

UNIVERSITY OF TORONTO



3 1761 01218172 3



Presented to
The Library
of the
University of Toronto
by
the Estate of the late
Professor J.C. Fields

HANDBOUND
AT THE



UNIVERSITY OF



9929 / 1

~~1897~~
~~Ad~~

35

Differential- und Integralrechnung
Felix
Vorlesungen von Prof. Dr. Klein

| | | |
|----------------|----------------|------------------|
| Diff. Rechnung | Sommersemester | 1895 |
| Int. " | Winter | " 1896/97 |

iff. Rech. Excerpt der Ausarbeitung des Herrn Dr. Sommerfeld (von A.)
A. Rech. Ausarbeitung von A. Hauser



QA
303
K54

Inhaltsverzeichnis der Differentialrechnung

I. Grundlegung

1. Einführung der einfachsten Funktionen einer Veränderlichen.

1. Algebraische Funktionen

2. Logarithmische und Exponentialfunktion

3. Trigonometrische Funktionen.

2. Definition und Berechnung des Differential-Quotienten.

4. Entstehung des Begriffes

5. Einfachste Beispiele

6. Eine nicht differentierbare Funktion

7. Die höheren Differential-Quotienten.

3. Der Taylor'sche Lehrsatz.

8. Schmiegungsparabeln.

9. Das Restglied der Taylor'schen Reihe

10. Die Funktion e^{-x^2}

11. Zusammenfassung der Resultate

12. Andere Schreibweise für die Taylor'sche Reihe (MacLaurin)

- II. Anwendungen der Taylor'schen Reihe
1. Numerische Berechnung von Functionen
 13. Sinus, Logarithmus.
 14. Der allgemeine binomische Satz
 15. $\arctg x$ und π
 2. Angewandte Mathematik.
 16. Verhältnis von Function und Functionstheorie.
 17. Interpolation.
 18. Das Verfahren der partes proportional
 3. Contacte höherer Ordnung.
 19. Noch einmal Schmiegcuren incl. der Maxima-Minima.
 20. Kettenbrüche.
 4. Der Krümmungsradius
 21. Allgemeine Erörterungen, Ellipse
 22. Verschiedene Bestimmungsweisen
- III. Erweiterungen der bisherigen Entwicklungen.
1. Singuläre Stellen der Functionen.
 23. Beispiele und Figuren.
 24. Die unbestimmten Formen der Analysis: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc.

2. neue geometrische Anwendungen.
25. Parameterdarstellung ebener Curven.
26. Excurs über die Cycloiden.
27. Evolvententheorie.
28. Polarkoordinaten, logarithmische Spirale.
29. Implizite Curvendarstellung.
30. Theorie der singulären Punkte.

IV Funktionen zweier Variablen.

1. Grundlegung.
 31. Einfachste Beispiele.
 32. Partielle Differential-Quotienten, nebst dem Satze: $s = s'$.
 33. Der Taylor'sche Satz bei zwei Variablen.
2. Flächenkrümmung.
 34. Dreierlei Krümmung. Beziehung zur Theorie der Maxima und Minima.
 35. Die Bedeutung des Schmiegungsparaboloides 2ter Ordnung.
 36. Die Krümmungsradien der Normal-schnitte.
3. 37. Excurs über Raumcurven (Tang. Ueberschnur)
4. 38. Excurs über complexe Größen.

The following is a list of the names of the
persons who have been appointed to the
positions of the various departments of the
Government of the State of New York.
The names are given in alphabetical order.
The names of the persons who have been
appointed to the positions of the various
departments of the Government of the
State of New York are given in
alphabetical order.

Abschnitt I

Grundlegung

Kapitel I

Einführung der einfachsten Funktionen einer Veränderlichen.

§1

Algebraische Funktionen

unterschiede Constanten: a, b, \dots Variablen x, y, \dots

In $y = f(x)$

(gelesen: y gleich einer Funct. von x)

heißt y die abhängige, x die

Funktionen können dargestellt werden (definiert werden)

1. durch Curven auf Coordinaten —
(Nicht genau bestimmt wegen Ungenauigkeit jeder Zeichnung)

2. durch Tabelle. (Ungenau wegen Decimals)

3. .. eine Rechenvorschrift.

Auf Grund dieser ergibt sich folgende Einteilung:

1. Funktionen, erzeugt nur durch 4 Spezies

a) ganze rationale Funktionen

(Addition, Subtr., Multip.)

Allgemeiner Ausdruck:

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + kx^n$$

Anmerkung: Diese Curven heissen Parabeln

b) gebrochene rationale Funktionen
(ausserdem Division)

Allgemeiner Ausdruck

$$y = \frac{a + bx + \dots + kx^n}{a' + b'x + \dots + k'x^m} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

Anmerkung: Letzte Funktionen werden
 ∞ für $\psi(x) = 0$.

z.B. die Hyperbel $y = \frac{1}{x}$

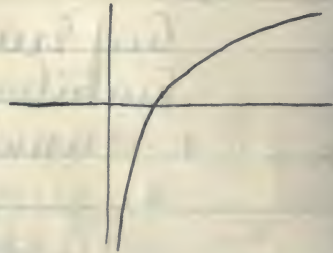


2. Funktionen in denen Wurzelzeichen
vorkommen.

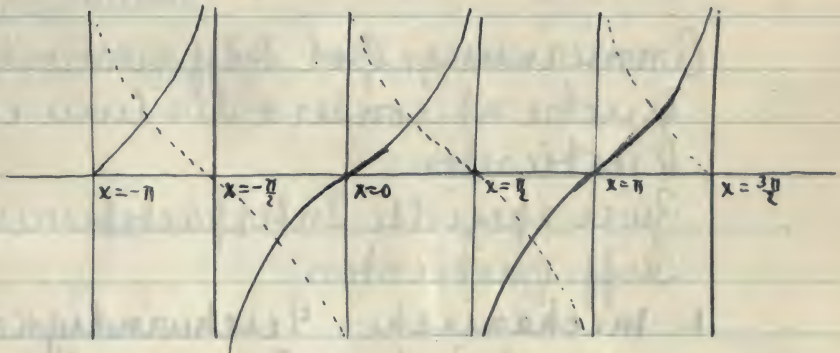
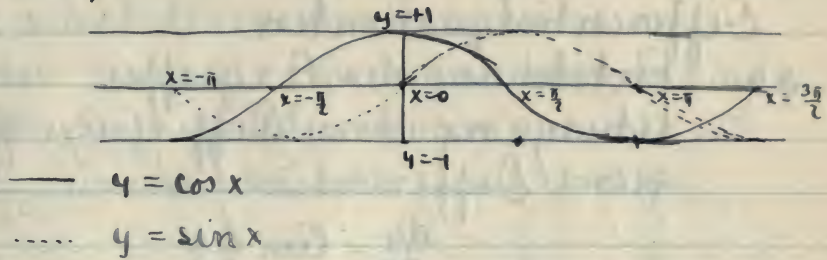
Beispiel $y = \sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$

§2 Die logarithmische und Exponential-
Funktion.

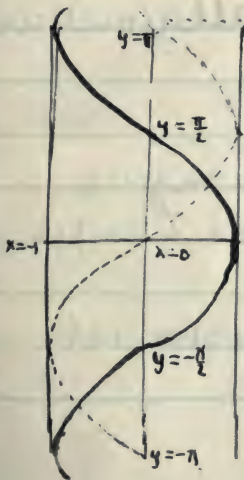
z.B. cf Lampe, Einleitung.



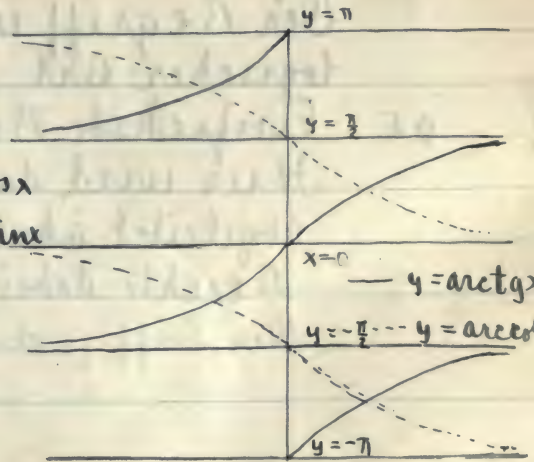
§ 3. Die trigonometrischen Funktionen. Definition derselben (etwas Lampe)



— $y = \operatorname{tg} x$
 $y = \operatorname{cotg} x$



— $y = \arccos x$
 $y = \arcsin x$



Kapitel II

Definition und Berechnung des Differentialquotienten.

§ 4. Entstehung des Begriffs.

Übergang vom Differenzenquotient zum Differentialquot.

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Anmerkung: Der Diff.quotient ist kein Quotient sondern der Limes eines Quotienten.

Zwei spezielle Interpretationen des Diff.quotienten

1. mechanische: Geschwindigkeit.
2. geometrische: Curvenrichtung.

Der Begriff ist jedoch allgemeiner, logischer Art.

§ 5. Einfachste Beispiele.

Hier wird das Handwerkszeug abgeleitet ähnlich wie bei Lampe.

Beachte dabei folgendes:

Der Diff.quotient von arcsin ist

$$\frac{+1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

je nachdem wir uns im 1 und 4
oder 2 und 3 Quadranten befinden.

Der Diff. quotient von $\arccos. x$ ist

$$\frac{+1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{wenn wir uns im 3 und 4}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{wenn } \dots \dots \dots 1 \dots 2$$

Quadranten befinden.

§6. Eine nicht differentierbare Funktion.
Frage. Strbt der Differenzquotient
allemaal einer festen Grenze zu bei
abnehmendem Δx ?

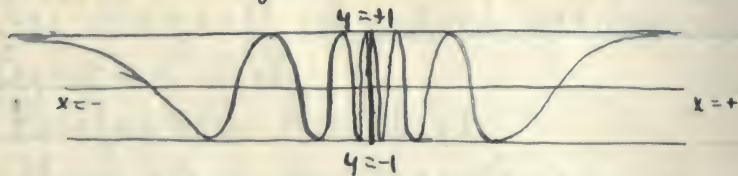
(Oder: Hat jede Curve eine Tangente?
" " " Bewegung eine
Geschwindigkeit?)

Antwort: nein!

Beispiel 1:

$$y = \sin \frac{1}{x}$$

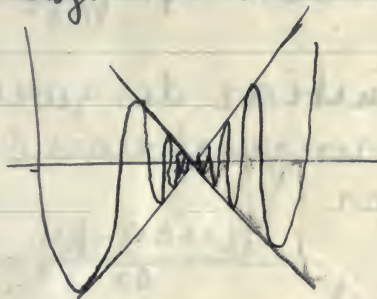
Die Stellen erdichten sich auf die
Stelle $x=0$ hin. Im Punkte $x=0$ ist
die Function selbst unbestimmt.
Wir können ihr die ganze Strecke
(-1 bis +1) hinzurechnen.



Beispiel 2: $y = x \sin \frac{1}{x}$

Indem wir jede Ordinate der vorigen
Curve mit der Ordinate der Curve $y=x$
multiplicieren, entsteht eine neue

Wellenlinie, welche für $x=0$ einen ganz bestimmten Wert hat ($y=0$). Dennoch hat sie in $x=0$ keinen bestimmten Diff. quotienten. Zeichnen wir nämlich die Sekante OP , welche den Differenzenquotient repräsentiert und lassen P successive nach O rücken, so kommen wir zu keiner Grenzlage der Sekante, vielmehr oscilliert dieselbe beständig in dem Flächenraum $\pm 45^\circ$ gegen die x -axe herum, und zwar oscilliert sie um so schneller, je näher P dem O kommt. Also: Die $y = x \sin \frac{1}{x}$, welche ganz bestimmte endliche Werte hat und überall stetig verläuft, besitzt in $x=0$ keinen Diff. quotient.



§ 7. Die höheren Diff. quotienten.
Aus $f(x)$ bildet man

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = y' \text{ etc.}$$

Tabelle:

1. $y = x^n \quad y' = nx^{n-1} \quad y'' = n(n-1)x^{n-2} \quad \dots \quad y^{(n)} = n!$

alle folgenden sind = 0

2. $y = e^x \quad y' = e^x \quad y'' = e^x \quad \dots$

3. $y = \log x \quad y' = \frac{1}{x} \quad y'' = -\frac{1}{x^2} \quad \dots$

4. $y = x^n$ wo n keine +ve ganze Zahl bedeuten soll. Die Diff. quotienten haben genau dieselbe Form, wie sub 1, nur dass ihre Reihe jetzt nicht abbricht.

5. $y = u \cdot v \quad y' = u'v + v'u \quad y'' = u''v + 2u'v' + v''u \dots$

6. $y = \sin x \quad y' = \cos x \quad y'' = -\sin x \dots$

7. $y = \arcsin x \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad y'' = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \dots$

Definition des zweiten Diff. quotienten
als Grenzwert eines Differenzquotienten

Es war

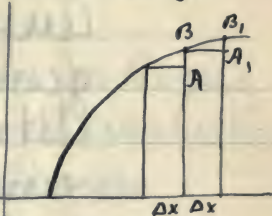
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ähnlich

$$\frac{\frac{f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}$$

Der Ausdruck, der auf der rechten Seite im Zähler steht nennt man die „zweite Differenz“. Man bezeichnet sie mit $\Delta^2 y$.

In der Figur ist diese Größe gleich der Differenz der Strecken A, B , und A, B :



Also

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = f''(x) = y''$$

Entsprechend wird

$$y^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Kapitel III

Der Taylor'sche Lehrsatz

§ 8. Schmiegungsparabeln

Aufgabe um die es sich handeln wird geometrisch:

Ist es möglich eine Curve $y = f(x)$ durch eine einfachere zu ersetzen und durch welche?

Lösung: Die einfachsten Curven sind die Parabeln

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + kx^n$$

- 1) Annäherung durch eine Parabel 1ter Ordnung:

$$y = a + bx$$

a und b werden so bestimmt, dass $y = y_0, y' = y'_0$.
Dabei wählen wir lieber die Form:

$$y = a + \beta(x - x_0)$$

Es ergibt $\alpha = y_0, \beta = y'_0$. Eingesetzt:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0)$$

- 2) Annäherung durch eine Parabel 2ter Ordnung

$$y = a + bx + cx^2$$

Dafür

$$y = a + \beta(x - x_0) + \gamma(x - x_0)^2$$

Bedingungen: $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y'' = y_0''$

Daraus folgt für $x = x_0$: $\alpha = y_0$, $\beta = y_0'$, $\gamma = y_0''$

Also

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2}(x - x_0)^2$$

Anmerkung: Wir definieren: In Bezug auf Convexität und Conkavität verhalten sich die beliebigen Curven in einem Punkte x_0, y_0 wie die Schmiegungsparabel. Vergleichen wir die Lage der Schmiegungsparabel mit der der Tangente. Die Gleichungen beider unterscheiden sich nur durch das Glied $\frac{y_0''}{2}(x - x_0)^2$.

Ist y_0'' positiv, so werden die Ordinaten der Parabel beständig grösser sein, wie die der Tangente; die Parabel liegt oberhalb der Tangente und ist nach oben geöffnet, d.h. konkav. Ist y_0'' negativ, so ist die Parabel nach unten hin konkav.

3. Die allgemeine Schmiegungsparabel.
Schreibe

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1}(x - x_0) + \dots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

Verification: Für $x = x_0$ wird $y = y_0$, $y' = y_0'$, \dots , $y^{(n)} = y_0^{(n)}$.

Beispiele:

I. $y = e^x$

Die Exponentialcurve soll im Punkt $x_0=0$ durch Parabeln approximiert werden.
Man findet:

$$y_0 = y'_0 = y''_0 = \dots = 1$$

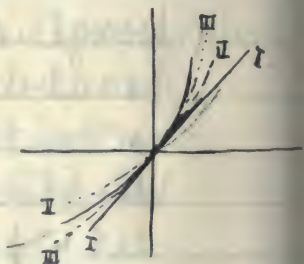
Also lauten die Parabeln 1, 2, 3 Ordnung

I $y = 1 + x$

II $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

III $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

Vergleiche mit der Reihe e^x .



II $y = \sin x$ soll in $x=0$ approximiert werden.
Nach früherer Tabelle ist $y_0=0$ $y'_0=1$ $y''_0=0$.
Demnach sind die Parabeln

I $y = x$

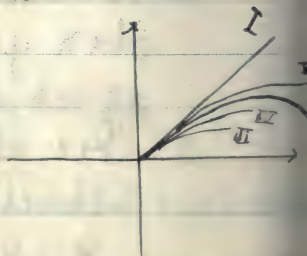
II $y = x$

III $y = x - \frac{x^3}{3!}$

IV $y = x - \frac{x^3}{3!}$

V $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

u. s. w.



(Bemerkung: wo $y''_0=0$ hat die Curve in dem Punkte einen Wendepunkt)

III $y = \log(1+x)$

Es ist

$$y_0 = 0, y_0' = 1, y_0'' = -1, y_0''' = 1 \cdot 2, y_0^{(4)} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \dots$$

Daher wird

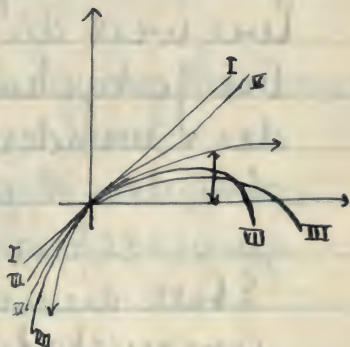
I $y = x$

II $y = x - \frac{x^2}{2}$

III $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

IV $y =$

Bemerkte die plötzliche
starke Abweichung
bei ungefähr $x=1$.



§9 Das Restglied der Taylor'schen Reihe.
Es ist

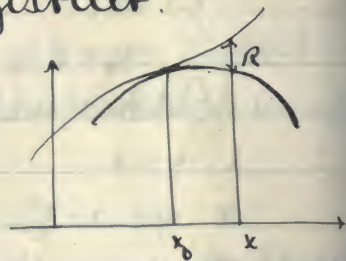
$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x, x_0)$$

Frage: Können wir durch Vergrößern von n das R beliebig klein werden lassen? Denn nur dann können wir die Curve durch eine Parabel n ter Ordnung ersetzen. In der Figur ist R als Differenz zwischen der Ordinate

der Grundcurve und der n ten Schmiegun-
gsparebel im Punkte x dargestellt.

In $x=x_0$ ist R natürlich
gleich 0. Wir fragen also:

Wie weit dürfen wir
bei festgehaltenem x_0
das x wandern lassen,
ohne dass R aufhört mit wachsendem n
zu verschwinden?



Statt diesem schlagen wir jedoch den
umgekehrten Weg ein. Wir halten x fest,
und lassen den Berührungspunkt wandern.
Daher setzen wir statt des festen x_0 das
variable ξ .

Wir fragen jetzt: Wie weit darf ξ wandern
und besonders: dürfen wir es bis $\xi=x_0$
gehen lassen?

Um bestimmte Verhältnisse zu haben:

$$x \geq \xi \geq x_0.$$

Da wir jetzt die Annäherungsparebeln
im Punkte ξ konstruieren, werden wir
nicht y_0, y'_0, y''_0 im Punkte x_0 sondern y_ξ, y'_ξ, y''_ξ
im Punkte ξ brauchen.

Dann ist

$$R(x, \xi) = y - y'_\xi - y''_\xi \frac{x-\xi}{1} - y'''_\xi \frac{(x-\xi)^2}{2!} - \dots - y^{(n)}_\xi \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Bei festem x ist nun $R = f(\xi)$, sagen wir eine Curve $\eta = R(x, \xi)$.

Berechnen wir die Steigung der Tangente gegen die x -Achse, so ist:

$$\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{dR}{d\xi} = -y'_\xi - y''_\xi \frac{x-\xi}{1} - y'''_\xi \frac{(x-\xi)^2}{1 \cdot 2} - \dots - y^{(n+1)}_\xi \frac{(x-\xi)^n}{n!} + y'_\xi + y''_\xi \frac{x-\xi}{1} + \dots + y^{(n)}_\xi \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}$$

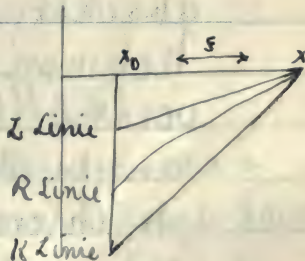
$$1. \quad \frac{dR}{d\xi} = - y^{(n+1)}_\xi \frac{(x-\xi)^n}{n!}$$

Auf Grund dieser Formel können wir nun $R(x, \xi)$ abschätzen.

Es sei K und L der Maximal und Minimalwert von $\frac{dR}{d\xi}$ im Intervalle

$$x_0 < \xi < x$$

Dann zeichnen wir zwei Linien K und L die bez. den Diff. quotient K und L haben, sodass die η Linie zwischen K und L liegen muss.



In $\xi = x_0$ hat nun die K (resp. \mathcal{L}) Linie die Ordinate $(x_0 - x)K$ (resp. $(x_0 - x)\mathcal{L}$). Daher die Ungleichung:

$$2. \quad K(x_0 - x) \leq R \leq \mathcal{L}(x_0 - x)$$

Die Bedeutung dieses Resultats, wollen wir uns an den früheren Beispielen klarmachen.

$$(1.) \quad y = e^x \quad x_0 = 0$$

$$\frac{dR}{d\xi} = - \frac{e^\xi (x - \xi)^n}{n!}$$

Dann sei

$$K = - \min. \frac{e^\xi (x - \xi)^n}{n!} = -\mathcal{L}'$$

$$\mathcal{L} = - \max. \frac{e^\xi (x - \xi)^n}{n!} = -K'$$

wo wir K und \mathcal{L} (oder K' und \mathcal{L}') nur abschätzen wollen.

Nehmen wir nun von den beiden veränderlichen Faktoren e^ξ und $(x - \xi)^n$ einzeln das Maximum, so erhalten wir in ihrem Produkt eine Grösse die sicherlich grösser ist als K' bez. \mathcal{L}' .

Es ist im Intervalle $0 < \xi < x$.

Das Maximum von e^x ist $= e^x$ das Min. $= 1$

" " " " $(x-1)^n = x^n$ " " " " $= 0$.

Mithin dürfen wir setzen:

$$K' = \frac{e^x x^n}{n!}, \quad L' = 0$$

Diese Werte tragen wir in die Gleichung 2) ein die wir aus Rücksicht auf 3) so schreiben können:

$$L'(x-x_0) \leq R \leq K'(x-x_0);$$

wir erhalten dann

$$0 \leq R \leq \frac{e^x x^{n+1}}{n!}$$

da x_0 den Wert 0 hat.

Damit ist die verlangte Abschätzung geleistet.

2) $y = \sin x$, $x_0 = 0$, $x > 0$.

Die ersten Glieder der Reihe lauten

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

ferner ist

$$\frac{dR}{dx} = \pm \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} (x-x)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

Ob wir in diesem Ausdruck - oder +, sin oder cos zu setzen haben, hängt davon ab, welche Zahl wir für n eintragen wollen. Wir brauchen uns darüber nicht

schlüssig zu werden. Da nämlich in jedem Falle $\mp \left(\frac{\sin \xi}{\cos \xi} \right)$ zwischen -1 und $+1$ liegt, und da x^n der grösste Wert ist, den $(x-\xi)^n$ in dem für uns in Betracht kommenden Intervalle $0 \leq \xi \leq x$ annimmt, so liegt $\frac{dR}{d\xi}$ fortgesetzt zwischen $-\frac{x^n}{n!}$ und $+\frac{x^n}{n!}$.
 Wir haben damit bereits die Zahlen L und K oder richtiger Zahlen, die grösser bzw. kleiner sind, als K bzw. L , gefunden. Nach Gleichung 2) ist ferner

$$-\frac{x^{n+1}}{n!} < R < +\frac{x^{n+1}}{n!}$$

Beide Grenzen nähern sich mit wachsendem n der Null.

3) $y = \cos x$

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

ebenfalls richtig ad inf. etc.

4) $y = \log(1+x)$

Es ist

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

wo der Rest

$$\frac{dR}{d\xi} = -(x-\xi)^n \xi^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-\xi)^n}{(1+\xi)^{n+1}}$$

Hier fällt sofort ein Unterschied gegen die vorigen Beispiele ins Auge. Bei jenen lag nämlich der $(n+1)$ te Diff. Quotient von y innerhalb derselben Grenzen, wie y selbst. Bei dem vorliegenden Beispiel aber wächst er (wegen des Factors $n!$) mit wachsendem n ins Unendliche.

In der Taylor'schen Reihe bleibt daher als Nenner des n ten Gliedes nur noch n stehen; ihre Convergence wird lange nicht so gut sein, wie bei den früheren Beispielen.

Schon die genaue Abschätzung des Restgliedes ist hier schwieriger, wie früher. Früher verglichen wir die Curve $\eta = R(\xi)$ mit zwei Geraden, der K Linie und der L Linie; dieser Spielraum ist jetzt zu gross. Wir schränken sie folgendermassen enger ein.

Wir vergleichen die Restcurve mit zwei krummen Linien $\eta = S(\xi)$ und $\eta = T(\xi)$, die durch $\xi = x$ hindurchgehen sollen.

Ferner soll die Neigung dieser Curven betreffend, im Intervalle $x_0 \leq \xi \leq x$ stets sein

$$1) \quad \frac{dT}{d\xi} \leq \frac{dR}{d\xi} \leq \frac{dS}{d\xi}$$

Von diesen Curven gilt, dass die R Curve wiederum ganz zwischen ihnen verlaufen muss. Insbesondere haben wir also für $\xi = x_0$

$$S(x_0) \leq R(x_0) \leq T(x_0)$$

Offenbar können wir den S und T Curven noch beliebige Gestalten geben. Am einfachsten bestimmen wir folgendes:

Es sei M und N das Maximum von $y^{\frac{(n+1)}{\xi}}$ im Intervalle. Dann ist die Ordinate der S Curve

$$a) \quad S = \frac{(x-\xi)^{n+1} N}{n+1}$$

... der T Curve

$$b) \quad T = \frac{(x-\xi)^{n+1} M}{n+1}$$

Denn wird

$$\frac{dS}{d\xi} = -(x-\xi)^n N^{\min}$$

$$\frac{dT}{d\xi} = -(x-\xi)^n M^{\max}$$

Andererseits wird nach der Definition von M

$$\frac{dR}{d\xi} \leq -(x-\xi)^n N$$

$$\frac{dR}{d\xi} \geq -(x-\xi)^n M$$

Daraus folgt

$$c) \quad \frac{dT}{d\xi} \leq \frac{dR}{d\xi} \leq \frac{dS}{d\xi}$$

Ferner ist für $\xi = x$, wie es sein soll:

$$d) \quad S = 0 \quad T = 0$$

Aus c) und d) ergibt sich, dass wir die durch a) und b) definierten Funktionen als S und T Curve in dem oben festgelegten Sinne benutzen können.

Wir tragen die so verifizierten Werte von S und T in die Gleichung 2) ein und bestimmen die folgende neue Abschätzung des Restgliedes:

$$3. \quad \frac{(x-x_0)^{n+1} N}{n+1} \leq R(x_0) \leq \frac{(x-x_0)^{n+1} M}{n+1}$$

Dieses Resultat werden wir auf die Entwicklung von $\log(1+x)$ an.

Es war

$$\frac{y^{\overline{(n+1)}}}{n!} = \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}}$$

Wir finden

$$\text{für } n \text{ gerade: } M = 1 \quad N = \frac{1}{(1+x)^{n+1}}$$

$$\text{" } n \text{ ungerade } M = -\frac{1}{(1+x)^{n+1}} \quad N = -1$$

Daraufhin erhalten wir aus 3), wegen $x_0 = 0$,
 wenn n gerade $\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}} \leq R \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$
 .. n ungerade $-\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq R \leq -\frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}}$

An diese Formeln knüpfen sich einige Schlüsse

1) Der Rest ist positiv, wenn wir nach einer geraden Anzahl von Gliedern unsere Entwicklung abbrechen. Im Hinblick auf die Fig.

können wir dieses auch so ausdrücken:

Die Parabeln gerader Ordnung liegen ganz unterhalb, die Parabeln ungerader Ordnung ganz oberhalb der Grundcurve.

2) Soviel über das Vorzeichen. Wie verhält es sich aber mit seiner Grösse? Da müssen wir zwei Fälle unterscheiden $x \leq 1$ und $x > 1$ (indem wir uns der Kürze halber auch hier auf positive x beschränken).

$x \leq 1$. In diesem Falle wird der Rest mit wachsendem n zu Null. Er wird nämlich selbst in dem ungünstigsten Falle $x = 1$ kleiner als $\frac{1}{n+1}$ bzw. grösser als $\frac{1}{n+1}$ (je nachdem n gerade oder ungerade ist). Im Intervalle $0 \leq x \leq 1$ schliessen sich also die Annäherung

parabeln um so näher der Grundcurve an, je grösser n ist. In diesem Falle ist also die Taylor'sche Entwicklung richtig. $x > 1$ lineare Abschätzung liefert für $x > 1$ bei geradem bzw. ungeradem n unendlich wachsendem n .

$$0 \leq R \leq \infty \text{ bzw. } -\infty \leq R \leq 0$$

Sie versagt also!

Zum Glück können wir das Verhalten der Reihe aus der Reihe selbst (für $x > 1$) ablesen.

Für $x > 1$ divergiert nämlich die Reihe nicht mehr. Denn es wird jedes folgende Glied der Reihe grösser als das vorhergehende. Mithin kann sich die Summe von beliebig vielen Termen gewiss keiner festen Grenze nähern. Für $x > 1$ verliert also die Taylor'sche Entwicklung jeden Sinn.

Es ist interessant, sich auch das Verhalten der Annäherungsparabeln im letzteren Falle klar zu machen. Wir sahen bereits früher, dass die Annäherungsparabeln gerader Ordnung für $x > 1$ nach unten hin

abfallen und zwar um so steiler, je grösser n wird. Desgleichen steigen die Annäherungsparabeln gerader Ordnung nach oben hin an. Dies bestätigt auch die analytische Untersuchung. Für $x > 1$ kommt es nämlich bei den Annäherungsparabeln wesentlich nur auf das Glied mit der höchsten Potenz in x an, und dieses wird, sobald x nur ein wenig grösser als 1 ist, $+\infty$ bei ungeradem, $-\infty$ bei geradem unendlich wachsendem n . Daher hat sozusagen die Parabel unendlich hoher Ordnung, d. h. diejenige Curve, welcher sich die Parabeln bei wachsender Ordnungszahl mehr und mehr annähern, die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{n gerade} & & \text{Parabel} \\
 \text{Parabel} & \frac{y = \log(1+x)}{} & \text{n ungerade} \\
 & & \frac{y = \log(1+x)}{}
 \end{array}$$

Man wird sich vielleicht aus unserem Beispiele die Regel ableiten wollen: Solange die Taylor'sche Entwicklung für irgend eine gegebene Function

convergiert, solange stellt sie auch die gegebene Funktion dar. Wenn diese Regel richtig wäre, so wäre man der umständlichen Untersuchung des Restglieds überhoben. Sie ist es aber nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

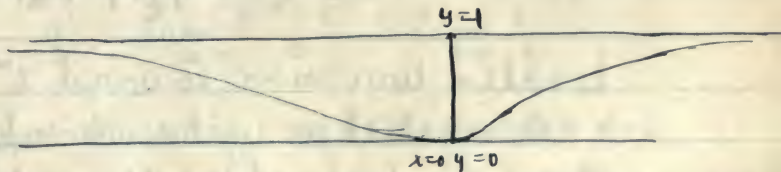
§10 Die Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Das erste und einfachste Beispiel dieser Art hat Cauchy in seinem für denzeitige Fragen grundlegenden Buche: Cours d'Analyse (1821) gegeben.

Dasselbe lautet

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Die entsprechende Curve sieht folgendermassen aus:



Hilfssatz: Zunächst beweisen wir folgende Eigenschaft der Exponentialfunktion.

Es wird für jeden Wert von α

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z^\alpha}{e^z} \right) = 0$$

oder in Worten ausgedrückt: Die Exponentialfunktion wächst mit positivem zunehmendem z rascher ins Unendliche, als irgend eine Potenz von z .

Es folgt dieses unmittelbar aus unserer ursprünglichen Definition der Funktion e^z .
Da nämlich in der Reihe

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

bei positivem z sämtliche Terme positiv sind, so ist e^z sicherlich grösser, als ein einzelnes Glied dieser Reihe, z. B. grösser als das $(m+1)$ te Glied, also

$$e^z > \frac{z^m}{m!} \quad \left| \frac{e^z}{z^\alpha} \right| > \left| \frac{z^{m-\alpha}}{m!} \right|$$

Wählen wir $m > \alpha$, so wird $z^{m-\alpha}$ mit wachsendem z schliesslich ∞ , während $m!$ eine, wenn auch grosse, so doch jedenfalls endliche Zahl ist. Daher wird $\left| \frac{z^{m-\alpha}}{m!} \right|$ und umso mehr $\left| \frac{e^z}{z^\alpha} \right|$ mit wachsendem z unendlich.

Umgekehrt wird $\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z^\alpha}{e^z} \right) = 0$. g. c. d.

[Die jetzige Behauptung widerspricht natürlich keineswegs der früher oft benutzten Tatsache, dass $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{z^m}{m!}$ gleich Null wird; denn damals handelte es sich um den Grenzwert dieses Ausdrucks für $m = \infty$ bei festgehaltenem z , während hier von dem Grenzwert eines ähnlichen Ausdrucks für $z = \infty$ bei festgehaltenem m die Rede ist.]

Wir bilden nun successive die Werte der Funktion und ihrer Diff.quotienten an der Stelle $x=0$.

Zunächst haben wir $y_0 = 0$.

Nach der Definition des Diff.quotienten als Grenze eines Differenzenquotienten wird ferner:

$$y_0' = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta^2}} - e^{-\infty}}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta^2}}}{\Delta}$$

Setzen wir $\Delta = \frac{1}{\sqrt{z}}$ so entspricht dem Werte $\Delta \rightarrow 0$ der Wert $z = \infty$; daher haben wir:

$$y_0' = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{e^z}$$

oder, mit Benutzung unseres Hilfssatzes:

$$y_0' = 0$$

Ferner berechnen wir

$$y_0'' = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+2\Delta) - 2f(x+\Delta) + f(x)}{\Delta^2} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{4\Delta^2}} - 2e^{-\frac{1}{\Delta^2}} + e^{-\infty}}{\Delta^2}$$
$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{4\Delta^2}}}{\Delta^2} - 2 \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta^2}}}{\Delta^2}$$

Beide Limes verschwinden nach unserem Hilfssatz. Setzen wir nämlich im ersten bzw. zweiten Lim.

$$4\Delta^2 = \frac{1}{z} \quad \text{bzw.} \quad \Delta^2 = z'$$

so wird:

$$y_0'' = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{4z}{e^z} \right) - 2 \lim_{z' \rightarrow \infty} \left(\frac{z'}{e^{z'}} \right) = 0.$$

So fortfahrend berechnen wir für sämtliche Differentialquotienten von y an der Stelle $x_0 = 0$ den Wert Null. Fragen wir diese Werte in die Formel des Taylor'schen Lehrsatzes ein, so bestimmen wir

$$y = 0 + 0 + 0 + \dots$$

eine Reihe, welche ausgezeichnet konvergiert und doch nicht den richtigen Wert von y darstellt. Der Fehler liegt darin, dass wir uns nicht um das Restglied gekümmert haben.

In der That zeigt die genauere Untersuchung, die wir unterdrücken müssen, dass im vorliegenden Falle das Restglied nicht gegen Null convergirt. Daher dürfen wir die unbegrenzte Taylor'sche Reihe auf unsere Funktion nicht anwenden.

§ 11. Zusammenfassung der Resultate.
Wir haben früher unter der Annahme

$$x_0 \leq \xi \leq x$$

die beiden Formeln abgeleitet:

$$1) \quad K(x_0 - x) \leq R \leq L(x_0 - x)$$

$$2) \quad \frac{N(x - x_0)^{n+1}}{n+1} \leq R \leq \frac{M(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Dabei bedeutete K bezw. L das Max. bezw. Min. von

$$-\frac{(x - \xi)^n}{n!} y_\xi^{(n+1)}$$

und M bezw. N das Max. bezw. Min. von

$$\frac{y_\xi^{(n+1)}}{n!}$$

Wir wünschen statt der Formeln 1) und 2) solche zu erhalten, in denen nicht das

Zeichen $<$, sondern das uns gewohnte Zeichen $=$ vorkommt.

1) Bezeichnen wir mit P einen geeignet zuwählenden Zwischenwert zwischen K und L , so können wir offenbar setzen:

$$R = P(x_0 - x)$$

Dieser Zwischenwert P wird nach der Bedeutung von K und L , sofern $y_\xi^{(n+1)}$ im Intervalle $x_0 \leq \xi \leq x$ stetig ist, gleich dem Werte von $-\frac{(x-\xi)^n}{n!} y_\xi^{(n+1)}$ an einer geeignet zu wählenden Stelle ξ sein, welche uns allerdings unbekannt ist, von der wir aber wissen, dass sie zwischen x_0 und x liegen muss; (vielleicht gibt es auch mehrere solche Stellen ξ). Dieses drücken wir aus, wenn wir setzen $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$ unter dem typischen Zeichen θ einen unbekanntem echten Bruch verstanden.

Wir können somit setzen:

$$P = - \frac{(x-x_0)^{n+1} (1-\theta)^n y_{x_0+\theta(x-x_0)}^{(n+1)}}{n!}$$

und

1.

$$R = \frac{(x-x_0)^{n+1} (1-\theta)^n y_{x_0+\theta(x-x_0)}^{(n+1)}}{n!}$$

2) Es bedeute ξ einen geeignet zu wählenden Zwischenwert zwischen M und N . Dann haben wir nach der zweiten Abschätzung des Restgliedes:

$$R = \frac{Q(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Ist wiederum $y_\xi^{(n+1)}$ eine stetige Funktion von ξ , so wird Q nach der Bedeutung von M und N gleich dem Werte von $\frac{y_\xi^{(n+1)}}{n!}$ für einen geeignet zu wählenden Wert von ξ werden, welcher zwischen x_0 und x gelegen sein muss. Bezeichnen wir den letzteren mit $x_0 + \theta'(x-x_0)$, wobei $0 \leq \theta' \leq 1$, so können wir schreiben:

$$Q = \frac{y_{x_0 + \theta'(x-x_0)}^{(n+1)}}{n!}$$

und

$$2. \quad R = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} y_{x_0 + \theta'(x-x_0)}^{(n+1)}$$

Die Formeln (1) und (2) sind die zum meist benutzten Formen des Restgliedes nach Cauchy.

§12. Andere Schreibweisen für die Taylor'sche Reihe.

Wenn wir die abhängige Variable nicht durch y sondern durch $f(x)$ bezeichnen, so wird

$$I. \quad f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

wobei

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}$$

bzw.

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \theta'(x-x_0))}{(n+1)!}$$

je nachdem wir die erste oder die etwas schärfere zweite Abschätzung benutzen. Den besonderen Fall der Taylor'schen Reihe wo $x_0=0$, hat man mit dem besonderen Namen MacLaurin'sche Reihe bezeichnet.

Sie lautet:

$$II. \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + R_n$$

wobei

$$R_n = \frac{x^{n+1} (1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}$$

bzw.

$$R_n = \frac{x^{n+1} f^{(n+1)}(\theta'(x))}{(n+1)!}$$

Schreiben wir endlich x statt x_0 und $x+h$ statt x , so wird

$$\text{III} \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + R_n$$

wobei

$$R_n =$$

bezw.

$$R_n =$$

Alle diese drei Gleichungen besagen im Prinzip ganz dasselbe.

Abschnitt II

Anwendungen der Taylor'schen Reihe.

Kapitel I

Numerische Berechnung von Funktionen

§ 13. Sinus, Logarithmus.

(siehe Stegemann-Kiepert p. 152 ff.)

§ 14. Der allgemeine binomische Satz.
siehe Stegemann-Kiepert p. 157

§ 15. $\arctg x$ und π

siehe Stegemann-Kiepert p. 181

Die sogenannte Leibniz'sche Reihe taugt nicht zur numerischen Berechnung

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

da für 4 Dezimalen mindestens 5000 Glieder notwendig wären.

Besser ist die Euler'sche Reihe.

Es geht aus von der Formel:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Setzen wir hierin $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$, so wird $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$

Daher ist $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$.

Die Reihen für $\arctg \frac{1}{2}$ und $\arctg \frac{1}{3}$ convergieren viel besser wie die Leibniz'sche Reihe für $\arctg 1$. Wir können also mit Euler die Zahl π so berechnen

$$\frac{\pi}{4} = 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \dots \\ + 1 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \dots$$

Ueberhaupt werden wir $\frac{\pi}{4}$ durch die Summe mehrerer \arctg . Reihen immer dann berechnen können, wenn wir $\frac{\pi}{4}$ in die Summe mehrerer Winkel zerlegen können, deren Tangenten-Werte einzeln bekannt sind, und zwar um so bequemer, je kleiner diese Werte ausfallen.

Der englische Astronom Machin bemerkte, dass

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}$$

und berechnete π auf 100 Dezimalen.

Gauss gibt (Vergl. Werke Bd. II p. 525) eine ganze Reihe von solchen Zerlegungen an.

z. B.

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctg \frac{1}{38} + 20 \arctg \frac{1}{57} + 7 \arctg \frac{1}{239} + 24 \arctg \frac{1}{268}$$

Hier entsteht π als Summe von 63 Winkeln
von denen jeder einzelne sehr klein ist.

Anmerkung: Das Unbefriedigende des
Taylor'schen Satzes auf dieser Weise
kann erst in der Funktionentheorie
gehoben werden.

Kapitel II

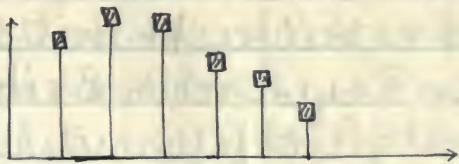
Angewandte Mathematik.

§ 16 Verhältnis von Funktion und Funktionsstreifen.

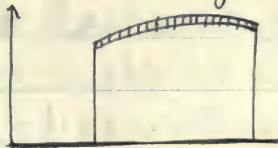
Angewandte Mathematik ist abgekürzte M.-
Unterscheide zwei Arten von Beobachtungen:

- 1) Es wird in einzelnen discontinuirlichen Intervallen beobachtet.

Keine Punkte sind zu zeichnen
sondern Flächenstücke.



- 2) Man lässt einen Registrierapparat arbeiten, welcher kontinuierlich aber in Streifen von endlicher Breite zeichnet.



Daher kann im abstrakten Sinne des
Wortes eine Funktion niemals bestimmt
werden, sie kann nur eingegrenzt werden.

Wie steht es nun mit der Potenzentwicklung solcher Funktionen? Man liest häufig: Irgend welche Beobachtungen werden durch ein Polynom z. B. durch $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ genau dargestellt.

Damit meint man natürlich nur: Daß die Differenz zwischen den Ordinaten der Parabel und den Beobachtungen unter der Genauigkeitsgrenze liegen.

Woher bekommt man ein solches Polynom? Ist es vielleicht mit den ersten Gliedern der Taylor'schen Reihe identisch?

Die gleichfalls mit dem 4ten Gliede abgebrochene Taylor'sche Reihe lautet:

$$y = y_0 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x} \cdot \frac{x}{1} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta x^3} \cdot \frac{x^3}{3!}$$

Wenn dies der Fall ist, so müßte sein

$$a = y_0 \quad b = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x} \quad \text{etc.}$$

Die erste Gleichung bestimmt uns a , aber mit der Ungenauigkeit, welche den Beobachtungen anhaftet. Um aus der zweiten Gleichung b zu bestimmen,

müssen wir $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aus den Beobachtungen herleiten und dann zur Grenze übergehen.

Um nun von der vollkommenen 2ten Beobachtungsmethode zu reden, haben wir einen Punkt des Streifens mit der Abscisse x_0 zu verbinden mit einem Punkte des Streifens mit der Abscisse $x_0 + \Delta x$ und den letzteren in den ersteren hineinrücken zu lassen. Die Grenzlage der Verbindungslinie gäbe die gesuchte Grösse b . Diese Grenzlage ist aber gänzlich unbestimmt. Wir können den Punkt $x_0 + \Delta x$ nämlich noch in allen möglichen Richtungen innerhalb des Streifens in den Punkt x_0 hineinrücken lassen.

Also: Von einem Diff. quotienten kann im streng mathematischen Sinne des Wortes bei einer durch Beobachtungen bestimmten Funktion nicht die Rede sein. Damit fällt auch die Verwendbarkeit der Taylor'schen Reihe für solche Beobachtungstreifen.

Will man dennoch von einem Diff. Quot.

eines Beobachtungstreifens sprechen, so muss man die Sache gerade umgekehrt anfassen. Man muss nicht nach Taylor die Potenzenentwicklung aus den Diff. Quotienten herleiten wollen, sondern vielmehr die Diff. Quotienten aus der Potenzenentwicklung definieren.

Das ist so zu verstehen: Man suche eine Parabel

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + kx^n$$

welche so beschaffen ist, dass sie ganz in den Beobachtungstreifen hineinfällt.

Unter den Diff. Quotienten an der Stelle $x =$ verstehe man denn die Größen:

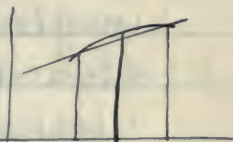
$$y'_0 = b \quad y''_0 = 2 \cdot c \quad \dots \quad y^{(n)}_0 = n! \cdot k.$$

Auch so sind sie noch nicht ganz bestimmt. Denn man wird verschiedene Parabeln in den Streifen hineinlegen können.

Wir definieren daher die Diff. Quotienten durch die Coefficienten der einfachsten Parabel, d. h. der Parabel von niederstem Grade, welche bereits ganz innerhalb des Streifens verläuft.

Im einzelnen verfährt man meist folgendermassen:

Da eine Parabel n ter Ordnung in ihren Coefficienten $n+1$ Willkürlichkeiten hat, wird man sie zwingen können durch $n+1$ Punkte hindurchzugehen. Zunächst



versucht man es mit einer

Parabel 1ter Ordnung (gerade Linie).

Von dieser verlangt man, dass sie durch zwei Punkte geht, welche als Abscissen die Anfangs- und Endabscissen des Beobachtungstreifens haben.

Die Gerade ist die Verbindungslinie dieser beiden Punkte. Liegt diese nicht im Streifen, so nimmt man den Mittelpunkt des Beobachtungsintervalls hinzu und sucht sich einen Punkt des Streifens aus, welcher zu dieser Abscisse gehört. Man zeichnet nun durch diese 3 Punkte eine Parabel 2ter Ordnung. Ist es noch nicht genau genug, so teilt man das Intervall in 3 gleiche Teile und

nimmt 4 Punkte des Streifens, durch welche man eine Parabel 3ter Ordnung legt u. s. f.

Dass wir das Beobachtungsgebiet gerade in gleiche Teile einteilen, ist allerdings etwas willkürlich. Es handelt sich hier überhaupt nur um eine willkürliche Festsetzung dessen, was wir die Diff. quotient eines Streifens nennen wollen. Wie solche Parabeln konstruiert werden, davon handelt die Interpolationsrechnung.

§17 Interpolationsrechnung.

Es seien

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$$

$n+1$ Ordinaten, welche zu den Abscissen

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

gehören. Alle diese Grössen denken wir uns jetzt genau definiert.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Parabel

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + kx^n$$

zu konstruieren, welche durch die $n+1$ Punkte (x_i, y_i) hindurchgeht.

Theoretisch ist diese Aufgabe sofort gelöst.
Man schreibe sich die Gleichung

$$y_i = a + bx_i + cx_i^2 + \dots + kx_i^n.$$

für $i = 0, 1, \dots, n$ hin. Man hat dann $n+1$ lineare Gleichungen, aus denen man die $n+1$ unbekanntem Coefficienten mittelst Determinanten berechnen kann.

Praktisch ist aber damit nichts gewonnen, denn von der Determinanten gilt, sobald die Gliederzahl einigermaßen beträchtlich wird: sie sind theoretisch sehr schön, aber zur wirklichen Ausrechnung möglichst ungeeignet.

Es ist in unserem Falle aber leicht, die Gleichung der Parabel direkt hinzuschreiben. Wir haben dabei nur zu verificieren, dass sie wirklich durch die $n+1$ Punkte (x_i, y_i) hindurchgeht. Die folgende Formel heisst nach ihrem Entdecker die

Lagrange'sche Interpolationsformel:

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

Setzen wir hierin $x=x_0$, so verschwinden

alle Summanden bis auf den ersten und dieser reduziert sich auf y_0 .

Ebenso wird für $x=x_1$ die rechte Seite gleich und so allgemein. Die Lagrange'sche Interp.

Formel gibt also wirklich die gesuchte Parabel.

Es ist lehrreich, diese Formel noch abgesehen folgendermassen zu schreiben: Bezeichnen wir mit $\varphi(x)$ das Polynom $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

so wird $\varphi'(x)$ für $x=x_0$ gleich $(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)$

und allgemein für $x=x_i$ gleich dem i ten Nenner in unserer früheren Formel.

Wir können also schreiben:

$$y = \varphi(x) \left\{ \frac{y_0}{\varphi'(x_0)} \frac{1}{x-x_0} + \dots + \frac{y_n}{\varphi'(x_n)} \frac{1}{x-x_n} \right\}$$

Um uns den Sinn der Formel noch näher zu führen, setzen wir

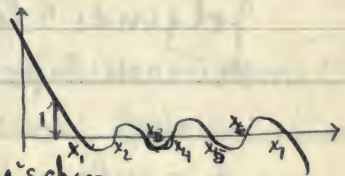
$$y = y_0 P_0(x) + y_1 P_1(x) + \dots + y_n P_n(x)$$

indem wir unter $P_0(x)$ etc eben jenes Polynom n ten Grades verstehen, welches in unserer ersten Formel mit y_0, y_1 etc multipliziert ist. Jedes dieser Polynome, einzeln gleich einer neuen abhängigen Variablen gesetzt, stellt eine Parabel dar.

Wir haben so $n+1$ Teilparabeln von uns,
und die gesuchte Parabel y entsteht durch
Uebereinanderlegung dieser $n+1$ Teilparabeln,
jede multipliziert mit einer der Größen
 y_0, y_1, \dots, y_n .

Die Teilparabeln haben folgende Charakter-
eigenschaft. Die Teilparabel $y_r = P_{r,x}$
hat bei $x=x_r$ die Ordinate 1, an allen
anderen Stellen x_i die Ordinate 0.

Man überieht nun
sofort, dass bei dieser
Bestimmung der Teil-



parabeln in der Lagrange'schen
Interpolationsformel der Wert $y=y_r$
an der Stelle $x=x_r$ heraus kommen muss.
Denn alle Teilparabeln haben an dieser
Stelle die Ordinate 0, auser P_r und
daher ergibt sich $y=y_r$.

Für eine andere, die Newton'sche
Interpolationsformel brauchen wir die
Bezeichnung und Begriffe der
Differenzrechnung

Der Begriff des Differenzenquotienten

ist uns schon mehrfach begegnet $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
 Wir stellen die hierauf bezüglichen
 Formeln im Anschluss an unsere
 Interpolationsaufgabe schematisch
 zusammen. Wir müssen dabei uns die
 $n+1$ Beobachtungsabscissen von jetzt an
 als äquidistant denken, also

$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} =$ einer festen Grösse
 Δx nehmen. Dann werden definiert durch
 folgende Gleichungen

1te Diff. 2te Diff.

$$y_0 = y_0$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1$$

$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$$

$$\Delta y_0 = \Delta y_0$$

$$\Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

$$\Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1$$

$$\Delta y_{n-1} = \Delta y_{n-2} + \Delta^2 y_{n-2}$$

3te Diff. etc.

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^2 y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$

etc

Umgekehrt braucht man nur die in der
 2ten 3ten - - - Columnen erklärten Grösse
 in die 1te einzusetzen, um die Ordinate
 y_1, y_2, \dots, y_n durch die Werte von $y_0, \Delta y_0, \dots, \Delta^n y_0$
 auszudrücken. Es geschieht dieses durch
 folgende Gleichungen:

$$y_0 = y_0$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^n y_0$$

Die Newton'sche Interpolationsformel lautet nun folgendermaßen:

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1} \frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \dots + \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{n-1})}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}$$

Wir haben zu zeigen, dass diese Formel wirklich den Namen einer Interpolationsformel verdient, d. h. dass für $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ gerade $y = y_0, y_1, \dots, y_n$ wird.

Nun sieht man, wenn man setzt:

$$x = x_0 \quad \varepsilon 0 \quad \text{wird } y = y_0$$

$$x = x_1 \quad \dots \quad y = y_0 + \frac{x_1 - x_0}{1} \frac{\Delta y_0}{\Delta x} = y_0 + \Delta y_0 = y_1$$

$$x = x_2 \quad \dots \quad y = y_0 + \frac{x_2 - x_0}{1} \frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}{2 \cdot 1} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} \\ = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = y_2$$

etc

Auch die Newton'sche Formel stellt eine Parabel n-ter Ordnung dar, ebenso wie die Lagrange'sche. Sie muss mit dieser

so gar identisch sein, da die zugehörigen Parabeln durch dieselben $n+1$ Punkte (x_i, y_i) hindurch gehen. Nur die Ordnung der Glieder ist eine andere.

Vergleichen wir diese Newton'sche Formel mit der Taylor'schen Entwicklung, so kommen wir zu einer ganz neuen Auffassung der letzteren.

Wir wollen nämlich die n äquidistanten Punkte auf den Punkt x_0 hinrücken lassen, indem wir Δx abnehmen und schliesslich $\lim \Delta x = 0$ werden lassen. Dann gehen die Differenzenquotienten in die Differentialquotienten über und es wird die Newton'sche Interpolationsformel

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1} y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y''_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} y^{(n)}_0$$

also gerade die $n+1$ ersten Glieder der Taylor'schen Reihe.

Die formale Bildungsweise der Newton'schen und der Taylor'schen Formel ist somit ganz dieselbe. Dagegen ist die eigentliche Bedeutung beider grundverschieden.

Während Newton interpoliert, extrapoliert Taylor, was gewagter ist, aber durch die Restbetrachtung erlaubt wird.

§18. Das Verfahren der partes proportionales. Es giebt noch eine weitere Beziehung zwischen der Newton'schen und der Taylor'schen Formel.

Man wendet die Newton'sche Formel vielfach an, um die in den Tafeln gegebenen Werte analytischer Functionen zu interpolieren. Man kann mit Hilfe der Taylor'schen Reihe die Genauigkeit dieses Verfahrens beurteilen. Dies soll hier nur an dem Beispiel der partes proportionales in den Logarithmentafeln dargethan werden.

Gegeben seien die Werte von $\log a$, $\log(a+h)$, $\log(a+2h)$ Es sollen die dazwischen liegenden Werte von $\log x$ interpoliert werden.

Da es uns nur auf das Prinzip ankommt, wollen wir die Newton'sche Formel bereits

bei dem Gliede mit $\frac{\Delta \log a}{\Delta a} = \log(a+1) - \log a$ abbrechen.
 Geometrisch heisst dieses, dass wir eine Parabel
 erster Ordnung an Stelle der wirklichen
 Log. curve setzen, oder dass wir sie zwischen
 a und $a+1$ durch ihre Sehne ersetzen.

Damit allein ist noch nichts gewonnen,
 wenn man nicht auch den Fehler angiebt,
 den man im Maximum begehen kann.

Wir bezeichnen mit I die Gleichung
 der Log-Curve, mit II die ihrer Sehne, also

$$I \quad y = \log x$$

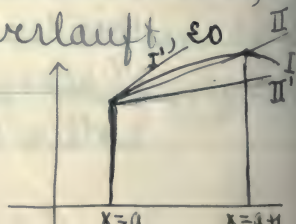
$$II \quad y = \log a + (x-a) (\log(a+1) - \log a)$$

Nun können wir für den Zweck der
 Fehlerabschätzung die Curven I und II
 durch andere Curven I' und II' ersetzen.

Wir bemerken zunächst, dass I ganz
 oberhalb II verläuft, solange $a < x < a+1$.

Nehmen wir nun eine Curve I' hinzu,
 welche nach oberhalb von I und eine II',
 die nach unterhalb von II verläuft, so
 wird sicher

$$I - II < I' - II' \text{ für } a < x < a+1.$$



Wollen wir die Grenzen a und $a+h$ miteinbeziehen,
so müssen wir schreiben

$$I - II \cong I' - II' \quad \text{für } a \leq x \leq a+h.$$

Die Bedeutung des Taylor'schen Satzes
für unsere Behauptung? ist nun die,
dass er uns mit Curven I' und II' versieht,
deren Ordinaten sich leicht berechnen lassen.

Nach dem Taylor'schen Satze können wir
für I schreiben:

$$y = \log a + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''\{a + \theta(x-a)\}.$$

Verstehen wir unter $\log a$ den in den Tafeln
verzeichneten Zehner \log , so ist

$$f'(a) = \frac{M}{a} \quad f''\{a + \theta(x-a)\} = \frac{-M}{[a + \theta(x-a)]^2}$$

wo M den Modul ($\ln = 0,43429 \dots$) bedeutet.

Nehmen wir für θ seinen grössten Wert $= 1$,
so erhält $f''\{a + \theta(x-a)\}$ den grösstmöglichen

Wert $-\frac{M}{x^2}$. Demnach wird die rechte

Seite unserer Taylor'schen Formel

vergrössert. Wir können also als I' die

folgende Curve benutzen:

$$I' \quad y = \log a + \frac{x-a}{1} \cdot \frac{M}{a} - \frac{(x-a)^2}{2} \frac{M}{x^2}$$

Ich schreibe noch lieber

$$I' \quad y = \log a + \frac{x-a}{1} \frac{1}{a} - \frac{(x-a)^2}{2} \frac{1}{(a+1)^2}$$

indem ich den Nenner x^2 , durch den grössten Wert $(a+1)^2$ ersetze, den er überhaupt annehmen kann.

Die Curve schliesst sich allerdings etwas weniger genau an die \log -Curve an, ist aber für die Berechnung bequemer.

In der Funktion II kommt noch $\log(a+1)$ vor, das wir ersetzen wollen durch eine kleinere Zahl, so dass II' entsteht und $II' \leq II$. Eine solche kleinere Zahl liefert uns wieder die Taylor'sche Entwicklung des $\log x$.

Nehmen wir in dieser für 0 seinen kleinsten Wert $0=0$, so verkleinern wir die rechte Seite wir haben also:

$$\log x \geq \log a + \frac{x-a}{1} \frac{1}{a} - \frac{(x-a)^2}{2} \frac{1}{a^2}$$

woraus für $x=a+1$ folgt:

$$\log(a+1) \geq \log a + \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2}$$

Danach erhalten wir aus II die neue

$$II' \quad y = \log a + (x-a) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} \right)$$

Die Einführung von Π' an Stelle von Π geschieht nur der einfacheren Rechnung wegen. Nun wird:

$$\Gamma' - \Pi' = \frac{(x-a)M}{2a^2} - \frac{(x-a)^2 M}{2(a+1)^2}$$

oder wenn wir die rechte Seite ein wenig umschreiben:

$$\Gamma' - \Pi' = \frac{M}{2} \left\{ \frac{x-a}{a^2} - \frac{(x-a)^2}{(a+1)^2} + \frac{(a+1)^2}{2a^2} - \frac{(a+1)^2}{2a^2} \right\} = \frac{M}{2} \left\{ \frac{(a+1)^2}{2a^2} - \frac{(a+1)^2 - (x-a)^2}{2a^2} \right\}$$

Sicher wird also

$$\Gamma' - \Pi' < \frac{M}{2} \frac{(a+1)^2}{2a^2} = \frac{M}{8a^2} \left(\frac{a+1}{a} \right)^2$$

Dieselbe Ungleichung gilt a fortiori für $\Gamma - \Pi$ d. h. für die Abrechnung von Log Curve und Sehne.

Nun fragen wir, ob wir bei einer 7-stelligen Log-Tafel, wo bekanntlich die \log_{10} für alle fünfstelligen Zahlen auf 7 Stellen genau angegeben sind, die \log_{10} der zwischenliegenden Zahlen mit den p. p. interpolieren dürfen, ohne dass der hierdurch entstehende Fehler die 7te Stelle beeinflusst.

Eine obere Grenze können wir für diesen Fehler auf Grund unserer letzten Formel sofort angeben. Wir haben für a eine

Zahl ≈ 10000 einzubringen, ferner mögen wir den nur wenig von 1 verschiedenen Bruch $(\frac{a+1}{a})^2$ direkt durch 1 ersetzen.

So finden wir als obere Grenze für den Fehler

$$\frac{M}{8} 10^{-8} < 0,06 \cdot 10^{-8} = 6 \cdot 10^{-10}$$

Der Fehler beträgt also noch keine Einheit in der 9ten Dezimale, daher ist die Interpolation nach der Newton'schen Formel für $n=1$ in unserem Falle gestattet.

Es kommt nun aber noch der Umstand hinzu, dass die aus den Tafeln selbst entnommenen Werte von $\log a$ und $\log(a+1)$ nur auf 7 Dezimalen genau sind.

Beide sind daher mit einem Fehler behaftet, welcher innerhalb der Grenzen $\pm 5 \cdot 10^{-8}$ einen beliebigen Wert haben kann.

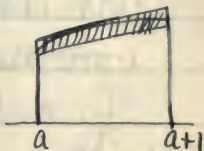
Wir konstruieren bei der letzten Fig. eine Sehne, welche die Punkte

$$(x=a \quad y=\log a) \quad (x=a+1 \quad y=\log(a+1))$$

verbinden sollte. Auch diese ist also nicht völlig bestimmt. Wir können von ihr nur sagen, dass sie zwischen $x=a$ und $x=a+1$ innerhalb eines Parallelogramms verläuft

dessen vertikale Seiten die Länge 10^7 haben.

9. genauer genommen hätten wir statt der letzten Fig. diese → zeichnen sollen.



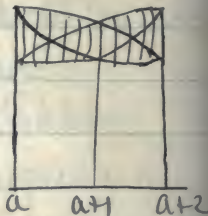
Wir sehen, dass die Ordinate der Sehne in jedem zwischen a und $a+1$ gelegenen Punkte gleichfalls möglicherweise die Ungenauigkeit von $\pm 5 \cdot 10^{-8}$ aufweist. Diese ist viel grösser, wie die oben abgeschätzte Ungenauigkeit, die aus der Anwendung der Newton'schen Interpolationsformel mit nur linearem Gliede entspringt. Wollten wir das Verfahren durch Hinzunahme der quadratischen Glieder verbessern, so könnten wir die letztgenannte Ungenauigkeit noch weiter verkleinern, dadurch würde aber die schwerwiegende erstgenannte Ungenauigkeit nicht verringert werden, sie würde im Gegenteil noch wachsen. Um so mehr Grund bei der linearen Interpolation stehen zu bleiben.

Es entstehen hier Fragen allgemeiner Art über die zweckmässige Einrichtung von numerischen Tafeln irgend welcher Funktionen.

Man muss sich über folgende Punkte schlüssig werden:

1) Für welche Werte soll die vorgelegte Funktion tabuliert werden, oder anders ausgedrückt, wie dicht will man die im vorhergehenden mit a, a_1, \dots bezeichneten Abscissenwerte wählen?

2) Auf wie viele Dezimalen soll die Funktion für diese Abscissenwerte berechnet werden?



3) Wie genau kann man zwischen ihnen interpolieren und wie viele Glieder der Newton'schen Interpolationsformel hat man dabei anzuwenden?

Zwischen diesen Punkten besteht offenbar ein innerer Zusammenhang, in dem Sinne, dass, wenn man sich über 2 Punkte willkürlich schlüssig geworden ist, die Entscheidung über den dritten Punkt gegeben ist.

Capitel III

Contacte höherer Ordnung

§ 14. Noch einmal Schmiegecurven
incl. der Maxima-Minima.

Gegeben seien zwei Functionen f und φ .
Wir nehmen an, dass beide sich an der
Stelle $x = x_0$ nach dem Taylor'schen Satze
entwickeln lassen und dass sich bei
der Entwicklung die $(v+1)$ ten Glieder
als gleich herausstellen, während
die $(v+2)$ te Glieder, also die $(v+1)$ te Diff.
quotienten von f und φ verschieden sind.
Wir sprechen dann von einem Contacte
 v ter Ordnung zwischen den Curven
 f und φ . Die Frage soll sein: wie
liegen beide Curven in der Nähe
von $x = x_0$ gegeneinander?

Es ist

$$1) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f_1'(x_0)h + \frac{f_2''(x_0)}{2!}h^2 + \dots$$

$$2) \quad \varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \varphi_1'(x_0)h + \frac{\varphi_2''(x_0)}{2!}h^2 + \dots$$

Wir bilden:

$$f(x_0 + h) - \varphi(x_0 + h) = \frac{f_0^{(v+1)} - \varphi_0^{(v+1)}}{(v+1)!} h^{v+1} + \dots$$

wobei wir die rechte Seite zur Abkürzung
gleichsetzen:

$$3) \quad A h^{v+1} + B h^{v+2} + C h^{v+3} + \dots = A h^{v+1} + h^{v+2} (B + C h + \dots)$$

Wir behaupten, dass sofern es uns nur auf
die Werte dieser Reihe in der nächsten
Nähe der Stelle $x = x_0$ ankommt, das erste
Glied für den Wert der ganzen Reihe
Ausschlag gebend ist.

Unsere Annahme nach convergieren
nämlich die Reihen 1) und 2) mithin
auch die Reihe 3) und ins Besondere
der Bestandteil $B + C h + \dots$ derselben,
für genügend kleine Werte von h .

Es treffe dieses beispielsweise nach der
positiven Seite hin zu für alle Werte
 $0 \leq h \leq h_1$. Dann hat jener Bestandteil für
diese Werte von h immer einen endlichen
Wert. Wir bezeichnen seinen grössten Wert
in diesem Intervalle mit M_1 , seinen kleinsten
mit m_1 und haben:

$$\left. \begin{aligned} f - \varphi &< h^{v+1} (A + h M_1) \\ f - \varphi &> h^{v+1} (A + h m_1) \end{aligned} \right\} \quad \text{für } 0 \leq h \leq h_1.$$

Nun können wir aber innerhalb des genannten Intervalles h immer so klein wählen, dass sowohl $h \cdot m$ wie $h \cdot n$ nur einen beliebig kleinen Bruchteil der Größe A ausmacht. Mithin ist bewiesen, dass der Wert von $f - g$ in unmittelbarer Umgebung des Punktes x_0 lediglich durch den ersten Term der Reihe 3) bestimmt wird. - Analog für negatives h .

Insbesondere hängt das Vorzeichen von $f - g$ nur ab von dem Vorzeichen des Gliedes $A h^{v+1}$.

Wir haben 2 Fälle zu unterscheiden:

- 1) v ungerade. Dann ist h^{v+1} eine gerade Potenz von h , welche ihr Vorzeichen bekanntlich nicht ändert, wenn h von positiv zu negativ übergeht.

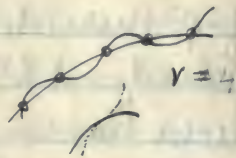
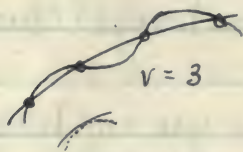
Da A eine Constante bedeutet, so hat auch $A h^{v+1}$ und ebenso $f - g$ ein festes Vorzeichen.

Es folgt: Bei einem Contacte ungerader Ordnung liegt die Curve f ganz oberhalb bez. ganz unterhalb

der Curve φ , je nachdem A das positive
 bez. negative Vorzeichen hat.

2) v ist gerade. Dann ändert $A h^{v+1}$ und
 also auch $f - \varphi$ sein Vorzeichen mit h .
 Wenn die Curve f für $x < x_0$ oberhalb von
 φ liegt, so liegt sie für $x > x_0$ unterhalb
 von φ und umgekehrt.

Es folgt: Bei einem Contacte gerader
 Ordnung durchdringen sich die beiden
 Curven.



Wir wollen jetzt im Besonderen als
 φ -Curve die Schwingungsparabel 4ter
 Ordnung von f im Punkte x_0 nehmen,
 womit wir die frühere Betrachtung dieser
 Curve wieder aufnehmen.

Dann haben wir:

$$\varphi(x_0+h) = f_0 + h f'_0 + \frac{h^2}{2!} f''_0 + \dots + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}_0$$

$$f(x_0+h) = f_0 + h f'_0 + \frac{h^2}{2!} f''_0 + \dots + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}_0 + \dots$$

Es könnte nun zufällig sein, dass $f_0^{(v+1)} = 0$; um uns ganz allgemein auszudrücken, wollen wir annehmen, dass

$$f_0^{(v+1)} = f_0^{(v+2)} = \dots = f_0^{(v)} = 0,$$

und dass $f_0^{(v+1)}$, der erste auf $f_0^{(v)}$ folgende, von Null verschiedene Diff. quotient ist. Dann wird einfach

$$f - q = \frac{h^{v+1}}{(v+1)!} f_0^{(v+1)} + \frac{h^{v+2}}{(v+2)!} f_0^{(v+2)} + \dots$$

Hier können wir, wie wir schon, die Betrachtung auf das erste Glied beschränken. Wir schließen wie oben:

Die Grundcurve f wird von der v ten Schwingungsparabel im Punkte x_0 durchsetzt, wenn v eine gerade Zahl ist, sie liegt ganz oberhalb ihrer Schwingungsparabel, wenn v ungerade und $f_0^{(v+1)}$ positiv, sie liegt ganz unterhalb, wenn v ungerade und $f_0^{(v+1)}$ negativ ist.

