 dm_2$$

oder bis auf Glieder zweiter Ordnung genau:

$$\delta I = \int r^2 d\omega d\lambda = \int r^2 \zeta d\omega \quad 3a)$$

wobei man bei derselben Genauigkeit unter r die Entfernung des Schwerpunkts des Oberflächenelementes $d\omega$ von der z -Axe verstehen kann. Benutzt man dies in (1) und vernachlässigt alle Glieder dritter und höherer Ordnung, so erhält man für die Änderung der Energie¹⁾ bis auf Grössen dritter Ordnung genau:

¹⁾ Herr Basset (On the stability of Maclaurin's Liquid Spheroid. Proc. Cambridge Philos. Society, Vol. VIII, pag. 31) und Herr Bryan (Ebenda, pag. 51) behaupten, dass Herr Poincaré das letzte Glied des Ausdrucks (4) versehentlich ausgelassen habe und dass infolgedessen seine Resultate über die Stabilität der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren noch nicht als abschliessend zu betrachten seien. In Wirklichkeit hat Herr Poincaré diesen Fehler gar nicht begangen, er führt dieses Glied allerdings nicht auf Seite 315 seiner Arbeit an, wo die übrigen Glieder von (4) auftreten, wo es sich aber noch nicht um Stabilitätsfragen handelt, doch hat er die Seiten 369—372 speziell der Berücksichtigung desselben gewidmet.

$$\delta U = -\int dm_2 P_0 + \frac{1}{2} \int g \zeta^2 d\omega - \frac{1}{2} \iint \frac{d\omega \cdot d\omega'}{\Delta} \zeta \zeta' + \frac{\omega^2}{2I} \left(\int r^2 \zeta d\omega \right)^2 \quad 4)$$

Bis hierher haben wir den Umstand noch nicht benutzt, dass unsere Ausgangsfigur eine Gleichgewichtsfigur ist. Es ist aber bekannt, dass eine Flüssigkeitsmasse dann im Gleichgewicht ist, wenn das Potential aller wirkenden Kräfte auf ihrer Oberfläche konstant ist, wenn die Resultante der wirkenden Kräfte auf ihrer Oberfläche senkrecht steht. Für eine Gleichgewichtsfigur wird also P_0 konstant, das erste Integral in 4) schreibt sich somit: $-P_0 \int dm_2$ und diese Grösse ist nach 2) null. Es bleibt also der Ausdruck der Aenderung der Energie:

$$\delta U = \frac{1}{2} \int g \zeta^2 d\omega - \frac{1}{2} \iint \zeta \zeta' \frac{d\omega d\omega'}{\Delta} + \frac{\omega^2}{2I} \left(\int r^2 \zeta d\omega \right)^2 \quad A)$$

In diesem Ausdruck bedeutet g die Schwere im Element $d\omega$ der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur, da wir g als Differentialquotient des Potentials nach der inneren Normale definiert haben und dieser Differentialquotient für eine Gleichgewichtsfigur gleich der Resultante aller wirkenden Kräfte, gleich der Schwere ist.

Die Gleichung A), welche, um es zu wiederholen, nur bis auf Glieder dritter Ordnung genau ist, werden wir im Nächstfolgenden so behandeln, als ob sie der vollständige Ausdruck der Aenderung der Energie wäre, und die nötige Korrektur erst später hinzufügen.

Zusatz. Beweis des in § 2, Bemerkung 2, ausgesprochenen Satzes. Der Ausdruck A), welcher die Aenderung der Energie bei der Deformation einer Gleichgewichtsfigur angibt, enthält keine Glieder erster Ordnung in ζ und das bedeutet, dass U für die Gleichgewichtsfigur in dem in der obigen Bemerkung angegebenen Sinne stationär ist.

Man vernachlässige ferner in 4) auch die Glieder zweiter Ordnung. Dann darf man im ersten Integral für dm_2 den Wert 3) einsetzen und erhält:

$$\delta U = -\int P_0 \zeta d\omega \quad 5)$$

Ferner lautet die Gleichung 2) bei der gleichen Genauigkeit:

$$\int \zeta d\omega = 0 \quad 6)$$

Man verlange nun, dass für die Ausgangsfigur U stationär sei, d. h. dass für alle möglichen Deformationen ζ die Glieder erster Ordnung in δU verschwinden. Es soll also für alle beliebigen Werte ζ , die der Bedingung 6) genügen, der Ausdruck 5) null werden. Das ist offenbar nur dann möglich, wenn P_0 eine Konstante ist.

Es folgt also auch umgekehrt: »Ist für irgend eine Massenanordnung die Energie U stationär, so ist dieselbe eine Gleichgewichtsfigur.«

Hiermit ist der erste Hülfsatz, der dem Beweise des Stabilitätsprinzips zu Grunde lag, erledigt.

b) Einführung der Orthogonalfunktionen.

Es ist in A) ein genäherter Ausdruck, für die Aenderung δU gefunden worden, welchen die zum Rotationsmoment c gehörige Energie erfährt, wenn man von der Gleichgewichtsfigur zu der durch die Abstände ζ charakterisierten Nachbarfigur übergeht. Wir wollen uns vorstellen, dass dieser Ausdruck vollständig wäre. Soll dann die Gleichgewichtsfigur stabil, U für sie ein Minimum sein, so muss dieser Ausdruck für δU positiv sein, wie man auch die Verteilung der Werte von ζ über ihre Oberfläche annehmen möge. Es ist also ein Weg anzugeben, wie man entscheiden kann, wenn die Form der Gleichgewichtsfläche, die Schwere auf ihrer Oberfläche, ω und I gegeben sind, ob δU für alle Deformationen positiv oder für einzelne negativ ist.

Man kann den Ausdruck A) in der Form schreiben:

$$\delta U = \frac{1}{2} \int g \zeta^2 d\omega - \frac{1}{2} \iint \zeta \zeta' d\omega d\omega' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\omega^2}{I} r^2 r'^2 \right) \quad 1)$$

Die Integrationen bedeuten, dass man die Oberfläche der Gleichgewichtsfigur in unendlich viele Teile $d\omega$ zu teilen, einen Wert von ζ zu nehmen, der zu einem im Innern von $d\omega$ gelegenen Punkte gehört, und über alle dann entstehenden Produkte zu summieren hat.

Man wird offenbar eine Annäherung an die Werte der Integrale erhalten, wenn man die Oberfläche nicht in unendlich viele, sondern in eine sehr grosse endliche Anzahl n von Teilen $d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3, \dots, d\omega_i, \dots, d\omega_n$ teilt, für g, r, ζ die in einem mitten in $d\omega_i$ gelegenen Punkte gültigen Werte g_i, r_i, ζ_i und für Δ den Abstand Δ_{ik} zweier mitten in den Teilen $d\omega_i$ und $d\omega_k$ gelegenen Punkte benützt und, statt zu integrieren, summiert. Man erhält dann folgenden Wert für δU :

$$\delta U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i d\omega_i \zeta_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d\omega_i d\omega_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} - \frac{\omega^2}{I} r_i^2 r_k^2 \right) \zeta_i \zeta_k \quad 2)$$

Dies ist eine quadratische Form mit den n -Variablen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Unsere Aufgabe ist, zu entscheiden, ob diese quadratische Form positiv oder, je nach der Wahl der ζ_i , bald positiv, bald negativ ist, was wir streng genommen nicht für eine endliche, sondern für eine unendlich grosse Zahl n durchzuführen haben.

Soll man über das Verhalten einer quadratischen Form der n -Variablen x_1, x_2, \dots, x_n :

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k \quad a_{ik} = a_{ki} \quad 3)$$

entscheiden; so hat man dieselbe in eine Summe von einander unabhängiger Quadrate zu verwandeln und das geschieht nach Jacobi folgendermassen: Man wählt eine beliebige zweite quadratische Form, die der Einfachheit wegen nur rein quadratische Glieder enthalten möge:

$$g = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 \quad 4)$$

und kann dann eine lineare Substitution bestimmen:

$$x_i = \sum_{\lambda=1}^n \beta_{i\lambda} y_\lambda \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad 5)$$

durch welche f und g in:

$$f = \sum_{\lambda=1}^n s_\lambda y_\lambda^2 \quad g = \sum_{\lambda=1}^n y_\lambda^2 \quad 9)$$

also in Summen von reinen Quadraten übergehen. Für die Substitutionscoeffizienten gelten dabei die Beziehungen:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda'} = \begin{matrix} 0 & \text{wenn } \lambda > \lambda' \\ s_\lambda & \lambda = \lambda' \end{matrix} \quad 7)$$

$$\sum_{i=1}^n b_i \beta_{i\lambda} \beta_{i\lambda'} = \begin{matrix} 0 & \text{wenn } \lambda > \lambda' \\ 1 & \lambda = \lambda' \end{matrix} \quad 8)$$

Hierin sind die s_λ die Wurzeln der Determinantengleichung:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - b_1 s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - b_2 s & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - b_n s \end{vmatrix} = 0 \quad 9)$$

Ferner gelten noch die Beziehungen:

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \beta_{i\lambda} = b_k s_\lambda \beta_{k\lambda} \quad (10)$$

Wir wollen für f die Doppelsumme, für g die einfache Summe in (2) nehmen, setzen also:

$$a_{ik} = d\omega_i d\omega_k \left(\frac{1}{l_{ik}} - \frac{\omega^2}{l} r_i^2 r_k^2 \right) \quad b_i = g_i d\omega_i \quad (11)$$

und:

$$\delta U = \frac{1}{2} (g - f)$$

lösen die Gleichung (9) auf, bestimmen die $\beta_{i\lambda}$ aus den Gleichungen (10) und (8), bilden die Substitution (5), in denen wir nur an Stelle von x_i ζ_i schreiben, und erhalten dann vermittelt (6):

$$\delta U = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^n (1 - s_\lambda) y_\lambda^2 \quad (12)$$

mithin die gewünschte Umformung von δU in eine Summe von Quadraten.¹⁾

Wir wollen noch die Gleichungen (7), (8) und (10) in der Form hinschreiben, die sie infolge von (11) annehmen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda'} d\omega_i d\omega_k \left(\frac{1}{l_{ik}} - \frac{\omega^2}{l} r_i^2 r_k^2 \right) &= \begin{matrix} 0 & \text{wenn } \lambda \geq \lambda' \\ s_\lambda & \lambda = \lambda' \end{matrix} \\ \sum_{i=1}^n \beta_{i\lambda} \beta_{i\lambda'} g_i d\omega_i &= \begin{matrix} 0 & \text{wenn } \lambda \geq \lambda' \\ 1 & \lambda = \lambda' \end{matrix} \\ \sum_{i=1}^n \beta_{i\lambda} d\omega_i \left(\frac{1}{l_{ik}} - \frac{\omega^2}{l} r_i^2 r_k^2 \right) &= g_k s_\lambda \beta_{k\lambda} \end{aligned} \quad (13)$$

Es ist bekannt, dass diese Rechnung für jede endliche Zahl n durchführbar ist und diese Formelsysteme selbst in den Ausnahmefällen ihre Gültigkeit behalten, wo mehrere Wurzeln s der Determinante gleich werden.

Uebergang zu einer unendlichen Zahl n . Um für δU an Stelle der Summen (2) den Integralausdruck (1) zu erhalten, haben wir nun zu einer unendlichen Zahl n überzugehen. Die Reihe von isolierten Werten $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ geht dann in die kontinuierliche Funktion ζ über, welche die Deformation der Gleichgewichtsfigur angiebt. Die Determinante D wird unendlich viele Wurzeln haben und es sind unendlich viele neue Variablen y_λ einzuführen. Man betrachte die Gleichungen (5)

$$\zeta_i = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \beta_{i\lambda} y_\lambda \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

und fasse einmal die Koeffizienten β_{i1} , die zu y_1 gehören, ins Auge. Für jedes i gilt eine solche Gleichung, für jedes i erhält man einen bestimmten Wert β_{i1} , zu jedem i gehörte ein bestimmtes Oberflächenelement $d\omega_i$, es gehört also zu jedem Oberflächenelement $d\omega_i$ ein bestimmter Wert β_{i1} ; wird n unendlich, werden die Elemente $d\omega_i$ unendlich klein, so bilden die sämtlichen Werte β_{i1} ($i = 1, 2, 3, \dots$) zusammen eine gewisse Funktion des Ortes auf der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur. Dasselbe gilt für die Werte β_{i2}, β_{i3} u. s. w. Alle zu einem Index λ gehörigen Werte β bilden eine Funktion des Ortes auf der Oberfläche, welche mit η_λ bezeichnet werden soll und welche

¹⁾ Allerdings ist hierbei nicht berücksichtigt, dass die Unveränderlichkeit der Flüssigkeitsmasse eine Bedingung zwischen den Grossen y_λ erfordert und die Quadrate mithin nicht, wie sie es doch sein sollten, unabhängig von einander sind. Da die hierdurch notwendige Korrektur der vorigen Betrachtungen im allgemeinen verwickelt, in den späteren speziellen Anwendungen aber unmittelbar zu erledigen ist, schien es besser, sie hier bei Seite zu lassen.

wegen ihres Entstehens aus einer orthogonalen Substitution den Namen »Orthogonalfunktionen« erhalten soll. Wir finden ein System von unendlich vielen zusammengehörigen Orthogonalfunktionen.

Die Substitutionen (14) kann man jetzt unter Fortlassung des Index i schreiben:

$$\zeta = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \eta_{\lambda} \cdot y_{\lambda} \quad \text{B)}$$

wobei man nur rechts und links die für dasselbe Oberflächenelement gültigen Werte der Orthogonalfunktionen η_{λ} und von ζ zu nehmen hat. Man erhält also nichts anderes, als eine Reihenentwicklung der willkürlichen Funktion des Orts ζ nach Orthogonalfunktionen, in der die y_{λ} als Entwicklungskoeffizienten auftreten. Man erhält alle möglichen Deformationen ζ , indem man diese Entwicklungskoeffizienten auf alle mögliche Art innerhalb gewisser Grenzen variieren lässt.

δU verwandelt sich nach (12) in eine unendliche Summe von Quadraten:

$$\delta U = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (1 - s_{\lambda}) y_{\lambda}^2 \quad \text{C)}$$

Die Gleichungen (13) gehen in die folgenden fundamentalen Integraleigenschaften der Orthogonalfunktionen über:

$$\iint \eta_{\lambda} \eta'_{\lambda'} \frac{d\omega d\omega'}{\Delta} - \frac{\omega^2}{I} \iint \eta_{\lambda} \eta'_{\lambda'} r^2 r'^2 d\omega d\omega' = \begin{matrix} 0 & \text{wenn } \lambda \geq \lambda' \\ s_{\lambda} & \lambda = \lambda' \end{matrix} \quad \text{D)}$$

$$\int g \eta_{\lambda} \eta_{\lambda'} d\omega = \begin{matrix} 0 & \text{wenn } \lambda \geq \lambda' \\ 1 & \lambda = \lambda' \end{matrix} \quad \text{E)}$$

$$\int \eta'_{\lambda} \frac{d\omega'}{\Delta} - \frac{\omega^2}{I} r^2 \int \eta'_{\lambda} r'^2 d\omega' = g s_{\lambda} \eta_{\lambda} \quad \text{F)}$$

Hierin gehören, wie schon immer, die oben mit einem Accent versehenen Grössen $\eta' r'$ zum Flächenelement $d\omega'$; in der letzten Gleichung ist Δ der Abstand des Elementes $d\omega'$ von dem festen Punkt der Oberfläche, zu dem die rechts stehenden Werte g und η_{λ} gehören.

So wären wir am Ziel. Man hätte die Wurzeln einer unendlichen Determinante D zu berechnen und fände nach (C), dass δU dann und nur dann für alle möglichen Deformationen positiv wäre, wenn die sämtlichen Wurzeln s_{λ} kleiner als 1 ausfallen. Näheres Eingehen auf die Orthogonalfunktionen selbst wäre nicht nötig. In der That hat Herr Poincaré den Begriff der Orthogonalfunktionen für eine beliebige Fläche nicht gebildet und sich begnügt, anzugeben, dass der Ausdruck (C) herstellbar ist. Doch ist es für die Uebersicht vorteilhafter, die allgemeinen Orthogonalfunktionen aufzustellen, weil dann in den speziellen Fällen, für die man die Ausdrücke der Orthogonalfunktionen und die Werte der Wurzeln s_{λ} wirklich hinschreiben kann, die Integraleigenschaften (D) (E) (F) nicht als blosse Merkwürdigkeiten, sondern als mit der Entstehungsart dieser Funktionen durch eine orthogonale Substitution organisch verbunden erscheinen. Zudem erinnern wir uns, dass der hier zu Grunde gelegte Ausdruck (A) für δU nicht vollständig war und dass die nötige Korrektur desselben erst noch herzustellen ist. Auch für diesen Zweck wird es förderlich sein,

Die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Orthogonalfunktionen ausführen zu können. Gleichung (B) lehrt, dass eine solche Entwicklung existiert, und es ist sehr leicht, wenn die Funktion ζ in allen Punkten der Fläche vorgeschrieben ist, die Entwicklungskoeffizienten y_{λ} zu finden. Man multipliziere nämlich (B) mit $g d\omega \eta_{\lambda}$ und integriere über die ganze Oberfläche. Man erhält dann:

$$\int g d\omega \zeta \eta_{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda} \int g \eta_{\lambda} \eta_{\lambda} d\omega$$

oder mit Hilfe der Gleichungen (E):

$$y_k = \int g d\omega \zeta \eta_k$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Man darf sich nun nicht verheimlichen, dass die ganzen eben angestellten Entwicklungen unsicher sind, weil

die Berechtigung zum Uebergang von einer endlichen zu einer unendlichen Zahl n fraglich ist. Schon die Definition der Grössen s_λ sagt im Grunde nichts aus, weil man die unendliche Determinante, deren Wurzeln sie sind, nicht behandeln kann. Es müsste gezeigt werden, dass man eine Annäherung an bestimmte Grenzwerte von n Wurzeln s erhält, wenn man die Determinante für einen endlichen Wert n aufstellt und auflöst. Trotzdem kann man die Existenz der Wurzeln s_λ und der Orthogonalfunktionen η_λ nach der obigen Ableitung mit grosser Sicherheit behaupten. Es tritt nämlich genau dieselbe Bildung einer orthogonalen Substitution und genau derselbe Uebergang zu unendlichem n in sehr vielen Gebieten der mathematischen Physik auf und jedesmal sind die Resultate, die man so mathematisch unberechtigter Weise erschlossen hat, durch die direkte physikalische Erfahrung bestätigt worden. Wie man die Orthogonalfunktionen für die Kugel und das Ellipsoid in den Kugelfunktionen und Lamé'schen Funktionen wirklich angeben kann, so kann man auch in den andern Fällen die entsprechenden Gebilde für gewisse einfache Körper herstellen, es fehlt aber bislang an einem Beweis, dass dasselbe für einen beliebigen Körper möglich ist. Alle folgenden allgemeinen Sätze werden mit derselben Unsicherheit behaftet sein, mit der die Existenz der Orthogonalfunktionen selbst behaftet ist; dagegen sind die Resultate der im zweiten Teile dieser Arbeit zu machenden Anwendungen völlig streng, weil für die dort behandelten Ellipsoide die Orthogonalfunktionen nach geringen Modifikationen in die bekannten wirklich herstellbaren Lamé'schen Funktionen übergehen.¹⁾

Durch sehr wahrscheinliche Analogieschlüsse gewinnt man aus dem Verhalten der Werte s_λ für die Kugel- und Lamé'schen Funktionen noch einige Sätze, die zur Förderung der Vorstellung von den Orthogonalfunktionen dienlich sind. Für jede endliche Fläche ohne Singularitäten bilden die s_λ eine Reihe diskreter Werte, welche mit einem grössten endlichen positiven Werte s_1 anfangen und dann abnehmend sich mehr und mehr der Null nähern. Wird eine Fläche stetig deformiert, so ändern sich auch die Stabilitätskoeffizienten stetig. Dabei kann es für spezielle Flächen vorkommen, dass mehrere Wurzeln s_λ denselben Zahlenwert annehmen, oder anders ausgedrückt, dass zu einem Zahlenwerte eine ganze Anzahl verschiedener Orthogonalfunktionen gehört. Z. B. hat man für die Kugel:

| | |
|----------------------|--|
| die dreifache Wurzel | $s_1 = s_2 = s_3 = 1$ |
| › fünffache | › $s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = s_8 = \frac{1}{2}$ |
| › siebenfache | › $s_9 = s_{10} = \dots s_{15} = \frac{1}{3}$ |
| › neunfache | › $s_{16} = s_{17} = \dots s_{24} = \frac{1}{4}$ |
| | u. s. w. |

Auch für das Rotationsellipsoid werden zwei Grössen s_λ paarweise gleich.

¹⁾ Einer späteren Gelegenheit muss die Behandlung weiterer Eigenschaften der Orthogonalfunktionen vorbehalten bleiben, sowie die Angabe ihrer Verwendbarkeit in der Potentialtheorie und ihrer Analogieen mit den von Herrn C. Neumann eingeführten »Elementarpotentialen« (Berichte der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1878. Entwicklung nach Elementarpotentialen, § 16.) und Herrn Poincaré's »Fundamentalfunktionen« (La Méthode de Neumann et le Problème de Dirichlet. Acta

c) Vollständiger Ausdruck der Energie einer deformierten Figur.

Man könnte versucht sein, die Aenderung der Energie infolge einer Deformation der Gleichgewichtsfigur, so wie wir es unter a) begonnen haben, nach Potenzen der Werte von ζ weiterentwickeln zu wollen, allein ein solcher Versuch würde nicht durchführbar sein, weil schon für die dritten Potenzen die Differentiale der reziproken Distanz $\frac{1}{\Delta}$ nach der Normale in Betracht kämen, welche, wenn zwei Punkte zusammenrücken, so unstetig werden, dass die betreffenden Integrale ihren Sinn verlieren. Dagegen kann man die Deformation ζ zunächst auf die oben angegebene Art nach Orthogonalfunktionen entwickeln und die Aenderung der Energie dann durch eine Reihe darstellen, welche nach Potenzen der Entwicklungskoeffizienten y_λ fortschreitet. Für uns wird es genügen, die Möglichkeit dieses Verfahrens einzusehen, ohne es vollständig auszuführen.

Im Grunde ist es für das Folgende nur nötig zu wissen, dass die im Ausdruck (C) vernachlässigten Glieder im Verhältnis zu den mitgenommenen um so kleiner werden, je kleiner die Deformation selbst wird, was geometrisch evident ist. Herr Poincaré ist daher auch auf die weitere Entwicklung der Energie nicht eingegangen; doch werden wir die Thatsache, dass die Energie in dieser Weise entwickelbar ist, als Kontrolle für andere Ueberlegungen in § 4 f) zu Hülfe nehmen, zudem scheint mir die Ueberzeugung angenehm, dass man es arithmetisch hier nicht mit aussergewöhnlichen Erscheinungen zu thun hat, was nicht so sehr auf der Hand liegt, als es im ersten Momente scheinen mag.

Die Attraktionsenergie der Flüssigkeit war durch das doppelte Raumintegral:

$$-V = -\iint \frac{dm \cdot dm'}{\Delta}$$

dargestellt. Dasselbe soll in ein doppeltes Oberflächenintegral übergeführt werden. Man führe das Attraktionspotential ein:

$$R = \int \frac{dm'}{\Delta}$$

Dann ist:

$$V = \int R dm$$

Nun kann man bekanntlich R durch ein Oberflächenintegral ausdrücken (Tissérand, *Mécanique céleste*, Bd. II pag. 5):

$$R = \frac{1}{2} \int d\omega \cos(n \Delta)$$

worin $(n \Delta)$ den Winkel bedeutet, welchen die Richtung vom angezogenen Punkt nach dem flächenelement $d\omega$ mit der in diesem errichteten äusseren Normale n macht. Hiermit wird:

$$V = \frac{1}{2} \int dm \int d\omega \cos(n \Delta)$$

oder durch Umkehrung der Integration:

$$V = \frac{1}{2} \int d\omega \cdot \int dm \cos(n \Delta)$$

mathematica. Bd. 20. 1896.) Dort soll auch ein strenger Beweis ihrer Existenz erbracht werden, der sich auf folgende Vorstellung stützt:

Jede einfach zusammenhängende Fläche kann man eindeutig auf die Kugel beziehen. Kennt man eine Orthogonalfunktion dieser Fläche, so bedeutet dieselbe eine gewisse Verteilung von Funktionswerten auf der Fläche, oder auch, infolge der Beziehung, eine Verteilung von Funktionswerten auf der Kugel, welche letztere man nach Kugelfunktionen entwickeln kann. Es lassen sich nun die Orthogonalfunktionen in Gestalt von Entwicklungen nach Kugelfunktionen, deren Konvergenz bewiesen werden kann, wirklich herstellen.

Sei:

$$T = \int dm \cos(n, A) \quad V = \frac{1}{2} \int d\omega \cdot T$$

T ist eine Funktion des Orts auf der Oberfläche, man hat bei der Integration für n die Normale in dem Punkt der Oberfläche zu nehmen, für welchen man T berechnen will. Wir wollen zur Verdeutlichung dieser Normalen und dem Oberflächenelement, in welchem dieser Punkt liegt, einen Accent geben, also schreiben:

$$T' = \int dm \cos(n', A) \quad V = \frac{1}{2} \int d\omega' T'$$

Es ist nun offenbar:

$$\frac{\delta A}{\delta n'} = \cos(n', A)$$

Mithin:

$$T' = \int dm \frac{\delta A}{\delta n'}$$

Für jede beliebige stetige Funktion ϱ gilt die folgende Integraltransformation:

$$\int dm \frac{\delta \varrho}{\delta n'} = \int d\omega \varrho \cos(n, n')$$

die man leicht aus den Green'schen Sätzen ableitet.¹⁾ Wendet man das auf T' an, so folgt:

$$T' = \int d\omega \cdot A \cos(n, n')$$

und hiermit:

$$V = \frac{1}{2} \iint d\omega \cdot d\omega' A \cos(n, n') \quad 1)$$

Hier bedeutet, um über die Bezeichnung keinen Zweifel zu lassen, A den Abstand der beiden Elemente $d\omega$ und $d\omega'$, (n, n') den Winkel der Normalen in denselben.

