UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01193885 9

E WISSENSCHAFT
ELDARSTELLUNGEN AUS DER NATUR-
ENSCHAFT UND DER TECHNIK · BD. 38

M. v. LAUE

DIE RELATIVITÄTSTHEORIE

ERSTER BAND

DAS RELATIVITÄTSPRINZIP DER LORENTZTRANSFORMATION

4. AUFLAGE

FRIEDR. VIEWEG & SOHN BRAUNSCHWEIG

2 vols 60 fr

DIE WISSENSCHAFT
Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der Naturwissenschaft und der Technik
Herausgegeben von Prof. Dr. EILHARD WIEDEMANN
BAND 38

Die Relativitätstheorie

Von
Dr. M. von Laue
Professor für theoretische Physik an der Universität Berlin

Erster Band:

Das Relativitätsprinzip der Lorentztransformation

Vierte vermehrte Auflage

Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn
1921

Die Relativitätstheorie

Von

Dr. M. von Laue
Professor für theoretische Physik an der Universität Berlin

Erster Band:

Das Relativitätsprinzip der Lorentztransformation

Vierte vermehrte Auflage

Mit 25 Abbildungen

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TORONTO

Braunschweig
Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn
1921

QC
173
.55
L28
1921
Bd. 1
c. 1
PASC

Alle Rechte vorbehalten.

LIBRARY
JUN 11 1968
UNIVERSITY OF TORONTO

Copyright, 1921, by Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Germany

Vorwort zur ersten Auflage.

In den $5^1/_2$ Jahren, welche seit Einsteins Begründung der Relativitätstheorie vergangen sind, hat diese Theorie in immer-wachsendem Maße Beachtung gefunden. Freilich ist diese Beachtung nicht durchweg Zustimmung. Manche Forscher, darunter auch Träger sehr bekannter Namen, halten ihre empirische Begründung für nicht hinreichend fest. Bedenken dieser Art ist natürlich nur durch weitere Versuche abzuhelfen; immerhin legt das vorliegende Büchlein Wert auf den Nachweis, daß kein einziger empirischer Grund gegen diese Theorie vorhanden ist. Weit größer aber ist die Zahl derjenigen, welche sich mit ihrem gedanklichen Inhalt nicht befreunden können, denen namentlich die Relativität der Zeit mit ihren manchmal in der Tat recht paradox aussehenden Konsequenzen unannehmbar erscheint. Und hier ist vielleicht mit einer zusammenfassenden Darstellung der Theorie gedient, wie sie dies Büchlein geben will.

Freilich ist die einschlägige Literatur schon zu sehr angewachsen, als daß jede Veröffentlichung hätte berücksichtigt werden können. Sollte der Umfang nicht über das beabsichtigte Maß wachsen, so konnten manche wertvolle Untersuchungen nicht oder nur im Ergebnis aufgenommen werden. Dagegen dürfte in den grundlegenden Arbeiten von Einstein, Planck, Minkowski nichts von Belang enthalten sein, was nicht auch in der einen oder anderen

Form in die gegenwärtige Darstellung übergegangen wäre. Eingehend berücksichtigt ist auch der mathematische Ausbau, den in jüngster Zeit Sommerfeld der Theorie gegeben hat. Neu dürfte die Behandlung der Dynamik (Abschnitt VII) sein, bei welcher der Einfluß der elastischen Spannungen auf den Impuls und die Energie, sowie die Transformation der Spannungen von einem Bezugssystem auf das andere in vollster Allgemeinheit untersucht werden.

Bei dem Leser setzt die Darstellung außer dem gebräuchlichen mathematischen Rüstzeug des theoretischen Physikers, der Infinitesimalrechnung und der Vektoranalysis[1]) nur noch eine gewisse Kenntnis der Maxwellschen Theorie voraus, deren wichtigste Gesetze übrigens in § 4 kurz abgeleitet sind. Die von Minkowski eigens für die Relativitätstheorie geschaffenen Methoden dagegen werden in den § 9 bis 13 entwickelt. Dabei habe ich mir, während ich mich sonst streng an die gebräuchlichen Bezeichnungen gehalten habe, manche Neuerung in der Bezeichnungsweise erlaubt. Das dabei zugrunde gelegte System wird, hoffe ich, zur Erleichterung des Verständnisses beitragen.

Bei der Korrektur unterstützte mich in liebenswürdigster Weise Herr Dr. A. Rosenthal, dem ich dafür zu vielem Dank verpflichtet bin.

München, im Mai 1911.

Dr. M. Laue.

---

[1]) Eine kurze Rekapitulation der Vektorrechnung findet sich im Anhang.

Vorwort zur vierten Auflage.

Auch diesmal erscheint das Buch im wesentlichen unverändert. Nur konnte der Versuch von Harress und ebenso die neuen Versuche von Zeeman über den Mitführungskoeffizienten aufgenommen werden. Im Abschnitt über Dynamik sollen ein paar Abänderungen den Anschluß des zweiten Bandes über allgemeine Relativitätstheorie, dessen Vollendung kurz bevorsteht, erleichtern.

In Herrn stud. math. Max Gut fand ich hervorragende Unterstützung beim Lesen der Korrekturen. Ich möchte ihm hier meinen Dank aussprechen, ebenso denjenigen Fachgenossen, die mich brieflich oder mündlich auf Mängel des Buches aufmerksam gemacht haben.

Berlin, Oktober 1920.

M. v. Laue.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort V
Inhaltsverzeichnis IX

I. Die Problemstellung.

§ 1a. Das räumliche Bezugssystem und das Zeitmaß 1
§ 1b. Die Relativitätsprinzipe der klassischen Mechanik und der Elektrodynamik 12
a) Das Relativitätsprinzip der Mechanik 12
b) Das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik 17
§ 2. Die empirischen Grundlagen für die Elektrodynamik bewegter Körper 20
Induktion 20
Wilsonscher Versuch 21
Wienscher Versuch 21
Rowlandscher Versuch 22
Versuche von Röntgen und Eichenwald 22
Fizeauscher und Zeemanscher Versuch 23
Versuche von Sagnac und Harress 25
Aberration 26
Dopplereffekt 27
Michelsonscher Versuch 28
Andere Versuche über den Einfluß der Erdbewegung 31
Dynamik des Elektrons 32

II. Die älteren Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper.

§ 3. Historische Übersicht 34
§ 4. Die Theorie von Heinrich Hertz 35
a) Ruhende Körper 35
b) Bewegte Körper 37
c) Der Wilsonsche Versuch 38
d) Die Röntgen-Eichenwaldschen Versuche 40
e) Der Fizeausche und Michelsonsche Versuch 41
f) Der Induktionsvorgang 42
g) Die Erhaltung des Impulses 42
§ 5. Die Elektronentheorie 44

III. Die Relativitätstheorie, kinematischer Teil.

Seite

§ 6. Die Lorentz-Transformation 48
§ 7. Die Einsteinsche Kinematik 58
§ 8. Minkowskis geometrische Interpretation der Lorentz-Transformation 68
§ 9. Die Lorentz-Transformation als imaginäre Drehung . . . 77

IV. Weltvektoren und -tensoren.

§ 10. Vierer- und Sechservektoren 84
a) Vierervektoren 85
b) Erstes Beispiel: Die Vierergeschwindigkeit 87
c) Zweites Beispiel: Die Viererbeschleunigung 87
d) Singuläre Vierervektoren 90
e) Sechservektoren 91
§ 11. Die algebraischen Vektoroperationen 93
a) Addition und Subtraktion 93
b) Die skalare Multiplikation 93
c) Vektorprodukte 93
§ 12. Vektorielle Differentialoperationen 97
§ 13. Symmetrische Welttensoren 102

V. Die Elektrodynamik des leeren Raumes nach dem Relativitätsprinzip.

§ 14. Die Transformation des elektromagnetischen Feldes im leeren Raume 107
§ 15. Die Transformation der Kraftdichte, Energie- und Impulssatz 112
a) Die Viererkraft 112
b) Der Welttensor T 114
c) Der Energiesatz 115
d) Die Erhaltung des Impulses 115
e) Die Erhaltung des Drehimpulses 118
f) Die Transformation der Energie, des Energiestromes und der Spannungen 119
§ 16. Anwendungen 121
a) Aberration und Dopplersches Prinzip 121
b) Die Reflexion am bewegten Spiegel 124
c) Der Versuch von Sagnac 128
§ 17. Gleichförmige Bewegung geladener Körper 130
a) Das elektromagnetische Feld 130
b) Das Feld eines bewegten Elektrons 131
c) Die Rückwirkung des Feldes auf bewegte Träger von Ladungen 132

Seite

d) Energie und Impuls des Feldes 133
e) Beispiel des kugelförmigen Elektrons 134
§ 18. Die Theorie des Trouton-Nobleschen Versuches 135
a) Berechnung des Drehmomentes aus der Erhaltung des Drehimpulses 135
b) Anschauliche Berechnung des Drehmomentes 136
c) Die am ruhenden Kondensator angreifenden Kräfte . . . 136
d) Die Transformation vom Ruhsystem auf ein anderes Bezugssystem 140
e) Die Stellung der Absoluttheorie zu diesem Versuche . . 142
§ 19. Ungleichförmig bewegte Ladungsträger 143
a) Die Differentialgleichung des Viererpotentials 143
b) Die Integration der Wellengleichung 144
c) Die Formel für das Viererpotential 151
d) Vektorielles und skalares Potential, ausgedrückt durch die Ladungen 154
§ 20. Das Elektron und sein Feld bei der Hyperbelbewegung . . 155
a) Das Viererpotential 157
b) Das elektromagnetische Feld 160
c) Die Rückwirkung des Feldes auf das Elektron 161
d) Näherung für kleine Beschleunigungen 163

VI. Die Minkowskische Elektrodynamik der ponderablen Körper.

§ 21. Die Transformation der Feldgleichungen I bis IV 166
a) Die Feldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ 166
b) Leitungs- und Konvektionsstrom 168
c) Die Invarianz der Elektrizitätsmenge 169
§ 22. Die Transformation der Gleichungen V bis VII 173
a) Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ 173
b) Elektromotorische Kraft und Leitungsstrom 175
§ 23. Anwendungen 176
a) Das Ohmsche Gesetz 176
b) Induktion 177
c) Grenzbedingungen 177
d) Der Wilsonsche Versuch 179
e) Die Versuche von Röntgen und Eichenwald 182
f) Der Fresnelsche Mitführungskoeffizient 182
g) Der Versuch von Zeeman 185
h) Der Versuch von Harress 186
§ 24. Energie und ponderomotorische Kraft 189
a) Die Unzulänglichkeit der Maxwellschen Theorie . . . 189
b) Die Transformation beliebiger ponderomotorischer Kräfte 189

Seite

c) Die Bedeutung der Komponenten des Welttensors T . . 190
d) Anwendung auf die Elektrodynamik 192
e) Die Joulesche Wärme 193
§ 25. Der Strahlungsdruck 196

VII. Dynamik.

§ 26. Allgemeines 202
a) Zweck und Ausgangspunkt der Betrachtungen 202
b) Die Unmöglichkeit des starren Körpers 203
c) Die Zurückführbarkeit der Dynamik auf Gleichung XVI 205
§ 27. Die Dynamik des Massenpunktes 207
a) Die Ableitung der Bewegungsgleichung aus dem Energie-Impulssatz 207
b) Longitudinale und transversale Masse 210
c) Der Energiesatz 211
d) Zurückführung der Masse auf Energie 213
§ 28. Die Grundlagen der Dynamik der Kontinua 214
a) Die Transformation der Energie- und Impulsdichte . . . 214
b) Die absoluten und die relativen (elastischen) Spannungen 216
c) Erörterung von XXVIII 220
§ 29. Beispiele für die quasistationäre, adiabatische, isopicistische Dynamik 222
a) Der Massenpunkt 222
b) Die Dynamik einer elektrisch geladenen Kugel 224
§ 30. Die Erhaltung des Drehimpulses 227
§ 31. Zwei Beispiele für die Erhaltung des Drehimpulses 231
a) Der Winkelhebel 231
b) Der bewegte Stromkreis im elektrischen Felde 233
§ 32. Das vollständige statische System 235
a) Allgemeine Theorie 235
b) Anwendung auf die Dynamik des Elektrons 237
c) Anwendung auf den Winkelhebel 238
d) Der Trouton-Noblesche Versuch 238
§ 33. Thermodynamik 239
a) Transformation der Entropie 239
b) Transformation der Temperatur 241
c) Bestätigung von XXX 242
d) Das dynamische Potential H 244
e) Isotherm-isochore Dynamik 246
f) Das Prinzip der kleinsten Wirkung 246
§ 34. Die Dynamik der Hohlraumstrahlung 250
a) Die Hohlraumstrahlung in Ruhe 251
b) Die Hohlraumstrahlung in gleichförmiger Bewegung . . 253

Seite

c) Isotherm-isochore Dynamik 253
d) Historische Bemerkungen 255
§ 35. Hydrodynamik 255
a) Einleitende Bemerkungen 255
b) Die Kontinuitätsgleichung 256
c) Die Impulsgleichung 257
d) Die Energiegleichung 258
e) Die Webersche Form der Grundgleichungen 259
f) Die Helmholtzschen Wirbelsätze 262
g) Die Eulersche Form der Grundgleichungen 264
h) Ebene Wellen 265
§ 36. Flüssigkeiten geringster Zusammendrückbarkeit 267
a) Die Zustandsgleichung 267
b) Die Grundgleichung 270
c) Stationäre, kräftefreie Bewegung 271
d) Die Ausbreitung unendlich kleiner Störungen 273
e) Ebene Wellen von endlicher Amplitude 274
§ 37. Rückblicke und Ausblicke 276

Anhang.

a) Geometrische Bezeichnungen 279
b) Vektor- und Tensorbezeichnungen 279
c) Die verschiedenen Arten der Zeitdifferentiation 285
d) Bezeichnung und Maßsystem der physikalischen Größen 288
Literatur 291
Zusammenstellung der Hauptformeln 298
Namen- und Sachregister 301

I. Die Problemstellung.

§ 1 a. Das räumliche Bezugssystem und das Zeitmaß.

a) Wenn wir wissenschaftliche Physik treiben wollen, müssen wir uns zunächst in den Stand setzen, Ereignisse der Außenwelt nach Ort und Zeit festzulegen. Dazu dienen uns vier Größenangaben, nämlich drei räumliche Koordinaten und eine Zeitangabe. Damit diese einen Sinn bekommen, müssen wir aber zuvor festsetzen, in welchen Maßen wir messen wollen, was z. B. ein Zentimeter und eine Sekunde ist. Das erstere geschieht so, daß wir an einem Gegenstande, den wir für hinreichend unveränderlich halten, zwei Punkte zeigen, deren Abstand einen Zentimeter beträgt; dieser Gegenstand ist dann unser Maßstab geworden. Beim Zeitmaß liegen die Verhältnisse nicht so einfach; darüber reden wir etwas später noch einmal.

Aber diese Maßeinheiten allein genügen nicht; wenn ich ein Ereignis durch die Zeitangabe „drei Sekunden" festlegen will, so muß ich noch sagen, von welchem anderen Ereignis an ich diese drei Sekunden gezählt habe; ich muß noch den Zeitnullpunkt angeben. Dem entspricht im Raume das Koordinatensystem, welches festgelegt sein muß, damit die Koordinatenangaben einen Sinn erhalten.

Der älteste Zweig der Physik ist die Mechanik, und die einfachste und deshalb älteste Frage der Mechanik geht auf die Bewegung eines Massenpunktes, d. h. auf die Folge von Ereignissen, welche in der Anwesenheit des Massenpunktes an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten besteht; wogegen man Bewegungen festlegt, ist also eine Unterfrage des allgemeinen Problems der Koordinatenwahl.

Nun wollen wir hier sogleich eine neue Bezeichnung einführen. Zunächst ist es im Grunde gleichgültig, welche der verschiedenen

Koordinatenarten wir benutzen, ob rechtwinkelige kartesische oder schiefwinkelige oder gar krummlinige Koordinaten, wie man sie in der Mathematik und der mathematischen Physik häufig mit Vorteil anwendet. Denn man kann derartige Systeme, wenn sie nur gegeneinander ruhen, leicht ineinander umrechnen. Deswegen wollen wir im folgenden, wo immer von Koordinaten die Rede ist, falls nichts anderes gesagt wird, an rechtwinkelige kartesische denken. Aber auch die verschiedenen rechtwinkeligen Koordinatensysteme, welche gegeneinander ruhen, gehen durch einfache Transformationen ineinander über und sind daher ohne weiteres durcheinander ersetzbar. Auch von diesen Unterschieden brauchen wir nicht zu sprechen und beschäftigen uns deshalb stets mit einer Gesamtheit aller gegeneinander ruhenden Koordinatensysteme, die wir ein Bezugssystem nennen. Ein Bezugssystem umfaßt also unendlich viele Koordinatensysteme, ist aber durch irgendein ihm angehörendes Koordinatensystem völlig definiert.

Die Frage nach dem Bezugssystem darf man nicht als eine mathematische Frage betrachten. Die analytische Geometrie kann zu ihren Konstruktionen irgendein beliebiges, gedachtes Koordinatensystem benutzen. In der Physik liegt es anders; wenn wir die Koordinaten eines Ereignisses messen wollen, so müssen wir unseren Maßstab an irgend etwas physikalisch Wirkliches anlegen können; ein physikalisch brauchbares, wirkliches Bezugssystem wäre uns z. B. durch irgendeinen festen Körper gegeben, an dem wir ja die Achsen und Ebenen unseres Koordinatensystems mittels dünner Drähte oder etwas Ähnlichem befestigen können. Es handelt sich also hier um die Auswahl dieses starren Körpers. Aber da sind wir zunächst in großer Verlegenheit. Solange wir von unserem Bezugssystem nichts anderes fordern, als daß es die Grundlage für die räumliche Bestimmung von Ereignissen abgibt, leisten alle möglichen Bezugssysteme dasselbe; es läßt sich kein tieferer Grund für eine bestimmte Wahl denken, sie ist vielmehr völlig in unser Belieben gestellt.

Tatsächlich hat aber doch die Physik ein höheres Forschungsziel, als bloße räumlich-zeitliche Aufzählung von Ereignissen. Sie will die Zusammenhänge zwischen den äußeren Ereignissen in der Form mathematisch auszusprechender Gesetze erkennen; und wir machen sehr leicht die Erfahrung, daß diese Gesetze je nach der Wahl des Bezugssystems recht verschieden ausfallen.

Für die mechanischen Zusammenhänge, die in bezug auf die feste Erdrinde gelten, haben wir ein aus tausendfacher Erfahrung entstandenes Gefühl. Sind wir im fahrenden Eisenbahnzuge, so übertragen wir unwillkürlich dies Gefühl auf ein Bezugssystem, das die Bewegung unseres Abteils mitmacht, und wir wissen, wie sehr uns dies Gefühl täuscht, wenn der Zug anfährt, bremst oder eine Kurve durchläuft. Die Zusammenhänge sind eben in diesem neuen Bezugssystem andere, und zwar weniger einfache.

Damit aber sind wir in die Lage versetzt, der Frage nach dem Bezugssystem einen ganz anderen Inhalt zu geben. Wir streben doch dahin, die mathematische Formulierung der physikalischen Gesetze möglichst einfach zu gestalten, und wir sehen aus der genannten und ähnlichen Erfahrungen, daß wir zu diesem Zwecke unter anderem ein geeignetes Bezugssystem brauchen. Ob wir auf Grund der Einfachheitsforderung zu einer eindeutigen Wahl des Bezugssystems gelangen, oder ob immer noch mehrere gleichwertige Möglichkeiten offen bleiben, ist eine Frage für später. Dies Prinzip der Einfachheit aber ist keineswegs der Grundsatz der Bequemlichkeit — auch das Wort vom „ökonomischen Prinzip in der Wissenschaft“ scheint uns nicht glücklich geprägt — es ist eins der höchsten Forschungsprinzipien in der Naturwissenschaft überhaupt. Wenn es deren Ziel ist, die Ereignisse nach Raum, Zeit und ihren kausalen und ähnlichen Zusammenhängen zu ordnen, so kommt von den verschiedenen Anordnungsarten, welche die verschiedenen denkbaren Bezugssysteme ermöglichen, doch diejenige — oder diejenigen — diesem Ziel am nächsten, welche die Zusammenhänge einfach auszusprechen gestattet.

b) Sehen wir uns nun die verschiedenen Standpunkte an, welche die Wissenschaft zu verschiedenen Zeiten zu der Frage nach dem Bezugssystem eingenommen hat. Der Begründung der Physik ging die Tat des Kopernikus voraus, und diese bestand im Übergang vom geozentrischen zum heliozentrischen Bezugssystem, und ging hervor aus der Bemerkung, daß im letzteren die Bewegung der Planeten — rein geometrisch — einfacher ist als im ersteren. Galilei, der Schöpfer der wissenschaftlichen Mechanik und damit der Physik, hat wohl in der Mechanik stets nur an Vorgänge in der Nähe der Erdoberfläche gedacht und dabei ganz einfach alle Ortsangaben auf die feste Erdrinde bezogen; daß er sich darüber tiefergehende Gedanken gemacht hätte,

ist nicht bekannt. Auch wir befolgen noch heutzutage für irdische Vorgänge meist dasselbe, ja sehr naheliegende Verfahren und wissen, daß wir damit im allgemeinen gut auskommen; nur wenn wir etwa den Foucaultschen Pendelversuch oder die Einstellung des Kreiselkompasses nach der Erdachse erklären wollen, sehen wir, daß sich in diesem Bezugssystem keine einfache Erklärung dafür geben läßt.

Als dann Newton die Mechanik des Planetensystems schuf, kam das irdische Bezugssystem gemäß dem Kopernikanischen heliozentrischen System nicht in Betracht und so stand er wohl als erster vor der grundsätzlichen Frage, woher ein besseres zu nehmen wäre. Auf die Art, wie er sich mit ihr abfand, wollen wir hier einmal etwas näher eingehen; desgleichen, schon um der Analogie willen, auch auf seine Ansichten über die Zeit und das Zeitmaß.

In seinen „*Philosophiae naturalis Principia mathematica*“ (1687) finden wir die folgenden Sätze*):

„Bis jetzt habe ich zu erklären versucht, in welchem Sinne weniger bekannte Benennungen in der Folge zu verstehen sind. Zeit, Raum, Ort und Bewegung als allen bekannt erkläre ich nicht. Ich bemerke nur, daß man gewöhnlich diese Größen nicht anders als in bezug auf die Sinne auffaßt, und so gewisse Vorurteile entstehen, zu deren Aufhebung man sie passend in absolute und relative, wahre und scheinbare, mathematische und gewöhnliche unterscheidet.“

„Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen Gegenstand. Sie wird auch mit dem Namen Dauer belegt.“

„Die relative, scheinbare und gewöhnliche Zeit ist ein fühlbares und äußerliches, entweder genaues oder ungleiches Maß der Dauer, dessen man sich gewöhnlich statt der wahren Zeit bedient, wie Stunde, Tag, Monat, Jahr.“

Dann weiter: „Die natürlichen Tage, welche gewöhnlich als Zeitmaß für gleich gehalten werden, sind nämlich eigentlich ungleich. Diese Ungleichheit verbessern die Astronomen, indem sie die Bewegung der Himmelskörper nach der richtigen Zeit messen. Es ist möglich, daß es keine gleichförmige Bewegung gibt, durch welche die Zeit genau gemessen werden kann. Alle Bewegungen

*) Zitiert nach der Übersetzung bei Mach[3]).

können beschleunigt oder verzögert werden; allein der Verlauf der absoluten Zeit kann nicht verändert werden. Dieselbe Dauer und dasselbe Verharren findet für die Existenz aller Dinge statt; mögen die Bewegungen geschwind, langsam oder Null sein."

Man kann gegen diese Ausführungen viele Bedenken erheben. Wenn man die Zeitdauer irgendeines Vorganges, etwa einer Pendelschwingung, bestimmen will, so vergleicht man sie in letzter Linie mit der Zeitdauer gewisser astronomischer Vorgänge. Daß man diesen Vergleich nicht unmittelbar durchzuführen braucht, sondern ihn auf dem Umwege über andere „Uhren" vornehmen kann, die aber ihrerseits schließlich auf jene astronomischen Vorgänge zurückgeführt sind, daß man ferner zwischen einer Unzahl verschiedenster Uhren die Wahl hat, erweckt leicht den Anschein, als wären alle diese Uhren unwesentlich und man mäße die Pendelperiode unmittelbar „an der Zeit". Wie falsch das ist, zeigt die Annahme, die Veränderungsgeschwindigkeit bei sämtlichen physikalischen Vorgängen (desgleichen auch bei unseren inneren Zuständen, Gedanken und Empfindungen) ginge plötzlich auf die Hälfte herab. Es gäbe dann kein denkbares Mittel, diese Veränderung festzustellen. Es hätte sich dadurch so wenig etwas geändert, daß nicht einmal anzugeben ist, welchen Sinn jene Annahme eigentlich haben soll.

Und doch scheinen uns Newtons Äußerungen in gewisser Beziehung wertvoll. Einmal steckt in seiner absoluten Zeit, welche ohne Beziehung auf irgendeinen Gegenstand verläuft, die Vorstellung, daß der Zeitanschauung etwas von aller Erfahrung Unabhängiges zugrunde liegt — was 100 Jahre später Kant mit voller Klarheit erkannt und bewiesen hat. Sodann aber ist die oben angeführte Bemerkung über die Ungleichheit der natürlichen Tage und die astronomische Verbesserung des Zeitmaßes bemerkenswert. Sie bedeutet doch: Wir haben in der Erddrehung und in gewissen anderen astronomischen Vorgängen zwei verschiedene Zeitmaßstäbe, zwei verschiedene Uhren. Die eine davon erklären wir für ungenau, d. h. im Prinzip für falsch. Warum nicht die andere? Warum dürfen wir uns überhaupt eine Entscheidung darüber anmaßen? Newtons eigene Bemerkungen dazu sind wohl nicht recht klar. Gemeint ist aber sicher das Folgende. Die Astronomen fragen sich: Läßt sich die Ungleichheit der natürlichen Tage einfach erklären, wenn wir die astronomisch

verbesserte Zeit annehmen, oder ist es einfacher, Ungleichmäßigkeiten in jenen astronomischen Vorgängen, die bei Annahme der Erddrehung als Zeitmaß auftreten, zu deuten? Sie entscheiden sich für das erstere. Die Entscheidung fällt also hier nach derselben Forderung einer einfachen Erklärung der Beobachtungen, die wir schon bei der Frage nach dem räumlichen Bezugssystem aufgestellt haben.

Über den Raum sagt Newton: „Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich. Der relative Raum ist ein Maß oder ein beweglicher Teil des ersteren, welcher von unseren Sinnen durch seine Lage gegen andere Körper bezeichnet und gewöhnlich für den unbeweglichen Raum genommen wird.“

„Die absolute Bewegung ist die Übertragung des Körpers von einem absoluten Ort nach einem anderen absoluten Ort, die relative Bewegung die Übertragung von einem relativen Ort nach einem anderen relativen Ort.“

Hier wird nun eine ähnliche Kritik einsetzen, wie bei Newtons Ausführungen über die Zeit. Auch wenn man in dem „absoluten Raum“ eine Vorahnung Kantischer Gedanken sehen will, wird man zugeben müssen, daß er für die Physik völlig nutzlos ist; es ist hier kein Hinweis darauf zu sehen, wie man in ihm ein Bezugssystem anbringen soll, von dem aus man wirkliche Koordinatenmessungen ausführen könnte. Einige Klarheit schaffen auch hier wieder erst die anknüpfenden Äußerungen Newtons, aus denen wir hier einiges anführen:

„Die wirkenden Ursachen, durch welche absolute und relative Bewegungen voneinander verschieden sind, sind die Fliehkräfte von der Achse der Bewegung. Bei einer nur relativen Kreisbewegung existieren diese Kräfte nicht, aber sie sind kleiner oder größer, je nach Verhältnis der Größe der absoluten Bewegung.“

Und dann bringt Newton als Beispiel einen Versuch. Auf einer Achse drehbar steht ein kreiszylindrisches Gefäß mit Wasser; es ist zunächst in (absoluter) Ruhe. Wir setzen das Gefäß in Drehung, während das Wasser zunächst noch in Ruhe bleibt. Die Wasseroberfläche bleibt dann auch noch eben. Allmählich aber geht durch Reibung zwischen dem Gefäß und dem Wasser die Drehbewegung auf das letztere über. Und damit beginnt sich die Fläche zu krümmen, das Wasser steigt an der Gefäßwand in die Höhe, bis es schließlich, wenn die Flüssigkeit die Drehung ganz angenommen hat, die bekannte paraboloidische Oberfläche zeigt. Die relative Bewegung des Wassers

gegen das Gefäß, die anfangs vorhanden war, hatte keine Fliehkräfte und damit keine Krümmung der Fläche zur Folge, aber die später einsetzende absolute Drehbewegung ließ sich daran feststellen.

Newton entscheidet also hier, daß der Anfangszustand der der „absoluten“ Ruhe, der Endzustand aber „absolute“ Bewegung ist. Sein Entscheidungsgrund ist ein physikalischer. Daß eine Flüssigkeit unter dem Einfluß der Schwere im Ruhezustande eine ebene Oberfläche bildet, ist einfacher zu deuten, als daß diese Fläche ein Paraboloid ist, besonders, da die letztere Fläche deutlich auf eine ausgezeichnete Achse hinweist. Tatsächlich benutzt also Newton zur Auswahl des Bezugssystems die Forderung einer möglichst einfachen Deutung der Naturerscheinungen.

c) Nach Newton haben diese Fragen fast zwei Jahrhunderte geruht, wenigstens hat ihre Beantwortung keine großen Fortschritte gemacht. Zwar hat Kant sich mehrfach gegen Newtons absoluten Raum und die absolute Bewegung gewandt und darauf hingewiesen, daß Bewegung nur insofern Gegenstand der Erfahrung sein kann, „als beide Korrelate Gegenstände der Erfahrung sind [1])“. Aber erst C. Neumann und L. Lange [2]) haben sie durch klares Herausarbeiten des Gedankens gefördert, die Newtonsche Mechanik selbst zur Definition des Bezugssystems zu benutzen. Wir folgen hier zunächst den Gedankengängen Langes.

Die ganze Newtonsche Mechanik läßt sich auf den Trägheitssatz gründen, der für einen Massenpunkt lautet:

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Kraft}.$$

Der einfachste Fall ist der des unbeeinflußten Massenpunktes, bei welchem mit der Kraft auch die Beschleunigung Null ist; er hat eine geradlinige Bahn und unveränderliche Geschwindigkeit. Die Forderung der Einfachheit legt es nahe, ein solches Bezugssystem zu wählen, in welchem sich jeder freie Massenpunkt geradlinig bewegt. Ein solches System nennt Lange, weil es nach dem Trägheitsprinzip ausgesucht ist, ein Inertialsystem und definiert:

Von einem bestimmten im Bezugssystem festen Raumpunkte aus schleudern wir nach drei nicht in einer Ebene liegenden Richtungen drei freie Massenpunkte. Sind deren Bahnen gerade Linien, so ist das Bezugssystem ein Inertialsystem.

Daran schließt sich dann die Behauptung:

In diesem Inertialsystem beschreibt jeder freie Massenpunkt eine gerade Linie.

Gleichzeitig aber gewinnen wir mit dem geschilderten Versuch auch ein Inertialmaß für die Zeit. Da nach dem Trägheitssatz die Geschwindigkeit jedes freien Punktes unveränderlich bleibt, können wir definieren: Die Inertialeinheit der Zeit ist die Zeit, in welcher ein freier Massenpunkt im Inertialbezugssystem eine Strecke von bestimmter Länge zurücklegt.

Im Anschluß daran wird behauptet: In diesem Inertialsystem des Raumes und der Zeit gilt die ganze Newtonsche Mechanik.

Von jener, nach Lange etwas „gespenstischen", absoluten Zeit und dem absoluten Raum ist hier nicht die Rede. Es wird nur ein Versuch angegeben, der, wenn er gelingt, die Entscheidung liefert, ob das untersuchte Bezugssystem ein für die Physik, d. h. zur einfachen Darstellung der Zusammenhänge in der Außenwelt, geeignetes ist. Ob er gelingen muß, ob es also ein Inertialsystem gibt, kann nicht a priori, sondern nur durch die Erfahrung entschieden werden. Die Newtonsche Mechanik behauptet das jedenfalls. Es handelt sich also hier nicht um eine rein erkenntnistheoretische Grundlage für die Physik, sondern lediglich um eine logisch einwandfreie, sonst aber auf Erfahrung fußende Darstellung der Grundlagen der Mechanik. Wir betonen sogleich an dieser Stelle, daß namhafte Forscher, wie Ernst Mach und in neuester Zeit Albert Einstein, bezweifeln, daß die vorliegende Erfahrung das Gelingen des genannten Versuches verbürgt. Doch wollen wir darauf erst später eingehen und zunächst einmal annehmen, es müßte jener Versuch oder ein ihm gleichwertiger im Prinzip durchführbar sein.

Wir sagen sogleich, ein ihm gleichwertiger. Denn er selbst ist ein ideeller Gedankenversuch, den noch niemand mit einiger Genauigkeit angestellt hat. Welche vielleicht besser durchführbaren Versuche ihn ersetzen könnten, soll hier nicht erörtert werden; denn tatsächlich wird man die Berechtigung eines Bezugssystems, als Inertialsystem zu dienen, nur auf die Gesamtheit aller möglichen Beobachtungen in ihm stützen; es darf sich aus keiner von ihnen ein Grund dagegen ableiten lassen, damit man es als Inertialsystem gelten läßt.

Nun sehen wir sofort, daß die Bestimmung eines Inertialsystems nie völlig genau sein kann, sondern immer in dem Maße, wie die dazu notwendigen Versuche, ungenau bleibt. Können wir deren

Genauigkeit steigern, so muß unter Umständen ein bis dahin als Inertialsystem benutztes Bezugssystem durch ein besser geeignetes ersetzt werden. Wenn sich Galilei mit einem an der Erde festen Bezugssystem begnügen konnte, so folgt daraus, daß dies mit einer gewissen Annäherung ein Inertialsystem ist. Zur Deutung feinerer physikalischer Versuche, die lange nach Galilei angestellt wurden (von den astronomischen Beobachtungen sehen wir hier einmal ab), reichte es aber nicht aus. Die Abweichung eines fallenden Körpers von der Lotrichtung, die Drehung der Schwingungsebene beim Foucaultschen Pendel, die Einstellung eines Kreiselkompasses nach dem Pol, das alles und anderes mehr läßt sich nicht unter Benutzung des irdischen Bezugssystems aus dem einfachen Trägheitsprinzip ableiten und beweist in diesem Sinne die Drehung der Erde, d. h. die Drehung gegen ein Inertialsystem. Weit besser und bisher völlig ausreichend ist das astronomische Bezugssystem, dessen Anfang in die Sonne — genauer in den Schwerpunkt unseres Planetensystems — gelegt wird. Nehmen wir einmal der Einfachheit halber an, die Sonne hätte nur einen Planeten, so könnte die Festlegung der Achsenrichtungen ungefähr folgendermaßen geschehen. Aus der Theorie der Planetenbewegung geht hervor, daß dessen Bahn in einer unveränderlichen Ebene liegt. Also werden wir deren Lot zur einer Koordinatenachse machen. Außerdem ist der Theorie zufolge die Verbindungslinie der Sonne mit dem nächsten Punkt der Bahn (dem Perihel) in der Richtung unveränderlich, eignet sich also auch zur Koordinatenachse. Damit ist aber die dritte als der beiden ersteren gemeinsames Lot bestimmt und damit das ganze Inertialsystem. Da sich nun hinterher herausstellt, daß gegen dies Bezugssystem der Fixsternhimmel keine bedeutende Bewegung hat, so kann man dann die Achsen auch optisch nach den Fixsternen festlegen. Aber die Berechtigung dazu entstammt lediglich den Beobachtungen über die Planetenbahn. Die hiermit erreichte Annäherung an ein Inertialsystem schätzen die Astronomen als schon sehr gut ein. Seeliger[3]) z. B. gibt an, daß seine Drehung gegen ein Inertialsystem höchstens noch einige Bogensekunden im Jahrhundert betragen könnte. — Die Inertialeinheit für die Zeit liefert im Anschluß hieran bekanntlich die Umlaufszeit des Planeten.

d) Wie erwähnt, hat Mach und neuerdings Einstein[4]) einen grundsätzlich anderen Standpunkt eingenommen. Zur Festlegung

des Inertialsystems braucht man beim einfachen Langeschen Gedankenversuch freie Massenpunkte. Wie verschafft man sich die, da doch alle Körper auf diese Probekörper Kräfte ausüben? Es gibt nur ein Mittel; man entfernt sich mehr und mehr von den anderen Körpern, bis jene Kräfte so klein werden, daß sie den Versuch nicht stören. Ist es aber sicher, daß es dann überhaupt ein Bezugssystem gibt, in welchem die drei Bahnen geradlinig sind? Das Trägheitsprinzip ist doch abgeleitet aus Erfahrungen in Weltgegenden, welche in bestimmten endlichen Entfernungen von sehr vielen, sehr großen Massen, nämlich denen des Fixsternhimmels, umgeben sind. Wenn die Trägheit eine Eigenschaft des einzelnen Körpers ist, dann muß es freilich auch noch in beliebig großen Abständen von ihnen gelten. Aber was bürgt uns dafür, daß sie nicht auf Wechselwirkung mit den anderen Massen beruht? Die vorliegende Erfahrung reicht dazu nicht aus. Man kann dann über ein physikalisch brauchbares Bezugssystem nur das sagen: Erfahrungsgemäß gilt das Trägheitsprinzip und andere einfache Gesetzmäßigkeiten, wenn man ein gegen die Sonne ruhendes, in den Achsenrichtungen gegen den Fixsternhimmel festes Bezugssystem benutzt. Die diesem Satz anhaftende Ungenauigkeit ist zurzeit unvermeidlich. Es fällt selbstverständlich in unseren Weltgegenden praktisch zusammen mit einem Bezugssystem, das man als Inertialsystem aus der Planetenbewegung erschließen kann. Daß man aber unabhängig vom Fixsternsystem jemals zu einem Inertialsystem gelangen könnte, ist eine den Bereich der vorliegenden Erfahrung weit überschreitende Verallgemeinerung.

Man wird sich dann weiter fragen müssen: Was ergäbe der Newtonsche Versuch mit dem rotierenden Glas Wasser, wenn man das ganze Fixsternsystem mit in Drehung versetzen könnte? Offenbar müßte sich nach dem Mach-Einsteinschen Standpunkt die Wasserfläche anfangs krümmen, solange die Flüssigkeit sich noch in ihrer Bewegung von der Gesamtheit der anderen Körper unterscheidet, während sie sich in dem Maße ebnet, in welchem deren Bewegungszustand sie ergreift; denn es soll ja jetzt das Trägheitsprinzip für Bewegungen gegenüber dem Fixsternsystem gelten. Und wenn man nun nicht alle Fixsterne mitdrehen kann, genügt es vielleicht bis zu einem gewissen Grade, wenn man möglichst große Massen in der Nähe mit rotieren läßt. Das wäre

ein Versuch, der unmittelbar zwischen Mach und Lange, wie wir einmal sagen wollen, entscheiden könnte. Diese Absicht haben 1896 die Gebrüder Friedländer[5]) verfolgt. Bei ihrem Versuche befindet sich in der Verlängerung der Drehachse eines schweren Schwungrades eine Drehwage, bestehend aus einem horizontalen, um eine senkrechte Achse leicht drehbaren Wagebalken, der an den Enden zwei Massen trägt. Ruft die Drehung des Rades, also die Relativbewegung der Drehwage gegen das Rad, Zentrifugalkräfte an der Drehwage hervor, so wird sich diese zur Drehachse senkrecht zu stellen streben. Es ist den genannten Forschern aber nicht gelungen, einen sichtbaren Ausschlag der Wage zu erhalten.

Der Unterschied der hier geschilderten Standpunkte liegt, wie wir sehen, so tiefgehend er ist, keineswegs auf erkenntnistheoretischem Gebiete. Logisch möglich sind beide. Verschieden ist nur die Art, wie sie vorliegende Erfahrungen verallgemeinern und ausdeuten. Also muß auch die Entscheidung zwischen ihnen aus weiterer Erfahrung entspringen, es ist das eine richtige physikalische Frage. Bisher standen die Physiker, häufig unbewußt, fast alle auf dem ersteren, der an das Vorhandensein eines Inertialsystems, unabhängig von allen Massen, glaubt. Dies gilt auch noch für die „beschränkte“ Relativitätstheorie, welche Einstein uns 1905 beschert hat, und welche nur gewisse translatorisch und gleichförmig gegen einander bewegte Bezugssysteme als gleichberechtigt ansieht. Die Machsche Auffassung bestand bis vor kurzem allein als skeptischer Einwand gegen die herrschende. Erst in neuester Zeit (die ersten Anfänge dazu liegen im Jahr 1907) hat Einsteins Genie sie zu einer „allgemeinen“ Relativitätstheorie verdichtet. Diese hat sich freilich bisher nur an wenigen Beobachtungen mit der Erfahrung vergleichen lassen. Doch hat sie durchweg dabei so überraschende Bestätigungen erfahren, daß wir uns als durch sie überzeugt bekennen müssen. Das meiste hat die von ihr vorausgesagte, und bei der Sonnenfinsternis vom Mai 1919 daraufhin gefundene Ablenkung der Lichtstrahlen durch die Sonne dazu beigetragen. Trotzdem beabsichtigen wir, uns in diesem Bande der „beschränkten“ Relativitätstheorie zu widmen und behalten daher vorläufig den ersten Standpunkt bei. Die Darstellung der allgemeinen Relativitätstheorie verschieben wir auf den zweiten Band; warum die Ergebnisse der ersten Theorie auch dann noch einen Wert behalten, wenn man ihren grundlegenden Standpunkt verläßt, werden wir dort an geeigneter Stelle zu zeigen haben.

§ 1b. Die Relativitätsprinzipe der klassischen Mechanik und der Elektrodynamik.

a) Das Relativitätsprinzip der Mechanik.

Gemäß dem in § 1a Gesagten nehmen wir an, wir haben durch den Langeschen Versuch mit den drei freien Massenpunkten ein Inertialsystem und einen Inertialmaßstab für die Zeit ermittelt. Hierauf bezogen gilt die Newtonsche Mechanik, welche zurückgeht auf die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt

$$\frac{d}{dt}(m\mathfrak{q}) = \mathfrak{K}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wenn m dessen Masse, $\mathfrak{q}$ seine Geschwindigkeit und $\mathfrak{K}$ die auf ihn wirkende Kraft ist.

An diese Voraussetzung knüpfen wir aber die Frage: Gibt es nur **ein** Inertialsystem? Wir können diese Frage sogleich verneinen; nennen wir nämlich das bisherige Bezugssystem K, ein zweites K', und setzen wir voraus, daß sich K' gegen K mit der nach Richtung und Größe unveränderlichen Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ohne Drehung bewegt, so ist auch K' ein Inertialsystem. Beweis: Man lege in beide Bezugssysteme rechtwinklige Achsenkreuze, und zwar so, daß sie sich zur Zeit $t = 0$ decken, d. h. daß für $t = 0$ die x- und x'-, die y- und y'-, sowie die z- und z'-Achse zusammenfallen, ferner so, daß die hiernach schon zueinander parallelen Achsen der x und x' auch noch zur Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ parallel sind; dann lauten die Transformationsformeln für den Übergang vom einen zum anderen Bezugssystem:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Bewegt sich im ungestrichenen Bezugssystem K ein Massenpunkt geradlinig mit unveränderlicher Geschwindigkeit, so sind seine Koordinaten x, y, z lineare Funktionen der Zeit. Aus der Linearität der Gleichungen (2) folgt, daß dann auch seine Koordinaten im gestrichenen System x', y', z' lineare Funktionen von t sind.

Die Formeln (2), denen wir der Analogie mit der später zu erörternden Lorentz-Transformation wegen noch die identische Transformation für die Zeit

$$t' = t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

hinzufügen, bezeichnen wir als eine Galileitransformation. Wir finden also den Satz:

Jedes Bezugssystem, welches aus einem Inertialsystem durch eine Galilei-Transformation hervorgeht, ist wieder ein Inertialsystem.

Diesen Satz bezeichnen wir aus später zu erörternden Gründen als das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik.

Wir weisen zugleich darauf hin, daß die Gesamtheit der Galilei-Transformationen eine Gruppe bildet; wendet man zwei von ihnen hintereinander an, so erhält man ein Ergebnis, das auch durch eine einzige zu erreichen wäre.

Die Gleichwertigkeit der Bezugssysteme K und K' für die Mechanik bestätigt sich darin, daß auch in K' die Bewegungsgleichung (1) gilt. Die Geschwindigkeitskomponenten finden wir nämlich, indem wir die Koordinaten des Massenpunktes nach der Zeit differentiieren; es gelten daher für diese Komponenten nach (2) und (3) die Transformationsformeln:

$$\mathfrak{q}'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v = \mathfrak{q}_x - v, \qquad \mathfrak{q}'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = \mathfrak{q}_y,$$

$$\mathfrak{q}'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} = \mathfrak{q}_z,$$

die wir auch in die Vektorgleichung

$$\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} - \mathfrak{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zusammenfassen können. Sie enthält das Additionstheorem der Geschwindigkeit. Durch nochmalige Differentiation folgt aus der Transformationsformel für die Beschleunigung:

$$\dot{\mathfrak{q}}' = \frac{d\mathfrak{q}'}{dt'} = \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \dot{\mathfrak{q}}.$$

In Gleichung (1) bleibt daher die linke Seite von der Transformation unberührt. Die Kraft aber ist eine Funktion der relativen Lage des Massenpunktes m zu anderen, und unter Umständen auch von seiner Relativgeschwindigkeit gegen diese abhängig. Man sieht nun leicht, daß beide Bestimmungsstücke bei einer Galilei-Transformation unverändert bleiben; dasselbe gilt daher auch für die Kraft:

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Aus (1) folgt somit

$$m\dot{\mathfrak{q}}' = \mathfrak{K}'.$$

Fragen wir ferner nach den Transformationsformeln für den Impulsvektor:

$$\mathfrak{G} = \Sigma m_i \mathfrak{q}_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und die kinetische Energie:

$$L = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i \mathfrak{q}_i^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

eines Systems von Massenpunkten m_i. Wenden wir die entsprechenden Gleichungen auf das gestrichene System an, so finden wir, daß nach (4):

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} - \mathfrak{v} \Sigma m_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$L' = L - (\mathfrak{v}\mathfrak{G}) + \frac{v^2}{2} \Sigma m_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ist. Wir können an ihnen eine Probe auf die Gleichwertigkeit beider Koordinatensysteme machen. Diese Gleichungen müssen nämlich (wie alle Transformationsgleichungen) in ihre Auflösungen nach den ungestrichenen Größen übergehen, wenn man die gestrichenen mit den ungestrichenen Größen vertauscht und zugleich das Vorzeichen von v wechselt. In der Tat findet man aus (8) und (9):

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{v} \Sigma m_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$L = L' + (\mathfrak{v}\mathfrak{G}') + \frac{v^2}{2} \Sigma m_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Dem Energieprinzip zufolge muß im ungestrichenen System die Zunahme der kinetischen Energie gleich der von den Kräften geleisteten Arbeit, d. h.

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma (\mathfrak{K}_i \mathfrak{q}_i)$$

sein, wobei $\mathfrak{K}_i$ die auf den Massenpunkt m_i wirkende Kraft ist. Im gestrichenen System gilt entsprechend:

$$\frac{dL'}{dt'} = (\Sigma \mathfrak{K}_i' \mathfrak{q}_i').$$

Da $\mathfrak{v}$ jede beliebige Richtung haben kann, so folgt aus (4), (5) und (9) leicht der Impulssatz:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \Sigma \mathfrak{K}_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Er enthält als Spezialfall eines Massenpunktes die Gleichung (1); man sieht also, daß man aus dem Energieprinzip und dem Relativitätsprinzip die Grundgleichung und damit die ganze Mechanik ableiten kann [1]).

Wir wollen uns zum Schluß dieser Überlegungen noch überzeugen, ob die Galilei-Transformation die einzige Transformation ist, welche von einem Inertialsystem zu einem anderen führt.

Dazu nehmen wir wieder das Bezugssystem K als Inertialsystem an und betrachten daneben ein zweites, gegen K bewegtes Bezugssystem K'. Im ersteren wählen wir uns ein Achsenkreuz x, y, z, im zweiten ein Achsenkreuz x', y', z'; wir können das so tun, daß zur Zeit $t = 0$ sich beide Nullpunkte decken. Jedenfalls gilt für den Übergang vom einen zum anderen das Transformationssystem:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1^{(1)} x' + a_2^{(1)} y' + a_3^{(1)} z' + \beta^{(1)} \\ y &= a_1^{(2)} x' + a_2^{(2)} y' + a_3^{(2)} z' + \beta^{(2)} \\ z &= a_1^{(3)} x' + a_2^{(3)} y' + a_3^{(3)} z' + \beta^{(3)} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (12\text{a})$$

wobei die Koeffizienten $a_n^{(m)}$ den Orthogonalitätsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} a_1^{(1)2} + a_2^{(1)2} + a_3^{(1)2} &= 1 \\ a_1^{(1)} a_2^{(1)} + a_1^{(2)} a_2^{(2)} + a_1^{(3)} a_2^{(3)} &= 0 \\ \text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (12\text{b})$$

unterworfen sind. Sie brauchen aber, wie auch die $\beta^{(n)}$, keine Konstanten zu sein, sondern können wegen der Bewegung von K' gegen K Funktionen der Zeit sein. Die Form dieser Funktionen wollen wir aus der Bedingung ableiten, daß auch K' ein Inertialsystem ist.

Ein freier Massenpunkt A bewege sich in K gemäß den Gleichungen

$$x_A = \xi_A t \qquad y_A = \eta_A t \qquad z_A = \zeta_A t$$

(ξ_A, η_A, ζ_A sind konstant). Seine Bewegung soll auch in K' entsprechenden Gleichungen genügen, nämlich

$$x'_A = \xi'_A t \qquad y'_A = \eta'_A t \qquad z'_A = \zeta'_A t$$

(ξ'_A, η'_A, ζ'_A sind konstant). Dann muß nach (12a)

$$\left.\begin{aligned} \xi_A &= a_1^{(1)} \xi'_A + a_2^{(1)} \eta'_A + a_3^{(1)} \zeta'_A + \frac{\beta^{(1)}}{t} \\ \eta_A &= a_1^{(2)} \xi'_A + a_2^{(2)} \eta'_A + a_3^{(2)} \zeta'_A + \frac{\beta^{(2)}}{t} \\ \zeta_A &= a_1^{(3)} \xi'_A + a_2^{(3)} \eta'_A + a_3^{(3)} \zeta'_A + \frac{\beta^{(3)}}{t} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (12\text{c})$$

sein. Für zwei andere freie Massenpunkte B und C gilt entsprechendes; also:

$$\left.\begin{aligned} \xi_B &= a_1^{(1)}\xi'_B + a_2^{(1)}\eta'_B + a_3^{(1)}\zeta'_B + \frac{\beta^{(1)}}{t} \\ \xi_C &= a_1^{(1)}\xi'_C + a_2^{(1)}\eta'_C + a_3^{(1)}\zeta'_C + \frac{\beta^{(1)}}{t} \\ &\text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (12\mathrm{d})$$

Wir setzen voraus, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi'_A & \eta'_A & \zeta'_A \\ \xi'_B & \eta'_B & \zeta'_B \\ \xi'_C & \eta'_C & \zeta'_C \end{vmatrix} = t^{-3} \begin{vmatrix} x'_A & y'_A & z'_A \\ x'_B & y'_B & z'_B \\ x'_C & y'_C & z'_C \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden ist; anderenfalls lägen die Bahnen der Punkte A, B, C in einer Ebene und wären für den Langeschen Versuch nicht brauchbar. Dann aber können wir aus den drei Gleichungen (12c) für ξ_A, ξ_B, ξ_C die drei Koeffizienten $a_1^{(1)}$, $a_2^{(1)}$, $a_3^{(1)}$ eindeutig als Funktionen von ξ_A, ξ_B, ξ_C, ξ'_A usw. und von $\frac{\beta^{(1)}}{t}$ ausdrücken; setzen wir diese Werte in die erste der Orthogonalitätsgleichungen (12b) ein, so finden wir daraus auch $\frac{\beta^{(1)}}{t}$, und zwar als unabhängig von der Zeit, so daß auch $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}$ von t unabhängig werden. Ebenso bestimmen sich dann aus den auf η_A, η_B, η_C; ζ_A, ζ_B, ζ_C bezüglichen Gleichungen (12c) und den beiden Orthogonalitätsbedingungen

$$a_1^{(2)2} + a_2^{(2)2} + a_3^{(2)2} = 1$$
$$a_1^{(3)2} + a_2^{(3)2} + a_3^{(3)2} = 1$$

die Koeffizienten $a_1^{(2)}$, $a_2^{(2)}$, $a_3^{(2)}$, $a_1^{(3)}$, $a_2^{(3)}$, $a_3^{(3)}$ und $\frac{\beta^{(2)}}{t}$, $\frac{\beta^{(3)}}{t}$ als unabhängig von t. Dann sind freilich die Beziehungen (vgl. 12b)

$$a_1^{(1)}\, a_2^{(1)} + a_1^{(2)}\, a_2^{(2)} + a_1^{(3)}\, a_2^{(3)} = 0 \text{ usw.}$$

noch nicht benutzt. Diese aber sind (nach 12c) von selbst erfüllt, wenn anders die Beziehung

$$\begin{aligned} &(\xi_A - \xi_B)^2 + (\eta_A - \eta_B)^2 + (\zeta_A - \zeta_B)^2 \\ &= (\xi'_A - \xi'_B)^2 + (\eta'_A - \eta'_B)^2 + (\zeta'_A - \zeta'_B)^2 \end{aligned}$$

und die entsprechenden für die Indices B und C, C und A bestehen; diese aber sagen nur aus, daß die Relativgeschwindigkeiten der Punkte A, B, C gegeneinander in beiden Systemen den gleichen Betrag haben, wir werden sie unbedenklich annehmen

können. In der Unveränderlichkeit der a_n^m liegt ausgesprochen, daß sich K' gegen K nicht dreht; in der Konstanz $\frac{\beta^{(m)}}{t}$, daß die Translationsgeschwindigkeit von K' gegen K drei konstante Komponenten nach den Richtungen x, y und z hat, mithin nach Richtung und Größe konstant ist. Die Transformation (12c) unterscheidet sich von (2) dann nur äußerlich, indem in (2) die Achsenkreuze von vornherein passend zueinander und gegen die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gelagert waren.

Damit ist der gewünschte Beweis geführt. Aber wir müssen noch eine Voraussetzung aufdecken, welche wir ihm stillschweigend zugrunde gelegt haben. Die Orthogonalitätsbedingungen, die wir für die Koeffizienten a_n^m angenommen haben, leiten sich bekanntlich aus der Forderung ab, daß jede Strecke in den beiden Bezugssystemen die gleiche Länge hat; in Form einer Gleichung lautet dies: Es ist für zwei beliebige Punkte P und Q

$$\begin{aligned}&(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2\\ &= (x'_P - x'_Q)^2 + (y'_P - y'_Q)^2 + (z'_P - z'_Q)^2.\end{aligned}$$

Ohne diese Voraussetzung läßt sich der Beweis nicht führen. Die weitere Annahme, daß die Relativgeschwindigkeiten in beiden Bezugssystemen den gleichen Betrag haben, fließt unmittelbar als Folgerung aus ihr. Unter der Annahme, daß jede Strecke in allen Bezugssystemen die gleiche Länge hat, gilt also der Satz: Nur eine Galilei-Transformation führt von einem Inertialsystem zu einem anderen.

Zugleich zeigt sich hier, warum in der Langeschen Definition des Inertialsystems gerade von drei freien Massenpunkten die Rede ist; eine geringere Anzahl genügte nicht dazu.

b) Das Relativitätsprinzip in der Elektrodynamik.

Ganz ähnlich wie in der klassischen Mechanik liegen nun die Verhältnisse in der Elektrodynamik. Die Maxwellsche Theorie liefert für sie gewisse vektorielle Grundgleichungen, in denen die Differentialquotienten der Feldvektoren nach den Koordinaten und der Zeit vorkommen. Auch diese erhalten einen Sinn erst durch Angabe eines Bezugssystems. Da sie aber Differentialgleichungen sind, hat eine Verlegung des Anfangspunktes, da sie Vektorgleichungen sind, haben Änderungen der Achsenrichtungen keinen

Einfluß auf ihre Form; alle Koordinatensysteme, welche durch diese Operationen auseinander hervorgehen, zählen als ein einziges Bezugssystem. Aber der Bewegungszustand ist wesentlich; ebensowenig wie in der Mechanik können hier die Grundgleichungen für zwei beliebig gegeneinander bewegte Systeme gelten. Den Gegenstand des vorliegenden Heftes können wir daher in die folgenden Fragen zusammenfassen: Gibt es **ein** ausgezeichnetes Bezugssystem, auf welches die Maxwellschen Gleichungen bezogen werden müssen? Oder, wenn es mehrere solcher Systeme gibt, wie lauten die Transformationsgleichungen, durch welche man von dem einen zu dem anderen gelangt? Diese letzteren würden dann für die Elektrodynamik eine ähnliche Rolle spielen, wie die Galilei-Transformation in der klassischen Mechanik.

Ist die erste Frage zu bejahen, so müssen sich Körper, welche sich gegen das ausgezeichnete System bewegen, offenbar in elektrodynamischer Beziehung prinzipiell anders verhalten als solche, die in ihm ruhen. Es muß sich dann durch Versuche feststellen lassen, ob und wie sich ein Körper in ihm bewegt, es muß also einen physikalischen Sinn haben, von der absoluten Bewegung eines Körpers zu reden*). Trifft dagegen die andere Möglichkeit zu, so müssen sich auch in einem bewegten Körper, wenn dieser nur in einem passenden System ruht, die Vorgänge — wenigstens von diesem System aus betrachtet — genau so abspielen, wie in einem ruhenden; es hat dann keinen physikalischen Sinn, von der Geschwindigkeit als etwas Absolutem zu reden. Ein Prinzip, welches das letztere behauptet, bezeichnet man daher passend als ein Relativitätsprinzip. (Aus diesem Grunde nannten wir auch den Satz auf S. 13 das Relativitätsprinzip der Mechanik.) — Die Entscheidung der gestellten Frage liegt offenbar bei Versuchen über die Elektrodynamik bewegter Körper.

Eng hängt damit zusammen die Frage nach dem Dasein des Äthers. Ist die Faraday-Maxwellsche Auffassung von

---

*) Daß die Erkenntnistheorie dem Begriff der absoluten Bewegung keinen Sinn zu geben weiß, spielt hier keine Rolle, denn wir haben auch unsere „absoluten“ Geschwindigkeiten in bezug auf ein Koordinatensystem definiert, dessen Festlegung auf empirischem Wege und zwar etwa so zu geschehen hätte, daß man die Bewegung der Planeten relativ zu ihm angibt.

der Übertragung des elektromagnetischen Feldes durch einen materiellen Träger desselben auch für den leeren Raum richtig, so muß dasjenige Bezugssystem ausgezeichnet sein, in welchem der Äther ruht. Stellt sich aber heraus, daß es viele gleichberechtigte Systeme gibt, so kann man offenbar von keinem mit mehr Recht behaupten, daß der Äther in ihm ruht, als von jedem anderen; es ist dann unmöglich, dem Äther einen bestimmten Bewegungszustand zuzuschreiben, man muß daher die Äthervorstellung ganz fallen lassen. So gerät die Relativitätsfrage in den engsten Zusammenhang mit der alten Streitfrage: Fernwirkung oder Übertragung mit endlicher Geschwindigkeit durch ein Zwischenmittel? Man sieht schon aus dieser Andeutung, wie tief die Frage in die Auffassung vom Wesen des elektromagnetischen Feldes eingreift.

Um aber ihre ganze Tragweite zu übersehen, wollen wir hier die Antwort zum Teil vorwegnehmen. Es wird sich zeigen, daß es in der Tat eine dreifach unendliche Schar verschieden bewegter Systeme gibt, welche für die Elektrodynamik gleichberechtigt sind. Aber diese Schar kann mit der durch das Relativitätsprinzip der Mechanik bestimmten nur ein einziges System gemeinsam haben. Wären beide Relativitätsprinzipe, das eine für die elektrodynamischen, das andere für die mechanischen Erscheinungen gültig, so definierten beide zusammen doch wieder ein ausgezeichnetes System; sie höben daher ihre Bedeutung gegenseitig auf. An Vorgängen, welche weder rein mechanische noch rein elektrodynamische sind — rein elektrodynamische gibt es überhaupt nur im leeren Raume, sonst sind immer irgendwelche Körper mit ihren mechanischen Eigenschaften daran beteiligt —, müßte sich dann eine absolute Bewegung erkennen lassen*). Es kann daher in der ganzen Physik nur ein Relativitätsprinzip geben, wenn es diesen Namen wirklich verdienen soll.

Tatsächlich liegt aber gar kein Zwiespalt vor. Die mechanischen Versuche, einschließlich der astronomischen Beobachtungen, haben nämlich ausnahmslos mit so geringen Geschwindigkeiten zu

*) Besonders lehrreich dafür ist der Nachweis W. Wiens, daß sich die Erdgeschwindigkeit durch Messung der Lichtgeschwindigkeit relativ zur Erde parallel und entgegengesetzt der Erdgeschwindigkeit feststellen läßt, wenn für die Mechanik das Relativitätsprinzip der Galilei-Transformation gilt[2]).

tun, daß ihre Genauigkeit zur Entscheidung zwischen den beiden Relativitätsprinzipen nicht ausreicht. Wir kommen mit keinem empirischen Ergebnis in Widerspruch, wenn wir das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik auf die Mechanik übertragen. Das Umgekehrte wäre hingegen nicht möglich (§ 4). Es ist daher das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik, dem wir universelle Gültigkeit zuschreiben müssen, wenn wir nicht überhaupt auf ein solches verzichten wollen. Wir nennen es deswegen auch von jetzt an das Relativitätsprinzip schlechthin. Freilich bedürfen dann die Grundgleichungen der Mechanik einer Abänderung, und auch die Thermodynamik. Auch hierauf müssen wir am Schlusse dieses Buches eingehen, um die Vereinbarkeit der Relativitätstheorie mit den mechanischen Erfahrungen darzutun.

§ 2. Die empirischen Grundlagen für die Elektrodynamik bewegter Körper.

Gehen wir zunächst kurz auf das empirische Material ein, an dem wir eine elektromagnetische Theorie der bewegten Körper zu prüfen haben. Seitdem das Licht als elektromagnetische Erscheinung erkannt ist, versteht es sich von selbst, daß dazu auch optische Experimente gehören.

Induktion. Die bekanntesten Versuche dieser Art sind die Faradayschen Versuche über die Induktion elektrischer Ströme in geschlossenen, leitenden Bahnen bei der relativen Verschiebung solcher gegen Magnete oder andere Stromsysteme. Da jedes Lehrbuch der Experimentalphysik über sie ausführlich berichtet, dürfen wir uns hier mit der Angabe des Ergebnisses begnügen. Unter der Annahme, daß der elektrische Widerstand eines Stromsystems eine durch Bewegung nicht zu beeinflussende Konstante ist, läßt es sich dahin aussprechen, daß das Linienintegral der treibenden elektrischen Kraft $\mathfrak{E}^*$ gegeben ist durch die zeitliche Änderung des magnetischen Induktionsflusses durch die umschlungene Fläche, d. h.*):

$$\int_{\bigcirc} \mathfrak{E}^* \, ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n \, d\sigma$$

*) Alle Bezeichnungen, Vektor- und Tensorregeln sind im Anhang zusammengestellt; die letzteren zum Teil auch bewiesen. Die Glei-

oder nach λ, σ, σ', da $div\,\mathfrak{B} = 0$ ist:

$$\int rot_n\,\mathfrak{E}^*\,d\sigma = -\frac{1}{c}\int \dot{\underline{\mathfrak{B}}}_n\,d\sigma = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_n}{\partial t} + rot_n\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{q}]\right)d\sigma.$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf ein unendlich kleines Flächenstück liefert:

$$rot\,\mathfrak{E}^* = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + rot\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{q}]\right).$$

$\mathfrak{q}$ ist die auf dem Flächenstück $d\sigma$ herrschende Geschwindigkeit der Materie. Wie man sieht, ist der Bewegungseffekt von der ersten Ordnung, d. h. proportional zu dem Quotienten q/c.

Wilsonscher Versuch. In engem Zusammenhange damit steht ein von Wilson[1]) durchgeführtes Experiment über den Einfluß eines bewegten Dielektrikums. Bei ihm bewegt sich zwischen den leitend verbundenen Platten eines Kondensators parallel zu diesen eine planparallele, dielektrische, unmagnetisierbare Schicht in einem homogenen Magnetfelde von der Feldstärke $\mathfrak{H}$, welches zur Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ senkrecht, zu den Platten aber parallel ist. Beobachtet wird eine Aufladung der Platten von der Flächendichte $\pm(\varepsilon - 1)\frac{q}{c}\mathfrak{H}$. Schon früher hatte Blondlot[2]) den entsprechenden Versuch mit Luft gemacht; da ihre Dielektrizitätskonstante sich nur unmerklich von 1 unterscheidet, so fand er in Übereinstimmung mit dem Obigen keinen Effekt.

Wienscher Versuch. Wie J. Stark[1a]) 1913 entdeckt hat, spalten sich gewisse Spektrallinien in eine Mehrzahl von Komponenten, wenn sich die sie aussendenden Atome in einem elektrischen Felde befinden. Man kann diese Aufspaltung daher umgekehrt zum Nachweis und zur Messung eines solchen Feldes benutzen. W. Wien[1b]) hat daraufhin 1914 zeigen können, daß Wasserstoffatome, welche sich als „Kanalstrahlen“ mit der Ge-

---

chungen des Anhanges sind zum Unterschied von denjenigen des Textes mit griechischen Buchstaben α, β, γ usw. bezeichnet. Hier sei nur erwähnt, daß die den elektrischen Strom hervorrufende „treibende elektrische Kraft“ $\mathfrak{E}^*$ für ruhende Körper mit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ zusammenfällt, desgleichen für bewegte Körper nach der Hertzschen Theorie, während in der Elektronen- und in der Relativitätstheorie im Fall der Bewegung zwischen beiden Vektoren zu unterscheiden ist.

schwindigkeit von etwa $5 \cdot 10^7$ cm sec^{-1} bewegen, in einem magnetischen Felde $\mathfrak{H}$ eine Aufspaltung zeigen, die ruhende Atome in einem elektrischen Felde von der Größenordnung des Produktes $\frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]$ aufweisen müßten.

Während diese Versuche sich mit den elektrischen Folgeerscheinungen bei der Bewegung von Körpern im Magnetfelde beschäftigen, kommen wir jetzt zu solchen, welche die magnetischen Wirkungen von Bewegungen im elektrischen Felde untersuchen.

Rowlandscher Versuch. Schon die Bezeichnung „elektrischer Strom" ist aus der Vorstellung entsprungen, daß sich in einem durchströmten Leiter Elektrizität bewegt, wie Wasser in einer Röhre. Ist sie richtig, so muß sich die Stromdichte $\mathfrak{J}$ wie in der Hydrodynamik aus der Raumdichte ϱ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ berechnen nach der Gleichung:

$$\mathfrak{J} = \varrho\mathfrak{q}.$$

Ein elektrischer Strom hat aber ein Magnetfeld um sich. Rowland[3]) untersuchte nun, ob von Materie konvektiv mitgeführte Elektrizität die nach dieser Gleichung entsprechende magnetische Wirkung hervorruft, indem er eine elektrisch geladene Platte rotieren ließ. Der Versuch bestätigte das erwartete Ergebnis, welches neuerdings von Eichenwald[4]) nachgeprüft und als richtig befunden worden ist. Da nach den Maxwellschen Gleichungen (vgl. § 4)

$$rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\mathfrak{J}$$

ist, so ist auch hier die Wirkung proportional zu q/c.

Versuche von Röntgen und Eichenwald. Man muß hier zwei Anordnungen unterscheiden, welche freilich im Grunde dieselbe Frage prüfen, aber auf verschiedene Art.

Die Elektrizitätslehre kennt neben den „wahren" Ladungen, um die es sich beim Rowlandschen Versuch handelt, auch noch „scheinbare", d. h. durch die Polarisation des Dielektrikums vorgetäuschte, welche im elektrischen Felde überall dort auftreten, wo sich die Dielektrizitätskonstante stetig oder unstetig ändert. Zum Beispiel ist an den Grenzen eines Dielektrikums zwischen den geladenen Platten eines Kondensators die Dichte der scheinbaren

Flächenladung gleich $\pm(\varepsilon - 1)|\mathfrak{E}|$. Die älteren Untersuchungen von Röntgen[5]) und die neueren und genaueren von Eichenwald[6]), bei welchen dies Dielektrikum rotierte, haben gezeigt, daß auch hier das Produkt aus der Dichte und Geschwindigkeit die Stromdichte eines äquivalenten Leitungsstromes angibt. Dabei, wie auch beim Rowlandschen Versuch, ist freilich zu beachten, daß die Ladungen flächenhaft verteilt sind, und daß daher die Stromdichte auch als Dichte eines Flächenstromes, d. h. als Elektrizitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch eine zur Stromrichtung senkrechte Längeneinheit hindurchfließt, zu deuten ist. Für die Theorie ist dieser Unterschied belanglos, da Flächenströme und Flächenladungen nur Grenzfälle räumlicher Ströme und Ladungen sind.

Die beiden genannten Forscher haben daneben noch die Frage nach der Wirksamkeit eines Verschiebungsstromes in einem bewegten Nichtleiter beantwortet. Daß ein Verschiebungsstrom magnetisch wirkt, gehört zu den anerkannten Wahrheiten der Maxwellschen Theorie, sofern es sich um zeitlich veränderliche Felder in ruhenden Körpern handelt. Die Besonderheit dieser Untersuchung liegt darin, daß das Feld durchaus statisch ist, und daß sich nur durch die Bewegung des Körpers die Verschiebung im gleichen materiellen Punkt ändert. Wiederum rotiert hier eine nichtleitende Scheibe in einem Plattenkondensator. Nur sind beide Platten längs eines Durchmessers durchschnitten, und die beiden Hälften derselben Platte entgegengesetzt geladen. In einem diesen Durchmesser passierenden Punkte der Scheibe schlägt so die elektrische Feldstärke und die Verschiebung in die entgegengesetzte Richtung um. Prüft man verschiedene Dielektrika, so zeigt sich auch hier die Stärke des Verschiebungsstromes proportional zur Differenz $\varepsilon - 1$.

Fizeauscher und Zeemanscher Versuch. Damit ist die Reihe der Untersuchungen über die im engeren Sinne elektromagnetischen Wirkungen relativ zur Erde bewegter Körper beendet. Von den optischen besprechen wir zuerst den Fizeauschen Versuch über die Mitführung des Lichtes durch bewegte Körper. Wäre das Relativitätsprinzip der Mechanik gültig, so müßte die Lichtfortpflanzung im bewegten Körper gerade so mit der Geschwindigkeit c/n^0 vor sich gehen, wie im ruhen-

den*); und nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten [Gleichung (4)] müßten die Phasen des Lichtes relativ zu einem Beobachter, gegen den der Körper die Geschwindigkeit q besitzt, mit einer Geschwindigkeit vom Betrage

$$c_r = \frac{c}{n^0} \pm q$$

fortschreiten, je nachdem die Lichtfortpflanzung in der Richtung von q oder entgegengesetzt erfolgt. Durch ein Experiment, bei welchem zwei Lichtstrahlen miteinander interferieren, welche beide eine Röhre mit strömender Flüssigkeit, der eine in der Bewegungsrichtung, der andere entgegengesetzt, durchsetzt haben, konnten Fizeau[7]), später Michelson und Morley[8]) und neuerdings mit besonderer Genauigkeit Zeeman[8a]) zeigen, daß die Geschwindigkeit q nicht ganz zu c/n hinzuzufügen ist, sondern versehen mit dem Fresnelschen Mitführungskoeffizienten $1 - 1/n^{02}$, so daß die obige Gleichung umzuändern ist in

$$c_r = \frac{c}{n^0} \pm q\left(1 - \frac{1}{n^{02}}\right).$$

Bei Gasen, deren Brechungsexponent sich von 1 nur sehr wenig unterscheidet, ist infolgedessen überhaupt kein Einfluß zu bemerken**). Dasselbe beweist, wenn auch nicht mit der letztgenannten Genauigkeit, ein Versuch von Zeeman[8b]), bei welchem die strömende Flüssigkeit durch einen bewegten Glaskörper ersetzt ist. — Man hat diesen Versuch während eines halben Jahrhunderts als den unmittelbaren experimentellen Beweis für die Existenz eines die Körper durchdringenden, aber doch stets ruhenden Äthers angesehen. Denn wie sollte man ihn anders deuten, als daß nicht

---

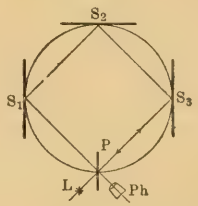
*) n^0 bedeutet den Brechungsindex des Körpers. Wegen des Index 0 vergleiche die nächste Anmerkung.

**) Beim Eintritt in einen bewegten Körper erhält das Licht im allgemeinen diesem gegenüber infolge des Dopplereffekts (siehe weiter unten) eine andere Schwingungszahl, als es gegen ruhende Teile der Versuchsanordnung hat. Infolgedessen darf man bei einem dispergierenden Körper n^0 nicht mit dem Brechungsindex n verwechseln, welcher für die von der ruhenden Lichtquelle entsandte Schwingungszahl gilt, sondern es ist an n eine zu q/c proportionale Korrektion anzubringen. Etwas Ähnliches gilt für den Versuch von Zeeman, während bei dem von Harress der Dopplereffekt fortfällt.

alles, was im Körper Träger der Lichtfortpflanzung ist, an der Geschwindigkeit desselben teilnimmt, solange man an das Additionstheorem (4) glaubte, welches die klassische Mechanik für die Geschwindigkeit aufstellt? Im Sinne der Relativitätstheorie dagegen bestätigt er nur das berühmte Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeit.

Versuche von Sagnac[8c]) und Harress[8d]): Am Rande einer ebenen Kreisscheibe, welche sich um ihren Mittelpunkt mit konstanter Geschwindigkeit dreht, sind tangentiell zu ihr drei Spiegel S_1, S_2, S_3 befestigt, desgleichen eine halbdurchlässige Glasplatte P, welche einen Lichtstrahl, der von der mitrotierenden Lichtquelle L kommt, durch Spiegelung und Brechung in zwei Strahlen zerlegt. Die Platte P und die Spiegel S bilden die Ecken eines Quadrates. Die beiden genannten Strahlen durchlaufen, von jedem der Spiegel S zurückgeworfen, dessen Seiten, aber in entgegengesetzten Richtungen. Bei der Rückkehr nach P geben sie zu vier Strahlen Veranlassung, von denen aber je zwei zusammenfallen und miteinander interferieren; das System der Interferenzstreifen wird auf einer mitrotierenden photographischen Platte Ph aufgefangen. Ruhte die Scheibe, so wären die Wege beider Strahlen von ihrer Trennung bis zur Wiedervereinigung einander gleich; infolge der Drehung hat jedoch der im Sinne der Drehung umlaufende einen längeren, der andere einen kürzeren Weg zurückzulegen als im Falle der Ruhe. Beim Übergang von der Ruhe zur Bewegung verschiebt sich somit das System der Interferenzstreifen, und zwar ergeben Sagnacs Beobachtungen, daß die Verschiebung, ausgedrückt in Streifenbreiten, $4\omega F/c.\lambda$ ist. Dabei bedeutet ω die Winkelgeschwindigkeit, F den Inhalt der vom Lichtweg umschlungenen (hier quadratischen) Fläche, λ die Wellenlänge des Lichtes.

Fig. 1.



Beim Sagnacschen Versuch laufen die Lichtstrahlen in der atmosphärischen Luft, die aber gegenüber dem leeren Raum keinen erheblichen Unterschied bedingt. Das wird wesentlich anders beim Versuch von Harress, bei welchem der Licht-

weg in einem an der Drehung teilnehmenden Kranz von Glasprismen liegt. Dieser dem Sagnacschen zeitlich vorausgehende Versuch stellt somit eine Art Vereinigung der Versuche von Fizeau und Sagnac dar. Trotz des Unterschiedes gilt hier für die Streifenverschiebung die gleiche Formel wie bei Sagnac; daß die Fläche F hier ein nicht ganz regelmäßiges Zehneck ist, ändert nichts daran.

Beide Versuche beweisen auf optischem Wege, was aus vielen mechanischen Versuchen bekannt ist, daß im mitrotierenden Bezugssystem die Naturvorgänge anders als in einem ruhenden verlaufen.

Bei allen diesen Versuchen ist, wie wir sehen, der Effekt von der ersten Ordnung, d. h. zum Verhältnis q/c, proportional. Die dabei benutzten Geschwindigkeiten sind, abgesehen vom Wienschen Versuch, solche großer Massen, wie die Experimentierkunst sie eben herzustellen vermag, also jedenfalls gegen die Lichtgeschwindigkeit c äußerst klein. Darauf beruht die Schwierigkeit; es läßt sich kaum beschreiben, welches Maß von Scharfsinn, experimentellem Geschick und von Geduld dazu gehört hat, diese Schwierigkeit bei den hier erwähnten Versuchen zu überwinden. Nun sind aber die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Erde um die Sonne bewegt ($q_e = 3 . 10^6 \, \mathrm{cm\,sec^{-1}}$), und ebenso die Geschwindigkeiten der anderen Himmelskörper weit größer, als alle diejenigen, welche wir Körpern relativ zur Erde geben können. Man muß daher weit leichter zu beobachtende Effekte erwarten, wenn man derartige Geschwindigkeiten benutzen kann.

Aberration. In der Tat liegen nun schon seit 1727 [Bradley[8e])] hierhergehörige astronomische Beobachtungen vor. Sieht man nach sehr entfernten Fixsternen in der Nähe des Poles der Ekliptik, so muß man die Richtung des Fernrohres (bezogen auf das Sonnensystem) im Laufe eines Jahres so ändern, als beschrieben diese Sterne am Himmel Kreise mit einem Durchmesser von $41'' = 2 . 10^{-4}$ in absolutem Bogenmaß. Sterne in der Ekliptik durchlaufen scheinbar gerade Strecken von dieser Länge alle anderen Ellipsen, deren große Achse diesen Betrag hat. Die elementare Erklärung dieser Tatsache (welche von den Brechungen im Fernrohr absieht) ist die, daß man das Fernrohr um einen

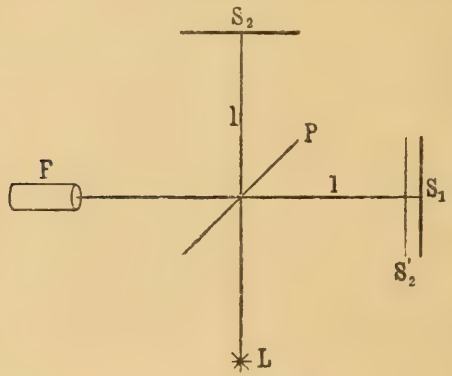
Winkel q_{en}/c gegen die Richtung der Lichtstrahlen neigen muß, um diesen ungehinderten Durchgang zu gestatten; q_{en} ist die Geschwindigkeit der Erde senkrecht zum Lichtstrahl. Bemerkenswert ist die Unabhängigkeit dieses Winkels von dem Mittel, in welchem man beobachtet; er ändert sich nicht, wenn man das Fernrohr mit Wasser füllt [Airy[9])]. Die Abweichung der Rohrrichtung von der Richtung nach dem gleichzeitigen Orte des Sterns ist aber keineswegs allein durch die Erdgeschwindigkeit bedingt, vielmehr überlagert sich dazu noch ein Effekt, welcher von der Bewegung der Lichtquelle abhängt, und der daher rührt, daß der Lichtstrahl von dem Orte herkommt, an welchem sie sich zur Zeit seiner Aussendung befand. Infolgedessen bildet der Strahl mit der Richtung nach dem gleichzeitigen Orte einen Winkel, dessen Größe durch die Geschwindigkeit der Lichtquelle senkrecht zum Strahl q_{in} bestimmt, und zwar gleich $\frac{q_{in}}{c}$ ist. Die Abweichung zwischen Fernrohrachse und der letzteren Richtung hängt infolgedessen, wie eine einfache trigonometrische Betrachtung zeigt, nur von der Relativgeschwindigkeit der Erde zur Lichtquelle ab, und die Erscheinung der Aberration beweist deshalb nur, daß die Relativgeschwindigkeit sich im Laufe eines halben Jahres um den Betrag $2\,q_e/c = 2.10^{-4}$ ändert, lehrt aber nichts über den Bewegungszustand der Erde zum „Äther“.

Dopplereffekt. Eine zweite, auch schon lange (seit 1845) bekannte Beobachtung dieser Art ist der Dopplereffekt[9a]). Wie sich spektroskopisch durch die Verschiebung der Emissions- oder Absorptionslinien im Spektrum der Fixsterne nachweisen läßt, wird die Schwingungszahl des Lichtes durch die der Entfernung parallele Komponente der Relativgeschwindigkeit zwischen Erde und Lichtquelle (q_r) um den Faktor $(1 + q_r/c)$ geändert. Die elementare Erklärung dafür ist, daß die Zahl der Lichtwellen, welche pro Zeiteinheit in unser Auge gelangen, vergrößert wird, wenn wir uns ihr nähern, verkleinert, wenn wir uns von ihr entfernen. Das akustische Analogon dieser Erscheinung ist hinreichend bekannt. — Der Dopplereffekt ist von der größten Wichtigkeit für die Astronomie zur Erkennung der in sehr entfernten Doppelsternsystemen stattfindenden Bewegungen. Die Physik verdankt ihm den experimentellen Nachweis, daß die bei

der Entladung in verdünnten Gasen auftretenden Kanalstrahlen bewegte Korpuskeln sind [Stark[10])]. Neuerdings ist es auch gelungen, ihn durch Bewegung eines Spiegels relativ zur Erde nachzuweisen [Galitzin[11])].

Michelsonscher Versuch[12]). Bei allen bisher beschriebenen Experimenten hängt der Erfolg von der ersten Potenz des Verhältnisses q/c ab; die Genauigkeit ist zu gering, um über Glieder höherer Ordnung Rechenschaft zu geben. Im Gegensatz dazu handelt es sich beim Michelsonschen Versuch um einen Effekt zweiter Ordnung. Gerade hierauf beruht seine Bedeutung. Denn

Fig. 1 a.



die anderen Beobachtungen konnte z. B. auch die Lorentzsche Theorie des ruhenden Äthers erklären; der negative Ausfall des Michelsonschen Versuches dagegen zwang sie zu einer neuen, schon zur Relativitätstheorie hinüberleitenden Hypothese. So wurde dieser Versuch geradezu der Fundamentalversuch für die Relativitätstheorie; wie man auch von ihm fast unmittelbar zur Ableitung der das Relativprinzip enthaltenden „Lorentz-Transformation“ gelangt (§ 6). Diese große Bedeutung mag eine eingehendere Beschreibung rechtfertigen; immerhin gestatten wir uns auch so noch vielerlei idealisierende Vereinfachungen.

Zunächst denken wir uns den Apparat in Ruhe. Der Lichtstrahl L (Fig. 1 a) trifft unter 45° Einfallswinkel auf eine sehr

dünne, halbdurchlässig versilberte Glasplatte P; er wird zum Teil gespiegelt, zum Teil hindurchgelassen. Der gespiegelte Strahl trifft senkrecht auf einen Spiegel S_1, der andere ebenso auf einen Spiegel S_2; S_1 und S_2 befinden sich in nahezu gleichem Abstande l von P. Beide Strahlen kehren dann auf den Wegen, auf welchen sie gekommen sind, nach P zurück und erfahren hier wiederum Spiegelung und Brechung. Je ein gespiegelter und ein gebrochener Strahl überdecken sich jetzt und geben dabei zu Interferenzerscheinungen Anlaß, von denen man die eine in der Brennebene des Fernrohres F beobachtet.

Fragen wir nach der Gestalt der Streifen. Für das Interferenzphänomen ist alles so, als wäre der eine der interferierenden Strahlen nicht an S_2, sondern an dem Spiegelbilde S_2' von S_2 an P reflektiert. Da S_1 nach den obigen Annahmen zu S_2' parallel ist, sieht man das bekannte System von konzentrischen Ringen, wie es an planparallelen Platten entsteht. Dreht man aber den Spiegel S_1 ein wenig aus seiner bisherigen Lage heraus, so verschwinden die Planparallelitätsringe, dafür treten gerade, äquidistante Interferenzstreifen gleicher Dicke auf, wenn man das Fernrohr auf S_2' einstellt. Diesen Apparat bezeichnet man als Michelsonsches Interferometer.

Denken wir uns nun diese Anordnung parallel dem Strahl PS_1 in Bewegung gesetzt und sie so eingerichtet, daß der Strahlengang relativ zu dem mitbewegten System (Erde) der gleiche bleibt. Die Relativgeschwindigkeit des Lichtes $\mathfrak{c}_r$ ist nach (4) die Vektordifferenz aus der Lichtgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ im Vakuum und der Erdgeschwindigkeit $\mathfrak{q}$; also in dem Falle, daß beide in der Richtung miteinander zusammenfallen oder einander entgegengerichtet sind,

$$c_r = c \mp q,$$

im Falle, daß $\mathfrak{c}_r$ senkrecht zu $\mathfrak{q}$ steht,

$$c_r = \sqrt{c^2 - q^2}.$$

Die Strecke $PS_1 = l$ wird also von P nach S_1 in der Zeit $\frac{l}{c+q}$, umgekehrt in der Zeit $\frac{l}{c-q}$ durchlaufen, hin und zurück daher in der Zeit

$$t_1 = l\left(\frac{1}{c+q} + \frac{1}{c-q}\right) = \frac{2cl}{c^2 - q^2} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{q^2}{c^2} + \cdots\right) \quad (13)$$

Die Strecke PS_2 dagegen legt das Licht in beiden Richtungen in der Zeit

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{c^2} + \cdots\right) \cdot \cdot \cdot \quad (14)$$

zurück. Die Differenz

$$t_1 - t_2 = \frac{l}{c} \cdot \frac{q^2}{c^2}$$

ist bestimmend für die Lage der Interferenzmaxima und -minima. Dreht man nun den Apparat in seiner Ebene um 90°, so vertauschen die Strahlen PS_1 und PS_2 ihre Rollen, die Differenz ihrer Durchlaufungszeiten wird also

$$t_1 - t_2 = -\frac{l}{c}\frac{q^2}{c^2}.$$

Es müssen sich daher bei der Drehung die Streifen verschieben, und zwar ist die Verschiebung, gemessen in Bruchteilen eines Streifenabstandes, gleich der Änderung von $(t_1 - t_2)$, dividiert durch die Periode τ des Lichtes, also gleich

$$\frac{2l}{c\tau}\frac{q^2}{c^2} = \frac{2l}{\lambda}\frac{q^2}{c^2},$$

wo $\lambda = c\tau$ die Wellenlänge ist.

Trotz der Kleinheit von q^2/c^2 ($= 10^{-8}$) konnte die Genauigkeit des Versuches durch Vergrößerung der Strecke l bis auf $3{,}2 \,.\, 10^8$ cm (l/λ rund $= 10^3$) schließlich so weit getrieben werden, daß ein Hundertstel der erwarteten Verschiebung hätte wahrgenommen werden müssen. Trotzdem zeigte sich keine Spur einer solchen; es ist durchaus so, als pflanzte sich das Licht trotz der Bewegung längs der Strecken PS_1 und PS_2 stets mit der gleichen Geschwindigkeit fort.

Sehr einfach erklärte diesen Sachverhalt die Idee von Ritz[13]), daß die Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Lichtquelle abhängt, wie die Geschwindigkeit des Geschosses von der des Geschützes. Doch verstößt die Durchführung dieses Gedankens sonst so ziemlich gegen die gesamte optische Erfahrung. Unmittelbar und mit größter Schärfe widerlegt ihn zudem die spektroskopische Beobachtung der Bewegung physisch verbundener Doppelsterne. Besteht ein solcher etwa aus einem Zentralkörper und einem diesen umkreisenden Begleiter, so müßte nach dieser Annahme das Licht des letzteren von verschiedenen Stellen seiner Bahn mit verschiedener Geschwindigkeit

zur Erde gelangen. Bei der großen Entfernung, welche es dabei zurückzulegen hat, bewirkten dann schon kleine Geschwindigkeitsunterschiede erhebliche Unterschiede in den dazu benötigten Zeiten; es müßte dann häufig vorkommen, daß wir den Begleiter an mehreren Stellen seiner Bahn gleichzeitig wahrnehmen. Tatsächlich liegt nicht die Spur eines derartigen Effektes vor[13a]).

Andere Versuche über den Einfluß der Erdbewegung. Nur nebenbei soll hier erwähnt werden, daß Trouton und Noble[14]) vergeblich nach einem von der Lorentzschen Theorie vorausgesagten, zu q^2/c^2 proportionalen Drehmoment gesucht haben, welches ein geladener Plattenkondensator infolge der Bewegung erfahren sollte*). Ebenso ergebnislos verliefen die Versuche einer Reihe von Physikern[15]), eine Doppelbrechung der Körper, Änderungen der Rotationspolarisation und des Spiegelungs- und Brechungsvorganges als Folgen der Erdbewegung nachzuweisen. Nach Des Coudres[16]) ist ferner kein Einfluß davon auf die Induktionserscheinungen, nach Trouton und Rankine[17]) keine Änderung der Stromverteilung zu bemerken, wenn man eine Wheatstonesche Brücke verschieden gegen die Erdgeschwindigkeit orientiert. Die Liste der Experimente, bei welchen nach einem Einfluß der Erdbewegung gesucht wurde, ließe sich sogar noch erheblich verlängern[17a]). Bei keinem hat sich das Gesuchte beobachten lassen, und darin liegt die festeste Stütze für die Überzeugung von der Existenz eines Relativitätsprinzips. Freilich muß man ja bei der Verallgemeinerung negativer Erfahrungen sehr vorsichtig zu Werke gehen; kann doch ein einziger Versuch mit positivem Ergebnis sie als unzulässig erweisen. Dennoch stützt sich der allgemeine feste Glaube an die Gültigkeit der beiden Hauptsätze der Thermodynamik auch auf keine sicherere Unterlage, als die Häufung gewisser negativer Erfahrungen, daß es nämlich auf keine Weise gelingt, ein Perpetuum mobile erster oder zweiter Art zu bauen. Und wenn sich die Zahl der vollgültigen Experimente in unserem Falle auch nicht mit derjenigen Fülle genauer Versuche messen kann, die in den beiden anderen Fällen vorliegt, so bilden sie doch immerhin schon eine Instanz von erheblichem Gewicht.

---

*) Die Theorie dieses Versuches kann erst später (in § 18) gegeben werden.

Dynamik des Elektrons. Zum Schluß müssen wir noch auf eine hochinteressante Reihe von Versuchen über die Dynamik des Elektrons eingehen. In den Kathodenstrahlen bewegen sich bekanntlich die freien Atome der negativen Elektrizität, die sogenannten Elektronen. Dieselben bilden auch einen Teil der von radioaktiven Substanzen ausgehenden Strahlung (β-Strahlen) und treten außerdem aus den Metallen bei der Bestrahlung mit ultraviolettem Licht oder Röntgenstrahlen oder infolge hoher Temperatur heraus. Ihre Geschwindigkeit kommt in den β-Strahlen nahe an die des Lichtes heran, doch hat man auch die bei den Kathodenstrahlen und den lichtelektrischen Vorgängen auftretenden Elektronen durch elektrische Felder bis über die halbe Lichtgeschwindigkeit beschleunigt (Hupka, Ratnowski).

Ein bewegtes Elektron repräsentiert eine elektrische Strömung; es ist gemäß dem Rowlandschen Versuch von einem magnetischen Feld umgeben, dessen Stärke mit der Geschwindigkeit wächst. Ändert man die letztere nach Größe oder Richtung, so übt dies Feld eine der Selbstinduktion eines Stromes ähnliche Wirkung aus, welche sich als Widerstand gegen die Beschleunigung, d. h. als Trägheit des Elektrons äußert, so daß man diesem, auch wenn ihm wirkliche Masse fehlt, wie zurzeit vielfach angenommen wird, eine „elektromagnetische Trägheit“ zuzuschreiben hat (§ 18). Nur ist diese Trägheit nicht einer skalaren Masse äquivalent. Vielmehr ist die Trägheit gegenüber einer Beschleunigung in der Bewegungsrichtung eine andere, als wenn diese auf der Geschwindigkeit senkrecht steht. Man unterscheidet deshalb die „longitudinale“ von der „transversalen“ Masse.

Soweit stimmen alle Theorien für die Dynamik des Elektrons überein, doch unterscheiden sie sich in quantitativer Beziehung. Nach der Lorentzschen „Absoluttheorie“ ist, wie Abraham[18]), Schwarzschild[19]) und Sommerfeld[20]) zeigen, die longitudinale Masse

$$m_l = m \cdot \frac{3}{4} \frac{c^2}{q^2} \left[\frac{2c^2}{c^2 - q^2} - \frac{c}{q} \lg \left(\frac{c+q}{c-q} \right) \right],$$

die transversale Masse

$$m_t = m \cdot \frac{3}{4} \frac{c^2}{q^2} \left\{ \left[\frac{c^2 - q^2}{2cq} \lg \left(\frac{c+q}{c-q} \right) - 1 \right] \right\};$$

nach dem Relativitätsprinzip dagegen ist, wie wir in § 26 sehen werden:

$$m_l = \frac{m}{\sqrt{1 - q^2/c^2}^3}, \qquad m_t = \frac{m}{\sqrt{1 - q^2/c^2}};$$

m ist dabei die Ruhmasse des Elektrons. Nun erfährt ein bewegtes Elektron sowohl im elektrischen als im magnetischen Feld Kräfte, so daß man seine Dynamik experimentell untersuchen kann. Kaufmann[21]), der zuerst an diese Versuche herantrat, konnte auch die Abhängigkeit der transversalen Trägheit von der Geschwindigkeit bei den β-Strahlen nachweisen. Zu einer Entscheidung zwischen beiden Theorien reichte aber die Genauigkeit nicht aus. Auch die späteren Versuche von Bucherer[22]), Ratnowski[23]), Hupka[24]) und Neumann[24a]) brachten keine völlige Entscheidung. Erst Sommerfeld[24b]) und Glitscher[24c]) ist es durch Diskussion der überaus sorgfältigen Messungen von Paschen[24d]) an den Feinstrukturen der Spektrallinien des Heliums, sowie durch Diskussion der Seriengesetze der Röntgenstrahlspektrallinien gelungen, für die die Atomkerne umkreisenden Elektronen die von der Relativitätstheorie geforderte Abhängigkeit der Massen von der Geschwindigkeit schlagend nachzuweisen[25]).

Dies mannigfaltige Material soll nun zur Beurteilung der Relativitätsfrage herangezogen werden. Das Induktionsgesetz spricht für die Möglichkeit eines Relativitätsprinzips, denn nur von der relativen Verschiebung hängt die Veränderung des Integrals $\int \mathfrak{B}_n d\sigma$ (innerhalb der durch die Versuchsgenauigkeit gezogenen Grenzen) ab. Das gleiche gilt für die Aberration und den Dopplereffekt, sowie für alle elektromagnetischen und optischen Erscheinungen auf der Erdoberfläche — mit Ausnahme des Fizeauschen Versuches, welcher geradezu handgreiflich das Dasein eines ruhenden Äthers zu beweisen scheint. Auch können wir aus der Dynamik des Elektrons wegen der Veränderlichkeit der Trägheit jedenfalls den Schluß ziehen, daß die klassische Mechanik und ihr Relativitätsprinzip nicht allgemein gültig ist. Man erkennt schon hier, daß es eine wissenschaftliche Tat ersten Ranges sein muß, diese so widerspruchsvoll erscheinenden Ergebnisse aus einem Gesichtspunkte heraus zu erklären; man darf sich aber auch nicht wundern, daß diese Tat tief in unser ganzes physikalisches Weltbild eingreift und bis an die erkenntnistheoretischen Grundlagen dieser Wissenschaft rührt.

II. Die älteren Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper.

§ 3. Historische Übersicht.

Da die Relativitätstheorie eine so tiefgehende Wandlung in den Grundanschauungen der Physik erforderlich macht, bedarf sie vielleicht mehr wie andere Theorien des Beweises ihrer Notwendigkeit. Nun kann natürlich jede physikalische Theorie ihre eigentliche Stütze nur in sich selbst und in der Bezugnahme auf die Tatsachen finden. Immerhin gibt es auch auf diesem Gebiet eine Art historischer Notwendigkeit, die in dem Fehlschlagen aller anderen Versuche liegt, zu einem befriedigenden Verständnis der Tatsachen zu gelangen. Aus diesem Grunde wollen wir von den älteren Theorien der bewegten Körper wenigstens zwei vorher besprechen, die Hertzsche Theorie und die Elektronentheorie von H. A. Lorentz. Wir wählen gerade diese aus, weil sie vom Standpunkt der Relativitätsfrage besonders interessant sind. Versucht doch die eine von ihnen das Relativitätsprinzip der Mechanik auf die Elektrodynamik zu übertragen, während die andere die Möglichkeit eines solchen Prinzips von Grund aus leugnet. Unserem Zweck entsprechend müssen wir natürlich mehr ihre Mängel als ihre Vorzüge hervortreten lassen; darum soll zunächst auf ihre hohe Bedeutung in der Geschichte der Wissenschaft hingewiesen werden. Die Gedanken, auf denen sie beruhen, lagen weit näher als die Grundidee der Relativitätstheorie; man wäre nie zu der letzteren gelangt, wenn nicht zuvor die Durchführung der ersteren versucht und der Versuch als aussichtslos erkannt worden wäre. Zudem hat namentlich die Lorentzsche Theorie durch Einführung gewisser neuer fundamentaler Begriffe der Relativitätstheorie so vorgearbeitet, daß deren schnelle Entwickelung zum großen Teil dieser ihrer Vorläuferin zu verdanken ist.

Nicht unerwähnt darf bleiben, daß H. A. Lorentz 1904 seine Theorie in Rücksicht auf den Michelsonschen und den Trouton-Nobleschen Versuch so modifiziert hat, daß sie von allen Beobachtungen Rechenschaft gibt [in ihr tritt schon die „Lorentz-Transformation“ auf[1])], und daß E. Cohn eine Elektrodynamik aufgestellt hat, welche, abgesehen von dem Fehlen einer Atomistik, dasselbe leistet[2]). Doch wiegt dieser Mangel angesichts der Erscheinungen der Stromleitungen in Elektrolyten und Gasen, der Kathoden- und Radiumstrahlen so schwer, daß die Cohnsche Theorie nie weitere Verbreitung gefunden hat. Eine eigentliche experimentelle Entscheidung zwischen der erweiterten Lorentzschen und der Relativitätstheorie ist dagegen wohl überhaupt nicht zu erbringen, und wenn die erstere trotzdem in den Hintergrund getreten ist, so liegt dies hauptsächlich daran, daß ihr, so nahe sie auch der Relativitätstheorie kommt, doch das große, einfache, allgemeine Prinzip mangelt, dessen Besitz der Relativitätstheorie von vornherein etwas Imposantes verleiht.

