



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

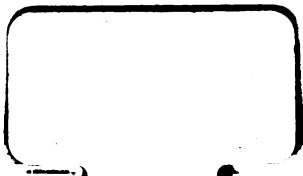
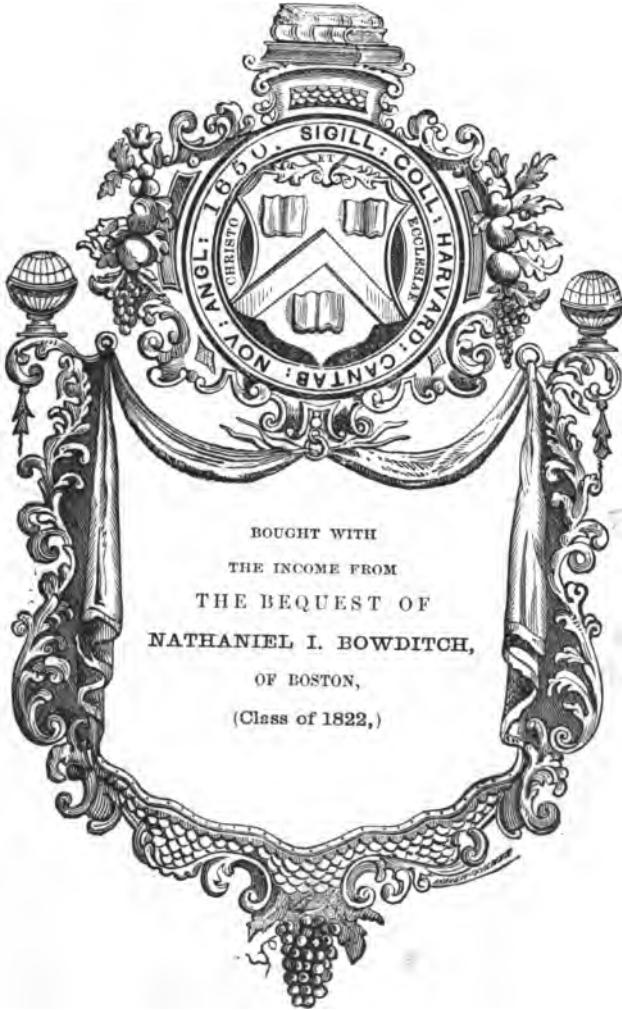
Über Google Buchsuche

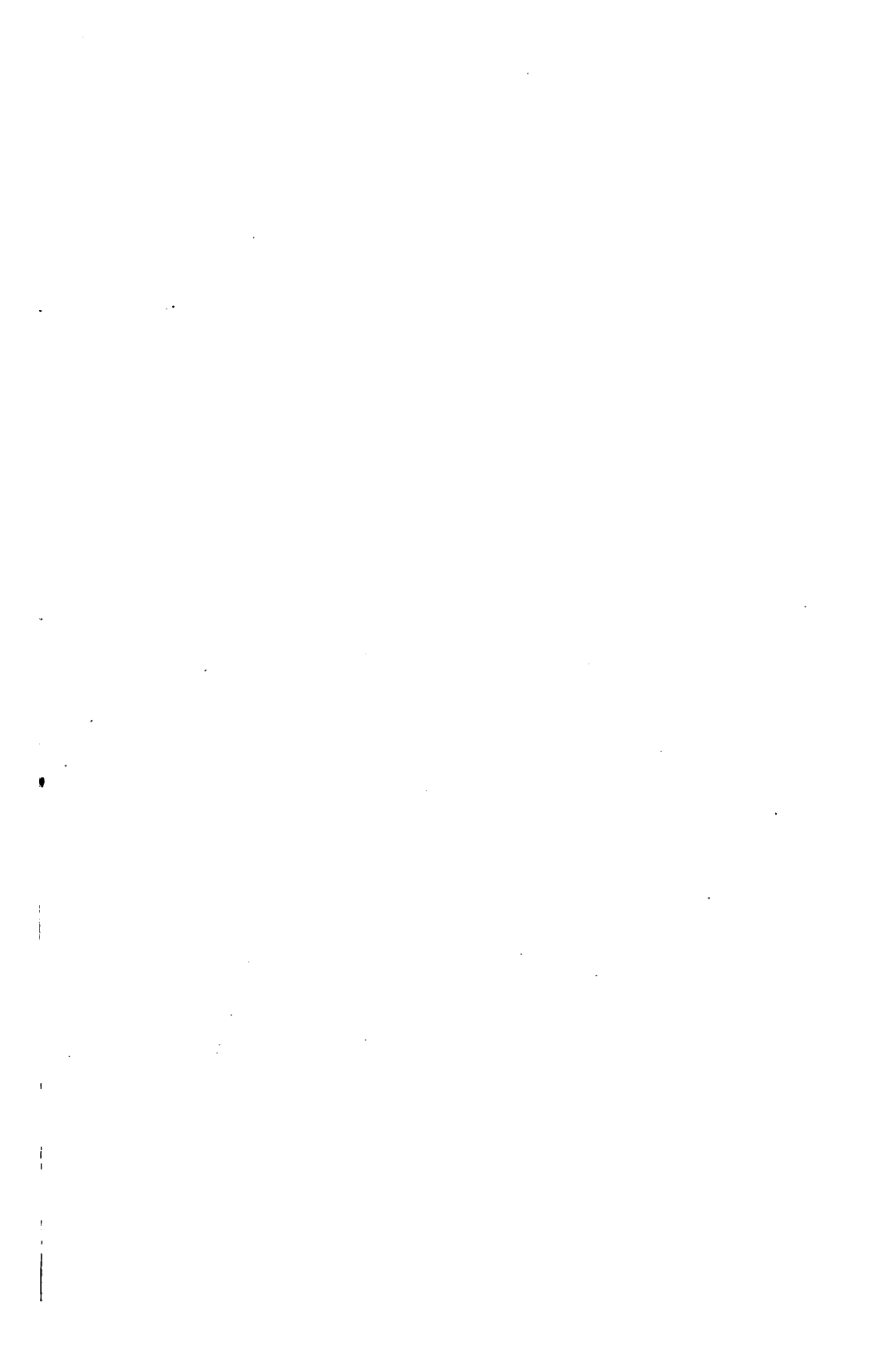
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

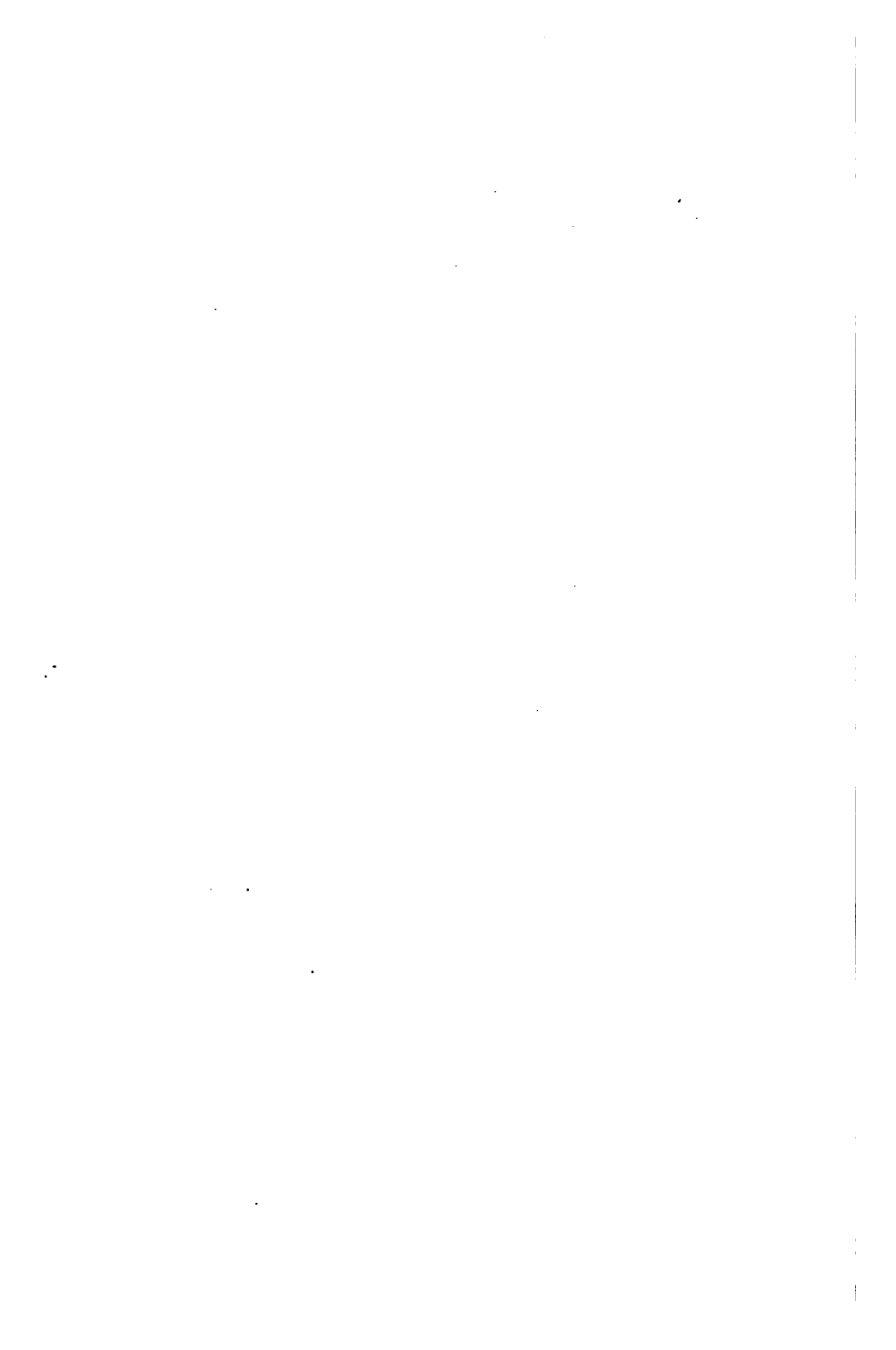


SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 8588.75







78937
Die

SINGULARITÄTEN

der

LISSAJOUS'SCHEN STIMMGABELCURVEN.

Inaugural - Dissertation

der

philosophischen Facultät zu Erlangen

vorgelegt

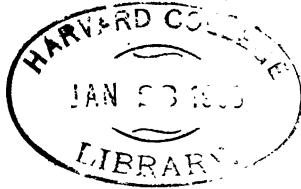
von

Wilhelm Braun.

Erlangen, 1875.

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von E. Th. Jacob.

Math 8588.75



Bowditch fund.

Die Singularitäten der Lissajous'schen Stimmgabelcurven.

Thomas Young war der erste, der — im Jahre 1800 — auf die eleganten und mannichfaltigen Figuren, welche jetzt allgemein unter dem Namen „Lissajous'sche“ Stimmgabelcurven bekannt sind, aufmerksam machte; doch ebenso wenig er als Wheatstone, der 1827 sein Kaleidophon construirte, hoben die ausgedehnte physikalische Verwerthbarkeit dieser Curven genügend hervor. Erst Lissajous zeigte 1857 in seiner Abhandlung „sur l'étude optique des mouvements vibratoires“, wie der bloße Anblick einer solchen Curve genügt, um das Intervall der schwingenden und die Curve erzeugenden Stimmgabeln, ja sogar, was das Ohr in keinem Fall zu leisten im Stande ist, ihre Phasendifferenz, ferner das Verhältniß ihrer Vibrationsintensitäten, und den Winkel ihrer Schwingungsebenen zu erkennen. Die Möglichkeit, zwei Stimmgabeln mit fast absoluter Genauigkeit gleich zu stimmen, ist die unmittelbare Consequenz dieser Ersetzung einer akustischen Thatsache durch ein optisches Phänomen.

Zur Zeichnung dieser Curven benützte Lissajous eine Methode, die sich von selbst darbietet, wenn man von der gewöhnlichen elementaren Darstellung der Pendelbewegung ausgeht, und die auch hinreichend bequem ist zur Zeichnung einzelner Curven. Wenn es allerdings darauf ankommt, viele verschiedene Figuren etwa zu Tabellen zu zeichnen, reicht dieselbe nicht aus. Daher hat Melde eine andere Methode angegeben, welche gestattet, mit den nämlichen zwei Schablonen, die man in der einfachsten Weise herstellen kann, die verschiedenen Curven für alle

möglichen Intervalle und für alle möglichen Winkel der beiden Schwingungsrichtungen, jedoch bei einer in gewisser Weise begrenzten Variabilität der Phasendifferenzen zu construiren. Man findet diese Methode angegeben in Melde, „die Lehre von den Schwingungscurven“, Cap. II. p. 36. Da sie weiter kein Interesse für uns hat, wollen wir uns mit dieser Andeutung begnügen.