Man führe auf der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur Flächenkoordinaten μ und ν ein, welche einen Punkt auf der Fläche eindeutig in solcher Weise bestimmen, dass sich der Punkt stetig bewegt, wenn man μ und ν stetig ändert. Ferner führe man ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, und es mögen x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Oberfläche sein. Bekannte Sätze der Flächentheorie liefern dann:

$$\begin{aligned} d\omega \cos(nx) &= \left(\frac{\delta y}{\delta \mu} \frac{\delta z}{\delta \nu} - \frac{\delta y}{\delta \nu} \frac{\delta z}{\delta \mu} \right) d\mu \cdot d\nu \\ d\omega \cos(ny) &= \left(\frac{\delta z}{\delta \mu} \frac{\delta x}{\delta \nu} - \frac{\delta z}{\delta \nu} \frac{\delta x}{\delta \mu} \right) d\mu \cdot d\nu \\ d\omega \cos(nz) &= \left(\frac{\delta x}{\delta \mu} \frac{\delta y}{\delta \nu} - \frac{\delta x}{\delta \nu} \frac{\delta y}{\delta \mu} \right) d\mu \cdot d\nu \end{aligned} \quad 2)$$

Die bisher aufgestellten Beziehungen mögen für die Gleichgewichtsfigur selbst gelten, die auf die deformierte Figur bezüglichen Grössen wollen wir, wie früher, oben mit einem Querstrich versehen und erhalten dann für diese Grösse an Stelle von (1):

$$V = \frac{1}{2} \iint d\omega \cdot d\omega' A \cos(n, n') \quad 3)$$

¹⁾ Da wir die Dichte gleich 1 gesetzt haben, bedeutet dm auch ein Volumenelement.

Wir führen aber auf der Oberfläche der deformierten Figur kein neues System von Flächenkoordinaten $\bar{\mu} \bar{\nu}$ ein, sondern beziehen die deformierte Figur auf die ursprüngliche, indem wir jedem Punkt der ursprünglichen Figur den auf seiner Normalen liegenden Punkt der deformierten zuweisen, und können dann indirekt die Koordinaten $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$ eines Punktes der deformierten Figur als Funktionen von μ und ν betrachten. Man erhält sofort:

$$\bar{x} = x + \zeta \cos(nx) \quad \bar{y} = y + \zeta \cos(ny) \quad \bar{z} = z + \zeta \cos(nz) \quad 4)$$

und an Stelle von (2) treten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d\bar{\omega} \cos(\bar{n}x) &= \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \mu} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \nu} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \mu} \right) d\mu \cdot d\nu \\ d\bar{\omega} \cos(\bar{n}y) &= \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \mu} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \nu} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \mu} \right) d\mu \cdot d\nu \\ d\bar{\omega} \cos(\bar{n}z) &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \mu} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \mu} \right) d\mu \cdot d\nu \end{aligned} \quad 5)$$

Man hat ferner:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \\ \bar{\Delta}^2 &= \Delta^2 + 2(x-x')[\zeta \cos(nx) - \zeta' \cos(n'x)] + 2(y-y')[\zeta \cos(ny) - \zeta' \cos(n'y)] \\ &\quad + 2(z-z')[\zeta \cos(nz) - \zeta' \cos(n'z)] + \zeta^2 + \zeta'^2 - 2\zeta\zeta' \cos(nn') \end{aligned} \quad 6)$$

da: $\cos(nn') = \cos(nx) \cos(n'x) + \cos(ny) \cos(n'y) + \cos(nz) \cos(n'z)$ ist. 7)

Man entwickle jetzt ζ nach Orthogonalfunktionen:

$$\zeta = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \eta_{\lambda} \gamma_{\lambda}$$

berücksichtige aber, dass es sich nur um kleine Deformationen handelt und infolgedessen die γ_{λ} klein werden, setze daher:

$$\zeta = a \sum_{\lambda=1}^{\infty} \eta_{\lambda} A_{\lambda} \quad \gamma_{\lambda} = a A_{\lambda} \quad 8)$$

wo a eine sehr kleine, A_{λ} eine mässige endliche Grösse ist. Man erhält dann z. B. aus (4):

$$\bar{y} = y + a \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda} \eta_{\lambda} \cos(ny)$$

und hieraus:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \mu} = \frac{\partial y}{\partial \mu} + a \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \{ \eta_{\lambda} \cos(ny) \} \quad 9)$$

Aehnlich kann man die andern in (5) auftretenden Differentialquotienten ausdrücken. Setzt man alle diese Ausdrücke in (5) ein, so findet man:

$$\begin{aligned} d\bar{\omega} \cos(\bar{n}x) &= \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \mu} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \nu} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial \nu} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \mu} \right) d\mu d\nu + a M_1 d\mu d\nu + a^2 M_2 d\mu d\nu \\ d\bar{\omega} \cos(\bar{n}y) &= d\omega \cos(ny) + [a M_1 + a^2 M_2] d\mu \cdot d\nu \end{aligned} \quad 10)$$

Hierin bedeuten M_1 und M_2 unendliche Summen, deren erste nach den A_{λ} selbst, deren zweite nach Quadraten und Produkten der A_{λ} fortschreitet.

Man schreibe nun die Gleichung (10) noch einmal für ein anderes Oberflächenelement $d\bar{\omega}'$ und multipliziere diese beiden Gleichungen miteinander, verfähre ebenso mit den entsprechenden

auf die y - und z -Koordinate bezüglichen Relationen und addiere die drei entstehenden Produkte. Man erhält dann in Rücksicht auf (7):

$$d\bar{\omega} \cdot d\bar{\omega}' \cos(\bar{n}\bar{n}') = d\omega d\omega' \cos(nn') + [aN_1 + a^3N_3] d\mu d\nu d\mu' d\nu' \quad (11)$$

wo N_1 und N_3 ähnlich wie M_1 und M_3 gebaute Summen sind.

Um \bar{V} aufstellen zu können, hat man noch \bar{J} zu berechnen. Man setze

$$\zeta = a \cdot h$$

h wird dann eine endliche und stetige Funktion des Orts auf der Fläche sein. Setzt man dies in (6) ein, so erhält man einen Ausdruck der Form:

$$\bar{J}^2 = J^2 + a m_1 + a^3 m_3$$

Man überzeugt sich nun leicht durch einfache Betrachtungen, die wir uns hier ersparen dürfen, dass die Grössen: $\frac{m_1}{J^2}$ und $\frac{m_3}{J^2}$ endlich bleiben, wenn man die Punkte auf der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur, deren Distanz J ist, einander beliebig nahe rücken lässt, wofern, wie wir das voraussetzen, h überall endliche und stetige Derivierte hat. Entwickelt man daher:

$$\bar{J} = J \cdot \sqrt{1 + a \frac{m_1}{J^2} + a^3 \frac{m_3}{J^2}} = J [1 + a n_1 + a^3 n_3 + \dots] \quad (12)$$

so wird diese Entwicklung konvergent, so lange a hinreichend klein ist. Die n sind dabei ganze Funktion von $\frac{m_1}{J^2}$ und $\frac{m_3}{J^2}$.

Man setze für h wieder die Entwicklung nach Orthogonalfunktionen $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \eta_{\lambda} A_{\lambda}$ ein.

Hierdurch werden $\frac{m_1}{J^2}$ und $\frac{m_3}{J^2}$ in unendliche Summen übergehen, die nach den A_{λ} resp. nach Quadraten und Produkten derselben fortschreiten. Die n werden ähnliche Reihen sein und zwar wird n_i aus Gliedern i 'ter Dimension in den A_{λ} bestehen. Multipliziert man nun (11) und (12), so erhält man:

$$d\omega d\omega' \bar{J} \cos(\bar{n}\bar{n}') = d\omega \cdot d\omega' \cos(nn') \cdot J + a \cdot J [k_1 + a k_3 + a^3 k_5 + \dots] d\mu d\nu d\mu' d\nu'$$

wo die k ähnliche Summen wie die n sind, und mit Hülfe von (1) und (3):

$$\bar{V} - V = \frac{1}{2} \int \int d\mu d\nu d\mu' d\nu' \cdot J [a k_1 + a^3 k_3 + a^5 k_5 + \dots]$$

Die Integration ist hier eigentlich eine vierfache, sie erstreckt sich über alle Werte μ, ν, μ', ν' , welche diese Grössen auf der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur annehmen.

Man denke sich die k ausgeschrieben, z. B.:

$$k_3 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_i A_k A_l b_{i k l}$$

wobei $b_{i k l}$, ebenso wie J , eine Funktion von $\mu \nu \mu' \nu'$ sein wird. Diesen Ausdruck führe man unter dem Integralzeichen ein und integriere. Man findet dann:

$$\frac{1}{2} \int \int d\mu d\nu d\mu' d\nu' \cdot J k_3 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_i A_k A_l c_{i k l}$$

$$c_{i k l} = \frac{1}{2} \int \int d\mu d\nu d\mu' d\nu' \cdot J b_{i k l}$$

Führt man das für alle k durch, so erhält man eine Entwicklung von $\bar{V} - V$ nach Potenzen der A_k . Man kann schliesslich an Stelle von $a A_k$ wieder y_k einführen, womit $\bar{V} - V$ nach Potenzen der y_k selbst entwickelt ist.

Es fehlt nun nicht mehr viel, um die gleiche Entwicklung für die Aenderung der ganzen Energie U durchführen zu können. Es war ja:

$$U = \frac{c^2}{2I} - V$$

Wir haben also nur noch die Aenderung des Trägheitsmomentes I zu untersuchen, und dies lässt sich auf ähnliche Art bewerkstelligen. Es ist nämlich:

$$I = \int r^2 dm \quad \bar{I} = \int \bar{r}^2 d\bar{m}$$

wenn, wie oben, r den Abstand des Teilchens dm von der z -Axe, der Rotationsaxe, bedeutet. Legt man um die z -Axe einen Cylinder vom Radius r und bezeichnet ein Oberflächenelement dieses Cylinders mit $d\sigma$, so ist offenbar:

$$dm = d\sigma \cdot r \cdot dr$$

folglich:

$$I = \int d\sigma \cdot r^3 dr = \frac{1}{4} \int R^4 d\sigma$$

wenn man unter R den Wert versteht, den r auf der Oberfläche der Gleichgewichtsfigur annimmt.

Ist ferner (nR) der Winkel zwischen der äusseren Normale im Oberflächenelement $d\omega$ und der Richtung R (diese Richtung von der z -Achse nach dem Element $d\omega$ hin gezählt), so gilt:

$$R d\sigma = d\omega \cos(nR)$$

Man findet daher:

$$I = \frac{1}{4} \int R^3 \cos(nR) d\omega \quad (13)$$

und entsprechend für die deformierte Figur:

$$\bar{I} = \frac{1}{4} \int \bar{R}^3 \cos(\bar{n}\bar{R}) d\bar{\omega}$$

Ferner ergibt die geometrische Anschauung:

$$\begin{aligned} \cos(nR) &= \cos(nx) \cos(Rx) + \cos(ny) \cos(Ry) + \cos(nz) \cos(Rz) \\ R = x^2 + y^2 \quad R \cos(Rx) &= x \quad R \cos(Ry) = y \quad R \cos(Rz) = 0 \end{aligned}$$

Hiermit wird

$$I = \frac{1}{4} \int (x^2 + y^2) [x \cos(nx) + y \cos(ny)] d\omega \quad (14)$$

und entsprechend

$$\bar{I} = \frac{1}{4} \int (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) [\bar{x} \cos(\bar{n}\bar{x}) + \bar{y} \cos(\bar{n}\bar{y})] d\bar{\omega} \quad (15)$$

Man sieht unmittelbar ein, dass man mit Hülfe der Gleichungen (2) (4) (5) und (8) aus diesen beiden Formeln einen Ausdruck herstellen kann:

$$\bar{I} = I + a l_1 + a^2 l_2 + \dots + a^5 l_5 \quad (16)$$

welcher mit der fünften Potenz von a abschliesst und worin l_i eine unendliche Summe ist, die aus Gliedern i ter Dimension in den A_k besteht.

Setzt man, wie oben: $\bar{I} - I = \delta I$, so hat man:

$$U = \frac{c^2}{2(I + \delta I)} - V = U - (\bar{V} - I) - \frac{\omega^2}{2} \delta I + \frac{\omega^2}{2I} (\delta I)^2 - \frac{\omega^2}{2I^2} (\delta I)^3 + \dots$$

Die hier ausgeführte Entwicklung ist konvergent, wenn δI klein genug ist, d. h. wenn α hinreichend klein ist. Man kann hier für δI den aus Gleichung (16) folgenden Ausdruck einführen, in diesem wieder statt αA_λ den Wert y_λ einsetzen und erhält, wenn man die oben für $\bar{V} - V$ ausgeführte Entwicklung heranzieht, schliesslich die ganze Aenderung der Energie $\bar{U} - U$ in Gestalt einer Reihe, die nach Potenzen der y_λ fortschreitet.

Aus den Betrachtungen in den beiden ersten Abschnitten dieses Paragraphen wissen wir, dass die Glieder erster Ordnung in dieser Reihe fehlen, die Glieder zweiter Ordnung werden durch (C) geliefert, man erhält daher im Ganzen:

$$U - U = \delta U = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (1 - s_\lambda) y_\lambda^2 + U_3 \tag{G}$$

und hierin ist U_3 eine Potenzreihe mit den unendlich vielen Variablen y_λ , die mit Gliedern dritter Ordnung beginnt.

Aus der skizzierten Ableitung dieser Potenzreihe geht hervor, dass sie konvergiert, sobald α hinreichend klein ist, oder nach (8), sobald die Deformation ζ hinreichend klein ist. Dabei ist zugleich vorausgesetzt worden, dass die y_λ die Entwicklungskoeffizienten der samt ihren ersten Derivierten endlichen und stetigen Funktion ζ sind und dass die Entwicklung einmal gliedweise differenziert werden darf. Man kann daher über die Konvergenz der Reihe (G) folgenden Satz aussprechen:

Die Potenzreihe (G) konvergiert immer, wenn die Entwicklung nach Orthogonalfunktionen

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \eta_\lambda y_\lambda$$

eine samt ihren ersten Derivierten überall auf der Fläche endliche und stetige hinreichend kleine Funktion darstellt und diese Entwicklung einmal gliedweise differenziert werden darf.

d) Endgültige Form des Stabilitätsprinzips.

Die unendlichen vielen Grössen $1 - s_\lambda$, die von den Wurzeln einer unendlichen Determinante abhängen und die man in Praxis für jede Gleichgewichtsfigur aus der Theorie ihrer Orthogonalfunktionen ableiten wird, wollen wir mit Herrn Poincaré »Stabilitätskoeffizienten« nennen und folgenden Satz beweisen, welcher die zur Anwendung geeignetste Form des Stabilitätsprinzips darstellt, die man ihm für eine ganz unbestimmt gelassene Gleichgewichtsfigur geben kann:

»Eine Gleichgewichtsfigur ist stabil, wenn alle ihre Stabilitätskoeffizienten positiv sind, sie ist instabil, wenn einer oder mehrere negativ sind, während der Fall, dass ein oder mehrere Stabilitätskoeffizienten null und alle übrigen positiv sind, einer besonderen Untersuchung bedarf.«

Am leichtesten sieht man den negativen Teil dieses Satzes ein. Es möge nämlich ein Stabilitätskoeffizient, z. B. $1 - s_1$, negativ sein. Man bilde eine Reihe gegen die Gleichgewichtsfigur deformierter Figuren, indem man auf den Normalen der Gleichgewichtsfigur die Strecken:

$$\zeta = \eta_1 \cdot y_1$$

aufträgt und y_1 zwischen einem positiven oder negativen Werte und Null variieren lässt. Die Entwicklung (G) ergibt dann für die Energie dieser Figuren:

$$U - U = (1 - s_1) y_1^2 + A_2 y_1^3 + A_4 y_1^4 + \dots$$

wobei die Potenzreihe für hinreichend kleines y_1 konvergent ist. Schreibt man:

$$\bar{U} - U = (1 - s_1) y_1^3 \left[1 + \frac{A_3}{1 - s_1} y_1 + \frac{A_4}{1 - s_1} y_1^2 + \dots \right]$$

so wird für sehr kleines y_1 die Klammer nahezu eins und, da $1 - s_1$ negativ sein soll, $\bar{U} - U$ negativ werden. Man hat also eine Reihe sich an die Gleichgewichtsfigur anschliessender Figuren, in deren Beginn die Energie abnimmt, dieselbe ist also kein Minimum, mithin die Gleichgewichtsfigur instabil.

Dasselbe bleibt natürlich gültig, wenn mehrere Stabilitätskoeffizienten negativ sind. Sind dagegen alle andern positiv und $1 - s_1$ null, so wird das Verhalten von \bar{U} im Anfang der eben gebildeten Reihe von A_3 abhängen, es lässt sich also in diesem Falle aus der Kenntnis der Stabilitätskoeffizienten allein nichts schliessen.

Seien nun alle Stabilitätskoeffizienten positiv. Man bilde irgend eine Reihe sich an die Gleichgewichtsfigur anschliessender Figuren und charakterisiere jede Figur durch den Wert eines in der Reihe von null an wachsenden Parameters p . Für jede einzelne dieser Figuren bilde man die Entwicklung:

$$\zeta = \sum \eta_\lambda y_\lambda$$

Die Koeffizienten y_λ dieser Entwicklung werden Funktionen von p sein und da für sehr kleines p auch die Abweichung von der Gleichgewichtsfigur ζ , mithin auch die y_λ sehr klein werden, so kann man setzen:

$$y_\lambda = a \cdot A_\lambda \quad \zeta = a \sum \eta_\lambda A_\lambda$$

worin die A_λ endliche Grössen sind und a mit auf Null abnehmendem p gleichfalls auf Null abnimmt. Setzt man diese Werte in die Entwicklung (G) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \bar{U} - U &= a^3 \sum (1 - s_\lambda) A_\lambda^3 + a^3 C_3 + a^4 C_4 + \dots \\ &= a^3 C_2 + a^3 C_3 + a^4 C_4 + \dots \end{aligned}$$

Hierin ist C_2 eine positive Grösse. Schreibt man ferner:

$$\bar{U} - U = a^3 C_2 \left[1 + a \frac{C_3}{C_2} + a^2 \frac{C_4}{C_2} + \dots \right]$$

so ist die in der Klammer auftretende Potenzreihe für kleines a konvergent, die Klammer selbst für sehr kleines a und p nahezu eins, mithin der ganze Ausdruck für kleines p positiv. Es wächst also \bar{U} im Beginn jeder beliebigen Reihe sich an die Gleichgewichtsfigur anschliessender Figuren, U ist für die Gleichgewichtsfigur ein Minimum, diese selbst ist stabil.¹⁾

Hiermit ist der obige Satz bewiesen und die Ausarbeitung des Stabilitätsprinzips, soweit sie sich allgemein durchführen lässt, vollendet.

Bemerkung über die Fortsetzung der Untersuchung. Man würde nun erwarten, dass wir gemäss dem in § 1 gesteckten Ziele sofort zur Anwendung auf spezielle bekannte Gleichgewichtsfiguren übergangen. Dies schieben wir aber aus zweierlei Gründen auf. Einmal steht noch der Beweis des Hilfssatzes aus, der in § 2 bei der Ableitung des Stabilitätsprinzips benutzt wurde und der sich hier besser in den Gedankengang einfügen lässt. Dann aber soll von jetzt an über-

¹⁾ Die Konvergenz der Klammer im Ausdruck $\bar{U} - U$ setzt voraus, dass ζ mit seinen ersten Derivierten endlich und stetig ist und seine Entwicklung nach Orthogonalfunktionen einmal gliedweise differenziert werden kann. Die Schlussfolgerung bleibt daher zunächst nur gültig für Nachbarfiguren, deren Abweichung ζ von der Gleichgewichtsfigur diesen Bedingungen genügt. Jede andere Nachbarfigur wird man aber beliebig nahe zwischen zwei Nachbarfiguren dieser ersten Art einschliessen können, und da sich die Energie mit der Deformation stetig ändert, bleibt die Schlussfolgerung allgemein richtig. Will man ganz strenge sein, so wird man vielleicht nicht von einem Minimum reden, sondern sagen: Es giebt in einer gewissen endlichen Nachbarschaft der Gleichgewichtsfigur keine andere Figur, für die die Energie um endliches kleiner würde. Doch auch diese Thatsache genügt mechanisch, um die Stabilität der Gleichgewichtsfigur zu sichern.

haupt eine Erweiterung des Zwecks der Untersuchung eintreten. Wir wollen uns nämlich nicht darauf beschränken, nur die bekannten Gleichgewichtsfiguren auf ihre Stabilität zu prüfen, sondern, gestützt auf unsere Entwicklung der Energie, versuchen, ob sich nicht neue Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der bekannten entdecken lassen.

§ 4. Die Kontinuität der Gleichgewichtsfiguren.

Betrachtet man die in § 1 erwähnten Beispiele bekannter Gleichgewichtsfiguren und beobachtet, wie sie sich als Funktionen des Rotationsmomentes in Reihen ordnen und wie von der Reihe der Rotationsellipsoide auf einmal die Reihe der Jacobi'schen Ellipsoide abzweigt, so erhebt sich von selbst die Frage: Können Gleichgewichtsfiguren isoliert auftreten oder sind sie, als Funktionen des Rotationsmomentes betrachtet, stets in Reihen angeordnet, und wenn das der Fall ist, wann verzweigen sich solche Reihen und wo endigen sie? Man wird hierauf Antwort geben können, sobald man im Stande ist, alle Gleichgewichtsfiguren anzugeben, die sich in der Nähe einer gegebenen Gleichgewichtsfigur befinden und die zum selben Rotationsmoment, wie diese, oder zu wenig verändertem Rotationsmoment gehören. Das Instrument der Untersuchung wird die Betrachtung der Energie:

$$U = \frac{c^2}{2I} - V$$

sein, denn für eine Gleichgewichtsfigur muss dieser Ausdruck bei konstant gehaltenem c stationär, für eine stabile dazu ein Minimum werden. Doch kann man sich jetzt nicht wie im vorigen Paragraphen auf die Entwicklung dieses Ausdrucks für einen bestimmten Wert c beschränken, vielmehr muss man auch c variieren lassen, weil man ja Gleichgewichtsfiguren für eine Reihe von Nachbarwerten des Rotationsmoments untersuchen soll.

Unser erstes ist daher die Entwicklung der Energie für veränderliches Rotationsmoment, hieran wird sich der Beweis des in § 2 benutzten Hilfssatzes schliessen und dann werden wir zur Beantwortung der obigen Frage übergehen.

a) Berechnung der Energie für verändertes Rotationsmoment.

Man gehe aus von der Energie U einer gegebenen zum Rotationsmoment c gehörigen Gleichgewichtsfigur G :

$$U = \frac{c^2}{2I} - V$$

Die auf eine deformierte Massenordnung bezüglichen Grössen verseehe man wieder oben mit einem Querstrich. Ferner gebe man den Grössen, die zu einem veränderten Rotationsmoment c' gehören, einen Accent. Man hat dann für die zu c' gehörige Energie einer beliebigen Massenordnung:

$$\dot{U}' = \frac{c'^2}{2I} - \dot{V}$$

Ist nun:

$$c' = c + \delta c$$

und setzt man:

$$k = c \delta c + \frac{1}{2} (\delta c)^2 \quad 1)$$

so folgt:

$$U'' = \frac{c^2}{2I} - V + \frac{k}{I}$$

oder:

$$U'' - U = U - U + \frac{k}{I} \quad 2)$$

Hier stellt $\bar{U} - U$ die Veränderung dar, welche die Energie allein durch den Uebergang von der Gleichgewichtsfigur zu der betreffenden benachbarten Massenordnung ohne Aenderung von c erfährt, der Term $\frac{k}{I}$ fügt hinzu, was die Veränderung des Rotationsmomentes ausmacht.

Bestimmt man wieder eine benachbarte Massenordnung durch den Abstand ζ ihrer Oberfläche von der Gleichgewichtsfigur und entwickelt ζ nach Orthogonalfunktionen:

$$\zeta = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \eta_{\lambda} y_{\lambda} \quad \text{B)}$$

so hat man für $\bar{U} - U$ die Entwicklung (G) des vorigen Paragraphen:

$$\bar{U} - U = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (1 - s_{\lambda}) y_{\lambda}^2 + U_3 \quad \text{G)}$$

Ferner haben wir dort gesehen, dass sich auch $\frac{1}{I}$ in eine Potenzreihe nach den y_{λ} entwickeln lässt.

Man kann also setzen:

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{I} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_{\lambda} y_{\lambda} + I_3 \quad \text{3)}$$

wo I_3 alle Glieder zweiter und höherer Ordnung zusammenfasst und die B_{λ} Konstanten sind, die man folgendermassen bestimmen kann.

Wir fanden in § 3, a) Gleichung (3a) die Beziehung:

$$\delta I = \bar{I} - I = \int r^2 \zeta d\omega$$

woraus bis auf Glieder zweiter Ordnung folgt:

$$\frac{1}{\bar{I}} = \frac{1}{I} - \frac{1}{(I)^2} \int r^2 \zeta d\omega$$

und wenn man hier die Entwicklung (B) einsetzt:

$$\frac{1}{\bar{I}} = \frac{1}{I} - \frac{1}{(I)^2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda} \int r^2 \eta_{\lambda} d\omega$$

mithin:

$$B_{\lambda} = - \frac{1}{(I)^2} \int r^2 \eta_{\lambda} d\omega \quad \text{4)}$$

Setzt man jetzt (G) und (3) in (2) ein, so erhält man die gesuchte Entwicklung der Energie einer deformierten Massenordnung für verändertes Rotationsmoment:

$$\bar{U} = U + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (1 - s_{\lambda}) y_{\lambda}^2 + U_3 + k \left[\frac{1}{I} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_{\lambda} y_{\lambda} + I_3 \right] \quad \text{H)}$$

b) Beweis des in § 2. benutzten Hilfssatzes.

Bei der Ableitung des Stabilitätsprinzips wurde der Hilfssatz benutzt: »Wenn zu einem Rotationsmoment c eine Gleichgewichtsfigur G gehört, für die $U = \frac{c^2}{2I} - V$ ein Minimum ist, so gehört auch zu jedem von c wenig abweichenden Werte c' eine von G wenig abweichende Gleichgewichtsfigur G' , für welche $U' = \frac{c'^2}{2I} - V$ ein Minimum ist.«

Dieser Satz ist bewiesen, sobald man gezeigt hat, dass es für jeden hinreichend kleinen Wert von k eine Massenordnung giebt, für die \bar{U}' bei festgehaltenem k ein Minimum wird. Denn

eine solche Massenordnung ist von selbst eine Gewichtsfigur, weil für ein Minimum \bar{U} stationär werden muss.