§ 4. Die Theorie von Heinrich Hertz.

a) Ruhende Körper. Ende der 80er Jahre des 19. Jahrhunderts gelangte eine große Epoche der Elektrodynamik zum Abschluß, indem Hertz die Maxwellsche Theorie experimentell bewies und sie auf das folgende einfache System von Grundgleichungen brachte*):

$$\text{(I)}\quad rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \qquad \text{(II)}\quad rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J}\right)$$

$$\text{(III)}\quad div\,\mathfrak{D} = \varrho \qquad \text{(IV)}\quad div\,\mathfrak{B} = 0$$

$$\text{(V)}\quad \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E} \qquad \text{(VI)}\quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$$

$$\text{(VII)}\quad \mathfrak{J} = \sigma\mathfrak{E}.$$

Dazu tritt noch ein Ansatz für die Dichte der elektromagnetischen Energie:

$$W = \tfrac{1}{2}\left\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\} \quad \cdots\cdots \quad \text{(VIII)}$$

Als Grenzbedingungen für Unstetigkeitsflächen kommen die Forderungen hinzu, daß die Tangentialkomponenten beider Feldstärken

*) Wir beschränken uns auf isotrope, nicht permanent magnetisierte und nicht ferromagnetische Körper. Wegen der Bezeichnungen und des Maßsystems vgl. den Anhang.

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ und die Normalkomponenten beider Verschiebungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ stetig sein sollen; sie sind durch Grenzübergang aus den Gleichungen (I) bis (IV) abzuleiten. Nur wo elektrische Flächenladung auftritt, hat die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ einen Sprung, dessen Betrag gleich der Dichte dieser Ladung ist. In diesen wenigen Zeilen ist der Inbegriff aller elektromagnetischen und — wenn man von der Dispersion usw. absieht — auch optischen Erfahrung für ruhende Körper enthalten. Wir wollen zunächst einige allgemeine Schlüsse aus ihnen ziehen.

Bildet man an beiden Seiten der Gleichung (II) die Divergenz, so findet man in Rücksicht auf (III) und ι:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + div\, \mathfrak{J} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

eine Gleichung, die wir nach ihrer hydrodynamischen Analogie als die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität bezeichnen. Integriert man sie über einen Raum, dessen Grenzfläche ganz in Nichtleitern verläuft, so findet man mit Hilfe des Gaußschen Satzes $\varkappa$:

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\tau = -\int div \mathfrak{J} d\tau = \int \mathfrak{J}_n d\sigma = 0,$$

d. h. die in einem solchen Raume enthaltene Elektrizitätsmenge ist zeitlich unveränderlich; das Gesetz von der Erhaltung der Elektrizität spricht sich darin aus.

An zweiter Stelle wollen wir eine nur die elektrische Feldstärke enthaltende, auf homogene, nicht geladene Nichtleiter ($\varrho = 0$, $\mathfrak{J} = 0$) bezügliche Beziehung ableiten. Vollziehen wir an (I) die Operation *rot*, so findet man in Berücksichtigung von Rechnungsregel i' und Gleichung (III) und (VI):

$$rot\, rot\, \mathfrak{E} = -\Delta \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\, rot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\, rot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Differentiieren wir ferner (II) nach der Zeit, so folgt gemäß (V):

$$rot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2},$$

also gilt für die elektrische Feldstärke die Differentialgleichung:

$$\Delta \mathfrak{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Ganz entsprechend leitet man für die magnetische Feldstärke

$$\Delta \mathfrak{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

ab. Diese für beide Feldstärken geltende Differentialgleichung bezeichnet man bekanntlich als Wellengleichung.

Schließlich wollen wir noch das Energieprinzip für die Maxwellsche Theorie formulieren: Multiplizieren wir (I) skalar mit $\mathfrak{H}$, (II) mit $-\mathfrak{E}$, so folgt durch Addition unter Berücksichtigung von (V) und (VI):

$$c[(\mathfrak{H}, rot\,\mathfrak{E}) - (\mathfrak{E}, rot\,\mathfrak{H})] = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2) - (\mathfrak{J}\mathfrak{E});$$

nach Rechnungsregel ϑ und (VIII) kann man diese Gleichung in die Form

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\mathfrak{J}\mathfrak{E}) + c\,div\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

bringen. $(\mathfrak{J}\mathfrak{E})$ ist hier die pro Zeit- und Volumeinheit erzeugte Joulesche Wärme Q; $\frac{\partial W}{\partial t} + (\mathfrak{J}\mathfrak{E})$ infolgedessen die Zunahme der gesamten Energiedichte pro Zeiteinheit. Vergleicht man (18) unter diesem Gesichtspunkte mit der Kontinuitätsgleichung (15), so leuchtet ein, daß man den „Pointingschen Vektor“

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

als die Dichte der Energieströmung deuten kann, in dem Sinne, daß $\mathfrak{S}_n d\sigma$ die Energie ist, welche durch das Flächenelement $d\sigma$ in der Zeit 1 hindurchströmt.

Eine periodische ebene Welle ist durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_0 \sin\Theta, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \sin\Theta \\ \Theta &= 2\pi\nu\left[t - \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}[x\cos(\mathfrak{S}x) + y\cos(\mathfrak{S}y) + z\cos(\mathfrak{S}z)]\right] \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

gegeben, wobei

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\mathfrak{E}_0^2 &= \mu\mathfrak{H}_0^2 \\ (\mathfrak{E}_0\mathfrak{H}_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

ist; durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (I) bis (IV) sowie in (16) und (17) überzeugt man sich, daß diese identisch erfüllt sind. Die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$ liegen dabei zueinander wie die x-, die y- und die z-Achse [vgl. den Anhang unter a)]; die Welle schreitet mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ fort.

b) Bewegte Körper. Hertz ging aber sogleich einen Schritt über Maxwell hinaus, indem er nach den Grundgleichungen für bewegte Körper fragte. Wie schon erwähnt, ist seine Theorie

in gewissem Sinne eine Übertragung des mechanischen Relativitätsprinzips [1]). Daraus folgt für die gesuchten Gleichungen: Erstens dürfen sie ihre Form bei einer Galilei-Transformation des Koordinatensystems nicht ändern, zweitens aber müssen sie in die Gleichungen für ruhende Körper übergehen, wenn wir von allen nach diesem Relativitätsprinzip gleichberechtigten Systemen dasjenige der Betrachtung zugrunde legen, in welchem der Körper gerade ruht. Beiden Forderungen genügt es, wenn wir an Stelle von (I) und (II) die folgenden Gleichungen treten lassen (vgl. σ' und IV):

$$rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\,\underline{\dot{\mathfrak{B}}} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + rot\,[\mathfrak{B}\mathfrak{q}]\right\} \quad \cdots\cdots \quad (\mathrm{I}')$$

$$rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\underline{\dot{\mathfrak{D}}} + \mathfrak{J}\right) = \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{q}\,div\,\mathfrak{D} + rot\,[\mathfrak{D}\mathfrak{q}] + \mathfrak{J}\right\} \quad (\mathrm{II}')$$

oder nach der Definition der Differentiation $\underline{\dot{\mathfrak{D}}}$ bzw. $\underline{\dot{\mathfrak{B}}}$ (vgl. σ):

$$\int_{C} \mathfrak{E}_s\,ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\int \mathfrak{B}_n\,d\sigma\right) \quad \cdots\cdots \quad (\mathrm{I}'')$$

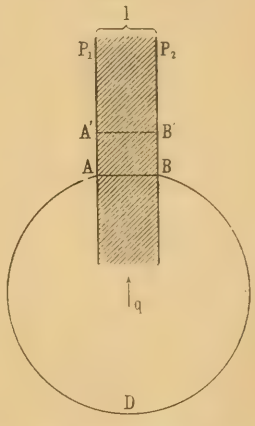
$$\int_{C} \mathfrak{H}_s\,ds = \frac{1}{c}\left\{\frac{d}{dt}\left(\int \mathfrak{D}_n\,d\sigma\right) + \int \mathfrak{J}_n\,d\sigma\right\} \quad \cdots \quad (\mathrm{II}'')$$

Die Gleichungen (III) bis (VIII) bleiben unverändert. Bei der Ausführung einer Galilei-Transformation ändern sich die rechten Seiten von (I″) und (II″) überhaupt nicht, da die Integration über mit der Materie bewegte Flächen zu erstrecken ist und in allen Bezugssystemen zu denselben Werten führt; und das gleiche gilt von den linksstehenden Linienintegralen. Zugleich aber gehen die Beziehungen (I′) und (II′) offenbar, wenn man ein System, in welchem der Körper ruht ($\mathfrak{q} = 0$), zugrunde legt („auf Ruhe transformiert"), in die Maxwellschen Gleichungen über. In einer Hinsicht freilich geht Hertz über das Relativitätsprinzip hinaus. Wir nahmen soeben stillschweigend an, daß sich die Körper als starre Körper und mit einer gleichförmigen, geradlinigen Geschwindigkeit bewegen, Hertz aber legt der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ keinerlei Beschränkung auf.

c) Der Wilsonsche Versuch. Prüfen wir diese Theorie zunächst an einigen der in § 2 aufgezählten Versuche. Nach (VII) ist hier die treibende elektrische Kraft $\mathfrak{E}^*$ mit der elektrischen

Feldstärke $\mathfrak{E}$ identisch; infolgedessen enthält (I′) bzw. (I″) das Induktionsgesetz. Die Übereinstimmung mit dem Experiment hört aber auf, wenn wir den Wilsonschen Versuch erklären wollen. In Fig. 2 soll die schraffierte Fläche ein Querschnitt des Dielektrikums sein, welches sich zwischen den leitenden und durch den Draht D leitend verbundenen Platten P_1 und P_2 mit der Geschwindigkeit q bewegt. Der Abstand der Platten ist l, die magnetische Feldstärke soll auf der Zeichenebene senkrecht stehen, und zwar von unten nach oben weisen. Als mitbewegte Fläche, auf die wir die Gleichung (I″) anwenden, wählen wir das vom Draht D und der materiellen Linie AB berandete Stück der Zeichenebene. Nach Ablauf der Zeit dt hat sich diese Linie um die Strecke $q\,dt$ nach $A'B'$ verschoben; die Berandung ist jetzt durch den Draht D und den Linienzug $AA'B'B$ gebildet. Die Fläche hat sich also um $q\,l\,dt$, der Induktionsfluß durch sie um $|\mathfrak{B}|q\,l\,dt$ vergrößert; also ist

Fig. 2.



$$\int_{\dot{C}} \mathfrak{E}_s\,ds = \frac{1}{c}|\mathfrak{B}|q\,l.$$

Im stationären Zustande kann in dem Drahte D kein Strom fließen, weil sich sonst der Kondensator immer weiter aufladen müßte. Infolgedessen ist in D und ebenso auf den Linien AA' und BB' nach (VII) $\mathfrak{E} = 0$. Daher muß

$$\int_{A'}^{B'} \mathfrak{E}_s\,ds = |\mathfrak{E}|.l = \frac{1}{c}|\mathfrak{B}|q\,l,$$

und nach (V) zwischen den Platten eine elektrische Verschiebung vom Betrage

$$|\mathfrak{D}| = \varepsilon|\mathfrak{B}|\frac{q}{c}$$

vorhanden sein, während im Innern der Platten $\mathfrak{D} = 0$ ist. An den Platten tritt daher eine Unstetigkeit der Normalkomponente $\mathfrak{D}_n$ und damit eine Flächenladung von der Dichte $+\varepsilon|\mathfrak{B}|q$ auf. Beobachtet aber wurde (§ 2) nur die Dichte $\pm(\varepsilon - 1)|\mathfrak{B}|q$. [Da $\mu = 1$, sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ nach (VI) identisch.]

Sind die Platten P_1 und P_2 unendlich dünn, so ist es nach der Figur für das Integral $\int_{\bigcirc} \mathfrak{E}_s ds$ gleichgültig, ob sie, wie bisher angenommen, ruhen, oder wie es tatsächlich bei Wilsons Versuch geschah, sich mitbewegen. Der durch ihre Ladung hervorgerufene Konvektionsstrom verändert zwar das magnetische Feld, aber nur um Beträge zweiter Ordnung in q/c, welche hier, wo es sich nur um Berechnung von selbst zu q/c proportionalen Beträgen handelt, vernachlässigt werden können*).

d) Die Röntgen-Eichenwaldschen Versuche. Eine Abweichung ganz ähnlicher Art besteht zwischen dem Ergebnis der Röntgen-Eichenwaldschen Versuche und der Hertzschen Theorie. Auf der rechten Seite der Gleichung (II′) treten neben dem Verschiebungsstrom $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ und dem Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ noch die von $\mathfrak{q}$ abhängigen Glieder [vgl. (III)] auf:

$$\mathfrak{q}\, div\, \mathfrak{D} = \varrho\, \mathfrak{q} \quad \text{und} \quad rot\, [\mathfrak{D}\, \mathfrak{q}],$$

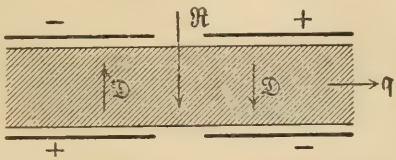
von welchen das erste in Übereinstimmung mit dem Rowlandschen Versuch den Konvektionsstrom angibt, während das zweite, welches man als die Dichte des Röntgenstromes bezeichnet, die Erklärung der Röntgen-Eichenwaldschen Experimente enthält. Bei der ersten dieser in § 2 erwähnten Anordnungen haben wir zwischen den Platten des Kondensators ein zeitlich und, wenn wir von den Komplikationen am Rande der Platten absehen, auch räumlich unveränderliches elektrisches Feld; die Verschiebung $\mathfrak{D}$ steht, wie auch $\mathfrak{E}$, senkrecht zu den Platten. Da die dielektrische Scheibe sich dreht, ist zwar die Geschwindigkeit räumlich veränderlich; dennoch ist $rot\, [\mathfrak{D}\, \mathfrak{q}] = 0$, da $[\mathfrak{D}\, \mathfrak{q}]$ nur vom Abstand von der Drehungsachse abhängt und in der Richtung dieses Abstandes liegt. Eine leichte geometrische Überlegung beweist dies. Nur an der Grenzfläche springt der Vektor $[\mathfrak{D}\, \mathfrak{q}]$ unstetig von dem Werte, den er im Innern hat, auf Null; da er an der Grenzfläche tangential ist, tritt ein Flächenrotor und damit ein flächenhafter Röntgenstrom von der Dichte $|[\mathfrak{D}\, \mathfrak{q}]| = |\mathfrak{D}|\, |\mathfrak{q}| = \varepsilon |\mathfrak{E}|\, |\mathfrak{q}|$ auf. Wir erwähnten oben, daß das Experiment dafür nur den Wert $(\varepsilon - 1)\, |\mathfrak{E}|\, |\mathfrak{q}|$ ergeben hat.

---

*) Bei der wirklichen Ausführung des Versuchs wird übrigens nicht die Ladung gemessen, die sich auf den Platten ansammelt, wenn sie leitend verbunden sind, vielmehr sind sie von einander isoliert und man bestimmt mit dem Elektrometer die zwischen ihnen liegende Spannung. Für den gedanklichen Inhalt des Versuchs macht das nichts aus.

Zur Diskussion der zweiten Anordnung von Röntgen und Eichenwald stellen wir in Fig. 3 einen Schnitt durch den Kondensator dar, welcher senkrecht zu jenem Durchmesser geführt ist, längs dessen die Kondensatorplatten geteilt sind (aber nicht durch die Drehachse geht). Infolgedessen sieht man links oben und rechts unten negativ geladene Plattenstücke, rechts oben und links unten positiv geladene. Links weisen die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ nach oben, das Vektorprodukt $[\mathfrak{D}\mathfrak{q}]$ somit senkrecht zur Zeichenebene nach hinten; rechts hat es die entgegengesetzte Richtung. Der mit $\mathfrak{R}$ bezeichnete Pfeil gibt infolgedessen die Richtung des Röntgenstromes $1/c\, rot\, [\mathfrak{D}\mathfrak{q}] = \varepsilon/c\, rot\, [\mathfrak{E}\mathfrak{q}]$ an. Nach dem Versuche hingegen ist seine Stärke bei gegebener Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportional zu $\varepsilon - 1$. Der Hertzschen Theorie widersprechen daher sowohl der Wilsonsche als die Röntgen-Eichenwaldschen Versuche. (Die hier gegebene Erklärung ist nur eine erste Annäherung; denn wegen des Auftretens eines magnetischen Feldes als Folge des Röntgenstromes ist $[\mathfrak{B}\mathfrak{q}]$, also nach (I') auch $rot\,\mathfrak{E}$, nicht mehr gleich Null und $\mathfrak{E}$ nicht mehr, wie angenommen wurde, räumlich konstant. Da aber $\mathfrak{B}$ selbst proportional zu q/c ist, so gibt dies nur einen Fehler zweiter Ordnung. Entsprechendes gilt für die Theorie des Wilsonschen Versuches.)

Fig. 3.



e) Der Fizeausche und Michelsonsche Versuch. Daß die Hertzsche Theorie mit dem Fizeauschen Versuch im Widerspruch steht, liegt nach dem Obigen auf der Hand und war auch ihrem Urheber bekannt. Besonders interessant ist aber ihre Stellung zum Michelsonschen Versuch. Das Mittel, in welchem er ausgeführt wird, ist natürlich Luft, die sich mit der Erde bewegt; und da in einem Körper, der sich wie ein starrer bewegt, die elektrodynamischen Vorgänge wie in einem ruhenden verlaufen sollen, so erklärt die Hertzsche Theorie in der Tat das Ausbleiben der Streifenverschiebung. Ganz anders wäre es, wenn man ihn im Vakuum angestellt hätte. Auch dort muß man nach Hertz offenbar etwas Substantielles, den Äther, annehmen, um überhaupt entscheiden zu können, ob eine Fläche sich mit ihm bewegt. Da die Erde relativ zum Äther nicht ruht, so müßte man in diesem nicht

verwirklichten Falle beim Michelsonschen Versuch ein positives Ergebnis finden. Diese Erklärung ist aber trotz ihrer empirischen Unwiderlegbarkeit höchst unbefriedigend. Wir sind die Vorstellung gewohnt, daß sich die Luft vom Vakuum elektromagnetisch nur sehr wenig unterscheidet, um so weniger, je weiter wir sie verdünnen. Nach Hertz aber müßten bei immer weiter fortgesetzter Verdünnung selbst die letzten Gasreste für den Ausfall des Versuches entscheidend sein. (Derselbe Einwand trifft übrigens auch die Cohnsche Theorie.)

f) Der Induktionsvorgang. Den Einfluß des Bewegungszustandes des Äthers zeigt auch eine nähere Betrachtung der Induktion in einem Drahtkreise bei seiner Bewegung gegen einen Magneten. Beobachtungstatsache ist, daß nur die relative Lagenänderung in Frage kommt. Trotzdem Gleichung (I′), wie erwähnt, damit im Einklang steht, sind es nach Hertz wesentlich verschiedene Fälle, ob der Magnet allein oder die Drahtschleife allein zum Äther bewegt wird. Im ersten Falle haben wir im Äther ein zeitlich variables magnetisches Feld, welches nach (I) ein elektrisches Feld hervorruft. Im anderen Falle aber haben wir im Äther primär kein solches, sondern nur im Draht selbst [nach (I′)], da dort das Produkt $[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]$ von Null verschieden ist. Es gibt eben in dieser Theorie für den von Materie freien Raum wie für jeden ponderablen Körper ein ausgezeichnetes System, in welchem „der Äther“ ruht, und dies findet seine Begründung in der Tatsache, daß nicht die Gleichungen (I) und (II) (auch nicht für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$), sondern nur (I′) und (II′) gegen eine Galilei-Transformation invariant sind; ohne einen solchen Äther ließe sich die Theorie für Räume außerhalb der Materie überhaupt nicht anwenden.

g) Die Erhaltung des Impulses. Aber noch aus anderen Gründen braucht Hertz einen substantiellen Träger für das elektromagnetische Feld im Vakuum. Es zwingt dazu die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wirkungen in Verbindung mit dem Impulssatz der Mechanik, welcher seinerseits nach § 1 eine notwendige Folgerung aus dem Energie- und dem Relativitätsprinzip der Mechanik ist. Geht nämlich von einem Körper A eine elektromagnetische Wirkung, etwa ein Lichtstrahl, aus, so erfährt A im allgemeinen eine Kraft, beim Licht den

durch den Versuch nachweisbaren Lichtdruck. Es ändert sich daher sein Impuls. Bis ein anderer Körper B von dieser Wirkung erreicht wird, können beliebig lange Zeiten vergehen. Bis dahin tritt an ponderablen Körpern sicherlich kein Äquivalent für die Impulsänderung von A ein. Soll dennoch der Impulssatz gelten, so muß offenbar außerhalb der ponderablen Materie ein Zwischenmedium vorhanden sein, welches vom Feld Kräfte erfährt und infolgedessen sofort die nötige Kompensation für die Impulsänderung von A liefert. Dies geht auch tatsächlich aus dem Hertzschen Ansatz für die ponderomotorische Kraft hervor. Er führt nämlich die pro Volumeinheit wirkende Kraft $\mathfrak{F}$ („Kraftdichte") auf den Maxwellschen Spannungstensor $\boldsymbol{p}$ vermöge der Gleichung

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IX)}$$

zurück, dessen Komponenten die Werte

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{p}_{xx} &= \tfrac{1}{2}[(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})] - \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x \\ \boldsymbol{p}_{yz} &= \boldsymbol{p}_{zy} = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_y) \end{aligned}\right\} \cdot \quad \text{(X)}$$

usw. haben *). Die Durchrechnung ergibt eine resultierende Kraft $\mathfrak{F} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ auf das Vakuum **). Damit aber erhält die Frage nach den mechanischen Eigenschaften des Äthers einen Sinn, da sie mit der erwähnten Kraft zusammen die Bewegungen des Äthers bestimmen, welche für die Anwendung der Gleichungen (I′) und (II′) von Wichtigkeit sind [2]). So wird die Theorie ins Unendliche kompliziert, ohne daß dem irgend etwas Beobachtbares entspräche.

Man sieht schon aus dieser kurzen Darstellung, daß der Versuch, das Relativitätsprinzip der Mechanik auf die Elektrodynamik zu übertragen, aus empirischen Gründen und solchen, die in der Theorie selbst liegen, als mißglückt anzusehen ist.

---

*) Da sich das dielektrische Verhalten der Körper bei einer Deformation ändert, so treten genau genommen noch gewisse kleine, aber in ihren Wirkungen gelegentlich doch beobachtbare Zusatzglieder hinzu [vgl. Encyklop. d. math. Wiss. V, 13, Nr. 22 u. 23 (H. A. Lorentz) und V, 15, Nr. 3 u. 4 (F. Pockels)]. Wir sehen im Interesse der Einfachheit von ihnen ab.

**) Vgl. § 15, Anm. S. 117.

§ 5. Die Elektronentheorie.

Die Elektronentheorie[1]) ist das Ergebnis der folgenden drei Gedanken:

1. Die Elektrizität ist atomistisch konstituiert. 2. Elektromagnetische Felder werden nur von Elektronen erregt und wirken nur auf Elektronen; sie haben ausschließlich im Äther ihren Sitz. Die wägbaren Körper kommen nur in zweiter Linie in Betracht, insofern sie Elektronen enthalten*). 3. Der Äther ist ein alles durchdringender, starrer Körper und definiert so ein ausgezeichnetes System, auf welches die Feldgleichungen zu beziehen sind.

Die Feldgleichungen selbst gehen aus den Maxwellschen hervor, wenn man die Dielektrizitätskonstante ε und die Permeabilität μ gleich 1 setzt und an die Stelle des Leitungsstromes $\mathfrak{J}$ den Konvektionsstrom $\varrho\mathfrak{q}$ der Elektronen treten läßt. Die Elektronen werden in manchen Teilen der Theorie als starre Kugeln gedacht, doch ist in vielen anderen Teilen keine Annahme über ihre Gestalt nötig. Ihre Ladungsdichte ϱ denken wir zunächst als stetige Funktion des Ortes; zu Unstetigkeiten kann man dann noch immer durch Grenzübergänge gelangen. Übrigens ist Satz 1 für die Relativitätsfrage unwesentlich. Der Begriff „Elektron" wird auch in der Relativitätstheorie beibehalten. Wo diese Theorie mit der Relativitätstheorie in Widerspruch gerät, werden wir sie deshalb im Hinblick auf Satz 3 als „Absoluttheorie" davon unterscheiden.

Nimmt man die erwähnten Veränderungen an den Gleichungen (I) bis (VIII) vor, so findet man:

$$\text{(Ia)}\quad rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} \qquad \text{(IIa)}\quad rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \varrho\mathfrak{q}\right)$$

$$\text{(IIIa)}\quad div\,\mathfrak{E} = \varrho \qquad \text{(IVa)}\quad div\,\mathfrak{H} = 0$$

$$W = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \quad \ldots\ldots \quad \text{(VIIIa)}$$

---

*) Vielfach ist es üblich, den Ausdruck „Elektron" auf die von den Atomen der Materie freien Elementarquanta einzuschränken, welche uns negativ geladen in den Kathodenstrahlen entgegentreten, und deren positives Gegenstück sich bisher nicht hat nachweisen lassen. Wir setzen uns über diese für die mathematische Theorie unwesentliche Unterscheidung hinweg.

Dazu tritt noch der Ansatz für die auf die Volumeinheit bezogene ponderomotorische Kraft (die Kraftdichte):

$$\mathfrak{F} = \varrho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(IXa)}$$

Er ist von den obigen Gleichungen nur zum Teil unabhängig, weil er mit ihnen zusammen dem Energieprinzip genügen muß (vgl. § 15). Man sieht an dem Faktor ϱ, daß der freie Äther keine Kraft erfährt.

Wir wollen aus diesen Gleichungen hier nur zwei Folgerungen ziehen; alles andere verschieben wir auf § 14 u. f. Zunächst ist nach (16) und (17) klar, daß für die Ausbreitung eines elektromagnetischen Feldes im Vakuum die Wellengleichung

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

gilt, wo unter φ jede der drei Komponenten von $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{H}$ verstanden werden kann. Zweitens gilt in Analogie zu (15) die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + div(\varrho\mathfrak{q}) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

In dieser Form gibt sie an, wie in einem im Raum festen Punkt die Änderung der Dichte mit dem Konvektionsstrom zusammenhängt. Wollen wir dagegen ein bestimmtes Elektron auf seiner Bahn verfolgen und fragen, wie sich die Ladung eines seiner Volumenelemente δV mit der Zeit ändert, so müssen wir nach Gleichung ϱ und ϱ' des Anhanges auf dessen Bewegung Rücksicht nehmen. Wir finden nach den genannten Gleichungen aus (23):

$$\dot{\underline{\varrho}} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + div(\varrho\mathfrak{q}) = 0.$$

Infolgedessen nach Gleichung ϱ:

$$\frac{d(\varrho\,\delta V)}{dt} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Jedes Volumelement δV des Elektrons und ebenso das ganze Elektron behält seine Ladung unverändert bei.

Diese Gleichungen vermögen alle Vorgänge im leeren Raum und alle an einzelnen Elektronen bekannte Erscheinungen vortrefflich zu erklären. Auch für die Bewegung einzelner Atome oder Molekeln, welche mit wenigen Elementarquanten Elektrizität geladen sind, genügen sie allen Ansprüchen. Z. B. wird die Ablenkbarkeit aller Korpuskularstrahlen im magnetischen Felde durch

das Auftreten des Gliedes ϱ/c [q$\mathfrak{H}$] in IXa) gedeutet. Um aber eine Elektrodynamik der Körper zu begründen, braucht man noch Kenntnisse über das Verhalten der Elektronen zu deren Atomen. Und in diesem Punkte erfährt gerade jetzt die Physik die tiefgreifendsten Umgestaltungen. Es scheint richtig zu bleiben, daß wir unterscheiden können zwischen Leitungselektronen, welche bei den leitenden Körpern sich frei zwischen den Atomen bewegen, und solchen, welche an ein einzelnes Atom oder Molekül gebunden, dessen Verhalten in elektrischer, magnetischer, optischer und auch chemischer Beziehung maßgebend sind. Daß die Aussendung von Spektrallinien im sichtbaren Spektralgebiet Sache der Elektronen ist, konnten 1907 Zeeman und H. A. Lorentz an der magnetischen Aufspaltung solcher Linien nachweisen. Daß der permanente Magnetismus von Eisen auf dem Umlauf von Elektronen in molekularen Gebilden beruht, haben 1915 Einstein und de Haas gezeigt, indem sie den Drehimpuls dieser Bewegung durch den Versuch nachwiesen. Daß die Dielektrizitätskonstante der Körper von eins abweicht, ist zum großen Teil die Folge des elektrischen Moments, welches die Atome im elektrischen Felde infolge der Verschiebung der Elektronen aus ihren ursprünglichen Orten heraus erfahren.

Wir können auf alle diese hochwichtigen Dinge hier nicht näher eingehen, weil sie die Relativitätsfrage nicht unmittelbar berühren. Doch wollen wir erwähnen, daß die ganze Forschung darüber in ein neues und äußerst aussichtsreiches Stadium gebracht ist, seit Niels Bohr 1913 das Rutherfordsche Atommodell mit der Planckschen Quantentheorie verschmolz. Sein erster großer Erfolg war die zahlenmäßige Deutung der Seriengesetze für die Spektrallinien des neutralen Wasserstoffatoms und des einwertigen Heliumions. Die Einführung der Dynamik der Relativitätstheorie statt der Newtonschen, von Bohr benutzten, die wir Arnold Sommerfeld verdanken, lieferte 1915 ohne weiteres die Erklärung für Feinstruktur dieser Linien, und führte wenigstens sehr nahe zu einem Verständnis für die so einfachen Seriengesetze, welche die Spektrallinien im Gebiete der Röntgenstrahlen zeigen. Eine in ihren Grundzügen sehr einleuchtende Theorie des periodischen Systems der chemischen Elemente auf der Grundlage des Bohrschen Atommodells verdanken wir Walter Kossel; auch darin spielen die dem Atom zugehörigen Elektronen die Hauptrolle. Und durch eine Reihe von Arbeiten von M. Born ist es wahrscheinlich gemacht, daß man die gesamten

Kohäsionskräfte fester Körper als elektrische Beeinflussung der Atome wird verstehen können.

Doch alle diese, vielfach noch im Entstehen begriffenen Theorien führten uns hier nur auf Abwege. Wir werden uns zur Begründung einer Elektrodynamik der bewegten Körper damit begnügen, die Maxwellschen Gleichungen mit Dielektrizitätskonstante und Permeabilität anzuwenden, solange es sich um im engeren Sinne elektromagnetische Erscheinungen bei ponderablen Körpern handelt, und bei optischen Problemen als einzige Abänderung $\mu = 1$ und für ε die Wurzel aus dem Brechungsindex zu setzen, wie er für die betreffende Schwingungszahl gemessen ist. Für die Dynamik des Elektrons aber, die Wechselwirkungen verschiedener Elektronen aufeinander und ähnliche atomistische Probleme, sowie für die Elektrodynamik des leeren Raumes bilden die Gleichungen (Ia), (IIa) usw. die zuverlässige Grundlage.

Dagegen müssen wir die Stellung der Elektronentheorie zur Relativitätsfrage genauer ins Auge fassen. Nach dem dritten der grundlegenden Sätze (S. 29) ist es klar, daß sie die Relativität der elektromagnetischen Vorgänge grundsätzlich leugnet. Gerade durch die Unbeweglichkeit des Äthers erklärte H. A. Lorentz, und zwar zahlenmäßig richtig, den Fresnelschen Mitführungskoeffizienten, den Wilsonschen und den Röntgen-Eichenwaldschen Versuch. Um so bemerkenswerter ist, daß die absolute Bewegung gegeneinander ruhender Körper erst in Gliedern zweiter Ordnung in ihre Formeln eingeht. Alle Versuche über die Erdbewegung, welche das Fehlen eines Einflusses erster Ordnung zeigen, konnte H. A. Lorentz (1895) in seinem berühmten „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern“ deuten. Nur der Michelsonsche Versuch blieb unerklärt; denn daß die mitbewegte Luft nicht als Grund für das Ausbleiben der Streifenverschiebung herangezogen werden darf, folgt aus dem von 1 kaum verschiedenen Wert ihrer Dielektrizitätskonstanten; im Sinne der Elektronentheorie beweist er nämlich, daß ihre Molekeln elektromagnetische Vorgänge nicht erheblich beeinflussen.

Später kam als Gegenbeweis noch der Trouton-Noblesche Versuch hinzu. Diese beiden Experimente ließen die Relativitätsfrage nicht zur Ruhe kommen. Immerhin blieb das Vertrauen zu den Feldgleichungen so stark, daß man nicht an ihnen, sondern an der Kinematik und Mechanik abzuändern begann, indem man auch für sie einen physikalischen Einfluß der absoluten Be-

wegung annahm, welcher den Einfluß auf die Elektrodynamik gerade kompensieren sollte. Nach diesem Standpunkt, auf welchem die in § 3 erwähnte Lorentzsche Arbeit vom Jahre 1904 steht, gibt es daher einen Äther, doch bleiben die physikalischen Einwirkungen der „absoluten" Bewegung gegen ihn stets unerkennbar. Genau umgekehrt verfährt die Relativitätstheorie. Auch sie behält die Elektrodynamik bei, ordnet aber beide Gebiete einem Relativitätsprinzip, und zwar demselben unter. Man wird wohl kaum umhin können, das letztere Verfahren als das weit befriedigendere zu bezeichnen; denn es widerspricht allen erkenntnistheoretischen Prinzipien, einem Körper physikalische Wirklichkeit zuzusprechen, wenn er niemals nachgewiesen werden kann. Dies Urteil wird noch dadurch bestärkt, daß die Lorentzsche Theorie an vielen Stellen der Mechanik Abänderungen vornehmen mußte; es blieb A. Einsteins grundlegender Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" im 17. Bande der Annalen der Physik (1905) vorbehalten, durch eine tiefgreifende Kritik des Zeitbegriffes bis zu dem entscheidenden Punkt vorzudringen und so des Rätsels Lösung auf einen Schlag zu bringen.

III. Die Relativitätstheorie, kinematischer Teil.

§ 6. Die Lorentz-Transformation.

Das Relativitätsprinzip behauptet: Man kann aus der Gesamtheit der Naturerscheinungen durch immer weiter gesteigerte Annäherung immer genauer ein Bezugssystem x, y, z, t bestimmen, in welchem die Naturgesetze in bestimmten, mathematisch einfachen Formen gelten. Dies Bezugssystem ist aber durch die Erscheinungen keineswegs eindeutig festgelegt. Vielmehr gibt es eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit gleichberechtigter Systeme, welche sich gegeneinander mit gleichförmigen Geschwindigkeiten bewegen.

Aus diesem Prinzip wollen wir die Transformationsgleichungen ableiten, welche von einem berechtigten Bezugssystem zu einem anderen führen. Wir bedürfen dazu der Kenntnis irgend eines Naturgesetzes; welches wir auswählen, muß prinzipiell

gleichgültig sein. Gelangte man nämlich bei verschiedener Wahl zu verschiedenen Resultaten, so wären nicht alle Gesetze derselben Transformation gegenüber unveränderlich, das Relativitätsprinzip also falsch. Am einfachsten sind offenbar solche Gesetze, die sich auf physikalische Vorgänge im leeren Raum beziehen. Denn bei den anderen geht die Geschwindigkeit der Materie zum Bezugssystem in ihre mathematische Formulierung ein und muß bei einer Transformation mit transformiert werden; im Vakuum aber, wo wir nichts Bewegtes kennen, fällt diese Komplikation fort. Wir kennen nun zwei verschiedene Wirkungen, welche sich durch das Vakuum fortpflanzen, die Schwere und die elektromagnetischen Vorgänge. Von der Ausbreitung der ersteren wissen wir vorläufig nichts weiter, als daß ihre Geschwindigkeit selbst gegen die astronomischen Geschwindigkeiten sehr groß ist. Daß sie größer als die des Lichtes wäre, wird zwar vielfach behauptet, findet aber in der Erfahrung keine Stützpunkte. Um so besser kennen wir das Gesetz der Lichtfortpflanzung im Vakuum, ist doch durch den Michelsonschen Versuch mit einer bei sonstigen physikalischen Messungen kaum erreichten Genauigkeit festgestellt, daß sie, bezogen auf alle Systeme, nach allen Richtungen gleichmäßig erfolgt. Wir fügen als eine über den experimentellen Befund hinausgehende, aber vom Relativitätsprinzip notwendig geforderte Annahme hinzu, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Systemen denselben Wert $c = 3 \,.\, 10^{10}\,\mathrm{cm\,sec}^{-1}$ hat. Dies Gesetz legen wir der folgenden Betrachtung zugrunde.

Betrachten wir zunächst ein Beispiel. Von einem materiellen Punkt A, welcher in einem berechtigten Bezugssystem K im Anfangspunkt der Koordinaten ruht, geht zur Zeit $t = 0$ ein kurzes Lichtsignal nach allen Seiten aus. Zur Zeit $t > 0$ liegen die das Signal empfangenden Punkte auf einer Kugel, deren Gleichung lautet:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0.$$

Zwei im gleichen Abstand von A befindliche, mit ihm auf einer Geraden liegende, ebenfalls in K ruhende materielle Punkte B und C erhalten das Signal demnach gleichzeitig, d. h. für denselben Wert von t.

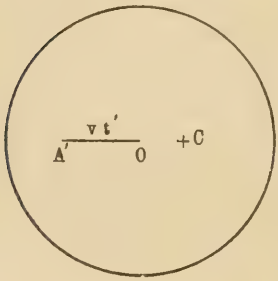
Denselben Vorgang beziehen wir nun auf ein anderes berechtigtes System, K', welches sich zum ersteren mit der Geschwindigkeit v in der Richtung $\overrightarrow{BC}$ bewegt. Die materiellen

Punkte A, B, C haben dann in K' die Geschwindigkeit v parallel $\overrightarrow{CB}$. Die Anfangspunkte der Koordinaten x', y', z' sowie der Zeit t' können wir offenbar so festlegen, daß das Lichtsignal zur Zeit $t' = 0$ im Anfangspunkt O der gestrichenen Koordinaten vom materiellen Punkt A ausgesandt wird. Nach Ablauf der Zeit t' werden alle Punkte der Kugel

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

vom Signal erreicht. Da aber A sich inzwischen aus O um die Strecke vt' bis nach A' entfernt hat, so gibt es keinen Wert t', für den die von A gleich weit entfernten materiellen Punkte B und C auf einer derartigen Kugel liegen; sie werden also nicht gleichzeitig vom Signal erreicht, vielmehr trifft dies, wie auch die Fig. 4 zeigt, in C früher ein als in B, weil C der Lichtkugel entgegen-, B aber vor ihr fortläuft. Zwei Ereignisse, welche im System K gleichzeitig sind, sind es also im System K' im allgemeinen nicht. Die identische Transformation für die Zeit, welche einen Teil der Galilei-Transformation bildete, kann hier nicht aufrecht erhalten bleiben.

Fig. 4.



Dies nötigt uns, den Begriff der Zeit einer kritischen Betrachtung zu unterziehen. Wir messen die Zeit an einem Ort mit Uhren, brauchen dabei aber nicht an die gebräuchlichen mechanischen Instrumente zu denken, bei welchen die Periode elastischer Schwingungen als Zeitmaß dient, sondern wir können die Zeit an dem Fortschreiten jedes physikalischen Vorganges ablesen, wenn wir nur seine Ursachen so genau beherrschen, daß keine unbekannte oder quantitativ unkontrollierbare Ursache mitwirken kann. Derartige vollkommen gleiche Uhren stellen wir uns an verschiedenen Stellen des Raumes, alle in einem und demselben berechtigten System K ruhend, auf. Dann ist die Gleichheit des Zeitmaßes für alle diese Orte gewährleistet. Um aber zu einer für das ganze System K einheitlich definierten Zeit zu gelangen, müssen wir noch die Uhren synchron stellen, d. h. die Nullpunkte ihrer Zeitangaben in passende Beziehung zueinander

setzen. Dazu verhilft uns die Forderung, daß im System K die Lichtgeschwindigkeit den Wert c haben soll, und zwar unabhängig von der Strahlrichtung. Haben zwei Uhren die Entfernung l voneinander, so soll nämlich die Zeitangabe der ersten beim Ablassen eines Lichtsignales von ihrem Orte und die Zeitangabe der zweiten bei seinem Eintreffen an ihrem Orte um den Betrag l/c differieren. Diese Definition führt nicht zum Widerspruch mit sich selbst, wenn man die Uhren auf verschiedene Arten paarweise zusammenfaßt. Sind nämlich die Uhren in den beliebig gewählten Punkten B und C mit der in einem beliebigen dritten Punkt A synchron gestellt, und senden wir von A zur Zeit 0 ein Lichtsignal nach B, welches von dort ohne Zeitverlust nach C und dort ebenso nach A zurück weitergegeben wird, so ist die Zeit seiner Rückkehr $t_A = 1/c(AB + BC + CA)$, da es die Strecke $AB + BC + CA$ durchlaufen hat. Es hat nach der Voraussetzung des Synchronismus der Uhren in A und B den Punkt B erreicht, als die Uhr in B die Zeit $t_B = AB/c$ wies, und wegen des Synchronismus der Uhren in A und C den Punkt C verlassen, als die Uhr in C die Zeit $t_C = t_A - AC/c$ anzeigte. Beim Abgang des Signals in B und bei seiner Ankunft in C besteht also zwischen den Zeitangaben der Uhren in C und B die Differenz $t_C - t_B = BC/c$, d. h. die Uhren in B und C gehen auch miteinander synchron. — Gleichzeitig sind Ereignisse, wenn sie sich bei gleicher Stellung der an ihren Orten befindlichen Uhren abspielen.

Daß man so für jedes berechtigte System zu einer besonderen Zeit kommt, durch die es sich von den anderen berechtigten Systemen unterscheidet, zeigt schon das obige Beispiel. Darin liegt gerade die Kühnheit und die hohe philosophische Bedeutung des Einsteinschen Gedankens, daß er mit dem hergebrachten Vorurteil einer für alle Systeme gültigen Zeit aufräumt. So gewaltig die Umwälzung auch ist, zu welcher er unser ganzes Denken zwingt, so liegt doch nicht die mindeste erkenntnistheoretische Schwierigkeit in ihm. Denn die Zeit ist wie der Raum in Kants Ausdrucksweise eine reine Form unserer Anschauung; ein Schema, in welches wir die Ereignisse einordnen müssen, damit sie im Gegensatz zu subjektiven, in hohem Maße zufälligen Wahrnehmungen objektive Bedeutung gewinnen, und damit eine der Bedingungen für die Möglichkeit von objektiven

Erfahrungstatsachen. Diese Einordnung kann nur auf Grund der empirischen Kenntnis der Naturgesetze vollzogen werden. Ort und Zeit der beobachteten Veränderung an einem Himmelskörper z. B. kann nur auf Grund der optischen Gesetze festgestellt werden. Daß zwei verschieden bewegte Beobachter, wenn jeder sich selbst als ruhend betrachtet, diese Einordnung auf Grund derselben Naturgesetze verschieden vornehmen, enthält keine logische Unmöglichkeit. Objektive Bedeutung haben beide Einordnungen dennoch, da sich aus jeder von ihnen vermittelst der abzuleitenden Transformationsformeln die für anders bewegte Beobachter gültige eindeutig ableiten läßt.

Man denke sich z. B., zwei Astronomen auf verschiedenen gegeneinander bewegten Himmelskörpern könnten miteinander in Gedankenaustausch treten. Sie würden feststellen, daß sie für alle astronomischen Ereignisse wesentlich verschiedene Zeitangaben machen; und dies, trotzdem sie (wie wir annehmen wollen) dabei dieselben physikalischen Grundsätze anwenden, allein aus dem Grunde, daß jeder sich selbst als ruhend annimmt. Damit aber liefe der ganze Streit zwischen ihnen auf die Frage hinaus, wer von beiden mit seiner Annahme recht hat. Nach dem Relativitätsprinzip ist dies unentscheidbar, beide Annahmen sind völlig gleichwertig. Die Zeitangaben beider beziehen sich eben auf verschiedene Systeme. Mit dieser Einsicht und mit Hilfe der Transformationsgleichungen muß der Nachweis gelingen, daß beide Arten der Zeitbestimmung durchaus dasselbe aussagen, indem sie sich völlig ineinander umrechnen lassen.

Auch die Frage der Längenmessung bedarf jetzt einer kritischen Untersuchung. In dem Bezugssystem, in welchem ein Körper ruht, wird man seine Länge in irgendeiner Richtung einfach durch einen angelegten, im gleichen Bezugssystem ruhenden Maßstab bestimmen. In einem anderen Bezugssystem aber, gegen das sich der Körper bewegt, mißt man ihn so, daß man ihn über einen in diesem Bezugssystem ruhenden Maßstab hinweggleiten läßt und zusieht, mit welchen Teilpunkten des Maßstabes die beiden Enden des Körpers gleichzeitig zusammenfallen; deren Unterschied ergibt die Länge. Bisher hat man stets angenommen, daß beide Verfahren zum gleichen Ergebnis führen. Wir aber sind schon durch die Erkenntnis der Relativität der Gleichzeitigkeit zu größerer Vorsicht genötigt. Lassen wir aber diese Annahme

fallen, so entschwindet uns auch der in § 1b bewiesene Satz, demzufolge nur eine Galilei-Transformation von einem berechtigten Bezugssystem (Inertialsystem) zu einem anderen führen kann, und es wird Raum für einen Ersatz dieser Transformation durch eine andere.

Um zu den neuen Transformationsformeln zu gelangen, fragen wir nach denjenigen linearen Beziehungen zwischen x', y', z', t' und x, y, z, t, welche die Wellengleichung (22)

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

in sich selbst überführen; d. h. für welche die Identität gilt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} = \alpha\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) \quad (25)$$

wo α ein von Null verschiedener, zunächst in unbekannter Weise von v abhängiger Proportionalitätsfaktor ist. Denn Gleichung (22) ist die mathematische Formulierung des Gesetzes der Lichtfortpflanzung*). Linear wählen wir diese Substitutionen, weil anderenfalls der Anfangspunkt der Koordinaten und der Nullpunkt der Zeit wenigstens in einem von beiden Systemen ausgezeichnete Punkte würden, welche man nicht ohne wesentliche Änderungen verlegen kann. Wir betrachten aber die Gleichwertigkeit aller Raumpunkte und Zeitmomente als ein empirisch festgestelltes, nach dem Relativitätsprinzip für beide Systeme geltendes Naturgesetz. Ferner setzen wir fest, daß entsprechende Koordinatenachsen in beiden Systemen einander parallel, und zwar die x- und x'-Achse der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ parallel sein sollen, mit welcher das gestrichene System K' sich gegen das ungestrichene K bewegt; und daß schließlich den Werten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ die Werte $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$, $t' = 0$ entsprechen sollen. Die allgemeinsten Gleichungen, welche diesen Bedingungen genügen, lauten:

$$\left.\begin{array}{l} x' = \varkappa(v)\left(x - vt\right) \quad y' = \lambda(v)y \quad z' = \lambda(v)z \\ \qquad\qquad t' = \mu(v)t - \nu(v)x \end{array}\right\} \quad (26)$$

*) Welchen Zusammenhang φ mit den beiden Feldstärken hat, ist bis zu einem gewissen Grad gleichgültig. Nach § 5 gilt (22) für jede lineare Kombination aus ihren Komponenten. Deshalb interessiert auch hier nicht, ob φ in beiden Bezugssystemen die gleiche Bedeutung hat. Nach § 14 geht jede solche lineare Kombination bei der Transformation in eine andere Kombination der gleichen Art über.

wo $\varkappa(v)$, $\lambda(v)$, $\mu(v)$ und $\nu(v)$ noch zu bestimmende Funktionen von v sind. Zunächst ist nämlich einleuchtend, daß es nur eine ausgezeichnete Richtung, die der x-Achse gibt. Schon aus diesem Grunde können y und z in der Gleichung für t nicht auftreten, da sonst die Richtung bevorzugt wäre, deren Richtungskosinus sich wie die Koeffizienten von x, y, z verhalten. Ferner muß die Ebene $x' = 0$ mit der Ebene $x = vt$, die Ebene $y' = 0$ mit $y = 0$ und $z' = 0$ mit $z = 0$ identisch sein. Die Proportionalitätsfaktoren zwischen y' und y sowie zwischen z' und z müssen schließlich wegen der Gleichwertigkeit aller zu x senkrechten Richtungen dieselben sein.

Außerdem aber läßt sich zeigen, daß

$$\lambda = 1$$

sein muß. Von vornherein ist nämlich klar, daß $\lambda(v)$ nur eine gerade Funktion von v sein kann, d. h. $\lambda(v) = \lambda(-v)$. Ob die Bewegung von K' gegen K in der positiven oder negativen x-Richtung erfolgt, das ist ja für die y- und die z-Richtung genau derselbe Vorgang. Andererseits muß die Umkehrung von

$$y' = \lambda(v)y \qquad z' = \lambda(v)z$$

lauten:

$$y = \lambda(-v)y' \qquad z = \lambda(-v)z',$$

denn die Bewegungen von K' gegen K und die von K gegen K' unterscheiden sich nur durch die Richtung von v. Daraus folgt aber wegen $\lambda(v) = \lambda(-v)$ der Wert 1 für λ.

Durch die Substitutionen (26) wird nun eine Funktion

$$\varphi\left(x', y', z', t'\right) = \varphi\left(\varkappa(x - vt), y, z, \mu t - \nu x\right),$$

daraus folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial x'} - \nu\frac{\partial\varphi}{\partial t'}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\varkappa v\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \varkappa^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} - 2\varkappa\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t'} + \nu^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2},$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\varkappa^2\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2} + 2\frac{\varkappa\mu v}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial t'} - \frac{\mu^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}.$$

Soll also Gleichung (25) als Identität gelten, so müssen bei der

Summation der letzten vier Gleichungen und der Multiplikation mit α die Koeffizienten von

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2}, \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}$$

alle gleich 1 werden, der von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t'}$ dagegen verschwinden, d. h. es muß

$$\alpha = 1, \quad \varkappa(v) = \mu(v) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \nu(v) = \mu(v)\frac{v}{c^2} \qquad (27)$$

sein. Für $\varkappa$ und μ wählen wir das positive Vorzeichen, damit für $v = 0$ das Bezugssystem K' mit K identisch wird, wie es nach den obigen Festsetzungen über die Lage beider Achsenkreuze sein muß. Die Gleichungen (26) nehmen dann die Form an:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \cdot \cdot \text{(XI)}$$

Wegen der Gleichwertigkeit beider Systeme muß gestattet sein, in diesen Gleichungen die gestrichenen und ungestrichenen Größen miteinander zu vertauschen, wenn man nur zugleich das Vorzeichen von v umkehrt, weil das System K gegen K' die Geschwindigkeit $-v$ parallel zur x'-Achse hat. Man findet also:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \cdot \cdot \text{(XI a)}$$

Die Rechnung zeigt, daß (XI a) tatsächlich die Umkehrung von (XI) ist. Die Gesamtheit der Gleichungen (XI) oder (XI a) bezeichnen wir als eine Lorentz-Transformation; das Relativitätsprinzip behauptet, daß alle Bezugssysteme, welche durch eine solche aus einem berechtigten System hervorgehen, dem ersteren nicht nur für die Fortpflanzung elektromagnetischer Wirkungen im Vakuum, sondern für alle physikalischen Vorgänge völlig gleichberechtigt sind.

Die erste der Gleichungen (27) ($\alpha = 1$) zeigt nach (25), daß der Ausdruck $\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ gegen eine Lorentz-Transformation invariant ist. Man überzeugt sich leicht, daß man statt dessen

auch die Invarianz des Ausdruckes $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ als Kennzeichen einer Lorentz-Transformation benutzen kann; bestimmt man nämlich die Koeffizienten $\varkappa$, λ, μ, ν in (26) aus der letzteren Forderung, so findet man für sie genau dieselben Werte wie oben.

Ebenso wie die Gesamtheit aller Galilei-Transformationen, bildet die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen eine Gruppe; wendet man zwei von ihnen mit beliebig gerichteten Relativgeschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ hintereinander an, so erhält man ein Ergebnis, das auch durch eine einzige zu erreichen ist. Denn bleibt sowohl bei dem linearen Übergang von einem System K zu K' als bei dem linearen Übergang von K' zu K'' der Ausdruck

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

unverändert, so ist dies auch bei dem dann ebenfalls linearen unmittelbaren Übergang von K zu K'' der Fall.

Wir bemerken ferner, daß

$$v < c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

sein muß; anderenfalls würden die Koeffizienten von (XI) imaginär oder unendlich. Bezugssysteme, welche sich gegen ein berechtigtes mit Lichtgeschwindigkeit oder noch schneller bewegen, lassen sich also durch keine Lorentz-Transformation aus ihm herleiten; in ihnen kann die Lichtausbreitung nicht gemäß der Wellengleichung vor sich gehen. Sie sind also dem ursprünglichen nicht physikalisch gleichberechtigt*). Zwei berechtigte Bezugssysteme

*) Der innere Zustand eines Körpers ist z. B. unabhängig davon, in welchem berechtigten Bezugssystem er ruht, welche Unterlichtgeschwindigkeit er also gegen andere solche Systeme besitzt. Könnte man ihn aber auf Überlichtgeschwindigkeit bringen, so ergäbe sich ein ganz anderer innerer Zustand. Das können wir zwar mangels der erforderlichen mechanischen Kenntnisse nicht im einzelnen ausführen. Aber bei dem Felde eines Elektrons können wir das entsprechende nachweisen. Solange es sich mit Unterlichtgeschwindigkeit translatorisch und gleichförmig bewegt, ist (vgl. § 17) das Feld immer symmetrisch zu einer zur Geschwindigkeit senkrechten Ebene durch das Elektron. Im Falle einer Überlichtgeschwindigkeit aber müßte, wie Sommerfeld u. A. gezeigt haben, das ganze Feld innerhalb eines Kegels hinter dem Elektron liegen, welcher dies zur Spitze und seine Bahn zur Achse hat. Es gibt keinen stetigen Übergang zwischen beiden Fällen.

haben stets eine Unterlichtgeschwindigkeit gegeneinander. Dieser Satz ist zunächst verwunderlich; man sollte meinen, man müßte mit der Geschwindigkeit gegen K über jede Grenze hinauskommen, wenn man von einem System K zu K' übergeht, das gegen K die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hat, dann von K' zu einem System K'', das wiederum gegen K' die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ (in derselben Richtung) besitzt, und so fort. Diesen Einwand widerlegt das in § 7 zu entwickelnde Additionstheorem der Geschwindigkeit.

Gleich der Galilei-Transformation führt die Lorentz-Transformation von einem Inertialsystem im Sinne der Langeschen Definition (vgl. § 1a) zu einem anderen. Denn sind die Koordinaten x, y, z eines Massenpunktes im System K lineare Funktionen der Zeit t, so sind nach XI auch seine Koordinaten x', y', z' lineare Funktionen von t'. Wir können also alle berechtigten Bezugssysteme der hier entwickelten Relativitätstheorie als Inertialsysteme bezeichnen. Darin liegt das Gemeinsame in den Standpunkten der klassischen Mechanik und der „speziellen" Relativitätstheorie, auf das wir schon am Ende von § 1a hingewiesen haben. Nur ist die Bewegungsgleichung 1) der klassischen Mechanik für den Massenpunkt (außer im Fall $\mathfrak{K} = 0$) nicht gegen die Lorentz-Transformation invariant, wie wir besonders in Teil VII dieses Buches sehen werden.

Läßt man in XI den Parameter c, statt ihm den wirklichen Wert $3 . 10^{10}$ cm/sec zu geben, über alle Grenzen wachsen, so gelangt man zur Galilei-Transformation 2) und 3) zurück. Das hat einen tieferen Grund. Gäbe es Fernwirkung durch den leeren Raum, d. h. eine unendliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so zeigt schon das in Fig. 4 auseinandergesetzte Beispiel, daß die Gleichzeitigkeit wieder eine vom Bezugssystem unabhängige, also absolute Bedeutung erhält. Dann fällt auch das Bedenken über die Verschiedenheit derselben Strecke in verschiedenen Bezugssystemen fort, und wir kommen von der Forderung eines Relativitätsprinzips nach dem letzten Satz in § 1b, Abschnitt a (S. 17) zur Galilei-Transformation. Solange man an Fernwirkungen glaubte, konnte man also das oben erwähnte Vorurteil einer für alle Systeme gültigen Zeit nicht beseitigen; es beruht nicht nur auf einem Mangel an Kritik, daß es sich so lange gehalten hat. Und in der klassischen Theorie war z. B. die Schwere eine Fernwirkung.

Wir sehen hier im Gegenteil, daß sich jede Wirkung durch den leeren Raum mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten muß, wenn anders ein allgemeines Relativitätsprinzip für alle Gebiete der Physik bestehen soll. Denn gäbe es eine diesem Satz widersprechende Wirkung, so könnten wir an ihr die Betrachtungen dieses Paragraphen wiederholen und erhielten eine Transformation, die sich von XI nur im Wert von c unterschiede. Ein Bezugssystem, welches für die Elektrodynamik und dies andere Gebiet der Physik berechtigt wäre, wäre dann einzigartig; es gäbe zwar noch unendlich viele andere, welche ihm für die Elektrodynamik gleichwertig wären, und unendlich viele andere, welche für das andere Gebiet gleich gut zu benutzen wären; aber diese beiden Scharen fielen wegen des Unterschiedes der Transformationsformeln nicht zusammen.

§ 7. Die Einsteinsche Kinematik.

Zur Diskussion der Formeln (XI) und (XIa) untersuchen wir zunächst den Gang einer im gestrichenen System ruhenden Uhr ($x' = const$) vom ungestrichenen System aus, indem wir ihre Zeigerstellung stets mit der Angabe derjenigen in K ruhenden Uhr vergleichen, an welcher sie gerade vorüberstreicht. Dem Zeitintervall $\Delta t'$, welches ein mitbewegter Beobachter an ihr abliest, entspricht nach (XIa), da x' unveränderlich ist, das Intervall

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

welches von einem Beobachter im System K durch Vergleich der Zeitangaben ermittelt wird, welche zwei in dem Anfangs- und Endpunkt der inzwischen zurückgelegten Strecke ruhende Uhren beim Abgang und Eintreffen der bewegten liefern. Man kann dies auch aus (XI) ableiten; denn in der Zeit Δt legt die Uhr im System K die Strecke $\Delta x = v \Delta t$ zurück, woraus

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (29)$$

folgt. Eine mit der Geschwindigkeit q bewegte Uhr geht also im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$ langsamer als dieselbe Uhr,

wenn sie ruht. Dieser Satz gilt selbstverständlich unabhängig davon, auf welches der berechtigten Systeme man die Begriffe Ruhe und Bewegung bezieht. Als Uhr ist natürlich jeder Vorgang zu betrachten, dessen Fortschreiten als Zeitmaß dienen kann. In einem bewegten Wasserstoffatom (Kanalstrahlen) werden z. B. die Licht emittierenden Eigenschwingungen geringere Frequenz haben als in einem ruhenden.

Wir betrachten jetzt zwei gleiche Uhren. Beide ruhen zunächst in einem berechtigten Bezugssystem K^0 am gleichen Ort. Die zweite beschleunigen wir sodann quasistationär, d. h. so, daß ihr innerer Zustand stets nur von der augenblicklichen Geschwindigkeit, nicht aber von der Beschleunigung abhängt. Wir lassen sie dann einige Zeit auf gleichförmiger Geschwindigkeit, kehren diese sodann durch quasistationäre Beschleunigung um, und führen die Uhr auf diese Weise zu ihrem Ausgangspunkt zurück, wo wir sie — wiederum quasistationär — zur Ruhe bringen. Sie geht in jedem Moment dieses Vorganges im Verhältnis $\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}$ langsamer als die ruhende Uhr und ist somit bei der Rückkehr gegen diese zurückgeblieben. — Diese Konsequenz der Relativitätstheorie, welche namentlich Langevin[1]) in sehr interessanter Weise weiter ausgeführt hat, erscheint trotz ihrer Unwiderlegbarkeit zunächst so paradox, daß sie sich sogar den Einwand gefallen lassen mußte, sie widerlege das Relativitätsprinzip[2]); man könne ja daraus entscheiden, welche von den beiden Uhren in Ruhe, welche in Bewegung gewesen sei. In der Tat kann man entscheiden, welche von den Uhren dauernd in einem und demselben Bezugssystem, und welche inzwischen in zwei oder mehr solchen Systemen geruht hat. Dazwischen besteht aber auch ein wirklicher physikalischer Unterschied. (Vgl. § 8.)

Ganz ähnliche Verhältnisse finden sich bei der Messung der Länge eines bewegten Stabes. Ruht dieser in K' und liegt er parallel der x'-Achse, so ist seine Ruhlänge s_0 bestimmt durch die Differenz der x'-Koordinaten seiner Endpunkte, also:

$$s_0 = x'_1 - x'_2;$$

diese kann man durch Anlegen eines ebenfalls in K' ruhenden Maßstabes feststellen. Seine Länge, bezogen auf K, ist hingegen

gleich der Differenz der x-Koordinaten, welche seinen Endpunkten für gleiche Werte von t zuzuschreiben sind; daher folgt aus (XI):

$$s = x_1 - x_2 = (x_1' - x_2') \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = s_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \cdot (30)$$

Die Abmessung eines Körpers parallel zur Bewegungsrichtung wird also vom mitbewegten System aus größer beurteilt als von jedem anderen. Bringen wir einen Stab unter Aufrechterhaltung seines inneren Zustandes*) (etwa im leeren Raum und ohne Wärmezufuhr von der Ruhe) auf die Geschwindigkeit q, so zieht er sich im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$ zusammen; nennen wir nämlich das System, in welchem er anfangs ruhte, K, das andere, in welchem er nach seiner Beschleunigung ruht, K', so muß seine Länge im zweiten Zustand, bezogen auf K', s_2', gerade so den Wert s_0 haben, wie die Länge s_1, welche er im ersten Zustand in K besaß.

Dieser Satz rechtfertigt die von Fitzgerald[3]) und Lorentz[4]) schon vor der Relativitätstheorie zur Erklärung des Michelsonschen Versuches herangezogene Kontraktionshypothese und wird in der Tat notwendig gebraucht, wenn man die Theorie dieses Experimentes für ein nicht mitbewegtes System geben will. Verkürzt sich nämlich in Fig. 1a (S. 28) die Strecke PS_1 bei der Bewegung parallel zu ihr auf die Länge $l \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$, so wird nach (13) und (14) die Durchlaufungszeit:

$$t_1 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - q^2}} = t_2.$$

Bei einer Drehung des Apparates, welche die Vertauschung der Rollen von PS_1 und PS_2 zur Folge hat, tritt dann keine Verschiebung der Interferenzstreifen ein. Daß diese Zeit selbst noch von q abhängt, liegt daran, daß sie auf dasjenige System bezogen ist. in welchem das Interferometer die Geschwindigkeit q hat. Im mitbewegten System K' wäre nach (29) die Durch-

*) Im Abschnitt VII werden wir solche Beschleunigungen als adiabatisch-isopieistisch bezeichnen.

laufungszeit $t' = t_1 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} = \frac{2l}{c}$, wie es sein muß, da in K' die Strecken PS_1 und PS_2 mit der Geschwindigkeit c zurückgelegt werden.

Die Dimensionen senkrecht zur Bewegung werden nach (XI) nicht verändert. Infolgedessen sind die Winkel, welche eine materielle Gerade mit der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ oder einer anderen Geraden bildet, in K und K' im allgemeinen verschieden; ebenso die Winkel zwischen zwei materiellen Ebenen oder zwischen einer Ebene und einer Geraden. Das Volumen V eines Körpers ist aus demselben Grunde bei der Lorentz-Transformation wie die Abmessung parallel der Geschwindigkeit umzurechnen. Da somit in jedem System $\frac{V}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$ gleich dem Volum V^0 im mitbewegten System ist, so dient als Umrechnungsformel für das Volumen eines Körpers, der zu K die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$, zu K' die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}'$ hat, die Gleichung:

$$\frac{V}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{V'}{\sqrt{c^2 - q'^2}} = \frac{V^0}{c} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (31)$$

Eine weitere Folge der Kontraktion ist, daß die Form der Körper von verschiedenen Systemen aus verschieden beurteilt wird. Ein Körper z. B., der, vom mitbewegten System aus untersucht, Kugelgestalt hat, ist in allen anderen Systemen ein abgeplattetes Rotationsellipsoid.

In seiner ersten Hälfte (nämlich soweit von der Beurteilung der Längen von verschiedenen Systemen aus die Rede ist) ist der Satz auf S. 60 eine Folge der verschiedenartigen Anwendung des Raum- und des Zeitschemas bezüglich verschieden bewegter Systeme. Die beiden Astronomen, von denen auf S. 52 die Rede war, würden trotz derselben geometrischen Grundsätze in Streit geraten, sowie sie diese auf einen wirklichen Körper anwenden. Sie beurteilen eben deren Form wesentlich verschieden. Aber der Kernpunkt ihres Streites läge auch hier in den einander widersprechenden Annahmen über den Ruhezustand. Sowie dies erkannt wäre, müßten sich mit Hilfe der Lorentz-Transformation beider Angaben ineinander überführen lassen. — In seiner zweiten Hälfte

aber enthält jener Satz eine Aussage über die Mechanik; die elastischen Kräfte, welche die Form des Körpers bedingen, müssen durch die Bewegung so beeinflußt werden, daß sie eben diese Verkürzung herbeiführen.

Gegen dies Ergebnis hat man gelegentlich kausale Bedenken geäußert, und in der Tat ist unsere Überlegung nicht dem kausalen Zusammenhang nachgegangen. Statt der Ursache für die Lorentz-Kontraktion und den langsameren Gang einer bewegten Uhr hat sie einen Erkenntnisgrund abgegeben. Diese Erscheinungen müssen eintreten, wenn anders das Relativitätsprinzip der Lorentz-Transformation gilt. Wir wollen sogleich bemerken, daß in der Physik der Gedankengang sehr häufig von dem Kausalzusammenhang abweicht. Wenn wir z. B. auf Grund des Energieprinzips sagen, daß die Energieänderung eines materiellen Systems bei einer chemischen Umsetzung unabhängig von dem Wege ist, auf welchem diese Umsetzung vor sich geht, so liegt eine solche Abweichung vor. Und gerade darin liegt der Wert so allgemeiner Gesetze, wie es das Energie- und das Relativitätsprinzip sind, daß sie es uns ersparen, den manchmal unübersehbar verwickelten Kausalzusammenhang in allen Einzelheiten aufzuklären.

Doch steht unsere Überlegung deswegen natürlich nicht im Widerspruch zu einer kausalen Erklärung; deren Möglichkeit muß die Physik ja überall verlangen. Nur darf man, wenn man nach ihr sucht, nicht übersehen, daß nach dem hier eingenommenen Standpunkte ein Inertialsystem eine beobachtbare Grundtatsache ist, welche, wie jede andere Tatsache, ihre kausalen Wirkungen hat; unter anderem die, daß die Kräfte zwischen zwei Körpern, wenn diese sich gegen ein Inertialsystem mit derselben unveränderlichen Geschwindigkeit bewegen, bezogen auf das gleiche System noch von der Geschwindigkeit abhängen. Das ließe sich nach Teil V dieses Bandes z. B. an den Kräften zwischen zwei elektrischen Punktladungen leicht nachrechnen*). Auch die elastischen Kräfte zwischen Stücken desselben Körpers erfahren solche Einwirkungen der Geschwindigkeit; und es wäre ohne Schwierigkeit an den Formeln von Teil VII nachzuweisen, daß dadurch bei unveränderlicher Gestalt des Körpers das innere Gleichgewicht ge-

*) Das ist deswegen besonders wichtig, weil wir die Gesetze der Elektrodynamik unabhängig vom Relativitätsprinzip kennen gelernt haben.

stört würde. Die Lorentz-Kontraktion stellt es dann wieder her. Bei der Unruhe einer Taschenuhr aber bewirkte diese Veränderung der Elastizität, verbunden mit der Veränderung der trägen Masse durch die Geschwindigkeit (vgl. ebenfalls Teil VII) die berechnete Verringerung der Schwingungszahl.

Das geschilderte Bedenken beruht wohl darauf, daß das Inertialsystem seinen Einfluß nicht durch irgendwelche Kräfte ausübt, während wir sonst in der Physik die Beziehung zwischen Ursache und Wirkung durch eine Kraft hergestellt denken. Darin liegt in der Tat etwas ungewohntes, aber kein Widerspruch gegen das Kausalitätsprinzip.

Als letzte kinematische Folgerung soll hier die Transformationsformel für die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes abgeleitet werden. Sind dessen Koordinaten x, y, z im System K Funktionen der Zeit t, so sind die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\mathfrak{q}_x = \frac{dx}{dt}, \qquad \mathfrak{q}_y = \frac{dy}{dt}, \qquad \mathfrak{q}_z = \frac{dz}{dt}.$$

Die entsprechende Definition gilt für seine Geschwindigkeit $\mathfrak{q}'$ in bezug auf K'. Aus (XI) folgt aber:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dt}{dt'}, \qquad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'}, \qquad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dt'},$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

also:

$$\mathfrak{q}'_x = \frac{\mathfrak{q}_x - v}{1 - \frac{v\mathfrak{q}_x}{c^2}}, \quad \mathfrak{q}'_y = \frac{\mathfrak{q}_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v\mathfrak{q}_x}{c^2}}, \quad \mathfrak{q}'_z = \frac{\mathfrak{q}_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v\mathfrak{q}_x}{c^2}}. \quad \cdot (32)$$

oder, wenn man umgekehrt $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{q}'$ ausdrückt:

$$\mathfrak{q}_x = \frac{\mathfrak{q}'_x + v}{1 + \frac{v\mathfrak{q}'_x}{c^2}}, \quad \mathfrak{q}_y = \frac{\mathfrak{q}'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v\mathfrak{q}'_x}{c^2}}, \quad \mathfrak{q}_z = \frac{\mathfrak{q}'_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v\mathfrak{q}'_x}{c^2}}. \quad \cdot (33)$$

Multipliziert man die auf die y- oder z-Komponenten bezüglichen Gleichungen in (32) und (33) miteinander, so findet man:

$$\left(1-\frac{v\mathfrak{q}_x}{c^2}\right)\left(1+\frac{v\mathfrak{q}'_x}{c^2}\right)=1-\frac{v^2}{c^2} \quad \ldots\ldots (34)$$

Weiter zeigt eine einfache Rechnung, indem man die drei Gleichungen (32) quadriert und addiert und $v\mathfrak{q}_x$, $v\mathfrak{q}'_x$ durch die skalaren Produkte $(\mathfrak{v}\mathfrak{q})$, $(\mathfrak{v}\mathfrak{q}')$ ersetzt:

$$\frac{c^2-q^2}{c^2-(\mathfrak{v}\mathfrak{q})}=\frac{c^2+q'^2}{c^2+(\mathfrak{v}\mathfrak{q}')} \quad \ldots\ldots (35)$$

Aus (31), (34) und (35) folgt:

$$\sqrt{\frac{c^2-q'^2}{c^2-q^2}}=\sqrt{\frac{c^2+(\mathfrak{v}\mathfrak{q}')}{c^2-(\mathfrak{v}\mathfrak{q})}}=\frac{c\sqrt{c^2-v^2}}{c^2-(\mathfrak{v}\mathfrak{q})}=\frac{c^2+(\mathfrak{v}\mathfrak{q}')}{c\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{V'}{V} \quad \ldots (36)$$

Bezeichnet man schließlich mit ϑ' den Winkel zwischen der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}'$ und der x-Achse, so gilt nach (33):

$$q^2=\frac{q'^2+v^2+2\,q'\,v\cos\vartheta'-\left(\frac{q'v}{c}\sin\vartheta'\right)^2}{\left(1+\frac{q'v}{c^2}\cos\vartheta'\right)^2} \quad \ldots (37)$$

da

$$tg\,\vartheta'=\frac{\sqrt{\mathfrak{q}'^2_y+\mathfrak{q}'^2_z}}{\mathfrak{q}'_x} \quad \ldots\ldots (37\,\mathrm{a})$$

ist. Diese Gleichungen geben an, wie sich, vom System K aus betrachtet, die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{q}'$ zusammensetzen; sie enthalten das berühmte Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeit*).

Das merkwürdigste ist dabei, daß die beiden zu addierenden Geschwindigkeiten nicht gleichberechtigt auftreten. Ist z. B. $\mathfrak{v}_2$

*) Es sei darauf hingewiesen, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}'$ auf ein anderes System bezogen ist wie $\mathfrak{v}$. Sind beide auf dasselbe System zu beziehen, so muß natürlich die gewöhnliche Vektoraddition für sie gelten. Die Geschwindigkeit des Lichtes gegen einen bewegten Stab, bezogen auf ein nicht mitbewegtes System, ist z. B. nach wie vor die Vektorsumme aus seiner Geschwindigkeit gegen das System und der des Stabes; die Erklärung des Michelsonschen Versuches, wie wir sie in § 2 gegeben haben, bleibt daher (abgesehen von der Modifikation, zu welcher die Lorentz-Kontraktion nötigt) auch in der Relativitätstheorie richtig.

parallel zu y, $\mathfrak{v}_1$ wie bisher $\mathfrak{v}$ parallel zu x, so erhält nach (33) unter der Annahme, daß man $\mathfrak{v}_2$ zu $\mathfrak{v}_1$ addiert, indem man v_1 statt v, v_2 statt $\mathfrak{q}'_y$ und $\mathfrak{q}'_x = \mathfrak{q}'_z = 0$ setzt, die resultierende Geschwindigkeit $\mathfrak{q}_1$ die Komponenten:

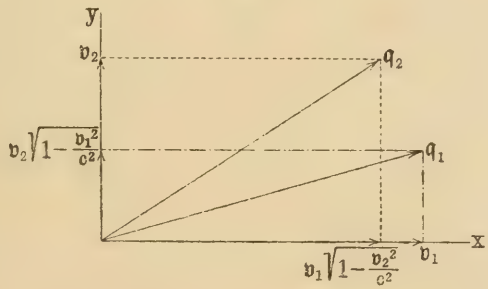
$$\mathfrak{q}_{1x} = v_1, \qquad \mathfrak{q}_{1y} = v_2\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}};$$

wenn aber umgekehrt $\mathfrak{v}_1$ zu $\mathfrak{v}_2$ addiert wird, wobei die Indices 1 und 2 und ferner die x- und die y-Richtung ihre Rolle vertauschen, so ergibt sich eine Geschwindigkeit $\mathfrak{q}_2$ mit den Komponenten:

$$\mathfrak{q}_{2x} = v_1\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}, \qquad \mathfrak{q}_{2y} = v_2.$$

Der absolute Wert q ist in beiden Fällen derselbe [vgl. auch die in q' und v symmetrische Beziehung (37)], aber die Richtungen

Fig. 5.



sind verschieden (Fig. 5). Denken wir uns ein materielles rechtwinkliges Dreieck mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ parallel der ersten Kathete verschoben, und führen an der zweiten Kathete einen Zeichenstift mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ entlang, so beschreibt dessen Spitze auf der Zeichenebene die Strecke $\mathfrak{q}_1$ in der Zeiteinheit. Verschieben wir aber das Dreieck parallel der zweiten Kathete mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ und den Zeichenstift längs der ersten mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$, so beschreibt seine Spitze die Strecke $\mathfrak{q}_2$ [5]).

Nach (28) ist $v < c$. Lassen wir q' von 0 an wachsen: wie auch die Richtung von $\mathfrak{q}$ sein mag, der Nenner $c^2 + (\mathfrak{v}\mathfrak{q}')$ in (35) kann nicht verschwinden, solange $q' \leqq c$ bleibt. Die rechte

Seite bleibt daher positiv und endlich, bis sie für $q' = c$ verschwindet.

Dem Wert $q' = 0$ entspricht natürlich der Wert $\mathfrak{q} = \mathfrak{v}$, welcher auch (35) befriedigt. Wächst q' stetig von diesem Wert an, so muß sich auch q stetig ändern, und zwar so, daß die linke Seite von (35), $\frac{c^2 - q^2}{c^2 - (\mathfrak{v}\mathfrak{q})}$, ebenso wie die rechte positiv bleibt, bis $q' = c$ wird. Dazu aber muß notwendigerweise einem Wert $q' < c$ auch ein Wert $q < c$, dem Wert $q' = c$ aber $q = c$ entsprechen. Zwei Unterlichtgeschwindigkeiten addiert geben daher immer wieder eine Unterlichtgeschwindigkeit. Die Addition der Lichtgeschwindigkeit zu einer Unterlichtgeschwindigkeit liefert die Lichtgeschwindigkeit. Die letztere spielt in der Physik durchaus die Rolle der unendlich großen Geschwindigkeit, insofern man sie durch keine Häufung von Unterlichtgeschwindigkeiten jemals erreichen kann. Darum bildet auch die Festsetzung $v < c$ keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Aber nicht nur die Geschwindigkeiten der Körper, sondern auch die physikalischer Wirkungen aller Art, mögen sie sich im Vakuum oder in der Materie fortpflanzen, können die Lichtgeschwindigkeit c nicht überschreiten. Pflanzte sich nämlich die Wirkung eines zur Zeit t im Punkte $A(x = x_A,\ y = z = 0)$ eintretenden Ereignisses im System K mit der Geschwindigkeit $V > c$ nach dem Punkt $B(x = x_B,\ y = z = 0)$ fort, so träfe sie dort um die Zeit

$$\Delta t = \frac{x_B - x_A}{V}$$

später ein. Nach den letzten der Gleichungen (XI) wäre dann die Zeitdauer dieser Fortpflanzung, bezogen auf K':

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t \frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Man könnte somit durch Wahl eines hinreichend großen Wertes für die Unterlichtgeschwindigkeit v erreichen, daß $\Delta t'$ Null und selbst negativ wird, d. h. es gäbe berechtigte Systeme, in welchen die Wirkung in B zeitlich der Ursache in A vorausgeht; das ist aber unmöglich, weil das in Frage kommende Naturgesetz im

Widerspruch zum Relativitätsprinzip beim Übergang von K zu K' nicht unverändert bliebe, wenn Ursache und Wirkung in zeitlicher und deshalb auch in kausaler Beziehung dabei ihre Rollen vertauschten.

Nur scheinbar wird diese Folgerung aus dem Relativitätsprinzip durch die Tatsache widerlegt, daß in dispergierenden Körpern für manche Spektralbereiche der Brechungsindex $n < 1$, also die „Lichtgeschwindigkeit" $\frac{c}{n} > c$ ist. $\frac{c}{n}$ ist nämlich die Geschwindigkeit, mit welcher die Phasen periodischer Wellen im stationären Zustande, d. h. wenn diese sich über den ganzen Raum ausgebreitet haben, fortschreiten. Für die Ausbreitung einer plötzlich auftretenden elektromagnetischen Störung hat sie keine unmittelbare Bedeutung. Der erste Vorläufer solcher Störung, der Wellenkopf, pflanzt sich vielmehr der Elektronentheorie zufolge stets mit der Lichtgeschwindigkeit c fort [Sommerfeld [6]].

Auch wenn man über ein (in einem berechtigten System) ruhendes Lineal ein zweites, ihm nahezu paralleles hinwegführt, kann der Schnittpunkt beider leicht mit Überlichtgeschwindigkeit wandern; denn seine Geschwindigkeit ist gleich der des zweiten Lineals dividiert durch den Winkel zwischen beiden und kann durch Verringerung dieses Winkels über jede Grenze gesteigert werden. Dies enthält keinen Widerspruch zu dem Obigen; denn der Schnittpunkt ist kein materieller Punkt, auch kann er nicht benutzt werden, um physikalische Wirkungen längs des ruhenden Lineals zu übertragen. Es wäre zwar leicht, Mechanismen auf diesem anzubringen, welche im Moment, da der Schnittpunkt über sie hinstreicht, irgend welche physikalische Ereignisse, etwa Glockenzeichen, auslösen; und man kann dann in gewissem Sinne behaupten, daß dies Glockenzeichen mit Überlichtgeschwindigkeit fortschreitet. Läßt man aber eine beliebige Zahl dieser Apparate wieder fort, so arbeiten die anderen genau so wie vorher — ein sicheres Zeichen, daß diese Glockenzeichen nicht als Ursache und Wirkung miteinander verknüpft sind. Ihre gemeinsame Ursache liegt vielmehr in der Bewegung des zweiten Lineals.

Im Widerspruch zu den obigen Sätzen stände es hingegen, wenn sich der folgende Fall verwirklichen ließe: „Wir bringen in einem Punkt B des ruhenden Lineals wieder eine der genannten Einrichtungen an. Anfänglich ruht auch das zweite Lineal; der

Schnittpunkt beider möge in diesem Stadium mit dem Punkt A des ersten zusammenfallen. Dann aber ereignet sich in A irgend ein Geschehnis, infolgedessen sich das zweite Lineal so gut wie augenblicklich in gleichförmige Bewegung setzt. Der Schnittpunkt durchläuft dann das ruhende Lineal als Signal vom Eintreten des Ereignisses in A, und das vor ihm in B ausgelöste Ereignis wird Wirkung der Ursache, die sich in A zugetragen hat. Die Übertragung von A nach B erfolgt mit Überlichtgeschwindigkeit."

Warum läßt sich nun der zwischen den Anführungszeichen geschilderte Vorgang nicht verwirklichen? Wäre das zweite Lineal, wie soeben angenommen, wirklich starr und keiner Formänderung zugänglich, so müßte er in der Tat ausführbar sein. Die Übertragung des von A ausgehenden Bewegungsantriebes müßte dann durch die elastischen Kräfte momentan erfolgen. Und damit kommen wir auf den Grund des Widerspruches. Die Annahme eines starren Körpers ist mit der Relativitätstheorie unverträglich. Das Lineal baucht sich unter allen Umständen zunächst in A aus und bleibt nicht gerade; der Schluß auf die Überlichtgeschwindigkeit des Schnittpunktes beruhte aber wesentlich auf seiner Geradheit.

Diese Unmöglichkeit des starren Körpers stellt nicht etwa eine mehr oder minder zufällige Folgerung aus dem Einsteinschen Relativitätsprinzip dar, sondern ist aufs engste mit dessen Grundlagen verknüpft. Im Abschnitt a von § 1b sahen wir, daß nur die Galilei-Transformation von einem Inertialsystem zu einem anderen führt, wenn alle Strecken in beiden Bezugssystemen die gleiche Länge haben sollen. Der klassischen Dynamik erscheint diese Bedingung durch den vollkommen starren Körper gesichert, den sie als den für den Gedanken erlaubten, weil keinem Naturgesetz widersprechenden, Grenzfall des festen Körpers betrachtet. Man kann geradezu sagen, daß sie und ihr Relativitätsprinzip zu einem wesentlichen Teil auf der Idee des starren Körpers beruht. Erst der Michelson-Versuch hat uns gelehrt, daß dieser Grenzübergang physikalisch unzulässig ist.

§ 8. Minkowskis geometrische Interpretation der Lorentz-Transformation.

Das Relativitätsprinzip, wie es im § 6 ausgesprochen und in der Lorentz-Transformation (XI) mathematisch formuliert wurde, enthält die Grundlagen der Relativitätstheorie vollständig; alle Folgerungen, die wir später ziehen werden, lassen sich aus dem

Obigen ableiten. Doch werden die Rechnungen dabei zum Teil wenig elegant und umständlich, vor allem, weil man bei jedem Vektor die Komponente parallel zur Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ anders umrechnen muß, als die dazu senkrechten. Es ist das große Verdienst des so früh verstorbenen Göttinger Mathematikers Hermann Minkowski, eine geometrische Interpretation geschaffen zu haben, welche diese Schwierigkeit umgeht und wegen der Eleganz, welche sie den Rechnungen der Relativitätstheorie verleiht, ein fast unentbehrliches Hilfsmittel für deren sichere Handhabung bildet.

Im allgemeinen werden von einer Lorentz-Transformation alle drei Koordinaten betroffen. Nur unsere spezielle Annahme über die Lage der Achsenkreuze in den Systemen K und K' brachte für y- und z-Koordinate die identische Transformation in (XI) hervor. Da aber auch die Zeit verändert werden muß, so sieht man leicht, daß eine geometrische Analogie nur in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit bestehen kann. Daß eine solche unserer Anschauung unzugänglich ist, darf uns nicht schrecken; es handelt sich dabei nur um die symbolische Darstellung gewisser analytischer Beziehungen zwischen vier Variablen. Wir bezeichnen diese Mannigfaltigkeit als „die Welt“ und wählen als „Weltkoordinaten“ die Raumkoordinaten x, y, z und die Zeitkoordinate

$$u = ct \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Die x, y, z-Achsen sollen aufeinander senkrecht stehen; die u-Achse vorläufig auch auf den drei genannten Achsen, d. h. in der xu-Ebene sollen zunächst x und u gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten sein, und Entsprechendes soll in der yu- und zu-Ebene gelten. Es gibt dann sechs paarweise aufeinander senkrecht stehende Koordinatenebenen und vier aufeinander senkrechte (dreidimensionale) Koordinatenräume. Einen Punkt (x, y, z, u) dieser Mannigfaltigkeit nennen wir einen „Weltpunkt“; er repräsentiert ein am Ort x, y, z zur Zeit $t = \frac{u}{c}$ stattfindendes Ereignis. Für jeden materiellen Punkt sind die Raumkoordinaten Funktionen der Zeit; er bestimmt also eine Kurve in der Welt, eine „Weltlinie“. Bei gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ ist sie eine Gerade, deren Winkel gegen die u-Achse gleich $arc\,tg\,\frac{q}{c}$, also, weil $q < c$, kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist; im allgemeinen ist sie eine beliebige krumme Linie, deren Neigung gegen die u-Achse aber nie den angegebenen Betrag erreicht.

In dem speziellen Fall des § 6, daß die x- und x'-Achse der Translationsgeschwindigkeit parallel sind, spielt sich die Transformation allein in der xu-Ebene ab, welche wir als Zeichenebene benutzen wollen (Fig. 6). In dieser zeichnen wir die gleichseitigen Hyperbeln:

$$x^2 - u^2 = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

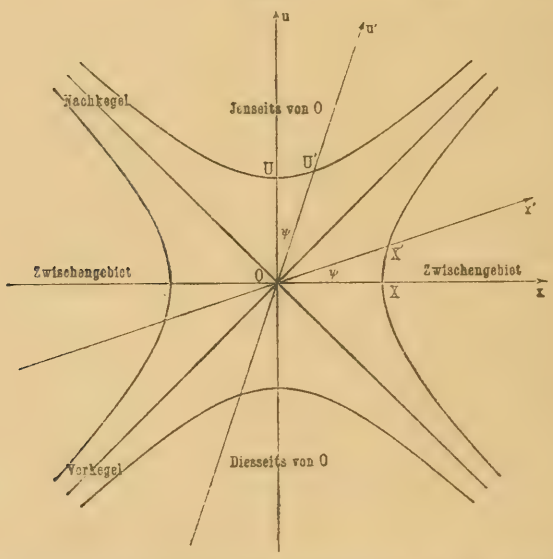
$$x^2 - u^2 = +1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

sowie ihr gemeinsames Asymptotenpaar:

$$x^2 - u^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Vom Nullpunkt O ziehen wir nach irgend einem Punkt U' desjenigen Astes der ersteren, für welchen u positiv ist, die Gerade;

Fig. 6.



sodann eine zweite Gerade nach einem Punkt X' des Astes $x > 0$ der zweiten Hyperbel; X' bestimmen wir so, daß die Asymptote $x = u$ die Winkelhalbierende wird, d. h. daß OU' und OX' konjugierte Durchmesser für beide Hyperbeln (39) und (40) werden. Fällt U' auf die u-Achse nach U, so fällt X' mit X zusammen. Die Lorentz-Transformation (XI) besteht darin, daß man an Stelle der Geraden OU und OX als Achsen OU' und

OX', und statt der Strecken OU und OX als Einheiten die Strecken OU' und OX' verwendet.

In der Tat: Die Geraden OU' und OX' haben die Gleichungen

$$x = \beta u, \quad u = \beta x, \quad |\beta| < 1.$$

Die Koordinaten von U' und X' sind infolgedessen nach (39) und (40):

$$\left.\begin{aligned} u_{U'} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x_{U'} &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ u_{X'} &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x_{X'} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (42)$$

Nun soll aber im gestrichenen System

$$u'_{U'} = x'_{X'} = 1, \; u'_{X'} = x'_{U'} = 0$$

werden. Die vier bei einer linearen Transformation von x, u auf x', u' verfügbaren Konstanten sind hierdurch eindeutig bestimmt; die Transformationsgleichungen müssen also lauten:

$$x' = \frac{x - \beta u}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u' = \frac{u - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \ldots\ldots (43)$$

sie gehen nach (38) in (XI) über, wenn man

$$\beta = \frac{v}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

setzt. Der Ausdruck $x^2 - u^2$, und ebenso $x^2 + y^2 + z^2 - u^2$, bleibt daher bei der Substitution (43) invariant. Die Gleichungen der beiden Hyperbeln und ihres Asymptotenpaares lauten im gestrichenen System ebenso wie im ungestrichenen. Der Winkel ψ in Fig. 6 ist durch die Gleichung

$$tg\,\psi = \beta = \frac{v}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

bestimmt.

Offenbar kann man nach jedem Weltpunkt W der UX-Ebene, für welchen $u^2 > x^2$ ist, von O aus eine Zeitachse ziehen, mit der Richtung $\overrightarrow{OW}$, wenn $u > O$, mit der Richtung $\overrightarrow{WO}$, wenn $u < O$ ist; denn es gibt stets einen zu OW konjugierten Durchmesser als x'-Achse. Umgekehrt kann man jeden Weltpunkt, für welchen $u^2 < x^2$ ist, mit O „gleichzeitig“ machen, indem man die Gerade OW mit passender Richtung zur x'-Achse und den ihr konjugierten Durchmesser zur u'-Achse wählt.

Um die allgemeine Lorentz-Transformation darzustellen, bei welcher die räumlichen Achsenkreuze x, y, z und x', y', z' beliebig zur Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ orientiert sind, haben wir diese Konstruktion vierdimensional auszugestalten. An Stelle der Hyperbeln treten dann der zweischalig-hyperbolische Raum

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -1 \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

und der einschalig-hyperbolische Raum

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = +1 \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

beide werden von dem Kegelraum

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

asymptotisch berührt. Die Hyperbeln in Fig. 6 und ihre Asymptoten sind die Schnitte dieser dreidimensionalen Räume mit der $u\,x$-Ebene.

Jetzt wählen wir auf der positiven Schale des zweischaligen Hyperbelraumes (46) einen beliebigen Punkt U' mit den Koordinaten $x_{U'}$, $y_{U'}$, $z_{U'}$, $u_{U'}$, und ziehen nach ihm von O aus die Gerade. Wir konstruieren sodann den diesem Durchmesser konjugierten Durchmesserraum

$$x\,x_{U'} + y\,y_{U'} + z\,z_{U'} - u\,u_{U'} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

welcher den einschaligen Hyperbelraum (47) in einem Ellipsoid schneidet. Fällt U' in den Scheitel U des ersteren Hyperbelraumes, so wird der konjugierte Durchmesserraum zum $x\,y\,z$-Raum ($u = 0$) und das Ellipsoid zur Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

alle Strecken von O nach einem Punkte dieser Kugel haben die gleiche Länge 1; sie ist die Maßfläche für Strecken im Raume $x\,y\,z$. Die allgemeine Lorentz-Transformation besteht nun darin, daß man statt der Geraden $O\,U$ als u-Achse und der Strecke $O\,U$ als Einheit, sowie statt des $x\,y\,z$-Raumes mit der Kugel (50) als Maßfläche die Gerade $O\,U'$ mit $O\,U'$ als Einheitsstrecke zur u'-Achse und den ihr konjugierten Durchmesserraum mit dem genannten Ellipsoid als Maßfläche zum zugehörigen $x'\,y'\,z'$-Raum macht. (Die letztere Bedingung drückt aus, daß die Gleichung des Ellipsoids

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

lauten soll.)

Verändern wir zum Beweise zunächst das Koordinatensystem $x' y' z'$ durch eine im $x' y' z'$-Raume ausgeführte Drehung; dabei bleibt u' überhaupt unberührt, während die Summe $x'^2 + y'^2 + z'^2$ invariant ist; dasselbe gilt dann auch für den Ausdruck $x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2$. Wir können es durch diese Drehung erreichen, daß der Schnitt des $x' y' z'$-Raumes mit der durch die u und u'-Achse gelegten Ebene zur x'-Achse wird. Durch eine analoge Drehung des Koordinatensystems $x y z$ verlegen wir die x-Achse in dieselbe Ebene. Dann aber haben wir dieselben Verhältnisse wie in Fig. 6; $O X'$ und $O U'$ sind nach Konstruktion konjugierte Durchmesser der Hyperbel $x^2 - u^2 = -1$ geworden, und da $x^2 + y^2 + z^2 - u^2$ gegen die dort dargestellte spezielle Transformation invariant ist, so gilt dies auch für die soeben beschriebene verallgemeinerte Konstruktion, welche sich dadurch als eine Lorentz-Transformation erweist. Es gibt daher so viel berechtigte Systeme, wie Punkte in der positiven Schale des Hyperbelraumes (46), d. h. dreifach unendlich viele, wie schon oben erwähnt. Die Geschwindigkeit beider Systeme gegeneinander wird durch den Winkel ψ zwischen der u- und der u'-Achse gemäß Gleichung (45) bestimmt.

Der Kegelraum (48) teilt die Welt in drei Teile:

1. $u^2 > x^2 + y^2 + z^2$, $u > 0$. Nach jedem Weltpunkt W dieses Gebietes kann man eine Zeitachse u' mit der Richtung $\overrightarrow{O W}$ legen, es enthält die Weltpunkte „jenseits von O“, d. h. diejenigen, welche in allen berechtigten Systemen später als O sind.

2. $u^2 > x^2 + y^2 + z^2$, $u < 0$. Die Weltpunkte dieses Gebietes sind in allen Systemen früher als O, liegen „diesseits von O“. Man kann nach ihnen Zeitachsen mit der Richtung $\overrightarrow{W O}$ ziehen.

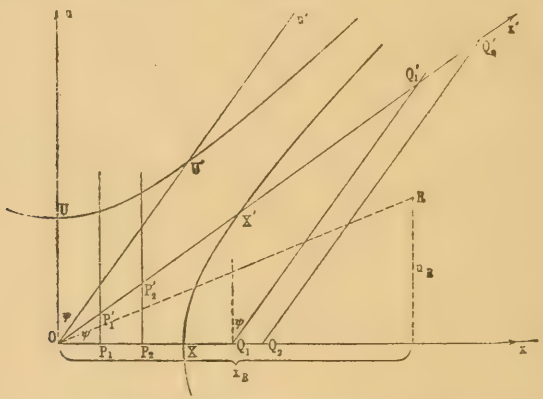
3. $u^2 < x^2 + y^2 + z^2$. Von den Punkten dieses „Zwischengebietes“ kann man drei beliebige mit O gleichzeitig machen, denn sie bestimmen mit O zusammen einen ebenen Raum, welcher mit dem ihm in bezug auf den Hyperbelraum (46) konjugierten Durchmesser ein berechtigtes Bezugssystem bildet. In diesen haben dann die drei Weltpunkte mit O die Zeit $t = u/c = 0$ gemeinsam.

An dem Kegelraum (48) selbst unterscheiden wir den „Vorkegel“, für welchen $u < 0$, und den „Nachkegel“, für welchen

$u > O$ ist. Der erstere umfaßt diejenigen Weltpunkte, welche Ereignisse darstellen, von denen eine etwaige, mit Lichtgeschwindigkeit fortschreitende Wirkung im Punkt $x = O$, $y = O$, $z = 0$ zur Zeit $t = O$ ankommt. Der Nachkegel stellt dagegen die Gesamtheit der Ereignisse dar, welche sich mit dem Eintreffen einer etwaigen, vom Ereignis O ausgehenden Lichtwirkung gleichzeitig abspielen. Wir sagen, die ersteren „senden Licht nach O“, die letzteren „empfangen Licht von dort“.

Wegen der Invarianz des Ausdruckes $x^2 + y^2 + z^2 - u^2$ haben die beiden hyperbolischen Räume (46) und (47) ebenso wie der Kegelraum (48) absolute Bedeutung; ihre Gleichung ist in allen Bezugssystemen dieselbe. Daher ist auch diese Einteilung

Fig. 7.



der Welt unabhängig vom Bezugssystem. Ihre physikalische Bedeutung erhellt aus folgender Betrachtung:

Es mögen die Weltpunkte O und R in Fig. 7 zwei in K ruhende, materielle Punkte A und B darstellen, den ersteren zur Zeit t $(= 0)$, in welchem von ihm irgend eine physikalische Wirkung ausgeht, den letzteren zu der Zeit t_R, in welcher diese Wirkung B erreicht. Könnte nun die Geschwindigkeit V, mit der sie fortschreitet, größer sein wie c, so wäre

$$u_R = c\,t_R = \left|x_R\right| \frac{c}{V} < \left|x_R\right|;$$

R gehörte dem Zwischengebiet von O an, wie dies auch in Fig. 7 gezeichnet ist. Es gäbe dann stets berechtigte Systeme, in denen

wie im System K' der Figur $u'_R < O$, d. h. R früher als O wäre; die Wirkung käme also in B an, bevor sich ihre Ursache in A zugetragen hat. Diese geometrische Überlegung widerlegt somit nochmals die Möglichkeit einer Überlichtgeschwindigkeit (vgl. S. 64 und 65). Es liegen eben alle Weltpunkte, welche O kausal beeinflussen kann, jenseits oder auf dem Nachkegel, alle, von denen O einen solchen Einfluß erleiden kann, diesseits oder auf dem Vorkegel von O. Punkte des Zwischengebietes können dagegen nie mit O in kausalem Zusammenhang stehen.

Für eine unendlich kleine Strecke auf der u'-Achse, oder einem ihr parallelen Kurvenstück, ist nach der zweiten der Gleichungen (43)

$$du' = \frac{du - \beta dx}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

aber nach der ersten dieser Gleichungen wegen $dx' = 0$

$$dx = \beta du;$$

also

$$du' = du\sqrt{1-\beta^2}, \text{ d. h. } dt' = dt\sqrt{1-\beta^2} \quad . \quad . \quad (51)$$

Diese Gleichung enthält wie die Formel (29), mit der sie identisch ist, den Satz, daß eine in K' ruhende Uhr, bezogen auf K, nachgeht. Bezeichnen wir mit dx, dy, dz die Projektionen der in der Zeit dt zurückgelegten Strecke auf die Koordinatenachsen, mit q die Geschwindigkeit, so ist

$$\frac{q}{c} dt = \beta dt = \frac{1}{c}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Ferner sind dx, dy, dz, du die Komponenten des in der Zeit dt durchlaufenden Weltlinienelementes. Nach (51) ist also

$$\left.\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c}\sqrt{du^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)} \\ &= dt\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

der Zeitzuwachs, welchen die Uhr anzeigt, während sie dies Element durchläuft. Man bezeichnet $d\tau$ als die Eigenzeit dieses Weltlinienelementes. Für ein endliches Stück einer Weltlinie findet man sie durch Integration. Die Eigenzeit eines Weltlinienstückes ist eine Invariante der Lorentz-Transformation. Dies erhellt schon aus ihrer physikalischen Bedeutung, denn die Zeiger-

stellungen der Uhr am Anfang und Ende dieses Stückes sind für alle Bezugssysteme dieselben; sodann erkennt man es auch daraus, daß der Ausdruck $du^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ in (52) sich ebenso transformiert, wie der invariante Ausdruck $u^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$. Zu beachten ist freilich, daß die Gleichung (52) zunächst nur für gleichförmig bewegte Uhren, d. h. für gerade Weltlinien abgeleitet ist. Im allgemeinen wird die Beschleunigung einen Einfluß auf den Gang haben. Nur wenn die Beschleunigung hinreichend gering, d. h. die Krümmung der Weltlinien hinreichend schwach ist, wird die Eigenzeit unmittelbar die angegebene physikalische Bedeutung haben. Wo die Grenze dafür liegt, hängt von der Beschaffenheit der Uhr ab. Stets aber ist die durch (52) definierte Eigenzeit ein mathematisch nützlicher Begriff.