Dabei bedeutet $f_0^{(v+1)}$ den ersten auf $f_0^{(v)}$ folgenden Diff. quot., welcher von 0 verschieden ist.

Ein besonderes Interesse hat der einfachste Fall $n=1$. Es handelt sich hier um die Lage der Grundcurve zu ihrer Tangente. Dabei nehmen wir auch hier der Allgemeinheit wegen an, dass

$$f_0'' = f_0''' = \dots = f_0^{(n-1)} = 0 \quad f_0^{(n)} \neq 0.$$

Unser allgemeines Resultat können wir jetzt so ausdrücken:

Ist v gerade, so durchdringen sich Curve und Tangente gegenseitig: die Curve hat einen Wendepunkt.


Ist v ungerade, so liegt die Curve ganz auf der einen Seite der Tangente und zwar ist die Curve nach unten concav oder convex je nachdem $f_0^{(n)}$ negativ oder positiv ist.


Spezialisieren wir unser Resultat noch weiter, so kommen wir zu der Regel über Maxima und Minima der Funktionen. Wir wollen nämlich annehmen, es sei $f_0' = 0$, d. h. die Curve habe eine horizontale Tangente. Setzen wir ferner zuvorderst

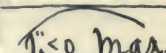
der Einfachheit wegen voraus, dass $f_0''' \neq 0$ ist, so können wir dem vorhergehenden zufolge sagen:

Die Curve besitzt im Punkte $x = x_0$ ein Max. oder ein Min. oder keines von beiden, je nachdem

ist. $f_0'' < 0$ $f_0'' > 0$ oder $f_0'' = 0$.


 $f_0'' > 0$, Min.


 $f_0'' = 0$, Wendepunkt


 $f_0'' < 0$, Max.

Lassen wir die Voraussetzung $f_0''' \neq 0$ fallen, so wird die Entscheidung etwas umständlicher:

Soll die Curve f im Punkte x_0 ein Max. oder Min. haben, so muss jedenfalls $f_0' = 0$ sein. Ausserdem aber muss der erste nicht verschwindende Diff. quot. von gerader Ordnung sein und zwar tritt ein Max. ein, wenn er negativ ist, ein Min., wenn er positiv ist.

§ 20. Kettenbrüche.

Bisher haben wir Schmiegungsparabeln construirt, d. h. ganze rationale Funktionen. Man kann sich nun allgemein die Aufgabe stellen, Schmiegunghyperbeln zu construiren d. h. rationale gebrochene Funktionen, welche sich in ähnlicher Weise möglichst gut anschliessen.

Eine rationale gebrochene Funktion von der v ten Ordnung hat die Form:

$$\frac{a + b'h + \dots + k'h^v}{a' + b'h + \dots + k'h^v}$$

Hier haben wir Zähler und Nenner nach Potenzen der Größe $h = x - x_0$ geordnet. Wir fragen uns, wie wir die Coefficienten dieser Funktionen bestimmen werden. Im Ganzen kommen hier $2v+1$ willkürliche Constanten vor, nämlich die Verhältnisse der $2v+2$ Coefficienten $a, b, \dots, k, a', b', \dots, k'$.

Dementsprechend können wir es so einrichten, dass unser Ausdruck mit

der gegebenen Function den Funktionswert und die $2r$ ersten Diff.quotienten an der Stelle $x=x_0$ gemein hat.

Wir verlangen also, dass die Gleichung

$$1) \quad a + b h + \dots + k h^r = (a' + b' h + \dots + k' h^r) \left(f_0 + \frac{h}{1} f_0' + \frac{h^2}{2!} f_0'' + \dots \right)$$

richtig ist bis auf Glieder von der Ordnung $2r+1$.

Hier vergleichen wir die Coefficienten von h^0, h^1, \dots, h^{2r} auf der rechten und linken Seite. Am einfachsten geht dieses bei den Potenzen $h^{v+1}, h^{v+2}, \dots, h^{2v}$, deren Coefficienten auf der linken Seite Null sind. So haben wir:

$$h^{v+1} \quad \left| \quad \frac{a' f_0^{(v+1)}}{v+1!} + \frac{b' f_0^{(v)}}{v!} + \dots + \frac{k' f_0'}{1} = 0 \right.$$

$$h^{v+2} \quad \left| \quad \frac{a' f_0^{(v+2)}}{v+2!} + \frac{b' f_0^{(v+1)}}{v+1!} + \dots + \frac{k' f_0''}{2!} = 0 \right.$$

$$h^{2v} \quad \left| \quad \frac{a' f_0^{(2v)}}{2v!} + \frac{b' f_0^{(2v-1)}}{2v-1!} + \dots + \frac{k' f_0^{(v)}}{v!} = 0 \right.$$

Aus diesen v linearen Gleichungen können die Verhältnisse der Coefficienten a', b', \dots, k' des Nenners berechnet werden. Tragen wir ihre Werte in weitere $v+1$

Gleichungen ein, welche die Coefficienten von h^0, h^1, \dots, h^v aus Gl. (1) liefern, so können wir aus ihnen die Coefficienten a, b, \dots, c des Zählers finden.

Dieses allgemeine Verfahren soll in den einfachsten Fällen $v=0, 1, 2$ durchgeführt werden.

- 1) Annäherungshyperbel 0ter Ordnung.
Ihre Gl. ist

$$y = \frac{a}{x} = f_0.$$

Es ist eine horizontale Gerade, welche durch (∞, y_0) hindurchgeht.

- 2) Annäherungshyperbel 1ter Ordnung
Die $2v+1=3$ Gleichungen zur Coefficientenbestimmung sind die folgenden:

$$a = a' f_0 \quad b = \frac{a' f_0'}{1} + b' f_0 \quad 0 = \frac{a' f_0''}{2} + \frac{b' f_0'}{1}$$

In Uebereinstimmung mit diesen Gleichungen dürfen wir nehmen:

$$a' = 2f_0' \quad b' = -f_0''$$

Dann folgt

$$a = 2f_0 f_0' \quad b = 2f_0' - f_0 f_0''$$

also

$$y = \frac{2f_0 f_0' + (2f_0'^2 - f_0 f_0'')h}{2f_0' - f_0''h}$$

Diese Funktion wollen wir näher untersuchen, indem wir ihre geometrische Bedeutung konstruieren.

Dabei wollen wir aber die kürzere Bezeichnung

$$y = \frac{a+bh}{a'+b'h}$$

wieder aufnehmen.

Wir zeichnen uns die y -Achse durch den Punkt $x = x_0$ hindurch. Dann messen wir auf der x -Achse (eigentlich h -Achse) direkt die Grösse h ab.

Unsere Curve besitzt zwei Asymptoten, eine verticale,

deren Gleichung $a'+b'h=0$

ist und eine horizontale,

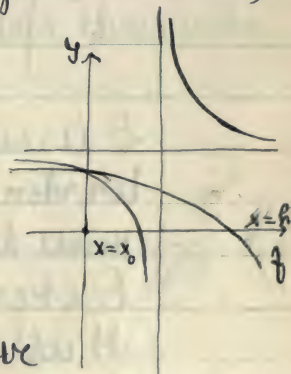
für welche $y = \frac{b}{b'}$.

Unsere Schmiegcurve

ist eine gewöhnliche gleichseitige Hyperbel.

Sie durchdringt die Grundcurve an der

Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ im Allgemeinen, weil sie einen Contact 2ter Ordnung mit ihr gemein hat.



3) Annäherungshyperbel 2ter Ordnung.
 Sie stellt den Funktionswert und die
 ersten 4 Diff.quotienten von f im Punkte
 x_0 dar. Aus der Gleichung

$$a + b h + c h^2 = (a' + b' h + c' h^2) \left(f_0 + \frac{1}{1!} f_0' h + \frac{1}{2!} f_0'' h^2 + \dots \right)$$

welche bis auf Glieder 4ter Ordnung inclusiv
 in h richtig sein soll, ergeben sich zur
 Bestimmung der zwei Verhältnisse

$$a' : b' : c'$$

die Gleichungen

$$h^3 \quad \left| \quad \frac{a'}{6} f_0'' + \frac{b'}{2} f_0' + \frac{c'}{1} f_0 = 0$$

$$h^4 \quad \left| \quad \frac{a'}{24} f_0''' + \frac{b'}{6} f_0'' + \frac{c'}{2} f_0' = 0 \quad \text{etc.}$$

Dieses Verfahren wird bei grösseren
 Werten von v sehr un bequem; denn man
 muss die praktische Anwendung der
 Determinanten vermeiden.

Hier kommt noch der Uebelstand hinzu,
 dass wir für jede folgende Hyperbel eine
 ganz neue Rechnung beginnen müssen,
 ohne dass uns die Kenntnis der vorher-
 gehenden Hyperbeln etwas nutzt.
 Dem gegenüber werden wir sehen, dass

es noch einen anderen Weg gibt, dass man unsere rationalen Funktionen durch eine gewisse "Kette" von Schritten successive aufbauen kann, nämlich durch Entwicklung von f in einen Kettenbruch.

Wir verfahren zu dem Zwecke folgendermassen: Wir haben:

$$f = f_0 + h f'_0 + \frac{h^2}{2!} f''_0 + \dots$$

und setzen:

$$\frac{f(h) - f_0}{h} = f'_0 + \frac{h}{2!} f''_0 + \dots = \frac{1}{f_1(h)}$$

Die Funktion $f_1(h)$ können wir ihrerseits nach Taylor entwickeln:

$$f_1(h) = f'_0 + h f''_0 + \frac{h^2}{2!} f'''_0 + \dots$$

Jetzt bilden wir:

$$\frac{f_1(h) - f'_0 - h f''_0}{h^2} = \frac{f'''_0}{2!} + \frac{f^{(4)}_0}{3!} + \dots = \frac{1}{f_2(h)}$$

Für die Funktion $f_2(h)$ gelte die Entwicklung:

$$f_2(h) = f''_0 + \frac{h}{1!} f'''_0 + \frac{h^2}{2!} f^{(4)}_0 + \frac{h^3}{3!} f^{(5)}_0 + \dots$$

Wiederum bilden wir:

$$\frac{f_2(h) - f''_0 - h f'''_0}{h^2} = \frac{f^{(4)}_0}{2!} + \frac{h}{3!} f^{(5)}_0 + \dots = \frac{1}{f_3(h)}$$

So fahren wir fort, indem wir jedesmal von der Funktion $f_0(h)$ die zwei ersten Glieder ihrer Potenzentwicklung abziehen. Die solcherweise definierten Funktionen stehen offenbar in der Beziehung:

$$f_1(h) = f_0(h) - \frac{h}{f_1'(h)}$$

$$f_2(h) = f_1(h) - h f_1'(h) + \frac{h^2}{f_2'(h)}$$

$$f_3(h) = f_2(h) - h f_2'(h) + \frac{h^2}{f_3'(h)}$$

Aus dieser Kette von Gleichungen bekommen wir durch fortgesetzte Elimination die eine Gleichung:

$$f(h) = f_0(h) + \frac{h}{f_1'(h)} + h f_1'(h) + \frac{h^2}{f_2'(h) + h f_2'(h)} + \frac{h^2}{\dots} + \frac{h^2}{\dots}$$

welche man die Kettenbruchentwicklung von $f(h)$ nennt.

Diesen Kettenbruch wollen wir zerschneiden indem wir den zuletzt stehenden Term $\frac{h^2}{f_n'(h)}$ forklassen. Dann bekommen wir nicht die Funktion $f(h)$ selbst, sondern eine

Annäherungsfunktion. Und zwar ergibt sich für:

$$\begin{array}{l|l} n=1 & f(x) \\ =2 & f(x) + \frac{h}{f_1(x) + h f_1'(x)} \\ =3 & f(x) + \frac{h}{f_1(x) + h f_1'(x)} + \frac{h^2}{f_2(x) + h f_2'(x)} \\ \text{etc} & \text{etc} \end{array}$$

Diese successiven Näherungsbrüche sind rationale Funktionen bez. von der Ordnung $0, 1, 2, 3, \dots$, wie man durch Heraufmultiplizieren der Nennner erkennt. Wir behaupten, es sind dies gerade die rationalen Schmiegunsfunktionen, welche wir suchen.

Zum Beweis haben wir zu zeigen, dass der v te dieser Näherungsbrüche bei der Entwicklung nach Potenzen von h bis zum Gliede v ter Ordnung incl. mit $f(x)$ übereinstimmt.

Zunächst beweisen wir den Hilfssatz. Wenn zwei Potenzreihen

$$I \quad a + bh + ch^2 + \dots$$

$$II \quad a' + b'h + c'h^2 + \dots$$

bis zum p ten Gliede übereinstimmen, so stimmen auch die reciproken Werte derselben, welche wir gleichfalls als Potenzreihen in der Form:

$$a_1 + b_1 h + c_1 h^2 + \dots$$

$$a'_1 + b'_1 h + c'_1 h^2 + \dots$$

anordnen, bis zum p ten Gliede übereinstimmen.

Für die Reihe I gilt die folgende Beziehung

$$1 = (a + bh + ch^2 + \dots)(a_1 + b_1 h + c_1 h^2 + \dots)$$

Durch Vergleichen der Potenzen von h auf der rechten und linken Seite ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$1 = a a_1$$

$$0 = ab_1 + ba_1$$

$$0 = ac_1 + bb_1 + ca_1$$

$$0 = \dots$$

Die Gleichungen können zur Berechnung der a, b, c, \dots dienen und zwar berechnet sich a_1 lediglich durch a ; b_1 durch a und b ; c_1 durch a, b und c ; etc, die Berechnung der ersten p Coefficienten a, b, c, \dots

hängt also lediglich von den ersten p Coefficienten a, b, c, \dots ab.

Ganz dieselben Gleichungen erhalten wir auf demselben Wege aus der Reihe II zur Berechnung der Coefficienten a', b', \dots mittelst der Coefficienten a', b', \dots .

Auch hier hängt die Berechnung der ersten p Coefficienten a', b', \dots nur von den p ersten Coefficienten a', b', \dots ab.

Da aber nach Voraussetzung die p Glän:

$$a = a' \quad b = b' \quad \dots$$

bestehen, so folgen daraus die Gleichungen

$$a_1 = a'_1 \quad b_1 = b'_1 \quad \dots$$

womit unser Hilfssatz bewiesen ist.

Zu unserem eigentlichen Zwecke übergehend, bemerken wir zunächst, dass die Annäherungsfunktion σ_n (ter Ordnung f_0) mit der gegebenen Funktion $f(x)$ offenbar in dem Gliede σ_n ter Ordnung, d. h. in dem constanten Gliede übereinstimmt.

Um das Entsprechende allgemein zu beweisen, wollen wir vorübergehend

ein Zeichen einführen.

Es bedeute \tilde{p} , dass die links und rechts von diesem Zeichen stehenden Ausdrücke bis zu den Gliedern \tilde{p} ter Ordnung in ihren Potenzentwicklungen übereinstimmen. Wir sagen dann, die genannten Ausdrücke sind $(\tilde{p}+1)$ -gliedrig angeordnet.

So schreiben wir:

$$f(x) + h f'(x) \tilde{0} \sim f_1(h)$$

und bei Anwendung unseres Hilfssatzes:

$$\frac{1}{f_1(x) + h f_1'(x)} \tilde{0} \sim \frac{1}{f_1(h)} = f'(x) + \frac{h}{2!} f''(x) + \dots$$

mithin

$$\frac{h}{f_1(x) + h f_1'(x)} \tilde{0} \quad (2) \quad h f(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

und endlich:

$$f(x) + \frac{h}{f_1(x) + h f_1'(x)} \tilde{0} \quad (2) \quad f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

Links steht die Annäherungsfunktion \tilde{p} ter Ordnung, rechts steht die gegebene Funktion $f(h)$ selbst. Wir können also sagen:

Die Funktion $f(h)$ stimmt mit der Annäherungsfunktion \tilde{p} ter Ordnung bis auf Glieder \tilde{p} ter Ordnung incl. überein.

In derselben Weise zeigen wir durch fortgesetzte Anwendung unseres Hilfssatzes, die Richtigkeit unserer Behauptung für alle folgende Annäherungsbrüche. Somit haben wir gelernt, die rationalen Schmiegungsfunktionen, welche wir nämlich direkt durch schwerfällige Determinanten ausdrückten, jetzt auf dem bequemeren Wege der Kettenbruchentwicklung rekurrent herzustellen. Die Kettenbruchentwicklung pflegt sonst erst in höheren Gebieten der Math., wo sie sehr wichtig ist, vorgebracht zu werden. In Wirklichkeit gehört sie aber gleich hinter dem Taylorschen Satz, indem sich die Frage nach den rationalen Schmiegungsfunktionen aufs natürlichste an die Frage nach den ganzen rationalen Schmiegungsfunktionen anschließt.

Capitel IV

Der Krümmungskreis

§ 21. Allgemeine Erörterungen, Ellipse:

An den Taylor'schen Satz schließt sich auch die Theorie des Krümmungskreis an
Vorbemerkung: In der Functionentheorie wird grundsätzlich zwischen der abhängigen und unabhängigen Variablen unterschieden also die eine bevorzugt. In der Functionentheorie legen wir daher ein sozusagen festes Coordinaten-System zu Grunde.

Daher thut man in der Functionentheorie recht, die Parabeln als die einfachsten Curven zu bevorzugen, weil sich bei ihnen die abhängige Variablen besonders einfach durch die unabhängige ausdrückt.

In diesem Punkte ist aber die Geometrie freier: sie betrachtet die Curve an sich ohne Coordinatensystem (x und y sind hier gleichwertig). Daher ist in der Geometrie nächst der Gerade der Kreis die einfachste Curve und nicht die Parabel. Man müsst also auch vom geometrischen Standpunkt

aus die Krümmung nicht durch die Krümmungsparabel, sondern durch einen Krümmungskreis.

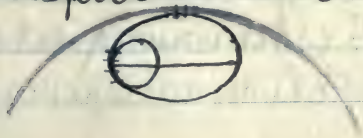
Die Gleichung des Kreises mit den Mittelpunktcoordinaten α, β und dem Radius ρ ist

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2$$

Wegen der 3 Constanten dürfen wir bestimmen, der Kreis soll eine gegebene Curve in 3 aufeinander folgenden Punkten schneiden (die Ordinate und die ersten beiden Diff.quotienten gemein haben).

Dem früheren entnehmen wir dann: Im Allgemeinen durchdringen sich Curve und Oscillationskreis. Eine Ausnahme tritt nur in solchen Punkten ein, wo Kreis und Curve zufälligerweise ausser den beiden ersten noch den dritten Diff.quotient gemein haben.

Beispiel an der Ellipse.



§ 22. Verschiedene Bestimmungswesen.
Wir wollen uns jetzt analytisch die Gleichung des Krümmungsradius ableiten.

Aus der Gleichung des Kreises folgt:

1. $y - \beta = \pm \sqrt{\rho^2 - (x - \alpha)^2}$ oder $y = \beta \pm \sqrt{\rho^2 - (x - \alpha)^2}$

2. $y' = \mp \frac{x - \alpha}{\sqrt{\rho^2 - (x - \alpha)^2}}$

3. $y'' = \mp \frac{\rho^2}{(\sqrt{\rho^2 - (x - \alpha)^2})^3}$

Wir verlangen, dass für diesen bestimmten Punkt x diese Größen dem Werte der Ordinate und den Werten der beiden ersten Diff. Quotienten der gegebenen Curve $y = f(x)$ gleich sind. Verstehen wir von jetzt an unter y, y', y'' eben diese Werte und unter x den bestimmten Punkt, indem wir den Krümmungskreis construieren wollen, so sind uns die Gleichungen 1), 2), 3) gleichzeitig die Bedingungen zur Bestimmung von α, β, ρ . Diese Bestimmung ist ein ziemlich umständliches Eliminationsverfahren,

bei dem man nur mit Kunstgriffen durchkommt.

Wir bilden uns:

$$1') \quad 1 + y'^2 = \frac{\rho^2}{\rho^2 - (x-a)^2}$$

$$2') \quad (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pm \rho^3}{\{\rho^2 - (x-a)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

Dividieren wir diese Gleichungen rechts und links durch die rechte und linke Seite von Gleichung 3), so ergibt sich:

$$4) \quad \mp \rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Diese merkwürdige Formel bestimmt uns die Größe des Krümmungsradius ρ . Da derselbe natürlich etwas positives sein soll, so müssen wir das obere oder untere Vorzeichen wählen, je nachdem y'' negativ oder positiv ist, je nachdem also die gegebene Curve nach unten ($y'' < 0$) oder nach oben ($y'' > 0$) concav ist.

Andererseits wollen wir 1') durch 3) dividieren:

$$3') \quad \frac{1 + y'^2}{y''} = \mp \sqrt{\rho^2 - (x-a)^2} = \rho - y$$

oder

$$5) \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Endlich multiplizieren wir noch 3') mit 2)

$$\frac{1+y'^2}{y''} y' = x - \alpha$$

oder

$$6) \quad \alpha = x - \frac{1+y'^2}{y''} y'$$

Die Lage und Grösse des Krümmungskreises ist durch die Gleichungen 4, 5, 6 vollkommen bestimmt.

Dabei heisst der reziproke Wert des Krümmungsradius $\frac{1}{\rho}$ kurzweg

„Die Krümmung“ an der betreffenden Stelle der Curve.

Es folgt hier eine geometrische Betrachtung der Krümmung wofür siehe Serret Chap. IV § 5, S. 195; sowie eine andere darauf bezügliche Ableitung derselben Formeln — siehe ebenda S. 196 und 198.

Abschnitt III

Erweiterungen der bisherigen Entwicklungen.

Capitel I

Singuläre Stellen der Funktionen.

§ 23. Beispiele und Figuren.

Wir haben uns früher viel mit der Frage beschäftigt, ob die Taylor'sche Reihe für eine gegebene Funktion statthaft ist, oder nicht.

Sicherlich ist sie dann unstatthaft, wenn die Funktion, oder einer ihrer Diff. quotienten gleich ∞ wird, oder wenn wir x_0 selbst ∞ gross wählen.

Denn an solchen Stellen verliert die Taylor'sche Formel jeden Sinn.

Wir nennen diese Stellen singuläre Stellen der Funktion.

Können wir aber vielleicht die Taylor'sche Formel so erweitern, dass sie auch für singuläre Stellen gilt? Die gründliche Entscheidung dieser Frage gehört in die Funktionentheorie.

Hier können wir nur einige Beispiele
beibringen, wie das geschah kann.

1. Nehmen wir

$$1. \quad y = x^{\frac{m}{n}}$$

unter m und n ganze positive Zahlen
ohne gemeinsamen Teiler verstanden.

Dann wird

$$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$y'' = \frac{m}{n} \left(\frac{m}{n}-1\right) x^{\frac{m}{n}-2}$$

etc

In der Reihe der Diff.quotienten, die
niemals abbricht, kommt schließlich
einmal ein negativer Exponent vor.

Von da an werden die Diff.quotienten
im Punkte $x=0$ unendlich gross.

Dieselbe Erscheinung tritt bei jedem
Glieder der folgenden Potenzreihe:

$$2. \quad f(x^{\frac{1}{n}}) \equiv a_0 + a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + \dots$$

früher oder später auf.

Die Functionentheorie zeigt nun,
dass eine Funktion y , deren Diff.
quotienten für $x=0$ unendlich werden,
wie die Function u s sich in eine Reihe

von der Form (2) in vielen Fällen entwickeln lässt.

2. Wir betrachten eine Funktion, die selbst ∞ wird: z. B.

$$3) \quad y = \frac{1}{x(a-x)}$$

also eine rationale Funktion.

Diese Funktion können wir für kleine Werte von x in folgender Weise entwickeln.

$$y = \frac{1}{ax} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1} = \frac{1}{ax} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots\right) = \frac{x^{-1}}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{x}{a^3} + \dots$$

Wegen der Unendlichkeitsstelle bei $x=0$ tritt in der Potenzreihe ein Glied mit negativem Exponenten auf. In der Funktionentheorie wird gezeigt, dass im Allgemeinen, negative Exponenten auftreten, wenn die zu entwickelnde Funktion sich wie die Funktion 3) oder allgemeiner wie eine rationale Funktion verhält.

Der Reihentypus, auf den man da kommt, ist dieser:

$$4) \quad \frac{\alpha_r}{x^r} + \frac{\alpha_{r-1}}{x^{r-1}} + \dots + \frac{\alpha_1}{x} + C + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots$$

3. Die Möglichkeiten 1 und 2 können auch in Combination treten, d. h. man gebraucht unter Umständen auch solche Reihen:

$$\frac{a_r}{x^k} + \frac{a_{r-1}}{x^{k-1}} + \dots + C + \beta_1 x^{\frac{1}{n}} + \beta_2 x^{\frac{2}{n}} + \dots$$

4. Im Punkte $x_0 = \infty$ können Reihen, die nach Potenzen von $x - x_0$ fortschreiten, sicher nicht gebraucht werden. Man hilft sich dann so, dass man setzt $x = \frac{1}{t}$, sodass dem Werte $t = 0$ der Wert $x = \infty$ entspricht.

Schreibt man $f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \varphi(t)$ so kann man unter Umständen $\varphi(t)$ in eine Reihe entwickeln, die nach (ganzen oder gebrochenen) Potenzen von t d. h. von $\frac{1}{x}$ fortschreiten; unter den Exponenten von t können auch einige negativ sein. So wird etwa:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x(x-a)}} = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a}{x}}} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{x} + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \dots\right)$$

Alle diese Möglichkeiten wollen wir noch durch Figuren erläutern, die

sich selbst wieder nur auf speziell herausgegriffene Beispiele beziehen.

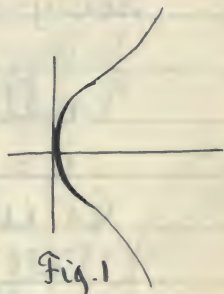
ad. 1) Wir betrachten den folgenden Fall der allgemeinen Reihe 2):

$$y = x^{\frac{1}{2}} + ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{5}{2}} + \dots$$

In der Nähe des Punktes $x=0$ wird die Curve mit hinreichender Genauigkeit durch das erste Glied dargestellt. Das gibt

$$y^2 = x$$

Die Curve verhält sich wie eine Parabel mit vertikaler Scheiteltangente



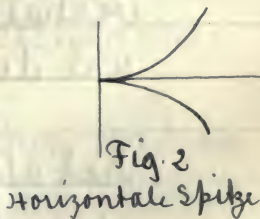
Ein anderer Fall der Reihe 2) ist der folgende:

$$y = x^{\frac{2}{3}} + ax^{\frac{4}{3}} + \dots$$

In erster Annäherung wird bei $x=0$

$$y^2 = x^3, \quad y' = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}, \quad y'' = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$$

Die Curve existiert nur für positive Werte von x , ein Teil verläuft oberhalb, ein Teil unterhalb der x -Axe.



Die Tangente in $x=0$ geht horizontal,
die Krümmung ist unendlich.

Ferner sei:

$$y = x^{\frac{1}{3}} + ax^{\frac{2}{3}} + \dots$$

In der Nähe des Nullpunktes wird

$$y' = x,$$

die Curve hat eine mit
der y -axe zusammen-
fallende Wendetangente.

Endlich sei:

$$y = x^{\frac{2}{3}} + ax^{\frac{1}{3}} + \dots$$

Es ist dieses derselbe.

Fall wie in Fig. 2, nur
dass die y - und die x -axe
vertauscht sind.

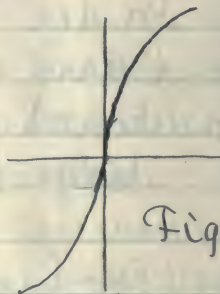


Fig. 3

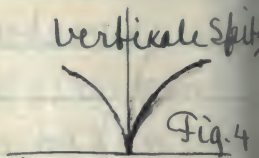


Fig. 4

Ad. 2 Die Curve

$$y = \frac{1}{x} + a + bx + \dots$$

verhält sich in der Nähe des Nullpunktes
wie die Hyperbel

$$y = \frac{1}{x}$$

hat also eine vertikale
Asymptote.

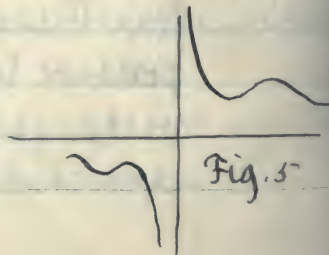


Fig. 5

In einiger Entfernung vom Nullpunkte, wo die Glieder $a+bx+\dots$ Einfluss gewinnen, kann sie aber ganz anders verlaufen.

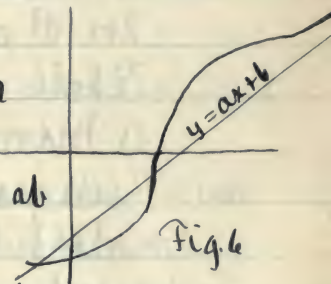
Ad 4. In der Nähe des Punktes $x_0 = \infty$ möge folgende Entwicklung gelten:

$$y = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \dots$$

Da betrachten wir vor allem die gerade Linie $y = ax + b$.

Die wirklichen Ordinaten der Curve weichen von den Ordinaten dieser Geraden ab nur um Größen, die mit wachsendem x verschwinden, nämlich um $\frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \dots$

Die Curve nähert sich daher dieser Gerade mit wachsendem x immer mehr. Sie hat eine nicht vertikale Asymptote.



Mit diesen erweiterten Reihen sind wir in der Lage, eine Revision der Theorie der max. und min. eintreten zu lassen.

Unser früheres Kriterium, welches sich auf reguläre Stellen analytischer Funktionen bezog, können wir am anschaulichsten so schreiben:

$$1.) \quad f' = 0 \quad \begin{cases} f'' < 0 & \text{Ma.} \\ f'' = 0 \\ f'' > 0 & \text{Mi.} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f''' < 0 & \times \\ f''' = 0 \\ f''' > 0 & \times \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f^{IV} < 0 & \text{Ma.} \\ f^{IV} = 0 \\ f^{IV} > 0 & \text{Mi.} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} f'' < 0 \\ f'' = 0 \\ f'' > 0 \end{cases}} \right\} \text{etc.}$$

wo \times weder Max. noch Min. bedeutet.

In Bezug auf Ma. und Mi. an singulären Stellen fügen wir nun noch hinzu:

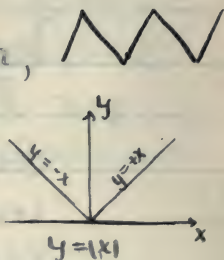
2) Man untersucht die sämtlichen singulären Stellen, indem man die dort etwa stattfindenden Reihenentwickelungen heranzieht.

Es gibt aber auch sogenannte willkürliche Funktionen, die keinem analytischen Gesetz der bislang betrachteten Art gehorchen.

Bei ihnen zieht weder das Kriterium 1 noch 2. Da heisst dann die einzige Regel: Man betrachte die Curve und gebrauche seinen gesunden Menschenverstand

Beispielsweise sieht es jeder
der Zickzack ? Linie an,

wo sie ihre Maxima hat
Ebenso, dass $y = |x|$ in $x=0$
ein Minimum besitzt.



§ 24. Die unbestimmten Formen der Analysis

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc

In Lehrbüchern heisst es,
man bestimme dann den wahren Wert
dadurch dass

Das ist nicht richtig, denn die Form
 $\frac{0}{0}$ ist wirklich völlig unbestimmt;
einen wahren Wert giebt es nicht;
wohl aber soll der nach dem Gesetze
der Stetigkeit sich ergebende Wert
d.h. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ verstanden werden für
den der Form $\frac{0}{0}$ etc zukommenden
Wert.

Die Behandlung geschieht wie bei
Stegemann und bei Serret.

Capitel II

Neue geometrische Anwendungen.

§ 25: Parameterdarstellung ebener Curven.

Die Parameterdarstellung kommt immer in der Mechanik vor, wo dann x, y den Ort eines beweglichen Punktes zur Zeit t bedeutet. Die Diff.quotienten haben dabei ihre charakteristische Benennungen; es heissen nämlich:
 $\varphi'(t), \psi'(t)$ die Componenten der Geschwindigkeit nach der x bez. y -Axe.
 $\varphi''(t), \psi''(t)$ die Componente der Beschleunigung in der Richtung der x bez. y -Axe.

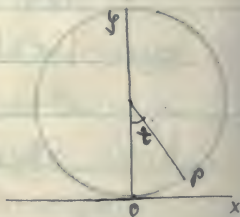
In der reinen Mathematik ist diese Darstellungsweise auch sehr nützlich.

Es folgen hier einige Beispiele von denen dieses das letzte ist:

Gleichung des Kreises:

$$x = r \sin t, \quad y = r - r \cos t$$

Die Gestalt der Curve wird offenbar nicht geändert,



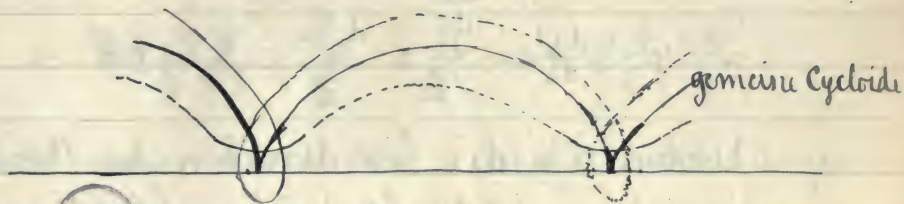
wenn wir statt t einen neuen Parameter τ einführen, wobei wir $t =$ irgend einer Funktion von τ setzen z. B. $t = \frac{\tau}{r}$.

Wir können die Gleichung des Kreises also auch so schreiben:

$$x = r \sin \frac{\tau}{r} \quad y = r - r \cos \frac{\tau}{r}$$

was für die Folge bequem sein wird.

§ 26. Excurs über die Cycloiden



Epicycloide

Pericycloide

Hypocycloide

Es werden die Gleichungen aller 12 Cycloiden abgeleitet (Parametendarstellung), wie sie in jedem besseren Lehrbuch zu finden sind.

Zum Schlusse dieses Paragraphen kehren wir zur Parametrisierung zurück:

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Wir wollen in dieser die Gleichung der Tangente, die Grösse des Krümmungsradius etc. berechnen.

Um unsere früheren Formeln übertragen zu können, müssen wir y' durch φ und ψ ausdrücken. Wir haben:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'}{\varphi'}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{\psi'}{\varphi'}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}{\varphi'^3}$$

Wenn x, y die Coordinaten des Berührungspunktes, α, β die laufenden Coordinaten der Tangente sind so war die Gleichung der Tangente

$$y - \beta = y'(x - \alpha)$$

Es wird also

$$\psi'(x - \alpha) - \varphi'(y - \beta) = 0$$

Die Gleichung der Normale war

$$y'(y - \beta) + (x - \alpha) = 0$$

Sie wird

$$\varphi'(x - \alpha) + \psi'(y - \beta) = 0$$

Das Bogenelement $ds = \sqrt{1+y'^2} \cdot dx$ wird

$$ds = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} \cdot dt$$

Der Contingenzwinkel lautet

$$d\omega = \frac{y'' \cdot dx}{1+y'^2}$$

und wird

$$d\omega = \frac{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}{\varphi'^2 + \psi'^2} dt$$

Der Krümmungsradius etc. werden:

$$\rho = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}$$

$$\alpha = \varphi - \psi' \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''} \quad \beta = \psi + \varphi' \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi' \psi'' - \psi' \varphi''}$$

Alle diese Formeln sind nicht kürzer als die früheren, aber symmetrischer.

§ 27 Evolutentheorie.

Die Evolutentheorie ist behandelt wie in Szigemann-Kiepert § 90.

Man kann die Evolute immer so realisieren, dass man die Zeichenebene mit Streusand bedeckt, und ein Lineal längs der Evolute senkrecht zu

dieser führt. Das Lineal schiebt den Streusand zur Seite. Die Grenze zwischen dem mit Streusand bedeckten und dem freien Gebiete der Ebene ist die Curve der Krümmungscentra.

Wenn man einen Faden an einer Curve aufwickelt, so beschreibt der Endpunkt des Fadens eine Curve, deren Krümmungsradius in jedem Punkte durch das zugehörige gespannte Stück des Fadens vorgestellt wird.

Als Beispiele folgen

- 1) Die Ellipse siehe Stegemann Kiepert § 91, II
- 2) " Cycloide " " " " " , II

§ 28 Polarcoordinaten. Logarithmische Spirale.

Wie bekannt ist

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

Durch die Gleichung $r = f(t)$ ist offenbar eine Curve bestimmt. Für diese erhalten wir die spezielle Parameterdarstellung:

$$x = f(t) \cos t = \varphi(t), \quad y = f(t) \sin t = \psi(t)$$

3 bemerkenswert ist der Ausdruck für $\operatorname{tg} \nu$ — (ν der Winkel des Radiusvektors gegen die Normale) —

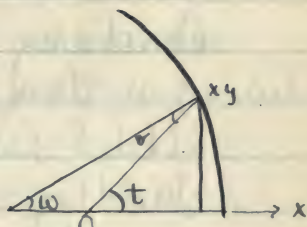
nach der Fig. ist $\nu = t - \omega$

also

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg} t \operatorname{tg} \omega}$$

In Polarkoordinaten wird

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{r' \cos t - r \sin t}{r' \sin t + r \cos t}, \quad (r' = \frac{dr}{dt})$$



Trägt man dieses ein, so wird:

$$1) \quad \operatorname{tg} \nu = \frac{r'}{r}$$

Ferner berechnet man den Ausdruck des Krümmungsradius

$$2) \quad \rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r r'' - r' r''}$$

Beispiel: logarithmische Spirale:

$$r = e^{kt} \quad \text{oder} \quad t = \frac{1}{k} \log r$$

Daher

$$r' = k e^{kt}, \quad r'' = k^2 e^{kt}$$

so sind nach Gl'en 1) und 2)

$$3) \quad \operatorname{tg} \nu = k, \quad \rho = \sqrt{1+k^2} \cdot r$$

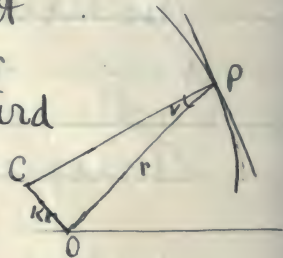
Bei der log. Spirale ist also v eine Constante und der Krümmungsradius ρ ist dem Radiusvector r proportional. Aus der Constanz von v folgt, dass auch der Winkel $\frac{\pi}{2} - v$, den der Radiusvector mit der Tangent bildet eine Constante ist.

Die log. Spirale schneidet also alle von O ausgehenden Strahlen unter einem constanten Winkel, sie ist, wie man sagt, eine isogonale Trajektorie des Strahlenbüschels O .

An die Formel 3) knüpft folgende Construction an:

Wir tragen in O senkrecht zu $OP = r$ die Strecke $OC = kr$ ab und ziehen CP , dann wird

$$\frac{CO}{OP} = k = \operatorname{tg} \angle CPO = \operatorname{tg} v$$



$$CP = \sqrt{CO^2 + OP^2} = \sqrt{1+k^2} \cdot r = \rho$$

Unser rechtwinkliges Dreieck COP liefert uns also durch die Richtung seiner Hypotenuse die Normale, durch die Länge derselben den Krümmungsradius und

durch den Eckpunkt C des Krümmungscentrums der log. Spirale.

Schliesslich berechnen wir noch die Evolute unserer Curve. Es seien R und T die Polarcoordinaten des Punktes C der Evolute:

$$R = kr^2 \quad T = t + \frac{\pi}{2}$$

Aus der Gleichung $r = e^{kt}$ ergibt sich

$$R = k e^{k(T - \frac{\pi}{2})} = e^{k(T - [\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k} \log k])}$$

Die Evolute der log. Spirale ist also wieder eine log. Spirale (cf Cycloide), welche sich aus der ursprünglichen Spirale ergibt, wenn wir sie um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k} \log k$ drehen.

Der Entdecker des schönen Satzes ist Jakob Bernoulli. Die Worte, die er auf seinen Grabstein setzen liess:

Sternum renata resurgo:

beziehen sich auf die log. Spirale.

§ 29 Implicite Curvendarstellung.

Bisher betrachteten wir nur Curven, deren Gleichungen in der expliciten

Form gegeben waren: $y = f(x)$,
d.h. eigentlich Funktionen einer Veränderlichen
vielfach ist es jedoch bedeutend zweck-
mässiger die implizite Form

$$F(x, y) = 0$$

anzuwenden.

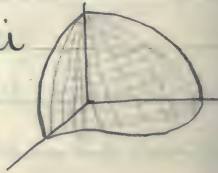
Bei der Untersuchung dieser, treten wir
nicht aus dem Gebiete der Funktionen-
theorie heraus, sondern wir kommen nur
in das Gebiet zweier (willkürlichen)
variablen hinein.

Wollen wir nämlich die Gesamtheit
der Werte überblicken, welche $F(x, y)$ annehmen
kann, so werden wir

$$z = F(x, y)$$

setzen und werden diese Funktion als
eine Fläche im Raume deuten.

Die Curve $F(x, y) = 0$ ist dabei
die Spur dieser Fläche
in der x, y -Ebene.



Insofern leitet die Betrachtung der
impliziten Gleichung $F(x, y) = 0$ bereits
in das Gebiet der Funktionen zweier

Veränderlichen, welches direkt erst im nächsten Capitel behandelt werden kann. Wir entnehmen bereits hier daraus den Begriff der partiellen Diff. quotienten.

Die Funktion $F(x, y)$ ändert sich sowohl wenn man x , als wenn man y ändert. Wir haben daher jetzt zwei sogenannte partielle Diff. quotienten zu betrachten:

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Hier benutzt man nach Jacobi statt der "d" die runden "ö".

Die korrekte Schreibweise würde eigentlich sein

$$\frac{d_x F}{dx}, \quad \frac{d_y F}{dy}$$

d.h. man soll den Quotienten bilden, aus der Änderung $d_x F$ von F bei Änderung von x , und der Änderung dx von x .

Schreiben wir dann die Gleichung

$$dF = d_x F + d_y F$$

so gibt diese den richtigen Sinn, dass sich die Gesamtänderung von F additiv zusammensetzt aus den Änderungen, welche einer blossen Änderung des x und des y einzeln entsprechen. Diese Schreibweise hat sich aber nicht eingebürgert.

Aus jeder der Funktionen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ entstehen wieder zwei neue Diff. quotienten, die sogenannten zweiten partiellen Diff. quotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad | \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Dabei wollen wir vorläufig annehmen, dass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

ist, was weiter unten genauer behandelt werden wird.

Wir berechnen nun die Fortschrittingsrichtung $\frac{dy}{dx}$ auf einer Curve $F(x, y) = 0$, die wir als Spur der Fläche $z = F(x, y)$ in der x, y -Ebene auffassen, durch die partiellen Diff. quotienten.

Allgemein werden wir haben

$$z + dz = F(x, y) + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Da aber längs unserer Curve sowohl z als $dz = 0$ ist, so erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Wir berechnen auch noch die zweiten totalen Diff. quotienten durch die zweiten partiellen Diff. quotienten
Wir haben

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = d \frac{dy}{dx}$$

Denken wir uns $\frac{dy}{dx}$ nach der vorhergehenden Gleichung durch $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ ausgedrückt, so wird $\frac{dy}{dx}$ eine Funktion von x und y . Die Änderung $d \frac{dy}{dx}$ zerlegt sich daher in je eine partielle Änderung nach x und nach y . Wir bekommen also:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\partial \frac{dy}{dx}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{dy}{dx}}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \right)}{\partial y} \frac{dy}{dx} \\ &= - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2} + \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2} \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3} = \frac{D}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

Die Determinante D entsteht dadurch, dass man die in gewisser Weise neben einander geschriebenen zweiten Diff. Quotienten mit den ersten Diff. Quotienten "rändert".

Die Gleichung der Tangente an die Curve $F(x, y) = 0$ im Punkte x_0, y_0 nimmt nun folgende Form an:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) = 0$$

Das Zeichen $()_0$ bedeutet dabei, dass das eingeklammerte für die Werte x_0, y_0 zu bilden ist. Der Krümmungsradius wird:

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{D}$$

etc.

Die neuen Formeln sind wieder etwas länger, aber dafür symmetrischer.

Berechnen wir hiernach Tangente und Krümmungsradius der Ellipse.

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Hier werden die ersten Diff.quotienten $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}$
" " " " " " $\frac{\partial x}{\partial t}, 0, 0, \frac{\partial y}{\partial t}$

Daher wird die Gl. der Tangente

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y-y_0) = 0$$

oder

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

da x_0, y_0 ein Punkt der Ellipse ist.

Der Krümmungsradius ist einfach:

$$\rho = \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^4 b^4}$$

§ 30. Theorie der singulären Punkte.

Dagegen liefert uns die implizite Darstellung hinsichtlich der singulären Punkte ganz etwas neues. Hier kommt die wahre Natur der singulären Punkte zum Ausdruck, während bei der expliziten Darstellung zum Teil nicht singuläre Punkte singular erscheinen,

zum Teil wirkliche Singularitäten verborgen bleiben. Zwei Beispiele werden dieses erläutern.

1) Ellipse: Ihre explizite Gleichung $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ liefert für $x = \pm a$: $y' = 0$, $y'' = 0$, also scheinbar einen singulären Punkt, was durchaus nicht stattfindet, ebenso wenig wie bei der impliziten Darstellung, in welcher $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ wird.

2) Lemniskate: Ihre Gleichung schreibt sich am einfachsten in Polarkoordinaten:

$$r^2 = \cos 2t,$$

woraus als implizite Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten folgt:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

Löst man nach y^2 auf, so wird:

$$y^2 = \frac{-1 - 2x^2 \pm \sqrt{1 + 8x^2}}{2}$$

Das negative Zeichen von der Wurzel brauchen wir nicht zu berücksichtigen, das es nur imaginäre Werte für y liefert. Wiederum erscheint hier $x = \pm 1$ als singulärer Punkt, weil dort $y' = \infty$ wird, während in der

Fig. dieser Punkt sich als ganz gewöhnlicher
 Curvenpunkt erweist. Vielmehr besitzt die
 Curve eine wirkliche Singularität nur
 im Punkte $x=0, y=0$ wo sie einen Doppelpunkt
 hat. Dieser kommt aber in der expliziten
 Gleichung nicht zur Geltung. In der That
 bleiben hier alle Diff.quotienten von y stetig.
 Der Grund liegt darin, dass wir durch
 Ausrechnung von y die Lemniskate
 künstlich in zwei Äste zerlegt haben:
 $y = +\sqrt{\quad}$ $y = -\sqrt{\quad}$, sodass wir an
 einem einzelnen derselben den Doppelpunkt
 nicht constatieren können.

Anderes ist es bei der impliziten Gleichung.
 Wir wollen das Criterium sogleich an
 der allgemeinen Gleichung $F(x, y) = 0$
 entwickeln. (x, y) sei ein fester Punkt,
 h und k Zuwächse von x und y beliebig klein.
 Dann bedeutet $x+h, y+k$ einen in der Nähe
 von x, y gelegenen Punkt. Wir denken uns
 nun $F(x+h, y+k)$ nach Potenzen von h und k
 geordnet. Es ergibt sich:

$$F(x+h, y+k) = F(x, y) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k \right)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2 \right) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} k^3 \right)$$

+

$$= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

Damit anticipieren wir allerdings schon den Taylor'schen Satz für zwei variable, dessen Gültigkeit erst im nächsten Capitel untersucht werden kann.

Das hat aber hier nichts Bedeutsames, weil die Entwicklung eines Polynoms $F(x, y)$ immer durch wiederholte Anwendung des binomischen Lehrsatzes bewerkstelligt werden kann, die dann aber zu unserer Formel hinführt.

Nun sei x, y ein Kurvenpunkt; dann ist $y_0 = 0$.

Denken wir uns h und k genügend klein, so wird in der Nähe von x, y die Funktion in erster Annäherung dargestellt durch die Gleichung $u_1 = 0$. Aus dieser Gleichung ergibt sich ein ganz bestimmter Wert für h/k , d. h. für die Fortschrittingsrichtung der Curve

Anders wenn u_1 für alle Werte von h und k verschwindet, wenn $u_1 = 0$. Dann sagt uns die Bedingung $u_1 = 0$ gar nichts über die Fortschrittingsrichtung aus und wir müssen, um eine angenäherte Darstellung von $F(x, y) = 0$ zu erhalten, die 4 Glieder zweiter Ordnung gleich 0 setzen: $u_2 = 0$. Diese Gleichung liefert zwei Werte für $h : k$, also zwei Fortschrittingsrichtungen. Wenn auch $u_2 = 0$, so müssen wir bis zu Gliedern 3ter Ordnung gehen. Wir kommen daher zu folgender Tabelle:

| Wenn | Ist $F(x, y) = 0$ in weiter Annäherung gegeben durch: | Dann haben wir einen |
|--|---|----------------------|
| $u_1 \neq 0$ | $u_1 = 0$ | gewöhnlichen Pkt. |
| $u_1 = 0 \quad u_2 \neq 0$ | $u_2 = 0$ | Sattelpunkt |
| $u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad u_3 \neq 0$ | $u_3 = 0$ | Dreifachenpunkt |
| - - - | - - - | - - - |

Das Kriterium für einen gewöhnlichen Punkt ist also $u_1 \neq 0$ und die angenäherte Darstellung von $F(x, y) = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie und zwar genau die Gleichung der Tangente.

Das Kriterium für einen Doppelpunkt lautet: $u_1 \equiv 0$, $u_2 \neq 0$, d. h. im Doppelpunkt ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

während die zweite Diff. Quotienten nicht sämtlich verschwinden.

Die Curve wird hier in erster Annäherung gegeben durch die Gleichung $u_2 = 0$ oder

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2 = 0$$

Diese Gl. liefert zwei Werte für $h:k$, also zwei Fortschreitungsrichtungen, oder ein Tangentenpaar. Die Ausrechnung der quadratischen Gl. für $h:k$ giebt:

$$\frac{h}{k} = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

Wenn die Quadratwurzel ist
 reell, so sind 2 reelle Fortschreitungsricht.; eigentlich Dop. Pkt. \times
 null " " 2 zusammenfallende " ; Spitze \times
 imaginär " 2 imaginäre " ; isolierter Pkt.

Daraufhin prüfen wir die Gl. der Lemniskate:

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

Im P. $x=0, y=0$ wird

$$F(x+h, y+k) = (h^2 + k^2)^2 - (h^2 - k^2)$$

Es ist dann

$$0 = x + (k^2 - h^2) + x + (k^2 + h^2)^2$$

Wie wir sehen ist $u_1 = 0$ $u_2 \neq 0$.

Die Lemniskate hat also im Anfangspunkte einen Doppelpunkt. Die Gleichung $k^2 - h^2 = 0$ liefert die beiden reellen Wurzeln: $\frac{k}{h} = \pm 1$. Wir haben also einen eigentlichen Doppelpunkt, dessen Äste unter 45° gegen die Koordinatenachsen geneigt sind.

Abschnitt IV.

Funktionen zweier Variablen.

Capitel I

Grundlegung

§ 31. Einfachste Beispiele.

Eine Funktion $z = f(x, y)$ kann in jedem Falle durch eine Fläche repräsentiert werden.

Unter den rechnerisch definierten Funktionen sind die einfachsten die Paraboloide.

Darunter fällt z. B. die Gl. der Ebene

$$z = ax + by$$

auch die Gl. des gewöhnlichen Paraboloids

$$z = ax^2 + bxy + cy^2$$

Je nachdem diese Gl. sich durch geeigneter Wahl der Coordinatenachsen in eine der folgenden 3 Normalformen bringen lässt, unterscheidet man die folgenden 3 Typen:

elliptisches Paraboloid: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

hyperbolisches " : $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

parabolisches Cylinder: $z = \frac{x^2}{a^2}$

§ 32. Partielle Differentialquotienten nebst dem Satze $s = s'$.

Die ersten Diff. quotienten:

Wir wollen uns nun die Bedeutung der Diff. quotienten

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} \quad q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

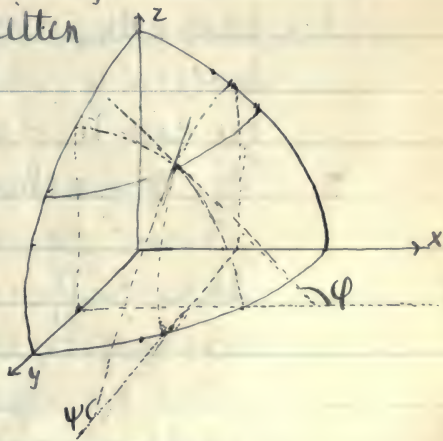
klar machen.

Wenn wir p bilden, betrachten wir y als constant, d. h. wir betrachten die Veränderung von z längs einer Curve, welche durch die Ebene $y = \text{const.}$ aus der Fläche ausgeschnitten

wird. Construieren wir die Tangente an diese Curve, und bringen sie zum Schnitt mit der x y -Ebene, so wird nach früherem

$\text{tg } \varphi = p$, wo φ

derjenige Winkel ist, welchen die Tangente mit der x Axe bildet. Ebenso wird $\text{tg } \psi = q$, wo ψ den Winkel bedeutet, welchen die in



der Ebene $x = \text{const.}$ verlaufende Flächentangente mit der y -Achse bildet.

Gehen wir nicht gerade in der Richtung $dy = 0$ bez. $dx = 0$, sondern in einer mittleren Richtung auf der Fläche vorwärts, so ist der Zuwachs von z gegeben durch

$$dz = p dx + q dy.$$

Soll z während der Bewegung gar nicht wachsen, d. h. sollen wir uns auf einer Niveaucurve bewegen, so müssen wir es so einrichten, dass in jedem Augenblick

$$p dx + q dy = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q} \text{ ist.}$$

Wollen wir andererseits immer rechtwinklig zu den Niveaulinien gehen, so müssen wir $\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}$ machen. Man nennt die entstehende Curve die Curve stärksten Falles.

Ihre Differentialgleichung, so können wir sagen, ist

$$q dx - p dy = 0.$$

Wollen wir noch zusehen, wie rasch wir auf einer Falllinie in die Höhe kommen? Dann müssen wir nach dem dz fragen, welches einem so gewählten dx, dy entspricht

Setzen wir $ds^2 = dx^2 + dy^2$, so haben wir wegen der Diff. Gleichung

$$dx = \frac{p ds}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad dy = \frac{q ds}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

$$dz = p dx + q dy = \sqrt{p^2 + q^2} \cdot ds.$$

Hier können wir auch $\frac{dz}{ds}$ geometrisch deuten. Es wird $\frac{dz}{ds}$ oder $\sqrt{p^2 + q^2}$ gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels gegen die xy -Ebene, unter welchem die Curve stärksten Falles ansteigt. Durch solche Betrachtungen können wir den Begriff der partiellen Diff. Quotienten beleben.

Die zweiten Diff. Quotienten

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad s' = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Zunächst entsteht die Frage, unter welchen Bedingungen ist $s = s'$?

Zur Entscheidung darüber müssen wir natürlich auf die Definition des Diff. Quotienten zurückgehen.

Die genaue Definition des ersten Diff. Quot. ist:

$$p = \left(\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \right)_{\lim h=0}, \quad q = \left(\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \right)_{\lim k=0}$$

Daraus folgt:

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{(f(x, y+k) - f(x, y))_{\lim k=0}}{k} \\ = \frac{\left(\left(\frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h} \right)_{\lim h=0} \cdot \left(\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \right)_{\lim k=0} \right)}{k}$$

$$s = \left(\frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{hk} \right)_{\lim h=0, \lim k=0}$$

Hierbei ist wesentlich, dass zuerst h und dann k zu Null gemacht wird. Analog berechnet man

$$s' = \left(\frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{hk} \right)_{\lim k=0, \lim h=0}$$

wobei wir jetzt zuerst k und dann h gleich Null zu setzen haben. Die Frage also ob $s = s'$ ist, ist identisch mit der folgenden ob es erlaubt ist, die Grenzübergänge $h=0, k=0$ zu vertauschen: a priori kann man darüber gar nichts aussagen.

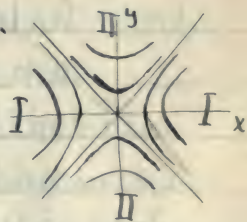
Wir wollen uns einmal künstlich ein Beispiel konstruieren, in dem $s \neq s'$ ist. Zunächst betrachten wir

$$z = |x^2 - y^2|$$

(dem absoluten Betrage von $x^2 - y^2$).

Die Gleichung $z = x^2 - y^2$ bez. $z = y^2 - x^2$ stellen je ein hyperbolisches Paraboloid dar, dessen Schnittgeraden mit der $z=0$ Ebene unter 45° gegen die x - und y -axe geneigt sind. Diese zerlegen die xy -Ebene in 2 Sektoren I und in 2 Sektoren II.

In den Sektoren I wird unsere Fläche mit dem ersten, in den Sektoren II mit dem zweiten Paraboloid identisch.



Sie stellt im Ganzen eine Art Kränzgewölbe dar.

Die Anschauung ergibt unmittelbar, dass z eine eindeutige und stetige Funktion von x und y ist. Am bequemsten wird die Gl. der Fläche in Polar Coordinaten r und t , wo sie lautet:

$$z = r^2 |\cos 2t|.$$

Nun ist $s = \frac{dp}{dy}$ d. h. s ist die Geschwindigkeit mit welcher p wächst, wenn ich von einem Punkte x, y parallel zur y -Achse fortschreite während p die Neigung einer gewissen Flächentangente gegen die Horizontalebene bedeutet. Ebenso ist s' die Geschwindigkeit mit welcher die Neigung q wächst, wenn ich von dem Punkte x, y im Sinne der x -Achse weiter gehe. Wir wollen s und s' im Punkte $x=0, y=0$ bilden. Zu dem Zwecke haben wir in O einmal die Tangente an die Schnittcurve unserer Fläche mit der Ebene $y=0$ zu construieren und nächzusehen, wie sich ihre Neigung ändert, wenn wir die Ebene in der Richtung der y -Achse verschieben. s ist also aus dem Verlaufe der Fläche in den Sektoren II zu beurteilen. Bei s' haben wir die Tangente an die Schnittcurve von $x=0$ mit unserer Fläche zu ziehen und diese in der Richtung der x -Achse zu verschieben. s' ist also aus dem Verlaufe der Fläche in den Sektoren I zu beurteilen.

Nur ist aber die Tangente in allen über der y -Axe gelegenen Punkten horizontal, d. h. es ist in allen diesen Punkten $p=0$, und daher auch $s=0$.

Ebenso ist die Tangente in allen über der x -Axe gelegenen Punkten horizontal, also $q=0$ und daher auch $s'=0$. Ins Besondere ist also im Nullpunkte $s=s'=0$.

Man bestätigt dieses auch direkt durch Rechnung. Es folgt nämlich aus der in II gültigen Gl. $z=y^2-x^2$: $s=0$; und aus der in I gültigen $z=x^2-y^2$: $s'=0$.

Die Gleichheit von s und s' rührt hier aber nur von den besonderen Symmetrieverhältnissen der Fläche her. Die Sache wird sofort anders, wenn wir die Fläche ein wenig um die z -Axe drehen etwa um den Winkel α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$). Jetzt ist die Flächentangente (p) in den über der positiven y -Axe gelegenen Punkten ein wenig nach unten geneigt, d. h. hier ist $p < 0$. Nur im Nullpunkte selbst ist auch jetzt $p=0$. Es wird also im Nullpunkte:

$\frac{dy}{dx} < 0$ oder $s < 0$.

Umgekehrt ist nach der Drehung die Flächentangente q in den über der positiven x -Achse gelegenen Punkten ein wenig nach oben gehoben, es wird hier also $q > 0$, während im Nullpunkte $q = 0$ bleibt. Also wird $\frac{dy}{dx} > 0$ oder $s' > 0$.
Mithin ist nunmehr $s \neq s'$.

Dieses können wir auch leicht analytisch bestätigen: Beim Rechnen ist es immer so, dass man mühelos zum Ziele kommt, aber ohne zum Nachdenken gezwungen zu sein. Darin liegt der Vorzug und der Nachteil des rein rechnerischen Verfahrens.

Durch die Drehung geht die Gleichung unserer Fläche in Polarkoordinaten über in die folgende:

$$z = |r^2 \cos 2(t-\alpha)| = |\cos 2\alpha \cdot r^2 \cos 2t + \sin 2\alpha \cdot r^2 \sin 2t| \\ = |\cos 2\alpha \cdot (x^2 - y^2) + 2 \sin 2\alpha \cdot xy|$$

d. h.

$$z = \cos 2\alpha (x^2 - y^2) + 2 \sin 2\alpha \cdot xy \quad \text{in I}$$

$$z = -\cos 2\alpha (x^2 - y^2) - 2 \sin 2\alpha \cdot xy \quad \text{in II}$$

Daraufhin finden wir:

$$s = -2 \sin 2\alpha \quad (\text{aus II})$$

$$s' = +2 \sin 2\alpha \quad (\text{" I})$$

woraus sich richtig ergibt $s \neq s'$.

Um die Sache ganz klar zu machen, wollen wir uns p, q, s und s' in ihrem Verlauf auf der ganzen Fläche vorstellen. Wir haben

$$p = 2x \cos 2\alpha + 2y \sin 2\alpha \quad q = -2y \cos 2\alpha + 2x \sin 2\alpha$$

in I. In II ergeben sich dieselben Ausdrücke nur mit negativem Vorzeichen. Insbesondere wird längs der Trennungslinie $t = \alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$p = \rho \sqrt{2} (\cos \alpha + \sin \alpha), \quad q = \rho \sqrt{2} (-\cos \alpha + \sin \alpha) \quad \text{in I}$$

$$p = -\rho \sqrt{2} (\cos \alpha + \sin \alpha), \quad q = -\rho \sqrt{2} (-\cos \alpha + \sin \alpha) \quad \text{in II.}$$

wo ρ den Abstand vom Nullpunkte bedeutet.

Die Diff. Quotienten sind also längs dieser Trennungslinie unstetig. Das gleiche

ergibt sich für die andere Trennungslinie $t = \alpha = -\frac{\pi}{4}$. Nur im Nullpunkte ($\rho = 0$) schließen sie sich stetig an einander an.

Für die zweiten Diff. Quotienten findet man:

$$r = 2 \cos \alpha, \quad s = 2 \sin 2\alpha = s', \quad t = -2 \cos \alpha \quad \text{in I}$$

$$r = -2 \cos \alpha, \quad s = -2 \sin 2\alpha = s', \quad t = +2 \cos \alpha \quad \text{in II.}$$

Die zweite Diff. Quotienten haben innerhalb der Sektoren I und II je feste Werte, welche sich längs der Trennungslinie und auch im Nullpunkte unstetig aneinander schliessen. Die Verschiedenheit der Werte s und s' im Nullpunkte erklärt sich nun auf das einfachste. Innerhalb der einzelnen Sektoren ist allerdings überall $s = s'$.

Aber: der Nullpunkt bezieht sein s aus dem Sektor II, sein s' aus dem Sektor I; da in jenem überall $s' = -2 \sin 2\alpha$, in diesem $s = +2 \sin 2\alpha$, müssen im Nullpunkte s und s' verschieden ausfallen.

Wir beweisen nun den allgemeinen Satz: Wenn die stetige Funktion $z = f(x, y)$ erste Diff. Quotienten p und q besitzt, welche stetig sind, wenn ferner auch die zweiten Diff. Quotienten $s = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ und $s' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ stetige Funktionen sind, so wird notwendigerweise $s = s'$.

Zu dem Zwecke betrachten wir den Quotienten

$$s = \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)}{hk}$$

in welchem h und k endliche Größen
bedeuten. Wenn wir die Abkürzung einführen

$$f(x, y+k) - f(x, y) = \varphi(x, y)$$

so können wir den Zähler von S schreiben:

$$\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)$$

Auf Grund der Voraussetzung über f
darf φ nach dem Taylor'schen Satze
hinsichtlich der Variablen entwickelt werden,
falls wir alle Glieder hinter den ersten in
ein Restglied zusammenfassen.

Wir haben nämlich:

$$\varphi(x+h, y) = \varphi(x, y) + h \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x + \theta h, y), \quad [0 \leq \theta \leq 1]$$

Mithin wird:

$$S = \frac{1}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x + \theta h, y) = \frac{p(x + \theta h, y+k) - p(x + \theta h, y)}{k}$$

Auf Grund der Voraussetzung über p
können wir nach dem Taylor'schen
Satze wiederum ansetzen, indem wir
jetzt y als Variable ansetzen:

$$p(x + \theta h, y+k) = p(x + \theta h, y) + k \frac{\partial p}{\partial y}(x + \theta h, y + Hk), \quad [0 \leq H \leq 1]$$

Also wird:

$$S = \frac{\partial p}{\partial y}(x + \theta h, y + Hk) = s(x + \theta h, y + Hk).$$

Auf ganz analoge Weise erhalten wir, wenn wir den Zähler in S etwas anders zusammenfassen und die Abkürzung

$$\Psi(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y)$$

einführen:

$$S = \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi(x, y+H'k)}{\partial x} = \frac{g(x+h, y+H'k) - g(x, y+H'k)}{h}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} g(x+O'h, y+H'k) = s'(x+O'h, y+H'k)$$

wo wiederum O', H' echte Brüche sind.

Wir haben daher

$$s(x+O'h, y+H'k) = s'(x+O'h, y+H'k)$$

welches für jedes von 0 verschiedene h und k und für geeignet gewählte O', H, O', H' richtig ist. Lassen wir nun h und k in dieser Gl.

0 werden und berücksichtigen wir die Voraussetzung über die Stetigkeit von s und s' so folgt in der That

$$s(x, y) = s'(x, y) \quad \text{q. e. d.}$$

In dem letzten Beispiel sind die Voraussetzungen dieses Satzes nicht erfüllt. Daher stoßen wir überall auf Hemmungen, falls wir versuchen, die vorstehenden Überlegungen auf jenen Fall zu übertragen.

Dieselbe. Betrachtungen sind nun auch bei den dritten Diff. Quotienten durchzuführen. Es gibt im Ganzen 8 dritte Diff. Quotienten, von denen je die folgende 3 einander gleich sind, falls man die gehörigen Stetigkeitsvoraussetzungen macht:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} ; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$$

Allgemein können wir sagen. Solange keine Unstetigkeit in den Diff. Quotienten auftritt, darf die Reihenfolge der partiellen Differentiationen vertauscht werden.

- §33. Der Taylor'sche Satz bei zwei Variablen. Wir wollen uns jetzt Paraboloiden von der 1., 2., 3.-Ordnung construieren, welche mit einer gegebenen Funktion $z = f(x, y)$ an der Stelle x_0, y_0 in dem Werte von z und den Diff. Quotienten bez. bis zur 1ten, 2ten, 3ten - Ordnung inclusive übereinstimmen. Wir nennen sie "Schmiegungsparaboloid".

Das Paraboloid erster Ordnung bezeichnen wir, wie üblich, als Tangentialebene.

Die Diff. Quotienten an der Stelle x_0, y_0, z_0 seien bezw. p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 etc. Man sieht es den folgenden Paraboloiden sofort an, dass sie für x_0, y_0, z_0 eben diese p_0, q_0, \dots als Diff. Quotienten ergeben.

$$1) \quad z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$$

$$2) \quad z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + \frac{1}{2} \{ r_0(x - x_0)^2 + 2s_0(x - x_0)(y - y_0) + t_0(y - y_0)^2 \}$$

$$3) \quad z - z_0 = p_0(x - x_0) + \dots \dots \dots$$

etc.

Wir legen nun durch den Punkt x_0, y_0, z_0 ein Bündel Ebenen hindurch, welche sämtlich der z -Achse parallel laufen und nennen sie "Meridianebenen". Ihre Schnittlinien mit der xy -Ebene bilden ein Strahlenbüschel, welches durch die Gl. gegeben ist:

$$x - x_0 = R \cos \vartheta, \quad y - y_0 = R \sin \vartheta$$

oder

$$x = x_0 + R \cos \vartheta, \quad y = y_0 + R \sin \vartheta$$

Hier bedeutet R den Abstand vom Punkte x_0, y_0 , ϑ den Winkel des einzelnen Strahles

mit der x -Axe. Letztere Größe liefert einen Parameter, durch welchen wir die einzelnen Strahlen bez. Ebenen unterscheiden können. Bei festem ϑ und variablem R bewegt sich x, y auf einem festen Strahle bez. auf einer festen Ebene des Buschels.

Wir bringen unsere Meridianebenen sowohl mit der Fläche F , wie mit dem Paraboloiden zum Schnitt; jeder einzelnen Ebene (d.h. jedem ϑ) entspricht auf der Fläche eine Curve, deren Gl. in dem rechtwinkligen Coordinaten R und z so lautet:

$$z = F(x_0 + R \cos \vartheta, y_0 + R \sin \vartheta)$$

Entsprechend lauten die Gleichungen für die Schnittcurve mit dem Paraboloiden

1) und 2)

$$1) \quad z - z_0 = \{p_0 \cos \vartheta + q_0 \sin \vartheta\} R$$

$$2) \quad z - z_0 = (p_0 \cos \vartheta + q_0 \sin \vartheta) R$$

$$+ \frac{1}{2!} (r_0 \cos^2 \vartheta + 2 s_0 \sin \vartheta \cos \vartheta + t_0 \sin^2 \vartheta) R^2$$

Die Coefficienten von R und R^2 in 1) und 2) sind nichts anderes als die Diff. quotienten $\frac{dz}{dR}$ und $\frac{d^2z}{dR^2}$, gebildet für die einzelne Curve $\vartheta = \text{const.}$ auf der Fläche $z = F$.