Melde hat in der eben citirten Abhandlung die mathematischen-Eigenschaften der Schwingungscurven zu physikalischen Zwecken ausgebeutet, und nebenbei auch manche rein mathematischen Sätze gewonnen. Doch sind sie ihm zumeist nur Mittel zum Zweck. Ich habe daher auf Anrathen meines hochverehrten Lehrers, des Herrn Professor Klein, dem ich überhaupt für seinen gütigen Beistand zu höchstem Dank verpflichtet bin, versucht, die Schwingungscurven, welche aus der Combination zweier Pendelbewegungen in der Ebene resultiren, als Object an sich im Sinne der projectivischen Geometrie zu studiren, und zunächst ihre Singularitäten zu entwickeln. Dem entsprechend wollen wir, da die zu betrachtenden Eigenschaften durch Projection sich nicht ändern, einen möglichst bequemen Fall zur Untersuchung wählen, nämlich den Fall, wo zwei Pendelbewegungen zu einander rechtwinklig und mit gleicher Intensität stattfinden. Alle anderen Fälle erhalten wir durch einfache Projection aus diesem.

§. 1.

Unserer Voraussetzung gemäss sind dann die Coordinaten eines Curvenpunktes ausgedrückt durch einen Parameter t

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin(\alpha t + \beta) \dots\dots\dots \\ y &= \sin(\beta t + \delta) \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} (1).$$

Nämlich wenn T_1 und T_2 die Schwingungsdauer der bezüglichen Pendelbewegungen bedeutet und t_1 und t_2 die Zeiten sind, zu denen die Bewegungen resp. den Kreuzungs- und Halbierungspunkt der beiden gleichen senkrechten Schwingungsstrecken passiren, so hat unter Annahme die-

ser Geraden als Coordinatenaxen der resultirende Curvenpunkt die Coordinaten — ausgedrückt durch die Zeit t als Parameter —

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin \frac{2\pi (t - t_1)}{T_1} \dots\dots \\ y &= \sin \frac{2\pi (t - t_2)}{T_2} \dots\dots \end{aligned} \right\} (2).$$

Die Gleichungen (2) sind von derselben Form wie die Gleichungen (1); wir haben nur

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\pi}{T_1} & \beta &= - \frac{2\pi t_1}{T_1} \\ \gamma &= \frac{2\pi}{T_2} & \delta &= - \frac{2\pi t_2}{T_2} \end{aligned}$$

zu setzen, um sie mit denselben in völlige Uebereinstimmung zu bringen.

Es ist demnach, wenn wir die physikalische Bedeutung unserer Constanten in's Auge fassen, α und γ umgekehrt proportional der bezüglichen Schwingungsdauer, und β und δ hängen mit dem Phasenunterschied in der Weise zusammen, dass $T_1\beta - T_2\delta$ ihm direct proportional ist; für einen gegebenen Phasenunterschied können wir daher entweder β oder δ willkürlich annehmen; z. B. $\beta = 0$; dann ist δ selbst dem Phasenunterschied proportional.

Object unserer Betrachtung ist also die Curve, deren laufende Coordinaten sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \sin (\alpha t + \beta) \\ y &= \sin (\gamma t + \delta) \end{aligned}$$

ergeben.

Fragen wir: wann werden diese Gleichungen eine geschlossene Curve darstellen? Offenbar dann, wenn bei wachsendem t αt und γt zugleich Vielfache von 2π werden können. Denn dann nehmen beide Coordinaten zugleich ihre alten Werthe wieder an. Diese Forderung spricht aber aus, dass α und γ commensurabel sein müssen, d. h. dass

$$\begin{aligned} \alpha &= n \omega \\ \beta &= m \omega, \end{aligned}$$

wo n und m als relative Primzahlen vorausgesetzt werden dürfen; nehmen wir in diesem Fall ωt als neuen Parameter an, so können wir unsere Gleichungen auch so schreiben

$$(3) \dots \begin{aligned} (a) \quad x &= \sin (nt + \beta) \\ (b) \quad y &= \sin (mt + \delta) \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\beta = 0$, so können wir auf Grund der Bedeutung von δ die Werthe angeben, welche δ annehmen muss, damit sich die Curve repetirt. δ ist nämlich der arcsin y für einen der Schnittpunkte der Curve mit der Y-Axe; welchen von den $2n$ Schnittpunkten wir aber wählen, ist ganz gleichgültig für die Gestalt und Lage der Curve; denn wenn wir einen anderen Schnittpunkt wählen, so ist dies nur soviel, als ob wir den Punkt, der die Curve durchläuft, an einer anderen Stelle seine Bewegung beginnen lassen.

Für die Schnittpunkte mit der Y-Axe ist aber

$$x = \sin nt = 0, \text{ d. h.}$$

$$t = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{k\pi}{n}, \dots$$

und durch Substitution dieses Werthes von t in (3 b.) erhalten wir für den gesuchten arcsin y

$$\frac{m k\pi}{n} + \delta,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl ist.

Dieser Werth für das ursprüngliche δ eingesetzt liefert also eine mit der ursprünglichen Curve identische Curve. Lassen wir k seine Werthe durchlaufen, und werfen dabei die allenfalls entstehenden Summanden $2\pi, 4\pi, \dots, 2s\pi \dots$ als überflüssig weg, so ergeben sich als die Werthe um welche sich δ ändern darf, wenn sich die Curve repetiren soll, indem wir zugleich $n > m$ voraussetzen;

1) für m ungerade die $2n - 1$ Werthe

$$\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n} \pi,$$

2), für m gerade die $n-1$ Werthe

$$\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2n-2}{n} \pi.$$

Im zweiten Fall haben wir deshalb nur $n-1$ Werthe, weil hier die Schnittpunkte mit der Y -Axe lauter Doppelpunkte sind (cf. unten §. 4).

Von den Eigenschaften der Lissajous-Curven heben wir hier nur noch folgende als die auffallendsten hervor.

Da die \sin -Function nur zwischen $+1$ und -1 — für (reelle Argumente) schwanken kann, so kann sich die Curve mit ihren reellen Aesten nicht über das Quadrat hinaus erstrecken, dessen Seiten parallel zu den Axen und im Abstand 1 vom Anfangspunkt gelegen sind.

Ferner wollen wir hier die auf die Symmetrieverhältnisse der Curven bezüglichen Eigenschaften anführen, die sich aus der in §. 3 aufgestellten Curvengleichung ohne Schwierigkeit ergeben. Die Curve ist nämlich für den Fall n ungerade, m gerade symmetrisch in Bezug auf die Y -Axe, für den Fall n gerade, m ungerade symmetrisch in Bezug auf die X -Axe, für den Fall n und m ungerade ist sie eine Mittelpunktscurve mit dem Anfangspunkt als Centrum.

§. 2.

Wir gehen dazu über, die Ordnung der Curve zu bestimmen, und werden zu dem Zweck die laufenden Coordinaten, die wir bisher transcendent durch einen Parameter dargestellt haben, rational durch einen Parameter darstellen.

Es ist nämlich nach den Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen den trigonometrischen und Exponentialfunctionen ausdrücken:

$$\cos nt = \frac{1}{2} \left(e^{nti} + \frac{1}{e^{nti}} \right) = \frac{1}{2} \left(\lambda^n + \frac{1}{\lambda^n} \right)$$

$$\sin nt = \frac{1}{2i} \left(e^{nti} - \frac{1}{e^{nti}} \right) = \frac{1}{2i} \left(\lambda^n - \frac{1}{\lambda^n} \right)$$

wobei wir $e^{it} = \lambda$ gesetzt haben; nach Substitution dieser und der entsprechenden Ausdrücke für $\cos mt$ und $\sin mt$ in die Gleichungen (3) des §. 1 erhalten wir

$$x = \cos \beta \frac{1}{2i} \left(\lambda^n - \frac{1}{\lambda^n} \right) + \sin \beta \frac{1}{2} \left(\lambda^n + \frac{1}{\lambda^n} \right)$$

$$y = \cos \delta \frac{1}{2i} \left(\lambda^m - \frac{1}{\lambda^m} \right) + \sin \delta \frac{1}{2} \left(\lambda^m + \frac{1}{\lambda^m} \right)$$

oder

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \dots x = \frac{1}{2i} \left(e^{\beta i} \lambda^n - \frac{1}{e^{\beta i} \lambda^n} \right) \\ \dots y = \frac{1}{2i} \left(e^{\delta i} \lambda^m - \frac{1}{e^{\delta i} \lambda^m} \right) \end{array} \right.$$

Hier haben wir nun in höchst einfacher Weise die Curve rational durch einen Parameter λ dargestellt, wobei

$$\lambda = \cos t + i \sin t.$$

Wenn wir die Gleichung (1) homogen machen, so können wir mit Benutzung eines Proportionalitätsfactor ρ also schreiben:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \dots \rho x = a \lambda^{2n} - \frac{1}{a} \mu^{2n} \\ \dots \rho y = b \lambda^{n+m} \mu^{n-m} - \frac{1}{b} \lambda^{n-m} \mu^{n+m} \\ \dots \rho z = 2i \lambda^n \mu^n \end{array} \right.$$

worin $a = e^{\beta i}$ $b = e^{\delta i}$ zu setzen ist.

Zugleich halten wir die im §. 1 gemachte Voraussetzung: $n > m$ auch hier und im Folgenden stets fest.

Verbinden wir mit (2) die Gleichung einer Geraden

$$ux + vy + wz = 0,$$

so ergibt sich zur Bestimmung des den Schnittpunkten zugehörigen Verhältnisses $\lambda : \mu$ eine Gleichung vom $2n$. Grade.

Folglich ist die Curve von der $2n$. Ordnung.

Die Ordnung ist also nur von n als der grösseren unter den zwei Zahlen n und m abhängig.

Diese Curve $2n$. Ordnung kann aber unter Umständen in eine doppelt zählende Curve n . Ordnung ausarten.

Wir überzeugen uns davon auf Grund mechanischer Anschauungen; die Ausartung der Curve findet offenbar dann statt, wenn der sich bewegende Punkt, welcher die Curve beschreibt, dieselbe doppelt durchläuft; und dies kann nur dadurch geschehen, dass er in einem Punkte umkehrt und seinen früheren Weg rückläufig passirt. Denn für eine Curve, die doppelt und in gleichem Sinne durchlaufen würde, wären n und m keine relativen Primzahlen mehr, es wären in diesem Fall die laufenden Coordinaten

$$\begin{aligned}x &= \sin(2n't + \beta) \\y &= \sin(2m't + \delta)\end{aligned}$$

wo nun n' und m' relative Primzahlen wären.

Als Bedingung für die Ausartung erhalten wir somit die, dass die Geschwindigkeit des Punktes 0 werden muss, d. h. $\frac{dv}{dt} = 0$, was die zwei gleichzeitigen Bedingungen involvirt

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ und } \frac{dy}{dt} = 0.$$

Es ist nun

$$\frac{dx}{dt} = n \cos(nt + \beta), \quad \frac{dy}{dt} = m \cos(mt + \delta).$$

Unsere Bedingungsgleichungen ergeben demnach

$$nt + \beta = \frac{\pi}{2} + r\pi$$

$$mt + \delta = \frac{\pi}{2} + s\pi,$$

daraus durch Elimination von t

$$n\delta - m\beta = (n - m) \frac{\pi}{2} - (rm - sn) \pi$$

oder wenn wir $\beta = 0$ setzen

$$\delta = \frac{n - m}{n} \frac{\pi}{2} + \frac{(sn - rm) \pi}{n}$$

d. h. für den Fall: n und m ungerade

$$\delta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots$$

und für den Fall: n oder m gerade

$$\delta = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \dots$$

Bezüglich dieser ausgearteten Curven ist zu bemerken, dass bei der mechanischen Bewegung unseres erzeugenden Punctes nur die Curvenpuncte in Evidenz treten, welche innerhalb des der Curve umschriebenen Quadrats liegen, während der Curvengleichung, wie wir sie durch Elimination des Parameters herstellen werden, noch eine continuirliche Reihe reeller Werthepaare genügt, die sich bis in's Unendliche fortsetzt, wie wir es in dem Fall $n = 5$ $m = 3$ für $\beta = 0$, $\delta = 0$ in der Figur 1 andeuten: Der Ast, der sich in's Unendliche erstreckt, entspricht natürlich imaginären Werthen von t .

§. 3.

Um die Elimination des Parameters und damit die Herstellung der Gleichung der Curve in Cartesischen Coordinaten zu bewerkstelligen, benutzen wir eines der gewöhnlichen Eliminationsverfahren.

Wir bedienen uns der Gleichungen (1) des §. 2, schreiben sie in folgender Gestalt

$$a^2\lambda^{2n} - 2aix\lambda^n - 1 = 0$$

$$b^2\lambda^{2n} - 2biy\lambda^{2n-m} - \lambda^{2n-2m} = 0$$

und wenden das Bezout'sche abgekürzte Eliminationsverfahren an, wodurch wir eine $2n$ -reihige Determinante gleich Null gesetzt erhalten, die folgendermassen beschaffen ist:

In der m ten Diagonalreihe enthält sie m Glieder
 $= -2a^2biy$.