Von allen Weltlinien, welche zwei gegebene Weltpunkte 1 und 2 verbinden, hat die gerade Verbindung die längste Eigenzeit. Denn legen wir parallel zu ihr die u-Achse — die Wahl des Bezugssystems ist ja wegen der Invarianz der Eigenzeit ganz beliebig —, so ist die Eigenzeit für diese Gerade nach (52) $\frac{1}{c}\int_1^2 du$, für eine andere Verbindungslinie aber

$$\frac{1}{c}\int_1^2 \sqrt{du^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)} < \frac{1}{c}\int_1^2 du.$$

Von den beiden Uhren, über die wir auf S. 58 und 59 sprachen, legt die eine die gerade Weltlinie von 1 nach 2 zurück, die andere aber eine gebrochene. Wir bestätigen hier, daß die zweite beim Wiederzusammentreffen zurückgeblieben ist; denn ihrer Weltlinie entspricht die kürzere Eigenzeit. Zugleich aber sieht man auf das anschaulichste die physikalische Verschiedenheit der beiden Bewegungen.

Kehren wir noch einmal zu Fig. 7 zurück. Die Endpunkte eines in K ruhenden, der x-Achse parallelen Stabes beschreiben geradlinige, der u-Achse parallele Weltlinien $P_1 P_1'$ und $P_2 P_2'$. Das Verhältnis $\frac{P_1 P_2}{O X}$ gibt seine Ruhlänge s^0 an. Ruht ein zweiter Stab in K', so sind die Weltlinien seiner Endpunkte zwei zur u'-Achse parallele Gerade $Q_1 Q_1'$ und $Q_2 Q_2'$ und seine Ruhlänge,

die ebenfalls gleich s^0 sein mag, wird durch den Quotienten $\frac{Q'_1 Q'_2}{O X'}$ dargestellt. Die Länge des ersten Stabes in K' ist aber $s' = \frac{P'_1 P'_2}{O X'}$, denn $\frac{O P'_1}{O X'}$ und $\frac{O P'_2}{O X'}$ sind die x'-Koordinaten seiner Endpunkte für den gleichen Wert (0) von t'. Die Länge des zweiten Stabes in K ist analog $s = \frac{Q_1 Q_2}{O X}$. Nun ist nach (42):

$$\frac{O X'}{O X} = \sqrt{x^2_{X'} + u^2_{X'}} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}},$$

ferner nach Fig. 7 und (45):

$$\frac{P'_1 P'_2}{P_1 P_2} = \frac{1}{\cos\psi} = \sqrt{1+\beta^2}, \quad \frac{Q_1 Q_2}{Q'_1 Q'_2} = \frac{O Q_1}{O Q'_1} = \frac{\sin(\measuredangle O Q'_1 Q_1)}{\sin(\measuredangle O Q_1 Q'_1)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\psi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)} = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Also ist für den ersten Stab

$$\frac{s'}{s^0} = \frac{P'_1 P'_2}{O X'} \cdot \frac{O X}{P_1 P_2} = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad . \; . \; (53)$$

und für den zweiten

$$\frac{s}{s^0} = \frac{Q_1 Q_2}{O X} \cdot \frac{O X'}{Q'_1 Q'_2} = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad . \; . \; (54)$$

Wir bestätigen so den schon in § 7 gefundenen Satz, daß ein Körper, von dem mitbewegten System aus betrachtet, länger erscheint, als von jedem anderen. Da in Fig. 7 $Q'_1 Q'_2 : O X' = P_1 P_2 : O X$ gewählt ist, so ist, wie man sieht, $Q_1 Q_2 < P_1 P_2$.

§ 9. Die Lorentz-Transformation als imaginäre Drehung.

Analytisch eleganter noch ist es, wenn man als Zeitvariable die imaginäre Größe

$$l = i u = i c t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (55)$$

benutzt, wobei freilich jedem reellen Weltpunkt ein imaginärer Punkt der x, y, z, l-Mannigfaltigkeit entspricht. Dabei wird

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + l^2 \quad . \; . \; . \; (56)$$

Eine Lorentz-Transformation ist, wie wir in § 6 sahen, durch die Invarianz dieses Ausdruckes gekennzeichnet.

Betrachten wir zunächst wieder den einfachen Fall der in den (XI) und (43) ausgedrückten Transformation, von der nur x und t betroffen wird. Führen wir statt u in (43) l ein, so finden wir:

$$x' = \frac{x + i\beta l}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad l' = \frac{l - i\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \cdots\cdots (57)$$

Nun können wir einen imaginären Winkel φ so definieren, daß

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \cdots\cdots (58)$$

wird. Mit dem Winkel ψ der Fig. 6 und 7 hängt er nach (45) zusammen durch die Beziehung

$$tg\,\varphi = i\beta = i\frac{v}{c} = i\,tg\,\psi \quad \cdots\cdots (59)$$

Drückt man in (57) β durch φ aus, so findet man die Gleichungen:

$$x' = x\cos\varphi + l\sin\varphi, \quad l' = -x\sin\varphi + l\cos\varphi \quad \cdots (60)$$

und als ihre Umkehrungen:

$$x = x'\cos\varphi - l'\sin\varphi, \quad l = x'\sin\varphi + l'\cos\varphi \quad \cdots (61)$$

Wären l und φ reelle Größen, so bedeutete dies, daß das Koordinatensystem x', l' aus dem System x, l durch Drehung (im positiven Sinne) um den Winkel φ hervorgeht. Aber auch hier können wir diese Ausdrucksweise unbedenklich beibehalten. Die spezielle Lorentz-Transformation (XI) ist eine Drehung des Achsenkreuzes in der xl-Ebene um den durch (58) definierten, imaginären Winkel φ *).

Führt man mehrere solche Transformationen in der xl-Ebene mit den Drehwinkeln φ_1, $\varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$ hintereinander aus, so resultiert eine einzige Drehung um den Winkel

$$\varphi = \Sigma\,\varphi_n.$$

Die Geschwindigkeit des $n$ten gegen das $(n-1)$te System, ist nach (59):

$$v_n = -i\,c\,tg\,\varphi_n,$$

---

*) Der Unterschied der Geometrien im x, y, z, l- und im x, y, z, u-Raume ist im Grunde der folgende: Im ersteren haben wir mit der euklidischen Geometrie, aber mit einer imaginären Koordinate zu tun; im letzteren sind die Koordinaten reell, dafür aber wird die Geometrie pseudoeuklidisch [Klein[1])]. Der imaginären, euklidischen Drehung um φ entspricht die reelle, pseudoeuklidische Drehung um ψ.

die des letzten gegen das erste entsprechend

$$v = -ic\,tg(\sum \varphi_n).$$

Die Funktion

$$tg\,x = -i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

wächst aber, wenn ihr Argument die rein imaginären Werte von Null bis $i\infty$ durchläuft, von Null nur bis zum Werte i. Daher ist unter allen Umständen $tg(\sum \varphi_n) < i$ und $v < c$. Die Lichtgeschwindigkeit bleibt, wie wir schon in § 7 sahen, unerreichbar.

Beschränkt sich $\sum \varphi_n$ auf zwei Glieder, so folgt:

$$v = -ic\,tg(\varphi_1 + \varphi_2) = -ic\frac{tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2}{1 - tg\,\varphi_1 \,.\, tg\,\varphi_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Das Einsteinsche Additionstheorem für gleichgerichtete Geschwindigkeiten [vgl. die erste der Beziehungen (33)] geht so unmittelbar aus dem Additionstheorem der Tangensfunktion hervor[2]).

Schon in § 8 (S. 71) sahen wir, daß sich die allgemeinste Lorentz-Transformation auf Drehungen der räumlichen Achsenkreuze in den Systemen K und K', sowie auf die spezielle Transformation (43) zurückführen läßt, welche mit (XI) und (57) identisch ist. Alle Eigentümlichkeiten der allgemeinen können wir daher auch schon an der letzteren Transformation erkennen; so muß z. B. auch die allgemeine sich stets als imaginäre Drehung in der durch die l- und l'-Achse bestimmten Ebene auffassen lassen, zu welcher nur noch die unwesentlichen reellen Drehungen der Koordinatensysteme x, y, z und x' y' z' hinzutreten.

Analytisch eleganter aber ist es, ganz allgemein diejenigen linearen Transformationen des Weltkoordinatensystems x, y, z, l zu untersuchen, welche eine Lorentz-Transformation darstellen, d. h. bei denen der Ausdruck (56) $x^2 + y^2 + z^2 + l^2$ invariant bleibt. Diese Aufgabe entspricht durchaus der Frage nach den Substitutionen, welche eine Drehung des Raumkoordinatensystems x, y, z darstellt. Denn diese sind durch die Invarianz von $x^2 + y^2 + z^2$ gekennzeichnet. (Vgl. den Anhang unter b.)

Soll bei der linearen Substitution

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1^{(1)} x + \alpha_1^{(2)} y + \alpha_1^{(3)} z + \alpha_1^{(4)} l \\ y' &= \alpha_2^{(1)} x + \alpha_2^{(2)} y + \alpha_2^{(3)} z + \alpha_2^{(4)} l \\ z' &= \alpha_3^{(1)} x + \alpha_3^{(2)} y + \alpha_3^{(3)} z + \alpha_3^{(4)} l \\ l' &= \alpha_4^{(1)} x + \alpha_4^{(2)} y + \alpha_4^{(3)} z + \alpha_4^{(4)} l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (62)$$

$x^2 + y^2 + z^2 + l^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + l'^2$ werden, so müssen, wie die Rechnung zeigt, die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_n \alpha_n^{(m)2} = 1 & m = 1, 2, 3, 4 \\ \sum_n \alpha_n^{(m)} \alpha_n^{(o)} = 0 & m, o = 1, 2, 3, 4 \quad m \lessgtr o \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (63)$$

erfüllt sein, welche durchaus den Orthogonalitätsbedingungen (S. 280) analog gebaut sind. Von den 16 Koeffizienten sind also nur 6 willkürlich *). Fassen wir die Gleichungen (62) einmal mit $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$, $\alpha_4^{(1)}$ zusammen, dann mit $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}$, $\alpha_3^{(2)}$, $\alpha_4^{(2)}$ usw., so findet man als ihre Auflösungen nach den ungestrichenen Größen:

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha_1^{(1)} x' + \alpha_2^{(1)} y' + \alpha_3^{(1)} z' + \alpha_4^{(1)} l' \\ y = \alpha_1^{(2)} x' + \alpha_2^{(2)} y' + \alpha_3^{(2)} z' + \alpha_4^{(2)} l' \\ z = \alpha_1^{(3)} x' + \alpha_2^{(3)} y' + \alpha_3^{(3)} z' + \alpha_4^{(3)} l' \\ l = \alpha_1^{(4)} x' + \alpha_2^{(4)} y' + \alpha_3^{(4)} z' + \alpha_4^{(4)} l' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (64)$$

so daß nach Analogie von (63) auch

$$\sum_n \alpha_m^{(n)2} = 1, \qquad \sum_n \alpha_m^{(n)} \alpha_0^{(n)} = 0 \quad \ldots\ldots (65)$$

ist.

Die Determinante der Koeffizienten nennen wir A:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} & \alpha_4^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \alpha_4^{(2)} \\ \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & \alpha_4^{(3)} \\ \alpha_1^{(4)} & \alpha_2^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & \alpha_4^{(4)} \end{vmatrix} = \pm \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \alpha_3^{(3)} \alpha_4^{(4)} \quad \ldots (66)$$

ihre Unterdeterminanten bezeichnen wir, wie üblich, mit $A_m^{(n)}$. Die Auflösung von (62) nach x, y, z, l muß nun die Form haben:

$$A x = A_1^{(1)} x' + A_2^{(1)} y' + A_3^{(1)} z' + A_4^{(1)} l' \text{ usw.},$$

daher muß nach (64)

$$\alpha_m^{(n)} = A_m^{(n)} : A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

sein. Setzt man diese Werte in (66) ein, so folgt für die Determinante der Unterdeterminanten:

$$\pm A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)} A_4^{(4)} = A^5.$$

---

*) Von diesen sechs Freiheitsgraden kommen drei auf Drehungen des räumlichen Achsenkreuzes $x\,y\,z$, so daß nur drei für den Übergang von einem berechtigten System zum anderen übrig bleiben. (Vgl. § 6 und 8.)

Nach einem bekannten Satze ist diese aber, wenn die Zahl der Zeilen und Kolonnen n ist, A^{n-1}, in unserem Falle also A^3, deshalb muß

$$A = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

sein; denn $A = -1$ ist ausgeschlossen, weil A eine stetige Funktion der Koeffizienten ist und bei der identischen Transformation $x' = x$ usw. offenbar den Wert $+1$ hat. Nach (67) ist dann

$$\alpha_m^{(n)} = A_m^{(n)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Wir können die Transformationen (62) und (64) zusammenfassen in das ohne weitere Erklärung verständliche Schema:

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & x' & y' & z' & l' \\
\hline
x & \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} & \alpha_4^{(1)} \\
\hline
y & \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \alpha_4^{(2)} \\
\hline
z & \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & \alpha_4^{(3)} \\
\hline
l & \alpha_1^{(4)} & \alpha_2^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & \alpha_4^{(4)} \\
\hline
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{XII})$$

Soll die Substitution (XII) eine Lorentz-Transformation darstellen, so müssen die Koeffizienten 1. den Orthogonalitätsbedingungen (63) bzw. (65) genügen; 2. müssen diejenigen, welche den Index 4 einmal enthalten, rein imaginär, alle anderen reell sein; 3. muß ihre Determinante und $\alpha_4^{(4)}$ positiv sein. Die Bedingungen 2. haben wir hinzugefügt, damit aus reellen Werten x, y, z und einem imaginären Werte von l immer wieder für x', y', z' reelle und für l' imaginäre Werte hervorgehen. $\alpha_4^{(4)}$ aber muß positiv sein, weil $\alpha_4^{(4)}$ stets der Kosinus des imaginären Winkels φ zwischen der l- und der l'-Achse ist, also [vgl. (58)]:

$$\alpha_4^{(4)} = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Man sieht dies am leichtesten ein, wenn man die allgemeine Transformation in der oben ausgeführten Weise auf die spezielle Substitution (57) zurückführt. Diese spezielle Transformation, bei welcher die y- und z-Koordinate ungeändert bleiben, findet man, wenn man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2^{(2)} = \alpha_3^{(3)} = 1, \quad \alpha_1^{(1)} = \alpha_4^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ -\alpha_4^{(1)} = \alpha_1^{(4)} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (70)$$

alle anderen Koeffizienten gleich Null setzt. Ihr Schema sieht also folgendermaßen aus:

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c|c|} & x' & y' & z' & l' \\ \hline x & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \hline y & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline l & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \hline \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (71)$$

Für die Unterdeterminanten zweiter Ordnung $A_{mn}^{m'n'}$ gelten den Formeln (63) und (65) entsprechende Beziehungen. (Die oberen Indices beziehen sich stets auf die Zeilen, die unteren auf die Kolonnen von A.) Wie die Koeffizienten selbst sind diese Unterdeterminanten reell, wenn der Index 4 in ihnen keinmal oder zweimal, rein imaginär, wenn er einmal auftritt.

Nach einem bekannten Satze ist für eine beliebige Determinante A

$$A \begin{vmatrix} \alpha_3^{(3)} & \alpha_3^{(4)} \\ \alpha_4^{(3)} & \alpha_4^{(4)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Nach (67) und (68) folgt hieraus:

$$A_{12}^{12} = A_{34}^{34};$$

oder allgemeiner, wenn wir mit $B_{mn}^{m'n'}$ die $A_{mn}^{m'n'}$ ergänzende Unterdeterminante bezeichnen:

$$A_{mn}^{m'n'} = B_{mn}^{m'n'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (72)$$

Weiter sagt ein bekannter Satz über die Darstellbarkeit einer Determinante als Summe aus Produkten der Unterdeterminanten:

$$A = \sum_m \sum_n A_{mn}^{m'n'} \, B_{mn}^{m'n'}.$$

Gemäß (68) und (72) schließen wir hieraus:

$$\sum_m \sum_n A_{mn}^{m'n'2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (73)$$

Denken wir uns ferner die Determinante $\mathfrak{A}$ so aus A abgeleitet, daß man die Glieder der zweiten Zeile durch die entsprechenden der dritten ersetzt; sie ist natürlich Null. Also gilt nach dem soeben benutzten Satz:

$$\sum_m \sum_n \mathfrak{A}_{mn}^{12} \, \mathfrak{B}_{mn}^{12} = 0.$$

Nun ist aber

$$\mathfrak{A}_{mn}^{12} = A_{mn}^{12}, \quad \mathfrak{B}_{mn}^{12} = B_{mn}^{13},$$

also nach (72):

$$\sum_m \sum_n A_{mn}^{12} A_{mn}^{13} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (74)$$

Endlich denken wir uns die Determinante $\mathfrak{A}$ so gebildet, daß in A nicht nur die Glieder der zweiten durch die der dritten Zeile, sondern auch die der ersten durch die entsprechenden der vierten ersetzt werden. Dann ist:

$$\mathfrak{A}_{mn}^{12} = A_{mn}^{12}, \quad \mathfrak{B}_{mn}^{12} = B_{mn}^{43},$$

also

$$\sum_m \sum_n A_{mn}^{12} A_{mn}^{34} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (75)$$

Man kann wegen der Gleichwertigkeit an Zeilen und Kolonnen in (73), (74), (75) die oberen mit den unteren Indices vertauschen.

Ordnet man die Unterdeterminanten nach dem Schema:

A_{14}^{14}	A_{24}^{14}	A_{34}^{14}	A_{23}^{14}	A_{31}^{14}	A_{12}^{14}
A_{14}^{24}	A_{24}^{24}	A_{34}^{24}	A_{23}^{24}	A_{31}^{24}	A_{12}^{24}
A_{14}^{34}	A_{24}^{34}	A_{34}^{34}	A_{23}^{34}	A_{31}^{34}	A_{12}^{34}
A_{14}^{23}	A_{24}^{23}	A_{34}^{23}	A_{23}^{23}	A_{31}^{23}	A_{12}^{23}
A_{14}^{31}	A_{24}^{31}	A_{34}^{31}	A_{23}^{31}	A_{31}^{31}	A_{12}^{31}
A_{14}^{12}	A_{24}^{12}	A_{34}^{12}	A_{23}^{12}	A_{31}^{12}	A_{12}^{12}

so sagen die Gleichungen (73), (74) und (75) und ihre (nicht hingeschriebenen) Verallgemeinerungen aus: Quadriert und addiert man die Glieder einer Zeile oder Kolonne, so

erhält man den Wert 1; multipliziert man entsprechende Glieder zweier verschiedener Zeilen oder Kolonnen, so findet man bei der Addition den Wert Null.

Die Koeffizienten α_m^n und die Unterdeterminanten $A_{m,n}^{m',n'}$ werden im folgenden bei der Definition der Vierer- und Sechservektoren Verwendung finden.

Bei der speziellen Transformation (57) sind [vgl. (70)] die Unterdeterminanten:

$$\left.\begin{aligned} A_{14}^{14} &= A_{23}^{23} = 1, \\ A_{12}^{12} = A_{31}^{31} = A_{24}^{24} = A_{34}^{34} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cos\varphi \\ A_{24}^{12} = A_{31}^{34} = -A_{12}^{24} = -A_{34}^{31} &= \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot (76)$$

alle anderen Null. Das angegebene Schema hat somit das folgende Aussehen:

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 \\ \hline 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \hline \end{array}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot (77)$$

Man bestätigt an diesen Werten leicht die angegebenen Regeln.

IV. Weltvektoren und -tensoren.

§ 10. Vierer- und Sechservektoren.

Im dreidimensionalen Raum ist ein Vektor $\mathfrak{A}$ durch die drei Komponenten $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ definiert, welche sich bei der Drehung des Achsenkreuzes wie die Koordinaten selbst transformieren. Doch gibt es zwei durch ihre Symmetrie voneinander verschiedene

Arten. Ein polarer Vektor wird durch eine Strecke mit Richtungssinn dargestellt; jede Ebene durch diese Strecke ist Symmetrieebene; ein axialer dagegen durch ein ebenes Flächenstück mit Umlaufssinn; er hat als einzige Symmetrieebene diese Ebene selbst. Infolgedessen sollten eigentlich für die Transformation des letzteren Formeln gelten, in denen statt der Koeffizienten der Koordinatentransformation die Unterdeterminanten aus diesen auftreten; und nur weil nach den Orthogonalitätsbedingungen jede Unterdeterminante gleich dem entsprechenden Koeffizienten ist, tritt dieser Unterschied nicht hervor. Die einfachsten Repräsentanten beider Arten sind die Translations- und die Drehgeschwindigkeit. Außer den Vektoren treten noch als Tensoren bezeichnete gerichtete Größen auf (vgl. den Anhang). Es gilt jetzt, den Vektor- und Tensorbegriff vierdimensional zu erweitern. Der Leitstern dabei ist die formale Analogie der Lorentz-Transformation (XII) mit einer Drehung des Achsenkreuzes in drei Dimensionen.

a) Viererverktoren. Wir legen zunächst die Mannigfaltigkeit x, y, z, l zugrunde und bezeichnen als Viererverktor P den Inbegriff von vier Komponenten P_x, P_y, P_z, P_l, welche sich bei der Substitution (XII) wie die entsprechenden Koordinaten transformieren sollen, also:

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & P_{x'} & P_{y'} & P_{z'} & P_{l'} \\
\hline
P_x & \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} & \alpha_4^{(1)} \\
\hline
P_y & \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \alpha_4^{(2)} \\
\hline
P_z & \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & \alpha_4^{(3)} \\
\hline
P_l & \alpha_1^{(4)} & \alpha_2^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & \alpha_4^{(4)} \\
\hline
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (78)$$

Von diesen Komponenten sollen entweder die drei räumlichen P_x, P_y, P_z reell und P_l rein imaginär sein oder umgekehrt. Die Transformation ändert wegen der Realitätsverhältnisse der Koeffizienten $\alpha_m^{(n)}$ nichts an dieser Festsetzung. Alle Viererverktoren und nur solche werden mit großen griechischen Buchstaben bezeichnet.

Bei zwei Viererverktoren P und Φ ist das skalare Produkt

$$(P\Phi) = P_x\Phi_x + P_y\Phi_y + P_z\Phi_z + P_l\Phi_l \quad \ldots\ldots (79)$$

gegen die Lorentz-Transformation wegen der Orthogonalitätsbedingungen (63 bzw. 65) invariant; dasselbe gilt von dem absoluten Betrage eines Vierervektors P

$$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + P_l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (80)$$

Offenbar ist der Vierervektor durch eine gerichtete Strecke in vier Dimensionen dargestellt und bildet so das Analogon zum polaren Vektor in drei Dimensionen.

Wir werden im folgenden meist mit Vierervektoren zu tun haben, bei denen die l-Komponente imaginär, die drei anderen demnach reell sind. Gehen wir nach (55) zu der reellen Zeitvariablen $u = -il$ über, so haben wir statt P_l die reelle Komponente

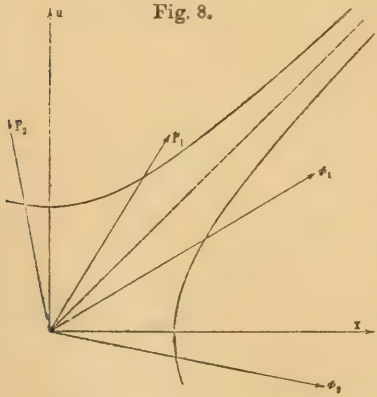
$$P_u = -i P_l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (81)$$

einzuführen. Das Quadrat des absoluten Wertes von P ist dann

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - P_u^2; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (82)$$

je nachdem es positiv oder negativ ist, nennen wir den Vektor „raumartig“ oder „zeitartig“. Stellen wir ihn nämlich als eine vom Punkte O in Fig. 6 gezogene Strecke dar, so weist er im ersten Falle nach einem Weltpunkte des Zwischengebietes, im zweiten nach einem Punkte diesseits oder jenseits von O. Ein raumartiger Vektor hat den Betrag R, wenn er bei dieser Darstellung bis zu einem Punkte des Hyperbelraumes $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = R^2$ reicht; ein zeitartiger hat den Betrag iR, wenn er nach einem Weltpunkte des Hyperbelraumes $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -R^2$ weist.

Fig. 8.



Ist das skalare Produkt $(P\Phi) = 0$, so sagen wir, die Vektoren P und Φ stehen aufeinander senkrecht. Doch ist dieser Ausdruck keineswegs im Sinne der euklidischen Geometrie zu verstehen; deuten wir beide als von O ausgehende Strecken, so sagt diese Bedingung vielmehr nach (49), daß Φ in dem zu P

bezüglich der Hyperbelräume (46) und (47) konjugierten Durchmesserraum liegt. Im Sinne dieser Festsetzung ist somit jedes berechtigte System x, y, z, u orthogonal. Zwei aufeinander senkrechte Vektoren können nicht beide zeitartig, wohl aber beide raumartig sein. In Fig. 8 stehen P_1, Φ_1 sowie P_2, Φ_2 aufeinander senkrecht. P_1 und P_2 sind zeitartig, Φ_1 und Φ_2 raumartig.

b) Erstes Beispiel: Die Vierergeschwindigkeit. Das Element einer Weltlinie ist als gerichtete Strecke ein Vierervektor, und zwar von zeitartiger Richtung. Dividieren wir seine Komponenten dx, dy, dz, dl durch c und seine nach Gleichung (52) in § 8 invariante Eigenzeit

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{du^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$
$$= \frac{1}{c}\sqrt{-(dx^2 + dy^2 + dz^2 + dl^2)} = dt\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}},$$

so finden wir die Komponenten der „Vierergeschwindigkeit" Y. Da aber $\frac{dx}{dt} = \mathfrak{q}_x$ ist usw., so haben nach der letzten Gleichung diese Komponenten den Wert:

$$\left.\begin{aligned} Y_x &= \frac{1}{c}\frac{dx}{d\tau} = \frac{\mathfrak{q}_x}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad Y_y = \frac{1}{c}\frac{dy}{d\tau} = \frac{\mathfrak{q}_y}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \\ Y_z &= \frac{1}{c}\frac{dz}{d\tau} = \frac{\mathfrak{q}_z}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad Y_l = \frac{1}{c}\frac{dl}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \\ &\left(\text{oder } Y_u = \frac{1}{c}\frac{du}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Sein absoluter Wert ist nach (80) oder (82):

$$|Y| = i. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

Der Vektorcharakter von Y spricht das Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeit für die allgemeinste Lorentz-Transformation (XII) aus; die spezielle, auf (XI) bezügliche Form (33) findet man daraus durch Benutzung des Schemas (71), wenn man in ihm nach (78) alle Koordinaten durch die entsprechenden Komponenten von Y ersetzt.

c) Zweites Beispiel: Die Viererbeschleunigung. Wiederholen wir die Differentiation nach $d\tau$, indem wir die Differenz der Vektoren Y für den Anfang und das Ende des Linienelementes

durch $d\tau$ dividieren, so gelangen wir zur „Viererbeschleunigung“

$$\dot{Y} = \frac{dY}{d\tau} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (85)$$

Sie steht, da nach (79), (85) und (84)

$$(Y\dot{Y}) = Y_x \frac{dY_x}{d\tau} + Y_y \frac{dY_y}{d\tau} + Y_z \frac{dY_z}{d\tau} + Y_l \frac{dY_l}{d\tau} = 0 \quad \cdot \quad (85\,\mathrm{a})$$

ist, stets auf der Vierergeschwindigkeit und damit auf der Weltlinie senkrecht, ist also stets raumartig.

Der absolute Wert der Viererbeschleunigung hat eine einfache Bedeutung. Auch bei einer beliebig gekrümmten Weltlinie, d. h. bei einer beliebig beschleunigten Bewegung, können wir für jeden Weltpunkt P ein Ruhsystem K^0 angeben. Jenes nämlich, dessen Zeitachse die Richtung der Weltlinie in diesem Punkt hat. In K^0 ist dann für den dem Weltpunkt P entsprechenden Augenblick $Y_x = Y_y = Y_z = 0$, $Y_l = i$, d. h. $\mathfrak{q} = 0$, weil die Vierergeschwindigkeit die Richtung der Weltlinie hat. Für einen in der Nähe von P liegenden Punkt der Weltlinie ist q bezogen auf dasselbe System unendlich klein, so daß man nach (83)

$$Y_x = \frac{\mathfrak{q}_x}{c} \quad Y_y = \frac{\mathfrak{q}_y}{c} \quad Y_z = \frac{\mathfrak{q}_z}{c} \quad Y_l = i$$

setzen kann. Daraus, aus (85) und (52) folgt aber, daß die Viererbeschleunigung im Ruhsystem die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} \dot{Y}_{x^0} &= \frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{q}_x}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{q}_x}{dt} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{q}}^0_{x^0}, \\ \dot{Y}_{y^0} &= \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{q}}^0_{y^0}, \quad \dot{Y}_{z^0} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{q}}^0_{z^0}, \quad \dot{Y}_{l^0} = 0 \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (86)$$

hat. Nach (80) schließen wir weiter:

$$\left|\dot{Y}\right| = \frac{1}{c}\left|\dot{\mathfrak{q}}^0\right| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (87)$$

d. h. bis auf den Faktor $\frac{1}{c}$ ist der absolute Wert der Viererbeschleunigung gleich dem absoluten Wert der auf das Ruhsystem bezogenen „Ruhbeschleunigung“.

Wie sich aus der Vektoreigenschaft der Vierergeschwindigkeit das Additionstheorem der Geschwindigkeit ableiten läßt, so aus der Vektoreigenschaft der Viererbeschleunigung die Transformation für die Beschleunigung. Wir beschränken uns hier

wiederum auf die spezielle in (XI) betrachtete Lorentz-Transformation und setzen noch besonders voraus, daß das System K' mit dem Ruhsystem K^0 identisch ist; so wird die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von K' gegen K, welche zur x-Richtung parallel ist, gleich der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ des Massenpunktes gegen K. Aus (78) und (71) schließen wir infolgedessen:

$$\dot{Y}_x = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \dot{Y}_{x^0}, \quad \dot{Y}_y = \dot{Y}_{y^0}, \quad \dot{Y}_z = \dot{Y}_{z^0}$$

und daraus nach (85), (83) und (52):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{q}_x}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right) = \frac{\dot{\mathfrak{q}}_x (c^2 - q^2) + \mathfrak{q}_x (\mathfrak{q}_x \dot{\mathfrak{q}}_x + \mathfrak{q}_y \dot{\mathfrak{q}}_y + \mathfrak{q}_z \dot{\mathfrak{q}}_z)}{\sqrt{c^2 - q^2}^3} = \frac{\dot{\mathfrak{q}}_x^0}{c}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{q}_y}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right) = \frac{\dot{\mathfrak{q}}_y}{\sqrt{c^2 - q^2}} + \mathfrak{q}_y \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right) = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c^2} \dot{\mathfrak{q}}_y^0,$$

da aber $\mathfrak{q}_y = \mathfrak{q}_z = 0$, $\mathfrak{q}_x^2 = \mathfrak{q}^2$, so vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\dot{\mathfrak{q}}_x = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}^3}{c^3} \dot{\mathfrak{q}}_x^0, \quad \dot{\mathfrak{q}}_y = \frac{c^2 - q^2}{c^2} \dot{\mathfrak{q}}_y^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Fragen wir nun einmal, bei welcher Art der Bewegung längs einer Geraden ein Massenpunkt konstante Ruhbeschleunigung b erfährt. Wählen wir jene Gerade als x-Achse, so sind $\mathfrak{q}_y$ und $\mathfrak{q}_z$, desgleichen Y_y und Y_z dauernd gleich Null, die Vierergeschwindigkeit Y und die Viererbeschleunigung $\dot{Y}$ liegen dauernd in der xu-Ebene.

Aus (84) und (87) folgt dann in Rücksicht auf (83) und (85):

$$Y_x^2 + Y_l^2 = \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dl}{d\tau}\right)^2\right] = -1,$$

$$\dot{Y}_x^2 + \dot{Y}_l^2 = \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2l}{d\tau^2}\right)^2\right] = \frac{b^2}{c^2}.$$

Es liegt nahe, x und l als Funktionen von τ zu betrachten und diese Gleichungen durch den Ansatz

$$x - x_0 = a \cos \nu (\tau - \tau_0), l - l_0 = a \sin \nu (\tau - \tau_0)$$

zu lösen. Während x_0, l_0 und τ_0 willkürliche Konstanten sind, müssen a und ν den Beziehungen $\nu^2 a^2 = -c^2$, $\nu^4 a^2 = b^2$ genügen, aus denen $a^2 = \frac{c^4}{b^2}$ folgt. Die Elimination von τ liefert die Gleichung der Weltlinie

$$\left.\begin{aligned}(x-x_0)^2+(l-l_0)^2 &= (x-x_0)^2-(u-u_0)^2\\ &= (x-x_0)^2-c^2(t-t_0)^2=\frac{c^4}{b^2}\end{aligned}\right\}\cdot \quad (89)$$

Die Weltlinie der gesuchten Bewegung ist somit eine gleichseitige Hyperbel, deren Achsenlänge $\frac{c^2}{b}$ umgekehrt proportional zur Ruhbeschleunigung b ist. Wir sprechen mit Born von einer Hyperbelbewegung.

Es zeigt sich hier so recht der Unterschied der Einsteinschen gegen die ältere Kinematik. In der letzteren erfolgte die gleichförmig beschleunigte Bewegung nach der Formel

$$x=\frac{1}{2}bt^2,$$

welche für $t=\pm\infty$ zu unendlich großen Geschwindigkeiten führt. Hier hingegen nähert sich nach (89) die Geschwindigkeit nur asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit.

d) Singuläre Vierervektoren. Durchaus singulär ist ein Vektor Π, welcher von O aus nach einem Punkte x, y, z, l des Vor- oder Nachkegels hinweist. Für diesen ist nämlich nach (48) der absolute Wert:

$$|\Pi|=\sqrt{x^2+y^2+z^2+l^2}=0.$$

Da Π^2 zugleich das skalare Produkt von Π mit sich selbst ist, so steht Π auf sich selbst senkrecht*). Ist ferner Ω der Vektor, der auf dem genannten Kegel (48)

$$f=x^2+y^2+z^2+l^2=0$$

in dem erwähnten Punkte senkrecht steht, so ist

$$\begin{aligned}\Omega_x:\Omega_y:\Omega_z:\Omega_l &= \frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}:\frac{\partial f}{\partial l}=x:y:z:l\\ &= \Pi_x:\Pi_y:\Pi_z:\Pi_l.\end{aligned}$$

Ω und Π haben somit dieselbe Richtung, infolgedessen gibt das Verhältnis zweier entsprechender Komponenten das Verhältnis der absoluten Werte an, welche selbst beide Null sind.

---

*) Derartige Strecken entsprechen den Minimalgeraden der dreidimensionalen Geometrie. Der Schnitt des Kegels (48) mit dem unendlich Fernen stellt das absolute Gebilde unserer „vierdimensionalen Welt“ dar.

e) Sechservektoren. Als Sechservektor bezeichnen wir den Inbegriff der sechs Komponenten

$$\mathfrak{F}_{xl}, \quad \mathfrak{F}_{yl}, \quad \mathfrak{F}_{zl},$$
$$\mathfrak{F}_{yz}, \quad \mathfrak{F}_{zx}, \quad \mathfrak{F}_{xy},$$

denen sechs weitere: $\mathfrak{F}_{lx}$, $\mathfrak{F}_{ly}$, $\mathfrak{F}_{lz}$, $\mathfrak{F}_{zy}$, $\mathfrak{F}_{xz}$, $\mathfrak{F}_{yx}$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{F}_{jk} = -\mathfrak{F}_{kj} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

zugeordnet sind, wenn sie sich nach dem Schema:

	$\mathfrak{F}_{x'l'}$	$\mathfrak{F}_{y'l'}$	$\mathfrak{F}_{z'l'}$	$\mathfrak{F}_{y'z'}$	$\mathfrak{F}_{z'x'}$	$\mathfrak{F}_{x'y'}$
$\mathfrak{F}_{xl}$	A_{14}^{14}	A_{24}^{14}	A_{34}^{14}	A_{23}^{14}	A_{31}^{14}	A_{12}^{14}
$\mathfrak{F}_{yl}$	A_{14}^{24}	A_{24}^{24}	A_{34}^{24}	A_{23}^{24}	A_{31}^{24}	A_{12}^{24}
$\mathfrak{F}_{zl}$	A_{14}^{34}	A_{24}^{34}	A_{34}^{34}	A_{23}^{34}	A_{31}^{34}	A_{12}^{34}
$\mathfrak{F}_{yz}$	A_{14}^{23}	A_{24}^{23}	A_{34}^{23}	A_{23}^{23}	A_{31}^{23}	A_{12}^{23}
$\mathfrak{F}_{zx}$	A_{14}^{31}	A_{24}^{31}	A_{34}^{31}	A_{23}^{31}	A_{31}^{31}	A_{12}^{31}
$\mathfrak{F}_{xy}$	A_{14}^{12}	A_{24}^{12}	A_{34}^{12}	A_{23}^{12}	A_{31}^{12}	A_{12}^{12}

$\ldots\ldots$ (91)

transformieren. Daß die beiden hierin enthaltenen Gleichungssysteme miteinander identisch sind, folgt aus den auf S. 83 und 84 angegebenen Beziehungen zwischen den Unterdeterminanten $A_{m\,n}^{m'\,n'}$. Außerdem sollen entweder die drei Komponenten, welche den Index l besitzen, rein imaginär und die drei anderen reell sein, oder umgekehrt. Diese Festsetzung bleibt bei einer Lorentz-Transformation wegen der Realitätsverhältnisse der Unterdeterminanten $A_{m\,n}^{m'\,n'}$ (S. 80) erhalten. Aus formalen Gründen ist es manchmal zweckmäßig, Komponenten mit zwei gleichen Indices ($\mathfrak{F}_{xx}$ usw.) einzuführen; diese sollen stets identisch Null sein.

Insofern die Unterdeterminanten in die Transformation eingehen, ist der Sechservektor das Gegenstück zum axialen Vektor in drei Dimensionen. Damit hängt zusammen, daß sich die Komponenten $\mathfrak{F}_{jk}$ nicht auf die Koordinatenachsen, sondern auf die Koordinatenebenen beziehen.

Bei der speziellen Transformation, die sich in den Gleichungen (XI) oder (43) oder (57) ausdrückt, wird nach (91) und (77)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}_{xl} &= \mathfrak{F}_{x'l'} & \mathfrak{F}_{yz} &= \mathfrak{F}_{y'z'} \\ \mathfrak{F}_{yl} &= \frac{\mathfrak{F}_{y'l'} - i\beta\mathfrak{F}_{x'y'}}{\sqrt{1-\beta^2}} & \mathfrak{F}_{zx} &= \frac{\mathfrak{F}_{z'x'} - i\beta\mathfrak{F}_{z'l'}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \mathfrak{F}_{zl} &= \frac{\mathfrak{F}_{z'l'} + i\beta\mathfrak{F}_{z'x'}}{\sqrt{1-\beta^2}} & \mathfrak{F}_{xy} &= \frac{\mathfrak{F}_{x'y'} + i\beta\mathfrak{F}_{y'l'}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (92)$$

Da diese Transformation eine Drehung in der xl-Ebene darstellt, bei welcher sowohl diese, als die yz-Ebene als Koordinatenebenen erhalten bleiben, so versteht man leicht, daß sich auch die auf diese Ebenen bezüglichen Komponenten von $\mathfrak{F}$ nicht verändern.

Zu jedem Sechservektor $\mathfrak{F}$ gehört der zu ihm duale Vektor $\mathfrak{F}^*$, der ihm durch die Definition

$$\mathfrak{F}^*_{mn} = \mathfrak{F}_{op} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

zugeordnet ist. Die Indices $mnop$ müssen dabei alle voneinander verschieden und so gewählt sein, daß die Anordnung $mnop$ durch eine gerade Zahl von Vertauschungen aus der Reihenfolge x, y, z, l hervorgeht, z. B. ist

$$\mathfrak{F}^*_{xl} = \mathfrak{F}_{yz},$$

dagegen nach (90)

$$\mathfrak{F}^*_{yl} = -\mathfrak{F}_{xz}.$$

Wegen (72) gilt für $\mathfrak{F}^*$ dieselbe Transformation (91) wie für $\mathfrak{F}$.

Ist $\mathfrak{G}$ ein zweiter Sechservektor, so sind Invarianten der Transformation nach (91) und nach den den Orthogonalitätsbedingungen entsprechenden Beziehungen zwischen den $A^{m'n'}_{mn}$ (S. 83 und 84) das skalare Produkt:

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{F}\mathfrak{G}) = \mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{G}_{xl} + \mathfrak{F}_{yl}\mathfrak{G}_{yl} + \mathfrak{F}_{zl}\mathfrak{G}_{zl} \\ + \mathfrak{F}_{yz}\mathfrak{G}_{yz} + \mathfrak{F}_{zx}\mathfrak{G}_{zx} + \mathfrak{F}_{xy}\mathfrak{G}_{xy} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (94)$$

und ebenso

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{F}^*\mathfrak{G}) = (\mathfrak{F}\mathfrak{G}^*) = \mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{G}_{yz} + \mathfrak{F}_{yl}\mathfrak{G}_{zx} + \mathfrak{F}_{zl}\mathfrak{G}_{xy} \\ + \mathfrak{F}_{yz}\mathfrak{G}_{xl} + \mathfrak{F}_{zx}\mathfrak{G}_{yl} + \mathfrak{F}_{xy}\mathfrak{G}_{zl} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (95)$$

Der einzelne Vektor $\mathfrak{F}$ hat infolgedessen zu Invarianten seinen absoluten Wert:

$$|\mathfrak{F}| = \sqrt{\mathfrak{F}^2_{xl} + \mathfrak{F}^2_{yl} + \mathfrak{F}^2_{zl} + \mathfrak{F}^2_{yz} + \mathfrak{F}^2_{zx} + \mathfrak{F}^2_{xy}} = |\mathfrak{F}^*| \quad (96)$$

und das skalare Produkt:

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{F}^*) = 2(\mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{F}_{yz} + \mathfrak{F}_{yl}\mathfrak{F}_{zx} + \mathfrak{F}_{zl}\mathfrak{F}_{xy}) \quad . \quad . \quad (97)$$

Man könnte zunächst daran denken, eine dritte Vektorart einzuführen, in deren Transformationsformeln die dreireihigen Unterdeterminanten A_m^n als Koeffizienten eingehen. Wegen (69) würden diese aber wieder Vierervektoren.

§ 11. Die algebraischen Vektoroperationen.

a) Addition und Subtraktion. Vektoren gleicher Art werden addiert und subtrahiert, indem man diese Operationen an ihren Komponenten vornimmt. Bei Vierervektoren ist dies dasselbe, wie wenn man die sie darstellenden Strecken geometrisch addiert bzw. subtrahiert. In einer Vektorsumme ist die Reihenfolge der Summanden gleichgültig (kommutatives Gesetz). Auch kann man sie beliebig in Teilsummen zusammenfassen und diese addieren (assoziatives Gesetz).

b) Die skalare Multiplikation ist schon im § 10 besprochen.

c) Vektorprodukte.

α) Aus Vierervektoren. Das Vektorprodukt

$$\mathfrak{V} = [P\Phi] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

aus P und Φ, dessen Komponenten durch die Gleichung

$$\mathfrak{V}_{jk} = \begin{vmatrix} P_j & P_k \\ \Phi_j & \Phi_k \end{vmatrix} (j, k = x, y, z, l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

definiert sind, ist ein Sechservektor. Daß dem so ist, überzeugt man sich leicht, da nach (78) und (72) z. B.:

$$\mathfrak{V}_{x'l'} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_4^{(1)} & \alpha_4^{(4)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_x & P_l \\ \Phi_x & \Phi_l \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \alpha_1^{(2)} & \alpha_1^{(3)} \\ \alpha_4^{(2)} & \alpha_4^{(3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_y & P_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix} + \cdots$$

$$= A_{14}^{14}\mathfrak{V}_{xl} + \cdots + A_{14}^{23}\mathfrak{V}_{yz} + \cdots$$

wird, was mit der Transformation (91) übereinstimmt. Dieser Sechservektor ist aber insofern ein spezieller, als das skalare Produkt $(\mathfrak{V}\mathfrak{V}^*)$, wie die Ausrechnung nach (97) zeigt, identisch Null ist. Einfacher noch sieht man dies, wenn man die durch P und Φ bestimmte Ebene als eine der Koordinatenebenen, etwa als xl-Ebene, wählt. Dann ist nämlich nur $\mathfrak{V}_{xl}$ von Null verschieden. (Ob man die l-Achse in diese Ebene legen kann, hängt

freilich davon ab, ob sie auch zeitartige Richtungen enthält. Ist dies nicht der Fall, so wähle man sie als xy-Ebene, was nichts Wesentliches ändert.)

Das kommutative Gesetz gilt hier nicht. Vielmehr ist

$$[P\Phi] = -[\Phi P] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (100)$$

Das Vektorprodukt $[P\Phi]$ stellt geometrisch das Parallelogramm aus P und Φ nach Flächeninhalt und Umlaufssinn dar, genau so, wie auch das Produkt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ aus zwei Raumvektoren; am einfachsten erkennt man dies bei der soeben beschriebenen Wahl des Koordinatensystems. Wählt man in der zu der genannten Ebene senkrecht stehenden Ebene (es gibt deren stets eine und nur eine, z. B. zur xl-Ebene die yz-Ebene) zwei andere Vierervektoren Ψ und X, so stellt die Summe

$$\mathfrak{W} = [P\Phi] + [\Psi X] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (101)$$

einen Sechservektor dar, für den $(\mathfrak{W}\mathfrak{W}^*)$ von Null verschieden ist, dessen sechs Komponenten also keiner einschränkenden Bedingung mehr unterworfen sind; denn dann ist außer $\mathfrak{W}_{xl}$ auch $\mathfrak{W}_{yz}$ von Null verschieden. Der allgemeine Sechservektor wird demnach durch zwei zueinander senkrechte Flächenstücke, jedes nach Inhalt und Umlaufssinn gewertet, dargestellt. Diese geometrische Darstellung hat Sommerfeld weiter ausgebaut.

β) Aus einem Vierervektor P und einem Sechservektor $\mathfrak{F}$ kann man ein Produkt $[P\mathfrak{F}]$ bilden, welches zum Typus der Vierervektoren gehört; seine k-Komponente soll sein:

$$[P\mathfrak{F}]_k = P_x \mathfrak{F}_{kx} + P_y \mathfrak{F}_{ky} + P_z \mathfrak{F}_{kz} + P_l \mathfrak{F}_{kl} \, (k = x, y, z, l); \quad (102)$$

seine x'-Komponente hat also den Wert:

$$[P\mathfrak{F}]_{x'} = P_{y'} \mathfrak{F}_{x'y'} + P_{z'} \mathfrak{F}_{x'z'} + P_{l'} \mathfrak{F}_{x'l'}.$$

Wendet man nämlich rechts die Transformationen (78) und (91) an, so findet man als Faktor von $P_x \mathfrak{F}_{xl}$ z. B. die Summe:

$$\alpha_2^{(1)} A_{12}^{14} + \alpha_3^{(1)} A_{13}^{14} + \alpha_4^{(1)} A_{14}^{14} = -A_1^{(4)} = -\alpha_1^{(4)} \quad . \; . \; (103)$$

[vgl. (69)], als Faktor von $P_y \mathfrak{F}_{yl}$:

$$\alpha_2^{(2)} A_{12}^{24} + \alpha_3^{(2)} A_{13}^{24} + \alpha_4^{(2)} A_{14}^{24} = -A_1^{(4)} = -\alpha_1^{(4)} \text{ usw.},$$

so daß

$$[P\mathfrak{F}]_{x'} = \alpha_1^{(1)} [P\mathfrak{F}]_x + \alpha_1^{(2)} [P\mathfrak{F}]_y + \alpha_1^{(3)} [P\mathfrak{F}]_z + \alpha_1^{(4)} [P\mathfrak{F}]_l$$

ist. Damit ist der Charakter als Vierervektor bewiesen.

Ebenso ist der umgekehrte Schluß zulässig: Sollen in (102) sowohl die Größen P_x, P_y, P_z, P_l als die vier Ausdrücke $[P\mathfrak{F}]_k$ die Komponenten von Vierervektoren sein, so müssen die $\mathfrak{F}_{jk}$ die Komponenten eines Sechservektors bilden; denn soll wie in (103) $A_1^{(4)}$ linear durch $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$, $\alpha_4^{(1)}$ ausgedrückt werden, so sind die Koeffizienten der letzteren notwendigerweise die Unterdeterminanten zweiter Ordnung von A. — Man bestätigt leicht, daß sich in dem skalaren Produkt der Vierervektoren P und $[P\mathfrak{F}]$ je zwei Summanden wegen (90) aufheben, sodaß

$$(P[P\mathfrak{F}]) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (104)$$

ist. Das Vektorprodukt $[P\mathfrak{F}]$ steht somit auf P senkrecht.

γ) Ein Vierervektor ist ferner das Vektorprodukt

$$P = [\Phi\,\Psi\,X] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (105)$$

aus den drei Vierervektoren Φ, Ψ und X, dessen Komponenten

$$P_x = -i \begin{vmatrix} \Phi_y & \Phi_z & \Phi_l \\ \Psi_y & \Psi_z & \Psi_l \\ X_y & X_z & X_l \end{vmatrix} \text{ usw.} \quad P_l = -i \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ \Psi_x & \Psi_y & \Psi_z \\ X_x & X_y & X_z \end{vmatrix} \quad . \; . \; (106)$$

lauten sollen. Setzen wir nämlich nach (98) $[\Psi X] = \mathfrak{V}$ und schreiben wir (106) nach (93) in die Form:

$$P_x = -i\left(\Phi_y \begin{vmatrix} \Psi_z & \Psi_l \\ X_z & X_l \end{vmatrix} + \Phi_z \begin{vmatrix} \Psi_l & \Psi_y \\ X_l & X_y \end{vmatrix} + \Phi_l \begin{vmatrix} \Psi_y & \Psi_z \\ X_y & X_z \end{vmatrix}\right)$$
$$= -i(\Phi_y \mathfrak{V}^*_{xy} + \Phi_z \mathfrak{V}^*_{xz} + \Phi_l \mathfrak{V}^*_{xl}) \text{ usw.,}$$

so sieht man, daß

$$[\Phi\,\Psi\,X] = -i[\Phi\,\mathfrak{V}^*],$$

d. h. gleich dem Vektorprodukt aus dem Vierervektor $(-i\Phi)$ und dem Sechservektor $\mathfrak{V}^*$ ist. Darin liegt der Beweis der Vektoreigenschaft von $[\Phi\,\Psi\,X]$.

Das Vektorprodukt $[\Phi\,\Psi\,X]$ entspricht in mancher Hinsicht dem Vektorprodukt $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]$ aus zwei Raumvektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Deuten wir die letzteren als Strecken, so stellt $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]$ das aus ihnen gebildete Parallelogramm nach Größe, Lage und Umlaufssinn dar, insofern die Komponenten $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]_x = \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y$ usw. die Parallelogramme nach Größe und Umlaufssinn angeben, welche man durch Projektion des ersteren auf die Koordinatenebenen erhält. Ebenso ist z. B. [vgl. (81)]:

$$P_x = \begin{vmatrix} \Phi_y & \Phi_z & \Phi_u \\ \Psi_y & \Psi_z & \Psi_u \\ X_y & X_z & X_u \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (107)$$

gleich dem Inhalt des Parallelepipeds, welches aus den Projektionen der Vektoren Φ, Ψ, X auf den yzu-Raum gebildet ist, und welches daher die Projektion des aus den Strecken $\Phi\,\Psi\,X$ selbst gebildeten Parallelepipedes darstellt. Das letztere ist demnach durch Lage und Größe der geometrische Repräsentant des Vektorproduktes $[\Phi\,\Psi X]$. Das Vektorprodukt P steht auf den Vektoren, aus denen es gebildet ist, in dem obigen, nichteuklidischen Sinne senkrecht; denn berechnet man die skalaren Produkte $(P\Phi)$, $(P\Psi)$ und (PX), so wird man auf vierreihige Determinanten geführt, in denen zwei Zeilen übereinstimmen, so daß diese Produkte identisch Null sind. Nun gibt es aber noch zwei derartige Richtungen, welche einander entgegengesetzt sind. Ebenso wie man dem Parallelogramm aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einen Umlaufssinn geben muß, um $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ eindeutig zu definieren, so muß man hier zu dem analogen Zweck dem Parallelepiped einen Schraubensinn zuordnen. Wir setzen fest, daß P zu Φ, Ψ, X so liegen soll, wie die u-Achse zu den x-, y-, z-Achsen. Da wir im Raume stets Rechtssysteme als Achsenkreuze benutzen, bedeutet dies: Es sollen die Vektoren Φ, Ψ, X in dieser Reihenfolge eine Rechtsschraubung um P darstellen.

Da man einen beliebigen Raum mit beliebiger Annäherung in (hinreichend kleine) Parallelepipede zerlegen kann, so können wir jeden dreidimensionalen Raum mit Schraubensinn als einen Viervektor auffassen.

Wie unter α erwähnt, ist das Vektorprodukt $\mathfrak{V} = [\Psi X]$ nur ein spezieller Sechservektor. Da man aber nach (101) den allgemeinen Sechservektor $\mathfrak{W}$ als Summe aus zwei derartigen Produkten $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}_1$ darstellen kann, so ist das Vektorprodukt $-i[\Phi\,\mathfrak{W}^*] = -i[\Phi\,\mathfrak{V}^*] - i[\Phi\,\mathfrak{V}_1^*]$ aufzufassen als vektorielle Summe aus zwei Räumen mit Schraubensinn, d. h. ebenfalls als ein derartiges dreidimensionales Gebilde. Da man $-i\,\mathfrak{W}^* = \mathfrak{F}$ setzen kann, so ist hiermit eine geometrische Darstellung für das Vektorprodukt $[P\mathfrak{F}]$ gewonnen.

δ) Aus zwei Sechservektoren. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir zum Schluß ein Vektorprodukt aus zwei Sechser-

vektoren, von welchem wir jedoch im folgenden keinen Gebrauch machen werden. Denken wir uns zunächst die Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ jeden durch eine einzige Fläche dargestellt, so kann es vorkommen, daß beide in demselben dreidimensionalen Raum liegen. In diesem Raum kann man jede von ihnen nach Größe und Umlaufssinn durch eine Strecke darstellen, welche auf ihr senkrecht steht, wie man dies stets in der dreidimensionalen Vektortheorie, z. B. beim Vektorprodukt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ tut. Diese Strecken bestimmen nach Größe, Lage und Umlaufssinn ein Parallelogramm, welches wiederum einen Sechservektor darstellt; er ist das Vektorprodukt $[\mathfrak{F}\mathfrak{G}]$. In dem allgemeinen Falle, daß sowohl $\mathfrak{F}$ wie $\mathfrak{G}$ durch zwei Flächen dargestellt werden müssen, hat man diese Flächen paarweise so zusammenzufassen, wie je zwei in einem dreidimensionalen Raum liegen. Man kommt auf dem genannten Wege so zu vier Vektorprodukten, deren Summe das Vektorprodukt $[\mathfrak{F}\mathfrak{G}]$ bildet. Für die Komponenten führen wir ohne Beweis als Beispiel die Formel an:

$$\mathfrak{S}_{xy} = \mathfrak{F}_{zy}\mathfrak{G}_{zx} - \mathfrak{F}_{zx}\mathfrak{G}_{zy} + \mathfrak{F}_{ly}\mathfrak{G}_{lx} - \mathfrak{F}_{lx}\mathfrak{G}_{ly}.$$

§ 12. Vektorielle Differentialoperationen.

a) Ist φ eine skalare Funktion von x, y, z, l, so geht sie durch die Substitutionen (XII) über in eine Funktion der Argumente

$$\alpha_1^{(1)} x' + \alpha_2^{(1)} y' + \alpha_3^{(1)} z' + \alpha_4^{(1)} l', \quad \alpha_1^{(2)} x' + \cdots,$$
$$\alpha_1^{(3)} x' + \cdots, \quad \alpha_1^{(4)} x' + \cdots$$

Infolgedessen ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \alpha_1^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha_1^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \alpha_1^{(3)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_1^{(4)} \frac{\partial \varphi}{\partial l},$$

d. h. man kann im Schema (78) P_x durch $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $P_{x'}$ durch $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$, usw. ersetzen.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l}$$

sind somit die Komponenten eines Vierervektors, den man als den Gradienten von φ ($\Gamma\varrho\alpha\delta\,\varphi$) bezeichnet. Er gibt wie der dreidimensionale Gradient Richtung und Größe des stärksten Anstieges der Funktion φ an.

b) Man kann das Ergebnis von a) dahin aussprechen, daß die Operationen

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial l}$$

die Komponenten eines symbolischen Vierervektors ∇ bilden. Die Divergenz von P

$$\left.\begin{aligned} Div\, P &= \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial P_l}{\partial l} \\ &= \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial P_u}{\partial u} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (108)$$

[vgl. (55) und (81)] ist dann dessen skalares Produkt mit dem Vierervektor P. Das bedeutet nur, daß der rechnerische Nachweis der Invarianz dieses Ausdruckes genau so verläuft wie bei dem Produkt $(P\Phi)$

c) Bilden wir aus ∇ und einem Vektor P das Vektorprodukt, so finden wir einen Sechservektor, die Rotation von P ($\mathfrak{Rot}\, P$), deren Komponenten nach (99)

$$\mathfrak{Rot}_{jk} P = \frac{\partial P_k}{\partial j} - \frac{\partial P_j}{\partial k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial j} & \frac{\partial}{\partial k} \\ P_j & P_k \end{vmatrix} \quad j, k = x, y, z, l \; . \; . \; (109)$$

sind. Den dazu dualen Vektor [vgl. (93)] bezeichnen wir als $\mathfrak{Rot}^* P$.

d) Dem Vektorprodukt aus dem Vierervektor ∇ und dem Sechservektor $\mathfrak{F}$ entspricht die „Divergenz" von $\mathfrak{F}$, $\Delta iv\, \mathfrak{F}$, d. h. diese ist ein Vierervektor, dessen k-Komponente nach (102) lautet:

$$\Delta iv_k \mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{F}_{kx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{ky}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{kz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{kl}}{\partial l}, \; k = x, y, z, l \; . \; . \; (110)$$

Wie aus der Vektoreigenschaft von $[P\mathfrak{F}]$ zwingend geschlossen werden kann, daß $\mathfrak{F}$ ein Sechservektor ist, so auch hier: Haben wir vier Ausdrücke von der Form (110), die sich als Komponenten eines Vierervektors transformieren, so müssen sich die $\mathfrak{F}_{jk}$ nach dem Schema (91) umrechnen. — Man bestätigt durch Einsetzen der Definitionen (108), (109) und (110) unmittelbar die Rechnungsregeln:

$$Div\,(\Delta iv\, \mathfrak{F}) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (111)$$

$$\Delta iv\,(\mathfrak{Rot}^* P) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (112)$$

e) Der Laplacesche Operator in vier Dimensionen

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial l^2} \quad . \; . \; . \; . \; (113)$$

(„Delta“) entspricht durchaus dem Quadrat des symbolischen Vektors ∇. Er ist daher eine gegen die Lorentz-Transformation invariante Operation, d. h. $\Box\varphi$ ist ein Skalar, $\Box P$ ein Viererverktor. Dies zeigt sich auch an den Rechnungsregeln:

$$Div\,(\Gamma\varrho\alpha\delta\;\varphi) = \Box\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (114)$$

$$\Delta iv\,(\mathfrak{Rot}\,P) = \Gamma\varrho\alpha\delta\,(Div\,P) - \Box P, \quad . \; . \; . \quad (115)$$

welche man ohne Schwierigkeiten rechnerisch nachprüfen kann. Wir fügen noch hinzu:

$$Div\,(\varphi\,Y) = \varphi\,Div\,Y + (Y,\,\Gamma\varrho\alpha\delta\;\varphi) \quad . \; . \; . \quad (116)$$

f) Der Gaußsche Satz. In drei Dimensionen sagt der Gaußsche Satz aus, daß für jeden Raumvektor $\mathfrak{A}$

$$\int div\,\mathfrak{A}\,dS = -\int \mathfrak{A}_n\,d\sigma$$

ist, wobei rechts über die ganze Oberfläche des Integrationsbereiches der linken Seite zu integrieren und unter n die nach innen weisende Normale von $d\sigma$ zu verstehen ist. Ganz analog lautet dieser Satz für vier Dimensionen, nämlich:

$$\int Div\,P\,d\Sigma = -\int P_n\,dS \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (117)$$

Dabei ist $d\Sigma$ ein Element $dx\,dy\,dz\,dl$ des vierdimensionalen Raumes, dS ein Stück seiner dreidimensionalen Begrenzung und P_n die zu dem Raume dS senkrechte, nach innen weisende Komponente von P. Der Unterschied, daß im dreidimensionalen dS und $d\sigma$ stets reell, im vierdimensionalen aber $d\Sigma$ stets und dS im allgemeinen imaginär ist, braucht uns nicht zu stören. Die Identität, welche Gleichung (117) darstellt, ist, wenn sie fürs Reelle gilt, auch im Imaginären richtig. Darum werden wir im folgenden ganz so sprechen, als ob l und damit $d\Sigma$ und dS reell wären. Die auf S. 86 gegebene Definition für das Senkrechtstehen zweier Richtungen aufeinander fordert dann, daß wir die x-, y-, z- und l-Richtungen als im gewöhnlichen geometrischen Sinne aufeinander senkrecht betrachten.

Wir beginnen mit dem Nachweis, daß (117) für einen unendlich kleinen, parallelepipedischen Bereich mit den Kanten dx, dy, dz, dl gilt. In diesem Falle sagt sie aus:

$$dx\,dy\,dz\,dl\;Div\,P = -\int P_n\,dS. \quad . \; . \; . \; . \quad (118)$$

Die beiden Seiten von der Größe $dS = dy\,dz\,dl$, welche zur x-Achse senkrecht sind, liefern nun zum Oberflächenintegral den Beitrag

$$-\{(P_x)_x - (P_x)_{x+dx}\}\,dy\,dz\,dl = \frac{\partial P_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dl.$$

Addieren wir dazu die Beiträge der drei anderen Seitenpaare, so finden wir (118) bestätigt.

Ist der Integrationsbereich aber endlich, so unterteilen wir ihn durch (dreidimensionale) zu den vier Koordinatenräumen parallele Zwischenwände in unendlich viele, unendlich kleine Parallelepipede und stellen für jedes davon Gleichung (118) auf. Durch Summation finden wir dann links $\int Div\,P\,d\Sigma$, rechts aber heben sich im Flächenintegral die Anteile der Zwischenwände heraus. Denn jedes Stück davon tritt den beiden angrenzenden Parallelepipeden entsprechend zweimal auf; und zwar hat die Normale n in beiden Fällen entgegengesetzte Richtungen, also P_n entgegengesetzte Vorzeichen. Übrig bleiben nur die Beiträge der Begrenzung des ganzen Bereiches, und sie ergeben gerade das Oberflächenintegral $-\int P_n\,d\Sigma$. Vorausgesetzt ist dabei lediglich, daß der Vektor P im Integrationsbereich überall endlich und stetig ist.

Setzt man

$$P = -\Gamma\varrho\alpha\delta\,\varphi,$$

so folgt aus dem Gaußschen Satze nach (114):

$$\int \Box\varphi\,d\Sigma = -\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

g) Umrechnung von $\mathfrak{Rot}\,P$ auf hyperbolische Koordinaten*). Wir deuten für den Augenblick x, l, y als reelle, rechtwinkelige Koordinaten in drei Dimensionen. Die x-, l-, y-Komponente des Vektors $rot\,\mathfrak{A}$ sind dann gleich

$$\frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial l} - \frac{\partial\mathfrak{A}_l}{\partial y},\quad \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial x},\quad \frac{\partial\mathfrak{A}_l}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial l}.$$

Führt man statt x und l nun die Polarkoordinaten R, φ durch die Substitutionen

$$x = R\cos\varphi,\quad l = R\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

*) Die Betrachtungen von g) werden erst in § 20 gebraucht und können vom Leser vorläufig übergangen werden.

ein, so sind die Richtungen der wachsenden R und φ in einem beliebigen Punkt P identisch mit den Richtungen der x'- und l'-Achse eines Systems, welches gegen das ursprüngliche um den Winkel φ gedreht ist, so daß

$$\mathfrak{A}_R = \mathfrak{A}_x \cos\varphi + \mathfrak{A}_l \sin\varphi \qquad \mathfrak{A}_\varphi = -\mathfrak{A}_x \sin\varphi + \mathfrak{A}_l \cos\varphi \quad (121)$$

sind. Daraus folgt dann bekanntlich, daß die Komponenten von $rot\,\mathfrak{A}$ nach R, φ, y die Werte haben:

$$\left.\begin{aligned} rot_R\,\mathfrak{A} &= \frac{1}{R}\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial y} \\ rot_\varphi\,\mathfrak{A} &= \frac{\partial \mathfrak{A}_R}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial R} \\ rot_y\,\mathfrak{A} &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial (R\,\mathfrak{A}_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial \mathfrak{A}_R}{\partial \varphi}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (122)$$

Nun legen wir den Bezeichnungen x, l, y wieder die frühere Bedeutung bei. Die Substitutionen (120) führen dann auf die „hyperbolischen" Koordinaten R, φ, so genannt, weil $R = const$ die Gleichung einer Hyperbel $x^2 - u^2 = const$ ist. Nur ist φ wie l rein imaginär, wenn wir R als reell voraussetzen, die Betrachtung also auf Punkte beschränken, für die $R^2 = x^2 - u^2 > 0$ ist. Dennoch sind auch hier die Richtungen der wachsenden R und φ in einem beliebigen Punkte P identisch mit den Richtungen der x'- und l'-Achse eines Systems K', das im Sinne von § 9 um den imaginären Winkel φ gegen das System K gedreht ist. Denn ziehen wir durch P die Hyperbel $x^2 - u^2 = R^2$, so gibt ihre Tangente die Richtung an, in der bei konstantem R der Winkel φ wie l' imaginär wächst, während $\overrightarrow{OP}$ offenbar die x'-Achse ist. Abgesehen davon können wir uns wie unter f) darauf berufen, daß die Gültigkeit solcher Umrechnungsformeln nicht aufhören kann, wenn wir l imaginär werden lassen. Infolgedessen setzen wir für die Komponente eines Vierervektors P die zu (121) analogen Gleichungen an:

$$P_R = P_x \cos\varphi + P_l \sin\varphi \qquad P_\varphi = -P_x \sin\varphi + P_l \cos\varphi \quad (123)$$

Nun sind nach (109) die ly-, yx-, xl-Komponenten von $\mathfrak{Rot}\,P$ unmittelbar die Komponenten von $rot\,\mathfrak{A}$ nach x, l, y, wenn man $\mathfrak{A}$ als die Projektion von P auf den xly-Raum auffaßt, also

$$P_x = \mathfrak{A}_x, \quad P_y = \mathfrak{A}_y, \quad P_l = \mathfrak{A}_l,$$

also auch $$P_R = \mathfrak{A}_R, \quad P_\varphi = \mathfrak{A}_\varphi$$

setzt. Die Anwendung der Gleichungen (122) lehrt dann, daß

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Rot}_{\varphi y}\, P &= \frac{1}{R}\frac{\partial P_y}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial y} \\ \mathfrak{Rot}_{y R}\, P &= \frac{\partial P_R}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial R} \\ \mathfrak{Rot}_{R\varphi}\, P &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial (R P_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial P_R}{\partial \varphi}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (124)$$

ist. Es versteht sich von selbst, daß zu den beiden ersteren die Analoga

$$\mathfrak{Rot}_{\varphi z} P = \frac{1}{R}\frac{\partial P_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial z}, \quad \mathfrak{Rot}_{zR} P = \frac{\partial P_R}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial R} \cdot \quad (125)$$

bestehen, während

$$\mathfrak{Rot}_{yz}\, P = \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (126)$$

bleibt.

§ 13. Symmetrische Welttensoren.

Als symmetrischen Welttensor bezeichnen wir den Inbegriff von 16 Komponenten

$$\left.\begin{matrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} & T_{xl} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} & T_{yl} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} & T_{zl} \\ T_{lx} & T_{ly} & T_{lz} & T_{ll} \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (127)$$

mit den sechs Symmetriebedingungen

$$T_{jk} = T_{kj}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (128)$$

wenn sie sich wie die Quadrate und binären Produkte aus den Koordinaten transformieren; d. h. in Formeln:

$$\left.\begin{aligned} T_{xx} = {} & \alpha_1^{(1)2} T_{x'x'} + \alpha_2^{(1)2} T_{y'y'} + \alpha_3^{(1)2} T_{z'z'} + \alpha_4^{(1)2} T_{l'l} \\ & + 2\{\alpha_1^{(1)}\alpha_4^{(1)} T_{x'l'} + \alpha_2^{(1)}\alpha_4^{(1)} T_{y'l'} + \alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(1)} T_{z'l'} \\ & + \quad \alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)} T_{y'z'} + \alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(1)} T_{z'x'} + \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} T_{x'y'}\} \\ T_{xy} = {} & \alpha_1^{(1)}\alpha_1^{(2)} T_{x'x'} + \alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)} T_{y'y'} + \alpha_3^{(1)}\alpha_3^{(2)} T_{z'z'} + \alpha_4^{(1)}\alpha_4^{(2)} T_{l'l'} \\ & + (\alpha_1^{(1)}\alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_1^{(2)}) T_{x'l'} + (\alpha_2^{(1)}\alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_2^{(2)}) T_{y'l'} \\ & + (\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(2)} + \alpha_4^{(1)}\alpha_3^{(2)}) T_{z'l'} + (\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(2)} + \alpha_3^{(1)}\alpha_2^{(2)}) T_{y'z'} \\ & + (\alpha_3^{(1)}\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(1)}\alpha_3^{(2)}) T_{z'x'} + (\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(1)}\alpha_1^{(2)}) T_{x'y'} \\ & \qquad \text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad (129)$$

Aus einem Vierervektor Φ kann man solche Ausdrücke gewinnen, wenn man das Tensorprodukt

$$T = \Big[[\Phi\Phi] \Big], \text{ d. h. } T_{jk} = \Phi_j \Phi_k \quad j, k = x, y, z, l \quad . \quad (130)$$

einführt. Aber man kann auch beliebig viele derartige Tensorprodukte eines Vektors mit sich selbst addieren, ohne daß die Tensornatur verloren geht. Daraus folgt sofort, daß für beliebige Werte der Koordinaten die Summe

$$T_{xx}x^2 + T_{yy}y^2 + \cdot\cdot + \cdot\cdot + 2\,T_{xl}\,x\,l + \cdot\cdot + \cdot\cdot + 2\,T_{yz}\,y\,z + \cdot\cdot \quad (130\,\text{a})$$

invariant ist. Denn setzen wir darin die Werte (130) ein, so wird sie gleich dem Quadrat der Invariante $(x\,\Phi_x + y\,\Phi_y + z\,\Phi_z + l\,\Phi_l)$; sonst, wenn man T als Summe mehrerer Produkte dieser Art darstellt, zerfällt sie in eine Summe solcher Quadrate.

Setzen wir die Summe (130 a) konstant, so ist damit dem Tensor ein dreidimensionaler Mittelpunktsraum zweiten Grades zugeordnet. Er hat bekanntlich vier zueinander senkrechte Hauptachsen, deren Längen $T_{\xi\xi}$, $T_{\eta\eta}$, $T_{\zeta\zeta}$, $T_{\lambda\lambda}$ sein mögen. Wählt man sie zu Koordinatenachsen ξ, η, ζ, λ, so nimmt die Gleichung dieses Raumes die Gestalt

$$T_{\xi\xi}\,\xi^2 + T_{\eta\eta}\,\eta^2 + T_{\zeta\zeta}\,\zeta^2 + T_{\lambda\lambda}\,\lambda^2 = const$$

an. Um die Hauptachsen zu finden, hat man zu fragen, in welchen Punkten des Raumes der Abstand $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + l^2}$ vom Mittelpunkt ein Extremum hat. Nach der Methode des Lagrangeschen Multiplikators behandelt man diese Frage so, daß man die Differentialquotienten von

$$T_{xx}x^2 + T_{yy}y^2 + \cdots - \mu\,(x^2 + y^2 + z^2 + l^2)$$

nach x, y, z, l einzeln gleich Null setzt. (Dabei sind die T_{jk} natürliche Konstanten.) Das führt zu den Gleichungen

$$(T_{xx} - \mu)\,x + T_{xy}\,y + T_{xz}\,z + T_{xl}\,l = 0 \quad \text{usw.},$$

welche nur dann erfüllt sein können, ohne daß die Koordinaten alle Null sind, wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} T_{xx} - \mu & T_{xy} & T_{xz} & T_{xl} \\ T_{yx} & T_{yy} - \mu & T_{yz} & T_{yl} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} - \mu & T_{zl} \\ T_{lx} & T_{ly}. & T_{lz} & T_{ll} - \mu \end{vmatrix} = 0$$

ist. Dies ist eine Gleichung zur Ermittelung von μ, welche bei Zugrundelegung des Hauptachsensystems ohne weiteres in

$$(T_{\xi\xi} - \mu)(T_{\eta\eta} - \mu)(T_{\zeta\zeta} - \mu)(T_{\lambda\lambda} - \mu) = 0$$

übergeht. Ihre Wurzeln sind also die Hauptachsen selbst. Diese sind aber vom Bezugssystem unabhängig; ordnen wir also die Gleichung nach Potenzen von μ, so müssen die Koeffizienten Invarianten der Lorentz-Transformation sein. So finden wir vier Skalare; nämlich die vier symmetrischen Grundfunktionen:

$$J_1 = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{ll} = T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta} + T_{\zeta\zeta} + T_{\lambda\lambda}$$

$$J_2 = T_{\xi\xi}T_{\eta\eta} + T_{\xi\xi}T_{\zeta\zeta} + T_{\xi\xi}T_{\lambda\lambda} + T_{\eta\eta}T_{\zeta\zeta} + T_{\eta\eta}T_{\lambda\lambda} + T_{\zeta\zeta}T_{\lambda\lambda}$$

$$J_3 = T_{\eta\eta}T_{\zeta\zeta}T_{\lambda\lambda} + T_{\zeta\zeta}T_{\lambda\lambda}T_{\xi\xi} + T_{\lambda\lambda}T_{\xi\xi}T_{\eta\eta} + T_{\xi\xi}T_{\eta\eta}T_{\zeta\zeta}$$

$$J_4 = T_{\xi\xi}T_{\eta\eta}T_{\xi\xi}T_{\lambda\lambda}$$

Stellt man den Tensor durch ein Tensorprodukt $\Big[[\Phi\Phi]\Big]$ dar, so kann man eine Hauptachse, etwa die ξ-Achse, in die Richtung des Vektors Φ verlegen, dann sieht man, daß $T_{\eta\eta}$, $T_{\zeta\zeta}$, $T_{\lambda\lambda}$ gleich Null sind. Also verschwinden J_2, J_3, J_4. Setzt man noch ein zweites Tensorprodukt aus dem nicht in die Richtung von Φ oder in die entgegengesetzte fallenden Vektor Ψ hinzu, so kann man die Ebene beider Vektoren zur $\xi\eta$-Ebene machen. Dann verschwinden immer noch $T_{\zeta\zeta}$ und $T_{\lambda\lambda}$, deswegen auch J_3 und J_4. Das Hinzunehmen eines dritten Vektors bringt, sofern er nicht in der Ebene der beiden ersten liegt, ein von Null verschiedenes J_3 hervor, weil man den Raum der drei Vektoren zu einem Koordinatenraum machen kann. Und wenn man schließlich noch einen vierten, nicht in diesem Raum liegenden Vektor zu Hilfe nimmt, erhält man vier von Null verschiedene Hauptachsen, somit auch vier nicht verschwindende Invarianten. Man kann also den allgemeinsten symmetrischen Tensor durch die Tensorprodukte von vier nicht dem gleichen dreidimensionalen Raum angehörenden Vektoren darstellen.

Dieser aus der Invarianz der Summe (130 a) erschlossene Satz beweist uns, daß man diese Invarianz geradezu als Definition des Tensors hinstellen kann. Denn die Komponenten des Tensorproduktes $\Big[[\Phi\Phi]\Big]$ transformieren sich gewiß wie die Quadrate und Produkte der Koordinaten.

Die Produkte

$$\Phi_k = T_{kx}P_x + T_{ky}P_y + T_{kz}P_z + T_{kl}P_l \quad (k = x, y, z, l) \quad (130\text{b})$$

sind die Komponenten eines Vektors. Man beweist dies, indem man T in der angegebenen Art durch vier Vektoren darstellt. Dasselbe gilt von den vier Ausdrücken

$$\Delta iv_k T = \frac{\partial T_{kx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{ky}}{\partial y} + \frac{\partial T_{kz}}{\partial z} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial l}, \quad \cdot \quad (131)$$

weil nach § 12b die Operationen $\frac{\partial}{\partial x}, \cdots$ einen symbolischen Vektor bilden. Den letzten Vektor nennen wir die Divergenz von T.

Eine andere Art, aus einem Vierervektor einen Tensor zu machen, gibt der Ansatz

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = T_{ll} = \Phi^2, \quad T_{xy} \text{ usw.} = 0 \,. \quad (131\text{a})$$

Der ihm zugehörige Raum zweiten Grades ist eine dreidimensionale Kugel. Schon daraus sieht man, daß dieser Ansatz in allen Koordinatensystemen gilt.

Aus einem Sechservektor $\mathfrak{F}$ läßt sich ein Tensorprodukt $\big[[\mathfrak{F}\mathfrak{F}]\big]$ bilden, dessen Komponenten durch die Gleichung bestimmt sind:

$$T_{jk} = (\mathfrak{F}_{jx}\mathfrak{F}_{kx} + \mathfrak{F}_{jy}\mathfrak{F}_{ky} + \mathfrak{F}_{jz}\mathfrak{F}_{kz} + \mathfrak{F}_{jl}\mathfrak{F}_{kl}) - \tfrac{1}{2}\delta_{jk}\mathfrak{F}^2 \quad (132)$$

Die δ_{jk} sind 0, wenn j und k verschieden sind, sonst gleich eins. Sie bilden selbst einen Tensor, da die Summe (130a) für sie in die Invariante $x^2 + y^2 + z^2 + l^2$ übergeht. Dieselbe Summe aber, gebildet an der Klammer in (132), ist gleich

$$(y\mathfrak{F}_{xy} + z\mathfrak{F}_{xz} + l\mathfrak{F}_{xl})^2 + (x\mathfrak{F}_{yx} + z\mathfrak{F}_{yz} + l\mathfrak{F}_{yl})^2 + \cdots$$

d. h. dem absoluten Wert eines Vierervektors; denn x, y, z, l bilden einen Vierervektor und dessen vektorielles Produkt mit $\mathfrak{F}$ hat nach (102) die Komponenten $x\mathfrak{F}_{kx} + y\mathfrak{F}_{ky} + z\mathfrak{F}_{kz} + l\mathfrak{F}_{kl}$. Das Kennzeichen eines Tensors trifft also hier zu.

Wir berechnen die Divergenz

$$\begin{aligned}
\Delta iv_x\big[[\mathfrak{F}\mathfrak{F}]\big] = &+ \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \underline{\mathfrak{F}_{xy}^2} + \mathfrak{F}_{xz}^2 + \mathfrak{F}_{xl}^2 \\ -\underline{\mathfrak{F}_{zl}^2} - \mathfrak{F}_{ly}^2 - \mathfrak{F}_{yz}^2 \end{bmatrix} \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\big[\qquad \mathfrak{F}_{xz}\mathfrak{F}_{yz} + \mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{F}_{yl}\big] \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\big[\mathfrak{F}_{xy}\underline{\mathfrak{F}_{zy}} \qquad + \mathfrak{F}_{xl}\mathfrak{F}_{zl}\big] \\
&+ \frac{\partial}{\partial l}\big[\mathfrak{F}_{xy}\underline{\mathfrak{F}_{ly}} + \mathfrak{F}_{xz}\mathfrak{F}_{lz} \qquad \big]
\end{aligned}$$

Die Differentiation der einmal unterstrichenen Summanden und ihre Addition ergibt: $-\mathfrak{F}_{xy} . \Delta iv_y \mathfrak{F}$, die zweimal unterstrichenen ergeben bei derselben Operation: $+\mathfrak{F}^*_{xy} \Delta iv_y \mathfrak{F}^*$. Damit ist aber gerade ein Drittel aller nach der Differentiation auftretenden Summanden verbraucht. Faßt man alle zusammen, so findet man einfach:

$$\Delta iv \Big[[\mathfrak{F}\mathfrak{F}] \Big] = [\Delta iv \mathfrak{F}^*, \mathfrak{F}^*] - [\Delta iv \mathfrak{F}, \mathfrak{F}] . \quad . \quad (133)$$

Die Vektor- und Tensoranalysis für die „Welt“ läßt sich noch erheblich weiter ausbauen. Außer dem Integralsatz von Gauß läßt sich z. B. der von Stokes übertragen, und der vermehrten Zahl der Dimensionen entsprechend gibt es noch andere Integralsätze für Vektoren (vgl. die im Anhang erwähnten Arbeiten von Sommerfeld). Von unsymmetrischen Tensoren zweiten Ranges, sowie Tensoren höheren Ranges und ihrer Systematik handelt eine Untersuchung von Kafka[1]). Wir können jedoch in diesem Buche auf alle weiteren Hilfsmittel verzichten. Erst im zweiten Bande, bei der allgemeinen Relativitätstheorie, werden wir diese Untersuchungen nochmals aufnehmen müssen.

V. Die Elektrodynamik des leeren Raumes nach dem Relativitätsprinzip.

§ 14. Die Transformation des elektromagnetischen Feldes im leeren Raume.

Wir haben im Abschnitt III die Lorentz-Transformation aus der Forderung der Unveränderlichkeit der Wellengleichung (22) abgeleitet. Das Relativitätsprinzip behauptet, daß alle Naturgesetze ihre Form dabei behalten. Wir machen eine erste Probe darauf, indem wir untersuchen, ob die Grundgleichungen (I a) bis (IV a) der Elektronentheorie bei passender Transformation der Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in allen Systemen die gleiche Gestalt haben. Der Nachweis ihrer Invarianz ist erbracht, wenn es gelingt, sie in eine vierdimensional-vektorielle Form zu kleiden. Dies ist trotz des Zusammenhanges zwischen der Wellengleichung (22) und den Gleichungen (I a) usw. keineswegs nur eine Scheinprobe, da zwar die Wellengleichung aus ihnen, nicht aber umgekehrt diese aus jener abzuleiten sind.

Den Ausgangspunkt bildet die Transformation der Ladung e eines Elektrons oder eines Teiles von ihm. Beschleunigen wir ein solches vom Ruhezustand im berechtigten System K auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$, so gerät es dabei in den Ruhezustand, bezogen auf ein anderes berechtigtes System K'. Wegen der Gleichwertigkeit beider muß nach dieser Beschleunigung die Ladung e' bezogen auf K' denselben Wert haben, welchen sie vor der Beschleunigung im System K hatte. Nach § 5 [Gleichung (24)] ist aber e bezogen auf K unveränderlich.

Daher gilt stets:

$$e = e' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

Die Elektrizitätsmenge bleibt bei der Lorentz-Transformation unverändert. (Dasselbe gilt natürlich für jedes Bestimmungsstück für den Zustand eines Körpers, welches bezogen auf ein und dasselbe berechtigte System durch die Geschwindigkeit nicht verändert wird.)

Die Dichte ϱ ist der Quotient aus der Ladung und ihrem Volumen; infolgedessen transformiert sie sich wie der reziproke

Wert des Volumens, oder da nach (31) $\frac{V}{\sqrt{c^2 - q^2}}$ invariant ist, wie $\sqrt{c^2 - q^2}^{-1}$. Ersetzt man daher in den Werten, welche in (83) für die Komponenten der Vierergeschwindigkeit Y angegeben sind, den Nenner $\sqrt{c^2 - q^2}$ durch den Faktor ϱ/c im Zähler, so muß man wiederum zu einem Vierervektor gelangen; dieser, der „Viererstrom" P, hat die Komponenten

$$P_x = \frac{\varrho\, \mathfrak{q}_x}{c}, \quad P_y = \frac{\varrho\, \mathfrak{q}_y}{c}, \quad P_z = \frac{\varrho\, \mathfrak{q}_z}{c}, \quad P_l = i\varrho \quad . \quad (135)$$

Für den Fall der speziellen Tranformation (XI) ergibt sich daraus nach (78) und (71), daß

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, \mathfrak{q}_x = \varrho' \frac{\mathfrak{q}'_x + v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \varrho\, \mathfrak{q}_y = \varrho'\, \mathfrak{q}'_y, \quad \varrho\, \mathfrak{q}_z = \varrho'\, \mathfrak{q}'_z \\ \varrho = \varrho' \frac{1 + \frac{v\, \mathfrak{q}'_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (136)$$

ist. Der Viererstrom fällt in der Richtung mit der Weltlinie der Ladung zusammen, ist also zeitartig. Setzt man

$$P = \varrho^0\, Y, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (136\,\mathrm{a})$$

so wird danach ϱ^0 ein Skalar, und zwar die Ruhdichte der Elektrizität wie man bei Anwendung von (135) und (136 a) auf das Ruhsystem des Ladungsträgers sieht.

Die Grundgleichungen (II a) und (III a) kann man folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} +\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial i\mathfrak{E}_x}{\partial l} &= \frac{1}{c}\varrho\, \mathfrak{q}_x \\ -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial i\mathfrak{E}_y}{\partial l} &= \frac{1}{c}\varrho\, \mathfrak{q}_y \\ +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial i\mathfrak{E}_z}{\partial l} &= \frac{1}{c}\varrho\, \mathfrak{q}_z \\ +\frac{\partial i\mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial i\mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial i\mathfrak{E}_z}{\partial z} &= i\varrho \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (137)$$

Die linken Seiten haben die Gestalt der Komponenten der Divergenz eines Sechservektors [vgl. (110)], die rechten bilden die Komponenten eines Vierervektors. Sollen die Gleichungen (137) gegen die Lorentz-Transformation invariant sein, so müssen nach § 12, d) notwendigerweise die sechs Größen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_{xl} = -i\mathfrak{E}_x, \quad \mathfrak{M}_{yl} = -i\mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{M}_{zl} = -i\mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{M}_{yz} = \mathfrak{H}_x, \quad \mathfrak{M}_{zx} = \mathfrak{H}_y, \quad \mathfrak{M}_{xy} = \mathfrak{H}_z \end{aligned}\right\} \quad . \quad (138)$$

die Komponenten eines Sechservektors, des „Feldvektors“ $\mathfrak{M}$ bilden; dessen absoluter Wert [vgl. (96)]

$$|\mathfrak{M}| = \sqrt{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (139)$$

und das skalare Produkt [vgl. (97)]

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*) = -2i(\mathfrak{E}\mathfrak{H}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (140)$$

sind Invarianten. Die Gleichungen (137) nehmen dann die Form

$$\Delta iv\, \mathfrak{M} = P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{XIII})$$

an.

Durch (91) ist nach (138) die Transformation für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ festgelegt. Sollen alle Gleichungen (Ia) bis (IVa) gegen die Lorentz-Transformation vermöge dieser Transformation invariant sein, so müssen auch die bisher nicht benutzten Formeln (Ia) und (IVa) durch die Einführung des Sechservektors $\mathfrak{M}$ nach (138) eine vierdimensional-vektorielle Gestalt annehmen. In der Tat lassen sie sich zusammenfassen in:

$$\Delta iv\, \mathfrak{M}^* = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{XIV})$$

denn sie lassen sich schreiben:

$$\begin{aligned}
& & -\frac{\partial i\mathfrak{E}_z}{\partial y} + \frac{\partial i\mathfrak{E}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial l} &= 0 \\
+\frac{\partial i\mathfrak{E}_z}{\partial x} & & -\frac{\partial i\mathfrak{E}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial l} &= 0 \\
-\frac{\partial i\mathfrak{E}_y}{\partial x} + \frac{\partial i\mathfrak{E}_x}{\partial y} & & + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial l} &= 0 \\
-\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} & & &= 0,
\end{aligned}$$

und nach (93) und (138) ist:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{M}^*_{xl} &= \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{M}^*_{yl} &= \mathfrak{H}_y & \mathfrak{M}^*_{zl} &= \mathfrak{H}_z, \\
\mathfrak{M}^*_{yz} &= -i\mathfrak{E}_x, & \mathfrak{M}^*_{zx} &= -i\mathfrak{E}_y, & \mathfrak{M}^*_{xy} &= -i\mathfrak{E}_z
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (138\mathrm{a})$$

Damit ist der Beweis der Invarianz der Feldgleichungen (Ia) bis (IVa) gegen die Lorentz-Transformation geliefert.

Die aus (91) und (138) folgenden Transformationsformeln für die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ wollen wir für den speziellen Fall der Transformation (XI), daß nämlich die x'- und x-Achse beide der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Systems K' gegen K parallel

sind, hinschreiben*). In diesem Falle treten die Gleichungen (92) in Kraft; also:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}'_x & \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{H}'_x \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{\mathfrak{E}'_y + \beta \mathfrak{H}'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} & \mathfrak{H}_y &= \frac{\mathfrak{H}'_y - \beta \mathfrak{E}'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{\mathfrak{E}'_z - \beta \mathfrak{H}'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & \mathfrak{H}_z &= \frac{\mathfrak{H}'_z + \beta \mathfrak{E}'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (141)$$

Die Zerlegung des elektromagnetischen Feldes in einen elektrischen und einen magnetischen Anteil hat danach nur relative Bedeutung; für jedes berechtigte System ist sie anders vorzunehmen. Z. B. sind Felder, welche von einem System aus betrachtet rein elektrisch oder rein magnetisch sind, für alle anderen Systeme gemischter Natur. Der physikalische Grund dafür ist, daß man bei Untersuchung eines elektromagnetischen Feldes mit elektrisch geladenen Probekörpern und Magnetnadeln deren Bewegungszustand mit in Betracht ziehen muß; der letztere aber wird von verschiedenen Systemen aus natürlich verschieden beurteilt.

Ist im gestrichenen System ein rein magnetisches Feld $\mathfrak{H}'$ vorhanden, so bedeutet dies für einen im ungestrichenen ruhenden, also gegen das gestrichene mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}' = -\mathfrak{v}$ bewegten Körper in seinem Ruhsystem ein elektrisches Feld, das nach (141) nach Größe und Richtung durch

$$\mathfrak{E}_x = 0, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\beta \mathfrak{H}'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\beta \mathfrak{H}'_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\text{oder } \mathfrak{E} = \frac{1}{c} \frac{[\mathfrak{q}' \mathfrak{H}']}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{c^2}}}$$

gegeben ist. Darin liegt die Erklärung des Wienschen Versuches (§ 2); zum Nachweis des Faktors $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q'^2}{c^2}}}$ reicht dessen Genauigkeit nicht annähernd aus.

---

*) Bei der Transformation (XI) fallen die Richtungen von x' und x, y' und y, z' und z zusammen, so daß man statt $\mathfrak{E}'_{x'}$, $\mathfrak{E}'_x$ usw. schreiben kann. Bei der allgemeinen Transformation (XII) wäre dagegen zwischen den Indices x' und x zu unterscheiden.

Um die Einfachheit der vierdimensionalen Vektorrechnung hervortreten zu lassen, wollen wir aus der Gleichung (XIII) das Gesetz von der Erhaltung der Elektrizitätsmenge ableiten, obwohl diese Ableitung gegenüber den Betrachtungen von § 5 sachlich nichts Neues bietet. Nach der Rechnungsregel (111) folgt aus (XIII) unmittelbar

$$Div\, P = Div\, \Delta iv\, \mathfrak{M} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141\,a)$$

und dies ist die vierdimensionale Schreibweise der Kontinuitätsgleichung (23). Denn sie sagt nach (108) und (135) unmittelbar aus:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + div\, \varrho \mathfrak{q} = 0.$$

Ein materielles Volumenelement δV ist nun in der Welt durch eine Weltröhre dargestellt, welche aus der Gesamtheit der Weltlinien der Punkte von δV besteht. Aus dieser Weltröhre schneiden wir durch zwei ebene, zu beliebigen zeitartigen Richtungen senkrechte (dreidimensionale) Querschnitte einen gewissen Bereich aus und wenden auf ihn den Gaußschen Satz (117) an, welcher hier

$$-\int Div\, P\, d\Sigma = \int P_n\, dS = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

ergibt. Dies Oberflächenintegral setzt sich zusammen aus dem Anteil des Röhrenmantels — dieser ist aber Null, weil P die Richtung der Weltlinien hat, somit $P_n = 0$ ist — und aus dem Anteil der beiden Querschnitte. Um ihn für den ersten Querschnitt zu berechnen, wählen wir als Bezugssystem dasjenige, dessen Zeitachse zu ihm senkrecht ist. Dann wird

$$P_n = P_l = i\varrho, \quad \int P_n\, dS = i\int \varrho\, dS = i\varrho\, \delta V.$$

Für den zweiten verfahren wir analog und finden bis auf das Vorzeichen auch dasselbe Resultat. Das Vorzeichen ist aber verschieden, weil jetzt die in das Innere hinweisende Normale n zur negativen Zeitachse parallel, also $P_n = -P_{l'} = -i\varrho'$ wird. Gleichung (142) sagt somit aus: $\varrho\, \delta V = \varrho'\, \delta V'$, d. h. daß die Elektrizitätsmenge, welche in δV enthalten ist, für alle Zeiten und alle Bezugssysteme den gleichen Wert hat. Sie vereinigt die Gesetze von der Konstanz und von der Invarianz der Elektrizitätsmenge.

§ 15. Die Transformation der Kraftdichte, Energie- und Impulssatz.

a) Die Viererkraft. Die Dichte der ponderomotorischen Kraft ist nach (IX a):

$$\mathfrak{F} = \varrho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(IX a)}$$

Auch diese Gleichung soll in jedem berechtigten Bezugssystem gelten. Die Transformation der Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, sowie die der Dichte ϱ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ kennen wir. Wir können also hieraus die Transformationsformeln für $\mathfrak{F}$ ableiten: Von dem Vektorprodukt $[P\mathfrak{M}]$ lautet nach (102), (135) und (138) die x-Komponente:

$$\begin{aligned}[P\mathfrak{M}]_x &= P_y\,\mathfrak{M}_{xy} + P_z\,\mathfrak{M}_{xz} + P_l\,\mathfrak{M}_{xl} \\ &= \varrho\left(\mathfrak{E}_x + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}_y\,\mathfrak{H}_z - \mathfrak{q}_z\,\mathfrak{H}_y]\right),\end{aligned}$$

es sind daher die räumlichen Komponenten:

$$[P\mathfrak{M}]_x = \mathfrak{F}_x, \quad [P\mathfrak{M}]_y = \mathfrak{F}_y, \quad [P\mathfrak{M}]_z = \mathfrak{F}_z \quad . \; . \quad (143)$$

dagegen wird die vierte, zeitliche Komponente unter Berücksichtigung von Rechnungsregel γ:

$$[P\mathfrak{M}]_l = P_x\mathfrak{M}_{lx} + P_y\mathfrak{M}_{ly} + P_z\mathfrak{M}_{lz} = \frac{i\varrho}{c}(\mathfrak{q}\mathfrak{E}) = \frac{i}{c}(\mathfrak{q}\mathfrak{F}) \quad (144)$$

Die „Viererkraft“ *)

$$F = [P\mathfrak{M}] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (145)$$

stellt also in ihren drei räumlichen Komponenten die Kraftdichte $\mathfrak{F}$, in ihrer u-Komponente dagegen die Leistung der Kraftdichte dividiert durch c dar; dies gilt in allen berechtigten Bezugssystemen. Die Vektoreigenschaft von F regelt somit das Verhalten der Kraftdichte $\mathfrak{F}$ bei einer Lorentz-Transformation. Aus der Rechnungsregel (104) folgt:

$$(PF) = (P[P\mathfrak{M}]) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (146)$$

Die Viererkraft steht also auf dem Viererstrom und damit auf der Weltlinie der Ladung senkrecht, sie ist daher ein raumartiger Vektor [vgl. § 10 a)].

---

*) F soll das griechische Digamma sein.

Aus der Vektoreigenschaft von F folgt für die spezielle Transformation (XI) nach (71) und (78):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \frac{\mathfrak{F}'_x + \frac{v}{c^2}(\mathfrak{q}'\mathfrak{F}')}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}'_y, \quad \mathfrak{F}_z = \mathfrak{F}'_z \\ (\mathfrak{q}\mathfrak{F}) &= \frac{(\mathfrak{q}'\mathfrak{F}') + v\,\mathfrak{F}'_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(\mathfrak{q}' + \mathfrak{v}, \mathfrak{F})}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (147)$$

Für die Gesamtkraft

$$\mathfrak{K} = \int \mathfrak{F}\,\delta V \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (148)$$

welche auf ein System gegeneinander ruhender Ladungen ausgeübt wird*), gehen daraus wegen

$$\frac{\delta V'}{\delta V} = \frac{c^2 + v\,\mathfrak{q}'_x}{c\sqrt{c^2 - v^2}}$$

[nach (36)] die Formeln hervor:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_x &= \frac{\mathfrak{K}'_x + \frac{v}{c^2}(\mathfrak{q}'\mathfrak{K}')}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}}, \quad \mathfrak{K}_y = \mathfrak{K}'_y \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}} \\ \mathfrak{K}_z &= \mathfrak{K}'_z \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (149)$$

und für ihre Leistung:

$$(\mathfrak{q}\mathfrak{K}) = \frac{(\mathfrak{q}'\mathfrak{K}') + v\,\mathfrak{K}'_x}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}} = \frac{(\mathfrak{q}' + \mathfrak{v}, \mathfrak{K})}{1 + \frac{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{q}')}{c^2}} \quad . \; . \; . \; (150)$$

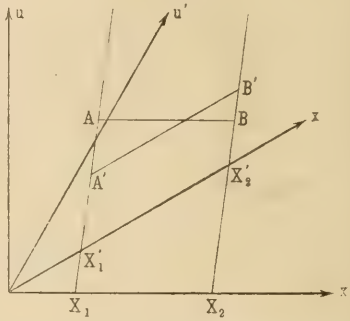
Die Gesamtkraft $\mathfrak{K}$ hat nach (148) nicht die Eigenschaft, sich zu einem vierdimensionalen Vektor ergänzen zu lassen, weil δV keine Invariante der Transformation ist. [Vgl. Abschn. VII, § 26, b)].