Man setze (3) in (2) ein, schreibe also die Energie in der Form:

$$\bar{U}' - U = \bar{U} - U + \frac{k}{I} + k \left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} B_{\lambda} y_{\lambda} + I_2 \right]$$

Man denke sich ferner irgend eine Reihe von Massenordnungen, die sich an G und aneinander kontinuierlich anschliessen. Man durchlaufe eine solche Reihe auf eine kleine endliche Strecke, dann wird in ihr $\bar{U} - U$ von Null aus zu wachsen beginnen und einen gewissen positiven Wert M erreichen, da ja vorausgesetzt wurde, dass U ein Minimum ist. Ferner wird der Ausdruck

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} B_{\lambda} y_{\lambda} + I_2$$

gleichfalls von Null ausgehen und für die Massenordnung, für die der Wert M erreicht wird, irgend einen endlichen Wert N erreichen. Man hat also für diese Massenordnung:

$$\bar{U}' = U + \frac{k}{I} + M + k \cdot N$$

Nun ist $U + \frac{k}{I}$ nichts anderes als die zum Rotationsmoment c' gehörige Energie U' der Ausgangsfigur, mithin schreibt sich diese Gleichung:

$$\bar{U}' = U' + M + kN$$

Solange k hinreichend klein ist, wird $k \cdot N$ seinem absoluten Werte nach kleiner als M und daher \bar{U}' grösser als U' sein. Es hat also die zu c' gehörige Energie für eine Massenordnung in der gedachten Reihe einen grösseren Wert als für die Ausgangsfigur, folglich muss sie in dieser Reihe für irgend eine Massenordnung einen kleinsten Wert annehmen, welches, falls \bar{U}' von der Gleichgewichtsfigur G aus sofort zu wachsen beginnen sollte, auch G selbst sein könnte. Man wird so für jede beliebige Reihe von Massenordnungen, die sich an G anschliessen, eine Anordnung finden, für die \bar{U}' den kleinsten Wert in dieser Reihe annimmt, und wenn man aus allen diesen Minimalanordnungen wieder diejenige herausucht, welche unter ihnen den kleinsten Wert von \bar{U}' liefert, so hat man eine Anordnung gefunden, wie sie gesucht ist, für die die zu c' gehörige Energie kleiner ist als für jede benachbarte Anordnung. Es ist dabei nicht möglich, dass man auf die Ausgangsfigur zurückkommt, weil diese sonst Gleichgewichtsfigur für zwei verschiedene Werte des Rotationsmomentes sein müsste.

Die neue Gleichgewichtsfigur wird sehr nahe bei G liegen, wenn k sehr klein ist. Denn man braucht, um diese Schlussweise anwenden zu können, sich in jeder Reihe nur so weit von G zu entfernen, bis M grösser als der absolute Wert von kN geworden ist, und das wird um so eher eintreten, je kleiner k ist.

Hiermit ist der Hilfsatz bewiesen und die letzte Lücke in der Ableitung des Stabilitätsprinzips ausgefüllt.

Wir gehen jetzt an die Beantwortung der eingangs aufgeworfenen Frage und zwar stellen wir uns dieselbe in Form folgender Aufgabe:

c) Eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren aus einer einzelnen gegebenen Gleichgewichtsfigur abzuleiten.

Es handelt sich also darum, in der Nähe einer gegebenen Gleichgewichtsfigur für kleine Werte von k solche Massenordnungen aufzufinden, für die \bar{U}' stationär wird (s. § 3a Zusatz), in andern Worten, für die der partielle Differentialquotient von \bar{U}' nach jedem y_{λ} verschwindet, für die also gilt:

$$\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_{\lambda}} = 0 \text{ für } \lambda = 1, 2, 3 \dots \infty \quad 5)$$

Setzt man hier für \bar{U}' die Entwicklung (H) ein, so erhält man:

$$\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_\lambda} = 0 = (1 - s_\lambda) y_\lambda + k B_\lambda + \frac{\delta U_s}{\delta y_\lambda} + k \cdot \frac{\delta I_s}{\delta y_\lambda} \quad 6)$$

und aus diesem System von unendlich vielen Gleichungen hat man die unendlich vielen Unbekannten y_λ zu bestimmen.

Die Auflösung ist leicht, wenn man die Voraussetzung macht, die zunächst festgehalten werden soll, dass die sämtlichen Stabilitätskoeffizienten $1 - s_\lambda$ von G von Null verschieden seien. Vernachlässigt man nämlich sämtliche Glieder höherer Ordnung, so gehen diese Gleichungen über in:

$$0 = (1 - s_\lambda) y_\lambda + k B_\lambda \quad 7)$$

woraus folgt:

$$y_\lambda = - \frac{B_\lambda}{1 - s_\lambda} \cdot k \quad 8)$$

und dies sind infolge unserer Voraussetzung lauter Grössen, die mit k unendlich klein werden.

Man setze nun die hier gefundenen Werte für die y_λ in $\frac{\delta U_s}{\delta y_\lambda}$ und $k \frac{\delta I_s}{\delta y_\lambda}$ ein, wodurch man bei Vernachlässigung der dritten Potenz von k einen Ausdruck

$$\frac{\delta U_s}{\delta y_\lambda} + k \frac{\delta I_s}{\delta y_\lambda} = k^3 C_\lambda \quad 9)$$

erhält, in welchem die C_λ gewisse Konstante bedeuten. Hieraus folgt dann:

$$y_\lambda = - k \frac{B_\lambda}{1 - s_\lambda} - k^3 \frac{C_\lambda}{1 - s_\lambda} \quad 10)$$

Setzt man jetzt diese Werte in $\frac{\delta U_s}{\delta y_\lambda}$ und $\frac{\delta I_s}{\delta y_\lambda}$ ein und fährt so fort, so erhält man schliesslich die y_λ in Form von Potenzreihen:

$$y_\lambda = - k \frac{B_\lambda}{1 - s_\lambda} - k^3 \frac{C_\lambda}{1 - s_\lambda} - k^5 \frac{D_\lambda}{1 - s_\lambda} - \dots \quad 11)$$

und ein bekannter Satz der Eliminationstheorie lehrt, dass diese Reihen für hinreichend kleines k konvergent sind.

Da diese Reihen für jedes k eindeutig bestimmte Werte der y_λ liefern, so sieht man, dass, wenn sämtliche $1 - s_\lambda$ von Null verschieden sind und k hinreichend klein ist, das Gleichungssystem (5) oder (6) stets eine und nur eine Lösung hat. Führt man dann die Werte (11) in die Entwicklung (B) ein, so erhält man die Strecken ζ , welche man auf den Normalen der ursprünglichen Gleichgewichtsfigur aufzutragen hat, um die benachbarte zu verändertem Rotationsmoment gehörige Gleichgewichtsfigur zu erhalten.¹⁾

Um dieses und einige folgende Resultate kurz aussprechen zu können, ist es nützlich, gewisse **Neue Bezeichnungen** einzuführen. Eine Gleichgewichtsfigur, deren Stabilitätskoeffizienten alle von Null verschieden sind, soll »ordinär«, eine, für die das nicht der Fall ist, soll »singulär« heissen. Ferner wollen wir zwei Gleichgewichtsfiguren »Figuren vom selben Stabilitätscharakter« nennen,

¹⁾ Es müsste genau genommen noch bewiesen werden, dass die Entwicklung (B) für ζ nach Einsetzung der aus (11) folgenden Werte y_λ konvergiert und eine wirkliche Deformation ζ liefert. Es lässt sich dieser Beweis aus einer eingehenderen Theorie der Orthogonalfunktionen strenge erbringen; man kann aber auch durch eine geringe Modifikation der unter b) eben ausgeführten Schlussfolgerungen den Satz ableiten, dass bei jeder Gleichgewichtsfigur, deren Stabilitätskoeffizienten alle von Null verschieden sind, mindestens eine benachbarte zu bestimmtem benachbartem Rotationsmoment gehörige Gleichgewichtsfigur existiert, und die hier gegebene Ableitung zum Beweise benutzen, dass es nur eine solche giebt.

wenn für sie die zum gleichen Index λ gehörigen Stabilitätskoeffizienten gleiches Vorzeichen haben (die Stabilitätskoeffizienten selbst nach der Grösse geordnet gedacht).

Wir haben dann das Resultat: »An jede ordinäre Gleichgewichtsfigur schliessen sich sowohl für wachsendes als für abnehmendes Rotationsmoment eine Reihe neuer Gleichgewichtsfiguren an, deren Form man aus den Entwicklungen (11) und (B) ableiten kann.«

Es ist nun schon oben erwähnt worden, dass die Stabilitätskoeffizienten sich stetig ändern, wenn man eine Gleichgewichtsfigur stetig in eine andere übergehen lässt. Da aber für unsere bisherige Ausgangsfigur alle Stabilitätskoeffizienten von Null verschieden sein sollten, so können sie für die Nachbarfiguren nicht plötzlich zu Null oder anderem Vorzeichen überspringen. Es folgt also, dass die sich zunächst anschliessenden Figuren ordinär vom selben Stabilitätscharakter wie die ursprüngliche sind. Man kann daher irgend eine von diesen Figuren als Ausgangsfigur wählen und das obige Verfahren wiederholen, wodurch man vielleicht eine Fortsetzung der Reihe zu noch grösseren oder kleineren Werten von c erhält, wenn sich die Konvergenz des Verfahrens für die neue Ausgangsfigur besser stellt. Auf jeden Fall kann man stets eine endliche, wenn auch vielleicht sehr kleine Fortsetzung der Reihe über jede ordinäre Figur hinaus zu Wege bringen. Nur wenn man an eine singuläre Figur gerät, kann man auf Grund der obigen Ableitung nichts über die weitere Fortsetzung der Reihe aussagen, weil dann die Gleichungen (8) (10) (11) für einen bestimmten Index λ , für welchen $1 - s_\lambda = 0$ ist, keinen Sinn haben werden.

Noch etwas ist hinzuzufügen. Wenn es in unmittelbarer Nachbarschaft der Ausgangsfigur noch eine andere zum selben Rotationsmoment, zu $k = 0$, gehörige Gleichgewichtsfigur gäbe, müsste dieselbe durch das obige Verfahren geliefert werden, wenn wir $k = 0$ setzten. Thut man das aber, so erhält man aus (11) $\gamma_\lambda = 0$ und aus (B): $\zeta = 0$, mithin die Ausgangsfigur selbst, und führt man das gleiche für die anderen ordinären Figuren der gebildeten Reihe aus, so findet man, dass in unmittelbarer Nähe dieser Reihe nirgends andere Gleichgewichtsfiguren existieren können, so lange man nicht in der Reihe selbst auf eine singuläre Figur trifft, für welche das obige Verfahren wieder seinen Dienst versagt.

Diese Ergebnisse lassen sich in das folgende

Theorem über die Kontinuität der Gleichgewichtsfiguren zusammenfassen:

»Die zu einer Reihe von Werten des Rotationsmoments gehörigen Gleichgewichtsfiguren sind selbst in kontinuierlichen Reihen angeordnet (s. Bemerkung). Jede Reihe kann man in Stücke zerlegen, deren Endpunkte durch die singulären Figuren der Reihe gebildet werden. Jedes solche Stück enthält nur ordinäre Figuren vom selben Stabilitätscharakter, jedes solche Stück verläuft isoliert, ohne Berührung mit andern Reihen von Gleichgewichtsfiguren. Ein Zusammentreffen mit andern Reihen von Gleichgewichtsfiguren kann nur in den singulären Figuren stattfinden, desgleichen kann die ganze Reihe nur in singulären Figuren anfangen und aufhören.«

Bemerkung. Es ist dieses Theorem mehreren Einschränkungen unterworfen, die aber in praktischen Anwendungen bis jetzt ohne Belang sind. Es könnte nämlich einerseits isolierte Gleichgewichtsfiguren geben, die dann natürlich singulär sein müssten, andererseits könnte es auch Reihen von lauter singulären Figuren geben, an die sich dann überall andere Reihen von Gleichgewichtsfiguren anschliessen könnten.

Mit diesem Theoreme ist die in der Ueberschrift bezeichnete Aufgabe, eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren aus einer einzelnen gegebenen abzuleiten, erledigt, sobald die gegebene Gleichgewichtsfigur ordinär ist, und die hinzugefügte Bemerkung besagt, dass im Falle einer gegebenen singulären Figur die Aufgabe eventuell etwas Unmögliches verlangt. Wollte man hierüber zu einem bestimmten Entscheid gelangen, so hätte man ausser den Gliedern zweiter Ordnung in der Energieentwicklung, die durch die Stabilitätskoeffizienten gegeben werden, auch noch die Glieder dritter oder noch höherer Ordnung explizit aufzustellen und die Schwierigkeit dieser Leistung wird man zur Genüge erkennen, wenn man die Skizzierung dieser Entwicklung im vorigen Paragraphen

überblickt. Wir werden uns im Weiteren darauf beschränken, das Verhalten von singulären Figuren zu prüfen, soweit sie im Innern einer gegebenen Reihe von ordinären Gleichgewichtsfiguren auftreten. Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn wir uns die Aufgabe stellen:

d) Für eine gegebene Reihe von ordinären Gleichgewichtsfiguren zu untersuchen, ob und wo sich neue Reihen an dieselbe anschliessen.

Es sei eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren bekannt und man sei im Stande, für jede einzelne dieser Gleichgewichtsfiguren die Werte der Stabilitätskoeffizienten anzugeben. Für eine dieser Figuren ordne man wie bisher die Stabilitätskoeffizienten nach der Grösse, mit dem kleinsten $1 - s_1$ beginnend. Geht man der Reihe entlang, so verändern sich die Stabilitätskoeffizienten kontinuierlich und man kann daher von dem Verlauf eines bestimmten Stabilitätskoeffizienten innerhalb der Reihe sprechen, wenn man den Stabilitätskoeffizienten zweier Figuren, die beim Durchlaufen der Reihe ineinander übergehen, denselben Index giebt. Die Mehrdeutigkeiten, die infolge des Gleichwerdens mehrerer Stabilitätskoeffizienten hierbei auftreten können, denke man sich auf irgend eine beliebige Art beseitigt. Ebenso ändert sich jede Orthogonalfunktion, wie die genauere Theorie dieser Funktionen lehrt, beim Uebergang zwischen Nachbarfiguren der Reihe stetig, so lange nicht der zu ihr gehörige Stabilitätskoeffizient einem andern Stabilitätskoeffizienten gleich wird.

Wie wir eben erfahren haben, kann ein Aufhören der Reihe oder ein Anschluss an andere Reihen nur in einer singulären Figur stattfinden. Wir suchen also eine singuläre Figur der Reihe heraus und wollen annehmen, dass für dieselbe ein Stabilitätskoeffizient, z. B. $1 - s_1$, verschwinde, während wir den Fall, dass mehrere Stabilitätskoeffizienten zugleich verschwinden, weil er in den folgenden Anwendungen nicht gebraucht wird, von der Behandlung ausschliessen.

Die singuläre Ausgangsfigur heisse G . Eine beliebige Figur der sich anschliessenden gegebenen Reihe heisse G' . Die Stabilitätskoeffizienten und Orthogonalfunktionen von G seien $1 - s_\lambda$ und η_λ , die von G' seien $1 - s'_\lambda$ und η'_λ . Wie bisher gehöre G zum Rotationsmoment c , G' zum Rotationsmoment c' und es sei:

$$c' = c + \delta c \quad k = c \delta c + \frac{1}{2} \delta c^2$$

Auch bezeichne man wieder mit U die zu c gehörige Energie von G , mit \bar{U} die zu c gehörige Energie einer beliebigen andern Massenordnung, mit U' die zu c' gehörige Energie von G' , mit \bar{U}' die zu c' gehörige Energie einer beliebigen andern Massenordnung. Schliesslich sei der Abstand der Oberfläche irgend einer andern Figur von der Oberfläche von G , längs der Normalen von G gezählt, ζ ; hingegen von der Oberfläche von G' , längs der Normalen von G' gezählt, ζ' .

Da die G benachbarten Figuren G' keine singulären Figuren sind, so können sich an dieselben keine zum selben c' gehörigen andern Gleichgewichtsfiguren anschliessen; nichtsdestoweniger wollen wir uns einmal so anstellen, als ob wir solche Figuren suchten. Wir entwickeln zu diesem Zweck den Abstand irgend einer andern Figur ζ' von G' nach Orthogonalfunktionen von G' :

$$\zeta' = \sum \eta'_\lambda y'_\lambda \tag{B'}$$

und bestimmen die Energie \bar{U}' einer solchen Figur, wofür wir, da wir den für G' gültigen Wert des Rotationsmomentes c' beibehalten, die Entwicklung (G) benutzen können, wofern wir nur G' als Ausgangsfigur nehmen. Es wird daher:

$$\bar{U}' - U' = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (1 - s'_\lambda) y'^2_\lambda + U'_3 \tag{G'}$$

wo \bar{U}'_3 nach Potenzen der y'_λ fortgeht.

Nun sollen wir eine Nachbarfigur bestimmen, für die \bar{U}' stationär wird, für die also gilt:

$$\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y'_\lambda} = (1 - s'_\lambda) y'_\lambda + \frac{\delta U'_3}{\delta y'_\lambda} = 0 \quad \lambda = 1, 2, 3 \dots \infty \tag{6'}$$

Würden wir dieses System nach Art der obigen Annäherungen aufzulösen versuchen, so würden wir, ebenso wie es oben geschieht, wenn k null gesetzt wird, $y'_1 = y'_2 = \dots = 0$ erhalten. Wir können aber die erste dieser Gleichungen weglassen und eine Nachbarfigur suchen, für die das System:

$$\frac{\delta U'}{\delta y_\lambda} = (1 - s_\lambda) y_\lambda + \frac{\delta U'_3}{\delta y_\lambda} = 0 \quad (12)$$

für $\lambda = 2, 3, 4 \dots \infty$

erfüllt ist, während die eine Gleichung:

$$(1 - s_1) y_1 + \frac{\delta U'_3}{\delta y_1} = 0 \quad (13)$$

für sie unerfüllt bleibt. Es wird uns dann freistehen, für y_i einen beliebigen Wert zu wählen und die betreffenden Figuren werden als abhängig von dem gewählten Wert y_i erscheinen.

Nachdem wir gezeigt haben, dass das System (12) wirklich auflösbar ist, werden wir nachträglich aus den erhaltenen Figuren diejenigen zu bestimmen suchen, die auch die Gleichung (13) befriedigen. Es scheint, dass man dann nur auf die Lösung $y_1 = y_2 \dots = 0$ zurückkommen müsste, doch ist dem nicht so. Es ist nämlich aus der Behandlung des Systems (6) ersichtlich, dass wir über die möglichen Lösungen von (6') bei entsprechender Behandlung nur insoweit etwas aussagen können, als sie sich innerhalb eines begrenzten Bezirks von G benachbarten Figuren befinden, und dass dieser Bezirk um so enger wird, je mehr sich G der singulären Figur G nähert, während wir für die Nachbarfiguren von G selbst gar nichts aussagen konnten, sondern dies gerade jetzt ermöglichen sollen. Das Scheitern des obigen Annäherungsverfahrens für G lag daran, dass für G $1 - s_1$ null wurde. Für das System (12) ist etwas Ähnliches nicht zu befürchten, da die sämtlichen Grössen $1 - s_\lambda$ ($\lambda > 2$) auch bei der Annäherung an die singuläre Figur von Null verschieden bleiben. Die Gleichung (13) hingegen wird auf andere Weise behandelt werden und es ist nicht zu verwundern, wenn das neue Verfahren, das einen grösseren Gültigkeitsbereich hat, neue Lösungen liefert.

Halten wir also y_1 auf einem willkürlich gewählten Wert fest und versuchen wir das System (12) aufzulösen. Dasselbe lautet weiter ausgeschrieben:

$$0 = (1 - s_\lambda) y_\lambda + a_{\lambda 11} y_1^2 + y_1 (a_{\lambda 12} y_2 + a_{\lambda 13} y_3 + \dots) + \dots \text{ etc.} \quad (14)$$

$\lambda = 2, 3, 4 \dots \infty$

worin die a gewisse Konstanten sind. In erster Annäherung wollen wir in jeder Gleichung diejenigen Glieder vernachlässigen, von denen sich von vornherein sagen lässt, dass sie von höherer Ordnung sind, als irgend ein anderes in derselben Gleichung vorkommendes Glied. Zunächst sieht man, dass die sämtlichen Grössen y_λ ($\lambda > 2$) Grössen zweiter Ordnung werden müssen, alle Produkte $y_i y_\lambda$ und $y_\lambda y'_i$ werden daher Grössen dritter oder vierter Ordnung und als einzige Glieder zweiter Ordnung bleiben:

$$(1 - s_\lambda) y_\lambda + a_{\lambda 11} y_1^2 = 0$$

Es folgt also in erster Näherung:

$$y_\lambda = - \frac{a_{\lambda 11}}{1 - s_\lambda} y_1^2$$

Setzt man diese Werte in die vorher vernachlässigten Glieder dritter Ordnung ein, so erhält man verbesserte Werte y_λ und fährt man so fort, so erhält man die endgültigen Werte in Form von Reihen:

$$y_\lambda = - \frac{a_\lambda}{1 - s_\lambda} y_1^2 - \frac{b_\lambda}{1 - s_\lambda} y_1^3 - \frac{c_\lambda}{1 - s_\lambda} y_1^4 \dots \quad (15)$$

welche nach den Sätzen der Eliminationstheorie für hinreichend kleines y_1 konvergent sind.

Hiermit ist gezeigt, dass das System (12) für jedes hinreichend kleine y_i wirklich eine bestimmte Lösung hat.¹⁾ Setzt man den angenommenen Wert von y_i und die hieraus folgenden Werte (15) in (B') ein und berechnet ζ' , so kann man dann die zu jedem y_i gehörige Massen-anordnung durch Auftragen von ζ' auf den Normalen von G' geometrisch konstruieren. Da sich aber dasselbe für jede andere Gleichgewichtsfigur G' durchführen lässt, so wird man auf diese Weise doppelt unendlich viele Massenordnungen erhalten, von denen jede durch einen bestimmten Wert von c' oder k und von y_i charakterisiert ist.

Zur Veranschaulichung denke man sich eine Ebene E und in derselben ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in welchem man den Wert von k als Abscisse, den Wert von y_i als Ordinate auftrage. Zu jedem Punkt der Ebene E findet man dann eine bestimmte Massen-anordnung, für die die Gleichungen (15) oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (12) erfüllt sind. Unsre Aufgabe ist, solche Massenordnungen aus diesen herauszusuchen, für die auch Gleichung (13) erfüllt ist.

Wir führen dieselbe für drei verschiedene Fälle gesondert durch.

1. Fall. Die singuläre Figur liege innerhalb, nicht am Ende, der gegebenen Reihe und der Stabilitätskoeffizient $1-s_1$ wechsele an ihr sein Zeichen, er sei für die vorausgehenden zu kleinerem c gehörigen Figuren positiv, für die nachfolgenden negativ.

Die gegebenen Gleichgewichtsfiguren genügen natürlich als solche den Gleichungen (12) und (13), und da für sie $y_i = 0$ ist, so können wir von vorneherein in der Ebene E die Abscissen-

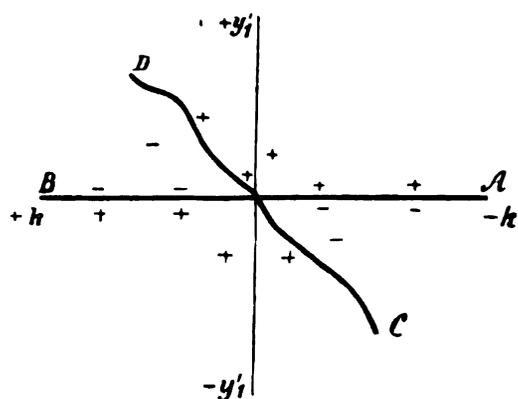


Fig. 1.

und umgekehrt für positives k oberhalb der Abscissenachse negativ, unterhalb derselben positiv. Geht man von einem Punkt auf der rechten Hälfte der Abscissenachse zu einem Punkt auf der linken Hälfte derselben, so wird man auf jedem beliebigen Weg eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln des Ausdrucks $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i}$ antreffen müssen. Da aber $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i}$ sein Zeichen nur wechseln kann, indem es verschwindet, so bedeutet dies nichts anderes, als dass sowohl auf der oberen als der unteren Halbebene eine ungerade Anzahl von Linien vorhanden ist, die vom Nullpunkt ausgehen und für die $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i}$ verschwindet. Es muss also nach oben und unten mindestens eine solche Linie existieren, welcher Fall in der Figur angedeutet ist. Zu jedem k liefert eine solche Linie einen zugehörigen Wert y_i , den man nur in (15) und dann in (B') einzusetzen hat, um eine Massen-anordnung zu erhalten, für die auch die Gleichung (13) erfüllt ist, d. h. jede solche Linie repräsentiert eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren.

Es ergibt sich somit folgendes wichtiges

¹⁾ Auch hier gilt der Inhalt der Anmerkung zu pag. 259.

axe AB als eine Linie markieren, für die (13) erfüllt, $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i}$ null ist. Wir suchen nun das Vorzeichen von $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i}$ in der Ebene E zu verfolgen. Es ist:

$$\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i} = (1-s_1) y_i + \frac{\delta U_s}{\delta y_i} \quad (16)$$

wobei $\frac{\delta U_s}{\delta y_i}$ mit Gliedern zweiter Ordnung beginnt. Für sehr kleines y_i , in der Nähe der Abscissenachse, hängt das Vorzeichen dieses Ausdrucks nur von $(1-s_1) y_i$ ab, es wird also für negatives k nach den obigen Festsetzungen über das Zeichen von $1-s_1$ oberhalb der Abscissenachse positiv, unterhalb derselben negativ und

Poincaré'sches Theorem über die Existenz neuer Gleichgewichtsfiguren.

»An jede singuläre Figur innerhalb einer gegebenen Reihe von Gleichgewichtsfiguren, an der ein Stabilitätskoeffizient sein Zeichen wechselt, schliessen sich neue Reihen von Gleichgewichtsfiguren an. Die Figur ist eine Verzweigungsfigur.«

Zur Klarheit des Ausdrucks möge eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die man mit der singulären Figur beginnen lässt und die sich von derselben aus nur nach einer Richtung erstreckt, ein »Arm von Gleichgewichtsfiguren« heissen.

Man erkennt, dass in unserem Falle die Anzahl der zu positivem, wie die der zu negativem y_i gehenden Arme ungerad ist.

2. Fall. Die singuläre Figur liege innerhalb der gegebenen Reihe, doch habe der Stabilitätskoeffizient, der für sie verschwindet, vorher und nachher dasselbe Zeichen.

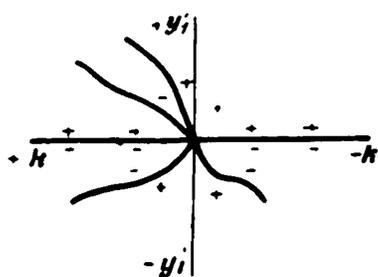


Fig. 2.

Ist $1-s_i$ z. B. vorher und nachher positiv, so folgt aus (16), dass $\frac{\delta U'}{\delta y_i}$ längs der ganzen Abscissenaxe oben positiv, unten negativ ist. Man trifft daher auf jedem Wege von der rechten zur linken Hälfte der Abscissenaxe eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln von $\frac{\delta U'}{\delta y_i}$ an, möglicherweise also gar keinen. Das gleiche gilt, wenn $1-s_i$ vorher und nachher negativ ist. Man kann daher nur schliessen:

die Anzahl der zu positivem, wie die der zu negativem y_i gehenden Arme ist gerade.