Es ist nämlich

$$3) \quad \frac{\partial z}{\partial R} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dR} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dR} = p \cos \vartheta + q \sin \vartheta$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial R^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dR}\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{dx}{dR} \frac{dy}{dR} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dR} \frac{dx}{dR} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dR}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{d^2 x}{dR^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d^2 y}{dR^2}\right).$$

Die Glieder in () verschwinden, weil $\frac{dx}{dR}$ und $\frac{dy}{dR}$ längs der Schnittcurven Constanten sind, $\frac{d^2 x}{dR^2}$ und $\frac{d^2 y}{dR^2}$ also = 0 sind.

Mithin folgt:

$$4) \quad \frac{d^2 z}{dR^2} = r \cos^2 \vartheta + 2s \sin \vartheta \cos \vartheta + t \sin^2 \vartheta.$$

Spezialisieren wir die Ausdrücke 3) in 4) ins Besondere für den Punkt x_0, y_0, z_0 , so geben sie in der That in die Coefficienten von R und R^2 in Gl'en 1') und 2') über, wie behauptet wurde.

Wir schliessen daraus:

Die Schnittcurven einer bestimmten Meridianebene mit den Schmiegungsparaboloiden sind gleichzeitig die Schmiegungscurven für die Schnittcurven derselben Meridianebene mit der gegebenen Fläche im Sinne des Taylor'schen Satzes

einer Variablen.

Man wird nach einer bequemen Formel fragen, um allgemein die Schmiegun-
gsparaboloide höherer Ordnung wirklich
zu berechnen. Eine solche ist schon von
Leibnitz erdonnen.

Wir ersetzen p_0, q_0, r_0, \dots durch die
ihnen gleiche Diff. Quotienten $\frac{\partial(F)}{\partial x}, \frac{\partial(F)}{\partial y}, \text{etc}$
und $x-x_0, y-y_0$ durch h und k .

Dann können wir die Glieder erster
Ordnung in 1) und 2) so schreiben:

$$(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})(F);$$

und die Glieder 2ter Ordnung so
zusammenfassen:

$$(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2(F),$$

wenn wir uns gestatten, mit den Zeichen
 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ so zu rechnen, wie mit wirklichen
Buchstabengrößen und wenn wir nach
dem Quadrieren $(\frac{\partial}{\partial x})(F)$ ersetzen durch $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ etc.

Es ist dieses ein Operieren mit Diff.
quotienten, welches nur symbolische
Bedeutung hat. Mit Hilfe dieses
Diff. Operators können wir ferner die

Glieder 3ter Ordnung in den Paraboloiden
3ter Ordnung in die Form bringen:

$$\frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 (F)$$

Das Paraboloid nter Ordnung lautet dann

$$b) \quad z - z_0 = \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) (F) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 (F) + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n (F).$$

Aus dieser Gl. entsteht nun der Taylor'sche Satz, wenn wir dieselbe ins Unendliche fortsetzen. Derselbe behauptet also, geometrisch gesprochen, dass wir die Funktion zweier Variablen $F(x_0+h, y_0+k)$ für einen gewissen Bereich der Größen h und k ersetzen dürfen durch das Schmiegeparaboloid unendlich hoher Ordnung, — oder analytisch ausgedrückt, dass wir F nach Potenzen von h und k entwickeln können.

Wenn ist die Frage, wie weit ist das richtig, und wie beweist man das?

Wir können die Frage in das Gebiet einer unabhängigen Variable hinüberspielen

Wenn wir, wie oben, $h = x - x_0$ und $k = y - y_0$
 ersetzen durch $R \cos \vartheta$ und $R \sin \vartheta$,
 Dann liefert uns die Gleichung (5),
 welche wir uns in inf. fortgesetzt
 denken, bei festgehaltenem ϑ geradezu
 die Taylor'sche Entwicklung für die
 Schnittcurve der Meridianebene $\vartheta = \text{const}$
 mit unserer Fläche. Diese beherrschen
 wir nach dem Früheren, wir können also
 entwickeln, ob sie und wie weit sie, die
 Curve wirklich darstellt. Wir wollen
 voraussetzen, dass dieses für alle unsere
 Schnittcurven ein Stück lang der Fall
 ist. Wir grenzen uns in der xy -Ebene
 von x_0, y_0 aus alle diese Stücke ab und
 bekommen so ein zweidimensionales
 Gebiet, in dem $F(x, y)$ mit beliebiger
 Annäherung durch die Gleichung (5)
 längs jeder Meridiancurve
 berechnet werden kann. d.h.
 im Innern dieses Gebietes ist
 die Funktion F wirklich mit
 dem Schmiegungsparaboloide unendlich



höher Ordnung identisch. Wenn sich ein solches zweifach ausgedehntes Gebilde angeben lässt, das den Punkt x_0, y_0 allseitig umgibt, nennen wir $f(x, y)$ in der Umgebung der Stelle x_0, y_0 eine analytische Funktion, die Stelle x_0, y_0 selbst eine reguläre Stelle. Indem wir diese Definition in Form eines Satzes kleiden, können wir sagen:

Eine analytische Funktion zweier Veränderlichen lässt sich in der Umgebung jeder regulären Stelle in eine Taylorreihe entwickeln.

Capitel II.

Flächenkrümmung

§ 34. Dreierlei Krümmung. Beziehung zur Theorie der Maxima und Minima. Da die geometrische Verhältnisse von dem Coordinatensysteme unabhängig sind, können wir uns dasselbe möglichst bequem legen. Wir nehmen als Anfangspunkt den zu untersuchenden Flächenpunkt und als xy -Ebene die Tangentialebene. Dann wird

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad p_0 = q_0 = 0$$

und die Gleichung der Tangentialebene $z=0$. Die Flächengleichung schreiben wir nach Taylor:

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{3!}(\dots) + \dots = u_2 + u_3 + \dots$$

Ihre Schnittcurve mit der Tangentialebene ist gegeben durch:

$$0 = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + u_3 + u_4 + \dots$$

Sie besitzt im Nullpunkte eine Singularität. Wir nehmen zunächst an $u_2 \neq 0$. Dann hat die Curve einen Doppelpunkt, und zwar

für $rt-s^2 > 0$, einen elliptischen
" $rt-s^2 < 0$ eigentlichen
" $rt-s^2 = 0$ eine Spitze

Diese drei Fälle treten bei unseren drei Paraboloidtypen 2ten Grades auf, nämlich bezw. bei dem elliptischen Paraboloid, bei dem hyperbolischen Paraboloid, und bei dem parabolischen Paraboloid. (Die letzte Bezeichnung bedeutet dasselbe, wie parabol. Cylinder). Beim hyperbolischen Paraboloid besteht die Schnittcurve aus 2 Geraden, welche sich überkreuzen, beim parabolischen Paraboloid aus 2 zusammenfallenden Geraden, welche wir offenbar als eine besondere Art von Spitzen auffassen können. Wir können an diese drei Paraboloiden denken, wenn wir die drei unterschiedenen Vorkommnisse als elliptische, hyperbolische, parabolische Krümmung bezeichnen.

In dem besonderen Falle, wo $u_2 = 0$, hat die Schnittcurve einen dreifachen Punct etc. und es greifen ähnliche Unterscheidungen Platz.

Um das Auge an das Erfassen von Krümmungsverhältnissen zu gewöhnen dient das folgende durch Rotation der Sinuscurve entstehende Modell.

Dieses Modell wird kurz erläutert, wie es in der Einleitung in die Diff. Gleichungen ausführlicher geschehen ist.

Am merkwürdigsten sind die Punkte parabolischer Krümmung. Die Gleichung der Fläche kann nach Taylor beispielsweise so lauten:

$$z = \frac{1}{2} r x^2 + u_3 + u_4 \dots$$

(wo die Reihe mit u_4 abbricht).

Eine solche Fläche bekommen wir, wenn wir von einer aus 2 Parabeln $x = cy^2$, $x = c'y^2$ bestehenden Schnittcurve der Fläche mit der Tangentialebene ausgehen.

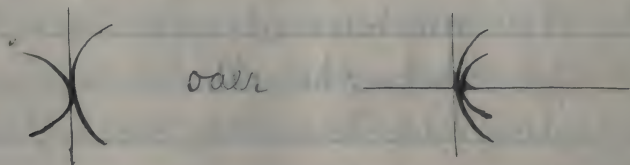
Die Gleichung der ganzen Schnittcurve sei also:

$$0 = (x - cy^2)(x - c'y^2)$$

und die Gl. der Fläche

$$z = x^2 - (c+c')xy^2 + cc'y^4.$$

Hier ist der Punkt $x=0, y=0, z=0$ sicher ein parabolischer Punkt, die Gestalt der Schnittcurve aber weicht von dem was wir bisher unter einer Spitze verstanden, erheblich ab; sie besitzt einen Selbstberührungspunkt statt einer Spitze im gewöhnlichen Sinne.



Nun können wir auch die beiden Paraboloiden von denen wir ausgingen imaginär wählen; es müssen dann nur c und c' conjugiert imaginär sein, damit das Product der beiden Paraboloiden als Schnitt einer reellen Fläche auftreten kann. So kommen wir zu der folgenden Flächen-gleichung

$$z = -x^2 - 2\alpha x y^2 + (\alpha^2 + \beta^2) y^4.$$

Sie wird durch die Tangentialebene im Anfangspunkte nur in einem reellen Punkte getroffen und trotzdem besitzt sie

parabolische Krümmung.

Dies müssen wir beachten, wenn wir uns nun zu der Theorie der Maxima und Minima bei Funktionen zweier Veränderlichen wenden.

Eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremes ist natürlich die, dass die Tangentialebene horizontal liegt, d. h. $p=0$, $q=0$. Ausserdem ist erforderlich, dass der Schnitt mit der Tangentialebene ein isolierter Punkt sei. Beide Bedingungen zusammen sind auch hinreichend.

Wir kommen so zu den folgenden Kriterien für ein Maximum:

$$u_1 = 0 \quad u_2 \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} rt - s^2 > 0 \quad \text{Ja} \\ rt - s^2 = 0 \quad ? \\ rt - s^2 < 0 \quad \text{Nein} \end{array} \right.$$

Im Falle (?) und im Falle $u_2 = 0$ sind fernere Unterscheidungen nötig. Am einfachsten verfährt man in der Weise, dass man die Schnittcurve wirklich geometrisch konstruiert und zusieht, ob sie im Berührungspunkte der

Tangentialebene einen isolierten Punkt besitzt oder nicht.

§ 35: Die Bedeutung des Schmiegungsparaboloids 2ter Ordnung.

Wir handeln nun von der Lage des Schmiegungsparaboloids 2ter Ordnung gegen die gegebene Fläche. Dabei werden wir uns wieder das Coordinatensystem möglichst bequem legen, so dass $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ $p_0 = q_0 = 0$ wird. Die Gleichung der Fläche bez. des Schmiegungsparaboloids lautet dann:

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + u_3 + u_4 + \dots$$

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$$

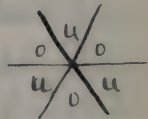
Daraus folgt für die Durchdringungscurve beider:

$$0 = u_3 + u_4 + \dots$$

Es ist dieses eine implicite Gleichung in x und y für eine Curve in der Tangentialebene, welche im Punkte $x=0$ $y=0$ im Allgemeinen einen dreifachen Punkt besitzt. Errichten wir in ihren Punkten

Lotte auf der Tangentialebene, so entsteht
 eine Cylinderfläche, welche die Durch-
 dringungscurve enthält. Umgekehrt aus-
 gedrückt, projiziert dieses Cylinder die
 Durchdringungscurve auf die Tangential-
 ebene, wobei, wie wir sehen, mindestens
 ein dreifacher Punkt zu Stande kommt.
 Die Aeste dieses dreifachen Punktes können
 dabei reell oder imaginär, zusammenfallend
 oder getrennt verlaufen.

Sind sie reell und getrennt,
 so zerlegen sie die xy -Ebene
 in 6 Sektoren, so dass in den



aufeinanderfolgenden Sektoren des
 Paraboloids abwechselnd oberhalb und
 unterhalb der Originalfläche verläuft.
 Im Einklang damit steht, was wir oben
 über die Meridiancurven der Schmie-
 gungsparaboloide fanden. Diese erwiesen
 sich als Schmiegunngscurven der zugehör-
 igen Meridiancurven der Originalfläche.
 Zwei solche Meridiancurven müssen sich
 also im Nullpunkte durchdringen.

verläuft also irgend eine Meridiancurve des Paraboloides links von dem Nullpunkt oberhalb der zugehörigen Meridiancurve der Originalfläche, so verläuft sie rechts davon unterhalb derselben.

Wir können die Gleichung des Schmiegungsparaboloides noch weiter vereinfachen, wenn wir die Lage des Koordinatensystems weiter spezialisieren. Bisher wurde nur vorausgesetzt, dass die x und y Axen irgendwie innerhalb der Tangentialebene gerichtet sind. Nun ist aus der analytischen Geometrie bekannt, dass man in dem Ausdruck

$$rx^2 + 2sxy + ty^2$$

das mittlere \mathcal{G} lied dadurch zum verschwinden bringen kann, dass man das x - y -Kreuz passend dreht.

Dann nimmt die \mathcal{G} Gleichung des Paraboloids die folgende Gestalt an:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

wo im parabolischen Falle $b^2 = \infty$ zu nehmen ist (Wir schreiben a^2 und b^2 , um anzudeuten, dass diese positive Größen sind. Sollte nach der

Erhaltung der Coefficient von x^2 negativ ausfallen, so müssen wir noch die positive z -Richtung mit der negativen vertauschen, um genau auf die obige Form zu kommen.) Die Gleichung der Originalfläche geht dann gleichzeitig in die folgende über:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + v_3 + v_4 + \dots$$

Die so bestimmten Richtungen der x und y -Achsen wollen wir die Hauptrichtungen nennen. Es gibt also in einem gewöhnlichen Punkte einer analytischen Fläche zwei zu einander senkrechte Hauptrichtungen.

Wir schneiden jetzt das Paraboloid durch eine zur Tangentialebene parallele Ebene $z = \varepsilon^2$, welche von jener den Abstand ε^2 hat. Die Gleichung der Schnittcurve

$$\frac{x^2}{a^2 \varepsilon^2} + \frac{y^2}{b^2 \varepsilon^2} = 1$$

stellt eine sehr kleine Ellipse bzw. Hyperbel dar. Ein dritter Fall kann noch eintreten, wenn $b^2 = \infty$ ist, dann besteht die Schnittcurve

$\frac{x^2}{a^2} = 1$, aus zwei der y -Achse parallelen Geraden, welche den sehr kleinen Abstand $2a\epsilon$ haben. In jedem Falle bezeichnet man die Schnittcurve als Indicatrix. Die Indicatrix ist aber nicht nur für das Paraboloid, sondern auch für die Originalfläche charakteristisch. Die Ebene $z = \epsilon^2$ schneidet nämlich die Originalfläche zwar nicht genau, aber doch nahezu d.h. soweit nur Schnittpunkte in der Nähe des Koordinatenanfangspunktes in Betracht kommen, gleichfalls in der Indicatrix. Die oben definierte Hauptrichtungen sind nun nichts anderes, als die Richtungen der Hauptaxen, in der zugehörigen Indicatrix. Speziell im hyperbolischen Falle giebt es auch ein anderes Paar ausgezeichneter Richtungen in jedem Flächenpunkte, nämlich die Richtungen, in welchen die in diesem Falle reellen Achse der Schnittcurve von Fläche und Tangentialebene verlaufen. Diese sind bei unserer Koordinatenbestimmung gegeben durch $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Dieselbe Gleichung liefert aber auch die Asymptoten an die Indikatrix. Daher der Satz: Die genannten Schrittcurenäste fallen mit den Asymptoten-Richtungen der Indikatrix zusammen. Man nennt sie daher die asymptotischen Richtungen. Die Hauptrichtungen sind die Winkelhalbierenden der asymptotischen Richtungen.

§ 36. Die Krümmungsradien der Normalschnitte. Wir können nun genauer definieren, was wir unter Flächenkrümmung verstehen wollen.

Wir construieren uns zu jeder Meridiancurve der Originalfläche den zugehörigen Krümmungsradius ρ im Punkte $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Die Gleichung der Meridiancurve lautet in den oben benutzten rechtwinkligen Coordinaten R und z (unter \mathcal{D} des willkürliche aber feste Azimuth der Meridianebene verstanden):

$$z = R^2 \left(\frac{\cos^2 \mathcal{D}}{a^2} \pm \frac{\sin^2 \mathcal{D}}{b^2} \right) + R^3 () + R^4 () \dots$$

Statt des Krümmungsradius mögen wir seinen reziproken Wert einführen und direkt als Krümmung bezeichnen:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2z}{dR^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dR}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Nun berechnet man:

$$\frac{dz}{dR} = 0 \quad \frac{d^2z}{dR^2} = 2 \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} \pm \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2} \right)$$

für $x=0$ $y=0$ d.h. $R=0$.

Wir erhalten daher als Ausdruck für die Krümmung einer Meridiancurve $\vartheta = \text{const.}$ der Originalfläche:

$$\frac{1}{\rho} = 2 \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} \pm \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2} \right)$$

Für das Schmiegungsparaboloid ergibt sich natürlich ganz derselbe Ausdruck.

Die Hauptrichtungen haben die Azimuthe $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. In diesen nimmt die Krümmung extreme Werte an, wie man leicht nachrechnet. Die zugehörigen Grössen der Krümmungsradien werden Hauptkrümmungsradien

genannt und mit ρ_1 und ρ_2 bezeichnet.
 In den 3 unterschiedenen Fällen ergeben
 sich die folgenden extremen Werte
 der Krümmung:

Für $\nu = 0$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{a^2}$$

Für $\nu = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{b^2}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = -\frac{2}{b^2}$$

$$\frac{1}{\rho_2} = 0$$

im elliptischen Falle

.. hyperbolischen ..

.. parabolischen ..

Im elliptischen Falle ist also die
 Krümmung stets positiv im hyperbolischen
 Falle variiert sie zwischen positiven
 und negativen Werte. Insbesondere
 nimmt sie den Wert 0 an und zwar
 entsprechend der asymptotischen
 Richtungen. Im parabolischen Falle
 ist der Wert 0 selbst ein extremer Wert.

Es gibt zwei besonders wichtige
 Verbindungen der Hauptkrümmungs-
 radien, welche man als Gaus'sches
Krümmungsmaass und als mittlere
Krümmung bezeichnet, nämlich:

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \pm \frac{4}{a^2 b^2} \quad \text{Krümmungsmaass.}$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{a^2} \pm \frac{2}{b^2} \quad \text{mittlere Krümmung.}$$

Das Krümmungsmaass ist positiv, negativ oder null, je nachdem die Fläche elliptisch, hyperbolisch, oder parabolisch gekrümmt ist und umgekehrt.

Bezüglich der mittleren Krümmung beweisen wir den folgenden Satz: Wenn wir die Krümmung irgend zweier Meridianschnitte zueinander addieren, welche unter 90° zu einander geneigt sind, so ergibt sich immer der Wert der mittleren Krümmung; oder in Formeln, wenn wir mit ρ einen beliebigen, mit ρ' den Krümmungsradius in einem zu dem ersteren senkrechten Meridianschnitt bezeichnen, so wird:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

Wir haben nämlich

$$\frac{1}{\rho} = 2 \left(\frac{\cos^2 \lambda}{a^2} \pm \frac{\sin^2 \lambda}{b^2} \right), \quad \frac{1}{\rho'} = 2 \left(\frac{\sin^2 \lambda}{a^2} \pm \frac{\cos^2 \lambda}{b^2} \right)$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen resultiert in der That

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$$

Diese Betrachtungen bilden nun den Anfang einer grossen Theorie, der Differential-Geometrie, welche für die Anwendungen fast noch wichtiger ist, wie die andere Seite der Geometrie, die projektive.

Man muss zu alle beide studieren.

Capitel III

Excurs über Raumcurven

§ 37. Tangente, Osculationsbene etc.

Eine Raumcurve entsteht entweder als Schnitt zweier Flächen:

$$f_1(x, y, z) = 0 \quad f_2(x, y, z) = 0$$

oder wir fassen sie als Bahncurve auf, die ein materieller Punkt x, y, z in der Zeit t beschreibt:

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad z = \chi(t).$$

(Was wir im Folgenden bevorzugen wollen).

Setzen wir voraus, dass φ, ψ, χ analytische Funktionen sind, so haben wir:

$$x = \varphi_0 + \frac{t}{1} \varphi'_0 + \frac{t^2}{2!} \varphi''_0 + \dots$$

$$y = \psi_0 + \frac{t}{1} \psi'_0 + \frac{t^2}{2!} \psi''_0 + \dots$$

$$z = \chi_0 + \frac{t}{1} \chi'_0 + \frac{t^2}{2!} \chi''_0 + \dots$$

Als Vergleichscurven benutzen wir die folgenden Schmiegungecurven 1ter und 2ter Ordnung:

$$I \quad \begin{cases} x = \varphi_0 + t \varphi'_0 \\ y = \psi_0 + t \psi'_0 \\ z = \chi_0 + t \chi'_0 \end{cases} \quad II \quad \begin{cases} x = \varphi_0 + t \varphi'_0 + \frac{1}{2} t^2 \varphi''_0 \\ y = \psi_0 + t \psi'_0 + \frac{1}{2} t^2 \psi''_0 \\ z = \chi_0 + t \chi'_0 + \frac{1}{2} t^2 \chi''_0 \end{cases}$$

I ist die Gleichung einer Gerade.

Berücksichtigen wir dass $\varphi_0, \psi_0, \chi_0$ bez. $= x_0, y_0, z_0$ so ergibt sich nämlich aus I durch Elimination von t :

$$\frac{x-x_0}{\varphi'_0} = \frac{y-y_0}{\psi'_0} = \frac{z-z_0}{\chi'_0}$$

Diese Annäherungsgerade heisst die Tangente der Raumcurve in x_0, y_0, z_0 .

Die Richtungs cosinus derselben sind

$$\varphi'_0, \psi'_0, \chi'_0$$

Die Gleichung der Normalebene in demselben Punkte lautet dementsprechend:

$$(x-x_0) \varphi'_0 + (y-y_0) \psi'_0 + (z-z_0) \chi'_0 = 0$$

Wie steht es mit der Tangentialebene?

Offenbar muss jede Ebene, welche durch die Tangente hindurchgeht, als Tangentialebene gelten. Es giebt daher nicht eine, sondern ein ganzes Büschel von Tangentialebenen.

Ist unter diesen etwa eine ausgezeichnete, welche die Curve inniger berührt?

Eine ebene Curve als Raumcurve aufgefasst, besitzt offenbar eine solche Ebene, nämlich diejenige in der sie enthalten ist. Bei der Raumcurve kommen wir zu etwas analogem von der Schmiegungscurve II aus.

Wir behaupten die Gleichungen II stellen eine ebene Curve dar und die Gleichung ihrer Ebene lautet:

$$\begin{vmatrix} x - \varphi_0 & \varphi_0' & \varphi_0'' \\ y - \psi_0 & \psi_0' & \psi_0'' \\ z - \chi_0 & \chi_0' & \chi_0'' \end{vmatrix} = 0.$$

In der That folgt aus bekannten Determinantensätzen, dass diese Gl. erfüllt ist, wenn wir die Werte von $x - \varphi_0$, eintragen, wie sie sich aus II ergeben.

Diese Ebene nennt man die Osculations-
ebene. In ihr verläuft II als Kegelschnitt.
Um die Gestalt der Curve im einzelnen zu studieren, geben wir dem Coordinaten-

Systeme eine bequeme Lage gegen die Curve, und zwar machen wir den zu untersuchenden Curvenpunkt zum Anfangspunkt, die Tangente zur x -Achse die Osculationsebene zur z -Ebene. Dann wird $\varphi_0 = \psi_0 = \chi_0 = 0$, ferner wegen Γ wird $\varphi'_0 = \psi'_0 = \chi'_0 = 0$.

Die durch die vorstehende Determinante gegebene Gl. der Osculationsebene reduziert sich daraufhin auf,

$$\varphi''_0 (\psi''_0 z - \chi''_0 y) = 0$$

Soll sie mit der z -Ebene, d. h. mit der Gl. $z=0$ zusammenfallen, so muss $\chi''_0 = 0$ werden. Die Parametergleichungen unserer Curve in dem ϵ_0 spezialisierten Coordinatensysteme sehen daher folgendermassen aus, (wenn wir noch der Kürze halber den Index $_0$ fortlassen.):

$$\text{III} \quad \begin{cases} x = \varphi(t) + \frac{1}{2}\varphi''t^2 + \frac{1}{6}\varphi'''t^3 + \dots \\ y = \frac{1}{2}\psi''t^2 + \frac{1}{6}\psi'''t^3 + \dots \\ z = \frac{1}{6}\chi'''t^3 + \dots \end{cases}$$

Über die Lage der Curve zu ihrer Osculationsebene folgt aus der letzten

dieser Gleichungen zunächst, dass die Curve ihre Osculationsebene durchdringt. In der That ändert z sein Vorzeichen, wenn t durch 0 geht.

Sodann haben wir, wenn wir unsere Curve mit einer Schraubelinie vergleichen 2 verschiedene Typen zu unterscheiden. Die Curve kann entweder rechts oder links gewunden sein. Rechtsgewunden nennen wir sie, wenn sie zur positiven z -axe so liegt, wie die bei uns ausschließlich gebräuchlichen Schraubengänge zu derjenigen Richtung, in der sie bei der Drehung fortschreiben.

Wir behaupten, dass das analytische Kriterium hierfür durch das Vorzeichen des Produktes $\varphi' \psi' z''$ in II gegeben wird.

Zum Beweise müssen wir eine Unterscheidung bei dem jeweils benutzten Coordinatensystem eintreten lassen.

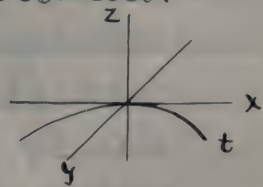
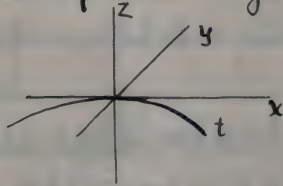
In der analytischen Geometrie gibt es zwei verschiedene rechtwinklige Coordinatensysteme, welche nicht mit

einander zur Deckung gebracht werden können.

Verteilen wir nämlich die Buchstaben x y z , welche die positive Richtung der Axen angeben sollen, beliebig auf die Enden eines Axenkreuzes, so können wir stets durch blosse Drehung erreichen, dass die positive z -Axe nach oben, die positive x -Axe nach rechts gerichtet ist. Dann kann aber die positive y -Axe nach hinten (Typus I) oder nach vorn (Typus II) weisen.

Das Vorzeichen des zu einer gegebenen Curve gehörigen Produktes $\varphi' \varphi'' x'''$ fällt in beiden Fällen verschieden aus.

Zunächst kann man in beiden Fällen φ' als positiv voraussetzen. Ist nämlich φ' negativ, so vertauschen wir t mit $t = -t$, wobei φ' sein Zeichen wechselt.



Geometrisch heisst dies; wir können den

Parameter so wählen, dass er im Nullpunkte wächst mit wachsendem x , also nach der in der Fig. durch ein beigesehtes $+$ gekennzeichneten Seite. Im Uebrigen lesen wir aus der Fig. das folgende Vorzeichenschema ab:

| | I | II |
|---------------------|---|----|
| φ' | + | + |
| ψ'' | - | + |
| x'' | - | - |
| $\varphi'\psi''x''$ | + | - |

Wir haben daraufhin den Satz:

Ob eine in unserer Normalform III gegebene Curve rechts oder links gewunden ist, hängt von dem Vorzeichen des Produkts $\varphi'\psi''x''$ ab, und zwar besitzt im Coordinatensystem I eine rechts gewundene Curve ein positives, im Coordinatensystem II eine rechts gewundene Curve ein negatives Produkt $\varphi'\psi''x''$.

Bei der beschriebenen Lage des Coordinatensystems gegen die Curve giebt die x -Axc die Tangente der Curve an. Die y und z -Axcen

ein zwei (unter den unendlich vielen möglichen) ausgezeichneten Normalen. Man bezeichnet die y -Achse als Hauptnormale, die z -Achse als Binormale der Curve. Die Hauptnormale ist also diejenige Normale, welche in der Oscillationsebene liegt, die Binormale diejenige, welche auf ihr senkrecht steht, also auf Tangente und Oscillationsebene senkrecht steht, wober der Name.

Projizieren wir noch die Raumcurve im Sinne dieser 3 Richtungen auf die drei Coordinatenebenen, so ergeben sich sehr eigentümliche und sehr verschiedene Verhältnisse.

- 1) Projektion im Sinne der Binormalen. Die Gleichungen des in der Oscillationsebene verlaufenden Bild der Curve sind:

$$x = \varphi' t + \frac{1}{2} \varphi'' t^2 + \dots$$

$$y = \dots - \frac{1}{2} \psi'' t^2 + \dots$$

Diese Ebenen liefern eine ebene Curve ohne irgend welche Singularität im Anfangspunkte.



In der Richtung der Binormalen gesehen erscheint die Curve in der Nähe des Nullpunktes als eine gewöhnliche Parabel.

- 2) Projektion im Sinne der Hauptnormalen.
Die Gleichungen der in der y -Ebene verlaufenden Bilder sind:

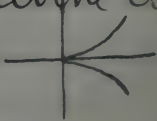
$$x = \varphi' t + \dots$$

$$z = \frac{1}{6} x'' t^3 + \dots$$

Dies ist eine ebene Curve, welche im Nullpunkte eine horizontale Wendetangente besitzt. Es folgt dieses auch einfach daraus, dass die Raumcurve ihre Osculationsebene durchdringt, in dass die Osculationsebene bei unserer Projektion in die horizontale Gerade übergeht.



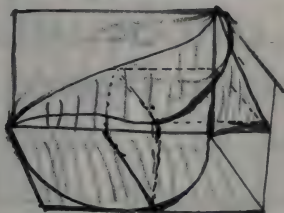
- 3) Projektion im Sinne der Tangente.
Dabei entsteht in der Normalebene eine Bildcurve mit horizontal gelegener Spitze.



Die Gleichungen derselben sind:

$$y = \frac{1}{2} \psi'' t^2 + \dots$$

$$z = \frac{1}{6} \chi''' t^3 + \dots$$



Ein sehr einfaches Beispiel einer Raumcurve bildet die Schraubenlinie:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad z = ct.$$

Diejenige Fläche, welche von der Gesamtheit der Tangenten einer Raumcurve gebildet wird, nennt man allgemein eine abwickelbare Fläche, weil man sie ohne Zerreißen und Falten glatt auf eine Ebene abrollen kann. Die abwickelbare Fläche hat längs der zugehörigen Raumcurve eine scharfe Kante, eine sogenannte Rückkehrkante.

Capitel IV

§ 38. Excurs über complexe Größen.

Es folgt eine Einleitung über den Begriff der complexen Zahlen, ihre geometrische Darstellung nach Gauss (Gauss'sche Ebene) sowie den Zusammenhang der Exponentialfunktion mit den trigonometrischen Funktionen im complexen Gebiete.

Alles dieses ist in jedem einschlägigen Lehrbuche zu finden. _____

Um Anschauung von dem Verlauf der Functionen im Complexen erhält man, wenn man den reellen oder imaginären Teil u oder v der Function sich als eine Fläche darstellt:

$$\xi = u(\xi, \eta) \text{ oder } \xi = v(\xi, \eta)$$

Diese Flächen des reellen und imaginären Theils einer complexen Function, haben nun noch sehr wichtige Differential-eigenschaften. Wir leiten zunächst einige dies bezügliche Formeln ab.

Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{df}{dx} \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{df}{dx} \cdot i$$

also

$$1) \quad \frac{\partial b}{\partial \eta} = i \frac{\partial b}{\partial \xi}$$

Daraus folgt, wenn f in $u + iv$ gespalten wird

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + i \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} + i \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

oder

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

Durch geeignete Differentiation und Addition der Gl'en 2) ergibt sich endlich

$$3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0$$

Diese Formeln wollen wir uns ins Geometrische übersetzen.

Aus der Fläche $S = u(\xi, \eta)$ schneidet die Ebene $S = c$ eine horizontale ebene Curve $C = u(\xi, \eta)$ aus, ebenso aus der Fläche $S = v(\xi, \eta)$ die Ebene $S = c'$ die horizontale Curve $C' = v(\xi, \eta)$. Die Curven wollen wir in die $\xi \eta$ Ebene projicieren, wodurch wir dieselbe mit einer doppelten

Curvenschaar $u=c, v=c'$ überdecken.
Längs jeder solchen Curve ist bezu.

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta = 0$$

Aus 2) folgt aber:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

Diese Gl. besagt, dass die Fortschrittsrichtungen $\frac{d\xi}{d\eta}$ der Curven $u=c, v=c'$ in ihrem Schnittpunkte aufeinander senkrecht stehen.

Unsere Curvenschaaren in der ξ, η -Ebene schneiden sich also überall rechtwinklig.

Die zu den Horizontalcurven senkrechten Curven nannten wir früher die Curven stärksten Falles, indem wir uns dieselben durch Projektion auf die Fläche im Raume übertragen dachten. Es bedeuten also die Curven $v=c$ für unsere Fläche $\xi = u(\xi, \eta)$ die Projektionen der Curven stärksten Falles, und umgekehrt die Curve $u=c$ für die Fläche $\xi = v$. Gehen wir längs der projicirten Curven

$v = c$ um das Stück $ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \frac{d\xi}{\frac{\partial v}{\partial \xi}} \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2}$
 vorwärts, so steigen wir auf der
 Fläche $C = u(\xi, \eta)$ um das Stück

$$ds = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial \xi}{\frac{\partial v}{\partial \xi}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)$$

$$= \frac{d\xi}{\frac{\partial v}{\partial \xi}} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 \right) = ds \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2}$$

an. Umgekehrt steigt die Fläche
 $C = v(\xi, \eta)$ längs der Falllinie $u = c$
 beim Fortschreiten um $ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$
 um das Stück

$$ds = ds \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2}$$

an.

Nach Gl. 2) sind aber beide Quadrat-
 wurzeln identisch. Es steigen also
 zwei zusammengehörige u - und v -
 Flächen an jeder Stelle gleich viel an.
 Schliesslich ziehen wir aus den Gl. 1) &
 2) Folgerungen über die Krümmung
 unserer Flächen. Wir können Gl. 1) &
 2) mit Benutzung unserer früheren
 Bezeichnung so schreiben: $r + t = 0$.
 Es haben also r und t verschiedene
 Vorzeichen. mithin hat rt das negative

und $-(rt-s^2)$ das positive Vorzeichen.
Die Ungleichung

$$s^2 - rt > 0$$

war aber die Bedingung für die hyperbolische Krümmung. lensare Flächen $S = u$ und $S = v$ sind daher überall hyperbolisch gekrümmt.

Nun die genauere Diskussion:

Allgemein gilt für die S -Coordinate einer analytischen Fläche:

$$S = S_0 + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \dots$$

Die Tangentialebene ist

$$S = S_0 + ph + qk.$$

Längs der Schnittcurve beider haben wir:

$$0 = \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \dots$$

eine Gleichung, welche die auf die S_0 -Ebene projicirte Schnittcurve darstellt. Die Tangenten im Doppelpunkte der Schnittcurve sind durch die quadratische Gleichung gegeben:

$$\left(\frac{h}{k}\right)^2 + \frac{2s}{r} \frac{h}{k} + \frac{t}{r} = 0.$$

In unserem Falle ist $\frac{t}{r} = -1$ daher besteht für die Wurzeln $\frac{h'}{k'}$, $\frac{h''}{k''}$ unserer quadratischen

Gleichung die Beziehung

$$\frac{h'}{K'} \cdot \frac{h''}{K''} = -1,$$

welche aussagt, dass die Tangentender projizierten Curve aufeinander senkrecht stehen. Das B Zeichen der Diff. Gleichung 3) kommt somit in dem geometrischen Satze zum Ausdruck:

Die Geraden der in der $\xi \eta$ -Ebene orthogonal projizierten Schnittcurve von Fläche und Tangentialebene, stehen auf einander senkrecht.

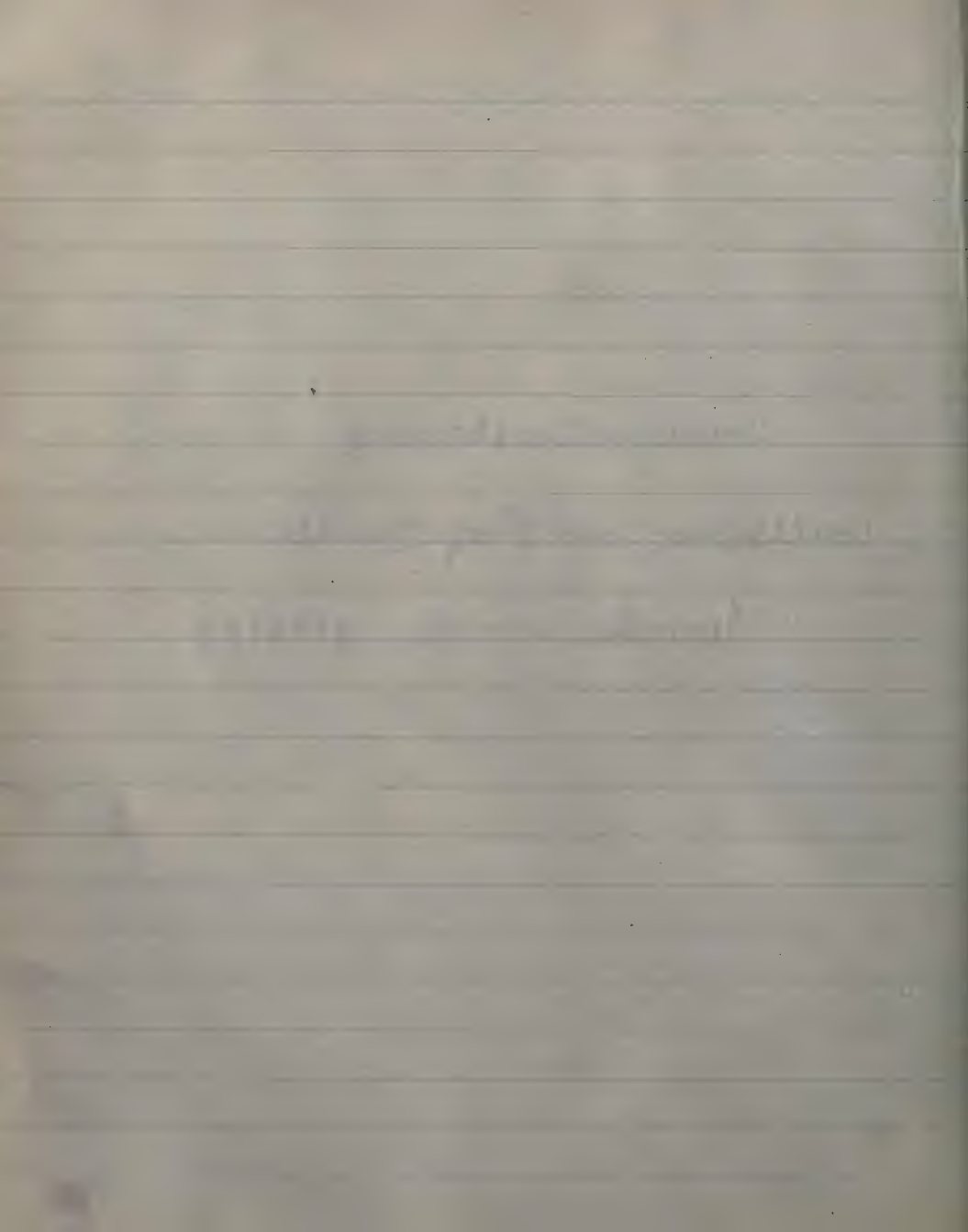
Es zeigt sich hier ein intimer Zusammenhang zwischen den Differentialbeziehungen, welche an der Spitze der complexen Functionentheorie stehen, und den infinitesimalgeometrischen Eigenschaften gewisser reeller Flächen.

Diese Bemerkung möge den Schluss unserer Vorlesung bilden: Die einzelnen Zweige der Mathematik hängen viel enger und organischer zusammen, als es dem einseitig denkenden erscheinen mag.

Integralrechnung

Vorlesung von Prof. Dr. Klein

Winter Semester 1896/97.



Inhaltsverzeichnis der Integralrechnung

Einleitung.

Librarische Hilfsmittel.

Der Funktionsbegriff.

Entstehung des Diff. Quotienten.

Flächeninhalt und bestimmte Integrale.

Beispiele: x^n , e^x

Unbestimmte Integrale.

Differentiation und Integration als inverse Operationen.

Die fundamentale Tabelle der einfachsten Integrale.

Die scheinbare Sonderstellung des \log .

Integration durch Substitution und partielle Integration.

I Hauptteil. Von der analytischen Berechnung der Integrale.

Einteilung der zu integrierenden Funktionen.

Allgemeines über rationale Funktionen.

Vorbereitungen zur Partialbruchzerlegung.

Der allgemeine Fall der

Mehrfache Wurzeln

Besondere Berücksichtigung imaginärer Wurzeln.

Allgemeines über Integration algebraischer Funct.

Rationalwerden des Integranden in einfachen

Beispielen.

Von der Irrationalität $\sqrt{a+bx+cx^2}$. Allgemeinüberleg.
Fortsetzung: formelle Durchführung. Beispiele

Trigonometrische Funktionen.

Anderer transcendente Funktionen.

Die Integration definiert eventuell neue Funct.

Rückblick auf die Methode der Partialbrüche.

II Hauptteil. Von der praktischen Berechnung der Integ.

Erste Abschätzung eines Integrals durch Mittelwertsatz

Revision des Taylorischen Satzes (Neuableitung durch

Berechnung von Integralen durch den Taylorischen Satz.

Wesen der allgemeinen parabolischen Interpolation

Zusammenhang mit den Partialbrüchen.

Die allgemeine Abschätzung des Restgliedes.

Trapezformel. Die gewöhnliche parabolische Interpolation

Die Grenzparabel 3ter Ordnung. Allgemeine Ansätze

Abteilungsweise Berechnung der niederen

Interpolationsformeln (bei Simpson und MacLaurin)

Integrirapparate: Amsterdamer Polarplanimeter.

Der harmonische Analysator von Henrici.

(mit Excurs über die Fourier'sche Reihe)

Der Integrirapparat von Abdank-Abakanowicz

Der Planimeter von Puytz.

Zwischenteil: Anwendungen der Integralrechnung.

Flächeninhalt ebener Figuren.

Bogenlänge ebener Curven.

.. von Raumcurven.

Rotationsflächen.

Schwerpunkte, Guldin'sche Regeln.

Indikatordiagramm.

Strenge und Anschaulichkeit in der Mathematik.

III Hauptteil. Feinere Ausführungen zur Integralrechnung
Unendlichwerden des Integranden und der Grenzen
an Beispielen.

Geschieden allgemeine Regeln.

Gliedweise Integration unendlicher Reihen.

Diff. und Integration nach einem Parameter.

Über Berechnung ausgezeichneten bestimmter Integrale

Das Wahrscheinlichkeitsintegral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Das Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Allgemeines über fluchtverhaltende Funktionen

Definition neuer Integrale durch bestimmte Integrale.

Die Perioden der elliptischen Integrale.

Die Gammafunktion.

Theorie der Fourier'schen Reihe.

Die endliche Reihe und ihr Restglied.

Näheres Studium der Hüllcurve.

Vorbereitungen zur Abschätzung des Restgliedes.

Durchführung der Abschätzung.

Convergenz der ∞ Fourierschen Reihen.

Verlauf der successiven Annäherungscurve.

Gliedweise Integration. Differentiation der Reihe.

IV Hauptteil. Ausdehnung der Integralrechnung auf mehrere Variablen.

1) Die mehrgliedrige Differentialausdrücke.

Das exakte Differential bei 2 Variablen.

Ausdehnung auf mehr Variablen. Differential

Eine geometrische Deutung des 2-gliedrigen

Charakteristischer Unterschied des exakten und unexakten

Kreisprozesse, welche singuläre Punkte umspannen. Seite

2) Die mehrfachen Integrale.

Doppelintegral als Rauminhalt.

Definition des Doppelint. durch Grenzproc.

Beispiele; noch einmal das exakte Diff.

Rauminhalt in Polarcordinaten.

Unendlichwerden des Integranden oder der Grenz

Allerlei Anwendungen der mehrfachen Integrale

Über den Inhalt gekrümmter Oberflächen.

Einleitung in die Potentialtheorie.

Das Potential im Innern des anziehenden Körpers.

Capitel I. Einleitung.

§1 Definition des Funktionsbegriffes.

Allgemeine Definition des Funktionsbegriffes:

y ist in einem Intervalle eine Funktion von x , wenn zu jedem Werte von x in diesem Intervalle ein Wert von y gehört, gleichviel, ob die Funktion stetig und welcher Art die zwischen den beiden Variablen bestehende Gesetzmässigkeit ist.

Die Funktionen haben zur Unterabteilung die stetigen Funktionen, und unter diesen treten besonders die analytischen hervor. Man versteht unter analytischen Funktionen diejenigen Funktionen, bei denen sich y in der Nähe einer Stelle x_0 durch Potenzen von $x - x_0$ nach der Taylor'schen Reihe darstellen lässt, also

$$y = y_0 + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2 + \dots$$

Anmerkung: Aeltere Lehrbücher beschränken sich auf die analytischen Funktionen.

Neuere Schwelgen in Irregularitäten.
Man behauptete in der Natur kommen
nur analytische Funktionen vor.

Dagegen ist zu sagen: Für die Beschreibung
sehr vieler Naturerscheinungen reicht
man mit einfachen analytischen Funk-
tionen aus. Aber für eingehendere
Betrachtungen, insbesondere diejenige,
die sich mit molekularer Auffassung
beschäftigen, reichen die einfachen
nicht aus.

§ 2. Entstehung und Definition des Differentialquotienten.

1) Wie kommt man zum Diff. Quotienten?

a) Geometrie: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ gibt den Verlauf
einer Curve wieder.

b) Mechanik: $\frac{dy}{dx} = \text{Geschwindigkeit}$
(wo $x = \text{Zeit}$, $y = \text{Weg}$).

2) Genaue Definition

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

Der Differentialquotient ist die Grenze

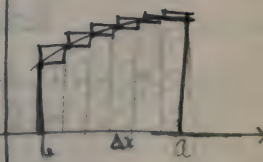
des Differenzenquotienten für unendlich abnehmendes Δx , — womit noch gar nicht gesagt sein soll, ob diese Grenze bei jeder Funktion einbrechen wird.

Anmerkung. Der Differentialquotient ist die Grenze eines Quotienten, aber nicht der Quotient zweier Grenzen.

§ 3. Einführung des bestimmten Integrals durch Betrachtung des Flächeninhalts.

Aufgabe: Den Inhalt der schraffierten Fläche ist zu berechnen.

Man teile die Grundlinie in n gleiche Teile und summiere die schmalen Rechtecke, deren Höhe 1) die linke Ordinate und 2) " rechte " ist.



Dann ist:

$$1) \Sigma_1 = \sum_{k=1}^n f\left(b + (k-1) \frac{a-b}{n}\right) \cdot \frac{a-b}{n}$$

$$2) \Sigma_2 = \sum_{k=1}^n f\left(b + k \frac{a-b}{n}\right) \cdot \frac{a-b}{n}$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist dann

$$\lim(\Sigma_1)_{n \rightarrow \infty} \text{ oder auch } \lim(\Sigma_2)_{n \rightarrow \infty}$$

Σ_1 und Σ_2 sind Spezialfälle von dem allgemeineren Ausdruck für den Flächeninhalt:

$$\lim \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \right) = \int_b^a f(x) dx.$$

Um also den krummlinigen Flächeninhalt zu berechnen, bildet man sich das „bestimmte Integral von $f(x) dx$ genommen von b bis a “.

Man versteht darunter den Limes der Summe $\sum f(x) \Delta x$, der sich für immer zahlreichere und also immer kleiner werdende Δx einstellt.

Wir sagen diese Summe bedeutet das Aggregat der Rechtecke, welche man über den einzelnen Stückchen Δx errichten kann, indem man als Höhe ein $f(x)$ benutzt, das zu einem Abszissenwert gehört, welcher auf dem Stückchen Δx liegt.

Beispielsweise können wir als solchen Funktionswert die Ordinate des linken (rechten) Endpunkts von Δx benutzen.

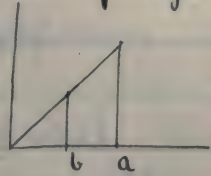
§ 4. Beispiele.

1) $y = c$, wird als zu trivial übergegangen.

2) $y = x$

Hierbei bemerkt man sofort:

$$\int_b^a = \int_0^a - \int_0^b$$



Berechnet wurde zunächst \int_0^a .

Es ist

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^n (k-1) \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\int_0^a x \, dx = \lim[\Sigma_1 = \frac{a^2}{2}(1 - \frac{1}{n})] = \lim[\Sigma_2 = \frac{a^2}{2}(1 + \frac{1}{n})] = \frac{a^2}{2}$$

Ebenso ist

$$\int_0^b x \, dx = \frac{b^2}{2}$$

Also wird

$$\int_b^a x \, dx = \int_0^a x \, dx - \int_0^b x \, dx = \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2},$$

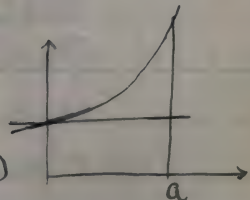
wie auch die elementare Mathematik zeigt.

3) $y = e^x$

Gesucht ist $\int_0^a e^x \, dx$

Es ist

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{k=1}^n \frac{a}{n} \cdot e^{(k-1)\frac{a}{n}} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n}(1 + e^{\frac{a}{n}} + \dots) \\ &= \frac{e^a - 1}{(e^{\frac{a}{n}} - 1)} \frac{a}{n} \end{aligned}$$



nun ist

$$e^{\frac{a}{n}} - 1 = \frac{a}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \dots$$

$$\frac{n}{a} (e^{\frac{a}{n}} - 1) = 1 + \frac{1}{2} \frac{a}{n} + \frac{1}{3!} \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a} (e^{\frac{a}{n}} - 1) = 1$$

also

$$\int_0^a e^x dx = e^a - 1.$$

§ 5. Einführung des unbestimmten Integrals.

Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

hat immer die Gestalt: $F(a) - F(b)$

Lässt man die untere Grenze fest, so erhält man notwendigerweise:

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) + \text{Constante.}$$

Das "unbestimmte" Integral hat also die Gestalt $F(x) + c$, wo c eine beliebige von x nicht abhängige Grösse ist, die man die Integrationsconstante nennt.

Das unbestimmte Integral entsteht aus dem bestimmten, wenn man nur auf die obere Grenze achtet, und auf die untere kein Gewicht legt.

Betrachtet man in der letzten Formel a als Variable (der Flächeninhalt ist ja abhängig von a) so erhält man

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

In der so geschriebenen Formel, die man überall in der Literatur benutzt findet, kommt beider der Buchstabe x in doppelter Bedeutung vor; nämlich als Integrationsbuchstabe, der das Intervall von der unteren bis zur oberen Grenze durchläuft und dann zur Bezeichnung der oberen Grenze selbst.

§ 6. Differentiation und Integration als inverse Operationen.

Ist

$$\int^x f(x) dx = F(x) + C$$

so ist

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

unter der Voraussetzung, dass f stetig ist

Beispiele:

- 1) Bei der Bewegung eines Punktes auf gegebener Bahn ist der Zusammen-

hang zwischen Diff. quotient und Integral ohne weiteres evident: Betrachtet man nämlich die Weglänge als Funktion der Zeit $y = f(x)$, so bekommt man die Geschwindigkeit durch Differentiation von $f(x)$ nach x , betrachtet man umgekehrt die Geschwindigkeit $f'(x)$ als Funktion der Zeit, so bekommt man die Weglänge durch Integration.

2) Der Flächeninhalt ist das Integral der Ordinate, die Ordinate der Differentialquotient des Flächeninhalts.

3) Die Ordinate einer Curve ist das Integral ihres Differentialquotienten.

§7 Integration der einfachen Funktionen. Von praktischer Wichtigkeit ist es nun, zu einer gegebenen Funktion diejenige Funktion zu bestimmen, durch deren Differentiation jene erste Funktion entsteht.

Integraltafel

Gegebene Funktion Diff. Quotient derselben Integral derselben

$$y = x^n$$

$$y' = n x^{n-1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$y = \log x$$

$$y' = x^{-1}$$

$$\int x^{-1} dx = \log x + C$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$y = \arcsin x$$

$$y' = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{\pm dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ \text{oder} \\ \arccos x + C \end{cases}$$

$$y = \arccos x$$

$$y' = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$y = \operatorname{arctg} x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

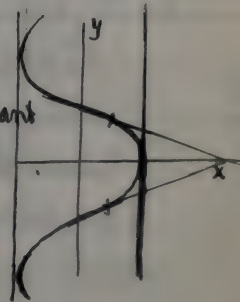
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

* Anmerkung: Der Diff. Quotient von \arcsin ist positiv, wenn die Tangente von links nach rechts aufsteigt, negativ wenn sie von rechts nach links aufsteigt.

$$\arcsin x - \frac{\pi}{2} = \arccos x$$

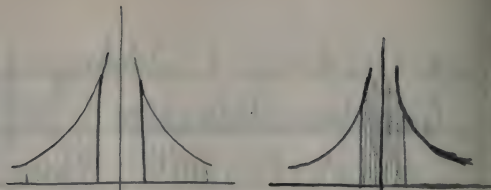
\arcsin ist + im 1 und 4, - im 2 und 3 Quadrant

\arccos " + " 3 " 4, - " 1 " 2 "



Bemerkung: Man darf nie gedankenlos integrieren.

1. Beispiel: $y = x^{-2}$



Ein bestimmtes Integral hat auf Grund der bisherigen Definition keinen Sinn, wenn die zu untersuchende Funktion in dem Intervalle unendlich wird.

2. Nach bisheriger Definition sind auch imaginäre Ordinaten nicht brauchbar.

3. Beachte die Vorzeichen der Ordinaten:

z. B. $y = x^{\frac{1}{2}}$

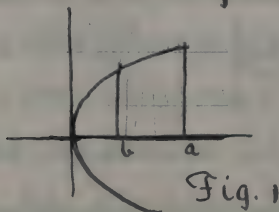


Fig. 1

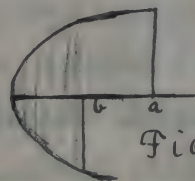


Fig. 2

Der Flächeninhalt in Fig. 2 ist

$$\int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^b x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}$$

wo die Grössen $a^{\frac{1}{2}}$ und $b^{\frac{1}{2}}$ als positive Grössen gedeutet werden.

§ 8. Die scheinbare Sonderstellung des \log .

Bemerkung: Es ist

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

und

$$2) \int x^{-1} dx = \log x$$

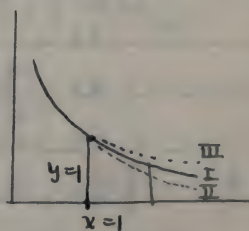
Hier scheint die Formel 2) eine Unstetigkeit der Formel 1) auszufüllen. Das ist aber nicht der Fall.

I. rein geometrisch:

Curve I: $y = \frac{1}{x}$

.. II: $y = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$

.. III: $y = \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$



I reißt sich also zwischen II und III ein.

II. Algebraisch:

Die Formel 2) fügt sich in der That den Formeln 1) nach dem Gesetze der Stetigkeit ein und hat nur dadurch ein anderes Aussehen, weil Formel 1) für $n = -1$ unmittelbar genommen $\frac{0}{0}$ liefert, so dass man den wahren Wert, d.h. den Wert, der sich nach der Stetigkeit ergibt, durch Differenzieren herstellen muss.

Es ist

$$\int_1^x x^n dx = \frac{x^{n+1} - 1}{n+1}$$

oben und unten wird differentiiert

$$\frac{d(x^{n+1} - 1)}{dn} = x^{n+1} \log x$$

$$\lim_{n \rightarrow -1} x^{n+1} \log x = \log x$$

g. e. d.

Fernere Regeln zur Integration:

1) $\int c u dx = c \int u dx$ wo $c = \text{const.}$

2) $\int (u+v) dx = \int u dx + \int v dx$.

- § 9 { 3) Integration durch Substitution.
4) Integration " Teile.

3) Integration durch Substitution:

Lässt sich ein Integral nach den Grundformeln nicht direkt auflösen, so ist häufig eine Substitution zweckmässig: $x = \varphi(t)$, wobei t von t_0 bis t_1 läuft, während x von x_0 bis x_1 läuft.

Wir schreiben jetzt:

$$\sum_{x_0}^{x_1} f(x) \Delta x$$

in der Form

$$\sum_{t_0}^{t_1} f(x) \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta t.$$

Durch den Grenzübergang erhalten wir:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$$

Bei der Substitution muss man also nicht nur die Grenzen des Integrals ändern, sondern man muss unter dem Integralzeichen den Factor $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ hinzufügen.

Beispiel:
$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{ax+b} = \int_{ax_0+b}^{ax_1+b} \frac{dt}{a \cdot t} = \left| \frac{1}{a} \log t \right|_{ax_0+b}^{ax_1+b}$$
$$= a^{-1} \log \frac{ax_1+b}{ax_0+b}; \quad (t=ax+b)$$

4) Integration durch Teile. (partielle Integr.)

Aus der Diff. Rechnung ist bekannt:

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

also ist auch:

$$u \frac{dv}{dx} = \frac{d(u \cdot v)}{dx} - v \frac{du}{dx}$$

woraus durch Integration sofort folgt:

$$\int_b^a u \frac{dv}{dx} dx = [u \cdot v]_b^a - \int_b^a v \frac{du}{dx} dx$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad I &= \int_b^a x \cdot e^x \, dx = [x \cdot e^x]_b^a - \int_b^a e^x \, dx = [x \cdot e^x]_b^a - [e^x]_b^a \\ &= (a-1)e^a - (b-1)e^b. \end{aligned}$$

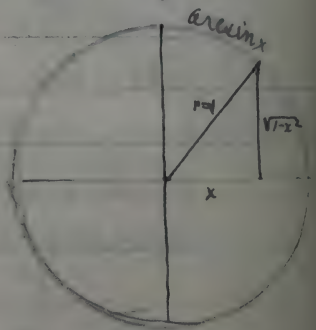
$$\text{II} \quad I = \int \log x \, dx = x \log x - \int dx = \log x - x.$$

$$\begin{aligned} \text{III} \quad I &= \int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int x \cdot \frac{d(\sqrt{1-x^2})}{dx} \, dx \\ &= \arcsin x + x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) \Big|_0^x \\ &= \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) \end{aligned}$$

Anmerkung: I hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung:

Die beiden Bestandteile unseres Ausdruckes repräsentieren den Inhalt des Kreissektors und des Dreiecks.



Capitel II

Von der systematischen Berechnung der Integrale.

10. Einteilung der Funktionen:

- 1) Ganze rationale Funktionen (Polynome)
- 2) Rationale Funktionen.
- 3) Algebraische .. [explizite und implizite]
- 4) Exponentialfunktion und Logarithmus.
- 5) Trigonometrische und cyclometrische Funktionen.

Anmerkung: In englischen Lehrbüchern ist eine häufige Schreibweise:

$\sin(\sin x) = \sin^2 x$ und dementsprechend
 $y = \sin^{-1} x$ statt $y = \arcsin x$
etc.

§ 11. Allgemeines über rationale Funktionen.

- 1) Ganze rationale Funktionen.

$$\int (a + bx + cx^2 + \dots) dx = ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3 + \dots + \text{const.}$$

- 2) Gebrochene rationale Funktionen:

$$\frac{\psi_m(x)}{\varphi_n(x)}$$

wobei m und n den Grad des Zählers bzw. Nenners bedeuten soll.

Ist der Grad des Zählers grösser als der Grad des Nenners, so kann man stets eine ganze rationale Funktion abspalten und behält eine rationale Funktion als Rest übrig, bei welcher der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners ist:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = G(x) + \frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$$

Für die Integration bedeutet dies:

Die ganze rationale Funktion können wir sofort integrieren, und wir haben uns immer nur mit der Integration solcher rationaler Funktionen zu beschäftigen, bei denen der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners ist.

Partialbruchzerlegung

- § 12. Vorbereitungen zur Partialbruchzerlegung
Die Behandlung der letztgenannten Form setzt eine Zerlegung in Partialbrüche voraus, die eigentlich schon in der Algebra abgehandelt sein müsste.
Im Gebiete der komplexen Grössen lässt

sich ein Polynom n ten Grades allemal in n lineare Faktoren zerspalten:

$$\Phi_n(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \cdots (x-\nu).$$

Daraus folgt: Wenn man häufig kürzweg sagt $\Phi_n(x) = 0$ hat n Wurzeln, so ist das nur insofern richtig, als man etwa mehrfach auftretende Wurzeln mit ihrer Multiplizität zählen will.

Theorem von d'Alembert und Gauss.

Anmerkung: Da jede complexe Wurzel auch conjugiert vorkommen muss, so konnte Gauss die complexen Größen vermeiden, indem er formulierte: dass jedes $\Phi_n(x)$ sich auf reelle Weise in lineare, bzw. quadratische Faktoren spalten lässt.

Jetzt gehen wir zur Partialbruchzerlegung über und nehmen an, dass

I. keine mehrfachen Wurzeln auftreten.

II. mehrfache Wurzeln treten auf.

I. keine mehrfachen Wurzeln.

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} + \cdots + \frac{N}{x-\nu}.$$

$$\begin{aligned}
 O(x) &= A(x-\beta)(x-\gamma) \dots (x-\nu) \\
 &\quad + B(x-\alpha)(x-\gamma) \dots (x-\nu) \\
 &\quad \dots \\
 &\quad + N(x-\alpha)(x-\beta) \dots (x-\mu)
 \end{aligned}$$

Nun ist $O(x)$ auch höchstens vom $(n-1)$ ten Grade, also bekommen wir für die n unbekanntenen Grössen A, B, \dots, N , indem wir die Coefficienten der rechten Seite gleich den entsprechenden der linken setzen, n lineare Gleichungen.

Setzen wir $x = \alpha$, so wird

$$O(\alpha) = A(\alpha-\beta) \dots (\alpha-\nu).$$

also

$$A = \frac{O(\alpha)}{(\alpha-\beta) \dots (\alpha-\nu)}$$

so auch

$$B = \frac{O(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) \dots (\beta-\nu)}$$

Da $O(x)$ von der Ordnung $(n-1)$ und gleich der rechten Seite der obigen Gl. ist für die n Werte $\alpha, \beta, \dots, \nu$ von x so ist es der rechten Seite identisch gleich.

Es ist

$$O(x) = \frac{A \varphi(x)}{x-\alpha} + \frac{B \varphi(x)}{x-\beta} + \dots + \frac{N \varphi(x)}{x-\nu}$$

woraus folgt

$$O(\alpha) = \frac{A \cdot 0}{0} + 0 = A \varphi'(\alpha)$$

$$\therefore A = \frac{O(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$$

Es sind also

$$A = \frac{O(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \quad B = \frac{O(\beta)}{\varphi'(\beta)} \quad \dots \quad N = \frac{O(\nu)}{\varphi'(\nu)}$$

§ 14 II. Es komme eine mehrfache Wurzel vor.

Es sei

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^p (x-\beta)^q (x-\gamma) \dots$$

so schreibe man:

$$\begin{aligned} \frac{O(x)}{\varphi(x)} &= \frac{A_1}{(x-\alpha)^p} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{p-1}} + \dots + \frac{A_p}{x-\alpha} \\ &+ \frac{B_1}{(x-\beta)^q} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{q-1}} + \dots + \frac{B_q}{x-\beta} \\ &+ \frac{C}{x-\gamma} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Die Betrachtung wird uns für eine Doppelwurzel angestellt:

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^2 \psi(x)$$

so wird für $x=\alpha$

$$\varphi(x) = 0 \quad \varphi'(x) = 0 \quad \varphi''(x) \neq 0.$$

$x=\alpha$ ist also eine Doppelwurzel von $\varphi(x)=0$, wenn neben $\varphi(x)$ auch $\varphi'(x)$ für $x=\alpha$ verschwindet,

ausserdem aber nicht mehr $\varphi'(x)$.

Die Partialbruchzerlegung geschieht für eine Doppelwurzel folgendermassen:

$$\frac{Q(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{x-\alpha} + \frac{\beta}{x-\beta} + \dots + \frac{M}{x-\mu}$$

$$Q(x) = A_1 \varphi(x) + A_2 (x-\alpha) \varphi(x) + (x-\alpha)^2 \left[\frac{\beta \varphi(x)}{x-\beta} + \dots + \frac{M \varphi(x)}{x-\mu} \right]$$

Indem wir nun links und rechts nach Potenzen von x ordnen und die Potenzen beider Seiten vergleichen, bekommen wir für die n Unbekannten $A_1, A_2, \beta, \dots, M$ gerade n lineare Gleichungen. Wie früher ist

$$\beta = \frac{Q(\beta)}{(x-\alpha)^2 \cdot \varphi'(\beta)} = \frac{Q(\beta)}{\varphi'(\beta)}$$

$$C = \dots$$

$$\text{Ebenso ist } A_1 = \frac{Q(\alpha)}{\varphi(\alpha)}$$

A_2 dagegen fällt aus der Rechnung heraus.

Man differenziere:

$$Q'(x) = A_1 \varphi'(x) + A_2 \varphi(x) + A_2 (x-\alpha) \varphi'(x) + 2(x-\alpha) \{ \dots \}$$

wo die letzten Terme alle den Faktor $(x-\alpha)$ enthalten. Für $x=\alpha$ wird dann

$$Q'(\alpha) = A_1 \varphi'(\alpha) + A_2 \varphi(\alpha)$$

$$A_2 = \frac{\psi(\alpha) \phi(\alpha) - \psi'(\alpha) \phi(\alpha)}{[\psi(\alpha)]^2}$$

Die Richtigkeit dieser Bestimmung kann
 gerade so verifiziert werden wie früher,
 indem man zeigt, dass die Differenz

$$\phi(x) - A_1 \psi(x) - A_2 (x-\alpha) \psi(x) \dots$$

identisch verschwindet. Sie stellt nämlich
 ein Polynom $(n-1)$ ten Grades dar, welches
 die $n-1$ Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma \dots$ hat, aber α
 als Doppelwurzel.

Integration der Partialbrüche für
 reelle Wurzeln:

$$\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \log(x-\alpha) + C$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^2} dx = -\frac{A}{x-\alpha} + C$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^p} dx = -\frac{A}{(p-1)(x-\alpha)^{p-1}} + C$$

Man erhält also bei der Integration
 der Partialbrüche entweder Logarithmen,
 oder selbst wieder rationale Bestandteile.

§ 15a. Eine Wurzel sei komplex.

- 1) Verfahren: Man setzt die Permanenz der formalen Gesetze voraus.
- 2) Verfahren: Ist α komplex, so muss auch das daraus berechnete A komplex sein; es muss also zu A z. B. \bar{B} und dann zu $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$ konjugiert sein.

Fasst man diese beiden Ausdrücke zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-\alpha} + \frac{\bar{B}}{x-\beta} &= \frac{(A'+iA'')(x-\alpha'+i\alpha'')+(A'-iA'')(x-\alpha'-i\alpha'')}{(x-\alpha'-i\alpha'')(x-\alpha'+i\alpha'')} \\ &= \frac{2A'(x-\alpha')-2A''\alpha''}{(x-\alpha')^2+\alpha''^2}.\end{aligned}$$

Beide imaginäre Bestandteile vereinigen sich also zu einem reellen; Integrieren wir so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int \frac{2A'(x-\alpha')dx}{(x-\alpha')^2+\alpha''^2} - \int \frac{2\alpha''A''dx}{(x-\alpha')^2+\alpha''^2} &= \int_1 - \int_2 \\ &= A' \log [(x-\alpha')^2+\alpha''^2] - 2A'' \arctan\left(\frac{x-\alpha'}{\alpha''}\right).\end{aligned}$$

Es kann also die Integration ganz im reellen ausgeführt werden.

Anmerkung: Entwickelt man die Formel, unbekümmert ob sie reelle oder imaginäre Bestandteile enthält, so erhält man:

$$\int \frac{A' + iA''}{x - \alpha' - i\alpha''} dx + \int \frac{A' - iA''}{x - \alpha' + i\alpha''} dx = (A' + iA'') \log [x - \alpha' - i\alpha''] + (A' - iA'') \log [x - \alpha' + i\alpha''] + C$$

$$= A' \log [(x - \alpha')^2 + \alpha''^2] + iA'' \log \frac{x - \alpha' - i\alpha''}{x - \alpha' + i\alpha''} + C.$$

Dieser Ausdruck ist gleich dem in reeller Form erhaltenen:

$$A' \log [(x - \alpha')^2 + \alpha''^2] - 2A'' \operatorname{arctg} \frac{x - \alpha'}{\alpha''}.$$

Also ist:

$$iA'' \log \left(\frac{x - \alpha' - i\alpha''}{x - \alpha' + i\alpha''} \right) + C = -2A'' \operatorname{arctg} \frac{x - \alpha'}{\alpha''}$$

Um C zu bestimmen setze $x = \alpha'$:

$$\therefore C = -iA'' \log (-1).$$

Also wird

$$-\frac{i}{2} \log \frac{i\alpha'' - (x - \alpha')}{i\alpha'' + (x - \alpha')} = \operatorname{arctg} \frac{x - \alpha'}{\alpha''}$$

oder wenn man $\frac{x - \alpha'}{\alpha''} = z$ setzt, erhält man die sehr interessante Formel

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

§ 15b. Es komme eine komplexe Doppelwurzel vor.
Dann muss es

$$\frac{A'+iA''}{(x-d'-i d'')^2} + \frac{A'-iA''}{(x-d'+i d'')^2}$$

zu integrieren geben.