Bei der Anwendung der Formeln (149) und (150) ist aber die folgende Einschränkung zu beachten: Die Integration in (148) ist für denselben Zeitpunkt t zu vollziehen. Stellen in Fig. 9 die parallelen Geraden $X_1 X'_1$ und $X_2 X'_2$ die Weltlinien der Endpunkte eines Stabes dar, so findet man die Kraft $\mathfrak{K}$ im System K durch Integration längs einer zu $X_1 X_2$ parallelen Geraden von ihrem

*) Wenn $\mathfrak{q}'$ bei der Integration nicht als konstant zu betrachten ist, so gelten die Gleichungen (149) und (150) offenbar nicht.

Schnitt mit $X_1 X_1'$ bis zu dem mit $X_2 X_2'$ (z. B. AB), dagegen bezieht sich $\mathfrak{K}'$ im System K' auf eine Parallele zu $X_1' X_2'$ (z. B. $A'B'$). Im allgemeinen, wenn die Viererkraft F eine beliebige Funktion der Weltpunkte ist, besteht demnach überhaupt keine Beziehung zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$. Nur im stationären Falle, wenn sich der Zustand in einem materiellen Punkte nicht ändert, d. h. wenn F auf den (zu $X_1 X_1'$ parallelen) Weltlinien der letzteren konstant bleibt, gelten die Transformationen (149) und (150) streng; angenähert auch dann, wenn man über zwei sich schneidende Querschnitte (wie AB und $A'B'$) integriert, und F sich auf Strecken von der Größenordnung von AA' und BB' nur unmerklich ändert. Natürlich gilt diese Einschränkung auch für die Transformation mancher anderen Größen, z. B. läßt sich Gleichung (31) im allgemeinen nur auf unendlich kleine Volumelemente, nicht aber auf endliche Volumina anwenden. Allgemeingültige Transformationsformeln lassen sich stets nur für Größen aufstellen, die sich auf einen bestimmten Raum- und Zeitpunkt (Weltpunkt) beziehen.

Fig. 9.



b) Der Welttensor T. Wir erwähnten in § 5, daß der Kraftansatz (IX a) von dem Ausdruck der Energiedichte (VIII a) des Energieprinzips wegen nicht unabhängig ist. Wir wollen jetzt zeigen, daß dies Prinzip erfüllt ist, und fassen zu diesem Zweck den Welttensor

$$T = [[\mathfrak{M}\mathfrak{M}]] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XV)}$$

(vgl. § 13) ins Auge. Daß die Viererkraft mit ihm durch die Gleichung

$$F = -\Delta iv\, T \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVI)}$$

verbunden ist, geht nach der Rechnungsregel (133) aus den Feldgleichungen (XIII) und (XIV) unter Berücksichtigung von (145) hervor, da aus ihnen

$$-\Delta iv\, T = [P\mathfrak{M}]$$

folgt.

Wir stellen zunächst die Werte der Komponenten von T, wie sie sich aus (132), (138) und (138a) ergeben, zusammen. Unter Berücksichtigung von (19) und (X) finden wir z. B.:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{H}_x^2 &&= \boldsymbol{p}_{xx} \\ T_{xy} &= -(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y) &&= \boldsymbol{p}_{xy} \\ T_{ll} &= -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) &&= -W \\ T_{xl} &= i(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y) &&= \frac{i}{c}\mathfrak{S}_x \end{aligned}$$

oder schematisch geschrieben:

$$T = \left.\begin{matrix} \boldsymbol{p}_{xx} & \boldsymbol{p}_{xy} & \boldsymbol{p}_{xz} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_x \\ \boldsymbol{p}_{yx} & \boldsymbol{p}_{yy} & \boldsymbol{p}_{yz} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_y \\ \boldsymbol{p}_{zx} & \boldsymbol{p}_{zy} & \boldsymbol{p}_{zz} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_z \\ \frac{i}{c}\mathfrak{S}_x & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_y & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_z & -W \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots (151)$$

c) Der Energiesatz. Zur Diskussion der Gleichung (XVI) beginnen wir mit der l-Komponente. Führen wir statt l nach (55) die Zeit t und statt F_l die Leistung $(\mathfrak{q}\mathfrak{F})$ nach (144) ein, so finden wir:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\mathfrak{q}\mathfrak{F}) + div\,\mathfrak{S} = 0 \quad \ldots\ldots (152)$$

Die beiden ersten Summanden geben die Zunahme der gesamten Energiedichte pro Zeiteinheit an, da die Arbeit $(\mathfrak{q}\mathfrak{F})$ in andere Energiearten umgesetzt wird. Das Energieprinzip ist also erfüllt, wenn man die Bedeutung des Pointingschen Vektors als Dichte der Energieströmung beibehält. Der Energieansatz (VIIIa) gilt in allen berechtigten Bezugssystemen.

d) Die Erhaltung des Impulses. Doch enthält Gleichung (XVI) mehr; ihre Aussagen über die drei räumlichen Komponenten kann man nach (143) und $\boldsymbol{\nu}''$ in die dreidimensionale Vektorgleichung

$$\mathfrak{F} = -\mathfrak{div}\,\boldsymbol{p} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \quad \ldots\ldots (153)$$

zusammenfassen. Die Gesamtkraft, welche auf die in einem abgegrenzten Raum vorhandenen Ladungen von den außerhalb befindlichen ausgeübt wird, ist daher

$$\mathfrak{K} = -\int \mathfrak{div}\, \boldsymbol{p}\, dS - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{S}\, dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

Wir zerlegen sie in zwei Anteile:

$$\mathfrak{K}_1 = -\int \mathfrak{div}\, \boldsymbol{p}\, dS, \quad \mathfrak{K}_2 = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{S}\, dS \quad . \quad . \quad (155)$$

Bezeichnen wir ferner mit $\mathfrak{K}^a$ die Kraft, welche umgekehrt die Ladungen des Integrationsgebietes auf alle anderen ausüben und nehmen wir an ihr die entsprechende Zerlegung in $\mathfrak{K}_1^a$ und $\mathfrak{K}_2^a$ vor, so folgt, daß

$$\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_1^a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$

ist. Nach Rechnungsregel ξ findet man nämlich:

$$\mathfrak{K}_1 = \int \mathfrak{p}_n\, d\sigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (157)$$

das Integral erstreckt sich über die ganze Oberfläche des abgegrenzten Bereiches; und die entsprechende Komponente von $\mathfrak{K}^a$ erhält man offenbar, wenn man die Richtung der Normalen n, d. h. nach ν' das Vorzeichen von $\mathfrak{p}_n$, umkehrt. $\mathfrak{K}_1$ gehorcht also dem dritten Newtonschen Axiom, der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Die Kraft $\mathfrak{K}$ wird, so wollen wir annehmen, durch die Elektronen auf ponderable Körper übertragen, deren mechanischer Impuls $\mathfrak{G}$ ist. Wir wollen ferner voraussetzen, daß diese Körper nicht über den abgegrenzten Bereich hinausragen. [Die zweite Annahme hat (vgl. den Anhang unter c) zur Folge, daß

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \int \underline{\dot{\mathfrak{g}}}\, \delta V = \int \dot{\mathfrak{g}}\, dS = \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t}$$

wird, da nach ϱ' z. B.

$$\int \underline{\dot{\mathfrak{g}}}_x \delta V = \int \left(\dot{\mathfrak{g}}_x + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_z)\right) dS$$
$$= \int \dot{\mathfrak{g}}\, dS - \int \mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_n\, d\sigma$$

und die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ der Körper an der Berandung des Integrationsbereiches Null wird.] Wir behalten nun in der Relativitätstheorie wie das Energieprinzip so auch den Impulssatz: Die Kraft ist gleich der Zunahme des Impulses des Körpers, auf den sie wirkt, d. h.

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (158)$$

(vgl. § 1), als ein gesichertes Ergebnis der empirischen Forschung bei. Wie sich $\mathfrak{G}$ berechnet, ist freilich noch eine offene Frage (Abschnitt VII). Jedenfalls folgt, daß in allen Fällen, in denen nur $\mathfrak{K}_1$ in Frage kommt, z. B. bei allen stationären Vorgängen, die Summe aus $\mathfrak{G}$ und dem Impuls $\mathfrak{G}^a$ der außerhalb des Integrationsbereiches liegenden Körper

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{G}^a = const \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (159)$$

ist, d. h. der gesamte Impuls bleibt konstant.

Ganz anders verhält es sich mit der Kraft $\mathfrak{K}_2$. Sie läßt sich nicht durch ein Oberflächenintegral ausdrücken, verletzt deshalb im allgemeinen das genannte Newtonsche Axiom und den Satz von der Erhaltung des mechanischen Impulses [1]). Das erstere ist in der Tat in der Elektrodynamik nicht aufrecht zu erhalten (vgl. § 4). Den Impulssatz dagegen kann man retten, wenn man dem Felde einen „elektromagnetischen Impuls" $\mathfrak{G}_e$ mit der Dichte

$$\mathfrak{g}_e = \frac{\mathfrak{S}}{c^2} = \frac{1}{c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (160)$$

zuschreibt. Denn ersetzt man in Gleichung (154) $\mathfrak{K}$ durch $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t}$ und $\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{S} dS$ durch $\frac{\partial \mathfrak{G}_e}{\partial t}$, so findet man nach (155):

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_e)$$

oder nach (156):

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_e + \mathfrak{G}^a + \mathfrak{G}_e^a = const \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (161)$$

d. h. die Summe aus mechanischem und elektromagnetischem Impuls ist konstant [Abraham] [2]). Die Kraft $\mathfrak{K}_1$ hat nach dieser Auffassung nicht nur die mechanische Trägheit zu überwinden, welche sich der Vergrößerung des mechanischen Impulses $\mathfrak{G}$ widersetzt, sondern auch die elektromagnetische, welche der Veränderung des elektromagnetischen Impulses $\mathfrak{G}_e$ entgegenwirkt. Die ponderomotorische Wirkung ist die Summe von $\mathfrak{K}_1$ und der „elektromagnetischen Trägheitskraft" $-\frac{\partial \mathfrak{G}_e}{\partial t}$ *).

---

*) Im leeren Raum ist die Gesamtwirkung, wie aus (IX a) hervorgeht, wegen $\varrho = 0$ stets gleich Null. Die Maxwell-Hertzsche

Aus (153) wird nach (160):

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} - \frac{\partial \mathfrak{g}_e}{\partial t} \quad \cdots\cdots \quad (161\text{a})$$

e) Die Erhaltung des Drehimpulses. In der klassischen Mechanik hat der Impulssatz sein Analogon in dem „Flächensatz", der die Konstanz des Drehimpulses $\mathfrak{L}$ ausspricht. Nennen wir $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor von einem beliebigen festen Anfangspunkte nach dem Orte des materiellen Volumelementes δV, und bezeichnen wir die Massendichte mit k, so ist dort

$$\mathfrak{L} = \int k\,[\mathfrak{r}\mathfrak{q}]\,\delta V = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}]\,\delta V. \quad \cdots\cdots \quad (162)$$

da die Impulsdichte $\mathfrak{g} = k\mathfrak{q}$ ist. Das Drehmoment

$$\mathfrak{N} = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{F}]\,\delta V, \quad \cdots\cdots\cdots \quad (163)$$

welches auf die Körper des Integrationsbereiches ausgeübt wird, steht mit $\mathfrak{L}$ in dem zu (158) analogen Zusammenhang

$$\mathfrak{N} = \frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}]\,\delta V = \int [\mathfrak{r}\dot{\underline{\underline{\mathfrak{g}}}}]\,\delta V \quad \cdots \quad (164)$$

Übrigens sind diese beiden Erhaltungssätze insofern nicht gleichwertig, als man den zweiten aus dem ersteren ableiten kann. Aus der Gleichung

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$$

folgt nämlich, durch die Anwendung auf ein unendlich kleines materielles Volumenelement δV,

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{F}\delta V = \frac{d(\mathfrak{g}\,\delta V)}{dt} = \dot{\underline{\underline{\mathfrak{g}}}}\,\delta V,$$

also

$$\mathfrak{F} = \dot{\underline{\underline{\mathfrak{g}}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (165)$$

Nach (165) ist aber (164) eine Folgerung aus (163).

Wir wollen in die Relativitätstheorie die Definition (163) für das Drehmoment $\mathfrak{N}$ übernehmen und finden dann nach (161 a)*):

Theorie kannte nach (IX) nur die Kraft $\mathfrak{K}_1$, behielt also eine ponderomotorische Kraft vom Werte $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$ auf die Volumeinheit des Vakuums übrig (vgl. § 4).

*) Die Bezeichnungen dS und δV können in (163) und (166) miteinander vertauscht werden. [Vgl. den Anhang unter a).]

$$\mathfrak{N} = -\int [\mathfrak{r}, \mathfrak{div}\, \boldsymbol{p}]\, dS - \frac{\partial}{\partial t}\int [\mathfrak{r}\, \mathfrak{g}_e]\, dS \quad . \; . \; . \; (166)$$

Das erste Integral ist nach ξ'

$$\mathfrak{N}_1 = -\int [\mathfrak{r}, \mathfrak{div}\, \boldsymbol{p}]\, dS = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{p}_n]\, d\sigma \quad . \; . \; . \; (167)$$

es ist das Drehmoment der in (157) zu $\mathfrak{K}_1$ zusammengefaßten Flächenkräfte. Wie $\mathfrak{K}_1$ wechselt $\mathfrak{N}_1$ nur sein Vorzeichen, wenn wir nach der Gegenwirkung auf die außerhalb des Integrationsbereiches liegenden Körper fragen. [Wir setzen wie unter d) voraus, daß die Körper im Integrationsbereich nicht über diese Grenze hinausragen, so daß $\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$ wird.] Soweit der zweite Summand in (166) fortfällt, gilt also nach (167) analog zu (159) der „Flächensatz“:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}^a) = 0, \; \mathfrak{L} + \mathfrak{L}^a = \mathit{Const.}$$

Im allgemeinen muß aber diese Gleichung durch Einführung des „elektromagnetischen Drehimpulses“

$$\mathfrak{L}_e = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}_e]\, dS \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (168)$$

ergänzt werden. Da nach (166) und (167)

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_e)$$

ist, gilt nun, daß die Summe aus beiden Drehimpulsen

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_e + \mathfrak{L}^a + \mathfrak{L}_e^a = \mathit{Const}$$

ist.

f) Transformation der Energie, des Energiestromes und der Spannungen. Die Gleichungen für die Transformation des Tensors $\boldsymbol{p}$ der Maxwellschen Spannungen, des Pointingschen Vektors $\mathfrak{S}$ und der Energiedichte W ergeben sich nach (151) aus den in § 13 angeführten Regeln (130) für die Transformation des Welttensors T.

Im Falle der speziellen Transformation (XI) gelten [vgl. (71)] die Formeln (169) (a. f. S.).

Man bestätigt sie am einfachsten, indem man nach (71) die Quadrate x^2 usw. und Produkte xy usw. der Weltkoordinaten

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{S}_x &= \frac{(1+\beta^2)\mathfrak{S}'_x + v\,(\mathfrak{p}'_{xx} + W')}{1-\beta^2} \\
\mathfrak{S}_y &= \frac{\mathfrak{S}'_y + v\mathfrak{p}'_{xy}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{S}_z = \frac{\mathfrak{S}'_z + v\,\mathfrak{p}'_{xz}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
W &= \frac{W' + \beta^2\mathfrak{p}'_{xx} + 2\frac{v}{c^2}\mathfrak{S}'_x}{1-\beta^2} \\
\mathfrak{p}_{yz} &= \mathfrak{p}'_{yz} \quad \mathfrak{p}_{yy} = \mathfrak{p}'_{yy} \quad \mathfrak{p}_{zz} = \mathfrak{p}'_{zz} \\
\mathfrak{p}_{xx} &= \frac{\mathfrak{p}'_{xx} + 2\frac{v}{c^2}\mathfrak{S}'_x + \beta^2 W'}{1-\beta^2} \\
\mathfrak{p}_{xy} &= \frac{\mathfrak{p}'_{xy} + \frac{v}{c^2}\mathfrak{S}'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \mathfrak{p}_{xz} = \frac{\mathfrak{p}'_{xz} + \frac{v}{c^2}\mathfrak{S}'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}\right\} \quad \cdot\cdot (169)$$

transformiert, und dann jedes Produkt oder Quadrat jk ($j, k = x, y, z, l$) durch T_{jk} ersetzt*).

Blicken wir auf die Entwickelungen dieser beiden Paragraphen zurück, so können wir sagen: Schon die ursprüngliche Elektronentheorie hatte sich trotz ihrer Ätherhypothese in ihren elektromagnetischen Grundgleichungen eine dem Einsteinschen Relativitätsprinzip gehorchende Grundlage geschaffen; darauf beruht ihr bleibendes Verdienst um die Elektrodynamik der bewegten Körper. Nur muß man, um dies voll hervortreten zu lassen, noch die Einsteinsche Kinematik und, wie wir später sehen werden, die dazu gehörige Mechanik hinzunehmen**). So ist die

*) Die formale Abhängigkeit von der speziellen Wahl der Achsenkreuze in K und K' fällt fort, wenn wir schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
W &= \frac{1}{1-\beta^2}\left\{\Big(W' + (\mathfrak{v}\mathfrak{g}')\Big) + \frac{1}{c^2}\Big(\mathfrak{v}, \mathfrak{S}' + [\mathfrak{v}\mathfrak{p}']\Big)\right\} \\
\mathfrak{S} &= \frac{1}{1-\beta^2}\left\{\Big(\mathfrak{S}' + [\mathfrak{v}\mathfrak{p}']\Big) + \mathfrak{v}\Big(W' + (\mathfrak{v}\mathfrak{g}')\Big)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{v^2}\Big[\mathfrak{v}, \Big[\mathfrak{v}, \mathfrak{S}' + [\mathfrak{v}\mathfrak{p}']\Big]\Big]\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \cdot\cdot (170)$$

Die Richtigkeit dieser Beziehungen bestätigt man, indem man die Achsen wie oben wählt und für das Vektorprodukt $[\mathfrak{v}\mathfrak{p}']$ den aus λ' folgenden Wert einsetzt.

**) Darin, daß die neue Kinematik und Mechanik von der älteren vielfach nur in Größen zweiter Ordnung abweicht, liegt der Grund, daß die Elektronentheorie alle Versuche über Einflüsse erster Ordnung erklären konnte.

Auffassung berechtigt, daß der Michelsonsche Versuch gar nicht eine elektromagnetisch-optische Frage entscheidet, sondern eine rein mechanische, nämlich, ob die Dimensionen eines Körpers durch die Bewegung verändert werden. Eine analoge Auffassung läßt sich auch bei dem Trouton-Nobleschen Versuch durchführen (§ 17 f).

Zu der Streitfrage: Beruht die gegenseitige elektrodynamische Beeinflussung der Körper durch den leeren Raum auf Fernwirkung oder auf Übertragung durch einen „Äther"? aber ist zu sagen: Die zweite Alternative widerspricht dem Relativitätsprinzip (vgl. § 1b); dennoch können wir auch der ersteren nicht zustimmen, zwischen den Körpern besteht vielmehr etwas physikalisch Wirkliches, das elektromagnetische Feld, welches trotz seiner Loslösung von aller Materie Energie, Bewegungsgröße und Spannungskräfte*) enthält und ihre Übertragung von einem Körper zum anderen vermittelt. Jene viel umstrittene Frage umfaßt also gar nicht zwei konträre Gegensätze, sie übersieht vielmehr die dritte, tatsächlich zutreffende Möglichkeit.

Zugleich zeigt sich der Wert des von Minkowski geschaffenen mathematischen Rüstzeuges im hellen Lichte. Enthalten doch die vier Gleichungen (XIII) bis (XVI)

$$\Delta iv\, \mathfrak{M} = P, \quad \Delta iv\, \mathfrak{M}^* = 0, \quad F = -\Delta iv\, T, \quad T = \left[[\mathfrak{M}\mathfrak{M}]\right]$$

die ganze atomistische Elektrodynamik einschließlich des Nachweises, daß sie den Sätzen von der Erhaltung der Energie und des Impulses, sowie dem Relativitätsprinzip genügt.

§ 16. Anwendungen.

a) Aberration und Dopplersches Prinzip. Setzt man in den Gleichungen (20) und (21) $\varepsilon = \mu = 1$, so findet man

*) Die Elektronentheorie betrachtete die Maxwellschen Spannungen als eine nur mathematisch zweckmäßige Fiktion. Die Relativitätstheorie hat nach (161a) allen Grund, ihnen dieselbe Realität zuzuschreiben, wie der elektromagnetischen Bewegungsgröße; gibt der Tensor $\boldsymbol{p}$ doch im leeren Raume, wo $\mathfrak{F} = 0$ ist, die „Strömung dieser Bewegungsgröße" an [Planck[3])].

die folgende Darstellung einer ebenen Welle von der Schwingungszahl ν im leeren Raume, bezogen auf ein berechtigtes System K':

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}' &= \mathfrak{E}'_0 \sin\Theta, \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'_0 \sin\Theta \\ \Theta &= 2\pi\nu'\left\{t' - \frac{1}{c}\left(x' \cos\vartheta' + \sin\vartheta'(y' \cos\varphi' + z' \sin\varphi')\right)\right\} \\ \mathfrak{E}'^2_0 &= \mathfrak{H}'^2_0, \quad (\mathfrak{E}'_0 \mathfrak{H}'_0) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (171)$$

wobei die Richtung des Strahles durch seine Neigung ϑ' gegen die x'-Richtung und das Azimut φ' bestimmt ist, indem

$$\left.\begin{aligned} \cos(\mathfrak{S}'x') = \cos\vartheta', \quad \cos(\mathfrak{S}'y') = \sin\vartheta' \cos\varphi', \\ \cos(\mathfrak{S}'z') = \sin\vartheta' \sin\varphi' \end{aligned}\right\} \quad (172)$$

gesetzt worden ist. Schreiben wir (171) nach (138), (139) und (140) in die gegen die Lorentz-Transformation invariante Form

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \sin\Theta, \quad \mathfrak{M}^2 = 0, \quad (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*) = 0 \quad . \quad . \quad (173)$$

so sieht man einmal, daß die von Ort und Zeit abhängige Funktion Θ eine Invariante sein muß, und zweitens, daß in jedem Bezugssystem $\mathfrak{E}_0^2 = \mathfrak{H}_0^2, (\mathfrak{E}_0 \mathfrak{H}_0) = 0$ ist. Da vermöge der Linearität der Lorentz-Transformation Θ in jedem System eine lineare Funktion der Variablen x, y, z, t also von der Form:

$$\Theta = 2\pi\nu\left\{t - \frac{1}{c}\left(x \cos\vartheta + \sin\vartheta\,(y \cos\varphi + z \sin\varphi)\right)\right\}$$

ist, so ist eine elektromagnetische Welle in jedem System eine ebene Welle, wenn sie es in einem System ist.

Ersetzt man in der Gleichung für Θ gemäß (XI) x', y', z', t' durch x, y, z, t, so findet man:

$$\Theta = 2\pi\nu' \frac{1 + \beta \cos\vartheta'}{\sqrt{1-\beta^2}} \times \left\{t - \frac{(\beta + \cos\vartheta')\,x + \sin\vartheta' \sqrt{1-\beta^2}\,(y \cos\varphi' + z \sin\varphi')}{c\,(1 + \beta \cos\vartheta')}\right\}.$$

Die Koeffizienten der vier unabhängigen Variablen x, y, z, t müssen in den beiden letzten Gleichungen übereinstimmen. Daraus folgt: Die Schwingungszahl, bezogen auf das System K, ist

$$\nu = \nu' \frac{1 + \beta \cos\vartheta'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

die Richtung des Strahles $\mathfrak{S}$ aber ist in demselben System durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi' \\ \cos\vartheta &= \frac{\cos\vartheta' + \beta}{1 + \beta\cos\vartheta'} \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (175)$$

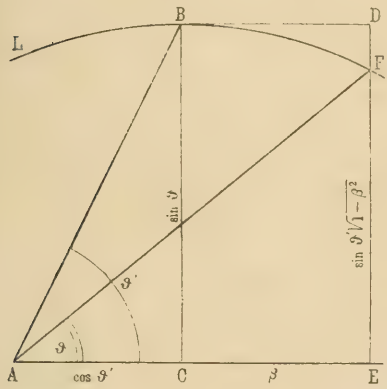
bestimmt. Die erste dieser Gleichungen sagt aus: Die Ebene durch den Strahl und die Geschwindigkeitsrichtung bleibt erhalten. Andere Formen der letzten Beziehung sind:

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\vartheta'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\vartheta'}, \quad tg\,\vartheta = \frac{\sin\vartheta'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\vartheta' + \beta} \quad \cdot \cdot \quad (176)$$

Die letztere eignet sich zur geometrischen Konstruktion.

Ist nämlich in der Fig. 10 $\measuredangle\, BAC = \vartheta'$, $AB = 1$, so ist $AC = \cos\vartheta'$, $BC = DE = \sin\vartheta'$. Wählt man ferner $CE = \beta$ *), $EF = ED\sqrt{1-\beta^2} = \sin\vartheta'\sqrt{1-\beta^2}$, so ist $\measuredangle\, FAE = \vartheta$.

Fig. 10.



Verändert sich β, so beschreibt der Punkt F eine Ellipse L, deren Scheitel B ist. Sendet ein im Bezugssystem K' ruhender Fixstern der Erde (System K) Licht zu in der Richtung $\overrightarrow{AB}$, so hat dieser Strahl für den Beobachter auf der Erde die Richtung $\overrightarrow{AF}$. So findet die Aberration ihre Erklärung. Mit der elementaren, der Beobachtung angepaßten Theorie stimmt diese Konstruktion überein, wenn man zwischen den Punkten D und F nicht zu unterscheiden braucht; d. h. wenn man β^2 gegen 1 vernachlässigen kann. Die Besonderheit des Instrumentes, mit dem man ϑ bestimmt, ob man z. B. das Fernrohr mit Luft oder Wasser füllt, spielt gar keine Rolle dabei. Ferner wird die wahrgenommene Schwingungszahl ν durch die Richtung des Strahles beeinflußt. Vernachlässigt man Glieder zweiter Ordnung, so kann man in (174) $\beta\cos\vartheta' = \frac{q}{c}\cos\vartheta = \frac{q_r}{c}$ setzen, wenn r die Richtung $\overrightarrow{AF}$ bedeutet, und findet dann:

---

*) Vorausgesetzt ist $\beta > 0$, d. h. $\mathfrak{v}$ hat die Richtung $\overrightarrow{AE}$, anderenfalls liegt E zwischen A und C.

$$\nu = \nu'\left(1 + \frac{\mathfrak{v}r}{c}\right).$$

Die Theorie steht daher in Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Der Dopplereffekt verschwindet nicht — darin liegt ein vielleicht noch einmal experimentell nachzuprüfender Unterschied gegen die älteren Theorien —, wenn man senkrecht auf die Bahn der Lichtquelle blickt ($\cos\vartheta = 0$, $\cos\vartheta' = -\beta$); vielmehr ist dann $\nu = \nu'\sqrt{1-\beta^2}$.

Um die Transformationsgleichung für die Amplitude zu finden, läßt sich jede der Gleichungen (169) anwenden, da jede Komponente des Welttensors T in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ quadratisch, daher hier wegen $\mathfrak{E}_0^2 = \mathfrak{H}_0^2$ zu $\mathfrak{E}_0^2$ proportional ist. Z. B. ist nach (X):

$$\begin{aligned} -p_{yz} &= \mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_z = (\mathfrak{E}_{0y}\mathfrak{E}_{0z} + \mathfrak{H}_{0y}\mathfrak{H}_{0z})\sin^2\Theta \\ &= \mathfrak{E}_0^2\sin^2\Theta\{\cos(\mathfrak{E}_0 y)\cos(\mathfrak{E}_0 z) + \cos(\mathfrak{H}_0 y)\cos(\mathfrak{H}_0 z)\}. \end{aligned}$$

Nun liegen aber die Richtungen von $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{S}$ gemäß (19) zueinander wie die x-, y-, z-Achse; infolgedessen ist nach den Orthogonalitätsbedingungen und (172):

$$\begin{aligned} \cos(\mathfrak{E}_0 y)\cos(\mathfrak{E}_0 z) + \cos(\mathfrak{H}_0 y)\cos(\mathfrak{H}_0 z) &= -\cos(\mathfrak{S} y)\cos(\mathfrak{S} z) \\ &= -\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi. \end{aligned}$$

$$p_{yz} = \mathfrak{E}_0^2\sin^2\Theta\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi.$$

Die entsprechende Formel gilt im gestrichenen System. Da aber $p_{yz} = p'_{yz}$ ist, folgt unter Berücksichtigung von (175) und (176):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{E}_0^2}{\mathfrak{E}_0'^2} = \frac{W}{W'} = \frac{|\mathfrak{S}|}{|\mathfrak{S}'|} = \frac{\sin^2\vartheta'}{\sin^2\vartheta} = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\vartheta)^2} \\ = \frac{(1+\beta\cos\vartheta')^2}{1-\beta^2} = \frac{\nu^2}{\nu'^2} \end{aligned}\right\} . \quad (177)$$

Ruht in K' eine nach allen Seiten gleichmäßig strahlende Lichtquelle, d. h. ist die Intensität $|\mathfrak{S}'|$ ihrer Strahlung von der Richtung unabhängig, so strahlt sie, bezogen auf das System K, in welchem sie sich bewegt, unter spitzem Winkel zur Richtung ihrer Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ($\cos\vartheta' > 0$) mehr Energie aus als unter stumpfen Winkeln dazu.

b) Die Reflexion am bewegten Spiegel. Auf einen ebenen, im System K^0 ruhenden Spiegel fällt aus dem leeren Raum eine ebene Welle unter dem Einfallswinkel ψ_1^0. Das Reflexionsgesetz sagt bekanntlich aus, daß der gespiegelte Strahl in der Einfallsebene liegt, und daß der Reflexionswinkel $\psi_2^0 = \psi_1^0$

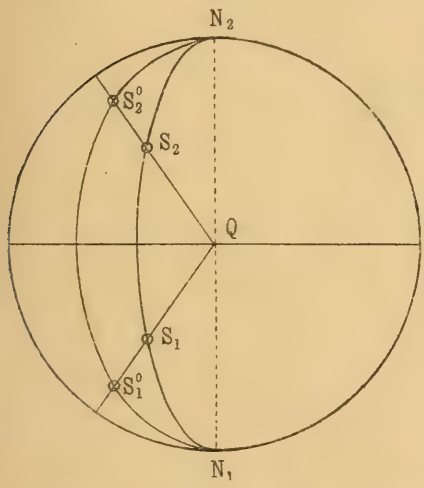
ist. Die Schwingungszahl ν^0 ist in beiden Strahlen dieselbe; die Intensität $|\mathfrak{S}_2^0|$ des gespiegelten berechnet sich aus der des einfallenden $|\mathfrak{S}_1^0|$ und dem Reflexionsvermögen U gemäß der Gleichung

$$|\mathfrak{S}_2^0| = U|\mathfrak{S}_1^0| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

Wir fragen, wie sich diese Gesetze ändern, wenn man den Spiegel bewegt, und zwar wollen wir ihm zunächst eine Geschwindigkeit parallel zu seiner Ebene zuschreiben.

Wir führen dazu die Transformation auf ein anderes berechtigtes System K durch, zu dem K^0 eine Geschwindigkeit tangentiell zur Spiegelfläche besitzt. Deren Richtung bildet mit den Richtungen des einfallenden und des gespiegelten Strahles in K^0 den gleichen Winkel ϑ^0, weil die Spiegelfläche die Symmetrieebene zu diesen Richtungen ist. Da nach (175) aus der Gleichheit zweier Winkel ϑ im einen System auch die Gleichheit der entsprechenden Winkel im anderen Bezugssystem folgt, so bilden auch in K beide Strahlen mit der Geschwindigkeit denselben Winkel. Verlagert werden zwar bei der Transformation die Einfallsebene und die Spiegelungsebene, doch so, daß beide Ebenen miteinander identisch bleiben. Denn ziehen wir Parallele zu allen in Betracht kommenden Richtungen von einem Punkt aus, um welchen wir eine Kugel beschreiben, so sind z. B. (vgl. Fig. 11) die Pole N_1 und N_2 die beiden Durchstoßpunkte der Normalen der Spiegelfläche, S_1^0 und S_2^0 die der beiden Strahlrichtungen, wenn wir diese auf K^0 beziehen, und ein Punkt Q des Äquators ist der Durchstoßpunkt der Geschwindigkeitsrichtung. Dabei ist $S_1^0 N_1 = S_2^0 N_2$. Bei der Transformation verschieben sich die beiden Strahlrichtungen auf dem größten Kreis durch S_1^0 und Q bzw. S_2^0 und

Fig. 11.



Q, da wegen $\varphi = \varphi'$ in (175) die Ebene durch den Strahl und die Geschwindigkeitsrichtung erhalten bleibt. Sie geraten so nach den Punkten S_1 und S_2, und zwar ist $S_1^0 S_1 = S_2^0 S_2$ und wegen der Lage von Q auf dem Äquator $\measuredangle N_1 S_1^0 S_1 = \measuredangle N_2 S_2^0 S_2$, also sind die Dreiecke $N_1 S_1^0 S_1$ und $N_2 S_2^0 S_2$ kongruent, so daß auch die Winkel bei N_1 und N_2 übereinstimmen und S_1 und S_2 mit N_1 und N_2 wieder auf einem größten Kreise liegen. Auf die geometrischen Gesetze der Spiegelung hat eine tangentielle Geschwindigkeit des Spiegels somit keinen Einfluß. Nach (177) kommt für die Umrechnung der Intensität nur die Neigung des Strahles gegen die Geschwindigkeit in Frage; diese ist aber für beide Strahlen dieselbe. Also bleibt das Verhältnis beider Intensitäten, d. h. das Reflexionsvermögen U, unverändert. Eine tangentielle Geschwindigkeit ist auch ohne Einfluß auf das Reflexionsvermögen.

Somit brauchen wir nicht festzusetzen, ob der Spiegel im System K^0 ruhen oder sich tangentiell bewegen soll. Nun soll er aber außerdem eine Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ in Richtung seiner Normalen erhalten. Wir führen dazu wiederum die Transformation auf ein anderes berechtigtes System K durch; es sollen sowohl die x- als die x^0-Achse die Richtung der in den leeren Raum hinausweisenden Normalen haben, so daß die Voraussetzungen der Transformation (XI) erfüllt sind, wenn man K^0 an die Stelle von K' setzt. Dabei ist $\mathfrak{v} = \mathfrak{q}$, also $\beta = \mathfrak{q}_x/c$. Die Neigung des einfallenden Strahles gegen die x^0- und x-Achse ist bestimmt durch die Winkel $\vartheta_1^0 = \pi - \psi_1^0$ und $\vartheta_1 = \pi - \psi_1$, die des gespiegelten durch die Reflexionswinkel ψ_2^0 und ψ_2 selbst. Infolgedessen gilt nach (175), (176) und (177):

$$\left.\begin{aligned}
\cos\psi_1 &= \frac{\cos\psi_1^0 - \beta}{1 - \beta\cos\psi_1^0} & \cos\psi_2 &= \frac{\cos\psi_2^0 + \beta}{1 + \beta\cos\psi_2^0} \\
\cos\psi_1^0 &= \frac{\cos\psi_1 + \beta}{1 + \beta\cos\psi_1} & \cos\psi_2^0 &= \frac{\cos\psi_2 - \beta}{1 - \beta\cos\psi_2} \\
\frac{|\mathfrak{S}_1|}{|\mathfrak{S}_1^0|} &= \frac{(1 - \beta\cos\psi_1^0)^2}{1 - \beta^2} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta\cos\psi_1)^2} \\
&= \frac{\sin^2\psi_1^0}{\sin^2\psi_1} = \frac{\nu_1^2}{\nu^{0\,2}} \\
\frac{|\mathfrak{S}_2|}{|\mathfrak{S}_2^0|} &= \frac{(1 + \beta\cos\psi_2^0)^2}{1 - \beta^2} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta\cos\psi_2)^2} \\
&= \frac{\sin^2\psi_2^0}{\sin^2\psi_2} = \frac{\nu_2^2}{\nu^{0\,2}}
\end{aligned}\right\} \quad \cdot\cdot \; (179)$$

Aus den ersten dieser Formeln schließen wir:

$$tg^2\frac{\psi_1}{2} = \frac{1-\cos\psi_1}{1+\cos\psi_1} = \frac{1-\cos\psi_1^0}{1+\cos\psi_1^0}\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta},$$

$$tg^2\frac{\psi_2}{2} = \frac{1-\cos\psi_2}{1+\cos\psi_2} = \frac{1-\cos\psi_2^0}{1+\cos\psi_2^0}\cdot\frac{1-\beta}{1+\beta};$$

also lautet das geometrische Gesetz der Spiegelung:

$$tg\frac{\psi_2}{2} : tg\frac{\psi_1}{2} = (c - \mathfrak{q}_x) : (c + \mathfrak{q}_x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (180)$$

Der Reflexionswinkel ist kleiner als der Einfallswinkel, wenn $\mathfrak{q}_x$ positiv ist, d. h. wenn der Spiegel sich dem einfallenden Strahl entgegen bewegt. Ferner folgern wir durch Division aus den letzten der Gleichungen (179):

$$\nu_2 : \nu_1 = \sin\psi_1 : \sin\psi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

Die Schwingungszahl wird durch die Spiegelung verändert, und zwar in dem eben erwähnten Falle vergrößert. Auf diese Abart des Doppler schen Prinzips bezieht sich der in § 2 erwähnte Versuch von Galitzin. Endlich aber folgt aus denselben Gleichungen und aus (178):

$$|\mathfrak{S}_2| = U\frac{\sin^2\psi_1}{\sin^2\psi_2}|\mathfrak{S}_1|, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (182)$$

also auch die Intensität des gespiegelten Strahles wird in dem genannten Falle vergrößert. Im Grenzfall, daß der Einfalls- und damit der Reflexionswinkel verschwindet, wird nach (180):

$$\lim_{\psi_1=0}\frac{\sin\psi_1}{\sin\psi_2} = \lim_{\psi_1=0}\frac{tg\frac{\psi_1}{2}}{tg\frac{\psi_2}{2}} = \frac{c+\mathfrak{q}_x}{c-\mathfrak{q}_x}\text{*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (183)$$

Zur Diskussion dieser Formeln ist zu beachten, daß der Einfallswinkel ψ_1 beim bewegten Spiegel nicht an das Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gebunden ist, daß vielmehr sein oberer Grenzwert bei

---

*) Das geometrische Gesetz der Spiegelung läßt sich auch ableiten, wie folgt: Ist

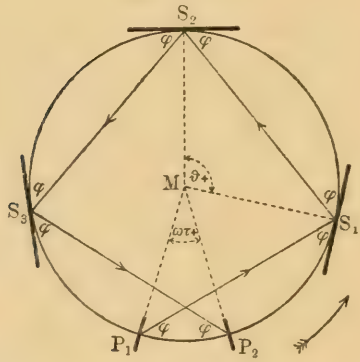
$$\sin\nu_1\{t - 1/c\,(-x\cos\psi_1 + y\sin\psi_1)\}$$

der allen Feldgrößen der einfallenden Welle gemeinsame Faktor, und spielt $\sin\nu_2\{t - 1/c\,(x\cos\psi_2 + y\sin\psi_2)\}$ dieselbe Rolle für die gespiegelte, so müssen an der Grenzebene des Spiegels vermöge der Grenzbedingungen (§ 21) beide einander gleich werden; diese Ebene hat aber die Gleichung $x = \mathfrak{q}_x t$.

$arc\,cos\left(-\frac{q_x}{c}\right)$ liegt. Dieser entspricht nach (179) der streifenden Incidenz $\psi^0 = \frac{\pi}{2}$ im Ruhsystem K^0; er liegt höher als $\frac{\pi}{2}$, wenn der Spiegel sich nach außen bewegt ($q_x > 0$), im anderen Falle unter $\frac{\pi}{2}$. Da bei streifender Incidenz in K^0 der reflektierte Strahl die Richtung des einfallenden hat, gilt dasselbe in diesem Grenzfalle für das System K, wie man auch aus (180) durch einfache Rechnung bestätigen kann.

c) Der Versuch von Sagnac[2]). Wir können nun auch leicht die Theorie des Sagnacschen Versuches (§ 2) geben. Wir brauchen dabei nur Glieder erster Ordnung in den Geschwindigkeiten zu berücksichtigen, die Lorentz-Kontraktion spielt also dabei noch keine Rolle, vielmehr dürfen wir allen Abmessungen des sich drehenden Apparates die Längen zuschreiben, die sie im Falle der Ruhe haben. In Fig. 11 a sei M der im berechtigten System K ruhende Mittelpunkt der im Sinne des Pfeiles rotierenden Kreisscheibe, r deren Radius, die vier Geraden geben die Bahn des im Sinne der Drehung (positiv) umlaufenden Strahles, P_1 ist die Lage der Trennungsplatte P im Augenblick des Abganges dieses Strahles, P_2 im Momente seiner Rückkehr, während die Spiegel S in den Lagen gezeichnet sind, in welchen sie den Strahl spiegeln.

Fig. 11 a.



Die erste Frage ist nun, ob bei der tangentiellen Lage der Spiegel überhaupt beide Strahlen, die von P ausgehen, auch dorthin zurückgelangen. Der positiv umlaufende Strahl muß, wie die Figur zeigt, Sehnen des Kreises zurücklegen, welche länger als die Quadratseiten sind; denn während er von einer Ecke zur anderen fortschreitet, bewegt sich das Quadrat und die Ecke, auf die er zueilt, ungefähr im Sinne seiner eigenen Richtung. Da aber alle

diese Sehnen gleich lang sind, treffen sie den Kreis und die zu ihm tangentiellen Spiegel S alle unter dem gleichen Winkel φ. Einfalls- und Reflexionswinkel sind aber nach Abschnitt b hier einander gleich, weil die Spiegel nur eine tangentielle Geschwindigkeit haben. Somit stimmt die in der Figur gezeichnete Bahn des Strahles mit dem Spiegelungsgesetz überein. Verläßt der Strahl die Kreisperipherie bei P_1 unter dem geeigneten Winkel φ, so kehrt er unter demselben Winkel gegen sie nach der Platte P in der Stellung P_2 zurück. Desgleichen läßt sich auch für den negativ umlaufenden Strahl ein passender Winkel φ angeben, so daß er wieder unter dem gleichen Winkel nach der Platte P zurückgelangt. Da die Strahlen an P aus einem einzigen entstanden sind, werden sie sich dann auch ebenso wie bei der Ruhe wieder vereinigen lassen.

Die Zeit τ_+, welche der positiv umlaufende Strahl von P_1 bis P_2 braucht, läßt sich mit dem Zentriwinkel ϑ_+, welcher einer der zurückgelegten Sehnen entspricht, in die Beziehung $\tau_+ = \frac{8r}{c} \sin \frac{\vartheta_+}{2}$ setzen; sie sagt aus, daß der Strahl vier Sehnen von der Länge $2r \sin \frac{\vartheta_+}{2}$ mit der Geschwindigkeit c zurücklegt. Im Falle der Ruhe wäre $4\vartheta_+ = 2\pi$; so aber ist $4\vartheta_+$ größer um den Winkel $\omega\tau_+$, welchen P in der Zeit τ_+ zurücklegt (siehe die Figur), also: $4\vartheta_+ = 2\pi + \omega\tau_+$. Die Elimination von ϑ_+ aus diesen Gleichungen ergibt: $\tau_+ = \frac{8r}{c} \sin\left[\frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\omega\tau_+}{2}\right)\right]$. Entsprechend findet man für die Umlaufszeit des anderen Strahles: $\tau_- = \frac{8r}{c} \sin\left[\frac{1}{4}\left(\pi - \frac{\omega\tau_-}{2}\right)\right]$.

Die Differenz beider ist

$$\Delta\tau = \tau_+ - \tau_- = \frac{16r}{c} \cos\left[\frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\omega\Delta\tau}{4}\right)\right] \cdot \sin\left[\frac{\omega}{16}(\tau_+ + \tau_-)\right].$$

Soweit ist die Rechnung streng; vernachlässigen wir nun Größen zweiter Ordnung in ω, wie z. B. $\omega\Delta\tau$ gegen π, so können wir hier den Kosinus gleich $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und außerdem

$$\omega(\tau_+ + \tau_-) = 2\omega\tau_0$$

setzen, wobei τ_0 die Umlaufszeit im Falle der Ruhe bedeutet, d. h. $\tau_0 = \frac{8r}{c} \sin\frac{\pi}{4}$. Folgerichtig müssen wir dann auch $\omega^2\tau_0^2$ gegen

1 vernachlässigen, können also $sin \frac{\omega}{8} \tau_0 = \frac{\omega}{8} \tau_0$ setzen und finden als Näherungsformel

$$\Delta \tau = \frac{8 \omega r^2}{c^2} = \frac{4 \omega F}{c^2},$$

wo F der Inhalt des Quadrates ist. Durch Division mit der Lichtperiode $\frac{\lambda}{c}$ finden wir daraus unmittelbar das Verhältnis der Verschiebung der Interferenzstreifen zur Streifenbreite, nämlich

$$\Delta = \frac{c \Delta \tau}{\lambda} = \frac{4 \omega F}{c \lambda}, \quad \ldots \ldots \ldots (183a)$$

in Übereinstimmung mit dem von Sagnac gemessenen Wert.

§ 17. Gleichförmige Bewegung geladener Körper.

a) Das elektromagnetische Feld. Wie das Problem der Reflexion am bewegten Spiegel, lösen wir auch die Aufgabe, das Feld eines gleichförmig bewegten Ladungsträgers zu ermitteln, durch „Transformation auf Ruhe". Im Ruhsystem K^0 haben wir nämlich ein gewöhnliches elektrostatisches Feld $\mathfrak{E}^0$; $\mathfrak{H}^0$ ist gleich Null. Daraus folgt nach (141), wenn wir wiederum die Transformation (XI) zugrunde legen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}_x^0, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\mathfrak{E}_y^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\mathfrak{E}_z^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \mathfrak{H}_x &= 0, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{\beta \mathfrak{E}_z^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{H}_z = \frac{\beta \mathfrak{E}_y^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \cdot \cdot (184)$$

Die Gleichungen der zweiten Zeile kann man zusammenfassen in:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c} [\mathfrak{q} \mathfrak{E}] \quad \ldots \ldots \ldots (185)$$

da $\mathfrak{q} \parallel x$ und $\beta = \mathfrak{q}_x c$ ist.

Bezeichnet man ferner den Winkel zwischen der elektrischen Feldstärke und der Geschwindigkeit mit ϑ, so gilt:

$$tg\, \vartheta = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2}}{\mathfrak{E}_x} = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}_y^{0^2} + \mathfrak{E}_z^{0^2}}}{\mathfrak{E}_x^0 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{tg\, \vartheta^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \cdot (186)$$

Verkürzt man daher in der das elektrostatische Feld $\mathfrak{E}^0$ darstellenden Kraftlinienfigur alle der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ parallelen Strecken im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2}$, so erhält man die Kraftlinienfigur für das System K. Denn einmal entspricht diese Verkürzung der Lorentz-Kontraktion (§ 7), so daß wir zu jedem Punkt in K^0 dabei den entsprechenden Punkt in K finden, zugleich aber

vergrößern alle Kurven ihre Neigung gegen die genannte Richtung in dem von der letzten Gleichung geforderten Maße.

Auch die Niveauflächen des elektrostatischen Potentiales $\varphi^0(x^0, y^0, z^0)$ in K^0 behalten bei dieser Konstruktion eine Bedeutung. Die Kraft $\mathfrak{K}$, welche auf eine mitbewegte Punktladung e ausgeübt wird, transformiert sich nämlich nach Gleichung (149), deren Vorbedingung hier erfüllt ist, wie folgt:

$$\mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}_x^0, \quad \mathfrak{K}_y = \mathfrak{K}_y^0 \sqrt{1-\beta^2}, \quad \mathfrak{K}_z = \mathfrak{K}_z^0 \sqrt{1-\beta^2} \quad (187)$$

Nun ist aber im statischen Felde des Systems K^0

$$\mathfrak{K}^0 = -e\, grad\, \varphi^0(x^0, y^0, z^0),$$

wo φ^0 das elektrostatische Potential bedeutet, also nach (XI) (134) und (187):

$$\mathfrak{K} = -e\, grad\, \psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (188)$$

wobei ψ das „dynamische Potential“

$$\left.\begin{aligned} \psi\,(x, y, z, t) &= \sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}} \cdot \varphi^0\left(\frac{x-qt}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}, y, z\right) \\ &= \sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}\, \varphi^0(x^0, y^0, z^0) \end{aligned}\right\} \cdot \quad (189)$$

ist. Denn daraus folgt:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi^0}{\partial x^0}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}\frac{\partial\varphi^0}{\partial y^0}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}\frac{\partial\varphi^0}{\partial z^0}.$$

Die Niveauflächen $\varphi^0 = const$ gehen also in Flächen $\psi = const$ über. Jede Begrenzung eines leitenden Körpers ist eine solche. Aber statt der elektrischen Feldstärke steht jetzt die ponderomotorische Kraft auf ihnen senkrecht, denn die rechten Winkel zwischen den elektrischen Kraftlinien und Niveauflächen bleiben bei der Verzerrung nicht erhalten.

b) Das Feld eines bewegten Elektrons. Das Kraftfeld einer ruhenden Kugel mit gleichförmiger Oberflächenladung ist der Gleichwertigkeit aller Richtungen wegen durch eine Reihe radialer Kraftlinien mit konstantem Winkelabstand bestimmt. Die Potentialflächen sind Kugeln, deren Radien wie die reziproken Werte der abnehmenden Reihe der ganzen Zahlen wachsen, wenn man das Potential stets um den gleichen Betrag verkleinert, denn es ist

$$\varphi^0 = \frac{e}{4\pi\sqrt{x^{0^2}+y^{0^2}+z^{0^2}}}.$$

Verzerrt man nun die Figur in der angegebenen Art, so entsteht als Schnitt mit einer zur Geschwindigkeit q parallel durch den Mittelpunkt gelegten Ebene Fig. 12, welche demnach das Feld eines bei Ruhe kugelförmigen, bewegten Elektrons ($q = 0{,}866\ c$) darstellt. Seiner Form nach ist es wegen der Lorentz-Kontraktion ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Die Dichte der Kraftlinien ist hier, wie in der Potentialtheorie, ein Maß für die Stärke des elektrischen Feldes, da jede Kraftröhre an der gleichen Flächenladung endigt, wie aus der Konstruktion hervorgeht; der Abstand der Niveauflächen des dynamischen Potentials

Fig. 12.

$$\psi = \frac{e\,(1 - q^2/c^2)}{4\pi\sqrt{(x-qt)^2 + (1-q^2/c^2)(y^2+z^2)}}$$

bestimmt dagegen den Betrag der Kraft $\mathfrak{K}$. Man sieht, jenes ist am stärksten in der Äquatorialebene des Ellipsoids, diese hingegen in der Achse. Die Linien der magnetischen Feldstärke sind wegen der Rotationssymmetrie und nach (185) zur Achse senkrechte Kreise, deren Mittelpunkte in der Achse liegen; die Linien der Kraft $\mathfrak{K}$ dagegen sind als die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen $\psi = const$ parabolische Kurven mit den Gleichungen:

$$\frac{y}{z} = const, \quad x - qt = const\,.\sqrt{y^2 + z^2}^{\,1 - q^2/c^2}.$$

c) Die Rückwirkung des Feldes auf bewegte Träger von Ladungen. Da die Gesamtkraft, welche ein in K^0 ruhender Körper in seinem elektrostatischen Felde erfährt, Null ist, so gilt dies nach (187) auch für die gesamte Kraft, die er bei gleichförmiger Bewegung von seinem Felde erleidet. Es bedarf also keiner äußeren Kraft, um die stationäre Bewegung zu unterhalten. Von Null verschieden dagegen ist im allgemeinen

das Drehmoment der elektromagnetischen Kräfte. Wählen wir nämlich in (167) als Grenze des Integrationsbereiches eine Kugel um irgend einen Punkt im Ladungsgebiet, deren Radius R wir dann immer weiter wachsen lassen, so verschwinden schließlich, wie man aus (184) ersieht, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gleich $\mathfrak{E}^0$ wie R^{-2}; da der Tensor $\boldsymbol{p}$ in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ quadratisch ist, konvergiert das Oberflächenintegral in Gleichung (167) dann gegen Null.

Zur Berechnung des in (166) auftretenden Integrals $\int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}_e]\, dS$ denken wir uns ein starres Gerüst mit den Ladungsträgern bewegt und nennen das Volumelement in ihm δV. In jedem seiner Punkte ist der Zustand, also auch $\mathfrak{g}_e$, unveränderlich. Daher ist auch der Gesamtimpuls

$$\int \mathfrak{g}_e\, \delta S = \int \mathfrak{g}_e\, d\, V = \mathfrak{G}_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (189\text{a})$$

konstant. Daß sich das Integral $\int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}_e]\, d\, S = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}_e]\, \delta V$ mit der Zeit ändert, liegt allein daran, daß der von einem festen Raumpunkt aus gemessene Radiusvektor $\mathfrak{r}$ für jeden Punkt des Gerüstes in der Zeit dt um $\mathfrak{q}\, dt$ wächst; der entsprechende Zuwachs von $\int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}_e]\, \delta V$ beträgt $[\mathfrak{q}, \int \mathfrak{g}_e\, \delta V]\, dt = [\mathfrak{q}\mathfrak{G}_e]\, dt$. Also folgt aus (166)

$$\mathfrak{N} = -[\mathfrak{q}\mathfrak{G}_e] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (190)$$

Liegt der elektromagnetische Impuls $\mathfrak{G}_e$ des Feldes eines bewegten geladenen Körpers nicht in der Richtung der Geschwindigkeit, so üben die elektromagnetischen Kräfte ein Drehmoment auf ihn aus [Abraham[1])]. Trotzdem darf keine Drehung eintreten, da in K^0 die elektrostatischen Kräfte keine Änderung der Lage bewirken. Es wird die Aufgabe der Mechanik sein, nachzuweisen, wodurch dies elektromagnetische Drehmoment aufgehoben wird. Wir wollen schon hier bemerken, daß der Grund dafür in den mechanischen Spannungen liegt, welche im Körper den elektromagnetischen Kräften das Gleichgewicht halten.

d) Energie und Impuls des Feldes. Zur Berechnung der Energie und ihrer Stromdichte im Felde des bewegten Körpers dienen die Gleichungen (169); in ihnen ist nach (X), (19) und (VIII a)

$$\boldsymbol{p}^0_{xx} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^{0\,2} - \mathfrak{E}^{0\,2}_x, \quad \boldsymbol{p}^0_{xy} = -\mathfrak{E}^0_x\, \mathfrak{E}^0_y, \quad \boldsymbol{p}^0_{xz} = -\mathfrak{E}^0_x\, \mathfrak{E}^0_z.$$

$$\mathfrak{S}^0 = 0, \quad W^0 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^{0\,2}, \quad \beta = \mathfrak{q}_x/c, \quad v = \mathfrak{q}_x$$

zu setzen, also wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= \frac{\mathfrak{q}_x (2\,W^0 - \mathfrak{E}_x^{0\,2})}{1 - q^2/c^2}, \quad \mathfrak{S}_y = \frac{-\mathfrak{q}_x\,\mathfrak{E}_x^0\,\mathfrak{E}_y^0}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}, \\ \mathfrak{S}_z &= \frac{-\mathfrak{q}_x\,\mathfrak{E}_x^0\,\mathfrak{E}_z^0}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}, \quad W = \frac{W^0\,(1 + q^2/c^2) - q^2/c^2\,\mathfrak{E}_x^{0\,3}}{1 - q^2/c^2} \end{aligned}\right\} \quad \cdot\ \cdot\ (191)$$

Den Gesamtimpuls $\mathfrak{G}_e = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}\,\delta V$ und die Gesamtenergie $E = \int W \delta V$ findet man hieraus durch Integration über das gesamte Feld. Zu berücksichtigen ist, daß sich das Volumelement unseres starr mitbewegten Gerüstes wie ein materielles Volumelement nach (31) transformiert. Daher wird:

$$\int W^0\,\delta V = \sqrt{1 - \beta^2} \int W^0\,\delta V^0 = \sqrt{1 - \beta^2}\,E^0.$$

e) Beispiel des kugelförmigen Elektrons. Führt man diese Rechnung für das in Ruhe kugelförmige Elektron aus, so wird aus Symmetriegründen

$$\int \mathfrak{E}_x^{0\,2}\,\delta V = \sqrt{1 - \beta^2} \int \mathfrak{E}_x^{0\,2}\,\delta V^0$$
$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{1 - \beta^2} \int \mathfrak{E}^{0\,2}\,\delta V^0 = \tfrac{1}{3}\sqrt{1 - \beta^2}\,E^0,$$

dagegen

$$\int \mathfrak{E}_x^0\,\mathfrak{E}_y^0\,\delta V = \sqrt{1 - \beta^2} \int \mathfrak{E}_x^0\,\mathfrak{E}_y^0\,\delta V^0 = 0;$$

denn es gibt in K^0 zu jedem Volumelement δV^0 ein ihm in bezug auf die $y^0 z^0$-Ebene symmetrisch gelegenes, in welchem $\mathfrak{E}_x^0\,\mathfrak{E}_y^0$ den entgegengesetzt gleichen Wert hat. Ebenso ist

$$\int \mathfrak{E}_x^0\,\mathfrak{E}_z^0\,\delta V = 0.$$

Also wird

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}_{ex} &= \tfrac{4}{3}\,\frac{\mathfrak{q}_x}{c\sqrt{c^2 - q^2}}\,E^0, \quad \mathfrak{G}_{ey} = \mathfrak{G}_{ez} = 0, \\ \text{d. h.} \quad & \\ \mathfrak{G}_e &= \frac{4\,E^0\,\mathfrak{q}}{3\,c\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad E = \frac{c^2 + \frac{1}{3}\,q^2}{c\sqrt{c^2 - q^2}}\,E^0 \end{aligned}\right\} \quad \cdot\ \cdot\ (192)$$

Bei gleichmäßiger Oberflächenladung ist die Energie $E^0 = \frac{e^2}{8\,\pi\,a}$, wenn a den Radius bezeichnet; und bei gleichmäßiger Volumladung hat sie den nur wenig größeren Wert $E^0 = \frac{3}{20\,\pi}\frac{e^2}{a}$.

Ein Drehmoment tritt nach (190) und (192) nicht auf, was ja auch aus Symmetriegründen einleuchtet. Die hier berechneten Werte von $\mathfrak{G}_e$ und E gelten streng nur für völlig unbeschleunigte Bewegung. Doch wird man sie als brauchbare Näherung anwenden können, wenn die Beschleunigung so gering ist, daß sie keinen erheblichen Einfluß auf das Feld hat. Man spricht in diesem Falle von „quasistationärer" Bewegung.

§ 18. Die Theorie des Trouton-Nobleschen Versuches.

a) Berechnung des Drehmomentes aus der Erhaltung des Drehimpulses. An dieser Stelle bietet sich nun auch die Gelegenheit, die Theorie des wichtigen, in § 2 nur kurz erwähnten Kondensatorversuches von Trouton und Noble nachzuholen. Wir wollen hier zeigen, daß ein bewegter Kondensator von den ponderomotorischen Kräften seines Feldes ein Drehmoment erfährt. Die genannten Autoren wollten dies Drehmoment an einem mit der Erde bewegten Kondensator nachweisen; und zwar erwarteten sie, da er sehr leicht drehbar an einer empfindlichen bifilaren Aufhängung befestigt war, als Folge dieses Drehmomentes eine Drehung. Ihr Eintreten wäre ein Widerspruch gegen das Relativitätsprinzip gewesen. Denn in dem System K^0, in welchem die Erde ruht, liegt ein elektrostatisches Feld vor und dies veranlaßt die Gesamtheit der zugehörigen Ladungsträger nie zu einer Drehung. Weshalb aber die Drehung nicht eintritt, trotzdem auch nach der Relativitätstheorie jenes Drehmoment vorhanden ist, wenn man ein anderes Bezugssystem benutzt, kann freilich noch nicht hier, sondern erst in § 31 und 33 erklärt werden.

Wir berechnen das Drehmoment zunächst im Anschluß an Gleichung (190) im vorhergehenden Paragraphen. Ist die Normale der Platten senkrecht zur z-Achse und bildet sie mit der x-Achse den Winkel ϑ bzw. ϑ^0, so ist in K^0, da $\mathfrak{E}^0$ zur Normalen parallel ist,

$$\mathfrak{E}_x^0 = |\mathfrak{E}^0| \cos\vartheta^0, \quad \mathfrak{E}_y^0 = |\mathfrak{E}^0| \sin\vartheta^0, \quad \mathfrak{E}_z^0 = 0,$$

wobei $|\mathfrak{E}^0|$ zwischen den Platten räumlich konstant ist. Bei der Ausführung der Integration (189 a) finden wir somit:

$$\mathfrak{G}_{ex} = \frac{2\,\mathfrak{q}_x \sin^2\vartheta^0}{c\sqrt{c^2-q^2}} E^0, \quad \mathfrak{G}_{ey} = -\frac{\mathfrak{q}_x \sin 2\vartheta^0}{c^2} E^0, \quad \mathfrak{G}_{ez} = 0\,. \quad (193)$$

Wegen der Lorentz-Kontraktion bildet die Plattennormale im System K einen anderen Winkel ϑ mit der x-Achse als in K^0; doch ist der Unterschied eine Größe zweiter Ordnung. Die Komponente von $\mathfrak{G}_e$ in der Richtung der Normalen ist somit bis auf Größen zweiter Ordnung:

$$\mathfrak{G}_{en} = \mathfrak{G}_{ex} \cos \vartheta^0 + \mathfrak{G}_{ey} \sin \vartheta^0 = 0.$$

Mit der angegebenen Genauigkeit liegt daher der Impuls $\mathfrak{G}$ parallel den Platten. Das Drehmoment, welches gemäß (190) auf den Kondensator um eine in der z-Richtung liegende Achse ausgeübt wird, hat nach (193) den Betrag

$$\mathfrak{N}_z = - \mathfrak{q}_x \mathfrak{G}_{ey} = \frac{q^2 \sin 2\vartheta^0}{c^2} \cdot E^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (193\,\mathrm{a})$$

b) Anschauliche Berechnung des Drehmomentes. Die unter a) angestellte Überlegung ist zwar durchaus zwingend. Aber anschaulicher ist es, zu fragen: Welches sind die Kräftepaare, welche dies Drehmoment hervorbringen, und wo greifen sie an? Dies soll im folgenden beantwortet werden. Zur möglichsten Vereinfachung setzten wir dabei voraus, daß die Kondensatorplatten Rechtecke sind*), deren Seiten a und b groß sind gegen den Plattenabstand d, daß ferner die Plattendicke auch gegen d klein ist und geradezu als unendlich klein betrachtet werden kann. Für das Ergebnis sind diese Voraussetzungen unwesentlich. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ sei senkrecht auf den Seiten von der Länge b.

c) Die am ruhenden Kondensator angreifenden Kräfte. Weitaus die stärkste Kraftwirkung, welche der Kondensator erfährt, besteht natürlich in der Anziehung, welche die Platten aufeinander ausüben; sie hat, soweit das Feld im Inneren als homogen betrachtet werden darf, pro Flächeneinheit die Stärke $\frac{1}{2}\mathfrak{E}^{0\,2}$. Denn so groß ist die Spannung parallel zu den Kraftlinien, wie man an (X) sieht, indem man die x-Richtung parallel zu $\mathfrak{E}$ wählt. Da diese Linien senkrecht auf den Flächen endigen, überträgt sie sich als nach außen ziehende Kraft pro Flächeneinheit auf diese. Nach den obigen Annahmen über das Verhältnis von a und b zu d dürfen wir aber alle Randwirkungen, welche diesen Wert abändern, vernachlässigen. Somit

*) Diese durchaus unwesentliche Annahme ließe sich leicht beliebig abändern.

dürfen wir diese Anziehung darstellen durch zwei zu den Platten senkrechte Kräfte $\pm \mathfrak{K}_1^0$ von der Stärke

$$|\mathfrak{K}_1^0| = \tfrac{1}{2} a b \mathfrak{E}^{0\,2} = \frac{E^0}{d} \quad \cdots\cdots \quad (194)$$

deren Angriffspunkte die Mittelpunkte der Platten sind. Weit weniger stark, aber dennoch für unsere Zwecke in Betracht kommend, sind die Zugkräfte, welche am Rande wirken.

Das elektrostatische Feld an den Kanten eines rechteckigen Plattenkondensators ist zwar nicht exakt bekannt. Nach den obigen Annahmen unterscheidet es sich aber nicht merklich von dem Falle, daß die Platten unendlich ausgedehnte Halbebenen sind. Erhebliche Abweichungen können nur an den Ecken auftreten und sich auf ein Gebiet erstrecken, dessen Abmessungen von der Größenordnung des Plattenabstandes d, also klein gegen die Seitenlängen a und b sind.

Für den erwähnten Fall unendlich ausgedehnter Platten hat nun Helmholtz die Lösung des Potentialproblems gegeben. Gesucht ist dabei eine überall endliche und stetige Potentialfunktion φ, welche längs der Platten die vorgeschriebenen konstanten Werte V und $-V$ annimmt und sonst überall der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ genügt. Legt man die z-Richtung parallel zu den Kanten, so wird φ von z unabhängig. Darin liegt die Vereinfachung begründet, welche die Lösung des Problems ermöglicht.

Hat man nämlich eine aus zwei reellen Funktionen φ und ψ zusammengesetzte komplexe Funktion $\chi = \psi + i\varphi$ des komplexen Argumentes $u = x + iy$, so genügen sowohl ψ als φ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

während zwischen φ und ψ der Zusammenhang

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \cdots\cdots \quad (195)$$

besteht. Die Kurven $\varphi = const$ sind in einer zur z-Achse senkrechten Ebene, für welche wir die Diskussion allein durchführen, die Niveaulinien, die Kurven $\psi = const$, die zu den ersteren überall senkrecht stehen, sind die Kraftlinien des Feldes. Hier besteht nun der Zusammenhang:

$$u = \frac{d}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{V} \chi + e^{\frac{\pi}{V}\chi} \right\} \quad \cdots\cdots \quad (196)$$

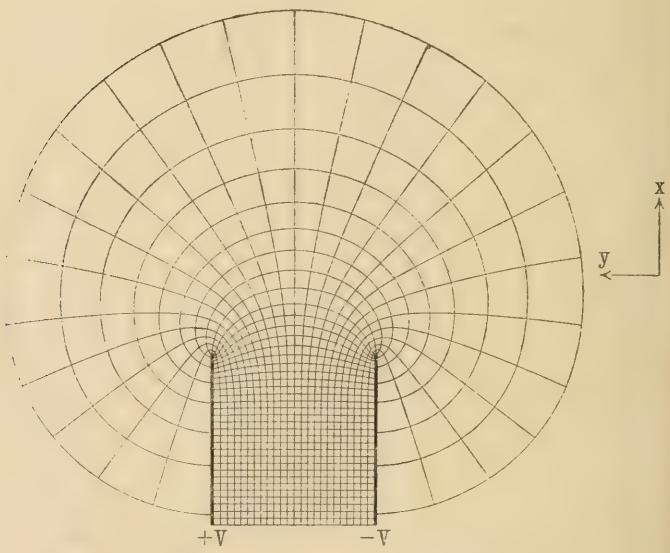
zwischen u und χ; wenn man den reellen vom imaginären Teil trennt, findet man:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{V}\psi + e^{\frac{\pi}{V}\psi}\cos\left(\frac{\pi}{V}\varphi\right)\right\} \\ y &= \frac{d}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{V}\varphi + e^{\frac{\pi}{V}\psi}\sin\left(\frac{\pi}{V}\varphi\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (197)$$

Zur Diskussion betrachten wir vor allem die Niveaulinien $\varphi = \pm V$; für sie ist $y = \pm \frac{1}{2} d$. Doch gehören nicht alle Punkte dieses Geradenpaares zu jenen Niveaulinien; vielmehr durchläuft

$$x = \frac{d}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{V}\psi - e^{\frac{\pi}{V}\psi}\right\}$$

Fig. 13.



nur die Werte von $-\infty$ bis zu $-\frac{d}{2\pi}$ und wieder zurück, wenn ψ von $-\infty$ bis $+\infty$ geht. Das Maximum entspricht dem Wert $\psi = 0$. Die Niveaulinien $\varphi = \pm V$ sind also die Teile der Linien $y = \pm \frac{1}{2} d$, welche von $x = -\infty$ bis $-\frac{d}{2\pi}$ reichen. Sie geben die Schnitte der Kondensatorplatten mit der Zeichenebene an. Diskutiert man ähnlich den Verlauf einer anderen Niveau-

linie $\varphi = \varphi_0 (|\varphi_0| < V)$, so erkennt man, daß die Kraftlinien $\psi = -\infty$ weit im Inneren, die Kraftlinien $\psi = +\infty$ weit im Außenraume des Kondensators verlaufen. Fig. 13 zeigt die Kraftlinien und die Niveaulinien in der Nähe des Randes. Man sieht an ihr, wie schnell das Feld im Inneren homogen wird, ferner, daß es nur eine Kraftlinie (nämlich $\psi = 0$) gibt, welche nicht senkrecht auf den Platten endigt. Nur diese eine ist daher imstande, vermöge der längs ihr herrschenden Spannung einen Zug parallel zu den Platten auszuüben; diese Zugkraft greift also notwendig an der Kante an.

Wegen der an der Kante herrschenden Singularitäten kann man sie freilich nur auf einem Umwege berechnen. Man denke sich irgend eine andere Niveaulinie $\varphi = \varphi_0$ als leitende Begrenzung des Feldes; dann fällt die Singularität fort und man kann leicht ausrechnen, welche Kraft sie parallel zu x vom Felde erleidet. Setzt man in diesen Ausdruck hinterher $\varphi_0 = V$, so erhält man den Wert für die Zugkraft an der Kante.

Die Kraft, welche auf das Linienelement ds der Niveaulinie φ_0 (genauer: auf ein Flächenstück, das parallel zu z die Erstreckung 1 und in der Zeichenebene die Länge ds hat) wirkt, hat den Betrag

$$\frac{1}{2}\mathfrak{E}^{0\,2} ds = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2 ds$$

und die Richtung n, wenn n die ins Feld hinein weisende Normale von ds ist. Die x-Komponente dieser Kraft ist:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2 \cos(n\,x)\, ds$$

und die Integralwirkung auf die ganze Niveaulinie ist

$$\mathfrak{K}_x^0 = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2 \cos(n\,x)\, ds.$$

Wählen wir die Integrationsrichtung so, daß wir weit im Inneren des Kondensators beginnen, so liegen ds und n zueinander wie y und x. Infolgedessen ist nach (195) $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s}$; da ferner n parallel zu der Kraftlinie am gleichen Orte, d. h. $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ ist, so können wir $\frac{\partial \psi}{\partial s} ds = d\psi$ setzen und haben in der Gleichung

$$\mathfrak{K}_x^0 = -\frac{1}{2}\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(nx)\, d\psi$$

von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren. Da andererseits $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ ist, wird $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(nx) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Nun folgt aber aus (196) oder (197) vermittelst einfacher Rechnungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2V}{d} \frac{e^{\frac{\pi}{V}\psi} \sin\left(\frac{\pi}{V}\varphi\right)}{1 + 2\, e^{\frac{\pi}{V}\psi} \cos\left(\frac{\pi}{V}\varphi\right) + e^{\frac{2\pi}{V}\psi}}.$$

Führen wir als Integrationsvariable $u = e^{\frac{\pi}{V}\psi}$ ein, so finden wir, da längs der Linie $\varphi = \varphi^0$ zu integrieren ist:

$$\mathfrak{K}_x^0 = \frac{V^2}{\pi d} \sin\left(\frac{\pi}{V}\varphi_0\right) \int_0^\infty \frac{du}{1 + 2\, u \cos\left(\frac{\pi}{V}\varphi_0\right) + u^2}$$

$$= \frac{V^2}{\pi d}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{V}\varphi^0\right) + u}{\sin\left(\frac{\pi}{V}\varphi^0\right)} \right]_0^\infty = \frac{V\varphi^0}{d}.$$

Im Grenzfall $\varphi = V$ wird hieraus $\mathfrak{K}_x^0 = \frac{V^2}{d}$. Doch ist dabei zunächst so gerechnet, als hätte der Kondensator die Ausdehnung 1 senkrecht zur Zeichenebene. Auf die Kanten b der oben betrachteten Kondensatoren wirkt daher eine in ihrem Mittelpunkte angreifende, nach außen ziehende Kraft vom Betrage

$$|\mathfrak{K}_2^0| = \frac{bV^2}{d} = \frac{1}{2}\frac{E^0}{a} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (198)$$

da die elektrostatische Energie des Kondensators von der Plattengröße ab in der obigen Annäherung

$$E^0 = \frac{1}{2} a b d \left(\frac{2V}{d}\right)^2 = 2\frac{ab}{d} V^2$$

gesetzt werden kann. Das entsprechende gilt für die Kanten von der Länge a; doch kommen die hierauf wirkenden Kräfte, wie wir sehen werden, im folgenden nicht in Betracht.

d) Die Transformation vom Ruhsystem auf ein anderes Bezugssystem. Das Ergebnis des Abschnittes c) ist

in Fig. 14 veranschaulicht, die einen zu den Kanten b senkrechten Querschnitt durch die Mitte des Kondensators (in Bezugssystem K^0) darstellt. In den Plattenmittelpunkten M und M' greifen die Kräfte $\pm \mathfrak{K}_1^0$, in den Mittelpunkten A, B, A', B' der Kanten die Kräfte $\pm \mathfrak{K}_2^0$ an. Die Längen der diese Kräfte darstellenden Strecken konnten freilich nicht gut entsprechend (194) und (198) gezeichnet werden. Wohl aber gibt diese und die folgende Figur die Richtungen der Kräfte richtig wieder. Der Augenschein lehrt, daß ein Drehmoment nicht ausgeübt wird — was ja selbstverständlich ist.

Zur Ausführung der Transformation wählen wir wieder die Achsenkreuze in beiden Systemen parallel zueinander, die z-Richtung

Fig. 14.

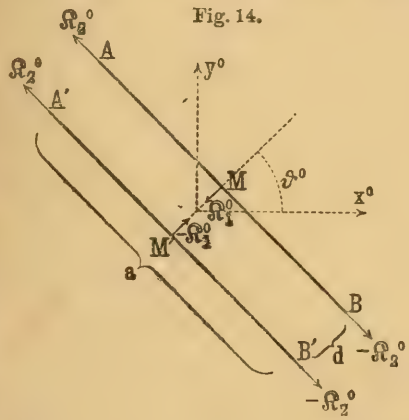
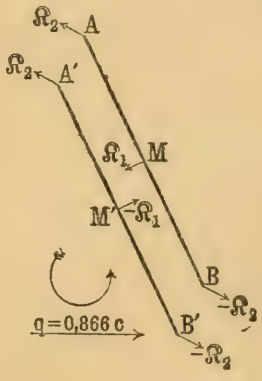


Fig. 15.



parallel zu den Kanten b, die x-Richtung parallel zur Relativgeschwindigkeit q von K^0 gegen K. Den Winkel, welchen in K^0 die Plattennormale mit letzterer Richtung bildet, nennen wir wieder ϑ^0. Für die Koordinaten der Punkte M, M', A, B, A', B', gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$y_M^0 - y_{M'}^0 = d \sin \vartheta^0, \quad y_A^0 - y_B^0 = y_{A'}^0 - y_{B'}^0 = a \cos \vartheta^0 \quad . \quad . \quad (199)$$

Ferner ist nach (194) und (198)

$$\mathfrak{K}_{1x}^0 = -\frac{E^0}{d} \cos \vartheta^0, \quad \mathfrak{K}_{2x}^0 = -\frac{1}{2} \frac{E^0}{a} \sin \vartheta^0 \quad . \quad . \quad (200)$$

Nun wenden wir auf die Koordinaten die Transformation XI mit $v = \mathfrak{q}_x$, auf die Kräfte die Formel (187)

$$\mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}_x^0, \quad \mathfrak{K}_y = \mathfrak{K}_y^0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$$

an. Das Ergebnis zeigt Fig. 15 (bei welcher

$$\vartheta^0 = \frac{\pi}{4}, \quad \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \text{ d. h. } q = 0{,}866\, c$$

angenommen ist).

Einmal ist die Form des Kondensators infolge der Lorentz-Kontraktion verzerrt, sodann haben alle Kräfte wegen der Verkleinerung der y-Komponente ihre Richtung geändert. Der Augenschein lehrt, daß hier ein Drehmoment in dem in der Figur gezeichneten Sinne auf den Kondensator ausgeübt wird. Dasselbe zeigt auch die Rechnung, denn nach (163) ist

$$\mathfrak{N}_z = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{F}]_z \, \delta V = \Sigma (x \mathfrak{K}_y - y \mathfrak{K}_x),$$

was, auf K^0 angewandt, nach (198)

$$\mathfrak{N}_z^0 = \Sigma (x^0 \mathfrak{K}_y^0 - y^0 \mathfrak{K}_x^0) = 0:$$

ergibt. Für das System K folgt hieraus nach den angegebenen Transformationen:

$$\mathfrak{N}_z = \Sigma \left[x^0 \mathfrak{K}_y^0 \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) - y^0 \mathfrak{K}_x^0 \right] = -\frac{q^2}{c^2} \Sigma\, y^0 \mathfrak{K}_x^0 \quad . \quad (201)$$

Trennt man hier die Anteile der verschiedenen Kräftepaare, so entspricht den Kräften $\pm \mathfrak{K}_1$ nach (199) und (200) das Moment

$$-\frac{q^2}{c^2} (y_M^0 - y_{M'}^0) \mathfrak{K}_{1x}^0 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c^2} E^0 \sin 2\vartheta^0,$$

den vier Kräften $\pm \mathfrak{K}_2$ zusammen aber das gleichgroße Moment

$$-2 \frac{q^2}{c^2} (y_A^0 - y_B^0) \mathfrak{K}_{2x}^0 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c^2} E^0 \sin 2\vartheta^0.$$

Das gesamte Moment ist somit

$$\mathfrak{N}_z = \frac{q^2}{c^2} E^0 \sin 2\vartheta^0,$$

wie wir es auch früher fanden. Die Kräfte, welche auf die Kanten a wirken, sind parallel zu z und bleiben bei der Transformation wie auch die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte parallel zu z, geben somit kein Drehmoment.

e) Die Stellung der Absoluttheorie zu diesem Versuche. Will man aus dem Trouton-Nobleschen Versuche eine

Entscheidung zwischen beiden Theorien ableiten, so muß man zeigen, daß auch nach der älteren Theorie wenigstens in Annäherung dasselbe Drehmoment herauskommt. Dies geschieht am einfachsten im Anschluß an Absatz a). Da sich beide Theorien nicht in den Grundgleichungen für das elektromagnetische Feld, sondern, soweit hier in Betracht kommt, nur in ihren Aussagen über die Form des bewegten Kondensators unterscheiden, diese Unterschiede bei kleinen Geschwindigkeiten aber klein von der zweiten Ordnung sind, so gelten die zu der Gleichung (193a) führenden Betrachtungen mit großer Annäherung auch in der Absoluttheorie. Auch nach dieser hat der elektromagnetische Impuls eine zur Geschwindigkeit senkrechte Komponente. Wegen der Erhaltung des Drehimpulses läßt sich daraus wie in § 17, c) auf ein Drehmoment schließen. Dessen Wert weicht nur in Gliedern höherer Ordnung von dem berechneten ab.

Der Unterschied beider Theorien zeigt sich erst wesentlich, wenn man nach der Wirkung dieses Drehmomentes fragt. Nach der Newtonschen Mechanik, welche in der Absoluttheorie ja beibehalten wird, muß eine Drehung die Folge sein; nach dem Relativitätsprinzip darf sie, wie wir unter a) gesehen haben, nicht eintreten. Das Versuchsergebnis entscheidet für das Relativitätsprinzip.

§ 19. Ungleichförmig bewegte Ladungsträger.

a) Die Differentialgleichung des Viererpotentials. Die Form der Gleichung (XIV) legt es nahe, zur Untersuchung des Feldes beliebig bewegter Elektrizitätsmengen einen neuen Vierervektor, das Viererpotential Φ durch die Definition

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\, \Phi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (202)$$

einzuführen. Denn dann wird nach § 12, c)

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{Rot}^*\, \Phi;$$

also wird (XIV) nach Rechnungsregel (112) identisch erfüllt. Die Gleichung (XIII) dagegen geht nach (115) über in

$$\Box\, \Phi - \Gamma\varrho\alpha\delta\, (Div\, \Phi) = -P \quad . \; . \; . \; . \; . \; (203)$$

Indessen ist durch den Ansatz (202) bei gegebenem $\mathfrak{M}$ der Vektor Φ noch nicht vollständig bestimmt; man kann ihm noch einen Vektor Ψ hinzufügen, welcher sich als Gradient einer

skalaren Funktion $U(x, y, z, l)$ darstellt. Denn dann ist $\overline{\mathfrak{Rot}\,\Psi} = 0$. Wir wollen nun noch die Nebenbedingung hinzufügen, daß

$$Div\,\Phi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (204)$$

sein soll, so daß Φ der Potentialgleichung in vier Dimensionen

$$\Box\,\Phi = -P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (205)$$

genügt. Jener eventuell hinzutretende Vektor muß dann auch noch die zweite Bedingung $Div\,\Psi = 0$ erfüllen, und $\Psi = 0$ ist zwar nicht der einzige*), jedenfalls aber ein möglicher Ansatz dazu. Die Definitionen (202) und (204) vertragen sich also miteinander.

Wie bei jedem Vierervektor bilden die räumlichen Komponenten von Φ einen Raumvektor, den man als das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ bezeichnet, während die Komponente Φ_u für rein räumliche Drehungen des Achsenkreuzes ein Skalar, und zwar das skalare Potential φ ist. Nach (108), (109), (135) und (138) gehen somit die Differentialgleichungen (202), (204) und (205) über in:

$$\mathfrak{E} = -grad\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{H} = rot\,\mathfrak{A} \quad \cdots \quad (202\text{a})$$

$$div\,\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (204\text{a})$$

$$\Delta\,\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c}\varrho\mathfrak{q}, \quad \Delta\,\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\varrho \quad (205\text{a})$$

Wir wollen zunächst das Viererpotential Φ aus der als gegeben angesehenen Funktion P von x, y, z, l, oder, was dasselbe sagt, $\mathfrak{A}$ aus $\varrho\mathfrak{q}$ und φ aus ϱ bestimmen.

b) Die Integration der Wellengleichung. Die vierdimensionale Potentialgleichung

$$\Box\,\varphi = -\varrho$$

---

*) Im Dreidimensionalen ist bekanntlich jeder Vektor, der im Unendlichen hinreichend klein wird, durch Angabe der Rotation und der Divergenz eindeutig bestimmt. Der Beweis beruht darauf, daß eine skalare Funktion φ eine Konstante ist, wenn

$$\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dS = 0$$

ist. Im Vierdimensionalen gilt nichts Analoges, weil die vierte Koordinate l imaginär ist.

läßt sich ähnlich durch ein bestimmtes Integral lösen, wie die entsprechende Differentialgleichung

$$\Delta \psi = -\varrho$$

für drei Dimensionen, wenn man von der Bemerkung ausgeht, daß die Funktion

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + (l-l_0)^2}$$

als Lösung der ersteren der bekannten Lösung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

der letzteren durchaus entspricht. Jeder der Wege, auf dem man

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varrho}{r} dS$$

ableiten kann, läßt sich übertragen und liefert die Formel

$$\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{\varrho}{R^2} d\Sigma = \frac{1}{4\pi^2} \iiiint \frac{\varrho}{R^2} dx\, dy\, dz\, dl.$$

Aber diese Formel läßt sich nicht ohne weiteres anwenden, weil man bei ihrer Herleitung die vierte Veränderliche l als reell ansehen muß, während die Funktion ϱ natürlich für reelle Werte von t, und nur für solche, also für imaginäre Werte von l gegeben ist. Herglotz [1]) und Sommerfeld haben zwar einen Weg angegeben, auf dem man die Integration nach reellem l in eine solche nach reellem t verwandeln kann. Wir lösen gewisser mathematischer Bedenken wegen diese Differentialgleichung lieber nach der älteren Art, indem wir sie als Wellengleichung

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\varrho \quad \cdots\cdots\cdots \quad (206)$$

auffassen; dabei ist selbstverständlich t reell.

Im Gaußschen Satz [x])

$$\int div\, \mathfrak{B}\, dS = -\int \mathfrak{B}_n\, d\sigma$$

setzen wir den Vektor

$$\mathfrak{B} = \varphi\, grad\, \psi - \psi\, grad\, \varphi,$$

wobei φ und ψ zwei skalare Funktionen von x, y, z, t sind, die, um der diesem Satz zugrunde liegenden Annahme eines stetigen Verhaltens von $\mathfrak{B}$ zu genügen, samt ihren ersten Ableitungen

nach x, y, z im Integrationsbereich stetig sein müssen. Dieser Satz nimmt dann die Gestalt an:

$$\int (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi)\, dS = -\int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Nun soll φ eine Lösung von Gleichung (206) sein; für ψ aber soll

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (207)$$

gelten. Benutzen wir das zur Elimination von $\Delta \varphi$ und $\Delta \psi$, so folgt:

$$\frac{1}{c^2} \int \left(\varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) dS + \int \psi \varrho\, dS = -\int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Multiplizieren wir hier mit dt und integrieren wir nach t zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2, so können wir unter dem ersten Raumintegral diese Integration ausführen und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{c^2} \int \overline{\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}_{t_1}^{t_2} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \int \psi \varrho\, dS \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot (208)$$

Dabei haben wir vorausgesetzt, daß φ, ψ sowie $\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}$ stetige Funktionen von t sind.

Über die Funktion ψ verfügen wir jetzt noch weiter; wir machen nämlich den Ansatz

$$\psi = \frac{1}{r} F\left(t + \frac{r}{c}\right) \qquad [r^2 = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2]$$

der, wie man sich durch Rechnung überzeugt, der Differentialgleichung (207) genügt. Sie stellt dann eine Kugelwelle dar, welche sich mit der Geschwindigkeit c auf den Raumpunkt P zusammenzieht, dessen Koordinaten x_P, y_P, z_P sind. Die Funktion $F(s)$ soll ferner für alle von Null wesentlich verschiedenen Werte von s verschwinden, dagegen in der Nähe von $s = 0$ erhebliche positive Werte annehmen, und zwar so, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\, ds = 1$$

ist. Als Beispiel für eine solche Funktion können wir

$$F(s) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2 s^2}$$

hinstellen; sie erfüllt unsere Forderungen um so besser, je größer wir den positiven Parameter μ wählen. Wir denken uns im folgenden daher stets als Schluß unserer Umformungen den Grenzübergang zu $\mu = \infty$ ausgeführt. — Es gäbe übrigens noch unendlich viele andere Funktionen, welche dasselbe leisten. — Die erwähnte Kugelwelle wird bei diesem Grenzübergang unendlich schmal; sie gelangt nach dem Punkt P, in welchem $r = 0$ ist, zur Zeit $t = 0$.

Gleichung (208) wenden wir an auf einen Raumteil, welcher den Punkt P enthält. Da ψ in P nicht stetig ist, müssen wir diesen Punkt zunächst durch eine kleine Kugel vom Radius a vom Integrationsbereich ausschließen, so daß dieser neben seiner äußeren Begrenzung diese Kugel als innere Grenzfläche erhält. Das rechts stehende Flächenintegral ist über beide auszuführen.

Wählen wir nun t_2 positiv, t_1 aber negativ und seinem absoluten Wert nach so groß, daß $t_1 + \frac{r}{c}$ für alle im Integrationsbereich vorkommenden Entfernungen r von P einen erheblichen negativen Wert annimmt, so verschwinden in dem ersten Raumintegral in (210) die auf die beiden Zeitgrenzen bezüglichen Werte von ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial t}$. Also fällt dies Integral fort. Im zweiten Raumintegral können wir die Reihenfolge der Integrationen vertauschen:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \psi \varrho \, dS = \int \frac{dS}{r} \int_{t_1}^{t_2} \varrho F\left(t + \frac{r}{c}\right) dt.$$

Machen wir aber an dem Zeitintegral den Grenzübergang zu unendlichem μ, so finden wir dafür:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varrho F\left(t + \frac{c}{r}\right) dt = \varrho_{-r/c} \int_{t_1}^{t_2} F\left(t + \frac{r}{c}\right) dt$$

$$= \varrho_{-r/c} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds = \varrho_{-r/c}.$$

Der Index $-r/c$ soll bedeuten, daß man $-r/c$ statt t in die Funktion $\varrho(x, y, z, t)$ zu setzen hat; dieser Wert von t ist nämlich der einzige, für den nach unseren Voraussetzungen die Funktion $F\left(t + \frac{r}{c}\right)$ von Null verschieden ist. Also:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \psi \varrho \, dS = \int \frac{\varrho_{-r/c}}{r} dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (209)$$

Wir gehen nun zu dem Anteil am Flächenintegral in (208) über, den die kleine Kugel um P liefert. Führen wir den körperlichen Winkel $d\omega$, unter welchem ein Flächenelement $d\sigma$ von P aus erscheint, statt $d\sigma$ ein, so ist

$$d\sigma = a^2 d\omega,$$

ferner

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

zu setzen, da die innere Normale des Integrationsbereiches hier in die Richtung des wachsenden r fällt. Das ergibt:

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$= -a^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left[\varphi\left(-\frac{1}{a^2} F\left(t + \frac{a}{c}\right) + \frac{1}{ca} \frac{\partial F\left(t + \frac{a}{c}\right)}{\partial t}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{a} F\left(t + \frac{a}{c}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] d\omega.$$

Setzen wir nun ferner $a = const. \mu^{-4}$, so verschwinden hier beim Grenzübergang zu unendlichem μ alle die Summanden, welche a als Faktor enthalten gegen das allein von a freie Glied

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \varphi F(t) d\omega = \int_{t_1}^{t_2} dt \, F(t) \int \varphi \, d\omega.$$

Da sich φ auf der unendlich kleinen Kugel nicht verändert, ist

$$\int \varphi \, d\omega = 4\pi \varphi_P,$$

ein Wert, der natürlich noch von t abhängt; nach unseren Annahmen über $F(s)$ ist aber

$$4\pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi_P F(t)\,dt = 4\pi(\varphi_P)_{t=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (210)$$

Also ist dies der Anteil der Kugel am Flächenintegral von (208) im Grenzfall eines unendlich großen μ.

Zu berechnen bleibt nun noch der Anteil der äußeren Grenzfläche; auch hierin läßt sich die Integration nach t ausführen. Zunächst ist wegen der Eigenschaften von F [vgl. die Ableitung von (209)]

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dt = \frac{1}{r} \int_{t_1}^{t_2} F\left(t + \frac{r}{c}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dt = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{-r/c} \cdot \quad (211)$$

zu setzen und

$$-\int_{t_1}^{t_2} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dt = -\int_{t_1}^{t_2} \varphi \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} F\left(t + \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial F\left(t + \frac{r}{c}\right)}{\partial t} \right] dt$$

$$= -\varphi_{-r/c} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \int_{t_1}^{t_2} \varphi \frac{\partial F\left(t + \frac{r}{c}\right)}{\partial t} dt.$$

Die zweite Hälfte dieses Integrales können wir durch partielle Integration umformen, wobei nach unseren Annahmen über t_1 und t_2

$$F\left(t_1 + \frac{r}{c}\right) = F\left(t_2 + \frac{r}{c}\right) = 0$$

wird; also:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \int_{t_1}^{t_2} \varphi \frac{\partial F\left(t + \frac{r}{c}\right)}{\partial t} dt &= \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \int_{t_1}^{t_2} F\left(t + \frac{r}{c}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \\ &= \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{-r/c} \end{aligned}\right\} \quad (211\,a)$$

Nach (209), (210), (211) und (211a) nimmt Gleichung (208) die Gestalt an:

$$(\varphi_P)_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \varrho_{-r/c}\, dS$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int \left[\varphi_{-r/c} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{-r/c} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{-r/c} \right] d\sigma.$$

Danach kann man φ_P für die Zeit 0 berechnen. Für eine beliebige Zeit t aber gilt natürlich, da man t immer um eine additive Konstante verändern kann,

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r}\varrho_{t-r/c}\, dS$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\left[\varphi_{t-r/c}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t-r/c} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{t-r/c}\right] d\sigma.$$

Faßt man schließlich noch die beiden ersten Summanden unter dem Flächenintegral zu

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r}\varphi\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

zusammen (doch ist dabei die Differentiation so auszuführen, daß nur r, wo es explizite auftritt, als veränderlich zu betrachten ist; den Größen dagegen, von denen φ sonst abhängt, hat man den Wert zu lassen, der ihnen auf $d\sigma$ zukommt), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_P &= \frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\varrho_{t-r/c}\, dS \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r}\varphi\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{t-r/c}\right\} d\sigma\end{aligned}\right\} \quad (212)$$

Das hier auftretende Flächenintegral ist für Kirchhoffs Theorie der Beugung von größter Bedeutung. Entsprechende Formeln gelten nach (205a) für jede Komponente des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$, nur daß dann ϱ durch die entsprechende Komponente des Vektors $\frac{1}{c}\varrho\,\mathfrak{q}$ zu ersetzen ist.

Wenn in unserem Bezugssystem sämtliche Ladungsträger ruhen, so erfüllen wir die Differentialgleichungen (204a) und (205a), indem wir $\mathfrak{A} = 0$ und dem skalaren Potential nach (212) den aus der Potentialtheorie wohlbekannten Wert

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\varrho}{r}\, dS + \frac{1}{4\pi}\int\left(\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) d\sigma$$

geben. Wenden wir diese Formel auf das Innere einer großen Kugel als Integrationsbereich an, so wissen wir aus der Potentialtheorie, daß mit wachsendem Radius R der Kugel φ mindestens

wie R^{-1}, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ mindestens wie R^{-2} und $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = + \frac{1}{R^2}$ wie R^{-2} verschwindet. Der Integrationsbereich wächst zwar wie R^2, dennoch verschwindet das Integral mindestens wie R^{-1}.

Wenn sich nun die zu betrachtenden Ladungsträger bewegen, so können wir doch annehmen, daß sie bis zu einem längst vergangenen Zeitpunkt ruhten, und wir können die Grenzflächen des Integrationsbereiches so weit entfernt wählen, daß die infolge der Bewegung eingetretenen Veränderungen noch nicht bei ihr eingetroffen sind. Dann ist an ihr für den Zeitpunkt t immer noch $\mathfrak{A} = 0$ und φ hat den elektrostatischen Wert, der das Flächenintegral zu Null macht. Also können wir als Lösungen von (205a) hinschreiben:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{1}{r} (\varrho \mathfrak{q})_{t-r/c} \, dS, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \varrho_{t-r/c} \, dS \; . \quad (213)$$

Daß sie auch der Differentialgleichung (204a) genügen, wollen wir erst im nächsten Abschnitt nachweisen.

Da für die zur Zeit t im Aufpunkt herrschenden Werte dieser Potentiale nicht der gleichzeitige Zustand in dS, sondern ein früherer maßgebend ist, bezeichnet man sie als verzögerte Potentiale.

c) Die Formel für das Viererpotential. Um das Ergebnis (213) auf das Viererpotential Φ zu übertragen, zeichnen wir in Fig. 16 den Weltpunkt O, welcher den Raumpunkt P zur Zeit t darstellt, und seinen Vorkegel, desgleichen die Gesamtheit der Weltlinien, welche eine Ladung von unendlich geringer Ausdehnung in ihrer Bewegung darstellen; diese bilden zusammen eine unendlich dünne „Weltröhre". Diese Weltröhre schneidet aus dem Vorkegel beim Punkt L, dem „Lichtpunkt" der Röhre in bezug auf O, ein dreidimensionales Gebiet $d\omega$ heraus; die Projektion des Punktes L auf den x, y, z-Raum nennen wir Q, die Projektion von $d\omega$, die natürlich den Punkt Q umgibt, dS*).

*) Die Zeichenebene in Fig. 16 ist die durch O und L gehende, zur u-Achse des benutzten Bezugssystems parallele Ebene. Im allgemeinen verläuft die Weltröhre natürlich nicht in dieser Ebene, wie es in der Figur der Deutlichkeit halber angenommen ist; das hat aber für das weitere keine nachteiligen Folgen.

Nach dS ist in (213) zu integrieren, und der Index $t - \frac{r}{c}$ läßt sich so deuten, daß zu jedem dS der Wert von $\varrho\mathfrak{q}$ und ϱ zu nehmen ist, der dem in der u-Richtung darüber liegenden Punkt des Vorkegels entspricht. Wegen (135) und wegen

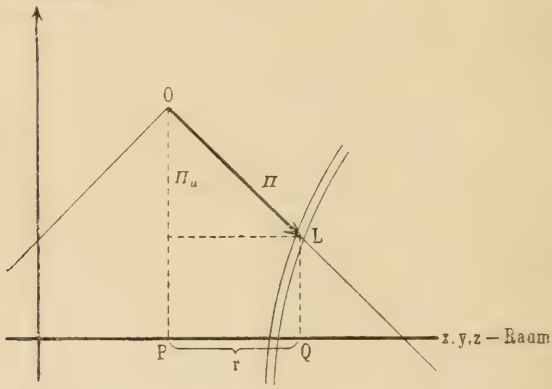
$$\mathfrak{A}_x = \Phi_x \text{ usw. } \varphi = \Phi_u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (214)$$

lautet daher die vierdimensionale Übertragung der Formeln (213):

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int P_L \frac{dS}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (215)$$

An diese Gleichung und an Fig. 16 läßt sich leicht der

Fig. 16.



Beweis anschließen, daß durch (213) auch die bisher nicht berücksichtigte Gleichung (204 a) erfüllt ist; denn diese ist identisch mit der Gleichung (204) für Φ. Um $Div\ \Phi$ zu bilden, haben wir den Aufpunkt O um unendlich Kleines nach den vier Koordinatenrichtungen zu verrücken. Jede dieser Bewegungen macht sein Vorkegel vollständig mit. Denken wir uns auch den Punkt L fest an dem Kegel haftend, so kommt L bei der Verrückung dx, nach einem Punkte, in welchem $(P_x)_L$ um $\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}\right)_L dx$ größer ist als vorher. Das Volumenelement dS aber, das durch Projektion des bei L gelegenen Kegelelementes $d\omega$ entsteht, bleibt in der Größe unverändert, ebenso der Abstand $PQ = r$, da die

Punkte P und Q dieselbe Verrückung erleiden. Infolgedessen ist

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}\right)_L \frac{dS}{r},$$

und da für die Verrückungen dy, dz, du ganz Entsprechendes gilt, nach (141 a):

$$Div\,\Phi = \frac{1}{4\pi}\int (Div\,P)_L \frac{dS}{r} = 0,$$

wie es (204) verlangt.

Da in (215) Φ und P Vierervektoren sind, muß dS/r ein Skalar sein und sich nicht ändern, wenn man die in Fig. 16 vorgenommene Konstruktion von dS und r für das gleiche Element $d\omega$ des Vorkegels von O nach verschiedenen Bezugssystemen ausführt. Dies können wir auch unmittelbar einsehen, indem wir den Raum $d\omega$ nach § 11 c als einen auf dem Vorkegel senkrechten Vierervektor Ω auffassen, dessen u-Komponente dann dS ist. Der Vierervektor $\overrightarrow{OL} = \Pi$ hat als u-Komponente, wie die Figur zeigt (oder wie man aus

$$\left.\begin{aligned} &\Pi_x = x_Q - x_P, \quad \Pi_y = y_Q - y_P, \quad \Pi_z = z_Q - z_P, \\ &\qquad\qquad \Pi^2 = \Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2 - \Pi_u^2 = 0 \\ &\text{folgert):} \\ &\Pi_u = -\sqrt{\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2} = -r \end{aligned}\right\} \quad \cdot\cdot \quad (216)$$

wo r wie bisher den räumlichen Abstand der Raumpunkte P und Q bezeichnet. In Π und Ω haben wir ein Beispiel für den in § 10 d besprochenen Fall, daß zwei singuläre Vektoren jeder den Betrag 0 haben, während man das Verhältnis ihrer Beträge dennoch aus dem Verhältnis entsprechender Komponenten ermitteln kann. D. h.:

$$\frac{dS}{r} = -\frac{\Omega_u}{\Pi_u} = -\frac{|\Omega|}{|\Pi|},$$

also in der Tat unabhängig vom Bezugssystem.