3. Fall. Die singuläre Figur liege am Ende der gegebenen Reihe.

Ist $1-s_i$ vor der singulären Figur positiv, so folgert man aus (16), dass $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i}$ längs der rechten Hälfte der Abscissenaxe oben positiv, unten negativ ist, während man über das Gebiet links von der y_i -Axe gar nichts aussagen kann, da ja die singuläre Figur am Ende der gegebenen Reihe liegen soll.

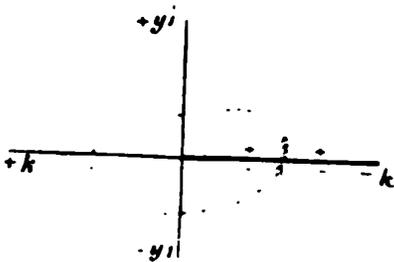


Fig. 3.

Umkreist man nun den Nullpunkt von der rechten Hälfte der Abscissenaxe ausgehend, so muss man eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln von $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i}$ antreffen, es folgt also, dass sich mindestens eine weitere Reihe von Gleichgewichtsfiguren an die singuläre Figur anschliesst. Geht eine solche Reihe auf die linke Halbebene, gehört sie zu grösserem Rotationsmoment, so kommt man offenbar im Wesentlichen auf die eben behandelten Fälle zurück. Fallen aber alle sich anschliessenden Reihen auf die

rechte Halbebene, so ist die singuläre Figur eine Grenzfigur, über die hinaus keine Fortsetzung der gegebenen Reihe zu grösserem Rotationsmoment existiert.

Bedenkt man, dass man bei einer vollständigen Umkreisung des Nullpunktes stets eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln antreffen muss, so erkennt man die Gültigkeit folgender zwei Sätze:

- »Die Anzahl der von einer Figur ausgehenden Arme ist stets gerade.«
- »Eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren kann nur aufhören, indem sie sich mit einer andern Reihe vereinigt.«

Hiermit sind die wichtigsten Resultate gewonnen, die sich über die Fortsetzung und Verzweigung einer Reihe von Gleichgewichtsfiguren aus der Kenntnis ihrer Stabilitätskoeffizienten allein ableiten lassen. Die unten folgende mehr algebraische Untersuchung desselben Gegenstandes ist

nicht geeignet, so allgemeine Sätze zu beweisen, sie führt aber in einigen Fällen zu einem Entscheid zwischen den hier offen gelassenen Möglichkeiten, indem sie auch andere Glieder der Energieentwicklung (H) mit in Betracht zieht. Zunächst aber wollen wir uns noch zur Aufgabe stellen, an der Hand dieser geometrischen Darstellung

e) Die Stabilität der neuen Reihen von Gleichgewichtsfiguren

zu prüfen.

Da sich die Stabilitätskoeffizienten kontinuierlich, stetig mit den Gleichgewichtsfiguren ändern, so wird ein Stabilitätskoeffizient, der für eine singuläre Figur negativ ist, auch für alle sich anschliessenden Figuren negativ sein. Es kann daher eine stabile Reihe von Gleichgewichtsfiguren sich nur an eine solche singuläre Figur anschliessen, für die alle Stabilitätskoeffizienten, abgesehen von dem einen verschwindenden, positiv sind. Nehmen wir daher an, dass für die singuläre Figur, die in der Ebene E durch den Nullpunkt dargestellt wird:

$$1 - s_1 = 0 \quad 1 - s_2 > 0 \quad 1 - s_3 > 0 \text{ etc.}$$

sei, so werden die $1 - s_\lambda$ ($\lambda > 1$) auch für alle von dieser Figur ausgehenden Arme im Anfang positiv sein, und die Stabilität in einem Arme hängt nur davon ab, welches Vorzeichen $1 - s_\lambda$ für ihn annimmt.

Man gehe in irgend einer der obigen Zeichnungen von einem Punkt, der eine Gleichgewichtsfigur repräsentiert, längs einer Parallelen zur y_i -Axe fort, durchlaufe also Massenordnungen, die zum selben Rotationsmoment gehören und von y_i vermittelt der Gleichungen (15) und (B') abhängen, berechne die Energie dieser Massenordnungen und bestimme die Aenderung der Energie mit y_i , welche, wenn die Aenderung von y_i sehr klein wird, den Differentialquotienten:

$$\left(\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i} \right)$$

liefern möge.

Die Differentialquotienten $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_\lambda}$, die in (6'), (12), (13) auftreten, sind partielle Derivierte, die man findet, indem man von einer Massenordnung zu einer benachbarten übergeht, für die sich nur y_λ geändert hat. Es ist daher:

$$\left(\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i} \right) = \frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i} + \frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_2} \cdot \frac{\delta y_2}{\delta y_i} + \frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_3} \cdot \frac{\delta y_3}{\delta y_i} + \dots$$

und hierin hat man sich y_2, y_3 u. s. w. so mit y_i ändern zu lassen, wie es die Gleichungen (15) bestimmen.

Nun gilt aber für die sämtlichen Massenordnungen, die durch Punkte von E repräsentiert werden:

$$\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_\lambda} = 0 \quad \lambda = 2, 3, 4 \dots$$

Es bleibt mithin:

$$\left(\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i} \right) = \frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i}$$

Die Grösse $\frac{\delta U'}{\delta y_i}$, deren Zeichenwechsel wir in der Ebene E verfolgt haben, stimmt also überein mit der Aenderungsgeschwindigkeit der Energie beim Durchlaufen von Massenordnungen, die in E durch Punkte einer Parallelen zur y_i -Axe repräsentiert werden.

Bewegt man sich nun von einer Gleichgewichtsfigur aus auf einer solchen Parallelen nach oben und es ist dort $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_i}$ negativ, so gelangt man zu Massenordnungen, für die die Energie kleiner ist, als für die Ausgangsfigur, d. h. die Gleichgewichtsfigur ist instabil.

Wir gelangen daher zu dem Resultat: »Jeder Arm von Gleichgewichtsfiguren, oberhalb dessen in den früheren Zeichnungen ein Minuszeichen eingetragen ist, ist instabil. Das Gleiche gilt für jeden Arm, unterhalb dessen ein Pluszeichen eingetragen ist.«

Man wird nun vermuten, dass umgekehrt jeder Arm, oberhalb dessen ein Pluszeichen und unterhalb dessen ein Minuszeichen eingetragen ist, stabil ist, was sich in der That folgendermassen bestätigen lässt.

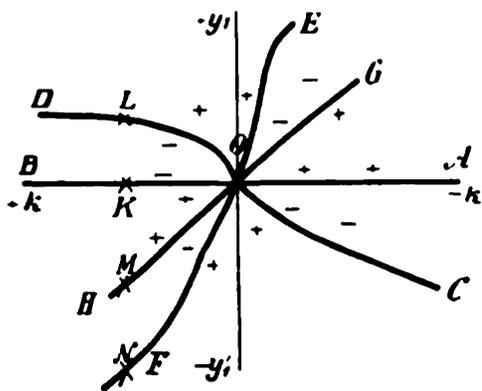


Fig. 4.

von L zählt. Die Orthogonalfunktionen von L seien ϑ_1, ϑ_2 u. s. w., und man bilde die Entwicklung:

$$\xi = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \vartheta_{\lambda} x_{\lambda} \quad B'')$$

Man kann wie oben wieder Nachbarfiguren bestimmen, für die alle Gleichungen:

$$\frac{\delta \bar{U}'}{\delta x_{\lambda}} = 0 \quad \lambda = 1, 2, 3 \dots \infty$$

mit Ausnahme der ersten erfüllt sind. Man führe ferner eine neue Ebene E' ein, in der man k und x_1 als Koordinaten aufträgt, und verfolge in dieser Ebene das Vorzeichen von $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta x_1}$. Die Nullstellen dieser Grösse werden Gleichgewichtsfiguren entsprechen, die Reihe CD wird in der E' -Ebene als Ausgangsreihe durch die Abscissenaxe selbst dargestellt werden, AB, EF und GH werden in gewisse andere durch den Nullpunkt gehende Kurven $A'B', E'F', G'H'$, die vier Punkte K, L, M, N in vier andere Punkte K', L', M', N' übergehen. Die Werte von x_1 für die Punkte K', M', N' seien resp. $x_1^{(\alpha)}, x_1^{(\beta)}, x_1^{(\gamma)}$; die Deformationen, durch welche die durch K, M, N und ebenso durch K', M', N' repräsentierten Figuren aus der durch L und L' repräsentierten hervorgehen, seien resp. $\xi_{\alpha}, \xi_{\beta}, \xi_{\gamma}$.

Wir wollen bestimmen, in welchen Quadranten die Kurven der E' -Ebene verlaufen. Fassen wir zunächst die Arme $O'D'$ und $O'B'$ und die auf ihnen liegenden Figuren K' und L' ins Auge. L' entstand aus K' durch Auftragen von ξ_{α} auf den Normalen von K' , umgekehrt entsteht K' durch Auftragen von ξ_{α} auf den Normalen von L' . Die geometrische Anschauung lehrt sofort, dass bis auf Glieder zweiter Ordnung

$$\xi_{\alpha} = -\xi_{\alpha}$$

sein muss. Da ferner jede Orthogonalfunktion sich beim Uebergang zwischen Nachbarfiguren so lange stetig ändert, als nicht der zu ihr gehörige Stabilitätskoeffizient einem andern Stabilitätskoeffizienten gleich wird, wir aber vorausgesetzt hatten, dass für die Ausgangsfigur $1 - s_1 = 0$,

hingegen alle andern $\tau - s_2$ von Null verschieden sein sollten, so wird auch bis auf Glieder höherer Ordnung gelten:

$$\vartheta_1 = \eta_i$$

Aus (B') und (B'') folgt aber (vgl. § 3 b):

$$y_1^{(a)} = \int \zeta_a \eta_i d\omega \quad x_1^{(a)} = \int \xi_a \vartheta_1 d\omega$$

wobei das erste Integral über die Oberfläche von K , das zweite über die Oberfläche von L zu nehmen ist. Es ergibt sich daher nahe:

$$x_1^{(a)} = -y_1^{(a)} \quad (17)$$

Man betrachte weiter eine Figur, z. B. M , der Reihe GH . M entsteht aus K durch Auftragen von ζ_β auf den Normalen von K , L entsteht aus K durch Auftragen von ζ_α auf denselben Normalen, es wird daher sehr nahe M aus L entstehen, wenn man die Strecken $\zeta_\beta - \zeta_\alpha$ auf den Normalen von L aufträgt, mithin genähert gelten:

$$\xi_\beta = \zeta_\beta - \zeta_\alpha$$

und hieraus wird man ganz ähnlich wie oben den Schluss ziehen, dass näherungsweise die Relation besteht:

$$x_1^{(\beta)} = y_1^{(\beta)} - y_1^{(\alpha)} \quad (18)$$

Schliesslich erhält man auf entsprechende Weise für die Figur N :

$$x_1^{(\gamma)} = y_1^{(\gamma)} - y_1^{(\alpha)} \quad (19)$$

Die drei Gleichungen (17), (18), (19) lehren nun, dass die Kurven der E' -Ebene (Fig. 5) aus denen der E -Ebene (Fig. 4) entstehen, indem man in der E -Ebene jede Parallele zur Ordinatenaxe so lange in sich verschiebt, bis der ihr angehörige Punkt der Kurve CD in die Abscissenaxe fällt. Es folgt daraus, dass sich auch in der E' -Ebene vom Nullpunkt aus drei Arme nach oben und drei nach unten erstrecken werden.

Aus der Vorzeichenverteilung in Fig. 4. ist nach dem oben gefundenen Satze zunächst ersichtlich, dass der Arm OC instabil ist. Würde man nun annehmen, dass der Arm OD instabil wäre, und verfolgte das Vorzeichen von $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta x_1}$, wie unter d) das Vorzeichen von $\frac{\delta \bar{U}'}{\delta y_1}$ verfolgt wurde, so käme man zu dem Schluss, dass sich eine gerade Zahl von Armen zu positivem wie zu negativem x_1 erstrecken müsste, während Fig. 5. lehrt, dass die Zahl dieser Arme ungerade ist. Es muss mithin der Arm OD stabil sein.

Man überzeugt sich leicht, dass man auch in jedem andern Falle mit der Annahme, ein Arm, oberhalb dessen ein Plus- und unterhalb dessen ein Minuszeichen steht, sei instabil, zu einem solchen Widerspruch kommt, man gewinnt mithin zusammenfassend den

Satz: »Ein Arm von Gleichgewichtsfiguren ist dann und nur dann stabil, wenn in einer auf die beschriebene Weise entstandenen Figur über ihm ein Pluszeichen, unter ihm ein Minuszeichen eingetragen ist.«

Dieses Resultat soll wiederum auf einige wichtigere Spezialfälle angewandt werden.

1. Fall. In einer Reihe von Gleichgewichtsfiguren AB höre mit der singulären Figur O die Stabilität auf. In O kreuze die Reihe eine andere, CD , welche sowohl zu grösserem wie zu kleinerem Rotationsmoment einen Arm entsenden möge. Dieser Fall ist in Fig. 1 dargestellt. Die-

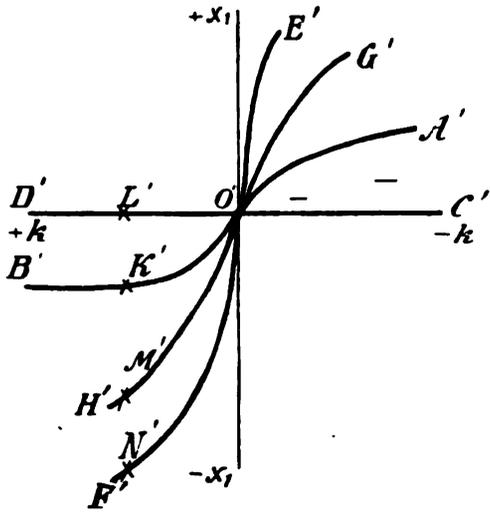


Fig. 5.

Vorzeichenverteilung lehrt, dass der Arm OC instabil, hingegen der Arm OD stabil sein wird. Es gilt demnach folgender von Herrn Poincaré als

Prinzip des Umtausches der Stabilität bezeichneter Satz:

»Kreuzen sich zwei Reihen von Gleichgewichtsfiguren, welche beide je einen Arm zu grösserem wie zu kleinerem Rotationsmoment entsenden, und die eine Reihe ist vor der Kreuzung stabil, nach der Kreuzung instabil, so ist die andere Reihe vor der Kreuzung instabil, nach der Kreuzung stabil; es findet bei der Kreuzung Umtausch der Stabilität statt.«

2. Fall. Es liege alles wie im ersten Fall, nur entsende die Reihe CD ihre beiden Arme zu gleichen Werten des Rotationsmomentes, also entweder

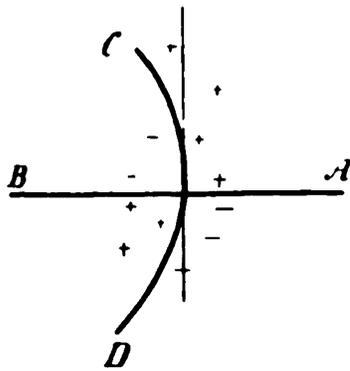


Fig. 6.

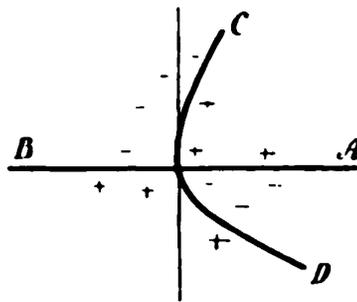


Fig. 7.

- a) zu grösserem Rotationsmoment (Fig. 6) oder
- β) zu kleinerem Rotationsmoment (Fig. 7).

Die Vorzeichenverteilung in beistehenden Figuren lehrt, dass im Falle a) beide Arme der Reihe CD stabil, im Falle β) beide Arme dieser Reihe instabil sein werden.

3. Fall. Es mögen von der singulären Figur überhaupt nur zwei Arme ausgehen. Aus der Vorzeichenverteilung in den Figuren 8 und 9 liest man unmittelbar folgenden Satz ab, der als

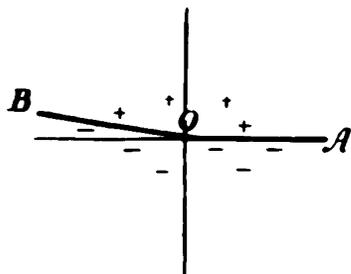


Fig. 8.

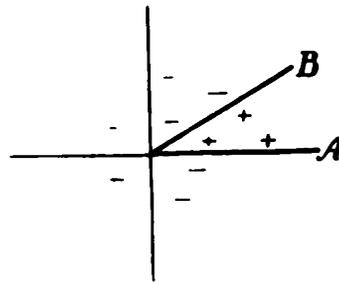


Fig. 9.

Theorem über die Stabilität zweier Arme

bezeichnet werden soll: »Gehen von einer Figur nur zwei Arme aus, so sind sie vom selben Stabilitätscharakter, wenn sie zu verschiedenen, und von verschiedenem Stabilitätscharakter, wenn sie zu gleichen Werten des Rotationsmomentes fortgehen.«

f) Mehr algebraische Behandlung derselben Aufgaben.

Es sei in einer bekannten Reihe von Gleichgewichtsfiguren eine singuläre Figur G ($1 - s_1 = 0$) gegeben und man versuche, wie unter c), alle möglichen dieser Figur benachbarten, zum selben und zu wenig veränderten Rotationsmoment gehörigen Gleichgewichtsfiguren abzuleiten. Man wird dann alle Nachbarfiguren durch ihren Oberflächenabstand ζ von G darstellen, diesen nach Orthogonalfunktionen von G entwickeln

$$\zeta = \sum \eta_\lambda y_\lambda \tag{B)}$$

dann die Energieentwicklung (II) bilden und wird die Gleichungen:

$$\frac{\delta U'}{\delta \eta_\lambda} = 0 \quad \lambda = 1, 2, 3 \dots x$$

aufzulösen haben.

Berücksichtigt man, dass für die singuläre Figur $1 - s_1$ null ist, so lauten diese Gleichungen (s. oben *c*) Gleichung (8)) in ausgeschriebener Form:

$$0 = (1 - s_\lambda) y_\lambda + k B_\lambda + \frac{\delta U_3}{\delta y_\lambda} + k \frac{\delta I_2}{\delta y_\lambda} \quad 20)$$

für: $\lambda = 2, 3, 4 \dots \infty$

während für $\lambda = 1$ gilt:

$$0 = k B_1 + \frac{\delta U_3}{\delta y_1} + k \frac{\delta I_2}{\delta y_1} \quad 21)$$

wobei U_3 mit Grössen dritter Ordnung, I_2 mit Grössen zweiter Ordnung in den y beginnt. Man betrachte nun für einen Augenblick y_1 als eine gegebene Konstante und löse das System (20) ähnlich auf, wie oben das vollständige System (8) aufgelöst wurde. Man wird wie in (11) Reihenentwicklungen erhalten:

$$y_\lambda = -A_\lambda - k \frac{B_\lambda}{1 - s_\lambda} - k^2 \frac{C_\lambda}{1 - s_\lambda} - \dots \quad 22)$$

für $\lambda = 2, 3, 4 \dots \infty$

nur wird y_1 noch implicite in den Koeffizienten $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ u. s. w. enthalten sein und zwar, wie man durch weiteres Ausschreiben der Reihen in (20) sofort sieht, in solcher Art, dass diese Grössen selbst nach Potenzen von y_1 entwickelt erscheinen und speziell A_λ mit der zweiten Potenz von y_1 beginnt. Setzt man die Reihen (22) in (21) ein, so erhält man eine Gleichung:

$$0 = k \cdot B_1 + y_1^2 a_{20} + y_1 k a_{11} + k^2 a_{02} + y_1^3 a_{30} + y_1^2 k a_{21} + \dots \quad J)$$

in welcher B_1 wie die a_{ik} bestimmte Konstante sind und aus der man y_1 als Funktion von k zu bestimmen hat.

Um diese Gleichung durch Näherung aufzulösen, vernachlässige man zunächst die Glieder, die von höherer Ordnung als irgend ein anderes in der Gleichung vorkommendes Glied werden, welches Verhältnis der Grössenordnung man auch zwischen y_1 und k annehmen mag. Wie die Eliminationstheorie lehrt, erhält man durch die Auflösung der aus den übrig bleibenden Gliedern gebildeten Gleichung völligen Aufschluss über die Anzahl der für sehr kleines k existierenden Lösungen und eine wirkliche Annäherung an den Verlauf derselben; da es uns aber nicht auf die Herstellung ihres genauen Verlaufs ankommt, werden wir uns im Folgenden mit dieser ersten Näherung begnügen und nicht jedesmal die Potenzreihen, die die vollständige Auflösung ergeben würde, hinschreiben. Auch wollen wir wiederum nur die für die späteren Anwendungen wichtigen Fälle behandeln.

a) Es sei B_1 von Null verschieden. Dann sind alle Glieder in (J) von höherer Ordnung als $B_1 k$, welche k in höherer Potenz oder mit einer Potenz von y_1 multipliziert enthalten, mithin bleibt zunächst:

$$0 = k B_1 + y_1^2 a_{20} + y_1^3 a_{30} + y_1^4 a_{40} + \dots$$

Von der Potenzreihe in y_1 hat man wiederum alle Glieder ausser dem ersten, welches einen von Null verschiedenen Koeffizienten hat, zu vernachlässigen. Sei also:

$$a_{20} = a_{30} \dots \dots = a_{n-1,0} = 0 \quad a_{n0} \lesssim 0$$

dann bleibt die Gleichung:

$$0 = k B_1 + y_1^n a_{n0}$$

woraus folgt:

$$y_1 = \sqrt[n]{-k \frac{B_1}{a_{n0}}}$$

Ist n ungerad, so hat die Wurzel sowohl für positives als für negatives k einen reellen Wert; ist n gerad, so hat die Wurzel entweder nur für positives oder nur für negatives k zwei reelle Lösungen von entgegengesetztem Vorzeichen. Jede Lösung für y_1 gibt aber in (22) und (B) ein-

gesetzt, eine Reihe von Gleichgewichtsfiguren. Nennt man wieder den Teil einer Reihe, der sich von der singulären Figur aus nur in einer Richtung erstreckt, einen Arm, so kann man diese Ergebnisse so zusammenfassen:

Theorem der zwei Arme.

»Verschwindet für eine singuläre Figur der Stabilitätskoeffizient $1 - s_1$, während der zugehörige Koeffizient in der Entwicklung des Trägheitsmomentes B_1 von null verschieden ist, so gehen von dieser Figur nur zwei Arme von Gleichgewichtsfiguren aus.«

Ueber die Stabilität dieser Arme wird man durch das obige Theorem über die Stabilität zweier Arme (e) Fall 3) aufgeklärt.

Es sind dies zwei Theoreme, die sich bei Herrn Poincaré nicht finden und die unten in § 6 die Grundlage für die Untersuchung der Stabilität eines kleinen Mondes liefern werden.

β) Es sei B_1 null, aber a_{20} von Null verschieden. Dann kann man in (J) sämtliche Glieder weglassen, die y_1^2 mit einer Potenz von y_1 oder k multipliziert erhalten. Es bleibt also:

$$0 = y_1^2 a_{20} + y_1 (k a_{11} + k^3 a_{13} + k^5 a_{15} + \dots) + k^3 a_{02} + k^5 a_{04} + \dots$$

oder:

$$0 = y_1^2 a_{20} + 2 y_1 k q + k^3 \psi$$

wo q und ψ endliche Funktionen von k sind. Hieraus:

$$y_1 = k \left\{ -\frac{q}{a_{20}} \pm \sqrt{\frac{q^2}{(a_{20})^2} - \frac{\psi}{a_{20}}} \right\}$$

Man erhält zwei Reihen von Gleichgewichtsfiguren, die von negativem zu positivem k fortschreiten und sich in der singulären Figur kreuzen. Beide könnten zugleich imaginär sein, was aber unmöglich ist, wenn die singuläre Figur als Glied einer bekannten reellen Reihe von Gleichgewichtsfiguren gegeben ist.

Man befindet sich also hier in dem Falle, auf den sich das Poincaré'sche Prinzip des Umtausches der Stabilität bezieht.

γ) Es sei B_1 null, aber a_{11} als von Null verschieden bekannt. Dann kann man in (J) alle andern Glieder fortlassen, die sowohl y_1 als k enthalten. Es bleibt daher:

$$0 = y_1 k a_{11} + y_1^2 a_{20} + y_1^3 a_{30} + y_1^4 a_{40} + \dots + k^3 a_{02} + k^5 a_{04} + \dots$$

Sei a_{n0} ($n > 3$) der erste Koeffizient einer Potenz von y_1 , der von Null verschieden ist. Dann bleibt:

$$0 = a_{n0} y_1^n + y_1 k a_{11} + k^3 q \tag{23}$$

wo q eine endliche Funktion von k ist.

Es kann nun entweder y_1 von gleicher Ordnung klein sein wie k , dann darf man das erste Glied dieser Gleichung vernachlässigen und erhält

$$y_1 = -k \cdot \frac{q}{a_{11}} \tag{24}$$

oder es ist y_1 von niedrigerer Ordnung klein als k , dann kann man das letzte Glied vernachlässigen und erhält:

$$y_1 = \sqrt[n-1]{-k \frac{a_{11}}{a_{n0}}} \tag{25}$$

während der Fall, dass y von höherer Ordnung klein als k ist, offenbar unmöglich ist. Die beiden Ausdrücke (24) und (25) liefern mithin sämtliche mögliche Lösungen der Gleichung (23).

Ausdruck (24) liefert in jedem Fall eine Reihe, die einen Arm zu positivem und einen zu negativem k entsendet. Wenn n gerade ist, so liefert (25) eine Reihe von gleicher Beschaffenheit,

man hat es also wiederum mit einer Kreuzung zweier Reihen zu thun, auf die das Prinzip des Umtausches der Stabilität anwendbar ist.

Ist hingegen n ungerade, so ergibt (25) entweder für positives oder für negatives k zwei Lösungen, hingegen keine für entgegengesetztes Vorzeichen von k , man gewinnt daher jedes Mal eine Reihe, deren beide Arme sich zu gleichen Werten des Rotationsmomentes erstrecken, Fälle, deren Stabilität wir im vorigen Abschnitt e) unter 2. betrachtet haben.

Schlussbemerkung. Es sind hiermit alle Fälle von Kreuzung und Verzweigung von Reihen von Gleichgewichtsfiguren besprochen, die in den folgenden Anwendungen auftreten werden. Andere Verzweigungen lassen sich auf dieselbe Art erledigen, solange es nur ein einziger Stabilitätskoeffizient ist, der für die betreffende singuläre Figur verschwindet. Mit der Behandlung solcher Fälle, wo mehrere Stabilitätskoeffizienten zugleich verschwinden, hat Herr Poincaré in § 2 seiner öfters citierten Arbeit einen Anfang gemacht, doch unterlassen wir es, ihm hier zu folgen, weil diese Ueberlegungen fernliegende mathematische Hilfsmittel erfordern und vorerst ohne praktische Bedeutung sind.