1. Verfahren: Glied für Glied.

$$\int + \int = -\frac{A'+iA''}{x-d'-i d''} - \frac{A'-iA''}{x-d'+i d''} = \frac{-2A'(x-d') + 2d''A''}{(x-d')^2 + d''^2}$$

2. Verfahren: Zusammensziehung der beiden Partialbrüche:

$$\int \frac{2A'[(x-d')^2 + d''^2] - 4d''A''(x-d')}{[(x-d')^2 + d''^2]^2}$$

gibt denselben reellen Ausdruck.

Anmerkung: Bei höheren Potenzen im Nenner der Partialbrüche verfährt man genau so.

Integration der algebraischen Funktionen.

§ 16. Allgemeines.

Die Lösung beruht auf dem Gedanken, das gegebene Integral in das Integral einer rationalen Funktion zu verwandeln.

Es ist

$$F(x, y) = 0$$

Die Aufgabe ist nun, das Integral einer Funktion zu berechnen, die selbst aus x und y rational aufgebaut ist, d.h. es ist

$$\int R(x, y) dx$$

zu ermitteln.

Dies ist so zu verstehen, dass zu jedem Punkte (x, y) der Curve ein $R(x, y)$ als Wert der zu integrierenden Funktion gehört, dass jedes dieser $R(x, y)$ mit Δx multipliziert und dann der Limes der Summe aller dieser $R(x, y) \Delta x$ berechnet werden soll.

Man sagt in diesem Falle: das Integral sei an der algebraischen Curve konstruierbar.
In diesem allgemeinen Sinne aufgefasst, wäre der Gegenstand sehr weitgehend

und bis in die höchsten Gebiete der
Funktionentheorie führend.

Man nennt diese allgemeinen Integrale:
Abel'sche Integrale.

Im allgemeinen kann man also die Integrale
nicht auf die uns bekannten Funktionen
zurückführen, sondern auf neue, die
Abel'schen Funktionen. Wenn es uns
aber gelingt, die Curvengleichung
 $F(x, y) = 0$ dadurch identisch zu befriedigen,
dass man y und x gleich einer rationalen
Funktion einer Hilfsgrösse λ , also $x = r_1(\lambda)$
und $y = r_2(\lambda)$ setzt, dann verwandelt sich
das Abel'sche Integral in das Integral einer
rationalen Funktion von λ von der Form:

$$\int R(r_1(\lambda), r_2(\lambda)) \cdot r_1'(\lambda) d\lambda$$

und kann dann nach den bisherigen Regeln
ausgewertet werden.

§ 17 Rationalmachen des Integranden in
einfacheren Beispielen.

Zunächst wählen wir in der zu integrier-
enden Funktion $R(x, y)$:

$$y = \sqrt[n]{x^m}$$

wo m und n ganze Zahlen sind.

Man setze $x = \lambda^n$, dann ist

$$y = \lambda^m, \quad dx = n\lambda^{n-1} d\lambda$$

Diese einfachste Substitution können wir nun sogleich noch erweitern, wenn uns die Funktionen

$$y = \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \quad z = \sqrt[n_2]{x^{m_2}}$$

gegeben sind, wo n_1, n_2, m_1, m_2 ganze Zahlen sind. Wir setzen $x = \lambda^{n_1 n_2}$, dann ist $y = \lambda^{m_1 n_2}$,
 $z = \lambda^{m_2 n_1}$, $dx = n_1 n_2 \lambda^{n_1 n_2 - 1} d\lambda$.

Durch diese Substitution wird alles rational unter dem Integralzeichen.

Jedoch reicht es aus $x = \lambda^n$ zu setzen, wenn das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen n_1 und n_2 ist.

Beispiel:

$$I = \int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$$

Setze $x = \lambda^6$, so wird

$$I = 6 \int \frac{\lambda^3 + \lambda^3}{\lambda^2 + 1} d\lambda$$
$$= 6 \int (\lambda^6 - \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1) d\lambda + 6 \int \frac{\lambda + 1}{\lambda^2 + 1} d\lambda$$

$$= \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 3 \log(1+x^{\frac{1}{2}}) + 6 \operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}} + C$$

§ 18. Von der Irrationalität $\sqrt{a+bx+cx^2}$:

Allgemeine Ueberlegung.

Wir gehen jetzt zu dem wichtigsten Fall über: Die Gleichung zwischen x und y soll folgende Gestalt haben

$$y = \sqrt{a+bx+cx^2}$$

und es soll folgendes Integral bestimmt werden

$$\int R(x, \sqrt{a+bx+cx^2}) dx$$

wobei R aus x und y rational aufgebaut sein soll.

Die erste Gl. $y^2 = a+bx+cx^2$ stellt Kegelschnitte dar, die alle symmetrisch zur x -Achse liegen. Hauptunterschied ist, ob $c \geq 0$ ist, da für grosse positive oder negative Werte von x , cx^2 die anderen Terme überwiegt.

1. Fall $c > 0$: Hyperbel.

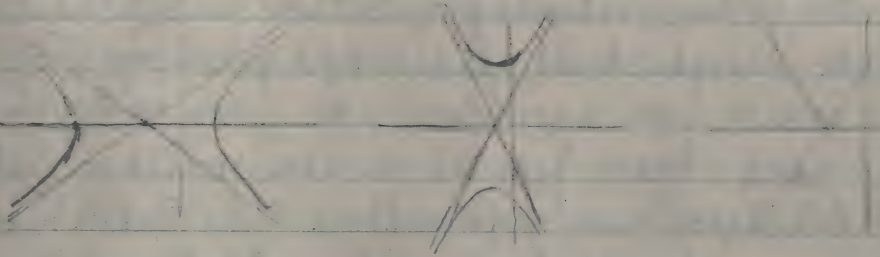
Untersuche die Schnittpunkte mit der x -Achse

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

und teile ein, je nachdem $b^2 - 4ac \geq 0$.

a) $b^2 - 4ac > 0$ b) $b^2 - 4ac < 0$ c) $b^2 - 4ac = 0$

2 reelle Schnittpunkte mit x-Achse 2 imaginäre Schnittpunkte mit x-Achse 1 reeller Schnittpunkt mit x-Achse

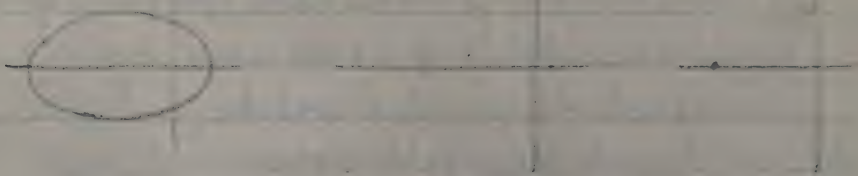


2. Fall: $c < 0$: Ellipse

Schnittpunkte mit der x-Achse $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$

a) $b^2 - 4ac > 0$ b) $b^2 - 4ac < 0$ c) $b^2 - 4ac = 0$

2 reelle Schnittpunkte mit x-Achse 2 imaginäre Schnittpunkte mit x-Achse 1 reeller Schnittpunkt mit x-Achse (isolierter Punkt)



b) und c) fallen für unsere Betrachtung natürlich fort.

3. Fall $c = 0$: Parabel

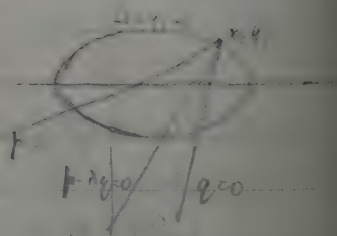
B bleibt ebenfalls bei Seite, weil er sich durch eine direkte Substitution von selbst erledigt:

Ist nämlich $y = \sqrt{a+bx}$, so setze man einfach $ax+b = \lambda^2$ also $x = \frac{\lambda^2 - b}{a}$, $y = \lambda$, $dx = \frac{2\lambda d\lambda}{a}$.

Wir wollen uns jetzt für unsere Aufgabe die Frage überlegen, ob eine Substitution so möglich ist, dass x und y rationale Funktionen von λ werden, und zwar reingem
risch. Man findet in den meisten Lehrbüchern nie, wie man auf die Substitution kommt und doch ist diese Untersuchung so interessant.

Wir denken uns auf irgend einem Kegelschnitt (Ellipse) mit der Gleichung $\Omega(x, y) = 0$ einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) und legen durch ihn zwei gerade Linien mit den Gleichungen $p(x, y) = 0$, $q(x, y) = 0$. Dann stellt $p - \lambda q = 0$ eine gerade Linie dar welche durch (x_0, y_0) geht, vorausgesetzt, dass λ eine beliebige Constante ist.

Man bekommt dann für wechselndes λ der Reihe nach die sämtlichen Linien des von (x_0, y_0) auslaufenden „Büschels“.



Wir wollen jetzt die zweiten Schnittpunkte (x, y) dieser Geraden mit der Ellipse berechnen.

x und y müssen Funktionen von λ sein. Wir behaupten jetzt, dass sie rationale Funktionen sind.

$$x = r_1(\lambda) \quad y = r_2(\lambda)$$

Zunächst wollen wir eine Hilfsbetrachtung einschleusen:

Gegeben sei $x^2 + mx + n = 0$ mit den Wurzeln x_0 und x_1 , dann können wir die Gl. in der Form schreiben $(x - x_0)(x - x_1) = 0$ und sehen zugleich dass

$$m = -x_0 - x_1 \quad n = x_0 \cdot x_1$$

ist. Nehmen wir an x_0 sei bekannt, so können wir aus den letzten Formeln sofort die zweite Wurzel x_1 berechnen, ohne dass etwa Quadratwurzeln benutzt werden, also rational.

$$x_1 = -m - x_0 \quad , \quad x_1 = \frac{n}{x_0}$$

Von diesem allgemeinen Prinzip machen wir jetzt bei unserer geometrischen Aufgabe Anwendung.

Wir hatten die Schnittpunkte des Kegelschnittes $\Omega = 0$ mit der Geraden $p - \lambda q = 0$ zu bestimmen. Zu dem Zwecke eliminieren wir y . Die Coefficienten der so erhaltenen quadratischen Gleichung in x werden dabei rationale Functionen von λ , die wir mit $m(\lambda)$ und $n(\lambda)$ bezeichnen wollen. Wir erhalten also

$$x^2 + m(\lambda)x + n(\lambda) = 0$$

Ebenso durch Elimination von x erhalten wir in y eine quadratische Gleichung:

$$y^2 + m'(\lambda)y + n'(\lambda) = 0$$

Nun sind aber bei den beiden Gleichungen je eine Wurzel x_0 bzw. y_0 bekannt. Also berechnet sich die gewünschte andere x und y rational in λ .

Kehren wir zu unserer ursprünglichen Funktion zurück. Es war

$$y^2 = a + bx + cx^2$$

Betrachten wir den Fall, wo $c > 0$ ist, so erhielten wir für $b^2 - 4ac = 0$ ein Linienpaar. Dieser Fall ist für uns bedeutungslos. Es ist dann nämlich

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{4c} + bx + cx^2} = \pm \frac{b}{2\sqrt{c}} \pm \sqrt{c} \cdot x$$

von vornherein eine rat. Funktion.

Wir betrachten also nur die Fälle, wo $b^2 - 4ac \geq 0$ für $c > 0$ ist.

Wir haben jetzt einen Punkt als Centrum für das Strahlbüschel auf der Hyperbel zu wählen. Man könnte natürlich einen beliebigen Punkt derselben nehmen, jedoch ist es zweckmässig nach einer der folgenden drei Methoden zu verfahren.

§ 19.

Fortsetzung: Die formelle Durchführung;
Beispiele.

Bei der 1ten Methode soll der Mittelpunkt des Strahlenbüschels x_0, y_0 im Unendlichen liegen (auf der Hyperbel). Die hierdurch gehende Gerade, die ausserdem noch durch den Koordinatenanfangspunkt geht, hat die Gleichung

$$y = \pm \sqrt{c} x$$

Sie ist || einer Asymptote. Wir betrachten nur $y = +\sqrt{c} \cdot x$. Alle zu ihr Parallelen

stellen ein Strahlenbüschel $p-\lambda q$ vor.
Die Gl. der Linien desselben ist

$$y = \sqrt{c}x + \lambda$$

Dann schneiden wir
unsere Kegelschnitt

$$y^2 = a + bx + cx^2$$

und bestimmen die

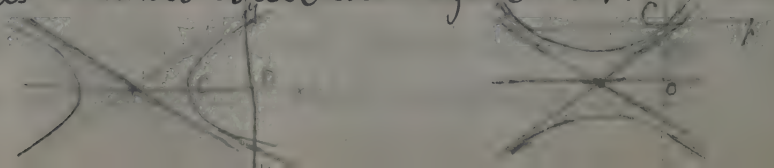
Coordinationen der Schnittpunkte.

$$cx^2 + 2\sqrt{c}\lambda x + \lambda^2 = a + bx + cx^2$$

Eine Wurzel muss ∞ werden, was sich darin
zeigt, dass sich die quadratischen Glieder
wegheben. In der That erhalten wir den
anderen Wert von x (y) als rationale
Funktion von λ .

$$x = \frac{a - \lambda^2}{2\sqrt{c}\lambda - b} \quad y = \frac{\sqrt{c}\lambda^2 - b\lambda + a\sqrt{c}}{2\sqrt{c}\lambda - b} \quad dx =$$

Die 2te bezw. 3te Methode benutzt als Centrum
des Strahlenbüschels einen der 2 reellen Schnitt-
punkte des Kegelschnittes mit der x - bezw. y -axe
wie aus dem Fig. hervorgeht, wo C das Centrum
des Strahlenbüschels bezeichnet.



Die reellen Schnittpunkte der Hyperbel mit den Achsen haben bzw. die Coordinaten

$$2) \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \quad y = 0$$

$$3) \quad x = 0 \quad y = \sqrt{a}$$

Wir wollen hier nur den Fall 3) betrachten.

Die Gleichungen der beiden Geraden, die wir durch C legen, haben die Gleichungen:

$$(g): x=0 \quad (p): y - \sqrt{a} = \lambda x$$

Die Gl. des Strahlenbüschels ist also $y - \sqrt{a} = \lambda x$.
Eliminieren wir mittels dieser Gl. und der des Kegelschnittes $y^2 = a + bx + cx^2$ das y , so wird:

$$a + 2\sqrt{a}\lambda x + \lambda^2 x^2 = a + bx + cx^2$$

oder

$$x^2(\lambda^2 - c) + x(2\sqrt{a}\lambda - b) = 0$$

Die eine Wurzel ist $= 0$; die andere ergibt die Abscisse des gesuchten zweiten Schnittpunktes als rationale Funktion von λ

$$x = \frac{b - 2\sqrt{a}\lambda}{\lambda^2 - c}; \quad dx = \frac{2(\sqrt{a}\cdot c - b\lambda + \sqrt{a}\cdot\lambda^2)}{(\lambda^2 - c)^2} d\lambda$$

und ferner

$$y = \frac{-c\sqrt{a} + b\lambda - \sqrt{a}\lambda^2}{\lambda^2 - c} \quad \text{u. s. w.}$$

Dies sind nur Beispiele für das Prinzip.
Näheres siehe in den Lehrbüchern.

Es folge nur noch ein Beispiel.

Wie gross ist

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Wir wissen, dass $I = \arcsin x$ ist, und wollen uns nur überzeugen, dass die neue Methode auch zum Ziele führt. Wir haben hier den Fall $c < 0$. Wir stellen uns den Kegelschnitt $y = \sqrt{1-x^2}$ in einer Figur dar und erhalten einen Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt. Setzen wir $\arcsin x = \varphi$ so ist φ der in der Fig. bezeichnete Centralwinkel.

Es ist also $x = \sin \varphi$, $y = \cos \varphi$.

Wir wählen jetzt als Mittelpunkt unseres Strahlenbündels den Punkt $(x=0, y=1)$ und legen durch ihn zwei Gerade mit den Gl'en

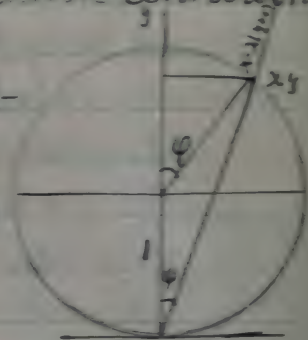
(b) $x = 0$ (c) $y + 1 = 0$

Die Gl des Strahlenbündels lautet dann etwa

$$x = \lambda(y+1)$$

Ausser dem Punkte $(x=0, y=-1)$ hat diese Gerade mit dem Kreise $x^2 + y^2 - 1 = 0$ noch den Schnittpunkt

$$x = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \quad y = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$



(e), $y = -1$

Dies in unser Integral eingesetzt gibt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{2d\lambda}{1+\lambda^2} = 2 \operatorname{arctg} \lambda + C.$$

Lassen wir x von 0 bis x laufen, so läuft λ von 0 bis λ . Es wird

$$2 \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = 2 \operatorname{arctg} \lambda.$$

Setzen wir $\operatorname{arctg} \lambda = \psi$, so haben wir:

$$I = \arcsin x = \varphi = 2 \operatorname{arctg} \lambda = 2\psi.$$

Was bedeutet nun ψ in der Fig. und wie tritt λ in Evidenz?

Es ist $x = \lambda(y+1)$, also $\lambda = \frac{x}{y+1}$ und wir sehen in unserer Figur dass in dem Dreieck die horizontale Kathete $= x$ die vertikale $= y+1$ ist. d. h.

$$\lambda = \operatorname{tg} \psi, \quad \psi = \operatorname{arctg} \lambda$$

Da $\varphi = 2\psi$, so wird $\lambda = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

Unsere Substitution läuft demnach auf den bekannten Satz hinaus, dass der Peripheriewinkel im Kreise halb so gross ist, wie der Centralwinkel auf gleichem Bogen.

§ 20. Integration trigonometrischer Funktionen

$$I = \int R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi$$

wo R eine rationale Funktion ist.

$$\therefore I = \int R(x, \sqrt{1-x^2}) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

wo $\cos \varphi = x$.

Wir brauchen jetzt nur die im letzten Beispiele benutzte Beziehung zwischen φ und λ anzuwenden, nämlich: $\lambda = \tan \frac{\varphi}{2}$
so wird unser Ausdruck rational.

Dadurch wird:

$$\sin \varphi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \quad \cos \varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \quad d\varphi = \frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \lambda d\lambda$$

Diese Methode ist aber nicht immer zweckmässig; sehr häufig führt auch die teilweise Integration zum Ziele.

Beispiel

$$I = \int \sin^m \varphi d\varphi = -\int \sin^{m-1} \varphi d \cos \varphi$$

$$= -\sin^{m-1} \varphi \cdot \cos \varphi + (m-1) \int \cos^2 \varphi \sin^{m-2} \varphi d\varphi$$

$$= -\sin^{m-1} \varphi \cos \varphi + (m-1) \int \sin^{m-2} \varphi d\varphi - (m-1) I$$

$$m \int \sin^m \varphi d\varphi = -\sin^{m-1} \varphi \cos \varphi + (m-1) \int \sin^{m-2} \varphi d\varphi$$

1ter Fall, m gerade:

$$\int \sin^m \varphi d\varphi = -\frac{\cos \varphi}{m} \left\{ \sin^{m-1} \varphi + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} \varphi + \dots \right\} + \frac{(m-1)(m-3)\dots 3 \cdot 1}{(m-2)(m-4)\dots 2} \int \sin^2 \varphi d\varphi$$

2ter Fall, m ungerade:

$$\int \sin^m \varphi d\varphi = -\frac{\cos \varphi}{m} \left\{ \sin^{m-1} \varphi + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} \varphi + \dots + \frac{(m-1) \dots 4 \cdot 2}{(m-2) \dots 3 \cdot 1} \right\} + C$$

Für ähnliche Beispiele siehe Lehrbücher.

§ 21 Integration einiger wichtiger transzendenten Funktionen.

Behandle diese durch Kunstgriffe!

Beispiel

$$I = \int x^m e^{nx} dx = \frac{e^{nx}}{n} \left\{ x^m - \frac{m}{n} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n^2} x^{m-2} - \dots \right\} + C$$

durch partielle Integration.

Setze $n = a + ib$, dann wird

$$I = \int x^m e^{ax} \cos bx dx + i \int x^m e^{ax} \sin bx dx$$

$$= \frac{e^{ax} e^{ibx}}{a+ib} \left\{ x^m - \frac{m}{a+ib} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{(a+ib)^2} x^{m-2} + \dots \right\} + C$$

Setze $a+ib = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \rho e^{i\alpha}$, dann wird

$$I = \frac{e^{ax}}{\rho} \left\{ e^{i(bx-\alpha)} x^m - \frac{m}{\rho} e^{i(bx-2\alpha)} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{\rho^2} e^{i(bx-3\alpha)} x^{m-2} + \dots \right\} + C$$

$$\int x^m e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) dx = \frac{e^{ax} x^m}{\rho} (\cos (bx-\alpha) + i \sin (bx-\alpha))$$

$$- \frac{m e^{ax} x^{m-1}}{\rho^2} (\cos (bx-2\alpha) + i \sin (bx-2\alpha))$$

$$+ \frac{m(m-1) e^{ax} x^{m-2}}{\rho^3} (\cos (bx-3\alpha) + i \sin (bx-3\alpha))$$

$$+ \dots$$

Durch Trennung der reellen und imaginären Teile

$$\int x^m e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} x^m \cos (bx-\alpha)}{\rho} - \frac{m e^{ax} x^{m-1} \cos (bx-2\alpha)}{\rho^2} + \dots$$

§ 22 Ein Integral definiert eventuell eine neue Funktion.

1) Elliptische Integrale: z. B.

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}}$$

2) Hyperelliptische Integrale: z. B.

$$\int \frac{dx}{y} \quad \text{wo } y = \sqrt{a+bx+cx^2+\dots+Kx^n}$$

3) Abel'sche Integrale.

Capitel III

Von der praktischen Berechnung der Integrale.

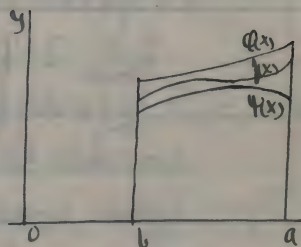
§ 23. Erste Abschätzung eines Integrals durch Mittelwertsatz.

Aus der Figur ist ersichtlich, dass bei Stetigkeit von $f(x)$ es immer gibt:

$$\varphi(x) \cong f(x) \cong \psi(x)$$

und also:

$$\int_b^a \varphi(x) dx \cong \int_b^a f(x) dx \cong \int_b^a \psi(x) dx.$$



Nach dieser Formel kann man sehr häufig ein Integral abschätzen:

Beispiel: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

Hier ist im Integrationsintervalle

$$1 \cong 1-x^3 \cong 1-x^2$$

$$\sqrt{1} \cong \sqrt{1-x^3} \cong \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \cong \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \cong \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Daraus folgt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$0,5 < I < \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$0,5 < I < 0,5236 \dots$$

Spezieller Fall dieser Abschätzung:

Es gilt:

$$f_{\max}(x) \geq f(x) \geq f_{\min}(x)$$

$$f_{\max}(a-b) \geq \int_b^a f(x) dx \geq f_{\min}(a-b)$$

wo die Gleichheitszeichen nur gelten, wenn f eine Constante ist.

Es wird nun ein f_{mittel} geben, das mit $(a-b)$ multipliziert denselben Flächeninhalt hat, wie der durch die Curve begrenzte. Also folgt der Mittelwertsatz

$$\int_b^a f(x) dx = f(\xi)(a-b)$$

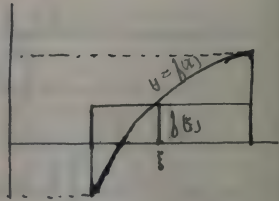
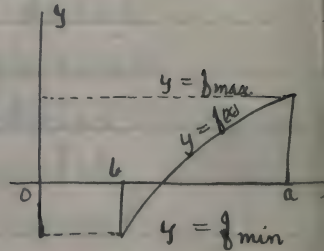
Soll die Funktion $u(x) \cdot v(x)$ integriert werden wo $v(x)$ im Intervall konstantes Vorzeichen hat z. B. positiv, so kann man ansetzen:

$$u_{\max} v(x) \geq f(x) \geq u_{\min} v(x)$$

$$u_{\max} \int_b^a v(x) dx > \int_b^a u(x) \cdot v(x) dx > u_{\min} \int_b^a v(x) dx$$

Daraus folgt der erweiterte Mittelwertsatz:

$$\int_b^a u(x) v(x) dx = u(\xi) \int_b^a v(x) dx$$



§ 24. Revision des Taylor'schen Satzes.

1. Frage: Wie kommt man dazu, irgend eine Funktion mit einer Reihe à la Taylor zu vergleichen?

Antwort: Siehe Klein, Diff. Rech.: Schmiegungsparabeln.

2. Frage: Wie schätzt man den Rest $R(x, a)$?

Antwort: Definition des Restes:

$$R(x, a) = f(x) - f(a) - f'(a) \frac{x-a}{1} - \dots - f^{(n-1)}(a) \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Es sei jetzt a die Variable, dann ist

$$\frac{dR}{da} = -f'(a) - f''(a) \frac{x-a}{1} + f'(a) - 2f''(a) \frac{(x-a)}{1 \cdot 2} + \dots - f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Also ist:

$$R(x, a) = - \int_x^a f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} da$$

Wir nehmen $a=x$ als untere Grenze, weil hierfür Definitionsmässig der Rest verschwindet.

Auf diese Form des Restes wollen wir jetzt den erweiterten Mittelwertsatz anwenden. Für $(x-a)^{n-1}$ setzen wir $v(x)$, dann ist

$$R(x, a) = - \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} \cdot \int_x^a (x-a)^{n-1} da = \frac{f^{(n)}(\xi) (x-a)^n}{n!}$$

wo ξ , ein Mittelwort zwischen x und a bedeutet.

Anmerkung: Dies ist die bequemste Form des Restes. Man erhält andere Formen, wenn man $v(x) = (x-a)^k$ wählt, wo $k=0, 1, \dots, (n-1)$:

§25: Beurteilung von Integralen durch den Taylor'schen Satz.

$$\int f(x) dx = C + f(a)(x-a) + f'(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n-1)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \int \frac{(x-a)^n \cdot f^{(n)}(\xi_1)}{n!} dx$$

wo das letzte Integral abgeschätzt werden muss. a ist constant an beliebiger Stelle, also wählen wir zweckmässig die Abscisse des linken Endpunktes des Curvenbogens, so dass $(x-a)^n$ stets positiv. Also kann der erweiterte Mittelwertsatz angewendet werden

$$\begin{aligned} \int (\text{Restglied}) dx &= \int \frac{(x-a)^n f^{(n)}(\xi_1)}{n!} dx = \frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!} \int (x-a)^n dx \\ &= \frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!} \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1!} \end{aligned}$$

Dieses ist also ein Mittel, ein Integral numerisch auszuwerten. Doch muss das Integral des Restgliedes gegen 0 convergieren. Es folgt als numerisches Beispiel berechnet

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,50826$$

§ 26. Wesen der allgemeinen parabolischen Interpolation. Zusammenhang mit den Partialbrüchen.

Die Methode der Schmiegeparabeln (bei Taylor) kann man verallgemeinern indem man verlangt, eine Parabel zu bestimmen, die sich an mehreren Stellen $x = \alpha, \beta, \gamma, \dots, \nu$ an die gegebene Curve anschließt, sei es dass sie nur durch diese Punkte hindurchgeht, sei es dass sie in noch engerer Beziehung zu der Curve steht, indem sie in diesen Punkten auch noch Diff. Quotienten mit der Curve gemein hat.

Diese Entwicklung gestattet Interpolation, während die Taylorsche nur Extrapolation.

Beliebig zunächst die Diff. Quotienten außer Betracht und sind uns die n Ordinaten $x = \alpha, \beta, \dots, \nu$ gegeben, in denen die Parabel mit der Curve übereinstimmen soll, so ist die Aufgabe durch unsere Partialbruchzerlegung bereits gelöst.

Set $\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \cdots (x-\nu)$ so war

$$O(x) = O(\alpha) \frac{\varphi(x)}{\varphi'(\alpha)(x-\alpha)} + \cdots + O(\nu) \frac{\varphi(x)}{\varphi'(\nu)(x-\nu)}$$

Bei uns liegt nun folgendes vor: Die $O(\alpha), O(\beta), \dots$ sind von vornherein gegeben und die Aufgabe lautet, $O(x)$ zu berechnen. Dies wird augenscheinlich durch die vorstehende Formel geleistet. Sie führt den Name

Lagrange'sche Interpolationsformel.

Sind für die gegebenen Abscissenwerte nicht nur die Ordinaten, sondern auch eine Anzahl von Diff. Quotienten vorgeschrieben, so wird die Berechnung der zugehörigen Parabel mindestens Ordnung, die alle diese Ordinaten und Diff. Quotienten hat, gerade auch durch die Partialbruchformel geleistet, während man nur die vorgeschriebenen Wurzeln von $\varphi(x)$ (die $\alpha, \beta, \dots, \nu$) mit der richtigen Multiplizität einführt.

Im Falle der Taylor'schen Entwicklung hat man

$$O(x) = O(\alpha) + \frac{O'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{O''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{O^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(x-\alpha)^{n-1}$$

als Gleichung der Schwingungsparabel $(n-1)$ ter Ordnung. Dividieren wir sämtliche Glieder

durch $(x-a)^n$, so erhalten wir die Partialbruchzerlegung für den Fall, dass alle n Wurzeln von $Q(x)$ gleich x sind:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{C_1(x)}{(x-a)^n} + \frac{C_2(x)}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{C_{n-1}(x)}{(x-a)}$$

Die Taylor'sche Reihe ist also der Fall der Lagrange'schen Interpolationsformel, bei welchem alle Wurzeln zusammenrücken.

Es erubrigt für diese Entwicklung ein

§ 27. Allgemeine Restbetrachtung.

Zur Anwendung kommt das Rolle'sche Theorem, das zunächst steigen möge:

Es war

$$\int_a^b f(x) dx = F(\xi) \quad (a < \xi < b)$$

Diesen Satz kann man auch als Satz der Diff. Rechnung aussprechen, indem man

$$\int f(x) dx = F(x)$$

setzt. Man erhält:

$$F(a) - F(b) = F'(\xi) (a-b) \quad \text{oder}$$

$$\frac{F(a) - F(b)}{a-b} = F'(\xi)$$

d.h. aber: Es gibt auf einem Curvenstücken, das von einer Sehne abgeschnitten wird, immer mindestens einen Punkt ξ des

Tangente der Sehne parallel ist.

Der Satz ist nichts weiter, als der Mittelwertsatz, nur dass wir als Curve die Integralcurve benutzt haben, wodurch in der Formel an Stelle der Ordinate der 1te Diff. Quotient getreten ist.

Verschwindet $F(x)$ für $x=a$ und $x=b$ so erhalten wir das Corollar des Rolle'schen Satzes:

Verschwindet eine Funktion an zwei Stellen so liegt dazwischen sicher ein Verschwindungspunkt des Diff. Quotients. Wir können das auch folgendermassen ausdrücken:

Hat die Gl. $F(x)=0$ in einem Intervalle zwei Wurzeln, so hat $F'(x)=0$ in dem Intervalle mindestens eine Wurzel.

Allgemein gilt: Hat eine Funktion, die hinreichend viele Diff. Quotients besitzt, in einem Intervalle $(n+1)$ Wurzeln, dann hat in demselben Intervalle der n te Diff. Quotient mindestens eine Wurzel.

Wir kehren jetzt zurück zu unserer Restbetrachtung. Es war $f(x) = Q(x) + R$ wo

$$R = f(x_1) - Q(x_1) \cdot r(x_1) \quad \text{Daraus wird } r(x) = \frac{f(x) - Q(x)}{f(x_1)}$$

Führen wir rechts eine Variable z ein, so wird

$$F(z) = f(z) - O(z) - r(x) \varphi(z) = 0$$

Diese Gl. hat $n+1$ Wurzeln, nämlich $z=x$,
ausserdem verschwindet dieser Ausdruck
für $x = \alpha, \beta, \dots, \nu$.

Also muss der n te Diff.quotient $F^{(n)}$
im Intervalle α bis

oder α bis x' oder x' bis ν



einen Wert 0 annehmen. Es muss also sein

$F^{(n)}(\xi) = 0$. Bilden wir ihn:

$$F^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - 0 - r(x) n!$$

($O(z)$ war nämlich ein Polynom (n) -ten Grades
von z , sein n ter Diff.quotient wird also $= 0$;
und $\varphi(z)$ war von der Form $z^n + A z^{n-1} + \dots$)

Für $z = \xi$ erhalten wir also:

$$F^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - r(x) n! = 0$$

Also wird

$$r(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad R = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \varphi(x)$$

Also hat die Lagrange'sche Interpolations-
formel die Gestalt:

$$f(x) = O(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot \varphi(x)$$

Das ist genau das, was wir im Taylor'schem
Satze haben. Zuerst n Glieder $O(x)$ und dann das Restglied

Nur war dort das $f(x) = (x-a)^n$, weil alle Ordinaten in eine zusammenfallen.

Obige Formel soll nun noch spezialisiert werden für $n=1$ bis $n=4$.

§28. Die Rechteckformel.

Set $n=1$, also α allein gegeben, so erhält man eine Parabel 1.ter Ordnung für die Interpolationscurve: $y = f(x) = f(\alpha) + R$, wo $R = \frac{f'(\xi)}{1!} (x-\alpha)$. Der gesuchte Flächeninhalt ist also durch das Integral bestimmt:

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) dx &= f(\alpha) \int_b^a dx + \int_b^a \frac{f'(\xi)}{1!} (x-\alpha) dx && \text{d. h.} \\ &= f(\alpha)(a-b) + \int_b^a f'(\xi) (x-\alpha) dx. \end{aligned}$$

Es soll das Integral des früheren Restes abgeschätzt werden!

Da aber $x-\alpha$ im Intervalle b bis a nicht constantes Vorzeichen hat,

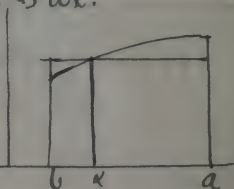
so kann der allgemeine Mittelwertsatz nicht angewendet werden.

Daher wählen wir α zweckmässig $= \frac{a+b}{2}$.

Es wird also $f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + r(x) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)$.

Spalten wir $r(x)$ so wird $r(x)$ etwa $= k + s(x) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)$

k ist dabei der Wert, den $f(x)$ für $x = \frac{a+b}{2}$ hat.



Wir haben jetzt:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + k\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + s(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

Die Aufgabe ist jetzt $s(x)$ abzuschätzen.

Es ist sofort

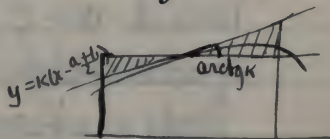
$$s(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}$$

wo ξ , zwischen $\frac{a+b}{2}$ und x liegt.

(Die bige Gl. integriert gibt:

$$\int_b^a f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b) + \int_b^a k\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + \int_b^a \frac{f''(\xi)}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

Aus der Fig. sieht man, dass das 1te Integral = 0 wird:



Wendet man nun auf das zweite Integral den erweiterten Mittelwertsatz an, so erhält man

$$\int_b^a f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b) + \frac{f''(\xi)}{2} \int_b^a \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx.$$

Um die Integration auszuführen, setze man

$$x - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} \cdot z \quad dx = \frac{a-b}{2} dz$$

Die Grenzen werden $z=1$ $z=-1$ resp. für $x=a$, $x=b$.

$$\text{Also: } \int_b^a \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{2}{3} \left(\frac{a-b}{2}\right)^3.$$

Man erhält als spezielle Rechteckformel:

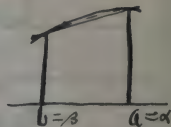
$$\text{I. } \int_b^a f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b) + \frac{f''(\xi)}{3} \left(\frac{a-b}{2}\right)^3.$$

Anmerkung: Die ganze Ableitung dieser Formel lässt sich natürlich auch so darstellen

dass man nicht die Parabel 0ter Ordnung $y = f(\frac{a+b}{2})$, sondern die Parabel 1ter Ordnung $y = f(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2}) f'(\frac{a+b}{2})$ d.h. die Tangente im Punkte $x = \frac{a+b}{2}$ zur Interpolation anwendet. Insofern ist unsere Formel zugleich eine "spezielle Trapezformel".

§ 29. Methode des Trapezes.

Wird $n=2$, ist also $x=a$ und $x=b$ gegeben und zwar sollen dieselben an den Enden des Integrationsintervalls liegen, dann haben wir eine Parabel 1ter Ordnung zu bestimmen d.h. die in der Fig. gezeichneten gerade Linie.



Wir bilden den Ausdruck:

$$f(x) = f(a) \frac{(x-b)}{(a-b)} + f(b) \frac{x-a}{b-a} + r(x)(x-a)(x-b)$$

wo $r(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)$ ist.

Durch Integration haben wir also:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b) dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a) dx + \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2} (x-a)(x-b) dx$$

Das giebt nach dem erweiterten Mittelwertsatz,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b) dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a) dx + \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{f(a)}{2} a - \frac{b}{2} \int_1^+ (z+1) dz - \frac{f(b)}{2} a - \frac{b}{2} \int_1^- (z-1) dz + \frac{f''(\xi)}{2} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \int_1^+ (z^2-1) dz \end{aligned}$$

wo $x - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} z$.

Wir erhalten dann als Trapezformel

$$\text{II. } \int_a^b f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} (a-b) - \frac{2}{3} f''(\xi) \left(\frac{a-b}{2}\right)^3$$

Daraus ergibt sich: Das jetzt betrachtete Trapez ergibt einen doppelt so grossen Fehler, als das mittlere Rechteck. Ausserdem sind die Fehler von verschiedenem Vorzeichen (siehe Fig.).



§ 20. Methode der gewöhnlichen parabolischen Interpolation.

Wird $n=3$, ist also $x=a$, $x=b$, $x=\frac{a+b}{2}$ (Anfang, Ende, Mitte) gegeben, so interpolieren wir mit einer Parabel 2ten Grades von der Form

$$y = A + Bx + Cx^2$$

Es wird

$$f(x) = 2 f(a) \frac{(x-b)(x-\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2} + 2 f(b) \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2} - 4 f(\frac{a+b}{2}) \frac{(x-a)(x-b)}{(a-b)^2} + R$$

wo $R = r(x)(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})$ gesetzt wird.

Wenn $r(x)$ gespalten wird in $k + s(x)(x-\frac{a+b}{2})$ so wird

$$R = k(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2}) + s(x)(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})^2 = k(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2}) + \frac{f'''(\xi)}{24} (x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

wenn $s(x)$ abgeschätzt wird.

Das Glied mit k fällt wieder heraus.

Integriert ergibt sich:

$$\int_b^a f(x) dx = \int_b^a \frac{2f(a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2} dx + \int_b^a \frac{2f(b)(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2} dx$$

$$- \int_b^a 4f(\frac{a+b}{2}) \frac{(x-a)(x-b)}{(a-b)^2} dx + k \int_b^a (x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2}) dx$$

$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_b^a (x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})^2 dx$$

(Das letzte Glied ist durch abendmalige Anwendung des Mittelwertsatzes richtig)

Setze man $x - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} z$ so wird

$$\int_b^a f(x) dx = \frac{2f(a)}{(a-b)^2} \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \int_{-1}^{+1} (z^2+z) dz - \frac{4f(\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2} \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \int_{-1}^{+1} (z^2-1) dz$$

$$+ \frac{2f(b)}{(a-b)^2} \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \int_{-1}^{+1} (z^2-z) dz + k \left(\frac{a-b}{2}\right)^4 \int_{-1}^{+1} (z^3-z) dz + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \left(\frac{a-b}{2}\right)^5 \int_{-1}^{+1} (z^4-z^2) dz$$

$$= \frac{2f(a)}{(a-b)^2} \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2f(b)}{(a-b)^2} \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{4f(\frac{a+b}{2})}{(a-b)^2} \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$+ 0 - \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \left(\frac{a-b}{2}\right)^5 \left(-\frac{4}{15}\right)$$

Dies gibt die gewöhnliche parabolische Interpolationsformel:

$$\int_b^a f(x) dx = \frac{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{6} (a-b) - \frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \left(\frac{a-b}\right)^5$$

Anmerkung: Wiederum kann man sagen, dass dieser Formel im Grunde eine Parabel 2ter Ordnung zu Grunde gelegt ist, nämlich diejenige welche $y = f(x)$ bei $x = a$ und $x = b$ schneidet und bei $x = \frac{a+b}{2}$ berührt. Von hier aus versteht man besser weshalb diese Formel III einen kleineren Fehler gibt, als die jetzt abzuleitende Formel 4.

III

§ 31. Interpolation durch Grenzparabel 2ter Ordnung.

Wird $n=4$, so legen wir jetzt eine Parabel durch 4 Punkte der Curve und zwar sollen an den beiden Enden des Intervalles je zwei zusammenfallen, d. h. es sollen an den Endpunkten noch die erste Diff. quotienten übereinstimmen. Wir benutzen also die Partialbruchformel mit zwei Doppelwurzeln

$$f(x) = f(a) \frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} + [(a-b)f'(a) - 2f(a)] \frac{(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^3} + f(b) \frac{(x-a)^2}{(a-b)^2} \\ + [(b-a)f'(b) - 2f(b)] \frac{(x-a)^2(x-b)}{(b-a)^3} + R$$

wo $R = r(x)(x-a)^2(x-b)^2$ gesetzt werden kann. Wir schätzen $r(x)$ wieder ab und haben:

$$R = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} (x-a)^2(x-b)^2.$$

Durch Integration ergibt sich der Flächeninhalt:

$$\int_b^a f(x) dx = \frac{f(b)}{4 \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \int_b^a (x-a)^2 dx + \frac{(a-b)f'(b) + 2f(b)}{8 \left(\frac{a-b}{2}\right)^3} \int_b^a (x-b)(x-a)^2 dx \\ + \frac{f(a)}{4 \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \int_b^a (x-b)^2 dx + \frac{(a-b)f'(a) - 2f(a)}{8 \left(\frac{a-b}{2}\right)^3} \int_b^a (x-a)(x-b)^2 dx \\ + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_b^a (x-a)^2(x-b)^2 dx.$$

Durch die bekannte Substitution erhalten wir:

$$\int_b^a f(x) dx = \frac{a-b}{4} f(b) \int_{-1}^{+1} (z-1)^2 dz + \frac{a-b}{2} [f(a) f(b) + 2f(\frac{a+b}{2})] \int_{-1}^{+1} (z-1)(z+1) dz$$

$$+ \frac{a-b}{4} f(a) \int_{-1}^{+1} (z+1)^2 dz + \frac{a-b}{2} [f(a) f(\frac{a+b}{2}) + 2f(b)] \int_{-1}^{+1} (z-1)(z+1)^2 dz$$

$$+ \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \left(\frac{a-b}{2}\right)^5 \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^2 dz.$$

Wir erhalten also als Formel für die Interpolation mit Parabel 3ter Ordnung:

$$\int_1^a f(x) dx = f(a) + \frac{f(b)}{2} (a-b) + \frac{f(b) - f(a)}{3} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{2}{45} f^{(4)}(\xi) \left(\frac{a-b}{2}\right)^5.$$

Anmerkung: Die Reste der Formel III und IV differenzieren erstens durch das Vorzeichen und dann ist noch der Rest bei IV viermal so gross als bei III.

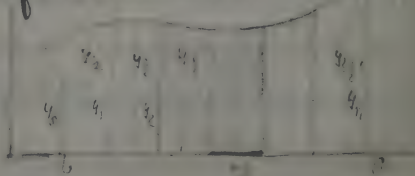
§ 32. Abteilungswise Benutzung der niederen Interpolationsformeln.

Anstatt bei grossen Intervallen durch Parabeln höherer Ordnung zu interpolieren, kann man auch folgendermassen verfahren.

Wir teilen unser Intervall in n gleiche Teile und wenden auf die entstandenen Ableitungen unser Verfahren an.

Zunächst Formel I auf dem ersten Streifen.

Sein Inhalt ist:



$$\int_b^a f(x) dx = y_{\frac{1}{2}} \left(\frac{a-b}{n} \right) + \frac{f''(\xi_1)}{24} \left(\frac{a-b}{n} \right)^3$$

und als Integral der gesamten Fläche erhalten wir:

$$\int_b^a f(x) dx = \frac{a-b}{n} (y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + y_{\frac{5}{2}} + \dots + y_{\frac{2n-1}{2}}) + \frac{(a-b)^3}{24} \frac{f''(\xi)}{n}$$

Das Fehlerglied ist dadurch entstanden, dass $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)$ gleich $n f(\xi)$ gesetzt werden konnte, wo ξ ein Mittelwert im ganzen Intervall ist. Wir haben also

I.
$$\int_b^a f(x) dx = \frac{a-b}{n} (y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \dots + y_{\frac{2n-1}{2}}) + \frac{(a-b)^3}{24 n^2} f''(\xi)$$
 als Formel des mittleren Rechtecks.

Benutzen wir in gleicher Weise Formel II:

II.
$$\int_b^a f(x) dx = \frac{a-b}{n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) - \frac{(a-b)^3}{12 n^2} f''(\xi)$$
 als Formel des Grenztrapezes.

Durch Benutzung von III erhalten wir die sogenannte Simpson'sche Regel

III.
$$\int_b^a f(x) dx = \frac{a-b}{n} \left(\frac{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{2n-2} + y_n}{6} - \frac{(a-b)^5}{2880 \cdot n^4} f^{(4)}(\xi) \right)$$

Die Formel IV gibt endlich die von MacLaurin und Euler aufgestellten Formeln:

$$\int_b^a f(x) dx = \frac{a-b}{n} \left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n}{2} + \frac{(a-b)^2}{n^2} \left(\frac{y'_0 - y'_n}{12} \right) + \frac{(a-b)^5}{720 \cdot n^4} f^{(4)}(\xi) \right)$$

Das zweite Glied ist dadurch so einfach

geworden, dass bei der Summation von $y_0' - y_1' + y_1' - y_2' + y_2' - \dots$ wie man sieht, alle Diff. Quotienten der Mittelstellen wegfallen.

Anmerkung: Die MacLaurin'sche Formel gibt mit einer geringen Anzahl von Bestimmungsstücken ($n+3$ Beobachtungen) fast dieselbe Genauigkeit, wie die Simpson'sche mit $(2n+5)$ Bestimmungsstücken.

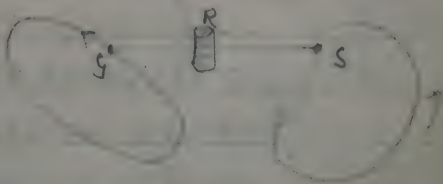
Anmerkung: Im Taschenbuch der Hütte 16. Auflage p. 84 sind etliche solche Restangaben.

§ 33.

Apparate zur mechanischen Integration
Amshel's Polarplanimeter.

Beschreibung des Apparats siehe W. Dymk.
Katalog der Nürnberger Ausstellung 1892/93.

Theorie: Hat man einen Stab und damit verbunden eine gleitende Rolle, und führt man mit diesem



Stabe eine geschlossene Bewegung über die Ebene aus, wobei das Ende S einen Flächeninhalt I, und das Ende R des Stabes

einen Flächeninhalt I_2 umkreisen mag,
 so ist $I_1 - I_2$ mit dem Drehwinkel der Rolle
 proportional:

$$I_1 - I_2 = k \cdot \omega$$

wo k eine Constante von den Dimensionen
 des Instruments abhängt.

Es folgt ausführlich die Möbius'sche Vorzeichen
 regel.

Die Bewegung des Stabes
 kann in 3 Teilbewegungen

zerlegt werden. Ist ρ der Radius der Rolle,
 so ist $\rho d\omega$ das abgerollte Bogenwegetückchen
 und zwar ist

I

$$\rho d\omega = 0 \cdot dx + dy + 0 \cdot dx = dy$$

Um den überstrichenen Flächeninhalt
 dI zu berechnen, setzen wir fest ω ist
 positiv, wenn die obere Kante der Rolle
 voranschreitet, negativ, wenn die untere
 voranschreitet. In $dI = l \cdot dy$ ist also
 wegen dy das Vorzeichen stets richtig.

Bei Drehung ist daher

$$dI = \frac{1}{2}(e^{\omega} - e^{-\omega}) d\omega$$



Der Gesamtflächeninhalt, der bei den 3 Teilbewegungen überschritten wird, ergibt sich also zu:

$$\text{II} \quad dI = 0 \cdot dx + \rho \cdot dy + \frac{1}{2}(\rho^2 - \rho'^2) d\varphi;$$

nach I folgt

$$dI = \rho l dw + \frac{1}{2}(\rho^2 + \rho'^2) d\varphi$$

$$I = \rho l w + \frac{1}{2}(\rho^2 + \rho'^2) \varphi$$

Wird nun, wie beim Planimeter, die Bewegung des Stabes hinundhergehend, so dass der Stab in seine Anfangslage zurückkehrt, so wird $\varphi = 0$, also

$$I = \rho l w$$

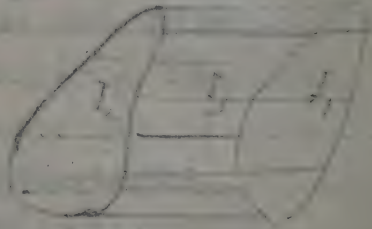
Der gesammte überschrittene Flächeninhalt I ist mit Berücksichtigung der Vorzeichen:

$$I = I_1 + I_3 - I_2 - I_3 = I_1 - I_2$$

Also: Umkreist bei der geschlossenen Bewegung des Stabes das eine Ende s im Möbius'schen Sinne einen Flächeninhalt I_1 ,

und das andere ξ einen I_2 , dann ist immer $I_1 - I_2 = \rho \cdot l \cdot w$. Bewegt sich dabei ξ auf einer Curve hin und her, so wird $I_2 = 0$ und es ist:

$$I_1 = \rho \cdot l \cdot w.$$



§ 34. Der harmonische Analysator von Heurich;
 nebst Excurs über die Fouriersche Reihe.
 Ist $y = f(x)$ eine um 2π periodische Funktion,
 so kann man sie durch eine Fouriersche
 Reihe annähern:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \\
 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx.$$

Anmerkung: Die Bedeutung der Fourierschen Reihenentwicklung im Gebiete der Akustik ist die, dass eine beliebige periodische Schwingung dargestellt werden soll als eine Überlegung von einfachen harmonischen Schwingungen.

Die Aufgabe des Apparates ist, die Coefficienten a und b für die gesuchte Annäherungsformel zu finden. Betrachten wir diese genauer.

Es sei uns die periodische Funktion $y = f(x)$ gegeben. Bilden wir nun:

1. $(\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots) - f(x)$,
 so stellt diese Differenz an jeder Stelle den Fehler $v(x)$ dar, den wir begehen, wenn wir nur die 3 ersten Terme berücksichtigen

Analog bekommen wir einen Fehler v_{x_i} , wenn wir n grösser nehmen. In den Beobachtungswissenschaften liegt dieser Fall sehr oft vor, dass man mit notwendiger Fehlerrechnung rechnen muss und es ist dann die Aufgabe, diese Differenz durch Annahme der noch unbestimmten Grössen möglichst klein zu machen. Kull kann man dieselbe für alle Punkte nicht machen, da die Anzahl der unbestimmten Grössen $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ beschränkt ist.

Wir verfahren daher nach der Methode der kleinsten Quadrate, wir stellen also die Forderung, dass die Summe S der Fehlerquadrate, also das Integral

$$S = \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots \right) - f(x) \right\}^2 dx$$
 ein Minimum werde.

Zu diesem Zwecke werden wir die $(2n+1)$ unbekannt Grössen $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ aus den $(2n+1)$ Gleichungen bestimmen, die so lauten:

$$2. \quad \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b_1} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial b_n} = 0$$

Bezeichnen wir den Fehler mit v , so haben wir allgemein: $\int_0^{2\pi} v^2 dx$ soll ein Minimum sein. Daraus ergeben sich $2n+1$ Gleichungen

$$2^a \quad \int_0^{2\pi} 2v \frac{\partial v}{\partial a_0} dx = 0 \dots \int_0^{2\pi} 2v \frac{\partial v}{\partial a_n} dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} 2v \frac{\partial v}{\partial b_1} dx = 0 \dots \int_0^{2\pi} 2v \frac{\partial v}{\partial b_n} dx = 0$$

Jetzt die aus Gl. 1 berechneten Werte für die partiellen Diff.quotienten eingesetzt, ergibt:

$$3. \quad \int_0^{2\pi} v dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} v \cos x dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} v \cos 2x dx = 0 \dots \int_0^{2\pi} v \cos nx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} v \sin x dx = 0 \dots \int_0^{2\pi} v \sin nx dx = 0$$

Aus diesen $2n+1$ Gleichungen sind also unsere Coefficienten zu bestimmen.

Wir wollen jetzt diese letzten Gleichungen noch ausführlicher angeben, indem wir für v seinen Wert aus Gl. 1 einsetzen und jedes Glied einzeln integrieren:

$$3^a) \quad 0 = \int_0^{2\pi} v dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx - \frac{1}{2} a_0 \int_0^{2\pi} dx - a_1 \int_0^{2\pi} \cos x dx - \dots$$

$$- b_1 \int_0^{2\pi} \sin x dx - \dots - b_n \int_0^{2\pi} \sin nx dx$$

$$0 = \int_0^{2\pi} v \cos x dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx - \frac{1}{2} a_0 \int_0^{2\pi} \cos x dx - \dots - b_n \int_0^{2\pi} \cos x \sin nx dx$$

$$0 = \int_0^{2\pi} v \sin nx dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx - \frac{1}{2} a_0 \int_0^{2\pi} \sin nx dx - \dots$$

$$- b_n \int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx.$$

Die $2n+1$ unbekanntenen Größen müssen wir jetzt auflösen. Die Integrale sind dabei Coefficienten. Wir brauchen jedoch keine Determinanten, die Sache geht einfacher. Schen wir uns die Coefficienten der einzelnen Gleichungen genauer an, so haben wir folgende drei allgemeine Formen für sie:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos n'x \, dx = I_1, \quad \int_0^{2\pi} \cos nx \sin n'x \, dx = I_2, \quad \int_0^{2\pi} \sin nx \sin n'x \, dx = I_3$$

Satz: Das Coefficienten Schema unserer linearen Gleichungen vereinfacht sich nun ausserordentlich, wenn wir die Werte der vorkommenden Integrale ausrechnen.

Bei der ersten Form können wir setzen:

$$\cos nx \cdot \cos n'x = \frac{1}{2} \{ \cos (n+n')x + \cos (n-n')x \}$$

Dadurch verwandelt sich unser Integral in:

$$\int_0^{2\pi} \cos (n+n')x \, dx + \int_0^{2\pi} \cos (n-n')x \, dx$$

Ausgeführt:

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (n+n')x}{n+n'} \right)_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin (n-n')x}{n-n'} \right)_0^{2\pi}$$

wobei im letzten Gliede $n \neq n'$ vorausgesetzt ist.

Ist nun $n \neq n'$, so werden beide Glieder 0 bei Einsetzung der Grenzen; also

$$\int_0^{2\pi} = 0.$$

Ist aber $n = n'$, so wird

$$I_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

wie man direkt sieht (oder aus der allgemeinen Formel $\frac{\sin((n-n')x)}{n-n'}$ wieder ableiten kann, indem man die Regel für $\frac{0}{0}$ gebraucht).

Mit denselben Mitteln lässt sich beweisen, dass

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin n'x dx = 0$$

ist für jedes n und n' , ferner dass

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin n'x dx = 0 \text{ oder } = \pi$$

ist, je nachdem $n \neq n'$ oder $n = n'$ ist.

Aus unseren $2n+1$ linearen Gleichungen wird also:

$$3^b \quad 0 = \int_0^{2\pi} f(x) dx - a_0 \pi, \quad 0 = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx - a_1 \pi, \quad \dots, \quad 0 = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx - b_n \pi.$$

Resultat: Unsere linearen Gleichungen vereinfachen sich so, dass jede einzelne Unbekannte für sich gerade bestimmt wird, und zwar sind schließlich die Werte der gesuchten Coefficienten a_v und b_v in der allgemeinen Formel enthalten:

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos vx dx, \quad b_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin vx dx$$

Wir kommen jetzt zu unserem Apparate selbst zurück. Derselbe hat die Aufgabe, sofern die Curve im Intervall von 0 bis 2π gezeichnet

vorliegt, die Coefficienten a_v und b_v mechanisch auszuwerten.

Es folgt zunächst noch eine theoretische Bemerkung, die von Henrici stammt: sie bezieht sich darauf, die einzelnen Integrale in den Gleichungen der Coefficienten durch partielle Integration umzugestalten.

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos vx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(f(x) \frac{\sin vx}{v} \right)_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi v} \int_0^{2\pi} \sin vx \cdot \frac{df(x)}{dx} \, dx$$

Der erste Ausdruck rechts wird 0, und wir erhalten, wenn wir für $f(x)$ noch y setzen:

$$a_v = -\frac{1}{\pi v} \int_0^{2\pi} \sin vx \, dy, \quad b_v = \frac{1}{\pi v} \int_0^{2\pi} \cos vx \, dy$$

wobei das Integral an der Curve entlang zu führen ist. (Die Zufügung der Grenzen 0 und 2π bezieht sich nur auf den Spicraum des x).

Es kommt schließlich alles darauf hinaus, folgende zwei Integrale hinstreckt an unserer Curve, auszuwerten:

$$\int \sin vx \, dy, \quad \int \cos vx \, dy.$$

Eben dieses besorgt nun der Apparat in direktester Weise.

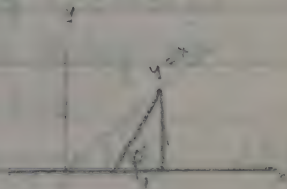
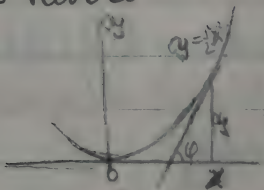
Es folgt Beschreibung des Apparates.
Anmerkung: Diese Betrachtung der Fourierschen Reihe stammt von Tschebyscheff.

§ 35: Der Integralkurve von Abdank-Abakanowicz.
Es stellt sich die Aufgabe, das unbestimmte Int.

$$I = \int^x f(x) dx = F(x)$$

auszuwerten, wenn die Curve $y=f(x)$ gegeben ist, oder: er will zu der gegebenen Differentialcurve die zugehörige Integralcurve zeichnen.

Theorie:



Ein Punkt der Integralcurve wird einem Punkte der Differentialcurve entsprechend heißen, wenn das x des einen Punktes gleich ist dem x des anderen Punktes.

Um die geometrischen Beziehungen in diesem Punkte festzustellen, ziehen wir in dem Punkte (x, y) die Tangente, so dass

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = (\text{nach Definition}) y.$$

Jetzt zeichnen wir von dem entsprechenden Punkte der Diff. curve aus ein Dreieck, sodass die vertikale Kathete gleich y und die horizontale gleich 1 ist.

Wir haben dadurch den Winkel φ konstruiert, dessen
 $\tan \varphi = \frac{y}{x} = y$.

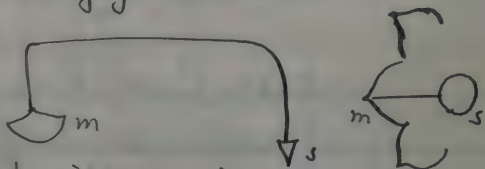
Also: Erstens ist $x = x$; zweitens konstruiere man an der Diff. curve obiges Hilfsdreieck, dann wird die geometrische Tangente der Integralcurve mit der Hypotenuse dieses Hilfsdreiecks allemal parallel sein.

Es folgt die Beschreibung des Apparates.

§ 36. Planimeter von Prytz.

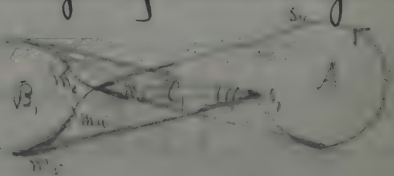
Beschreibung:

m ist ein
 umfährt man mit
 s die Curve, so beschreibt m eine krummlinige
 periodische Curve.



Um den Zusammenhang dieser neuen Curve mit dem Flächeninhalte zu erkennen, verfolgen wir die Bewegung der Stange an folgender Fig.

Die Spitze werde in der
 Pfeilrichtung um den
 Kreis geführt.



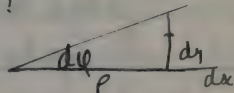
Nach der Möbius'schen Vorzeichenregel ist

A positiv und C negativ. Alles andere fällt weg weil doppelt überstrichen:

$$I = A - C$$

Diesen Flächeninhalt können wir genau so berechnen wie bei Amster's Planimeter, indem wir die drei infinitesimalen Bewegungen des Stabes betrachten, das $d\varphi$ jetzt aber als Drehwinkel um den linken Endpunkt der Stange betrachten. Wir erhalten:

$$dI = a dx + l \cdot dy + \frac{1}{2} l^2 d\varphi$$



Jedoch haben wir bei der Bewegung unserer Stange nur zwei Einzelbewegungen, da dieselbe wegen der Schneide nicht um dy verschoben werden kann. Also bleibt uns direkt:

$$dI = \frac{1}{2} l^2 d\varphi.$$

Bezeichnen wir in der Figur den Gesamtdrehwinkel mit ϕ , so ist:

$$I = A - C = \frac{1}{2} l^2 \phi.$$

Diese Gl. wollen wir noch umgestalten. Wir beschreiben einen Kreisbogen m, s , mit der Stangenlänge l als Radius, sodass das Gebiet B , vom Kreisbogen und der neuen Curve umschlossen, entsteht. Es ist nun:

$$C + B_1 = \frac{1}{2} l^2 \Phi_1$$

als Kreisfactor. Zu obigem addiert

$$A + B_1 = l^2 \Phi_1$$

Also: Der Apparat gibt uns durch den Winkel Φ_1 nicht den Flächeninhalt A direkt, sondern $A + B_1$. Diese Gleichung aus Fig. 1 wollen wir mit Indices schreiben:

$$I \quad A + B_1 = l^2 \Phi_1$$

Jetzt betrachten wir Fig. 2) indem wir den Umlauf von b aus beginnen. Wir erhalten bei dieser Bewegung als überschüssiger Flächeninhalt

$$I = A - C_2 = \frac{1}{2} l^2 \Phi_2$$

Beschreiben wir wieder von b aus einen

Kreisbogen m, m_0 und

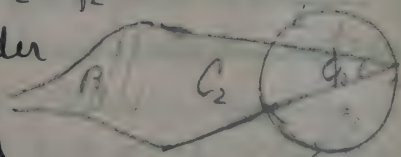
bezeichnen das Gebiet, welches von der neuen Curve und dem Kreisbogen umschlossen ist mit B_2 , so ist

$$C_2 - B_2 = \frac{1}{2} l^2 \Phi_2 \quad \text{und ferner}$$

$$II \quad A - B_2 = l^2 \Phi_2$$

Dabei ist also $A > l^2 \Phi_2$.

Um nun die richtige Mitte sofort zu finden,



sucht Prytz den Flächeninhalt $B=0$ zu machen.

Es werde nur folgendes hervorgehoben:

Prytz umläuft nicht nur die Conturen, sondern beginnt in einem geeigneten Punkte O

innerhalb der zu umfahrenden Fläche, so dass die Curve der m -Punkte 3 Spitzen erhalten wird. Der Kreisbogen ist in diesem Falle natürlich von O aus zu schlagen, und man muss es so einrichten, dass das B , welches jetzt aus einem positiven und zwei negativen Teilen besteht, zu Null wird. Alsdann ist tatsächlich: $A = L^2 \phi$.

Es sei noch bemerkt, dass Prytz Kunstgriffe angibt, um solche Punkte O zu finden.



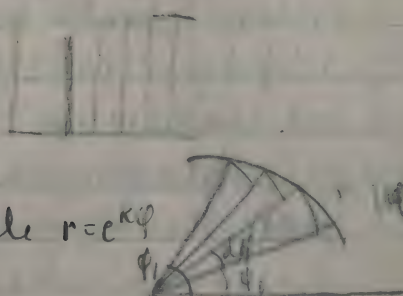
Capitel III (Zwischenteil)

Anwendungen der Integralrechnung.

A Auf die Geometrie.

§ 37. 1) Flächeninhalt ebener Curven.

Bei rechtwinkligen Coordinaten wurde das „Integral“ definiert



Polarcoordinaten

Beispiel: log. Spirale $r = e^{k\varphi}$

$$I = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{r_1^2 - r_0^2}{4k}$$

§ 38. 2) Bogenlänge ebener Curven.

Rechtwinklige Coordinaten

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

a) $y = f(x)$

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

b) $x = \varphi(t)$ $y = \psi(t)$

$$s = \int \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

Beispiele: Ellipse

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t$$

$$s = \int \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot dt = a \int \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} \cdot dt$$

wo $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

$$= -a \int \frac{1 - e^2 u^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-e^2 u^2)}} du \quad \text{wo } \cot t = u$$

Dies ist ein elliptisches Integral.

Anmerkung: Man kann elliptische Integrale ebenso gut berechnen, wie alle anderen: z. B.

$$\int \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} \cdot dt = \int \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 t + \frac{1}{8} e^4 \cos^4 t - \dots\right) dt$$

Dieses wird gliedweise integriert, u. s. w.

Polarkoordinaten:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

$$s = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} \cdot d\varphi = \int \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} \cdot dr = \int \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{r^2}{d\varphi^2}} \cdot d\varphi$$

Beispiel: log. Spirale $r = c^k \varphi$

$$s = \int \sqrt{k^2 + 1} \cdot r \cdot d\varphi = \int \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} dr = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} (r_1 - r_2)$$

Lemniskate: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

$$s = a \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a \int \frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)(2u^2-1)}}$$

wo $\cos 2\varphi = 2u^2 - 1$

Dies ist ein elliptisches Integral 1ter Gattung
während bei der Ellipse oben wir hatten ein
elliptisches Integral 2ter Gattung.

§ 39 3) Bogenlänge von Raumcurven.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2} dt$$

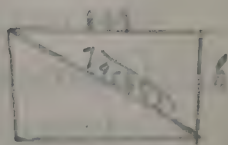
wo $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

Beispiel: Schraubenlinie:

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{ht}{2\pi}$$

Sie liegt auf dem

Rotationscylinder $x^2 + y^2 = a^2$



$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \sqrt{4a^2 \pi^2 + h^2} = \sqrt{4a^2 \pi^2 + h^2}$$

§ 40. 4) Cubatur der Rotationsflächen.

$$dI = \pi r^2 dz$$

$$I = \pi \int_{z_0}^z r^2 dz = \pi \int (x^2 + y^2) dz$$

$$= \pi \int f(z) dz$$

Beispiel: Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad r^2 = \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) a^2$$

$$I = \pi \int_{-c}^{+c} a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4\pi}{3} a^2 c$$

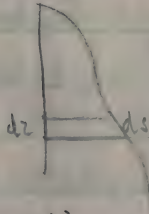
Für $c = a$ (d.h. für Kugel) $I = \frac{4}{3} \pi a^3$.



§ 41 5). Complanation der Rotationsflächen.
Es ist

$$O = \int_{z_0}^z 2\pi r ds = \int_{z_0}^z 2\pi r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz$$

(da für einen Kegelschnitt ein mittlerer Radius angewendet werden darf, so ist $ds = 2\pi r ds$)



~~da $\int 2\pi r ds$ Kegelschnitt~~

B Beispiel: Rotationsellipsoid

$$r^2 = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$O = 2\pi \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz = \frac{2\pi a}{c^2} \int \sqrt{c^4 + (a^2 - c^2)z^2} dz$$

Jetzt machen wir den Unterschied zwischen verlängerten und abgeplatteten Rot. Ellipsoiden

- 1) Für verlängerte Rot. Ellipsoid ist $c^2 > a^2$
Es ergibt sich in diesem Falle

$$I \quad O = 2\pi a^2 + 2\pi a c \frac{\arcsin e}{e}$$

$$\text{wo } e = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}$$

Für Kugel wird $c = a$, $e = 0$, $\frac{\arcsin e}{e} = 1$

$$\therefore O = 4\pi a^2$$

Anmerkung: Der Ausdruck O besteht aus einem algebraischen und einem cyclometrischen Glied.

2) Für abgeplattete Rotationsellipsoide ist $c^2 < a^2$
Hier wird

$$\text{II} \quad 0 = 2\pi a^2 + \frac{\pi c^2}{e'} \log \frac{1+e'}{1-e'} \quad \text{wo } e' = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$$

(da wir die Formeln haben:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a^2 + x^2} dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a^2 \log(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right]_{x_0}^{x_1})$$

Für die Kugel wird $e' = 0$. Durch
Entwicklung von $\frac{1}{e'} \log \frac{1+e'}{1-e'}$ wird in diesem
Falle $0 = 4\pi a^2$.

B. Anwendungen der Integralrechnung auf die Mechanik.

§ 42. Bestimmung des Schwerpunktes.

- 1) Schwerpunkt einer geradlinigen Strecke.
Die Strecke von a bis b , sei mit Masse bedeckt
und zwar so, dass die variable Dichte berechnet
auf die Längeneinheit gleich ρ sei.
Dann gilt für das Stückchen dx

$$dm = \rho dx$$

Ferner

$$M = \int_a^b \rho dx$$

Zur Bestimmung des Schwerpunktes haben
wir die Summe der statischen Momente aller

Massenelemente von b bis a nötig; d. h. also

$$M_1 = \int_b^a x \, dm = \int_b^a \rho x \, dx$$

Der Schwerpunkt ist alsdann gegeben durch die Gl.

$$\bar{x} = \frac{\text{stat. Moment}}{\text{Gesamtmasse}} = \frac{M_1}{M}$$

Da $M_2 = M_1$

so definieren wir den Schwerpunkt S als den Punkt, in welchem man sich die Gesamtmasse konzentriert denken muss, damit dieselbe dort dasselbe statische Moment in Bezug auf den Anfangspunkt ausübt, wie die actualle Massenverteilung.