Wählen wir nun das Bezugssystem K^0, dessen u-Achse zur Richtung der Weltröhre in L parallel ist, in welchem also die oben betrachtete Ladung de im Augenblick der Entsendung der nach O gelangenden Wirkung ruht, so folgert man aus (215) nach (135) für ihr Viererpotential:

$$\Phi_{x^0} = \Phi_{y^0} = \Phi_{z^0} = 0, \quad \Phi_{u^0} = \frac{P_{u^0}\,dS^0}{4\pi r^0} = \frac{\varrho^0\,dS^0}{4\pi r^0} = \frac{de}{4\pi r^0} \quad (216\text{ a})$$

Nach (216) ist infolgedessen das skalare Produkt mit dem Vektor Π:

$$(\Pi\Phi) = -\Pi_{u0}\Phi_{u0} = \frac{de}{4\pi} \quad \cdots\cdots \quad (217)$$

Diese Gleichung aber ermöglicht, das Viererpotential in der Form

$$\Phi = \frac{de}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{Y}}{(\Pi\,\mathbf{Y})}\right)_L \quad \cdots\cdots\cdots \quad (218)$$

darzustellen; denn es gibt nur einen Vektor, welcher die Richtung der in L herrschenden Vierergeschwindigkeit Y_L hat und mit Π das skalare Produkt $de/4\pi$ ergibt; beides trifft aber nach (218) auf Φ zu.

d) Vektorielles und skalares Potential, ausgedrückt durch die Ladungen. Die Gleichung (218) wollen wir nun in Formeln für $\mathfrak{A}$ und φ zurückübersetzen.

In einem beliebigen System K ist nach (83), (79) und (216)

$$(Y_x)_L = \left(\frac{\mathfrak{q}_x}{\sqrt{c^2-q^2}}\right)_Q \cdots Y_u = \left(\frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\right)_Q \quad \cdots \quad (219)$$

$$\left.\begin{aligned}(\Pi Y)_L &= \frac{1}{(\sqrt{c^2-q^2})_Q}\Big((x_Q - x_P)\mathfrak{q}_{xQ} + \cdots + \cdots + rc\Big) \\ &= \frac{r}{(\sqrt{c^2-q^2})_Q}\left[c + \left(\mathfrak{q}_{xQ}\frac{x_Q - x_P}{r} + \cdots + \cdots\right)\right] = r\left(\frac{c+\mathfrak{q}_r}{\sqrt{c^2-q^2}}\right)_Q\end{aligned}\right\} \quad (220)$$

wobei der Index Q den Hinweis liefert, daß für $\mathfrak{q}$ die Geschwindigkeit zu wählen ist, welche de hatte, als es sich in Q befand. Man kann ihn durch den Index $t - \frac{r}{c}$ ersetzen, wenn, wie früher, t die dem Weltpunkt O entsprechende Zeit bedeutet. Nach (214) können wir infolgedessen setzen, indem wir noch sogleich über die verschiedenen Ladungen de integrieren:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \frac{1}{4\pi c}\int de\left[\frac{\mathfrak{q}}{r\left(1+\frac{\mathfrak{q}_r}{c}\right)}\right]_{t-\frac{r}{c}} \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi}\int de\left[\frac{1}{r\left(1+\frac{\mathfrak{q}_r}{c}\right)}\right]_{t-\frac{r}{c}}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (221)$$

Diese auf die Elektrizitätsmengen bezügliche Form der Potentialgleichungen ist von Liénard[2]) und Wiechert[3]), die auf die

Raumelemente dS bezügliche Form (213) von Lorentz[4]) angegeben worden.

§ 20. Das Elektron und sein Feld bei der Hyperbelbewegung.

Wir wollen des vorhergehenden Paragraphen Formeln benutzen, um die Kraft $\mathfrak{K}$ zu berechnen, welche ein bewegtes Elektron auf sich selbst ausübt. Im Falle der gleichförmigen Bewegung ist diese nach § 17, c) stets Null. Im allgemeinsten Falle hat zwar A. Sommerfeld 1904 bis 1905 die Berechnung durchgeführt, aber unter der damals selbstverständlichen Annahme, daß die Form des Elektrons durch die Bewegung nicht verändert wird, was die Relativitätstheorie nicht anerkennen kann. Es ist auch vorläufig gar nicht möglich, diese Annahme durch etwas Besseres zu ersetzen; denn wenn wir auch wissen, daß bei gleichförmiger Geschwindigkeit Kontraktion stattfindet, so können wir doch den Einfluß einer Beschleunigung, zumal einer zeitlich veränderlichen, nicht einmal abschätzen, solange wir nichts über die nicht-elektromagnetischen, das Elektron zusammenhaltenden Kräfte in seinem Inneren wissen. Das allgemeine Problem ist daher bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft mathematisch gar nicht zu formulieren. Beschränken wir uns aber auf die Hyperbelbewegung (§ 10, c), bei welcher die Beschleunigung, bezogen auf das jeweils mitbewegte System K^0, konstant bleibt, so steht wenigstens fest, daß der Zustand, bezogen auf K^0, immer derselbe ist, daß also Gestalt und Ladungsverteilung in K^0 unverändert bleiben. Von der Gestalt selbst dagegen wissen wir nur, daß das nach Voraussetzung bei völliger Ruhe kugelförmige Elektron eine Rotationsfigur mit der Beschleunigungsrichtung als ausgezeichneter Achse annimmt. Dies reicht aber auch aus, um ein für kleine Beschleunigungen gültiges Resultat zu erzielen.

Ein allgemeineres Interesse bietet diese Bewegung, weil sich jede Weltlinie, welche doch im allgemeinen eine dreifach gekrümmte Kurve ist, auf ein kurzes Stück durch solche Hyperbel annähern läßt. Wir nennen die Hyperbel dann mit Minkowski die Krümmungshyperbel, und gelangen zu ihr durch eine Konstruktion, welche durchaus dem Verfahren zur Auffindung des Krümmungskreises einer Raumkurve nachgebildet ist. Ziehen wir nämlich in zwei infinitesimal benachbarten Punkten der Welt-

linie die Tangenten, so bestimmen diese die oskulierende Ebene, welche wir uns unbeschadet der Allgemeinheit als xu-Ebene denken können, weil die Tangenten einer Weltlinie stets zeitartige Richtung haben (§ 8). In der oskulierenden Ebene gibt es nun stets eine Hyperbel, welche mit der vorgegebenen Kurve die beiden Tangenten und ihre Berührungspunkte gemeinsam hat und deren Asymptoten den Geraden $x = \pm u$ parallel sind. Die erstere Bedingung liefert nämlich drei, die zweite zwei von den fünf Bestimmungsstücken, welche zur eindeutigen Bestimmung einer Hyperbel notwendig sind. Wie sich die Krümmungshyperbel einer Kurve schon weit inniger anschließt als ihre Tangente, so stellt die Hyperbelbewegung eine weit bessere Annäherung an eine beliebig vorgegebene dar, als die geradlinige Bewegung.

Der Achsenpunkt $u = 0$ der Hyperbel

$$x^2 - u^2 = \xi^2, \quad y = \eta, \quad z = \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

entspricht dem Augenblick in der Bewegung des materiellen Punktes, dessen Weltlinie die Hyperbel ist, in welchem die Geschwindigkeit, bezogen auf das in (222) benutzte System K, Null ist. Seine räumlichen Koordinaten ξ, η, ζ sind gegen die Transformation (XI) invariant; d. h. die Achsenpunkte derselben Hyperbel haben in allen Systemen K', welche durch eine solche Transformation aus K hervorgehen können, die gleichen Koordinaten. Denken wir uns nun eine aus derartigen, durch die Werte von ξ, η, ζ unterschiedenen Hyperbeln zusammengesetzte Weltröhre, so gibt der Bereich aller vorkommenden Werte ξ, η, ζ das Volumen des Körpers in K an, dessen vierdimensionale Darstellung die Weltröhre ist, und zwar für den Moment der Ruhe in K. Da dieser Bereich in allen genannten Systemen K' der gleiche ist, behält der Körper seine Ruhform dauernd bei. Bei der Hyperbelbewegung verhält sich der Körper, als wäre er starr*). Bezogen auf ein und dasselbe System verändert er natürlich in jedem

*) Der Grenzbegriff des unter allen Umständen starren Körpers läßt sich zwar wegen der Unmöglichkeit unendlich großer Geschwindigkeiten für die Ausbreitung elastischer Störungen nicht übertragen (vgl. § 7 und 27a). Das schließt aber nicht aus, daß sich gelegentlich ein Körper wie ein starrer bewegt; kann sich doch auch nach der klassischen Hydrodynamik ein Flüssigkeitsteilchen unter Umständen bewegen, als wäre es starr.

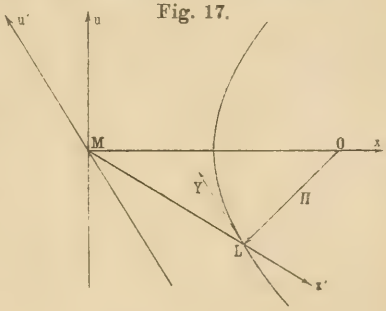
Augenblick seine Form entsprechend der Lorentz-Kontraktion. Diese Bewegung wollen wir im folgenden dem Elektron zuschreiben.

a) Das Viererpotential. Der erste Schritt zur Lösung der Aufgabe besteht in der Berechnung des Viererpotentials. Dabei beschränken wir uns aber auf Aufpunkte, welche mit dem Mittelpunkt M der Hyperbelbewegung gleichzeitig gemacht werden können (§ 8). Denn alle Hyperbeln (222) liegen, da

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 0$$

ist, notwendig im Zwischengebiet; Weltpunkte diesseits oder jenseits von M können niemals innere Punkte des Elektrons darstellen. Ferner möge der Aufpunkt O vorläufig im Raume $u = 0$ der Fig. 17 liegen und dort die Koordinaten X, Y, Z haben. Die Hyperbel sei die Weltlinie eines Ladungselementes de, L ihr Lichtpunkt in bezug auf O. Im allgemeinen wird natürlich weder die Hyperbel, noch der Aufpunkt in der xu-Ebene selbst liegen, so daß unsere Figur nur als Projektion einer Raumfigur zu betrachten ist. Die Projektion der Geraden $\overrightarrow{ML}$ auf die Zeichenebene nehmen wir als die X'-Achse eines Systems K', in welchem O die Koordinaten X', Y', Z', $L' = i\,U'$ hat. Dann ist die Vierergeschwindigkeit Y in L parallel zur u'-Achse, und da vom Vektor $\Pi = \overrightarrow{OL}$ die u'-Komponente $\Pi_{u'} = -U'$, die l'-Komponente $\Pi_{l'} = -L'$ ist, so wird:

Fig. 17.



$$(Y\Pi) = Y_{l'}\Pi_{l'} = -Y_{l'}L',$$

also nach (218):

$$\Phi_x = \Phi_{y'} = \Phi_{z'} = 0, \quad \Phi_{l'} = -\frac{de}{4\pi L'} \quad \cdot \cdot \quad 222\text{a})$$

Um nun Φ in Komponenten nach der x- und u-Achse zu zerlegen, wenden wir die Formeln (71) und die Regel an, daß sich die Komponenten eines Vierervektors Φ wie die Koordinaten transformieren. Das in diesen Formeln auftretende β hat hier nach (45) den Wert:

$$\beta = \beta_L = -tg\,(< OML) = \frac{U_L}{X_L} < 0.$$

So finden wir:

$$\Phi_x = \frac{-i\beta\Phi_{l'}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Phi_l = \frac{\Phi_{l'}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

ferner für die Koordinaten des Aufpunktes:

$$L' = -\frac{i\beta X}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

also, wenn wir den für $\Phi_{l'}$ gefundenen Wert einsetzen:

$$\Phi_x = -\frac{de}{4\pi X}, \quad \Phi_y = \Phi_z = 0, \quad \Phi_l = \frac{-ide}{4\pi\beta_L X} \qquad (222b)$$

Um diese Gleichungen auf Punkte außerhalb des Raumes $u = 0$ zu übertragen, führen wir jetzt statt der geradlinigen Koordinaten X, L des Aufpunktes O die hyperbolischen Koordinaten R, φ ein:

$$X = R\cos\varphi, \quad L = R\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (223)$$

[vgl. (120)]; dann ist

$$R^2 = X^2 + L^2, \quad tg\,\varphi = \frac{L}{X}$$

also φ ein imaginärer Winkel. Die entsprechende Transformation für Punkte der Weltlinie von de lautet nach (222):

$$x = \xi\cos\psi, \quad l = \xi\sin\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (224)$$

Es folgt daraus für die Koordinaten des Lichtpunktes L:

$$\frac{l_L}{x_L} = \frac{iu_L}{x_L} = i\beta_L = tg\,\psi_L.$$

Da in O die Richtungen der wachsenden X und R einerseits, die der wachsenden L und φ andererseits übereinstimmen, und da $R = X$ wegen $L = 0$ ist, so kann man die letzten Gleichungen für Φ schreiben:

$$\Phi_R = -\frac{de}{4\pi R}, \quad \Phi_y = \Phi_z = 0, \quad \Phi_\varphi = \frac{de}{4\pi R}\,cotg\,\psi_L,$$

ψ_L ist dabei der negativ imaginäre Winkel, um den man das Weltkoordinatensystem in der xu-Ebene drehen muß, damit statt des Aufpunktes O sein Lichtpunkt L mit M gleichzeitig wird.

Gehen wir jetzt durch eine Drehung um den imaginären Winkel $(-\varphi'')$ zu einem neuen System K'' über, so verändert R seinen Wert nicht, während $\psi_L = (\psi''_L - \varphi'')$ wird. Auch bleiben

die Richtungen der wachsenden R und φ in O dieselben, also gelten, bezogen auf K'' die Formeln:

$$\Phi_R = -\frac{de}{4\pi R}, \quad \Phi_y = \Phi_z = 0, \quad \Phi_\varphi = \frac{de}{4\pi R}\, cotg\,(\psi''_L - \varphi''_L),$$

wobei jetzt R, Y, Z und φ'' die Koordinaten des Aufpunktes sind. Angewandt auf das dem System K'' gleichberechtigte System K lauten sie:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_R &= \frac{-de}{4\pi R}, \quad \Phi_y = \Phi_z = 0, \\ \Phi_\varphi &= \frac{de}{4\pi R}\, cotg\,(\psi_L - \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (225)$$

und gelten in dieser Form für jeden beliebigen Aufpunkt R, Y, Z, φ welcher mit M gleichzeitig gemacht werden kann. Analytisch ist $(\psi_L - \varphi)$ als Funktion der rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z, L des Aufpunktes und der Konstanten der Hyperbelbewegung (ξ, η, ζ) durch die Bedingung gegeben, daß der Vektor $\Pi = \overrightarrow{PL}$ den absoluten Wert Null haben soll, d. h.:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \Pi^2 &= (x_L - X)^2 + (y_L - Y)^2 + (z_L - Z)^2 \\ &\quad + (l_L - L)^2 \\ &= (y_L - Y)^2 + (z_L - Z)^2 + X^2 + L^2 \\ &\quad + x_L^2 + l_L^2 - 2\,(x_L X + l_L L) \\ &= (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2 + R^2 + \xi^2 \\ &\quad - 2\,\xi R\, cos\,(\psi_L - \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (226)$$

[vgl. (222), (223) und (224)]. Setzen wir zur Abkürzung

$$r^2 = (\xi - R)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2 \quad \ldots (227)$$

so finden wir, da $\psi_L - \varphi$ ebenso wie früher ψ_L negativ imaginär sein muß:

$$\left.\begin{aligned} cos\,(\psi_L - \varphi) &= \frac{r^2 + 2\,\xi R}{2\,\xi R} \\ sin\,(\psi_L - \varphi) &= \frac{-i\,r\sqrt{r^2 + 4\,\xi R}}{2\,\xi R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (228)$$

Doch wollen wir diese Werte zunächst nicht in (225) einsetzen; dagegen bestätigen wir durch Differentiation an (228) die Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi_L}{\partial R} = \frac{\xi\, cos\,(\psi_L - \varphi) - R}{\xi R\, sin\,(\psi_L - \varphi)}, \quad \frac{\partial \psi_L}{\partial Y} = \frac{\eta - Y}{\xi R\, sin\,(\psi_L - \varphi)} \quad \ldots (229)$$

Zwischen den Gleichungen (225) und (222a) besteht ein Widerspruch, wenn man den Aufpunkt in die Hyperbel selbst verlegt. Dabei fällt er mit seinem Lichtpunkt L und die Richtung der wachsenden R in ihm mit der x'-Achse der Fig. 17 zusammen; $\Phi_R = -\frac{de}{4\pi R}$ in (225) widerspricht somit dem $\Phi_{x'} = 0$ in (222a). Der Grund dafür liegt in dem Übergang von (222a) zu (222b), der zur Voraussetzung hat, daß L' und β nicht Null sind. Läßt man aber den [für die Gültigkeit von (222a) an die x-Achse gebundenen] Punkt O in Fig. 17 in den Achsenpunkt der Hyperbel fallen, so verletzt man diese Bedingung. Das Viererpotential einer Punktladung wird [vgl. z. B. (216a)] unendlich groß, wenn der Aufpunkt in der Weltlinie der Ladung liegt; dies hängt aufs engste mit dem Unendlichwerden des elektrostatischen Potentials in einer Punktladung zusammen. Aber schon die Gleichung (208) zeigt, daß diese Singularität bei räumlicher Verteilung der Ladung fortfällt; denn der Beweis dieser Formel gilt auch für Aufpunkte, für welche P nicht Null ist; wie beim elektrostatischen Potential trägt die unmittelbarste Umgebung des Aufpunktes überhaupt nichts Endliches zum Viererpotential bei. Darum spielt auch der Widerspruch zwischen (225) und (222a) keine Rolle, sowie wir zu Ladungen mit endlicher räumlicher Dichte übergehen, wie dies weiter unten geschehen wird.

b) Das elektromagnetische Feld. Der zweite Schritt zur Lösung der Aufgabe besteht in der Ableitung des Feldvektors $\mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\,\Phi$; auch hierbei benutzen wir als Koordinaten R, Y, Z, φ. Nach ihnen die Komponenten von $\mathfrak{M}$ zu bilden, ist deswegen berechtigt, weil man stets ein Achsenkreuz x, y, z, l den Richtungen der wachsenden R, Y, Z, φ parallel legen kann. (In diesem System wird M und O gleichzeitig, d. h. es ist die Zeitkoordinate des Aufpunktes $L = O$). Es wird dann nach (138):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_{R\varphi} &= \mathfrak{M}_{xl} = -i\mathfrak{E}_x, & \mathfrak{M}_{yz} &= \mathfrak{H}_x, \\ \mathfrak{M}_{y\varphi} &= \mathfrak{M}_{yl} = -i\mathfrak{E}_y, & \mathfrak{M}_{zR} &= \mathfrak{M}_{zx} = \mathfrak{H}_y, \\ \mathfrak{M}_{z\varphi} &= \mathfrak{M}_{zl} = -i\mathfrak{E}_z, & \mathfrak{M}_{Ry} &= \mathfrak{M}_{xy} = \mathfrak{H}_z \end{aligned}\right\} \cdots (230)$$

Nach (124), (125) und (126) ist aber in Rücksicht auf (225):

$$\mathfrak{M}_{R\varphi} = \mathfrak{Rot}_{R\varphi}\Phi = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial(R\Phi_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial\Phi_R}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial(R\Phi_\varphi)}{\partial R},$$

$$\mathfrak{M}_{y\varphi} = \mathfrak{Rot}_{y\varphi}\Phi = \frac{\partial\Phi_\varphi}{\partial Y} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_y}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Phi_\varphi}{\partial Y},$$

$$\mathfrak{M}_{z\varphi} = \mathfrak{Rot}_{z\varphi}\Phi = \frac{\partial\Phi_\varphi}{\partial Z} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_z}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Phi_\varphi}{\partial Z},$$

die drei anderen Komponenten sind Null, da Φ_y und Φ_z verschwinden und Φ_R nur von R abhängt. Somit ist nach (229) und (230):

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{i\,d\,e}{4\pi R\sin^2(\psi_L-\varphi)}\left(\frac{\partial\psi_L}{\partial R}\right)$$

$$= -\frac{i\,d\,e\,[\xi\cos(\psi_L-\varphi)-R]}{4\pi\xi R^2\sin^3(\psi_L-\varphi)},$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{i\,d\,e}{4\pi R\sin^2(\psi_L-\varphi)}\frac{\partial\psi_L}{\partial Y}$$

$$= -\frac{i\,d\,e\,(\eta-Y)}{4\pi\xi R^2\sin^3(\psi_L-\varphi)},$$

(Sommerfeld) oder wenn wir jetzt von den Substitutionen (228) Gebrauch machen:

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{d\,e}{\pi}\frac{\xi^2[r^2-2R(R-\xi)]}{r^3(r^2+4\xi R)^{3/2}},$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{2\,d\,e}{\pi}\frac{\xi^2 R(\eta-Y)}{r^3(r^2+4\xi R)^{3/2}}$$

($\mathfrak{E}_z$ entsprechend) (Born). Bezogen auf das System, in welchem der Aufpunkt mit dem Mittelpunkt M der Hyperbelbewegung gleichzeitig ist, ist also $\mathfrak{H} = 0$, während $\mathfrak{E}$ den hier angegebenen Wert hat. Wegen $L = 0$ ist dabei nach (223) $R = X$.

c) Die Rückwirkung des Feldes auf das Elektron. ξ, η, ζ sind, wie oben erwähnt, die Koordinaten des Punktes, welchen die Hyperbel (222) mit dem Raume $u = 0$ irgend eines Bezugssystems K gemeinsam hat. Infolgedessen ist $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ ein Volumelement in diesem Raume, und man kann in den Gleichungen für $\mathfrak{E}$

$$d\,e = \varrho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \varrho\,\delta V$$

setzen. Läßt man dann ξ, η, ζ alle die Werte durchlaufen, welche innerhalb des vom Elektron zur Zeit $t = 0$ eingenommenen Volumens, bezogen auf K, liegen, so findet man durch Integration

die Feldstärke, welche das ganze Elektron in einem Weltpunkt hervorruft, welcher mit M gleichzeitig ist, d. h. ebenfalls im Raume $u = 0$ liegt. Multiplizieren wir schließlich mit

$$\varrho(X, Y, Z)\, dX\, dY\, dZ = \bar{\varrho}\, \delta \bar{V}$$

und integrieren wiederum über das Volumen des Elektrons zur Zeit $t = 0$, so finden wir nach (IXa) wegen $\mathfrak{H} = 0$ und $\mathfrak{q} = 0$ für die Kraft $\mathfrak{K}$, welche das Elektron im Augenblick $t = 0$, in dem es gegen das System K ruht, auf sich selbst ausübt, die Gleichungen:

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{1}{\pi}\iint \varrho\, \bar{\varrho}\, \frac{\xi^2[r^2 - 2X(X-\xi)]}{r^3(r^2 + 4\xi X)^{3/2}}\, \delta V\, \delta \bar{V},$$

$$\mathfrak{K}_y = -\frac{2}{\pi}\iint \varrho\, \bar{\varrho}\, \frac{\xi^2 X(\eta - Y)}{r^3(r^2 + 4\xi X)^{3/2}}\, \delta V\, \delta \bar{V},$$

($\mathfrak{K}_z$ entsprechend). Dabei ist nach (227)

$$r^2 = (\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2$$

das Quadrat des Abstandes der Volumelemente δV und $\delta \bar{V}$.

Die Integration für $\mathfrak{K}_y$ führt nun notwendig zum Wert Null, da wir jede Ebene durch die X-Achse nach den obigen Annahmen als Symmetrieebene der Form und Ladungsverteilung zu betrachten haben. Denn zu jedem Produkt $\delta V_1\, \delta \bar{V}_1$, welches den Werten ξ_1, η_1, ζ_1; X_1, Y_1, Z_1 entspricht, gibt es ein anderes, ihm gleiches, $\delta V_2\, \delta \bar{V}_2$, für welches

$$\varrho_2 = \varrho_1, \quad \xi_2 = \xi_1, \quad \zeta_2 = \zeta_1, \quad \bar{\varrho}_2 = \bar{\varrho}_1, \quad X_1 = X_2, \quad Z_1 = Z_2,$$

dagegen

$$(\eta_2 - Y_2) = -(\eta_1 - Y_1)$$

ist. Die zu integrierende Funktion hat für sie entgegengesetzt gleiche Werte, ihre Beiträge zum Integral heben sich daher auf.

Um die Integration für $\mathfrak{K}_x$ auszuführen, wollen wir statt der auf den Mittelpunkt M der Hyperbelbewegung bezogenen Koordinaten ξ, η, ζ; X, Y, Z solche einführen, welche vom Mittelpunkt des Elektrons aus gemessen sind; dieser selbst möge im ersteren System die Koordinaten α, 0, 0 haben. Die neuen Koordinaten sind dann:

$$\Xi = \xi - \alpha, \quad H = \eta, \quad Z = \zeta,$$
$$x = X - \alpha, \quad y = Y, \quad z = Z.$$

Nach (89) und (222) hängt α auf das engste mit der Beschleunigung b des Mittelpunktes zusammen. Substituieren wir nach (89) c^2/b für α, so finden wir:

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{1}{\pi}\iint \varrho\bar{\varrho}\,\frac{(c^2+\Xi b)^2[r^2 b + 2(c^2+xb)(\Xi - x)]}{r^3\sqrt{r^2 b^2 + 4(c^2+\Xi b)(c^2+xb)}^{\,3}}\,\delta V\,\delta\bar{V}.$$

$$r^2 = (\Xi - x)^2 + (H-y)^2 + (Z-z)^2.$$

Der Wert dieses Integrals ändert sich nicht, wenn man Ξ, H, Z mit x, y, z vertauscht, weil beide Arten von Integrationsvariabeln dieselben Werte durchlaufen. Addieren wir zu dem angegebenen den durch die Vertauschung entstehenden Ausdruck, so finden wir nach leichten Umrechnungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_x &= -\frac{b}{2\pi} \\ &\times \iint \varrho\bar{\varrho}\,\frac{r^2[(c^2+\Xi b)^2+(c^2+xb)^2]+2(\Xi-x)^2(c^2+\Xi b)(c^2+xb)}{r^3\sqrt{r^2b^2+4(c^2+\Xi b)(c^2+xb)}^{\,3}}\,\delta V\delta\bar{V} \end{aligned}\right\}\quad(231)$$

Dies gilt, um es zu wiederholen, für den Moment $t = 0$, in welchem die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ den Wert Null hat.

d) Näherung für kleine Beschleunigungen. Entwickeln wir $\mathfrak{K}_x$ nun nach steigenden Potenzen von b:

$$\mathfrak{K}_x = -b\,(M_0 + M_1 b + M_2 b^2 + \cdots),$$

so können wir die Koeffizienten M_n zwar nicht berechnen, solange nicht der Einfluß von b auf die Form des Elektrons und die Verteilung der Ladung bekannt ist. Wohl aber können wir aus Symmetriegründen folgern, daß alle M_n mit ungeradem Index n Null sind; denn bei einem bei Ruhe kugelförmigen Elektron kann $\mathfrak{K}_x$ nur sein Zeichen, nicht aber seinen absoluten Wert ändern, wenn b sein Zeichen umkehrt. Der Koeffizient M_0 ist aber der Wert des Multiplikators von b für $b = 0$; nach (231) ist

$$M_0 = \frac{1}{8\pi c^2}\iint \frac{\varrho\bar{\varrho}}{r}\left(1 + \frac{(\Xi - x)^2}{r^2}\right)\delta V\,\delta\bar{V};$$

und zwar ist hier über die unveränderte Kugelgestalt zu integrieren. Wegen der Gleichwertigkeit der x-, y- und z-Richtung ist dann:

$$\iint \varrho\bar{\varrho}\,\frac{(\Xi - x)^2}{r^3}\,\delta V\,\delta\bar{V} = \iint \varrho\bar{\varrho}\,\frac{(H-y)^2}{r^3}\,\delta V\,\delta\bar{V}$$

$$= \iint \varrho\bar{\varrho}\,\frac{(Z-z)^2}{r^3}\,\delta V\,\delta\bar{V};$$

die Summe dieser drei gleichen Integrale ist aber $\iint \frac{\varrho\bar{\varrho}}{r}\delta V \delta \bar{V}$, sodaß jedes den Wert $\frac{1}{3}\iint \frac{\varrho\bar{\varrho}}{r}\delta V \delta \bar{V}$ hat. $\frac{1}{8\pi}\iint \frac{\varrho\bar{\varrho}}{r}\delta V \delta \bar{V}$ ist nun bekanntlich die elektrostatische Energie E^0 des ruhenden Elektrons [wegen des Zahlenfaktors vgl. Anhang unter d)]. Somit wird

$$M_0 = \frac{4}{3c^2} E^0.$$

Ersetzen wir endlich b durch $|\dot{\mathfrak{q}}|$, so finden wir die bis auf Glieder mit $|\dot{\mathfrak{q}}|^3$ genaue Gleichung*):

$$\mathfrak{K} = -\frac{4E^0}{3c^2}\mathfrak{q} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (232)$$

Durch die Bewegung längs der Krümmungshyperbel können wir nun, wie erwähnt, eine beliebige Bewegung für eine kurze Strecke annähern. Daher können wir Gleichung (232) als Näherung für beliebige Bewegungen anwenden. Sie gilt zwar zunächst nur für $\mathfrak{q} = 0$, d. h. bezogen auf das mitbewegte System, das jetzt wieder K^0 heißen möge. Transformieren wir aber die Gleichungen

$$\mathfrak{K}_x^0 = -\frac{4}{3}\frac{E^0}{c^2}\mathfrak{q}_x^0, \quad \mathfrak{K}_y^0 = -\frac{4}{3}\frac{E^0}{c^2}\mathfrak{q}_y^0$$

gemäß (88) und (187) auf ein beliebiges System K [die Bedingung für die Anwendbarkeit von (149) bzw. (187) ist hier streng erfüllt], so finden wir:

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{4}{3}E^0\frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}^3}\dot{\mathfrak{q}}_x, \quad \mathfrak{K}_y = -\frac{4}{3c}E^0\frac{\dot{\mathfrak{q}}_y}{\sqrt{c^2-q^2}}$$

oder vektoriell geschrieben:

$$\mathfrak{K} = -\frac{4E^0}{3c\sqrt{c^2-q^2}}\left(\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{q}\frac{(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})}{c^2-q^2}\right)$$
$$= -\frac{4E^0}{3c\sqrt{c^2-q^2}}\left(\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{q}_x\dot{\mathfrak{q}}_x + \mathfrak{q}_y\dot{\mathfrak{q}}_y + \mathfrak{q}_z\dot{\mathfrak{q}}_z}{c^2-q^2}\right).$$

---

*) Schon aus dimensionellen Gründen erkennt man, daß M_2/M_0 von der Größenordnung a^2/c^4 ist, wenn a den Radius des Elektrons bezeichnet. Solange b^2 klein gegen c^4/a^2 ist, ist somit das zweite Glied zu vernachlässigen. a ist nun sicher viel kleiner als die Moleküldimensionen, die gleich rund 10^{-8} cm sind. Also ist c^4/a^2 sicher sehr groß gegen $10^{57}\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{sec}^{-4}$.

Nach (192) ist nun der elektromagnetische Impuls des stationär bewegten Elektrons:

$$\mathfrak{G} = \frac{4\,E^0\,\mathfrak{q}}{3\,c\,\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{4\,E^0\,\mathfrak{q}}{3\,c\,\sqrt{c^2 - (\mathfrak{q}_x^2 + \mathfrak{q}_y^2 + \mathfrak{q}_z^2)}},$$

bei einer Änderung der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ somit:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{4\,E^0}{3\,c}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{q}}}{\sqrt{c^2 - (\mathfrak{q}_x^2 + \mathfrak{q}_y^2 + \mathfrak{q}_z^2)}} + \mathfrak{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2 - (\mathfrak{q}_x^2 + \mathfrak{q}_y^2 + \mathfrak{q}_z^2)}}\right)\right\}$$

$$= \frac{4\,E^0}{3\,c\,\sqrt{c^2 - q^2}}\left(\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{q}\frac{(\mathfrak{q}\,\dot{\mathfrak{q}})}{c^2 - q^2}\right).$$

Also finden wir für die Kraft, die das Elektron auf sich selbst ausübt, die wichtige Beziehung:

$$\mathfrak{K} = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (233)$$

Erfährt ein Elektron Beschleunigung, so wird ein Teil der beschleunigenden Kraft durch die hier berechnete innere Kraft $\mathfrak{K}$ aufgehoben, d. h. zur Vergrößerung des elektromagnetischen Impulses verwandt, so daß nur der Rest zur Vergrößerung des etwaigen mechanischen Impulses übrig bleibt. Darin äußert sich die elektromagnetische Trägheit des Elektrons (§ 2). Dies ist nach dem Impulssatz selbstverständlich. Daß aber der Impuls $\mathfrak{G}$ unter Voraussetzung gleichförmiger Geschwindigkeit berechnet werden kann, beweist, daß die Bewegung innerhalb der hier erreichten Annäherung eine quasistationäre Bewegung ist.

Weil Gleichung (233) für alle derartigen Bewegungen eine notwendige Konsequenz des Impulssatzes ist, so konnte Lorentz[4]) und vor ihm für das starre Elektron Abraham[5]) umgekehrt von dem Impuls auf die innere Kraft $\mathfrak{K}$ zurückschließen. Die genannten Autoren und ebenso Planck haben ferner die Annäherung noch weitergetrieben, indem sie zeigten, daß, bezogen auf das jeweilige Ruhsystem K^0, im allgemeinen noch ein Glied $\frac{e^2}{6\,\pi\,c^3}\ddot{\mathfrak{q}}^{0\,2}$ zu dem oben angegebenen hinzutritt. Dies hängt mit der Ausstrahlung zusammen, die von einem ungleichförmig bewegten Elektron ausgeht. Wir verweisen wegen des Näheren auf die Originalarbeiten*)[6]).

---

*) Bei der Hyperbelbewegung ist die Zusatzkraft $\frac{e^2}{6\,\pi\,c^3}\ddot{\mathfrak{q}}^{0\,2}$ nach (222) (wo $u = 0$ zu setzen ist) gleich Null — in Übereinstimmung mit (231). In der Tat strahlt die zeitlich unbegrenzte Hyperbelbewegung

VI. Die Minkowskische Elektrodynamik der ponderablen Körper.

§ 21. Die Transformation der Feldgleichungen I bis IV.

a) Die Feldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$. In § 5 führten wir aus, daß die Theorie die Möglichkeit fordert, von der Atomistik der Elektrodynamik durch Mittelwertbildung zu der Theorie der ponderablen Körper überzugehen, ohne daß dies befriedigend durchgeführt wäre. Wir kündigten auch dort schon an, daß wir uns wegen dieser Schwierigkeit zur Ableitung der Feldgleichungen für bewegte ponderable Körper auf die Maxwellschen Gleichungen (I) bis (X) stützen würden, wie wenn sie eine neue Grundlage bildeten und nicht schon in der Elektronentheorie implizite, und zwar in vollkommenerer Form vorhanden wären. Immerhin können wir einige Anhaltspunkte aus den Erörterungen des § 14 entnehmen.

In einer Beziehung sind wir aber hier ganz anders gestellt wie in § 14. Dort wollten wir nachweisen, daß die Gleichungen für den leeren Raum in allen berechtigten Systemen dieselbe Form haben. Hier aber ist naturgemäß ein System, nämlich das mit der Materie bewegte, K^0, bevorzugt; nur für dies kennen wir die Grundgleichungen, und es ist zu erwarten, daß sie für alle anderen Systeme eine andere, die Geschwindigkeit berücksichtigende Form annehmen. Unser Ziel muß sein, Gleichungen aufzustellen, welche einerseits gegen die Lorentz-Transformation invariant sind, andererseits im System K^0 mit der Maxwellschen Theorie identisch sind. Dann sind wir sicher, daß das Problem auf keine sachlich von der unsrigen verschiedene Weise gelöst werden kann. Um ihrer Invarianz sicher zu sein, fordern wir von den abzuleitenden Gleichungen, daß sie sich als Beziehungen zwischen Weltvektoren schreiben lassen.

---

nicht aus. Wohl aber geschieht dies, wenn zwei verschiedene Bewegungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit durch ein Stück Hyperbelbewegung hindurch ineinander überführt werden. Jene Zusatzkraft wirkt dabei während der beiden Zeitabschnitte, in denen die erste gleichförmige Bewegung in die Hyperbelbewegung und diese wieder in die zweite gleichförmige Bewegung übergehen.

Die Gegenüberstellung der Gleichungen

$$\text{(I)} \quad rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \qquad \text{(IV)} \quad div\,\mathfrak{B} = 0,$$

$$\text{(Ia)} \quad rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \qquad \text{(IVa)} \quad div\,\mathfrak{H} = 0,$$

zeigt, daß in der Theorie der ponderablen Körper die magnetische Verschiebung $\mathfrak{B}$ dieselbe Rolle spielt, wie die Feldstärke $\mathfrak{H}$ beim leeren Raume. In der Tat geht auch bei der erwähnten Mittelwertbildung $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{B}$ über. Aus den Erörterungen von § 11 schließen wir daher, daß

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{M}_{xl} = \mathfrak{M}^*_{yz} = -i\mathfrak{E}_x, & \mathfrak{M}_{yl} = \mathfrak{M}^*_{zx} = -i\mathfrak{E}_y, & \mathfrak{M}_{zl} = \mathfrak{M}^*_{xy} = -i\mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{M}_{yz} = \mathfrak{M}^*_{xl} = \mathfrak{B}_x, & \mathfrak{M}_{zx} = \mathfrak{M}^*_{yl} = \mathfrak{B}_y, & \mathfrak{M}_{xy} = \mathfrak{M}^*_{zl} = \mathfrak{B}_z \end{array}\right\} \quad (234)$$

die Komponenten eines Sechservektors sind, welchen wir auch hier als den Feldvektor $\mathfrak{M}$ bezeichnen. Die Gleichungen (I) und (IV) kann man dann analog zu (XIV) zusammenfassen in:

$$\Delta iv\,\mathfrak{M}^* = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XVII)}$$

Auf der rechten Seite der Gleichungen (II) und (III)

$$rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J}\right), \quad div\,\mathfrak{D} = \varrho$$

tritt der elektrische Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ auf und die Dichte ϱ der wahren Ladung, d. h. derjenigen, welche im Gegensatz zur scheinbaren, durch Polarisation vorgetäuschten Ladung nur durch Zufluß eines Leitungsstromes verändert werden kann (vgl. 15). Man erkennt hieran, daß sie auf einer Ansammlung der im Körper frei beweglichen Elektronen beruhen muß, deren Bewegung gegen den Körper als Leitungsstrom in Erscheinung tritt, und welche man als Leitungselektronen von den an die Atome gebundenen Polarisations- und Magnetisierungselektronen unterscheidet (vgl. § 5). Hat der Körper selbst Geschwindigkeit, so tritt neben dem Leitungsstrom nach § 2 der Konvektionsstrom $\varrho\mathfrak{q}$ seiner „wahren", d. h. von Leitungselektronen herrührenden Ladung ϱ als magnetisch wirksam auf. Wir wollen daher

$$rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J} + \varrho\mathfrak{q}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(IIb)}$$

setzen. Die Summe $\mathfrak{J} + \varrho\mathfrak{q}$ gibt dann den gesamten Strom an, soweit er von Leitungselektronen herrührt; es ist nach § 14 ein-

leuchtend, daß man als die Komponenten eines Viererstromes P hier die Größen

$$P_x = \frac{1}{c}(\mathfrak{J}_x + \varrho\,\mathfrak{q}_x) \text{ usw.} \quad P_l = i\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (235)$$

zu betrachten hat. Schreiben wir nun die Gleichungen (IIb) und (III) in die Form:

$$\begin{aligned}
+\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial i\mathfrak{D}_x}{\partial l} &= \frac{1}{c}(\mathfrak{J}_x + \varrho\,\mathfrak{q}_x),\\
-\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial i\mathfrak{D}_y}{\partial l} &= \frac{1}{c}(\mathfrak{J}_y + \varrho\,\mathfrak{q}_y),\\
+\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial i\mathfrak{D}_z}{\partial l} &= \frac{1}{c}(\mathfrak{J}_z + \varrho\,\mathfrak{q}_z),\\
+\frac{\partial i\mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial i\mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial i\mathfrak{D}_z}{\partial z} &= i\varrho,
\end{aligned}$$

so schließen wir wie in § 14 aus der Vektoreigenschaft von P, daß die sechs Größen

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{B}_{xl} = \mathfrak{B}^*_{yz} = -i\mathfrak{D}_x, \quad \mathfrak{B}_{yl} = \mathfrak{B}^*_{zx} = -i\mathfrak{D}_y, \quad \mathfrak{B}_{zl} = \mathfrak{B}^*_{xy} = -i\mathfrak{D}_z\\
&\mathfrak{B}_{yz} = \mathfrak{B}^*_{xl} = \mathfrak{H}_x, \quad \mathfrak{B}_{zx} = \mathfrak{B}^*_{yl} = \mathfrak{H}_y, \quad \mathfrak{B}_{xy} = \mathfrak{B}^*_{zl} = \mathfrak{H}_z
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (236)$$

die Komponenten eines Sechservektors, des Verschiebungsvektors $\mathfrak{B}$ bilden. Die fraglichen Gleichungen lassen sich dann in die Form

$$\Delta iv\,\mathfrak{B} = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{XVIII})$$

zusammenfassen. Damit ist aber der Ansatz (IIb) bewiesen, denn er läßt sich mit (III) zu der vierdimensional-vektoriellen Beziehung (XVIII) zusammenfassen und geht im System K^0, d. h. für $\mathfrak{q} = 0$ in (II) über. Die Maxwellschen Gleichungen (I) bis (IV) gelten also unverändert auch für bewegte Körper, wenn man zum Leitungsstrom den Konvektionsstrom der wahren Ladungen additiv hinzufügt.

Für das Verhalten der Feldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ bei der speziellen Transformation (XI) gelten wegen (234), (236) und (141) Gleichungen welche den Formeln (92) entsprechend gebaut sind und aus den letzteren entstehen, wenn man dort entweder $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{D}$ vertauscht.

b) Leitungs- und Konvektionsstrom. Ebenso einfach lassen sich die Transformationsformeln für den Gesamtstrom $\mathfrak{J} + \varrho\,\mathfrak{q}$ aus dem Vektorcharakter von P herleiten. Eine genaue Überlegung ist aber erforderlich, um die Zerlegung in Leitungs-

strom und Konvektionsstrom vorzunehmen. Der Viererstrom P hat hier nicht wie in § 14 die Richtung der Weltlinien der Materie; er hat vielmehr im mitbewegten System K^0 die räumlichen Komponenten $P_{x^0} = \mathfrak{J}^0_{x^0}$ usw. Wir zerlegen ihn in zwei neue Vierervektoren, die Viererkonvektion:

$$K = -(YP)Y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (237)$$

welche die Richtung der Weltlinie hat, und die Viererleitung

$$\Lambda = P + (YP)Y \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (238)$$

welche auf ihr senkrecht steht, weil vermöge $Y^2 = -1$

$$(Y\Lambda) = (YP)(1 + Y^2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (239)$$

ist. Aus $K + \Lambda = P$ folgt nach (235):

$$\varrho = -iP_l = -i(K_l + \Lambda_l) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (240)$$

Im mitbewegten System K^0 ist nun die l^0-Komponente von Λ nach (239) Null, während $\Lambda_{x^0} = 1/c\,\mathfrak{J}^0_{x^0}$ usw. ist. Elektrische Raumdichte und Strom sind dort voneinander völlig unabhängig. In jedem anderen System aber liefert Λ einen Beitrag

$$\lambda = -i\Lambda_l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (241)$$

zur Dichte ϱ. Diese „Leitungsdichte“ λ ist am einfachsten durch die Bedingung (238) zu bestimmen, wenn man aus ihr Λ_l berechnet; denn setzt man die Werte für Y_x, P_x usw. nach (79), (83) und (235) ein, so findet man:

$$\lambda = \frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{J})}{c^2 - q^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (242)$$

Der Leitungsstrom an sich bedingt somit im bewegten Körper eine gewisse räumliche Ladung, auch wenn die Ruhdichte ϱ^0 verschwindet. Infolgedessen müssen wir auch den λ entsprechenden Teil $\lambda\mathfrak{q}$ des Konvektionsstromes mit dem Leitungsstrom zur Viererleitung zusammenfassen, indem wir

$$\Lambda_x = \frac{1}{c}(\mathfrak{J}_x + \lambda\mathfrak{q}_x) \text{ usw.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (243)$$

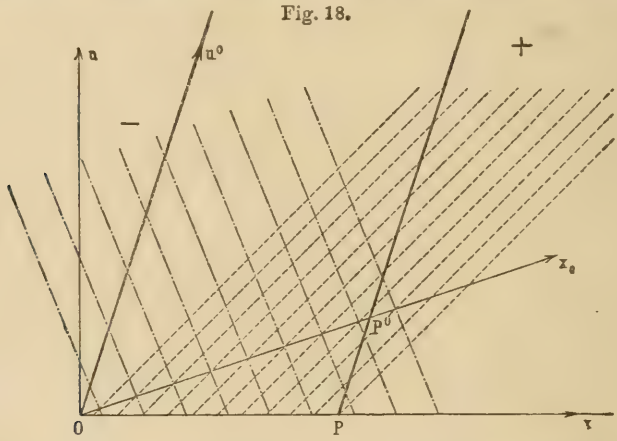
setzen. In der Tat folgen diese Werte für Λ_x usw. aus der Definition (238) der Viererleitung.

c) Die Invarianz der Elektrizitätsmenge. Dies alles klingt zunächst sehr paradox; denn eine Ladung tritt bei einem materiellen Volumelement dann auf, wenn es positive und negative Elektronen in verschiedener Zahl enthält. Die Ladung eines

Elektrons ist nach § 14 für alle Systeme die gleiche, und es scheint zunächst, als ob auch die Zahl der Elektronen gleicher Art in einem Stück Materie von der Wahl des Bezugssystems unabhängig sein müßte. Der Fehler dieses Trugschlusses beruht darauf, daß man nach den Anzahlen der gleichzeitig in ihm vorhandenen Elektronen fragen muß, und der Begriff der Gleichzeitigkeit nach § 6 etwas Relatives ist.

Wir wollen uns dies geometrisch veranschaulichen. Es seien in Fig. 18 die einander parallelen Geraden OU^0 und PP^0 die Weltlinien, welche die Endpunkte eines im System K^0 ruhenden

Fig. 18.



geraden Drahtes darstellen. OP^0 stellt seine Länge im System K^0 zur Zeit $t^0 = 0$ dar, OP hingegen seine Länge im System K zur Zeit $t = 0$, wenn auch die Strecken OP^0 und OP wegen der verschiedenen Einheiten auf der x- und x^0-Achse nicht gleich diesen Längen gesetzt werden dürfen (vgl. § 8). Durchfließt ihn ein stationärer Leitungsstrom, so bilden die Weltlinien der positiven Elektronen in ihm im allgemeinen einen kleineren Winkel mit der x-Achse als die Weltlinie PP^0, die der negativen Elektronen dagegen einen größeren, wie dies in der Figur gezeichnet ist, oder umgekehrt*), je nach der Richtung des Stromes. Ist der

*) Der Einfachheit halber sind die Weltlinien der Elektronen als parallele Gerade gezeichnet, obwohl die Annahme gleichförmiger Geschwindigkeit bei ihnen auch nicht annähernd zutrifft.

Draht bezogen auf K^0 ohne Ladung, so schneiden gleich viel Weltlinien positiver und negativer Elektronen die Strecke OP^0, wie dies in der Figur gezeichnet ist. Die Anschauung lehrt, daß dann die Strecke OP mehr positive Weltlinien als negative schneidet (zehn positive gegen sechs negative in Fig. 18). Der Stab trägt also im System K eine positive Ladung, in Übereinstimmung mit (242), da $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{q}$ hier parallel sind.

Die Ladung eines stromdurchflossenen Stückes Materie ist also im allgemeinen keine Invariante der Lorentz-Transformation. Fragen wir nun nach der Ladung e eines vollständigen Stromgebietes, d. h. eines materiellen Systems, dessen Begrenzung ganz in Nichtleitern verläuft. Aus (XVIII) folgt nach der Rechnungsregel (111):

$$Div\, P = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (244)$$

[vgl. (§ 14)] was nach (235) in die Beziehung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + div\,(\varrho \mathfrak{q}) + div\, \mathfrak{J} = 0$$

übergeht, welche sich als Verallgemeinerung der Kontinuitätsgleichung (23) darstellt. Nehmen wir an ihr nach ϱ und ϱ' die Umformung vor, welche von (23) zu (24) führt, so finden wir:

$$\frac{d(\varrho\, \delta V)}{dt} + \delta V\, div\, \mathfrak{J} = 0.$$

Und integrieren wir hier über ein beliebig großes materielles Raumstück, dessen Ladung $\int \varrho\, \delta V$ wir mit e bezeichnen, so erhalten wir nach dem Gaußschen Satz $\varkappa$:

$$\frac{de}{dt} = \int \mathfrak{J}_n d\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (245)$$

Die rechte Seite stellt die als Leitungsstrom pro Zeiteinheit durch die Oberfläche eintretende Elektrizitätsmenge dar; bei einem vollständigen Stromgebiet verschwindet sie. Dessen Gesamtladung ist somit in jedem berechtigten System, daher nach dem Anfang von § 14 auch bei einer Lorentz-Transformation unveränderlich. Dasselbe schließt man auch leicht unmittelbar aus (244) durch Anwendung des Gaußschen Satzes für vier Dimensionen auf die Weltröhre, welche den geladenen Körper darstellt, wenn man die Schlußbetrachtung von § 14 ein wenig verallgemeinert.

Während die Ladung eines stromdurchflossenen Stückes Materie wegen des Auftretens der Leitungsdichte λ im allgemeinen von System zu System variiert, hat die Ladung eines vollständigen Stromgebietes in allen berechtigten Systemen den gleichen Wert*). Für nichtleitende Körper gilt der fundamentale Satz von der Invarianz der elektrischen Ladung ohne jede Einschränkung.

Zugleich enthält die letzte Gleichung auch die Rechtfertigung für die zunächst willkürliche Art, wie wir oben die sämtlichen Komponenten des Viererstromes P in den Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ und den Konvektionsstrom $\varrho\,\mathfrak{q}$ zerlegt haben. Eine andere (an sich mögliche) Zerlegung hätte zur Folge, daß der Differentialquotient $\frac{de}{dt}$ nicht durch $\mathfrak{J}$, sondern auch durch die Konvektion $\varrho\,\mathfrak{q}$ bedingt ist, während so die Beziehung (245) aus der Theorie der ruhenden Körper unverändert übernommen werden kann.

Historisch interessant ist vielleicht, daß der obige Wert (242) für die Leitungsdichte schon 1882 von E. Budde[1]), später, 1895, von H. A. Lorentz abgeleitet wurde, und zwar aus der Vorstellung heraus, daß die Bewegung des Stromes in seinem eigenen Magnetfelde eine Kraft $1/c\,[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]$ [vgl. (IX a)] auf die Träger der Ladung hervorruft, welche sie zu einer Ladung von dieser Dichte zusammentreibt. Selbstverständlich kann die Relativitätstheorie diese Deutung ohne weiteres übernehmen; sie veranschaulicht auch den Satz, daß die Ladung eines vollständigen Stromgebietes durch die Bewegung nicht verändert wird; denn die erwähnte Kraft kann wohl die Verteilung der Elektronen über das Stromgebiet verändern, nicht aber ihre Gesamtzahl in diesem.

Blicken wir auf diesen Paragraphen zurück, so sehen wir, daß die Feldgleichungen (I) bis (IV) durch die Geschwindigkeit

---

*) Man darf aber hieraus nicht schließen, daß das Integral $\int \lambda\, dV$, erstreckt über ein vollständiges Stromgebiet, stets Null wäre. Das leicht auszuführende Beispiel eines unendlich langen, leitenden Stabes, welcher sich in seiner Längsrichtung unter einem positiv oder negativ geladenen Nichtleiter fortbewegt, zeigt sogleich, daß der Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ überall in einem Stromgebiet die der Geschwindigkeit entgegengesetzte Richtung haben, und daß infolgedessen nach (242) $\int \lambda\, dV < 0$ sein kann. Trotzdem behält aber der obige Satz seine Richtigkeit.

der Körper fast gar nicht verändert werden; nur der Konvektionsstrom tritt mit dem Werte, der vom Rowlandschen Versuche (§ 2) gefordert wird, zum Leitungsstrom hinzu. Es hat dies seinen Grund darin, daß sie aus den atomistischen Feldgleichungen hervorgehen, indem man die Unterscheidung von Leitungs- und gebundenen Elektronen einführt und den Viererstrom P nur auf die ersteren zurückführt. Der Unterschied zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ sowie $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ ergibt sich dann als Folge der Existenz von Polarisations- und Magnetisierungselektronen. Die Natur der Kräfte zwischen Atomen und Elektronen kommt dabei noch gar nicht in Betracht. Deshalb gelten die fraglichen Gleichungen jedenfalls in viel weiterem Umfange als die hier gegebene Ableitung, welche sich wegen des Relativitätsprinzips genau genommen nur auf gleichförmige Bewegung und wegen der Maxwellschen Theorie nur auf nichtdispergierende Körper bezieht. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß sie streng allgemeingültig sind.

§ 22. Die Transformation der Gleichungen (V) bis (VII).

a) Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$. Ganz anders stehen die Gleichungen (V) bis (VII) zur Atomistik; bei ihrer Ableitung kommen gerade die Kräfte zwischen Atomen und Elektronen wesentlich in Betracht und damit treten die ganzen in § 5 erwähnten Schwierigkeiten auf. Wir behandeln sie hier in der folgerichtigen Durchführung des oben skizzierten Standpunktes als etwas für ruhende Körper Gegebenes und suchen ihre Übertragung auf bewegte Medien.

Wir führen zu diesem Zwecke zunächst vier neue Raumvektoren ein:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}^* &= \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{B}] \\ \mathfrak{H}^* &= \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{D}] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (246)$$

die wir als die „elektrische“ und „magnetische treibende Kraft“ bezeichnen*), sowie

*) Diese Benennung von $\mathfrak{E}^*$ erhält ihre Rechtfertigung durch Formel XXIV, der zufolge $\mathfrak{E}^*$ der den elektrischen Strom veranlassende Vektor ist. Die Benennung von $\mathfrak{H}^*$ soll nur auf die Analogie zu $\mathfrak{E}^*$ hinweisen.

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{D}^* &= \mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\\ \mathfrak{B}^* &= \mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{E}]\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (247)$$

Betrachten wir sodann die vier Vektorprodukte aus der Vierergeschwindigkeit Y und den Sechservektoren $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{B}^*$. In einem beliebigen System K haben die Komponenten von $[Y\mathfrak{M}]$ nach (83), (102) und (234) die Werte:

$$\left.\begin{aligned}[Y\mathfrak{M}]_x &= \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\left\{\mathfrak{E}_x + \frac{1}{c}(\mathfrak{q}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{q}_z\mathfrak{B}_y)\right\}\\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]\right\}_x = \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\mathfrak{E}^*_x \text{ usw.}\\ [Y\mathfrak{M}]_l &= i\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{E})}{\sqrt{c^2-q^2}} = i\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{E}^*)}{\sqrt{c^2-q^2}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (248)$$

Analog stellen die drei anderen Produkte

$$[Y\mathfrak{B}], \quad [Y\mathfrak{M}^*], \quad [Y\mathfrak{B}^*]$$

nach (234) und (236) in ihren räumlichen Komponenten die Raumvektoren

$$\frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\mathfrak{D}^*, \quad \frac{ic}{\sqrt{c^2-q^2}}\mathfrak{B}^*, \quad \frac{ic}{\sqrt{c^2-q^2}}\mathfrak{H}^* \quad \ldots \quad (249)$$

dar, während ihre l-Komponenten gleich

$$i\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{D}^*)}{\sqrt{c^2-q^2}}, \quad \frac{-(\mathfrak{q}\mathfrak{B}^*)}{\sqrt{c^2-q^2}}, \quad \frac{-(\mathfrak{q}\mathfrak{H}^*)}{\sqrt{c^2-q^2}} \quad \ldots\ldots \quad (250)$$

sind. Im Ruhsystem K^0 gehen die vier genannten Raumvektoren über in $\mathfrak{E}^0$, $\mathfrak{D}^0$, $\mathfrak{B}^0$, $\mathfrak{H}^0$, während die skalaren Produkte $(\mathfrak{q}\mathfrak{E})$ usw. verschwinden; da ferner nach (V) und (VI)

$$\mathfrak{D}^0 = \varepsilon\mathfrak{E}^0, \quad \mathfrak{B}^0 = \mu\mathfrak{H}^0$$

ist, so bestehen zwischen den Vektorprodukten die Beziehungen[2]):

$$[Y\mathfrak{B}] = \varepsilon[Y\mathfrak{M}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{XIX})$$

$$[Y\mathfrak{M}^*] = \mu[Y\mathfrak{B}^*] \quad \ldots\ldots \quad (\text{XX})$$

Wendet man sie auf die räumlichen Komponenten in irgend einem anderen System an, so findet man:

$$\mathfrak{D}^* = \varepsilon\mathfrak{E}^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{XXI})$$

$$\mathfrak{B}^* = \mu\mathfrak{H}^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{XXII})$$

Ihre Anwendung auf die l-Komponenten liefert nichts Neues. Es liegt dies daran, daß jedes der vier Vektorprodukte notwendiger-

weise auf der Vierergeschwindigkeit Y senkrecht steht, so daß die vierte Komponente durch die drei anderen mitbestimmt ist.

Für $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ geht aus den Gleichungen (XXI) und (XXII) $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, d. h. $\mathfrak{M} = \mathfrak{V}$ hervor; denn sie sind 6 linearen Gleichungen mit den 6 Unbekannten $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$, $\mathfrak{D}_z$, $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$ gleichwertig und die angegebene Lösung ist mithin die einzige. Ein Körper mit diesen Werten der Konstanten ε und μ unterscheidet sich daher auch in der Bewegung für elektromagnetische Vorgänge höchstens durch die Leitfähigkeit vom leeren Raum.

b) Elektromotorische Kraft und Leitungsstrom. Die Gleichung (VII): $\mathfrak{J}^0 = \sigma \mathfrak{E}^0$ läßt sich nach (238) und (248) als

$$P + (YP)Y = A = \frac{\sigma}{c}[Y\mathfrak{M}] \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(XXIII)}$$

schreiben. Angewandt auf ihre räumlichen Komponenten in einem beliebigen System zeigt sie nach (243) und (248), daß

$$\mathfrak{J} + \mathfrak{q}\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{J})}{c^2 - q^2} = \frac{\sigma c \mathfrak{E}^*}{\sqrt{c^2 - q^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (251)$$

ist; in Übereinstimmung hiermit sagt ihre l-Komponente aus:

$$\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{J})}{c^2 - q^2} = \frac{\sigma}{c}\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{E})}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{\sigma}{c}\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{E}^*)}{\sqrt{c^2 - q^2}}.$$

Multipliziert man hier mit $\mathfrak{q}$ und subtrahiert von (251), so findet man als Verallgemeinerung von Gleichung (VII):

$$\mathfrak{J} = \frac{\sigma c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\left(\mathfrak{E}^* - \mathfrak{q}\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{E}^*)}{c^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(XXIV)}$$

Im Gegensatz zu den Gleichungen (I) bis (IV) können die Formeln (XIX) bis (XXIV) strenge Gültigkeit sicherlich nur für den Fall beanspruchen, daß die Geschwindigkeit weder räumlich noch zeitlich variiert, angenäherte auch dann, wenn diese Variationen geringe Beträge aufweisen. Als Hinweis darauf, wo ihre Gültigkeitsgrenze liegt, mag das Beispiel eines gleichförmig rotierenden Körpers betrachtet werden. Bei ihm strebt sich jeder Teil wegen der Lorentz-Kontraktion im Verhältnis $\sqrt{1 - q^2/c^2}$ zusammenzuziehen, kann dies aber nicht, solange nicht der Zusammenhang zwischen den Teilen des Körpers unterbrochen wird. Infolgedessen treten elastische Spannungen im Körper auf, welche ihn anisotrop und inhomogen machen. Die genannten Gleichungen gelten aber ebenso wie (V), (VI) und (VII) nur für isotrope,

homogene Körper. Doch sind diese Einflüsse wie die Lorentz-Kontraktion selbst von der zweiten Ordnung in q/c; als erste, für die Diskussion aller Versuche aber völlig ausreichende Näherung können wir die in Rede stehenden Beziehungen daher auch auf rotierende Körper anwenden.

Die Grundgleichungen der in den beiden letzten Paragraphen entwickelten Minkowskischen Elektrodynamik der bewegten Körper stellen wir hier noch einmal zusammen. Sie lauten in vierdimensionaler Vektorform:

$$\text{(XVII)}\quad \Delta iv\,\mathfrak{M}^* = 0, \qquad \text{(XVIII)}\quad \Delta iv\,\mathfrak{B} = P,$$

$$\text{(XIX)}\quad [Y\mathfrak{B}] = \varepsilon[Y\mathfrak{M}], \qquad \text{(XX)}\quad [Y\mathfrak{M}^*] = \mu[Y\mathfrak{B}^*]$$

$$\text{(XXIII)}\quad P + (YP)Y = \frac{\sigma}{c}[Y\mathfrak{M}].$$

Gleichbedeutend sind damit die folgenden:

$$\text{(I)}\quad rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}, \qquad \text{(II b)}\quad rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J} + \varrho\mathfrak{q}\right),$$

$$\text{(IV)}\quad div\,\mathfrak{B} = 0, \qquad \text{(III)}\quad div\,\mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(XXI)}\quad \mathfrak{D}^* = \varepsilon\mathfrak{E}^*, \qquad \text{(XXII)}\quad \mathfrak{B}^* = \mu\mathfrak{H}^*,$$

$$\text{(XXIV)}\quad \mathfrak{J} = \frac{\sigma c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\left(\mathfrak{E}^* - \mathfrak{q}\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{E}^*)}{c^2}\right).$$

§ 23. Anwendungen.

a) Das Ohmsche Gesetz. Wie in der Elektrodynamik der ruhenden Körper folgt aus (XXIV) für stationäre und quasistationäre Ströme das Ohmsche Gesetz: „Widerstand × Stromstärke gleich Spannungsdifferenz". In einem linearen Leiter, d. h. einem solchen, der sich als einzelner Stromfaden betrachten läßt, ist nämlich die Stromdichte $\mathfrak{J}$ parallel zu seinem Linienelement ds, und dem Betrage nach gleich dem Quotienten $\frac{J}{Q}$ aus der Stromstärke J und dem Querschnitt Q. Bei stationärem Strom ist aber die Stromstärke J längs des Leiters konstant, also folgt aus (XXIV) durch Integration nach ds:

$$J\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\int\frac{ds}{\sigma Q} = \int\left[\mathfrak{E}_s^* - \mathfrak{q}_s\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{E}^*)}{c^2}\right]ds.$$

Das Integral rechts muß als die Spannungsdifferenz zwischen den Endpunkten des betrachteten Leiterstückes, der Faktor von J als

dessen Widerstand betrachtet werden; er hängt wegen der Lorentz-Kontraktion in Gliedern zweiter Ordnung auf ziemlich komplizierte Art von der Richtung der Geschwindigkeit gegen ds ab. Vernachlässigt man aber q^2/c^2 gegen 1, so wird die Spannungsdifferenz $\int \mathfrak{E}_s^* ds$ und der Widerstand erhält denselben Wert wie bei Ruhe.

b) Induktion. Aus (I), (246), α, σ' und (IV) folgt:

$$rot\,\mathfrak{E}^* = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + rot\,[\mathfrak{B}\mathfrak{q}]\right\} = -\frac{1}{c}\underline{\dot{\mathfrak{B}}} \quad . \; . \; (252)$$

oder nach σ und dem Stokesschen Satz λ:

$$\int_{\bigcirc} \mathfrak{E}_s^* ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (253)$$

d.h. das Linienintegral der treibenden elektrischen Kraft ist durch die Änderung des magnetischen Induktionsflusses durch die umschlungene mitbewegte Fläche bestimmt. Die übliche Berechnung der induzierten Stromstärke aus diesem Integral und dem Widerstand ist freilich nach a) nur eine Annäherung, aber eine für die Diskussion der Induktionsversuche mehr wie ausreichende. Die Theorie steht daher mit den Induktionsversuchen (§ 2) im Einklang.

Ganz analog findet man nach (IIb), (III) und (246):

$$\left.\begin{aligned} rot\,\mathfrak{H}^* &= \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + rot\,[\mathfrak{D}\mathfrak{q}] + \mathfrak{q}\,div\,\mathfrak{D} + \mathfrak{J}\right\} = \frac{1}{c}\,(\underline{\dot{\mathfrak{D}}} + \mathfrak{J}) \\ \int_{\bigcirc} \mathfrak{H}_s^* ds &= \frac{1}{c}\left\{\int \mathfrak{J}_n d\sigma + \frac{d}{dt}\int \mathfrak{D}_n d\sigma\right\} \end{aligned}\right\} (254)$$

Auch hier ist die umschlungene Fläche als mit der Materie bewegt gedacht.

c) Grenzbedingungen[1]). In der Maxwellschen Theorie sind, wie schon in § 4 erwähnt, an den Grenzflächen der Körper stetig: 1. die zur Grenze normalen Komponenten der Verschiebungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$; nur wenn die wahre Ladung eine Flächendichte ϱ_σ hat, ist*)

$$\mathfrak{D}_{n_1} + \mathfrak{D}_{n_2} = \varrho_\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (255)$$

2. die tangentiellen Komponenten der Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Diese beiden Bedingungen sind aber voneinander nicht unab-

*) n_1 und n_2 sind die beiden von der Grenze fortweisenden Normalen; sie haben also entgegengesetzte Richtungen.

hängig, vielmehr genügen die zweiten allein, um zusammen mit den Differentialgleichungen das Feld vollständig zu bestimmen; die ersteren werden dabei von selbst erfüllt[2]). Wenn wir sie jetzt auf bewegte Körper übertragen, so setzen wir, falls zwei ponderable Körper aneinanderstoßen, voraus, daß ihre Geschwindigkeit zu beiden Seiten der Grenzfläche denselben Wert hat; denn nur in diesem Falle können wir auf Ruhe transformieren und das Relativitätsprinzip samt den aus ihm abgeleiteten Differentialgleichungen anwenden. Diese Einschränkung fällt um so weniger ins Gewicht, als ein Gleiten zweier Körper aneinander wahrscheinlich in der Natur überhaupt nicht vorkommt. In denjenigen Fällen aber, in denen wir, um ein Problem einfach formulieren zu können, von einem Gleiten sprechen, wollen wir die Körper durch eine leere Schicht getrennt denken, welche so dünn ist, daß das elektromagnetische Feld sich nicht merklich ändert, wenn man sie senkrecht durchschreitet. Für die beiderseitigen Begrenzungen dieser Schicht kann man die abzuleitenden Stetigkeitsbedingungen anwenden und so auch die elektromagnetischen Felder in den Körpern miteinander in Beziehung setzen.

Wir zeigen zuerst, daß die Grenzbedingungen unter 1. unverändert übertragen werden können. Wendet man nämlich auf einen unendlich kleinen, unendlich flachen Zylinder, dessen Grundflächen $d\sigma_g$ der Grenze parallel und zu ihren beiden Seiten liegen, nach $\varkappa$ die Gleichung

$$\int div\mathfrak{D}\,d\tau = -\int \mathfrak{D}_n\,d\sigma$$

an, so kann man rechts die vom Zylindermantel herrührenden Teile des Integrals vernachlässigen und findet:

$$\int div\mathfrak{D}\,d\tau = (\mathfrak{D}_{n_1} + \mathfrak{D}_{n_2})\,d\sigma_g;$$

die linke Seite stellt aber nach (III) die gesamte Ladung des Zylinders dar und wird, wenn man den Zylinder flacher und flacher werden läßt, schließlich gleich $\varrho_\sigma\,d\sigma_g$; daraus folgt dann Gleichung (255). Ganz analog gilt wegen (IV):

$$\mathfrak{B}_{n_1} + \mathfrak{B}_{n_2} = 0.$$

Die normalen Komponenten der Verschiebungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ sind stetig (wenn keine Flächenladung vorhanden ist).

Die Bedingungen unter 2. dagegen müssen bei bewegten Körpern abgeändert werden. Wir wenden die Gleichung (253)

auf ein infinitesimal schmales, mit der Materie bewegtes Rechteck an, dessen kurze Seiten dN_1 und dN_2 ($= dN$) die Grenzfläche senkrecht schneiden, während die langen Seiten ds_1 und ds_2 ($= ds$) zu ihr parallel sind. So finden wir:

$$\int_{\circ} \mathfrak{E}_s^* ds = (\mathfrak{E}_{s_1}^* - \mathfrak{E}_{s_2}^*) ds + (\mathfrak{E}_{N_1}^* - \mathfrak{E}_{N_2}^*) dN$$
$$= -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{B}_n ds dN\right),$$

wo n die Normale des Rechtecks bedeutet. Auf dem mitbewegten Flächenstück $dsdN$ ist nun $\mathfrak{B}_n$ eine stetig veränderliche Funktion der Zeit, desgleichen die Größe des Flächenelementes und auch das Produkt $\mathfrak{B}_n dsdN$*). Beim Grenzübergang zu $dN = 0$ verschwindet $\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{B}_n ds dN\right)$ daher wie dN selbst; es folgt deshalb:

$$\mathfrak{E}_{s_1}^* = \mathfrak{E}_{s_2}^*.$$

Analog schließen wir aus (254):

$$\mathfrak{H}_{s_1}^* = \mathfrak{H}_{s_2}^*.$$

Die Seiten ds_1 und ds_2 können nun jede Richtung parallel zur Grenzfläche haben. Die tangentiellen Komponenten der elektrischen und magnetischen treibenden Kraft sind daher stetig.

Bei Anwendung dieses Satzes auf die Grenze eines Körpers gegen den leeren Raum hat man für $\mathfrak{q}$ auf beiden Seiten die Geschwindigkeit des Körpers zu setzen; denn auch die im leeren Raum gelegene Hälfte des Rechtecks $dsdN$, über welches wir integrierten, hat diese Geschwindigkeit.

d) Der Wilsonsche Versuch[3]). (Vgl. § 2 und 4.) Wir nehmen das Dielektrikum als gleichförmig bewegt an; die Übertragung auf den wirklichen Fall der gleichförmigen Rotation ist nach § 22 eine erste, aber zur Diskussion des Versuches völlig ausreichende Näherung. Ferner denken wir uns das Dielektrikum als eine nach zwei Dimensionen (der x- und y-Richtung) unendlich ausgedehnte Scheibe von der Dicke l. Ebenso sollen die Platten des Kondensators unendlich ausgedehnt sein und von den Grenz-

*) Für einen ruhenden Punkt kann $\mathfrak{B}$ unstetig wechseln, wenn gerade eine Grenzfläche über ihn hinwegstreicht; deswegen wäre es falsch, aus (I) die Stetigkeit der tangentiellen Komponente von $\mathfrak{E}$ zu folgern.

flächen des Dielektrikums beiderseits durch leere Schichten von der Gesamtdicke a getrennt sein. Wie in § 4 soll die Geschwindigkeit der dielektrischen Scheibe in der x-Richtung, das magnetische Feld im Außenraum in der y-Richtung liegen.

Es ist von vornherein wahrscheinlich, daß sich unter diesen Annahmen ein stationärer Zustand einstellt. Bestätigt wird diese Vermutung durch das aus ihr abgeleitete Ergebnis, das allen Feldgleichungen und Grenzbedingungen genügt. Da dann die Differentialquotienten $\partial/\partial t$ Null sind, muß nach (I) $rot\,\mathfrak{E}$, also nach λ, das Integral $\int \mathfrak{E}_s ds$ für jeden geschlossenen Weg verschwinden. Ist dies Integral für einen Weg, welcher von der Platte P_1 außen um die dielektrische Scheibe herum nach P_2 führt, gleich E, liegt also die Spannung E am Kondensator, so muß es für jeden durch die Scheibe von P_1 nach P_2 führenden Weg ebenfalls diesen Wert haben, also:

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{E}_z dz = E.$$

Wir genügen allen Differentialgleichungen, wenn wir überall zwischen den Platten das elektromagnetische Feld nicht nur als zeitlich, sondern auch als räumlich konstant, ferner die elektrische Feldstärke überall parallel zu z, die magnetische parallel y ansetzen. Wir haben aber das Feld in den beiden leeren Schichten zu unterscheiden von dem in der bewegten Scheibe; es geschieht dies durch die Indices a und l. Nach (XXI) und (XXII) ist dann in den leeren Schichten:

$$\mathfrak{D}_z^a = \mathfrak{E}_z^a, \quad \mathfrak{B}_y^a = \mathfrak{H}_y^a$$

und im Inneren der Platte:

$$\mathfrak{D}_z^l + \frac{q}{c}\mathfrak{H}_y^l = \varepsilon\left(\mathfrak{E}_z^l + \frac{q}{c}\mathfrak{B}_y^l\right)$$

$$\mathfrak{B}_y^l + \frac{q}{c}\mathfrak{E}_z^l = \mu\left(\mathfrak{H}_y^l + \frac{q}{c}\mathfrak{D}_z^l\right).$$

Nach den Grenzbedingungen ist die normale Komponente der elektrischen Verschiebung stetig, also:

$$\mathfrak{D}_z^a = \mathfrak{D}_z^l;$$

desgleichen die tangentielle Komponente der treibenden magnetischen Kraft, daher:

$$\mathfrak{H}_y^a + \frac{q}{c}\mathfrak{D}_z^a = \mathfrak{H}_y^l + \frac{q}{c}\mathfrak{D}_z^l.$$

Die tangentielle Komponente der elektromotorischen Kraft ist ebenso wie die normale Komponente der Verschiebung $\mathfrak{B}$ nach dem obigen Ansatz auf beiden Seiten der Grenzflächen Null. Schließlich ist noch

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{E}_z dz = a\mathfrak{E}_z^a + l\mathfrak{E}_z^l = E.$$

Die Spannungsdifferenz E und die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}_y^a$ sind experimentell gegebene Daten. Zur Bestimmung der sieben Unbekannten $\mathfrak{E}_z^a$, $\mathfrak{E}_z^l$, $\mathfrak{D}_z^a$, $\mathfrak{D}_z^l$, $\mathfrak{H}_y^l$, $\mathfrak{B}_y^a$ und $\mathfrak{B}_y^l$ stehen die sieben vorstehenden linearen Gleichungen zur Verfügung. Von ihren Lösungen führen wir nur an:

$$\mathfrak{D}_z^a = \mathfrak{D}_z^l = \mathfrak{E}_z^a = \frac{\varepsilon(c^2 - q^2)E + qc(\varepsilon\mu - 1)l\mathfrak{H}_y^a}{\varepsilon(c^2 - q^2)a + (c^2 - \varepsilon\mu q^2)l}.$$

Da im Inneren der Platten P_1 und P_2 kein elektrisches Feld besteht, so mißt $|\mathfrak{D}_z^a|$ nach (255) die Dichte der Flächenladung auf ihnen.

Beim Wilsonschen Versuch war $E = 0$, ferner $\mu = 1$, außerdem war a sehr klein gegen l und q^2 gegen c^2 zu vernachlässigen. Man findet aus der letzten Gleichung als Dichte der Ladung für diesen Fall

$$\varrho_\sigma = \pm(\varepsilon - 1)\frac{q}{c}|\mathfrak{H}^a|$$

in Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis.

Auffallend ist an dem streng gültigen Resultat, daß für eine bestimmte Unterlichtgeschwindigkeit q der Nenner, die Determinante unseres Gleichungensystems, verschwindet; es versagt in diesem Falle der obige unter Annahme stationären Zustandes aufgestellte Ansatz. Es hängt dies damit zusammen, daß die Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung nach der Maxwellschen Theorie mit der Unterlichtgeschwindigkeit $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ vor sich geht, und die von uns vernachlässigten, vom Rande der Scheibe ausgehenden Störungen deswegen bei der fraglichen Geschwindigkeit niemals abklingen. Jene Folgerung aus der Maxwellschen Theorie wird aber, wie wir schon in § 7 erwähnten, von der Elektronentheorie nicht bestätigt. Sie erkennt $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ nur als Phasengeschwindigkeit bei periodischen Vorgängen, nicht als Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen an, so daß man füglich bezweifeln kann,

daß man sich bei diesem Schluß noch im Gültigkeitsbereich der Maxwellschen Theorie befindet.

e) Die Versuche von Röntgen und Eichenwald[4]). [Vgl. § 4, d)]. Für die Beschreibung des magnetischen Feldes hat man im allgemeinen die Wahl zwischen den Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$; im leeren Raum, in welchem die Beobachtung bei den Röntgen- und Eichenwaldschen Versuchen erfolgt, werden aber beide mit einander identisch. Aus (XXII) folgt nun für unmagnetische Körper ($\mu = 1$):

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}(\mathfrak{q}, (\mathfrak{D} - \mathfrak{E})]$$

und daraus nach (II b):

$$rot\,\mathfrak{B} = \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J} + \varrho\mathfrak{q} + rot\,[(\mathfrak{D} - \mathfrak{E}), \mathfrak{q}]\right\}.$$

Da nach (IV) $div\,\mathfrak{B} = 0$, und jeder Raumvektor durch seine Rotation und seine Divergenz eindeutig bestimmt ist, so kennt man das magnetische Feld vollkommen, wenn außer dem Verschiebungsstrom $\dot{\mathfrak{D}}$, dem Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ und dem Konvektionsstrom $\varrho\mathfrak{q}$ noch der Röntgenstrom $rot\,[\mathfrak{D} - \mathfrak{E}, \mathfrak{q}]$ gegeben sind. Da man für kleine Werte von $\frac{q}{c}$ wegen des Faktors $\frac{q}{c}$ nach (XXI) in erster Näherung hier $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ setzen kann, so hat der Röntgenstrom in homogenen Körpern die Dichte

$$(\varepsilon - 1)\,rot\,[\mathfrak{E}\mathfrak{q}]$$

in Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis.

f) Der Fresnelsche Mitführungskoeffizient[5]). Für die Optik der ponderablen, ruhenden Körper haben wir nach § 5 $\mu = 1$ und für ε das Quadrat des Brechungsindex n^0 zu setzen. Die Gleichungen (20) für eine ebene Welle, bezogen auf das mitbewegte System K^0 lauten deshalb:

$$\mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}_0^0 \sin\Theta, \qquad \mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H}_0^0 \sin\Theta,$$
$$\mathfrak{D}^0 = \mathfrak{D}_0^0 \sin\Theta, \qquad \mathfrak{B}^0 = \mathfrak{B}_0^0 \sin\Theta.$$

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= 2\pi\nu^0 \\ &\times \left\{t^0 - \frac{n^0}{c}[x^0 \cos\vartheta^0 + \sin\vartheta^0 (y^0 \cos\varphi^0 + z^0 \sin\varphi^0)]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (256)$$

wo analog zu (172) gesetzt ist:

$$\cos(\mathfrak{S}^0 x^0) = \cos\vartheta^0, \quad \cos(\mathfrak{S}^0 y^0) = \sin\vartheta^0 \cos\varphi^0,$$
$$\cos(\mathfrak{S}^0 z^0) = \sin\vartheta^0 \sin\varphi^0.$$

Nach (234) und (236) drückt sich dasselbe in den Beziehungen aus:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \sin \Theta, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \sin \Theta.$$

Man sieht an der letzteren Form wie bei der Theorie der Aberration in § 16a, daß Θ für alle berechtigten Bezugssysteme denselben Wert haben muß. Im Gegensatz zu dort sind hier aber nicht alle diese Systeme gleichwertig, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Phasen V ist vielmehr nur für das System K^0 gegeben, für alle anderen erst zu bestimmen. Wir setzen daher für ein anderes System K:

$$\Theta = 2\pi\nu\left\{t - \frac{1}{V}\left(x\cos\vartheta + \sin\vartheta\,(y\cos\varphi + z\sin\varphi)\right)\right\}$$

und suchen neben ν und ϑ auch V durch Transformation zu berechnen.

Führen wir nun die spezielle Transformation (XI) aus, indem wir unser System K^0 mit dem dort eingeführten K' identifizieren, so finden wir aus (256):

$$\Theta = 2\pi\nu^0 \frac{c + q\,n^0\cos\vartheta^0}{\sqrt{c^2 - q^2}}$$

$$\times\left\{t - \frac{(q + c\,n^0\cos\vartheta^0)\,x + n^0\sin\vartheta^0\sqrt{c^2 - q^2}\,(y\cos\varphi^0 + z\sin\varphi^0)}{c\,(c + q\,n^0\cos\vartheta^0)}\right\}.$$

Durch Vergleich der beiden Formen von Θ folgt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = \varphi^0, \quad tg\,\vartheta &= \frac{n^0\sin\vartheta^0\sqrt{c^2 - q^2}}{q + c\,n^0\cos\vartheta^0}, \\ \nu &= \nu^0\frac{c + q\,n^0\cos\vartheta^0}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \\ V &= c\,\frac{c + q\,n^0\cos\vartheta^0}{\sqrt{(q + c\,n^0\cos\vartheta^0)^2 + n^{02}(c^2 - q^2)\sin^2\vartheta^0}} \end{aligned}\right\} \quad \cdot\cdot \quad (257)$$

Bei Vernachlässigung der zweiten und der höheren Potenzen von q/c folgt hieraus:

$$V = \frac{c + q\,n^0\cos\vartheta}{n\sqrt{1 + 2\,\frac{q}{c\,n^0}\cos\vartheta}} = \frac{1}{n^0}\,(c + q\,n^0\cos\vartheta)\left(1 - \frac{q}{c\,n^0}\cos\vartheta\right)$$

$$= \frac{c}{n^0} + q\cos\vartheta\left(1 - \frac{1}{n^{02}}\right) \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad (257\,a)$$

In erster Näherung tritt also die Komponente der Geschwindigkeit des Körpers parallel zum Licht-

strahl, multipliziert mit dem Fresnelschen Mitführungskoeffizienten $1 - 1/n^{02}$, zur Phasengeschwindigkeit c/n^0 additiv hinzu. Dies entspricht dem experimentellen Befund beim Fizeauschen Versuch (§ 2) ($\cos\vartheta = \pm 1$); namentlich mit Zeemans Wiederholung stimmt es bis auf weniger als 1 Proz. überein.

Um den früher angekündigten Zusammenhang mit dem Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeit zu erkennen, hat man nach der Geschwindigkeit des Strahles im bewegten Körper zu fragen. Beim ruhenden Körper ist bekannt, daß ein zylindrischer Ausschnitt aus einer ebenen Welle, wenn der Zylindermantel von Strahlen gebildet ist, sich unverändert in der Strahlrichtung fortpflanzt, und zwar gilt dies mit jeder beliebigen Annäherung, wenn wir die Grundfläche des Zylinders gegen die Lichtwellenlänge hinreichend groß wählen. Ein materieller Punkt, welcher sich dauernd in diesem Zylinder befinden soll, muß daher Strahlengeschwindigkeit haben. Die Tatsache, daß er dauernd beleuchtet wird, gilt nun aber für alle Bezugssysteme. Daher muß sich die Strahlgeschwindigkeit wie die eines materiellen Punktes transformieren. Im System K^0 hat sie nach der Maxwellschen Theorie den Wert c/n^0. Nach dem Additionstheorem [Gleich. (37)] hat sie mithin im System K den Betrag:

$$w = c\,\frac{\sqrt{c^2 + n^{02}q^2 + 2\,q\,c\,n^0\cos\vartheta^0 - q^2\sin^2\vartheta^0}}{c\,n^0 + q\cos\vartheta^0},$$

während die Neigung ϑ des Strahles gegen die Richtung der Geschwindigkeit durch die aus (33) folgende Gleichung

$$tg\,\vartheta = \frac{\sin\vartheta^0\sqrt{c^2 - q^2}}{c\cos\vartheta^0 + n^0 q}$$

bestimmt ist. Strahl und Wellennormale haben, wie aus den letzten Gleichungen und aus (257) hervorgeht, im bewegten Körper im allgemeinen verschiedene Richtung und Geschwindigkeit. Die Unterschiede müssen aber aus Symmetriegründen fortfallen, wenn wie beim Fizeauschen Versuch $\vartheta^0 = 0$ oder $= \pi$ ist. Dann wird in der Tat in Übereinstimmung mit dem obigen Wert von V:

$$w = c\,\frac{c \pm n^0 q}{n^0 c \pm q} = \frac{c}{n^0} \pm q\left(1 - \frac{1}{n^{02}}\right) + \cdots$$

g) Der Versuch von Zeeman. Beim Fizeauschen Interferenzversuch ist die strömende Wassersäule hinten und vorn begrenzt durch zwei feststehende Glasplatten, durch welche das Licht ein- und austritt, während das Wasser kurz vor ihnen seitlich ausweicht. Jetzt ersetzen wir diese Wassersäule durch eine Säule aus Glas, welche sich mit der Geschwindigkeit q in der Richtung des Lichtstrahls gegen das berechtigte Bezugssystem K bewegt; ihre Länge sei l. Wir berücksichtigen im folgenden nur Glieder erster Ordnung in q/c.

Da jetzt die Endflächen der Glassäule an der Bewegung teilnehmen, so hat das Licht, bezogen auf K, die bewegte Strecke l zu durchlaufen. Es tut dies mit der Relativgeschwindigkeit

$$V - q = \frac{c}{n^0} + q\left(1 - \frac{1}{n^{0\,2}}\right) - q = \frac{c}{n^0}\left(1 - \frac{q}{n^0 c}\right).$$

Denn die Geschwindigkeiten V und q beziehen sich auf dasselbe System K, setzen sich also nach § 7 (vgl. besonders die Anmerk. auf S. 64) nach der gewöhnlichen Vektorregel zusammen. Es braucht also dazu die Zeit

$$t_+ = \frac{l}{V - q} = \frac{l\,n^0}{c}\left(1 + \frac{q}{n^0 c}\right) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (257\,\mathrm{b})$$

Dafür erspart es sich die Strecke $t_+ q$ in Luft; denn um diese Strecke verschiebt sich ja der Glasstab während der Zeit t_+ in der Strahlrichtung. Will man somit die Zeit berechnen, welche das Licht zwischen einem festen Raumpunkt vor und einem solchen hinter der Glassäule braucht, deren Abstand L ist, so muß man setzen

$$\tau_+ = \frac{L - l - t_+ q}{c} + t_+ = \frac{L - l}{c} + \frac{l}{c}\left(n^0 + \frac{q}{c}(1 - n^0)\right).$$

Durchläuft ein anderer Strahl die gleiche Strecke L in entgegengesetzter Richtung, so ist für ihn die entsprechende Zeit

$$\tau_- = \frac{L - l}{c} + \frac{l}{c}\left(n_0 - \frac{q}{c}(1 - n^0)\right).$$

Zeeman vergleicht beide durch einen Interferenzversuch. Er mißt so den Unterschied

$$\tau_+ - \tau_- = \frac{2\,q\,l}{c^2}(1 - n^0)$$

durch eine Streifenverschiebung, welche bezogen auf den Streifenabstand als Einheit beträgt

$$\Delta = \frac{c(\tau_+ - \tau_-)}{\lambda} = \frac{2ql}{\lambda c}(1 - n^0).$$

(Den Einfluß der Dispersion, welcher auch hier infolge des Dopplereffekts auftritt, lassen wir entsprechend der zweiten Anmerkung auf S. 24 fort.) Der Versuch bestätigt diese Formel. (§ 2.)

h) Der Versuch von Harress[6]). Er unterscheidet sich im Grundsatz nur wenig von dem Zeemanschen. Man denke sich zunächst einmal die Endflächen der soeben erwähnten Glassäule statt zu deren Längsrichtung senkrecht unter 45° zu ihr geneigt (Fig. 18 a). Dann stellt die Linie $ABCD$ den Gang eines Strahles dar, welcher die Längsrichtung in der Richtung der Geschwindigkeit durchsetzt. Die Zeit, welche das Licht vor der Spiegelung bei B und nach der bei C zur Durchlaufung irgend einer Strecke zwischen zwei festen Raumpunkten braucht, ist von der Geschwindigkeit q in erster Ordnung unabhängig. Zwischen B und C aber braucht es nach (257 b) die Zeit

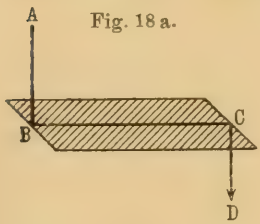


Fig. 18 a.

$$\tau_+ = \frac{ln^0}{c} + \frac{ql}{c^2}.$$

Bestimmte man hier die Zeitdifferenz für zwei entgegengesetzt gerichtete Strahlen, so fände man also

$$\tau_+ - \tau_- = \frac{2ql}{c^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (257\,c)$$

Warum der Brechungsindex hier herausfällt, sieht man sehr leicht, wenn man die Durchlaufungszeit zunächst im Ruhsystem des Glasstabes berechnet und sie dann auf das System K transformiert. Nach (XI) ergibt sich dabei nämlich aus der Formel

$$t_+ = \frac{t^0 + \frac{q}{c^2} l^0}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}$$

in Gliedern erster Ordnung unmittelbar

$$t_+ = \frac{ln^0}{c} + \frac{ql}{c^2}.$$

Die Dispersion bedingt hier im Gegensatz zum Fizeauschen und Zeemanschen Versuch keine Änderung.

Beim Harressschen Versuch ist nun der Glaskörper nicht in translatorischer, sondern in drehender Bewegung. Das bringt eine erhebliche Verwicklung in die Theorie, besonders, weil die hier vorgetragene Relativitätstheorie den Einfluß der damit verbundenen Beschleunigungen im unklaren läßt. Vernachlässigt man diesen, so bleibt immer noch die Schwierigkeit, daß der Strahl in einem rotierenden Körper nicht geradlinig bleiben kann, und daß sich an einem Teil der spiegelnden Flächen, soweit diese nicht zur Geschwindigkeit tangentiell liegen, das Spiegelungsgesetz ein anderes wird, als bei Ruhe. Denn beide Erscheinungen verlagern den Weg des Strahles gegenüber dem Glaskörper.

Zum Glück kann man nun zeigen, daß diese Verlagerung keinen Beitrag erster Ordnung zu der Zeitdifferenz $\tau_+ - \tau_-$ liefert, welche auch hier durch einen Interferenzversuch bestimmt wird Denn betrachten wir einmal bei Ruhe den Strahl, welcher von einem Punkt P der Fläche, welche die interferierenden Strahlen trennt und später wieder vereinigt, im Sinne der späteren Drehung zu einem Punkt Q derselben Platte führt. Die Zeit, welche er für diese Strecke braucht, berechnet sich aus den geradlinigen Teilen l zwischen je zwei Brechungen oder Spiegelungen und dem Brechungsindex n^0, der auf diesen Strecken herrscht, zu

$$t_+ = \sum \frac{l}{v}$$

$\left(v = \frac{c}{n^0}\right)$. Tritt jetzt die Drehung ein, so verändert sich diese Summe um

$$\delta t_+ = -\sum \frac{l \delta v}{v^2} + \sum \frac{\delta l}{v},$$

wobei δv die Änderung der Relativgeschwindigkeit des Lichts gegen die Strecke l bedeutet. Die Veränderungen δl werden im allgemeinen von der ersten Ordnung in q/c sein. Nach dem Satz vom ausgezeichneten Lichtweg, welcher in der geometrischen Optik als Fermatsches Prinzip bezeichnet wird, ist dann

$$\sum \frac{\delta l}{v} = \sum \frac{\delta l n^0}{c}$$

klein von der zweiten Ordnung, braucht also nicht berücksichtigt zu werden.

Die Summe $\sum \frac{l\delta v}{v^2}$ ist so zu berechnen, als wären die einzelnen Teile des Strahlenganges alle gerade geblieben. Die Komponente $q \,.\, \cos\vartheta$, welche in (257 a) auftritt, ist nun bei der Drehbewegung, wie eine leichte geometrische Betrachtung zeigt, für jeden Punkt eines Lichtweges l gleich ωr, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit, r den Abstand der Strecke l von der Drehachse bedeutet. (Wir denken alle Strecken l als senkrecht zur Drehachse.) Infolgedessen ist δv die Differenz zwischen der Relativgeschwindigkeit

$$V - \omega r = \frac{c}{n^0}\left(1 - \frac{\omega r}{n^0 c}\right),$$

die das Licht zur bewegten Strecke l hat, und dem für die Ruhe geltenden Werte c/n^0. Also ist

$$\delta t_+ = -\sum \frac{l\delta v}{v^2} = -\sum \frac{n^{02}}{c^2} l\,\delta v = \frac{\omega}{c^2}\Sigma r l.$$

Der Interferenzversuch zwischen zwei im entgegengesetzten Sinne umlaufenden Strahlen bestimmt somit den Zeitunterschied

$$\delta t_+ - \delta t_- = \frac{2\omega}{c^2}\Sigma r l \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (257\,\mathrm{d})$$

durch die Streifenverschiebung

$$\varDelta = \frac{2\omega}{\lambda c}\Sigma r l.$$

$\frac{1}{2}\Sigma r l$ ist die vom Strahlengang umschlungene Fläche F, somit können wir auch hier wie beim Versuch von Sagnac in § 16 c setzen:

$$\varDelta = \frac{4\omega F}{\lambda c}.$$

Die Formeln (257 c) und (257 d) bedeuten dasselbe, wenn man daran denkt, daß im einen Fall q, im anderen ωr die Geschwindigkeit des Körpers in der Strahlrichtung darstellt. Insofern ist der Harresssche Versuch ein Ersatz für den in Fig. 18 a geschilderten.

Wir haben hiermit die Erklärung aller in § 2 genannten Erfahrungstatsachen über die Elektrodynamik der bewegten Körper mit alleiniger Ausnahme der Dynamik des Elektrons gegeben. Das Fehlschlagen aller Versuche, auf der Erde einen Einfluß der Erdbewegung nachzuweisen, erklärt das Relativitätsprinzip an

sich. Zur Deutung der Aberration, des Dopplerschen Prinzips sowie der sonstigen Beobachtungen über den Einfluß der Bewegung der Körper gegeneinander wurden außer jenem Prinzip keine anderen Tatsachen oder Hypothesen herangezogen, als die in der Maxwellschen Elektrodynamik des Vakuums und der ruhenden Körper enthaltenen. Alles weitere ergab sich als notwendige, eindeutige Folge. Unter Vorbehalt einer Prüfung der Dynamik des Elektrons können wir also behaupten: Die Erfahrungen auf elektromagnetischem Gebiete bestätigen das Relativitätsprinzip in allen seinen Folgerungen.

§ 24. Energie und ponderomotorische Kraft.

a) Die Unzulänglichkeit der Maxwellschen Theorie. Einige Überlegung erfordert die Ableitung der ponderomotorischen Kraft für die Minkowskische Elektrodynamik, denn der Ansatz (IX) und (X) der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper kann schon aus dem Grunde nicht für unbedingt richtig angesehen werden, weil nach ihm auch Punkte des leeren Raumes Kräfte erfahren können. An dieser Stelle müssen wir also die Maxwellsche Theorie zunächst ergänzen, doch so, daß ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung dabei nicht aufgehoben wird. Nun haben wir schon im § 15 (S. 117, Anm.) gesehen, daß die Kraft auf das Vakuum dann auftritt, wenn man die elektromagnetische Bewegungsgröße nicht berücksichtigt. Es kann daher kein Zweifel sein, daß man den Ansatz (IX) nach (161 a) zu

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} - \frac{\partial \mathfrak{g}_e}{\partial t}$$

zu erweitern hat. Vorläufig kennen wir die Größe der Impulsdichte $\mathfrak{g}$ freilich nur für den leeren Raum; nach (160) ist sie dort gleich $1/c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$.

b) Die Transformation beliebiger ponderomotorischer Kräfte. Nun konnten wir die Kraftdichte $\mathfrak{F}$ nach (143), (144) und (145) unter Hinzufügung ihrer Leistung (mit dem Faktor i/c) als zeitartiger Komponente zu der Viererkraft F ergänzen, welche sich wegen ihrer Vektoreigenschaft auf den Tensor T vermöge der Beziehung (XVI)

$$F = -\Delta iv\, T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XVI)}$$

zurückführen ließ. Es müssen sich aber alle ponderomotorischen Kräfte, gleichgültig welchen Ursprungs, der Lorentz-Transformation gegenüber gleich verhalten. Denn ist in einem berechtigten Systeme ein Körper unter dem Einfluß verschiedenartiger Kräfte im dynamischen und thermischen Gleichgewichte, sodaß sich sein Zustand im Laufe der Zeit nicht ändert, so bedeutet dies, daß die Resultante aus diesen Kräften sowie ihre Leistungen in Summa verschwinden. Der Tatbestand der Unveränderlichkeit des Zustandes kann aber nicht dadurch aufgehoben werden, daß wir der Betrachtung ein anderes Bezugssystem zugrunde legen. Auch in diesem müssen sich die Kräfte und ihre Leistungen gegeneinander aufheben. Dies können sie aber nur dann in beiden Systemen tun, wenn sie sich alle gleich transformieren, d. h. wenn sich jede Art von Kräften mit der entsprechenden Leistung zu einem Vierervektor zusammenfassen und damit nach (XVI) auf einen Welttensor zurückführen läßt.

c) Die Bedeutung der Komponenten des Welttensors T. Nun muß Gleichung (XVI), angewandt auf die zeitartige Komponente:

$$\frac{c}{i} F_l = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{i} T_{lx}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{i} T_{ly}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c}{i} T_{lz}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(-T_{ll}\right)$$

den Energiesatz enthalten, da links die Leistung (A) der Kraft pro Volumeinheit steht. Setzen wir nämlich:

$$-icT_{lx} = \mathfrak{S}_x \text{ usw.}, \quad -T_{ll} = W \quad . \; . \; . \quad (258)$$

wie in (151), so lautet diese Beziehung:

$$A + div\,\mathfrak{S} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (259)$$

durch Integration über einen abgeschlossenen Bereich geht sie nach dem Gaußschen Satz ($\varkappa$) über in

$$\int A dS + \frac{d}{dt}\int W dS = \int \mathfrak{S}_n d\sigma.$$

Es ist aber nach dem Energieprinzip das Kennzeichen der Begriffe Energiedichte und Energieströmung, daß sie zur Leistung $\int A dS$ in dem Zusammenhange stehen, wie hier die Größen W und $\mathfrak{S}$. Wir werden daher den Skalar W als Energiedichte, den Vektor $\mathfrak{S}$ als Energiestrom betrachten.