Wir wollen, bevor wir zu den Anwendungen übergehen, noch hervorheben, dass alles, was wir über die Figuren neuer Reihen, die sich an bekannte Reihen anschliessen, aussagten, sich nur auf die diesen Reihen hinreichend benachbarten Figuren der neuen Reihen beziehen konnte, weil einesteils das Instrument unserer Untersuchung, die Entwicklung der Energie, nur einen begrenzten Konvergenzbereich hatte und andernteils an der ersten singulären Figur in einer neuen Reihe ihr Stabilitätscharakter wechseln und weitere Verzweigungen eintreten können.

II. Teil. Anwendungen.

§ 5. Die Maclaurin'schen und Jacobi'schen Ellipsoide. Die Poincaré'schen Gleichgewichtsfiguren.

Die in den beiden vorigen Paragraphen gewonnenen Theoreme setzen zur Anwendung auf eine bestimmte Gleichgewichtsfigur voraus, dass man die Stabilitätskoeffizienten und Orthogonalfunktionen dieser Figur kenne. So wenig man bisher über die Orthogonalfunktionen irgend eines beliebig gestalteten Körpers auszusagen weiss, so kommt uns doch gerade für die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren der glückliche Umstand zu Hülfe, dass die altbekannten Lamé'schen Funktionen, die von Lamé bei der Untersuchung des stationären Wärmezustandes eines Ellipsoids entdeckt worden sind, nach geringen Modifikationen für eine solche Gleichgewichtsfigur in die in § 3 b) definierten Orthogonalfunktionen übergehen. Wollten wir nun mit Hülfe der Theorie der Lamé'schen Funktionen für die Maclaurin'schen und Jacobi'schen Ellipsoide die Stabilitätskoeffizienten berechnen und diskutieren, so hätten wir Herrn Poincaré's Darlegungen in § 9—12 seiner Arbeit (Acta math. VII, pag. 315—347) Wort für Wort abzuschreiben, und das wird um so eher vermieden werden müssen, als wir im folgenden Paragraphen, in dem eine neue Anwendung der Poincaré'schen Prinzipien auf die Roche'schen Ellipsoide gegeben wird, ohnehin zu einer Rechnung gezwungen sein werden, die der entsprechenden Poincaré'schen vielfach parallel geht. Man wird dort sehen, wie die Stabilitätskoeffizienten gefunden und diskutiert werden, und wird, wenn man nicht auf die Poincaré'sche Arbeit zurückgehen will, daraus die Einsicht schöpfen, wie die Poincaré'schen Resultate gewonnen sind, oder genauer — hätten gewonnen werden können; denn Herr Poincaré hat die Orthogonalfunktionen nicht eingeführt und daher auch nicht an den Lamé'schen Funktionen die kleinen Modifikationen, die sie für unsern Zweck erst völlig geeignet machen, angebracht, er hat die hierdurch entstehenden Schwierigkeiten vielmehr durch eine geistvolle Betrachtung ganz anderer Art (l. c. pag. 371) umgangen. Hier wollen wir nur einen Ueberblick über Herrn Poincaré's Resultate in der Form geben, wie man sie bei Einführung der Orthogonalfunktionen und strikter Befolgung des im 1. Teil dieser Arbeit vorgezeichneten Gedankengangs erhalten hätte, und allein auf die Art der auftretenden Verzweigungen, die Herr Poincaré nur kurz behandelt hat, etwas näher eingehen, wobei wir freilich ungewiss sind, ob diese Ueberlegungen vor der Lektüre der genannten Paragraphen von Herrn Poincaré's Arbeit oder mindestens des unten folgenden § 6 überall verständlich sein werden.

a) Die Maclaurin'schen Rotationsellipsoide scheinen sich zunächst unseren Theoremen nicht zu fügen, weil für sie stets je zwei Stabilitätskoeffizienten gleich sind und beim Durchlaufen der Reihe also auch zugleich verschwinden, welchen Fall wir oben von der Betrachtung ausgeschlossen hatten; doch lässt sich diese Schwierigkeit folgendermassen umgehen. Wir hatten die Deformation nach Orthogonalfunktionen entwickelt:

$$\zeta = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \eta_{\lambda} \mathcal{Y}_{\lambda}$$

und können uns diese Deformation durch Superposition der »Fundamentaldeformationen« :

$$\zeta = \rho \eta_\lambda$$

wo ρ eine willkürliche Konstante ist, entstanden denken. Führt man nun auf einem Rotationsellipsoid die gewöhnlichen geographischen Koordinaten Länge (l) und Breite (b) ein, so sind sich stets zwei Orthogonalfunktionen von der Form:

$$\eta_\alpha = f(b) \cos n l \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

und:

$$\eta_\lambda = f(b) \sin n l$$

paarweise zugeordnet und haben denselben Stabilitätskoeffizienten $s_\alpha = s_\lambda$. Bildet man jetzt die Deformation:

$$\zeta = \eta_\alpha y_\alpha + \eta_\lambda y_\lambda = f(b) (y_\alpha \cos n l + y_\lambda \sin n l)$$

und setzt:

$$y_\alpha = h \cos n q \quad y_\lambda = h \sin n q$$

womit ζ die Gestalt erhält:

$$\zeta = h \cdot f(b) \cos n (l - q)$$

so erkennt man, dass diese allgemeinere Deformation aus der Fundamentaldeformation

$$\zeta = h \cdot \eta_\alpha$$

hervorgeht, wenn man das Koordinatensystem um den Winkel q um die Rotationsaxe dreht. Man hat daher nur den bei einer Rotationsfigur willkürlichen und gleichgültigen Anfangspunkt der Längenzählung für jede Deformation geeignet zu wählen, um zu erreichen, dass die eine Orthogonalfunktion η_λ aus der Entwicklung der Deformation und mithin auch s_λ , der eine von den beiden paarweise gleichen Stabilitätskoeffizienten, aus der Entwicklung der Energie verschwindet.

Verfährt man nach dieser Vorschrift und drückt sich so aus, als ob der verschwundene Stabilitätskoeffizient überhaupt nicht vorhanden gewesen wäre, so ergibt sich folgendes:

Die Stabilitätskoeffizienten der Kugel sind alle positiv. Durchläuft man die Reihe der Rotationsellipsoide mit wachsendem Rotationsmoment und wachsender Abplattung, so geht von Zeit zu Zeit ein Stabilitätskoeffizient aus dem Positiven ins Negative über, um dann immer negativ zu bleiben, und für unendliches Rotationsmoment, wenn das Ellipsoid in eine unendliche Kreisscheibe übergegangen ist, sind eine unendliche Anzahl von Stabilitätskoeffizienten negativ geworden. Hiermit liefert das Poincaré'sche Theorem über die Existenz neuer Reihen von Gleichgewichtsfiguren (§ 4 d) sofort:

»Die Reihe der Maclaurin'schen Ellipsoide enthält unendlich viele singuläre Figuren, an die sich neue Reihen von Gleichgewichtsfiguren anschliessen.«

Es fragt sich, ob sich unter diesen Reihen stabile befinden. (Damit ist gemeint, ob die sich in ihnen zunächst an die Ellipsoide anschliessenden Figuren stabil sind, da wir, wie oben erwähnt, über entferntere Teile der Reihen nach unsern Entwicklungen überhaupt nichts aussagen können.) Dies kann offenbar nur für diejenigen, welche sich an die erste singuläre Figur, die man beim Ausgehen von der Kugel trifft, anschliessen, der Fall sein, denn von dieser Figur an ist stets mindestens ein Stabilitätskoeffizient negativ, also die Reihe der Maclaurin'schen Ellipsoide selbst und mithin auch alle anschliessenden Reihen instabil. Nun ergibt sich das merkwürdige Resultat, dass dieses erste singuläre Ellipsoid, welches mit E_1 bezeichnet werden soll, dasjenige vom Axenverhältnis $1 : 0,5827$ ist, an welches sich die Jacobi'schen Ellipsoide anschliessen.

Die Betrachtung der Maclaurin'schen Ellipsoide ist daher in dem in § 1 gewünschten Sinne erledigt mit dem Ergebnis:

»Die Reihe der Maclaurin'schen Ellipsoide verläuft isoliert und ist stabil nur bis zu demjenigen Ellipsoid, an welches sich die Jacobi'schen Ellipsoide anschliessen.«

Die Art der Verzweigung an der Uebergangsstelle zu den Jacobi'schen Ellipsoiden ist die in § 4 unter e) Fall 2. a) und unter f) γ) erwähnte, es gehen von der singulären Figur aus zwei neue Arme von Gleichgewichtsfiguren zu grösserem Rotationsmoment. Man hat nämlich die Reihe der Jacobi'schen Ellipsoide doppelt zu nehmen in der Art, dass, wenn man unter der x - und der y -Axe zwei zu einander und zur Rotationsaxe senkrechte, mit dem Ellipsoid E_1 fest verbundene und durch seinen Schwerpunkt gehende Axen versteht, die grösste Axe jedes Jacobi'schen Ellipsoids einmal mit der x -Axe und einmal mit der y -Axe zusammenfällt.

Denn führt man die in § 4 f) angedeutete Rechnung in diesem speziellen Falle durch, so erhält man durch Auflösung der Gleichung (J) an Stelle von (24) und (25) die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_1 &= \pm \sqrt{k \cdot a} \end{aligned}$$

wo a eine positive Konstante ist. Die erste Lösung ergiebt die Reihe der Rotationsellipsoide selbst; setzt man die zweite in den Gleichungen (22) ein, so erkennt man, dass alle andern y_λ ($\lambda > 1$), so lange k klein ist, von höherer Ordnung klein werden als y_1 und in erster Näherung gleich Null gesetzt werden dürfen, dass mithin in der Entwicklung (B) der Deformation nur das eine Glied:

$$\zeta = \eta_1 y_1$$

übrig bleibt und die beiden Arme neuer Gleichgewichtsfiguren näherungsweise durch die Deformationen:

$$\zeta_\alpha = + \eta_1 \sqrt{k a} \quad \text{und:} \quad \zeta_\beta = - \eta_1 \sqrt{k a}$$

(die Wurzel absolut genommen) geliefert werden.

Nennt man nun x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Oberfläche von E_1 in dem eben eingeführten Koordinatensystem, so hat die Orthogonalfunktion η_1 , wie die Theorie der Lamé'schen Funktionen lehrt, folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (x^2 - y^2) l \\ l &= \frac{1}{a b c \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \end{aligned}$$

wo $a = b$ die Aequatorialhalbaxe, c die Polarhalbaxe des Ellipsoides E_1 bedeutet. Hiermit wird:

$$\zeta_\alpha = (x^2 - y^2) l \sqrt{k \cdot a} \quad \zeta_\beta = - \zeta_\alpha$$

Man überzeugt sich sehr leicht, dass die erste Deformation aus dem Revolutionsellipsoid ein dreiaxiges Ellipsoid erzeugt, dessen grösste Axe in die x -Axe fällt, und sieht unmittelbar, dass die Umkehrung des Vorzeichens der Deformation so viel wie eine Vertauschung der x - und der y -Axe bedeutet. Es entstehen also wirklich zwei neue Arme von Gleichgewichtsfiguren, die zu grösserem Rotationsmoment fortgehen und aus um 90° gegen einander gedrehten Jacobi'schen Ellipsoiden gebildet sind.¹⁾

b) Die Jacobi'schen Ellipsoide. Für die Jacobi'schen Ellipsoide wiederholt sich derselbe Vorgang. Die sich zunächst an das Ellipsoid E_1 anschliessenden sind stabil, alle ihre Stabilitätskoeffizienten sind positiv, und wenn man zu grösserem Rotationsmoment übergeht, wird von Zeit zu Zeit ein Stabilitätskoeffizient negativ, bis für unendliches Rotationsmoment und das nadelförmige Ellipsoid unendlich viele Stabilitätskoeffizienten negativ geworden sind. Es folgt also:

»Auch in der Reihe der Jacobi'schen Ellipsoide finden sich unendlich viele singuläre Figuren, an die sich neue Reihen von Gleichgewichtsfiguren anschliessen.«

¹⁾ Vergl. Acta math. Bd. VII, pag. 300 und 329—330.

Man erkennt wieder, dass sich nur an die erste dieser Figuren, die man beim Ausgehen von E_1 antrifft, stabile neue Reihen anschliessen können. Dieses erste singuläre Ellipsoid, welches in der Jacobi'schen Reihe auftritt, soll mit E_2 bezeichnet werden, und die sich anschliessenden Figuren, welche offenbar von all den neuen Reihen die physikalisch wertvollsten sind, wollen wir schlechtweg

c) die Poincaré'schen Figuren nennen. Wir müssen uns etwas näher mit der Art der Verzweigung beim Uebergang zu diesen Figuren befassen, weil hier Herrn Poincaré ein kleines Versehen untergeschlüpft ist.

Bei der algebraischen Behandlung der Verzweigungen, wie sie in § 4 f) gegeben ist, erscheint der Fall β), wo ein Arm neuer Figuren zu grösserem, der andere zu kleinerem Rotationsmoment fortgeht und das Prinzip des Umtausches der Stabilität anwendbar ist, als der allgemeinere gegenüber dem unter γ) behandelten Falle, wo zwei neue Arme sich zum gleichen Rotationsmoment erstrecken, weil letzterer ausser dem Verschwinden von B_1 auch noch das Verschwinden von a_{20} in Gleichung (J) erfordert. Herr Poincaré glaubte nun, wenn ich ihn recht verstehe¹⁾, den allgemeineren Fall β) voraussetzen und aus dem Prinzip des Umtausches der Stabilität schliessen zu dürfen, dass sich an E_2 ein zu grösserem Rotationsmoment fortgehender stabiler Arm von Gleichgewichtsfiguren anschliesst; doch zeigt eine nähere Betrachtung, dass gerade der Ausnahmefall eintritt.

Das Ellipsoid E_2 ist symmetrisch zur x, z und y, z Ebene. Bringt man daher eine solche Deformation an E_2 an, dass dasselbe in eine Poincaré'sche Gleichgewichtsfigur übergeht, und dreht die ganze Figur um 180° um die z -Axe, so erhält man eine neue Gleichgewichtsfigur, welche natürlich zum selben Wert des Rotationsmomentes, wie die ursprüngliche gehört. Wäre die erste Figur symmetrisch zur x, z und y, z Ebene, so würde sie allerdings durch die Drehung in sich selbst übergehen; das ist aber bei den Poincaré'schen Figuren nicht der Fall, wie aus dem in Fig. 10 dargestellten Schnitt einer solchen Figur mit der x, z Ebene zu erkennen ist. Es folgt somit, dass die Poincaré'schen Figuren immer paarweise auftreten, dass also mindestens zwei Arme zu gleichem Rotationsmoment fortlaufen. Man zeigt leicht, worauf wir hier verzichten wollen, dass sich an E_2 nur zwei neue Arme anschliessen; aber ob es nun zwei sind, die sich zum selben Rotationsmoment erstrecken, oder ob es mehrere sind, sicher hat man es nicht mit einem Falle zu thun, in welchem das Prinzip des Umtausches der Stabilität angewandt werden kann, da dies die Existenz von nur zwei neuen Armen, die sich zu verschiedenem Rotationsmoment erstrecken, voraussetzt.

So bleibt es ungewiss, was Herr Poincaré schon für entschieden hielt, ob diese Figuren stabil sind, man weiss auch nicht, ob sie zu grösserem oder kleinerem Rotationsmoment als E_2 gehören. Nach dem in § 4 e) 2. Fall abgeleiteten Theoreme sind beide Fragen miteinander verknüpft, und die Sache liegt so, dass entweder die Poincaré'schen Figuren instabil sind und zu kleinerem Rotationsmoment gehören, in welchem Falle die stabilen Gleichgewichtsfiguren einer homogenen Flüssigkeit mit dem Ellipsoid E_2 überhaupt aufhörten, oder dass sie die stabile Fortsetzung der Jacobi'schen Reihe zu grösserem Rotationsmoment bilden. Die Entscheidung könnte durch Bestimmung des Vorzeichens der Koeffizienten gewisser höherer Glieder der Energieentwicklung (H) herbeigeführt werden, die sich zwar leicht nach dem in § 3 c) angewandten Verfahren in Form bestimmter Integrale darstellen lassen, aber zur Reduktion auf eine durchsichtige Gestalt manchen Kunstgriff erfordern werden.

Um eine Annäherung an die Gestalt der Poincaré'schen Figuren zu erhalten, hat man wiederum y_1 aus der Gleichung § 4 f) (J), darauf die übrigen y_λ aus (22) zu berechnen und die Entwicklung (B) zu bilden. Man überzeugt sich leicht, dass, wie oben bei den Jacobi'schen Ellip-

¹⁾ Vgl. Acta math. Bd. III, pag. 377: »... nous pourrions appliquer le principe de l'échange des stabilités...« und pag. 378: »La forme d'équilibre représentée dans la figure p. 347 est donc une forme d'équilibre stable.«

soiden, so auch für die Poincaré'schen Figuren die übrigen y_1 im Verhältnis zu y_1 Grössen höherer Ordnung werden und dass man daher als erste Annäherung:

$$\zeta = \eta_1 y_1$$

hat.¹⁾ Für die hier auftretende Orthogonalfunktion η_1 erhält man aus der Theorie der Lamé'schen Funktionen, wenn man mit x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten von Punkten auf der Oberfläche des Ellipsoids E_2 und mit $\varrho, \sqrt{\varrho^2 - b^2}, \sqrt{\varrho^2 - c^2}$ die drei Axen von E_2 bezeichnet:

$$\eta_1 = l x (a x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - \delta)$$

worin:

$$l = \frac{1}{\varrho} \sqrt{\frac{x^2}{\varrho^4} + \frac{y^2}{(\varrho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\varrho^2 - c^2)^2}}$$

$$a = \frac{2}{5} b^2 c^2 - \frac{h}{5} (b^2 + c^2) \quad \beta = -\frac{3}{5} b^2 c^2 + \frac{h}{5} (4 b^2 - c^2) \quad \gamma = -\frac{3}{5} b^2 c^2 + \frac{h}{5} (4 c^2 - b^2)$$

$$\delta = h a \quad 5 h = 2 (b^2 + c^2) - \sqrt{4 (b^2 + c^2)^2 - 15 b^2 c^2}$$

ist.

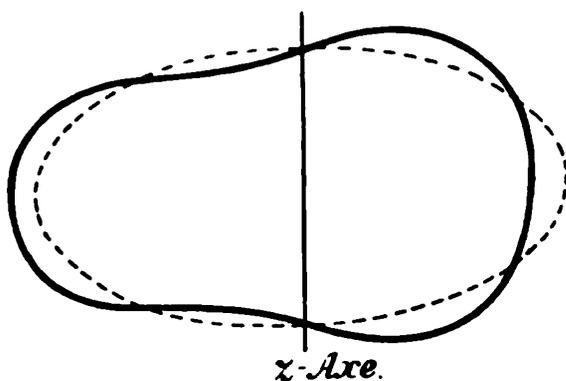


Fig. 10.

Trägt man die hieraus folgenden Werte ζ (für kleines y_1) auf den Normalen von E_2 auf, so erhält man eine birnförmige Figur, für deren Schnitt mit der x, z Ebene Herr Poincaré beistehende Zeichnung gegeben hat (die gestrichelte Linie bedeutet den Schnitt des Ellipsoides E_2) und deren Verhalten bei wachsender Abweichung vom Ellipsoid er so beschreibt:

»Der grössere Teil der Masse scheint sich der Kugelform anzunähern, während der kleinere Teil am einen Ende der grossen Axe aus dem Ellipsoid heraustritt, als ob er sich von der Hauptmasse trennen wollte.«

Wir werden in § 7 auf die Besprechung dieser Figuren zurückkommen.

§ 6. Die Gleichgewichtsfiguren eines kleinen Mondes.

a) Die Roche'schen Ellipsoide.

Ein kleiner Mond, der aus einer homogenen Flüssigkeit gebildet sei, bewege sich in einer Kreisbahn in der Aequatorialebene um einen Planeten, der ein wenig abgeplattetes Revolutionsellipsoid sein möge, und wende dabei dem Planeten immer dieselbe Seite zu. Der Mond wird dann eine gewisse Gleichgewichtsform annehmen, die, wie schon Laplace bemerkt hat, bei hinreichender Entfernung des Mondes vom Hauptkörper nahe ein dreiaxiges Ellipsoid ist, dessen grösste Axe dem Hauptkörper zugewendet ist. Roche hat erkannt, dass auch bei geringerem Abstand vom Hauptkörper und grösserer Rotationsgeschwindigkeit des Mondes (sowohl in der Bahn, als um seine Axe) ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren existieren, so lange nur der grösste Durchmesser des Mondes im Verhältnis zum Abstand vom Hauptkörper so klein ist, dass man die dritte Potenz dieses Verhältnisses gegen die Einheit vernachlässigen kann. Die Diskussion der transcendenten Gleichungen, die diese Figuren bestimmen und die man in Herrn Tisserand's *Mécanique céleste* Vol. II, Chapitre VIII, abgeleitet findet, hat Roche zu folgendem Resultate geführt:²⁾

¹⁾ Für das Folgende vergl. Acta math. VII, pag. 345--347.

²⁾ Mémoires de l'Académie de Montpellier. 1847-50.

Ist die Distanz des Mondes vom Hauptkörper sehr gross und mithin nach dem 3. Kepler'schen Gesetz die Rotationsgeschwindigkeit sehr klein, so existieren zwei ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren, von denen die eine nahe eine Kugel, die andere, wie das Jacobi'sche Ellipsoid für kleine Rotationsgeschwindigkeit, eine unendlich dünne nach dem Hauptkörper gerichtete Nadel ist. Vermindert sich die Distanz und wächst die Rotationsgeschwindigkeit, so geht die Kugel in ein sich mehr und mehr abplattendes dreiaxiges Ellipsoid über, das um die kleinste Axe rotiert, während die grösste dem Hauptkörper zugewandt ist, das nadelförmige Ellipsoid hingegen verkürzt sich mehr und mehr und schliesslich vereinigen sich beide Formenreihen in einem Ellipsoid E_0 , über welches hinaus keine weiteren ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren existieren. Die Rotationsgeschwindigkeit, zu der dieses Ellipsoid gehört, bestimmt sich in unseren Einheiten (Dichte des Mondes = 1, Gauss'sche Attraktionskonstante = 1) aus der Gleichung:

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi} = 0,046 \quad 1)$$

Dieser Rotationsgeschwindigkeit entspricht eine gewisse Distanz D vom Hauptkörper. Ist die Dichte des letzteren ϱ , sein Radius, wenn man seine ganze Masse zu einer Kugel ballt, R , so ist der Betrag seiner Masse:

$$M = \frac{4\pi}{3} \varrho \cdot R^3$$

Hiermit liefert das Kepler'sche Gesetz für die Rotationsgeschwindigkeit des Mondes:

$$\omega^2 = \frac{4\pi}{3} \varrho \frac{R^3}{D^3}$$

und wenn man den obigen Wert für ω einsetzt:

$$\frac{3}{2} \cdot 0,046 = \varrho \cdot \frac{R^3}{D^3} \quad D = 2,44 \cdot R \cdot \sqrt[3]{\varrho} \quad 2)$$

Im Fall Mond-Erde ($\varrho = 1,63$) erhält man:

$$D = 2,87 R$$

Bis zu dieser Distanz von der Erde würden ellipsoidische Gleichgewichtsformen für den Mond existieren, wenn dieser homogen und gegen die Erde unendlich klein wäre.

Unsere Aufgabe ist, zu entscheiden, welche von diesen Ellipsoiden stabil sind und an welche sich neue Reihen von Gleichgewichtsfiguren anschliessen. Es bedarf hierzu zunächst einer

b) Umformung des Stabilitätsprinzips.

Die Masse des Hauptkörpers sei 1, die des Mondes sei sehr klein und gleich μ , der Abstand ihrer Schwerpunkte sei a . Das Potential des Hauptkörpers auf sich selbst sei V_1 , das des Mondes auf sich selbst V_2 , das wechselseitige Potential beider Körper aufeinander V_{12} , das Trägheitsmoment des Mondes in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende zur Bahnebene senkrechte Axe sei $I_2 \mu$.

Den Hauptkörper wollen wir als eine ruhende Kugel betrachten; denn eine beliebige Rotation desselben um eine zur Aequatorialebene senkrechte Axe hat keinen Einfluss auf die Mondbewegung, so lange er ein Rotationskörper ist, und eine kleine Abplattung kann innerhalb der Genauigkeitsgrenzen unserer Untersuchung ausser Betracht bleiben.

Das Trägheitsmoment des ganzen Systems in Bezug auf seine durch den Schwerpunkt des Hauptkörpers gehende Rotationsaxe ist dann, da man das Trägheitsmoment des Hauptkörpers selbst als einer unveränderlich ruhenden Masse nicht mitrechnen darf:

$$I = a^2 \mu + I_2 \mu \quad 3)$$

und die zum Rotationsmoment c gehörige Energie wird:

$$U = \frac{c^2}{2\mu(a^2 + I_2)} - V_1 - V_2 - V_{12} \quad 4)$$

Hierin ist V_1 eine Konstante, die wir weglassen können. V_{12} hat den Wert:

$$V_{12} = \int \frac{dm}{r}$$

wo dm ein Massenteilchen des Mondes, r dessen Abstand vom Mittelpunkt des Hauptkörpers bedeutet. Man lege nun durch den Mondschwerpunkt ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das so rotiert, dass seine x -Axe stets nach dem Schwerpunkt des Hauptkörpers hin gerichtet ist, während die z -Axe senkrecht zur Bahnebene stehen soll. Es ist dann, wenn x, y, z die Koordinaten von dm in diesem Systeme bedeuten:

$$r^2 = (a - x)^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{a^3} + \dots$$

und hiermit:

$$V_{12} = \frac{\mu}{a} + \frac{1}{a^2} \int x dm + \frac{1}{2a^3} \int dm (2x^2 - y^2 - z^2) + \dots$$

Das zweite Glied fällt fort, da der Nullpunkt der Mondschwerpunkt sein sollte. Es bleibt also:

$$V_{12} = \frac{\mu}{a} + \frac{1}{2a^3} \int dm (2x^2 - y^2 - z^2) = \frac{\mu}{a} + \frac{\beta}{a^3} \quad 5)$$

wo β zur Abkürzung eingeführt ist.

Die folgenden Glieder im Ausdruck von V_{12} werden wir vernachlässigen, da sie das Verhältnis des grössten Monddurchmessers zu a in höherer als der zweiten Potenz enthalten und wir uns auf diese Potenz beschränken müssen, wenn wir überhaupt zu ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren kommen wollen.