In der $2m$ ten Diagonalreihe $2m$ Glieder $= -a^2$.

In der n ten Diagonalreihe n Glieder $= 2ab^2ix$.

In der $(n + m)$ ten Diagonalreihe $n-m$ Glieder $= -4ab^2ixy$.

- In der $2n^{\text{ten}}$ Diagonalreihe $2n$ Glieder $= b^2$.
- In der $(n + 2m)^{\text{ten}}$ Diagonalreihe $2m-n$ Glieder $= \pm 2aix$.
- In der $(2n + m)^{\text{ten}}$ Diagonalreihe $2n-m$ Glieder $= -2biy$.
- In der $(2n + 2m)^{\text{ten}}$ Diagonalreihe $2n-m$ Glieder $= -1$.
- Alle anderen Glieder sind gleich Null.

Zum Verständniss dieser Determinante ist eine nähere Erläuterung nothwendig. Das Charakteristische an ihr ist, dass sie nach Diagonalreihen geschichtet ist, d. h. jede Diagonalreihe für sich enthält lauter gleiche Glieder, mit Ausnahme von zweien, nemlich der $(n + m)^{\text{ten}}$ und der $(n + 2m)^{\text{ten}}$, welche nur in der Mitte von einer Anzahl werthiger Glieder besetzt, dagegen rechts und links symmetrisch mit Nullen ausgefüllt sind. Dabei nehmen die Glieder der $(n + 2m)^{\text{ten}}$ Diagonalreihe auch noch bezüglich des Vorzeichens eine Ausnahmestellung ein. Während nemlich die übrigen Glieder festes Vorzeichen haben, schwankt das Vorzeichen dieser Glieder, und zwar ist es immer identisch mit dem Vorzeichen der Zahl $2m-n$. Ferner ist zu bemerken, dass die $2m^{\text{te}}$ und $(n + 2m)^{\text{te}}$ Diagonalreihe eine willkürliche Stelle einnehmen; denn je nach den Werthen für n und m kann die $2m^{\text{te}}$ zwischen der m^{ten} und $(n + m)^{\text{ten}}$, und die $(n + 2m)^{\text{te}}$ zwischen der $(n + m)^{\text{ten}}$ und $(2n + m)^{\text{ten}}$ schwanken.

Wenn man diese Determinante entwickelt, erhält man folgende Gleichung für die allgemeine Lissajouscurve — die vorläufig noch Imaginäres enthält —:

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{n-m} \cdot (2i)^{2n} A_{2n} a^{2m} b^{2n} y^{2n} + \dots + \\
 & \quad + (-1)^{n-m} (2i)^{2n-2r} A_{2n-2r} a^{2m} b^{2n} y^{2n-2r} + \dots \\
 & \dots + (2i)^{2m} B_{2m} a^{2m} b^{2n} x^{2m} + \dots + \\
 & \quad + (2i)^{2m-2r} B_{2m-2r} a^{2m} b^{2n} x^{2m-2r} + \dots \\
 & + (2i)^{n+m} \left\{ (-1)^{n+m-1} a^m b^{3n} - a^{3m} b^n \right\} C_{n,m} y^n x^m + \dots \\
 & + (2i)^{n+m-2(r+s)} \left\{ (-1)^{n+m-1} a^m b^{3n} - a^{3m} b^n \right\} C_{n-2r,m-2s} y^{n-2r} x^{m-2s} \\
 & \quad + \dots + (-1)^n (b^{2n} - a^{2m})^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Dabei ist zu bemerken, dass für die geraden Potenzen von y r die positiven ganzen Zahlen

$$0, 1, 2, \dots, n-1$$

durchläuft; für die geraden Potenzen von x durchläuft r die Zahlen

$$0, 1, 2, \dots, m-1,$$

und für die Glieder, welche x und y zugleich enthalten muss man 3 Fälle unterscheiden:

1) für n und m ungerade wächst r und s bis $\frac{n-1}{2}$ resp. $\frac{m-1}{2}$

2) für n ungerade und m gerade wächst

$$r \text{ und } s \text{ bis } \frac{n-1}{2} \text{ resp. } \frac{m}{2}$$

3) für n gerade und m ungerade wächst

$$r \text{ und } s \text{ bis } \frac{n}{2} \text{ resp. } \frac{m-1}{2}$$

Die Coëfficienten A , B , C haben folgende Bedeutung:

$$A_{2n} = 1$$

$$A_{2n-2r} = \frac{2n}{r} (2n-r-1)_{(r-1)}$$

Ferner ist ganz analog

$$B_{2m} = 1$$

$$B_{2m-2r} = \frac{2m}{r} (2m-r-1)_{(r-1)}$$

Die Zahlencoëfficienten C habe ich nur für den Fall $m = 1$ berechnet; in diesem speciellen Fall sind es folgende:

$$C_{n,1} = 1$$

$$C_{n-2r,1} = \frac{n}{r} (n-r-1)_{(r-1)}$$

Die Coëfficienten C zeigen offenbar nicht zu verkennde Analogieen mit den Coëfficienten A und B . Es ist daher zu vermuthen, dass die allgemeinen Coëfficienten C auch diese Analogie aufweisen. Dadurch geleitet habe ich

ich mir, indem ich sie mit G_n bezeichnete, die Recursionsgleichung bildete

$$G_{n+1} = -by G_n + b^2 G_{n-1},$$

aus der ich die directe Entwicklung für G_n erhielt:

$$G_n = (-b)^n \left\{ (n)_0 y^n + (n-1)_1 y^{n-2} + \dots + (n-r)_r y^{n-2r} + \dots \right\},$$

wobei das letzte Glied den Exponenten 1 oder 0 hat, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Die Gleichung unserer Curve, sowie wir sie jetzt dargestellt haben, enthält imaginäre Grössen; diese wollen wir nun wegschaffen.

Dabei setzen wir der Einfachheit halber $\beta = 0$, d. h. $a = e^{\beta i} = 1$ fest, so dass die Gleichung nur noch das δ enthält.

Wir schreiben nun die Gleichung in der kanonischen Form, addiren die Quadrate der beiden reellen Bestandtheile, und ziehen die Quadratwurzel. Diese muss sich ziehen lassen, denn wir wissen bereits, dass die Curve von der $2n$. Ordnung ist, während der Ausdruck unter der Wurzel vom $4n$. Grade ist.

Wenn wir diese Operation ausführen, so finden wir als definitives Resultat folgende Glieder:

Absolutes Glied: $(-1)^{n-1} \sin^2 n\delta$.

Die geraden Potenzen von y , von y^{2n} an bis y^2 :

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^{m+r} 2^{2n-2r-2} A_{2n-2r} y^{2n-2r}.$$

Die geraden Potenzen von x , von x^2 an bis x^2 :

$$\sum_{r=0}^{r=m-1} (-1)^{m+r} 2^{2m-2r-2} B_{2m-2r} x^{2m-2r}.$$

Die gemischten Glieder, d. h. diejenigen, welche Potenzen von x und y zugleich enthalten, von $y^n x^m$ an bis $y^0 x^0$ resp. $y^0 x^1$, resp. $y^1 x^1$, je nachdem n oder m oder beide ungerade sind.

Wir werden beim Anschreiben dieser Glieder 2 Fälle unterscheiden müssen, und uns dabei der geraden Potenzen

der imaginären Einheit i zur präzisen Angabe der Vorzeichen bedienen:

1. Fall:

n und m ungerade:

$$r = \frac{n-1}{2} \quad s = \frac{m-1}{2}$$

$$\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{s=0}^{\frac{m-1}{2}} -i^{\alpha+\beta} \cdot C_{\alpha, \beta} \cdot 2^{\alpha+\beta-1} \cdot \cos n \delta \cdot y^{\alpha} x^{\beta}$$

2. Fall:

n oder m gerade:

$$r = \begin{cases} \frac{n}{2} \\ \text{resp.} \\ \frac{n-1}{2} \end{cases} \quad s = \begin{cases} \frac{m-1}{2} \\ \text{resp.} \\ \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{s=0}^{\frac{m-1}{2}} -i^{\alpha+\beta-1} \cdot C_{\alpha, \beta} \cdot 2^{\alpha+\beta-1} \cdot \sin n \delta \cdot y^{\alpha} x^{\beta}$$

wobei $\begin{cases} \alpha = n - 2r \\ \beta = m - 2s \end{cases}$

Die Gleichung für die ausgearteten Lissajous-Curven gewinnen wir aus der Bemerkung, dass die Curvengleichung nach Substitution des entsprechenden Werthes von δ ein vollständiges Quadrat ist und die Wurzel sich ziehen lässt; thun wir das, so erhalten wir folgende Gleichung für den Fall: n oder m gerade:

$$0 = \sum_r (-1)^r 2^{n-2r-1} \frac{n}{r} (n-r-1)_{r-1} y^{n-2r}$$

$$+ (-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \sum_s (-1)^s 2^{m-2s-1} \frac{m}{s} (m-s-1)_{s-1} x^{m-2s}$$

für den Fall n und m ungerade ist dem zweiten Glied statt $(-1)^{\frac{n-m+1}{2}}$ der Factor $(-1)^{\frac{n-m+2}{2}}$ vorzusetzen.

Man kann aber auch, nur ausgehend von den Coefficienten A und B der ursprünglichen Gleichung als berechneten Grössen, sowohl die Coefficienten der ausgearteten Curven, als auch die Coefficienten C der ursprünglichen Curve berechnen.

Nämlich nach Substitution des entsprechenden Werthes von δ in die Curvengleichung haben für jeden Fall der Combinationen von n und m die gemischten Potenzen $y^n x^m$ etc. statt $\sin n\delta$ resp. $\cos n\delta$ den Factor 1, und man überzeugt sich sofort davon, dass diese Glieder nur doppelte Producte des quadratischen Ausdrucks sein können, aus dem die Wurzel zu ziehen ist, und zwar aus dem Grunde, weil entweder der Exponent von x oder von y oder gar von beiden ungerade ist. Dagegen können sich die geraden Potenzen von y und x sowohl aus Quadraten als aus doppelten Producten zusammensetzen. Aus diesen Bemerkungen folgt sofort, dass die Gleichung der ausgearteten Curve von der Form sein muss

$$\varphi(y) = \psi(x)$$

und zwar können wir dies, da in den doppelten Producten nur Potenzen mit den Exponenten $n, n-2, n-4, \dots, m, m-2, m-4, \dots$ vorkommen, noch genauer so schreiben:

$$a_n y^n + a_{n-2} y^{n-2} + \dots = b_m x^m + b_{m-2} x^{m-2} + \dots \quad (1).$$

Bezeichnet man nun die Gesamtkoeffizienten der ursprünglichen Gleichung entsprechend den Coefficienten A, B, C mit

$$a_{2n-2r}, b_{2m-2r}, c_{n-2r, m-2s},$$

von denen uns die a und b bekannt, weil berechnet sind, so erhält man nach Quadrirung der Gleichung (1) und Gleichsetzung der zu Tage tretenden Coefficienten der Potenzen der Variablen mit den ihnen entsprechenden in der ursprünglichen Gleichung, die Relationen

$$\begin{aligned} a_n^2 &= a_{2n} & b_m^2 &= b_{2m} \\ 2a_n a_{n-2} &= a_{2n-2} & 2b_m b_{m-2} &= b_{2m-2} \\ 2a_n a_{n-4} + a_{n-2}^2 &= a_{2n-4} & 2b_m b_{m-4} + b_{m-2}^2 &= b_{2m-4}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

aus denen man successive die Coefficienten $a_n, a_{n-2}, \dots, b_m, b_{m-2}, \dots$ berechnen kann; aus ihnen gewinnt man dann die Coefficienten $c_{n-2r, m-2s}$ als ihre doppelten Producte, und dann natürlich auch sofort die Coefficienten $C_{n-2r, m-2s}$. Und wenn man diese Berechnungen durch-

führt, so gelangt man zu den obigen Resultaten bezüglich der Coëfficienten der ausgearteten Lissajous-Curven, und der fraglichen Coëfficienten C der ursprünglichen Curven zurück, so dass die Richtigkeit der aus Gründen der Analogie erschlossenen Coëfficienten C bewiesen ist.

Nun, nachdem wir die Gleichung der Curve hergestellt haben, überzeugen wir uns leicht von dem Stattfinden der am Schluss des §. 1 angeführten Symmetrieverhältnisse einfach durch die Bemerkung, dass für n gerade die Vertauschung von + y und — y an der Gleichung nichts ändert, ebenso wenig für m gerade die Vertauschung von + x und — x, und endlich für n und m ungerade die gleichzeitige Vertauschung von + x mit — x und + y mit — y. Hiezu Figur 2.

§. 4.