Angewandt auf die raumartigen Komponenten ergibt (XVI):

$$F_x = \mathfrak{F}_x = -\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{ic} T_{xl}\right),$$

und wenn wir

$$T_{xx} = \boldsymbol{p}_{xx}, \quad T_{xy} = \boldsymbol{p}_{xy} \text{ usw.} \quad -\frac{i}{c} T_{xl} = \mathfrak{g}_x \text{ usw.} \quad . \quad . \quad (260)$$

setzen:

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (261)$$

oder nach derselben Integration wie oben gemäß ξ:

$$\int \mathfrak{F} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{g} dS = \int \mathfrak{p}_n d\sigma.$$

Wir wollen nun, wie schon in § 15 erwähnt, außer dem Energieprinzip auch den Impulssatz als ein empirisch wohlbegründetes Axiom in die Relativitätstheorie übernehmen. $dt \int \mathfrak{F} dS = \mathfrak{K} dt$ ist nach ihm der mechanische Impulszuwachs, welchen die betrachtete Kraft den Körpern im Integrationsgebiete in der Zeit dt verleiht. Soll also die letzte Gleichung für alle nur denkbaren körperlichen Systeme und Vorgänge gelten, so müssen wir $dt \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{g} dS$ als den nichtmechanischen Impulszuwachs und das Oberflächenintegral $dt \int \mathfrak{p}_n d\sigma$ als den von außen einströmenden Impuls, d. h. $\boldsymbol{p}$ als einen räumlichen Spannungstensor deuten — genau so wie in § 15. — Wir vermeiden hier das Wort „Kraft" für $\int \mathfrak{p}_n d\sigma$, weil es nicht mehr zuträfe, wenn die Grenzfläche bewegte Körper schneidet. Wir verweisen in dieser Hinsicht auf § 28. Manche Autoren vermeiden deshalb auch den Ausdruck „Spannung" für den Tensor $\boldsymbol{p}$ und nennen ihn die Impulsströmung, im Gegensatz zu den „relativen" Spannungen $\boldsymbol{t}$, von denen in § 28 die Rede sein wird. Doch gehören die Maxwellschen Spannungen zu der ersteren Art.

Freilich sind diese Bestimmungen nicht eindeutig. Man kann als Energiedichte W vermehrt um einen zeitlich unveränderlichen Skalar, als Impulsdichte $\mathfrak{g}$ vermehrt um einen solchen Vektor, als Energieströmung die Summe aus $\mathfrak{S}$ und einem divergenzfreien Vektor und als Spannungstensor die Summe aus $\boldsymbol{p}$ und einem divergenzfreien Tensor ansehen, ohne daß sich etwas an den Gleichungen (259) und (261) ändert. Eine weitergehende Un-

bestimmtheit, daß sich z. B. für W zwei wesentlich verschiedene Zustandsfunktionen angeben ließen, die der obigen Energiegleichung genügen, widerspräche dem Energieprinzip, welches wesentlich darauf beruht, daß die Energie nur bis auf eine additive Konstante unbestimmt bleibt, und Entsprechendes gilt für den Impuls. Wenn wir aber darüber hinaus von den angegebenen möglichen Zusätzen absehen, so ist das zweifellos eine neue Hypothese, welche zurzeit noch nicht einmal empirisch völlig zu rechtfertigen ist, sondern sich zunächst nur durch die außerordentliche Vereinfachung empfiehlt, welche sie in die Theorie, besonders auch in die Mechanik hineinbringt. Sie gestattet, wie der Vergleich von (258), (260) und der Beziehung $T_{jk} = T_{kj}$ unmittelbar zeigt, vor allem die bisher völlig unzusammenhängenden Begriffe des Impulses und der Energieströmung in die universelle Beziehung

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \text{(XXV)}$$

zu setzen [Planck[1])], welche wir als den Satz von der Trägheit der Energie bezeichnen*). Wir werden diese Hypothese in der vorliegenden Schrift dauernd beibehalten.

Außer dem nichtmechanischen Impuls gibt es dann, wie wir schon in § 15 an dem Beispiele des elektromagnetischen Impulses sahen, einen gleichartigen Drehimpuls, welcher sich nach der Formel (162)

$$\mathfrak{L} = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}] dS$$

berechnet. Die dortigen Betrachtungen können unverändert übernommen werden, sofern die im Integrationsgebiet liegenden Körper nicht über dessen Grenze hinausragen; anderenfalls treten Betrachtungen wie in § 28b in Kraft. Wie die Summe aus allen Impulsarten, so ist auch die aller Drehimpulse zeitlich unveränderlich.

d) Anwendung auf die Elektrodynamik. Wenden wir dies Ergebnis auf die Elektrodynamik, und zwar im System K^0 an, so finden wir nach (XXV), da der Energiestrom nach (19) $\mathfrak{S}^0 = c[\mathfrak{E}^0\mathfrak{H}^0]$ ist, als die Dichte des elektromagnetischen Impulses den Vektor

$$\mathfrak{g}_e^0 = \frac{1}{c}[\mathfrak{E}^0\mathfrak{H}^0]. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (262)$$

*) Näheres vgl. § 26.

Wir bleiben in Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn wir für den Spannungstensor $\boldsymbol{p}^0$ den Maxwellschen Ansatz (IX) unverändert übernehmen und nach (261)

$$\mathfrak{F}^0 = -\operatorname{div} \boldsymbol{p}^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}^0 \mathfrak{H}^0] \quad . \; . \; . \; . \quad (263)$$

setzen. Denn die Zusatzkraft $-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}^0\mathfrak{H}^0]$ entzieht sich durch ihre Kleinheit stets der Beobachtung*). Auch enthält in diesem Falle die Fortlassung eines zeitlich unveränderlichen Summanden bei der Impulsdichte keine neue Hypothese. Denn ein solches Glied bliebe auch dann bestehen, wenn das elektromagnetische Feld verschwindet; es entbehrte in diesem Falle aber offenbar jeder Berechtigung.

Damit ist die oben geforderte Ergänzung der Maxwellschen Theorie durchgeführt. Der elektrodynamische Welttensor T ist durch die Angabe von W^0 (Formel VIII), $\boldsymbol{p}^0$ (IX) und $\mathfrak{g}^0$ bzw. $\mathfrak{S}^0$ (262) eindeutig bestimmt. Will man die Energie oder Impulsdichte für ein anderes System K berechnen, in welchem sich der Körper bewegt, so hat man den Tensor T so auf die Weltvektoren $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{V}$ und Y zurückzuführen, daß seine Komponenten in K^0 diese Werte annehmen, und dann seine Komponenten in K zu berechnen. Abraham, Grammel und Kafka[2]) finden dabei:

$$\mathfrak{S} = c^2 \mathfrak{g}_e = c\left\{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}\frac{(\mathfrak{q}, [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - [\mathfrak{D}\mathfrak{B}])}{c^2 - q^2}\right\},$$

$$W = \tfrac{1}{2}\Big((\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\Big) + \frac{c}{c^2 - q^2}\Big(\mathfrak{q}, [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]\Big).$$

e) Die Joulesche Wärme. Trotz der unter b) auseinandergesetzten Gemeinsamkeit des Verhaltens der Viererkraft F

---

*) Berechnet man den Maxwellschen Wert der Kraftdichte aus (IX) und (X), so findet man dabei einen Summanden

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t^0}\Big(\varepsilon\mu[\mathfrak{E}^0\mathfrak{H}^0]\Big),$$

welcher stets unterhalb der Grenze der Meßmöglichkeit liegt (vgl. z. B. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld; Leipzig 1900, S. 553). Unser Zusatz macht daraus

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t^0}\Big((\varepsilon\mu - 1)[\mathfrak{E}^0\mathfrak{H}^0]\Big),$$

was von derselben Größenordnung ist.

in den beiden Gebieten der Elektrodynamik besteht doch ein gewisser, auf der atomistischen Struktur der Materie beruhender Unterschied hinsichtlich der Bedeutung ihrer zeitartigen Komponente. In § 15 war F senkrecht auf der Weltlinie des Elektrons. Hier aber haben die Weltlinien der Leitungselektronen im allgemeinen andere Richtungen als die Weltlinie der materiellen Punkte des Körpers (vgl. Fig. 18). So können wir es verstehen, daß hier die Viererkraft auf dem letzteren nicht senkrecht steht. In der Tat ist die zur Weltlinie parallele Komponente von F, d. h. ihre zeitartige Komponente bezogen auf das System K^0, nach Gleichung (259), (18) und (19):

$$F_{l0} = -\Delta i v_{l0} T$$
$$= -\frac{i}{c}\left(div\,\mathfrak{S}^0 + \frac{\partial W^0}{\partial t}\right) = \frac{i}{c}(\mathfrak{J}^0\mathfrak{E}^0) = \frac{i}{c}Q^0,$$

also im allgemeinen von Null verschieden. Auch wenn der Körper ruht, leistet die elektrodynamische Kraft an den sich in ihm bewegenden Leitungselektronen eine Arbeit, welche sich als Joulesche Wärme Q^0 äußert*). Infolgedessen ist auch das skalare Produkt (YF) nicht wie in (146) Null; berechnet man es aus den Komponenten beider Vektoren nach den Achsen des Systems K^0, so findet man vielmehr, da nach (83) $Y_{x0} = 0$ usw., $Y_{l0} = i$ ist,

$$(YF) = Y_{l0}F_{l0} = -\frac{1}{c}Q^0.$$

Benutzt man aber die Komponenten nach einem anderen System K dazu, so folgt nach (83):

$$(YF) = Y_xF_x + Y_yF_y + Y_zF_z + Y_lF_l = \frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{F}) + icF_l}{\sqrt{c^2 - q^2}} = -\frac{1}{c}Q^0.$$

Diese Gleichung zwingt zu der Deutung, daß

$$F_l = \frac{i}{c}\{(\mathfrak{q}\mathfrak{F}) + Q\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (264)$$

die Verallgemeinerung der obigen Gleichung für F_{l0}, und daß

$$Q = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}Q^0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (265)$$

*) Genau genommen, ist unter Q^0 alle die Energie (pro Zeit- und Volumeinheit) gemeint, welche das elektromagnetische Feld als Arbeit in den Atomen leistet, also außer der Jouleschen auch die Peltier- und Thomsonwärme, die Energievermehrung durch chemische Zersetzungen oder Konzentrationsänderungen. Nur weil diese alle auf Inhomogenitäten der Körper beruhen, müssen wir sie im Text ausschließen (vgl. S. 35, Anm.).

die Joulesche Wärme, bezogen auf K, ist. Die mechanische Arbeit $(\mathfrak{q}\mathfrak{F})$ und die Joulesche Wärme Q treten hier additiv zur Gesamtleistung zusammen.

Um Q für ein beliebiges System durch die Feldvektoren auszudrücken, beachten wir, daß nach (243) und (248) das skalare Produkt:

$$(\Lambda[Y\mathfrak{M}]) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left\{ (\mathfrak{J} + \lambda\mathfrak{q}, \mathfrak{E}^*) - \lambda(\mathfrak{q}\mathfrak{E}^*) \right\} = \frac{(\mathfrak{J}\mathfrak{E}^*)}{\sqrt{c^2 - q^2}},$$

also, für K^0 berechnet,

$$(\Lambda[Y\mathfrak{M}]) = \frac{(\mathfrak{J}^0\mathfrak{E}^0)}{c} = \frac{1}{c} Q^0$$

ist. Aus den drei letzten Gleichungen und (246) folgt:

$$Q = (\mathfrak{J}\mathfrak{E}^*) = \left(\mathfrak{J}, \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{B}]\right) \quad . \; . \; . \quad (266)$$

Für die Umrechnung der elektrodynamischen Kraftdichte $\mathfrak{F}$ bei der speziellen Lorentz-Transformation (XI) gelten ähnliche Formeln wie in der Elektronentheorie; man erhält sie unmittelbar aus (147), indem man entsprechend (264) dort $(\mathfrak{q}\mathfrak{F})$ durch $(\mathfrak{q}\mathfrak{F}) + Q$ ersetzt*):

$$\mathfrak{F}_x = \frac{\mathfrak{F}'_x + v/c^2\left((\mathfrak{q}'\mathfrak{F}') + Q'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}'_y, \quad \mathfrak{F}_z = \mathfrak{F}'_z \,. \quad (267)$$

Für die Gesamtkraft $\mathfrak{K} = \int \mathfrak{F}\,\delta V$ folgt daraus wie in § 15 [vgl. (149)] und unter denselben Beschränkungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_x &= \frac{\mathfrak{K}'_x + v/c^2\left((\mathfrak{q}'\mathfrak{K}') + R'\right)}{1 + \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{q}')}{c^2}} \\ \mathfrak{K}_y &= \mathfrak{K}'_y \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{q}')}{c^2}}, \quad \mathfrak{K}_z = \mathfrak{K}'_z \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{q}')}{c^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (268)$$

(Planck[3])**). Dabei ist $R = \int Q\,\delta V$ die gesamte im Integra-

*) Bei Berücksichtigung der Elektrostriktion kommt noch ein weiteres Glied hinzu, welches mit der zeitlichen Veränderung des Spannungszustandes proportional ist.

**) Der Unterschied zwischen Gleichung (268) und Plancks entsprechender Formel (32) erklärt sich daraus, daß Planck neben der Kraft $\mathfrak{K}$ noch einen äußeren Druck berücksichtigt, der im Sinne des obigen Textes mit in der Kraft $\mathfrak{K}$ enthalten ist[4]).

tionsbereich pro Zeiteinheit entwickelte Wärme. Für sie gilt nach (265) und (31) die Transformationsformel:

$$\frac{R}{c^2 - q^2} = \frac{R'}{c^2 - q'^2} = \frac{R^0}{c^2} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (269)$$

Wir ziehen aus diesen Gleichungen die ebenso wichtige wie merkwürdige Folgerung, daß im ungestrichenen System eine Kraft auch dann auftreten kann, wenn im gestrichenen System keine vorhanden ist; dann nämlich, wenn Joulesche Wärme entwickelt wird. Erleidet nun irgend ein vom Strom durchflossener Leiter bei Ruhe keine Gesamtkraft, wie z. B. ein unendlich langer Draht von kreisförmigem Querschnitt von seinem eigenen Felde, so behält er seinen Ruhezustand bei. Beziehen wir denselben Vorgang auf ein berechtigtes System, in welchem er sich bewegt, so heißt dies, er ändert seine Bewegung nicht. Dennoch erfährt er in diesem System eine Kraft. Es gibt also Fälle, in welchen eine Kraft die Geschwindigkeit unbeeinflußt läßt. Dies auffallende Ergebnis wird sich in dem siebenten Teile dieses Buches, welcher der Mechanik der Relativitätstheorie gewidmet ist, aus der Trägheit der Energie (XXV) erklären lassen.

Selbstverständlich gelten die Transformationsformeln (265), (267), (268) und (269) auch dann, wenn die Wärmemengen und Kräfte nicht elektrodynamischen, sondern irgend eines anderen Ursprunges sind.

§ 25. Der Strahlungsdruck.

Eine wichtige, auch der experimentellen Prüfung zugängliche Folgerung des Satzes (XXV) $\mathfrak{g} = \mathfrak{S}/c^2$ ist die, daß jeder von elektromagnetischer Strahlung getroffene Körper eine ponderomotorische Wirkung erleidet. Trotzdem die Deutung der einschlägigen Experimente keineswegs der Relativitätstheorie vorbehalten blieb, sondern die Existenz und der Wert dieses Druckes schon von Maxwell (1881) und Boltzmann (1884) vorausgesagt wurden, mag hier kurz darauf eingegangen werden.

Zu diesem Zweck wollen wir für den schon in § 16, b) untersuchten Fall der Spiegelung einer ebenen Welle an einem unbegrenzten ebenen Spiegel die ponderomotorischen Kräfte ableiten. Den Spiegel setzen wir als undurchsichtig voraus. Die Bezeichnungen wählen wir wie dort und legen zunächst das mit dem

Spiegel bewegte System K^0 der Betrachtung zugrunde, wollen aber vorläufig die Indices 0 beim Strahlungsvektor $\mathfrak{S}$ und den Winkeln ψ_1 und ψ_2 fortlassen.

Die einfallende Welle läßt auf ein Flächenstück $d\sigma$ des Spiegels in der Zeit dt nach der Definition des Pointingschen Vektors $\mathfrak{S}$ die Energie

$$|\mathfrak{S}_1|\, d\sigma \cos\psi_1\, dt$$

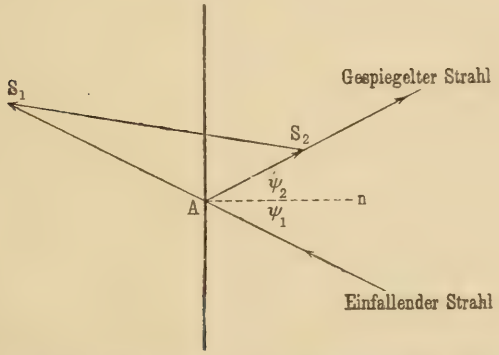
fallen. Die reflektierte Welle schafft in derselben Zeit von dort die Energie

$$|\mathfrak{S}_2|\, d\sigma \cos\psi_2\, dt$$

fort. Die Differenz gibt daher die durch Absorption von Strahlung entwickelte Wärme an; ihr Betrag ist pro Zeit- und Flächeneinheit [nach (178)] und wegen $\psi_1 = \psi_2$:

$$r = \big(|\mathfrak{S}_1| - |\mathfrak{S}_2|\big) \cos\psi_1 = |\mathfrak{S}_1|\, |1 - U| \cos\psi_1 \quad . \; . \; (270)$$

Fig. 19.



Von der einfallenden Welle verschwindet an $d\sigma$ in der genannten Zeit ein schiefer Zylinder, der diese Fläche als Basis und in der Strahlrichtung die Länge $c\,dt$, daher den Inhalt $c \cos\psi_1\, d\sigma\, dt$ hat. Er enthält nach (XXV) die Bewegungsgröße:

$$\mathfrak{g}_e\, c \cos\psi_1\, d\sigma\, dt = \frac{\mathfrak{S}_1}{c} \cos\psi_1\, d\sigma\, dt,$$

welche in Fig. 19 durch die Strecke $\overrightarrow{AS_1}$ dargestellt wird. Während dieser Impuls verschwindet, entsteht an $d\sigma$ neu derjenige Impuls, welcher in einem zylindrischen Stück der reflektierten Welle ent-

halten ist, dessen Grundfläche wiederum $d\sigma$ und dessen Länge in der Strahlrichtung ebenfalls cdt ist. Sein Impuls ist demnach:

$$\frac{\mathfrak{S}_2}{c} \cos \psi_2 d\sigma dt = \frac{\mathfrak{S}_2}{c} \cos \psi_1 d\sigma dt,$$

er wird in Fig. 19 durch die Strecke $\overrightarrow{AS_2}$ dargestellt. Nach dem Gesetz von der Erhaltung des Impulses muß daher der Spiegel einen mechanischen Impuls gewinnen, welcher, zu dem letzteren Vektor addiert, den ersteren ergibt, also durch die Strecke $\overrightarrow{S_2 S_1}$ repräsentiert wird. Seine Komponenten sind: normal zum Spiegel

$$-\frac{1}{c}\left(|\mathfrak{S}_1| + |\mathfrak{S}_2|\right) \cos^2 \psi_1 d\sigma dt,$$

tangential dazu

$$\frac{1}{c}\left(|\mathfrak{S}_1| - |\mathfrak{S}_2|\right) \cos \psi_1 \sin \psi_1 d\sigma dt.$$

Da diese Impulszunahme in der Zeit dt vor sich geht, so erfährt er nach der Gleichung $\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ eine Kraft, welche, auf die Flächeneinheit bezogen, in ihrer normalen und ihrer tangentiellen Komponente wegen (178) die Werte

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_n &= -\frac{1}{c}|\mathfrak{S}_1|(1 + U) \cos^2 \psi_1 \\ \mathfrak{P}_t &= \frac{1}{c}|\mathfrak{S}_1|(1 - U) \cos \psi_1 \sin \psi_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (271)$$

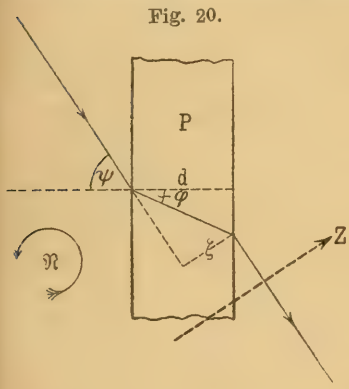
hat. Nach § 16, b) gelten diese Betrachtungen unverändert, wenn der Spiegel sich tangential bewegt.

Wie der Strahlvektor $\mathfrak{S}_1$ ist natürlich auch diese Kraft zeitlich schnell veränderlich; bei spektral homogener Strahlung ist z. B. jener eine periodische Funktion der Zeit und die Periode halb so lang wie die einer Schwingung, also bei allen Schwingungen aus dem Spektralbereich der Wärmestrahlung außerordentlich kurz. Zur Messung gelangt daher stets nur der Mittelwert von $\mathfrak{P}$, gebildet über ein gegen die Lichtperiode sehr langes Zeitintervall. Doch gelten die abgeleiteten Formeln auch für diesen, wenn man unter $|\mathfrak{S}_1|$ den entsprechenden Mittelwert für die Energiestrahlung versteht. Dies ist der von Lebedew, sowie Nichols und Hull experimentell nachgewiesene Strahlungsdruck. Er wird natürlich nicht nur auf undurchsichtige Spiegel ausgeübt, sondern ganz allgemein auf alle Körper, welche Licht trifft; sein

Betrag ist nach den soeben auseinandergesetzten Prinzipien stets einfach zu berechnen.

Schwieriger kann diese Aufgabe nur dann werden, wenn die Flächen nicht glatt, oder die Dimensionen der Körper so klein werden, daß die Wellenlänge des Lichtes neben ihnen nicht mehr zu vernachlässigen ist. In diesem Falle tritt Beugung der Strahlung ein, und es ist der mathematischen Schwierigkeiten wegen zurzeit nur für kugelförmige Teilchen gelungen, den Strahlungsdruck ohne jede Einschränkung zu berechnen (Debye). Doch kann man von diesem Spezialfall auch auf anders geformte kleine Teilchen und einzelne Moleküle den wichtigen Schluß übertragen, daß bei einer bestimmten Größenordnung ihrer Abmessungen die Abstoßung der Sonnenstrahlung die Gravitationsanziehung der Sonne um ein Vielfaches übertreffen kann. Daher spielt der Strahlungsdruck neuerdings eine wichtige Rolle, in der kosmischen Physik z. B. wird er zur Erklärung des merkwürdigen Phänomens der Kometenschweife herangezogen (Arrhenius).

Fig. 20.



Natürlich übt die Strahlung auch im Inneren eines absorbierenden oder zerstreuenden Körpers Druckkräfte aus; denn auch hier muß der Abnahme des elektromagnetischen Impulses eine Zunahme des mechanischen entsprechen. Z. B. wächst in einem durchstrahlten Gase der hydrodynamische Druck in der Strahlrichtung, da sein Gefälle dem Strahlungsdruck das Gleichgewicht halten muß. So klein die dabei auftretenden Druckdifferenzen auch sind, so konnte sie doch Lebedew 1909 nachweisen.

Außer dem Druck üben die elektromagnetischen Wellen im allgemeinen auch ein Drehmoment auf die Körper aus. Ein besonders einfaches Beispiel bietet der Fall, daß auf eine planparallele durchsichtige Platte P eine senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Welle unter dem Polarisationswinkel einfällt. Die Welle passiert dann beide Grenzflächen ohne Spiegelung; ihr Impuls bleibt nach Größe und Richtung erhalten, so daß sie im Mittel

keine Kraft auf die Platte ausübt. Wohl aber wird sie, wie der Strahlengang in Fig. 20 zeigt, seitwärts um die Strecke

$$\zeta = \frac{d \sin(\psi - \varphi)}{\cos \varphi}$$

verschoben, wenn d die Dicke der Platte, ψ der Einfallswinkel und φ der Winkel ist, den der Strahl in der Platte mit ihrer Normalen bildet. Betrachten wir etwa den Teil der Welle, welcher in dem schon oben besprochenen Zylinder von der Grundfläche $d\sigma$ und der Länge $c\,dt$ liegt, legen wir ferner die Z-Achse senkrecht zur Strahlrichtung in die Einfallsebene, und nennen wir z den Wert dieser Koordinate für einen Punkt des Zylinders, so ist nach (168) und (XXV) dessen Beitrag zum elektromagnetischen Drehimpuls senkrecht zur Einfallsebene

$$z\,|\mathfrak{g}_e|\,c\,d\sigma\,dt \cos\psi = \frac{|\mathfrak{S}|}{c}\, z \cos\psi\, d\sigma\, dt.$$

Dieser Betrag verschwindet an der Vorderfläche der Platte in der Zeit dt; neu entsteht dafür an der Rückfläche ein ihm gleiches zylindrisches Stück der austretenden Welle, in welchem die z-Koordinate aber den größeren Wert $z + \zeta$ hat, und das daher den Beitrag

$$\frac{|\mathfrak{S}|}{c}(z + \zeta) \cos\psi\, d\sigma\, dt$$

liefert. Der elektromagnetische Drehimpuls wächst also pro Zeiteinheit um

$$\frac{d\,|\mathfrak{L}_e|}{dt} = \frac{|\mathfrak{S}|}{c}\, \zeta \cos\psi\, d\sigma.$$

Im gleichen Maße, aber im entgegengesetzten Sinne muß sich nach dem Satze von der Erhaltung des Drehimpulses der mechanische Drehimpuls verändern. Das auf die Platte pro Flächeneinheit ausgeübte Drehmoment ist demnach $= \frac{1}{c}\,|\mathfrak{S}|\,\zeta \cos\psi$; es sucht sie um eine zur Einfallsebene senkrechte Achse in dem in der Figur angegebenen Sinne zu drehen. Soll diese Drehung verhindert werden, so muß dazu ein entgegengesetzt gleiches Drehmoment anderweitig auf die Platte ausgeübt werden.

Zum Schluß wollen wir den zuerst betrachteten Spiegelungsvorgang auf das auch schon in § 16, b) eingeführte System K beziehen, in welchem der Spiegel die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ in Richtung seiner Normalen hat. Da Flächenstücke, welche zur Relativ-

geschwindigkeit zweier berechtigten Systeme senkrecht sind, beim Übergang von einem zum anderen nicht verändert werden, so können wir die auf die Flächeneinheit bezügliche Kraft $\mathfrak{P}_n$ und Wärmemenge r wie $\mathfrak{K}$ und R nach den Formeln (268) und (269) transformieren. Die Bedingung des stationären Zustandes, an welche diese Gleichungen ebenso wie (149) gebunden sind, werden hier zwar nicht von den Momentanwerten des Strahlungsdruckes und der Wärme r erfüllt, wohl aber von den zeitlichen Mittelwerten, von denen im folgenden allein die Rede sein soll. Dagegen dürfen wir nicht, wie oben, eine tangentielle Geschwindigkeit zulassen; wäre nämlich eine solche vorhanden, so leistete schon in dem oben angewandten Bezugssystem der Strahlungsdruck eine Arbeit, welche nach (268) in die Transformationsformel für die Kraft einginge. Nur für einen vollkommenen Spiegel ($U = 1$), für welchen nach (271) $\mathfrak{P}_t$ verschwindet, gelten die folgenden Formeln ohne diese Einschränkung. Wir finden auf die angegebene Art, wenn wir in (270) und (271) die Größen r, $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{P}_t$ sowie $|\mathfrak{S}_1|$ und ψ_1 zum Hinweis auf das System K^0 mit dem Index 0 versehen, die x-Richtung senkrecht zum Spiegel, und zwar vom Spiegel in den leeren Raum hineinweisend wählen und dann nach (179) statt $|\mathfrak{S}_1^0|$ und ψ_1^0 die auf das System K bezogene Intensität $|\mathfrak{S}_1|$ und den Einfallswinkel ψ_1 einführen, nach leichten Umrechnungen, bei denen $\beta = \frac{\mathfrak{q}_x}{c}$ gesetzt wird:

$$r = r^0 \frac{c^2 - q^2}{c^2} = |\mathfrak{S}_1| (1 - U) \frac{(c + \mathfrak{q}_x \cos\psi_1)(c \cos\psi_1 + \mathfrak{q}_x)}{c^2},$$

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_n^0 + \frac{\mathfrak{q}_x}{c^2} r^0$$

$$= -\frac{|\mathfrak{S}_1|}{c} (c \cos\psi_1 + \mathfrak{q}_x) \left\{ \frac{\cos\psi_1}{c} + U \frac{2\,\mathfrak{q}_x + c \cos\psi_1 (1 + q^2/c^2)}{c^2 - q^2} \right\},$$

$$\mathfrak{P}_t = \mathfrak{P}_t^0 \sqrt{1 - q^2/c^2} = \frac{|\mathfrak{S}_1|}{c^2} (1 - U)(c \cos\psi_1 + \mathfrak{q}_x) \sin\psi_1.$$

Sowohl die absorbierte Wärme als der Druck wachsen also bei einer Bewegung des Spiegels dem einfallenden Strahl entgegen; sie nehmen im entgegengesetzten Fall ab.

VII. Dynamik.

§ 26. Allgemeines.

a) Zweck und Ausgangspunkt der Betrachtungen. Zur Vervollständigung unserer Betrachtungen müssen wir im letzten Abschnitt dieses Buches auf die Mechanik und Thermodynamik eingehen. Einmal nämlich sahen wir, daß die Mechanik der bewegten Körper zur Erklärung des Trouton-Nobleschen Versuches herangezogen werden muß, wenn man dessen Theorie nicht auf das mitbewegte System, sondern auf ein anderes beziehen will; sodann fehlt uns noch die Theorie zu den in § 2 besprochenen Versuchen über die Dynamik des Elektrons. Endlich aber — und das ist vielleicht das Wichtigste — müssen wir noch zeigen, daß die klassische Mechanik und Thermodynamik als eine für die Diskussion aller einschlägigen Erfahrungen ausreichende Annäherung in der Dynamik der Relativitätstheorie enthalten sind, daß mithin keine dieser Beobachtungen mit dem Relativitätsprinzip der Lorentz-Transformation im Widerspruch steht. Die beiden genannten Gebiete, welche bisher gänzlich getrennt behandelt werden konnten, müssen hierbei vereinigt werden, weil hier ähnliche Verhältnisse vorliegen wie in § 24, wo die Joulesche Wärme in die elektrodynamische Viererkraft einging.

Damit kommen wir nun an das Gebiet, in welchem sich erst die volle Tragweite des Relativitätsprinzips zeigt. In der Elektrodynamik des leeren Raumes konnte zwar die vierdimensionale Vektorrechnung eine große formale Vereinfachung bringen, doch vermochte sie nichts physikalisch Neues hinzuzutun. Und wenn in der Minkowskischen Elektrodynamik der Körper neue Ergebnisse auftraten, so hatte dies seinen Grund zum Teil darin, daß hier der Anschluß an die Elektrodynamik des Vakuums noch nicht ganz erreicht ist; bei einem späteren Stand der Wissenschaft würde man wohl manche dieser Ergebnisse ohne explizite Benutzung des Relativitätsprinzips erhalten können. Im vollen Gegensatz dazu schafft die Relativitätstheorie in der Dynamik etwas wesentlich physikalisch Neues, was vorher in keiner anderen Theorie auch nur angelegt war. Denn daß die klassische Mechanik statt zur Lorentz-Transformation zur Galilei-Transformation

führt, haben wir schon in § 1 gesehen. An ihre Stelle muß hier etwas wesentlich anderes treten.

Die Dynamik des Massenpunktes hat zuerst A. Einstein in seiner grundlegenden Arbeit vom Jahre 1905, sodann Planck (1906) behandelt. Beide suchen noch einen gewissen Anschluß an die klassische Mechanik aufrecht zu erhalten; denn da diese nicht streng gültig sein kann, aber doch für die der Beobachtung zugänglichen, gegen die Lichtgeschwindigkeit c kleinen Geschwindigkeiten empirisch richtig ist, so wird sie hier als Näherung, als Grenzfall für $q = 0$ beibehalten. Für uns freilich hat dies Vorgehen seine Nachteile. Einmal nämlich widerspricht es dem Prinzip, die Zahl der Hypothesen auf ein Minimum einzuschränken, wenn wir hier die klassische Mechanik als Näherung annehmen. Denn sie enthält nichts als den Impulssatz $\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ und die Annahme $\mathfrak{G} = m\mathfrak{q}$. Den ersteren haben wir schon eingeführt und in der Gleichung (XVI) $F = -\Delta i v T$ vierdimensional formuliert, der Impuls aber läßt sich nach dem Satz von der Trägheit der Energie auf andere Größen zurückführen. Es muß also möglich sein, allein auf Gleichung (XVI) die Dynamik zu begründen. Sodann aber ist das übliche anschauliche Verfahren, die Dynamik der Kontinua auf die des Massenpunktes zurückzuführen, schon in der Newtonschen Mechanik schweren axiomatischen Bedenken ausgesetzt, während umgekehrt der Grenzübergang vom Kontinuum zum Massenpunkt durchaus einwandfrei ist. Alle diese Bedenken übertragen sich auf die Relativitätstheorie, ja sie verstärken sich hier noch erheblich; es ist nämlich überhaupt unmöglich, jenes Verfahren einzuschlagen. Denn die Newtonsche Dynamik gilt wohl für den Massenpunkt im Grenzfall $\mathfrak{q} = 0$, für einen ausgedehnten Körper aber wäre diese Aussage im allgemeinen falsch (vgl. § 28c).

b) Die Unmöglichkeit des starren Körpers[1]). Von den kontinuierlich ausgedehnten Körpern spielt in der Newtonschen Dynamik der starre Körper eine besondere Rolle, weil er sich dynamisch in mancher Beziehung wie ein Massenpunkt verhält. Wir sahen schon in § 7, daß man in der Relativitätstheorie keinem Körper unveränderliche Form zuschreiben darf; doch wollen wir jenen an einem Beispiel geführten Beweis hier durch einen allgemeinen ergänzen.

Zunächst liegt auf der Hand, daß der starre Körper der Newtonschen Dynamik hier nicht in Frage kommt; er würde ja bei der Bewegung nicht die Lorentz-Kontraktion zeigen. Manche Autoren haben versucht, die kinematische Definition dieses Körpers, welche in der Forderung der unveränderlichen Form liegt, durch eine Abänderung dem Relativitätsprinzip anzupassen. Eine ganze Reihe solcher Vorschläge liegt vor, ohne daß einer davon zu allgemeiner Anerkennung gelangt wäre.

Und das hat seinen guten Grund. Ein deformierbarer Körper nämlich hat für die in ihm möglichen Bewegungszustände unendlich viele Freiheitsgrade. Seine Deformation ist nicht durch eine endliche Zahl von Parametern, sondern nur durch gewisse Funktionen zu beschreiben, welche die Verschiebungen seiner Punkte aus der Ruhelage angeben. Umgekehrt, hat der Körper unendlich viele Freiheitsgrade, so kann man eine endliche Zahl seiner Punkte beliebig gegeneinander verschieben, man wird ihn also als deformierbar bezeichnen müssen. Will man den starren Körper dagegen abgrenzen, so kann dies nur so geschehen, daß man die Zahl dieser Freiheitsgrade auf ein endliches Maß beschränkt. Wegen der Unmöglichkeit einer Überlichtgeschwindigkeit bei der Ausbreitung physikalischer Wirkungen gibt es aber keinen Körper mit einer endlichen Zahl von Freiheitsgraden.

Zum Beweise dieses Satzes denken wir uns einen beliebigen Körper zunächst in Ruhe. Sodann stören wir an N Punkten gleichzeitig diesen Zustand. Nach Ablauf einer Zeit t haben sich diese Störungen zwar von diesen Punkten aus ausgebreitet, doch liegt jede sicherlich innerhalb einer Kugel vom Radius ct um ihren Ausgangspunkt. Solange als t hinreichend klein ist, wird sich kein Paar dieser Kugeln überdecken. Dann aber haben wir in dem Körper N getrennte Bewegungszustände, jeden mit mindestens einem Freiheitsgrad; und die Zahl N läßt sich beliebig groß wählen.

Dem starren Körper entspricht in mancher Beziehung die unzusammendrückbare Flüssigkeit der alten Theorie; wir werden später zeigen, daß auch diese nicht existieren kann, weil sich in ihr Wellen mit Überlichtgeschwindigkeit fortpflanzen (§ 36 a).

Zur Begründung der allgemeinen Dynamik müssen wir bei dieser Sachlage sogleich an deformierbare Körper denken.

c) Zurückführung der Dynamik auf Gleichung (XVI). Wir knüpfen zur Begründung der Dynamik der Kontinua an die Überlegung des § 24 an, wo wir zeigten, daß sich die ponderomotorischen Kräfte, gleichgültig, welchen Ursprungs, alle der Lorentz-Transformation gegenüber gleich verhalten müssen, d. h. daß sich dem Beispiele der elektronentheoretischen Kraftdichte zufolge die Kraftdichte stets unter Hinzunahme der Leistung als zeitartiger Komponente zu einem Vierervektor, der Viererkraft, ergänzen läßt. Die letztere muß sich aus rein mathematischen Gründen gemäß der Gleichung:

$$F = -\Delta iv\, T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XVI)}$$

auf einen Welttensor T zurückführen lassen, und zwar muß diese Gleichung, angewandt auf die zeitliche Komponente, notwendigerweise als Ausdruck des Energieprinzips, angewandt auf die räumlichen Komponenten, als Formulierung des Impulssatzes gelten, wenn anders wir diese beiden Prinzipien überhaupt beibehalten. Das führt dazu, die Komponenten T_{xx}, T_{xy}, usw. als die Komponenten eines räumlichen Spannungstensors $\boldsymbol{p}$, $-T_{ll}$ als die Energiedichte, $-ic\,T_{lx}$ usw. als Komponenten der Energieströmung $\mathfrak{S}$ und $-\frac{i}{c}\,T_{xl}$ usw. als Komponenten der Impulsdichte $\mathfrak{g}$ aufzufassen, d. h. in schematischer Schreibweise:

$$T = \begin{matrix} \boldsymbol{p}_{xx} & \boldsymbol{p}_{xy} & \boldsymbol{p}_{xz} & ic\mathfrak{g}_x \\ \boldsymbol{p}_{yx} & \boldsymbol{p}_{yy} & \boldsymbol{p}_{yz} & ic\mathfrak{g}_y \\ \boldsymbol{p}_{zx} & \boldsymbol{p}_{zy} & \boldsymbol{p}_{zz} & ic\mathfrak{g}_z \\ \frac{i}{c}\mathfrak{S}_x & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_y & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_z & -W \end{matrix}$$

zu setzen. Aus der Symmetrie des Welttensors läßt sich dann der Satz von der Trägheit der Energie

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XXV)}$$

ableiten. Um nun zur Dynamik überzugehen, so müssen wir die obigen als Welttensorkomponenten definierten Größen als Dichte des mechanischen Impulses, als mechanische Spannungen usw. deuten, wobei gleich vorweggenommen werden mag, daß der Tensor $\boldsymbol{p}$, dessen Komponenten T_{xx} usw. sind, mit

dem Tensor, den man gewöhnlich als den elastischen Spannungstensor bezeichnet, zwar nahe zusammenhängt, aber nicht identisch ist.

Die wichtigste Frage ist dabei, welche Energiearten wir hier zur Dichte W zusammenfassen wollen. Die Antwort lautet: Alle diejenigen, welche im Ruhsystem K^0 keine Strömung zeigen*), daher auch keinen Impuls ergeben. Dazu gehören Wärme**), chemische, elastische Energie, innere Energie der Atome und vielleicht noch neue, unbekannte Energiearten. Elektromagnetische Energie ist im allgemeinen auszuschließen, weil sie auch im Ruhsystem K^0 strömen kann. Tut sie dies in einem besonderen Falle nicht, so kann sie durchaus in W mit einbezogen werden; der Tensor $\boldsymbol{p}$ umfaßt dann neben den mechanischen auch die Maxwellschen Spannungen, der Vektor $\mathfrak{g}$ neben dem mechanischen den elektromagnetischen Impuls.

Zwecks Deutung der Viererkraft F ist zu beachten, daß bei rein elektromagnetischen Vorgängen keine ponderomotorische Kraft $\mathfrak{F}$, deshalb auch keine mechanische Leistung $(\mathfrak{q}\mathfrak{F})$, aber auch keine anderweitige Energieabgabe, wie z. B. Wärme, auftritt, weil sonst notwendigerweise andersartige Vorgänge die Folge sein müßten. Es verschwinden also dann sämtliche Komponenten der elektromagnetischen Viererkraft; d. h.

$$F = -\Delta iv\, T = 0.$$

Die daraus folgende Impulsgleichung

$$\dot{\mathfrak{g}} + \mathfrak{div}\, \boldsymbol{p} = 0$$

sagt dann aus, daß sich die elektromagnetische Spannkraft $-\mathfrak{div}\,\boldsymbol{p}$ und die elektromagnetische Trägheitskraft $-\dot{\mathfrak{g}}$ im Gleichgewicht halten. Ebenso werden wir bei rein dynamischen Vorgängen die dynamische Viererkraft gleich Null zu setzen haben. Sagt doch auch die Newtonsche Dynamik — am deutlichsten vielleicht im

---

*) Es wird hier nur vorausgesetzt, daß die unmittelbarste Umgebung des betrachteten materiellen Punktes ruht; erst später bei der Integration über das Volumen muß der ganze Körper in K^0 ruhend angenommen werden.

**) Wir denken stets an gleichtemperierte oder für Wärme nichtleitende Körper, können daher von der Wärmeleitung absehen, welche als Energiestrom auch im Ruhsystem einen Impuls hervorrufen würde.

d'Alembertschen Prinzip — aus, daß die Trägheitskraft, die sich der Vergrößerung des mechanischen Impulses widersetzt, die von den elastischen Spannungen ausgeübte Kraft — andere Kräfte gibt es in der reinen Dynamik überhaupt nicht — gerade kompensiert. Man hat so als die den Energie- und Impulssatz umfassende, gegen die Lorentz-Transformation invariante Grundgleichung der Dynamik die Beziehung

$$\Delta iv\, T = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XXVI)}$$

wo die Komponenten von T die angegebene physikalische Bedeutung haben.

Treten dynamische, elektromagnetische und sonstige Vorgänge in Wechselwirkung, so tritt zwar eine dynamische, elektromagnetische oder auch sonstige Viererkraft auf; die letzte Gleichung ist aber dann einfach zu ersetzen durch

$$\Sigma F = -\Delta iv(\Sigma T) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(XXVI a)}$$

§ 27. Die Dynamik des Massenpunktes.

a) Die Ableitung der Bewegungsgleichung aus dem Energie-Impulssatz. Wir wollen an dieser Stelle zunächst eine Vereinfachung einführen, welche sich später in mancher Beziehung als überflüssig herausstellen wird, so daß unser Ergebnis auch ohne sie in gewissen Fällen gilt. Wir nehmen nämlich einen Körper an, in welchem der Spannungstensor p^0, der sich auf das Ruhsystem bezieht, verschwindet. Da dann in demselben Bezugssystem ohnehin Impuls und Energieströmung verschwinden, hat der Welttensor in ihm lediglich die Komponente

$$T_{ll} = -W^0$$

und daraus folgt, daß man

$$T_{jk} = W^0 Y_j Y_k \quad (j, k = x, y, z, l) \quad . \; . \; . \; (272)$$

zu setzen hat. Denn diese Gleichung definiert einen Tensor und gibt im Ruhsystem, da in ihm nur $Y_l = i$ von Null verschieden ist, allen Komponenten von T den Wert Null, mit Ausnahme von $T_{ll} = -W^0$.

Für diesen Tensor berechnen wir die Divergenz, zunächst ihre x-Komponente. Man findet leicht:

$$\Delta iv_x T = Y_x Div(W^0 Y)$$
$$+ W^0 \left(Y_x \frac{\partial Y_x}{\partial x} + Y_y \frac{\partial Y_x}{\partial y} + Y_z \frac{\partial Y_x}{\partial z} + Y_l \frac{\partial Y_x}{\partial l} \right) \cdot \quad (273)$$

Wir fragen zunächst nach der Divergenz des Vektors $W^0 Y$. Dazu fassen wir einen beliebig kleinen Teil des Körpers ins Auge und die ihm entsprechende unendlich dünne Weltröhre. Sie wird im allgemeinen gekrümmt sein, da wir den Körper als beschleunigt ansehen müssen. Dennoch gibt es an einer Stelle von ihr einen dreidimensionalen Raum, der sie senkrecht schneidet, dies ist der Raum $l = const$ im Ruhsystem des Teilchens. Wir ziehen zwei derartige, einander unendlich nahe Querschnitte I und II durch die Röhre, und bilden $\int Div(W^0 Y) d\Sigma$ über das von ihnen und dem Röhrenmantel begrenzte vierdimensionale Volumen. Der Gaußsche Satz verwandelt dies Integral in eines über die Begrenzung; doch trägt der Mantel nichts dazu bei, weil an ihm der Vektor Y keine zu ihm senkrechte Komponente Y_n hat. An den Querschnitten hingegen ist $Y_n = Y_l = i$. Somit wird

$$\int Div(W^0 Y) d\Sigma = i\Big(\int_{II} W^0 d S^0 - \int_{I} W^0 d S^0\Big).$$

Jedes der beiden Integrale rechts bedeutet aber die Ruhenergie des Teilchens, nur für zwei verschiedene Augenblicke. Nun haftet aber in einem Körper, in welchem keine elastische Spannungen herrschen und dem auch sonst keine Energie zugeführt wird, auch bei der Bewegung die Ruhenergie fest an den Teilchen, wie die elektrische Ladung in einem Nichtleiter. Also sind beide Integrale rechts einander gleich, und wir schließen

$$\int Div(W^0 Y) d\Sigma = 0.$$

Der Integrationsbereich läßt sich hier nun beliebig erweitern und umformen; denn man kann ja jedes Volumen aus unendlich kleinen Röhrenstückchen, wie wir es soeben betrachteten, aufbauen. Also muß für jeden Weltpunkt

$$Div(W^0 Y) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (274)$$

gelten*).

---

*) Die Gleichung (141 a), $Div\, P = 0$, entspricht vollkommen dieser, was man besonders an der Schreibweise $P = \varrho^0 Y$ merkt.

Eine beliebige Funktion $\varphi\,(x, y, z, l)$ verändert sich bei der Verrückung um das Linienelement $d\tau$ einer Weltlinie um

$$d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \cdots + \cdots\right) d\tau,$$

also ist nach (83), $\varphi = Y_x$ gesetzt,

$$\frac{1}{c}\frac{dY_x}{d\tau} = Y_x\frac{\partial Y_x}{\partial x} + Y_y\frac{\partial Y_x}{\partial y} + Y_z\frac{\partial Y_x}{\partial z} + Y_l\frac{\partial Y_x}{\partial l}; \quad (275)$$

und wenn wir zugleich die Beziehung auf die x-Komponente abstreifen, können wir (273) schreiben:

$$\Delta iv\, T = \frac{W^0}{c}\frac{dY}{d\tau} \quad \cdots \quad (276)$$

Dies wäre nach (XVI) gleich $-F$, der mechanischen Viererkraft, welche den Trägheitswiderstand des Körpers angibt. Wird der Körper durch eine Kraft anderer Natur, etwa eine elektromagnetische, beschleunigt, so ist diese, als Vierervektor, dem mechanischen F nach (XXVIa) entgegengesetzt gleich. Verstehen wir also unter dem Viererverktor $c.K$ das Integral dieser anderen Kraft, ausgeführt über das Ruhvolumen des Körpers (letzteres ist ein Skalar), so können wir nach (276) und unter Beschränkung auf den Fall, daß die Viererbeschleunigung $\frac{dY}{d\tau}$ im ganzen Körper so ziemlich den gleichen Wert hat, durch Integration nach δV^0 schließen:

$$K = \frac{E^0}{c^2}\frac{dY}{d\tau}.$$

E^0 ist die Ruhenergie; K nennen wir den Minkowskischen Kraftvektor. Setzen wir noch

$$\frac{E^0}{c^2} = m, \quad \cdots \quad (277)$$

so gibt die Gleichung:

$$K = \frac{d(mY)}{d\tau} \quad \cdots \quad (\text{XXVII})$$

das Bewegungsgesetz. Es bezieht sich auf einen kleinen Körper (Massenpunkt) wegen der Beschränkung, die wir bei der letzten Integration hinsichtlich $\frac{dY}{d\tau}$ einführen mußten. Es stellt in gewisser Beziehung die einfachste Verallgemeinerung des Grundgesetzes $\mathfrak{K} = \frac{d(m\mathfrak{q})}{dt}$ der Newtonschen Mechanik dar.

b) Longitudinale und transversale Masse. Nach der obigen Definition,

$$K = \frac{1}{c}\int F\,\delta V^0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (278)$$

gilt, sofern wir statt im Ruhsystem K^0 die Integration in einem anderen System K vornehmen [vgl. (148)],

$$K_x = \frac{1}{\sqrt{c^2-q^2}}\int \mathfrak{F}_x\,\delta V = \frac{\mathfrak{K}_x}{\sqrt{c^2-q^2}}\cdots, \quad K_l = \frac{i}{c\sqrt{c^2-q^2}}\int (\mathfrak{q}\mathfrak{F})\,\delta V$$

$$= \frac{i\,(\mathfrak{q}\mathfrak{K})}{c\sqrt{c^2-q^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (278\,\mathrm{a})$$

Da nach (52) zwischen dem Zeitelement dt dieses Systems und der Eigenzeit des Körpers die Beziehung

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}$$

besteht, ergibt die Anwendung von (XXVII) auf die drei räumlichen Komponenten, wegen (83):

$$\mathfrak{K} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathfrak{q}}{\sqrt{1-q^2/c^2}}\right).$$

Diese Gleichung hat nun vollständig die hergebrachte Form des Impulssatzes, insofern man den Impuls des Massenpunktes

$$\mathfrak{G} = \frac{m\mathfrak{q}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (278\,\mathrm{b})$$

setzt.

Wir wollen für den Augenblick die allgemeinere Gleichung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{q}\,f(q^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (278\,\mathrm{c})$$

benutzen, ohne unsere Kenntnis über die Funktion f heranzuziehen. Wir schließen, da

$$\frac{d\mathfrak{q}^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{q}_x^2+\mathfrak{q}_y^2+\mathfrak{q}_z^2)$$

$$= 2\left(\mathfrak{q}_x\frac{d\mathfrak{q}_x}{dt}+\mathfrak{q}_y\frac{d\mathfrak{q}_y}{dt}+\mathfrak{q}_z\frac{d\mathfrak{q}_z}{dt}\right) = 2(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})$$

ist:

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \dot{\mathfrak{q}}\,f(q^2) + 2\,\mathfrak{q}(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})\,f'(q^2)\cdots \quad \ldots \quad (279)$$

f' ist die Derivierte von f. Wir zerlegen nun Kraft und Beschleunigung in drei zueinander senkrechte Komponenten. Die ersten, $\mathfrak{K}_l$ und $\dot{\mathfrak{q}}_l$, sollen in die Richtung der Geschwindigkeit

fallen, die zweiten, $\mathfrak{K}_t$ und $\dot{\mathfrak{q}}_t$, in die durch Geschwindigkeit und Kraft bestimmte Ebene, während die dritten, $\mathfrak{K}_s$ und $\dot{\mathfrak{q}}_s$, senkrecht auf dieser stehen. $\mathfrak{K}_s$ ist natürlich 0. Die Anwendung von (279) auf diese Komponenten liefert dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_l &= \dot{\mathfrak{q}}_l [f(q^2) + 2q^2 f'(q^2)] = \dot{\mathfrak{q}}_l \frac{d|\mathfrak{G}|}{dq}, \\ \mathfrak{K}_t &= \dot{\mathfrak{q}}_t f(q^2) = \dot{\mathfrak{q}}_t \frac{|\mathfrak{G}|}{q}, \quad \dot{\mathfrak{q}}_s = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \quad (280)$$

Nennt man den Proportionalitätsfaktor zwischen den zur Geschwindigkeit parallelen Komponenten von Kraft und Beschleunigung die longitudinale, den entsprechenden Faktor für die dazu senkrechten Komponenten die transversale Masse (m_l und m_t), so findet man aus (280):

$$m_l = \frac{d|\mathfrak{G}|}{dq}, \qquad m_t = \frac{|\mathfrak{G}|}{q} \cdots \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (281)$$

Im vorliegenden Falle, da $f(q^2) = \dfrac{m}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$ ist,

$$m_l = \frac{c^3 m}{\sqrt{c^2 - q^2}^3}, \qquad m_t = \frac{c\,m}{\sqrt{c^2 - q^2}} \cdots \quad \cdot \cdot \quad (282)$$

Die Beschleunigung liegt also in derselben Ebene, wie die Geschwindigkeit und die Kraft, hat aber keineswegs die Richtung der letzteren, sondern liegt näher als die Kraft an der Normalen auf der Geschwindigkeit, da

$$\frac{|\dot{\mathfrak{q}}_t|}{|\dot{\mathfrak{q}}_l|} = \frac{m_l}{m_t} \frac{|\mathfrak{K}_t|}{|\mathfrak{K}_l|} > \frac{|\mathfrak{K}_t|}{|\mathfrak{K}_l|} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (283)$$

ist. Im Grenzfall $q = 0$ werden beide Massen zur Ruhmasse m.

Als Massenpunkt läßt sich das Elektron bei allen stationären und quasistationären Bewegungen behandeln, wie wir ausführlich in § 32 begründen werden. Die Abhängigkeit der beiden Massen von der Geschwindigkeit, die wir in (282) gefunden haben, steht durchaus in Einklang mit dem Experiment (§ 2), wobei, um es zu wiederholen, Paschens spektroskopische Beobachtungen in ihrer Deutung durch Sommerfeld an erster Stelle zu nennen sind.

c) Der Energiesatz. Ganz wie in der Newtonschen Mechanik kann man hier den Energiesatz ableiten, indem man

den Impulssatz (279) mit $\mathfrak{q}$ skalar multipliziert. Nämlich nach (280) und (281):

$$(\mathfrak{q}\mathfrak{K}) = (\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})[f(q^2) + 2q^2 f'(q^2)] = (\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})m_l = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^3}{\sqrt{c^2-q^2}}\right) \quad (284)$$

Man sieht, damit diese Gleichung das Energieprinzip darstellt, muß bis auf eine Konstante die Energie

$$E = \frac{mc^3}{\sqrt{c^2-q^2}} = mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{c^2} + \cdots\right] \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (285)$$

sein. Auch die Energie wächst somit über alle Grenzen, wenn sich die Geschwindigkeit dem Wert c nähert. Für kleine Geschwindigkeiten hingegen stimmt sie bis auf eine Konstante überein mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2}mq^2$ der Newtonschen Mechanik.

Weit bequemer aber ist es, den Energiesatz unmittelbar an die Gleichung (XXVII) anzuknüpfen, indem man diese auf die zeitartige Komponente abwendet. Denn nach (278a), (52) und (83) findet man unmittelbar:

$$(\mathfrak{q}\mathfrak{K}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^3}{\sqrt{c^2-q^2}}\right) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (286)$$

Es sind somit auch hier wieder Energie- und Impulssatz zu einer einzigen Gleichung zwischen Vierervektoren zusammengefaßt.

Erwähnt sei zum Schluß, daß, solange die Masse konstant ist, nach (XXVII) und (85a) das skalare Produkt

$$(YK) = m\left(Y\frac{dY}{d\tau}\right) = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (287)$$

ist. Nach § 24 bedeutet das Nichtverschwinden dieses Produktes, daß die Kraft dem Körper außer der mechanischen Arbeit noch eine andere Energie, etwa Wärme, zuführt. Da, wie wir in § 29 sehen werden, Gleichung (XXVII) auch dann noch gilt, so ist mit einer solchen Energiezufuhr stets eine Massenänderung verbunden.

d) Die Zurückführung der Masse auf die Energie. In Gleichung (277) haben wir eine neue wichtige, aber zunächst auf Körper ohne Ruhspannungen beschränkte Form des Satzes von der Trägheit der Energie. Denn in der den Impuls bestimmenden Ruhmasse m äußert sich die Trägheit des Körpers.

Die Masse ist nun leicht in absolutem Maß anzugeben; daher gestattet die letzte Gleichung, auch die Energie E^0 zu messen. Doch läßt sich dieser absolute Wert durch mechanisch-thermo-

dynamische Methoden nicht nachprüfen, weil dabei immer eine additive Konstante in der Energie unbestimmt bleibt. Daß wir hier über die auf dem Energieprinzip beruhende Definition hinauskommen, liegt wesentlich an dem neu eingeführten Satz (XXV). Prinzipiell möglich dagegen wäre es, Gleichung (277) durch Veränderungen des Energieinhaltes nachzuprüfen. Z. B. muß sich danach jede Temperaturänderung und die damit verbundene Wärmeaufnahme oder -abgabe durch eine Veränderung der Masse bemerkbar machen. Infolge der Größenanordnung des Faktors $1/c^2 = 1{,}11 \,.\, 10^{-21}\,[\mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{sec}^2]$ ist diese freilich so minimal, daß kaum die Aussicht besteht, jemals die Meßgenauigkeit weit genug zu steigern. Ein erheblich stärkerer, freilich auch zurzeit noch unmeßbar kleiner Einfluß wäre schon bei der Heranziehung chemischer Wärmetönungen zu erwarten. Berechnen wir z. B., um wieviel die Masse eines Gemisches aus 1 Mol Wasserstoff (2 g) und $^1/_2$ Mol Sauerstoff (16 g) abnimmt, wenn sie sich bei Atmosphärendruck und Zimmertemperatur zu 1 Mol flüssigen Wassers vereinigen. Die Wärmeentwickelung beträgt 68 400 cal $= 2{,}87 \,.\, 10^{12}\,[\mathrm{g\,cm}^2\,\mathrm{sec}^{-2}]$, die Abnahme der Masse demnach $3{,}2 \,.\, 10^{-9}\,[\mathrm{g}]$, was gegen die Gesamtmasse der Mischung (18 g) verschwindend klein ist. Beachten wir nun, daß selbst bei Abkühlung auf die niedrigsten Temperaturen die spezifischen Wärmen und die Wärmetönungen der Größenordnung nach nicht wachsen, so sehen wir, daß alle thermisch-chemischen Energieveränderungen, denen wir die Körper unterwerfen können, unbeträchtlich sind gegen den Vorrat „latenter“ Energie, welchen sie auch noch bei 0^0 absolut behalten, und welcher sich in ihrer Trägheit äußert. Da weder Bewegungen, noch Umlagerungen der chemischen Atome ihr etwas anhaben können, so muß ihr Sitz im Inneren der Atome sein. Nähere Vorstellungen können wir uns zurzeit davon noch nicht bilden.

Um so wichtiger ist es, daß neuerdings eine Klasse von Vorgängen entdeckt worden ist, bei welcher diese latente Energie unmittelbar zutage tritt. Es ist dies der Zerfall der Atome, welche das Wesen der radioaktiven Erscheinungen ausmacht. Es ist eine experimentell sicher festgestellte Tatsache, daß z. B. beim Zerfall des Radiums andere chemische Elemente, unter anderem Helium entstehen, und es steht ebenfalls fest, daß in den radioaktiven Stoffen dauernd eine starke Wärmeentwicke-

lung stattfindet, welche ebenso wie die zur Entsendung der verschiedenen radioaktiven Strahlen nötige Energie nur aus der latenten Energie der zerfallenden Radiumatome stammen kann. Die gesamte von einem Grammatom (225 g) pro Stunde entwickelte Energie beträgt 30 240 Cal $= 1{,}26 \,.\, 10^{12}$ [g cm^2 sec^{-2}] (Precht). Die Massenverminderung pro Stunde beträgt also $1{,}41 \,.\, 10^{-9}$ g, pro Jahr daher $1{,}2 \,.\, 10^{-5}$ g. Freilich ist auch diese Massenabnahme zunächst wohl kaum nachweisbar. Erwähnt sei, daß das hohe Atomgewicht der radioaktiven Substanzen auf eine besonders große latente Energie hinweist. Die hier aus der Trägheit der Energie gezogenen Folgerungen finden somit bei den radioaktiven Vorgängen eine Bestätigung.

Zugleich zeigt diese Erörterung, daß unsere Vernachlässigung der Ruhspannungen gegenüber den großen Beträgen der Ruhenergiedichte, die wir in allen Körpern haben, wenig ausmachen kann. Daß sie bei vollständigen statischen Systemen in aller Strenge keinen Einfluß auf die Dynamik ausüben, zeigen wir später.

§ 28. Grundlagen der Dynamik der Kontinua.

a) Die Transformation der Energie- und Impulsdichte. Wie die Transformationsformeln für den Energiestrom, die Energie und den Spannungstensor $\boldsymbol{p}$ lauten, welche deren Zusammenhang mit dem Welttensor T entsprechen, haben wir schon in § 15, f) an den Formeln (169) gesehen. Trotzdem dort von elektromagnetischen Größen die Rede war, können wir sie hier unverändert auf die mechanischen Größen überrragen. Eine bedeutende Vereinfachung erzielen wir, wenn wir an die Stelle des gestrichenen Systems das Ruhsystem K^0 setzen. Denn nach der Definition der mechanischen Energie, die wir im vorigen Paragraphen gegeben haben, verschwinden in ihm der Energiestrom $\mathfrak{S}^0$ und die Impulsdichte $\mathfrak{g}^0$. So gelangen wir, wenn wir zugleich $c^2\mathfrak{g}$ statt $\mathfrak{S}$ schreiben, zu den Formeln

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{g}_x = \frac{\mathfrak{q}_x(\boldsymbol{p}^0_{xx} + W^0)}{c^2 - q^2}, \quad \mathfrak{g}_y = \frac{\mathfrak{q}_x \boldsymbol{p}^0_{xy}}{c\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad \mathfrak{g}_z = \frac{\mathfrak{q}_x \boldsymbol{p}^0_{xz}}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \\
&W = \frac{c^2 W^0 + q^2 \boldsymbol{p}^0_{xx}}{c^2 - q^2}, \quad \boldsymbol{p}_{yy} = \boldsymbol{p}^0_{yy}, \quad \boldsymbol{p}_{zz} = \boldsymbol{p}^0_{zz}, \quad \boldsymbol{p}_{yz} = \boldsymbol{p}^0_{yz} \\
&\boldsymbol{p}_{xx} = \frac{c^2 \boldsymbol{p}^0_{xx} + q^2 W^0}{c^2 - q^2}, \quad \boldsymbol{p}_{xy} = \frac{c\,\boldsymbol{p}^0_{xy}}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad \boldsymbol{p}_{xz} = \frac{c\,\boldsymbol{p}^0_{xz}}{\sqrt{c^2 - q^2}}
\end{aligned}\right\} \text{(XXVIII)}$$

Hier ist v durch $\mathfrak{q}_x$ ersetzt, da $\mathfrak{q}$ die Geschwindigkeit des Körpers im System K bedeutet. Wir können die Gleichungen für W und $\mathfrak{g}$ auch vektoriell schreiben wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{c^2}{c^2-q^2}\left\{W^0 + \frac{1}{c^2}\left(\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\boldsymbol{p}^0]\right)\right\} \\ \mathfrak{g} &= \frac{\mathfrak{q}}{c^2-q^2}\left\{W^0 + \frac{1}{q^2}\left(\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\boldsymbol{p}^0]\right)\right\} \\ &+ \frac{1}{c\sqrt{c^2-q^2}}\left\{[\mathfrak{q}\boldsymbol{p}^0] - \frac{\mathfrak{q}}{q^2}\left(\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\boldsymbol{p}^0]\right)\right\} \end{aligned}\right\} \cdot \text{(XXVIII a)}$$

Man beweist dies leicht, indem man die x-Achse als parallel zu $\mathfrak{q}$ annimmt; das Vektorprodukt $[\mathfrak{q}\boldsymbol{p}^0]$ erhält dann die Komponenten

$$[\mathfrak{q}\boldsymbol{p}^0]_x = \mathfrak{q}_x \overset{0}{p}_{xx}, \qquad [\mathfrak{q}\boldsymbol{p}^0]_y = \mathfrak{q}_x \overset{0}{p}_{xy},$$

so daß man die Formeln unter (XXVIII) wiedererhält*). Die Gleichungen enthalten in der allgemeinsten Weise die Zurückführung der Energie und des Impulses auf die Geschwindigkeit und den durch W^0 und $\boldsymbol{p}^0$ bestimmten inneren Zustand des Körpers. Besonders muß hervorgehoben werden, daß der erste Summand in der Gleichung für $\mathfrak{g}$ einen zu $\mathfrak{q}$ parallelen, der zweite Summand einen dazu senkrechten Vektor darstellt; das skalare Produkt des letzteren mit $\mathfrak{q}$ ist nämlich offenbar Null.

Integrieren wir die Gleichungen (XXVIII a) über das Volumen

$$V = V^0 \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}$$

eines Körpers, unter der Voraussetzung, daß seine Geschwindigkeit räumlich konstant ist, so finden wir für seine Energie

$$E = \int W \delta V = \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c} \int W \delta V^0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (288)$$

und für seinen Impuls

$$\mathfrak{G} = \int \mathfrak{g} \delta V = \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c} \int \mathfrak{g} \delta V^0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (288\text{ a})$$

die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\left\{E^0 + \frac{1}{c^2}\left(\mathfrak{q}\left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0 \delta V^0\right]\right)\right\}, \\ \mathfrak{G} &= \frac{\mathfrak{q}}{c\sqrt{c^2-q^2}}\left\{E^0 + \frac{1}{q^2}\left(\mathfrak{q}\left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0 \delta V^0\right]\right)\right\} \\ &+ \frac{1}{c^2}\left\{\left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0 \delta V^0\right] - \frac{\mathfrak{q}}{q^2}\left(\mathfrak{q}\left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0 \delta V^0\right]\right)\right\} \end{aligned}\right\} \text{(XXVIII b)}$$

*) Vgl. auch (170).

E^0 ist dabei die Ruhenergie, $\int \boldsymbol{p}^0 \delta V^0$ wie $\boldsymbol{p}^0$ selbst ein symmetrischer Tensor. In der letzten Gleichung stellt wiederum der zweite Summand rechts einen zur Geschwindigkeit senkrechten Vektor dar.

Wesentlich vereinfachen sich diese Gleichungen, wenn die Spannungen $\boldsymbol{p}^0$ einen allseitig gleichen Druck p^0 bilden. In diesem Falle nämlich verschwinden die Komponenten von $\boldsymbol{p}^0$ mit zwei ungleichen Indices, und die übrigbleibenden bekommen alle den gemeinsamen Wert

$$\overset{0}{\boldsymbol{p}}_{xx} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{yy} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{zz} = p^0,$$

so daß nach λ'

$$[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}^0] = \mathfrak{q}\,p^0, \qquad \left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0 \delta V^0\right] = \mathfrak{q} \int p^0 \delta V^0$$

wird. Dann nehmen die Formeln (XXVIII a) die Gestalt an:

$$W = \frac{c^2 W^0 + q^2 p^0}{c^2 - q^2} \qquad \mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{q}}{c^2 - q^2}\,(W^0 + p^0) \quad \text{(XXVIII c)}$$

Ist außer der Geschwindigkeit auch der Druck p^0 räumlich konstant, so folgen aus (XXVIII b) die Planckschen Gleichungen:

$$E = \frac{c^2 E^0 + q^2 p^0 V^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \qquad \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{q}\,(E^0 + p^0 V^0)}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \quad \text{(XXVIII d)}$$

b) Die absoluten und die relativen (elastischen) Spannungen. Wir kennen den Impulssatz in zwei Formen, nämlich in der neuen

$$\Delta i v\, T = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{\mathfrak{g}} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (289)$$

und in der alten

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (290)$$

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen beiden Gleichungen herstellen. In (289) ist $\dot{\mathfrak{g}}$ der Differentialquotient von $\mathfrak{g}$ nach t, gebildet für einen im Raum festen Punkt, d. h. bei konstanten Koordinaten x, y, z. Deswegen ist $\boldsymbol{p}$ nicht der Tensor der elastischen Spannungen, denn diese müssen wie in der bisherigen Theorie mit der Impulszunahme eines bestimmten Körperelementes δV in Zusammenhang stehen. Bezeichnen wir dessen Veränderung für das Zeitintervall dt mit $\underline{\underline{\dot{\mathfrak{g}}}}\,\delta V dt$, so gelten nach dem Anhang Abschnitt c) (ϱ') die Beziehungen:

$$\underline{\underline{\dot{\mathfrak{g}}}}_x = \dot{\mathfrak{g}}_x + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{g}_x \mathfrak{q}_z) \text{ usw.,}$$

oder vektoriell geschrieben nach ν'' und μ'':

$$\underline{\underline{\mathfrak{g}}} = \dot{\mathfrak{g}} + \mathfrak{div}\left[[\mathfrak{g}\,\mathfrak{q}]\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (291)$$

Führen wir nun den unsymmetrischen Tensor

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{p} - \left[[\mathfrak{g}\,\mathfrak{q}]\right] \qquad (\boldsymbol{t}_{jk} = \boldsymbol{p}_{jk} - \mathfrak{g}_j \mathfrak{q}_k) \quad . \quad . \quad . \quad (292)$$

ein, so findet man aus (289) und (ν''):

$$\underline{\underline{\mathfrak{g}}} = -\mathfrak{div}\,\boldsymbol{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (293)$$

Durch diese Gleichung erweist sich der Tensor $\boldsymbol{t}$ als der Tensor der elastischen Spannungen. Denn integriert man über einen endlichen Körper, so folgt für dessen Impulsänderung (vgl. den Anhang, Rechnungsregel ξ und ϱ):

$$\int \underline{\underline{\mathfrak{g}}}\,\delta V = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = -\int \mathfrak{div}\,\boldsymbol{t}\,\delta V = \int \mathfrak{t}_n\,d\sigma \quad . \quad . \quad (294)$$

wo die Komponenten des Vektors $\mathfrak{t}_n$ nach dem Schema ν'

$$\mathfrak{t}_{nx} = \boldsymbol{t}_{xx}\cos(nx) + \boldsymbol{t}_{xy}\cos(ny) + \boldsymbol{t}_{xz}\cos(nz)$$

zu bilden sind. Das Oberflächenintegral rechts stellt die Kraft $\mathfrak{K}$ dar, welche die Spannungen auf den Körper ausüben, d. h. Gleichung (294) stimmt mit (290) überein. $\mathfrak{t}_n\,d\sigma$ ist die auf das Oberflächenelement von der Umgebung ausgeübte Kraft. Für den analog aus $\boldsymbol{p}$ gebildeten Vektor $\mathfrak{p}_n$ träfe eine solche Deutung nicht zu.

Gleichung (289) entspricht der Eulerschen, Gleichung (293) der Lagrangeschen Form der hydrodynamischen Differentialgleichungen. In den ersteren wird die Impulsänderung an demselben Ort, in den letzteren die Impulsänderung eines materiellen Teilchens bestimmt.

Aus der Definition (292) und den unter (XXVIII) angegebenen Transformationsformeln für $\boldsymbol{p}$ und $\mathfrak{g}$ findet man leicht die folgenden für den Tensor $\boldsymbol{t}$ der elastischen Spannungen:

$$\left.\begin{array}{llll}
\boldsymbol{t}_{xx} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{xx}, & \boldsymbol{t}_{yy} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{yy}, & \boldsymbol{t}_{zz} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{zz}, & \boldsymbol{t}_{yz} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{yz}, \\
\boldsymbol{t}_{zy} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{zy}, & \boldsymbol{t}_{xy} = \dfrac{c\,\overset{0}{\boldsymbol{p}}_{xy}}{\sqrt{c^2 - q^2}}, & \boldsymbol{t}_{yx} = \dfrac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}\,\overset{0}{\boldsymbol{p}}_{yx}, & \\
 & \boldsymbol{t}_{xz} = \dfrac{c\,\overset{0}{\boldsymbol{p}}_{xz}}{\sqrt{c^2 - q^2}}, & \boldsymbol{t}_{zx} = \dfrac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}\,\overset{0}{\boldsymbol{p}}_{zx} &
\end{array}\right\} \quad (295)$$

Hier ist wiederum die x-Richtung parallel zur Geschwindigkeit vorausgesetzt. Ist der Spannungszustand im Ruhsystem ein allseitig gleicher Druck p^0, so wird

$$\overset{0}{\boldsymbol{p}}_{xx} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{yy} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{zz} = p^0, \qquad \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{yz} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{zx} = \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{xy} = 0.$$

Nach (295) gelten dann genau die gleichen Beziehungen für den Tensor $\boldsymbol{t}$. Der allseitig gleiche relative Druck

$$p = p^0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (296)$$

ist somit eine Invariante der Lorentz-Transformation (Planck).

Aus (296) und (XXVIII c) bzw. (XXVIII d) findet man die durch Einfachheit ausgezeichneten Transformationsformeln:

$$W + p = \frac{c^2(W^0 + p^0)}{c^2 - q^2}, \qquad E + pV = \frac{c(E^0 + p^0 V^0)}{\sqrt{c^2 - q^2}} \quad (297)$$

Übrigens geht auch aus den Transformationsformeln (295) und (XXVIII) hervor, daß nicht die absoluten Spannungen $\boldsymbol{p}$, sondern die relativen $\boldsymbol{t}$ als elastische Spannungen zu bezeichnen sind. Die letzteren hängen nämlich außer von der Geschwindigkeit q nur von den Ruhspannungen $\boldsymbol{p}^0$ ab, die ersteren außerdem noch von der Energiedichte W^0. Stets sind also auch in einem elastisch nicht gespannten Körper, falls er sich bewegt, absolute Spannungen vorhanden.

Treten außer den elastischen Spannungen auch noch nicht mechanische Kräfte $\mathfrak{K}_{nm}$ mit der Dichte $\mathfrak{F}_{nm}$ ins Spiel, so ist nach (XXVI a)

$$F_{nm} + F = F_{nm} - \Delta iv\, T = 0,$$

und es sind die Gleichungen (289), (293), (294) zu ergänzen zu:

$$\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{F}_{nm} - \mathfrak{div}\, \boldsymbol{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (298)$$

$$\dot{\underline{\mathfrak{g}}} = \mathfrak{F}_{nm} - \mathfrak{div}\, \boldsymbol{t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (299)$$

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K}_{nm} + \int \mathfrak{t}_n\, d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (300)$$

Schließlich gibt es noch eine dritte Methode, sich von der Bedeutung der relativen Spannungen zu überzeugen. Ist nämlich $\mathfrak{t}_n d\sigma$ die auf das Flächenelement $d\sigma$ wirkende Kraft, so ist $(\mathfrak{q}\mathfrak{t}_n) d\sigma$ deren Leistung, und es muß in Analogie zu (294) die Gleichung gelten:

$$\frac{dE}{dt} = \int (\mathfrak{q}\mathfrak{t}_n)\, d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (301)$$

Andererseits folgt aus (XXVI) zunächst:

$$\dot{W} = -div\,\mathfrak{S}$$

und in Verbindung mit der Rechnungsregel ϱ':

$$\underline{\underline{\dot{W}}} = \dot{W} + div\,(W\mathfrak{q}) = -div\,(\mathfrak{S} - W\mathfrak{q}) \quad . \quad . \quad (302)$$

Wir können offenbar die Vektoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} - W\mathfrak{q}$ in ähnlichem Sinne als den absoluten und den relativen Energiestrom voneinander unterscheiden, wie wir oben die absoluten von den relativen Spannungen trennten. Legen wir nun vorübergehend die x-Achse parallel zur Geschwindigkeit, so schließen wir aus den Gleichungen (XXVIII) und (295):

$$(\mathfrak{S} - W\mathfrak{q})_x = c^2\mathfrak{g}_x - W\mathfrak{q}_x = \mathfrak{q}_x \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{xx} = \mathfrak{q}_x \boldsymbol{t}_{xx},$$

$$(\mathfrak{S} - W\mathfrak{q})_y = c^2\mathfrak{g}_y = \frac{c\,\mathfrak{q}_x \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{xy}}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \mathfrak{q}_x \boldsymbol{t}_{xy} = \mathfrak{q}_x(\boldsymbol{t}_{yx} - \mathfrak{g}_y\,\mathfrak{q}_x),$$

$$(\mathfrak{S} - W\mathfrak{q})_z = c^2\mathfrak{g}_z = \frac{c\,\mathfrak{q}_z \overset{0}{\boldsymbol{p}}_{xz}}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \mathfrak{q}_x \boldsymbol{t}_{xz} = \mathfrak{q}_x(\boldsymbol{t}_{zx} - \mathfrak{g}_z\mathfrak{q}_x),$$

da nach (292) unter den jetzigen Voraussetzungen

$$\boldsymbol{t}_{xy} - \boldsymbol{t}_{yx} = -\mathfrak{q}_x\mathfrak{g}_y \qquad \boldsymbol{t}_{xz} - \boldsymbol{t}_{zx} = -\mathfrak{q}_x\mathfrak{g}_z$$

ist. Vektoriell lassen sich diese Beziehungen zusammenfassen:

$$\mathfrak{S} - W\mathfrak{q} = [\mathfrak{q}\,\boldsymbol{t}] - \big[\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{t}]\big],$$

wie aus der Definition μ' für das Vektorprodukt $[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{t}]$ unmittelbar hervorgeht. Nach Rechnungsregel o schließen wir daher aus (302):

$$\int \underline{\underline{\dot{W}}}\,\delta V = \frac{dE}{dt} = -\int \mathfrak{div}\,(\mathfrak{S} - W\mathfrak{q})\,\delta V = \int (\mathfrak{q}\,\mathfrak{t}_n)\,d\sigma,$$

was mit (301) übereinstimmt.

Eine Invariante der Lorentz-Transformation ist nach § 13 die Summe der Diagonalkomponenten des Tensors T,

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{ll}.$$

Deuten wir diese Invariante mechanisch, so wird sie nach § 26, c) [vgl. auch (292)]:

$$\boldsymbol{p}_{xx} + \boldsymbol{p}_{yy} + \boldsymbol{p}_{zz} - W = \boldsymbol{t}_{xx} + \boldsymbol{t}_{yy} + \boldsymbol{t}_{zz} - \big(W - (\mathfrak{q}\,\mathfrak{g})\big).$$

Herrscht ein allseitig gleicher Druck, so ist $\boldsymbol{t}_{xx} + \boldsymbol{t}_{yy} + \boldsymbol{t}_{zz} = 3p$ nach (296) eine und $\big(W - (\mathfrak{q}\,\mathfrak{g})\big)$ eine zweite Invariante.

c) Erörterung von XXVIII. In den Formeln (XXVIII) bis (XXVIII d) bedeutet der Index 0 zunächst, daß die betreffende Größe auf das System K^0 zu beziehen ist, in welchem der Körper in dem betreffenden Augenblick ruht. Wir wollen aber vorläufig annehmen, daß sein innerer Zustand bei einer Geschwindigkeitsänderung unverändert bleibt, d. h. daß man ihm weder Wärme zuführt, noch den Druck ändert. Dann spielt aber bei einer beschleunigten Bewegung in jedem Augenblick ein anderes System die Rolle des Systems K^0, aber die mit dem Index 0 versehenen Größen bleiben konstant. Die in Rede stehenden Gleichungen geben also bei einem adiabatischen, isopieistischen Vorgang unmittelbar die Abhängigkeit der Energie und des Impulses von der Geschwindigkeit an. Man braucht besonders den Wert von $\mathfrak{G}$ nur in $\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ einzusetzen, um die Dynamik dieser Vorgänge vollständig zu beherrschen, wie wir es im übernächsten Paragraphen weiter ausführen wollen. Es sei jedoch ausdrücklich auf den wesentlichen Unterschied zwischen den Gleichungen (XXVIII), (XXVIII a und c) einerseits, (XXVIII b und d) andererseits aufmerksam gemacht. Die ersteren gelten gemäß ihrer Ableitung streng*) und ausnahmslos für jede Bewegung; die letztere aber nur, insofern die Geschwindigkeit im Körper als konstant betrachtet werden kann. Genau genommen, ist sie dies bei einer beschleunigten Bewegung niemals; denn anderenfalls hätte der Körper vor und nach der Beschleunigung dieselbe Form, während wir doch wissen, daß diese sich der Lorentz-Kontraktion entsprechend ändert. Infolgedessen sind die Gleichungen (XXVIII b und d) nur Näherungen für Vorgänge, bei welchen die Beschleunigung so gering ist, daß die räumliche Veränderlichkeit der Geschwindigkeit vernachlässigt werden kann. Man bezeichnet solche Vorgänge, bei denen der innere Zustand des Körpers noch derselbe wie bei stationärer Bewegung ist, passend als „quasistationäre". Dieser Begriff entspricht durchaus dem in § 17, e) für bewegte Ladungsträger eingeführten.

Formel XXVIII b gibt, wie erwähnt, dem Impuls eine zur Geschwindigkeit senkrechte Komponente, die zur ersten Potenz

*) D. h. so streng wie die Gleichung (IX a) der Elektronentheorie. Immerhin ist es wenig wahrscheinlich, daß eine etwa notwendig werdende Änderung der letzteren etwas an der Transformation der Kraftdichte, d. h. an der Möglichkeit, sie zur Viererkraft zu ergänzen, ändert.

von q proportional ist. Infolgedessen bedarf es zur Beschleunigung eines Körpers im allgemeinen einer Kraft, welche auch eine Komponente senkrecht zur Beschleunigung hat. Diese verschwindet auch im Grenzfall $q = 0$ nicht. Darin unterscheidet sich dieser Grenzfall von der klassischen Dynamik.

Man kann sich diesen transversalen Impuls leicht veranschaulichen, wenn man an die Trägheit der Energie denkt. Daß die elastischen Spannungen im bewegten Körper einen Energiestrom hervorrufen, ist ja eine anerkannte Tatsache. In einem gespannten Seil z. B. strömt Energie der Geschwindigkeit entgegen. Denn es wird Arbeit geleistet an dem Ende, auf das das Seil sich hinbewegt; am anderen Ende gibt es diese Arbeit wieder ab. In einem gepreßten Stab strömt die Energie mit der Geschwindigkeit der materiellen Teile. Im allgemeinen kann dieser Energiestrom jeden Winkel mit der Geschwindigkeit bilden. Die Relativitätstheorie fügt freilich den wesentlich neuen Gesichtspunkt hinzu, daß jedem Energiestrom ein Impuls entspricht.

Tatsächlich aber sind, wie schon erwähnt, alle anwendbaren Spannungen viel zu schwach, um einen merklichen Einfluß auf den Impuls auszuüben. Vergleicht man die Formeln (XXVIII) usw. mit der Erfahrung, so kann man daher von den Gliedern mit p^0 ganz absehen und kommt so zur Dynamik des Massenpunktes zurück, von der wir uns schon in § 26 überzeugt haben, daß sie mit der Newtonschen für kleine Geschwindigkeiten übereinstimmt. Aus der empirischen Gültigkeit der Newtonschen Mechanik läßt sich also kein Einwand gegen die Relativitätstheorie herleiten.

Im engen Zusammenhang damit steht, daß die Abhängigkeit der Energie von der Geschwindigkeit eine andere ist als bei Newton. Bisher trat als Folge der Bewegung die kinetische Energie $\frac{1}{2} m q^2$ additiv zu der sonstigen hinzu. Dies ist hier nach (285) nur als Näherung richtig. Die kinetische Energie verliert daher ihre Bedeutung als besondere Energieart, und dies ist auch notwendig; denn führt man die Trägheit auf Energie zurück, so darf man nicht umgekehrt einen Teil der Energie auf Trägheit begründen. Dafür werden alle Energiearten Funktionen der Geschwindigkeit; Wärme, chemische, elastische Energie, innere Energie der Atome, sie alle wachsen bei Zunahme der Geschwindigkeit.

Wir lassen nun die Voraussetzung des konstanten inneren Zustandes wieder fallen und führen den unter dem Druck 0 stehenden Körper bei konstanter Geschwindigkeit pro Zeiteinheit die Wärmemenge R^0, bezogen auf das System K^0, zu. Nach dem Energieprinzip, angewandt im System K^0, ist:

$$\frac{dE^0}{dt^0} = R^0;$$

also ist nach (XXVIII d), (269) und (52):

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt^0}\frac{dt^0}{dt} = \frac{\mathfrak{q}R^0}{c\sqrt{c^2-q^2}}\frac{dt^0}{dt} = \frac{\mathfrak{q}R}{c^2-q^2}.$$

Nach dem Impulssatz ist eine Impulszunahme nur möglich, wenn eine Kraft $\mathfrak{K}$ wirkt,

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{\mathfrak{q}R}{c^2-\mathfrak{q}^2} \quad \cdots\cdots \quad (302\,\mathrm{a})$$

Die in § 24 gefundene Tatsache, daß bei Wärmezufuhr zur Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit eine Kraft notwendig ist, findet ihre Erklärung somit in der Trägheit der Energie[2]). Für den empirischen Nachweis ist diese Kraft wegen des Divisors $c^2 - q^2$ freilich viel zu schwach.

§ 29. Beispiele für die quasistationäre, adiabatische isopieistische Dynamik.

a) Der Massenpunkt. Wir wollen in diesem Paragraphen von Körpern reden, die durch eine Kraft $\mathfrak{K}_{nm}$ bei konstantem inneren Zustande (E^0, p^0, V^0) oder, wie wir oben sagten, adiabatisch und isopieistisch beschleunigt werden. Wir setzen zunächst voraus, daß sie unter einem allseitig gleichförmigen relativen Druck p stehen. Dann ist in (300)

$$\int \mathfrak{t}_{nx}\,d\sigma = p\int \cos(nx)\,d\sigma = 0,$$

also auch der Vektor $\int \mathfrak{t}_n\,d\sigma = 0$, somit $\mathfrak{K}_{nm} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$; für den Impuls $\mathfrak{G}$ können wir den Wert aus (XXVIII d) einsetzen. Die diesen Gleichungen zugrunde liegende Bedingung räumlich konstanter Geschwindigkeit ist bei gleichen Beschleunigungen offenbar um so genauer erfüllt, je kleiner der Körper ist. Wendet man sie an, so behandelt man ihn daher als Massenpunkt; für einen solchen

müßte das Folgende streng gelten. — Wir unterdrücken, da Verwechselungen nicht zu befürchten sind, im folgenden den Index nm.

Trotz der Verallgemeinerung, welche in der Einführung des Druckes p liegt, können wir hier die Gleichung (XXVII)

$$K = \frac{d(mY)}{d\tau}$$

beibehalten, wenn wir Gleichung (277) durch

$$m = \frac{E^0 + p^0 V^0}{c^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (303)$$

ersetzen. Denn der Impuls erhält dann nach (278b) den Wert:

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{q}(E^0 + p^0 V^0)}{c\sqrt{c^2 - q^2}},$$

was mit (XXVIII d) übereinstimmt. Eine kleine Änderung tritt freilich im Werte der Energie ein; Gleichung (285) würde mit (303) nicht den richtigen Wert für E ergeben. Multiplizieren wir nämlich die Impulsgleichung

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{E^0 + p^0 V^0}{c} \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right)$$

skalar mit $\mathfrak{q}$, oder wenden wir (XXVII) auf die zeitartigen Komponenten der beiden Vierervektoren an, so finden wir übereinstimmend unter Berücksichtigung von (297):

$$(\mathfrak{q}\mathfrak{K}) = \frac{d}{dt}(E + pV) = \frac{dE}{dt} + p\frac{dV}{dt} \quad \cdots \quad (304)$$

Die Energie wächst hier nicht nur infolge der Beschleunigungsarbeit der Kraft $\mathfrak{K}$, sondern auch infolge der Kompressionsarbeit $-p\,dV/dt$, welche der Druck p leistet. Denn gerade weil nach Voraussetzung der innere Zustand, also auch das Ruhvolumen V^0 erhalten bleibt, nimmt mit wachsender Geschwindigkeit das Volumen V der Lorentz-Kontraktion entsprechend ab. In § 27 war von der Kompressionsarbeit nicht die Rede. So erklärt es sich, daß die Gleichungen (XXVIII, d) (für E) und (285) nicht übereinstimmen.

Wohl aber können wir die Formeln (282) für die longitudinale und transversale Masse übertragen; sie lauten dann:

$$m_l = \frac{c(E^0 + p^0 V^0)}{\sqrt{c^2 - q^2}^3}, \quad m_t = \frac{E^0 + p^0 V^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}}.$$

b) Die Dynamik einer elektrisch geladenen Kugel. Ein Körper habe bei Ruhe Kugelgestalt; seine elektrische Ladung e sei gleichmäßig über die Oberfläche verteilt. Wir bezeichnen den Radius mit a, mit $\mathfrak{G}$ und E den mechanischen Impuls und die Energie, mit $\mathfrak{K}$ die auf sie wirkende nichtmechanische Kraft, abgesehen von der Eigenkraft $\mathfrak{K}_e$, welche ihr eigenes elektromagnetisches Feld auf sie ausübt.

Außer dieser Kraft $\mathfrak{K}_e$ übt aber das Feld einen gleichförmigen Zug (negativen Druck) aus, den wir am einfachsten berechnen, wenn wir das mit der Kugel bewegte System K^0 benutzen.

Nach der Definition der quasistationären Vorgänge können wir nämlich die Bestimmungsstücke des inneren Zustandes unter der Annahme berechnen, daß die Kugel in K^0 dauernd ruht. Dann aber ist ihr Feld rein elektrostatisch, im Inneren von der Stärke Null, während nach außen die Kraftlinien senkrecht von der Oberfläche ausgehen. Die Oberfläche erfährt infolgedessen einen Zug nach außen, der pro Flächeneinheit gleich $^1/_2\,\mathfrak{E}^{0\,2}$ ist*); $|\mathfrak{E}^0|$ aber ist gleich der Flächendichte $\varrho_\sigma = \frac{e}{4\pi a^2}$. Dieser Zug muß aufgehoben werden durch einen (negativen) Druck im Inneren der Kugel**) vom Betrage

$$p^0 = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^{0\,2} = -\frac{e^2}{32\pi^2 a^4} = -\frac{1}{3}\frac{E_e^0}{V^0} \quad \cdot\cdot \quad (305)$$

denn es ist $V^0 = \frac{4\pi}{3}a^3$, $E_e^0 = \frac{e^2}{8\pi a}$ [vgl. § 17, e)].

Der Impulssatz ergibt:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}_e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (306)$$

Nun haben wir aber in § 20 [Gleichung (233)] gesehen, daß bei quasistationärer Beschleunigung die Kraft

$$\mathfrak{K}_e = -\frac{d\mathfrak{G}_e}{dt}$$

---

*) In Richtung einer Kraftlinie im leeren Raume herrscht nach (X) nämlich ein Zug, senkrecht dazu ein Druck vom Betrage $^1/_2\,\mathfrak{E}^2$ (vgl. auch § 18).

**) Dieser Schluß ist zwar nicht zwingend, weil der Spannungstensor $\boldsymbol{p}^0$ durch die Oberflächenkräfte nicht eindeutig bestimmt ist. Diese Unbestimmtheit hat aber keinen Einfluß auf das Ergebnis, wie die Betrachtung in § 33 zeigt.

ist, wobei nach (192)

$$\mathfrak{G}_e = \frac{4}{3} \frac{\mathfrak{q}}{c\sqrt{c^2 - q^2}} E_e^0$$

den elektromagnetischen Impuls des Feldes bedeutet. Demnach können wir (306) ersetzen durch die Beziehung:

$$\mathfrak{K} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_e) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (307)$$

Dabei ist analog zu (278c)

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_e = \mathfrak{q} f(q^2),$$

wenn man

$$f(q^2) = \frac{E^0 + p^0 V^0 + {}^4/_3 E_e^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}}$$

setzt. Die Dynamik der geladenen Kugel ist, wie der Vergleich mit (278b) lehrt, völlig identisch mit der eines Massenpunktes von der Ruhmasse

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{1}{c^2}\left(E^0 + p^0 V^0 + \frac{4}{3} E_e^0\right) = \frac{1}{c^2}(E^0 + E_e^0) \\ &= \frac{1}{c^2}\left(E^0 + \frac{e^2}{8\pi a}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (308)$$

Der Energiesatz lautet unter diesen Umständen nach Analogie von (286) oder (304):

$$(\mathfrak{q}\mathfrak{K}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{c(E^0 + E_e^0)}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (309)$$

Nach (XXVIII d) und (305) ist aber:

$$E = \frac{c^2 E^0 - {}^1/_3 q^2 E_e^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (310)$$

und nach (192):

$$E_e = \frac{c^2 + {}^1/_3 q^2}{c\sqrt{c^2 - q^2}} E_e^0,$$

also

$$E + E_e = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}(E^0 + E_e^0);$$

somit wird aus (309):

$$(\mathfrak{q}\mathfrak{K}) = \frac{d}{dt}(E + E_e), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (311)$$

wie es sein muß, da die Arbeit $(\mathfrak{q}\mathfrak{K})$ teils die mechanische, teils die elektromagnetische Energie steigert.

Wir haben in dieser Rechnung die elektromagnetische Energie von der mechanischen getrennt. Das Ergebnis (307) und (311) zeigt aber, daß beide Arten hier völlig gleichwertig sind. Wir hätten dies voraussehen können, da die elektromagnetische Energie im statischen Felde des ruhenden Elektrons ruht und so der Bedingung genügt, welche wir in § 26 für die mechanischen Energiearten aufgestellt haben.

Als elektrisch geladene Kugel fassen viele zurzeit das Elektron auf[3]). Der oben berechnete negative Druck p^0 in seinem Inneren muß die Abstoßung zwischen den Teilen seiner Ladung aufheben. Wenn wir diesen Druck hier als elastische Spannung behandeln, so liegt darin keine andere Hypothese, als daß die zu demselben Welttensor gehörende Energie im ruhenden Elektron ebenfalls ruht. Denn dieser Annahme zufolge fällt sie nach § 26 unter die Definition der mechanischen Energie. Wir finden so, freilich unter der Einschränkung auf Oberflächenladung (was aber unwesentlich ist, vgl. § 32b), diejenige Abhängigkeit der beiden Massen von der Geschwindigkeit, welche zuerst Lorentz, sodann Planck abgeleitet haben, und welche durch die glänzende Deutung der Feinstruktur der Spektrallinien, welche Sommerfeld gelungen ist, zum gesicherten Besitz der Wissenschaft geworden ist (§ 2). Auch bei der Dynamik des Elektrons steht die Relativitätstheorie in Übereinstimmung mit dem Experiment. Leider geht Sommerfelds Theorie, da sie wesentlich auf der Quantentheorie beruht, über den uns hier gesetzten Rahmen hinaus.

Man geht manchmal in den Annahmen über das Wesen der Elektronen aber noch weiter, indem man ihre Trägheit als rein elektromagnetisch auffaßt, d. h. den mechanischen Impuls $\mathfrak{G}$ gleich Null setzt. Dies bedeutet nach (XXVIII d) und (305), daß man

$$E^0 = -p^0 V^0 = {}^1/_3\, E_e^0$$

und die Ruhmasse nach (308)

$$m = \frac{4}{3\,c^2}\, E_e^0 = \frac{e^2}{6\,\pi\, c^2\, a} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (312)$$

setzt. Man muß nach (310) dann trotz des Verschwindens des mechanischen Impulses neben der elektromagnetischen Energie eine mechanische vom Betrage

$$E = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{3\,c}\, E_e^0$$

einführen (Abraham). Aus den experimentell bestimmbaren Werten des Elementarquantums e und des Verhältnisses $e:m$*) findet man nach (312), daß der Radius des Elektrons von der Größenordnung 10^{-13} cm sein muß. Ein zwingender Grund zu jener Annahme liegt aber weder in der Dynamik des Elektrons noch in sonstigen Versuchen. Gibt man der mechanischen Energie E^0 einen größeren Wert, so findet man nach (308) auch etwas größeres für den Radius a. Es liegt dieser Hypothese nur das Streben zugrunde, einem Dinge, dessen träge Masse 1850 mal kleiner ist als die des leichtesten chemischen Atoms, auch eine Trägheit von ganz anderer Art zuzuschreiben als der Materie. Im übrigen liegen unsere Kenntnisse über die Elektronen noch so in den Anfängen, daß ein abschließendes Urteil auf diesem Gebiete nicht möglich ist. In Bd. II werden wir auf diese Frage zurückkommen.

Die Stellung der Absoluttheorie zu diesen Fragen war eine wesentlich andere. Sie hatte keine Wahl, sondern mußte dem Elektron rein elektromagnetische Masse zuschreiben, um die beobachtete Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit einigermaßen zu erklären. Darin, daß die Relativitätstheorie hier noch viele Möglichkeiten (vgl. § 32) offen läßt, liegt vielleicht ein weiterer Vorzug gegenüber jener.

§ 30. Die Erhaltung des Drehimpulses.

In der klassischen Elastizitätstheorie steht die Symmetrie des Spannungstensors in engstem Zusammenhange mit dem Flächensatze, welcher die Erhaltung des Drehimpulses ausspricht. Wollen wir hier für die Unsymmetrie des Tensors $\mathfrak{t}$ den tieferen Grund suchen, so müssen wir auf diesen Satz eingehen. Daß er sich in der Relativitätstheorie bewährt und sogar noch einen größeren Gültigkeitsbereich erhält, haben wir schon in § 24, c) gesehen. Doch wollen wir im folgenden diese Frage von neuem auf etwas anderem Wege behandeln.

*) e/m ergibt sich aus der Ablenkbarkeit der Elektronenstrahlen im elektrischen oder magnetischen Felde; das Elementarquantum e ist neuerdings auf viele verschiedene Arten in vortrefflicher Übereinstimmung zu $4{,}65 \,.\, 10^{-10} \sqrt{4\pi}$ gefunden worden, unter anderem so, daß man die elektrochemisch bestimmte Ladung des Grammatoms eines einwertigen Elektrolyten durch die Zahl der Atome im Grammatom dividiert.

Wie schon erwähnt, definieren wir den Drehimpuls, welcher in einem bestimmten räumlichen Bereich enthalten ist, durch das Integral

$$\mathfrak{L} = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}]\, dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (313)$$

erstreckt über diesen Bereich; $\mathfrak{r}$ ist der Radiusvektor, welcher von einem beliebigen festen Punkte nach dS weist. Fragen wir nach der Veränderung von $\mathfrak{L}$ mit der Zeit, so ist bei der Differentiation jeder Bereich dS als unveränderlich nach Lage und Größe zu betrachten. Infolgedessen ist nach (289) und (ξ'')

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \int [\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{g}}]\, dS = -\int [\mathfrak{r}\, \mathfrak{div}\, \boldsymbol{p}]\, dS = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{p}_n]\, d\sigma \quad . \quad . \quad (314)$$

wo $\mathfrak{p}_n$ der Vektor mit den Komponenten

$$\mathfrak{p}_{nx} = \boldsymbol{p}_{xx} \cos nx + \boldsymbol{p}_{xy} \cos ny + \boldsymbol{p}_{xz} \cos nz$$

ist. (Vgl. $\boldsymbol{v}'$.)