Es folgt somit für die Energie der Ausdruck:

$$U = \frac{c^2}{2\mu(a^2 + I_2)} - V_2 - \frac{\mu}{a} - \frac{\beta}{a^3}$$

und diese Grösse muss für eine Gleichgewichtsfigur stationär werden. Suchen wir zunächst U so zu bestimmen, dass es bei Aenderung von a stationär ist, sei also:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0 = - \frac{c^2 a}{\mu(a^2 + I_2)^2} + \frac{\mu}{a^2} + \frac{3\beta}{a^4} \quad 6)$$

Statt aus dieser Gleichung a zu eliminieren und das Resultat in U einzusetzen, können wir innerhalb unserer Genauigkeitsgrenzen auch folgendermassen verfahren:

Es ist hinreichend genau:

$$U = \frac{c^2}{2\mu a^2} - \frac{\mu}{a} - \frac{\beta}{a^3} - \frac{c^2}{2\mu a^4} I_2 - V_2$$

Ferner schreibt sich (6) hinreichend genau:

$$\frac{c^2}{\mu a^3} - \frac{\mu}{a} = \frac{3\beta}{a^3} + \frac{2I_2 c^2}{\mu a^4}$$

oder:

$$c^2 - \mu^2 a = a \left[\frac{3\beta \mu}{a^3} + \frac{2I_2 c^2}{a^3} \right] \quad 7)$$

und es ist:

$$\frac{c^2}{2\mu a^2} - \frac{\mu}{a} = \frac{1}{2\mu a^2 c^2} (c^2 - \mu^2 a)^2 - \frac{\mu^3}{2c^2}$$

Nun ist nach (7) der Ausdruck $c^2 - \mu^2 a$ eine Grösse zweiter Ordnung, da sowohl $\frac{\beta}{a^2}$ als $\frac{I_2}{a^2}$ das Verhältnis des grössten Monddurchmessers zu a im Quadrate enthalten; man hat also bis auf Grössen vierter Ordnung:

$$\frac{c^2}{2\mu a^2} - \frac{\mu}{a} = -\frac{\mu^3}{2c^2}$$

und hiermit:

$$U = -\frac{\mu^3}{2c^2} - \frac{\beta}{a^2} - \frac{c^2}{2\mu a^2} I_2 - V_2$$

Schliesslich gilt für jede Gleichgewichtsfigur die Beziehung:

$$c = \omega I = \omega \mu (a^2 + I_2) \quad (8)$$

In den Gliedern $\frac{\beta}{a^2}$ und $\frac{c^2}{2\mu a^2} I_2$, die an und für sich von der zweiten Ordnung sind, genügt es, für a einen in den Gliedern nullter Ordnung richtigen Wert einzuführen. Mit dieser Genauigkeit folgt aber aus (7) und (8):

$$c^2 = \mu^2 a$$

und:

$$c = \omega \mu a^2 \quad 1 = \omega^2 a^3 \quad \omega = \frac{\mu^2}{c^3} \quad (9)$$

Setzt man dies in U ein, so ergibt sich:

$$U = -\frac{\mu^3}{2c^2} - \beta \omega^2 - \frac{1}{2} \mu I_2 \omega^2 - V_2 \quad (10)$$

Diese Grösse ist es, die bei konstant gehaltenem c für eine stabile Gleichgewichtsfigur ein Minimum sein muss. Da ferner in diesem Ausdruck für ω der Wert (9) verwendet werden durfte, ist ω mit c zugleich gegeben und bei der Bestimmung des Minimums als unveränderlich zu betrachten. Man kann daher in diesem Falle die Gleichgewichtsfiguren ebenso gut als abhängig von ω , als von c auffassen, was wir auch je nach Bedürfnis thun werden.

Bedenkt man nun, dass $\frac{\mu^2}{2c^2}$ eine Konstante ist, dass man I_2 aus der Gleichung:

$$\mu I_2 = \int (x^2 + y^2) dm$$

erhält und dass man nach (5):

$$\beta = \frac{1}{2} \int (2x^2 - y^2 - z^2) dm$$

hat, so findet man die Stabilitätsbedingung in folgender Form:

$$Q = -\frac{1}{2} \omega^2 \int dm (3x^2 - z^2) - V_2 = \text{Minimum} \quad (10a)$$

worin, wenn dm und dm' zwei beliebige verschiedene Teilchen des Mondes sind und Δ ihre Distanz bedeutet:

$$V_2 = \frac{1}{2} \int \frac{dm dm'}{\Delta} \text{ ist.}$$

Ueberlegen wir einen Augenblick, was wir bei der Ableitung dieses Ausdruckes vorausgesetzt haben und wie dieses Minimum zu verstehen sei. Wir haben angenommen, dass sich der Schwerpunkt der Mondmasse für die Massenordnung, deren Energie berechnet werden soll, in dem durch (6) gegebenen Abstand a — Gleichung (6) hat, wie man leicht sieht, für einen unendlich

kleinen Mond nur eine endliche Wurzel — vom Schwerpunkt des Hauptkörpers befinde. Das wird für eine beliebige Lage der Mondmasse zunächst nicht der Fall sein. Denkt man sich aber die Mondmasse unter Beibehaltung ihrer Gestalt dem Hauptkörper genähert oder von ihm entfernt, so zeigt die Berechnung des Differentialquotienten $\frac{\delta^2 U}{\delta a^2}$, die dem Leser überlassen bleiben möge, dass unter den auf diese Weise entstehenden Konfigurationen des ganzen Systems gerade diejenige, für die die Entfernung der Schwerpunkte der Gleichung (6) genügt, den kleinsten Wert der Energie hat. Ist nun der Ausdruck (10) für eine bestimmte Gestalt der Mondmasse ein Minimum, so bedeutet das zunächst nur, dass er für sie kleiner ist, als für irgend eine andere Gestalt, wenn man die Masse in dieser, wie in den andern Gestalten, jedesmal in die aus (6) bestimmte Entfernung a vom Hauptkörper bringt; da aber die Energie dieser andern Gestalten bei jeder Abweichung von der so bestimmten Entfernung a wächst, so folgt, dass die Energie in diesem Falle für die ursprüngliche Gestalt bei der aus (6) bestimmten Entfernung vom Hauptkörper absolutes Minimum, kleiner als für jede benachbarte Massenordnung wird, dass mithin das Minimum von (10) oder (10a) ausreichendes Kriterium der Stabilität ist; dass beides notwendige Kriterien sind, versteht sich von selbst. Bei der Untersuchung, ob Q ein Minimum ist, ist noch darauf zu achten, dass wir übereingekommen sind, als Anfangspunkt des Koordinatensystems der x, y, z den Schwerpunkt der Mondmasse in ihrer jedesmaligen Gestalt zu wählen, oder, was dasselbe ist, dass wir nur Anordnungen mit dem Schwerpunkt $x = y = z = 0$ in Betracht zu ziehen haben.

Wenn man jetzt berücksichtigt, dass der Ausdruck:

$$P = \frac{1}{2} \omega^2 (3x^2 - z^2) + \int \frac{dm'}{r} \quad (11)$$

das Potential sämtlicher wirkenden Kräfte darstellt, also auf der Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur konstant ist, so erkennt man, dass man Q genau auf dieselbe Weise weiter behandeln kann, wie dies oben in § 3 a) mit dem Ausdruck $\frac{\omega^2}{2} I + V$ geschehen ist, dass man mithin für die Aenderung von Q beim Uebergang von einer Gleichgewichtsfigur zu einer Nachbarfigur den genäherten Wert:

$$\delta Q = \frac{1}{2} \int g \zeta^2 d\omega - \frac{1}{2} \int \zeta \zeta' \frac{d\omega d\omega'}{r} \quad A')$$

erhalten wird, wobei g den Differentialquotienten von P nach der innern Normale der Gleichgewichtsfigur, die Schwere auf der Oberfläche des Mondes, und ζ die Deformation bedeutet. Dieser Ausdruck ist etwas einfacher als der entsprechende frühere Ausdruck der Energieänderung (A), insofern ihm ein drittes Glied fehlt.

c) Einführung der Lamé'schen Funktionen und Bildung der Stabilitätskoeffizienten.

Um δQ in eine Summe von Quadraten zu verwandeln, hat man wieder vermöge einer unendlichen orthogonalen Substitution ein System von Orthogonalfunktionen η_k zu bestimmen, mit deren Hülfe dann jede Deformation in der Form:

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k y_k \quad B')$$

entwickelt und δQ wirklich in die Gestalt:

$$\delta Q = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - s_k) y_k^2 \quad C')$$

übergeführt werden kann. An Stelle der definierenden Integraleigenschaften D) E) F) der oben benutzten Orthogonalfunktionen treten, wie man leicht sieht, infolge der einfacheren Gestalt von δQ die einfacheren Eigenschaften:

$$\int \eta_x \eta_\lambda \frac{d\omega d\omega'}{A} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \geq \lambda \\ s_\lambda & \text{wenn } x = \lambda \end{cases} \quad \text{D'}$$

$$\int g \eta_x \eta_\lambda d\omega = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \geq \lambda \\ 1 & \text{wenn } x = \lambda \end{cases} \quad \text{E'}$$

$$\int \eta_\lambda \frac{d\omega'}{A} = g s_\lambda \eta_\lambda \quad \text{F'}$$

Es stimmen nun merkwürdigerweise die durch E') und F') definierten Funktionen η_λ für ein Ellipsoid, das eine Gleichgewichtsfigur ist, genau mit den bekannten Lamé'schen Funktionen überein.¹⁾

Dass die Lamé'schen Funktionen diese Integraleigenschaften haben, ist erst nachträglich von Liouville entdeckt worden, während die ursprüngliche Definition, die zu ihrer wirklichen Her-
stellung führt und die sich auch rückwärts aus diesen Gleichungen ableiten liesse, die folgende war.²⁾

Es seien x, y, z rechtwinklige Koordinaten eines Punktes auf der Oberfläche des zu Grunde liegenden Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1 \quad 12)$$

dessen Axen die Länge $\varrho, \sqrt{\varrho^2 - b^2}$ und $\sqrt{\varrho^2 - c^2}$ haben, wobei $c > b$ sei. Man führe nun sog. elliptische Koordinaten ein, indem man in dieser Gleichung x, y, z als gegeben, ϱ^2 als Unbekannte betrachtet, wobei man findet, dass diese Gleichung stets drei reelle positive Wurzeln hat, von denen, sofern x, y, z Koordinaten eines Punktes auf der Oberfläche des Ellipsoides sind, eine natürlich mit der grossen Axe des Ellipsoides ϱ^2 übereinstimmen wird, während die andern μ^2 und ν^2 sein mögen. ϱ, μ, ν heissen »elliptische Koordinaten«. Die Koordinaten jedes Punktes auf dem Ellipsoid lassen sich dann auch rückwärts als Funktionen von μ, ν ausdrücken (ϱ ist konstant gleich der grossen Axe) vermöge der Beziehungen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varrho \mu \nu}{b c} \\ y &= \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\nu^2 - b^2}}{b \sqrt{b^2 - c^2}} \\ z &= \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2} \cdot \sqrt{\mu^2 - c^2} \cdot \sqrt{\nu^2 - c^2}}{c \sqrt{c^2 - b^2}} \end{aligned} \quad 13)$$

wobei man die Mehrdeutigkeit der Wurzelvorzeichen leicht durch die Bedingung beseitigt, dass $x y z$ auf der ganzen Oberfläche des Ellipsoides stetige Funktionen von μ und ν sein sollen.

Man bilde weiter die Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} (\varrho^2 - b^2) (\varrho^2 - c^2) \frac{\delta^2 R}{\delta \varrho^2} + (2\varrho^2 - b^2 - c^2) \varrho \frac{\delta R}{\delta \varrho} &= [n(n+1)\varrho^2 - B] R \\ n &= 0, 1, 2, 3 \dots \infty \quad B = \text{const.} \end{aligned} \quad 14)$$

die, wenn man die Grösse:

$$\varepsilon = \int_{\varrho=c}^{\varrho} \frac{\delta \varrho}{\sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}} \quad 15)$$

als neue Variable einführt, in die folgenden übergehen:

$$\frac{\delta^2 R}{\delta \varepsilon^2} = [n(n+1)\varrho^2 - B] R \quad 16)$$

¹⁾ Man bestätigt leicht, dass (D') eine Folge von (E') und (F') ist.

²⁾ Man vergleiche die Parallelstelle bei Poincaré (Act. math. VII, pag. 315-321).

Jede solche Differentialgleichung besitzt zwei partikuläre Integrale, aus denen sich das allgemeine Integral linear zusammensetzt. Die partikulären Integrale lassen sich im Allgemeinen nur mit Hülfe von θ -Funktionen darstellen, jedoch existieren für jedes $n = 2n + 1$ spezielle Werte der Konstante B , die mit $B_{n,p}$ ($p = 1, 2, 3 \dots 2n + 1$) bezeichnet werden sollen, für die das Integral in eine ganze Funktion von ϱ , $\sqrt{\varrho^2 - b^2}$ und $\sqrt{\varrho^2 - c^2}$ übergeht, während das andere durch eine gleich anzugebende Quadratur geliefert wird. Das erstere Integral hat also für diese speziellen Werte von B eine von den Formen:

$$T, \sqrt{\varrho^2 - b^2} T, \sqrt{\varrho^2 - c^2} T, \sqrt{\varrho^2 - b^2} \cdot \sqrt{\varrho^2 - c^2} T$$

wobei T eine gerade oder ungerade Funktion von ϱ ist, welche im ersten Fall vom n^{ten} , im zweiten und dritten vom $n - 1^{\text{ten}}$ und im vierten vom $n - 2^{\text{ten}}$ Grade ist, sodass das Integral selbst jedesmal von der n^{ten} Dimension wird. Wir geben nun diesem ersten einfachen Integrale R den oberen Index $k = 1, 2, 3, 4$, jenachdem es von der 1., 2., 3. oder 4. Form ist, ferner zwei untere Indices n und p , die angeben, zu welchem Werte n und zu welchem der zu n gehörigen ausgezeichneten Werte $B_{n,p}$ das Integral gehört. Es ist dann z. B.:

$$R_{n,p}^k = \sqrt{\varrho^2 - c^2} (\varrho^2 - a_1^2) (\varrho^2 - a_2^2) (\dots) (\varrho^2 - a_{n-1}^2) \quad \text{für ungerades } n$$

$$R_{n,p}^k = \sqrt{\varrho^2 - c^2} \cdot \varrho (\varrho^2 - \beta_1^2) (\varrho^2 - \beta_2^2) (\dots) (\varrho^2 - \beta_{n-1}^2) \quad \text{für gerades } n$$

wobei die a und β gewisse von den Indices k, n und p und den Werten von b und c abhängige Konstanten bedeuten, die, wie die Theorie weiter lehrt, alle positiv reell und kleiner als c sind. Jedes solche Polynom, das der Gleichung (14) genügt, heisst »Lamé'sches Polynom«.

Das zweite Integral $S_{n,p}^k$ hat den Ausdruck:

$$S_{n,p}^k = R_{n,p}^k \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\varrho}{(R_{n,p}^k)^2 \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}} \quad (17)$$

Um jetzt die »Lamé'schen Funktionen« zu erhalten, schreibe man (14) noch zweimal, erst indem man ϱ durch μ , R durch M , dann indem man ϱ durch ν , R durch N ersetzt. Dann werden M und N ganz genau wie R gebaute Polynome der Variablen μ und ν , die wir wieder durch Indices als $M_{n,p}^k$ und $N_{n,p}^k$ kennzeichnen können. Während R aber mit ϱ auf dem Ellipsoid eine Konstante ist, nehmen M und N von Punkt zu Punkt andere Werte an. Bildet man jetzt mit Hülfe zweier zu denselben Indices gehöriger gleichgebauter Polynome M und N das Produkt:

$$\eta = l \cdot \frac{M \cdot N}{P} \quad (18)$$

worin:

$$l = \varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2} \sqrt{\frac{x^2}{\varrho^4} + \frac{y^2}{(\varrho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\varrho^2 - c^2)^2}} \quad (19)$$

und P eine vorerst noch willkürliche Konstante ist, so ist dieser Ausdruck eine »Lamé'sche Funktion«.

Wir wollen uns überzeugen, dass er auch eine Orthogonalfunktion ist, die Gleichungen E') und F') erfüllt.

Liouville hat gezeigt, dass η der Gleichung:

$$\int \eta' \frac{d\eta'}{\eta} = 4\pi \frac{R \cdot S}{l} \eta$$

genügt, wobei R und S mit denselben Indices, wie die beiden Polynome M und N , aus denen η gebildet ist, zu verstehen sind. Soll daher η eine Orthogonalfunktion sein, so muss, wie die Vergleichung dieser Relation mit F') ergibt, der Ausdruck:

$$4\pi \frac{R \cdot S}{g \cdot l} = s \quad 20)$$

auf der ganzen Oberfläche des Ellipsoids eine Konstante sein, die uns dann gleich die zu dieser Orthogonalfunktion η gehörige Determinantenwurzel s darstellt.

Liouville hat ferner gezeigt, dass zwei verschiedene Lamé'sche Funktionen η und η_1 der Gleichung genügen:

$$\int \eta \eta_1 \frac{d\omega}{l} = 0$$

Die Funktionen η werden daher bei geeigneter Wahl der Konstanten P die Gleichungen E') erfüllen, falls auf der Oberfläche des Ellipsoids

$$g \cdot l = \text{const.}$$

ist. Man sieht, dass diese Bedingung mit der Forderung, s solle konstant sein, übereinkommt.

Es ist also g auf der Oberfläche eines Ellipsoids, das eine Gleichgewichtsfigur bildet, zu berechnen. Das Potential im Innern eines homogenen Ellipsoids ist bekanntlich:

$$P_1 = \int \frac{dm'}{A} = q_1 x^2 + q_2 y^2 + q_3 z^2 + q_4$$

wo die q gewisse Konstante sind. Setzt man dies in (11) ein und nennt (n, x) , (n, y) , (n, z) die Winkel der innern Normalen auf der Oberfläche des Ellipsoids mit der x -, resp. y - und z -Axe, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= g \cos(n, x) = x [3\omega^2 + 2q_1] \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= g \cos(n, y) = y \cdot 2q_2 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= g \cos(n, z) = z [-\omega^2 + 2q_3] \end{aligned} \quad 21)$$

Aus Gleichung (12) erhält man nach bekannten Regeln:

$$\cos(n, x) = \frac{x}{a^2} K \quad \cos(n, y) = \frac{y}{a^2 - b^2} \cdot K \quad \cos(n, z) = \frac{z}{a^2 - c^2} \cdot K \quad 21 a)$$

wobei:

$$K = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{(a^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(a^2 - c^2)^2}}}$$

also nach (19):

$$K = l \cdot a \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{a^2 - c^2} \quad 21 b)$$

ist. Setzt man dies in die zweite der Gleichungen (21) ein, so folgt:

$$g \cdot l = 2 q_2 \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a \sqrt{a^2 - c^2}}$$

und nach (20):

$$s = 2\pi a \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{R \cdot S}{q_2} \quad 22)$$

Diese beiden Ausdrücke sind in der That Konstanten auf der Oberfläche des Ellipsoids, η ist Orthogonalfunktion.

Für q_2 erhält man aus der Theorie der Anziehung dreiaxiger Ellipsoide den Ausdruck:¹⁾

$$q_2 = 2\pi \varrho \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\varrho}{(\varrho^2 - b^2) \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}}$$

Der Ausdruck $\sqrt{\varrho^2 - b^2}$ ist aber, wie man leicht sieht, ein Lamé'sches Polynom, welches wir kurz mit R_1 bezeichnen wollen, und es folgt aus (17):

$$S_1 = \sqrt{\varrho^2 - b^2} \cdot \int_{\varrho}^{\infty} \frac{d\varrho}{(\varrho^2 - b^2) \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}}$$

Es schreibt sich also:

$$q_2 = 2\pi \varrho \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}} \cdot R_1 \cdot S_1$$

Hiermit geht (22) über in:

$$s = \frac{R \cdot S}{R_1 \cdot S_1}$$

und die Stabilitätskoeffizienten werden:

$$1 - s = 1 - \frac{R \cdot S}{R_1 \cdot S_1} \quad \text{K)}$$

Von dem Vorzeichen dieser Integralausdrücke hängt also die Stabilität unserer Ellipsoide ab.

d) Diskussion des Vorzeichens der Stabilitätskoeffizienten.

In K) werden wir je nach Bedürfnis R und S keinen, einen, zwei oder alle drei Indices geben, die ihnen zukommen, und die gleichen Indices wollen wir an s anbringen, da die Ordnung der s in eine Reihe nach einem Index λ , die wir bisher benutzten, hier unpraktisch sein würde.

s ist eine Funktion der drei Grössen ϱ , b , c , welche aber nicht unabhängig von einander, sondern durch die Bedingung verknüpft sind, dass das durch (12) dargestellte Ellipsoid Gleichgewichtsfigur eines kleinen Mondes, ein Roche'sches Ellipsoid, sein muss. Wir wollen uns alle diese Ellipsoide in einem solchen Massstab vergrössert denken, dass $c = 1$ wird. Dann ist jedes solche vergrösserte Ellipsoid durch die Werte von ϱ und b bestimmt. Wenn man ϱ und b in einer Ebene als rechtwinklige Koordinaten aufträgt, entspricht jedem Punkt der Ebene (innerhalb eines gewissen gleich zu bestimmenden Gebietes) ein Ellipsoid und die vergrösserten Roche'schen Ellipsoide werden durch eine bestimmte Kurve C in dieser Ebene dargestellt werden.

Man sieht ferner leicht, dass sich s nicht ändert, wenn man ϱ , b , c alle mit dem gleichen Faktor multipliziert, dass man daher in K) $c = 1$ setzen darf und somit die Stabilitätskoeffizienten $1 - s$ auch als Funktionen von ϱ und b erhält. Statt nun die Stabilitätskoeffizienten unmittelbar längs der Kurve C zu untersuchen, suchen wir die Gebiete abzugrenzen, in denen jeder Stabilitätskoeffizient positives oder negatives Vorzeichen hat, und sehen dann nach, ob und wo die Kurve C in diese Gebiete eintritt.

Da $b < c (= 1)$ sein sollte und für ein Ellipsoid $\varrho > c (= 1)$ sein muss, werden alle Ellipsoide durch den zwischen $b = 0$ und $b = 1$ von $\varrho = 1$ bis $\varrho = \infty$ verlaufenden Streifen dargestellt. Wir beginnen die Untersuchung der Stabilitätskoeffizienten, indem wir b festhalten, also ihren Verlauf längs einer Parallelen zur ϱ -Axe betrachten.

¹⁾ Man vergleiche z. B. Sturm, Cours de Mécanique, 5. Edition, Tome I, pag. 97

Da S_1 und R_1 stets positiv sind, hat die Grösse :

$$F = \frac{S_1}{R_1} - \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 \cdot \frac{S}{R} = \frac{S_1}{R_1} \left[1 - \frac{R \cdot S}{R_1 S_1}\right] \quad (23)$$

dasselbe Vorzeichen wie $1 - s$.

Aus (17) erhält man leicht, wenn man die in (15) eingeführte Variable ε benutzt :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{S}{R}\right) = -\frac{1}{R^2} \quad (24)$$

Die Differentiation von (23) ergibt:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{S_1}{R_1}\right) - \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{S}{R}\right) - \frac{S}{R} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{R}{R_1}\right)^2$$

oder, da (24) natürlich ebensogut für R_1 und S_1 wie für jedes beliebige S und R gilt :

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = -\frac{S}{R} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 \quad (25)$$

Es war :

$$R_1 = \sqrt{\varrho^2 - b^2} \quad (26)$$

Der Quotient $\left(\frac{R}{R_1}\right)^2$ hat daher die Form:

$$\left(\frac{R}{R_1}\right)^2 = (\varrho^2 - a_1^2)^2 (\varrho^2 - a_2^2)^3 (\dots) \frac{\varrho^{2i} (\varrho^2 - b^2)^k (\varrho^2 - c^2)^l}{\varrho^2 - b^2}$$

wobei :

$$i, k, l = 0 \text{ oder } 1$$

ist. Da die sämtlichen a , wie erwähnt, unter $c = 1$, ϱ hingegen über $c = 1$ liegt, wachsen alle Faktoren im Zähler dieses Produkts mit ϱ . Die Möglichkeit, dass der ganze Ausdruck mit wachsendem ϱ abnimmt, ist daher nur dann vorhanden, wenn keiner der Quotienten

$$\frac{\varrho^2 - a^2}{\varrho^2 - b^2} = 1 - \frac{a^2 - b^2}{\varrho^2 - b^2} \quad a = a_1, a_2, \dots, 0, b, c$$

mit wachsendem ϱ zunimmt, was erfordert, dass sämtliche auftretenden Werte a kleiner als b sind, also vor allem, dass $k = 0$ und $l = 0$ ist.

Wir teilen die Polynome R hiernach in zwei Klassen :

1. Klasse. Es sind nicht alle a kleiner als b , es ist also z. B. $k = 1$ oder $l = 1$. Dann nimmt der Ausdruck $\left(\frac{R}{R_1}\right)^2$ mit wachsendem ϱ ständig zu.

2. Klasse. Alle a sind kleiner als b , es ist $k = l = 0$. Dann kann der Ausdruck $\left(\frac{R}{R_1}\right)^2$ mit wachsendem ϱ möglicherweise abnehmen.

Behandlung der 1. Klasse.

Zunächst setzen wir voraus, dass R ein Polynom der ersten Klasse sei. Da nach (15):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - b^2} \cdot \varrho^2 - c^2}$$

stets positiv und auch S und R stets positiv sind, so ergibt (25), dass F mit wachsendem ϱ fortwährend abnimmt. Ist aber ϱ sehr gross, so hat R , weil alle a unter 1 liegen, nahe den Wert :

$$R_* = \varrho^n \quad (27)$$

wo n der eine oben eingeführte Index ist. Ferner ergibt sich aus (17) für sehr grosses ϱ :

$$R_n S_n = (R_n)^2 \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\delta \varrho}{(R_n)^2 \varrho^3} = \varrho^{2n} \int_{\varrho^{2n+1}}^{\infty} \frac{\delta \varrho}{\varrho^{2n+1}} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Das Polynom $R_1 = \sqrt{\varrho^2 - b^2}$ gehört zu $n = 1$. Es ist mithin für sehr grosses ϱ nahe:

$$R_1 S_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\varrho}$$

Hiermit erhalten die Stabilitätskoeffizienten für grosses ϱ den Ausdruck:

$$1 - s_n = 1 - \frac{R_n S_n}{R_1 S_1} = 1 - \frac{3}{2n+1} \quad (28)$$

Für grosses ϱ gehen die Ellipsoide (12) in Kugeln über und es sind dies die Werte, die man unmittelbar aus der Theorie der Kugelfunktionen für die Stabilitätskoeffizienten der Kugel hätte ableiten können.