2) Schwerpunkt einer ebenen Fläche.

Das statische Moment eines Flächenstreifens $y \, dx$ ist resp.

1) in Bezug auf die y -Axe: $x \, dm = \rho x y \, dx$

2) " " " " " " " " " " " " $\frac{1}{2} y \, dm = \frac{1}{2} \rho y^2 \, dx$

wo ρ die constante Dichte bedeutet.

Als Gesamtmoment bekommen wir also:

$$\int_b^a x \, dm = \rho \int_b^a x y \, dx \quad \text{und} \quad \int_b^a \frac{1}{2} y \, dm = \rho \int_b^a \frac{1}{2} y^2 \, dx$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Schwerpunktes der Gesamtfläche mit \bar{x}, \bar{y} , so wird nach Definition sein:

$$\xi \cdot \rho \int y dx = \rho \int x y dx, \quad \eta \rho \int y dx = \rho \int \frac{1}{2} y^2 dx$$

$$\xi = \int_b^a x y dx : \int_b^a y dx, \quad \eta = \int_b^a \frac{1}{2} y^2 dx : \int_b^a y dx.$$

3) Schwerpunkt eines Curvenbogens.

Die statischen Momente des Curvenbogens s in Bezug auf die beiden Coordinatenachsen sind resp.

$$\int x dm = \int \rho x ds, \quad \int y dm = \int \rho y ds$$

woraus

$$\xi = \int \rho x ds : \int \rho ds, \quad \eta = \int \rho y ds : \int \rho ds$$

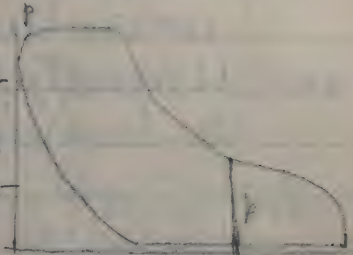
§ 43. Die Züldir'schen Regeln

Siehe Williamson. Int. Cal. p. 262. g. c. f.

§ 44. Das Indikator Diagramm.

Der Zweck des Indikators ist bei einer Dampfmaschine die Abhängigkeit der auf der einen Seite des Kolbens wirkenden Dampfspannung p von dem zugehörigen Kolbenwege s darzulegen. Dies geschieht dadurch, dass derselbe den Verlauf der Function $p = f(s)$ in Gestalt einer Curve aufzeichnet. Es lassen sich nun erstens

aus der Gestalt dieser Curve Schlüsse ziehen auf die einzelnen Phasen der Zustandsänderung des Dampfes, zweitens, lässt sich aus dem Flächeninhalt der geschlossenen Curve, des sogenannten Indicator-Diagramms, sofort die Gesamtarbeit berechnen die der Kolben bei einmaligem Hin- und Hergange leistet. Wie aus der Mechanik bekannt ist, wird dieselbe gleich



$$A = \int p \, dv = \oint p \, ds,$$

wo f der Querschnitt des Cylinders ist.
Anmerkung: Strenge und Anschaulichkeit in der Mathematik.

Beispiel: $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ versteht nicht s aus sondern definiert geradezu s . etc. etc.
Interessante Abhandlung von Schaeffers
Allgemeine Untersuchungen über
"Rectifikation der Curven". Acta Math. V.

Capitel V

Feinere Ausführungen zur Integralrechnung

§ 45. Unendlichwerden des Integranden und der Grenzen beim Beispiel:

$$\int_a^b x^{-n} dx$$

- 1) Wird der Integrand z. B. an einer Grenze ∞ gross, so verliert das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe seine Bedeutung, weil nämlich eines der Δx unendlich gross wird.

Man hilft sich folgendermassen:

Wird $f(x)$ an der Grenze b unendlich gross, so wollen wir unter dem Integral $\int_a^b f(x) dx$ den Limes verstehen, den das Integral $\int_a^{b+\varepsilon} f(x) dx$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ annimmt.

Es kommt das darauf hinaus, für eine von b verschiedene Grenze $b+\varepsilon$ den Übergang von der Summe zum Integral zu machen und dann erst die Grenze nach b rücken zu lassen.

| | | | |
|------------|---|---|------------|
| 1) $n < 1$ | $\int_a^{b+\varepsilon} x^{-n} dx = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n} \right]_a^{b+\varepsilon} = \frac{a^{1-n}}{1-n} - \frac{\varepsilon^{1-n}}{1-n}$ | für $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ $= \frac{a^{1-n}}{1-n}$ | |
| 2) $n = 1$ | $\int_a^{b+\varepsilon} x^{-1} dx = [\log]_a^{b+\varepsilon} = \log a - \log \varepsilon$ | | $= \infty$ |
| 3) $n > 1$ | $\int_a^{b+\varepsilon} x^{-n} dx = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n} \right]_a^{b+\varepsilon} = \frac{a^{1-n}}{1-n} - \frac{\varepsilon^{1-n}}{1-n}$ | | $= \infty$ |

2) Erstreckt sich eine der Grenzen ins Unendliche so definieren wir

$$\int_b^{\infty} f(x) dx = \lim_{a=\infty} \left[\int_b^a f(x) dx \right]$$

| | | |
|------------|---|---------------------------------------|
| 1) $n > 1$ | $\int_b^a x^{-n} dx = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n} \right]_b^a$ | $\lim_{a=\infty} = 0 - \frac{b}{1-n}$ |
| 2) $n = 1$ | $\int_b^a x^{-n} dx = [\log x]_b^a$ | $\lim_{a=\infty} = \infty$ |
| 3) $n < 1$ | $\int_b^a x^{-n} dx = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n} \right]_b^a$ | $\lim_{a=\infty} = \infty$ |

§ 46. Allgemeine Betrachtungen hierzu:

Es liege das elliptische Integral 1.ter

Gattung vor:
$$\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

Wie verhält sich dasselbe an den kritischen Stellen d. h.

1) wenn die Grenze an die Stelle $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ rückt, also die Funktion unendlich wird.

2) wenn die Grenze selbst ins Unendliche rückt, also für $a = \infty$.

Fall 1): Was wird aus $\int_a^a \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$?

Wir werden setzen können:

$$\int_x^a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x+\epsilon}^a$$

Jetzt führt der 2te Mittelwertsatz zum Ziele:

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^a = \int_{\alpha+\varepsilon}^a \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x-\beta}\sqrt{x-\gamma}\sqrt{x-\delta}} = \frac{1}{\sqrt{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}} \int_{\alpha+\varepsilon}^a \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}}$$

wo ξ ein Mittelwert im Intervalle ist.

Wir bekommen:

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^a = \frac{1}{\sqrt{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}} [2\sqrt{x-\alpha}]_{\alpha+\varepsilon}^a = \frac{1}{\sqrt{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}} (2\sqrt{a-\alpha} - 2\sqrt{\varepsilon})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^a = \frac{2\sqrt{a-\alpha}}{\sqrt{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}}$$

Für β, γ, δ geht man ähnlich vor.

Liegen mehrere Unstetigkeitsstellen vor, so zerlegt man das Integral.

Fall 2). Wir definieren:

$$\int_b^{\infty} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_b^a \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} \right]$$

Es ist

$$\int_b^a = \int_b^a \frac{dx}{x^2 \sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)\left(1-\frac{\beta}{x}\right)\left(1-\frac{\gamma}{x}\right)\left(1-\frac{\delta}{x}\right)}}$$

Auf diese Form ist wieder der 2te Mittelwertsatz anwendbar:

$$\int_b^{\infty} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{\xi}\right)\left(1-\frac{\beta}{\xi}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\xi}\right)\left(1-\frac{\delta}{\xi}\right)}} \int_b^a \frac{dx}{x^2}$$

wo ξ ein Mittelwert im Intervalle ist.

Wir erhalten:

$$\int_b^{\infty} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{\xi}\right)\left(1-\frac{\beta}{\xi}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\xi}\right)\left(1-\frac{\delta}{\xi}\right)}} \left[-\frac{1}{x} \right]_b^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\alpha}{\xi}\right)\left(1-\frac{\beta}{\xi}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\xi}\right)\left(1-\frac{\delta}{\xi}\right)}} \left(\frac{1}{b} \right)$$

$$\int_b^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\alpha}{3})(1-\frac{\alpha}{4})(1-\frac{\alpha}{5})(1-\frac{\alpha}{6})}} \cdot \frac{1}{6}$$

§ zwischen b und ∞ .

Wir wollen jetzt den allgemeinen Gedanken, der diesen Betrachtungen zu Grunde liegt, fixieren.

Liegt uns ein Integral $\int_b^a f(x) dx$ vor, so werden wir im Falle 1) versuchen, die Funktion $f(x)$ zu spalten in $\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}$, wo $\varphi(x)$ eine Funktion ist, die im Intervalle endlich bleibt.

Im Falle 2) werden wir versuchen, unsere Funktion in $\frac{\varphi(x)}{x^n}$ zu spalten, wo $\varphi(x)$ wiederum endlich bleibt.

Für beide Fälle ist alsdann der 2te Mittelwertsatz anwendbar, und wir erhalten leicht das Resultat des Integral genommen bis an die Unstetigkeitsstelle a bleibt endlich, wenn $n < 1$, und das Integral ausgerechnet ins Unendliche bleibt endlich, wenn $n > 1$.

§ 47. Gliedweise Integration unendlicher Reihen.

Ist

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \text{ in inf.}$$

so fragt es sich, ob

$$\int \left(\sum_1^{\infty} u_v \right) dx = \sum_1^{\infty} \int u_v dx$$

ist?

Wir ersetzen zunächst die unendliche Reihe durch eine endliche und ein Restglied:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + R(n, x)$$

Unsere Reihe konvergiert, wenn der Rest für jedes feste x bei hinreichendem n beliebig klein wird. Sicher ist dann:

$$\int f(x) dx = \int u_1 dx + \int u_2 dx + \dots + \int u_n dx + \int R(n, x) dx$$

Also:

$$\int f(x) dx = \sum_1^{\infty} \int u_v dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int R(n, x) dx$$

Wird der Limes = 0, so wird auch:

$$\int f(x) dx = \int \left(\sum_1^{\infty} u_v \right) dx = \sum_1^{\infty} \int u_v dx.$$

Die Frage spitzt sich also so zu:

Wird $R dx = 0$, wird dann $\int R dx$ auch = 0?

Als Beispiel möge sein:

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

Es sei

$$f_1 = x e^{-x^2}$$

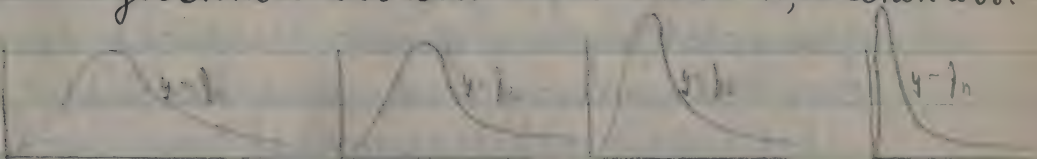
so ist

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Ferner sei

$$f_2 = 2x e^{-2x^2} \dots \dots f_n = nx e^{-nx^2}$$

Zeichnen wir alle diese Curven, so sehen wir:



Je mehr der Stellenindex wächst, desto rascher fällt die Curve nach rechts hin ab, um sich dann der x-Axe asymptotisch anzuschließen, während der Gipfel immer höher wird und immer mehr nach links rückt.

Berechnen wir zunächst den Flächeninhalt von $f_n(x)$, so wird:

$$\int_0^{\infty} nx e^{-nx^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{-nx^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Das Integral wird also auch endlich bleiben, wenn n unbegrenzt wächst und wir erhalten:

$$I \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

Wir fragen nun nach, was $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$ für festes x und $\lim_{n \rightarrow \infty}$ wird?

Wählen wir z. B. das in der Fig. rechts vom Maximum angezeichnete feste x , so sehen wir die zugehörigen Ordinaten f_1, f_2, \dots, f_n nehmen immer mehr ab. Liegt x jedoch links vom Gipfel, so werden die Ordinaten zunächst immer grösser, erreichen dann ein Maximum, und indem der Gipfel über unser x hinaus nach links wandert, werden die Ordinaten für ein festes x immer kleiner bei wachsendem n .

Wir können also sagen:

$$\text{II} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{für festes } x.$$

Jetzt wenden wir uns der eigentlichen Aufgabe zu. Wir bilden zunächst folgende Reihe:

$$f(x) = (f_1 - f_2) + (f_2 - f_3) + (f_3 - f_4) + \dots \text{ in inf.}$$

also

$$f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \text{ in inf.}$$

und untersuchen, ob dieselbe in dem in B eckacht gezogenen Intervalle von bis ∞

convergiert.

Zu dem Zwecke bilden wir uns die Summe der n ersten Glieder und fügen den Rest hinzu:

$$f(x) = f_n - f_{n+1} + R(n, x)$$

Also

$$R(n, x) = f_{n+1} = (n+1)x e^{-(n+1)x^2}$$

Unsere Reihe convergiert nun, wenn das Restglied etc unendlich klein wird, was hier nach II der Fall ist.

Man unterscheidet nun gut und schlecht convergierende Reihen:

Unsere Reihe convergiert um so langsamer, je näher das x an der Stelle 0 liegt. Denn wenn x eine sehr kleine Grösse ist, so muss man n bereits sehr gross wählen, damit der Gipfel der Curve nach links zu liegen kommt. Ja man kann x so nahe an Null nehmen, dass der Gipfel erst ungeheuer spät erreicht wird. Die Reihe convergiert allerdings für alle Punkte x , aber die Convergenz erleidet in der Nähe von $x=0$

eine unbegrenzte Verzögerung.

Da für $x=0$ der Funktionswert auch $=0$ ist, so ist die Convergence wieder ganz vorzüglich. Unsere Reihe ist ungleichförmig convergent.

Das ist der Grund dafür, dass, obgleich der $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n, x) = 0$ wird für jedes feste x , doch nicht das neu entstehende Restglied $\int_0^x R(n, x) dx$ im $\lim_{n \rightarrow \infty}$ gleich 0 wird, sondern gleich $\frac{1}{2}$.

Resultat: Wenn eine unendliche Reihe in einem Intervalle gleichförmig convergirt, dann darf man sie sicher gliedweise integrieren. Ubrigens ist die gleichförmige Convergence zwar eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung.

Die notwendige ist allein, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x R(n, x) dx = 0$ ist, und das tritt aber im Falle der gleichförmigen Convergence sicher ein.

Bei den Potenzreihen findet nun dieser Uebelstand nicht statt. Bei denselben können wir also setzen:

$$\int \left(\sum_{r=0}^{\infty} u_r \right) dx = \sum_{r=0}^{\infty} \int u_r dx.$$

Solche Potenzreihen werden uns durch den Taylor'schen Satz geliefert und mögen

die Form haben:

$$\sum u_v = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

also $u_v = A_v x^v$. Die Reihe möge konvergieren von 0 ab nach der einen Seite hin bis x und wir wollen fragen, wo konvergiert die Potenzreihe am schlechtesten?

Wir nehmen irgendwo im Intervalle eine Stelle $x = \rho x$ an, wo ρ ein echter Bruch ist. Wir haben dann für $x = x$ bzw. $x = \rho x$ die Reihenentwicklung:

1) $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$ bzw.

2) $A_0 + A_1 \rho x + A_2 \rho^2 x^2 + \dots$

Wir sehen in der zweiten Reihe ist jedes einzelne Glied in steigendem Maße kleiner als das entsprechende Glied in der ersten.

Die zweite Reihe konvergiert also besser als die erste, deren Konvergenz ja Voraussetzung war. Berechnen wir nämlich die zweite Reihe an einer bestimmten Stelle ab, so ist bei ihr erst recht das Restglied kleiner als ϵ , wo ein beliebig kleiner Wert für eine angebbare Stelle ist,

(vorausgesetzt dass das Restglied der ersten Reihe bereits $< (\epsilon)$ ist). Wir haben also den Satz: Eine Potenzreihe darf immer gliedweise integriert werden, soweit sie konvergiert; denn bei ihr tritt nie im Innern des Konvergenzintervalles eine unendliche Verzögerung der Konvergenz ein. Vielmehr konvergiert eine Potenzreihe im Innern überall besser als am Rande der Konvergenzstrecke.

§ 48. Differentiation und Integration nach einem Parameter.

1. Frage: Es liege vor

$$\int_b^a f(x, y) dx,$$

welches also eine Funktion des Parameters y darstellt. Es soll dieses bestimmte Integral nach dem Parameter y differenziert werden. Darf man nun setzen:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x=b}^{x=a} f(x, y) dx = \int_{x=b}^{x=a} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

2. Frage: Wann darf man ein bestimmtes Integral nach einem Parameter in der

Weise integrieren, dass man unter dem Integralzeichen integriert? Also wann ist $\int_c^e dy \int_b^a f(x, y) dx = \int_b^a dx \int_c^e f(x, y) dy$?

Die Ableitung der folgenden Resultate wird nicht durchgeführt, sondern auf die Lehrbücher verwiesen.

Resultat: In beiden Fällen sind die Operationen vertauschbar, wenn $f(x, y)$ [und bei iii) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$] im Intervalle stetig ist.

Über Berechnung aus gezeichneten bestimmter Integrale.

Es wird vorkommen, dass sich Integrale, welche sich in unbestimmter Form nicht auf niedere Funktionen zurückführen lassen für bestimmte Werte der Grenzen a und b unter Umständen doch auf niedere Funktionen zurückführen lassen, indem man bald den einen, bald den anderen Kunstgriff anwendet.

Dazu gibt es „Integraltafeln“.

Das grösste Werk ist das von B. I. de Haan.

Angeführt sollen hier nur zwei Beispiele werden

§ 49. I. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$
ist wie groß?

Es ist

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-y^2 x^2} y dx$$

$$\therefore I^2 = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2 x^2} y dx \right)$$

Da nun die Funktionen unter dem Integralzeichen für alle Wertepaare x, y in dem betrachteten Intervalle stetig sind, so können wir die Reihenfolge beider Integralzeichen vertauschen:

$$I^2 = \int_0^{\infty} dx \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2 - y^2 x^2} y dy \right)$$

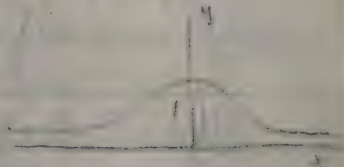
Es ist

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)y^2} y dy = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$\therefore I^2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{2(1+x^2)} = \left[\frac{1}{2} \arctan x \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

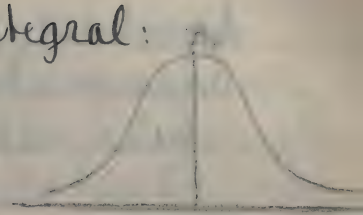
$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2I = \sqrt{\pi}$$



Bemerkungen zu diesem Integral:

Es ist
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{\sqrt{\pi}} = 1$$



Wir zeichnen die Curve

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

so wird für $x=0$, die Ordinate $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Wir wollen jetzt die Curve noch verallgemeinern, indem wir bei unserem Integral substituieren: $x = \kappa z$, wo κ positiv ist. Dann wird das Integral

$$\int \frac{e^{-\kappa^2 z^2} \kappa dz}{\sqrt{\pi}}$$

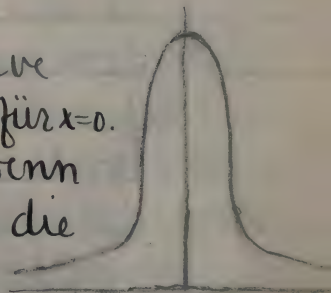
Wir erhalten
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\kappa^2 z^2} \kappa dz}{\sqrt{\pi}} = 1$$

Bei der gezeichneten Curve

$y = \frac{\kappa e^{-\kappa^2 z^2}}{\sqrt{\pi}}$ wird jetzt $y = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi}}$ für $x=0$.

Die Curve hebt sich also, wenn $\kappa > 1$ ist, κ mal so hoch wie die letzte Curve, dafür aber

wächst der absolute Wert des Exponenten von e , also werden die Ordinaten sehr schnell kleiner.



Die Bedeutung dieser Curve ist nun, dass sie das sogenannte „Gauss'sche Fehlergesetz“

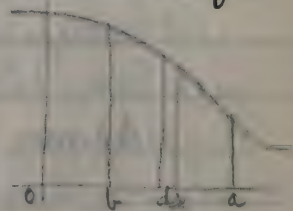
darstellt, und da dies für alle Beobachtungswissenschaften grundlegend ist, soll es etwas näher betrachtet werden.

Es sei x der positive oder negative Fehler. Wir tragen denselben auf unserer Abscissenaxe auf und da wird nun die Frage sein, welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler zwischen zwei bestimmten Abscissen b und a liegt?

Nehmen wir z. B. an, wir stellen eine grosse Anzahl Beobachtungen an über ein grosses Intervall ausgedehnt, so wird die Wahrscheinlichkeit nach dem sogenannten Gesetz der grossen Zahlen durch die Zahl der zwischen b und a fallenden Werte dargestellt. Jedenfalls ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit abhängt von der Grösse des Fehlers.

Wir wollen dies noch präciser ausdrücken: Der einzelne Fehler hat natürlich eine unendlich geringe Wahrscheinlichkeit; aber wir lesen ja z. B. bei Temperaturen doch nur Fehler bis auf ganz beschränkte

Werte, etwa $\frac{1}{100}^{\circ}\text{C}$ ab. Es ist also nur die Frage, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in einem Intervalle dx liegt. Dieselbe wird natürlich abhängig sein von dem Intervalle dx und von einer Funktion der Grösse des Fehlers. Man setzt sie (die Wahrscheinlichkeit) daher gleich $\varphi(x)dx$. Trägt man nun $\varphi(x) = y$ als Ordination zu den einzelnen x auf, so stellt das Flächenelement $\varphi(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit für das Hineinfallen eines Fehlers in dieses kleine Intervall dx dar.



Umgekehrt, wenn diese Wahrscheinlichkeitscurve $y = \varphi(x)$ noch unbekannt ist, so muss dieselbe so gewählt werden, dass $\varphi(x)dx$ eben die Wahrscheinlichkeit für das Hineinfallen des Fehlers in das Intervall dx darstellt. Nach dem Begriff der Wahrscheinlichkeit ist nun leicht einzusehen, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Fehler liege zwischen den Grenzen b und a , gleich ist

$$(w)_b^a = \int_b^a \phi(x) dx.$$

Mache ich jetzt von dem letzten Ergebnis Gebrauch für den Fall dass $b = -\infty$ und $a = +\infty$ ist, so ist von vornherein klar, dass der Fehler sicher in diesem Intervalle liegt. Man bezeichnet diese Wahrscheinlichkeit bekanntermassen mit G ewissheit. Dieselbe ist gleich 1, da die Wahrscheinlichkeit überhaupt das Verhältniss der Zahl der günstigen Fälle zur Zahl der möglichen Fälle darstellt.

Satz: Die Wahrscheinlichkeitscurve muss dem Gesetze gehorchen, dass das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx$ gleich 1 ist; denn es ist gewiss, dass der Fehler zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegt. Was man sonst noch von der Curve kennt, ist sehr wenig. Jedenfalls muss man der Wahrscheinlichkeitscurve in den einzelnen Gebieten verschiedene G estalt geben.

Die verschiedenen G ebiete (Flächen-Längen-Winkel-Messungen, Statistiken, Psychologena) unterscheiden sich nun danach, ob k gross oder klein ist, d. h. ob die Curve sich hoch

erhebt oder nicht. K heisst demnach der Genauigkeitscoefficient für die einzelne Art der Messung.

Wenn wir nun berechnen wollen, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen b und a liegt, so handelt es sich um das allgemeine Integral

$$\int_b^a \frac{e^{-x^2} dx}{\sqrt{\pi}}$$

Wir schliessen diese Erläuterungen zu dem interessanten Beispiel mit den Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen b und a liegt, führt nach dem Gauss'schen Fehlergesetze auf ein Integral, welches man nicht auf niedrigere Funktionen reduzieren kann, und welches daher nach den bekannten Methoden numerisch berechnet werden muss, sofern man nicht die Tafeln benutzen will, die die berechneten Werte bereits enthalten (vergl. Markoff, Petersburg, 14 stellige Tafeln)

§ 50. II $\int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin(yx)}{x} dx$

wo y ein Parameter ist.

Ist $y=0$ so ist das Integral $=0$; Ist $y \neq 0$ so sei $yx = z$; das Integral wird

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

Wir unterscheiden hier, was die Grenzen angeht

1) für $y > 0$ $\int = \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz$

2) " $y < 0$ $\int = \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz$

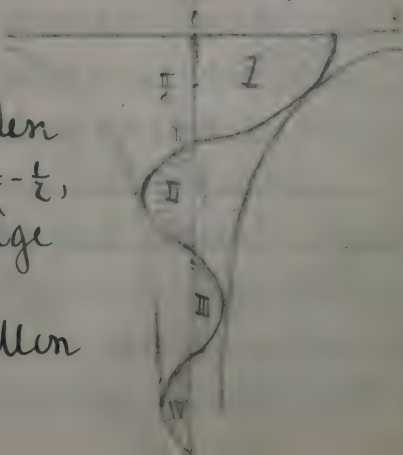
Wir stellen zunächst die zu integrierende Funktion $\frac{\sin z}{z}$ als Curve dar und zwar der Einfachheit halber nur für positive Werte von z .

Für $z=0$ wird nun $\frac{\sin z}{z} = 1$, ferner $\sin z = 0$ für $z = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ also auch $\frac{\sin z}{z} = 0$ für diese Werte von z .

Zeichnen wir nun in der Figur noch die beiden Hüllcurven $y' = \frac{1}{z}$, $y'' = -\frac{1}{z}$, welche zwei gleichzeitige Hyperbeln darstellen.

Nun wird an den Stellen

$$z = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$



bezugs: $\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}, -\frac{1}{z}, +\frac{1}{z} \dots$

d. h. die Curve reicht an diesen Stellen an die Hyperbel heran. Die Curve $y = \frac{\sin z}{z}$ hat also unendlich viele 0-Stellen und pendelt in immer stärker gedrückten Wellen an die Hyperbeln heran.

Hat nun $\int \frac{\sin z}{z} dz$ einen Sinn? Bei der Fig. heißt das; umschließt die Curve von 0 beginnend bis zu $z = \infty$ einen endlichen Flächeninhalt?

Wir sehen es wechseln dabei die positiven Flächenanteile mit den negativen ab, deren absoluter Wert der Reihe nach I, II, III, IV ... sein mag. Der gesammte Flächeninhalt erscheint also in der Form:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = I - II + III - IV + \dots$$

Die Frage spitzt sich also so zu: wird die Reihe überhaupt eine endliche Grenze zustreben. Dann und nur dann hat unser bestimmtes Integral eine bestimmte Bedeutung.

Wir setzen unser Integral, das sich bis ins Unendliche erstreckt, gleich $\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz$.

Dem entspricht genau, dass wir

$$I - II + III - IV + \dots$$

ins Unendliche fortsetzen.

Es folgen einige Regeln über Reihenconvergenz:
Reihen, deren Glieder im Vorzeichen alternieren,
convergieren, sobald die Glieder von einer
bestimmten Stelle ab immer kleiner werden
und $\lim_{v \rightarrow \infty} u_v = 0$ ist. (da $S_{2v} < S < S_{2v+1}$, welche
beiden Teilsummen sich immer näher rücken werden)

Der nun in Frage stehende Inhalt S ist
etwas bestimmtes, weil auf unsere Reihe
 $I - II + III - \dots$ diese Convergenz Betrachtung
ohne weiteres anwendbar ist.

Um den Wert nun zu ermitteln, haben
wir einige Kunstgriffe nötig:

Behandeln wir zunächst das bestimmte
Integral $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin yx}{x} dx$

wo y positiv sein mag.

Wir zeichnen zunächst

$$f_1(x) = \frac{\sin yx}{x}$$

welche der letztgezeichneten Curve ähnelt;
sie hebt sich bei $x=0$ auf y statt auf 1 und die

Basen der Wellenberge betragen $\frac{\pi}{4}$.

Nun können wir auf den Verlauf der Integranden-Curven leicht einsehen:

$$y = f_2(x) = \frac{e^{-x} \sin 4x}{x}$$

Die Folge des zunehmenden Exponentialfaktors ist, dass nun die Wellen nach rechts hin noch stärker gedrängt werden. Dies bewirkt wiederum, dass die Reihe nur noch besser konvergiert.

Wir wollen jetzt das Integral

$$S(y) = \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{e^{-x} \sin 4x}{x} dx$$

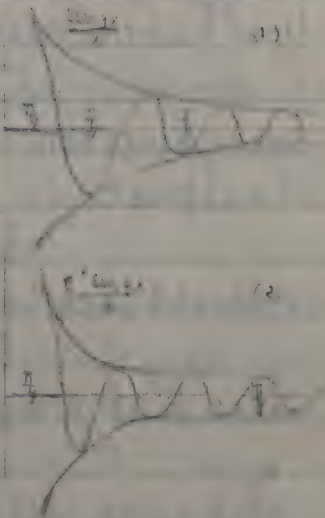
als Funktion von y

betrachten. Direkt können wir es nun nicht auswerten. Aber wir können direkt durch Differentiation $\frac{dS}{dy}$ finden.

Und zwar ist, indem wir gleich unter dem Integralzeichen differenzieren:

$$\frac{dS}{dy} = \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-x} \cos 4x dx,$$

wobei der Fortschritt im Wegfall des Nenners besteht.



Dies ist nun ein Integral das wir sofort auswerten können: Dabei wollen wir aber beachten, dass unser eigentliches Integral ist:

$$S(y) = \int_0^y \frac{dS(y)}{dy} \cdot dy$$

wobei 0 als untere Grenze gewählt ist, weil $S(y)$ für $y=0$ ersichtlich verschwindet.

Wir haben also zunächst das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos yx \, dx$$

auszuwerten. Nach dem früher behandeltem Beispiele:

$$\int x^m e^{ax} \cos bx \, dx$$

ergibt sich sofort:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos yx \, dx = \left[\frac{y \sin x - \cos xy}{1+y^2} \cdot e^{-x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+y^2}$$

Also haben wir:

$$S(y) = \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \arctg y$$

und zwar gleich demjenigen $\arctg y$, der für $y=0$ verschwindet.

Wir haben also durch diesen doppelten Kunstgriff, Differenzieren nach einem Parameter und dann Integrieren nach demselben Parameter unser Integral zu

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin yx}{x} \, dx = \arctg y$$

ausgewertet. Jetzt machen wir wieder die

Substitution $yx = z$, $dx = \frac{dz}{y}$, wo y eine positive Grösse ist. Also haben wir:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{y}} \cdot \frac{\sin z}{z} dz = \arctan y.$$

Nehmen wir hiervon den $\lim_{y \rightarrow \infty}$, so erhalten wir gerade das gesuchte Integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}.$$

als Schlussresultat.

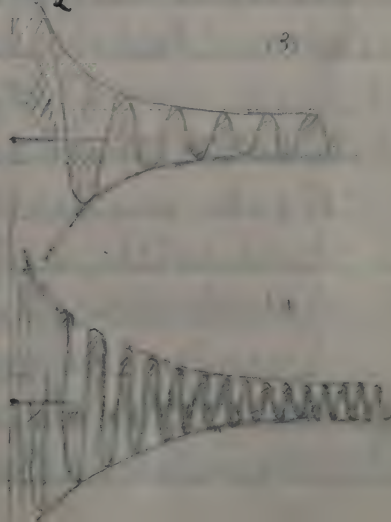
(Da ist die Voraussetzung dass man den $\lim_{y \rightarrow \infty}$ findet, indem man unter dem Integralzeichen $y = \infty$ setzt.)

§ 57. Allgemeines über fluktuierende Curven:
Wir haben wieder das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

für y positiv.

Lässt man y immer grösser und grösser werden, so wird die Curve ganz ausserordentlich schmal und steile Wellen bekommen. Die Curve wird aber



denselben Flächeninhalt wie anfangs umspannen. Dagegen ist

$$\int_b^a \frac{\sin yx}{x} dx$$

kleiner geworden, wenn b und a feste Abscissen sind. Es kann ja nicht soviel behagen, wie der von der ersten Welle, von b abgerechnet, umspannte Flächeninhalt ausmacht, weil der Flächeninhalt von b bis a sich ja schreiben lässt:

$$\begin{aligned} \int_b^a &= u_b - u_{b+h} + u_{b+2h} - u_{b+3h} + \dots \\ &= u_b - (u_{b+h} - u_{b+2h}) - (u_{b+2h} - u_{b+3h}) - \dots < u_b \end{aligned}$$

Dieser Wert u_b ist aber für hinreichend grosses y beliebig klein, da die Basis $\frac{\pi}{y}$ beliebig klein wird.

Wir erhalten daher für $\lim_{y \rightarrow \infty}$

$$\int_b^a \frac{\sin yx}{x} dx = 0$$

was wir nächstens bei der Fourierschen Reihe wieder benutzen wollen.

Eine solche auf und abpendelnde Funktion heisst eine fluktuirende nach Hamilton.

Vergleichen wir noch einmal mit der Gauss'schen Fehlercurve, so erhalten wir:

Bei den Curven, deren Ordinaten $y e^{-y^2 x^2}$

sind, y dabei als Parameter betrachtet, haben wir an sich genau dasselbe Verhältnis. Je mehr das y wächst, um so mehr wird ein constanter Flächeninhalt nach links geschoben und das Integral von irgend einer positiven Grenze a ab bis hin nach ∞ , nimmt immer mehr ab.

Der Grund für das gleiche Resultat ist in den beiden Fällen aber ein ganz verschiedener. Im Falle (e^{-x^2}) oder (ye^{-x^2}) werden bei wachsendem y die Ordinaten der Curve rechts von a immer kleiner und kleiner. Bei der Curve $(\sin yx)$ aber, bleibt der Spielraum für die Ordinaten nach wie vor durch die beiden Grenzhyperteln gegeben und nur das auf- und ab-oscillieren wird mit wachsendem y immer rascher.

Definition neuer Funktionen durch bestimmte Integrale:

§ 52. Die Perioden der elliptischen Integrale:
Wir hatten früher das elliptische Integral

1ter Gattung in folgender Form geschrieben:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

Ein solches Integral kann man nun durch eine lineare Substitution $x = \frac{az+b}{cz+d}$ auf die sogenannte Normalform bringen:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

(Legendre'sche Normalform).

Die Grösse k welche kleiner als 1 gemacht werden kann, heisst dann der Modul des elliptischen Integrals.

Aus der Normalform sehen wir nun, dass die Funktion unter dem Integral unendlich wird an den Stellen

$$z=+1, z=-1, z=+\frac{1}{k}, z=-\frac{1}{k}.$$

Wir wissen aber auch, dass das elliptische Integral selbst überall, auch an diesen Stellen endlich bleibt.

Diese Unendlichkeitspunkte wollen wir nun benutzen, um bestimmte elliptische Integrale zu definieren. Wir wollen nämlich folgende bestimmte Integrale betrachten:

1)
$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

2)
$$\int_0^k \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Das erste Integral pflegt man mit K und das zweite mit iK' zu bezeichnen. In der Theorie der elliptischen Funktionen nennt man die Größen K und K' (oder genauer $4K$ und $2iK'$) die Perioden des elliptischen Integrals.

Die elliptischen Integrale sind nicht nur Funktionen ihrer Grenzen, sondern auch des unter dem Integralzeichen stehenden Parameters k des Legendreschen Moduls; ins besondere betrachtet man die sogenannten Perioden K und iK' des elliptischen Integrals als Funktionen des k und spricht dann von elliptischen Modulfunktionen. Wir begnügen uns hier diesen Namen genannt zu haben.

§ 53. Die Gamma-Funktion.

Euler'sche Integrale sind Integrale zwischen festen Grenzen, bei welchen im Integranden Parameter auftreten, die in dem Exponenten stehen.

Nehmen wir das einfachste Beispiel, die Γ -Funktion, wo p ein Parameter sein soll:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$$

Dieses Integral wird also als Funktion von p (Gammafunktion) aufgefasst oder auch nach Gauss $\Pi(p-1)$ geschrieben. Man nennt dasselbe auch das Euler'sche Integral zweiter Art.

Dass es gestattet ist, das Integral bis ins Unendliche zu erstrecken ist leicht einzusehen, da in Folge des Faktors e^{-x} die Funktion unter dem Integralzeichen mit wachsendem x sich sehr schnell der Null nähert.

Jedoch wegen der oberen Grenze müssen wir folgende Einschränkung machen. Unsere Formel definiert eine Funktion von p nur für $p > 0$; denn sobald $p \leq 0$ wird, steht unter dem Integralzeichen eine Funktion, welche bei $x=0$ in unerlaubter Weise unendlich wird. Um den Verlauf der Γ -Funktion zu untersuchen

zeichnen wir uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit p -Achse und Γ -Achse.

Wir können nun sofort zwei Werte der Funktion berechnen: Es ist nämlich:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}; \quad (x=z^2)$$

Wir können jetzt vermöge einer merkwürdigen Eigenschaft der Γ -Funktion noch beliebig viele andere Punkte unserer Curve berechnen: Ist p positiv, so ist

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx, \quad \Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Gestalten wir das erste Integral durch teilweise Integration um, so erhalten wir:

$$\Gamma(p+1) = [e^{-x} x^p]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} p x^{p-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(p+1) = p \Gamma(p)$$

Diese Gleichung heisst Funktionalgleichung

Setzen wir jetzt $p=1, 2, \dots$ so bekommen wir

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

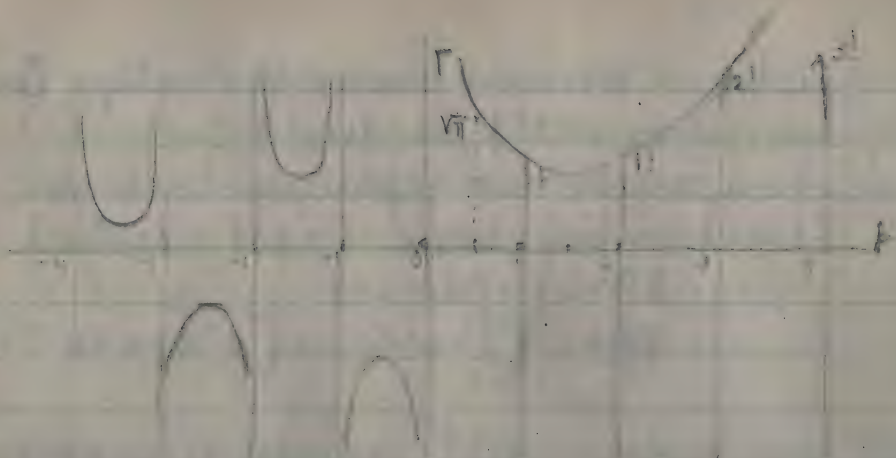
$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3!$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1) = n-1! \quad \Gamma$$



Die Γ -Funktion erscheint also als Interpolation der Fakultät, d.h. sie verbindet die Punkte, deren ganzzahlige Abscissen gleich n sind, und deren Ordinaten gleich $n+1!$ ist durch einen kontinuierlichen Curvenzug.

Wir wollen jetzt die Funktionalgleichung in anderer Gestalt schreiben:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \frac{\Gamma(p+2)}{p(p+1)} = \dots$$

Diese Formeln können wir jetzt benutzen um Werte für $p < 1$ zu berechnen. Wir erhalten:

$$\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \infty \quad (\text{und zwar in } +\text{er Richtung sich } \infty \text{ nähernd})$$

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1 \cdot 0} = \infty \quad (\dots -\text{ver } \dots)$$

$$\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(-1)}{-2 \cdot -1 \cdot 0} = \infty \quad (\dots +\text{ver } \dots)$$

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2 \Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\frac{5}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2}} = -\frac{8}{15} \sqrt{\pi}$$

Für diese Γ -Funktion sind nun numerische Tabellen berechnet von Legendre und Gauss (Dabei schreibt Gauss $\Gamma(b) = \Gamma(b-1)$, wodurch der Zusammenhang mit der Fakultät angedeutet werden soll)

Die Γ -Funktion ist eine elementare Transcendente, auf welche man zahlweise andere bestimmte Integrale zurückführen kann. Wir führen hier nur folgendes Beispiel an:

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

wo $p > 0$, wegen der unteren Grenze und $q > 0$, " " " " oberen " " sein muss.

Dieses Integral stellt ein Euler'sches Integral 1ten Art dar, und zwar führt man dasselbe auf Γ -Funktionen zurück, indem man zeigt, dass es gleich

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ist. Bezüglich des Beweises verweisen wir auf die Lehrbücher und machen bei 30° C. im Schättem. Schluss!

Die Fouriersche Reihe.

Die endliche Reihe und ihr Restglied.

Aufgabe: Es soll eine um 2π periodische Funktion die sonst ganz beliebig verläuft, auch Unstetigkeitsstellen besitzt durch eine trigonometrische Reihe approximiert werden.

Wir schreiben die Reihe früher (p.) in der Form

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx$$

Das möglichst gut Approximieren präzisieren wir dadurch, dass wir fordern, die Summe der Fehlerquadrate sollte ein Minimum sein.

Also

$$\int (f(x) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_1^n a_\nu \cos \nu x - \sum_1^n b_\nu \sin \nu x)^2 dx = \min.$$

Daraus ergeben sich folgende Werte für die Coefficienten:

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \cos \nu z dz, \quad b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \sin \nu z dz; \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

Es erübrigt die Bestimmung des Fehlers.

Wir werden schreiben:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx + R(n, x)$$

und die Aufgabe ist nun, dieses Restglied $R(n, x)$ abzuschätzen. Es ist also

$$R(n, x) = f(x) - (\frac{1}{2}a_0 + \dots + a_n \cos nx + \dots + b_n \sin nx)$$

wo wir für a , und b , ihre Werte eintragen wollen.
Wir erhalten dann:

$$1. R(n, x) = f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) dz - \frac{\cos x}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \cos z dz - \dots - \frac{\cos nx}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \cos nz dz \\ - \frac{\sin x}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \sin z dz - \dots - \frac{\sin nx}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \sin nz dz$$

Zunächst bringen wir die endliche Zahl von Integralen unter ein Integralzeichen:

$$2. R(n, x) = f(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dz f(z) \left\{ \frac{1}{2} + \cos z \cos x + \cos 2z \cos 2x + \dots + \cos nz \cos nx \right. \\ \left. + \sin z \sin x + \dots + \sin nz \sin nx \right\}$$

Ziehen wir die in den Argumenten übereinstimmenden Summanden zusammen, so wird

$$3. R(n, x) = f(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dz f(z) \left\{ \frac{1}{2} + \cos(z-x) + \cos 2(z-x) + \dots + \cos n(z-x) \right\}$$

Wir wollen jetzt beachten, dass, wenn wir die Klammergröße Glied für Glied integrieren so werden wir erhalten

$$\int_0^{2\pi} dz \left(\frac{1}{2} + \cos(z-x) + \cos 2(z-x) + \dots + \cos n(z-x) \right) = \pi$$

Folglich können wir auch schreiben:

$$f(x) = \frac{f(x)}{\pi} \int_0^{2\pi} dz \left(\frac{1}{2} + \cos(z-x) + \dots + \cos n(z-x) \right)$$

Dieser Wert von $f(x)$ in (3) eingesetzt gibt:

$$4. R(n, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dz (f(x) - f(z)) \left\{ \frac{1}{2} + \cos(z-x) + \dots + \cos n(z-x) \right\} \\ = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} dz (f(x) - f(z)) \left\{ \frac{1}{2} + \cos(z-x) + \dots + \cos n(z-x) \right\}.$$

Es folgt daraus durch die Substitution $z-x = \xi$:

$$5. R(n, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\xi (f(x) - f(x+\xi)) \left\{ \frac{1}{2} + \cos \xi + \cos 2\xi + \dots + \cos n\xi \right\}$$

Dabei bedeutet der eine Faktor unter dem Integralzeichen, $f(x) - f(x+\xi)$, die Schwankung, welche unser Funktionswert gegen den festen Wert $f(x)$ erleidet, wenn man ξ von $-\pi$ bis $+\pi$ laufen lässt. Um den anderen Faktor besser verstehen zu können stellen wir ihn als Curve:

$$y = \frac{1}{2} + \cos \xi + \cos 2\xi + \dots + \cos n\xi$$

dar. Es ist dies eine Curve, die ebenfalls um 2π periodisch ist. Ausserdem ist dieselbe aber in Bezug auf die Ordinatenaxe symmetrisch.

Bei $\xi = 0$ steigt die Curve bis zur Ordinate $\frac{1}{2}(2n+1)$ an. Ferner ist der Flächeninhalt einer ganzen Welle der Curve gleich:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} y d\xi = \pi$$

wie wir vorher schon berechnet.

Die Gleichung dieser Curve $y = f(\xi)$ können wir nun noch vereinfachen. Multiplizieren wir einmal auf beiden Seiten mit $\sin \frac{\xi}{2}$, so erhalten wir

$$y \sin \frac{\xi}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{\xi}{2} + \cos \xi \sin \frac{\xi}{2} + \dots + \cos n\xi \sin \frac{\xi}{2}$$

Jetzt wollen wir die einzelnen Glieder folgendermassen spalten:

$$y \sin \frac{\xi}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} [\sin(\xi + \frac{\xi}{2}) - \sin(\xi - \frac{\xi}{2})] + \dots + \frac{1}{2} [\sin(n\xi + \frac{\xi}{2}) - \sin(n\xi - \frac{\xi}{2})]$$

Also ist

$$\begin{aligned}y \sin \frac{\xi}{2} &= \frac{1}{2} \sin \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{3\xi}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\xi}{2} + \dots + \frac{1}{2} \sin(n\xi + \frac{\xi}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{(2n+1)\xi}{2}\end{aligned}$$

Die Hülfscurve hat also folgende einfache Form:

$$y = \frac{\sin \frac{(2n+1)\xi}{2}}{2 \sin \frac{\xi}{2}}$$

Unser Restglied erhält somit die Form:

$$R(n, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\xi (f(x) - f(x+\xi)) \cdot \frac{\sin \frac{(2n+1)\xi}{2}}{2 \sin \frac{\xi}{2}}$$

Näheres Studium der Hülfscurve.

Wir wollen uns jetzt ein möglichst klares Bild von der Bedeutung dieser Formel machen und wollen zu dem Zweck die Hülfscurve noch genauer betrachten. Nehmen wir beispielsweise $n=4$ und zeichnen uns für diesen Fall die Hülfscurve auf, so erhalten wir für $\xi=0$ die Maximalordinate $y = \frac{5}{2}$.

Ferner wird $y=0$ für alle Werte ξ in unserem Intervalle von 0 bis π , die Multipla von $\frac{2\pi}{2n+1}$ sind; also für $\xi = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}$ und $\frac{8\pi}{5}$.

Die Curve ist eingeschlossen zwischen den beiden Grenzcuren $\frac{1}{2 \sin \frac{\xi}{2}}$ und $-\frac{1}{2 \sin \frac{\xi}{2}}$, welche bei $\xi=0$ bzw. $\xi=\pi$ die Ordinaten $y = \pm \infty$ bezw.

$y = \pm \frac{1}{2}$ haben. Zwischen diesen beiden Grenz-
Curven wird sich also unsere Hilfscurve
auf und abbewegen und zwar wird die
Anzahl der Wellen in unserem Intervall
um so grösser sein, je grösser n ist. Wir
sehen also, dass wir hier eine grosse Ähnlichkeit
mit unserer früheren Curve haben.

Wir werden sagen: Unsere Hilfscurve
gehört also zu den fluktuirenden Curven,
welche zwischen den beiden Grenzcurven

$$y = +\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\xi} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\xi}$$

fortwährend auf und abgehen.

Diese Hilfsfunktion steht nun unter dem
Integralzeichen und deshalb wollen wir uns
etwas näher mit ihrem Flächeninhalte

beschäftigen: Die Gesamtfläche ist gleich

$$I - II + III - IV + \dots = \frac{\pi}{2}.$$

Aber hiermit reichen wir noch nicht aus,
und zwar haben wir vorerst noch die Teilfläche I
und eine andere beliebige im Intervalle

liegende Teilfläche, etwa III abzuschätzen:

Der Flächeninhalt I hat die Basis $\frac{2\pi}{2n+1}$,

folglich ist das umschriebene Rechteck gleich

$$\frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2} = \pi \quad (\text{vgl. Fig.})$$

Also: 1) $I < \pi$.

Jetzt schätzen wir einen beliebigen anderen Teil A z. B. III ab. Derselbe ist gegeben durch das Integral

$$A \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \xi}{2 \sin \frac{1}{2} \xi} d\xi$$

wobei die Bedeutung von α aus der Fig. erkennbar ist.

Dieser Flächeninhalt kann nun positiv oder negativ sein; wir wollen jedoch nur den absoluten Betrag $|A|$ betrachten.

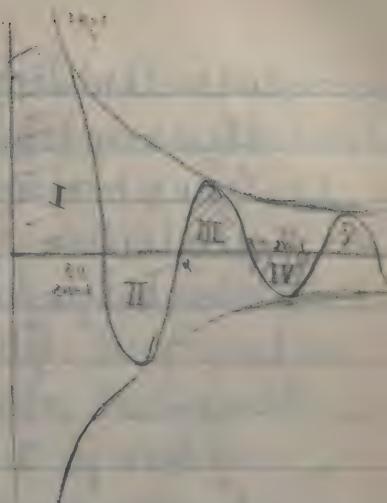
Auf dieses Integral können wir nun den erweiterten Mittelwertsatz anwenden, da $\sin \frac{1}{2} \xi$ im ganzen Intervalle grösser als $\sin \frac{\alpha}{2}$ ist.

Da also $\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \xi} < \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$ ist, so ergibt sich:

$$|A| < \left| \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \xi}{2 \sin \frac{1}{2} \xi} d\xi \right| < \left| \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \left[-\frac{2}{2n+1} \cos \frac{2n+1}{2} \xi \right]_{\alpha}^{\alpha + \frac{2\pi}{2n+1}} \right|$$

$$2) \quad |A| < \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \left| \cos \frac{2n+1}{2} \alpha \right| < \frac{2}{(2n+1) \sin \frac{1}{2} \alpha}$$

Führen wir jetzt einmal an der Stelle α einen Schnitt, wie die Fig. zeigt, so können



wir den Inhalt der Wellen links von α , also von 0 bis α , und den Inhalt der Wellen links von α , also von 0 bis α , und den Inhalt der Wellen rechts von α , also von α bis π , abschätzen: Wir können schreiben:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \xi}{2 \sin \frac{\xi}{2}} d\xi < I < \Pi$$

indem ja Π von I abgezogen werden muss um \int_0^{α} zu ergeben. Folglich ist:

$$(1') \quad \int_0^{\alpha} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \xi}{2 \sin \frac{\xi}{2}} d\xi < \Pi.$$

Was nun den Flächeninhalt von α bis π anbelangt, so besteht derselbe ebenfalls aus positiven und negativen Teilen und ist gleich:

$$\int_{\alpha}^{\pi} \dots = \text{III} - \text{IV} + \text{V} - \text{VI} + \dots$$

$$= A - \text{IV} + \text{V} - \dots$$

Von diesen Gliedern ist jedes folgende immer kleiner als das vorhergehende (da das Integral mit dem Factor $\frac{1}{2 \sin \frac{\xi}{2}}$ behaftet ist). Dagegen alternieren die Glieder im Vorzeichen.

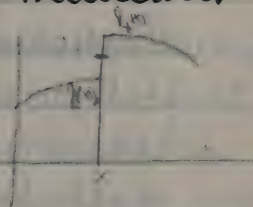
Mithin ist:

$$(2') \quad \left| \int_{\alpha}^{\pi} \dots \right| < |A| < \frac{2}{(2n+1) \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Dies sind zwei fundamentale Abschätzungen, die wir den eigentlichen Restglieduntersuchungen zu Grunde legen wollen, die wir jetzt wieder aufnehmen:

Vorbereitungen zur Abschätzung des Restgliedes
Wir setzen zunächst fest, dass die Funktion an Sprungstellen jedesmal den Mittelwert $\frac{1}{2}(f_+(x) + f_-(x))$ haben soll.

Dies wollen wir auch in unserer Restgliedformel zur Geltung bringen.



Dasselbe war ja entstanden aus:

$$R(n, x) = f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\xi f(x+\xi) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\xi}{2 \sin \frac{1}{2}\xi}$$

Wir berücksichtigen die Möglichkeit einer Sprungstelle an der Stelle x in der Formel für $R(n, x)$ dadurch dass wir schreiben:

$$R(n, x) = \frac{1}{2} [f_+(x) + f_-(x)] - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\xi f(x+\xi) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\xi}{2 \sin \frac{1}{2}\xi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 d\xi f(x+\xi) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\xi}{2 \sin \frac{1}{2}\xi}$$

$$\text{Da nun } \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\xi \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\xi}{2 \sin \frac{1}{2}\xi} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 d\xi \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\xi}{2 \sin \frac{1}{2}\xi}$$

ist, so machen wir den Kunstgriff $\frac{1}{2} f_+(x)$ unter das erste und $\frac{1}{2} f_-(x)$ unter das zweite

Integralzeichen zu setzen:

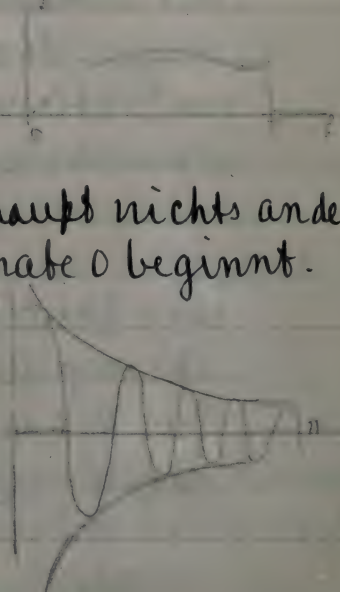
$$R(n, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f_+(x) - f(x+s)) ds \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} s}{2 \sin \frac{1}{2} s} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (f_-(x) - f(x+s)) ds \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} s}{2 \sin \frac{1}{2} s}$$

welche beiden Integrale abzuschätzen sind. Jedoch brauchen wir nur das erste Integral zu betrachten, unter welchem die Schwankung nach rechts steht, da das zweite sofort in ähnlicher Weise betrachtet werden kann.

Stellen wir uns vorerst die Schwankungskurve nach rechts her, d.h. also eine Curve für $f_+(x) - f(x+s)$.

Wir wissen von ihr überhaupt nichts anderes, als dass sie mit der Ordinate 0 beginnt.

Zeichnen wir nun noch die frühere Hilfscurve für beträchtliche Werte von n , so erhalten wir eine fluktuierende Curve, wie wir bereits sahen.



Um den weiteren Verlauf unserer Untersuchungen vorläufig überblicken zu können, bemerken wir im Voraus folgendes:

Ein Blick auf die beiden letzten Figuren, lässt sofort erkennen, dass das Restglied für hinreichend grosses n schließlich beliebig klein wird. Denn da, wo die Hilfscurve noch einen bestimmten Flächeninhalt umspannt, nämlich in der Nähe von $\xi=0$, da ist die Schwankungsordinate unbedeutend, und da, wo die Schwankungsordinaten beträchtlicher sind, liefert die Hilfscurve keinen nennenswerten Flächeninhalt mehr. Wir können unser Restglied also folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}
 R(n, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\xi [f(x) - f(x+\xi)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \xi}{2 \sin \frac{1}{2} \xi} \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 d\xi [f(x) - f(x+\xi)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \xi}{2 \sin \frac{1}{2} \xi} \\
 &= R_1 + R_2
 \end{aligned}$$

wo

$$R_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} S(\xi) \cdot T(\xi) d\xi.$$

Da nun die erste Welle eine besondere Behandlung verlangt, so wollen wir dieses R_1 wiederum zerlegen in

$$R_1 = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi}$$

wo $\alpha = \frac{2K\pi}{2n+1}$ eine Stelle bedeutet, an welcher

gerade eine Anzahl von Wellen zum Abschluss gekommen ist.

Nach der letzten Schätzung haben wir:

$$1') \quad \left| \int_0^{\eta} T(\xi) d\xi \right| < \pi$$

$$2') \quad \left| \int_x^{\pi} T(\xi) d\xi \right| < \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin \frac{x}{2}$$

Hierzu bemerken wir:

Bereits diese Abschätzung, welche sich nur auf die Hüllcurve $T(\xi)$ bezog, war nicht mit dem gewöhnlichen Mittelwertsatz gemacht; (diesen haben wir nur benutzt, um den Flächeninhalt der einzelnen Welle abzuschätzen), sondern durch Betrachtung der besonderen Gestalt der fluktuierenden Curve. Auch jetzt wird uns bei Betrachtung des Integrals $\int S(\xi) T(\xi) d\xi$ der bloße Mittelwertsatz nicht förderlich sein. Wir wollen vielmehr eine Zwischenbetrachtung einschalten.

Zwischenbetrachtung.

Wir wollen einmal die Schwankungscurve

$y = S(\xi)$ in zwei Teile spalten:

$$y = \Sigma'(\xi) \text{ und } y = \Sigma''(\xi)$$

wo $S = \Sigma' + \Sigma''$ sein soll und zwar soll $y = \Sigma'$

mit wachsendem ξ nie abnehmen und $y = \Sigma'$ nie wachsen. Wir erhalten dann aus Fig. 1 die in 2. und 3. dargestellten Curven.

Solange $y = S(\xi)$ ansteigt, werden die zugehörigen Curvenzüge in die Fig. 2 übertragen, sobald $S(\xi)$ aber fällt, erhält die Curve $\Sigma'(\xi)$ an den entsprechenden Stellen constante Ordinaten. Ebenso umgekehrt. Carl Neumann nannte solche Curven "monotone Curven".



Betrachten wir jetzt einmal die Endordinaten der beiden Curven $\Sigma'(\pi)$ und $\Sigma''(\pi)$, wo also $\Sigma'(\pi)$ die Summe aller positiven Zuwächse bedeutet, welche unsere Curve S im Intervall von 0 bis π erfährt, und $\Sigma''(\pi)$ die Summe aller negativen Zuwächse im gleichen Intervalle, so ist hierbei zu bemerken, dass die ganze weitere Behandlung nur darauf ruht, dass $\Sigma'(\pi)$ und $\Sigma''(\pi)$ endlich sind.

Für solche Functionen, bei denen $\Sigma'(\pi)$ und $\Sigma''(\pi)$

begrenzt sind, hat C. Jordan den Namen "bornierte Funktionen" eingeführt; wir nehmen ausdrücklich an, dass unsere Schwankungsfunktion S in diesem Sinne borniert sei.

Also: Wenn wir eine bornierte Funktion in ihre beiden monotonen Komponenten Σ' und Σ'' zerlegen, dann haben diese im ganzen Intervall von 0 bis π endliche Ordinalzahlen.

Durchführung der Abschätzung.

Wir rufen uns unsere eigentliche Aufgabe ins Gedächtnis zurück: Wir haben auszuschatzen

$$\int_0^\pi S(\xi) T(\xi) d\xi = \int_0^\alpha + \int_\alpha^\pi \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^0 = \int_{-\pi}^{-\alpha} + \int_{-\alpha}^0$$

Zu dem Zwecke wollen wir das erste Integral spalten in drei Bestandteile, deren absolute Beträge wir zusammenaddieren:

$$\left| \int_0^\alpha \right| \leq \left| \int_0^\alpha \{ \Sigma'(\xi) - \Sigma'(\alpha) \} \cdot T(\xi) d\xi \right| \\ + \left| \int_0^\alpha \{ \Sigma''(\xi) - \Sigma''(\alpha) \} \cdot T(\xi) d\xi \right| + \left| \int_0^\alpha \{ \Sigma'(\alpha) + \Sigma''(\alpha) \} \cdot T(\xi) d\xi \right|$$

und ebenso das zweite Integral in die 3 Bestandteile:

$$\left| \int_\alpha^\pi \right| \leq \left| \int_\alpha^\pi \{ \Sigma'(\xi) - \Sigma'(\alpha) \} \cdot T(\xi) d\xi \right| + \left| \int_\alpha^\pi \{ \Sigma''(\xi) - \Sigma''(\alpha) \} \cdot T(\xi) d\xi \right| \\ + \left| \int_\alpha^\pi \{ \Sigma'(\alpha) + \Sigma''(\alpha) \} \cdot T(\xi) d\xi \right|$$

Dass das Zeichen \cong gesetzt werden muss, folgt daraus, dass die Summe der absoluten Beträge notwendig grösser oder gleich dem absoluten Betrage der Summe ist.

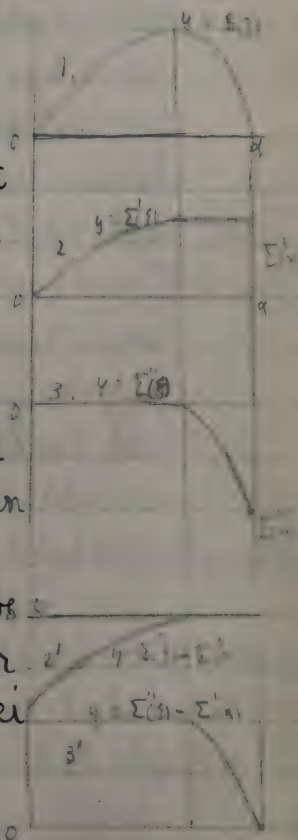
Jetzt ist die Abschätzung der drei rechts stehenden Glieder sehr leicht: Der absolute Betrag unserer Schwankung S verläuft von 0 bis α , etwa wie in Fig. 1.

Die Figuren 2) und 3) stellen die zu 1) gehörigen monotonen Curven dar. Zeichnen wir jetzt noch die Curven $\Sigma'(S) - \Sigma'(\alpha)$ bzw. $\Sigma''(S) - \Sigma''(\alpha)$, so werden dieselben nach 2') und 3') verlaufen.

Wir sehen hinaus:

$\Sigma'(S) - \Sigma'(\alpha)$ hat am linken Ende des Intervalls absolut genommen seine grösste Ordinate, und von da ab nimmt der absolute Betrag der Ordinate immer

mehr ab. Ebenso haben wir bei $y = \Sigma''(S) - \Sigma''(\alpha)$ die grösste Ordinate am linken Ende



des Intervalls. Das dritte Integral anbelangend ist aber $\Sigma'(x) + \Sigma''(x)$ überhaupt constant.

Jetzt können wir uns auch leicht die Funktion darstellen, die unter dem Integralzeichen stehen:

Von der Curve $T(x)$

wissen wir bereits, dass der Flächeninhalt derselben von 0 bis α kleiner ist als der Inhalt der ersten Welle (Fig. 1)

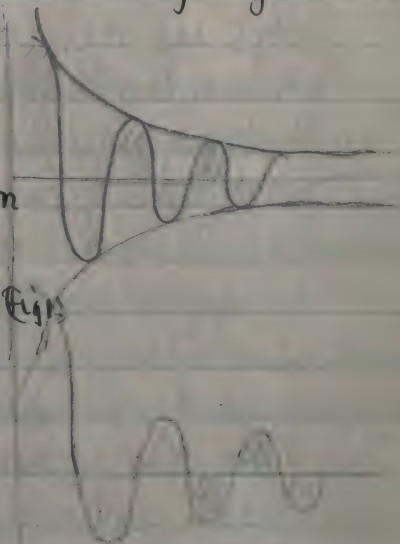
Diese $T(x)$ ist nun aber noch mit einem Factor $\Sigma'(x) - \Sigma''(x)$ multipliziert und nach den eben

gegebenen Erläuterungen

ist leicht zu sehen, dass die erste Welle auf Kosten der anderen nur noch begünstigt wird. Es wird also (Fig. 2)

der Flächeninhalt der neuen Curve erst recht kleiner als der Inhalt der ersten Welle.

Also werden wir unser Integral abschätzen, indem wir den absoluten Wert der ersten Welle abschätzen:



Wir fanden $I < II$ bei der Hilfscurve.
 Jetzt hat das umgeschriebene Rechteck
 einen Inhalt $[\Sigma'(0) - \Sigma'(\alpha)] \cdot \pi$. Da nun $\Sigma'(0) = 0$ ist,
 so haben wir:

$$|\int_0^{\alpha} \{\Sigma'(\xi) - \Sigma'(\alpha)\} T(\xi) d\xi| < |\Sigma'(\alpha)| \cdot \pi$$

Ganz entsprechend erhalten wir für das
 zweite Integral:

$$|\int_0^{\alpha} \{\Sigma''(\xi) - \Sigma''(\alpha)\} T(\xi) d\xi| < |\Sigma''(\alpha)| \cdot \pi$$

und für das dritte:

$$|\int_0^{\alpha} \{\Sigma'(\alpha) + \Sigma''(\alpha)\} T(\xi) d\xi| < |\Sigma'(\alpha) + \Sigma''(\alpha)| \cdot \pi$$

Addieren wir, so erhalten wir:

$$|\int_0^{\alpha} S(\xi) T(\xi) d\xi| < \{|\Sigma'(\alpha)| + |\Sigma''(\alpha)| + |\Sigma'(\alpha) + \Sigma''(\alpha)|\}$$

Jetzt haben wir in analoger Weise das Integral

$$\int_{\alpha}^{\pi} S(\xi) T(\xi) d\xi$$

abzuschätzen. Hierzu sind bereits die nötigen
 Einleitungen getroffen. Wir hatten nämlich:

$$|\int_{\alpha}^{\pi} S(\xi) T(\xi) d\xi| \leq |\int_{\alpha}^{\pi} \{\Sigma'(\xi) - \Sigma'(\pi)\} T(\xi) d\xi|$$

$$+ |\int_{\alpha}^{\pi} \{\Sigma''(\xi) - \Sigma''(\pi)\} T(\xi) d\xi| + |\int_{\alpha}^{\pi} \{\Sigma'(\pi) + \Sigma''(\pi)\} T(\xi) d\xi|$$

Diese Integrale sind nun so eingerichtet, dass
 der Klammernfactor, mit welchem $T(\xi)$ multi-
 pliziert wird, von links nach rechts abfällt,
 oder doch sicher nicht ansteigt. Da nun $T(\xi)$

eine fluktuierende Funktion ist, die nach rechts abfällt, so gilt a fortiori: Die einzelnen Integrale sind kleiner als der jeweilige Betrag der ersten Halbwellen. Setzen wir daher bei allen drei Gliedern der rechten Seite unserer obigen Ungleichung den Maximalwert des Klammerfaktors vor die bezügliche Integralzeichen, so erhalten wir unter Benutzung der Gleichung 2' auf Seite ?

$$\left| \int_0^{\pi} S(\xi) T(\xi) d\xi \right| < \left| \Sigma'(\alpha) - \Sigma'(\pi) \right| \frac{2}{(2n+1) \sin \frac{\alpha}{2}} \\ + \left| \Sigma''(\alpha) - \Sigma''(\pi) \right| \frac{2}{(2n+1) \sin \frac{\alpha}{2}} + \left| \Sigma'(\pi) - \Sigma''(\pi) \right| \frac{2}{(2n+1) \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Durch geeignete Zusammenziehung bekommen wir also

$$\left| \int_0^{\pi} S(\xi) T(\xi) d\xi \right| < \left\{ \left| \Sigma'(\alpha) - \Sigma'(\pi) \right| + \left| \Sigma''(\alpha) - \Sigma''(\pi) \right| + \left| \Sigma'(\pi) + \Sigma''(\pi) \right| \right\} \frac{2}{(2n+1) \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Diese beiden durch Abschätzung gefundenen Werte der Integrale haben wir einzusetzen in unsere Gleichung für R_1 .

$$|R_1| \equiv \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\alpha} S(\xi) T(\xi) d\xi \right| + \frac{1}{\pi} \left| \int_{\alpha}^{\pi} S(\xi) T(\xi) d\xi \right|$$

Um den Rest $R_2(n, x)$ zu bestimmen, brauchen wir noch R_2 in ganz entsprechender Weise abzuschätzen.

Wir bemerken hierzu noch, dass diese Restgliedabschätzung in jedem concreten Falle noch wesentlich verbessert werden kann. Sie ist deshalb so unbestimmt gefasst, weil die Function $f(x)$, mit der wir hier zu thun haben, noch so sehr allgemein ist.

Die Convergence des unendlichen Fourierschen Reihe:

Um einzusehen, dass der Rest für unendlich grosses n verschwindet, nehmen wir $\alpha = \frac{2K\theta}{2\pi H}$ so nahe an 0 an, dass der Bestandteil $\frac{1}{\pi} \left| \int_0^\alpha S(\xi) T(\xi) d\xi \right|$ vermöge unserer Abschätzung kleiner wird als $\frac{\epsilon}{4}$, wo ϵ eine beliebig kleine vorgegebene Zahl ist.

Um auch $\frac{1}{\pi} \left| \int_\alpha^\pi S(\xi) T(\xi) d\xi \right|$ kleiner als $\frac{\epsilon}{4}$ zu machen, nehmen wir nun noch die Gliederzahl n der Fourierschen Reihe so gross an, dass eben dieser zweite Bestandteil unseres R_1 , obgleich $\sin \frac{\alpha}{2}$ im Nenner steht, kleiner wird als $\frac{\epsilon}{4}$.

Ebenso wie $|R_1|$ lässt sich nun auch $|R_2|$ kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$ machen und wir können sagen:

Nimmt man nur die Gliederzahl n hinreichend gross, so kann man den Rest $R(n \times)$ der Reihe immer $< \varepsilon$ machen.