Unsere Curve von der $2n$. Ordnung besitzt $(n - 1)$. $(2n - 1)$ Doppelpunkte.

Nämlich da unsere Curve rational durch 2 homogene Parameter darstellbar ist, so ist sie von dem Geschlechte $p = 0$, wenn wir unter Geschlecht nach Clebsch die Differenz der einer Ordnung entsprechenden grösstmöglichen Anzahl von Doppelpunkten und der Anzahl, welche die Curve wirklich besitzt, verstehen. Demnach besitzt unsere Curve selbst diese Maximalzahl, d. h. da ihre Ordnung $2n$ ist,

$$\frac{(2n - 1) (2n - 2)}{2} = (n - 1) (2n - 1).$$

Von diesen kommt eine bedeutende Anzahl auf Rechnung eines im Unendlichen auf der X-Axe gelegenen $2(n - m)$ fachen Punktes. Von der Existenz desselben überzeugen wir uns schon durch die Betrachtung der Curvegleichung. Nämlich die Schnittpunkte mit der X-Axe, d. h. der Geraden $y = 0$, ergibt eine Gleichung $2m$. Grades in x, daher resultiren $2(n - m)$ Lösungen $x = \infty$.

Eine nähere Untersuchung dieses Punktes werden wir später vornehmen; für jetzt sei nur bemerkt, dass er sich als Durchschnittspunkt von $2(n - m)$ paarweise conjugirt imaginären Aesten ergibt, und daher bei der mechanischen Bewegung unseres ursprünglichen erzeugenden Punktes, der nur die reellen Aeste beschreibt, ganz ausser Berücksichtigung bleibt.

Zur Bestimmung der Doppelpunkte gehen wir wieder von den Gleichungen (3) des §. 1 aus, und setzen darin $\beta = 0$:

$$\begin{aligned}x &= \sin nt \\y &= \sin (mt + \delta).\end{aligned}$$

Da ein Doppelpunkt eintritt, wenn x und y für zwei bestimmte Werthe von t sich beide zugleich repetiren, so wird, wenn t und t' zwei solche Werthe sind, die erste Bedingung hiefür sein, dass

$$nt' = r\pi + (-1)^r nt,$$

wobei $r = 1, 2, \dots, 2n - 1$,

$$\text{oder } t' = \frac{r\pi}{n} + (-1)^r t;$$

für diesen Werth geht aber y über in

$$\sin \left(\frac{m}{n} r\pi + (-1)^r mt + \delta \right),$$

und wenn ein Doppelpunkt stattfinden soll, so muss dies $= \sin (mt + \delta)$ sein, oder

$$\frac{m}{n} r\pi + (-1)^r mt + \delta = p\pi + (-1)^p (mt + \delta) \dots (1)$$

$$p = 1, 2, \dots, 2m - 1.$$

Aus dieser Gleichung sind die den Doppelpunkten zugehörigen Parameterwerthe t zu berechnen. Sie repräsentirt wegen der Mehrdeutigkeit von r und p

$$(2n - 1)(2m - 1)$$

lineare Gleichungen, von denen aber mehrere illusorisch werden; nämlich jedes Mal, wenn r und p beide entweder gerade oder ungerade sind, hebt sich die zu berechnende Unbekannte t aus der Gleichung fort.

Wenn also r gerade ist (dies ist $n - 1$ mal der Fall)

muss p eine ungerade Zahl sein, also von der Form $2k + 1$, wobei $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

Diese Combination liefert also

$$m(n - 1) \text{ Gleichungen.}$$

Wenn dagegen r ungerade ist (dies kommt n mal vor), muss p gerade, also von der Form $2s$ sein, wo $s = 1, 2, \dots, m - 1$.

Diese Combination liefert demnach

$$n(m - 1) \text{ Gleichungen.}$$

Im Ganzen haben wir folglich

$$m(n - 1) + n(m - 1)$$

Gleichungen und ebenso viele Lösungen unserer Aufgabe.

Die Gesammtheit dieser Doppelpunkte spaltet sich, wie wir gleich sehen werden, in zwei charakteristisch von einander verschiedenen Gruppen; die erste Gruppe enthält solche Doppelpunkte, welche, unabhängig vom Phasenunterschied, auf festen Geraden liegen, welche \parallel zur X-Axe sind; ihre Anzahl ist $m(n-1)$; die zweite Gruppe besteht aus solchen Doppelpunkten, welche, vom Phasenunterschied unabhängig, auf festen Geraden liegen, die \parallel zur Y-Axe sind; ihre Anzahl ist $n(m-1)$.

Die Gleichung (1) geht nämlich für ein gerades r in folgende über

$$\frac{m}{n} r\pi + mt + \delta = (2k + 1)\pi - (mt + \delta) \dots (2)$$

und für ein ungerades r in folgende

$$\frac{m}{n} r\pi - mt + \delta = 2s\pi + (mt + \delta) \dots (3)$$

Aus (2) ergibt sich

$$t = \frac{2k+1}{2m} \pi - \frac{r\pi}{2n} - \frac{\delta}{m} \text{ (r gerade) } \dots (4)$$

und aus (3)

$$t = \frac{r\pi}{2n} - \frac{s\pi}{m} \text{ (r ungerade) } \dots (5).$$

Folglich ist für r gerade d. h. für $m(n-1)$ Doppelpunkte

$$\arcsin x = \frac{n}{m} \frac{2k+1}{2} \pi - \frac{r\pi}{2} - \frac{n}{m} \delta$$

$$\arcsin y = \frac{2k+1}{2} \pi - \frac{m}{2n} r\pi.$$

folglich y von δ unabhängig.

Für r ungerade, d. h. für $n(m-1)$ Doppelpunkte ist

$$\arcsin x = \frac{r\pi}{2} - \frac{n}{m} s\pi$$

$$\arcsin y = \frac{m}{n} \frac{r\pi}{2} - s\pi + \delta.$$

Hier ist also die x Coordinate unabhängig von δ .

Es ergibt sich somit von selbst die obige Eintheilung in zwei Gruppen.

Wir wollen nun die arc , deren \sin die Coordinaten der Doppelpunkte sind, in einer Tabelle zusammenstellen, indem wir dem r der Reihe nach seine Werthe zutheilen.

	$\arcsin x = nt$
für $r = 1$	$\frac{\pi}{2} - \frac{n}{m} s\pi$
" $r = 2$	$\frac{n}{m} \frac{2k+1}{2} \pi - \pi - \frac{n}{m} \delta$
" $r = 3$	$\frac{3\pi}{2} - \frac{n}{m} s\pi$
" $r = 4$	$\frac{n}{m} \frac{2k+1}{2} \pi - 2\pi - \frac{n}{m} \delta$

" $r=2n-2$	$\frac{n}{m} \frac{2k+1}{2} \pi - (n-1) \pi - \frac{n}{m} \delta$
" $r=2n-1$	$\frac{2n-1}{2} \pi - \frac{n}{m} s\pi$

	arcsin y = mt + δ
für r = 1	$\frac{m}{2n} \pi - s\pi + \delta$
„ r = 2	$\frac{2k+1}{2} \pi - \frac{m}{n} \pi$
„ r = 3	$\frac{3m}{2n} \pi - s\pi + \delta$
„ r = 4	$\frac{2k+1}{2} \pi - \frac{m}{n} 2\pi$

„ r = 2n - 2	$\frac{2k+1}{2} \pi - \frac{m}{n} (n - 1)\pi$
„ r = 2n - 1	$\frac{(2n-1)m}{2n} \pi - s\pi + \delta$
	s = 1, 2, m - 1
	k = 0, 1, 2 m - 1.

Bei der weiteren Untersuchung müssen wir drei Fälle unterscheiden, je nachdem m oder n oder beide ungerade sind.

I. Fall: n gerade, m ungerade.

Die Doppelpunkte der ersten Hauptgruppe liegen zu je m auf n - 1 festen, von δ unabhängigen Parallelen zur X-Axe; eine von ihnen ist die X-Axe selbst.

Bw. Für r = n erhalten wir als y-Coordinten der Doppelpunkte den arcsin von

$$\frac{2k+1}{2} \pi - \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{2} \pi \quad \text{oder}$$

$$\frac{2k+1-m}{2} \pi.$$

Dies ist für die verschiedenen zugehörigen Werthe von k immer ein Vielfaches von π, somit y = 0, während

die zugehörigen x alle verschieden sind; da k von 0 bis $m - 1$ läuft, so haben wir m Doppelpunkte, die ganz unabhängig von δ auf der X -Axe liegen.

Für $r = n - 2$ und $r = n + 2$ erhalten wir folgende respectiven Werthe für $\arcsin y$

	$r = n - 2$	$r = n + 2$
1)	$\frac{1-m}{2}\pi - \frac{m}{n}\pi$	$\frac{1-m}{2}\pi + \frac{m}{n}\pi$
2)	$\frac{3-m}{2}\pi - \frac{m}{n}\pi$	$\frac{3-m}{2}\pi + \frac{m}{n}\pi$
...
m-1)	$\frac{m-3}{2}\pi - \frac{m}{n}\pi$	$\frac{m-3}{2}\pi + \frac{m}{n}\pi$
m)	$\frac{m-1}{2}\pi - \frac{m}{n}\pi$	$\frac{m-1}{2}\pi + \frac{m}{n}\pi$

Hier liefern 1) der ersten Columne, 2) der zweiten, 3) der ersten etc. gleiche \sin , ebenso liefern 1) der zweiten, 2) der ersten, 3) der zweiten etc. gleiche \sin ; folglich haben wir wieder je m Doppelpunkte auf zwei zur X -Axe parallelen, von δ unabhängigen Geraden.

Zu demselben Resultat würden wir kommen durch Zusammenstellung der Ergebnisse für $r = n - 4$ und $r = n + 4$; $r = n - 6$ und $r = n + 6$ etc.; kurzum wir erhalten so viel Geraden, auf denen sich die Doppelpunkte zu m gruppieren, als r gerade Zahlen durchläuft; dies sind aber $n - 1$.

Da zugleich die zugehörigen y verschieden sind, so ist die obige Behauptung erwiesen.

Es gilt ferner der weitere Satz:

• Die Doppelpunkte der **ersten Hauptgruppe** liegen auf $2m$ von δ abhängigen Parallelen zur Y -Axe in der Weise, dass auf m von ihnen je $\frac{n}{2}$,

und auf m weiteren je $\frac{n}{2} - 1$ Doppelpunkte liegen.

Man ersieht dies daraus, dass für

$$\begin{aligned} r &= 2, 6, 10, \dots & \text{und für} \\ r &= 4, 8, 12, \dots \end{aligned}$$

die $\arcsin x$ nur um 2π differiren. Da hiebei $r \frac{n}{2}$, beziehungsweise $\frac{n}{2} - 1$ Werthe annimmt, so liegen im ersten Fall $\frac{n}{2}$, im zweiten $\frac{n}{2} - 1$ Doppelpunkte auf einer Geraden. Und da in jedem Fall k noch m verschiedene Werthe annehmen kann, die auch verschiedene Werthe für die \sin ergeben, so sind es 2 mal m Gerade.

Die Doppelpunkte der zweiten Hauptgruppe liegen zu n auf $m - 1$ festen, von δ unabhängigen Parallelen zur Y -Axe.

Nämlich gleiche x resultiren für

$$\underbrace{r=1, s=1; r=3, s=m-1; r=5, s=1; r=7, s=m-1}_{\text{etc.}}$$

ebenso für

$$\underbrace{r=1, s=2; r=3, s=m-2; r=5, s=2; r=7, s=m-2}_{\text{etc.}}$$

schliesslich für

$$\underbrace{r=1, s=m-1; r=3, s=1; r=5, s=m-1; r=7, s=1}_{\text{etc.}}$$

Dies sind im Ganzen $n(m - 1)$ Werthcombinationen der r und s , und zwar haben wir so viel feste Gerade, als Horizontalreihen vorhanden sind, nämlich $m - 1$; und auf jeder so viel Doppelpunkte als Vertikalreihen vorhanden sind, nämlich n .

Die zweite Hauptgruppe zeigt aber ebenfalls eine von δ abhängige Gruppierung; es liegen nämlich je $\frac{m-1}{2}$ Doppelpunkte auf $2n$ zur X -Axe parallelen, von δ abhängigen Geraden.

Denn gleiches y resultirt für

- $r = 1; s = 1, 3, 5, \dots m-2$; ebenso für
- $r = 1; s = 2, 4, 6, \dots m-1$; ebenso für
- $r = 2; s = 1, 3, 5, \dots m-2$; ebenso für
- $r = 2; s = 2, 4, 6, \dots m-1$; etc.

II. Fall: n ungerade, m gerade.

Durch ganz analoge Betrachtungen wie im vorigen Fall; gelangen wir zu den folgenden Sätzen.

Von den Doppelpunkten der **ersten Hauptgruppe** liegen je m auf $n-1$ von δ unabhängigen Parallelen zur X -Axe.