Für grosses ϱ sind mithin alle Stabilitätskoeffizienten und nach (23) daher auch die Funktionen F positiv. Nun nimmt für ein R der ersten Klasse F mit wachsendem ϱ fortwährend ab, es folgt also (da F und $1-s$ stets gleiches Vorzeichen haben):

Satz I. »Die Stabilitätskoeffizienten, die aus einem Polynom der ersten Klasse entspringen, sind stets positiv.« Sie können nicht zum Auftreten einer singulären Figur in der Reihe der Roche'schen Ellipsoide Veranlassung geben.

Behandlung der 2. Klasse.

Beschäftigen wir uns jetzt mit den Polynomen der zweiten Klasse.

Wir differenzieren (25) aus:

$$\frac{\delta F}{\delta \varepsilon} = -2 \frac{S R}{R R_1} \cdot \frac{1}{(R_1)^2} \left[\frac{\delta R}{\delta \varepsilon} R_1 - \frac{\delta R_1}{\delta \varepsilon} R \right] \quad (29)$$

Sei zur Abkürzung:

$$\mathcal{F} = \frac{\delta R}{\delta \varepsilon} R_1 - \frac{\delta R_1}{\delta \varepsilon} R \quad \frac{\delta F}{\delta \varepsilon} = -\frac{2S}{(R_1)^2} \cdot \mathcal{F} \quad (30)$$

Differenziert man hier nochmals, so ergibt sich:

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varepsilon} = \frac{\delta^2 R}{\delta \varepsilon^2} R_1 - \frac{\delta^2 R_1}{\delta \varepsilon^2} R$$

Nun lautete Gleichung (16):

$$\frac{\delta^2 R}{\delta \varepsilon^2} = [n(n+1)\varrho^2 - B] R$$

Für R_1 hat B den Wert c^2 , wie eine leichte Rechnung lehrt. Es ist daher:

$$\frac{\delta^2 R_1}{\delta \varepsilon^2} = [1 \cdot 2 \varrho^2 - c^2] R_1$$

und hiermit:

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varepsilon} = R R_1 \{ \varrho^2 [n(n+1) - 2] - B + c^2 \} \quad (31)$$

Man erkennt aus diesem Ausdruck, dass \mathcal{F} , wenn wir den Fall $n = 1$ vorerst ausschliessen, entweder immer zunimmt, oder für kleineres ϱ ab- und nur für grösseres zunimmt.

Die Gleichung (30) lässt sich auch in der Form schreiben:

$$\mathcal{F} = \sqrt{\varrho^2 - b^2} \cdot \varrho^2 - c^2 \left(\frac{\delta R}{\delta \varrho} \sqrt{\varrho^2 - b^2} - R \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}} \right)$$

Da wir es mit einem Polynom R der zweiten Klasse zu thun haben, welches den Faktor $\sqrt{\varrho^2 - c^2}$ nicht enthält, bleibt $\frac{\delta R}{\delta \varrho}$ für $\varrho = c$ endlich und es folgt:

$$\text{Für } \varrho = c = 1: \mathcal{F} = 0$$

Andererseits folgt für sehr grosses ϱ mit Hülfe von (27):

$$\mathcal{F} = \varrho^{n+2} (n-1)$$

Es ist also \mathcal{F} für grosses ϱ (den Fall $n = 1$ wieder ausgeschlossen) positiv. Wir erkennen daher, dass \mathcal{F} von $\varrho = 1$ an entweder immer positiv oder anfangs negativ und erst für grösseres ϱ positiv ist. Da aber $\frac{\delta F}{\delta \varepsilon}$ nach (30) stets das entgegengesetzte Zeichen, wie \mathcal{F} , hat, so folgt, dass F mit wachsendem ϱ entweder immer abnimmt oder anfangs zu und dann abnimmt. Wie wir aber oben gesehen haben, ist F für grosses ϱ positiv und hat stets dasselbe Zeichen wie der Stabilitätskoeffizient $1 - s$, womit wir zu dem Resultat gelangen:

Satz II. »Ein Stabilitätskoeffizient, der aus einem Polynom der zweiten Klasse entspringt, ist entweder stets positiv oder er ist negativ, solange ϱ kleiner — positiv, sobald ϱ grösser als ein bestimmter Wert ist.«

Es ist noch speziell der Fall $n = 1$ zu berücksichtigen, den wir bisher ausgeschlossen hatten. Für $n = 1$ existieren drei Lamé'sche Polynome: ϱ , $\sqrt{\varrho^2 - b^2}$ und $\sqrt{\varrho^2 - c^2}$, von welchen offenbar nur das Polynom ϱ zur zweiten Klasse gehört. Bildet man nach (18) die zu ϱ gehörende Lamé'sche Funktion:

$$\eta = l \frac{\mu \cdot \nu}{P}$$

oder mit Hülfe von (13):

$$\eta = l x \frac{b c}{\varrho P}$$

oder nach (21):

$$\eta = H \cos(n, x)$$

wo H eine gewisse Konstante bedeutet, und bringt nun an das betreffende Ellipsoid die Deformation:

$$\zeta = \eta \cdot y = y H \cos(n, x)$$

an, so bedeutet diese Deformation, wie man geometrisch sofort sieht, nichts anderes, als eine Verschiebung des ganzen Ellipsoids längs der x -Axe um die Strecke $y H$. Nun hatten wir aber oben hervorgehoben, dass wir den Anfang des Koordinatensystems in den Schwerpunkt der Mondmasse legen wollten, und dass wir daher nicht die Masse so verschieben oder deformieren dürfen, dass ihr Schwerpunkt aus dem Nullpunkt herausfällt; wir müssen also den Koeffizienten y dieser Orthogonalfunktion gleich null setzen, womit der zugehörige Stabilitätskoeffizient aus dem Ausdruck der Energie verschwindet und seine Untersuchung überflüssig wird.¹⁾

¹⁾ Den Fall $n = 0$ haben wir mit Stillschweigen übergangen. In der That gehört zu $n = 0$ nur das eine Lamé'sche Polynom:

$$R_0 = \text{const.}$$

welches zu der Orthogonalfunktion:

$$\eta_0 = l \cdot \text{const. führt. Bildet man hiermit aber die Deformation:}$$

$$\zeta = \eta_0 y_0$$

so würde diese Deformation, da sie auf der ganzen Oberfläche einerlei Zeichen hat, eine Vermehrung oder Verminderung der Mondmasse bedeuten. Die Unveränderlichkeit der Masse erfordert also, dass man $y_0 = 0$ setze, womit diese Orthogonalfunktion

Reihenfolge des Negativwerdens. Es hat sich eben ergeben, dass ein Stabilitätskoeffizient zweiter Klasse, wenn man sich auf einer Parallelen zur q -Achse von unendlichem q nach $q = 1$ hin bewegt, entweder stets positiv bleibt oder einmal ins Negative übergeht. Es lässt sich entscheiden, welcher von den verschiedenen Stabilitätskoeffizienten hierbei zuerst negativ werden muss, wofür überhaupt auf der betreffenden Linie $b = \text{const.}$ einer negativ wird.

Seien R und R' zwei Polynome zweiter Klasse, S und S' die zugehörigen zweiten Integrale der Lamé'schen Differentialgleichung. Man betrachte die Stabilitätskoeffizienten:

$$1 - s = 1 - \frac{R S}{R_1 S_1} \quad \text{und} \quad 1 - s' = 1 - \frac{R' S'}{R_1 S_1}$$

Ihre Differenz ist:

$$(1 - s') - (1 - s) = \frac{R^2}{R_1 S_1} \left\{ \frac{S}{R} - \frac{S'}{R'} \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \right\} \quad (32)$$

Sei:

$$G = \frac{S}{R} - \frac{S'}{R'} \left(\frac{R'}{R} \right)^2 \quad (1 - s') - (1 - s) = \frac{R^2}{R_1 S_1} \cdot G$$

G hat stets dasselbe Vorzeichen, wie die Differenz $(1 - s') - (1 - s)$. Man kann nun G genau so behandeln, wie in den Gleichungen (20)–(31) F behandelt wurde, findet also:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = - \frac{2 S'}{(R')^3} \left[\frac{\partial R'}{\partial t} R - \frac{\partial R}{\partial t} R' \right]$$

und wenn man:

$$L = \left[\frac{\partial R'}{\partial t} R - \frac{\partial R}{\partial t} R' \right] \quad \frac{\partial G}{\partial t} = - \frac{2 S'}{(R')^3} L \quad (33)$$

setzt und L differenziert:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial^2 R'}{\partial t^2} R - \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} R'$$

Es möge nun R zum Index n , R' zum Index n' gehören, sei also:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = [n(n+1)q^2 - B] R$$

$$\frac{\partial^2 R'}{\partial t^2} = [n'(n'+1)q^2 - B'] R'$$

Dann findet man:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = R R' \{ q^2 [n'(n'+1) - n(n+1)] - (B' - B) \} \quad (34)$$

Diesen Ausdruck wollen wir nicht nur für Werte von q zwischen $q = 1$ und $q = \infty$, sondern auch für Werte zwischen $q = b$ und $q = 1$ untersuchen. Man kann L in der Form schreiben:

$$L = \sqrt{q^2 - b^2} \cdot q^2 \cdot c^2 \left[\frac{\partial R'}{\partial q} R - \frac{\partial R}{\partial q} R' \right]$$

Da R und R' Polynome zweiter Klasse sind, welche weder den Faktor $\sqrt{q^2 - b^2}$ noch den Faktor $\sqrt{q^2 - c^2}$ enthalten, ist sowohl für $q = b$ als für $q = c$:

$$L = 0$$

verschwindet. Da man ferner leicht zeigt, dass keine andere Fundamentaldetermination die Mondmasse um Größen von der Ordnung der v_1 ändert, so ist hiermit die Befugung der Unveränderlichkeit der Masse soweit berücksichtigt, als es unsere Theoreme, die ja nur über die Glieder erster und zweiter Ordnung in der Energieentwicklung spezielle Voraussetzungen machen, erfordern.

Wenn aber L an den Endpunkten einer Strecke Null ist, muss dazwischen sein Differentialquotient einmal sein Zeichen wechseln. R und R' sind für $\varrho > b$ stets positiv, weil alle Wurzeln eines Polynoms zweiter Klasse unter b liegen, es bleibt daher nichts anderes übrig, als dass der Klammerausdruck in (34) zwischen $\varrho = b$ und $\varrho = 1$ sein Zeichen wechsle.

Das ist das Resultat, das aus der Betrachtung von L zwischen $\varrho = b$ und $\varrho = 1$ gewonnen werden sollte. Wir beschränken uns jetzt wieder auf Werte $\varrho > 1$, die allein Ellipsoide liefern. Es sei:

$$n' > n \quad 35)$$

Da der Klammerausdruck in (34) sein Zeichen überhaupt nur einmal wechseln kann und dieser Wechsel zwischen $\varrho = b$ und $\varrho = 1$ stattfinden muss, bleibt er für $\varrho > 1$ stets von einerlei Zeichen und zwar von positivem, weil er nach der Festsetzung (35) für sehr grosses ϱ positiv wird. Es nimmt also L mit ϱ ständig zu und da es für $\varrho = 1$ null wird, so ist es beständig (für $\varrho > 1$) positiv. Hiermit liefert (33), dass G mit wachsendem ϱ ständig abnimmt. Für grosses ϱ ist aber nahe:

$$R = \varrho^n \quad S = \varrho^n \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\delta \varrho}{\varrho^{2n+2}} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{\varrho^{n+1}}$$

$$R' = \varrho^{n'} \quad S' = \frac{1}{2n'+1} \cdot \frac{1}{\varrho^{n'+1}}$$

mithin:

$$G = \frac{1}{\varrho^{2n+1}} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n'+1} \right)$$

Es ist also nach (35) für grosses ϱ G positiv und, da es mit wachsendem ϱ ständig abnehmen soll, überhaupt positiv. Aus (32) erhalten wir das Ergebnis:

Satz III. »Die Differenz der Stabilitätskoeffizienten zweiter Klasse $(1-s') - (1-s)$ ist positiv, wenn $n' > n$ ist.«

Es gehören somit zum kleinsten n die kleinsten Stabilitätskoeffizienten der zweiten Klasse. Das kleinste n ist, da $n = 1$ nach dem oben Erwähnten nicht vorkommt, $n = 2$. Die zu $n = 2$ gehörigen Lamé'schen Polynome, welche weder den Faktor $\sqrt{\varrho^2 - b^2}$ noch $\sqrt{\varrho^2 - c^2}$ enthalten, sind nach Heine (Handbuch der Kugelfunktionen, 1878, I, pag. 365) die folgenden beiden:

$$R_{2,1} = \varrho^3 - \frac{b^2 + c^2}{3} + \sqrt{\frac{b^4 - b^2 c^2 + c^4}{9}} \quad 36)$$

$$R_{2,2} = \varrho^3 - \frac{b^2 + c^2}{3} - \sqrt{\frac{b^4 - b^2 c^2 + c^4}{9}} \quad 37)$$

Von diesen ist nur das erste ein Polynom zweiter Klasse, da das zweite für $\varrho > b$ verschwindet. Wir wollen kurz:

$$R_{2,1} = \varrho^3 - \gamma = R_2 \quad 38)$$

schreiben und haben das Resultat:

Satz IV. »Von allen Stabilitätskoeffizienten zweiter Klasse ist der aus dem Polynom R_2 hervorgehende, welcher kurz mit $1-s_2$ bezeichnet werden möge, der kleinste; da nun alle Stabilitätskoeffizienten der ersten Klasse positiv sind, so sind überhaupt alle Stabilitätskoeffizienten positiv, solange $1-s_2$ positiv ist. Es sind mithin alle Ellipsoide stabil, für die $1-s_2$ positiv ist, und natürlich alle instabil, für die $1-s_2$ negativ ist. Die Stabilität hängt allein vom Vorzeichen von $1-s_2$ ab.«

Hiermit ist die Diskussion der Stabilitätskoeffizienten beendet, soweit sie für unsere Zwecke nötig sein wird. Denn es wird nicht erforderlich sein, unserem ursprünglichen Vorsatz gemäss in der oben eingeführten Ebene die Gebiete abzugrenzen, in denen $1 - s_2$ positiv resp. negativ ist, und den Verlauf der die Roche'schen Ellipsoide darstellenden Kurve C durch diese Gebiete zu verfolgen, weil wir über das Verhalten von $1 - s_2$ in der Reihe der Roche'schen Ellipsoide leichter Aufklärung gewinnen durch eine

e) Uebertragung des Theorems der zwei Arme (§ 4 f. a) auf den vorliegenden Fall.

Wie dort, so wollen wir uns auch hier die Aufgabe stellen, zu einer gegebenen Gleichgewichtsfigur benachbarte für benachbartes Rotationsmoment gültige zu finden, wobei wir jetzt statt des Rotationsmomentes die Rotationsgeschwindigkeit variieren lassen können. Wir hatten in b) für die Energie den Ausdruck gefunden:

$$U = \text{const.} + Q = \text{const.} - \frac{1}{2} \omega^2 \int dm (3x^2 - z^2) - U_3$$

und für die Aenderung derselben infolge einer Deformation $\zeta = \sum \eta_\lambda y_\lambda$ bei konstant gehaltenem ω ergab sich, wenn wir, wie oben, die auf eine deformierte Figur bezüglichen Grössen mit einem Querstrich versehen:

$$U' - U = \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda' (1 - s_\lambda) + U_3$$

wo wir allerdings die Entwickelbarkeit von U_3 nach Potenzen der y_λ nicht nachgewiesen haben, was aber ganz ähnlich wie in § 3 c) hätte geschehen können. Nun möge ω in ω' übergehen und es sei:

$$\omega' = \omega + \delta\omega \quad \frac{\omega'^2 - \omega^2}{2} = \omega \delta\omega + \frac{\delta\omega^2}{2} = k$$

Alle zu ω' gehörigen Grössen sollen einen Accent erhalten. Es wird dann die Energie der deformierten Figur für das Rotationsmoment ω' :

$$U' = U + \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda' (1 - s_\lambda) + U_3 - k \int dm (3x^2 - z^2)$$

wobei das letzte Integral über die deformierte Masse zu erstrecken ist. Sei:

$$H = \int dm (3x^2 - z^2) \tag{39}$$

wenn man das Integral über die Gleichgewichtsfigur erstreckt, und

$$H = \int dm (3x^2 - z^2) \tag{40}$$

bei der Erstreckung über die deformierte Figur. Man kann ähnlich, wie es oben für I geschah, nachweisen, dass sich H in eine Reihe nach Potenzen der y_λ entwickeln lässt:

$$H = H + \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda y_\lambda + H_2 \tag{41}$$

und gewinnt somit für die Energie den Ausdruck:

$$U' = U + \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda' (1 - s_\lambda) + U_3 - k \left\{ H + \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda y_\lambda + H_2 \right\} \tag{H'}$$

Da dieser Ausdruck in der Form mit dem Ausdruck (H) in § 4 a) übereinstimmt, lassen sich dieselben Folgerungen an ihn knüpfen, man gelangt also, wie in § 4 f. a), zu einem Theorem, das wir unter Hinzuziehung des Resultates von § 4 e. 3. so aussprechen können:

»Wenn für eine singuläre Gleichgewichtsfigur $1 - s_2 = 0$ und das zugehörige B_2 von Null verschieden ist, so gehen von dieser Figur zwei und nur zwei Arme von Gleichgewichtsfiguren aus.

die entweder zu verschiedenen Werten der Rotationsgeschwindigkeit sich erstrecken und dann von gleichem Stabilitätscharakter sind oder zu gleichen Werten der Rotationsgeschwindigkeit sich erstrecken und dann von verschiedenem Stabilitätscharakter sind.«

Berechnung von B_2 . Es zeigt sich nun, dass der Koeffizient B_2 , der zur selben Orthogonalfunktion η_2 gehört, wie der oben ausgezeichnete Stabilitätskoeffizient $1 - s_2$, für alle Roche'schen Ellipsoide von Null verschieden ist.

Nennt man dm ein Teilchen eines Roche'schen Ellipsoid, $d\mu$ ein Teilchen der Massenschicht, durch deren Auflegung es in irgend eine deformierte Figur verwandelt wird, so hat man:

$$\bar{H} = H + \int d\mu (3x^2 - z^2)$$

und man erhält, wenn $d\omega$ ein Oberflächenelement des Ellipsoids, ζ die Dicke der aufliegenden Schicht über diesem Elemente ist, in den Gliedern erster Ordnung richtig:

$$\bar{H} - H = \int d\omega \zeta (3x^2 - z^2)$$

wobei man für $3x^2 - z^2$ den im Oberflächenelement $d\omega$ gültigen Wert benutzen darf. Ist nun ζ nach Orthogonalfunktionen entwickelt:

$$\zeta = \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda} \eta_{\lambda}$$

und entwickelt man ferner:

$$(3x^2 - z^2) = g \cdot \sum C_{\lambda} \eta_{\lambda} \quad 42)$$

und setzt beide Entwicklungen in \bar{H} ein, so erhält man in Folge der Fundamentalgleichungen (E'):

$$H = H + \sum_{\lambda=1}^{\infty} C_{\lambda} y_{\lambda}$$

Die Vergleichung mit (41) lehrt, dass:

$$B_{\lambda} = C_{\lambda} \quad 43)$$

Wir haben daher, um die Grössen B_{λ} zu erhalten, nur die Entwicklung (42) auszuführen, und das geht in diesem Falle sehr einfach. Mit Hülfe der Gleichungen (13) stellen wir die Grösse $3x^2 - z^2$ in elliptischen Koordinaten, als Funktion von μ und ν dar. Man findet sofort, wenn man zur Vereinfachung $c = 1$ setzt:

$$\begin{aligned} 3x^2 - z^2 &= \frac{3\varrho^2 \mu^2 \nu^2}{b^2} - \frac{(\varrho^2 - 1)(\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)}{1(1 - b^2)} \\ &= \mu^2 \nu^2 \left[\frac{3\varrho^2}{b^2} - \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} \right] + (\mu^2 + \nu^2) \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} - \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} \end{aligned} \quad 44)$$

Ferner bilde man nach (18) drei Orthogonalfunktionen. Die erste gehöre zu $n = 0$. Das einzige Lamé'sche Polynom, das zu $n = 0$ gehört, ist aber: $R = 1$. Es ist mithin auch $M = N = 1$ und:

$$\eta_0 = \frac{l}{P_0}$$

Die beiden andern seien diejenigen Orthogonalfunktionen, die aus den in (36) und (37) angeführten Polynomen $R_{2,1}$ und $R_{2,2}$ hervorgehen, deren erstes wir auch kurz als R_2 bezeichnet hatten. Sei also:

$$\begin{aligned} R_2 = R_{2,1} &= \varrho^2 - \gamma & \gamma &= \frac{b^2 + 1}{3} - \sqrt{\frac{b^4 - b^2 + 1}{9}} \\ R_{2,2} &= \varrho^2 - \gamma' & \gamma' &= \frac{b^2 + 1}{3} + \sqrt{\frac{b^4 - b^2 + 1}{9}} \end{aligned} \quad 45)$$

Nach (18) erhält man die zugehörigen Orthogonalfunktionen:

$$\eta_2 = \eta_{2,1} = l \frac{(\mu^2 - \gamma)(\nu^2 - \gamma)}{P_{2,1}} \quad \eta_{2,2} = l \frac{(\mu^2 - \gamma')(\nu^2 - \gamma')}{P_{2,2}}$$

Man bilde nun die Entwicklung:

$$3x^2 - s^2 = g \{ \eta_0 C_0 + \eta_2 C + \eta_{2,2} C' \} \quad (46)$$

Da es sich zeigen wird, dass dieser Ansatz mit den drei Konstanten C_0, C, C' möglich ist, und jede Funktion nach einem bekannten Satze nur auf eine Weise nach Lamé'schen Funktionen entwickelt werden kann, ist dies die gewünschte Entwicklung (42) und die ohne Index gelassene Konstante C liefert nach (43) den gesuchten Koeffizienten B_2 .

Wie oben gezeigt wurde, ist:

$$g l = \text{const.} = K$$

Benutzt man dies, so erhält man aus (44) (45) (46):

$$\begin{aligned} 3x^2 - s^2 &= \mu^2 \nu^2 \left[\frac{3\varrho^2}{b^2} - \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} \right] + (\mu^2 + \nu^2) \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} - \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} \\ &= \frac{K C_0}{P_0} + \frac{K C}{P_{2,1}} (\mu^2 - \gamma)(\nu^2 - \gamma) + \frac{K C'}{P_{2,2}} (\mu^2 - \gamma')(\nu^2 - \gamma') \end{aligned}$$

Sei zur Abkürzung:

$$\frac{K C_0}{P_0} = A_0 \quad \frac{K C}{P_{2,1}} = A \quad \frac{K C'}{P_{2,2}} = A'$$

Die Vergleichung beider Seiten der vorigen Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} \frac{3\varrho^2}{b^2} - \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} &= A + A' \\ \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} &= -A\gamma - A'\gamma' \\ -\frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} &= A_0 + A\gamma^2 + A'\gamma'^2 \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$\begin{aligned} A(\gamma' - \gamma) &= \gamma' \left[\frac{3\varrho^2}{b^2} - \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} \right] + \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} \\ &= \gamma' \cdot \frac{3\varrho^2}{b^2} + \frac{\varrho^2 - 1}{1 - b^2} (1 - \gamma') \end{aligned}$$

Nun findet man leicht aus (45):

$$1 - \gamma' = \frac{2 - b^2}{3} - \sqrt{\left(\frac{2 - b^2}{3}\right)^2 - \frac{1 - b^2}{3}}$$

und der Wert dieses Ausdrucks liegt offenbar, weil $b < c$ ist und c gleich 1 gesetzt wurde, jedenfalls zwischen den Grenzen 0 und $\frac{2}{3}$. γ' selbst liegt mithin jedenfalls zwischen den Grenzen

$\frac{1}{3}$ und 1. Es folgt, dass der Ausdruck $A(\gamma' - \gamma)$ stets positiv und von Null verschieden ist, und hieraus, dass auch C und B_2 stets von Null verschieden sind.

Wir erhalten das Resultat: B_2 ist für jedes Roche'sche Ellipsoid von Null verschieden.

f) Schlussanwendung.

Wir wissen somit, dass wir das Theorem der zwei Arme auf jedes Roche'sche Ellipsoid anwenden können, das durch Verschwinden von $1 - s_2$ singulär ist.

Erinnern wir uns noch einmal daran, dass die Reihe der Roche'schen Ellipsoide aus zwei Teilreihen — die wir aber der Kürze wegen auch als Reihen schlechthin bezeichnen werden — besteht, einer aus weniger abgeplatteten und einer aus stärker abgeplatteten und länglicheren Ellipsoiden gebildeten, und dass diese beiden Teilreihen sich in einem zur maximalen Rotationsgeschwindigkeit ω_0 gehörigen Ellipsoid E_0 vereinigen.

Beginnen wir jetzt die Reihe der Roche'schen Ellipsoide von der zu unendlich kleiner Rotationsgeschwindigkeit gehörenden Kugel an zu grösserer Rotationsgeschwindigkeit und stärker abgeplatteten Formen hin zu durchlaufen, so ist anfangs, für kugelnaher Formen, $1 - s_2$ positiv. Wenn man nun an ein Ellipsoid kommt, für das $1 - s_2$ null wird, so können von diesem Ellipsoid nur zwei Arme von Gleichgewichtsfiguren ausgehen. Diese beiden Arme kennen wir aber, es sind die Fortsetzungen der Roche'schen Reihe von diesem Ellipsoid aus zu grösserer und kleinerer Rotationsgeschwindigkeit. Es kann daher nach dem Theorem der zwei Arme von diesem Ellipsoid weder ein Arm neuer Gleichgewichtsfiguren ausgehen, noch an ihm ein Wechsel des Vorzeichens von $1 - s_2$ stattfinden. Geht man über das Ellipsoid hinaus, so ist also $1 - s_2$ beim weiteren Durchlaufen der Roche'schen Reihe wieder eine Zeitlang positiv, kann dann wieder für ein bestimmtes Ellipsoid null werden, aber nicht zu negativem Zeichen übergehen, und das setzt sich fort, bis man zur Rotationsgeschwindigkeit ω_0 und an das Ellipsoid E_0 kommt, in welchem sich die Reihe der weniger abgeplatteten Ellipsoide mit der Reihe der stärker abgeplatteten, von dem nadelförmigen Ellipsoid herkommenden, vereinigt. In der ganzen Reihe der weniger abgeplatteten Ellipsoide ist also $1 - s_2$ positiv (höchstens für einige Ausnahmefiguren null), nach Satz IV. sind daher in dieser Reihe auch alle andern Stabilitätskoeffizienten positiv, diese Reihe ist stabil.