Nun aber fragen wir nach dem Drehimpuls eines materiellen Volumenelementes δV; er ist

$$[\mathfrak{r}\mathfrak{g}]\, \delta V = [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}\, \delta V].$$

Berechnen wir hier den Differentialquotienten nach der Zeit, so ist zu berücksichtigen, daß sich nicht nur $\mathfrak{g}$, sondern auch δV nach Größe und Lage, also auch der Vektor $\mathfrak{r}$ ändert; und zwar ist $\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{q}$. Könnten wir den Impuls $\mathfrak{g}\, \delta V$ als konstant ansehen, so wäre dieser Differentialquotient gleich

$$[\dot{\mathfrak{r}}, \mathfrak{g}\, \delta V] = [\mathfrak{q}, \mathfrak{g}\, \delta V].$$

So aber tritt nach ϱ noch als Summand hinzu:

$$[\mathfrak{r}, \frac{d}{dt} (\mathfrak{g}\, \delta V)] = [\mathfrak{r}\underline{\dot{\mathfrak{g}}}]\, \delta V.$$

Bei einem bewegten Körper ist infolgedessen nach (293)

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \int \{[\mathfrak{r}\underline{\dot{\mathfrak{g}}}] + [\mathfrak{q}\mathfrak{g}]\}\, \delta V = \int \{-[\mathfrak{r}, \mathfrak{div}\, \boldsymbol{t}] + [\mathfrak{q}\mathfrak{g}]\}\, \delta V \quad . \quad . \quad (315)$$

Den ersten Teil des rechts stehenden Raumintegrales kann man durch partielle Integration umformen und findet so nach ξ':

$$\frac{d\mathfrak{L}_x}{dt} = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{t}_n]_x\, d\sigma + \int \{\boldsymbol{t}_{zy} - \boldsymbol{t}_{yz} + [\mathfrak{q}\mathfrak{g}]_x\}\, \delta V \quad . \quad . \quad (316)$$

usw. Nach (292) ist aber

$$\boldsymbol{t}_{zy} - \boldsymbol{t}_{yz} = \mathfrak{g}_y \mathfrak{q}_z - \mathfrak{g}_z \mathfrak{q}_y = -[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (317)$$

Da somit das Volumenintegral verschwindet, folgt schließlich:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_n]\, d\sigma \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (318)$$

Das rechts stehende Flächenintegral ist das von der Umgebung vermöge der elastischen Spannungen auf die Oberfläche des Körpers ausgeübte Drehmoment, da nach § 28b $\mathfrak{t}_n\, d\sigma$ die auf $d\sigma$ wirkende Kraft ist. Berechnen wir umgekehrt das Drehmoment, welches der Körper auf seine Umgebung ausübt, so finden wir wiederum $\int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_n]\, d\sigma$, nur hat jetzt die Normale n die nach außen weisende Richtung; infolgedessen ist nach (ν') $\mathfrak{t}_n$ und $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{t}_n]$ den früheren Werten entgegengesetzt gleich. Sofern also auf die Umgebung kein anderes Drehmoment ausgeübt wird, können wir für die Änderung des Drehimpulses $\mathfrak{L}^a$ der Umgebung die Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{L}^a}{dt} = -\frac{d\mathfrak{L}}{dt}, \quad \mathfrak{L} + \mathfrak{L}^a = const$$

aus (318) folgern. Die Summe der Drehimpulse bleibt also erhalten. Denselben Schluß hätte man natürlich auch aus (314) ziehen können.

Handelte es sich um einen Vorgang, bei welchem mechanische, elektromagnetische und sonstige Erscheinungen gleichzeitig auftreten, so blieben genau dieselben Betrachtungen bestehen, nur treten an die Stelle des mechanischen Impulses, Drehimpulses, der absoluten und relativen Spannungen die Summen aus den entsprechenden Größen für alle diese Erscheinungsgebiete.

Genau dieselben Betrachtungen gelten auch in der klassischen Mechanik, nur vereinfacht durch den Umstand, daß die Impulsdichte $\mathfrak{g}$ stets die Richtung der Geschwindigkeit hat und das Vektorprodukt $[\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]$ infolgedessen verschwindet. Damit die Gleichung (318) trotzdem bestehen bleibt, muß infolgedessen an die Stelle von (317) treten:

$$t_{zy} - t_{yz} = 0,$$

der Tensor der elastischen Spannungen also symmetrisch sein Die Unsymmetrie des Tensors t der elastischen Spannungen beruht somit auf dem Auftreten einer transversalen Impulskomponente.

Bewegt sich das Element δV stationär und bei unveränderlichem inneren Zustande, so ist $\dot{\mathfrak{g}} = 0$. Trotzdem tritt im all-

gemeinen eine Zunahme des Drehimpulses auf, welche durch ein Drehmoment hervorgerufen sein muß. Im allgemeinen bedarf ein elastisch gespanntes Körperelement und ebenso ein endlicher Körper zu gleichförmiger translatorischer Bewegung eines Drehmomentes. Nur wenn die Impulsdichte bzw. der Gesamtimpuls in der Richtung der Geschwindigkeit liegt, fällt dies fort. Man erkennt ohne weiteres, daß dieser Satz die Erklärung für den Trouton-Nobleschen Kondensatorversuch enthält. Die materiellen Teile des Kondensators sind elastisch gespannt, bedürfen also eines Drehmomentes zu translatorischer Bewegung. Daß das früher errechnete Drehmoment auch der Größe nach das dazu notwendige ist, können wir freilich erst in § 32 zeigen.

Man kann sich an Hand der obigen Gleichungen leicht überzeugen, daß dies Drehmoment bei rein mechanischen Vorgängen von den elastischen Spannungen infolge deren Unsymmetrie hervorgerufen wird. Doch wollen wir dies noch einmal an einem der klassischen Elastizitätstheorie entlehnten Beispiel veranschaulichen. Das Element δV sei ein Parallelepiped, wir legen die Koordinatenrichtungen parallel zu seinen Kanten von den Längen dx, dy, dz. Da wir bei Anwendung der Gleichung (315) den Anfangspunkt für den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ in das Element dV selbst verlegen dürfen, so wird beim Grenzübergang zu unendlich kleinen Dimensionen $[\mathfrak{r}\dot{\underline{\mathfrak{g}}}]\delta V$ klein von höherer Ordnung, so daß im Limes

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = [\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]\,dx\,dy\,dz$$

wird. Andererseits sieht man nach v' leicht, daß auf die beiden zur z-Richtung senkrechten Seiten $dy\,dx$ in der y-Richtung die Kräfte $\pm t_{yz}\,dy\,dx$ wirken, welche das Drehmoment $t_{yz}\,dy\,dx\,dz$ um die x-Achse liefern. Auf die zur y-Richtung senkrechten Flächen $dz\,dx$ wirken Kräfte in der z-Richtung, welche analog das Drehmoment $-t_{zy}\,dz\,dx\,dy$ um dieselbe Achse ergeben. Die Summe daraus

$$(t_{yz} - t_{zy})\,dx\,dy\,dz = [\mathfrak{q}\,\mathfrak{g}]_x\,dx\,dy\,dz$$

ist in der Tat nach der vorletzten Gleichung gleich der Zunahme der x-Komponente des Drehimpulses.

§ 31. Zwei Beispiele für die Erhaltung des Drehimpulses.

a) Der Winkelhebel[1]). Im berechtigten Bezugssystem K^0 ruht ein Winkelhebel ABC (Fig. 21) mit zwei zueinander senkrechten Armen; beide haben die Länge l^0. In B ist er um eine zu seiner Ebene senkrechten Achse drehbar. In A und C greifen zwei der Größe nach gleiche Kräfte $\mathfrak{K}_1^0$ und $\mathfrak{K}_2^0$ an; $\mathfrak{K}_1^0$ parallel zu $\overrightarrow{BC}$, $\mathfrak{K}_2^0$ zu $\overrightarrow{BA}$. Die Drehmomente dieser Kräfte sind $\pm|\mathfrak{K}_1^0|l^0$ und heben sich gegenseitig auf. Der Hebel ist also im Gleichgewicht.

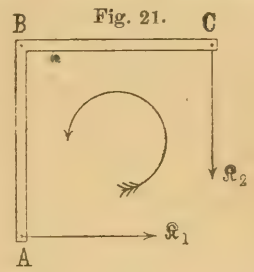


Fig. 21.

Betrachten wir diesen Zustand von einem anderen Bezugssystem K aus, gegen das K^0 die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ in der Richtung $\overrightarrow{BC}$ besitzt. Der Arm AB hat in ihm die Länge $l_1 = l^0$, dagegen hat BC wegen der Lorentz-Kontraktion nur die Länge

$$l_2 = l^0 \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}.$$

Das Drehmoment beider Kräfte in dem in der Figur angegebenen Sinne ist:

$$|\mathfrak{M}| = |\mathfrak{K}_1| l_1 - |\mathfrak{K}_2| l_2.$$

Nach (187) bleibt nun die Größe der zur Geschwindigkeit parallelen Kraft $\mathfrak{K}_1$ beim Übergang von K^0 zu K erhalten, während die dazu senkrechte Kraft sich verringert:

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_1^0, \quad \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_2^0 \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c}.$$

Jenes Drehmoment erhält somit den Betrag*)

$$|\mathfrak{M}| = \frac{q^2}{c^2} l^0 |\mathfrak{K}_1^0|.$$

Der Hebel erfährt also ein Drehmoment, welches keine Drehung zur Folge hat; da er elastisch gespannt ist, bestätigt uns sein Beispiel den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Satz, daß ein solcher Körper im allgemeinen zu gleichförmiger translatorischer Bewegung eines Drehmomentes bedarf.

---

*) Dies hätte sich auch unmittelbar aus der Formel (201) in § 18 ableiten lassen.

Wir können aber noch weiter gehen und unmittelbar bestätigen, daß die Zunahme des Drehimpulses pro Zeiteinheit diesem Drehmoment gleich ist, wenn wir den Impuls des Hebels nach dem Satze von der Trägheit der Energie berechnen. Dieser Impuls hat einmal eine longitudinale Komponente, welche wie bei jedem Körper im wesentlichen von der Mitführung der mechanischen Energie in ihren verschiedenen Arten herrührt. Aus dem vorigen Paragraphen wissen wir aber, daß es für die Zunahme des Drehimpulses bei gleichförmiger Bewegung allein auf die transversale Komponente ankommt; wir sprechen im folgenden deswegen allein von ihr.

Im Punkte A leistet die Kraft $|\mathfrak{K}_1|$ die Arbeit $q|\mathfrak{K}_1|$. Ein Energiestrom, dessen Stärke (d. h. Stromdichte $\times$ Querschnitt der Strombahn) denselben Betrag hat, tritt also hier in den Hebel ein und pflanzt sich dort in gleicher Stärke bis zum Drehpunkte B fort. Dort tritt er in die Achse über; denn diese übt eine Kraft $-(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2)$ auf den Hebel aus, da ja die Summe aller auf ihn wirkender Kräfte 0 sein muß, leistet somit die Arbeit $-q|\mathfrak{K}_1|$. Die Kräfte $\pm\mathfrak{K}_2$ hingegen leisten weder in B noch in C Arbeit.

Um den Impuls zu finden, welcher dem genannten Energiestrom entspricht, hätten wir eigentlich seine Stromdichte über das Volumen des Armes AB zu integrieren. Da wir aber in dem Werte für die Stromstärke die Integration über den Querschnitt schon ausgeführt haben und die Stromstärke längs des ganzen Armes sich gleich bleibt, so wird der Impuls *):

$$|\mathfrak{G}| = \int \mathfrak{g}\,\delta V = \frac{q}{c^2} l_1 |\mathfrak{K}_1| = \frac{q}{c^2} l^0 |\mathfrak{K}_1^0|.$$

Zur Berechnung des Drehimpulses $\mathfrak{L} = \int [\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]\,\delta V$ wählen wir den Anfangspunkt O für den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ in der Verlängerung von BC (Fig. 22). Offenbar ist dann

$$|\mathfrak{L}| = OB \,.\, |\mathfrak{G}|,$$

und zwar weist die Richtung von $\mathfrak{L}$ senkrecht zur Ebene des Hebels nach oben. In der Zeit dt verschiebt sich aber der Hebel

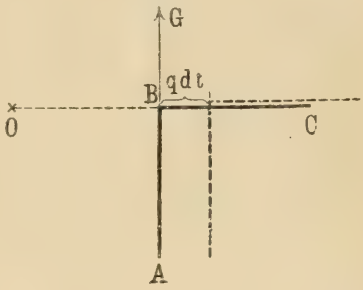
*) Nebenbei zeigt diese Gleichung, daß zur Beschleunigung eine transversale Kraft $\frac{q}{c^2} l^0 |\mathfrak{K}_1^0|$ gehört. [Vgl. § 28, c).]

in die gestrichelt gezeichnete Endlage, somit wächst OB um $q\,dt$ und $|\mathfrak{L}|$ nimmt pro Zeiteinheit zu um

$$\frac{d|\mathfrak{L}|}{dt} = q|\mathfrak{G}| = \frac{q^2}{c^2}\, l^0 |\mathfrak{K}_1^0|.$$

Man sieht hieran, daß das Drehmoment $\mathfrak{N}$ und die Zunahme $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}$ des Drehimpulses tatsächlich nach Richtung und Größe übereinstimmen, wie es der Flächensatz verlangt. Das Drehmoment, welches hier auf den Winkelhebel ausgeübt wird, hat sein Analogon in dem Drehmoment, welches nach § 23 auf die von einem Lichtstrahl durchsetzte Glasplatte zur Verhinderung der Drehung ausgeübt werden muß. In beiden Fällen hat nämlich eine seitliche Verschiebung des Impulses ein Wachsen des Drehimpulses zur Folge. Auf demselben Wege läßt sich an Hand der Fig. 15 zeigen, daß in den materiellen Teilen des Trouton-Nobleschen Kondensators (dazu gehören natürlich auch gewisse, nicht mitgezeichnete Stützen, die die Annäherung der Platten aneinander verhindern) eine transversale Impulskomponente besteht, und daß deswegen der mechanische Drehimpuls pro Zeiteinheit um genau denselben Betrag wächst, den wir in § 18 für das Drehmoment fanden. Wir überlassen diese einfache Rechnung dem Leser, weil wir im folgenden Paragraphen einen noch tiefer gehenden Beweis dafür finden werden.

Fig. 22.



b) Der bewegte Stromkreis im elektrischen Felde. Während unter a) ein Drehmoment auftrat, welches keine Drehung zur Folge hat, soll im folgenden von einer Drehung die Rede sein, welche gerade wegen des Fehlens eines Drehmomentes eintritt. Wir denken uns einen Ring aus nichtleitendem, unmagnetisierbarem Material von der Dielektrizitätskonstante 1 in gleichförmiger Verteilung positiv elektrisch geladen. Er drehe sich um seine Achse und bewege sich dabei in einer ringförmigen Röhre aus demselben Material, welche ebenfalls in gleichmäßiger Verteilung die entsprechende negative Ladung trägt. Es ist dies ein

zwar rohes, aber hier ausreichendes Modell für einen ungeladenen Stromkreis.

Bewegt sich das Ganze im System K parallel zur Achse des Ringes in einem zeitlich und räumlich unveränderlichen, zur Achse senkrechten elektrischen Felde, so wird sicherlich auf den Stromkreis weder eine resultierende Kraft noch ein Drehmoment ausgeübt; die Kraft ist Null, weil er die Gesamtladung Null hat, das Drehmoment $\mathfrak{N}$ aber verschwindet, weil man in dem Integral

$$\int [\mathfrak{r}\mathfrak{F}]\,\delta V = \mathfrak{N}$$

je zwei gleiche Kräfte $\mathfrak{F}\,\delta V$ zusammenfassen kann, für welche der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung hat, wenn man als Anfangspunkt für $\mathfrak{r}$ den Mittelpunkt des Ringes wählt. Trotzdem beginnt der Ring sich aus der angegebenen Lage herauszudrehen und sucht sich so einzustellen, daß seine Ebene parallel zur Geschwindigkeit wird.

Man beweist dies am einfachsten durch Transformation auf Ruhe. In K^0, dem Ruhsystem des Ringes, gegen welches K die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ hat, hat nämlich das in K rein elektrische äußere Feld auch einen magnetischen Anteil $\mathfrak{H}^0$, und zwar steht $\mathfrak{H}^0$, wie man am einfachsten an (185) sieht, auf $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{E}$ senkrecht, also auch senkrecht auf der Achse des Ringes. Ein ruhender Stromkreis aber sucht sich bekanntlich mit seiner Achse der magnetischen Feldstärke parallel zu stellen. Nach unseren Voraussetzungen steht er zunächst mit seiner Achse senkrecht dazu; also wird er, falls man ihn nicht sonst hindert, mit der Drehung beginnen. Es beginnt also auch im System K eine Drehung, obwohl kein Drehmoment vorhanden ist.

Dies zunächst verwunderliche Verhalten des Stromkreises erklärt sich leicht aus den Sätzen des § 30. An den Stellen nämlich, an welchen der rotierende Ring sich im Sinne der Feldstärke $\mathfrak{E}$ bewegt, leistet diese Arbeit, welche dem Ring an den Stellen wieder entzogen wird, an welchen die Bewegung dem Felde entgegen erfolgt. Das ergibt aus Symmetriegründen einen zum Felde senkrechten Energiestrom in der Ringebene und nach dem Satze von der Trägheit der Energie einen Impuls in derselben Richtung. Da diese unter den obigen Annahmen zur Geschwindigkeit senkrecht ist, so haben wir hier wiederum eine transversale Impulskomponente. Der Ring bedarf deshalb nach § 30 zur rein trans-

latorischen Bewegung eines Drehmomentes. Da es fehlt, beginnt er sich zu drehen, so lange, bis der besprochene Impuls zur Geschwindigkeit parallel wird.

§ 32. Das vollständige statische System.

a) Allgemeine Theorie. Aus den letzten Paragraphen sieht man, daß die relativistische Dynamik der Newtonschen gegenüber mancherlei Komplikationen zeigt. Eine bedeutende Vereinfachung tritt ein, sobald man die Dynamik eines vollständigen statischen Systems behandelt. Wir verstehen darunter ein solches physikalisches System, welches, ohne mit anderen Körpern in Wechselwirkung zu stehen*), in einem berechtigten Bezugssystem K^0 im statischen Gleichgewicht ist; z. B. ein elektrostatisches Feld mit Einschluß aller Ladungsträger. In ihm ist die Impulsdichte, bezogen auf das Ruhsystem, überall Null, und seine Energie haftet fest an ihrem Orte**). In jedem anderen System K, in welchem es eine gleichförmige Bewegung besitzt, macht, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die gesamte Energie, auch die etwa vorhandene elektromagnetische Energie (und die der Gravitation) die Bewegung mit. Infolgedessen können wir alle bisherigen Betrachtungen, von denen die genannten Energiearten zunächst ausgeschlossen waren, hier auf die Gesamtenergie anwenden.

Wir betrachten zunächst den Zustand dauernder Ruhe im Bezugssystem K^0. Da in ihm keine Energieströmung stattfindet,

---

*) Statt dieser Bedingung könnte man ohne wesentliche Veränderung die einführen, daß die Umgebung einen allseitig gleichen Druck p^0 ausüben soll. Dann träte an die Stelle von (320):

$$\int \mathfrak{p}^0_{xx}\,\delta V^0 = \int \mathfrak{p}^0_{yy}\,\delta V^0 = \int \mathfrak{p}^0_{zz}\,\delta V^0 = p^0 V^0,$$
$$\int \mathfrak{p}^0_{yz}\,\delta V^0 = \int \mathfrak{p}^0_{zx}\,\delta V^0 = \int \mathfrak{p}^0_{xy}\,\delta V^0 = 0,$$

so daß statt (321) die Formeln (XXVIII d) herauskämen.

**) Man könnte sogar noch elektrostatisch-magnetostatische Felder zulassen, trotzdem dann $\mathfrak{S}^0$ und $\mathfrak{g}^0$ von 0 verschieden würden. Das hätte zwar den Erfolg, daß in den Grundgleichungen (XXVIII a) und (XXVIII) gewisse zu $\mathfrak{g}^0$ proportionale Summanden auftreten. Doch würden diese bei der Integration über das vollständige System wieder verschwinden, da

$$\int \mathfrak{g}^0\,\delta V^0 = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}^0\,\delta V^0 = 0$$

ist. (XXVIII b) bliebe also ungeändert, desgleichen (319), weil $\dot{\mathfrak{g}}^0 = 0$ ist.

so ist auch die Impulsdichte $\mathfrak{g}$ überall dauernd Null. Und daraus folgt, daß für jeden Querschnitt des Systems (gleichgültig ob eben oder nicht)

$$\int \mathfrak{p}_n^0 \, d\sigma^0 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (319)$$

sein muß. Ergänzen wir ihn nämlich durch eine ganz außerhalb des vollständigen Systems verlaufende Fläche zu einer geschlossenen Fläche, so können wir für das eingeschlossene Volumen nach (289) und ξ schließen:

$$\int \mathfrak{g}^0 \, dS^0 = -\int \mathfrak{div}\, \boldsymbol{p}^0 \, dS^0 = \int \mathfrak{p}_n^0 \, d\sigma^0 = 0;$$

der Anteil jener Ergänzung am Oberflächenintegral verschwindet aber nach Voraussetzung für sich allein.

Wählen wir den Querschnitt als Ebene $x^0 = const$ (die x^0-Richtung ist dabei ganz willkürlich), so finden wir aus (319) und v':

$$\int \mathfrak{p}_{n\,x^0}^0 \, dy^0 \, dz^0 = \int \boldsymbol{p}_{x^0\,x^0}^0 \, dy^0 \, dz^0 = 0$$

$$\int \mathfrak{p}_{n\,y^0}^0 \, dy^0 \, dz^0 = \int \boldsymbol{p}_{x^0\,y^0}^0 \, dy^0 \, dz^0 = 0$$

usw. Multiplizieren wir diese Gleichungen mit dx^0, und integrieren wir dann über das ganze Volumen V^0 des vollständigen Systems, so folgt:

$$\int \boldsymbol{p}_{x^0\,x^0}^0 \, \delta V^0 = \int \boldsymbol{p}_{x^0\,y^0}^0 \, \delta V^0 = \int \boldsymbol{p}_{x^0\,z^0}^0 \, \delta V^0 = 0,$$

oder da das Entsprechende für alle anderen Komponenten des Tensors $\boldsymbol{p}^0$ gilt:

$$\int \boldsymbol{p}^0 \, \delta V^0 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (320)$$

Für ein vollständiges statisches System gehen somit die Gleichungen (XXVIII b) über in:

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \, E^0, \\ \mathfrak{G} &= \frac{\mathfrak{q}}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \, E^0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (321)$$

Ihre Übereinstimmung mit (XXVIII d) (wenn man dort den Druck $p^0 = 0$ setzt) beweist: Jedes vollständige statische System verhält sich bei quasistationärer Beschleunigung wie ein Massenpunkt unter dem Druck Null. Insbesondere tritt

keine transversale Impulskomponente auf; zur gleichförmigen translatorischen Bewegung ist deshalb kein Drehmoment nötig.

Für den Welttensor T_{ik} läßt sich unser Ergebnis in die Formel

$$\int T_{ik} \delta V^0 = E^0 Y_i Y_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (321\,\mathrm{a})$$

kleiden; diese enthält nämlich, auf das Ruhsystem angewandt, außer (320) nur noch die selbstverständliche Aussage $\int W^0 \delta V^0 = E^0$. Wir hatten sie schon früher für den spannungsfreien Körper benutzt, indem wir ihm in § 27 den Tensor $T_{ik} = W^0 Y_i Y_k$ zuordneten. Auch diese Betrachtung führt dazu, das vollständige statische System dynamisch als Massenpunkt aufzufassen.

b) Anwendung auf die Dynamik des Elektrons[4]). Ein System der genannten Art ist das Elektron mit seinem Felde; daher lehrt dies Ergebnis: Das Resultat von § 29, b), daß sich das Elektron bei quasistationärer Beschleunigung als Massenpunkt verhält, dessen Ruhmasse m sich nach der Formel $m = \frac{E^0}{c^2}$ aus der gesamten Energie E^0 berechnet, ist unabhängig von den dortigen besonderen Annahmen; es geht ohne jede besondere Voraussetzung aus (321) unmittelbar hervor. Man kann aus Versuchen über quasistationäre Beschleunigungen des Elektrons niemals einen Rückschluß ziehen auf seine Gestalt und Ladungsverteilung sowie über den Anteil des elektromagnetischen Impulses am Gesamtimpuls. Über seine Dimensionen läßt sich nur das folgern, daß sie nicht kleiner als 10^{-13} cm sein können; denn anderenfalls wäre die elektrostatische Energie E_e^0 und die Ruhmasse $m = 1/c^2 . E^0$ größer, als sich mit den Beobachtungen verträgt. (Im letzten Satze ist allerdings angenommen, daß die Maxwellsche Theorie auch in den kleinsten Räumen streng richtig ist und daß die nichtelektromagnetische Masse nie negativ werden kann; ob diese Annahme zutrifft, mag dahingestellt bleiben.)

Ferner ergibt sich z. B., daß die Korpuskeln der α-Strahlung des Radiums, wie sie auch konstituiert sein mögen, denselben dynamischen Gesetzen gehorchen wie die Elektronen. Da es sich bei ihnen zweifellos um materielle Atome handelt, wäre eine experimentelle Entscheidung zwischen der klassischen Mechanik und der Relativitätstheorie an ihnen besonders wichtig. Vorläufig dürften dem freilich unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen-

stehen. Hoffen wir, daß der rastlos fortschreitenden Experimentierkunst auch hier bald der Erfolg glückt.

c) Anwendung auf den Winkelhebel. Der Winkelhebel, von dem in § 31, a) die Rede war, läßt sich leicht zu einem vollständigen statischen System ergänzen. Er möge in einem Gehäuse liegen, an welchem die Drehachse befestigt ist und von welchem aus — etwa durch gespannte Federn — die Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ ausgeübt werden. Der oben betrachtete Energiestrom setzt sich, nachdem er bei B aus dem Hebel ausgetreten ist, in der Achse fort, tritt dann durch die Lager der Achse in das Gehäuse, gelangt von diesem in die bei A den Hebel angreifende Feder und wird so geschlossen. Bildet man das Integral $\int \mathfrak{S} \delta V$, so findet man den Wert Null, weil dieser Strom keine Quellen und Senken hat, sondern divergenzfrei ist*). Der gesamte von dieser Strömung herrührende Impuls verschwindet somit ebenfalls; das Ganze hat keine transversale Impulskomponente. Wohl aber hat das Gehäuse (einschließlich der Federn und der Achse) für sich allein eine solche Komponente. Sie ist der entsprechenden Komponente des Hebels entgegengesetzt gleich. Daraus folgt aber, daß das Gehäuse eines Drehmomentes zur translatorischen Bewegung bedarf, welches dem in § 31, a) berechneten entgegengesetzt gleich ist. Und dies übt der Hebel vermöge der Federn und der Achse auf das Gehäuse aus, während umgekehrt das Gehäuse das erstere Drehmoment auf den Hebel ausübt. Das Ganze aber bedarf ebensowenig wie der Massenpunkt, dem es dynamisch gleichwertig ist, eines Drehmomentes von außen.

d) Der Trouton-Noblesche Versuch. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun auch den Trouton-Nobleschen Versuch von einem System K aus erklären, in welchem sich der Kondensator bewegt. Wir sahen in § 18, daß sein Feld ein Drehmoment auf die materiellen Teile ausübt, und wir erwähnten schon

---

*) Integriert man $div\, \mathfrak{S} = 0$ über einen Raum, welcher durch einen ruhenden ebenen Querschnitt des Systems und außerdem durch irgend eine ganz außerhalb des Systems verlaufende Fläche begrenzt ist, so findet man $\int \mathfrak{S}_n d\sigma = 0$, dies Integral erstreckt über die ganze Begrenzung oder auch über den Querschnitt allein. Summiert man diese Beziehung über alle zur Richtung n senkrechten Querschnitte, so folgt $\int \mathfrak{S}_n \delta V = 0$, wobei n eine beliebige Richtung ist.

in § 30, daß diese wegen ihrer elastischen Spannungen eines Drehmomentes bedürfen. Hier sehen wir ohne weiteres ein, daß jenes elektromagnetische Drehmoment gerade die nötige Stärke besitzt. Denn das Ganze — die materiellen Teile und das Feld — ist ein vollständiges statisches System und muß sich deshalb ohne ein Drehmoment rein translatorisch bewegen. Wir können geradezu das Feld mit dem besprochenen Winkelhebel und die materiellen Teile mit dessen Gehäuse vergleichen. In beiden Teilen des Kondensators gibt es transversale Energieströme und Impulse, aber in dem ganzen System schließt sich dieser Energiestrom vollständig und die transversalen Impulse heben sich infolgedessen auf, genau wie wir dies beim Winkelhebel und seinem Gehäuse sahen.

§ 33. Thermodynamik.

a) Transformation der Entropie. In der Trägheit der Energie liegt begründet, daß sich die Dynamik nicht vollständig durchführen läßt, ohne daß man auf die Thermodynamik eingeht. Das wird sich z. B. in der Hydrodynamik zeigen. Um nun die Thermodynamik dem Relativitätsprinzip anzupassen, müssen wir vor allem untersuchen, wie sich ihr wichtigster quantitativer Begriff, die Entropie, zur Lorentz-Transformation verhält. Obwohl schlechthin jedem physikalischen System eine bestimmte Entropie zukommt, beschränken wir uns hier im allgemeinen auf Gleichgewichtszustände. Auch bei Zustandsänderungen soll sich jeder durchlaufene Zustand nur äußerst wenig von einem Gleichgewicht unterscheiden, so daß die Veränderung umkehrbar vor sich geht. Wir beschränken uns ferner auf rein translatorische Bewegung und auf den Fall, daß der Spannungszustand ein allseitig gleicher Druck p ist. Ein Körper hat dann fünf Bestimmungsstücke; nämlich drei thermodynamische, den absoluten Wert der Geschwindigkeit und etwa Volumen und Temperatur und außerdem zwei die Richtung der Geschwindigkeit bestimmende Winkel. An Stelle des absoluten Wertes der Geschwindigkeit und der Richtungswinkel führt man natürlich besser ihre drei Komponenten ein.

Den zweiten Hauptsatz, daß die Entropie aller an einem Prozeß beteiligten Systeme nur zunehmen kann, setzen wir dem Relativitätsprinzip zufolge als für alle berechtigten Bezugssysteme gültig an. In jedem berechtigten Bezugssystem K gilt somit der

Schluß, daß in einem abgeschlossenen physikalischen System ein umkehrbarer Vorgang die Entropie unverändert läßt. Wir denken uns nun einen Körper aus dem Zustande 1, in welchem er im System K ruht und die Entropie S_1 hat, adiabatisch-isopieistisch in den Zustand 2 gebracht, in welchem er die Geschwindigkeit q und die Entropie S_2 besitzt. Diese Beschleunigung ist zweifellos umkehrbar, so daß die gesamte Entropie des beschleunigten und des ihn beschleunigenden Körpers konstant bleibt. Stellen wir uns den letzteren ruhend vor, so wissen wir aus der klassischen Thermodynamik (die wir für ruhende Körper unbedenklich beibehalten können), daß seine Entropie durch die Leistung der Beschleunigungsarbeit nicht verändert wird, daher gilt dasselbe für die des beschleunigten Körpers, d. h. es ist $S_2 = S_1$. Der letztere gerät nun bei dem beschriebenen Vorgange in den Ruhezustand, bezogen auf ein System K', welches die Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = q$ gegen K hat, und zwar ist der Zustand 2 bezogen auf K' genau derselbe wie der Zustand 1 bezogen auf K, da der innere Zustand bei einer adiabatisch-isopieistischen Beschleunigung konstant bleibt. Also ist $S_2' = S_1$, somit auch $S_2' = S_2$, und da wir als Zustand 2 schlechthin jeden wählen können, so gilt allgemein:

$$S = S' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XXIX)}$$

Die Entropie ist eine Invariante der Lorentz-Transformation (Planck).

Der angegebene Beweis bezog sich zunächst nur auf Gleichgewichtszustände. Die allgemeinste Definition der Entropie beruht aber auf ihrem Zusammenhange mit der Wahrscheinlichkeit (Boltzmann), wobei die letztere durch die Zahl aller derjenigen Komplexionen bestimmt ist, welche einen und denselben thermodynamischen Zustand ergeben. Daß deren Abzählung für verschiedene berechtigte Systeme zu verschiedenen Resultaten führt, ist schon deshalb ausgeschlossen, weil es sich dabei, genau genommen, stets um ganze Zahlen handelt — nur wird durch die Benutzung von Näherungswerten diese Tatsache meist verdunkelt — und weil andererseits jede von der Relativgeschwindigkeit zweier Systeme abhängige physikalische Größe eine stetige Funktion davon sein muß. Denn zwei Bezugssysteme mit allen ihren Raum- und Zeitbestimmungen gehen stetig ineinander über, wenn man ihre Relativgeschwindigkeit kleiner und kleiner werden läßt; deshalb müssen die Werte derselben physikalischen Größe, deren

Unterschiede doch in letzter Linie auf Verschiedenheit der Raum- und Zeitmessung beruhen, ebenfalls dabei stetig ineinander übergehen. Der Satz von der Invarianz der Entropie muß also ohne die Beschränkung auf Gleichgewichtszustände gelten *).

b) Transformation der Temperatur. Die Temperatur T definiert man bekanntlich durch die Festsetzung, daß bei einer umkehrbaren Zuführung der unendlich kleinen Wärmemenge Q

$$dS = \frac{Q}{T} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (322)$$

sein soll. Wir übernehmen sie aus der klassischen Thermodynamik nicht nur für ruhende Körper, d. h. bezogen auf das mit der Materie bewegte System K^0, sondern ganz allgemein. Darin liegt eine Erweiterung der Temperaturdefinition; die Definition, welche die klassische Thermodynamik aus dem zweiten Hauptsatz gibt, gilt zunächst nur für ruhende Körper. Die Eigenschaft der Temperatur, für den Differentialausdruck, als der sich Q darstellt, den integrierenden Divisor abzugeben, bleibt dabei erhalten; denn es folgt aus (322) wegen der Invarianz von dS, daß Q/T in jedem Bezugssystem den gleichen Wert hat, wie für das Ruhsystem K^0, für das jener Satz bekannt ist. Ebenso bleibt das Carnotsche Prinzip in Kraft; denn der Wärmeübergang zwischen zwei verschieden temperierten Körpern ist nach (322) dann mit einer Entropiezunahme verknüpft, wenn der wärmere Körper dabei Wärme abgibt.

Nun haben wir schon in § 24, Gleichung (269) abgeleitet, daß sich die pro Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge R nach der Formel

$$\frac{R}{R^0} = \frac{c^2 - q^2}{c^2}$$

umrechnet; die während eines infinitesimal kurzen Vorganges zugeführte ist aber $Q = R\,dt$, somit ist, da nach (29) oder (52)

$$\frac{dt}{dt^0} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}},$$

$$\frac{Q}{Q^0} = \frac{R\,dt}{R^0\,dt^0} = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (323)$$

Setzt man aber nach (XXIX) und (322)

$$\frac{Q}{T} = \frac{Q^0}{T^0},$$

*) Wendet man ihn auf ein Strahlenbündel an, so findet man (wohl auf dem kürzesten Wege) das Wiensche Verschiebungsgesetz.

so findet man aus (323):

$$\frac{T}{T^0} = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c},$$

so daß die Transformationsformel für die Temperatur lautet:

$$\frac{T}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{T'}{\sqrt{c^2 - q'^2}} = \frac{T^0}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (XXX)$$

Die Temperatur transformiert sich also wie das Volumen, sie ändert sich daher auch wie das letztere in demselben Bezugssystem, wenn man den Körper adiabatisch und bei konstantem Druck aus der Ruhe heraus beschleunigt, d. h. sie sinkt dabei auf das $\sqrt{1 - q^2/c^2}$ fache der Anfangstemperatur. Dies sehr paradoxe Ergebnis hängt auf das engste mit der in Gleichung (323) implizite steckenden Trägheit der Energie zusammen.

c) Bestätigung von (XXX). Um dies zu veranschaulichen, denken wir uns den folgenden Kreisprozeß beim Drucke Null ausgeführt. Ein Körper befinde sich anfangs im Zustande a in Ruhe auf der Temperatur T_1, diese Angabe, wie die folgenden, bezogen auf irgend ein berechtigtes Bezugssystem K. Wir führen ihm aus einem ruhenden Wärmebehälter umkehrbar und isotherm die Wärmemenge Q_1 zu, wodurch er in den Zustand b kommt. Die Ruhenergie wächst dabei von E_a^0 auf E_b^0; Fig. 23 gibt dies in einem Diagramm an, in welchem die Geschwindigkeit q und E^0 die Koordinaten darstellen. Dann beschleunigen wir den Körper adiabatisch auf die Geschwindigkeit q; so kommt er in den Zustand c von der Temperatur T_2. Weiter führen wir ihm aus einem mitbewegten Wärmebehälter umkehrbar und isotherm, sowie bei konstantem q die (negative) Wärmemenge Q_2 zu (Zustand d) und bemessen diese so, daß die Ruhenergie, welche bei c noch den höheren Wert E_b^0 hatte, jetzt auf den niederen Wert E_a^0 sinkt. Dann wird bei adiabatischer Verminderung der Geschwindigkeit bis zur Ruhe gerade wieder der Zustand a erreicht.

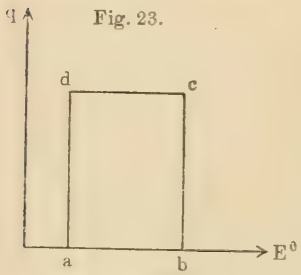


Fig. 23.

Nach dem Energieprinzip, angewandt auf den Übergang von a nach b, ist

$$E_b^0 - E_a^0 = Q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (324)$$

Zur Berechnung der Differenz $E_d - E_c$ müssen wir dagegen bedenken, daß bei dem Übergang von c nach d außer der Wärme Q_2 noch eine Arbeit A_2 zugeführt wird. Denn dabei ändert sich ja der Impuls nach (321) um

$$\Delta \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{q}(E_d^0 - E_c^0)}{c^2\sqrt{1-q^2/c^2}} = \frac{\mathfrak{q}(E_a^0 - E_b^0)}{c^2\sqrt{1-q^2/c^2}} = -\frac{\mathfrak{q}\,Q_1}{c^2\sqrt{1-q^2/c^2}} \quad . \quad . \quad (325)$$

die zugehörige Arbeit ist

$$A_2 = \int (\mathfrak{q}\,\mathfrak{K})dt = (\mathfrak{q}, \Delta\mathfrak{G}) = -\frac{q^2}{c^2}\,\frac{Q_1}{\sqrt{1-q^2/c^2}} \quad . \quad (326)$$

Also ist

$$E_d - E_c = Q_2 + A_2 = Q_2 - \frac{q^2}{c^2}\,\frac{Q_1}{\sqrt{1-q^2/c^2}} \quad . \quad . \quad (327)$$

Andererseits ist aber nach (321)

$$E_d - E_c = \frac{E_a^0 - E_b^0}{\sqrt{1-q^2/c^2}} = -\frac{Q_1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad (328)$$

also folgt:

$$Q_2 = -Q_1\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (329)$$

In dieser Gleichung liegt zunächst eine Bestätigung von (323). Denn der Übergang von d nach c wäre genau dasselbe wie der Übergang von a nach b, nur bezogen auf ein anderes System K'. Infolgedessen muß

$$-Q_2' = Q_1$$

sein. Da K' für den Übergang von d nach c aber das Ruhsystem wäre, so ergibt sich daraus sogleich wieder die Formel (323).

Wir bleiben hier aber bei unserem Kreisprozeß und dürfen für ihn $\int dS = 0$ setzen, da der Körper in den Anfangszustand zurückkehrt. Also ist nach (322) $\Sigma\frac{Q}{T} = 0$ und im vorliegenden Falle $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$, somit

$$T_2 = T_1\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}\,.$$

Damit ist bestätigt, daß die Temperatur eines Körpers bei adiabatisch-isopieistischer Beschleunigung bis zur Geschwindigkeit q auf das $\sqrt{1-q^2/c^2}$-fache sinkt.

Es sei hier noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Transformationsformel (XXX) im Gegensatz zu (XXIX) nur für thermodynamische Gleichgewichtszustände gilt; für einen Vorgang, der davon so weit abweicht wie ein Strahlenbündel, gilt ein ganz anderes Gesetz (v. Mosengeil).

d) Das dynamische Potential H. Ein zwar abgeleiteter, aber dennoch sehr wichtiger thermodynamischer Begriff ist die freie Energie, welche wir für einen ruhenden Körper mit F^0 bezeichnen wollen. Bekanntlich ist

$$F^0 = E^0 - T^0 S^0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (330)$$

Führt man als unabhängige Veränderliche das Volumen V^0 und die Temperatur T^0 ein, so gilt:

$$\frac{\partial F^0}{\partial V^0} = \frac{\partial E^0}{\partial V^0} - T^0 \frac{\partial S^0}{\partial V^0}, \quad \frac{\partial F^0}{\partial T^0} = \frac{\partial E^0}{\partial T^0} - S^0 - T^0 \frac{\partial S^0}{\partial T^0}.$$

Andererseits ist nach der thermodynamischen Definition der Entropie

$$d S^0 = \frac{d E^0 + p^0 d V^0}{T^0},$$

also

$$\frac{\partial S^0}{\partial V^0} = \frac{1}{T^0}\left(\frac{\partial E^0}{\partial V^0} + p^0\right), \quad \frac{\partial S^0}{\partial T^0} = \frac{1}{T^0}\frac{\partial E^0}{\partial T^0} \quad \ldots \quad (331)$$

Daraus folgt dann:

$$\frac{\partial F^0}{\partial V^0} = -p^0, \quad \frac{\partial F^0}{\partial T^0} = -S^0 \quad \ldots\ldots \quad (332)$$

Betrachten wir nun für einen bewegten Körper die Funktion:

$$H = \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} H^0, \quad H^0 = -F^0 \quad \ldots\ldots \quad (333)$$

Ist hier F^0 als Funktion von V^0 und T^0 gegeben, so ist H als Funktion von q, V, T bestimmt, da sich aus V, T und q nach (31) und (XXX)

$$V^0 = V \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad T^0 = T \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}$$

berechnen lassen. Und zwar findet man nach (333), (332), (330), (296) und (XXIX), da

$$\left(\frac{\partial V^0}{\partial q}\right)_V = \frac{q}{c^2 - q^2} V^0, \quad \left(\frac{\partial T^0}{\partial q}\right)_T = \frac{q}{c^2 - q^2} T^0$$

ist, durch leichte Umrechnung die folgenden Differentialgleichungen:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_{q,T} = \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\frac{\partial H^0}{\partial V^0}\left(\frac{\partial V^0}{\partial V}\right)_q = -\frac{\partial F^0}{\partial V^0} = p^0 = p,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{q,V} = \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\frac{\partial H^0}{\partial T^0}\left(\frac{\partial T^0}{\partial T}\right)_q = -\frac{\partial F^0}{\partial T^0} = S^0 = S.$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{T,V} = -\frac{qH^0}{c\sqrt{c^2-q^2}} + \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\left[\frac{\partial H^0}{\partial V^0}\left(\frac{\partial V^0}{\partial q}\right)_V + \frac{\partial H^0}{\partial T^0}\left(\frac{\partial T^0}{\partial q}\right)_T\right],$$

$$= \frac{q}{c\sqrt{c^2-q^2}}(F^0 + T^0 S^0 + p^0 V^0)$$

$$= \frac{q}{c\sqrt{c^2-q^2}}(E^0 + p^0 V^0),$$

Endlich ist

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_x}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{T,V}\frac{\partial q}{\partial \mathfrak{q}_x} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{T,V}\cdot\frac{\mathfrak{q}_x}{q},$$

also schließen wir nach (XXVIII d) auf die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_x}\right)_{T,V} = \mathfrak{G}_x \text{ usw.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (334)$$

wo die Indices die konstant zu haltenden Variablen angeben. Der Impulssatz $\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ ergibt somit, angewandt auf die drei Koordinatenrichtungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_x}\right)_{T,V}\right] = \mathfrak{K}_x, \quad \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_y}\right)_{T,V}\right] = \mathfrak{K}_y, \\ \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_z}\right)_{T,V}\right] = \mathfrak{K}_z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (335)$$

Dazu kommen noch:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_{q,T} = p, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{q,V} = S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (336)$$

Formen wir schließlich den Ausdruck

$$\mathfrak{q}_x\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_x} + \mathfrak{q}_y\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_y} + \mathfrak{q}_z\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_z} + T\frac{\partial H}{\partial T} - H$$

nach (333), (334), (336), (XXVIII d), (XXX) und (XXIX) um, so finden wir für ihn den Wert:

$$(\mathfrak{q}\mathfrak{G}) + TS - H$$

$$= \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\left(\frac{q^2}{c^2}(E^0 + p^0 V^0) + \frac{c^2-q^2}{c^2}(T^0 S^0 + F^0)\right)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\left(E^0 + \frac{q^2}{c^2}p^0 V^0\right),$$

also ist nach (XXVIII d):

$$\mathfrak{q}_x \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_x} + \mathfrak{q}_y \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_y} + \mathfrak{q}_z \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_z} + T \frac{\partial H}{\partial T} - H = E \quad . \quad . \quad . \quad (337)$$

Aus dieser Gleichung bestimmt sich die Energie E, sobald man die Funktion H kennt. Wir nennen H das dynamische Potential.

e) Isotherm-isochore Dynamik. Als wir in §29 den Wert (XXVIII d) für $\mathfrak{G}$ mit konstanten E^0, p^0, V^0 in die Impulsgleichung $\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$ einsetzten, erhielten wir die Grundgleichung der adiabatisch-isopieistischen Mechanik. Bestimmen wir hier nach (333) H aus der freien Energie F^0, so ergeben die Gleichungen (335), indem man auch bei der Zeitdifferentiation V und T konstant hält, die Grundlagen der isotherm-isochoren Dynamik. Während dort aber die Natur des Körpers nicht weiter in Betracht kam und wir z. B. für die transversale und longitudinale Masse universelle Funktionen der Geschwindigkeit fanden, ist hier die Dynamik wesentlich durch die für den Körper charakteristische freie Energie F^0 bedingt. Denn, wie schon die obige Rechnung zeigte, sind V^0 und T^0 und damit auch F^0 bei konstantem V und T Funktionen der Geschwindigkeit. Bei kleinen Geschwindigkeiten macht sich diese Abhängigkeit allerdings nur in Größen zweiter Ordnung geltend [vgl. (31) und (XXX)]; vernachlässigt man daher q^2/c^2 gegen 1, so fällt die isotherm-isochore mit der adiabatisch-isopieistischen Dynamik und beide — da unter den jetzigen Annahmen des allseitig gleichen Druckes die transversale Impulskomponente fortfällt — mit der klassischen Mechanik zusammen. — Außer den beiden genannten Arten der Dynamik kann man natürlich auch noch andere, z. B. eine isotherm-isopieistische aufstellen, indem man bei der Zeitdifferentiation in (335) T und p als konstant ansieht.

f) Das Prinzip der kleinsten Wirkung. Das Prinzip der kleinsten Wirkung sagt aus: Unter allen denkbaren Vorgängen, welche einen beliebigen, äußeren Einflüssen unterworfenen Körper in vorgegebener Zeit (von t_1 bis t_2) von einem vorgegebenen Anfangs- in einen vorgegebenen Endzustand überführen, ist der wirkliche Vorgang dadurch ausgezeichnet, daß für ihn das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta H + A)\, dt = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (338)$$

ist. Die Variationen δ bezeichnen dabei beliebige Verschiebungen der unabhängigen Koordinaten bei konstanter Zeit, welche natürlich mit entsprechenden Veränderungen der zugehörigen Geschwindigkeiten verbunden sind; für t_1 und t_2 sollen die Verschiebungen der Koordinaten verschwinden. A ist der Energiezuwachs, welchen der Körper durch diese Verschiebungen δ erfährt. Als Koordinaten gelten hier nicht nur die Kartesischen Koordinaten x, y, z eines (beliebig gewählten) Punktes im Körper, sondern auch zwei thermodynamische Variable, darunter das Volumen V. Unter den Geschwindigkeiten sind ihre Ableitungen nach der Zeit verstanden.

Unabhängig von dieser Bedeutung bezeichnen wir die Koordinaten zunächst mit φ_1, φ_2 usw., ihre Ableitungen mit $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ usw. Der Energiezuwachs A ist durch einen Ausdruck von der Form

$$A = \Phi_1 \delta \varphi_1 + \Phi_2 \delta \varphi_2 + \cdots = \Sigma \Phi \delta \varphi$$

gegeben, in welchen Φ_1, Φ_2 usw. die „generalisierten" Kräfte sind; im Fall, daß $\varphi = x$, wird Φ einfach die x-Komponente der Kraft $\mathfrak{K}$. Die Funktion H wird als abhängig von den Koordinaten und ihren Ableitungen angesehen [vgl. (334) und (336)]; somit ist

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1 + \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} \delta \varphi_2 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}_1} \delta \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}_2} \delta \dot{\varphi}_2 + \cdots$$
$$= \sum \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} \right).$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung (338) verlangt nun:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} + \Phi \delta \varphi \right) dt = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (339)$$

Hier sind die Variationen $\delta \varphi_1$, $\delta \varphi_2$ usw. unabhängig voneinander; wären nur sie vorhanden, so müßten hier, da die Gleichung (339) für alle denkbaren Variationen erfüllt sein soll, die Koeffizienten von $\delta \varphi_1$, $\delta \varphi_2$ usw. einzeln verschwinden. Da aber außerdem noch die Variationen $\delta \dot{\varphi}$ der Geschwindigkeiten auftreten, und diese mit den Variationen der Koordinaten durch die Beziehung

$$\delta \dot{\varphi} = \delta \frac{d \varphi}{dt} = \frac{d \delta \varphi}{dt}$$

verknüpft sind, müssen wir die von ihnen abhängigen Summanden zunächst durch partielle Integration umformen. In Rücksicht auf das Verschwinden der $\delta \varphi$ für t_1 und t_2 finden wir dabei:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d \delta \varphi}{dt} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi \, dt.$$

Dies eingesetzt, ergibt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \Phi \right) \delta \varphi \, dt = 0,$$

woraus für jede der Koordinaten φ eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \Phi = 0 \quad \ldots \ldots \quad (340)$$

folgt.

Bei Anwendung dieser Gleichung sind nun freilich unter den Koordinaten φ zwei Arten zu unterscheiden. Das kinetische Potential H hängt nämlich bei einigen von ihnen nur von φ selbst, nicht aber von $\dot{\varphi}$ ab; das gilt z. B. vom Volumen V. Dagegen treten gewisse andere Koordinaten φ in H nicht selbst, sondern nur in ihren Ableitungen $\dot{\varphi}$ auf; dazu gehören die Koordinaten x, y, z. Der Anteil der genannten Größen an dem Energiezuwachs A ist

$$\mathfrak{K}_x \delta x + \mathfrak{K}_y \delta y + \mathfrak{K}_z \delta z - p \delta V.$$

Einigermaßen zweifelhaft erscheint, zu welcher Art man die zweite thermodynamische Koordinate zählen soll. Wir haben oben die Temperatur T als Zustandsvariable gewählt, und man könnte daran denken, sie hier wie das Volumen V zu behandeln. Bedenkt man aber, in welch enger Beziehung nach der kinetischen Wärmetheorie die Temperatur zur Molekularbewegung steht, so wird man nach dem Vorgange von Helmholtz[1]) sie lieber als die Ableitung

$$T = \frac{da}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (341)$$

einer Koordinate a betrachten, welche selbst in H nicht auftritt. Der entsprechende Anteil an dem Energiezuwachs A ist die bei der Verschiebung δ zugeführte Wärme, also:

$$\Phi_a \delta a = T \delta S.$$

Wenn dies aber für alle denkbaren Vorgänge gelten soll, so muß auch für den wirklichen Vorgang

$$\Phi_a \frac{da}{dt} = T \frac{dS}{dt},$$

also nach (341)

$$\Phi_a = \frac{dS}{dt}$$

sein. Der vollständige Ausdruck für A lautet somit:

$$A = \mathfrak{K}_x \delta x + \mathfrak{K}_y \delta y + \mathfrak{K}_z \delta z - p \delta V + \frac{dS}{dt} \delta a.$$

So nehmen die Gleichungen (340) die Form an:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_x}\right) = \mathfrak{K}_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_y}\right) = \mathfrak{K}_y, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{q}_z}\right) = \mathfrak{K}_z$$

$$\frac{\partial H}{\partial V} = p. \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right) = \frac{dS}{dt}.$$

Bei Integration der letzten unter ihnen findet man, da man die hier bedeutungslose Integrationskonstante Null setzen kann:

$$\frac{\partial H}{\partial T} = S.$$

Wir finden somit als Bedingungen für die Gültigkeit des Prinzips der kleinsten Wirkung die Gleichungen (335) und (336) wieder. Es läßt sich dies Prinzip in die Relativitätstheorie übernehmen.

Freilich bleiben diese von Helmholtz herrührenden Betrachtungen bei dieser Übertragung zunächst gänzlich unverändert. Aber der Unterschied gegen die alte Theorie zeigt sich sofort, wenn man H als Funktion seiner fünf Variablen $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$, $\mathfrak{q}_z$, V, T hinschreibt. Bei Helmholtz sind die thermodynamischen und die mechanischen Grundsätze doch nur ziemlich äußerlich in diesem Prinzip vereinigt; denn nach der alten Theorie ist $H = -F + {}^1/_2 m q^2$ die Summe aus einem nur von V und T und einem nur von $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ abhängigen Summanden. In den Gleichungen (340) verschwindet stets der eine von ihnen vollständig. Erst in der Relativitätstheorie, in welche Planck dieses Prinzip eingeführt hat, ist diese Vereinigung nach (333) eine wirklich enge, insofern in den mechanischen Gleichungen V und T, in den thermodynamischen aber q eine Rolle spielt.

Nach (52) und (333) ist $H dt = H^0 d\tau$. Die „Wirkungsgröße" $\int_{t_1}^{t_2} H dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} H^0 d\tau$ ist somit eine Invariante der Lorentz-Transformation.

Unter Voraussetzung dieser Invarianz hat Herglotz[2]) in Umkehrung des hier eingeschlagenen Gedankenganges aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung Grundgleichungen für die Dynamik abgeleitet, welche mit den unserigen völlig identisch sind. Er braucht dazu ganz wie in der klassischen Theorie die Deformationen des Körpers als voneinander unabhängige Zustandsfunktionen. Weil wir hier nicht auf die nicht ganz einfache Frage nach der relativitätstheoretischen Definition der Deformation eingehen wollen, müssen wir uns mit dem Hinweis auf seine Arbeit begnügen. Für den einfacheren Fall, daß nur die Volumenveränderung physikalisch wirksam ist — dies trifft bei den Flüssigkeiten zu — hat auch Lamla[3]) denselben Weg beschritten.

Nur angedeutet soll werden, daß die Invarianz der Wirkungsgröße eine bedeutende Rolle in den neuesten statistischen Theorien spielt [Planck, Sommerfeld[4])]. Sie ermöglicht es nämlich, die Konstante h des Spektralgesetzes der Hohlraumstrahlung, welche als Konstante eines Naturgesetzes selbstverständlich für alle Systeme den gleichen Wert hat, dem Werte der Wirkungsgröße für manche Molekularvorgänge gleichzusetzen (multipliziert mit dem Faktor 2π). So wird $h/2\pi$ zum „elementaren Wirkungsquantum". Ein näheres Eingehen darauf würde aber den Rahmen dieses Buches weit überschreiten.

Man sieht an den Entwickelungen dieses Paragraphen, besonders an der Gleichung (333) in Verbindung mit (338), daß der Einfluß der Bewegung der Körper auf die thermodynamischen Vorgänge nur von der zweiten Ordnung ist, er liegt damit weit unter der Grenze der erreichbaren Meßgenauigkeit. Entfällt daher einerseits jede Möglichkeit zu einer thermodynamischen Prüfung der Relativitätstheorie, so steht doch andererseits die empirische Gültigkeit der klassischen Thermodynamik nicht im Widerspruch zu ihr.

§ 34. Die Dynamik der Hohlraumstrahlung.

Die Anwendbarkeit der im letzten Paragraphen abgeleiteten Formeln scheitert an der für die Körper meist recht unvollständigen Kenntnis der freien Energie F^0. Um so interessanter ist es, daß es ein nicht-materielles physikalisches System gibt, welches, wenn auch noch nicht verwirklicht, so doch zweifellos naturgesetzlich möglich ist, und dessen Verhalten wir mit aller Voll-

ständigkeit und Strenge angeben können. Es ist dies die Hohlraumstrahlung, wie sie sich nach dem Kirchhoffschen Gesetz mit der Zeit in jedem von gleichmäßig temperierten Wänden umschlossenen Hohlraum einstellt, die sich aber auch, wenn sie sich einmal eingestellt hat, in einem von vollkommen spiegelnden Wänden umgebenen Raume erhält. In einer solchen Hülle wollen wir sie jetzt betrachten, wobei wir als Bezugssystem zunächst dasjenige System K^0 wählen, in welchem die Wände ruhen. Doch lassen wir vorläufig den Index 0 fort.

a) Die Hohlraumstrahlung in der Ruhe. Die Besonderheit der Hohlraumstrahlung unter allen elektromagnetischen Vorgängen besteht darin, daß es bei ihr weder ausgezeichnete Punkte noch Richtungen gibt. Dies ist natürlich nicht möglich, solange wir die momentanen Zustände betrachten; denn dann spielen wie bei jedem elektromagnetischen Vorgang die Richtungen der beiden Feldstärken eine besondere Rolle. Wohl aber gilt es für die Mittelwerte aller Größen, wenn wir diese über Zeiten bilden, welche gegen die Schwingungsperiode sehr groß sind. Es findet z. B. im Mittel keine Energieströmung statt, denn anderenfalls wäre ja deren Richtung ausgezeichnet. Dasselbe gilt von den Mittelwerten der Maxwellschen Spannungen, auch diese dürfen keine Richtungen besonders hervorheben, was nur dann der Fall ist, wenn im Mittel

$$\mathfrak{p}_{yz} = \mathfrak{p}_{zx} = \mathfrak{p}_{xy} = 0, \quad \mathfrak{p}_{xx} = \mathfrak{p}_{yy} = \mathfrak{p}_{zz} = p \quad . \quad . \quad (342)$$

ist, d. h. wenn ein allseitig gleicher Druck p herrscht.

Dessen Größe läßt sich nun leicht angeben. Wie aus (X) hervorgeht, gilt für die Momentanwerte die Gleichung:

$$\mathfrak{p}_{xx} + \mathfrak{p}_{yy} + \mathfrak{p}_{zz} = W;$$

bei der Mittelwertbildung muß diese bestehen bleiben. Mit Rücksicht auf (342) muß daher für den Mittelwert p gelten:

$$p = \tfrac{1}{3} W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (343)$$

Man kann diesen Druck übrigens auch als Ergebnis des Strahlungsdruckes aller die Wand treffenden Strahlenbündel auffassen und berechnen.

Die Hohlraumstrahlung besitzt wie alle Wärmestrahlung auch Entropie und Temperatur; da sie einen Gleichgewichts-

zustand darstellt, berechnet sich die erstere, wie bei einem im Gleichgewichte befindlichen Körper, nach der Differentialgleichung:

$$dS = \frac{dE + p\,dV}{T}.$$

Wir wollen aus dieser mit Hilfe von (343) S und E als Funktionen der Temperatur und des Volumens bestimmen. Wegen der Gleichwertigkeit aller Punkte sind beide Größen einfach zu V proportional, so daß die Energiedichte $W = \frac{E}{V}$ eine Funktion der Temperatur allein ist. Schreiben wir die letzte Gleichung in der Form:

$$\left.\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T}\left(V\frac{dW}{dT}dT + (W+p)\,dV\right) \\ &= \frac{1}{T}\left(V\frac{dW}{dT}dT + \tfrac{4}{3}W\,dV\right), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (344)$$

so sieht man, daß

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T}\frac{dW}{dT}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4}{3}\frac{W}{T}$$

ist. Berechnet man aus jeder dieser Beziehungen $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$, so findet man:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T}\frac{dW}{dT} = \frac{4}{3T}\left(\frac{dW}{dT} - \frac{W}{T}\right),$$

also

$$\frac{dW}{dT} = 4\frac{W}{T}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Funktion W von T. Aus ihrer Integration folgt:

$$W = aT^4, \quad E = aT^4V \quad \ldots\ldots \quad (345)$$

wobei a die Integrationskonstante bedeutet; und setzt man diesen Wert in (344) ein, so findet man durch abermalige Integration:

$$S = \tfrac{4}{3}aT^3V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (346)$$

Die additive Integrationskonstante haben wir hierbei fortgelassen, weil nach (345) mit der absoluten Temperatur auch die Energie, d. h. die Strahlung überhaupt, verschwindet. Die freie Energie ist

$$F = E - TS = -\tfrac{1}{3}aT^4V \quad \ldots\ldots \quad (347)$$

Gleichung (345) spricht das Stefan-Boltzmannsche Gesetz aus. Die Konstante a ist nach Valentiner

$$7{,}148 \,.\, 10^{-15}\ [\mathrm{g\ cm^{-1}\ sec^{-2}\ grad^{-4}}].$$

b) Die Hohlraumstrahlung in gleichförmiger Bewegung. Nun betrachten wir die Hohlraumstrahlung in gleichförmiger Bewegung, legen also unseren Erörterungen ein anderes berechtigtes System zugrunde und zeichnen die bisherigen, auf das mitbewegte System K^0 bezogenen Größen F, T, S usw. durch den Index 0 aus. Dabei bleiben zwar nicht mehr alle Richtungen, wohl aber noch alle Punkte gleichwertig, da ja die Koordinaten selbst in die Transformationsformeln für die physikalischen Größen nicht eingehen. Die mittlere Energie der Strahlung macht also in diesem Falle, obwohl sie elektromagnetische Energie ist, die Bewegung mit, so daß wir alle Betrachtungen der § 26 bis 33 auf sie anwenden können.

Aus (333) und (347) folgt für das dynamische Potential [vgl. auch (31) und (XXX)]:

$$\left.\begin{aligned} H &= -\frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c} F^0 = \frac{a}{3}\frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c} T^{0\,4} V^0 \\ &= \frac{a c^4}{3} \frac{T^4 V}{(c^2-q^2)^2}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (348)$$

also nach (334), (336) und (337):

$$\left.\begin{aligned} p &= \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_{q,T} = \frac{a c^4}{3} \frac{T^4}{(c^2-q^2)^2}, \\ S &= \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{q,V} = \frac{4 a c^4}{3} \frac{T^3 V}{(c^2-q^2)^2}, \\ E &= q\frac{\partial H}{\partial q} + T\frac{\partial H}{\partial T} - H = \frac{a c^4}{3} \frac{3c^2+q^2}{(c^2-q^2)^3} T^4 V \\ \mathfrak{G}_x &= \left(\frac{\partial H}{\partial q_x}\right)_{V,T} = \frac{4 a c^4}{3} \frac{q_x}{(c^2-q^2)^3} T^4 V. \\ &\text{oder vektoriell geschrieben:} \\ \mathfrak{G} &= \frac{4 a c^4}{3} \frac{\mathfrak{q}}{(c^2-q^2)^3} T^4 V. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (349)$$

Durch diese Gleichungen ist die quasistationäre Dynamik der Hohlraumstrahlung vollkommen bestimmt.

c) Isotherm-isochore Dynamik. Wir wollen als Beispiel dafür die isotherm-isochore Beschleunigung untersuchen. Der Impuls ist hier wie in (278c) als Funktion der Geschwindigkeit von der Form $\mathfrak{q} f(q^2)$. Daher können wir die Formel (281) für die longitudinale und transversale Masse anwenden:

$$m_l = \frac{d\mathfrak{G}}{dq} = \frac{4ac^4}{3} T^4 V \frac{c^2 + 5q^2}{(c^2 - q^2)^4},$$

$$m_t = \frac{\mathfrak{G}}{q} = \frac{4ac^4}{3} \frac{T^4 V}{(c^2 - q^2)^3}.$$

Die Abhängigkeit beider Massen von der Geschwindigkeit ist somit eine ganz andere wie bei der adiabatisch-isopieistischen Dynamik (282). Nur im Grenzfalle $q = 0$ verschwindet der Unterschied zwischen beiden Arten der Beschleunigung, denn dann ist nach (343) und (345) in Übereinstimmung mit (303) die Ruhmasse

$$m = \frac{4a}{3c^2} T^{0\,4} V^0 = \frac{1}{c^2}(E^0 + p^0 V^0).$$

Ferner ist nach (349)

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{T,V} = \frac{16ac^4}{3} T^3 V \frac{(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})}{(c^2 - q^2)^3};$$

vergrößert die Beschleunigung die Geschwindigkeit, ist also $(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}}) > 0$, so ist auch $\frac{dS}{dt} > 0$, und es muß eine Wärmemenge zugeleitet werden, die pro Zeiteinheit den Betrag

$$R = T\left(\frac{dS}{dt}\right)_{T,V} = \frac{16ac^4}{3} T^4 V \frac{(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})}{(c^2 - q^2)^3}$$

hat. Um die Tendenz zur Temperaturerniedrigung und Volumenverringerung zu überwinden, die nach § 33 mit der Geschwindigkeitsvergrößerung verbunden ist, muß bei der isotherm-isochoren Beschleunigung Wärme zugeführt werden. Die gesamte bei einer Beschleunigung von der Ruhe bis zur Geschwindigkeit q notwendige Wärme ist:

$$Q = \int R\,dt = T(S_q - S_0) = \frac{4a}{3} T^4 V \frac{q^2(2c^2 - q^2)}{(c^2 - q^2)^2}.$$

Der Druck steigt mit der Geschwindigkeit, da

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{T,V} = \frac{4ac^4}{3} T^4 \frac{(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})}{(c^2 - q^2)^3}$$

im Vorzeichen mit $(\mathfrak{q}\dot{\mathfrak{q}})$ übereinstimmt.

Ebenso leicht kann man nach (349) die adiabatisch-isochore und die isotherm-isopieistische Dynamik aufstellen. Man hat nur q, S, V bzw. q, T, p als unabhängige Variable einzuführen. Qualitativ lassen sich diese Ergebnisse auf beliebige Körper übertragen.

d) Historische Bemerkungen. Die Gleichungen (349) enthalten in gewisser Beziehung auch eine Kontrolle unserer Betrachtungen. Die in ihnen enthaltene Dynamik der Hohlraumstrahlung läßt sich nämlich, wie der zu früh verstorbene K. von Mosengeil in seiner Dissertation gezeigt hat, aus der Elektrodynamik des Vakuums auch ohne explizite Benutzung des Relativitätsprinzips ableiten. Diese Arbeit spielt deswegen eine Rolle in der Geschichte der Wissenschaft, weil Planck zur Begründung der hier vorgetragenen Dynamik der bewegten Körper einen dynamisch völlig bekannten Probekörper brauchte; er konnte auf Grund der Mosengeilschen Dissertation dazu die Hohlraumstrahlung benutzen.

§ 35. Hydrodynamik.

a) Einleitende Bemerkungen. In den §§ 26 bis 33 haben wir alle dynamischen und thermodynamischen Grundlagen für die Elastizitätstheorie vollständig kennen gelernt. Wir brauchten nur noch zu untersuchen, wie in der Relativitätstheorie die Deformation eines Massenteilchens zu definieren und zu transformieren ist und welcher Zusammenhang zwischen ihr und den Spannungen besteht. Dies Problem ist von Herglotz[1]) vollständig gelöst worden.

In § 33 und 34 haben wir nun die Unterschiede kennen gelernt, welche die Dynamik je nach ihren Nebenbedingungen zeigt. So wird sich auch hier die adiabatische Dynamik, bei welcher die Veränderungen so schnell vor sich gehen, daß die Wärmeleitung die auftretenden Temperaturdifferenzen nicht mehr ausgleicht, wesentlich unterscheiden von der isothermen Dynamik, welche für alle statischen Fälle und sehr langsame Veränderungen gilt. Freilich kennt schon die klassische Elastizitätstheorie diesen Unterschied. Die Zustandsgleichung der Körper bedingt es, daß der Zusammenhang zwischen Deformation und Spannung im adiabatischen Fall ein anderer ist als im isothermen. Die Elastizitätskoeffizienten haben in beiden Fällen verschiedene Werte, wie ja der historische Unterschied zwischen dem wahren Werte der Schallgeschwindigkeit und dem von Newton berechneten zeigt. In der Relativitätstheorie ist die Durchführung des isothermen Falles aber noch insofern erschwert, als nach dém Satz von der Trägheit der Energie (XXV) der Wärmestrom einen Impuls besitzt,

welcher in der Impulsgleichung mit berücksichtigt werden muß; so geht in diese das Wärmeleitvermögen ein. Nur für statische Probleme fällt diese Komplikation fort.

Wir beschränken uns der Einfachheit halber im folgenden auf den adiabatischen Fall und auf Körper, bei welchen wir als einzig möglichen Spannungszustand einen allseitig gleichen Druck zu berücksichtigen haben. Dies trifft zu für reibungsfreie flüssige und gasförmige Körper; diese setzen einer Formveränderung bei konstantem Volumen keinen Widerstand entgegen und sprechen nur auf Volumenveränderung mit einer Druckveränderung an. Dieser Teil der Elastizitätslehre ist, abgesehen von der Herglotzschen Arbeit, gleichzeitig in der Dissertation von Lamla[2]) behandelt worden.

b) Die Kontinuitätsgleichung. Eine gewisse Schwierigkeit liegt in der Frage, durch welche Konstante man ein bestimmtes Flüssigkeitsteilchen charakterisieren soll. In der klassischen Theorie dient dazu seine Masse. Von einer Ruhmasse können wir nach § 29, a) in diesem Falle zwar reden (was im allgemeinen nicht möglich ist), aber auch diese ist bei Energiezufuhr und Druckschwankungen nach Gleichung (303) veränderlich. Erst wenn wir sie auf einen betimmten inneren Zustand beziehen, wird sie eine Konstante. Nun hängt in unserem Falle der innere Zustand nur von einer Variablen ab, etwa dem Druck; denn die Entropie jedes Teilchens soll ja nach Voraussetzung erhalten bleiben. Bestimmen wir den Normalzustand durch den Normaldruck p_n, so können wir die Normalruhmasse

$$\delta m_n = \frac{\delta E_n^0 + p_n \delta V_n^0}{c^2} \quad \cdots\cdots \quad (350)$$

als die gesuchte Konstante für ein unendlich kleines Teilchen (deshalb das δ) betrachten. Im Anschluß hieran definieren wir die Dichte

$$k = \frac{\delta m_n}{\delta V} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (351)$$

als den Quotienten aus der Normalruhmasse und dem Volumen δV, letzteres bezogen auf ein beliebiges System K. Legt man hingegen das Ruhsystem K^0 zugrunde, so gelangt man zur Ruhdichte

$$k^0 = \frac{\delta m_n}{\delta V^0} = \frac{\delta m_n}{\delta V} \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} = k \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \quad \cdots \quad (352)$$

Diese ist stets eine Funktion des Druckes p allein. Die Konstanz der Normalruhmasse führt unmittelbar zu der Gleichung (vgl. ϱ und ϱ'):

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d(k\delta V)}{dt} = \underline{\underline{\dot{k}}} = \dot{k} + div(k\mathfrak{q}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (353)$$

Wir bezeichnen sie nach ihrem Analogon in der klassischen Hydrodynamik und in der Elektrodynamik [vgl. § 5, Gleich. (23)] als Kontinuitätsgleichung.

Nach (351) ist die Dichte k analog zur elektrischen Dichte der Quotient aus einer Invariante der Lorentz-Transformation und einem materiellen Volumenelement. Daher kann man analog zum elektrischen Viererstrom P [vgl. (135)] hier einen Vektor $M = k^0 Y$ mit den Komponenten

$$M_x = \frac{k\mathfrak{q}_x}{c}, \quad M_y = \frac{k\mathfrak{q}_y}{c}, \quad M_z = \frac{k\mathfrak{q}_z}{c}, \quad M_l = ik \quad . \quad . \quad (354)$$

als Viererstrom definieren. Die Kontinuitätsgleichung lautet analog zu (141a) [vgl. (116)]:

$$Div\, M = k^0\, Div\, Y + (Y, \Gamma\varrho\alpha\delta k^0) = 0 \quad . \quad . \quad (354\,a)$$

c) Die Impulsgleichung. Um die Lagrangeschen Grundgleichungen der Hydrodynamik in die Relativitätstheorie zu übertragen, knüpfen wir an die Gleichung (299) an. Sie vereinfacht sich sogleich dadurch, daß der Tensor t hier die Komponenten

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = p, \quad t_{yz} = t_{zx} = t_{xy} = 0$$

hat, somit nach ν''

$$\mathfrak{div}\, t = grad\, p$$

ist, zu:

$$\underline{\underline{\dot{\mathfrak{q}}}} + grad\, p = \mathfrak{F}$$

(wir unterdrücken hier den Index nm an der nichtmechanischen Kraft $\mathfrak{F}$). Ersetzen wir nun $\underline{\underline{\dot{\mathfrak{q}}}}$ nach ϱ durch $\frac{1}{\delta V}\frac{d(\mathfrak{g}\delta V)}{dt}$, δV nach (31) durch $\delta V^0 \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}$ und $\mathfrak{g}\delta V$ nach (XXVIIId) durch $\mathfrak{q}\frac{\delta E^0 + p\delta V^0}{c\sqrt{c^2-q^2}}$, so finden wir:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\mathfrak{q}(\delta E^0 + p\delta V^0)}{c\sqrt{c^2-q^2}}\right\} + \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\frac{\delta m_n}{k^0}\, grad\, p = \mathfrak{F}\delta V.$$

Hier sind nun die Energie $\delta E^0 = W^0 \delta V^0$, die Ruhdichte k^0, sowie das Ruhvolumen δV^0 als Funktionen der Zustandsvariablen

zu bestimmen. Dazu dient die Forderung, daß die Entropie δS des Teilchens erhalten bleiben soll. Da sie nach XXIX eine Invariante der Transformation ist, so ist:

$$d\delta S = d\delta S^0 = \frac{d\delta E^0 + p\,d\delta V^0}{T^0}.$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null, so folgt:

$$\frac{d}{dt}(\delta E^0 + p\delta V^0) = \delta V^0 \frac{dp}{dt} = \frac{\delta m_n}{k^0}\frac{dp}{dt} = \delta m_n \frac{dP}{dt}.$$

Dabei ist

$$P = \int_{p_n}^{p} \frac{dp}{k^0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (355)$$

die für die adiabatische Kompressibilität charakteristische Zustandsfunktion der Flüssigkeit. Durch Integration folgt weiter:

$$\delta E^0 + p\delta V^0 = \delta m_n P + const;$$

die Konstante bestimmt sich, indem man diese Gleichung auf den Normalzustand anwendet, aus dem Verschwinden von P im Normalzustand und nach (350) zu $c^2\delta m_n$. Also ist in einem beliebigen Zustand:

$$\frac{1}{c^2}(\delta E^0 + p\delta V^0) = \delta m_n\left(1 + \frac{P}{c^2}\right) \quad \cdots\cdots \quad (356)$$

Da ferner nach der Definition von P

$$\frac{1}{k^0}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \text{ usw., also } \frac{1}{k^0}\,grad\,p = grad\,P$$

ist, so lautet die Grundgleichung in der Lagrangeschen Form:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{c\mathfrak{q}}{\sqrt{c^2-q^2}}\left(1+\frac{P}{c^2}\right)\right\} + \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\,grad\,P = \mathfrak{f} \quad \cdots \quad (357)$$

wo

$$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{F}\delta V}{\delta m_n} = \frac{\mathfrak{F}}{k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (358)$$

die auf die Einheit der Normalruhmasse bezogene nichtmechanische Kraft, $\frac{c\mathfrak{q}}{\sqrt{c^2-q^2}}\left(1+\frac{P}{c^2}\right)$ der auf dieselbe Einheit bezogene Impuls ist.

d) Die Energiegleichung. Die Form der Grundgleichung (357) legt nahe, sie zu einer Gleichung zwischen Viererverktoren

auszugestalten. Da P als Funktion von p ebenso wie p selbst [nach (296)] ein Skalar gegenüber der Lorentz-Transformation ist, so kommt man dabei durch Einführung der Eigenzeit $d\tau = dt\frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}$ nach (52), der Vierergeschwindigkeit Y nach (83) und der Minkowskischen Kraft K nach (273) zu der Formel:

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\delta m_n\left(1+\frac{P}{c^2}\right)Y\right\}+\frac{\delta V^0}{c}\Gamma\varrho\alpha\delta p = K \quad . \quad . \quad . \quad (359)$$

welche lebhaft an Gleichung (XXVI) erinnert. Diese muß für alle Komponenten der auftretenden Viervektoren gelten, weil sie nach (357) für die räumlichen Komponenten in jedem beliebigen Bezugssystem richtig ist. In Anwendung auf die zeitartigen Komponenten muß sie aber das Energieprinzip enthalten. Da nun

$$Y_l = \frac{ic}{\sqrt{c^2-q^2}}, \quad \Gamma\varrho\alpha\delta_l\, p = \frac{\partial p}{\partial l} = -\frac{i}{c}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad K_l = \frac{i}{c}\frac{(\mathfrak{q}\mathfrak{K})}{\sqrt{c^2-q^2}}$$

ist, so schließen wir:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{c^3\delta m_n}{\sqrt{c^2-q^2}}\left(1+\frac{P}{c^2}\right)\right\} = \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\delta V^0\frac{\partial p}{\partial t}+(\mathfrak{q}\mathfrak{K}),$$

daraus nach (356) und (31) weiter:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{c(\delta E^0+p\delta V^0)}{\sqrt{c^2-q^2}}\right\} = \delta V\frac{\partial p}{\partial t}+(\mathfrak{q}\mathfrak{K}),$$

und schließlich, da nach (π) und (297)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}+(\mathfrak{q},\, grad\, p), \quad \frac{c(\delta E^0+p\delta V^0)}{\sqrt{c^2-q^2}} = \delta E+p\delta V,$$

ist:

$$\frac{d\delta E}{dt} = -p\frac{d\delta V}{dt}+(\mathfrak{q},\, \mathfrak{K}-\delta V\, grad\, p) \quad . \quad . \quad . \quad (360)$$

Die Energie des Teilchens wächst also einmal infolge der Kompressionsarbeit, sodann aber infolge der Leistung der Kraft $\mathfrak{K}$ und der von dem Druckgefälle herrührenden Kraft $(-\delta V\, grad\, p)$. Die Arbeit der relativen Spannungen $\int(\mathfrak{q}\mathfrak{t}_n)\,d\sigma$, welche in (301) auftritt, ist hier in den beiden Gliedern mit p enthalten.

e) Die Webersche Form der Grundgleichungen. Die Zeitdifferentiation $\frac{d}{dt}$ in (357) bedeutet, daß die Veränderung des Impulsvektors für ein bestimmtes Flüssigkeitsteilchen berechnet

werden soll. Unterscheiden wir die Teilchen voneinander, indem wir jedem drei Parameter ξ, η, ζ zuschreiben, so ist diese Differentiation bei konstantem ξ, η, ζ auszuführen. Wir wollen im folgenden ξ, η, ζ stets als die Koordinaten des Teilchens für eine beliebig gewählte Anfangszeit t_0 *) betrachten; an sich wäre es möglich, beliebige Funktionen dieser Anfangskoordinaten an deren Stelle zu setzen. Das hydrodynamische Problem besteht nun darin, die Koordinaten x, y, z als Funktionen von ξ, η, ζ und t zu bestimmen, desgleichen auch den Druck p und die Zustandsfunktion P.

Die Determinante D aus den bei konstantem t zu bildenden Differentialquotienten $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dy}{d\eta}$, $\frac{dz}{d\zeta}$ usw. hat nach dem bekannten Satze

$$\int\int\int dx\,dy\,dz = D\int\int\int d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

der Integralrechnung (die Integrale erstrecken sich über unendlich kleine, einander entsprechende Gebiete) die Bedeutung des Quotienten aus dem Volumen δV zur Zeit t und dem Anfangsvolumen. Die Kontinuitätsgleichung (353) kann man infolgedessen auch schreiben:

$$\frac{d(kD)}{dt} = 0.$$

Die bei konstantem ξ, η, ζ gebildeten Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sind die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$. Wird $t = t_0$, so wird wegen $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{dz}{d\zeta} = 1, \quad \frac{dy}{d\zeta} = \frac{dz}{d\eta} = \frac{dz}{d\xi} = \frac{dx}{d\zeta} = \frac{dx}{d\eta} = \frac{dy}{d\xi} = 0.$$

Nach (357) ist

$$\frac{d}{dt}\left(\varkappa\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\frac{\partial P}{\partial x} = \mathfrak{f}_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varkappa\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\frac{\partial P}{\partial y} = \mathfrak{f}_y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varkappa\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\frac{\partial P}{\partial z} = \mathfrak{f}_z,$$

*) Die Anfangszeit t_0 ist nicht zu verwechseln mit der Zeit t^0 für das Ruhesystem K^0.

wo zur Abkürzung

$$\frac{c}{\sqrt{c^2-q^2}}\left(1+\frac{P}{c^2}\right)=\varkappa \quad \ldots\ldots \quad (361)$$

gesetzt ist. Um die hier auftretenden Differentialquotienten nach x, y, z durch solche nach ξ, η, ζ zu ersetzen, multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{d\xi}$, $\frac{dy}{d\xi}$, $\frac{dz}{d\xi}$ und addieren sie; da

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{d\xi}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{d\xi}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{d\xi}=\frac{dP}{d\xi},$$

erhalten wir auf diesem Wege:

$$\frac{d}{dt}\left(\varkappa\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{d\xi}+\frac{d}{dt}\left(\varkappa\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dy}{d\xi}+\frac{d}{dt}\left(\varkappa\frac{dz}{dt}\right)\cdot\frac{dz}{d\xi}$$
$$+\frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\frac{dP}{d\xi}=\mathfrak{f}_x\frac{dx}{d\xi}+\mathfrak{f}_y\frac{dy}{d\xi}+\mathfrak{f}_z\frac{dz}{d\xi}.$$

Addieren wir hierzu die Identität:

$$\varkappa\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{d\xi\,dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{d\xi\,dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{d\xi\,dt}\right)$$
$$=\frac{\varkappa}{2}\frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{\varkappa}{2}\frac{d(q^2)}{d\xi},$$

so folgt weiter in Rücksicht auf die Definition (361) von $\varkappa$:

$$\frac{d}{dt}\left[\varkappa\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\xi}+\frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\xi}+\frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\xi}\right)\right]+\frac{d}{d\xi}\left[\varkappa(c^2-q^2)\right]$$
$$=\mathfrak{f}_x\frac{dx}{d\xi}+\mathfrak{f}_y\frac{dy}{d\xi}+\mathfrak{f}_z\frac{dz}{d\xi} \quad \ldots\ldots \quad (362)$$

In der klassischen Hydrodynamik spielt der Fall die Hauptrolle, daß die (dort auf die Masseneinheit bezogene) Kraft $\mathfrak{f}$ von Gravitationswirkungen herrührt, somit ein Potential besitzt. Ob man in der Relativitätstheorie eine Gravitationskraft $\mathfrak{f}$ als Potentialvektor darstellen kann, und ob es überhaupt Kräfte gibt, bei welchen dies möglich ist, lassen wir dahingestellt. Wir setzen jedenfalls hier:

$$\mathfrak{f}=-\,grad\,\varphi, \quad \text{also} \quad \mathfrak{f}_x\frac{dx}{d\xi}+\mathfrak{f}_y\frac{dy}{d\xi}+\mathfrak{f}_z\frac{dz}{d\xi}=-\frac{d\varphi}{d\xi}.$$

Ist dies nicht zulässig, so bleibt das Folgende doch für Flüssigkeitsbewegungen ohne äußere Kräfte ($\mathfrak{f}=0$) richtig.

Führen wir dann noch die Funktion

$$\chi(\xi,\eta,\zeta,t)=\int_{t_0}^{t}\left(\varphi+\varkappa(c^2-q^2)\right)dt$$

ein (die Integration ist bei konstantem ξ, η, ζ auszuführen), so folgt aus (362):

$$\frac{d}{dt}\left[\varkappa\left(\mathfrak{q}_x\frac{dx}{d\xi}+\mathfrak{q}_y\frac{dy}{d\xi}+\mathfrak{q}_z\frac{dz}{d\xi}\right)\right]=-\frac{d^2\chi}{d\xi\,dt},$$

und daraus sowie den analogen Gleichungen für η und ζ durch Integration nach t unter Berücksichtigung der angegebenen Werte von $\frac{dx}{d\xi}$ usw. zur Zeit t_0:

$$\left.\begin{aligned}\varkappa\left(\mathfrak{q}_x\frac{dx}{d\xi}+\mathfrak{q}_y\frac{dy}{d\xi}+\mathfrak{q}_z\frac{dz}{d\xi}\right)&=\varkappa_0\,\mathfrak{q}_{0x}-\frac{d\chi}{d\xi}\\ \varkappa\left(\mathfrak{q}_x\frac{dx}{d\eta}+\mathfrak{q}_y\frac{dy}{d\eta}+\mathfrak{q}_z\frac{dz}{d\eta}\right)&=\varkappa_0\,\mathfrak{q}_{0y}-\frac{d\chi}{d\eta}\\ \varkappa\left(\mathfrak{q}_x\frac{dx}{d\zeta}+\mathfrak{q}_y\frac{dy}{d\zeta}+\mathfrak{q}_z\frac{dz}{d\zeta}\right)&=\varkappa_0\,\mathfrak{q}_{0z}-\frac{d\chi}{d\zeta}\end{aligned}\right\}\quad\cdot\cdot\ (363)$$

f) Die Helmholtzschen Wirbelsätze. Aus diesen Weberschen Grundgleichungen lassen sich leicht die Helmholtzschen Wirbelsätze ableiten, und zwar auf demselben Wege, wie in der älteren Theorie, so daß wir uns aufs engste an die von H. Weber[3]) selbst gegebene Darstellung anschließen können.

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, so folgt bei Addition, da bei konstanter Zeit

$$\frac{dx}{d\xi}d\xi+\frac{dx}{d\eta}d\eta+\frac{dx}{d\zeta}d\zeta=dx\quad\text{usw.}$$

ist,

$$\varkappa(\mathfrak{q}_x dx+\mathfrak{q}_y dy+\mathfrak{q}_z dz)=\varkappa_0(\mathfrak{q}_{0x}d\xi+\mathfrak{q}_{0y}d\eta+\mathfrak{q}_{0z}d\zeta)-d\chi,$$

oder:

$$\varkappa\mathfrak{q}_s ds=\varkappa_0\mathfrak{q}_{0s}ds_0-d\chi;$$

ds ist das Linienelement mit den Projektionen dx, dy, dz, ds_0 hat die Projektionen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$.

Integrieren wir hier über alle Flüssigkeitsteilchen, welche in einer geschlossenen Linie liegen — tun sie dies anfangs, so tun sie es wegen der stillschweigend vorausgesetzten Stetigkeit der Bewegung stets —, so finden wir:

$$\int_{\bigcirc}\varkappa\mathfrak{q}_s ds=\int_{\bigcirc}\varkappa_0\mathfrak{q}_{0s}ds_0\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ (364)$$

Das Integral mit $d\chi$ verschwindet wegen der Eindeutigkeit der Funktion χ. Nach dem Stokesschen Satz folgt daraus:

$$\int rot_n(\varkappa\mathfrak{q})\,d\sigma=\int rot_n(\varkappa_0\mathfrak{q}_0)\,d\sigma_0\quad\cdot\cdot\cdot\cdot\ (365)$$

das Integral links erstreckt über irgend eine von den genannten Teilchen berandete materielle Fläche σ, und das Integral rechts erstreckt über die gleiche materielle Fläche, nur mit dem Unterschiede, daß das erste Integral sich auf die Zeit t, das zweite auf t_0 bezieht. Nennt man ein solches Integral das Wirbelmoment der Fläche, so enthält (365) den wichtigen Satz: Das Wirbelmoment einer beliebigen, aus Flüssigkeitsteilchen gebildeten Fläche bleibt im Verlaufe der Bewegung ungeändert.

Als Wirbellinie wird man analog zur älteren Theorie eine materielle Linie bezeichnen, deren Element ds in jedem Punkte die Richtung von $rot\,(\varkappa\,\mathfrak{q})$ hat. Ist das materielle Flächenelement $d\sigma$ zur Zeit t_0 aus Wirbellinien gebildet, so ist $rot_n\,(\varkappa_0\,\mathfrak{q}_0) = 0$. Gleichung (365) zeigt, daß dann auch für eine beliebige spätere Zeit $rot_n\,(\varkappa\,\mathfrak{q}) = 0$ ist, daß es also auch dann aus Wirbellinien besteht. Dieser Satz überträgt sich ohne weiteres auf Flächen von endlicher Ausdehnung. Wendet man ihn auf einen unendlich schmalen Streifen längs einer Wirbellinie an, so kann man daraus schließen: Die Flüssigkeitsteilchen, welche anfangs auf einer Wirbellinie liegen, bleiben im Verlaufe der Bewegung stets auf einer Wirbellinie.

Im Gegensatz zu der soeben gemachten Annahme wählen wir die Integrationsfläche σ in (365) jetzt so, daß die Wirbellinien sie schneiden. Die Gesamtheit aller sie schneidenden Wirbellinien bildet einen Wirbelfaden; sie selbst ist ein Querschnitt dieses Fadens. Aus der Identität $div\,rot\,(\varkappa\,\mathfrak{q}) = 0$ folgt durch Integration über das von zwei beliebigen Querschnitten begrenzte Volumen des Fadens nach dem Gaußschen Satz:

$$0 = \int div\;rot\,(\varkappa\,\mathfrak{q})\,dS = -\int rot_n\,(\varkappa\,\mathfrak{q})\,d\sigma,$$

daß das Wirbelmoment für beide Querschnitte im gleichen Augenblick denselben Wert hat. Es verschwindet nämlich in dem Flächenintegral der Anteil der Fadenoberfläche, weil an dieser $rot_n(\varkappa\,\mathfrak{q}) = 0$ ist. Ein Wirbelfaden kann somit im Inneren der Flüssigkeit nicht aufhören; er endigt entweder an ihrer Oberfläche oder läuft in sich zurück.

Diese drei Sätze lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Die Flüssigkeitsmasse, die am Anfang einen Wirbelfaden erfüllt, bildet auch im Verlaufe der Bewegung

stets einen Wirbelfaden; dessen Moment ist sowohl längs seiner Ausdehnung als auch zeitlich unveränderlich. Eine wirbelfreie Bewegung bleibt stets wirbelfrei.

Von den klassischen Helmholtzschen Sätzen unterscheidet sich dies nur in der Definition des Wirbels. Bei Helmholtz war vom Wirbel der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ die Rede, d. h. vom Wirbel des auf die Masseneinheit bezogenen Impulses, hier handelt es sich um den Wirbel des Vektors $\varkappa\mathfrak{q}$, d. h. des auf die Einheit der Normalruhmasse bezogenen Impulses [siehe (357) und (361)]. Der Beobachtung entzieht sich dieser Unterschied natürlich vollkommen.

In der klassischen Theorie unterscheidet man transversale und longitudinale Wellen, da eine geometrische, nicht nur für ebene Wellen geltende Definition nicht möglich ist, danach, daß für jene die Divergenz, für diese die Rotation der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ Null ist. In transversalen Wellen schreiten somit Wirbelbewegungen durch den Körper fort. Hier würde man zweckmäßig dieser Definition statt der Geschwindigkeit den Vektor $\varkappa\mathfrak{q}$ zugrunde legen. Aus den Wirbelsätzen folgt dann, daß Wirbelbewegungen und somit transversale Wellen sich in Flüssigkeiten nicht fortpflanzen.

g) Die Eulersche Form der Grundgleichungen. Sollen statt der Anfangskoordinaten ξ, η, ζ eines Teilchens die Koordinaten x, y, z eines Raumpunktes als unabhängige Variable neben t in die Grundgleichungen eingeführt werden, so könnte man eine ähnliche Betrachtung wie unter c) an die Gleichung (298) anknüpfen. Die absoluten Spannungen $\boldsymbol{p}$ müßte man dazu aus den bekannten elastischen Spannungen $\boldsymbol{t}$ nach (292) berechnen und die Impulsdichte $\mathfrak{g}$ nach (XXVIIIc) und (356) durch die Zustandsfunktion P ausdrücken.

Rechnerisch einfacher aber ist, die Überlegung an (359) anzuschließen. Denn für eine beliebige Funktion der Weltpunkte gilt die Identität [vgl. 83)]:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial l}\frac{dl}{d\tau}$$

$$= c\left(Y_x\frac{\partial}{\partial x} + Y_y\frac{\partial}{\partial y} + Y_z\frac{\partial}{\partial z} + Y_l\frac{\partial}{\partial l}\right) \cdot \cdot \cdot \quad (366)$$

So findet man aus (359) nach (352) und (355) unmittelbar:

$$Y_x \frac{\partial}{\partial x}(\varkappa^0 Y_m) + Y_y \frac{\partial}{\partial y}(\varkappa^0 Y_m) + Y_z \frac{\partial}{\partial z}(\varkappa^0 Y_m) + Y_l \frac{\partial}{\partial l}(\varkappa^0 Y_m)$$
$$+ \frac{1}{c^2} \Gamma \varrho \alpha \delta_m P = \frac{K_m}{c \delta m_n} \quad \cdots\cdots \quad (367)$$
$$(m = x, y, z, l).$$

Dabei ist

$$\varkappa^0 = 1 + \frac{P}{c^2} = \varkappa \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \quad \cdots\cdots \quad (368)$$

ein vierdimensionaler Skalar; es ist nach (361) der Wert von $\varkappa$ für $q = 0$. Der Impulssatz lautet infolgedessen in der Eulerschen Form*).

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_x)}{\partial t} + \mathfrak{q}_x \frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_x)}{\partial x} + \mathfrak{q}_y \frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_x)}{\partial y} + \mathfrak{q}_z \frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_x)}{\partial z} + \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \frac{\partial P}{\partial x} = \mathfrak{f}_x \\
&\frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_y)}{\partial t} + \mathfrak{q}_x \frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_y)}{\partial x} + \mathfrak{q}_y \frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_y)}{\partial y} + \mathfrak{q}_z \frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_y)}{\partial z} + \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \frac{\partial P}{\partial y} = \mathfrak{f}_y \\
&\frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_z)}{\partial t} + \mathfrak{q}_x \frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_z)}{\partial x} + \mathfrak{q}_y \frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_z)}{\partial y} + \mathfrak{q}_z \frac{\partial(\varkappa \mathfrak{q}_z)}{\partial z} + \frac{\sqrt{c^2 - q^2}}{c} \frac{\partial P}{\partial z} = \mathfrak{f}_z
\end{aligned}\right\} \quad (369)$$

h) Ebene Wellen. Es läßt sich aus diesen Differentialgleichungen leicht zeigen, und es ist ja nach der allgemeinen Theorie der Dynamik selbstverständlich, daß als Annäherung für die Ausbreitung beliebiger Störungen, wenn nur die Verschiebungen aus dem Gleichgewicht und damit auch die Geschwindigkeiten stets klein sind, genau dasselbe gilt wie in der alten Theorie. Zum Zwecke der Überleitung zu der Flüssigkeit geringster Zusammendrückbarkeit

*) Eine wirklich rationelle Schreibweise der hydrodynamischen Gleichungen läßt sich nur so erzielen, daß man für den unsymmetrischen Tensor mit den Komponenten

$$\begin{matrix}
\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} & \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} \\
\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} & \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} \\
\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} & \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} & \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}
\end{matrix}$$

eine Bezeichnung einführt, und ebenso für sein Analogon in vier Dimensionen. Denn in (367) und (369), aber auch in den vorhergehenden Gleichungen, treten die Vektorprodukte solcher Tensoren mit den Vektoren $\mathfrak{q}$ und Y auf. Nur um die Einführung gar zu vieler neuer Bezeichnungen zu vermeiden, knüpfen wir an die bisher übliche Form der Gleichungen an.

müssen wir dennoch longitudinale ebene Wellen besonders behandeln. Wir legen dabei die gemeinsame Richtung der Fortpflanzung und der Geschwindigkeit parallel zur x-Achse und setzen voraus, daß Geschwindigkeit und Ruhdichte und damit alle anderen von der letzteren abhängigen Zustandsgrößen Funktionen eines einzigen Parameters ψ sind, der seinerseits natürlich von x und t abhängt; hinterher können wir für ψ auch irgend eine Zustandsgröße, z. B. die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}_x$ setzen. Daß die Einschränkung, welche in dieser Annahme liegt, keinen Widerspruch gegen die Grundgleichungen enthält, zeigen die Differentialgleichungen, auf die wir geführt werden; diese reichen gerade hin, um die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}_x$ und die Ruhdichte k^0 als Funktionen von x und t zu bestimmen. Äußere Kräfte sollen nicht vorhanden sein.

Die beiden Differentialgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Funktionen $\mathfrak{q}$ und k^0 erhält man aus der Kontinuitätsgleichung (353) und der ersten der Gleichungen (369); die beiden anderen Gleichungen (369) sind wegen

$$\mathfrak{q}_y = \mathfrak{q}_z = 0, \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

identisch erfüllt. Da

$$\frac{\partial k^0}{\partial t} = \frac{d k^0}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial t} = \frac{d \mathfrak{q}_x}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \frac{\partial k^0}{\partial x} = \frac{d k^0}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} = \frac{d \mathfrak{q}_x}{d\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

und $\varkappa^0$ nach (368) wie P eine Funktion von k^0 ist, folgt aus (353) und (352):

$$k^0 \frac{d\mathfrak{q}_x}{d\psi}\left(\frac{\mathfrak{q}_x}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\frac{d k^0}{d\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathfrak{q}_x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

Ferner findet man aus (369) nach (368):

$$\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\frac{d\varkappa^0}{dk^0}\frac{d k^0}{d\psi}\left(\frac{\mathfrak{q}_x}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\frac{\varkappa^0}{c^2}\frac{d\mathfrak{q}_x}{d\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathfrak{q}_x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

Durch Multiplikation und Division beider Gleichungen findet man:

$$C^2 = c^2\left(\frac{a - \mathfrak{q}_x}{c^2 - a\mathfrak{q}_x}\right)^2, \quad \text{d. h.} \quad a = \pm c\frac{Cc \pm \mathfrak{q}_x}{c \pm C\mathfrak{q}_x} \quad \cdot \cdot \quad (370)$$

$$\frac{C}{k^0}\frac{d k^0}{d\mathfrak{q}_x}\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) = \frac{1}{c} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (371)$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{k^0}{\varkappa^0}\frac{d\varkappa^0}{dk^0} = C^2, \quad -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial t}}{\frac{\partial\psi}{\partial x}} = a \quad . \; . \; . \; . \; (372)$$

gesetzt ist. C ist eine nach der Zustandsgleichung bekannte Funktion von k^0, $|a|$ ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, da aus

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial t}dt = 0$$

$dx/dt = a$ folgt; sie wird, da C und $\mathfrak{q}_x$ vom Zustand abhängt, nach (370) im allgemeinen für verschiedene Teile der Welle verschieden sein. Gleichung (371) gibt den Zusammenhang zwischen k^0 und $\mathfrak{q}_x$ an; drückt man dementsprechend C als Funktion von $\mathfrak{q}_x$ aus und wählt man $\psi = \mathfrak{q}_x$, so wird aus (370) eine partielle Differentialgleichung für $\mathfrak{q}_x$ allein:

$$\frac{\partial\mathfrak{q}_x}{\partial t}(c \pm C\mathfrak{q}_x) \pm \frac{\partial\mathfrak{q}_x}{\partial x}c(Cc \pm \mathfrak{q}_x) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (373)$$

Eine einfachere Form nimmt diese für eine unendlich kleine Störung an. Dann kann man nämlich die in $\mathfrak{q}_x$ quadratischen Glieder streichen und der Funktion C den Wert geben, welcher dem ungestörten Zustande entspricht. Nach

$$\frac{\partial\mathfrak{q}_x}{\partial t} \pm Cc\frac{\partial\mathfrak{q}_x}{\partial x} = 0$$

ist aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit [vgl. (372), (368) und (355)]:

$$|a| = Cc = c\sqrt{\frac{k^0}{\varkappa^0}\frac{d\varkappa^0}{dk^0}} = \sqrt{\frac{k^0}{1+\frac{P}{c^2}}\frac{dP}{dk^0}} = \sqrt{\frac{\frac{dp}{dk^0}}{1+\frac{P}{c^2}}} \quad (374)$$

Sie unterscheidet sich nur ganz unmerklich von dem Werte $\sqrt{\frac{dp}{dk}}$ der alten Theorie.