Darmit ist zugleich bewiesen, dass für hinreichend grosses n unsere endliche Reihe direkt gleich der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{2} \{ f_+(x) + f_-(x) \} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

wird, und dass diese Reihe unter denselben Bedingungen, wie oben hervorgehoben, convergirt.

Dieses war der Dirichlet'sche Convergenz-Beweis

Anmerkung: Während die Taylor'sche Reihe ^{IV 291}

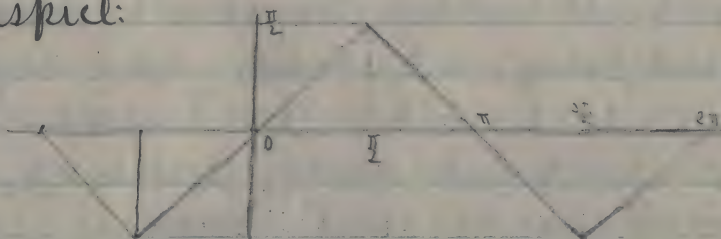
ihre Coefficienten dem Verhalten der Function an einer einzigen Stelle entnimmt, so berechnen sich die Coefficienten der Fourierschen Reihe aus dem Gesamtverlauf der Function zwischen 0 und 2π .

In Uebereinstimmung mit diesem Bildungsgesetze der Coefficienten liefert die Taylor'sche Reihe eine Serie von Annäherungscurven, die sich an der einen Stelle $x=a$ immer enger und enger an die gegebene Curve anschmiegen, während die Fouriersche Reihe Annäherungscurven liefert, die

über das ganze Intervall hin möglichst der Form der gegebenen Curve zu folgen besteht sind.

Der Verlauf der successiven Annäherungscurven

1) Beispiel:



Dieser Linienzug kann durch eine Fouriersche Reihe angenähert werden, da er um 2π periodisch ist. (Durch eine Taylorsche Reihe würde nur eine der geraden Linien darstellbar sein).

Da $f(x) = -f(x)$ (ungerade Funktion), so müssen alle Cosinustglieder fortfallen incl. des constanten Gliedes. Es ist also

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

zu berechnen. Wir spalten in:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{4\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right]$$

da auch die Funktion unter dem Integralzeichen um 2π periodisch ist.

Nun ist $f(x) = x$, bzw. $\pi - x$, so dass:

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} z \sin \nu z dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - z) \sin \nu z dz \right]$$

Durch partielle Integration ergibt sich sofort:

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{z}{\nu} \cos \nu z + \frac{1}{\nu^2} \sin \nu z \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{z}{\nu} \cos \nu z - \frac{1}{\nu^2} \sin \nu z - \frac{\pi}{\nu} \cos \nu z \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right\}$$

Man sieht hieraus, diejenige b_ν , deren Indices gradzahlig sind, werden = 0, die ungeraden b_ν haben den Wert $b_\nu = \frac{4}{\pi \nu^2} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}$, also

$$b_0 = 0, b_1 = \frac{4}{1 \cdot \pi}, b_2 = 0, b_3 = -\frac{4}{9\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4}{25\pi} \dots$$

Die Reihe hat also die Form:

$$1) f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} - \dots \right)$$

Da wieder $f(x) = -f(-x)$ es bleiben wieder nur die sin. Glieder stehen:

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \sin \nu z dz \text{ oder}$$

$$b_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \dots$$

Da $f(z) = z$, so erhalten wir durch partielle Integration:

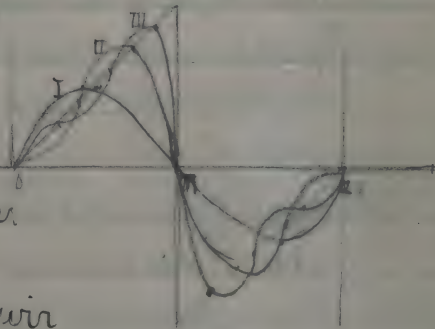
$$b_\nu = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{z}{\nu} \cos \nu z + \frac{1}{\nu^2} \sin \nu z \right]_0^\pi$$

Hieraus findet man: $b_\nu = -\frac{2}{\nu} (-1)^\nu$, also ist:

$$b_1 = 2, b_2 = 2(-\frac{1}{2}), b_3 = 2(\frac{1}{3}), b_4 = 2(-\frac{1}{4}) \dots$$

sodass die Reihe die Form hat:

$$2) f(x) = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$



Man bemerkt: Die successiven Annäherungscurven, welche an sich lauter stetige Curven sind, schmiegen sich an die Unstetigkeiten der vorgelegten Curven in der Weise an, dass die vertikalen Linienstücke, welche man zwischen den Sprungstellen einschalten kann, mit approximiert werden.

Im Anschluss hieran folgen einige Resultate:

1. Regel: Die erste Annäherungscurve hat mit der darzustellenden Curve zwischen 0 und π mindestens einen, die zweite mindestens zwei, die dritte mindestens 3 Schnittpunkte ^{u. s. w.}
2. Regel: Die Convergenz der Fourierschen Reihe ist überall vorhanden, auch in der Nähe der Sprungstellen; jedoch ist sie hier unendlich verlangsamt. In der Sprungstelle selbst ist sie wieder vortheilhaft.

§ Gliedweise Integration und Differentiation der Fourierschen Reihe.

Integration: Aus den Figuren sieht man zunächst unmittelbar, dass die gliedweise Integration statthaft ist. Wir wollen es

aber noch auf andere Weise klar zu machen suchen: wir wollen bei beiden Reihen einmal wirklich die gliedweise Integration ausführen wir erhalten:

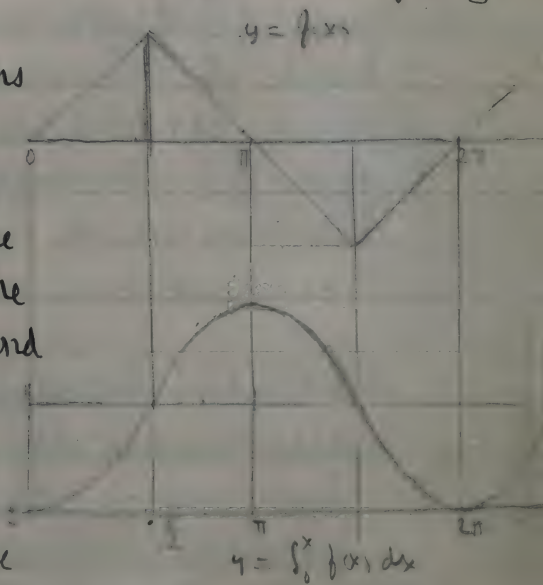
$$1) \int f(x) dx = C + \frac{\pi}{4} \left(-\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{27} - \frac{\cos 5x}{125} + \dots \right)$$

Die Frage wird sein: Ist diese Reihe wirklich das Integral von $f(x)$? Ferner bilden wir

$$2) \int f(x) dx = C + 2 \left(-\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \dots \right)$$

und fragen auch hier nach der Berechtigung der Integration.

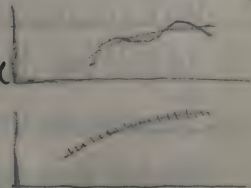
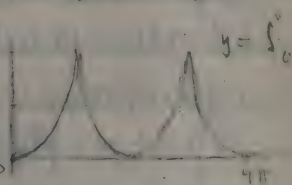
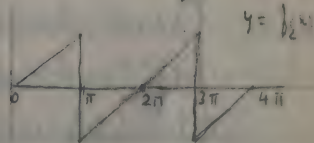
Construieren wir uns beide Fälle durch, so finden wir: Die Integralcurve ist eine periodische Curve ohne Unstetigkeit, bestehend aus verschiedenen parabolischen Ästen, die man also gewiss in eine Fourierreihe entwickeln kann.



Wenn man nun die so definierte Integralkurve direkt in eine Fourierreihe entwickelt, so bekommt man in der That dieselbe Reihe, die wir durch gliedweise Integration hergestellt hatten. Es ist also in diesen beiden Beispielen die Berechtigung der gliedweisen Integration bewiesen.

Differentiation: Man darf eine unendliche Reihe gliedweise differenzieren, wenn die Annäherungskurven mit der Originalcurve nicht nur in den Ordinaten, sondern auch in den Richtungen ihrer Tangenten bei wachsendem n immer mehr zusammenfällt.

Während nun die Fig. des Beispiels 1 eine richtige Annäherung darstellt, so dass die gliedweise Differentiation gestattet ist, so zeigt das zweite Beispiel, besonders in der Sprungstelle, eine unrichtige Annäherung, so dass die gliedweise Diff. wohl nicht richtig sein kann.



Differenzieren wir beide Reihen gliedweise, so erhalten wir:

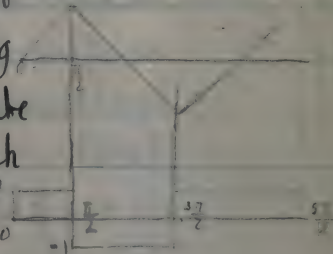
$$1) \quad \frac{df}{dx} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right)$$

Diese Reihe konvergiert tatsächlich. Ferner:

$$2) \quad \frac{df}{dx} = 2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots)$$

welche Reihe gar nicht konvergiert, so dass der Schluss aus den Figuren bestätigt wird. Versuchen wir es jetzt direkt aus den Originalcurven die Differentialcurven herzustellen, so erhalten wir für (1) eine periodische Funktion, die sich sofort durch eine Fouriersche Reihe darstellen lässt.

Führt man die Reihenentwicklung für diese durch die Fig. definierte Curve durch, so kommt man wirklich auf die Reihe, die wir uns durch gliedweise Diff. hergestellt hatten.



Anders ist es bei 2). Hier stößt die Originalcurve überall gleichmäßig an, nur an den Unstetigkeitsstellen $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ fällt sie plötzlich herab. Also ist der Diff. quotient überall constant mit Ausnahme dieser Unstetigkeitsstellen, wo er plötzlich auf $-\infty$ fällt. Da dies den Bedingungen für die Entwicklung einer Function in eine Fouriersche Reihe widerspricht, so können wir auch den Diff. quotient von $f(x)$ in diesem Fall gar nicht durch eine F. R. darstellen.

Ausdehnung der Integralrechnung auf mehrere Variable.

Die mehrgliedrigen Differentialausdrücke.

Das exakte Differential bei zwei Variablen.

$F(x) = \int f(x) dx$ knüpft an folgende beiden zur Integration führenden Ideen an:

- 1) An die Umkehr des Diff.quotienten $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ indem bei gegebenem $f(x)$ nach $F(x)$ gefragt wurde, und
- 2) an den direkten Grenzprozess einer Summe, also an

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma^{(n)} = \int f(x) dx.$$

Beide Formulierungen lassen sich nun auf mehrere Variable ausdehnen.

- 1.) Was den ersten Punkt anbetrifft, so wird eben nicht nur eine solche Gleichung, sondern mehrere gegeben, und speziell bei zwei Variablen die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

Wenn wir in diesem Falle x und y sich um dx bzw. um dy ändern lassen, so erscheint bekanntlich das zugehörige Differential dF

in der Form:

$$d\varphi = M dx + N dy$$

wo M und N Funktionen von x und y sind.
Die umgekehrte uns hier in der Integralrechnung
interessierende Frage wird sein, wann man
aus einem solchen Ausdruck: $M dx + N dy$,
eine Funktion $\varphi(x, y)$ selbst bestimmen kann
und wie man dieselbe findet?

Wenn nun unser Ausdruck so beschaffen
ist, dass

$$M = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \quad N = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}$$

ist, so gebraucht man auch den besonderen
Ausdruck: $d\varphi$ ist ein exaktes Differential.
Wir können daher die beiden letzten Fragen
auch so formulieren: Wann ist unser
Ausdruck $M dx + N dy$ ein exaktes Differential,
und wenn es ein exaktes Differential ist
wie finde ich denn die $\varphi(x, y)$?

2) Was dem zweiten Gesichtspunkt angeht,
so ist da eine Zugabe gegeben, und es soll
das Doppelintegral

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

bestimmt werden.

Wir wollen diese zweite Frage jedoch jetzt nicht weiter verfolgen, da wir sie in Kürze noch eingehend zu behandeln haben; bemerken jedoch hier, dass wir auch das Doppelintegral als Grenze einer Summe definieren werden.

Unsere erste Frage lautet: Wann ist

$$M dx + N dy$$

ein exaktes Differential?

Dabei wollen wir nun hier nicht feinere Definitionen geben, d.h. wir wollen uns nicht um Unstetigkeiten u.s.w. kümmern; M und N sollen stetige differenzierbare Funktionen sein.

Man erkennt nun sogleich, dass M und N nicht beliebig sein dürfen, dass sie vielmehr die partiellen Diff.quotienten des $F(x, y)$ nach x bzw. y sein müssen. Nun ist im Falle stetiger differenzierbarer Diff.quotienten, wie wir in der Diff.rechnung zeigten

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

Daher ergibt sich als notwendige Bedingung:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Nun behaupten wir, das ist auch ausreichend (oder, mit anderen Worten: wenn obige Bedingung erfüllt ist, so ist auch immer eine $F(x, y)$ zu finden. Wir erkennen dies am einfachsten, indem wir uns an einer Funktion, die durch M und N ausgedrückt ist, mittels Differentiation von der Richtigkeit dieser Funktion überzeugen. Dabei müssen wir Vorsicht gebrauchen in der Verwendung der Buchstaben, und zwar wollen wir die Integrationsbuchstaben über welche hier integriert wird, ξ und η nennen, zum Unterschiede von x und y , welche an der Integration gar nicht beteiligt sind, sondern entweder Integrationsgrenzen vorstellen, oder als Parameter in dem Integranden eingehen.

Wir bilden uns den Ausdruck:

$$\int_a^x M(\xi, y) d\xi + \int_b^y N(x, \eta) d\eta - \int_a^x d\xi \int_b^y d\eta \left\{ \frac{\partial M(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\}$$

und bezeichnen ihn mit $F(x, y)$.

(Das letzte Doppelintegral ist nur ein wieder-

holtes einfaches Integral; wir brauchen zu seiner Definition nicht etwa einen neuen Grenzübergang).

Differenzieren wir dieses $F(x, \eta)$ nach x , so bekommen wir für das erste Integral einfach die Funktion unter dem Integralzeichen. Bei dem zweiten Integral machen wir Gebrauch von dem Satze, unter dem Integralzeichen differenzieren zu können. Beim dritten Integrale ist die Reihenfolge der Integration gleichgültig, so dass sich dasselbe schreiben lässt in der Form:

$$\int_b^y d\eta \int_a^x d\xi \frac{\partial M(\xi, \eta)}{\partial \eta}$$

Bezeichnen wir die Klammergröße welche eine Funktion von x und η ist, mit $\Phi(x, \eta)$ so haben wir $\int_b^y \Phi(x, \eta) d\eta$. Jetzt differenzieren wir nach x und bekommen, indem wir unter dem Integralzeichen differenzieren:

a)
$$\int_b^y \frac{\partial \Phi(x, \eta)}{\partial x} d\eta.$$

Nun ist $\Phi(x, \eta)$ ja gleich $\int_a^x \frac{\partial M(\xi, \eta)}{\partial \eta} d\xi$. Dies soll also nach der oberen Grenze differenziert werden. Das giebt, indem

man zugleich für ξ das x einsetzt:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$$

Unser Ausdruck (a) geht also über in $\int_b^y \frac{\partial M(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta$

und wir erhalten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) + \int_b^y \frac{\partial M(x, \eta)}{\partial x} d\eta - \int_b^y \frac{\partial M(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta.$$

Es ist also

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

wie wir wünschten. Also diese Probe hat $F(x, y)$ bestanden, und wenn wir analog auch $\frac{\partial F}{\partial y}$ ausrechnen, indem wir die einzelnen Integrale nach y differenzieren, so werden wir erhalten:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

Resultat: Wenn ein Differentialausdruck $M dx + N dy$ vorgelegt ist und die Gleichung $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ besteht, dann haben wir es wirklich mit einem exakten Differential zutun, nämlich mit dem Differential der Funktion:

$$F(x, y) = \int_a^x M(\xi, y) d\xi + \int_b^y N(x, \eta) d\eta - \int_a^x d\xi \int_b^y d\eta \left\{ \frac{\partial M(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\}$$

Dies ist die analytische Grundlage für die weiteren Betrachtungen.

Wir wollen hierzu nun ein Beispiel durchrechnen, welches wir in der Folge noch weiter benutzen werden.

Es soll sein:

$$M dx + N dy = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

also:

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Ist der gegebene Ausdruck ein exaktes Diff.?

Dass dies der Fall ist sieht man gleich; es ist

nämlich
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Jetzt bilden wir die Funktion $F(x, y)$ nach unserer Formel und verschmelzen dabei den Einfluss der unteren Integrationsgrenzen direkt mit den Integrationskonstanten.

Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int^x \frac{-y d\xi}{x^2 + \xi^2} + \int^y \frac{x d\eta}{x^2 + \eta^2} - \int^x d\xi \int^y d\eta \frac{-\xi^2 + \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + C \\ &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C. \end{aligned}$$

Ausdehnung auf mehr Variable.

Wir kommen erst noch einmal auf das Bildungsgesetz unserer Formel für $F(x, y)$ zurück: Da $M(x, y)$ der partielle Diff. quot. von $F(x, y)$ nach x sein sollte, so können wir auch schreiben:

$$\Phi = \int^x M(\xi, y) d\xi + \phi(y)$$

wo die Integrationskonstante $\phi(y)$ nur von y abhängig ist. Ferner können wir jetzt schreiben:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int^x \frac{\partial M(\xi, y)}{\partial y} d\xi + \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

und hieraus den Wert von $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ablesen; nämlich

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x, y) - \int^x \frac{\partial M(\xi, y)}{\partial y} d\xi = N(x, y) - \int^x \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial \xi} d\xi$$

Dieser Ausdruck hängt nur von y ab, nicht von x , wie aus der ganzen Entstehung hervorgeht und übrigens auch formal deutlich ist. Durch Integration bekommen wir also:

$$\phi = \int^y d\eta \left\{ N(x, \eta) - \int^x \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\xi \right\} + C$$

wo C von x und y unabhängig ist.

Dieser Wert von ϕ in die Formel für $\Phi(x, y)$ eingesetzt, ergibt sofort die schon diskutierte Formel:

$$\Phi(x, y) = \int_a^x M(\xi, y) d\xi + \int_b^y N(x, \eta) d\eta - \int_a^x d\xi \int_b^y d\eta \frac{\partial N(\xi, \eta)}{\partial \xi} + C$$

Es mögen jetzt drei Variable vorhanden sein, also der Ausdruck

$$M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz$$

vorliegen. Wann ist dieser Ausdruck ein

exaktes Differential?

Wir wissen die notwendigen Bedingungen sind

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Diese drei Bedingungen sind aber auch hinreichend, sie genügen also, um unseren Diff. Ausdruck als exaktes Differential erscheinen zu lassen. Um dies zu beweisen, gehen wir in ganz entsprechender Weise vor, wie oben. Wir werden setzen können:

$$F(x, y, z) = \int^x M(\xi, y, z) d\xi + \Phi(y, z).$$

Denn nach x differenziert ergibt dieser Ausdruck gerade M , also kann $F(x, y, z)$ sich von dem Integral $\int^x M(\xi, y, z) d\xi$ nur um eine Größe Φ unterscheiden, die von y und z abhängig ist. Wir erhalten hieraus nun:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int^x \frac{\partial M(\xi, y, z)}{\partial y} d\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x, y, z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int^x \frac{\partial M(\xi, y, z)}{\partial z} d\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = P(x, y, z)$$

Durch Multiplikation der beiden Gleichungen mit dy bzw. dz und Addition, erhalten wir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = \left\{ N(x, y, z) - \int^x \frac{\partial M(\xi, y, z)}{\partial \xi} d\xi \right\} dy + \left\{ P(x, y, z) - \int^x \frac{\partial P(\xi, y, z)}{\partial \xi} d\xi \right\} dz$$

Die Frage lautet nun: Können wir hieraus das ϕ bestimmen? Wir sehen, nur dann, wenn die rechte Seite für sich genommen ein exaktes Differential ist. Wir haben also die Frage eines dreigliedrigen Differentials auf die eines zweigliedrigen zurückgeführt. Daher muss jetzt die Bedingung bestehen:

$$\frac{\partial N}{\partial z} - \int \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial z} d\xi = \frac{\partial P}{\partial y} - \int \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial y} d\xi.$$

Diese beiden Ausdrücke links und rechts sind nun nach Voraussetzung in der That einander gleich; denn aus $\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$ folgt sofort $\frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial y}$. Wir haben also wirklich ein exaktes Differential und können nach den bekannten Vorschriften integrieren. Wir können jetzt auch sofort folgenden allgemeinen Satz für n variable aussprechen.
Ein Ausdruck

$$M(x, y, z, \dots) dx + N(x, y, z, \dots) dy + \dots$$

ist ein exaktes Differential, wenn die Gl-^{en}

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \dots$$

bestehen, denn abedann kann man stets setzen:

$F(x, y, z, \dots) = \int^x M(\xi, y, z, \dots) d\xi + \phi(y, z, \dots)$
wo $\phi(y, z, \dots)$ selbst wieder durch ein exaktes
Differential von $n-1$ Variablen definiert wird.

Eine geometrische Deutung des zweigliedrigen
Differentials.

Gehen wir wieder zu den Differential-
funktionen von zwei Variablen zurück,
und fragen wir, was für ein geometrisches
Bild können wir mit diesen analytischen
Formulierungen verknüpfen, und insbesondere,
was bedeutet es geometrisch, wenn ein
exaktes Differential vorliegt.

Es sei der Ausdruck gegeben $M(x, y) dx + N(x, y) dy$,
den wir gleich dz setzen wollen. Wir führen
ein räumliches Koordinatensystem ein
und bezeichnen die Coordinaten eines
beliebigen Punktes im Raume mit x, y, z .
Unsere Gleichung $M dx + N dy = dz$ sagt
dann aus: Wenn die Coordinaten eines
Punktes x, y sich in bestimmter Weise
ändern, so ändert sich auch die zugehörige
 z Coordinat im Raume, und zwar werden

verschiedenen Fortschrittingsrichtungen der x, y auch verschiedene Fortschrittingsrichtungen des Raumpunktes x, y, z zugehören. Aus der vorgegebenen Gleichung geht aber hervor, dass die Endpunkte x', y', z' welche den unendlich kleinen Änderungen $dx = x' - x$, $dy = y' - y$, $dz = z' - z$ entsprechen, ein ebenes Flächenelement im Raume überdecken, da die Beziehung zwischen dx , dy , dz linear ist. (Aus der analytischen Geometrie ist ja auch bekannt, dass $M(x' - x) + N(y' - y) = z' - z$ die Gleichung einer Ebene ist, die durch den festen Punkt x, y, z geht). —

Die Gleichung $M dx + N dy = dz$ ordnet also jedem Raumpunkte x, y, z ein durch den Raumpunkt gehendes ebenes Flächenelement zu. Und zwar bleibt dieses Flächenelement sich selbst parallel, wenn der Punkt x, y, z vertikal hinauf oder hinab geht, weil die Coefficienten M und N nicht von z abhängen.

Nehmen wir einmal an: dz sei ein exaktes Differential, nämlich:

$$dz = dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

so ist

$$z = F(x, y) + C$$

d.h. wir haben damit eine Schar parallel gestellter Flächen im Raume. In jedem Punkte einer solchen Fläche gibt es eine Tangentialebene, und zwar sieht man, dass in dieser auch das jedem Punkte zugeordnete Flächenelement liegen muss.

Soll also ein exaktes Differential vorliegen, dann muss es möglich sein, alle diese Ebenen-Stückchen als Tangential-Ebenenelemente einer Fläche $z = F(x, y) + C$ aneinander zu legen, so dass sie zusammengekommen eine Schar von Flächen $z = F(x, y) + C$ überdecken.

Dass dieses nicht immer möglich ist, wollen wir an Beispielen zeigen.

Jedoch vorerst erproben wir den eben aufgestellten Satz an unserem letzten Beispiele. Dasselbe war gegeben

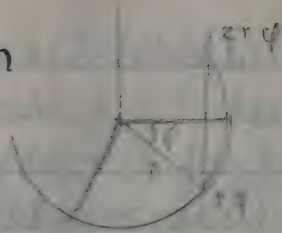
$$dz = \frac{-y dx + x dy}{x^2 y^2}$$

Wie liegen hier die Flächenelemente?

Für wir Polarkoordinaten
ein, so ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

Die Frage ist wie sieht



das Element, welches wir mittels
unserer Formel durch den Punkt mit
den Zylinderkoordinaten z, φ legen?

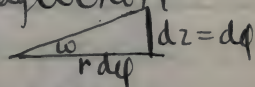
Der Einfachheit wegen, wollen wir z
zunächst $= 0$ setzen, also den Punkt in
die xy -Ebene verlegen, was ja keinen
Einfluss auf die Richtung des Ebenen-
Elementes hat.

Bestimmen wir zunächst die Schnitt-
linie desselben mit der xy -Ebene. Wir
erhalten: $-y dx + x dy = 0$, also $dx : dy = x : y$,
d.h. die Schnittlinie geht durch den
Anfangspunkt des Koordinatensystems.

Unser Flächenelement hat dabei folgende
Neigung gegen die Horizontale:

r möge constant bleiben und φ un-
zunehmen. Wir schreiben dem, bei
constant gehaltenem r , um $r d\varphi$ in horizontaler
Richtung weiter und haben jetzt das

zugehörige dz zu bestimmen. Nun ist ja nach unseren Rechnungen $dz = dq$; mithin erhalten wir den fraglichen Winkel ω (Fig.) aus der Gleichung $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{r}$.



Wir können daher sagen: In unserem Beispiele ist jedem Raumpunkte ein durch ihn gehendes Ebenen-Element zugeordnet, welches das horizontale Perpendikel enthält, das man von dem Raumpunkte aus auf die z -Achse fallen kann und welches Ebenen-Element mit der Horizontalen einen Winkel ω einschließt, so dass $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{r}$ ist, unter r die Länge des Perpendikels verstanden. Nun war

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C$$

also $z = \varphi + C$

d. h. unsere Fläche ist eine Schraubenfläche, deren Schnittlinien mit Horizontal-Ebenen Geraden sind, die durch die z -Achse gehen.

Dies ist also das Beispiel eines exacten

Differentials, wo also tatsächlich die Elementstückchen, welche jedem Punkte zugeordnet werden konnten, sich als Tangential-Ebenelemente von Flächen $z = F(x, y) + C$ an einander legen lassen, derart dass sie zusammengenommen jede dieser Flächen vollständig überdecken.

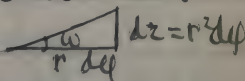
Achten wir in unserem letzten Beispiele noch einmal auf die Neigung des in der Fig. angegebenen Flächenelements, so ergibt sich aus der Gl. $\tan w = \frac{1}{r}$, dass das Flächenelement für $r=0$ senkrecht steht und für $r=\infty$ horizontal, und dass es überhaupt um so steiler ist, je kleiner das r ist. Das stimmt durchaus mit der durch die Gl. $z = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C$ gegebenen wendeltreppartigen Schraubenfläche überein. Als zweites Beispiel nehmen wir:

$$dz = -y dx + x dy.$$

und zwar sehen wir, dass das kein exaktes Differential ist, denn es ist $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = +1$.

Unter Benützung der obigen Bezeichnung können wir auch schreiben: $dz = r^2 d\varphi$.

Im Hinblick auf die letzten Figuren?
können wir jetzt auch den Satz aufstellen:
Wieder ist jedem Punkte x, y, z ein Flächenelement zugeordnet, welches durch das von diesem Punkte auf die z -Achse gefällte Perpendikel hindurchgeht.

Um die Neigung des Flächenelementes gegen die Horizontalebene zu bestimmen, schneiden wir dasselbe wieder mit einem Cylinder $x = \text{const.}$ und erkennen aus der Hülfffigur, dass sich jetzt  $dz = r \cdot d\varphi$ in Unterschiede zu vorher die Gl. $\tan \omega = r$ ergibt. Für $r=0$ steht also jetzt das Flächenelement horizontal, für $r=\infty$ vertikal und überhaupt steht das Element um so steiler, je grosser r ist. Hieraus ist für die geometrische Anschauung ersichtlich, dass es unmöglich ist, mit den Flächenelementen irgend eine Schraubenfläche zu überdecken.

Charakteristischer Unterschied des exakten und des unexakten Differentials.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob mit solchen unexakten Differentials nicht doch ein Integrationsproblem verbunden ist.

Wir setzen zu diesem Zwecke den Ausdruck $M dx + N dy$ gleich dz und legen in der xy -Ebene von einem Anfangspunkte x_0, y_0 nach einem zweiten Punkte xy irgend eine Curve und addieren nun der Curve entlang gehend alle Incremente dz zusammen. Die Gl. der Curve sei gegeben durch

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

und für $t = t_0$ sei x_0 und y_0

.. .. $t = t$.. x .. y

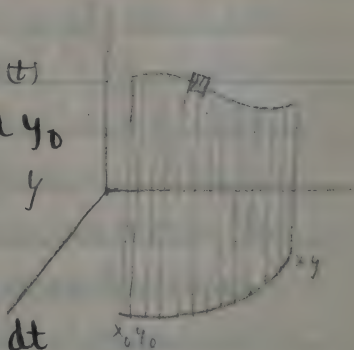
gegeben. Wir können denn schreiben:

$$dz = \{M(\varphi, \psi) \cdot \varphi' + N(\varphi, \psi) \cdot \psi'\} dt$$

Jetzt ist die Integration sofort ausführbar und wir erhalten:

$$z - z_0 = \int_{t_0}^t (M\varphi' + N\psi') dt.$$

Hierdurch ist uns also eine ganz bestimmte



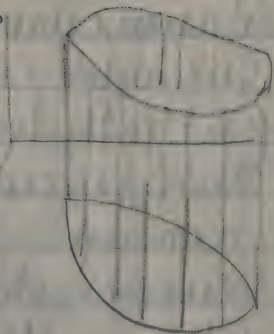
Raumcurve gegeben, die auf dem vertikalen Cylinder liegt, welches die Curve der xy -Ebene enthält. Wir wollen eine solche Curve eine Integralcurve unseres Differentialausdruckes nennen. Zu jedem Punkte dieser Integralcurve gehört nun ein Flächenelement, das in der Curve liegt, so daes man eine fortlaufende Reihe dieser Elemente, Integralstreifen genannt, längs der Integralcurve bilden kann.

Dies wollen wir so ausdrücken:

Auch wenn der vorgelegte Differentialausdruck kein exaktes Differential ist, auch dann gibt es unbegrenzt viele Integralcurven, bzw. Integralstreifen im Raume. Also es ist im Allgemeinen nicht möglich diese Curven oder Streifen zu einer Schar von Flächen zusammenzufassen.

Verfolgen wir noch genauer den Unterschied zwischen exakten und unexakten Differentialen. Wir wollen von einem Punkte x_0 auf zwei verschiedenen Wegen dem Punkte

x, y zustreben. Dem Punkte
 x_0, y_0 sei in bestimmtes z
zugeordnet. Wir wollen
uns jetzt die beiden
Curven zeichnen, die
sich im Raume ergeben.



Wir errichten auf beiden
Wegen die Cylinders und erhalten zwei
verschiedene Integralcurven im Raume,
auf diesen Cylindern liegend. Die Frage
ist, wann liefern diese beiden Curven
am Endpunkte dieselbe z -Ordinate?
Die Antwort lautet, wenn ein exaktes
Differential vorliegt, weil dann beide
Integralcurven auf der durch den
Punkt x_0, y_0, z_0 festgelegten Fläche $z = F(x, y) + C$
liegen und sich also schneiden müssen.
Andernfalls ist hierfür kein Grund vorhanden.
Der Wert des Integrals ist in einem Falle
vom Wege unabhängig, im anderen Falle
vom Wege abhängig. Man sagt in solchem
Falle, wo man von einem Punkte x_0, y_0
beginnend, einen Curvenzug zum

Anfangspunkt x_0, y_0 zurück durchläuft:

Man beschreibt einen Kreisprozess.

Wir können daher auch so sagen:

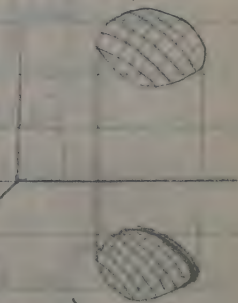
Das exakte Differential liefert bei einem beliebigen Kreisprozess, d.h. bei Integration längs einer geschlossenen Curve immer den Betrag 0, während beim unexakten Differential hierfür kein Grund vorliegt.

Hierin liegt nicht nur eine Eigenschaft des exakten Differentials, sondern auch eine Definition desselben.

Zeichnen wir im Falle des exakten Differentials ein Netzwerk in der xy -Ebene in unseren Curvenzug ein, so wird auch im Raume

ein Netzwerk entstehen welches eine der Flächen $z = F(x, y) + c$ überdeckt.

Hierin, dass jeder Kreisprozess Null liefert ist das Wesen des exakten Diffs. zu sehen. Denn es gruppieren sich dann notwendig die Integralcurven zu Flächen im Raume zusammen.



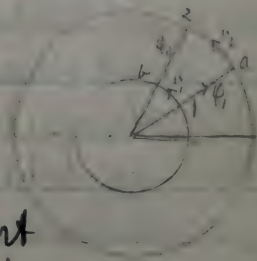
Verfolgen wir dies an unserem Beispiele:
Wir ziehen zwei Strahlen φ_1 und φ_2 und zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 .

Gehen wir nun vom Punkte 1 nach 2 in der xy -Ebene, so erhalten wir in unserem ersten Beispiele, wo $dz = d\varphi$ ist:

- a) wenn wir an φ_1 entlang über a und dann r_2 entlang nach 2 gehen: $z - z_0 = 0 + \varphi_2 - \varphi_1$,
 b) wenn wir über b in der entsprechenden Weise gehen: $z - z_0 = 0 + \varphi_2 - \varphi_1$; d. h. wir haben auf beiden Wegen tatsächlich denselben Wert erhalten. Anders ist es im zweiten Falle, wo $dz = r^2 d\varphi$ ist, da erhalten wir für Weg a) $z - z_0 = r_2^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$ und für
 .. b) $z - z_0 = r_1^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$

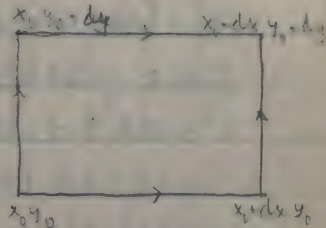
Im Anschluss an diese geometrischen Betrachtungen wollen wir dieses auch noch analytisch fassen:

Wir wollen einen Kreisprozess nach folgender Fig. beschreiben, und untersuchen wann sich für z derselbe Wert ergibt. Gehen wir zunächst



von (x_0, y_0) aus um dx weiter nach (x_0+dx, y_0)
 so werden wir für die zugehörige z-Coordinate
 den Zuwachs erhalten: $dz = M(x, y) dx$, indem
 ja y fortbleibt. von (x_0+dx, y_0)
 schreiten wir jetzt weiter
 um dy , also nach (x_0+dx, y_0+dy)
 und bekommen:

$$dz = N(x+dx, y) dy$$



Also insgesamt:

$$dz = M(x, y) dx + (N + \frac{\partial N}{\partial x} dx) dy.$$

Auf dem in der Fig. durch zwei Pfeile
 angedeutete Wege erhalten wir aber:

$$dz = N(x, y) dy + (M + \frac{\partial M}{\partial y} dx)$$

Und wenn nun diese beiden Zunahmen
 gleiche sind, dann haben wir es mit einem
 exakten Diff. zu thun. Dann muss ericht-
 lich die Gleichung bestehen:

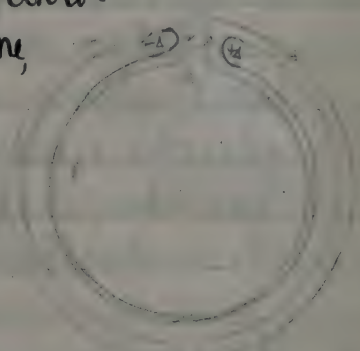
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Unsere neue geometrische Auffassung
 vom Wesen des exakten Differentials ergibt
 als analytische Bedingung für das exakte
 Diff. genau die gleiche Bedingung, mit der
 wir neulich begonnen hatten.

Kreisprozesse, welche singuläre Punkte umspannen.
 Der Satz, dass ein exaktes Differential, hin-
 integriert über eine geschlossene Curve, den
 Betrag 0 liefert, ist nur dann richtig, wenn
 diese geschlossene Curve keinen singulären
 Punkt einschließt.

Wie ist es aber mit zwei verschiedenen
 geschlossenen Curven, die um den singulären
 Punkt einfach herum liegen? Diese ergeben
 denselben Zuwachs. Man erkennt dies, wenn
 man den einen Weg auf den anderen in
 folgender Weise zurückführt:

Nehmen wir die Zunahme,
 welche das z bei Verlauf
 des inneren Weges erleidet
 P , die Zunahme bei
 Umlauf des äusseren P'
 und verbinden wir die
 beiden Wege durch die



Strecken $+A$ und $-A$, so erhält man, von A
 beginnend und den Pfeilen folgend bei
 Rückkehr nach A als Zuwachs von z :

$$P + A - P' - A = P - P'$$

Zusammengenommen ist dieser Weg gleich einem Wege, welcher den singulären Weg nicht einschließt, also gleichwertig mit der punktiert gezeichneten Curve ist, und daher ist der Zuwachs von z , $P - P' = 0$, mithin $P = P'$.

Wir gewinnen also den Satz: Geschlossene Integrationswege, welche den singulären Punkt in gleicher Weise (d. h. gleich oft und in gleichem Sinne) umkreisen, ergeben denselben Zuwachs von z .

Auf diese Weise können wir jetzt auch jeden beliebigen Weg zusammensetzen, aus solchen einfachen Umkreisungen und aus solchen Stücken, welche den Nullpunkt nicht umkreisen:



Daher gilt allgemein der Satz: Ein beliebiger geschlossener Weg liefert als Zuwachs des z den Betrag $k \cdot P$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl ist, die angibt, wie oft der geschlossene Weg in positivem Sinne um den Nullpunkt herumläuft.

Wir sehen somit, dass jetzt das Integral $\int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} dz$ selbst unädeutig erscheint und zwar um einen beliebigen Betrag $k \cdot P$, weil man in den Verbindungsweg von x_0, y_0 bis x_1, y_1 irgend einen geschlossenen Weg einschalten kann, der k mal im positiven Sinne um den singulären Punkt herumläuft. Dies wollen wir so formulieren:

Die Integration eines exakten Differentials bietet zwar insofern nichts Neues, als sie für jeden angegebenen Integrationsweg auf ein gewöhnliches Integral zurückführt. Dagegen tritt wegen der Willkür des Integrationsweges dieses auf, dass das Integral unädeutig werden kann, trotzdem dass das Differential einädeutig ist.

Die Grösse P nennt man den Periodizitätsmodul. Hat nun das Differential eine grössere Anzahl singulärer Punkte, so bekommen wir für das Integral eine entsprechende Anzahl von Periodizitätsmodulen P_1, P_2, \dots und es ist dann das Integral $\int_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} dz$ indem ich den Integrationsweg verändere, um $k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots$ folgenden Betrag willkürlich

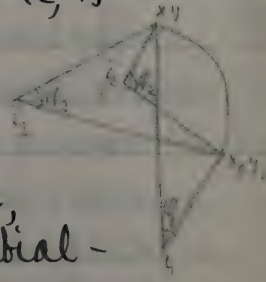
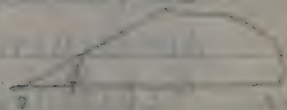
abzuändern, um $k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots$, wo k_1, k_2, \dots beliebige positive oder negative ganze Zahlen sind.

Diese ganze Theorie von der Vieldeutigkeit der Integrale exakter Differentiale kommt in der Physik in mannigfaltigster Weise zur Anwendung. Es sei beispielsweise das elektromagnetische Potential eines elektrischen Stromes von der Intensität i , der in einem

Leiter senkrecht zur Papirebene fließt, im Punkte $x_0, y_0 = 0$, so ist es im Punkte $x, y = i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - i \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0} = i \varphi$, wo φ den Winkel zwischen Anfangs- und Endstrahl bedeutet.

Hat man mehrere solcher Stromdrähte, so erhält man als Potentialdifferenz zwischen x_0, y_0 und x, y den Ausdruck: $i_1 \varphi_1 + i_2 \varphi_2 + i_3 \varphi_3 + \dots$ wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ die in der Fig. angedeuteten Winkel sind.

Laufen wir nun dabei einmal um i_1, i_2, \dots herum, so bekommen wir als Potential-Differenz: $P_1 + P_2 + \dots = 2\pi i_1 + 2\pi i_2 + \dots$



Also das elektromagnetische Potential eines solchen Stromsystems ist eine vieldeutige Funktion des hier betrachteten Art, welche das eindeutige Differential besitzt:

$$dz = i_1 dl_1 + i_2 dl_2 + \dots$$

und $2\pi i_1, 2\pi i_2, \dots$ als Periodizitätsmoduln aufweist. Ebenso kommt unsere Theorie in der reinen Mathematik zu mannigfacher Geltung:

Gehen wir kurz einmal auf die Funktionen einer complexen Variablen $x+iy$ ein, sodass $f(x+iy) = u+iv$. Wir bilden uns $\int (u+iv)(dx+idy)$ und können dasselbe sofort in einen reellen und in einen imaginären Bestandteil spalten, nämlich in

$$\int (u dx - v dy) + i \int (v dx + u dy).$$

Wir wollen hierauf nicht näher eingehen, sondern bemerken hinzu folgenden: In der Funct. theorie der complexen Größen beschränkt man sich nun auf solche $u+iv$ für welche die beiden Differentiale $u dx - v dy$ und $v dx + u dy$ beides exakte Diff. sind. Infolgedessen führt die Integration einer complexen Funktion auf die Betrachtung exakter Differentiale zweier reeller veränderlichen. Daher kommt alles, was wir über die Vieldeutigkeit der Integrale solcher exakter Diff. gesagt haben, in der Fl. Theorie der complexen veränderlichen schon beim einfachen Integrale zur Sprache.

Mehrfache Integrale

Das Doppelintegral als Rauminhalt.

Der Inhalt einer Säule ist gleich $\int f(x, y) dx dy$.

Bilden wir die Summe aller dieser Säulen innerhalb der Grenzen $x=a$ $x=b$ $y=c$ $y=d$

so erhalten wir

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

für den vorgelegten Kubikinhalt; auch erhält man für denselben

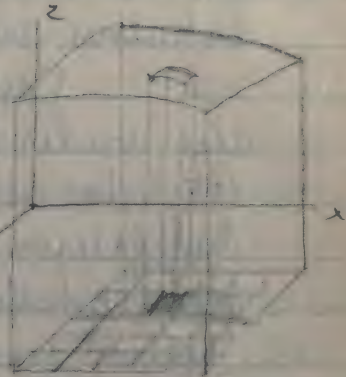
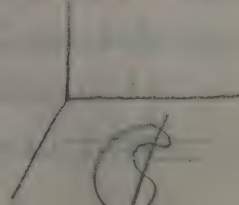
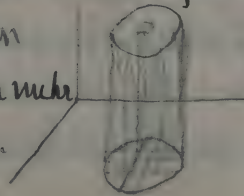
$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Wir können daher schreiben:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Ganz anders ist es, wenn in der xy -Ebene kein Rechteck, sondern eine krummlinige Contur gegeben ist. Wir wollen zunächst annehmen, dass die neue Contur von Parallelen zur x und y Axe nur in 2 Punkten

(Fig. 1) geschnitten wird und nicht in mehr als 2, wie in (Fig. 2).



Dann wollen wir uns über diesen Contur wieder Ordinator erichten bis zur Fläche $z=f(x,y)$ und erhalten den hierdurch gegebenen Rauminhalt zu:

$$\int dx \int f(x,y) dy \quad \text{oder} \quad \int dy \int f(x,y) dx$$

also wieder als Doppelintegral. Was aber neu ist, das sind die zu wählenden Grenzen.

Integrieren wir zuerst nach y und halten x fest, so haben wir das y immer laufen zu lassen zwischen dem untersten Werte und dem obersten, der gerade dem festgehaltenen x entspricht. Wir werden daher so vorgehen:

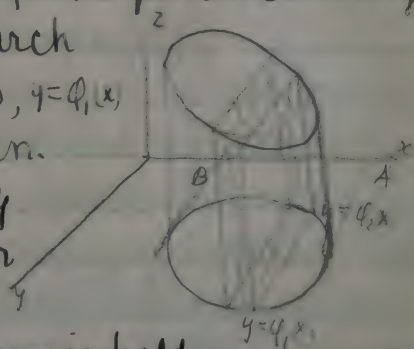
Wir wollen unsere Contur in der xy -Ebene durch die beiden zur y -Axe parallelen Tangenten B und A in die zwei durch die Funktionen $y=f_2(x)$, $y=f_1(x)$ gegebenen Teile zerlegen.

Wenn wir nun nach y integrieren, so sehen wir y läuft von $f_2(x)$ bis

nach $f_1(x)$ und der Rauminhalt

der in der Fig. gezeichneten Schübe ist gegeben durch das Integral $dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x,y) dy$.

Jetzt haben wir noch die Summe dieser Schüfen

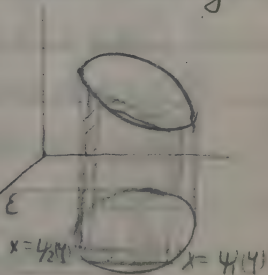


zu bilden von $x=B$ bis $x=A$ und erhalten dann durch Grenzübergang für den vorgelegten Rauminhalt:

$$\int_B^A dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y) dy.$$

Wir heben folgendes noch besonders hervor: Die Klammergrösse hängt in doppelter Weise von x ab, einmal dadurch, dass es als Parameter unter dem Integralzeichen steht, zweitens dadurch, dass es in den Grenzen vorkommt.

Wenn wir jetzt zweitens zuerst nach x integrieren, so werden wir unsere Grenzen ganz anders wählen müssen:



Wir zerlegen jetzt unsere Contur durch die beiden zur x -Axe parallelen Tangenten E und F in die zwei Teile $x = \varphi_2(y)$ und $x = \varphi_1(y)$ und halten jetzt ein bestimmtes y fest. Für die in der Fig. gezeichnete Scheibe erhalten wir dann den Rauminhalt:

$$dy \int_{\varphi_2(y)}^{\varphi_1(y)} f(x,y) dx.$$

Diesen Ausdruck haben wir nun noch nach y zu integrieren innerhalb der Grenzen $y = \epsilon$ und $y = \mathcal{F}$, so dass für den Gesamtwert wird:

$$\int_{\epsilon}^{\mathcal{F}} dy \int_{\mathcal{H}(y)}^{\mathcal{K}(y)} f(x, y) dx$$

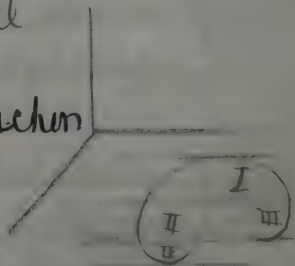
Wir wollen dies in folgendem Satz zusammenfassen: Wenn wir ein Doppelintegral dieser allgemeinen Art bilden und entweder zuerst nach y und dann nach x integrieren, oder zuerst nach x und dann nach y integrieren wollen, dann ist genau auf die Grenzen zu achten.

Das ist nun in noch höherem Masse der Fall, wenn in der xy -Ebene eine Figur gegeben ist, die in mehr als zwei Punkten von Parallelen zur x und y -Achse geschnitten wird. Im Hinblick auf die Figur wollen wir zuerst einmal nach x integrieren und sehen dabei, dass wir 4 Tangenten parallel zur x -Achse ziehen können.

Wir können jedoch nur zwischen 2 Grenzen integrieren.

Wir haben aber auch in der x -Richtung für festes y

Schwierigkeiten: Wir erhalten nämlich

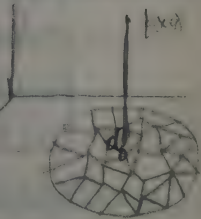


einmal einen Streifen, dann zwei und schließlich wieder nur einen für festes y .
 Wir werden daher folgendermaßen vorgehen:
 Wir wollen durch die gezeichneten
 Tangenten den ganzen Flächeninhalt in
 4 Teile I, II, III, IV zerlegen, von denen jeder
 auf die selben angegebene Art integriert
 werden kann.

Vertauschen wir x mit y bei dieser
 Operation, so kann die Anzahl der Teil-
 bereiche eine sehr verschiedene sein. In dem
 dargestellten Falle wurde das Gesamt-
 bereich gar nicht zerlegt werden.

Definition des Doppelintegrals durch
 Grenzprozess.

Stellen wir uns jetzt auf einen allge-
 meinere Standpunkt, so wollen wir einmal
 die gegebene Fläche in der x - y -Ebene mit
 lauter kleinen Flächen-elementen
 von beliebiger Gestalt, Dreiecken,
 Vierecken etc. bedeckt denken.
 Ein beliebiges sei $d\sigma$.



Errichten wir nun in irgend einem Punkte desselben eine senkrechte von der Höhe $f(x, y)$, so haben wir als Inhalt des entstehenden kleinen Cylinders mit Annäherung: $d_0 f(x, y)$.
Jetzt bilden wir

$$\sum d_0 f(x, y)$$

und nehmen hiervon den Limes für $d_0 = 0$; und zwar sollen dabei alle Dimensionen des d_0 kleiner und kleiner werden. Diesen Limes bezeichnen wir mit:

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \sum f(x, y) d_0 = \iint f(x, y) dx dy = \iint_{d_0} f(x, y) d_0$$

und gewonnen folgenden Satz:

Wir definieren das Doppelintegral von $f(x, y)$ genommen über einen ebenen Bereich, als den Limes, dem die Summe $\sum f(x, y) \cdot d_0$ zustrebt, wenn man die d_0 unbegrenzt zahlreicher und kleiner werden lässt, so zwar, dass in der Grenze nicht nur der Flächeninhalt von d_0 , sondern alle Dimensionen Null werden.

Während es nur zur ersten Orientierung genügen mag, die Existenz eines Limes daraus

zu entnehmen, dass es sich eben um die Berechnung eines Cubikinhaltes eines gegebenen Raumbstückes handelt, so wird man von einem höheren Standpunkte aus die Existenz eines solchen Limes arithmetisch begründen und den Cubikinhalt unseres Raumbstückes geradezu durch den Limes erklären. Wir wollen hierzu ein Beispiel nehmen, und zwar wollen wir den Cubikinhalt der Halbkugel bestimmen. Da hierbei $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ist, so liegt uns folgendes Doppelintegral vor:

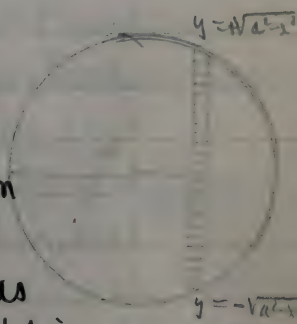
$$\iint \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

welches über die Kreisfläche zu erstrecken ist. Wir wollen zunächst längs des schraffierten Streifens parallel zur y -axe integrieren. Dabei ist also das Wesentliche, die Grenzen richtig zu wählen. Dieselben sind für festgehaltenes x :

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ und } y = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Wir haben somit:

$$\iint = \int dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} \, dy = \frac{1}{2} \int dx [y \sqrt{a^2-x^2-y^2} + (a^2-x^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}]$$



$$\therefore \iint = \frac{\pi}{2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx = \frac{2\pi}{3} a^3$$

Noch einmal das exakte Differential.

Benutzen wir jetzt das Doppelintegral um die Theorie des exakten Differentials zum Abschluss zu bringen. Wir fanden:

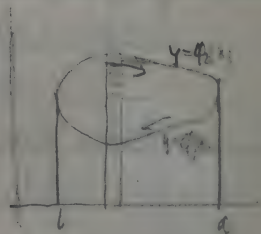
Wenn ein Ausdruck $M dx + N dy$ ein exaktes Diff. sein sollte so müsste sein:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Betrachten wir jetzt einmal den Ausdruck:

$$\iint \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx dy$$

wobei die Integration über eine Fläche ausgedehnt werden soll, welche durch eine geschlossene Curve begrenzt ist, die keinen Unendlichkeitspunkt einschließt.



Wir wollen mit dem Doppelintegral eine Umformung vornehmen und die beiden Bestandteile desselben einzeln behandeln.

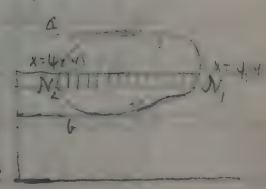
Wir haben dann

$$\iint \frac{\partial M}{\partial y} dx dy = \int_b^a dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy = \int_b^a (M_1 - M_2) dx$$

Dieses Integral wollen wir noch etwas umformen.
 Wir haben doch für alle oberen Kurvenpunkte die Stückchen $N_1 dx$ aneinanderschieben und zwar von links nach rechts gehend. Das gleiche haben wir dann für alle unteren Punkte, von links nach rechts gehend, alle Stückchen $N_2 dx$ zusammenschieben und mit negativem Vorzeichen zu versehen; d.h. aber einfach, mit positivem Vorzeichen von rechts nach links zu gehen. Dadurch verwandelt sich der erste Bestandteil unseres Doppelintegrals in das Integral $\int N dx$, um die Begrenzung im Sinne des Uhrzeigers einmal herumgenommen.

Jetzt kommen wir zum zweiten Bestandteile:

$$\int dy \int -\frac{\partial N}{\partial x} dx$$



Auf ähnliche Weise werden wir für dieses Integral bekommen:

$$\int_c^d dy \int_a^b \left(-\frac{\partial N}{\partial x} dx\right) = \int_a^b (-N_1 + N_2) dy$$

Dieses Integral ist gleich $\int N dy$ genommen entlang der Contour wieder im Sinne des Uhrzeigers.
 Es ist also unser gesamtes Doppelintegral

$$\iint \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx dy = \int (M dx + N dy)$$

das Integral rechts geführt längs der Contour im Sinne des Uhrzeigers.

Damit haben wir nun eine Fundamentalformel bewiesen, welche unsere früheren geometrischen Betrachtungen über die Differentiale bestätigt:

Im Falle eines exakten Differential, also wenn $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ ist, liefert die Integration bei einem Kreisproceß immer den Betrag Null, sofern kein singulärer Punkt eingeschlossen ist.

Jetzt erkennen wir aus unserer Formel, dass das Integral $\int (M dx + N dy)$ hingeleitet längs einer Contour, die keinen singulären Punkt einschließt, tatsächlich Null ist im Falle eines exakten Differential. Ist jedoch $M dx + N dy$ kein solches exaktes Diff., so wird der Betrag des an einer Contour entlang geleiteten Integral durch das im Allgemeinen nicht verschwindende Doppelintegral

$$\iint \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx dy \text{ gemessen.}$$

Rauminhalt in Polarkoordinaten.

In der allgemeinen Fassung

$$\iiint f \cdot dV = \lim \Sigma f \cdot dV$$

ist es begründet, dass wir auch zum Polarkoordinaten System übergehen können. Wir wollen dabei beachten, dass wir auch jetzt bei der Operation mit Polarkoordinaten Exekutive anwenden.

Es ist hier $dV = r \, dr \, d\varphi$ und unser Integral wird

$$\iint F(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi$$

wo $F(r, \varphi) = f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Beispiele:

1. Halbkugel: Hier ist $z = F(r, \varphi) = \sqrt{a^2 - r^2}$.

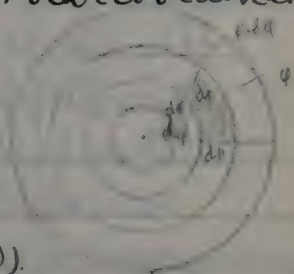
Wir bekommen also

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - r^2} r \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \, dr = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

2. Es ist

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \\ &= \pi [-e^{-r^2}]_0^{\infty} = \pi \end{aligned}$$

$$\therefore I = \sqrt{\pi}$$



Unendlichwerden der Grenzen oder des Integranden.
Unter einem Doppelintegral mit unendlichen
Grenzen verstehen wir den Limes, dem ein
Doppelintegral, erstreckt über endliche
Grenzen, eventuell zustrebt, wenn man diese
Grenzen mehr und mehr hinauschiebt.
Liegt im Integrationsgebiet (z. B. im Anfangspunkt)
ein Unendlichkeitspunkt, so werden wir
dem Doppelintegral denjenigen Wert als
Limes beilegen, den man

eventuell als Limes erhält,
wenn man den Unstetig-
keitspunkt aus dem Integrat-
ionsgebiete ausschließt und erst nach
vollendeter Integration die Öffnung auf
den Punkt 0 zusammenschiebt.



Bei den Doppelintegralen mit einer
Unendlichkeitsstelle im Integrationsgebiete
gibt es eine besonders einfache Klasse, das
sind diejenigen, bei denen der Integrand
multipliziert mit r bei $r=0$ endlich bleibt.
Führt man Polarkoordinaten ein, so
verschwindet sofort alles Unendlichwerden

und daher die Notwendigkeit irgend welcher besonderen Definition.

Es gibt aber auch noch andere Fälle bei denen ein Limes vorhanden ist. Nehmen wir an, es sei $|f| < \frac{k}{r^n}$, wo $n < 2$ und k eine Constante. Dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \left| \int_p^R \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \right| &< \int_p^R \int_0^{2\pi} \frac{k}{r^{n-1}} dr d\varphi \\ &< \frac{k R^{2-n}}{2-n} \quad \text{für } p=0. \end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber für $n < 2$ endlich.

Hieraus ergibt sich folgender Satz:

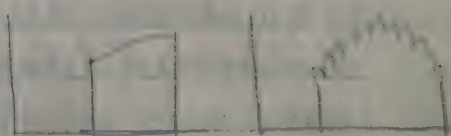
Das Doppelintegral hat auch dann immer einen endlichen Wert, wenn der absolute Betrag von $f(\quad)$ in der Nähe der Unstetigkeitsstelle kleiner ist als $\frac{k}{r^n}$, wobei k eine Constante und unter n eine Zahl < 2 verstanden.

Allerlei Anwendungen der mehrfachen Integrale

- 1) $\iint f(x, y) dx dy =$ Cubikinhalt
- 2) $\iint f(x, y) dx dy =$ Gesamtmasse wenn $f(x, y) =$ Dichtefunction
- 3) $\iint dx dy =$ Flächeninhalt eines ebenen Gebietes.

Die letzte Formel ist die eigentliche Definition des Flächeninhalts, dabei $\int f(x) dx$, $y = f(x)$ eindeutig sein musste:

Der Flächeninhalt einer ebenen Figur wird in allgemeiner



Weise gefasst, wenn wir sagen, es ist der Limes der kleinen, in demselben einschreibbaren Flächenstücken dv unter Annahme, dass die Zahl derselben immer grösser und grösser und ihre Dimensionen immer kleiner und kleiner werden.

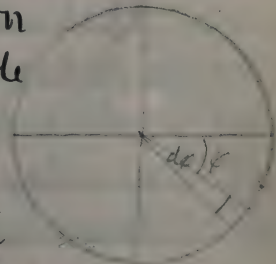
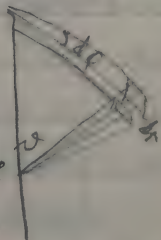
Dieser Definition durch das Doppelintegral sind die früheren Definitionen durch die einfachen Integrale $\int y dx$ und $\int \frac{1}{2} r^2 d\varphi$ als spezielle Fälle untergeordnet.

Analog dem früheren müssen Rauminhalte durch \iiint definiert werden.

Bei rechtwinkligen Coordinaten kann man bei dem $\iiint dx dy dz$ die Integration zunächst nach z ausführen, und erhält dadurch $\iint [z] dx dy$ wo nun $[z]$ als Function von x und y gilt, so wie es durch die

begrenzende Fläche des Rauminhalts vorgeschrieben ist.

Verwenden wir Polarkoordinaten im Raume, so gehen wir folgendermassen vor: Wir legen zunächst durch den Anfangspunkt o eine Achse und messen von dieser Achse aus einen Neigungswinkel ϑ , den sogenannten Polarabstand. Dieser Winkel ϑ kann in irgend einer Ebene des Halbmeridians liegen, welche um den Winkel φ , die sogenannte geographische Länge, gegen die Papierebene geneigt ist, wie es durch die Aufsicht der ersten Fig. wohl deutlich wird. ϑ läuft von 0 bis π , φ von 0 bis 2π und als dritte Variable tritt noch r hinzu die Entfernung eines Punktes von o . So haben wir die drei räumlichen Polarkoordinaten: r, ϑ, φ . Sei uns hierdurch ein beliebiger Raumpunkt gegeben und lassen wir φ sich jetzt um $d\varphi$ ändern, während r und ϑ fest



bleiben, so wird das zu $d\varphi$ gehörige Bogenelement, das auf dem Kreise mit dem Radius $r \sin \vartheta$ liegt, die Länge $r \sin \vartheta d\varphi$ haben.
etc etc etc

Wir bilden so ein Parallelepiped von dem Inhalte $r \sin \vartheta d\varphi \cdot r d\vartheta \cdot dr = r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr$.

Der Rauminhalt stellt sich daher in Polarkoordinaten dar als:

$$\iiint r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr \\ = \iiint \left[\frac{r^3}{3} \right] \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr$$

Für die Kugel von Radius a wird daher der Inhalt gleich

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = 2\pi \cdot [-\cos \vartheta]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a^3$$

Ueber den Inhalt krummer Oberflächen.
Analog der Bogenlänge-Definition, construieren wir uns Dreieckspolyeder aus lauter kleinen geradlinigen Dreiecken, deren Ecken alle auf dem Polyeder liegen und bilden dann den Limes!

Alsdann ist die Frage:

Ist es wahr, dass der Oberflächeninhalt einer krummen Fläche schlechtweg definiert

werden kann als der Limes der Oberfläche eines solchen in die Fläche eingeschriebenen Polyeders? Dabei ist der Limes so zu verstehen, dass alle Dimensionen kleiner und kleiner werden.

Aus der Hand der Modelle bekommen wir die Antwort: So formuliert ist die Frage zu verneinen; denn ein eingeschriebenes Polyeder hat überhaupt keinen bestimmten Grenzwert als Flächeninhalt, es sei denn, dass man festsetzt unter welchem Winkel die kleinen Dreiecke in der Grenze gebildet werden sollen.

Die exakte Definition des Oberflächeninhalts ist daher folgende:

Der Oberflächeninhalt einer krummen Fläche ist die Grenze, der die Oberfläche eines eingeschriebenen Polyeders zustrebt, wenn man dafür sorgt, dass beim Kleinerwerden der Dreiecke die Dreiecksebenen immer mehr mit den Tangentialebenen der Fläche zusammenfallen.

Dass man bei der Bogenlänge schlechtweg

mit dem einfachen Grenzübergang auskommt
riht daher, dass bei der Curve eine Sekante
von selbst in eine Tangente übergeht.

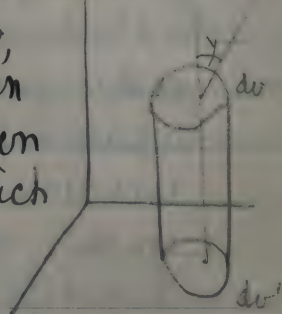
Wenn man aber bei einer Fläche durch
3 Punkte eine Ebene legt und dann diese
3 Punkte zusammenrücken lässt, dann
braucht die Ebene noch nicht eine
Tangential-ebene zu werden vielmehr
kann jede Ebene, welche die Fläche in
einer Curve schneidet, auf die genannte
Weise erreicht werden. Diese wichtigen
Bemerkungen stammen von Prof. Schwarz.

Im Anschluss an diese geometrischen
Betrachtungen wollen wir jetzt auch
analytisch die Oberfläche definieren.

Wir grenzen uns in der x, y -Ebene

ein Flächenelement dw ab,
und errichten auf demselben
einen Cylinder. Jetzt greifen
wir aus dem kleinen Bereich
 dw einen beliebigen Punkt
heraus und bezeichnen

den zugehörigen Raumpunkt mit x, y, z .



Unser Cylinder soll nun nach oben durch die zu diesem Punkte gehörige Tangentialebene begrenzt sein und zwar durch das Flächenelement dv . Ist γ der Winkel den die Normale zu dv mit der z-Achse bildet, so haben wir: $dv' = dv \cos \gamma$.

Die Gl. der Tangentialebene ist gegeben durch:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0) = 0$$

und wir erhalten die Cosinus der Winkel den die Normale mit den drei Koordinatenachsen bildet aus den Gleichungen:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} ; \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Hiernach ist

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

Das Element der krummen Oberfläche wird also:

$$dv = \frac{dv'}{\cos \gamma} = \frac{dv' \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Also ist die Oberfläche selbst gleich

$$v = \iint dv = \iint dv' \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Dies ist das analytische Resultat zur Bestimmung der Oberfläche einer krummen Fläche $f(x, y, z) = 0$.

Als Beispiel nehmen wir wieder die Oberfläche der Halbkugel. Dann ist $\cos \varphi = \frac{z}{a}$ also

$$O = \iint \frac{a}{z} r \, dr \, d\varphi = \iint \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr \, d\varphi$$

Setzen wir die Grenzen ein, so bekommen wir:

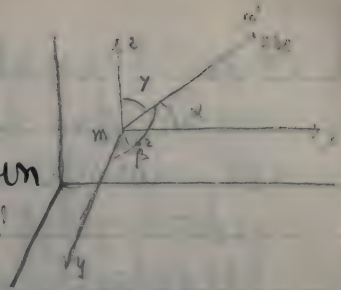
$$O = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{ar \, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi a^2.$$

Einleitung in die Potentialtheorie.

Die Potentialtheorie als solche ist eine eigene Disciplin, über welche besondere Vorlesungen gehalten worden. Wir wollen im Folgenden nur die erste Grundlage dazu geben, wobei Entwicklungen in Betracht kommen die unmittelbar mit unseren Integraluntersuchungen zusammenhängen.

Bei dem Newton'schen Massenanziehungsgesetz ziehen sich bekanntlich zwei Massen m und m' mit einer Kraft an, welche gleich $\frac{mm'}{r^2}$ ist.

Wir legen ein rechtwinkliges
 Koordinatensystem zu Grunde
 und bezeichnen die Coordinaten
 von m mit x, y, z und die von m'
 mit a, b, c . Die Componenten



der auf m wirkenden Anziehungskraft
 in Richtung der drei Coordinatenachsen
 werden dann sein, wenn α, β, γ die
 bezüglichen Richtungswinkel der Kraft sind:

$$X = \frac{m m'}{r^2} \cos \alpha = \frac{m m'}{r^2} \frac{a-x}{r}$$

$$Y = \frac{m m'}{r^2} \cos \beta = \frac{m m'}{r^2} \frac{b-y}{r}$$

$$Z = \frac{m m'}{r^2} \cos \gamma = \frac{m m'}{r^2} \frac{c-z}{r}$$

Die Potentialtheorie nimmt nun ihren
 Anfang darin, dass diese Kraftcomponenten
 X, Y, Z als partielle Differentialquotienten
 einer Funktion $V(x, y, z)$ erscheinen, wo

$$V(x, y, z) = \frac{m m'}{r} = \frac{m m'}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

ist. Denn bilden wir die partiellen
 Ableitungen von V , so erhalten wir:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{m m' (a-x)}{r^3} = X, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \dots = Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \dots = Z.$$

Diese Funktion $V(x, y, z)$, welche gewissermaßen die erzeugende Funktion der Kräfte ist, nennt man früher die Kräftefunktion, jedoch jetzt nach Gauss's Vorschlag allgemein - das Potential (der Masse m' in Bezug auf die Masse m).

Man könnte sich folgendermaßen dem Namen "Potential" erklären: Wirken auf einen Massenpunkt die Kräfte X, Y, Z , so ist die Arbeit A , welche von diesen Kräften bei Verschiebung des Massenpunktes geleistet wird:

$$A = \int (X dx + Y dy + Z dz)$$

und setzen wir für X, Y, Z die gefundenen Werte ein, so erhalten wir die Arbeit in der Form:

$$A = \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right).$$

Da der Ausdruck unter dem Integralzeichen einfach das exakte Differential von V ist, so erhalten wir, indem wir die Integration auf einem beliebigen Wege zwischen dem Anfangspunkte x', y', z' und dem Endpunkte x, y, z ausführen als Resultat:

$$A = U(x, y, z) - U(x', y', z')$$

Lassen wir x', y', z' unendlich weit hinausrücken, so wird $U(x', y', z') = \frac{mm'}{r^2} = 0$ und wir behalten nur $A = U(x, y, z)$.

Hieraus gewinnen wir den Satz:

Das Potential $U(x, y, z)$ bedeutet diejenige Arbeit, welche die Anziehungskraft auf den Punkt x, y, z (für $m=1$) beim Newton'schen Gesetz leistet, wenn der Punkt x, y, z von unendlich kommend in die Lage x, y, z übergeführt wird.

Das Wort Potential bedeutet eben, dass man aus der Newton'schen Anziehung möglicherweise die Arbeit U hätte gewinnen können, indem man den Punkt m aus dem Unendlichen unter dem Einfluss der anziehenden Kraft in die Lage x, y, z übergehen lässt.