Gleiche y ergeben sich nämlich durch folgende Combinationen von r und k

- $r = 2, 2n - 2; k = 0, 2, 4, \dots m - 2;$
- $r = 2, 2n - 2; k = 1, 3, 5, \dots m - 1;$
- $r = 4, 2n - 4; k = 0, 2, 4, \dots m - 2;$
- $r = 4, 2n - 4; k = 1, 3, 5, \dots m - 1;$
- etc.

Die Doppelpunkte der **ersten Hauptgruppe** liegen zu $\frac{n-1}{2}$ auf $2m$ von δ abhängigen Parallelen zur Y -Axe.

Denn es ergeben sich gleiche x für

- $k = 0; r = 2, 6, 10 \dots$
- $k = 1; r = 2, 6, 10 \dots$
- $k = 2; r = 2, 6, 10 \dots$
-
- $k = 0; r = 4, 8, 12 \dots$
- $k = 1; r = 4, 8, 12 \dots$
- $k = 2; r = 4, 8, 12 \dots$
- etc.

Die Doppelpunkte der **zweiten Hauptgruppe** vertheilen sich so auf $m - 1$ feste, von δ unabhängige, und zur Y -Axe parallele Gerade, dass

auf jeder n Doppelpunkte liegen. Eine von diesen Geraden ist die Y -Axe selbst.

Denn gleiche x resultiren

$$1) \text{ für } r = 1, s = 1; r = 3, s = m - 1; r = 5, s = 1; \\ r = 7, s = m - 1; \text{ etc.}$$

$$2) \text{ für } r = 1, s = 2; r = 3, s = m - 2; r = 5, s = 2; \\ r = 7, s = m - 2; \text{ etc.}$$

$$m-1) \text{ für } r=1; s = m - 1; r=3, s = 1; r=5, s = m - 1; \\ r = 7, s = 1.$$

Der mittelsten Reihe (der $\frac{m}{2}$ ten) entsprechen die Doppelpunkte auf der Y -Axe.

Die Doppelpunkte der zweiten Hauptgruppe liegen aber auch auf $2n$ von δ abhängigen Parallelen zur X -Axe so, dass auf n von ihnen je $\frac{m}{2}$, auf n weiteren je $\frac{m}{2} - 1$ liegen.

Denn gleiche y resultiren für

$$r = 1, s = 1, 3, 5, \dots$$

$$r = 1, s = 2, 4, 6, \dots$$

$$r = 3, s = 1, 3, 5, \dots$$

$$r = 3, s = 2, 4, 6, \dots \text{ etc. etc.}$$

III. Fall: n ungerade und m ungerade.

Wir wollen uns hier, da alles sich analog den früheren Fällen beweisen lässt, mit der raschen Angabe der Sätze begnügen.

Die Doppelpunkte der ersten Hauptgruppe sind auf $n - 1$ festen, von δ unabhängigen Parallelen zur X -Axe so gruppiert, dass auf jeder m Doppelpunkte liegen. Sie weisen aber auch eine von δ abhängige Gruppierung auf, und zwar liegen je $\frac{n-1}{2}$ auf $2m$ Parallelen zur Y -Axe.

Die Doppelpunkte der zweiten Hauptgruppe

sind auf $m-1$ festen, von δ unabhängigen Parallelen zur Y-Axe so gruppirt, dass auf jeder n Doppelpunkte liegen.

Sie weisen aber auch eine von δ abhängige Gruppierung auf, und zwar liegen je $\frac{m-1}{2}$ auf $2n$ Parallelen zur X-Axe.

§. 5.

Die Klasse unserer Curve ist $2(n + m)$.

Um dies einzusehen, stellen wir die Curve in Linien-coordinaten dar.

Die Gleichung der Tangente einer Curve in einem Punkte $x' y'$ ist

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ dx' & dy' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Coordinaten der Tangente verhalten sich demnach wie die Unterdeterminanten der nach den Gliedern der ersten Horizontalreihe aufgelösten Determinante, also

$$u_1 : u_2 : u_3 = dy' : dx' : x'dy' - y'dx'$$

oder mit Benutzung des Proportionalitätsfactors ρ

$$\rho u_1 = -dy'$$

$$\rho u_2 = dx'$$

$$\rho u_3 = x'dy' - y'dx'$$

Soll dies nun eine Tangente im Punct x, y unserer Lissajous-Curve sein, so haben wir in diese Gleichungen für x', y', dx', dy' die bezüglichen Werthe einzusetzen.

Es ist nun

$$x' = \sin(nt + \beta)$$

$$y' = \sin(mt + \delta)$$

$$dx' = n \cos(nt + \beta) dt$$

$$dy' = m \cos(mt + \delta) dt$$

also

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \dots \varrho u_1 = -m \cos(mt + \delta) \\ \dots \varrho u_2 = n \cos(nt + \beta) \\ \dots \varrho u_3 = m \sin(nt + \beta) \cos(mt + \delta) - n \sin(mt + \delta) \\ \qquad \qquad \qquad \cdot \cos(nt + \beta) \end{array} \right.$$

oder wenn wir wieder $e^{it} = \lambda$ setzen,

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \dots \varrho u_1 = -\frac{mi}{2} \left(e^{\delta i} \lambda^m + \frac{1}{e^{\delta i} \lambda^m} \right) \\ \dots \varrho u_2 = \frac{ni}{2} \left(e^{\beta i} \lambda^n + \frac{1}{e^{\beta i} \lambda^n} \right) \\ \dots \varrho u_3 = (m-n) \left\{ e^{(\beta + \delta)i} \lambda^{n+m} - \frac{1}{e^{(\beta + \delta)i} \lambda^{n+m}} \right\} + \\ \qquad \qquad \qquad + (m+n) \left\{ e^{(\beta - \delta)i} \lambda^{n-m} - \frac{1}{e^{(\beta - \delta)i} \lambda^{n-m}} \right\} \end{array} \right.$$

oder durch 2 homogene Parameter λ, μ , indem wir zugleich $e^{\beta i} = a, e^{\delta i} = b$ setzen:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \dots \sigma u_1 = -\frac{mi}{2} \left(b \lambda^{n+2m} \mu^n + \frac{1}{b} \lambda^n \mu^{n+2m} \right) \\ \dots \sigma u_2 = \frac{ni}{2} \left(a \lambda^{2n+m} \mu^m + \frac{1}{a} \lambda^m \mu^{2n+m} \right) \\ \dots \sigma u_3 = (m-n) \left\{ ab \lambda^{2(n+m)} - \frac{1}{ab} \mu^{2(n+m)} \right\} + \\ \qquad \qquad \qquad + (m+n) \left\{ \frac{a}{b} \lambda^{2n} \mu^{2m} - \frac{b}{a} \lambda^{2m} \cdot \mu^{2n} \right\} \end{array} \right.$$

Wir finden nun die Klasse der Curve, indem wir in die Gleichung eines Punctes

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

für die u die ihnen in (3) proportionirt gesetzten Ausdrücke substituiren. Es resultirt dann zur Bestimmung von $\lambda : u$ eine Gleichung $2(n+m)$ Grades; und die Curve besitzt also die Klasse $2(n+m)$.

§. 6.

Die Gesamtzahl der Doppeltangenten ist
$$\frac{(2n+2m-1)(2n+2m-2)}{2} = 2(n+m)^2 - 3(n+m) + 1;$$

denn, da die Curve vom Geschlecht $p = 0$ ist, so besitzt

sie die Maximalzahl der Doppeltangenten, welche ihrer Klasse zukommt. Um die Doppel- resp. vielfachen Tangenten im Endlichen zu finden, benützen wir die Gleichung (1) des §. 5, und fragen: wann werden sich die Werthe für $\frac{u_3}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}$, als welches die Abschnitte in den Axen sind, zugleich repetiren?

Dies wird der Fall sein:

1) für $t = \frac{\pi-2\beta}{2n}, \frac{5\pi-2\beta}{2n}, \frac{9\pi-2\beta}{2n}, \dots$,
 $\frac{(4n-3)\pi-2\beta}{2n}$ was eine n-fache Tangente liefert mit den

Abschnitten -1 in der X- und ∞ in der Y-Axe;

2) für $t = \frac{3\pi-2\beta}{2n}, \frac{7\pi-2\beta}{2n}, \frac{11\pi-2\beta}{2n}, \dots$,
 $\frac{(4n-1)\pi-2\beta}{2n}$, was eine n-fache Tangente liefert mit

den Abschnitten $+1$ in der X- und ∞ in der Y-Axe.

3) für $t = \frac{\pi-2\delta}{2m}, \frac{5\pi-2\delta}{2m}, \dots$, $\frac{(4m-3)\pi-2\delta}{2m}$,
 was eine m-fache Tangente liefert mit den Abschnitten -1 in der Y- und ∞ in der X-Axe.

4) für $t = \frac{3\pi-2\delta}{2m}, \frac{7\pi-2\delta}{2m}, \dots$, $\frac{(4m-1)\pi-2\delta}{2m}$,
 was eine m-fache Tangente liefert mit den Abschnitten $+1$ in der Y-, und ∞ in der X-Axe.

§. 7.

Die Bedingungsgleichung für einen Wendepunct ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Es ist nun

$$\frac{n}{m^2} \cdot \frac{m \sin(mt + \delta) \cos(nt + \beta) + n \sin(nt + \beta) \cos(mt + \delta)}{\cos^3(mt + \delta)}$$

Soll dies = 0 werden, so muss entweder der Zähler verschwinden, oder der Nenner unendlich gross werden. Das letztere kann für endliche t nicht eintreten. Wir wollen uns daher nur an den ersteren Fall halten, so dass wir als Wendepunktsgleichung erhalten

$$-m \sin(mt + \delta) \cos(nt + \beta) + n \sin(nt + \beta) \cos(mt + \delta) = 0 \quad (1)$$

oder

$$nx \sqrt{1-y^2} - my \sqrt{1-x^2} = 0 \quad (2)$$

Wenn wir hier rational machen, so erhalten wir

$$(n^2 - m^2) x^2 y^2 + n^2 x^2 - m^2 y^2 = 0 \quad (3)$$

d. h.

die Lage der Wendepunkte ist, unabhängig vom Phasenunterschied, durch eine nur mit dem Intervall wechselnde Curve 4. Ordnung bedingt, welche im Anfangspunkt einen Doppelpunkt hat, durch die unendlich entfernten Punkte der beiden Axen geht — durch den der X-Axe mit reellen, durch den der Y-Axe mit imaginären Aesten —, und die Eckpunkte des der Curve umschriebenen Quadrates enthält. Hiezu Fig. 3.

Natürlich ist nicht jeder Durchschnittspunkt dieser Curve mit der Lissajous-Curve ein Wendepunkt, denn um zu ihrer Gleichung zu gelangen, mussten wir erst rational machen, wodurch uneigentliche Lösungen hereingebracht wurden.

Wenn wir von der rationalen Darstellung durch einen Parameter ausgehen, so wird aus unserer Wendepunktsgleichung (1) folgende:

$$(n - m) \left\{ ab\lambda^n + m \frac{1}{ab\lambda^{n+m}} \right\} + (n + m) \left\{ \frac{a}{b} \lambda^{n-m} - \frac{b}{a} \frac{1}{\lambda^{n-m}} \right\} = 0. \quad (4)$$

Dies ist eine Gleichung $2(n + m)$. Grades, welche nur Wendepunkte liefert. Ob dies aber alle Wendepunkte sind, oder nicht, werden wir später entscheiden.

§. 8.

Wir gehen dazu über, die Riemann'sche Fläche der Lissajous-Curven, insbesondere ihre Verzweigung um den $2(n - m)$ -fachen Punkt im Unendlichen auf der X-Axe festzustellen.

Wir untersuchen daher zunächst den Verlauf der Curve in der nächsten Nähe dieses Punktes. Zu dem Zweck schreiben wir die Gleichung der Curve in homogener Form:

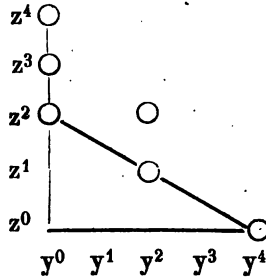
$$\begin{aligned}
 0 = & a_{2n} y^{2n} + a_{2n-2} y^{2n-2} z^2 + \dots + b_{2m} x^{2m} z^{2n-2m} \\
 & + b_{2m-2} x^{2m-2} z^{2n-2m-2} + \dots + c_{nm} y^n x^m z^{n-m} \\
 & + c_{n-2, m} y^{n-2} x^m z^{n-m+2} + \dots + c_{n, m-2} y^n x^{m-2} z^{n-m+2} \\
 & + \dots + dz^{2n}. \qquad (1)
 \end{aligned}$$

wobei der Gesamtkoeffizient jedes Gliedes durch ein den Zahlkoeffizienten A, B, C entsprechendes Symbol und das absolute Glied durch d bezeichnet ist. Diese Gleichung transformiren wir auf den zu untersuchenden Punkt als Anfangspunkt, was dadurch geschieht, dass wir $x = 1$ setzen, d. h. die Y-Axe nun als unendlich ferne Gerade ansehen.