Das Ellipsoid E_0 ist notwendig eine singuläre Figur, weil sich in ihm zwei Reihen von Gleichgewichtsfiguren vereinigen, und der Stabilitätskoeffizient, der für es verschwindet, ist kein anderer als $1 - s_2$; denn $1 - s_2$ war in der Reihe der weniger abgeplatteten Ellipsoide bis zu E_0 hin positiv und ein anderer Stabilitätskoeffizient kann nach Satz III. und IV. erst dann null werden, wenn $1 - s_2$ ein Stück weit ins Negative übergegangen ist. Man darf daher das Theorem der zwei Arme auch auf das Ellipsoid E_0 anwenden und findet, da man wieder in den beiden Reihen der weniger und stärker abgeplatteten Roche'schen Ellipsoide zwei von ihm ausgehende Arme kennt, dass sich kein neuer Arm an es anschliesst, dass also E_0 eine Grenzfigur ist, über die hinaus keine sich anschliessenden zu grösserer Rotationsgeschwindigkeit gehörigen Gleichgewichtsfiguren existieren.

Da ferner die von E_0 ausgehenden Arme zu gleicher Rotationsgeschwindigkeit gehören, muss das Vorzeichen von $1 - s_2$ in ihnen verschieden sein, es ist demnach $1 - s_2$ für die ersten an E_0 anschliessenden stärker abgeplatteten Ellipsoide negativ und, da auf ähnliche Weise, wie für die weniger abgeplattete Reihe, folgt, dass es innerhalb der stärker abgeplatteten Reihe sein Zeichen nicht wechseln kann, so muss es in dieser ganzen Reihe negativ bleiben, d. h. die ganze Reihe der stärker abgeplatteten Ellipsoide ist instabil.

In der Reihe der stärker abgeplatteten Ellipsoide können nun vielleicht auch andere Stabilitätskoeffizienten verschwinden und zu Verzweigungen Anlass geben, doch folgt aus unseren früheren Ueberlegungen, dass alle neue Figuren, die man so finden könnte, instabil sind, weil für die betreffende singuläre Verzweigungsfigur jedenfalls $1 - s_2$ negativ ist. Wir verzichten deshalb auf die Untersuchung dieser Möglichkeit und begnügen uns mit dem

Resultat: »Von den Roche'schen Ellipsoiden ist die Reihe der weniger abgeplatteten stabil, die Reihe der stärker abgeplatteten instabil. An die Roche'schen Ellipsoide schliessen sich keine andern, stabilen Gleichgewichtsfiguren an; an die weniger abgeplatteten und die dem Grenzellipsoid E_0 benachbarten stärker abgeplatteten Ellipsoide schliessen sich überhaupt keine andern Gleichgewichtsfiguren an.«

§ 7. Uebergang auf das Problem der Kosmogonie. Resultate.

Die Ergebnisse der beiden vorigen Paragraphen tragen zunächst einen rein mathematischen Charakter und gewinnen einen physikalischen Hintergrund erst infolge der Beziehung der von uns behandelten Aufgabe zum Problem der Kosmogonie. Wie in der Einleitung erwähnt, besteht ein Hauptproblem, das die Laplace'sche Kosmogonie stellt und über dessen Lösung nur Vermutungen existieren, darin, die Gleichgewichtsformen zu verfolgen, die eine kompressible, inhomogene, rotierende Flüssigkeitsmasse bei ihrer allmählichen Abkühlung durchmacht. Als eine erste Annäherung an dieses Problem kann man voraussetzen, dass die Masse inkompressibel und im Anfang überall von gleicher Temperatur und Dichte ϱ sei und dass die Abkühlung durch die ganze Masse gleichmässig erfolge, mithin die Dichte auch späterhin konstant bleibe. Es lässt sich leicht einsehen, dass das Problem in dieser Beschränkung mit der Aufgabe, die wir bisher behandelt haben, übereinstimmt.

Uebergang auf das Problem der Kosmogonie. Man denke sich zwei Flüssigkeitsmassen M_0 und M_1 von kongruenter Begrenzung, M_0 von der Dichte ϱ , M_1 von der Dichte ι . Nennt man Trägheitsmoment und Attraktionsenergie für die erste Masse I_0, V_0 , für die zweite I_1, V_1 , so ist offenbar:

$$M_0 = \varrho M_1 \quad I_0 = \varrho I_1 \quad V_0 = \varrho^3 V_1 \quad 1)$$

Nun ist klar, dass das Stabilitätsprinzip ebenso gut für eine Masse von der Dichte ϱ , wie für eine Masse von der Dichte ι , wie wir das bisher angenommen hatten, gilt; ist daher c_0 das Rotationsmoment der Masse M_0 , so muss für sie die Energie

$$U_0 = \frac{c_0^2}{2I_0} - V_0$$

ein Minimum werden, wenn sie eine stabile Gleichgewichtsfigur bilden soll. Nach (1) wird aber:

$$U_0 = \frac{c_0^2}{2\varrho I_1} - \varrho^3 V_1 = \varrho^3 \left[\frac{c_0^2}{2\varrho^3 I_1} - V_1 \right]$$

Setzt man nun:

$$c_0^2 = \varrho^3 c_1^2 \quad 2)$$

und:

$$U_1 = \frac{c_1^2}{2I_1} - V_1$$

so lautet dieser Ausdruck:

$$U_0 = \varrho^3 \left[\frac{c_1^2}{2I_1} - V_1 \right] = \varrho^3 U_1 \quad 3)$$

Soll also U_0 ein Minimum sein, so muss, da ϱ als konstant zu betrachten ist, auch:

$$U_1 = \frac{c_1^2}{2I_1} - V_1$$

ein Minimum sein, und dies ist nichts anderes als die Stabilitätsbedingung für die Masse M_1 beim Rotationsmoment c_1 . Man gewinnt daher das Resultat:

»Zwei Massen M_1 und $M_0 = \varrho M_1$ von der Dichte ι resp. ϱ haben dieselben Gleichgewichtsformen, wenn zwischen ihren Rotationsmomenten c_1 und c_0 die Relation (2) besteht.«

Es sei M_0 die sich abkühlende und zusammenziehende Flüssigkeitsmasse, die man als Masseneinheit wähle, sei also:

$$M_0 = 1$$

Ist c_0 ihr Rotationsmoment im Anfangszustand, so wird sie, da wir sie uns als im Welt-
raum isoliert vorzustellen haben, dieses Rotationsmoment stets beibehalten, c_0 ist daher als gegebene
Konstante zu betrachten. Auch sei die Dichte im Anfangszustand 1. Statt die Gestalten dieser
Masse zu betrachten, wird man also auch die Gestalten verfolgen können, die eine allmählich
abnehmende Masse:

$$M_1 = \frac{1}{\varrho}$$

bei abnehmendem Rotationsmoment:

$$c_1^2 = \frac{c_0^2}{\varrho^3}$$

durchläuft.

Um ganz auf die frühere Aufgabe (konstante Masse 1 von der Dichte 1 bei wechselndem
Rotationsmoment) zurückzukommen, bedenke man, dass eine Massenordnung Gleichgewichtsfigur
war, wenn auf ihr das Potential:

$$\frac{\omega^2}{2} r^2 + \int \frac{dm}{r}$$

konstant war, und dass, da alle Glieder dieses Ausdrucks in Längengrößen von der zweiten
Dimension sind, diese Eigenschaft erhalten bleiben wird, wenn man die Figur, ohne Aenderung
von Dichte und Rotationsgeschwindigkeit, in irgend einem Massstab vergrößert oder verkleinert.

Man vergrößere nun die Masse M_1 in jeder Richtung im linearen Verhältnis $p:1$, bis die
Masse der entstehenden Anordnung, welche M heissen soll, 1 wird. Es ist dann:

$$p^3 M_1 = M = 1 \quad p^3 = \varrho \quad 4)$$

Rotationsmoment, Trägheitsmoment, Energie und Potential auf sich selbst der Massenordnung M
sei c , I , U und V . Beachtet man die Dimensionen in Längengrößen und lässt beim Uebergang
von M_1 auf M die Dichte und ω unverändert, so erhält man:

$$I = p^5 I_1 \quad V = p^5 V_1 \quad U = p^5 U_1 \quad c = p^5 c_1 \quad 5)$$

Es hat also die Masse M beim Rotationsmoment c dieselbe, nur im Verhältnis $\frac{p}{1}$ vergrößerte Gestalt,
wie die Masse M_1 beim Rotationsmoment c_1 , wenn die Beziehung $c = p^5 c_1$ erfüllt ist.

Aus (1), (2), (3), (4) und (5) erhält man leicht:

$$c = \sqrt{p} c_0 \quad I = p^2 I_0 \quad V = \frac{V_0}{p} \quad U = \frac{U_0}{p} \quad 6)$$

Geht man jetzt von M_0 direkt auf M über, so hat man den Satz:

»Eine Masse 1 von der Dichte $\varrho = p^3$ hat beim Rotationsmoment c_0 dieselben, nur im
Verhältnis $\frac{1}{p}$ verkleinerten, Gleichgewichtsgestalten, wie eine Masse 1 von der Dichte 1 beim
Rotationsmoment c , wenn die Beziehung:

$$c = \sqrt{p} c_0$$

besteht.«

Hiermit ist die Erkenntnis gewonnen, dass man, statt der Gleichgewichtsfiguren einer sich
abkühlenden Masse 1 von wachsender Dichte ϱ und konstantem Rotationsmoment c_0 , ebenso gut
die Gleichgewichtsfiguren einer Masse 1 von konstanter Dichte 1 und wachsendem Rotationsmoment:

$$c = \sqrt{\varrho} c_0 \quad 7)$$

verfolgen konnte.

Resultate: Denken wir uns daher an Stelle des Rotationsmomentes c nach (7) die Dichte ρ als unabhängige Variable in den früheren Sätzen eingeführt und erinnern wir uns, dass von all den verschiedenen Ellipsoiden und den von Herrn Poincaré entdeckten andern Gleichgewichtsfiguren nur eine einzige kontinuierliche Reihe stabiler Figuren übrig blieb, so haben wir unter der einen Voraussetzung, dass die Reibung in der Flüssigkeit hinreichend stark sei, um die ganze Masse nach jeder Veränderung der Temperatur wieder in relativem Gleichgewicht zur Ruhe zu bringen, bevor die Temperatur merklich weiter sinkt, die Notwendigkeit des folgenden Prozesses bewiesen:

Eine ursprünglich langsam rotierende nahezu kugelförmige Flüssigkeitsmasse plattet sich mit zunehmender Kontraktion zunächst zu einem Revolutionsellipsoid ab, dessen Abplattung dann immer stärker wird, bis das Axenverhältnis den Betrag $1:0,5827$ erreicht.

Sinkt die Temperatur ein wenig weiter, so verliert die Masse auf den geringsten Anstoss die Revolutionsform und geht in ein Jacobi'sches Ellipsoid über. Ohne jeden Stoss hat sie natürlich keinen Grund, die Rotationsform zu verlassen, und dieser Umstand ist es, welcher Jacobi und vielen anderen das Auftreten dieser nicht-rotatorischen Gleichgewichtsfiguren so merkwürdig erscheinen liess, weil es zunächst dem Satz vom zureichenden Grund zu widersprechen scheint, dass eine Rotationsfigur, deren Meridiane alle gleichberechtigt sind, jemals die Rotationsform verlieren sollte. In der That muss eine kleine Unregelmässigkeit, wie sie in der Natur immer vorhanden ist, hinzukommen, um das Verlassen der Rotationsform herbeizuführen, und dabei bleibt es noch der Natur dieser Unregelmässigkeit oder, wie man von nicht näher bekannten Ursachen zu sagen pflegt, dem Zufall überlassen, welche Stelle des Aequators sich zum Scheitel der grossen Axe des Jacobi'schen Ellipsoides ausbildet.

Bei weiterer Kontraktion durchläuft dann die Masse die Reihe der Jacobi'schen Ellipsoide bis zu dem oben als E_2 bezeichneten Ellipsoid. Was hier geschieht, wissen wir noch nicht genau. Wahrscheinlich tritt ein kleinerer Teil der Masse, wie es wieder der Zufall will, am einen oder andern Ende der grossen Axe aus der ellipsoidischen Form heraus, und die ganze Masse nimmt die birnförmige Gestalt der Poincaré'schen Figuren an, worauf eine stärkere und stärkere Einkerbung und vermutlich zuletzt eine Spaltung der Masse in zwei ungleiche Teile erfolgen wird. Es ist aber auch möglich, dass mit dem Ellipsoid E_2 die stabilen Gleichgewichtsfiguren überhaupt aufhören, dann wird bei weiterem Sinken der Temperatur auf einen geringen, in der Natur stets vorhandenen Anstoss hin die ganze Masse in Wallung geraten, was schliesslich auch zur Spaltung in mehrere Teile führen muss.

Herr Poincaré hält es für zu gewagt, aus dieser Geschichte einer stets homogen bleibenden Masse auf die Umgestaltung des von vornherein inhomogenen Laplace'schen Nebels schliessen zu wollen. Denkt man aber nicht an eine Gasmasse, sondern an eine Flüssigkeit, die auch bei verschwindendem Druck an der Oberfläche stets eine endliche Dichte behält, wie sie die Erde zu einer gewissen Epoche gewesen sein mag, so darf man folgern, dass auch eine solche Flüssigkeit bei zunehmender Kontraktion einmal die Rotationsform verlieren und sich schliesslich spalten wird.

Das Ergebnis von § 6. bedarf keiner weiteren Uebertragung, es lässt unmittelbar erkennen, dass es keine kontinuierliche Reihe stabiler Gleichgewichtsfiguren giebt, die ein sehr kleiner Mond vom Kontakt mit dem Hauptkörper an bis zu grösserer Entfernung von demselben, sich stetig deformierend und zuletzt in eine Kugel übergehend, durchlaufen könnte, dass eine solche Reihe, nämlich die der weniger abgeplatteten Roche'schen Ellipsoide, erst in der Entfernung:

$$D = 2,44 R \sqrt[3]{\rho}$$

(R Radius, ρ Dichte des Hauptkörpers, die des Mondes gleich 1 gesetzt) vom Hauptkörper ansetzt und dass mithin ein kleiner Mond, wenn er überhaupt durch Abtrennung vom Hauptkörper entstanden ist, eine Periode stürmischerer Entwicklung durchgemacht haben muss, die nicht unserer statischen Betrachtung von Gleichgewichtsfiguren, sondern nur einer dynamischen Untersuchungsmethode zugänglich ist.

Neu ist an diesem Ergebnis die exakte Festsetzung der unteren Grenze D der Entfernung vom Hauptkörper, von welcher an erst eine stetige Entwicklung eines sehr kleinen Mondes möglich ist, und der Nachweis, dass diese stetige Entwicklung die Formen der weniger abgeplatteten Roche'schen Ellipsoide durchläuft. Man darf hier von »Entwicklung« sprechen, weil nach Herrn G. H. Darwin's bekannten Sätzen jeder Mond sich in Folge der Flutreibung bei geeigneten Anfangsbedingungen wirklich allmählich vom Hauptkörper entfernen muss.

Hingegen ist schon von Herrn Darwin in seiner Abhandlung: *On Figures of Equilibrium of Rotating Masses of Fluid* (Trans. of the Roy. Soc. of London, 1887) gezeigt worden, dass ein sehr kleiner Mond nicht in unmittelbarer Nähe des Hauptkörpers in stabilem Gleichgewicht sein kann, dass also eine derartige Grenze D überhaupt existiert.

Ein Ausblick auf die Punkte, welche zukünftige Forschung zunächst zu erledigen haben wird, soll die Betrachtungen schliessen.

Die Natur selbst lehrt uns, dass es für einen Mond von beliebiger Grösse in hinreichender Entfernung vom Hauptkörper Formen stabilen Gleichgewichts giebt. Denkt man sich dazu den Hauptkörper so rotierend, dass er dem Mond immer dieselbe Seite zukehrt, ferner beide Körper von der Dichte 1 und die Summe ihrer Massen gleich 1, so hat man Gleichgewichtsformen des ganzen früher betrachteten Systems vor sich, welche, wie man sich leicht ausrechnet, bei genügender Vergrösserung des Mondabstandes zu viel grösserem Rotationsmoment als die früher betrachteten Ellipsoide und Poincaré'schen Figuren gehören. Dabei ist das merkwürdige, dass hier zu jedem festen Werte des Rotationsmomentes eine unendliche Reihe sich aneinander anschliessender, wesentlich verschiedener Figuren gehört, je nach dem Verhältnis, in welchem man die Masse des ganzen Systems auf Hauptkörper und Begleiter verteilt. Es ist nun zu entscheiden zwischen folgenden drei Möglichkeiten, in denen der Uebergang von den ellipsoidischen Figuren zu diesen Gleichgewichtsformen erfolgen könnte.

Zunächst kann es der Fall sein, dass ein stabiler Uebergang überhaupt nicht existiert. Wir haben gesehen, dass dieser Fall jedenfalls für einen sehr kleinen Mond eintritt. Herr Darwin ist in der erwähnten Arbeit zu dem Resultat gelangt, dass dasselbe auch für Monde bis zu etwa $\frac{1}{30}$ der Masse des Hauptkörpers gültig bleibt, während er für ein grösseres Massenverhältnis sich einen Uebergang durch nach Art der Poincaré'schen Figur eingekerbte Gleichgewichtsformen, die freilich auch nicht stabil zu sein brauchten, vorstellt. Unter allen Umständen wäre ein stabiler Uebergang ausgeschlossen, wenn es sich zeigen sollte, dass die Poincaré'schen Figuren instabil sind, was die Wichtigkeit der Untersuchung dieses Punktes besonders hervortreten lässt. Die Art und Weise, wie sich die Flüssigkeit spaltet, und das schliessliche Massenverhältnis der Teilkörper wäre dann jedes Mal (unter andauernder Beschränkung auf homogen bleibende Massen) von der Schnelligkeit der Temperaturänderung und der Stärke der inneren Reibung abhängig.

Dann könnte auch, wenn die Poincaré'schen Figuren stabil sind, sich an diese Figuren in der Art der oben behandelten Verzweigungen ein neuer Arm stabiler Figuren mit stärkerer und stärkerer Einschnürung und so fort bis zu schliesslicher Trennung anschliessen, so dass zu jedem Werte des Rotationsmomentes nur eine stabile Gleichgewichtsform gehörte, in welchem Falle sich ein ganz bestimmtes Verhältnis zwischen der Masse des Mondes und des Hauptkörpers als notwendiges Resultat der Entwicklung ergeben würde.

Und schliesslich könnte für irgend eine singuläre Figur in der Poincaré'schen oder erst in einer an diese anschliessenden Reihe eine Verzweigung mit mehreren verschwindenden Stabilitätskoeffizienten, wie wir sie oben nicht betrachtet haben, eintreten, wobei von dieser Figur unendlich viele verschiedene Reihen neuer Gleichgewichtsfiguren ausgingen, die zu allen möglichen Werten des Massenverhältnisses (aber nach Herrn Darwins Resultat oberhalb des Wertes $\frac{1}{30}$) führten, und von denen die wirkliche Masse nach dem Gebote des Zufalls die eine oder andere durchlaufen würde.

Berichtigung.

Zu Seite 239. Die 3. Bemerkung hat zu lauten: U_0 soll nur dann für eine bestimmte Gleichgewichtsfigur als Minimum bezeichnet werden, wenn es für jede nicht zu grosse endliche Deformation der Gleichgewichtsfigur um eine endliche Grösse wächst. Den Fall, dass U_0 für eine ganze Reihe sich an die Gleichgewichtsfigur anschliessender Massenanordnungen, welche dann auch Gleichgewichtsfiguren sein werden, denselben Minimalwert behält, schliessen wir hier aus, weil er sich allgemein schwer behandeln lässt, hingegen in künftigen Beispielen durch die unmittelbare Anschauung erledigt wird.

Zu Seite 241. Anmerkung ¹⁾. Zeile 1-4 ersetze durch: Man könnte zunächst vermuten, dass vielleicht die Flüssigkeit von dem eben angegebenen Anfangszustand aus, wie ein freier fester Körper, eine Poincaré'sche Präzessionsbewegung auszuführen im Stande sei. Man erinnere sich aber an den Helmholtz'schen Satz, dass in einer homogenen inkompressibeln Flüssigkeit unter dem Einfluss von Kräften, die ein Potential haben, Teilchen, die einmal auf einer Wirbellinie lagen, stets auf einer solchen bleiben, und bedenke, dass für den eben betrachteten Anfangszustand alle Wirbellinien Parallele zur Rotationsaxe sind. Man erinnere sich ferner an den bekannten Satz der Mechanik, dass ein unveränderlicher Körper nur dann um eine relativ zu ihm selbst feste Axe rotieren kann, wenn die Richtung dieser Axe auch im Raume festliegt. In Zeile 5 streiche: behält.

Zu Seite 249. Ersetze V durch $2V$.

Zu Seite 250. In Zeile 2 und 7 ersetze: V durch $2V$, in Zeile 15: T durch $-T$, in Zeile 17: V durch $-2V$, in Zeile 31: V durch $-2V$.

Zu Seite 252. In Zeile 24 ersetze $V - V$ durch $2(V - V)$.

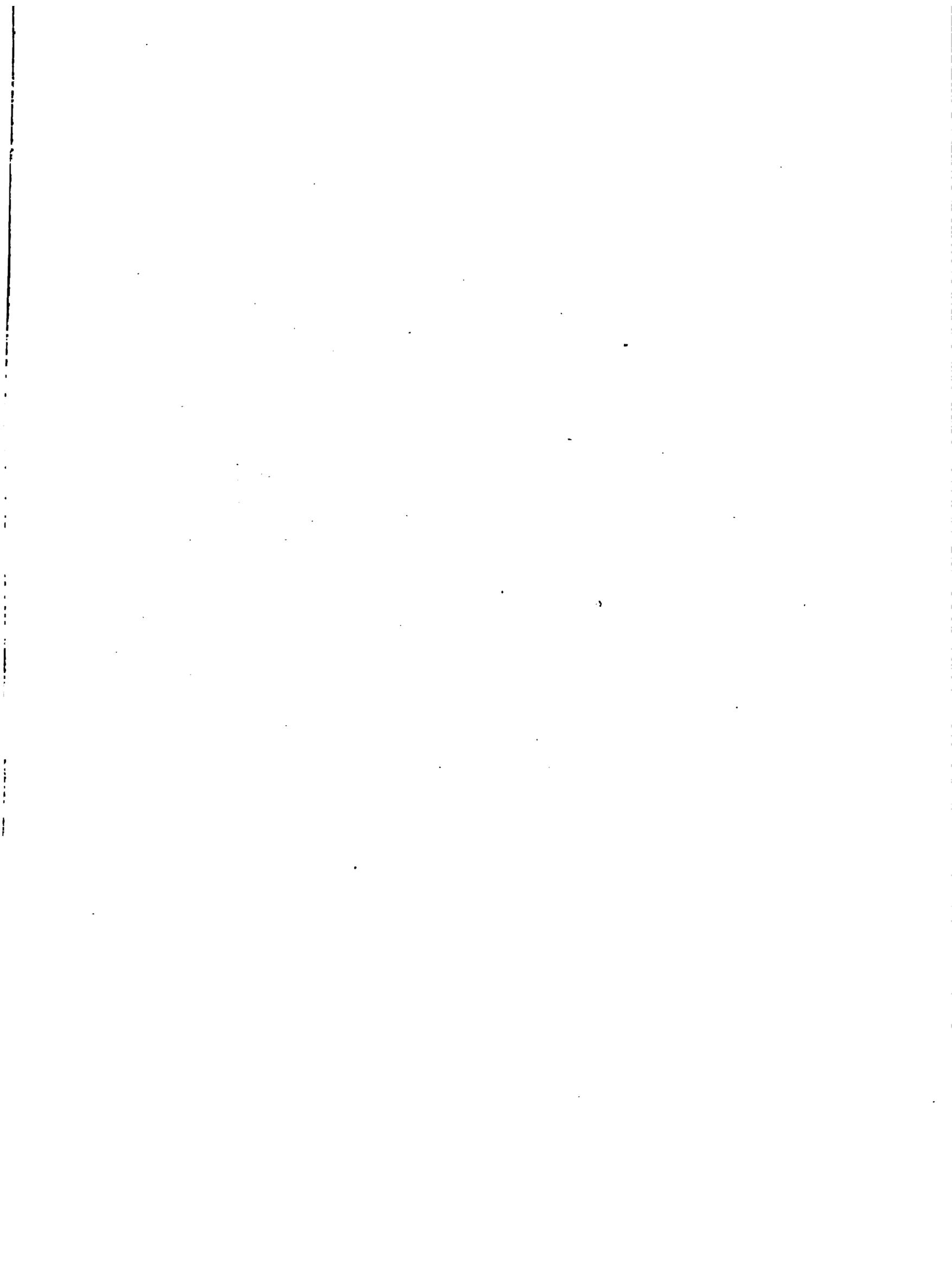
INHALTSVERZEICHNIS.

I. Teil. Prinzipien.

| | Seite |
|--|-------|
| § 1. Einleitendes | 234 |
| § 2. Das Stabilitätsprinzip | 236 |
| Kinetische und potentielle Energie einer Flüssigkeitsmasse | 237 |
| Das Stabilitätsprinzip | 238 |
| Beweis desselben | 239 |
| § 3. Ausarbeitung des Stabilitätsprinzips | 241 |
| a) Die Aenderung der Energie bei einer Deformation in erster Näherung | 241 |
| b) Einführung der Orthogonalfunktionen | 244 |
| c) Vollständiger Ausdruck der Energieänderung | 249 |
| d) Endgültige Form des Stabilitätsprinzips | 254 |
| § 4. Die Kontinuität der Gleichgewichtsfiguren | 256 |
| a) Aenderung der Energie bei Aenderung des Rotationsmomentes | 256 |
| b) Beweis eines Hilfssatzes aus § 2 | 257 |
| c) Die Aufgabe, aus einer gegebenen Gleichgewichtsfigur eine ganze Reihe zu finden | 258 |
| d) Aus einer gegebenen Reihe von Gleichgewichtsfiguren neue Reihen zu finden | 261 |
| e) Die Stabilität der neuen Reihen von Gleichgewichtsfiguren | 265 |
| f) Mehr algebraische Behandlung derselben Aufgaben | 268 |

II. Teil. Anwendungen.

| | |
|--|-----|
| § 5. Die Maclaurin'schen und Jacobi'schen Ellipsoide. Die Poincaré'schen Gleichgewichtsfiguren | 272 |
| § 6. Die Gleichgewichtsfiguren eines kleinen Mondes | 276 |
| a) Die Roche'schen Ellipsoide | 276 |
| b) Umformung des Stabilitätsprinzips | 277 |
| c) Einführung der Lamé'schen Funktionen und Bildung der Stabilitätskoeffizienten | 280 |
| d) Diskussion des Vorzeichens der Stabilitätskoeffizienten | 284 |
| e) Uebertragung des Theorems der zwei Arme auf den vorliegenden Fall | 290 |
| f) Anwendung dieses Theorems | 293 |
| § 7. Uebergang auf das Problem der Kosmogonie. Resultate | 294 |
| Berichtigung | 298 |







3 2044 024 201 188

APR 84 1918

WINDENR
DEC 04 1994
CANCELLED