Man bekommt nun aus den zweiten Differentialquotienten eine merkwürdige Relation: Es ist:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = mm' \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(a-x)^2}{r^5} \right), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = mm' \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(b-y)^2}{r^5} \right), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = mm' \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(c-z)^2}{r^5} \right)$$

Addieren wir, so erhalten wir:

$$\frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial y^2} + \frac{\partial W}{\partial z^2} = 0$$

Jetzt wollen wir im folgenden auch die Integralrechnung anwenden: wir wollen der Einfachheit halber im Punkte x, y, z die Masse 1 annehmen; m aber sei jetzt ein räumlich ausgedehnte Masse und es soll nun berechnet werden, welche Anziehung dieser Massenkörper auf den Massenpunkt 1 ausübt. In einem beliebigen Punkte abc des Körpers sei die Dichte $\rho(a, b, c)$, und nun zerlegen wir uns den ganzen Körper in lauter Körperelemente dx , so dass wir in einem solchen dx die Masse $\rho(a, b, c) \cdot dx$ haben. Daher ist das Elementarpotential, welches das Massenelement auf den Punkt x, y, z ausübt, gleich

$$\frac{\rho(a, b, c) \cdot dx}{r}$$

und das Potential des dreifach ausgedehnten Körpers in Bezug auf den Punkt x, y, z ist:

$$U(x, y, z) = \iiint \frac{\rho(a, b, c) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

Wir sehen: Das Potential des dreifach

ausgedehnten Körpers erscheint als ein über den Körper genommenes dreifaches Integral, in welchem die Coordinaten x, y, z des angezogenen Punktes als Parameter auftreten.

Indem wir zunächst x, y, z ausserhalb des anziehenden Körpers nehmen, ist der Integrand eine durchaus endliche stetige Funktion von x, y, z und wir dürfen $V(x, y, z)$ nach x, y, z differenzieren, indem wir unter dem Integralzeichen differenzieren. Wir werden daher erhalten:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint \frac{\rho(a, b, c)(a-x)}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2 + (z-c)^2}} da db dc$$

$$\frac{\partial V}{\partial x^2} = \iiint [\rho(a, b, c) da db dc \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(a-x)^2}{r^5} \right)].$$

Wir sehen daraus: der erste Differentialquotient $\frac{\partial V}{\partial x}$ bedeutet nach wie vor X , d. h. die Summe aller der x -Componenten, welche seitens der Elemente des Körpers auf unsern Punkt x, y, z ausgeübt werden. Also:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Im vorliegenden Falle ist daher $V(x, y, z)$

wieder die Kräftefunktion, oder das Potential, welches die räumlich ausgedehnte Masse m' auf unsern Punkt x, y, z ausübt. Dabei genügt $U(x, y, z)$ noch wie vor der charakteristischen Diff. Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Es bleibt nun zu untersuchen:

1) ob die aufhebenden Integrale einen Sinn behalten, wenn der angezogene Punkt in das Innere von m' hineinrückt?

2a) ob die Diff. gleichungen

$$x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

bleiben?

2b) ob es ist

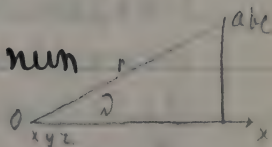
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0?$$

Das Potential im Innern des anziehenden Körpers.

Gehen wir zur ersten Frage über, ob diese drei Integrale einen Sinn behalten, wenn der Punkt x, y, z im Innern des Körpers liegt. In den älteren Lehrbüchern findet man

oft eine oberflächliche Behandlung dieser und der folgenden Frage; exakt ist die Sache bei C. Jordan oder auch bei Picard behandelt worden. Wir nehmen den Punkt x, y, z zum Anfangspunkt des Polarkoordinatensystems und die bisherige x -Achse zur Achse des neuen Systems, sodass der Polabstand durch den Winkel α gemessen wird, den die Fig. anzeigt. Dann wird $\frac{a-x}{r} = \cos \alpha$ und für den Elementarkörper $da db dc$ haben wir bei Polarkoordinaten zu setzen: $r^2 \sin \alpha dr d\alpha d\varphi$.

Dadurch verwandeln sich nun unsere Integrale in:



$$V = \iiint \rho r \sin \alpha dr d\alpha d\varphi.$$

$$X = \iiint \rho \cos \alpha \sin \alpha dr d\alpha d\varphi.$$

$$Z = \iiint \frac{\rho}{r} (-1 + 3 \cos^2 \alpha) \sin \alpha dr d\alpha d\varphi.$$

Haben nun diese Integrale einen Sinn? Wir sehen V und X verlieren ihre Unstetigkeiten, da gerade hier der neulich erwähnte günstige Umstand auftritt. Wir können daher den Satz aussprechen.

Die Integrale V und X behalten auch im

Innern des Körpers eine völlig klare, bestimmte Bedeutung: mit dem \mathcal{L} aber ist gar nichts anzufangen, da der Integrand für $r=0$ in unzulässiger Weise unendlich wird und zwar je nach dem Werte von ν positiv oder negativ. \mathcal{L} müssen wir daher in der Folge ganz beiseite lassen.

Gehen wir jetzt zu z d. h. Gilt die Gl. $X = \frac{\nu}{x}$, wenn x, y, z im Innern des Körpers liegen? Wir sehen nun:

Trotzdem x und ν beide im Innern des Körpers eine bestimmte Bedeutung haben, können wir nicht ohne weiteres sagen, dass im Innern des Körpers $x = \frac{\nu}{x}$ ist; denn es fehlt die Berechtigung, das ν unter dem Integralzeichen nach dem Parameter x zu differenzieren, weil ein solches nur dann unbedenklich ist, wenn der Integrand eine stetige Funktion ist; hier aber wird er für $x=0$ d. h. $z=0$ unendlich. Da müssen wir also ganz prinzipiell auf die Bedeutung des Diff. Quotienten zurückgehen: vorher machen wir noch folgende

Verabredung: Wir legen irgend eine Kugel um den Punkt x, y, z herum, die ganz im Innern des Körpers verläuft. Dann wird sich unser Potential V spalten lassen in V' von der Kugel allein herrührend, und in V'' , von der übrigen Masse herrührend. Das V'' macht dabei gar keine Schwierigkeiten und wir beschränken uns allein auf V' , das Potential einer Kugel mit Radius R .

Schreiben wir uns jetzt $V(x, y, z)$ einmal ausführlich hin, so haben wir:

$$V(x, y, z) = \iiint \frac{\rho(a, b, c) da db dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

genommen über die Kugel mit dem Radius R .

Lassen wir nun x wachsen um Δ , so wird:

$$V(x + \Delta x, y, z) = \iiint \frac{\rho(a, b, c) da db dc}{\sqrt{(x + \Delta x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}}$$

ebenfalls über die Kugel genommen.

Integrieren wir hier nun zunächst nach a , dann nach b , dann nach c , so wird aus:

$$V(x, y, z) = \int_{-R}^{+R} dc \int_{-\sqrt{R^2 - c^2}}^{+\sqrt{R^2 - c^2}} db \left[\int_{-\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}}^{+\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}} \frac{\rho(a, b, c) da}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \right]$$

$$V(x+\Delta x, y, z) =$$

Jetzt wenden wir einen Kunstgriff an, der eben beim Potential möglich ist, indem es sich hierbei nur um die relative Lage der beiden Massen zu einander handelt. Steht nämlich x zu verändern, ändern wir a , indem wir setzen $a - \Delta = a'$.

Dadurch erhalten wir

$$V(x+\Delta x, y, z) = \int_{-R}^{+R} da \int_{-R}^{+R} db \left[\int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{\sqrt{R^2-b^2-c^2}} \frac{\rho(a'+\Delta, b, c) da'}{\sqrt{(x-a')^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \right]$$

Das Integral in der Klammer können wir nun so zerlegen, dass wir das mit den früheren Grenzen behaftete vorausnehmen also:

$$\left[\right] = \left[\int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}} \frac{\rho(a'+\Delta, b, c) da'}{\sqrt{(x-a')^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \right]^{\text{I}} + \left[\int_{\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}-\Delta} \frac{\rho(a'+\Delta, b, c) da'}{\sqrt{(x-a')^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \right]^{\text{II}} - \left[\int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}-\Delta} \frac{\rho(a'+\Delta, b, c) da'}{\sqrt{(x-a')^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \right]^{\text{III}}$$

Diese 3 Integrale wollen wir nun einzeln abschätzen, unter der Annahme, dass Δ eine verschwindend kleine Grösse wird. Wir werden zu dem Zwecke unser ρ in eine Taylor'sche Reihe

entwickeln, indem wir annehmen, dass ρ einen bestimmten endlichen Diff. Quotienten $\frac{\partial \rho}{\partial a}$ hat. Die Glieder höherer Ordnung werfen wir von vornherein weg, da sie später beim Grenzübergang doch wegfallen. Wir erhalten:

$$\rho(a'+\Delta, b, c) = \rho(a' b' c') + \Delta \frac{\partial \rho(a' b' c')}{\partial a'}$$

und behandeln den Ausdruck I nach diesem Ansatz. Derselbe wird daher:

$$\int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}} \frac{\rho(a' b' c') \cdot da'}{r} + \Delta \int_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a'} da'$$

Da wird nun das erste Integral durch weitere Integration nach b und c zu $V(x, y, z)$ und wir gewinnen somit die Gl.

$$V(x+\Delta, y, z) - V(x, y, z) = \Delta \iiint_{-\sqrt{R^2-b^2-c^2}}^{+\sqrt{R^2-b^2-c^2}} \frac{\partial \rho}{\partial a'} da' db dc + \iint \text{II} - \iint \text{III}$$

Der Grundgedanke bei diesem ganzen Vorgehen ist, dass man die Änderung des x auf die Änderung des a wirft.

Schreiben wir auch die beiden letzten Bestandteile ausführlich hin, so liefern dieselben

$$\int da \int db \left[\int_{\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}}^{\sqrt{R^2 - b^2 - c^2} + \Delta} \frac{\rho(a + \Delta, b, c)}{r} da - \int_{-\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}}^{-\sqrt{R^2 - b^2 - c^2} - \Delta} \frac{\rho(a + \Delta, b, c)}{r} da \right]$$

wo wir den Accent beim a der Kürze halber fortgelassen haben.

Beide Integrale können wir nach dem Mittelwertsatz abschätzen, und finden dadurch, dass im Intervall Δ für immer kleiner werdende Δ das Integral $\int_{\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}}^{\sqrt{R^2 - b^2 - c^2} + \Delta} \frac{\rho(a + \Delta, b, c)}{r} da$ bis auf kleine Größen höherer Ordnung gleich $-\frac{\Delta \rho(\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}, b, c)}{r}$ ist.

Ganz entsprechend wird das Integral $\int_{-\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}}^{-\sqrt{R^2 - b^2 - c^2} - \Delta} \frac{\rho(a + \Delta, b, c)}{r} da$ zu $-\frac{\Delta \rho(-\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}, b, c)}{r}$ wo natürlich auch in $\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}$ für a $\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}$ bzw. $-\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}$ einzutragen ist. Also haben wir:

$$V(x + \Delta, y, z) - V(x, y, z) = \Delta \iiint \frac{\partial \rho}{\partial x} da db dc + \int_{-R}^{+R} dc \int_{-\sqrt{R^2 - c^2}}^{\sqrt{R^2 - c^2}} db \left[-\frac{\rho(\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}, b, c)}{r} + \frac{\rho(-\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}, b, c)}{r} \right]$$

wobei das dreifache Integral über eine Kugel vom Radius R genommen werden soll.

Wir werden zweckmässiger Weise das Oberflächenelement der Kugel einführen, also rechter Hand statt $db \cdot dc = -ds \cos \alpha$ setzen und linker Hand $ds \cos \alpha$ an Stelle von $db \cdot dc$; unter α den Winkel verstanden, welchen die nach aussen errichtete Normale der Kugel mit der x -Achse bildet. Dadurch gestaltet sich das Doppelintegral um in $-\Delta \iint \frac{\rho \cos \alpha}{r} ds$, genommen über die Oberfläche der Kugel vom Radius R . Wir haben daher folgende Gleichung:

$$V(x+\Delta, y, z) - V(x, y, z) = \Delta \iiint \frac{\partial \rho}{\partial x} dabbdc - \Delta \iint \frac{\rho \cos \alpha}{r} ds$$

Dividieren wir rechts und links durch Δ , so erhalten wir beim Grenzübergang:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint \frac{\partial \rho}{\partial x} dabbdc - \iint \frac{\rho \cos \alpha}{r} ds$$

Dies Resultat werden wir so aussprechen: Hiermit ist gezeigt, dass $\frac{\partial V}{\partial x}$ auch im Innern des Körpers eine wohlbestimmte Funktion ist.

Jetzt vergleichen wir das $\frac{\partial V}{\partial x}$ mit unserem X ,
welches gleich war:

$$X = \iiint_{r^3} (a-x) \rho \, da \, db \, dc$$

genommen über die Kugel vom Radius R .
Noch wollen wir vorher noch diesen Ausdruck
umformen, indem wir den Integranden
als Diff. Quotienten nach a schreiben:

$$X = \iiint -\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \rho \, da \, db \, dc.$$

Daraus finden wir durch partielle
Integration:

$$\begin{aligned} X &= -\iiint \frac{1}{r} \rho \, da \, db \, dc + \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a} \, da \, db \, dc \\ &= \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a} \, da \, db \, dc - \iiint \frac{\rho \cos \alpha}{r} \, ds \end{aligned}$$

Das ist aber genau der Wert, den wir eben
für $\frac{\partial V}{\partial x}$ fanden.

Zusammenfassend gewinnen wir daher
den Satz: Im Innern des Körpers können
wir nicht ohne weiteres $\frac{\partial V}{\partial x} = X$ setzen, weil
es nicht ohne weiteres angeht, dass wir
unser dreifaches Integral V nach dem
Parameter x unter dem Integralzeichen
differenzieren.

Trotzdem zeigt sich, dass $\frac{\partial U}{\partial x}$ wirklich gleich x ist, weil wir beide $\frac{\partial U}{\partial x}$ und das x so umgestalten können, dass wir direkt gleiche Werte erhalten.

Hieraus werden wir also folgende zwei Folgerungen schließen: Wir werden sagen:

$$1) \quad x = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial x} da db dc - \iint_S \frac{\rho}{r^3} \cos \nu ds$$

2) Man kann nach x differenzieren indem man unter dem Integralzeichen differenziert, also für $U = \iiint_V \frac{\rho}{r^3} da db dc$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{a-x}{r^3} da db dc.$$

Jetzt wollen wir im Anschluss an I $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$ bilden: Ja auf das dreifache Integral $\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{a-x}{r^3} da db dc$ können wir direkt unsere eben genannte Regel 2) in Anwendung bringen; und beim zweiten Ausdruck ist die Differentiation unter dem Integralzeichen ja ohne weiteres gestattet. Daher bekommen wir:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{a-x}{r^3} da db dc - \iint_S \frac{\rho(a-x) \cos \nu}{r^3} ds.$$

Ferner erhalten wir:

$$\Delta U = \frac{\partial W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial y^2} + \frac{\partial W}{\partial z^2} = \iiint \frac{(a-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b-y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (c-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}}{r^3} \, da \, db \, dc$$
$$- \iiint \frac{\rho}{r^3} [(a-x)\cos\alpha + (b-y)\cos\beta + (c-z)\cos\gamma] \, da \, db \, dc$$

Dadurch haben wir ΔU in bestimmter Form gebracht, und nun wollen wir noch das dreifache und das zweifache Integral auswerten:

Zu dem Zwecke legen wir uns jetzt den Punkt x, y, z nach vollendeter Differentiation bequem und zwar in den Mittelpunkt der Kugel hinein, wodurch für die Oberfläche der Kugel $r=R$ wird.

Außerdem führen wir noch Polarkoordinaten ein, wobei die Beziehungen gelten:

$$a = x + r \cos \alpha, \quad b = y + r \sin \alpha \cos \varphi, \quad c = z + r \sin \alpha \sin \varphi$$

Ferner

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} = \cos \alpha = \frac{a-x}{r}, \quad \frac{\partial b}{\partial r} = \sin \alpha \cos \varphi = \frac{b-y}{r}, \quad \frac{\partial c}{\partial r} = \sin \alpha \sin \varphi = \frac{c-z}{r}$$

Für $x=y=z=0$ gilt also:

$$\rho(a,b,c) = \rho(r \cos \alpha, r \sin \alpha \cos \varphi, r \sin \alpha \sin \varphi)$$

Ferner ist:

$$\frac{(a-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b-y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (c-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}}{r} = \frac{\partial \rho}{\partial a} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r}$$

Folglich geht unser dreifaches Integral über in:

$$\iiint \frac{\partial f}{\partial r} \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

Was aber das Doppelintegral anbelangt, so haben wir:

$$\frac{(a-x)\cos\alpha + (b-y)\cos\beta + (c-z)\cos\gamma}{r} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

Also verwandelt sich dasselbe in:

$$-\iint \rho \frac{R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{r^2 = R^2} = -\iint \rho \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Führen wir noch beim \iiint die Integration nach r aus, so gewinnen wir die einfache Gleichung:

$$\Delta U = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho)_0^R \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho)_R \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

wobei mit R ein Punkt der Kugeloberfläche, mit 0 ihr Mittelpunkt bezeichnet ist. Also ist:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho)_0 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho)_R \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ &\quad - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho)_R \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= -\rho(x, y, z) \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= -4\pi \cdot \rho(x, y, z). \end{aligned}$$

Wir haben daher das Resultat gewonnen:

Auch im Innern unseres Körpers hat das Potential V wohlbestimmte zweite Diff. quotienten. Und zwar ist deren Summe:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

nicht mehr 0, wie ausserhalb des Körpers, sondern hat den Wert $-4\pi\rho$, unter ρ die Dichte verstanden, welche an der Stelle x, y, z herrscht.

— Ende —

Einleitung in die Theorie der
Differentialgleichungen.

Vorlesungen von Prof. Dr. Felix Klein.

Sommer-Semester 1897

Ausarbeitung von A. Hauck nach der
Ausarbeitung des Assistenten Weber.

Capitel I.

3

Diff. Gleichungen 1ter Ordnung zwischen 2 Veränderlichen.

A. Geometrische Auffassung.

1. Erste Grundlegung.

§1. Die allgemeine Bedeutung von $\Omega(x, y, y') = 0$.

Aus $\Omega(y', y, x) = 0$ folgt
 $y' = F(x, y)$

gesucht wird

$$y = \eta(x)$$

Schreiben wir

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

wo x und y Functionen von x und y sind, d.h. aber nichts anderns:

Die Diff. Gl. $\Omega(y', y, x) = 0$

ordnet jedem Punkte x, y

eine von dem Punkte auslaufende oder durch den Punkt durchlaufende Richtung zu.

Somit ist das Integrationsproblem der $\Omega(y', y, x) = 0$: Es wird verlangt, alle Curven

$y = \eta(x)$ zu finden, welche in jedem ihrer Punkte die gleiche Richtung mit der durch die

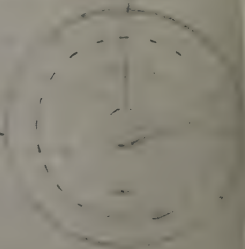
Diff. Gl. gegebenen Richtung haben.

Beispiel 1. $y' = 1$ also $y = x + \text{const.}$

Die Integralcurven sind hier die Schar paralleler gerader Linien, die unter 45° gegen die Horizontalen geneigt sind.

45°

Beispiel 2. $y' = -\frac{x}{y}$ $x dx + y dy = 0$
 $\therefore x^2 + y^2 = c^2$



§2. Praktische Beispiele.

Eine analoge Aufgabe ist es bei einem magnetischen Felde, für welches man an jeder einzelnen Raumstelle die Richtung der magnetischen Kraft kennt, die Kraftlinien zu construieren, indem man die einzelnen durch die Kraftverteilung gegebenen Bogenelemente aneinanderrückt.

Wir sehen dass durch Auftragen einer Constanten es einfach unendlich viele Curven giebt.

Die Constante enthaltende Gl. heisst das allgemeine Integral der Diff. Gl. ruft man ein bestimmten Wert für c heraus so heisst die Gl. ein „partikulares Integral der Diff. Gl.“

Es sei nun ein Curvensystem gegeben durch

$$\chi(x, y) = \text{const.}$$

Wir wollen die orthogonalen Trajektorien bestimmen.

Zunächst ist das Gesetz des Fortschreitens entlang der gegebenen Curven in irgend einem Punkte x, y gegeben durch:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy$$

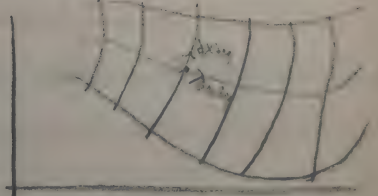
Wenn s_x, s_y die Richtung senkrecht zu dx, dy bedeutet so ist

$$s_x dx + s_y dy = 0$$

$$\therefore s_x : s_y = \frac{\partial \chi}{\partial x} : \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

welches die Diff. Gl. der orthogonalen Trajektorien der Curven $\chi(x, y) = C$ ist.

Sind $\chi(x, y) = C$ die Nivaulinien eines Terrains dann repräsentieren unsere orthogonale Trajektorien die Curven des stärksten Falles.



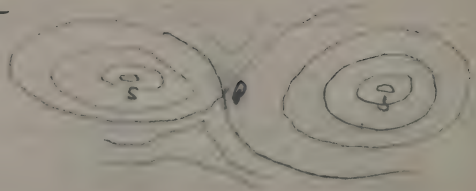
3. Singularitäten bei Curven stärksten Falles.

In einem Scheitelpunkt laufen ∞ viele Integralcurven zusammen; durch einen Kreuzungspunkt (Sattelpunkt) laufen zwei

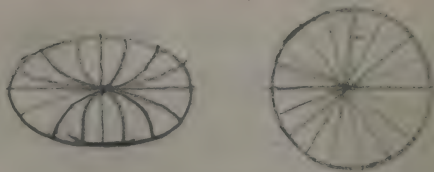
gehörnte Integralcurven.

P ist ein Kreuzungs-
oder Sattelpunkt.

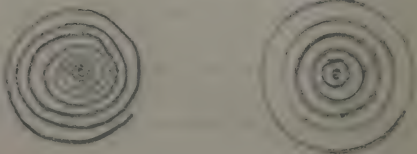
S sind Gipfel oder
Scheitelpunkte.



Einlaufen der Integral-
curve bei einem Gipfel.



Weitere singuläre Stellen
die bei den Diff. Gl'en
1ter Ordnung auftreten



sind Stützpunkte im speziellen Falle Wirbel-
punkte, d.h. Punkte um welche die Integral-
curven entweder als asymptotische Spiralen
herumlaufen oder geradezu geschlossene Cycles
vorstellen, indem im letztem Sonderfall die
Windungen der Spirale immer enger werdend,
schliesslich in sich selbst zurücklaufen.

§ 4. Analytische Entwicklungen hierzu.

Stützen wir die geometrische Betrachtung
durch einfache analytische Entwicklungen.

Wir nehmen an, das Terrain von der Gl.
 $z = z(x, y)$ sei so beschaffen, dass z in der
 Umgebung eines Punktes x_0, y_0, z_0 nach
 dem Taylor'schen Satze entwickelt werden
 kann. Wir haben dann:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \dots \right)$$

oder wenn wir die von Monge eingeführten
 Abkürzungen p, q, r, s, t benützen und
 ersetzen ferner $z - z_0$ durch die endliche
 Differenz Δz , alsdann lautet die
 Gl. der Fläche in der Umgebung von x_0, y_0, z_0

$$\Delta z = p_0 \Delta x + q_0 \Delta y + \frac{1}{2} (r_0 \Delta x^2 + 2s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2) + \dots$$

Beschränken wir uns nur auf die Glieder
 1ter Ordnung, so bekommen wir die in Δx
 und Δy lineare Gl.

$$\Delta z = p_0 \Delta x + q_0 \Delta y$$

und zwar ist dies die Gl. der Tangential-
 ebene in x_0, y_0, z_0 .

Behalten wir auch noch die nicht
 verschwindende Glieder 2ter Ordnung
 bei, so erhalten wir:

$$\Delta z = p_0 \Delta x + q_0 \Delta y + \frac{1}{2} (r_0 \Delta x^2 + 2s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2)$$

Diese Gl. stellt ein (Schwiegungs)paraboloid dar.

Wir werden uns nun gestalten, unsere krumme Fläche in der Umgebung von x_0, y_0, z_0 in 1ter Annäherung durch die Tangentialebene, in 2ter durch ihr Schmiegungsparaboloid in x_0, y_0, z_0 zu ersetzen. Hierin liegt dann die Berechtigung die Horizontalcurven, welche einen Gipfel umgeben in 1ter Annäherung als Ellipsen zu bezeichnen.

Was werden nun die Gipfel und Sattel für Punkte sein? Wir finden: es sind diejenige Punkte, in denen die Tangentialebene horizontal ist, für welche also die Sten

$$p_0 = 0 \quad q_0 = 0$$

erfüllt sind. Zusammenfassend werden wir so sagen: Die Scheitel und Sattelpunkte sind gemeinsam dadurch definiert, dass für sie p_0 und q_0 verschwinden, also für sie die Tangentialebene horizontal ist.

Unsere Formel für das Schmiegungsparaboloid nimmt, wenn x_0, y_0, z_0 ein Scheitel oder Sattel ist, die Form an:

$$\Delta z = \frac{1}{2}(r_0 \Delta x^2 + 2s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2).$$

Nun wollen wir sehen, in welcher Curve die

Fläche von der horizontalen Tangentialebene in x_0, y_0, z_0 geschnitten wird. Indem wir $z = z_0$, also $\Delta z = 0$, setzen, erhalten wir:

$$0 = r_0 \Delta x^2 + 2s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2$$

also eine Curve zweiten Grades, welche in zwei Geraden zerfällt. Daraus folgt:

Der Schnitt der horizontalen Tangentialebene mit unserer Fläche besitzt im Berührungspunkte einen Doppelpunkt, dessen Aeste gegeben sind durch die Gl.

$$r_0 \Delta x^2 + 2s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2 = 0$$

Um die Aeste zu trennen, berechnen wir

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als eine durch eine quadratische Gl. gegebene Unbekannte. Wir bekommen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{s_0}{t_0} \pm \frac{\sqrt{s_0^2 - r_0 t_0}}{t_0}$$

Die Aeste unseres Kegelschnittes werden also:

- 1) imaginär für $s_0^2 - r_0 t_0 < 0$ d. h. der Doppelpunkt ist ein Einseitler: Gipfel.
- 2) reell für $s_0^2 - r_0 t_0 > 0$ d. h. eigentlicher Doppelpkt. Sattel.

3) für $s_0^2 - r_0 t_0 = 0$ fallen die Aeste im Doppelpkt. zusammen. Diesen Fall der Spitze wollen wir

in unseren Betrachtungen ausschließen.
 Was hat dies nun für unsere Diff. Gl. der
 Linien strengsten Falles zu bedeuten?
 Dieselben in die X_4 -Ebene projiziert,
 hatten doch die Diff. Gl.

$$dx : dy = \frac{\partial X}{\partial x} : \frac{\partial X}{\partial y} = p : q.$$

Was nun die Singularitäten anbetrifft,
 so sehen wir, diejenige Punkte unserer
 Diff. Gl. sind singular, für welche $dx : dy = 0 : 0$ ist.
 Diese Angabe ist natürlich nicht hinreichend.
 Entwickeln wir uns daher einmal $z = X(x, y)$
 nach der Taylor'schen Reihe, so haben wir
 in der Nähe von x_0, y_0, z_0

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + \frac{1}{2} \{ r_0(x - x_0)^2 + \dots \} + \dots$$

Differenzieren wir nach x, y so haben wir

$$p = p_0 + r_0(x - x_0) + s_0(y - y_0) + \dots$$

$$q = q_0 + s_0(x - x_0) + t_0(y - y_0) + \dots$$

Wenn nun p_0 und q_0 zu Null werden, so
 bleiben im übrigen die Taylor'schen Reihen
 ungiändert, es verschwinden eben die
 Constanten. Wir haben daher folgenden Satz:
 An unseren singularen Stellen verschwinden

allerdings p und q beide gleichzeitig, doch so, dass sie sich in der Nähe der singulären Stellen in zwei Taylor'sche Reihen entwickeln lassen, bei denen die linearen Glieder nicht sämtlich fehlen. (Wäre dies der Fall, so haben wir es eben mit höheren Singularitäten zu thun, die uns hier nichts angehen). An diesen Satz hat die spätere analytische Behandlung anzuknüpfen.

§5. Asymptotencurven auf krummen Flächen.

Wir wählen einen Punkt x_0, y_0, z_0 der Fläche $z = X(x, y)$ und entwickeln wieder nach Taylor. Subtrahieren wir hiervon die Gl. der Tangentialebene $\Delta z = p_0 \Delta x + q_0 \Delta y$ so erhalten wir die Projektion der Schnittcurve mit unserer Fläche, auf die xy -Ebene:

$$r_0 \Delta x^2 + 2s_0 \Delta x \Delta y + t_0 \Delta y^2 + \dots = 0$$

Wir erhalten wieder die drei Fälle:

Man sagt nun:

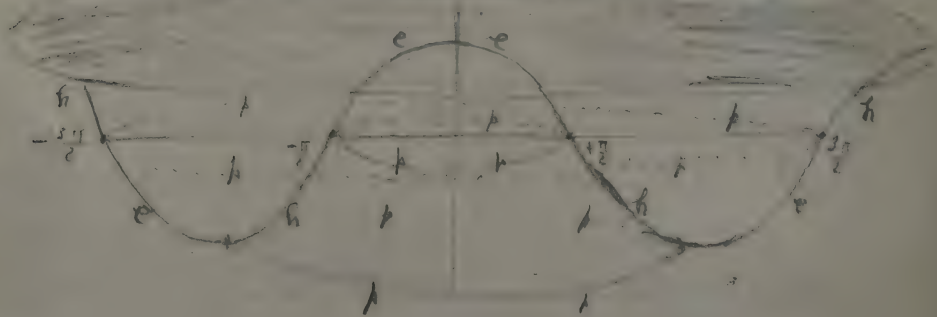
Wenn der Doppelpunkt

- 1) ein isolierter ist, die Fläche ist an dieser Stelle elliptisch gekrümmt
 - 2) ein eigentlicher Doppelpunkt ist: hyperbolisch
 - 3) wenn eine Spitze vorhanden ist: parabolisch.
- Beispiele dafür resp.

1) Ellipsoid; 2) Hyperbolisches Paraboloid; 3) Kegel.

Im Allgemeinen wird eine Oberfläche hyperbolisch und elliptisch gekrümmte Portionen haben, welche getrennt sind durch die sogenannte parabolische Curve.

Betrachten wir folgendes Beispiel: Wir lassen die Meridiancurve $z = \cos \rho$ rotieren: mithin erhalten wir als Oberfläche $z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$.



e = elliptisch - h = hyperbolisch gekrümmte Zonen
 p = parabolische Curven.
 Als allgemeine Regel können wir festsetzen:

Ein Curvenbogen erzeugt bei Drehung um eine z-Axe einen elliptisch (hyperbol.) gekrümmten Flächenteil, wenn er der Axe seine concave (convexe) Seite zuehrt. Die Maxima, Minima und Wendepunkte erzeugen dabei die parabolische Trennungslinien.

Die Projektion derjenigen Curven welche die Tangentialebene des Punktes x, y, z aus der Fläche ausschneidet (Fig.) war uns gegeben durch die Gl.

$$0 = r \Delta x^2 + 2s \Delta x \Delta y + t \Delta y^2 + \dots$$



Indem wir nur die 9 Glieder 2ter Ordnung berücksichtigen, erhalten wir hieraus diejenige Diff. Gl., welche uns das Gesetz angibt, nach dem man von einem Flächenpunkte auf einem der Aeste der Projection dieser Curve fortschreitet, nämlich:

$$0 = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2.$$

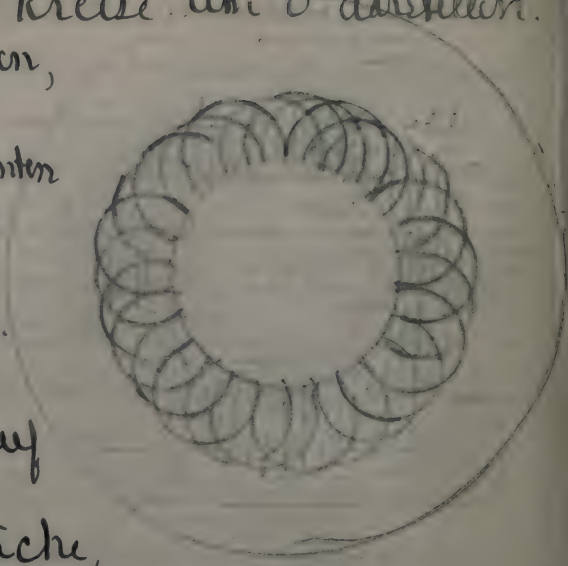
Gehen wir wieder zu unserer Rotationsfläche zurück, so werden sich unsere parabolische Curven bei Projection auf

die x y -Ebene als Kreise um O darstellen.


Dieserigen Portionen,
welche elliptisch
(hyperbolisch) gekrümmten
Teilen entsprechen
sind horizontal
(vertical) schraffiert.

Wir lenken unsere
Aufmerksamkeit auf
die Punkte der
hyperbolischen Fläche,
weil wir nur für diese Punkte reelle
Fortsehritungsrichtungen bekommen.
Wir können so sagen: Die Integralcurve
unserer Diff. Gl. überdeckt die hyperbolisch
gekrümmte Flächenteile doppelt während
sie die elliptisch gekrümmte Flächenteile
frei lassen.

Man bezeichnet diese Integralcurven als
Haupttangentialcurven oder Asymptoten-
curven. Haupttangentialcurven deshalb,
weil von den unendlich vielen Tangentialen,
welche in einem Flächenpunkte existieren,



nur zwei die oben diskutierte Schnittcurve
 im Doppelpunkte berühren. Den Namen
 Asymptotencurven, führen sie aus
 folgendem Grunde: Die Schnittcurve
 der Fläche mit einer Ebene parallel
 zur Tangentialebene (in nächster Nähe
 des Berührungspunktes) verläuft wie
 eine Hyperbel und unsere Haupttangente
 bezeichnen nur die Asymptoten-Richtungen
 unserer Hyperbel, wie dies
 herauskommt, wenn wir uns
 bei der Taylor'schen Reihe
 auf 3 Glieder 2ter Ordnung beschränken.



Denken wir uns jetzt auf unserer Fläche
 in jedem Punkte die beiden Fortschritt-
 ungsrichtungen eingetragen, so sehen wir,
 dass dieselben immer mehr zusammen-
 fallen, wenn man auf die parabolische
 Curve rückt. Jedoch ist der Unterschied,
 dass sie in die radiale Richtung
 zusammenfallen, wenn man auf den
 innen Zuweg geht, dass sie in die tangentielle
 Richtung fallen, wenn man auf den Kreis geht.

der unsere ringförmige Fläche nach außen begrenzt. Zeichnen wir uns nun die Asymptotencurven selbst, so sehen wir, dass sich diese in folgedessen mit Spitzen auf den inneren Begrenzungskreis des hyperbolischen Stückes aufsetzen und jedesmal den äusseren Begrenzungskreis berühren.

Was hat nun die parabolische Curve für eine Bedeutung? Sie tritt auf als Ort solcher Punkte, wo die beiden Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen; derartige Curven wird es immer geben, wenn in der Diff. Gl. das $\frac{dy}{dx}$ in höherem Grade vorkommt.

Wir resumieren folgendermassen:

Die parabolische Curve unserer Fläche ist zum Teil ein Ort für Spitzen der Integralcurven unserer Diff. Gl., zum Teil ist sie selbst eine Lösung der Diff. Gl., welche als Enveloppe der allgemeinen Integralcurven erscheint und in sofern als singuläre Lösung der Diff. Gl. bezeichnet

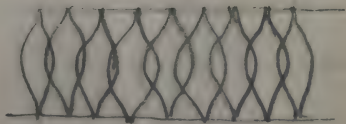
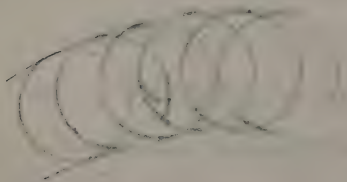
wird. Die analoge Betrachtung findet statt, wenn in der vorgelegten Diff. Gl. das $\frac{dy}{dx}$ in höherem Grade vorkommt.

Man frage dann nach dem geometrischen Orte solcher Punkte, für welche zwei der Fortschrittingsrichtungen zusammenfallen und untersuche nun die einzelnen Teile dieses Ortes, ob sie möglicherweise selbst der Diff. Gl. genügen und dann eben solche singuläre Lösung vorstellen.

§ 6. Lage der singulären Lösung.

Die singuläre Lösung ist, wenn sie vorhanden ist, Enveloppe der Integralcurven. Es ist aber gar nicht nötig, dass die einfach unendlich vielen Integralcurven überhaupt eine Enveloppe haben (wie man fälschlich bis vor Kurzem annahm). Denn der geometrische Ort für die Schnittpunkte aufeinanderfolgender Integralcurven kann sehr gut nur ein geometrischer Ort für die

singulären Stellen der Integralcurven sein,
 es braucht nicht von den Integralcurven
 berührt zu werden.



2. Weitere Ausführungen

§7. Die Existenzbeweise durch Polygon-
 construction und durch Reihenentwicklung.
 Denken wir uns eine Diff. Gl. von der
 Form gegeben

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad ; \quad dy : dx = y : x.$$

Dann wollen wir annehmen, dass y und x
 nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$
 und $y-y_0$ entwickelt werden können: Also:

$$x = a + b(x-x_0) + c(y-y_0) + \dots \quad \text{wobei } a \neq 0$$

$$y = a' + b'(x-x_0) + c'(y-y_0) + \dots$$

Darin ist auch $y : x$ nach ganzen positiven
 Potenzen von $x-x_0$ und $y-y_0$ entwickelbar,
 und es gehört daher zu jeder Stelle (x, y) , die

innerhalb des Convergenzbereiches der Reihe liegt, nur eine bestimmte Fortschreibungsrichtung $\frac{dy}{dx}$.

Wie wollen wir aber beweisen, dass es überhaupt solche Integralcurven giebt?

Ferner können wir die weitere Frage stellen: Genügt hier die geometrische Darlegung, oder ist ein analytischer Beweis erforderlich?

Was unsere Frage anbetrifft, so hat Cauchy zwei analytische Beweise für die Existenz der Integralcurven gegeben, wenn die Diff. Gl. vorgegeben ist.

Es werden hier nur die Gedanken entwickelt, das übrige ist nachzulesen bei Picard, Traité d'analyse II, Cap. II (1ter Beweis pg. 291-298, 2ter Beweis pg. 304-308).

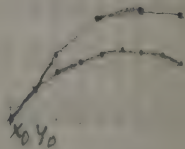
Was die Prinzipien der beiden Beweise angeht, möchte ich den 1ten Cauchy'schen Beweis den Polygonbeweis nennen.

Ähnlich wie bei der Entwicklung der Idee des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x) \Delta x$$

verfährt Cauchy in seinem ersten Beweise:
Denken wir uns den Punkt x_0 auf eine
Strecke aufgetragen und diese in lauter
endliche Stücke Δx eingeteilt, in deren
Endpunkten Ordinaten

errichtet sind wir
schreiten nun von x_0 in
der durch die Diff. Gl.
diesem Punkte zugeordneten



Richtung geradlinig

vorwärts bis zur ersten Ordinate, dann
zur zweiten etc. wir bekommen so ein
Polygon. Lassen wir nun die Stückchen
 Δx kleiner werden und führen eine analoge
Construction aus, so werden wir wieder
ein Polygon erhalten u. s. w.

Wir erhalten als Resultat: Das Polygon
strebt einer Grenzkurve zu, welche wirklich
der vorgelegten Diff. Gl. $y' = f(x, y)$ genügt.

Es folgt der zweite Beweis:

Es sei gegeben $y' = f(x, y)$.

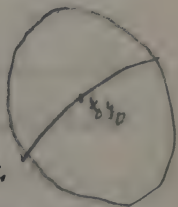
Während nun beim ersten Cauchy'schen
Beweis nur die Stetigkeit von $f(x, y)$

vorausgesetzt wird, setzen wir jetzt voraus, dass $f(x, y)$ in der Nähe von x_0, y_0 in eine Potenzreihe entwickelbar sei:

$$y' = f(x, y) = a + b(x - x_0) + c(y - y_0) + \dots$$

Nun betrachten wir die Integralcurve, die durch den Punkt x_0, y_0 geht und versuchen auch diese in eine Potenzreihe zu entwickeln.

Man berechnet sich zu dem Zwecke die folgenden Diff. Quot.



$$y' = f(x, y)$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''$$

wo man nun noch y'' durch y' ersetzen kann und dieses selbst durch $f(x, y)$ ersetzen wird.

Tragen wir jetzt überall den beliebig gegebenen Wert x_0, y_0 ein, so bekommen wir die Diff. Quotienten $y'_0, y''_0, y'''_0, \dots$ an der Stelle (x_0, y_0) .

Jetzt setzen wir uns formal folgende Taylor'sche Reihe zusammen:

$$y = y_0 + y_0'(x-x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y_0'''}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

und fragen uns ob diese Reihe konvergiert, und wenn sie konvergiert, dann stellt sie unsere Integralcurve durch den Punkt (x_0, y_0) dar. Das Wesentliche ist also der Convergencebeweis.

§ 8. Theorie der einfachsten singulären Stellen.
Um die singulären Punkte zu untersuchen, denken wir uns die Diff. Gl. in folgender Gestalt geschrieben:

$$dx:dy = x:y = a+b(x-x_0)+c(y-y_0)+\dots : a'+b'(x-x_0)+c'(y-y_0)+\dots$$

Wir werden nun eine singuläre Stelle bekommen, wenn a und a' beide $= 0$ sind, da dann $\frac{dx}{dy} = 0$ wird in x_0, y_0 . Dies war auch oben bei den Curven stärksten Falles der Fall gewesen.

Wir können auch noch den Character der singulären Stelle abstufen. Wenn nur die constante Glieder fehlen, so haben wir eine Singularität 1ter Stufe; u. s. w. Wenn die Glieder n ter Ordnung verschwinden, haben wir eine Singularität

$n+1$ ter Ordnung

Für unsere Betrachtung nehmen wir an, dass in keiner der beiden Reihenentwicklungen die linearen Glieder sämtlich verschwinden. Unter diesen Voraussetzungen soll untersucht werden, wie man die von x_0, y_0 auslaufende Integralcurven analytisch darstellen kann. Das kommt wieder hinaus auf die Construction einer unendlichen Reihe. Hier siehe Picard III Cap. 2 § 23-43. Der Erleichterung wegen machen wir folgende Annahme: die Reihe häre hinter den Gliedern 1, 0 auf:

$$dx:dy = b(x-x_0) + c(y-y_0) : b'(x-x_0) + c'(y-y_0).$$

Diese Diff. Gl. wollen wir wirklich integrieren und untersuchen, was sich dabei für x_0, y_0 ergibt:

Unsere einfache Diff. Gl. wird uns nun bereits die bekannten drei Typen der singulären Stellen darbieten:

Um dies zu beweisen, legen wir zunächst den Anfangspunkt des Coordinatensystems

in den Punkt x_0, y_0 , so dass wir haben:

$$1) \quad dx : dy = bx + cy : b'x + c'y$$

Die Frage lautet jetzt: wie verlaufen die Integralcurven in der Umgebung des Koordinatenanfangspunktes? Dann ändern wir noch die Schreibweise:

$$2) \quad \frac{dx}{dt} = bx + cy, \quad \frac{dy}{dt} = b'x + c'y$$

Dadurch bekommt die Sache einen Anstrich nach Seite der Mechanik hinüber, wo ja t die Zeit und $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die Componenten der Geschwindigkeit in Richtung der Coordinatenachsen sind. In der Mechanik hatten wir denn die Fragestellung: wie wird sich ein Punkt bewegen, wenn diese einfachen Diff. Gl. für seine Bewegung gegeben sind?

Den Gegensatz der beiden Gleichungen

1) und 2) können wir so formulieren:

2) fragen nach der Bewegung im Laufe der Zeit

1) nur nach der Bahncurve.

In der That sind in der Mechanik diese Diff. Gleichungen äusserst häufig und

zwar hat man im Allgemeinen n Gleichungen und auf der rechten Seite n lineare Glieder. Man spricht in diesem Falle von einem System gewöhnlicher linearer diff. Gleichungen 1^{ten} Ordnung mit constanten Coefficienten. Gehen wir zur Integration über, und bilden wir uns zunächst eine Combination von der Form $x+my$, über deren Bedeutung wir bald klar werden. Es ist dann:

$$\frac{d(x+my)}{dt} = (b+mb')x + (c+mc')y.$$

Wir wollen nun m so bestimmen, dass dieser Ausdruck ein Multiplicum von $(x+my)$ ist. Es soll also die Gl. bestehen:

$$(b+mb') + (c+mc')y = \lambda(x+my)$$

$$\therefore b+mb' = \lambda$$

$$c+mc' = \lambda m$$

$$(b-\lambda) + b'm = 0$$

$$c+(c'-\lambda)m = 0$$

Wenn diese beiden linearen Gleichungen von m verträglich sein sollen, so muss die Determinante der Coefficienten $= 0$ sein:

$$\begin{vmatrix} b-\lambda & b' \\ c & c'-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Das gibt die quadratische Gl.

$$(b-\lambda)(c'-\lambda) - b'c = 0$$

welche wir die charakteristische Gl. nennen. Jetzt bestimmt man ihre Wurzeln, berechnet dann für jedes einzelne λ das zugehörige m und bildet dann die Combination $(x+my)$.

Ausführlich lautet die charakteristische Gl.

$$\lambda^2 - (b+c')\lambda + bc' - b'c = 0$$

Ihren Wurzeln sind:

$$\lambda = \frac{b+c' \pm \sqrt{4b'c + (b-c')^2}}{2}$$

Diese Wurzeln λ_1 und λ_2 können nun reell, imaginär oder identisch sein. Wir machen für die nächste Untersuchung die Annahme, dass λ_1 und λ_2 verschieden sind.

Die λ_1 und λ_2 zugehörigen Werte von m sind aus den obigen Gleichungen:

$$m_1 = -\frac{b-\lambda_1}{b'} = -\frac{c}{c'-\lambda_1}$$

$$m_2 = -\frac{b-\lambda_2}{b'} = -\frac{c}{c'-\lambda_2}$$

Wir haben also die beiden Diff. Gleichungen:

$$\frac{d(x+m_1y)}{dt} = \lambda_1(x+m_1y), \quad \frac{d(x+m_2y)}{dt} = \lambda_2(x+m_2y)$$

$$\log(x+m_1y) = \lambda_1 t + \log u_1, \quad \log(x+m_2y) = \lambda_2 t + \log u_2.$$

§ 9. Spezielle Discussion der W -Curven.
Die folgende Integralcurven sind unter dem Namen W -Curven von Klein-Lü math. Annalen 4, pg. 50 untersucht.

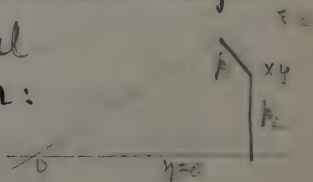
Wir setzen:

$$x+m_1y = \xi \quad x+m_2y = \eta$$

und bedeuten ξ und η in einem allgemeinen schiefwinkligen Coordinatensystem?

Wir fällen die Perpendikel p_1 und p_2 und haben dann:

$$p_1 = \frac{x+m_1y}{\sqrt{1+m_1^2}}, \quad p_2 = \frac{x+m_2y}{\sqrt{1+m_2^2}}$$



$$\xi = \sqrt{1+m_1^2} \cdot p_1, \quad \eta = \sqrt{1+m_2^2} \cdot p_2$$

Es sind also ξ und η die mit gewissen Constanten multiplizierten Abstände von den Linien $\xi=0$, $\eta=0$. Solche Coordinaten nennen wir allgemeine schiefe Coordinaten in der Ebene.

Wir können ξ und η natürlich auch

in einem neuen Curvensystem deuten.

Es besteht dann nach den Grundsätzen der Projektionslehre folgender Satz:

Die allgemeinen schiefen Coordinaten erscheinen als Parallelprojektion der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten. Wenn wir also eine Gl. zwischen ξ und η haben, so können wir uns immer die Zeichnung in rechtwinkligen Coordinaten herstellen und erhalten dann die zu dem schiefwinkligen Coordinatensystem gehörige Figur als projiziertes Bild.

Wir können daraufhin schreiben:

$$\log \xi = \lambda_1 t + \log u_1, \quad \log \eta = \lambda_2 t + \log u_2$$
$$\xi = u_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = u_2 e^{\lambda_2 t}$$

So sind ξ und η durch t ausgedrückt und wenn wir dieses eliminieren, so wird

$$\left(\frac{\xi}{u_1}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{\eta}{u_2}\right)^{\lambda_1}$$

oder

$$\eta = k \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Machen wir uns jetzt den Verlauf dieser Curve klar. Wir sehen zunächst, dass wir im Falle, dass λ_1 und λ_2 Commensurabel

sind, durch geeignete Potenzierung ganzzahlige Potenzen erhalten. Daraus bekommen wir den Satz: Unsere Integralcurven sind algebraische Curven, wenn λ_1 und λ_2 commensurable Grössen sind, sonst sind sie transcendente Curven. Wir werden nun die Curven im rechtwinkligen Coordinatensystem construieren. Im Interesse voller Allgemeinheit haben wir dann die Figur noch einer beliebigen schiefen Projektion zu unterwerfen.

Unsere Gl. lautet:

$$\eta = k \cdot \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Wir betrachten zunächst den Fall wo

I) λ_1 und λ_2 reell sind: d. h. m_1 und m_2 auch reell. Wir setzen direkt $x+m_1 y = \xi$, $x+m_2 y = \eta$.

II) λ_1 und λ_2 haben dasselbe Vorzeichen, dann ist $\eta = 0$ für $\xi = 0$. Wir bilden uns nun:

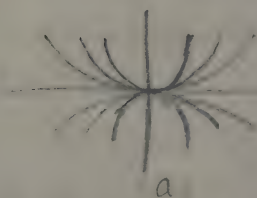
$$\eta' = k \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1}$$

und unterscheiden

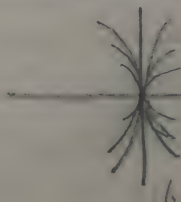
a) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 > 0$, dann ist $\eta' = 0$ für $\xi = 0$. Wir haben lauter Curven, die die horizontale Axe berühren.

b) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 < 0$. Dann ist $\eta' = \infty$ für $s=0$; d.h. die Curven berühren die vertikale Axe.

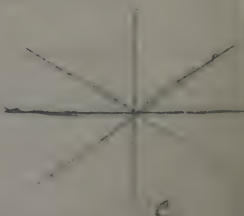
c) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = 0$. Dann haben wir den Zwischenfall eines Geradenbüschels.



a



b



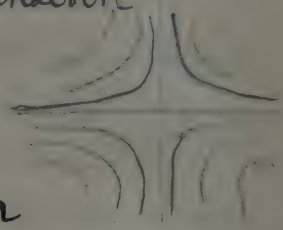
c

Wir erhalten also für 1) einen Scheitel.

2) λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen
 $\eta = k \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

Dann ist $\eta = \pm \infty$ für $s=0$ je nach dem Vorzeichen von k . Wir erhalten nebststehende Curve.

Wir haben hier einen Sattelpunkt.



Durch schiefe Projektion bleiben natürlich Scheitel und Sattel erhalten.

II. λ_1 und λ_2 seien imaginär. Als Wurzeln einer quadratischen Gl. sind sie conjugiert imaginär:

$$\lambda_1 = \lambda' + i \lambda''$$

$$\lambda_2 = \lambda' - i \lambda''$$

$$m_1 = m' + i m''$$

$$m_2 = m' - i m''$$

Wir werden hier setzen

$$x+m_1y = \xi + i\eta, \quad x+m_2y = \xi - i\eta$$

Dabei mögen ξ und η als rechtwinklige Koordinaten interpretiert werden, immer vorbehalten, die Figur schief hinterher zu projizieren. Wir haben dann

$$1) \log(\xi + i\eta) = (\lambda' + i\lambda'')t + \log(u' + iu'')$$

$$2) \log(\xi - i\eta) = (\lambda' - i\lambda'')t + \log(u' - iu'')$$

Wir benutzen jetzt ein Polarkoordinatensystem:

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad r \cos \varphi = \xi \quad r \sin \varphi = \eta$$

$$\therefore \xi + i\eta = r e^{i\varphi}$$

Analog für u' und u''

$$u' + iu'' = \rho e^{i\psi}$$

Tragen wir dies etwa in die erste Gl. ein so wird

$$\log(r e^{i\varphi}) = (\lambda' + i\lambda'')t + \log(\rho e^{i\psi})$$

\therefore

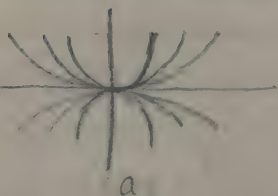
$$\log r = \lambda' t + \log \rho \quad \varphi = \lambda'' t + \psi$$

$$\frac{r}{\rho} = e^{\lambda' t} = e^{\frac{\lambda'}{\lambda''}(\varphi - \psi)}$$

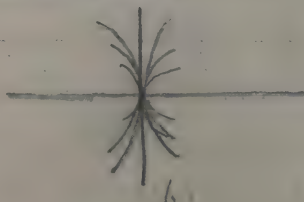
Das sind aber logarithmische Spiralen.

b) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 < 0$. Dann ist $\eta' = \infty$ für $\xi = 0$; d.h. die Curven berühren die vertikale Axe.

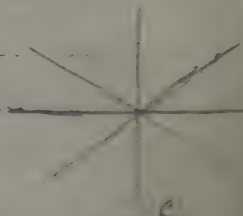
c) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = 0$. Dann haben wir den Zwischenfall eines Geradenbüschels.



a



b



c

Wir erhalten also für 1) einen Scheitel.

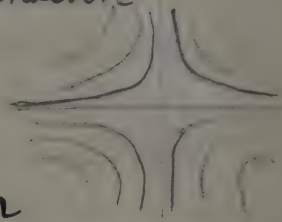
2) λ_1 und λ_2 haben verschiedene Vorzeichen
 $\eta = k \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

Dann ist $\eta = \pm \infty$ für $\xi = 0$ je nach dem Vorzeichen von k . Wir erhalten nebststehende Curve.

Wir haben hier einen Sattelpunkt.

Durch schiefe Projektion

bleiben natürlich Scheitel und Sattel erhalten.



II. λ_1 und λ_2 seien imaginär. Als Wurzeln einer quadratischen Gl. sind sie conjugiert imaginär:

$$\lambda_1 = \lambda' + i \lambda''$$

$$\lambda_2 = \lambda' - i \lambda''$$

$$m_1 = m' + i m''$$

$$m_2 = m' - i m''$$

Wir werden hier setzen

$$x+m_1y = \xi + i\eta, \quad x+m_2y = \xi - i\eta$$

Dabei mögen ξ und η als rechtwinklige
Coordination interpretiert werden,
immer vorbehalten, die Figur schief
hinterher zu projizieren. Wir haben
dann

$$1) \log(\xi + i\eta) = (\lambda' + i\lambda'')t + \log(u' + iu'')$$

$$2) \log(\xi - i\eta) = (\lambda' - i\lambda'')t + \log(u' - iu'')$$

Wir benutzen jetzt ein Polarcordinaten-
System:

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad r \cos \varphi = \xi \quad r \sin \varphi = \eta$$

$$\therefore \xi + i\eta = r e^{i\varphi}$$

Analog für u' und u''

$$u' + iu'' = \rho e^{i\psi}$$

Tragen wir dies etwa in die erste Zl. ein
so wird

$$\log(r e^{i\varphi}) = (\lambda' + i\lambda'')t + \log(\rho e^{i\psi})$$

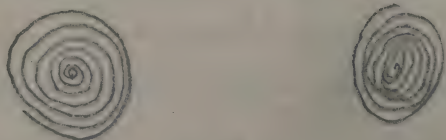
\therefore

$$\log r = \lambda' t + \log \rho \quad \varphi = \lambda'' t + \psi$$

$$\frac{r}{\rho} = e^{\lambda' t} = e^{\frac{\lambda'}{\lambda''}(\varphi - \psi)}$$

Das sind aber logarithmische Spiralen.

Zeichnen wir uns eine, so bekommen wir die anderen alle, indem wir entweder die erste drehen um 0, oder r proportional vergrößern:



Im Falle II erhalten wir also Strudelpunkte.

Warum stellten sich nun bei den Curven stärksten Falles in unserem topographischen Beispiele nur Scheitel und Sattelpunkte ein? Um dies zu untersuchen, beobachten wir für unser Beispiel noch einmal die Taylor'sche Reihe, welche für $p_0 = q_0 = 0$ laute:

$$z = z_0 + \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2) + \dots$$

Nun heisst die Diff. Gl. der Curven stärksten Falles: $dx:dy = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}$.

Hierfür die Werte aus der Taylor'schen Reihe eingesetzt:

$$dx:dy = (r_0 x + s_0 y + \dots) : (s_0 x + t_0 y + \dots)$$

Bei der allgemeinen Theorie hatten wir

aber die Gl. $dx:dy = bx+cy : b'x+c'y$.

Wir sehen, da liegt für unser früheres Beispiel eine Partikularisierung vor, indem dort das ε_0 zweimal als Coefficient auftritt. Die charakteristische Gl. heißt daher

$$\begin{vmatrix} r_0 - \lambda & \varepsilon_0 \\ \varepsilon_0 & t_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = \frac{r_0 + t_0 \pm \sqrt{4\varepsilon_0^2 + (t_0 - r_0)^2}}{2}$$

Das Resultat ist also dieses:

Der Unterschied der Curven stärksten Falles von der allgemeinen Diff. Gl., die wir betrachteten, beruht darin, dass in den R. ein $b' = c$ ist. Infolgedessen hat die charakteristische Gl. für λ notwendig reelle Wurzeln; die

Studelpunkte fallen fort und es bleiben allein Gipfel- und Sattelpunkte über.

Wenn wir uns dann bei dem topographischen Beispiele hinterher doch Studelpunkte construieren können so gilt dann eben hierfür die Taylor'sche Reihe nicht mehr.

Wir bemerken noch zum vorigen: Sind λ_1 und λ_2 rein imaginär, so gehen Spirale in Kreis, Stuhlpunkt in Wülpunkt (Centrum nach Poincaré) über.

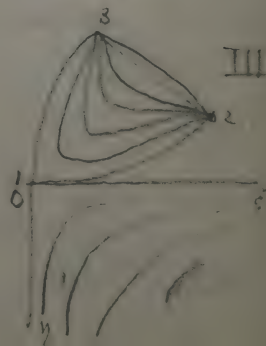
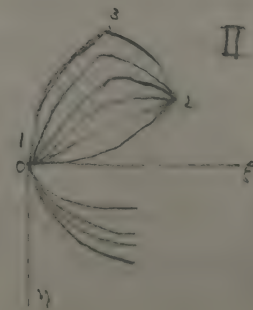
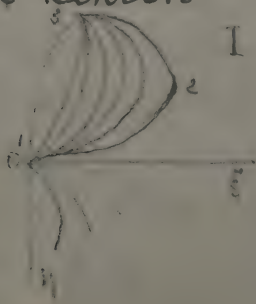
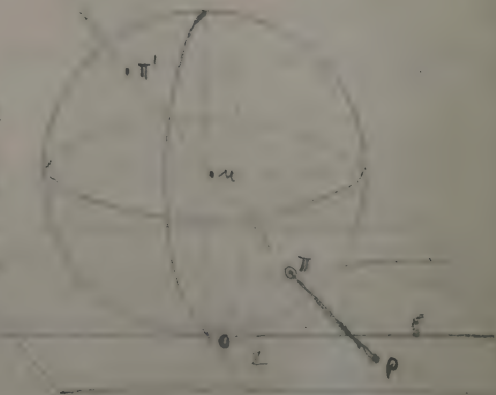
§10. Uebersetzung der W-Curven auf, die Kugel.
Grenzyklen.

Wir projizieren jetzt unsere Curven nach der Figur auf eine Kugel:

Dabei entspricht der Aequator dem ∞ -fernen.

Aus den drei Typen

wird folgendes, wenn wir den betreffenden Sextanten jedesmal dem Gesichtsfeld zu kehren:



Es erscheinen jetzt die drei Fälle nicht mehr verschieden. Wir werden sagen:

I Die drei Fälle, welche wir bei reellen λ_1, λ_2 nach dem Charakter der Punkte unterscheiden, geben auf die Kugel übertragen, Curvensysteme ganz ähnlicher Art, welche zwei Ecken der einzelnen Oktanten zu Scheiteln haben und einen Eckpunkt zum Sattelpunkt.

Auf der Kugel liegen vier paarweis-diametrale Scheitel und zwei zueinander diametrale Sattelpunkte. Die Integralcurven laufen einfach von einem Scheitel jedesmal zu einem benachbarten, nur um 90° abstehenden Scheitel hin, indem sie eventuell im Sattelpunkte um 90° umbiegen.

II. Wenn man den Fall, wo λ_1, λ_2 complex sind auf die Kugel überträgt, so erhält man auf der Halbkugel ein Spiralen-system, welches einerseits den Nordpol (Südpol) andererseits den Aequator

asymptotisch approximiert, sodass der Äquator ein sogenannter Grenzzyklus ist. In dem besonderen Falle, wo λ_1, λ_2 rein imaginär sind, verwandeln sich alle Integralcurven in Parallelkreise der Kugel.



§ 11. Allgemeines über den Verlauf der Integralcurven (Poincaré).

Poincaré: Sur les courbes définies par les équations différentielles (in 4 Abteilungen) Liouville's Journal Sér. 3, t. 7, 8 Jahrgang 1881-82
 4; t. 1, 2 .. 1885-86.

Das Poincaré'sche Problem ist folgendes: Gegeben ist $dx:dy = X:Y$, wo X und Y Polynome von x und y sind. Die Frage ist: Kann man über den Verlauf der Curven etwas qualitatives ermitteln? An der Spitze der Arbeit steht die Kugelprojektion.

1. Die erste Frage ist dann: wo liegen die singulären Stellen?

Antwort: da wo $X=0$ und $Y=0$ werden.

2. ist die Hauptfrage nach den geschlossenen Integralcurven, den Cycles.

Im Allgemeinen gibt es nur einzelne solcher Cycles als Grenzzyklen für den anderen Integralcurven. Dann gibt Poincaré auch eine Methode an, um alle Grenzzyklen im gegebenen Falle zu finden.

3. Zuletzt zeigt Poincaré, dass wir jetzt im Allgemeinen den Verlauf der Integralcurven skizzieren können, d. h. qualitativ; die genau quantitative Berechnung ist eine Frage für sich. Uebrigens sind die Poincaré'schen Arbeiten zumieist dadurch besonders ausgezeichnet, dass er immer zur ersten Fragestellung zurückkehrt. So hat man sich gewiss früher zuerst gefragt, wie ist der Verlauf solcher Curven, und dann erst hat die Analysis

Methoden gefunden um die Integration der Diff. Gl. auszuführen.

Unsere Lehrbücher geben aber heutzutage meist nur den analytischen Apparat, ohne auf die ursprüngliche Fragestellung zurückzukommen.

Derngegenüber hat Poincaré? zuerst den Verlauf der Curven festgestellt und hierauf aufbauend die analytische Entwicklung gegeben.

§ 12 Differential-Gleichungen höheren Grades in y' . Die Discriminantencurven.
Wenn wir sagen, die Gl. $\Omega(x, y, y') = 0$ soll vom n ten Grade sein in y' , so heisst dies, dass für einen Punkt x, y n Fortschrittsrichtungen gegeben sind. Diese können als Wurzeln einer algebraischen Gleichung natürlich teils reell, teils complex sein.

Die x, y -Ebene wird sich nun in Gebiete zerlegen, derart, dass z. B. in einem Gebiete k reelle Wurzeln existieren,

während es im Nachbargebiete z. B.
 $k \pm 2$ reelle Wurzeln gibt. Der Unterschied
muss immer gradzahlig sein, da
bei algebraischen Gleichungen complexe
Wurzeln nur paarweise auftreten können.
Wie geht es nun zu, dass aus k reellen
Wurzeln $k \pm 2$ werden? Nun wissen wir,
im Fall der algebraischen Gl., dass im
Übergangsfalle zwei Wurzeln zusammen-
fallen. Zusammenfassend werden wir sagen:
Die x, y -Ebene zerfällt in verschiedene
Gebiete, je nach der Anzahl der reellen
Wurzeln, welche die Gl. $\Omega(x, y, y') = 0$
bei festgehaltenem x, y für y' ergibt.
Die Trennungslinien zwischen
diesen Gebieten bilden die sogenannten
Discriminanten-curven, d. h. eben
die Curven derjenigen Punkte, für
welche zwei der Fortschrittingsricht-
ungen zusammenfallen. Diese Curve
ist also dasjenige, was im speziellen
die parabolische Curve ist.

Wie werden wir nun die Diskriminanten-

curven finden? Wie drücken wir aus, dass $\Omega=0$ aufgefasst als eine Gl. für y' eine doppelte Wurzel hat? Wir wissen, dass dann neben $\Omega=0$ noch die Gl. $\frac{\partial \Omega}{\partial y'}=0$ stattfinden muss. Wir werden also so sagen: Man erhält die Gl. der Diskriminantencurve $D(x, y)=0$, indem man y' aus den beiden Gleichungen $\Omega(x, y, y')=0$, $\frac{\partial \Omega}{\partial y'}(x, y, y')=0$ eliminiert. Dann aber kann man nach den Grundsätzen der Algebra (für einfache Vorkommnisse) y' rational aus den beiden Gleichungen berechnen, so dass wir bekommen ($D(x, y)=0$ vorausgesetzt):

$$y' = r(x, y)$$

Wir sehen hieraus, dass zu jedem Punkte der Diskriminantencurve ein bestimmter Doppelwert von y' gehört.

Rechnen wir dies einmal an unserem Beispiele nach, so haben wir:

$$\Omega = ty^2 + 2sy' + r = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y'} = 2y' + s = 0$$

also

$$y' = -\frac{s}{2}$$

Dies in $\Omega=0$ eingesetzt ergibt die Gl.
der Diskriminante zu

$$rt - s^2 = 0$$

d.h. in diesem einfachen Beispiele ist
unsre parabolische Curve zugleich die
gesamte Diskriminantencurve.

Wie verlaufen nun im allgemeinen
Falle die Integralcurven in der
Umgebung einer bestimmten Stelle (x, y) ?
Da ist zunächst die Frage, ob ein y'
der Diskriminantencurve angehört
oder nicht. Das soll heissen, dass xy
der Diskriminantencurve angehört
und y' die durch $y' = r(x, y)$ gegebene
zugehörige Richtung ist!
Natürlich, wenn ein Punkt (x, y) nicht
auf der Diskriminantencurve liegt,
dann gehört das y' auch derselben
nicht an. Jedoch auch dann, wenn
 xy auf der Diskriminantencurve liegt,
aber sein y' die durch $r(x, y)$ gegebene
Richtung nicht hat, sind wir fern von

der Diskriminantencurve.

Wir wollen daher so sagen:

Nehmen wir ein Ausgangselement x_0, y_0, y'_0 ; so ist unsere erste Entscheidung, ob dasselbe fern von der Diskriminantencurve liegt oder derselben angehört.

Sobald es fern liegt, können wir y' als einfache Wurzel von $\Omega(x, y, y') = 0$ nach der Taylor'schen Reihe entwickeln, haben also:

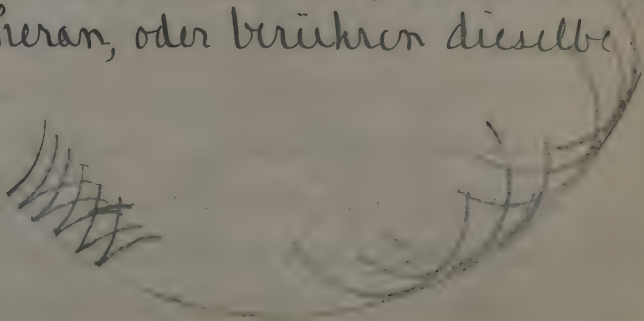
$$y' - y'_0 = b(x - x_0) + c(y - y_0) + \dots$$

Infolgedessen erstreckt sich von der Fortschrittingsrichtung y' aus eine ganz bestimmte Integralcurve, deren Existenz nach Cauchy feststeht. Ein solches Element x_0, y_0, y'_0 , welches also nicht der Diskriminantencurve angehört, ist genau so der Anfangspunkt einer bestimmten Integralcurve wie früher. Und nun setzen wir einmal den Fall dass in einem Gebiete, welches von einem Teile der Diskriminantencurve umschlossen sein soll, von jedem einzelnen

Punkte & reelle Fortschreitungs-
richtungen fortlaufen, so wird ein
solches Gebiet von den Integralcurven
 k fach überdeckt. Ist dann das Nachbar-
gebiet nur $(k-2)$ fach überdeckt, so ist
die Frage, wie ziehen sich diese beiden
verlorengehenden Scharen von Integral-
curven an die Diskriminantencurve
heran? Vielleicht esol, wie in unserem
speziellen Falle die Asymptotencurven
an die parabolische Curve?

Wir behaupten in der That:

Die zwei Curvenschaaren, welche in
unserem Beispiele nur auf der einen
Seite des Astes der Diskriminanten-
curve existieren, ziehen sich an die
Diskriminantencurve entweder mit
Spitzen heran, oder berühren dieselbe



Im letzteren Falle der Enveloppe spricht man von einer singulären Lösung unserer Diff. Gl.

§ 13. Die bezügliche Integralkurven als projizierte Raumkurven.

Warum wird nun das eine und warum das andere stattfinden?

Wir konnten doch für die Diskriminantenkurve das zugehörige y' als rationale Funktion von x und y berechnen: $y' = r(x, y)$.