Ist dies geschehen, so kommt es darauf an, die Glieder zu finden, welche bei einer unendlich kleinen Fortschreitung auf einem der durch den fraglichen Punkt gehenden Curvenäste allein die Ausschlag gebenden sind, d. h. die Glieder niederster Dimension. Und diese Glieder findet man vermittelst der von Puiseux in Lionville's Journal bewiesenen, aber schon von früheren Mathematikern häufig benützten Regel.

Wir wollen nun für die 3 einfachsten Fälle: 1) $n = 2$, $m = 1$; 2) $n = 3$, $m = 1$; 3) $n = 3$, $m = 2$ nach der Puiseux'schen Regel verfahren und erhalten folgende Schemata:

1) $n = 2, m = 1.$



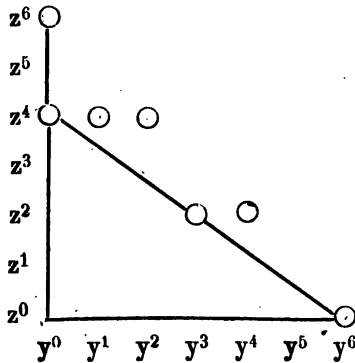
Hier heisst nämlich die Gleichung der Curve, nachdem $x = 1$ gesetzt ist,

$$a_4 y^4 + a_2 y^2 z^2 + b_2 z^2 + c_{21} y^2 z + c_{01} z^3 + dz^4 = 0$$

und die Glieder niederster Dimension sind

$$a_4 y^4 + c_{21} y^2 z + b_2 z^2 = 0.$$

2) $n = 3, m = 1.$



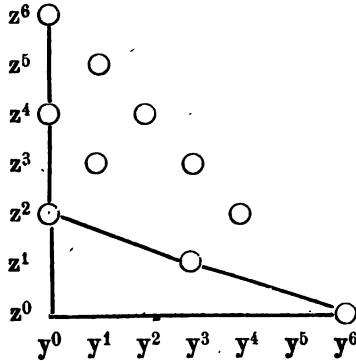
Hier heisst die Gleichung der Curve

$$0 = a_6 y^6 + a_4 y^4 z^2 + a_2 y^2 z^4 + b_2 z^4 + c_{31} y^3 z^2 + c_{11} y z^4 + dz^6$$

und die Glieder niederster Dimension sind

$$a_6 y^6 + c_{31} y^3 z^2 + b_2 z^4 = 0.$$

3) $n = 3, m = 2.$



Hier heisst die Gleichung

$$0 = a_0 y^6 + a_4 y^4 z^2 + a_2 y^2 z^4 + b_4 z^2 + b_2 z^4 + c_{32} y^3 z + c_{12} y z^3 + c_{30} y^3 z^3 + c_{10} y z^5 + d z^6$$

und die Glieder niederster Dimension sind

$$a_0 y^6 + c_{32} y^3 z + b_4 z^2 = 0.$$

Im allgemeinen Fall heissen die Glieder niederster Dimension

$$a_{2n} y^{2n} + c_{n,m} y^n z^{n-m} + b_{2m} z^{2(n-m)} = 0. \quad (3)$$

Dies ist eine reducible Gleichung, die in folgende 2 zerfällt:

$$y^n = \frac{-c_{n,m} \pm \sqrt{c_{n,m}^2 - 4a_{2n}b_{2m}}}{2a_{2n}} z^{n-m} \quad (4)$$

oder vermöge der Bedeutung der Coefficienten a, b, c

$$y^n = \frac{-1 \pm 2^{n+m-1} i \begin{cases} \sin n\delta \\ \text{resp.} \\ \cos n\delta \end{cases}}{2} z^{n-m} \quad (5)$$

Hiebei ist $\sin n\delta$ zu nehmen, wenn n und m ungerade ist, $\cos n\delta$, wenn n oder m gerade ist.

Damit ist erwiesen, dass die zwei Curvenäste, welche durch den unendlich fernen Punkt gehen, im Allgemeinen imaginär sind. Indess für einen speciellen Werth von δ

können sie reell werden. Nämlich wenn n und m ungerade sind, so wird der Factor von i

$$= 0 \text{ für } \delta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \text{ und wenn } n$$

oder m gerade ist, für $\delta = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \dots$

In diesem Fall artet die Curve in eine doppelt zählende Curve n . Ordnung aus, und die 2 Aeste im Unendlich in einen doppelt zählenden einfachen, aber reellen Ast. (cf. Schluss des §. 2).

Wenn wir uns nun auf Riemann'sche Vorstellungen einlassen, so sagt die Gleichung (5) aus, dass die Riemann'sche Fläche der Curve in Bezug auf y als abhängige und z als unabhängige Variable mit dem unendlich fernen Punkt als Anfangspunkt aus $2n$ Blättern besteht, von deren je n im unendlich fernen Punkt so zusammenhängen, dass man erst nach n Umläufen wieder ins Anfangsblatt zurückkommt. Die Fläche besteht also in diesem Punkt aus 2 Parthieen von je n nach einem Verzweigungsschnitt zusammenhängenden Blättern.

Dieser Zusammenhang wird nun nicht geändert, wenn wir zur ursprünglichen Curvengleichung in x und y Coordinaten zurückgehen, und die Riemann'sche Fläche in Bezug auf y als abhängige und x als unabhängige Variable bestimmen. Denn bei der Annahme $x = 1$ können wir

y in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $z^{\frac{1}{n}}$ entwickeln, oder bei Annahme homogener Coordinaten $\frac{y}{x}$ in

eine solche nach steigenden Potenzen von $\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$, was wir so andeuten wollen

$$\frac{y}{x} = \sum_m a_m \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichungen mit $\frac{x}{z}$,

so erhalten wir

$$\frac{y}{z} = \sum_m a_m \left(\frac{x}{z} \right)^{\frac{n-m}{n}},$$

eine Reihe, die nach fallenden Potenzen von $\left(\frac{x}{z} \right)^{\frac{1}{n}}$ geordnet ist. Setzen wir nun $z = 1$, so ersieht man, dass bei Annahme von y als abhängiger und x als unabhängiger Variable der Zusammenhang der Riemann'schen Fläche nicht geändert worden ist.

Gelingt es uns nun, die Curvengleichung in der Form $y = f(x)$ zu schreiben, und dadurch die im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte auch zu bestimmen, so können wir uns einen vollständigen Ueberblick über die Gestalt der Riemann'schen Fläche unserer Curve verschaffen, und deren Zusammenhang berechnen.

Finden wir diesen $= 1$ (nach der Riemann'schen Definition), so berechnet sich daraus, wie es sein muss, das Geschlecht $p = 0$. Denn Geschlecht p und Zusammenhang q hängen durch folgende Gleichung zusammen

$$q = 2p + 1,$$

wobei $2p$ die Anzahl der Querschnitte ist, welche die Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandeln.

Um die Auflösung der Curvengleichung nach y zu erzielen, benützen wir die Darstellung der Curve durch die Gleichungen (2) des §. 2, wobei wir nur $\mu = 1$ und $z = 1$ setzen

$$ex = a\lambda^{2n} - \frac{1}{a} \quad (6)$$

$$ey = b\lambda^{n+m} - \frac{1}{b}\lambda^{n-m} \quad (7)$$

$$e = 2i\lambda_n. \quad (8)$$

Die Gleichung (8) liefert uns direct den Werth von e , mit dessen Benützung wir aus Gleichung (6) λ in x berechnen können

$$\lambda = \sqrt[n]{\frac{ix \pm \sqrt{1-x^2}}{a}}$$

Nach Substitution dieses Werthes für λ in (7), erhalten wir aus dieser

$$y = \frac{1}{2i} \left(b \left\{ \frac{ix \pm \sqrt{1-x^2}}{a} \right\}^{\frac{m}{n}} - b \left\{ \frac{ix \pm \sqrt{1-x^2}}{a} \right\}^{\frac{m}{n}} \right) \quad (9)$$

Natürlich repräsentirt hier $\sqrt[n]{}$ die n verschiedenen Werthe welche möglich sind, so dass im Ganzen $2n$ verschiedene Werthe für y resultiren.

Aus (9) ergibt sich aber unmittelbar, dass

$$x = +1, -1, \infty$$

Verzweigungspunkte sind. Für $x = \infty$ haben wir die Art der Verzweigung bereits festgestellt; und für $x = \pm 1$ lässt sich die Verzweigung auch leicht angeben; in jedem dieser Punkte hängen die Blätter paarweise zusammen, man kommt also immer nach 2 Umläufen ins Anfangsblatt zurück.

Da im unendlich fernen Punkt conjugirt imaginäre Werthe von y Blättern entsprechen, die verschiedenen Parthieen angehören, während für $x = \pm 1$ die conjugirt imaginären Werthe von y gerade den 2-zusammengehörigen Blättern einer Verzweigung angehören, so sieht man, dass gerade die Blätter, die im Endlichen zusammenhängen, im Unendlichen getrennt sind.

Darnach ist es aber unschwer einzusehen, dass eine in sich zurücklaufende Curve, welche man irgendwie auf der Fläche verzeichnet, eine vollständige Begrenzung des von ihr eingeschlossenen Flächenstücks bildet, denn man kann in keiner Weise von einem innerhalb derselben gelegenen Punkt zu einem aussen gelegenen gelangen. Damit haben wir das Criterium dafür, dass der Zusammenhang = 1 ist.

Dass sich die Sache so verhält, kann man am besten an einem Beispiel sehen. Nehmen wir daher den Fall

$n = 3$, $m = 1$, wie ihn die beigelegte Zeichnung veranschaulicht. Hiezu Fig. 4.

Die Annahme der Verzweigungsschnitte muss hier so gemacht werden, dass man die 2 im Endlichen gelegenen Punkte durch einen Verzweigungsschnitt verbindet, längs dessen Blatt 1 und 4, Blatt 2 und 5, Blatt 3 und 6 zusammenhängen, und vom unendlich fernen Punkt einen besondern Schnitt ausgehen lässt, der zuerst in den 3 oberen Blättern 1, 2, 3 verläuft, dann zwischen den endlichen Verzweigungspunkten hindurch geht, und dadurch in die 3 unteren Blätter 4, 5, 6 gelangt, und dann schliesslich in diesen zum unendlich fernen Punkt zurückgeht.

Dann ist klar, dass man bei Umkreisung des Punktes $x = \infty$ allein 3 Umläufe machen muss, bis man zum Ausgangspunkt zurückkommt, bei Umkreisung eines der Punkte $x = \pm 1$ allein 2 Umläufe, bei Umkreisung der beiden Punkte 3 Umläufe, und bei Umkreisung des unendlich fernen und eines der beiden endlichen Punkte 2 Umläufe. Eine Umkreisung aller 3 Verzweigungspunkte geschieht in einem Umlauf.

Um beispielsweise zu zeigen, dass eine in sich zurücklaufende Curve die vollständige Begrenzung des von ihr eingeschlossenen Flächenstücks ist, ziehen wir die geschlossene Curve K um die 2 endlichen Verzweigungspunkte; diese muss entweder in den Blättern 1, 2, 3 oder 4, 5, 6 liegen, und nach 3 Umläufen sich schliessen. Versuchten wir nun, wenn die Curve in 1, 2, 3 liegt, vom Punkt g des 1. Blattes auf die andere Seite der Curve nach dem Punkt h zu gelangen, so ist dies, wie man sich leicht überzeugen kann, keinesfalls möglich, ohne die Curve zu überschreiten. Und so verhält es sich in den andern Fällen und im allgemeinsten Falle auch. Der Zusammenhang ist also = 1.

Dieses Resultat konnten wir auch kurz berechnen mittelst einer von Riemann entwickelten Formel

$$w - 2m + 3 = 2p + 1 = q,$$

wo w die Anzahl der Windungspunkte erster Ordnung,

m die Anzahl der Blätter und q der Zusammenhang ist. In unserm Fall ist $w = 4n - 2$ (da $2(n - 1)$ -fache Windungspunkte und $2n$ 1-fache vorhanden sind), $m = 2n$ und also $q = 1$.

§. 9.

Aus den Gleichungen (5) des §. 8, die die Form haben

$$y^n = (p \pm qi)z^{n-m}$$

gewinnen wir die Doppelpunkte, welchen der unendlich ferne Punkt äquivalent ist, auf folgende Weise.

Da der Durchschnitt dieser beiden Aeste den unendlich fernen Punkt ergibt, so ist die Anzahl der ihm äquivalenten Doppelpunkte = der Summe der Doppelpunkte der beiden einzelnen Aeste + ihren Durchschnittspunkten.