§ 36. Flüssigkeiten geringster Zusammendrückbarkeit.

a) Die Zustandsgleichung. Aus Formel (374) in § 35 sieht man, daß die Wellengeschwindigkeit $|a|$ wächst, wenn die Zusammendrückbarkeit

$$-\frac{1}{V^0}\frac{dV^0}{dp} = \frac{1}{k^0}\frac{dk^0}{dp}$$

[vgl. (352)] abnimmt (es handelt sich hier natürlich um die adiabatische Zusammendrückbarkeit, die Differentiationen in der letzten Gleichung sind bei konstanter Entropie vorzunehmen). Soweit reicht die Übereinstimmung mit der alten Theorie. Während man aber in dieser die Idee einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit fassen konnte, für welche dp/dk und damit die Wellengeschwindigkeit unendlich groß ist, würde hier eine solche Annahme dem in § 7 abgeleiteten Satze widersprechen, daß keine physikalische Wirkung mit mehr als Lichtgeschwindigkeit fortschreiten kann. Nun zeigt die streng gültige Gleichung (370), daß für $C = 1$ $|a| = c$ wird, und da

$$\frac{d|a|}{dC} = c\,\frac{c^2 - q^2}{(c \pm C q_x)^2} > 0$$

ist, daß $|a|$ kleiner oder größer als c ist, je nachdem C kleiner oder größer als 1 ist. Die größten nach dem Relativitätsprinzip möglichen Werte sind $|a| = c$, also $C = 1$, d. h. nach (372) oder (374):

$$\frac{k^0}{c^2 + P}\,\frac{dP}{dk^0} = \frac{1}{c^2 + P}\,\frac{dp}{dk^0} \leqq 1.$$

Eine unzusammendrückbare Flüssigkeit ($dk^0/dp = 0$) kann es somit in der Relativitätstheorie nicht geben, und zwar aus demselben Grunde, aus welchem wir [§ 26, b)] das Dasein eines starren Körpers leugnen mußten.

Ein besonderes Interesse hat nun der Grenzfall $C = 1$. Durch Integration folgt aus der letzten Beziehung, wenn man in ihr das Gleichheitszeichen gelten läßt unter Berücksichtigung, daß in dem durch den Index n gekennzeichneten Normalzustande nach (355) $P = 0$ ist,

$$\varkappa^0 = 1 + \frac{P}{c^2} = \frac{k^0}{k_n^0}, \quad \varkappa = \frac{k}{k_n^0} \quad \cdots\cdots \quad (375)$$

[vgl. (368) und (352)] und weiter

$$\frac{dp}{dk^0} = c^2\,\frac{k^0}{k_n^0}, \quad p - p_n = \frac{c^2}{2}\,\frac{k^{0^2} - k_n^{0^2}}{k_n^0} \quad \cdots \quad (376)$$

Die Formeln (375) und (376) enthalten die Gleichung der Adiabate für eine Flüssigkeit geringster Zusammendrückbarkeit. Die scheinbare Abhängigkeit von dem auf der Adiabate willkürlich gewählten Normalzustand verschwindet, wenn

man nach (356) und (350) (aber unter Fortlassung des auf die unendlich kleine Substanzmenge hindeutenden δ)

$$1 + \frac{P}{c^2} = \frac{E^0 + pV^0}{c^2 m_n} = \frac{E^0 + pV^0}{E_n^0 + p_n V_n^0}$$

setzt. Denn dann ergibt sich nach (375) und (352) die Formel:

$$(E^0 + pV^0)\, V^0 = (E_n^0 + p_n V_n^0)\, V_n^0.$$

Dies bedeutet, daß $(E^0 + pV^0)\, V^0$ längs einer Adiabate konstant, mithin eine Funktion der Entropie allein ist:

$$(E^0 + pV^0) V^0 = (E_n^0 + p_n V_n^0)\, V_n^0 = f(S) \quad . \quad . \quad . \quad (377)$$

die Form der Funktion f bleibt unbestimmt.

Fragt man weiter nach der Zustandsgleichung in der „kanonischen" Form $S = S(E, V)$, aus welcher sich bekanntlich sowohl die Beziehung zwischen p, V, T als die Abhängigkeit der Energie vom Zustand ableiten läßt, so hat man aus (376) und (377) nach (350) und (352) abzuleiten:

$$p - \frac{f(S)}{2V^{0^2}} = p_n - \frac{f(S)}{2V_n^{02}}.$$

Da aber der Zustand p, V mit dem Normalzustand p_n, V_n nichts weiter zu tun hat, als daß beide auf derselben Adiabate liegen, so folgt daraus:

$$p = \frac{f(S)}{2V^{0^2}} + g(S),$$

wo $g(S)$ eine zweite willkürliche Funktion von S ist. Dies ergibt, in (377) eingesetzt:

$$E^0 - \frac{f(S)}{2V^0} + g(S)\, V^0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (378)$$

Umgekehrt kann man, da $p = -\left(\frac{\partial E^0}{\partial V^0}\right)_S$ ist (wie sich aus $dS = \frac{dE^0 + p\,dV^0}{T^0}$ ergibt), aus der letzten Gleichung die vorletzte und damit zugleich (376) und (377) zurückerhalten.

Die beiden Funktionen f und g aber lassen sich weder aus der Forderung der geringsten Zusammendrückbarkeit, noch aus allgemeinen thermodynamischen Grundsätzen näher bestimmen. Es

sind somit unendlich viele verschiedene Flüssigkeiten geringster Zusammendrückbarkeit denkbar*).

Die Zusammendrückbarkeit $\frac{1}{k^0}\frac{dk^0}{dp}$ ist nach (376) $= \frac{k_n^0}{c^2 k_0^2}$, also von der Größenordnung $10^{-21}\,\frac{\text{cm}^2}{\text{dyn}}$ oder $10^{-15}\,\frac{\text{cm}^2}{\text{atm}}$. Für Wasser ist die Zusammendrückbarkeit $5 \,.\, 10^{-5}$, für Quecksilber $3{,}9 \,.\, 10^{-6}\,\frac{\text{cm}^2}{\text{atm}}$. Man sieht an diesen Zahlen, daß man in all den Fällen, in welchen man nach der alten Theorie derartige Flüssigkeiten als nicht zusammendrückbar ansah, jetzt an ihrer Stelle eine Flüssigkeit kleinster Zusammendrückbarkeit behandeln kann. Für Wellenvorgänge ist dies freilich nie der Fall; bekanntlich zählt die Schallgeschwindigkeit höchstens nach einigen Kilometern pro Sekunde, kommt also auch nicht annähernd an die Lichtgeschwindigkeit heran.

b) Die Grundgleichung. Die allgemeine Grundgleichung, welche wir in verschiedenen Formen in § 35 kennen gelernt haben, vereinfacht sich bei Einführung des Zusammenhanges (375) oder (376) erheblich. Wir knüpfen an Formel (367) an. Da nach (375)

$$\Gamma\varrho\alpha\delta\, P = \frac{c^2}{k_n^0}\,\Gamma\varrho\alpha\delta\, k^0, \quad k_n^0 \varkappa^0 = k^0,$$

so wird aus dieser Formel in Rücksicht auf (366):

$$\frac{\varkappa^0}{c}\frac{d\,Y_m}{d\tau} + Y_m(Y,\ \Gamma\varrho\alpha\delta\,\varkappa^0) + \frac{1}{k_n^0}\,\Gamma\varrho\alpha\delta_m\, k^0 = \frac{K_m}{c\,\delta m_n}$$

$$(m = x,\ y,\ z,\ l),$$

oder vektoriell geschrieben nach Erweiterung mit der Konstanten k_n^0:

$$\frac{k^0}{c}\frac{d\,Y}{d\tau} + Y(Y,\ \Gamma\varrho\alpha\delta\, k^0) + \Gamma\varrho\alpha\delta\, k^0 = \frac{k_n^0 K}{c\,.\,\delta m_n},$$

---

*) Setzt man z. B.:

$$g(S) = 0, \quad f(S) = 2e^{\frac{S}{R}},$$

also:

$$S = R\,(\log E^0 + \log V^0),$$

so wird:

$$T^0 = \left(\frac{\partial S}{\partial E^0}\right)^{-1} = \frac{1}{R}E^0, \qquad E^0 = RT^0,$$

$$\frac{p}{T^0} = \frac{\partial S}{\partial V^0} = \frac{R}{V^0}, \qquad pV^0 = RT^0.$$

Man kommt so zu einem idealen Gase von der spezifischen Wärme (bezogen auf das Mol.) $c_v = R$. R ist dabei die Gaskonstante.

oder nach schließlich durch Subtraktion der mit Y multiplizierten Kontinuitätsgleichung (354a):

$$k^0\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{dY}{d\tau} - Y\,Div\,Y\right) + \Gamma\varrho\alpha\delta\,k^0 = \frac{k_n^0 K}{c\,\delta\,m_n} \quad \cdot \cdot \quad (379)$$

Die so gewonnene Formel enthält nicht nur den Energie- und Impulssatz, sondern auch die zur Ableitung benutzte Kontinuitätsgleichung; denn multiplizieren wir sie skalar mit Y, so geht sie wegen $Y^2 = -1, \left(Y\frac{dY}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}\frac{dY^2}{d\tau} = 0$ [nach (84)] und $(YK) = 0$ [nach (287)] in der Form (354a) wieder hervor. Sie enthält die vier Differentialgleichungen, welche zur Bestimmung der vier von einander unabhängigen Funktionen Y_x, Y_y, Y_z (Y_l ist wegen $Y^2 = -1$ Funktion von diesen dreien) und k^0 nötig sind.

Um sie auf die vier Komponenten anzuwenden, drücken wir zunächst den Vektor $\frac{1}{c}\frac{dY}{d\tau} - Y\,Div\,Y$ durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ aus; wir finden nach (83) und (52):

$$\frac{1}{c}\frac{dY_x}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{c^2-q^2}}\frac{dY_x}{dt} = \frac{1}{c^2-q^2}\left(\frac{d\mathfrak{q}_x}{dt} + \frac{\mathfrak{q}_x}{c^2-q^2}\,q\,\frac{dq}{dt}\right)$$

$$\frac{1}{c}\frac{dY_l}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{c^2-q^2}}\frac{dY_l}{dt} = \frac{ic}{(c^2-q^2)^2}\,q\,\frac{dq}{dt}$$

$$Div\,Y = \frac{1}{\sqrt{c^2-q^2}}\,div\,\mathfrak{q} + \frac{q}{\sqrt{c^2-q^2}^3}\left((\mathfrak{q},\,grad\,q) + \frac{\partial q}{\partial t}\right).$$

Also ist nach π:

$$\frac{1}{c}\frac{dY_x}{d\tau} - Y_x\,Div\,Y = \frac{1}{c^2-q^2}\left(\frac{d\mathfrak{q}_x}{dt} - \mathfrak{q}_x\,div\,\mathfrak{q}\right),$$

$$\frac{1}{c}\frac{dY_l}{d\tau} - Y_l\,Div\,Y = -\frac{ic}{c^2-q^2}\,div\,\mathfrak{q};$$

und aus (379) folgt [vgl. (273)]:

$$\left.\begin{aligned} k^0\left(\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \mathfrak{q}\,div\,\mathfrak{q}\right) + (c^2-q^2)\,grad\,k^0 &= \frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c}\,\frac{k_n^0}{\delta\,m_n}\,\mathfrak{K} \\ k^0\,div\,\mathfrak{q} + \frac{c^2-q^2}{c^2}\frac{\partial k^0}{\partial t} &= -\frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c^2}\,\frac{k_n^0}{\delta\,m_n}\,(\mathfrak{q}\mathfrak{K}) \end{aligned}\right\} \cdot \quad (380)$$

An diese Gleichungen lassen sich alle folgenden Betrachtungen anknüpfen.

c) Stationäre, kräftefreie Bewegung. Ist $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ und $\mathfrak{K} = 0$, so folgt aus (380) und π:

$$div\ \mathfrak{q} = 0$$

$$\frac{1}{k^0}\frac{\partial k^0}{\partial x} = -\frac{1}{c^2-q^2}\left(\mathfrak{q}_x\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} + \mathfrak{q}_y\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} + \mathfrak{q}_z\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z}\right) \text{ usw.}$$

Der ersten dieser Gleichungen genügt der Ansatz:

$$\mathfrak{q} = -\ grad\,\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (381)$$

wo $\psi\,(x, y, z)$ eine skalare Potentialfunktion ist, wenn diese der Gleichung

$$\Delta\psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (382)$$

gehorcht. Aus den anderen drei Gleichungen folgt dann:

$$\frac{\partial\, log\, k^0}{\partial x} = -\frac{1}{c^2-q^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{2\,(c^2-q^2)}\frac{\partial}{\partial x}\,(c^2-q^2) \quad \text{usw.,}$$

also:

$$log\, k^0 = \tfrac{1}{2}\, log\,(c^2-q^2) + const, \quad k^0 = const\,\sqrt{c^2-q^2},$$

oder, wenn wir den Ruhezustand $q = 0$ als Normalzustand wählen:

$$k^0 = k_n^0\,\frac{\sqrt{c^2-q^2}}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (383)$$

und daraus nach (376):

$$p - p_n = -\tfrac{1}{2}\,q^2 k_n^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (384)$$

Diese Beziehung stimmt mit der entsprechenden in der älteren Hydrodynamik überein. Da aus (383), (375) und (352)

$$k = k_n^0,\ \varkappa = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (385)$$

folgt, so bleibt die Dichte k unverändert dieselbe wie in der Ruhe; und es ist nach (381) nicht nur $rot\,\mathfrak{q} = 0$, sondern auch $rot\,(\varkappa\,\mathfrak{q}) = 0$, d. h. nach § 35, f): Die hier untersuchte Bewegung ist wirbelfrei.

Grenzt die Flüssigkeit an einen ruhenden Körper, so ist

$$\mathfrak{q}_n = -\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (386)$$

die Grenzbedingung. Aus (382) und (386) bestimmt aber die alte Theorie die stationäre Bewegung einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit und aus (384) die zugehörige Druckverteilung. Alle Resultate der klassischen Hydrodynamik über stationäre, wirbelfreie Bewegungen in unzusammendrückbaren Flüssigkeiten lassen sich somit auf die Flüssigkeiten geringster Zusammendrückbarkeit übertragen.

Bei Lösung solcher Probleme kann es freilich zunächst vorkommen, daß *grad* ψ unendlich groß wird. Unendlich große Geschwindigkeiten gibt es aber in der Relativitätstheorie nicht, und auch die alte Theorie mußte sie in diesem Falle wegen der Gleichung (384) für unmöglich erklären, da keine Substanz einen unendlich großen Zug verträgt, ohne zu zerreißen. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man in dem in § 18 behandelten zweidimensionalen Potentialproblem die Funktion ψ als das Potential der Geschwindigkeit nimmt und die Strömung als durch die beiden in Fig. 13 stark gezeichneten Halbebenen begrenzt denkt. Den Gleichungen (382) und (386) ist dann freilich genügt; aber an den Kanten ($x = -\frac{d}{2\pi}$, $y = \pm\frac{1}{2}d$) ist die Geschwindigkeit

$$q = \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}$$
$$= \left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right| = \left|\frac{d\chi}{du}\right|$$

nach (196) unendlich groß. Nur wenn man eine andere der Stromlinien $\varphi = const$ als Begrenzung der Flüssigkeit nimmt, wird dieser singuläre Punkt vermieden.

In solchen Fällen bildet sich nun eine Unstetigkeitsfläche aus, welche den strömenden Teil der Flüssigkeit von einem ruhenden Teile trennt. Für sie gelten als Grenzbedingungen einmal Gleichung (386), sodann die Forderung, daß in jedem ihrer Punkte der Druck diesseits und jenseits derselbe ist. In der ruhenden Flüssigkeit ist aber der Druck konstant, in der bewegten muß somit längs dieser Grenze ebenfalls der Druck, und damit nach (384) auch die Geschwindigkeit konstant sein, genau wie in der alten Theorie. Somit lassen sich auch die Ergebnisse der klassischen Hydrodynamik über die Bildung von Strahlen in unzusammendrückbaren Flüssigkeiten hier vollständig auf Flüssigkeiten geringster Zusammendrückbarkeit übertragen.

d) Die Ausbreitung unendlich kleiner Störungen. Für unendlich kleine Bewegungen findet man aus (380) durch Unterdrückung der in q quadratischen Glieder, da man dabei $\frac{dq}{dt}$ nach π mit $\frac{\partial q}{\partial t}$ vertauschen kann:

$$\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial t} = -c^2 \, grad \, (log \, k^0)$$

$$div \, \mathfrak{q} = -\frac{\partial \, log \, k^0}{\partial t}.$$

(Es ist wiederum $\mathfrak{K} = 0$ gesetzt.) Nach der ersten dieser Gleichungen ist $\mathfrak{q}$ ein Potentialvektor:

$$\mathfrak{q} = -grad \, \psi,$$

wenn

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c^2 \, log \, \frac{k^0}{k_n^0}.$$

Die zweite der obigen Gleichungen sagt dann aber aus:

$$\Delta \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Die Bewegung ist wirbelfrei, weil wegen der unendlich kleinen Unterschiede zwischen k, k^0 und k_n^0 aus $rot \, \mathfrak{q} = 0$ nach (375) $rot \, (\varkappa \mathfrak{q}) = 0$ folgt. Kleine Störungen des Gleichgewichtes pflanzen sich somit als longitudinale Wellen von Lichtgeschwindigkeit fort. Und zwar können sowohl Kugelwellen $\left(\psi = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}\right)$ als ebene Wellen $\left(\psi = f\left[t - \frac{x}{c}\right]\right)$ auftreten, wie überhaupt jede Art von Wellen, die in der Akustik möglich ist. Wegen der Linearität der Gleichungen gilt das Superpositionsprinzip. Es durchdringen sich verschiedene Wellen, ohne sich zu stören; sie geben zu den in der Akustik bekannten Interferenzerscheinungen Anlaß.

e) Ebene Wellen von endlicher Amplitude. Fanden wir unter d) in jeder Beziehung die einfachen Verhältnisse der klassischen Akustik, so werden für endliche Amplituden die Grundgleichungen wesentlich verwickelter. Wir beschränken uns deshalb auf ebene Wellen, die längs der x-Achse fortschreiten. Im Gegensatz zu § 35, h) setzen wir aber nicht voraus, daß die Welle entweder in der positiven oder in der negativen x-Richtung fortschreitet, sondern wir lassen diese Frage noch offen. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ ist nach § 35, f) ebenfalls parallel zur x-Achse ($\mathfrak{q}_y = \mathfrak{q}_z = 0$), weil anderenfalls $rot_z \, (\varkappa \mathfrak{q}) = \frac{\partial \varkappa \mathfrak{q}_y}{\partial x}$ und $rot_y \, (\varkappa \mathfrak{q}) = -\frac{\partial \varkappa \mathfrak{q}_z}{\partial x}$ nicht Null, die Welle also nicht longitudinal wäre.

Unter diesen Umständen gehen die Grundgleichungen (380) nach π über in:

$$\frac{1}{c^2-q^2}\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial t} = -\frac{1}{k^0}\frac{\partial k^0}{\partial x}, \quad \frac{c^2}{c^2-q^2}\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} = -\frac{1}{k^0}\frac{\partial k^0}{\partial t}.$$

Differentiiert man die erste dieser Beziehungen nach t, die zweite nach x, so folgt unter Elimination von k^0:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c^2-q^2}\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2-q^2}\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial t}\right),$$

oder, wenn man

$$\varphi = log\frac{c+\mathfrak{q}_x}{c-\mathfrak{q}_x}, \quad \frac{1}{c^2-q^2}\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial t} = \frac{1}{2c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{1}{c^2-q^2}\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} = \frac{1}{2c}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

setzt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\varphi = F\left(t-\frac{x}{c}\right) - G\left(t+\frac{x}{c}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (387)$$

Daraus folgt aber:

$$\frac{c+\mathfrak{q}_x}{c-\mathfrak{q}_x} = e^{F\left(t-\frac{x}{c}\right)-G\left(t+\frac{x}{c}\right)} = \frac{f\left(t-\frac{x}{c}\right)}{g\left(t+\frac{x}{c}\right)},$$

wobei wir $e^F = f$, $e^G = g$ gesetzt haben, und weiter:

$$\mathfrak{q}_x = c\,\frac{f\left(t-\frac{x}{c}\right)-g\left(t+\frac{x}{c}\right)}{f\left(t-\frac{x}{c}\right)+g\left(t+\frac{x}{c}\right)}.$$

Da die Differentialgleichung von der zweiten Ordnung ist und diese Lösung zwei willkürliche Funktionen enthält, so ist sie die allgemeine Lösung. Die Ruhdichte bestimmt sich aus der Beziehung:

$$\frac{1}{k^0}\frac{\partial k^0}{\partial t} = -\frac{c^2}{c^2-q^2}\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} = -\frac{c}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2}(F'+G');$$

es wird nämlich:

$$log\, k^0 = \tfrac{1}{2}(F+G) + const,$$

$$k^0 = const\; e^{1/2(F+G)} = const\sqrt{f\left(t-\frac{x}{c}\right)\cdot g\left(t+\frac{x}{c}\right)}.$$

Ist eine der Funktionen f oder g eine Konstante, so haben wir Wellen, die in der negativen oder positiven x-Richtung in

unveränderter Form mit Lichtgeschwindigkeit fortschreiten. Dies hätten wir auch gefunden, wenn wir in § 35, h) [Gleichung (373)] $C = 1$ gesetzt hätten. Hier kann man leicht an der Gleichung (387) ersehen, daß zwei gegeneinander fortschreitende Wellen von endlicher Länge sich insofern ungehindert durchdringen, als nach ihrer Trennung jede von ihnen dieselbe Form hat wie vor ihrer Berührung. Aber während sie sich durchdringen, ist keineswegs die resultierende Geschwindigkeit q_x die Summe aus den einzelnen Geschwindigkeiten. Es gilt hier nicht das Superpositionsprinzip. Wie sich aber Wellen von anderer Richtung durchdringen, läßt sich hieraus nicht entnehmen. Über einige weitere Anwendungen dieser Lösung weisen wir auf die schon zitierte Dissertation von Lamla.

§ 37. Rückblicke und Ausblicke.

Um die Annahmen, welche in diesem Buche zugrunde gelegt sind, klar hervortreten zu lassen, werfen wir noch einen Rückblick auf sie. Wir haben in § 6 zunächst das Relativitätsprinzip an die Spitze gestellt, welches die Gleichwertigkeit einer dreifach unendlichen Schar von Bezugssystemen für alle Naturgesetze ausspricht. Aus einem hinreichend bekannten Naturgesetz (dem der Lichtfortpflanzung im leeren Raume) leiteten wir dann die Lorentz-Transformation ab, welche den Übergang von einem berechtigten System zu allen anderen ermöglicht und zugleich die Einsteinsche Kinematik enthält (§ 7). In § 14 konnten wir dann beweisen, daß die (über das Gesetz der Lichtfortpflanzung hinausgehende) Elektrodynamik des Vakuums durch die Lorentz-Transformation in sich selbst überführt wird. In § 15 traten als neue Annahmen die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulses hinzu, eng verknüpft in Gleichung (XVI):

$$F = -\Delta iv\, T.$$

In Minkowskis Elektrodynamik der bewegten Körper wurde sodann die Maxwellsche Theorie für ruhende Körper zugrunde gelegt; nur unwesentlich im Ansatz der ponderomotorischen Kraft entsprechend der Überlegung modifiziert, daß alle Kräfte sich gegen die Lorentz-Transformation gleich verhalten müssen, und daß daher dem Energiestrom auch ein elektromagnetischer Impuls zugeordnet sein muß. Auf derselben Grundlage ließ sich auch die Dynamik der bewegten Körper aufbauen, doch enthielt der Verzicht auf gewisse an sich mögliche Zusätze bei der Deutung

der Komponenten des Welttensors T als Energiestrom, Impulsdichte usw. eine neue Hypothese; deren physikalische Bedeutung trat in dem Satz von der Trägheit der Energie $\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}$ zutage [Gleichung (XXV)], welcher unter anderem die vollständige Zurückführung der mechanischen Trägheit auf die Energie und die Spannungen ermöglicht. In den vier letzten Paragraphen haben wir schließlich noch den zweiten Hauptsatz hinzugezogen. Als physikalische Grundlage der Relativitätstheorie können wir hiermit bezeichnen: das Einsteinsche Relativitätsprinzip, die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulses, das Entropieprinzip, die Maxwellsche Elektrodynamik, sowie jene Deutung der Trägheit.

Sodann mag auf das durch die historische Entwickelung nahegelegte Mißverständnis hingewiesen werden, die Relativitätstheorie stände der Elektrodynamik näher als etwa der Mechanik. Wenn die Lorentz-Transformation aus der Betrachtung eines elektromagnetischen Vorganges abgeleitet wird, so geschieht dies allein aus dem Grunde, daß wir zunächst mechanische Naturgesetze nicht mit der erforderlichen Genauigkeit kennen, sonst könnten wir genau so gut ein solches dazu benutzen. Auch daß die Elektrizitätsmenge im Gegensatz zur Masse die wichtige Rolle einer Invarianten dieser Transformation spielt, weist keineswegs auf einen solchen Zusammenhang hin. Denkbar, wenn auch im Widerspruch mit der Erfahrung, wären Theorien der Elektrodynamik, die dem Relativitätsprinzip genügen und bei denen die Elektrizitätsmenge keine solche Invariante ist; sie brauchte dazu nur in einem und demselben berechtigten System keine durch Bewegung unveränderliche Größe zu sein. Tatsächlich steht das Relativitätsprinzip in demselben Sinne über allen Gebieten der Physik, wie etwa das Energieprinzip, und beansprucht ebenso wie dies, bei allen physikalischen Theorien ein Kriterium für deren Zulässigkeit zu enthalten. Der einzige, zufällige Unterschied zwischen den beiden genannten Gebieten ist der, daß wir in der Elektrodynamik infolge der außerordentlich gesteigerten Genauigkeit der Meßmethoden diesen Nachweis führen können, in der Mechanik aber nicht. Seine volle Tragweite zeigt das Relativitätsprinzip gerade aus diesem Grunde nicht in der Elektrodynamik, sondern in der Dynamik.

Eng damit verknüpft ist der Irrtum, daß das gemeinsame Verhalten aller Kräfte gegen die Lorentz-Transformation auf

einen gemeinsamen Ursprung von ihnen hinwiese, daß sich etwa alle auf elektrodynamische Kräfte zurückführen lassen müßten. Die Frage, ob so etwas möglich ist, steht gänzlich außerhalb unserer Betrachtungen. Jene Gemeinsamkeit sagt nichts anderes aus, als daß das Relativitätsprinzip in allen Gebieten der Physik gilt; und dies müssen wir annehmen, wenn dies Prinzip mehr sein soll als eine manchmal nützliche Rechnungsregel. Darüber hinausgehende Schlüsse aus jener Gemeinsamkeit zu ziehen, wäre so voreilig, als wenn man etwa aus der Allgemeingültigkeit des zuerst aus der Mechanik abgeleiteten Energieprinzips schließen wollte — wie es früher vielfach geschah —, daß alle Naturvorgänge in letzter Linie mechanische sind. Überhaupt scheint die Vereinigung der beiden noch getrennten Gebiete der theoretischen Physik — Elektrodynamik und Mechanik — nicht durch Unterordnung des einen unter das andere erreichbar zu sein, sondern durch gleichmäßige Unterordnung beider unter höhere Gesetze. Daß wir hier nicht nur das Relativitätsprinzip auf beide anwenden, sondern auch die Begriffe Kraft, Impuls, Spannung, Energiedichte und -strömung in universelle Beziehungen zueinander setzen konnten, mag immerhin als ein Schritt in dieser Richtung betrachtet werden.

Von einem wichtigen Gebiet physikalischer Erscheinungen ist in diesem Buche nicht die Rede gewesen, nämlich von der Schwerkraft. Die Aufgabe, diese der Relativitätstheorie einzufügen, haben in jüngster Zeit Nordström und Mie, und unter einer groß angelegten Erweiterung der Relativitätstheorie Einstein unternommen. Auf diese Theorien gedenken wir in einem anderen Buche näher einzugehen.

Da so außerordentlich viele Größen, denen zunächst eine absolute Bedeutung zuzukommen scheint, in der Relativitätstheorie diese abstreifen müssen, so wollen wir hier noch einmal die wichtigsten Invarianten der Lorentz-Transformation zusammenstellen. Von Raum-Zeitgrößen ist dies zunächst das $\iint dS\,dt$, genommen über einen bestimmten Weltbereich, von physikalischen Größen sind es die Elektrizitätsmenge, die Entropie und die Wirkungsgröße $\int_1^2 H\,dt$, ferner der Ausdruck

$$t_{xx} + t_{yy} + t_{zz} - (W - (\mathfrak{q}\mathfrak{g})),$$

daneben auch, was aber von weniger allgemeiner Bedeutung ist, der allseitig gleiche, relative Druck p.

Anhang.

a) Geometrische Bezeichnungen.

Das Koordinatensystem x, y, z ist stets rechtwinkelig und bildet ein Rechtssystem; d. h. die x-, die y- und die z-Achse liegen zueinander wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand, wenn man diese (so gut es geht) senkrecht zueinander stellt. Die Zeit nennen wir t; benutzen aber an ihrer Stelle oft die Größen $u = ct$ oder $l = ict$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, $i = \sqrt{-1}$ ist. Ein Linienelement bezeichnen wir mit ds, ein Flächenelement mit $d\sigma$, ein Raumelement mit dS; die Normale von $d\sigma$ ist n. Das Volumen eines Körpers nennen wir V, das Element davon, welches für die Lorentz-Transformation vom Raumelement dS zu unterscheiden ist, sonst aber manchmal mit ihm vertauscht werden kann, δV. Im gleichen Bezugssystem sind Integrationen nach dS und δV gleichwertig, sofern sie bei konstanter Zeit oder über ruhende Körper auszuführen sind. Sind aber Raumintegrale nach der Zeit zu differentiieren, so muß streng unterschieden werden, ob sie über ein mathematisch abgegrenztes, ruhendes Stück des Raumes, d. h. nach dS, oder über ein Stück eines bewegten Körpers, d. h. nach δV, auszuführen sind. Vergleiche über diesen wichtigen Punkt Abschnitt c) dieses Anhanges. Den Winkel zwischen zwei beliebigen Richtungen s und s' machen wir durch das Zeichen (ss') kenntlich.

b) Vektor- und Tensorbezeichnungen*).

Vektoren sind solche physikalischen Größen, die denselben Richtungscharakter besitzen wie eine gerichtete Strecke. Alle Vektoren und nur solche werden durch deutsche Buchstaben kenntlich gemacht; die Komponente des Vektors $\mathfrak{A}$ nach einer Richtung s wird durch $\mathfrak{A}_s$, sein absoluter Wert durch $|\mathfrak{A}|$ oder,

*) Ausführliche Darstellungen der Vektor- und Tensoranalysis sind z. B.: W. v. Ignatowski, Die Vektoranalysis; R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, beide Leipzig und Berlin 1909; ferner die ersten Abschnitte von Abraham-Föppl, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, Leipzig 1904. Vgl. auch Enzyklop. d. mathem. Wiss. VI, 3, Art 14 (M. Abraham).

falls Zweideutigkeiten ausgeschlossen sind, durch A*), das Quadrat davon durch $\mathfrak{A}^2$ oder A^2 bezeichnet.

Eine Drehung des Achsenkreuzes ist durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= a_1^{(1)} x' + a_2^{(1)} y' + a_3^{(1)} z', & x' &= a_1^{(1)} x + a_1^{(2)} y + a_1^{(3)} z, \\ y &= a_1^{(2)} x' + a_2^{(2)} y' + a_3^{(2)} z', & y' &= a_2^{(1)} x + a_2^{(2)} y + a_2^{(3)} z, \\ z &= a_1^{(3)} x' + a_2^{(3)} y' + a_3^{(3)} z', & z' &= a_3^{(1)} x + a_3^{(2)} y + a_3^{(3)} z \end{aligned}$$

dargestellt, wenn dabei die „Orthogonalitätsbedingungen"

$$\begin{aligned} a_1^{(1)2} + a_2^{(1)2} + a_3^{(1)2} &= 1, & a_1^{(2)} a_1^{(3)} + a_2^{(2)} a_2^{(3)} + a_3^{(2)} a_3^{(3)} &= 0, \\ a_1^{(2)2} + a_2^{(2)2} + a_3^{(2)2} &= 1, & a_1^{(3)} a_1^{(1)} + a_2^{(3)} a_2^{(1)} + a_3^{(3)} a_3^{(1)} &= 0, \\ a_1^{(3)2} + a_2^{(3)2} + a_3^{(3)2} &= 1, & a_1^{(1)} a_1^{(2)} + a_2^{(1)} a_2^{(2)} + a_3^{(1)} a_3^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Dabei transformieren sich die Komponenten eines Vektors gemäß dessen Definition wie die Koordinaten selbst, d. h. diese Gleichungen bleiben richtig, wenn man x durch $\mathfrak{A}_x$ usw., x' durch $\mathfrak{A}_{x'}$ usw. ersetzt.

Aus einem Skalar φ leitet sich der Vektor $grad\ \varphi$ ab, dessen Komponenten sind:

$$grad_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad grad_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad grad_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Als skalares Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir die Größe:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z = |\mathfrak{A}||\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$

als ihr Vektorprodukt $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]$ den Vektor mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]_x &= \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y, \\ [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]_y &= \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z, \\ [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]_z &= \mathfrak{B}_x \mathfrak{A}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x, \end{aligned}$$

er steht auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ senkrecht und ist seinem absoluten Betrage nach gleich $|\mathfrak{A}|.|\mathfrak{B}| \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$. Bringt man den Daumen der rechten Hand in die Richtung von $\mathfrak{A}$, den Zeigefinger in die Richtung von $\mathfrak{B}$, und stellt man den Mittelfinger senkrecht zu beiden, so weist er in die Richtung von $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]$. Den Skalar

$$div\,\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z}$$

nennen wir die Divergenz, den Vektor $rot\,\mathfrak{A}$ mit den Komponenten

$$rot_x \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}, \quad rot_y \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \quad rot_z \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}$$

*) E ist stets die Energie, niemals der absolute Wert der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$.

nennen wir den Rotor des Vektors $\mathfrak{A}$. Durch Einsetzen dieser Definitionsgleichungen bestätigt man ohne weiteres die folgenden Rechnungsregeln:

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$(\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]) = (\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]) = (\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}]) \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

$$(\mathfrak{A}[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

$$\big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\big] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}](\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}) - [\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}](\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]) - [\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}].\mathfrak{A}^2 \quad . \quad (\varepsilon)$$

$$div\,(\varphi\,\mathfrak{A}) = \varphi\,div\,\mathfrak{A} + (\mathfrak{A}\,grad\,\varphi) \quad \ldots\ldots \quad (\zeta)$$

$$div\,[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = (\mathfrak{B},\, rot\,\mathfrak{A}) - (\mathfrak{A},\, rot\,\mathfrak{B}) \quad \ldots\ldots \quad (\vartheta)$$

$$div\,grad\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi \quad \ldots \quad (\eta)$$

$$div\,(rot\,\mathfrak{A}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\iota)$$

$$rot\,rot\,\mathfrak{A} = grad\,div\,\mathfrak{A} - \Delta\mathfrak{A} \quad \ldots\ldots \quad (\iota')$$

Eine große Rolle spielen ferner die Integralsätze von Gauß und Stokes. Bei dem ersteren handelt es sich um die Umformung des Integrals $\int div\,\mathfrak{A}\,dS$ über einen geschlossenen Raum in ein Integral über dessen Oberfläche. Bedeutet n die in das Innere gerichtete Normale des Oberflächenelementes $d\sigma$, so lautet er:

$$\int div\,\mathfrak{A}\,dS = -\int \mathfrak{A}_n\,d\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varkappa)$$

Die Anwendung dieses Satzes auf einen Vektor, dessen Komponenten

$$\mathfrak{A}_x = x, \quad \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_z = 0, \quad \text{also} \quad \mathfrak{A}_n = x\cos nx$$

sind, ergibt, da dessen Divergenz gleich 1 ist:

$$\int x\cos nx\,d\sigma = -V \text{ und analog } \int y\cos ny\,d\sigma = \int z\cos nz\,d\sigma = -V \quad (\varkappa')$$

Setzt man hingegen

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_z = 0, \quad \mathfrak{A}_y = z, \quad \text{also} \quad \mathfrak{A}_n = z\cos ny,$$

so verschwindet die Divergenz und man findet:

$$\int z\cos ny\,d\sigma = \int y\cos nz\,d\sigma = \ldots = 0 \quad \ldots \quad (\varkappa'')$$

Haben wir andererseits eine begrenzte Fläche, so setzt der Stokessche Satz das Flächenintegral:

$$\int rot_n\,\mathfrak{A}\,d\sigma = \int \mathfrak{A}_s\,ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\lambda)$$

wobei die rechts stehende Linienintegration in dem Sinne über die ganze Berandung auszuführen ist, daß der Umlauf eine Rechtsdrehung um die Normale n darstellt*).

Ist an einer Fläche die Normalkomponente eines Vektors $\mathfrak{A}$ unstetig, so mißt die Größe ihres Sprunges die Flächendivergenz von $\mathfrak{A}$. Ist die Tangentialkomponente unstetig, so mißt ihr Sprung (als Vektor betrachtet) den Flächenrotor zu $\mathfrak{A}$. Wie die Flächendivergenz sich als Grenzfall einer unendlich großen räumlichen Divergenz auffassen läßt, so auch der Flächenrotor als Grenzfall eines räumlichen Rotors. Den Grenzübergang führt man mit Hilfe des Gaußschen und des Stokesschen Satzes aus (vgl. § 23, c).

Neben den Vektoren spielt der Tensorbegriff eine große Rolle. Wir verstehen unter dem symmetrischen Tensor $\boldsymbol{p}$ den Inbegriff von neun Größen:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{p}_{xx}, & \boldsymbol{p}_{xy}, & \boldsymbol{p}_{xz}, \\ \boldsymbol{p}_{yx}, & \boldsymbol{p}_{yy}, & \boldsymbol{p}_{yz}, \\ \boldsymbol{p}_{zx}, & \boldsymbol{p}_{zy}, & \boldsymbol{p}_{zz}, \end{matrix}$$

mit den drei Symmetriebedingungen:

$$\boldsymbol{p}_{yz} = \boldsymbol{p}_{zy}, \quad \boldsymbol{p}_{zx} = \boldsymbol{p}_{xz}, \quad \boldsymbol{p}_{xy} = \boldsymbol{p}_{yx},$$

welche mit den Komponenten eines beliebigen Vektors $\mathfrak{q}$ zu den Ausdrücken

$$\mathfrak{q}_x \boldsymbol{p}_{xx} + \mathfrak{q}_y \boldsymbol{p}_{xy} + \mathfrak{q}_z \boldsymbol{p}_{xz} = [\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}]_x = \mathfrak{A}_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\lambda')$$

usw. vereinigt, wieder die Komponenten eines Vektors ergeben**), den letzteren nennt man das Vektorprodukt $[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}]$. Aus dieser Definition folgt für eine Drehung des Koordinatensystems, daß

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{q}_x \boldsymbol{p}_{xx} + \mathfrak{q}_y \boldsymbol{p}_{xy} + \mathfrak{q}_z \boldsymbol{p}_{xz} = a_1^{(1)} \mathfrak{A}_{x'} + a_2^{(1)} \mathfrak{A}_{y'} + a_3^{(1)} \mathfrak{A}_{z'}$$

sein muß. Setzt man hier

$$\mathfrak{A}_{x'} = \mathfrak{q}_{x'} \boldsymbol{p}_{x'x'} + \mathfrak{q}_{y'} \boldsymbol{p}_{x'y'} + \mathfrak{q}_{z'} \boldsymbol{p}_{x'z'}$$

usw. und ferner

$$\mathfrak{q}_{x'} = a_1^{(1)} \mathfrak{q}_x + a_1^{(2)} \mathfrak{q}_y + a_1^{(3)} \mathfrak{q}_z$$

usw., so findet man eine Gleichung zwischen zwei linearen Funktionen der drei unabhängigen Variablen $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$, $\mathfrak{q}_z$, so daß deren Koeffizienten einzeln übereinstimmen müssen. Die Durchführung der einfachen Rechnung ergibt die Transformationsformeln:

---

*) Eine Rechtsdrehung um die positive z-Achse führt die positive x-Achse auf dem kürzesten Wege in die positive y-Achse über.

**) Die Summe $p_{xx}x^2 + p_{yy}y^2 + \cdots + 2p_{xy}xy$ ist danach als skalares Produkt zweier Vektoren invariant.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_{xx} &= a_1^{(1)2}\,\boldsymbol{p}_{x'x'} + a_2^{(1)2}\,\boldsymbol{p}_{y'y'} + a_3^{(1)2}\,\boldsymbol{p}_{z'z'} \\
&+ 2\left(a_2^{(1)}a_3^{(1)}\,\boldsymbol{p}_{y'z'} + a_3^{(1)}a_1^{(1)}\,\boldsymbol{p}_{z'x'} + a_1^{(1)}a_2^{(1)}\,\boldsymbol{p}_{x'y'}\right) \\
\boldsymbol{p}_{xy} &= a_1^{(1)}a_1^{(2)}\,\boldsymbol{p}_{x'x'} + a_2^{(1)}a_2^{(2)}\,\boldsymbol{p}_{y'y'} + a_3^{(1)}a_3^{(2)}\,\boldsymbol{p}_{z'z'} \\
&+ (a_2^{(1)}a_3^{(2)} + a_3^{(1)}a_2^{(2)})\,\boldsymbol{p}_{y'z'} + (a_3^{(1)}a_1^{(2)} + a_1^{(1)}a_3^{(2)})\,\boldsymbol{p}_{z'x'} \\
&+ (a_1^{(1)}a_2^{(2)} + a_2^{(1)}a_1^{(2)})\,\boldsymbol{p}_{x'y'}
\end{aligned}$$

usw., d. h. die Tensorkomponenten transformieren sich wie die aus den Koordinaten gebildeten Quadrate x^2 usw. und Produkte xy usw. Das System der Maxwellschen oder der elastischen Spannungen (in ruhenden Körpern) wird durch einen symmetrischen Tensor dargestellt.

Neben dem symmetrischen Tensor $\boldsymbol{p}$ werden wir noch den „unsymmetrischen" Tensor $\boldsymbol{t}$ brauchen, welcher sich aus $\boldsymbol{p}$ und den beliebigen Vektoren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{q}$ durch die Definition

$$\boldsymbol{t}_{jk} = \boldsymbol{p}_{jk} - \mathfrak{g}_j\mathfrak{q}_k, \quad j, k = x, y, z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu)$$

ableitet. Bei ihm kann man die beiden Indices nicht miteinander vertauschen. Für die Transformation seiner Komponenten gelten die Regeln:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_{xx} &= a_1^{(1)2}\,\boldsymbol{t}_{x'x'} + a_2^{(1)2}\,\boldsymbol{t}_{y'y'} + a_3^{(1)2}\,\boldsymbol{t}_{z'z'} \\
&+ a_2^{(1)}a_3^{(1)}\,\boldsymbol{t}_{y'z'} + a_3^{(1)}a_2^{(1)}\,\boldsymbol{t}_{z'y'} + a_3^{(1)}a_1^{(1)}\,\boldsymbol{t}_{z'x'} \\
&+ a_1^{(1)}a_3^{(1)}\,\boldsymbol{t}_{x'z'} + a_1^{(1)}a_2^{(1)}\,\boldsymbol{t}_{x'y'} + a_2^{(1)}a_1^{(1)}\,\boldsymbol{t}_{y'x'}; \\
\boldsymbol{t}_{xy} &= a_1^{(1)}a_1^{(2)}\,\boldsymbol{t}_{x'x'} + a_2^{(1)}a_2^{(2)}\,\boldsymbol{t}_{y'y'} + a_3^{(1)}a_3^{(2)}\,\boldsymbol{t}_{z'z'} \\
&+ a_2^{(1)}a_3^{(2)}\,\boldsymbol{t}_{y'z'} + a_3^{(1)}a_2^{(2)}\,\boldsymbol{t}_{z'y'} + a_3^{(1)}a_1^{(2)}\,\boldsymbol{t}_{z'x'} \\
&+ a_1^{(1)}a_3^{(2)}\,\boldsymbol{t}_{x'z'} + a_1^{(1)}a_2^{(2)}\,\boldsymbol{t}_{x'y'} + a_2^{(1)}a_1^{(2)}\,\boldsymbol{t}_{y'x'}
\end{aligned}$$

usw., wie man aus den Transformationen für $\boldsymbol{p}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{q}$ ohne weiteres ableitet. Das Produkt $[\mathfrak{A}\boldsymbol{t}]$ aus dem Vektor $\mathfrak{A}$ und dem Tensor $\boldsymbol{t}$, definiert durch die Gleichungen

$$[\mathfrak{A}\boldsymbol{t}]_x = \mathfrak{A}_x\boldsymbol{t}_{xx} + \mathfrak{A}_y\boldsymbol{t}_{xy} + \mathfrak{A}_z\boldsymbol{t}_{xz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu')$$

usw., stellt auch hier einen Vektor dar; denn es ist laut Definition (μ) von $\boldsymbol{t}$:

$$[\mathfrak{A}\boldsymbol{t}] = [\mathfrak{A}\boldsymbol{p}] - \mathfrak{g}(\mathfrak{A}\mathfrak{q}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\nu)$$

Ein Beispiel für einen unsymmetrischen Tensor ist das „Tensorprodukt" $\big[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\big]$ aus zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; seine Komponenten sollen sein:

$$\big[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\big]_{jk} = \mathfrak{A}_j\mathfrak{B}_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu'')$$

Nach μ läßt sich der unsymmetrische Tensor $\boldsymbol{t}$ zurückführen auf einen symmetrischen, $\boldsymbol{p}$, und ein Tensorprodukt $[[\mathfrak{g}\mathfrak{q}]]$.

Ist n eine beliebige Richtung, so lassen sich die drei Kosinus $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ als die Komponenten eines Vektors vom absoluten Betrage 1 auffassen. Die Vektorprodukte aus diesem und den Tensoren $\boldsymbol{p}$ bzw. $\boldsymbol{t}$ nennen wir $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{t}_n$, es ist also

$$\mathfrak{t}_{nx} = \boldsymbol{t}_{xx}\cos(nx) + \boldsymbol{t}_{xy}\cos(ny) + \boldsymbol{t}_{xz}\cos(nz) \quad . \quad . \quad (\nu')$$

usw.; für $\mathfrak{p}_n$ gelten analoge Gleichungen. Ist ferner φ ein Skalar, so ist bei der Drehung des Achsenkreuzes

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = a_1^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + a_2^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial y'} + a_3^{(1)}\frac{\partial\varphi}{\partial z'}$$

usw. Die Differentialquotienten

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

transformieren sich also wie die Komponenten eines Vektors; sie bilden, wie man sagt, einen symbolischen Vektor. Die Vektorprodukte aus dem letzteren und $\boldsymbol{p}$ bzw. $\boldsymbol{t}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{div}\,\boldsymbol{p}$ und $\mathfrak{div}\,\boldsymbol{t}$. Es ist also

$$\mathfrak{div}_x\boldsymbol{t} = \frac{\partial \boldsymbol{t}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{t}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{t}_{xz}}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\nu'')$$

usw. Auch hier gilt für $\mathfrak{div}\,\boldsymbol{p}$ das Analoge. Durch partielle Integration bestätigt man nach (ν') und (ν'') leicht die Gleichung:

$$\int \mathfrak{div}_x\boldsymbol{t}\,dS = -\int \mathfrak{t}_{nx}\,d\sigma,$$

wobei die Integration links über einen geschlossenen Raum, rechts über dessen gesamte Oberfläche auszudehnen und unter n die nach innen gerichtete Normale des Flächenelementes $d\sigma$ zu verstehen ist. Man kann die letzte Gleichung mit ihren Analogen für die y- und z-Richtung zusammenfassen in die vektorielle Beziehung:

$$\int \mathfrak{div}\,\boldsymbol{t}\,dS = -\int \mathfrak{t}_n\,d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\xi)$$

Diese bleibt richtig, wenn man den unsymmetrischen Tensor $\boldsymbol{t}$ mit dem symmetrischen $\boldsymbol{p}$ und zugleich $\mathfrak{t}_n$ mit $\mathfrak{p}_n$ vertauscht.

Bezeichnet $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor, der von einem beliebigen festen Punkte nach dem Volumelement dS hinweist, so kann man jenen festen Punkt als Anfangspunkt der Koordinaten wählen und

dann $\mathfrak{r}_x = x$ usw. setzen. Dieselbe partielle Integration, welche zu (ξ) führt, dient auch zum Beweise der Gleichungen:

$$\int [\mathfrak{r}, \mathfrak{div}\, \boldsymbol{t}]_x dS = -\int [\mathfrak{r}\mathfrak{t}_n]_x d\sigma - \int (t_{zy} - t_{yz}) dS \quad . \quad . \quad (\xi'')$$

usw. Für den symmetrischen Tensor $\boldsymbol{p}$ vereinfachen sie sich zu

$$\int [\mathfrak{r}, \mathfrak{div}\, \boldsymbol{p}] dS = -\int [\mathfrak{r}\mathfrak{p}_n] d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\xi'')$$

Nach den oben angegebenen Regeln ist der Ausdruck

$$[\mathfrak{q}\boldsymbol{t}] - [\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]]$$

als Differenz zweier Vektoren selbst ein solcher. $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{q}$ sollen dieselben Vektoren wie in (μ) sein. Integrieren wir seine Divergenz über einen geschlossenen Raum, so ist nach dem Gaußschen Satz ($\varkappa$):

$$\int div \Big\{ [\mathfrak{q}\boldsymbol{t}] - \Big[\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]\Big] \Big\} dS = -\int d\sigma \Big\{ [\mathfrak{q}\boldsymbol{t}]_n - \Big[\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]\Big]_n \Big\}$$

$$= -\int d\sigma \Big\{ cos(nx) \Big([\mathfrak{q}\boldsymbol{t}]_x - \Big[\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]\Big]_x \Big)$$

$$+ cos(ny) \Big([\mathfrak{q}\boldsymbol{t}]_y - \Big[\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]\Big]_y \Big) + cos(nz) \Big([\mathfrak{q}\boldsymbol{t}]_z - \Big[\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]\Big]_z \Big) \Big\}.$$

Rechnen wir hier die Komponenten

$$[\mathfrak{q}\boldsymbol{t}]_x \quad \text{und} \quad [\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]]_x$$

aus, so finden wir als Faktor von $cos(nx)$:

$$\Big(\mathfrak{q}_x t_{xx} + \mathfrak{q}_y t_{xy} + \mathfrak{q}_z t_{xz} - (\mathfrak{q}_y(\mathfrak{q}_x \mathfrak{g}_y - \mathfrak{q}_y \mathfrak{g}_x) - \mathfrak{q}_z(\mathfrak{q}_z \mathfrak{g}_x - \mathfrak{q}_x \mathfrak{g}_z)) \Big)$$

$$= \Big(\mathfrak{q}_x t_{xx} + \mathfrak{q}_y t_{xy} + \mathfrak{q}_z t_{xz} - (\mathfrak{q}_y(t_{xy} - t_{yx}) - \mathfrak{q}_z(t_{zx} - t_{xz})) \Big)$$

$$= (\mathfrak{q}_x t_{xx} + \mathfrak{q}_y t_{yx} + \mathfrak{q}_z t_{zx}).$$

Entsprechend lauten die Faktoren von $cos(ny)$ und $cos(nz)$. Ordnet man in dem Flächenintegral nach den Komponenten von $\mathfrak{q}$, so findet man schließlich nach (ν') für das Flächenintegral den Wert:

$$-\int d\sigma \Big\{ \mathfrak{q}_x \mathfrak{t}_{nx} + \mathfrak{q}_y \mathfrak{t}_{ny} + \mathfrak{q}_z \mathfrak{t}_{nz} \Big\} = -\int (\mathfrak{q}\mathfrak{t}_n) d\sigma.$$

Also ist

$$\int div \Big\{ [\mathfrak{q}\boldsymbol{t}] - \Big[\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{g}]\Big] \Big\} dS = -\int (\mathfrak{q}\mathfrak{t}_n) d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad (o)$$

c) Die verschiedenen Arten der Zeitdifferentiation.

Ist A eine beliebige Funktion der Koordinaten x, y, z und der Zeit t, so bezeichnen wir den Differentialquotienten von A nach t

bei festgehaltenen x, y, z mit $\frac{\partial A}{\partial t}$. Oft aber haben wir unter A eine Zustandsgröße eines mit der (räumlich und zeitlich veränderlichen) Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ bewegten Körpers zu verstehen und uns zu fragen, wie sie sich in einem materiellen, d. h. mitbewegten Punkte ändert. Den so definierten Differentialquotienten schreiben wir $\frac{dA}{dt}$. In der Zeit dt wachsen aber die Koordinaten des mitbewegten Punktes um $dx = \mathfrak{q}_x dt$ usw., also ist

$$dA = \frac{\partial A}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz$$
$$= \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \mathfrak{q}_x \frac{\partial A}{\partial x} + \mathfrak{q}_y \frac{\partial A}{\partial y} + \mathfrak{q}_z \frac{\partial A}{\partial z}\right) dt,$$

mithin

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathfrak{q}\, grad\, A) \quad \ldots\ldots \quad (\pi)$$

Ferner wird manchmal nach der Veränderung des Produktes $A\delta V$ gefragt, wobei δV ein materielles Volumenelement im bewegten Körper ist. Bekanntlich ändert sich δV in der Zeit dt um

$$d\delta V = \delta V . div\, \mathfrak{q} . dt,$$

also ist [vgl. Rechnungsregel (ξ) und (π)]

$$\frac{d(A\delta V)}{dt} = \delta V\left(\frac{dA}{dt} + A\, div\, \mathfrak{q}\right) = \delta V\left(\frac{\partial A}{\partial t} + div\,(A\mathfrak{q})\right).$$

Wir definieren nun den Differentialquotienten $\underline{\underline{\dot{A}}}$ so, daß

$$\underline{\underline{\dot{A}}}\,\delta V = \frac{d(A\delta V)}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varrho)$$

wird, und finden dementsprechend:

$$\underline{\underline{\dot{A}}} = \frac{\partial A}{\partial t} + div(A\mathfrak{q}) \quad \ldots\ldots \quad (\varrho')$$

In der klassischen Mechanik und ebenso in der Relativitätstheorie gilt z. B. für den Zusammenhang zwischen Kraftdichte $\mathfrak{F}$ und Impulsdichte $\mathfrak{g}$ die Gleichung:

$$\underline{\underline{\dot{\mathfrak{g}}}} = \mathfrak{F} \quad \text{oder} \quad \frac{d(\mathfrak{g}\delta V)}{dt} = \mathfrak{F}\delta V,$$

welche man aber auch aus dieser (Lagrangeschen) in die Eulersche Form

$$\dot{\mathfrak{g}}_x + div\,(\mathfrak{g}_x\mathfrak{q}) = \mathfrak{F}_x \text{ usw.}$$

umschreiben kann. (Vgl. G. Kirchhoff, Mechanik, 15. Vorlesung, Leipzig 1897 und § 28b dieser Schrift.)

Schließlich betrachten wir noch eine Fläche $\delta\sigma$, deren Punkte die (stetig variierende) Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ haben; ihre Normale n wählen wir zunächst so, daß sie mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ einen spitzen Winkel bildet. Wir untersuchen die Veränderung

$$\frac{d(\mathfrak{A}_n\,\delta\sigma)}{dt}\,dt,$$

welche der Ausdruck $\mathfrak{A}_n\delta\sigma$ in der Zeit dt erleidet, wenn $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Vektor ist. Wir denken uns zu diesem Zwecke $\mathfrak{A}$ für jeden festen Raumpunkt fürs erste unveränderlich, d. h. $\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} = 0$, und berechnen unter dieser Annahme das Produkt $div\,\mathfrak{A}\,dS$, wobei $dS = \mathfrak{q}_n\delta\sigma dt$ der Inhalt des Zylinders ist, welchen die Fläche $\delta\sigma$ bei ihrer Bewegung in der Zeit dt beschreibt. Nach dem Gaußschen Satze ist

$$div\,\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{q}_n\delta\sigma dt = div\,\mathfrak{A}\,dS = -\int\mathfrak{A}_{n'}\,.\,d\sigma',$$

wobei die Integration nach $d\sigma'$ sowohl über die Grundflächen als den Mantel des Zylinders zu erstrecken ist. Der Anteil der Grundflächen daran ist, da die Normale n' bei beiden in das Innere weist, also einmal dieselbe, das andere Mal die entgegengesetzte Richtung hat wie n, gleich $\frac{d(\mathfrak{A}_n\delta\sigma)}{dt}dt$. Den Mantel aber können wir in parallelepipedische Elemente $d\sigma'$ zerlegen, welche aus den Strecken $\mathfrak{q}dt$ und den Linienelementen ds der Randkurve von $\delta\sigma$ gebildet sind. ds werde dabei in dem der Normalen n wie beim Stokesschen Satz entsprechenden Sinne positiv gerechnet. Der Inhalt eines solchen Elementes ist $d\sigma' = q\,ds\,sin\,(\mathfrak{q}, ds)\,dt$, also gleich dem absoluten Wert des Vektorproduktes $[ds, \mathfrak{q}]\,dt$. Letzteres hat aber die Richtung der Normalen von $d\sigma'$, also ist [vgl. (β)]

$$\mathfrak{A}'_n d\sigma' = (\mathfrak{A}[ds, \mathfrak{q}])dt = (ds[\mathfrak{q}\mathfrak{A}])dt = [\mathfrak{q}\mathfrak{A}]_s ds dt,$$

mithin der Anteil des Mantels an dem Flächenintegral nach (λ) gleich:

$$dt\int\limits_{\circ}[\mathfrak{q}\mathfrak{A}]_s ds = rot_n[\mathfrak{q}\mathfrak{A}]\,\delta\sigma dt$$

und wir finden unter der Annahme $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$:

$$\frac{d(\mathfrak{A}_n\,\delta\sigma)}{dt} + rot_n[\mathfrak{q}\mathfrak{A}]\,\delta\sigma = \mathfrak{q}_n\,div\,\mathfrak{A}\delta\sigma.$$

Fügen wir endlich noch die von der Bewegung unabhängige Veränderung $\frac{\partial \mathfrak{A}_n}{\partial t} \delta \sigma$ additiv hinzu, so folgt:

$$\frac{d(\mathfrak{A}_n \delta \sigma)}{dt} = \delta \sigma \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_n}{\partial t} + \mathfrak{q}_n \, div \, \mathfrak{A} + rot_n [\mathfrak{A} \mathfrak{q}] \right).$$

Wir können mithin einen Vektor $\dot{\underline{\mathfrak{A}}}$ so definieren, daß für jede Orientierung der Fläche $\delta \sigma$

$$\dot{\underline{\mathfrak{A}}}_n \delta \sigma = \frac{d(\mathfrak{A}_n \delta \sigma)}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\sigma)$$

ist; dann ist nämlich

$$\dot{\underline{\mathfrak{A}}} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{q} \, div \, \mathfrak{A} + rot \, [\mathfrak{A} \mathfrak{q}] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\sigma')$$

Die beschränkende Annahme eines spitzen Winkels zwischen n und $\mathfrak{q}$ spielt offenbar in Formel (σ) keine Rolle mehr; beide Seiten wechseln ihr Vorzeichen, wenn n die Richtung umkehrt.

d) Bezeichnung und Maßsystem der physikalischen Größen.

Wir beziehen alle Größen auf das absolute Maßsystem, indem wir als Einheiten Gramm (g), Zentimeter (cm), Sekunde (sec) und Celsiusgrad (grad) zugrunde legen. Wir messen also die Kraft in Dyn, die Energie einschließlich der Wärme in Erg. Die Masse („Ruhmasse") bezeichnen wir mit m (m_n ist in § 35 und 36 die Ruhmasse im „Normalzustand"), die longitudinale und transversale Masse mit m_l und m_t, die Dichte (spezifisches Gewicht) mit k, die Energie mit E, ihre Dichte mit W, das Wärmequantum, wenn es einem Körper bei einem bestimmten physikalischen Vorgange zugeführt wird, mit Q, mit R dagegen, wenn es auf die Zeiteinheit, und mit Q, wenn es auf die Zeit- und Volumeneinheit bezogen wird. T ist die absolute Temperatur, S die Entropie, F die freie Energie, p der (relative) Druck; $\mathfrak{K}$ soll die Kraft, $\mathfrak{F}$ die Kraft pro Volumeneinheit (Kraftdichte), $\mathfrak{N}$ das Drehmoment, $\mathfrak{G}$ den Impuls, $\mathfrak{g}$ dessen Dichte, $\mathfrak{L}$ den Drehimpuls bedeuten; mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir die Dichte des Energiestromes, mit $\mathfrak{q}$ die Geschwindigkeit, mit $\dot{\mathfrak{q}}$ die Beschleunigung eines Körpers. $\mathfrak{v}$ hingegen ist stets die Geschwindigkeit des „gestrichenen" Systems K' gegen das „ungestrichene", K, und $c = 3 \, . \, 10^{10}$ cm/sec^{-1} der Absolutwert der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum. Zur Abkürzung setzen wir häufig: $v : c = \beta$.

Die elektromagnetischen Größen lassen sich bekanntlich auf verschiedene Arten mit dem absoluten Maßsystem in Verbindung setzen. Wir verfahren im folgenden wie H. A. Lorentz in der Enzyklopädie der mathem. Wissensch. V, 1, Art. 13 und 14. Dies an Heaviside anknüpfende Lorentzsche Maßsystem stimmt mit dem gewöhnlich als elektrostatisch bezeichneten in den Dimensionen völlig überein, unterscheidet sich aber von ihm in den Einheiten und erreicht so den Vorteil, daß der Faktor 4π aus den Feldgleichungen der Maxwellschen Theorie verschwindet [vgl. (I) bis (X)]. Freilich tritt er dafür in allen Potentialformeln auf, weil das elektrostatische Potential einer Punktladung e jetzt $\frac{e}{4\pi r}$ ist. Da aber eine solche Ladung Kugelsymmetrie aufweist, hat er hier eine gewisse sachliche Berechtigung; zugleich spielen diese Formeln eine geringere Rolle in der Theorie als die Grundgleichungen, so daß man ihm weniger häufig begegnet.

Im Lorentzschen Maßsystem sind die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität μ reine Zahlen und für den leeren Raum beide gleich 1. Die elektrische Feldstärke und Verschiebung, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, haben ebenso wie die entsprechenden magnetischen Vektoren, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, die Dimensionen $[g^{1/2}\,cm^{1/2}\,sec^{-1}]$, desgleichen die den elektrischen Strom hervorrufende „treibende elektrische Kraft" $\mathfrak{E}^*$, welche in der Relativitätstheorie (vgl. § 22) von $\mathfrak{E}$ zu unterscheiden ist; die Elektrizitätsmenge e ist von der Dimension $[g^{1/2}\,cm^{3/2}\,sec^{-1}]$. Über die Einheiten verfügen wir so, daß die Abstoßungskraft zweier ruhender Elektrizitätsmengen e und e' im Abstand r voneinander im leeren Raum $\frac{ee'}{4\pi r^2}$ ist, daß ferner die Kraft, welche e im Felde von der Stärke $|\mathfrak{E}|$ erfährt, $e|\mathfrak{E}|$ wird. Die Einheit der Elektrizitätsmenge ist durch das $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$-fache der elektrostatischen Einheit, die Maßzahl einer bestimmten Elektrizitätsmenge somit $\sqrt{4\pi}$ mal so groß, wie die elektrostatische. Um den Vergleich mit experimentellen Daten zu erleichtern, empfiehlt es sich, die Multiplikation mit $\sqrt{4\pi}$ nicht auszuführen, sondern z. B. für das elektrische Elementarquantum den Wert

$$4{,}65\,.\,10^{-10}\,.\,\sqrt{4\pi}\,[g^{1/2}\,cm^{3/2}\,sec^{-1}]$$

anzugeben. Wie e verhält sich auch die wahre elektrische Dichte ϱ und die elektrische Stromdichte $\mathfrak{J}$. Die Leitfähigkeit σ wird

4π mal so groß wie im elektrostatischen System. Ist die Ladung e über die Fläche einer Kugel vom Radius a gleichmäßig verteilt, so ist die elektrostatische Energie im elektrostatischen Maßsystem $\frac{e^2}{2a}$, bei gleichmäßiger Verteilung über das Volumen aber $\frac{3}{5}\frac{e^2}{a}$, im Lorentzschen Maßsystem daher $\frac{e^2}{8\pi a}$ bzw. $\frac{3e^2}{20\pi a}$. Wo wir die elektromagnetische Energie, Impuls usw. von mechanischer Energie und Impuls zu unterscheiden haben, geschieht dies durch den Index e, also z. B. E_e und $\mathfrak{G}_e$. φ ist das skalare, $\mathfrak{A}$ das vektorielle verzögerte Potential.

Von den Vierervektoren ist Y die Vierergeschwindigkeit, $\dot{Y}$ die Viererbeschleunigung, F (Digamma) die Viererkraft, P der elektrische, M der hydrodynamische Viererstrom, A die Viererleitung, Φ das Viererpotential. Der Buchstabe K hat eine doppelte Bedeutung; in § 22 ist er für die Viererkonvektion, in § 26 u. f. für den Minkowskischen Kraftvektor gebraucht. Zu den Sechservektoren gehört der Feldvektor $\mathfrak{M}$, welcher die Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die Verschiebung $\mathfrak{B}$ umfaßt, und der Verschiebungsvektor $\mathfrak{V}$, dessen Komponenten die Raumvektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ angeben; im leeren Raum sind beide miteinander identisch.

Literatur.

§ 1a.

[1]) Vgl. die voraussichtlich noch 1920 erscheinende Berliner Dissertation von Ilse Schneider: „Die Beziehungen der Einsteinschen Relativitätstheorie zur Philosophie unter besonderer Berücksichtigung der Kantischen Lehre".

[2]) C. Neumann, Die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie, Leipzig 1870. L. Lange, Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffs, Leipzig 1886.

[3]) H. v. Seeliger, Sitzungsber. d. Münchener Akad. 1906, S. 85.

[4]) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung; historisch-kritisch dargestellt Kap. II, § 6 (S. 232 der 4. Aufl.), Leipzig 1901. A. Einstein, Ann. d. Phys. **49**, 769, 1916. Ausführliche Literaturangaben siehe in Bd. II.

[5]) Benedikt und Immanuel Friedländer, Absolute oder relative Bewegung? Berlin 1896.

§ 1b.

Philipp Frank, Die Stellung des Relativitätsprinzips im System der Mechanik und Elektrodynamik. Wiener Sitzungsber. **118**, 337, 1909.

[1]) R. Schütz, Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. Göttinger Nachr. 1897, S. 110.

[2]) W. Wien, Über die Wandlung des Raum- und Zeitbegriffes in der Physik. Sitzungsber. d. phys.-med. Ges. Würzburg 1909; ferner Phys. Zeitschr. **5**, 585 u. 604, 1904.

§ 2.

J. Laub, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik **7**, 405, 1910.

[1]) H. A. Wilson, Phil. Trans. (A) **204**, 121, 1904.

[1a]) J. Stark, Berliner Sitzungsber. 1913, S. 932; Ann. d. Phys. **43**, 963, 1914.

[1b]) W. Wien, Berliner Sitzungsber. 1914, S. 70; Ann. d. Phys. **49**, 43, 1916.

[2]) R. Blondlot, C. R. **133**, 778, 1901.

[3]) H. v. Helmholtz, Monatsber. d. Berliner Akad., März 1876; Ges. Abh. I, 791, 1882.

[4]) A. Eichenwald, Ann. d. Phys. **11**, 1, 1903.

[5]) W. C. Röntgen, Berliner Sitzungsber. 1885, S. 195; Wied. Ann. **35**, 264, 1888; **40**, 93, 1890.

[6]) A. Eichenwald, Ann. d. Phys. **11**, 421, 1903.

[7]) H. Fizeau, C. R. **33**, 349, 1851.

[8]) A. A. Michelson u. E. W. Morley, Amer. Journ. of Science **31**, 377, 1886.

[8a]) P. Zeeman, Verslagen Akadem. v. Wetenschapen te Amsterdam **23**, 245, 1914; **24**, 18, 1915.

[8b]) P. Zeeman, Verslagen Akadem. Amsterdam **27**, 1453, 1919: P. Zeeman u. A. Snethlage, ebend. **27**, 1462, 1919.

[8c]) G. Sagnac, C. R. **157**, 708 u. 1410, 1913; Journ. d. phys. (5) **4**, 177, 1914.

[8d]) Franz Harress, Die Geschwindigkeit des Lichts in bewegten Körpern. Diss. Jena 1912 u. O. Knopf, Ann. d. Phys. **62**, 389, 1920: M. v. Laue, Ann. d. Phys. **62**, 448, 1920.

[8e]) J. Bradley, London. Phil. Transact. **35**, Nr. 406, 1728.

[9]) Airy, Proc. Roy. Soc. London **20**, 35, 1871; **21**, 121, 1873: Phil. Mag. **43**, 310, 1872.

[9a]) Ch. Doppler, Böhm. Ges. d. Wiss. N. F. **5**, 419, 1845.

[10]) J. Stark, Ann. d. Phys. **21**, 401, 1906. J. Stark u. K. Siegel, ebend. **21**. 457, 1906. J. Stark, W. Hermann, S. Kinoshita, ebend. **21**, 462, 1906.

[11]) Fürst B. Galitzin u. Wilip, Astrophys. Journ. **26**, 45, 1907.

[12]) A. A. Michelson, Sill. Journ. **22**, 120, 1881. A. A. Michelson u. E. W. Morley, ebend. **34**, 333, 1887. E. W. Morley u. D. C. Miller, Phil. Mag. **8**, 753, 1904; **9**, 680, 1905. H. A. Lorentz, Arch. Néerl. **21**, 103, 1887. Ges. Abh. I, S. 341. J. Lüroth, Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. **7**, 1909; vgl. Ref. von P. Debye, Beibl. d. Ann. d. Phys. **33**, 1909. E. Kohl, Ann. d. Phys. **28**, 259 u. 662, 1909. M. Laue, ebend. **33**, 156, 1910.

[13]) W. Ritz, Ann. d. chim. et d. phys. **13**, 145, 1908; Arch. d. Genève **16**, 209, 1908. Ges. Werke, S. 427 u. 447; Scientia **5**, 1909. Lewis u. Tolman, Phil. Mag. **18**, 510. 1909. Comstock, Phys. Rev. **30**, 267, 1910. Tolman, ebend. **30**, 291. 1910: **31**, 26, 1910; Stervant. Phys. Rev. **32**, 418, 1911. M. La Rosa, Phys. Zeitschr. **13**, 1129, 1912.

[13a]) W. de Sitter, Phys. Zeitschr. **14**, 429, 1913.

[14]) Fr. T. Trouton u. H. R. Noble, Proc. Roy. Soc. **72**, 132, 1903.

[15]) E. Mascart, Ann. école norm. **3**, 1874. Lord Rayleigh, Phil. Mag. **4**, 678, 1902. D. B. Brace, ebend. **7**, 317, 1904; **10**, 71 u. 591, 1905. B. Strasser, Ann. d. Phys. **24**, 137, 1907.

[16]) Des Coudres, Wied. Ann. **38**, 71, 1889.

[17]) Fr. T. Trouton u. A. O. Rankine, Proc. Roy. Soc. **8**, 420, 1908.

[17a]) L. Respighi, Mem. di Bologna (2) **2**, 279, 1862 und Hoek, Arch. Néerl. **3**, 180, 1858 füllten ein Fernrohr mit Wasser und suchten nach einem Einfluß der Erdbewegung auf dessen Einstellung nach einer irdischen Lichtquelle. E. Klinkerfues, Göttinger Nachr. 1870, S. 226 suchte vergeblich nach einer Verschiebung der Absorptionslinien von

Bromdampf. E. Mascart, Ann. école norm. (2) **1**, 210, 1872 und Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) **4**, 215, 1902 vermochten von einer erwarteten Änderung der Drehung der Polarisationsebene in Quarz nichts nachzuweisen. Ein anderer Versuch von E. Mascart, Ann. école norm. (2) **3**, 336, 1874 an gewissen Interferenzerscheinungen beim Durchgang des Lichtes durch Kalkspat verlief ebenso negativ. H. Fizeau, Ann. Chim. Phys. (3) **57**, 129, 1859 und Pogg. Ann. **114**, 554, 1861 glaubte zwar einen Einfluß der Erdbewegung auf die Lage der Polarisationsebene beim Durchgang des Lichts durch einen Glasplattensatz gefunden zu haben, doch erwiesen die weit genaueren Versuche von D. B. Brace, Phil. Mag. (6) **10**, 591, 1905 und B. Strasser, Ann. d. Phys. (4) **24**, 137, 1905 dies als einen Irrtum.

[18]) M. Abraham, Prinzipien der Dynamik des Elektrons, Ann. d. Phys. **10**, 105, 1903; ferner Theorie der Elektrizität, Bd. II. Leipzig u. Berlin 1908.

[19]) K. Schwarzschild, Göttinger Nachr. 1903, S. 245.

[20]) A. Sommerfeld, ebend. 1904, S. 363, 999; 1905, S. 201.

[21]) W. Kaufmann, ebend. 1902, S. 291; Ann. d. Phys. **19**, 487, 1906; **20**, 639, 1906.

[22]) A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. **28**, 513; **29**, 1063, 1909.

[23]) S. Ratnowsky, Détermination expérimentale de la variation d'inertie des corpuscules cathodiques en fonction de la vitesse. Diss. Genf 1911. Vgl. auch C. E. Guye und S. Ratnowsky, C. R. 1910.

[24]) E. Hupka, Ann. d. Phys. **31**, 169, 1910.

[24a]) G. Neumann, ebend. **45**, 529, 1914. Clemens Schaefer, ebend. **49**, 934, 1916.

[24b]) A. Sommerfeld, Sitzungsber. d. Münchener Akad. d. Wiss. 1915, S. 425 u. 459; Ann. d. Phys. **51**, 1 u. 125, 1916.

[24c]) K. Glitscher, Ann. d. Phys. **52**, 608, 1917.

[24d]) F. Paschen, ebend. **50**, 901, 1916.

[25]) M. Planck, Phys. Zeitschr. **7**, 753, 1906; Verh. d. D. Phys. Ges. **4**, 418, 1906; **9**, 301, 1907. J. Stark, ebend. **10**, 14, 1908. W. Kaufmann, ebend. **9**, 667, 1907; **10**, 91, 1908. W. Heil, Zur Theorie der Kaufmannschen Versuche über die elektromagnetische Ablenkung der β-Strahlen. Diss. Berlin 1909; Ann. d. Phys. **31**, 519, 1910. B. Bestelmeyer, Ann. d. Phys. **22**, 429, 1907; **30**, 166, 1909; **32**, 131, 1910. E. Hupka, ebend. **33**, 400, 1910. A. H. Bucherer, ebend. **30**, 974, 1909.

§ 3.

[1]) H. A. Lorentz, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. Proc. Amsterdam 1904, S. 809. Abgedruckt in: H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. Leipzig u. Berlin 1913.

[2]) E. Cohn, Über die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper. Ann. d. Phys. **7**, 29, 1902. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Berl. Ber. 1904, S. 1294 u. 1404.

§ 4.

H. Hertz, Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. Wied. Ann. **41**, 369, 1890. Ges. Werke **2**, 256, 1894.

[1]) Ph. Frank, Ann. d. Phys. **27**, 897, 1908.

[2]) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. **53**, 135, 1893. Ges. Abh. III, S. 526, 1895.

§ 5.

H. A. Lorentz, La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants. Arch. Néerl. **25**, 363, 1892. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895. Enzyklop. d. math. Wiss. V, 2, Art. 14, 1903.

§ 6.

A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys. **17**, 891, 1905; Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik **4**, 441, 1907.

Die mathematischen Formeln der Lorentz-Transformation und der Nachweis, daß die Wellengleichung gegen sie invariant ist, finden sich zuerst in einer Abhandlung von W. Voigt über das Dopplersche Prinzip (Göttinger Nachr. 1887, S. 41, wieder abgedruckt Phys. Zeitschr. **16**, 381, 1915), sodann mit bewußter Beziehung auf die Relativitätsfrage bei H. A. Lorentz in der in § 3, Anm. 1 genannten berühmten Arbeit.

Axiomatische Betrachtungen über die Herleitung der Lorentz-Transformation finden sich bei Ph. Frank und H. Rothe, Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme, Ann. d. Phys. **34**, 825, 1911, sowie Phys. Zeitschr. **13**, 750, 1912.

§ 7.

A. Einstein, vgl. § 6.

[1]) P. Langevin, Scientia **10**, 31, 1911.

[2]) M. Laue, Phys. Zeitschr. **13**, 118, 1912.

[3]) O. Lodge, London Transact. (A) **184**, 727, 1893.

[4]) H. A. Lorentz, v. Amsterdam, Zittingsverlag, Acad. v. Wet. **1**, 74, 1892.

[5]) A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. **10**, 826, 1909.

[6]) Derselbe, ebend. **8**, 841, 1907; Weber-Festschrift, Leipzig 1912, S. 338.

§ 8.

H. Minkowski, Raum und Zeit. Phys. Zeitschr. **10**, 104, 1909. Auch als Broschüre erschienen. Leipzig, B. G. Teubner, 1909.

§ 9.

H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Göttinger Nachr. 1907, S. 1,

und Mathematische Ann. **68**, 472, 1910, auch als Einzelschrift erschienen bei B. G. Teubner, Leipzig 1911.

[1]) F. Klein, Phys. Zeitschr. **12**, 17, 1911. V. Variczak, Phys. Zeitschr. **11**, 93, 287, 586, 1910.

[2]) A. Sommerfeld, vgl. § 7, Anm. 5.

§ 10 bis 13.

H. Minkowski, vgl. § 8 und 9.

A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie I. u. II. Ann. d. Phys. **32**, 749, 1910; **33**, 649, 1910.

E. Jahnke, Zur Theorie der vierdimensionalen Vektoren und Dyaden. Arch. d. Mathem. u. Phys. **26**, 23, 1917.

[1]) H. Kafka, Ann. d. Phys. **58**, 1, 1919.

§ 14 und 15.

A. Einstein, vgl. § 6. H. Minkowski, vgl. § 9. A. Sommerfeld, vgl. § 10 bis 13.

[1]) H. Poincaré, Arch. Néerl. (2) **5**, 252, 1900.

[2]) M. Abraham, vgl. § 2, Anm. 17.

[3]) M. Planck, Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik. Phys. Zeitschr. **9**, 828, 1908; Verh. d. D. Phys. Ges. **6**, 728, 1908.

§ 16.

A. Einstein, vgl. § 6.

[1]) M. Abraham, Ann. d. Phys. **14**, 236, 1904. W. Meißner, Zur Theorie des Strahlungsdruckes. Diss. Berlin 1907, Abschnitt 4.

[2]) M. Laue, Münchener Sitzungsber. 1911, S. 405. H. Witte, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 142, 1914.

§ 17.

[1]) M. Abraham, vgl. § 2, Anm. 18.

§ 18.

H. A. Lorentz, s. § 3, Anm. 1. M. Laue, Ann. d. Phys. **38**, 370, 1912.

§ 19 und 20.

H. Minkowski, vgl. § 8. M. Born, Ann. d. Phys. **28**, 571, 1909; **30**, 1, 1909. A. Sommerfeld, vgl. § 10 bis 13.

[1]) G. Herglotz, Göttinger Nachr. 1904, S. 549.

[2]) A. Liénard, L'éclairage électrique **16**, 5, 53, 106, 1898.

[3]) E. Wiechert, Arch. Néerl. (2) **5**, 549, 1900.

[4]) H. A. Lorentz, vgl. § 5.

[5]) M. Abraham, vgl. § 2, Anm. 18.

[6]) H. A. Lorentz, vgl. § 3, Anm. 1, ferner Enzyklop. d. math. Wiss. V, 2, Art. 14, Nr. 17. M. Planck, Arch. Néerl. (2) **5**, 164, 1900. M. Abraham, vgl. § 16, Anm. 1. M. Laue, Ann. d. Phys. **28**, 436, 1909.

§ 21 und 22.

H. Minkowski, vgl. § 9. A. Einstein und J. Laub, Ann. d. Phys. **26**, 532, 1908. Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpunkt der Elektronentheorie; aus dem Nachlaß von H. Minkowski, bearbeitet von M. Born, veröffentlicht in den Fortschritten der Mathem. Wiss. in Monographien, Heft 1. Leipzig, B. G. Teubner, 1910.

Nach Vorlesungen von Einstein veröffentlicht eine etwas andere Form der Gleichungen XVII bis XXIV J. Laub, Ann. d. Phys. **46**, 705, 1915.

[1]) E. Budde, Wied. Ann. **10**, 553, 1882.

[2]) Eine andere Schreibweise der Gleichungen XIX und XX gibt H. Kafka, Ann. d. Phys. **58**, **1**, 1919.

§ 23.

[1]) A. Einstein und J. Laub, Ann. d. Phys. **28**, 445, 1909.

[2]) Vgl.: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik nach Riemanns Vorlesungen, bearbeitet von H. Weber. I. Braunschweig 1900. § 156.

[3]) A. Einstein und J. Laub, vgl. § 21 und 22.

[4]) H. Minkowski, Abschnitt 9 der unter § 9 zitierten Arbeit. Anton Weber, Phys. Zeitschr. **11**, 134, 1910.

[5]) M. Laue, Ann. d. Phys. **23**, 989, 1907. A. Einstein, vgl. das zweite Zitat unter § 6.

[6]) Vgl. § 2, Anm. 8d; weiter P. Harzer, Astronomische Nachr. **198**, 378, und **199**, 10, 1914. A. Einstein, ebend. **199**, 9 und 47, 1914.

§ 24.

[1]) M. Planck, vgl. § 14 und 15, Anm. 3.

[2]) M. Abraham, Rendiconti del circoli matematico di Palermo **30**, 1910. R. Grammel, Ann. d. Phys. **41**, 570, 1913 und H. Kafka, ebend. **58**, 1, 1919.

[3]) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme. Ann. d. Phys. **26**, 1, 1908.

[4]) M. Laue, Phys. Zeitschr. **14**, 210, 1913; Ann. d. Phys. **42**, 1575, 1913.

§ 25.

Vgl. das umfassende Referat von F. Hasenöhrl, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **2**, 267, 1905. Vgl. auch § 16, Anm. 1.

§ 26 bis 31.

M. Planck, vgl. § 24, Anm. 1 und 3. Ferner Verh. d. D. Phys. Ges. **4**, 136, 1906. A. Einstein, vgl. § 6, zweites Zitat. Gilbert N. Lewis, Phil. Mag. **16**, 705, 1908. F. Hasenöhrl, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **6**, 485, 1909. M. Laue, Ann. d. Phys. (4) **35**, 524, 1911. P. Epstein, ebend. (4) **36**. 779, 1911. W. Schottky, Diss. Berlin 1912.

[1]) M. Born, Ann. d. Phys. **28**, 571, 1909; **30**, 1, 1909; Göttinger Nachr. 1910, S. 161. P. Ehrenfest, Phys. Zeitschr. **10**, 91a, 1909; **11**, 1127, 1910. G. Herglotz, Ann. d. Phys. **31**, 393, 1910. W. v. Ignatowski, ebend. **33**, 607, 1910. F. Noether, ebend. **31**, 919, 1910. M. Planck, Phys. Zeitschr. **11**, 294, 1910. M. Laue, ebend. **12**, 48, 1911.

[2]) A. Einstein, Ann. d. Phys. **18**, 639, 1905; **20**, 627, 1906; **23**, 371, 1907. G. Nordström, Phys. Zeitschr. **10**, 681, 1909; **11**, 440, 1910. M. Abraham, ebend. **10**, 737, 1909; **11**, 527, 1910. M. Laue, vgl. § 19 und 20, Anm. 6.

[3]) H. Poincaré, Rendiconti del circolo matematico di Palermo **21**, 129, 1906. H. A. Lorentz, The theory of electrons. Leipzig 1909. § 178 u. folgende. Vgl. auch § 3, Anm. 1. M. Abraham, Theorie der Elektrizität II, § 22.

[4]) Paul Ehrenfest, Ann. d. Phys. **23**, 204, 1907.

§ 32.

[1]) M. Laue, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 513, 1911. P. Epstein, vgl. § 26 bis 31.

§ 33 und 34.

M. Planck, vgl. § 24, Anm. 3. A. Einstein, vgl. § 6, zweites Zitat. K. v. Mosengeil, Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum. Diss. Berlin 1906 und Ann. d. Phys. **22**, 867, 1907.

[1]) H. v. Helmholtz, Ges. Abh.; vgl. auch M. Planck, 8 Vorlesungen über theoretische Physik. Leipzig 1910.

[2]) G. Herglotz, Ann. d. Phys. (4) **36**, 453, 1911.

[3]) E. Lamla, Über die Hydrodynamik des Relativitätsprinzips. Diss. Berlin 1912. Ann. d. Phys. **37**, 772, 1912.

M. Planck, Phys. Zeitschr. **11**, 922, 1910.

[4]) A. Sommerfeld, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 1074, 1911; Phys. Zeitschr. **12**, 1057, 1911.

§ 35 und 36.

[1]) G. Herglotz, vgl. § 33 und 34, Anm. 2.

[2]) E. Lamla, vgl. § 33 und 34, Anm. 3.

[3]) H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik **2**, 381. Braunschweig 1901.

Zusammenstellung der Hauptformeln.

$$\text{I} \quad rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \qquad \text{II} \quad rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J}\right)$$

$$\text{III} \quad div\,\mathfrak{D} = \varrho \qquad \text{IV} \quad div\,\mathfrak{B} = 0$$

$$\text{V} \quad \mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E} \qquad \text{VI} \quad \mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}$$

$$\text{VII} \quad \mathfrak{D} = \sigma\,\mathfrak{E}$$

$$\text{VIII} \quad W = \frac{1}{2}\left\{(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\,\mathfrak{B})\right\}$$

$$\text{I}' \quad rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + rot\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{q}]\right\}$$

$$\text{II}' \quad rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J}) = \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{q}\,div\,\mathfrak{D} + rot\,[\mathfrak{D}\,\mathfrak{q}] + \mathfrak{J}\right\}$$

$$\text{I}'' \quad \int_{\bigcirc} \mathfrak{E}_s\,ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(\int \mathfrak{B}_n\,d\sigma\right)$$

$$\text{II}'' \quad \int_{\bigcirc} \mathfrak{H}_s\,ds = \frac{1}{c}\left\{\frac{d}{dt}\left(\int \mathfrak{D}_n\,d\sigma\right) + \int \mathfrak{J}_n\,d\sigma\right\}$$

$$\text{Ia} \quad rot\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \qquad \text{IIa} \quad rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \varrho\,\mathfrak{q}\right)$$

$$\text{IIIa} \quad div\,\mathfrak{E} = \varrho \qquad \text{IVa} \quad div\,\mathfrak{H} = 0$$

$$\text{VIIIa} \quad W = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right)$$

$$\text{IIb} \quad rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{J} + \varrho\,\mathfrak{q}\right)$$

$$\text{IX} \quad \mathfrak{F} = -\operatorname{div} \boldsymbol{p}$$

$$\text{IXa} \quad \mathfrak{F} = \varrho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\,\mathfrak{H}]\right)$$

$$\text{X} \quad \begin{cases} p_{xx} = \frac{1}{2}\left[(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right] - \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x \\ p_{yz} = p_{zy} = -\frac{1}{2}\left(\mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_y\right) \end{cases}$$

$$\text{XI} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\text{XIa} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

XII

	x'	y'	z'	l'
x	$\alpha_1^{(1)}$	$\alpha_2^{(1)}$	$\alpha_3^{(1)}$	$\alpha_4^{(1)}$
y	$\alpha_1^{(2)}$	$\alpha_2^{(2)}$	$\alpha_3^{(2)}$	$\alpha_4^{(2)}$
z	$\alpha_1^{(3)}$	$\alpha_2^{(3)}$	$\alpha_3^{(3)}$	$\alpha_4^{(3)}$
l	$\alpha_1^{(4)}$	$\alpha_2^{(4)}$	$\alpha_3^{(4)}$	$\alpha_4^{(4)}$

XIII $\Delta iv\, \mathfrak{M} = P$ XIV $\Delta iv\, \mathfrak{M}^* = 0$

XV $T = \left[[\mathfrak{M}\mathfrak{M}]\right]$ XVI $F = -\Delta iv\, T$

XVII $\Delta iv\, \mathfrak{M}^* = 0$ XVIII $\Delta iv\, \mathfrak{B} = P$

XIX $[Y\mathfrak{B}] = \varepsilon [Y\mathfrak{M}]$ XX $[Y\mathfrak{M}^*] = \mu [Y\mathfrak{B}^*]$

XXI $\mathfrak{D}^* = \varepsilon \mathfrak{E}^*$ XXII $\mathfrak{B}^* = \mu \mathfrak{H}^*$

XXIII $P + (YP)\, Y = \Lambda = \frac{\sigma}{c} [Y\mathfrak{M}]$

XXIV $\mathfrak{J} = \frac{\sigma c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left(\mathfrak{E}^* - \mathfrak{q} \frac{(\mathfrak{q}\, \mathfrak{E}^*)}{c^2}\right)$

XXV $\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}$

XXVI $\Delta iv\, T = 0$ XXVIa $\Sigma F = -\Delta iv\, (\Sigma T) = 0$

XXVII $K = \frac{d(mY)}{d\tau}$

$$\text{XXVIII}\quad \begin{cases} \mathfrak{g}_x = \dfrac{\mathfrak{q}_x(\boldsymbol{p}^0_{xx} + W^0)}{c^2 - q^2}, \quad \mathfrak{g}_y = \dfrac{\mathfrak{q}_x \boldsymbol{p}^0_{xy}}{c\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad \mathfrak{g}_z = \dfrac{\mathfrak{q}_x \boldsymbol{p}^0_{xz}}{c\sqrt{c^2 - q^2}} \\ W = \dfrac{c^2 W^0 + q^2 \boldsymbol{p}^0_{xx}}{c^2 - q^2}, \quad \boldsymbol{p}_{yy} = \boldsymbol{p}^0_{yy}, \quad \boldsymbol{p}_{zz} = \boldsymbol{p}^0_{zz}, \quad \boldsymbol{p}_{yz} = \boldsymbol{p}^0_{yz} \\ \boldsymbol{p}_{xx} = \dfrac{c^2 \boldsymbol{p}^0_{xx} + q^2 W^0}{c^2 - q^2}, \quad \boldsymbol{p}_{xy} = \dfrac{c\,\boldsymbol{p}^0_{xy}}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad \boldsymbol{p}_{xz} = \dfrac{c\,\boldsymbol{p}^0_{xz}}{\sqrt{c^2 - q^2}} \end{cases}$$

$$\text{XXVIII a}\quad \begin{cases} W = \dfrac{c^2}{c^2 - q^2}\left\{W^0 + \dfrac{1}{c^2}\left(\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}^0)\right]\right\} \\ \mathfrak{g} = \dfrac{\mathfrak{q}}{c^2 - q^2}\left\{W^0 + \dfrac{1}{q^2}\left(\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}^0)\right]\right\} \\ \qquad + \dfrac{1}{c\sqrt{c^2 - q^2}}\left\{[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}^0] - \dfrac{\mathfrak{q}}{q^2}\left(\mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}\,\boldsymbol{p}^0]\right)\right\} \end{cases}$$

$$\text{XXVIII b}\quad \begin{cases} E = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}}\left\{E^0 + \dfrac{1}{c^2}\left(\mathfrak{q}\left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,\delta\,V^0\right]\right)\right\} \\ \mathfrak{G} = \dfrac{\mathfrak{q}}{c\sqrt{c^2 - q^2}}\left\{E^0 + \dfrac{1}{q^2}\left(\mathfrak{q}\left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,\delta\,V^0\right]\right)\right\} \\ \qquad + \dfrac{1}{c^2}\left\{\left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,\delta\,V^0\right] - \dfrac{\mathfrak{q}}{q^2}\left(\mathfrak{q}\left[\mathfrak{q}, \int \boldsymbol{p}^0\,\delta\,V^0\right]\right)\right\} \end{cases}$$

$$\text{XXVIII c}\qquad W = \frac{c^2 W^0 + q^2 p^0}{c^2 - q^2}, \qquad \mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{q}}{c^2 - q^2}\left(W^0 + p^0\right)$$

$$\text{XXVIII d}\qquad E = \frac{c^2 E^0 + q^2 p^0 V^0}{c\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{q}\,(E^0 + p^0 V^0)}{c\sqrt{c^2 - q^2}}$$

$$\text{XXIX}\qquad S = S'$$

$$\text{XXX}\qquad \frac{T}{\sqrt{c^2 - q^2}} = \frac{T'}{\sqrt{c^2 - q'^2}} = \frac{T^0}{c}$$

Namen- und Sachregister.

(Die Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.)

Aberration 26, 121.
Abraham 32, 133, 165, 193, 227.
Absoluttheorie 32, 44.
Additionstheorem der Geschwindigkeit 13, 25, 64, 79, 87.
Arrhenius 199.

Beschleunigung 13, 88.
Bezugssystem 2.
Blondlot 21.
Bohr 46.
Boltzmann 196.
Born 46, 90, 161.
Bradley 26.
Bucherer 33.
Budde 172.

Cohn 35, 42.

Debye 199.
Descoudres 31.
Divergenz 98, 280.
Dopplereffekt 27, 121, 127, 183.
Drehimpuls 119, 135, 192, 227, 281.
Drehmoment 133, 228, 231.
Druck, Transformation 218; Druck im Elektron 224, der Hohlraumstrahlung 251.
Dynamik des Elektrons 32, 226, 237.

Eichenwald, Versuch von 22, 40, 182.
Eigenzeit 75.
Einstein 8, 9, 46, 48, 58, 203.
Elektron 32, 44, 134, 155, 226, 237.
Energie, elektromagnetische 35, 44, 115, 133, 189, 206; mechanische 206, 211, 214, 258; kinetische 14, 221; d. Hohlraumstrahlung 252; Trägheit der 192, 205, 212, 221.
Energiestrom 37, 115, 119, 192, 193, 205; absoluter u. relativer 219.
Entropie 239; der Hohlraumstrahlung 252.
Eulersche Form der Bewegungsgleichung 217, 264.

Feldvektor 167.
Fitzgerald 60.
Fizeauscher Interferenzversuch 23, 41, 47, 182.
Foucoultsches Pendel 9.
Fresnelscher Mitführungskoeffizient 24, 41, 47, 182.
Friedländer, B. u. J. 11.

Galileitransformation 13, 15, 38, 53, 68.
Galileo Galilei 3, 9.
Galitzin, Fürst 28, 127.
Glitscher 33.
Grammel 193.

Haas, de 46.
Harress, Versuch von 25, 186.
Helmholtz 137, 248.
Herglotz 145, 250, 255.
Hertz, H. 35 u. f.
Hull 198.
Hupka 32, 33.
Hyperbelbewegung 90, 155.

Impuls 14, 42, 115, 165, 191, 192, 210, 214, 236, 257.
Induktion 20, 42, 177.
Inertialmaß f. d. Zeit 8.
Inertialsystem 7, 57.

Joulesche Wärme 37, 193.

Kafka, H. 106, 193.
Kirchhoffsches Gesetz 251.
Kontinuitätsgleichung 36, 111, 171, 256.
Konvektion 22, 32, 38, 44; Vierer- 169; -sstrom 168.
Kopernikus 3.
Körper, starrer 68, 203.
Kossel 46.
Kraft, elektrische und magnetische treibende 173, 177; elektromotorische 175; Transformation der ponderomotorischen 112,

189, 195, 209; -dichte 112; Vierer- 112.

Lagrangesche Form der Bewegungsgleichungen 217, 257.
Lamla 250, 256.
Langé 7.
Lebedew 197, 199.
Leitung, -sstrom 35, 168, 175; Vierer- 169; -sdichte 169.
Lichtpunkt 150.
Liénard 154.
Lorentz, H. A. 34, 35, 46, 47, 155, 165, 179, 226.
Lorentzkontraktion 60.
Lorentztransformation 48, 68, 77.

Mach 8, 9.
Masse, longitudinale und transversale 32, 210, 223; des Elektrons 225, 237; der Hohlraumstrahlung 254.
Massenpunkt 12, 207, 222, 236.
Maxwell 196.
Michelson 24.
Michelson u. Morley 24.
Michelsonscher Versuch 28, 41, 47, 49, 60.
Mie 278.
Minkowski 68, 155, 166, 209.
Minkowskischer Kraftvektor 209.
Morley 24.
v. Mosengeil 255.

Nachkegel 73, 75.
Neumann, C. 7.
Neumann, G. 33.
Nichols und Hull 198.
Nordström 278.

Ohmsches Gesetz 176.

Paschen 33.
Planck 121, 165, 192, 195, 240, 249, 250, 255, 262.
Pointingscher Vektor 37, 119, 193.
Potential, dynamisches 131, 244, 253; skalares 144; Vektor- 144; verzögertes 151; Vierer- 143, 157.
Precht 214.

Rankine 31.
Ratnowsky 32, 33.
Ritz 30.
Röntgen 22.
Röntgenscher Versuch 22, 40, 47, 182.
Röntgenstrom 40, 182.
Rotation 98.
Rowland, Versuch von 22, 40, 173.
Ruhbeschleunigung 88.
Ruhdichte 256.
Ruhmasse 211, 225, 254,

Sagnac, Versuch von 25, 124.
Schwarzschild 32.
v. Seeliger 9.
Sommerfeld 32, 33, 46, 106, 145, 155, 226, 250.
Spannung 191, 205, 216.
Spiegelung am bewegten Spiegel 124, 200.
Stark, J. 21, 28.
Stefan-Boltzmannsches Gesetz 252.

Temperatur, Transformation 241.
Trouton-Noblescher Versuch 31, 47, 135, 238.

Valentiner 252.
Vektor, raumartiger und zeitartiger 86.
Verschiebungsvektor 168.
Viererbeschleunigung 87.
Vierergeschwindigkeit 87.
Viererstrom 108, 168, 358.
Vorkegel 73, 75.

Wärme, Transformation 193, 241; -zufuhr und Kraft 222, 243.
Webersche Form der Bewegungsgleichungen 259.
Wellen in Flüssigkeiten 264, 265, 273, 274.
Wellengleichung 36, 45, 53, 144.
Welt 69; -linie 69; -punkt 69; -punkte diesseits von O 73; jenseits von O 73; -röhre 151.
Wiechert 154.
Wien, W. 7.
Wienscher Versuch 21, 110.
Wiensches Verschiebungsgesetz 241.
Wilson, H. A. 21, 38, 47, 179.
Wirbelsätze 262.
Wirkungsgröße 249.

Zeeman 24.
Zeemanphänomen 46.
Zustandsgleichung der Flüssigkeiten geringster Zusammendrückbarkeit 267.
Zwischengebiet 73, 75.

QC
173
.55
L28
1921
Bd.1
c.1
PASC

Laue, Max Theodor Felix von
Die Relativitätstheorie

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

OS
June 6/69