Nun ergeben sich die Doppelpunkte der Curve

$$\varphi = y^n - az^{n-m}x^m = 0$$

aus den Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dy} = ny^{n-1} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = -(n-m)az^{n-m-1}x^m = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -maz^{n-m}x^{m-1} = 0$$

Für diese Gleichungen repräsentirt der Punkt $y = 0, z = 0$

$$(n - m - 1)(n - 1)$$

Lösungen, so ist

$$\frac{(n - m - 1)(n - 1)}{2}$$

die Anzahl der Doppelpunkte der Curve $\varphi = 0$ im Punkte $y = 0, z = 0$. Die Summe der Doppelpunkte zweier solcher Curvenäste ist also

$$(n - m - 1)(n - 1).$$

Ihre Durchschnittspunkte ergeben sich als Lösungen der Gleichungen

$$y^n - az^{n-m} = 0$$

$$y^n - a'z^{n-m} = 0.$$

Für diese repräsentirt aber der Punkt $y = 0, z = 0$

$n(n - m)$ Lösungen.

Die Anzahl der Doppelpunkte, welche dem unendlich fernen Punkt äquivalent sind, ist also $n(n - m) + (n - m - 1)(n - 1) = 2n^2 - 2nm - 2n + m + 1$

Addirt man hierzu $2nm - (n + m)$, die Anzahl der Doppelpunkte im Endlichen, so gelangt man zur Gesamtzahl der Doppelpunkte $(n - 1)(2n - 1)$, wie es sein muss, zurück.

Unter diesen Doppelpunkten befindet sich eine gewisse Anzahl Spitzen, die wir uns aus einer der Plücker'schen Formeln verschaffen können; und zwar gehört die Gesamtzahl, die man mit Hülfe dieser Formel findet, dem unendlich fernen Punkt zu; denn im Endlichen gibt es dem Ansatz in §. 4. zufolge keine andern Doppelpunkte als die $2nm - (n + m)$ reellen, welche keine Spitzen sind; mit der unendlich fernen Geraden hat die Curve aber ohnedies nur den bekannten Punkt auf der X -Axe gemein.

Wir benützen die Formel

$$k = n'(n' - 1) - 2d - r,$$

worin k die Classe, also $= 2(n + m)$

n' die Ordnung, also $= 2n$

d die Gesamtzahl der Doppelpunkte, einschliesslich der Rückkehrpunkte, also $= (n - 1)(2n - 1)$,

r die gesuchte Anzahl der Spitzen,

und finden

$$r = \underline{2(n - m - 1)}.$$

Wenden wir nun auch die auf die Wendepunkte bezügliche Gleichung an

$$w = 3n'(n' - 2) - 6d - 2r,$$

wobei w die Anzahl der Wendepunkte bezeichnet, während die übrigen Symbole die obige Bedeutung haben, so erhalten wir nach Substitution der bezüglichen Grössen

$$w = \underline{2(n + m) + 2(m - 1)}.$$

Die Wendepunktsgleichung (4) des §. 7 ergibt $2(n+m)$ Wendepunkte; dass unter diesen die unendlich fernen aber nicht begriffen sind, ersieht man daraus, dass $\lambda = 0$, welcher Werth dem Schnitt der Curve mit der unendlich fernen Geraden entspricht, diese Gleichung nicht befriedigt. Es erklärt sich dies ganz natürlich daraus, dass wir bei Ableitung der Wendepunktbedingung, nur den Zähler des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ berücksichtigten. Da indess die Gleichsetzung des Nenners mit ∞ keine endlichen Lösungen zulässt, so ist $2(n + m)$ wirklich die Gesamtzahl der im Endlichen gelegenen Wendepunkte, und also $2(m - 1)$ die Zahl der im Unendlichen und zwar im $2(n - m)$ fachen Punkt gelegenen, das letztere deshalb, weil die Curve keinen andern Durchschnitt mit der unendlich fernen Geraden hat.

Zu der Zahl $2(m - 1)$ gelangen wir aber direct dadurch, dass wir fragen: wie viel Schnittpunkte hat die Hesse'sche Curve der Curve

$$\varphi = y^n - az^{n-m} x^m = 0$$

mit der Curve selbst?

Die Hesse'sche Curve heisst hier:

$$\begin{vmatrix} z^{n-m}x^{m-2} & 0 & z^{n-m-1}x^{m-1} \\ 0 & y^{n-2} & 0 \\ z^{n-m-1}x^{m-1} & 0 & z^{n-m-2}x^m \end{vmatrix} = 0$$

(mit Weglassung der betreffenden Coëfficienten, welche als Factoren vor die ganze Determinante treten.)

oder $z^{2(n-m-1)} y^{n-2} x^{2(m-1)} = 0.$

Der Schnitt mit

$$y^n - az^{n-m} x^m = 0$$

im Punkte $y = 0, z = 0$ absorbirt

$(n - 2)(n - m) + 2n(n - m - 1)$ Lösungen.

Diese Anzahl besteht nun aus der Summe der Schnittpunkte, welche den Doppelpunkten und Spitzen in $y = 0, z = 0$ entsprechen + den Wendepunkten. Um die letzteren zu finden, haben wir also von der gefundenen Anzahl von Lösungen für den Schnitt der Hesse'schen Curve mit

der ursprünglichen die Zahl der Doppelpunkte (einschliesslich der Spitzen) nämlich $\frac{(n-1)(n-m-1)}{2}$ 6 mal genommen, und die der darunter befindlichen Spitzen, nämlich $(n-m-1)$ 2 mal genommen zu subtrahiren, und finden demgemäss $m-1$ als Anzahl der Wendepunkte, welche dem einen Curvenast entspricht, der durch den unendlich fernen Punkt durchgeht. Ebensoviele hat aber der andere, also hat unsere Lissajous-Curve im unendlich fernen Punkt auf der X-Axe

$2(m-1)$ Wendepunkte.

Reell sind von den $(2n+m)$ im Endlichen gelegenen Wendepunkten $2(n-m)$, was wir der Vollständigkeit halber hier constatiren wollen, und wovon man sich durch Betrachtung der Figuren (etwa im Melde'schen Atlas) leicht in folgender Weise überzeugen kann: wenn die Curve in eine ausgeartete übergeht, so gehen dabei von den reellen Wendepunkten zwei verloren (wogegen zwei Rückkehrpunkte — nämlich bei der mechanischen Erzeugung der Curve — auftreten cf. Schluss des §. 2), und die übrigen (reellen) Wendepunkte reduzieren sich auf die Hälfte; es lässt sich dann leicht constatiren, dass bei den ausgearteten Curven für jede Einheit um die m wächst, ein Wendepunkt verloren geht; für $m=1$ sind es $n-2$ Wendepunkte, also für $m=m$ $n-m-t$. Nehmen wir also diese letztere Zahl doppelt und addiren 2, so erhalten wir

$2(n-m)$ als Anzahl der reellen Wendetangenten der Curve $2n$. Ordnung.

Bezüglich des unendlich entfernten Punktes auf der X-Axe lässt sich eine sehr merkwürdige Thatsache constatiren, nämlich die, dass man sich von den theilweise imaginären Verhältnissen, wie sie in diesem Punkte eintreten, und von denen wir uns durch Rechnung überzeugt haben, durch Zeichnung und Betrachtung reeller Figuren Rechenschaft geben kann, und zwar ist es ganz besonders merkwürdig, dass man sich, wenn die Zahlen für die Sin-

gularitäten passen sollen, als Typus der der Curve $y^n = ax^m$ vor ihrer Degeneration zu Grunde liegenden Curve gerade der ausgearteten Lissajous-Curve für das Schwingungszahlenverhältniss $n : m$ bedienen muss.

Dass man diesen Curvenästen vor ihrer Degeneration gerade die ausgearteten Lissajous-Curven entsprechen lassen muss, hat seinen Grund darin, dass die Gleichung der letzteren von der Form ist

$$\varphi(y) = \psi(x)$$

oder

$$(y - \alpha_1) (y - \alpha_2) \dots (y - \alpha_n) = a (x - \beta_1) (x - \beta_2) \dots (x - \beta_m).$$

Setzt man nun hier

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \text{ und} \\ \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0,$$

so resultirt eben die Form

$$y^n = ax^m,$$

wie sie unserem Curvenast entspricht.

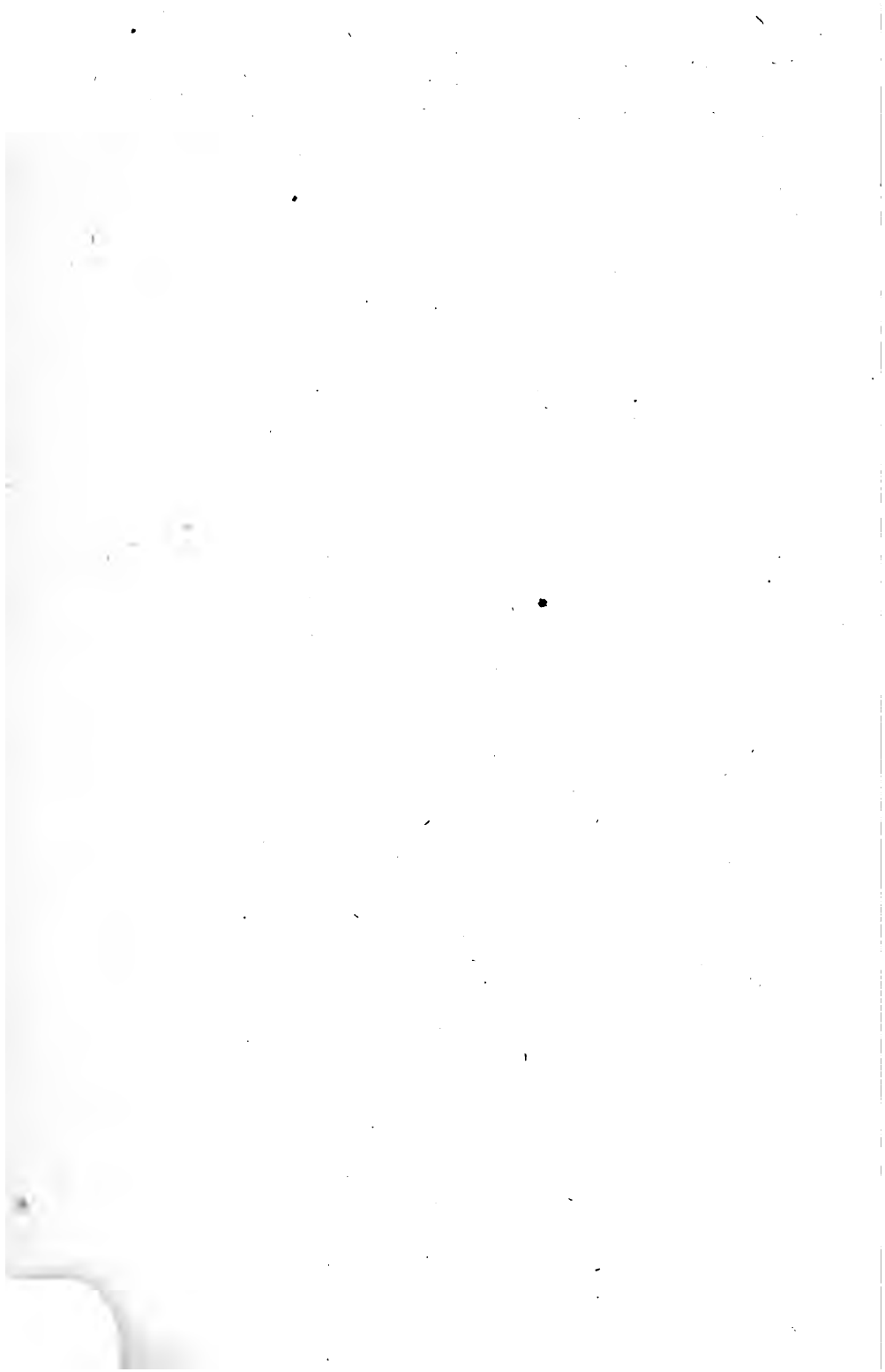
Wir entwerfen dem gemäss nachstehende mit I bezeichnete Tabelle, und gelangen mit ihr durch einfache Abzählung zu denselben Zahlen, wie wir sie oben durch Rechnung festgestellt haben, wenn wir m mit $n - m$ vertauschen. Die Anzahl der Spitzen ergibt sich dabei durch Abzählung der vorkommenden Schleifen.

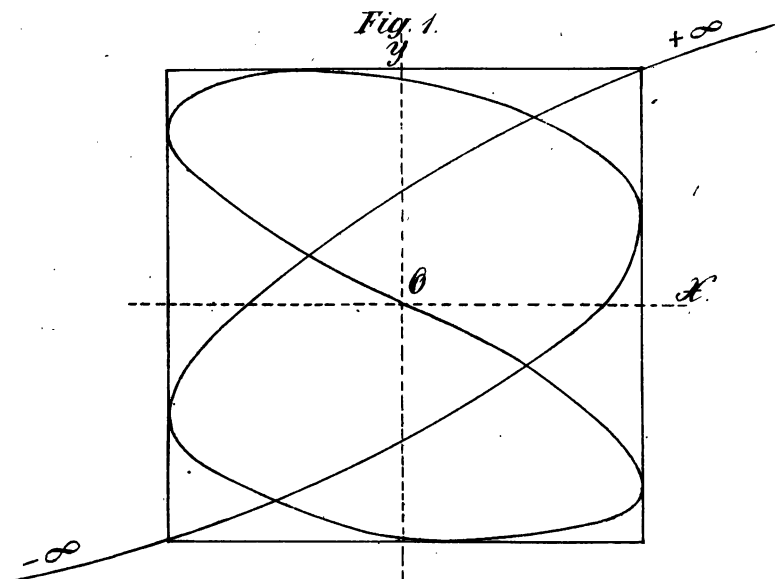
§. 10.

Wir können nun zum Schluss unsere Hauptergebnisse bezüglich der Lissajous-Curven, resp. ihrer Singularitäten in einer Tabelle niederlegen, wobei wir in der 3. Columne die entsprechenden Singularitäten der ausgearteten Curven ohne specielle Ableitung angeben.

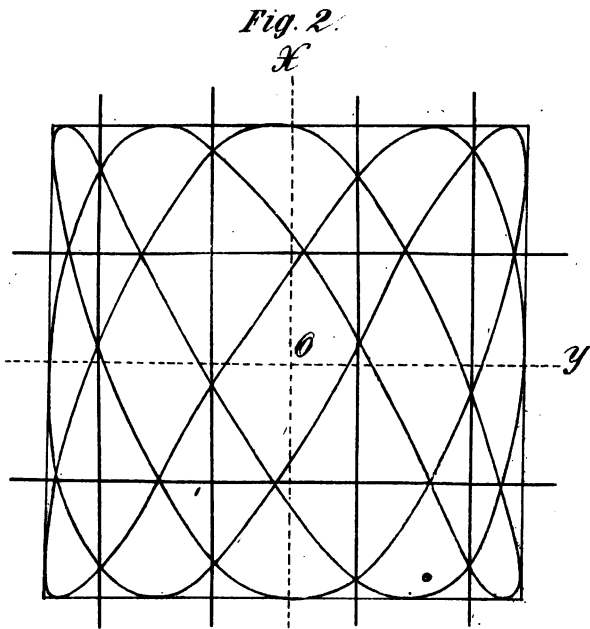
	Für die allgemeinen Curven.	Für die ausgearteten Curven.
Ordnung	$2n$	n
Doppelpunkte	$\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$	$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$
Hiervon Spitzen	$2(n-m-1)$	$(n-m-1)$
Doppelpunkte im Endlichen	$2nm - (n+m)$	$\frac{(m-1)(n-1)}{2}$
Doppeltangenten	$\frac{(2n+2m-1)(2n+2m-2)}{2}$	$\frac{(n+m-2)(n+m-3)}{2}$
Hiervon Wendetangenten	$2(n+m) + 2(m-1)$	$(n+m-3) + (m-1)$
Wendetangenten im Unendlichen	$2(m-1)$	$(m-1)$
" " Endlichen	$2(n+m)$	$(n+m-3)$
Hiervon reelle Klasse	$2(n-m)$	$(n-m-1)$
Geschlecht	$2(n+m)$	$(n+m-1)$
	0	0

Gleichung.	Curvenast.	Durch Degeneration entstanden aus:	Wendepunkte.	Doppel- punkte.	Darunter Spitzen.
$y^2 = ax$		—	—	—	—
$y^3 = ax$		\mathcal{N}	1.	—	—
$y^3 = ax^2$		α	—	1.	1.
$y^4 = ax$		\mathcal{W}	2.	—	—
$y^4 = ax^3$			—	3.	2.
$y^5 = ax$		\mathcal{M}	3.	—	—
$y^5 = ax^2$		α	2.	2.	1.
$y^5 = ax^3$			1.	4.	2.
$y^5 = ax^4$			—	6.	3.
$y^6 = ax$		\mathcal{W}	4.	—	—
$y^6 = ax^5$			—	10.	4.
$y^7 = ax$		\mathcal{M}	5.	—	—
$y^7 = ax^2$		α	4.	3.	1.
$y^7 = ax^3$			3.	6.	2.
$y^7 = ax^4$			2.	9.	3.
$y^7 = ax^5$			1.	12.	4.
$y^7 = ax^6$			—	15.	5.
$y^n = ax^m$	—	—	$n-m-1$	$\frac{(m-1)(n-1)}{2}$	$m-1$





Lissajous-Curve für $n=5, m=3, \beta = \alpha, \delta = \alpha$.



Lissajous-Curve für $n=5, m=3, \beta = \alpha, \delta = \frac{\pi}{12}$
 nebst Andeutung der vom Phasenunterschied unabhän-
 gigen Doppelpunktsgruppierung.

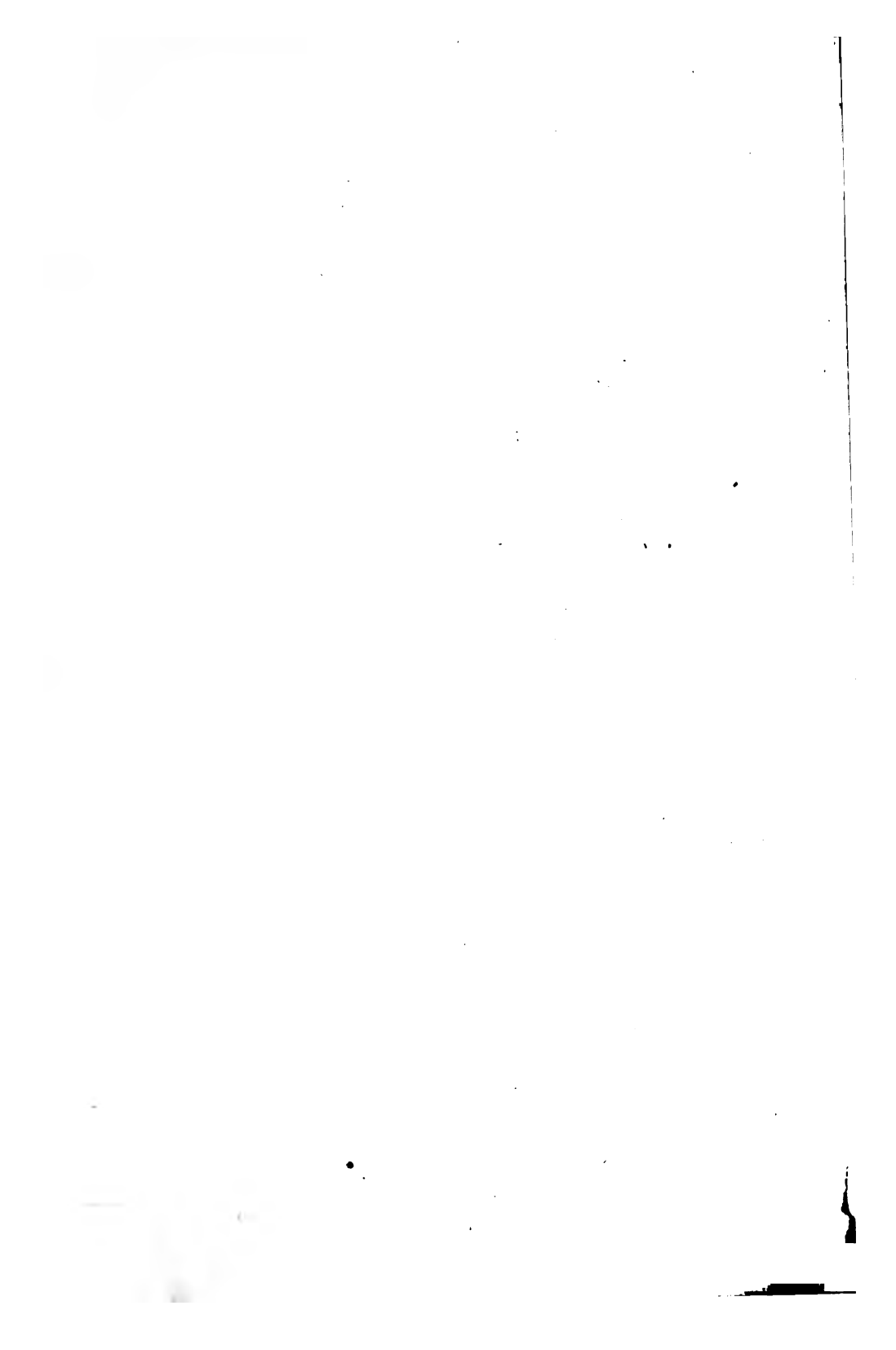
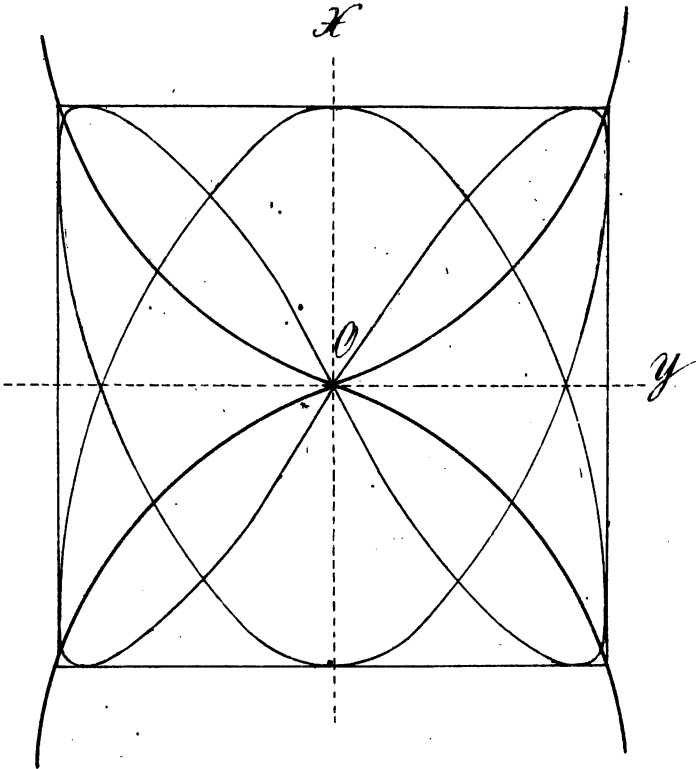


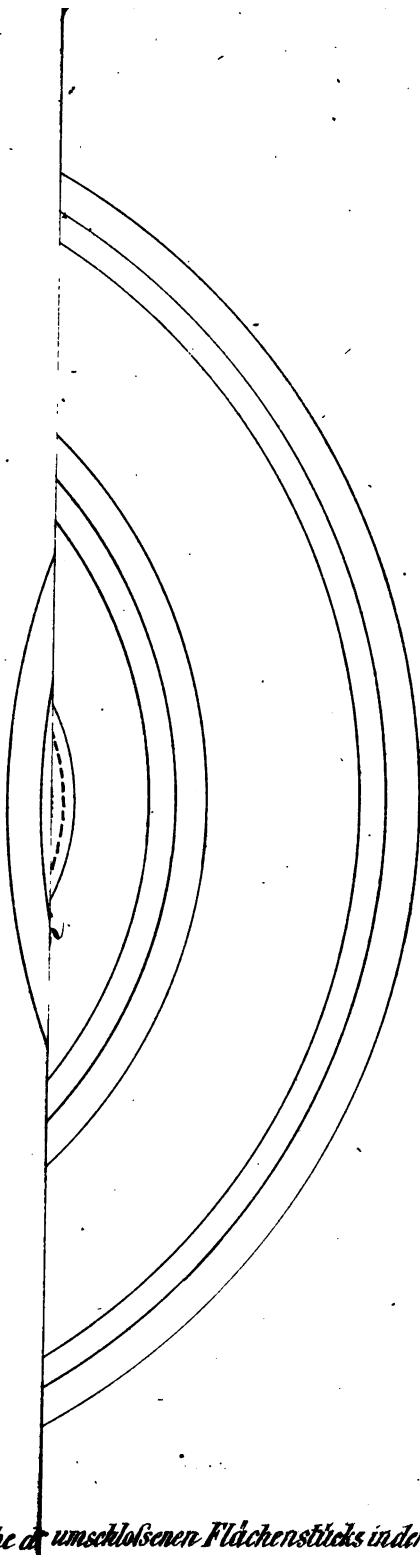
Fig. 3.

\mathcal{K}



Lissajous-Curve für $n=3$, $m=2$.
 $\beta=\sigma$, $\delta=0$
 nebst Wendepunktscurve.





Die Riernarmische Fläche *et* umschlossenen Flächenstücks in den Blättern 1, 2, 3.





Math 8588.75
Die singularitäten der Lissajous's
Cabot Science 003373827



3 2044 091 928 770