Andererseits ist jedem Punkte xy die Richtung der Tangente zugeordnet, welche die Diskriminantenkurve an der Stelle xy hat, nämlich:

$$y' = - \frac{\frac{\partial D}{\partial x}}{\frac{\partial D}{\partial y}}$$

Dem entspricht nun die Regel:

Wenn $r(x, y) \neq - \frac{\frac{\partial D}{\partial x}}{\frac{\partial D}{\partial y}}$ ist, dann ist die Diskriminantenkurve ein Ast der Spitzen.

Wenn $r(x, y) = - \frac{\frac{\partial D}{\partial x}}{\frac{\partial D}{\partial y}}$ ist, dann ist die Diskriminantenkurve eine Enveloppe und dann ist dieser Ast der Diskriminantenkurve eine singuläre Lösung.

Statt eines analytischen Beweises

(Picard, Traité d'Analyse III Cap. 10)

wollen wir vielmehr uns eine geometrische Auffassung verschaffen. (Poincaré).

Man schreibe einmal $\Omega(x, y, z) = 0$ statt $\Omega(x, y, y') = 0$, wodurch uns eine Fläche im Raume gegeben ist; und dann benutze man noch die Gl. $\frac{dy}{dx} = y' = z$.

Die Deutung ist nun folgende:

Man soll auf dieser Fläche so weiter gehen, dass immer $dy = z dx$ ist.

Dies ist jetzt eine völlig eindeutige Diff. Gl. Indem wir nun eine Projektion auf die xy Ebene vornehmen, erhalten wir $\Omega(x, y, y') = 0$.

Mithin ergibt sich folgendes:

Man betrachte im Raume die Fläche

$$\Omega(x, y, z) = 0$$

und auf ihr das Curvensystem, welches durch die Diff. Gl.

$$dy = z dx$$

festgelegt wird und von welchem sie einfach überdeckt ist, weil durch jeden

Flächenpunkt eine wohlbestimmte Fortschrittingsrichtung durchzieht. Abdanon sind die Integralcurven in der Ebene gar nichts anderes als eine verticale Projection dieses unsere Fläche einfach überdeckenden Curvensystems und die Diskriminantencurve in der Ebene ist nichts anderes als die Umrisscurve, welche bei dieser Projection entsteht.

Für das Beispiel der Asymptotencurve hatten wir:

$$t y^2 + 2s y' + r = 0.$$

Statt dessen schreiben wir:

$$t z^2 + 2s z + r = 0.$$

Ja, da sind also für die mit 2 bezeichneten Gebiete 2 Werte von z reell, sodass jetzt der einzelne ringförmige Teil der Ebene als Doppelprojektion einer in sich zurücklaufenden Ringfläche des Raumes erscheint. Unsere Asymptotencurven



sind dabei die Projektionen von Raumcurven, welche sich schraubenartig um diese Ringfläche winden. Wir haben dies bei der einen Asymptotencurve in der Figur angedeutet, indem wir ihre Teile abwechselnd ausgezogen bez. punktiert haben.

Wie kommt es nun, dass die innere Umrisscurve ein Ort der Spitzen, die aussere eine Enveloppe ist? Es kommt daher, dass, wenn das Auge an einer Stelle in Richtung der Tangente an die Raumcurve blickt, sich denn die Raumcurve als Spitze projiziert.

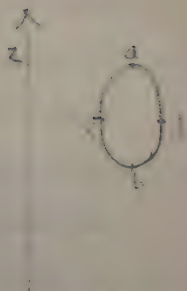
Wir fassen das Resultat zusammen: Dass die Integralcurve der xy -Ebene sich an einige Teile der Umrisscurve unserer Fläche $\Omega(x, y, z) = 0$ mit Spitzen heranzieht und einige Teile umhüllt, ist nur eine Folge der Projection und hängt davon ab, ob die Tangente der Raumcurve an der betreffenden Stelle zufälligerweise vertical steht,

was die Spitze liefert oder nicht vertikal
steht was die Umhüllungskurve liefert.
Indem Poincaré so die ganze Diff. Gl.
auf die Hüllfläche $\Omega(x, y, z) = 0$ verlegt,
wird unsere Aufgabe in 2 Teile gespalten:
1) Auf der Hüllfläche ein dieselbe
einfach überdeckendes System von
Integralcurven zu construieren, und
2) zuzusehen, was bei dieser Vertikal-
projektion auf die Horizontalebene
besonderes hinzukommen mag.
Was diese Sache weiter angeht, so wird
auf 2 Arbeiten von Dyk in den
Münchener Berichten 1891-92 verwiesen

§ 14. Cetero cunctis Fällen auf den
Röhrenschraubenflächen als Beispiel.
Statt jetzt diese Betrachtungen
allgemein weiter zu führen wollen
wir noch nachheranziehen des Beispiel
der Röhrenschraubenfläche, die entsteht,
wenn sich eine Kugel auf einer Schrauben-
linie bewegt. Durch einen Vertikalaxen-

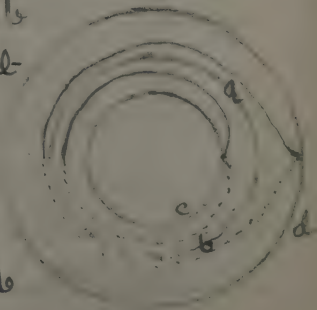
schnitt entsteht ein Oval
mit den 4 ausgezeichneten
Punkten: a, b, c, d.

Auf der Fläche sind die
a- und b-Curven, Curven
stärksten Falles.



Eine Curve stärksten Falles, welche
in unmittelbarer Nähe der Schrauben-
linie a beginnt, wird nach rechts oder
nach links über die Fläche hin sich
von a entfernen, die d oder c in vertikaler
Richtung kreuzen, und sich dann je
länger je mehr an die Schraubenlinie
b anschliessen.

Projizieren wir die Röhrenschrauben-
fläche sammt Curven stärksten Falles
so bekommen wir folgendes: Abgesehen
von den Kreisen a und b
welche ausgezeichnete Integre-
curven sind, verlaufen die
Curven stärksten Falles
in der Figur so, dass sie
sich sowohl an a wie an b



asymptotisch anschliessen (a und b sind Grenzzyklen) und an c und d mit einer Spitze hererreichen.

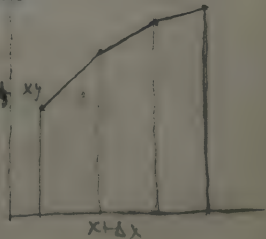
3. Numerische Berechnung, bez. mechanische Konstruktion.

§ 15. Übertragung der sogenannten mechanischen Quadratur.

Wir fragen: Wie wird man, wenn man den Gesamtverlauf der Integralcurve kennt, das einzelne Curvenstücke numerisch berechnen?

Analog wie bei der Trapezformel in der Integralrechnung verfahren wir folgendermassen:

1) Wir haben in der xy -Ebene einen bestimmten Punkt x, y , dem durch die Diff. Gl. eine Richtung $y' = f(x, y)$ zugeordnet ist. In dieser Richtung y' geht man nun bis zur Ordinate $(x + \Delta x)$, so dass man als Schnittpunkt den Punkt $(x + \Delta x, y + f(x, y) \Delta x)$ erhält. Schreitet man in



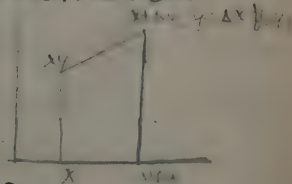
entsprechender Weise weiter, so bekommt man nach und nach ein geradliniges Polygon, welches für immer kleiner werdende Δx in der Grenze in die Integralcurve übergeht. Diese einfache Methode ist natürlich zur numerischen Berechnung gar nicht zu empfehlen, aber sie führt doch dazu, die Integralcurve durch einen Grenzproceß zu definieren und also die Existenz derselben festzustellen. (Vergl. den ersten Existenzbeweis von Cauchy)

2) Ganz entsprechend kann man auch die Fortschrittingsrichtung benutzen, welche die Diff. Gl. dem rechten Eckpunkte des Stückchens zuordnet, nämlich

$$f(x+\Delta x, y+\Delta x \cdot f(x, y))$$

Man komme dann zu dem Punkte:

$$x+\Delta x, y+\Delta x \cdot f(x+\Delta x, y+\Delta x \cdot f(x, y)).$$



3) Eine verfeinerte Methode besteht darin, dass man diejenige Fortschrittingsrichtung von xy aus benutzt, welche dem Mittelpunkt des Sehnestückchens zugehört.

Dann hätte der Endpunkt die Coordinaten:

$$y + \Delta x f\left(x + \frac{1}{2}\Delta x, y + \frac{1}{2}\Delta x f(x, y)\right).$$

4) Eine andere Methode nimmt diejenige Fortschreitungsrichtung, welche dem arithmetischen Mittel der den beiden Endpunkten zugehörigen Fortschreitungsrichtungen entspricht.

Also geht man von x, y nach $x + \Delta x, y + \Delta x \frac{f(x, y) + f(x + \Delta x, y + \Delta x)}{2}$.

Dies sind die drei ersten Methoden von Runge (Math. Annalen Bd. 46, 1895)

Doch bleibt er bei diesen nicht stehen, sondern vervollkommt sie noch weiter.

z. B. führt er auch ganz analog die Methode der Simpson'schen Regel für die Berechnung der Diff. Gl. durch. Siehe des weiteren seine Arbeit.

§16. Integrationsapparate.

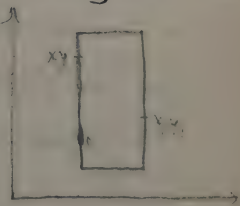
Wie man solche Apparate construieren kann, hat vor allen Lord Kelvin am Ende seines Treatise on Natural Philosophy zur Sprache gebracht. Dann möchte ich selbst auf Grund einer persönlichen Besprechung

mit H. erici folgendes bemerken:

Die Idee zu dem vorliegenden Probleme ist sehr einfach, jedoch ist eine zweckmässige konstruktive Durchführung derselben bis Lana noch nicht vorhanden.

Die Idee ist folgende: Wir stellen uns einen Integraphen so auf die Zeichenebene, dass seine Längsrichtung in die Richtung der y axe fällt.

Der Integraph hat bekanntlich 2 Stifte x, y und x, y .



Die Bewegung des Apparates erfolgt nun so, dass $y, = \frac{dy}{dx}$ ist.

In der Integralrechnung schreiben wir dieselbe Gl. $y = \int y, dx$, indem wir den Apparat als Integrationsapparat ansehen, der uns zu einer gegebenen Diff. Curve $F(x, y)$ die Integralcurve $y = \int y, dx$, aufzeichnete.

Es sei noch bemerkt, dass der Apparat so konstruiert war, dass $x, = x + 1$ war.

Jetzt sei uns statt einer Gl. für x, y , irgend eine Diff. Gl. $\Omega(x, y, y') = 0$ gegeben,

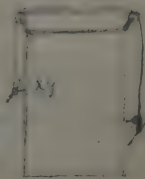
so heisst das für den Integrator, dass die beiden Stifte durch einen neuen Mechanismus mit einander verbunden sein sollen. Führt man einen solchen wirklich aus, vermöge dessen also neben die ohnehin bestehende Gl. $x_1 = x + 1$ noch die neue Gl. $\Omega(x, y, y') = 0$ tritt, so wird der Punkt x, y bei Bewegung des Apparates von selbst eine Integralcurve der Diff. Gl. beschreiben.

Denn vermöge der Einrichtung des Apparates ist ja von Haus aus: $y_1 = \frac{dy}{dx}$. Führen wir einen solchen Mechanismus an einem Beispiele wirklich einmal durch. Wir ordnen uns zwei Rollen am Rahmen des Integrators an und legen um dieselben einen Metalldraht von constanter Länge, dessen Endpunkte an den beiden Stiften befestigt sind. Alsdann besteht die Gl.:

$$y + y' = \text{Const.} = C_1$$

Mithin haben wir

$$y + \frac{dy}{dx} = C_1$$



$$\frac{dy}{c_1 - y} = dx$$

$$y = -e^x + c_1 + C$$

wo c_1 die gegebene Länge des Drahtes und C eine willkürliche Constante bedeutet.

Diese Integralcurve werde also durch unseren Apparat sofort aufgezichnet.

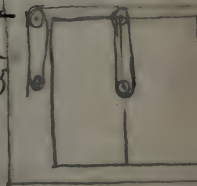
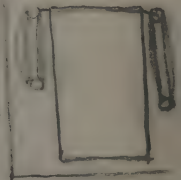
Jetzt ist es nun sehr leicht zu der allgemeinen Diff. Gl.

$$c_2 y + c_1 y_1 = \text{Const.}$$

aufzustiegen, unter c und c_1 ganze Zahlen verstanden.

Man kann für diese Diff. Gl. nämlich sehr einfach einen Mechanismus mit Hilfe des Fleschenzuges construieren wie die nebenstehende Fig. zeigt

Gehe wir noch einen Schritt weiter und setzen nach rechts an unseren Integraphen einen neuen Rahmen an, der selbst einen dritten ebenfalls verschiebaren Stift $x_2 y_2$ und eine Rolle trägt, wie die Fig. zeigt. Wir wollen nun den Draht über alle drei



Rollen ausspannen, sodass wir der Gl. genügen können:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = \text{const.}$$

wo c_1, c_2 gegebene ganze Zahlen sind.

$y_1 = \frac{dy}{dx}$ sein soll. y_2 jedoch soll sich über eine gegebene Curve bewegen, deren Gl.

$$y_2 = \psi(x_2)$$

sein mag und zwar sei z. B. $x_2 = x + 2$.

Dann nimmt unsere Diff. Gl. die Form an:

$$c_1 y + c_2 \frac{dy}{dx} + c_3 \psi(x+2) = C$$

oder auch kürzer geschrieben:

$$c_1 y + c_2 \frac{dy}{dx} = Q(x).$$

Also auch eine Diff. Gl. von dieser Form, wie sie häufig in den Anwendungen vorkommt, könnte man mit Hilfe unseres Apparates integrieren.

So steht uns auch nichts im Wege, dass man die ganze Ueberlegung auf Diff. Gleichungen höherer Ordnung überträgt, indem man mehrere Integraphen hinter einander setzt der Art,

dass die Bahncurve des einen Stiftes immer die Integrationscurve zu der vom vorhergehenden Stifte beschriebenen Curve ist.

Es wäre in der That sehr erfreulich, wenn es gelänge unter Benützung dieser Angaben, solche Apparate wirklich durchzuführen.

B. Die analytische Theorie.

§ 17. Die funktionstheoretische Grundauffassung

Verschaffen wir uns vorerst eine kleine Übersicht über die Funktionen, mit denen man sich in der Analysis zu beschäftigen pflegt. Die einfachsten sind:

1) Die rationalen Funktionen.

2) " algebraischen " "

3) Für transcendente Funktionen bieten uns nun eine erste Quelle

a) die unbestimmten Integrale, indem dieselben Funktionen ihrer oberen

Grenze sind. Wir kommen da zuerst

auf den Logarithmus durch das Integral

$$\int^x \frac{dx}{x} = \log x + C = y.$$

Die Umkehrfkt. e^y ist damit auch gegeben

Dann finden wir in der Integralrechnung

noch andere neue Funktionen, welche

nämlich durch

b) die bestimmten Integrale eingeführt werden. Nehmen wir z. B. das bestimmte

Integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

so ist es immer abhängig von dem Parameter k unter dem Integralzeichen, so dass wir es gleich $I = \Phi(k)$ setzen können. Diese Integrale definieren uns in der Integralrechnung tatsächlich neue Funktionen, die wir nur in ganz speziellen Fällen auf andere Funktionen zurückführen konnten.

Gehen wir nun zu den Diff. Gl. über, so haben wir $\Omega(x, y, y') = 0$, welches uns eine Reihe von Funktionen darstellt, die sich nur durch eine willkürliche Constante unterscheiden. Die Frage wird sein, können wir hier y auf die vorgenannten Fktn zurückführen? Im allgemeinen nicht. Wir legen fest:

Wenn eine Diff. Gl. $\Omega(x, y, y') = 0$ vorgelegt ist, mit Coefficienten, die in den 4 vorangehenden Kategorien enthalten sind, so ist die Frage, ob das durch die Diff. Gl. vorgelegte y

in den 4 vorangehenden Funktions-
categories enthalten ist oder nicht.
Im letzteren Falle entsteht die Aufgabe,
die Eigenschaften der neuen Funktions-
art direkt zu untersuchen, insbesondere
ihren Verlauf, ihre singuläre Punkte
u. s. w. festzustellen.

Es wöhnlich verwendet man in den
Lehrbüchern alle Sorgfalt ausschließ-
lich auf die Frage, ob sich das y
lediglich durch die Funktionen der
vorangehenden Classen ausdrücken
lässt.

Dann sagt man, man kann die
Diff. Gl. integrieren. Die interessanten
Fälle aber, wo das y sich nicht durch
die 4 vorangehenden Funktions-
arten ausdrücken lässt, von denen
sagt man, man kann sie nicht integrieren,
und lässt es dabei bewenden, während
gerade da das Gebiet anfängt, an
dem die Mathematiker der Gegenwart
arbeiten.

1. Traditionelle Methoden.

§ 18. Zweierlei Hilfsmittel: Substitution, Multiplikatortheorie.

Die vorherige? Fragestellung liegt implizite der traditionellen Theorie der Diff. Gl'en zu Grunde, nur dass bei letzterer mehr Gewicht darauf gelegt wird, vorgelegte Diff. Gl'en auf niedere Funktionen zu reduzieren statt sie als Definition neuer Funktionsklassen gelten zu lassen.

Wir wollen nun zwei Gesichtspunkte nennen, nach denen man Diff. Gl'en vereinfachen kann.

Das ist

1. Die Vereinfachung durch Substitution neuer Veränderlichen.

2. Euler's Multiplikator.

1) Hierzu wollen wir folgendes sagen. Was die Vereinfachung durch Substitution angeht, so haben wir dieselbe bereits in dem Beispiele

$$dx = dy = bx + cy \quad b'x + c'y$$

angewandt. Wir hatten dort die Substitution gemacht:

$$\xi = x - m_1 y \quad \eta = x - m_2 y$$

wo m_1 und m_2 so bestimmt werden dass wir hatten

$$d\xi : d\eta = \lambda_1 \xi : \lambda_2 \eta$$

$$\frac{d\xi}{\lambda_1 \xi} = \frac{d\eta}{\lambda_2 \eta}$$

$$\frac{\log \xi}{\lambda_1} = \frac{\log \eta}{\lambda_2} + C.$$

Was ist nun der Sinn dieses Verfahrens?
Wenn wir von den Einzelheiten absehen:
Durch diese Substitution ist es uns gelungen, die Variablen zu separieren, d.h. zu erreichen, dass auf der einen Seite nur die eine Variable steht. Alsdann können wir durch bloße Quadratur die Lösung geben.

Das Hauptziel bei dieser Substitution neuer Variable war also die Separation der Variablen. Können wir eben erreichen, dass durch Substitution eine Diff. Gl. von der Form entsteht:

$$d\xi : d\eta = \varphi(\xi) : \psi(\eta)$$

so lassen sich die Variable sofort separieren und die Lösung ist gegeben durch die Gl.:

$$\int \frac{ds}{\psi(s)} = \int \frac{dn}{\psi(n)} + C.$$

Wir fügen hinzu:

Aber auch, wenn man die Separation der Variable nicht erreicht, wird immer die Frage bleiben, welches die einfachste Form ist, die man einer Diff. Gl. durch Substitution neuer Variablen erteilen kann?

2) Bei Euler's Multiplicatortheorie gehen wir zurück auf die Betrachtungen über das exakte Differential in der Integralrechnung. Wir betrachten damals den Ausdruck

$$M dx + N dy.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass dieser Ausdruck das Differential einer Funktion $F(x, y)$ sei, war

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

und als Funktion $F(x, y)$ ermitteln wir

$$F(x, y) = \int M(x, y) dz + \int^y N(x, \eta) d\eta - \iint^y \left(\frac{\partial M(x, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N(x, \xi)}{\partial \xi} \right) dz d\eta$$

wozu noch eine Constante tritt, entsprechend dem Umstande, dass wir bei dem Integralzeichen die unteren Grenzen weglassen.

Was hat dies nun für eine Beziehung zu unserer Diff. Gl.? Ja, wenn uns eben eine Diff. Gl. von der Form

$$M dx + N dy = 0$$

vorgelegt ist, deren linke Seite das exakte Differential einer Funktion $F(x, y)$, also $= dF(x, y)$ ist, so können wir uns das zugehörige $F(x, y)$ berechnen, und zwar gelingt dies durch eine Anzahl von Quadraturen, wie die obige Formel für $F(x, y)$ zeigt.

Infolgedessen haben wir dann die Integralcurve in der Gestalt $F(x, y) = \text{const.}$

Man könnte die Sache auch so einkleiden, dass man eine Fläche $z = F(x, y)$ betrachtet, und $z = \text{const.}$ setzt. Dann erscheinen die Integralcurven als

"Niveaucurven" der Fläche $z = F(x, y)$.
"Was nun Euler gemacht hat, ist dieses:
Wenn uns ein gewöhnlicher Diff.
Ausdruck von zwei veränderlichen
gegeben ist, so soll versucht werden,
denselben in die Form eines exakten
Diffs. zu bringen. Es sei also z. B.
vorgelegt

$$dy : dx = y : x$$

$$\therefore y dx - x dy = 0$$

Wenn der Ausdruck links nun ein
exaktes Diff. ist, dann muss sein

$$\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial x} = 0$$

Dann gibt uns der obige Ausdruck
für $F(x, y)$ die Lösung. Im allgemeinen
wird dies aber nicht der Fall sein.

Da versucht nun Euler, ob er sich
nicht durch einen passend gewählten
Multiplikator u ein exaktes Diff.
schaffen kann. Er schreibt also:

$$u(y dx - x dy) = 0$$

und fragt nun, wie muss ich das u
bestimmen, damit in dieser Gl. der

Ausdruck auf der linken Seite ein
exaktes Diff. vorstellt!

Die notwendige und hinreichende
Bedingung dafür, wie wir wissen, ist:

$$\frac{\partial(u(x))}{\partial x} + \frac{\partial(u(y))}{\partial y} = 0$$

Daraus ist u zu bestimmen.

Diese Diff. Gl. können wir ausführlicher
schreiben:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) = 0$$

Wir erhalten also für das u selbst
wieder eine Diff. Gl. und zwar eine
partielle. Soweit bedeutet daher der
ganze Ansatz noch keinen Fortschritt,
da wir die vorgelegte Diff. Gl. mit
2 Variablen durch eine partielle
Diff. Gl. mit 3 Variablen ersetzt haben
und dann in Aussicht nehmen, wenn
wir einen Wert von u aus dieser Gl.
bestimmt haben, dann erst noch das
exakte Diff. Gl.

$$u y dx - u x dy = dF = 0$$

durch eine Reihe von Quadraturen zu integrieren

Die Erfahrung zeigt indes, dass man wirklich in zahlreichen Fällen, wo eine direkte Behandlung der vorgelegten Diff. Gl. nicht gelingen will durch Bestimmung eines u zum Ziele kommt.
z. B. vorgelegt sei

$$y \, dx - x \, dy = 0$$

Da ist die linke Seite kein exaktes Diff.; denn $\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial x} = 2 \neq 0$. Wir nehmen daher

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = -2u.$$

Da ist nun in der That sehr einfach eine Lösung zu finden. Wir nehmen an, u sei nur von x abhängig, denn fällt das zweite Glied links weg und wir haben sofort eine Gl., in der die Variable sich separieren lassen.

$$\frac{d-u}{2-u} = -\frac{dx}{x}$$

$$u = \frac{K}{x^2}$$

Es ist dann (K sei $= 1$)

$$u (y \, dx - x \, dy) = \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2} = d\left(-\frac{y}{x}\right)$$

Es ergibt sich also

$$-\frac{1}{r} = \text{const.}$$

als System der Integralcurven unserer
Diffl. Gl.

Diese beiden angedeuteten Ideen
müssen wir nun weiter verfolgen
und zwar kommen wir dabei in
das Gebiet hinein, auf dem Lié so
ausserordentlich viele Anregungen
geschaffen hat. Zur Einführung in
den bezüglichen Gedankenkreis,
sei empfohlen: Lié-Scheffers,
Geometrie der Berührungstransformationen
1896

Von diesem Werk bedürfen wir
hier nur die etwa ersten 30 Seiten.
Das andere würde uns zu weit führen.

§ 19. Einführung neuer Veränderlicher durch beliebige Punkttransformation. Wir verfolgen jetzt die Transformation der Diff. Gl. durch Einführung neuer Variable. Und zwar setzen wir zunächst:

$$x_1 = \varphi(x, y) \quad y_1 = \psi(x, y)$$

Dabei soll es möglich sein, diese Gleichungen nach x und y aufzulösen, so dass wir erhalten:

$$x = \varphi_1(x_1, y_1) \quad y = \psi_1(x_1, y_1)$$

Bilden wir uns einmal den Diff.

Quotient y_1' , so haben wir:

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y'}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'}$$

Die Werte von x y y' sind in die vorgelegte Diff. Gl. einzusetzen.

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie wir solche Formeln geometrisch auffassen können.

Da legt nun die analytische Geometrie denselben zweierlei Bedeutung bei:

a) sie bedeuten eine Einführung neuer Koordinaten,

b) eine Punkttransformation bei Festhaltung des Koordinatensystems.

Für unsere Diff. Gl. hat nur diese zweite Auslegung folgende Bedeutung: Wir ordnen doch zu jedem Punkte x, y vermöge $\Omega(x, y, y') = 0$ eine Fortschrittsrichtung zu. Diese schliessen wir dann zu Integralcurven zusammen.

Durch die neue transformierte Diff. Gl.

$\Omega_1(x, y, y'_1) = 0$ erhalten wir zu jedem transformierten Punkte x, y , eine neue Fortschrittsrichtung y'_1 .

Wir können nun sofort den Satz aussprechen:

Bei einer solchen Punkttransformation möge eine erste Diff. Gl. in eine zweite übergehen; dann wird sich auch die Integralcurve der ersten Diff. Gl. in die Integralcurve der zweiten Diff. Gl. verwandeln.

§ 20. Speziell durch Collineation. Die allgemeine Jakobische Gleichung, welches ist nun die einfachste Art solcher Transformationen? Das ist die lineare Transformation, die in der projektiven Geometrie die Grundlage bildet. Man setzt hierbei die Coordinaten x, y , je gleich dem Quotienten zweier linearer Ausdrücke mit gemeinschaftlichen Nennern, also:

$$1) \quad x_1 = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\alpha' x + \beta' y + \gamma'} \quad , \quad y_1 = \frac{\alpha'' x + \beta'' y + \gamma''}{\alpha' x + \beta' y + \gamma'}$$

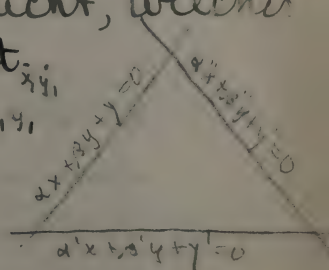
Fassen wir diese Substitutionen als Coordinaten-Transformationen auf, so kommen dabei die 3 Seiten eines Dreiecks in Betracht, welches in der Fig. dargestellt ist.

Deshalb nennt man die x, y , Dreiecks-Coordinationen.

Wir werden dies so

zusammenfassen:

In der Interpretation a) bedeutet unsere



Substitution, dass wir statt der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten Dreieckscoordinaten einführen. Das hat für bestimmte Zwecke seine grossen Vorzüge.

Bei der Interpretation b) wird jedem Punkte x, y ein Punkt x_1, y_1 zugeordnet, und da ist ganz deutlich, wenn sich x_1, y_1 auf einer geraden Linie $A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 = 0$ bewegt, dass dann auch x, y sich auf einer Geraden bewegt. Denn wenn wir für x_1, y_1 die Werte aus (1) in diese Gl. einsetzen, so wird dieselbe wieder linear in x und y , also

$$Ax + By + C = 0;$$

d. h. Punkte, die auf einer geraden Linie liegen bleiben nach der Transformation auf einer geraden Linie. Nach der Auffassung von b) bedeutet also unsere Substitution eine Transformation der Ebene durch Collineation.

Dies ist eine Transformation, die in der projectiven Geometrie beständig

benutzt wird: Die Centralprojektion einer geraden Linie auf eine Ebene, bleibt eine gerade Linie, ist also eine besondere Art von Collimation.

Geometrisch entsteht die allgemeinste Collimation durch wiederholte Centralprojektion einer Ebene auf eine zweite.

Diese Transformation werden wir nun gerade in der Theorie der Diff. Gleichung zur Anwendung bringen, und da ist die erste Frage, wie transformiert sich das $y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$?

Dazu haben wir das vollständige Differential von x_1 zu bilden. Wir erhalten aus (1):

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{(\alpha''x + \beta''y + \gamma'')(a dx + \beta dy) - (a'x + \beta'y + \gamma')(a''dx + \beta''dy)}{N^2} \\ &= \frac{(\alpha'y'' - \alpha''y') dx + (\beta'y'' - \beta''y') dy + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') (x dy - y dx)}{N^2} \end{aligned}$$

$$dy_1 = \frac{(\alpha'y'' - \alpha''y') dx + (\beta'y'' - \beta''y') dy + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') (x dy - y dx)}{N^2}$$

Mithin ist:

$$2) \quad y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = \dots$$

Somit können wir jetzt auf eine gegebene Diff. Gl. solche Collimation ausüben.

Allgemein wird man fragen, ob eine vorgelegte Diff. Gl. $\Omega(x, y, y') = 0$ durch diese Formeln vereinfacht werden kann, indem man die neuen Coefficienten

$\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ zweckmäßig annimmt!

Wir wollen hier jedoch den umgekehrten Gang machen. Wir wollen die ganz einfache Diff. Gl. benutzen, die wir nämlich integrieren, und wollen zusehen, welche allgemeinste G. erhält dieselbe durch ihre Transformationsformeln) erhält. Wir hatten das Beispiel

$$dx : dy = bx + cy : b'x + c'y$$

Wir führten die neuen Größen

$$x_1 = x - m_1 y \quad y_1 = x - m_2 y$$

ein, wobei

$$dx_1 : dy_1 = \lambda_1 x_1 : \lambda_2 y_1$$

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1} = \frac{dy_1}{\lambda_2 y_1}$$

Dies war die Diff. Gl. der W-Curven, die durch Quadratur sofort zu integrieren

war. Wir sehen hier zunächst:
Ein Beispiel für die Vereinfachung
einer vorgelegten Diff. Gl. durch
zweckmässige Collineation, ist bereits
unsere frühere Behandlung der Gl.:

$$dx : dy = bx + cy : b'x + c'y$$

die wir eben durch einfache
Collineation in die Gestalt:

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1} = \frac{dy_1}{\lambda_2 y_1}$$

transformierten.

Jetzt also wollen wir wie bereits
oben gesagt, die Umkehr dazu
vornehmen. Es soll uns gegeben
sein die Diff. Gl.

$$dx_1 : dy_1 = \lambda_1 x_1 : \lambda_2 y_1 \quad \text{oder}$$

$$\lambda_1 x_1 dy_1 - \lambda_2 y_1 dx_1 = 0$$

Diese Diff. Gl. der W.-Curven können wir
tatsächlich integrieren und fragen
uns nun, welches ist die allgemeinste
Gl., die wir auf diese einfache Form
durch Collineation bringen können?
Durch Gl. (v) geht die vorgelegte Diff. Gl.
über in:

$$0 = \lambda_1 (\alpha x + \beta y + \gamma) [(\alpha' y'' - \alpha'' y') dx + (\beta' y'' - \beta'' y') dy + (\alpha'' \beta' - \alpha' \beta'') (x dy - y dx)] \\ - \lambda_2 (\alpha' x + \beta' y + \gamma) [(\alpha'' y'' - \alpha'' y') dx + (\beta'' y'' - \beta'' y') dy + (\alpha'' \beta'' - \alpha' \beta'') (x dy - y dx)]$$

Das also ist die allgemeinste Diff. Gl., welche wir vermöge einer beliebigen Collineation aus der gegebenen Diff. Gl. herstellen können. Ordnen wir dieselbe zweckmässig, so können wir schreiben:

$$3) \quad 0 = (Ax + By + C) dx + (A'x + B'y + C') dy + (A''x + B''y + C'') (x dy - y dx)$$

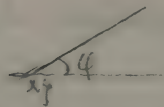
Wir können unser Resultat so aussprechen: Die allgemeinste Diff. Gl., welche aus der vor uns betrachteten besonderen durch beliebige Collineationen hervorgeht, hat immer die Gestalt der Gl. (3). Die Frage ist jetzt, ob umgekehrt jede solche vorgelegte Diff. Gl. durch eine geeignete einfache Collineation auf die einfache Form gebracht werden kann? Das ist in der That der Fall, wie Jacobi in Crelle's Journal Bd. 24, 1842 gezeigt hat, wober der Name „Jakobische Gl.“ die Jakobische Begründung kann aus Zeitmangel nicht gegeben werden, siehe also dort nach.

§ 21. Die Idee der Berührungstransformationen.

Das Wort Berührungstransformation hat zweierlei Bedeutung: Allgemein werden Berührungstransformationen alle Transformationen der Ebene sein, welche Curven, die sich berühren, in Curven überführen, die sich ebenfalls berühren, bei denen also, wie man sagt, die Berührung ein Invariantenbegriff ist. Hierher gehören insbesondere alle Punkttransformationen. Speziell nennt man aber Berührungstransformationen diejenige Transformation der genannten Eigenschaft die keine Punkttransformation ist, und wir werden uns dies im folgenden klar zu machen haben, indem wir uns sogleich der allgemeinen Theorie von L zuwenden:

Als Grundgebilde der Ebene sehen wir das Linienelement an, d. h. einen Punkt mit einer hindurchgehenden

Geraden. Ein solches Linienelement hat 3 Coordinaten, die beiden Coordinaten x und y eines Punktes und die Richtungscoordinat $z = \tan \varphi$.



Der einzelne Punkt in der Ebene, wie auch die Curve erscheinen dabei als Aggregat von einfach unendlich vielen Linienelementen. Das eine Mal hat man alle Linienelemente, welche durch den Punkt hindurchlaufen, und das andere Mal alle Linienelemente, welche die Curve tangieren.

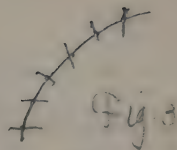


* Fig 2

Nun aber haben diese eben betrachteten einfach unendlich vielen Mannigfaltigkeit von Linienelementen eine charakteristische Eigenschaft. Machen wir uns das folgendermassen klar:

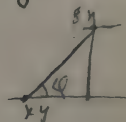
Wir nehmen z. B. eine einfach unendliche Reihenfolge von Linienelementen

nach Art der Fig. und fragen uns nun, wodurch unterscheiden sich diese von den ersteren?



Ja bei Fig. 1 geht immer das Linienelement des vorhergehenden Punktes x, y , durch den folgenden Punkt ξ, η , hindurch (genauer gesagt: Der Abstand des ξ, η vom Linienelement x, y, z ist ein unendlich kleiner zweiter Ordnung).

Dieselben sind also an die Bedingung gebunden:



$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \operatorname{tg} \varphi = z$$

Nun ist aber $(\xi, \eta) = (x + dx, y + dy)$. Wir erhalten somit die Bedingung: $z = \frac{dy}{dx}$. Das würde eben bei der Fig. 3 durchaus nicht der Fall sein. Wir werden daher sagen: Die einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Linienelementen, die sich an eine Curve anschließen, erfüllen die Relation:

$$dy - z dx = 0.$$

Thun das nun die unendlich vielen Elemente auch, die sich an einen Punkt anschließen? Gewiss, weil ja fortgesetzt

$$dx = 0 \quad dy = 0.$$

Also für Fig. 1 und Fig. 2 gilt gemeinsam:

$$dy - z dx = 0.$$

Unter „charakteristischer Mannigfaltigkeit“ verstehen wir eine einfach unendliche Reihenfolge von Linienelementen, für welche gilt:

$$dy - z dx = 0.$$

Was wird nun eine Berührungstransformation sein? Zunächst ist es eine Transformation der Linienelemente.

Ordnen wir einmal dem x, y, z ein neues x_1, y_1, z_1 zu gemäß der 4 Gleichungen:

$$x_1 = \varphi(x, y, z), \quad y_1 = \psi(x, y, z), \quad z_1 = \chi(x, y, z)$$

so ist dies die allgemeinste Transformation des Linienelementes aber noch keine Berührungstransformation.

Wir wollen jetzt festsetzen, dass bei einer solchen Transformation aus einer

charakteristischen Mannigfaltigkeit
wieder eine solche werden soll.

Dann muss eben sein: $dy, -z, dx, = 0$.

wenn gleichzeitig $dy - z dx = 0$.

Es muss somit $dy, -z, dx,$ ein Multiplum
von $dy - z dx$ sein, also:

$$dy, -z, dx, = \rho (dy - z dx)$$

unter ρ irgend einen Faktor verstanden.

Jetzt können wir definieren:

Eine Transformation der Linien-
elemente nennen wir eine Berührungstransformation, wenn sie die charakteristischen Mannigfaltigkeiten wieder in solche überführt. Schreiben wir:

$$x_1 = \varphi(x, y, z) \quad y_1 = \psi(x, y, z) \quad z_1 = \chi(x, y, z)$$

so haben wir eine Berührungstransformation, wenn zugleich φ, ψ, χ an die Relation gebunden sind:

$$dy_1 - z_1 dx_1 = \rho (dy - z dx).$$

§ 22. Punkttransformationen sind
allgemeinere Berührungstransformationen.
Prüfen wir dies an der Punkttransformation.

Wir setzen:

$$x_1 = \varphi(x, y) \quad y_1 = \psi(x, y)$$

Das z_1 sollte aber gegeben sein durch die Gl.

$$z_1 = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

Die Frage ist nun: ist dies eine Berührungstransformation im Sinne unserer neuen Definition? Fixieren wir soeben die Antwort in dem Satze:

Ein spezieller Fall einer Berührungstransformation ist eine Punkttransformation

$$x_1 = \varphi(x, y) \quad y_1 = \psi(x, y)$$

wenn wir dieselbe so erweitern dass wir als dritte Gl. hinzufügen:

$$z_1 = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

Das ist in der That eine spezielle Transformation, indem einem Punkte x, y wieder ein Punkt x_1, y_1 zugehört, während beim allgemeinen Fall dem Punkte x, y eine Curve entspricht. Schreiten wir zum Beweise

unserer Behauptung: Es ist

$$dx_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy, \quad dy_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy.$$

Dies in die Gl. $dy_1 - z dx_1 = 0$ eingesetzt gibt

$$0 = \frac{(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy)(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y}) - (\frac{\partial \psi}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial y})(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

Ordnen wir den Zähler anders, so können wir schreiben:

$$dy_1 - z dx_1 = \frac{(dy - z dx)(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y})}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $dy_1 - z dx_1$ wirklich ein Multiplum von $dy - z dx$ ist. Dabei ist p gleich der sogenannten Funktional-determinante $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ dividiert durch den Nenner $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Nun wollen wir die Berührungstransformationen zu verstehen suchen, die keine P untransformations sind. Wir setzen fest, dass den unendlich vielen Elementen, die durch einen Punkt x, y , der Ebene links (Fig.)

*
 x, y, z

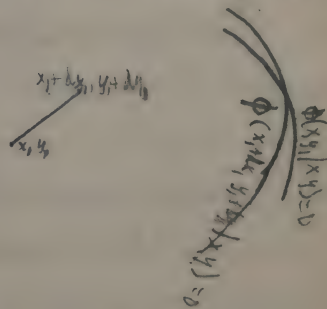


hindurchgehen, und die durch x, y, z , bezeichnet sind, solche Elemente entsprechen sollen, die längs einer Curve C der Ebene reihentand aneinander gereiht sind. Gehen wir einmal jetzt synthetisch vor und stellen uns die Gl. $\Phi(x, y, |x, y) = 0$ auf, so ist dies als eine Gl. in x und y aufzufassen, in welcher die x, y , als Parameter auftreten. Diese Gl. soll die Curven der xy -Ebene vorstellen, welche bzgl. den Punkten x, y , der anderen Ebene entsprechen. Sie kommt schon bei Plücker vor, der sie Aequatio directrix nennt.

Wir stellen sie an die Spitze der folgenden Betrachtung und fragen uns jetzt, können wir uns eine Berührungstransformation construieren, die diese Aequatio directrix benutzt? Können wir also auffinden, wie sich die Linienelemente der beiden Ebenen links und rechts entsprechen sollen, wenn die Aequatio directrix gegeben ist?

Wir nehmen uns linkerhand einen Punkt x, y , an und einen zweiten benachbarten $x, +dx, y, +dy$, und betrachten nun dasjenige Linienelement welches den beiden Punkten gemeinsam ist (Fig.). Nun wollen wir sehen, ob wir rechterhand das Linienelement finden können, das diesem entspricht.

Es entspricht nun dem Punkte x, y , die Curve $\phi(x, y, |x, y) = 0$, und ebenso dem benachbarten Punkte $x, +dx, y, +dy$, eine Nachbarcurve



$$\phi(x, +dx, y, +dy, |x, y) = 0.$$

Dem gemeinsamen Elemente der beiden Punkte für den Grenzfall, dass sie immer näher und näher rücken, entspricht dasjenige Linienelement, welches den beiden Curven gemeinsam ist, d. h. welches im Schnittpunkt der beiden Curven (die in der Grenze zusammenfallen) dieselben berührt.

Wir drücken wir das analytisch aus?
Zunächst wie lauten die Koordinaten
des Schnittpunktes?

Wir finden sie durch Nebeneinanderstellen
der 4 Gleichungen beider Curven:

1. $\Phi = 0 \quad , \quad \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dy_1 = 0$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dy_1 = 0$$

oder

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0$$

2.

welche uns mit (1) genommen den
Schnittpunkt x, y (rechterhand) festlegt.
Die Richtung des Tangentialelementes
rechterhand aber ist gegeben durch:

3.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + z \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

Wir fassen zusammen:

Das Linienelement, welches dem
linkerhand gegebenen Linienelement
 x, y, z entspricht, muss aus den drei
4 Gleichungen berechnet werden:

1.) $\Phi = 0$ 2.) $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} z_1 = 0$ 3.) $\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} z = 0$.

Die Frage wird wieder sein: Ist das eine Berührungstransformation? Wir werden finden, dass dies tatsächlich der Fall ist, wie auch immer die Aequatio directrix gegeben sein mag.

Dies werden dann die Formeln für alle diejenigen Berührungstransformationen sein, welche keine Punkttransformationen sind, was im folgenden näher zu begründen ist.

Sehen wir zu, welches Z in einem Element dem Z in einem Element $x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1$ zugeordnet ist. Wir bezeichnen dasselbe mit $x + dx, y + dy, z + dz$ und werden unsere 3 Gleichungen mit diesen abgeänderten Coordinaten hinschreiben: Wir erhalten:

$$1a) \quad \Phi(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, | x + dx, y + dy) = 0$$

$$2a) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + Z, \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right)_{x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1, | \dots} = 0$$

$$3a) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Z \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1, | \dots} = 0$$

Entwickeln wir die Gl. 1a) nach den Inkrementen, so sehen wir, dass zu dem

ersten 4 liede $\phi = 0$ noch der Ausdruck:

$$1') \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

hinzutritt. Entsprechend bilden sich dann aus Gl. 2a) und Gl. 3a) resp.

$$2') \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + z_1 \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \right)_{x_1+dx_1, \dots}}{\partial x} dx_1 + \dots = 0$$

$$3') \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + z \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{x_1+dx_1, \dots}}{\partial x} dx + \dots = 0$$

Hat man also durch die Gl'en 1), 2), 3) einem Elemente x, y, z , ein bestimmtes Linienelement x, y, z zugeordnet, so werden die Gl'en 1', 2', 3' ergeben, welche dx, dy, dz gegebenen dx_1, dy_1, dz_1 entsprechen, d. h. welche benachbarten Elemente rechterhand und linkerhand sich entsprechen.

Wir haben nun zu zeigen, dass die Gl.

$$dy_1 - z_1 dx_1 = p(dy - z dx)$$

als Folge der 6 vorstehenden Gleichungen besteht.

Setzen wir in Gl. 1') für das erste Glied seinen Wert aus Gl. 2) ein und für das dritte Glied seinen Wert aus Gl. 3),

so haben wir:

$$-z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dy_1 - z \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0.$$

Ordnen wir dies zweckmässig, so bekommen wir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} (dy_1 - z_1 dx_1) = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} (dy - z dx)$$

$$dy_1 - z_1 dx_1 = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} (dy - z dx).$$

Damit ist in der That gezeigt, dass $dy_1 - z_1 dx_1$ ein Multiplum von $dy - z dx$ ist. Wir fassen das Endresultat in die Worte zusammen:

Die Transformation der Linien-elemente, welche wir probeweise in Ansatz brachten, indem wir die Gleichung directrix vorstellten, ist wirklich eine Berührungstransformation.

§ 23. Geometrische Bedeutung dieser allgemeinen Berührungstransformationen. Was bedeutet nur diese Berührungstransformation geometrisch?

Wir hatten doch dem Punkte x, y ,
 linkerhand vermöge der Aequatio
 directrix eine Curve C rechterhand
 zugeordnet. Das entspricht zugleich
 dem Umstande, dass die Linienelemente,
 die durch x, y , linkerhand gehen, sich
 rechterhand zu einer Curve C
 aneinanderreihen.

Daraufhin können wir nun sogleich
 an Hand der Figur

den neuen Satz
 aussprechen: Eine

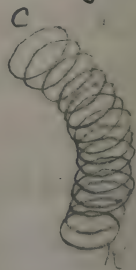
Curve K , linkerhand

entspricht rechterhand

das Umhüllungsgebilde K

aller derjenigen Curven C , welche den
 Punkten von K , zugeordnet sind.

Dies ergibt sich leicht auf folgende
 Weise: Wir verstanden unter K , doch
 die Aneinanderreihung der Linien-
 elemente, die je zwei aufeinander-
 folgenden Punkten x, y , gemeinsam ist.
 Dem entsprechen nun rechterhand die



R Reihenfolge derjenigen Linienelemente,
 die je zwei benachbarten Curven C gemein-
 sam sind, welche also den Schnittpunkten
 zweier benachbarten Curven angehören.
 Das ist aber die Umhüllende. Die ganze
 Ausdruckswise ist eben nur eine
 andere Formulierung dessen, was wir
 bei der Aufstellung der Gleichungen
 1, 2, 3) früher ohnehin überlegt haben.
 Wie werden wir umgekehrt, wenn recht-
 erhand ein Punkt x, y gegeben ist, die
 entsprechende Curve K_1 finden, und wie,
 wenn rechterhand eine Curve K gegeben
 ist, die entsprechende Curve K_1 finden?
 Dazu brauchen wir nur unsere Gleich-
 ungen betrachten:

$$\Phi(x, y, |x, y) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + z \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + z \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

Da haben wir bisher die subjektive
 Festsetzung getroffen, dass x, y , als
 Parameter, x, y als laufende Coordinaten
 zu betrachten sind. Da diese Gleichungen
 in ihrer Bauart ganz symmetrisch

sind in den x, y und x, y , so können wir sofort folgenden Satz aussprechen: Die umgekehrte Berührungstransformation ordnet den Punkten x, y , welche rechte Hand aufsetzen, auf der linken Hand diejenigen Curven C , zu, welche durch die *directrix* dargestellt werden, wenn wir in derselben die x, y als Parameter, die x, y , als laufende Coordinaten ansehen.

Ebenso können wir jetzt auch die andern früheren Sätze genau wiederholen, indem wir die accentuirten und nicht accentuirten Buchstaben vertauschen.

Wir wollen hierzu ein einfaches Beispiel durchrechnen, schicken jedoch folgende historische Bemerkung voraus:

Die Berührungstransformation ist für die *Geometrie* eines der schönsten und fruchtbarsten Gebiete, indem man von einem bekannten einfachen Gebilde auf das transformierte schließen kann.

Leider werden diese Dinge meist nicht gehörig gewürdigt. Was überhaupt die Fortschritte auf dem Gebiete der Geometrie anbelangt, so trat im Jahre 1822 Poncelet mit seiner *géométrie projective* hervor, die man heutzutage immer noch vielfach neuere *Géométrie* nennt. Dann setzte mit dem Jahre 1870, von Lie ausgehend, eine neue Periode in der Entwicklung der Geometrie ein, indem an Stelle der projektiven *Géométrie*, die allgemeine Transformationsgeometrie (die neueste *Geometrie*) trat, die aber, wie schon oben gesagt, noch lange nicht gehörig gewürdigt wird.

§ 24. Die Correlation als Beispiel.

• Eben wir jetzt ein Beispiel von Berührungstransformation, die keine Punktransformation ist:

Wir nehmen unsere *Aequatio directrix* in beiden Coordinaten genau linear,

also von der Form:

$$(ax_1 + by_1 + c)x + (a'x_1 + b'y_1 + c')y + (a''x_1 + b''y_1 + c'') = 0$$

Wie ist dann unsere Berührungstransformation zu deuten?

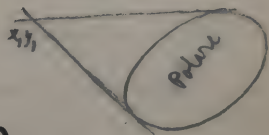
Halten wir x_1, y_1 fest, so haben wir in laufenden Coordinaten x, y eine gerade Linie C .

Halten wir x, y fest, so haben wir in laufenden Coordinaten x_1, y_1 , ebenfalls eine Gerade C_1 .

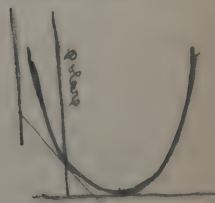
Wir sehen dem Punkte der einen Ebene entspricht immer ein Punkt der anderen Ebene. Diese spezielle Berührungstransformation ist in der projektiven Geometrie unter dem Namen dualistische Transformation oder Correlation längst bekannt, insofern man dort den Punkten der einen Ebene nicht beliebige Curven sondern gerade Linien als Gegenbilder gegenüberzustellen sucht.

Ein spezieller Fall dieser Correlation ist die sogenannte Polarreciprocität in

Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt, die darin beruht, dass man jedem Punkte x, y , der Ebene diejenige gerade Linie zuordnet, welche durch die Berührungspunkte des von dem Punkte x, y , an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten geht.



Wir nehmen hieraus wieder einen ganz speziellen Fall:



Der Kegelschnitt sei eine Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$. Die Frage ist:

Wie heißt die Polare zum Punkte x, y , in Bezug auf die Parabel?

Nach bekannten Regeln: $y + y_1 = x x_1$.

Dabei wollen wir beachten dass, wenn der Punkt x, y , auf die Parabel rückt, die gerade Linie, also die Polare, Tangente in dem Punkte wird.

Es werden also alle Linienelemente die durch den Punkt x, y , gehen, sich in Linienelemente transformieren, deren Aneinanderreihung eben die Polare ist. Wir legen die Aequatio directrix

$$1) \quad \phi = y + y, -x, z = 0$$

zu Grunde, und es gelten dann, wenn unsere Transformation eine Berührungstransformation ist, nach obigen die weiteren Gleichungen:

$$2) \quad -x + z = 0, \quad 3) \quad -x_1 + z = 0$$

Aus diesen 3 Gleichungen kann man also das Linienelement berechnen welches einem gegebenen x, y, z entspricht. Lösen wir die 3 Gleichungen nach x, y, z auf, so ergibt sich:

$$x = z, \quad y = -y_1 + x_1 z, \quad z = x_1$$

und nach x, y, z aufgelöst:

$$x_1 = z, \quad y_1 = -y + xz, \quad z_1 = x$$

Hierdurch müsste also nach den früheren Sätzen eine Berührungstransformation vermittelt werden.

Rechnen wir das kurz nach: wir haben

$$dx_1 = dz, \quad dy_1 = -dy + xdz + zdx, \quad dz_1 = dx$$

Setzen wir diese Werte in $dy_1 - z_1 dx_1$ ein, so bekommen wir

$$dy_1 - z_1 dx_1 = -dy + xdz + zdx - xdz = -(dy - zdx),$$

und damit ist tatsächlich bewiesen, dass

unsere Transformation eine Berührungstransformation ist; denn sie transformiert $dy_1 - z_1 dx$ einfach in $-(dy - z dx)$.

Es ist nun natürlich eine Sache der Übung, die \mathcal{G} -ebenen der Transformationen aus gegebenen \mathcal{G} -ebenen schnell zu finden. Ich möchte an dieser Stelle mich auf meine Leipziger Vorlesung über projektive Geometrie beziehen.

§ 25. Anwendung der Berührungstransformationen auf Diff. Gleichungen.
Theorie der Clairautschen Gleichungen.
Die allgemeine Transformation der Berührungstransformation der Linienelemente wurde vermittelt durch die Gleichungen

$$x_1 = \varphi(x, y, z) \quad y_1 = \psi(x, y, z) \quad z_1 = \chi(x, y, z)$$

wobei

$$dy_1 - z_1 dx_1 = f(dy - z dx)$$

und der besondere Fall der Berührungstransformation durch die Gleichungen

$$x_1 = z \quad y_1 = xz - y \quad z_1 = x$$

oder

$$x = z, \quad y = xz - y, \quad z = x_1.$$

Die Frage ist nun wie wird eine solche Berührungstransformation auf eine Diff. Gl.?

Machen wir uns vor et eine Vorstellung davon, was ist eine Diff. Gl. und was heißt es, sie integrieren? Wir wollen hierbei an eine frühere Ideenbildung anknüpfen: Wir schrieben statt

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

die beiden Gleichungen

$$\Omega(x, y, z) = 0 \quad dy - z dx = 0$$

und verbanden damit die Idee, dass die Diff. Gl. $\Omega(x, y, z) = 0$ aus der Zahl der dreifach unendlich vielen Linienelementen, die es überhaupt gibt, eine zweifach unendliche Schar herausgibt.

Was wollen wir nun mit dieser Linienelementen machen? Wir wollen diese aneinanderreihen entsprechend der Gl. $dy - z dx = 0$. Wir formulieren dies in dem Satz: Die Gl. $\Omega = 0$ integrieren, heißt die

zweifach unendlich vielen Linienelemente der Gl. entsprechend der Relation $dy - z dx = 0$ zu charakteristischen Mannigfaltigkeiten zusammenzufassen.

Wenn wir in dieser Weise den Gegenstand der Diff. Gl'en auffassen, so ist es klar, was die Berührungstransformation bedeutet. Dieselbe verwandelt eben die Linienelemente der gegebenen Gl. in Linienelemente einer transformierten Gl.

Und das ist nun gerade das Wesen der Berührungstransformation, dass sie aus der Gl. $dy - z dx = 0$ die Gl. $dy_1 - z_1 dx_1 = 0$ ableitet, d. h. dass sie die charakteristischen Mannigfaltigkeiten, die sich aus den Elementen von $\Omega = 0$ zusammensetzen lassen, genau in die charakteristischen Mannigfaltigkeiten verwandelt, die sich aus den Elementen von $\Omega_1 = 0$ zusammenfassen lassen. Hat man also die eine Gl. integriert, so hat man auch die andere integriert, denn die Integrale der einen Gl. gehen aus den Integralen

der anderen Gl. durch die Berührungstransformation hervor.

Infolgedessen können bei der Integration der Diff. Gl. $\Omega = 0$ Berührungstransformationen genau so zum Zwecke der Vereinfachung gebraucht werden, wie blosse Punkttransformationen.

Diese letzten Betrachtungen wollen wir nun an dem berühmten Beispiel der Clairaut'schen Gl. durchproben. Dasselbe heisst:

$$y = x y' - \Phi(y')$$

wo $\Phi(y')$ irgend wie gegeben sein soll. Wir werden also schreiben:

$$0 = x z - y - \Phi(z)$$

und daneben

$$dy - z dx = 0$$

Auf diese Diff. Gl. wollen wir nun unsere Berührungstransformation, die wir bei der Parabel kennen lernten, anwenden. Wir hatten die Transformationsgleichungen:

$$x = z, \quad y = x_1 z - y_1, \quad z = x_1$$

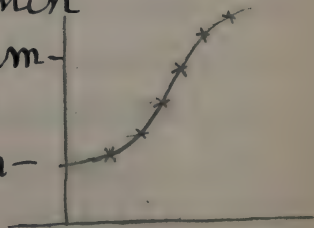
Setzen wir dies in die gegebene Gl. ein,
so wird:

$$0 = y_1 - \varphi(x_1)$$

Das ist in der \mathcal{T} hat eine verblüffend
einfache Gl., in der nicht einmal der Diff.
Quotient $y_1' = z_1$ vorkommt. Was heißt
nun eine solche Gl.? Wir haben zunächst
im rechtwinkligen Coordinatensystem
eine Curve

$$y_1 = \varphi(x_1)$$

Die Bedeutung derselben ist nun,
dass durch jeden Punkt derselben noch
einfach unendlich viele Linienelemente
hindurchgehen. Wir können
daher sagen: Die transform-
ierte Gl. hebt aus der
Gesamtheit aller Liniene-
lemente diejenigen
zweifach ∞ vielen heraus, deren Mittel-
punkte auf einer festen Curve $y_1 = \varphi(x_1)$
liegen. Insofern dürfen wir diese Gl.
also doch als Diff. Gl. bezeichnen, indem
wir einfach noch daneben schreiben:



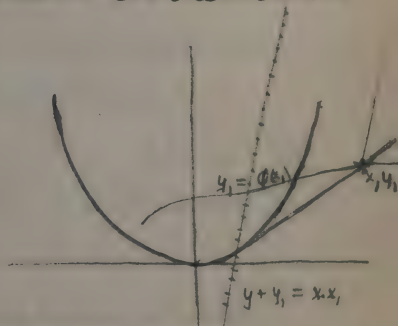
$$dy_1 - z_1 dx_1 = 0$$

Dabei heben wir noch ausdrücklich hervor, dass wir vorher nicht sagten, die Linienelemente sollten zu Curven aneinander gereiht werden, sondern allgemein zu charakteristischen Mannigfaltigkeiten. Daher können wir jetzt den Satz aussprechen:

Entsprechend unserer allgemeinen Auffassung ist eine solche Gl. $y_1 = \varphi(x_1)$ eo ipso integriert. Nämlich es wird das allgemeine Integral vorgestellt durch die einzelnen Punkte, welche unsere Curve trägt. Jeder einzelne dieser Punkte aufgefasst als Contour der durch ihn hindurchlaufenden Linienelemente. Dazu kommt dann als singuläre Lösung, als Umhüllungsgebilde, die Curve $y_1 = \varphi(x_1)$ selbst.

Wir haben also hier gar keine Quadraturen mehr nötig; die Integration ist von vornherein als erledigt anzusehen. Gehen wir jetzt zur Clairaut'schen

Diff. Gl. zurück, so verwandeln sich die Punkte unserer Curve $y_1 = \varphi(x_1)$ in lauter gerade Linien, nämlich in die Polaren hinsichtlich der zu Grunde liegenden Parabel; d. h. die Linienelemente, die sich an einen Punkt x, y , anschließen, verwandeln sich in die Linienelemente, welche die genannte Polare überdecken. Unsere Curve $y_1 = \varphi(x_1)$ verwandelt sich in das Umhüllungsgebilde der Polaren.



Daher können wir so resumieren:

Die allgemeinen Integrale der Clairaut'schen Gl. wurden uns eben durch diese Polaren der Punkte unserer Curve hinreichend geliefert. Dazu tritt noch als singuläre Lösung das Umhüllungsgebilde dieser Polaren.

Jetzt haben wir noch die analytische Formulierung zu geben:

Die allgemeinen Integralcurven der

Clairaut'schen Diff. Gl. haben die Gl.

$$1) \quad y = x_1 \cdot x - \varphi(x_1) \quad (= x_1 x - \varphi_1)$$

Das ist eine Schar von ∞ vielen geraden Linien, deren Parameter x_1 ist. Das Umhüllungsgebilde derselben ergibt sich aus den Gleichungen zweier benachbarten geraden Linien-, also

$$y = x_1 x - \varphi(x_1) \quad , \quad y = (x_1 + dx_1)x - \{ \varphi(x_1) + \varphi'(x_1) dx_1 \}$$

oder

$$y = x_1 x - \varphi(x_1) \quad 0 = x - \varphi'(x_1)$$

Will man nun die Gl. der Enveloppe haben, so müsste man das x_1 eliminieren. Wir können aber auch x und y durch den Parameter x_1 ausdrücken.

Als dann hat man:

$$2) \quad x = \varphi'(x_1) \quad , \quad y = x_1 \varphi'(x_1) - \varphi(x_1)$$

Die Schar der allgemeinen Integralcurven ist uns also gegeben durch Gl. (1) und die Enveloppe dieser Integralcurven, welche als singuläre Lösung anzusehen ist, ist uns durch die Gl. (2) in Parameter dargestellt gegeben. Damit hatten wir die Clairaut'sche

Diff. Gl. wirklich integriert, und es
erforderte nur noch zu verifizieren,
dass dies nun auch richtig geschehen
ist. Was die geraden Linien der Gl. 1)
anght, so ist für dieselben $y' = x$, sodass
die Gl. dieser geraden Linien $y = xx - \varphi(x)$,
thatsächlich die Clairaut'sche Diff. Gl.
 $y = y'x - \varphi(y')$ befriedigt.

Aus den Gleichungen 2) ergibt sich:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x_1 \varphi''(x_1) + \varphi'(x_1) - \varphi(x_1)}{\varphi''(x_1)} = x_1$$

und damit ist gezeigt, dass auch die
Envelope die gegebene Diff. Gl. befried-
igt.

2. Neue interessante Entwicklungen.

§ 26. Die Separation der Veränderlichen bei den homogenen Gleichungen.

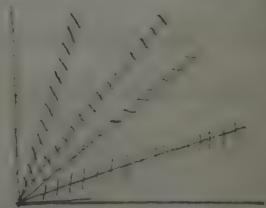
Wir wollen jetzt dreierlei eine ganze Classe von Diff. Gleichungen kennen lernen, die man ebenfalls durch Punkttransformation vereinfachen kann. Das sind die Diff. Gleichungen von der Form:

I.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

wo f homogen in y und x vom n -ten Grade ist.

Setzen wir $\frac{y}{x} = t$ so bedeutet $\frac{y}{x} = t$ eine Schar von geraden Linien in denen t als Parameter auftritt. Diese gehen alle durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems und nur wird durch Gl. I jedem Punkte sein y' zugeordnet, und zwar ist die Richtung der Elemente für alle Punkte einer durch den Anfangspunkt



laufenden geraden Linie allemal dieselbe.
Es ist also

$$y = xt, \quad y' = t + xt'$$

Dies in I eingeführt, ergibt

$$t + xt' = f(t)$$

$$xt' = x \frac{dt}{dx} = f(t) - t.$$

Hier führt nun die Separation der Variable zu

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \log x + C.$$

wo auf der linken Seite je nach der Funktion $f(t)$ noch die Integration auszuführen ist.

Wir begleiten dies mit den Worten:

Eine homogene Diff. Gl. lässt sich sofort durch Separation der Variablen behandeln, sobald man den Quotienten

$\frac{y}{x} = t$ als neue Veränderliche einführt.

Damit hört gewöhnlich in den Lehrbüchern die Betrachtung auf; während wir nun gerade hier die LÜSchen Betrachtungen anwenden,

welche uns den tieferen Grund dafür liefern werden, weshalb die Substitution $\frac{y}{x} = t$ so schnell zur Separation der Variablen führt.

Wir schreiben uns dasselbe Formelsystem noch einmal mit einer kleinen Änderung der Gestalt hin:

$$t + x \frac{dt}{dx} = f(t),$$

und führen nun $\log x = u$ als neue Variable ein. Dann ist

$$t + \frac{dt}{du} = f(t).$$

$$u = \int \frac{dt}{f(t) - t}$$

Wir begleiten dies mit den Worten: Indem wir die Variablen t und u einführen, erreichen wir die Vereinfachung, dass das u selbst in der Diff. gar nicht vorkommt sondern nur das du , worauf eine einfache Quadratur die Integration der Diff. Gl. vollendet.

§ 27. Erklärung des Verfahrens an der zugehörigen Transformationsgruppe.

Fragen wir nach dem inneren Grunde, warum diese einfache Umgestaltung hier zum Ziele führt!

Erinnern wir uns der letzten Fig., so bekommen wir für alle Punkte der einzelnen von 0 auslaufenden geraden Linien dieselbe Richtung der Linienelemente. Das spricht sich noch typischer folgendermassen aus:
Schreiben wir:

$$y_1 = \lambda y, \quad x_1 = \lambda x$$

so bedeuten diese Formeln eine vom Anfangspunkte ausgehende Ähnlichkeitstransformation; d. h. es wird irgend eine Figur der xy -Ebene durch die Gleichungen in eine ähnliche verwandelt, wobei die Richtungen und damit auch die Winkel dieselben bleiben, die Längen aber grösser oder kleiner je nachdem $\lambda \geq 1$ ist.

Aus unserer Diff. Gl. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ wird dann durch diese Transformation:

$$y_1' = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

d. h. die Diff. Gl. bleibt durch die Ähnlichkeitstransformation ungeändert oder wie man sagt, die Diff. Gl. lässt die Ähnlichkeitstransformation zu. Da der Parameter λ in der Diff. Gl. gar nicht auftritt, so giebt es von Haus aus ∞ viele vom Anfangspunkte auslaufende Ähnlichkeitstransformationen, welche die homogene Diff. Gl. in sich überführen.

Diese Transformationen besitzen nun noch die sogenannte Gruppeneigenschaft. Unter einer Gruppe von Transformationen versteht man einen solchen Inbegriff von Transformationen, der die Eigenschaft hat, dass zwei Transformationen aneinander gereiht selbst wieder eine Transformation derselben Art ergeben.

Nehmen wir einmal die Ähnlichkeitstransformation:

$$y_1 = \lambda y, \quad x_1 = \lambda x$$

und reihen wir daran die zweite Ähnlichkeitstransformation:

keits transformation

$$y_2 = \lambda y_1, \quad x_2 = \lambda x_1,$$

dann werden sich y_2 und x_2 durch die ursprünglichen y und x so ausdrücken:

$$y_2 = \lambda u y, \quad x_2 = \lambda u x.$$

Das ist in der That wieder eine Ähnlichkeitstransformation, und wir sehen daher, unsere Ähnlichkeitstransformationen bilden eine Gruppe.

Man nennt diese Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen eingliedrig, weil nur ein Parameter λ auftritt, sie heisst kontinuierlich, weil der Parameter jeden beliebigen Wert annehmen kann.

Insbesondere wollen wir jetzt noch lernen, was man unter einer unendlich kleinen Substitution versteht.

Setzen wir einmal $\lambda = 1$, so haben wir

$$y_1 = y, \quad x_1 = x$$

Das ist die sogenannte identische Substitution.

Ist aber λ dem Werte 1 sehr nahe, etwa $= 1 + \epsilon$, wo ϵ eine sehr kleine Größe, so erhalten wir:

$$y_1 = (1+\epsilon)y \quad x_1 = (1+\epsilon)x$$

und das ist die ∞ kleine Substitution.

Die Zunahme von y also ϵy bezeichnen wir mit
und x .. ϵx

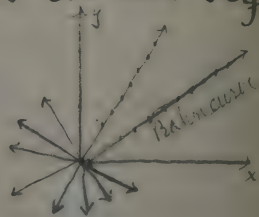
Wir werden dann sagen können:

Bei der ∞ kleinen Operation der Gruppe
erleidet jeder Punkt x, y eine Verschiebung,
welche gegeben ist durch

$$\delta y = \epsilon y \quad \delta x = \epsilon x.$$

Das bedeutet nun folgendes in der Figur

Dass nämlich irgend ein
Punkt x, y in Richtung
der durch den Anfangs-
punkt gehenden Geraden



um eine ∞ kleine Strecke
verschoben wird, deren Coordinaten
 δx und δy mit x und y proportional sind
so dass die Verschiebungen mit der
Entfernung vom Anfangspunkt
grösser und grösser werden. Um nun
eine bestimmte endliche Verschiebung
zu erhalten, müssen wir diese Operation
mehrmals nacheinander ausführen.

Man kann sich also vorstellen, dass diese ganze eingliedrige Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen aus der ∞ kleinen durch immer fortgesetzte Transformation hervorgeht. Der Punkt fließt dabei sozusagen an der geraden Linie entlang.

Wir fassen zusammen: Indem wir die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen aus der ∞ kleinen Transformation durch immer fortgesetzte Wiederholung erzeugen, fließen die Punkte der Ebene vom Koordinatenanfang weg geradlinig fort, so dass in jedem einzelnen Momente, das neue Punktsystem mit dem anfänglichen ähnlich ist. Man kann dabei an eine Flüssigkeit denken, die die Ebene überdeckt, und die nach dem angegebenen Gesetze fließt.

Man nennt diese Curven nach denen die Punkte dabei laufen, die Bahncurven.

In unserem speziellen Beispiele lautet also die Gl. derselben: $\frac{y}{x} = \text{const.}$

Diese Bahnkurven verschieben sich in sich selbst und zwar sind die Bahnkurven die einzigen Curven, welche sich bei unserer Ähnlichkeitstransformation in sich selbst verschieben, während jede andere Curve eine immer grösser werdende seitliche Verschiebung erleidet.

Gehen wir zu unserer Diff. Gl. zurück und sehen wir zu, wie sich die t und u bei der Transformation ändern.

Wir sehen es wird: $t_1 = t$

und aus $u = \log x$ wird $u_1 = u + \log \lambda$.

Wir werden daher sagen: Die neuen Variablen, welche uns die Integration der Diff. Gl. ermöglichen, sind genau in Anschluss an die Figur gewählt: t ist nämlich direkt ein Parameter für die Bahnkurven ($t = \text{const.}$) und ändert sich bei der Transformation der Gruppe gar nicht; u aber ist so

gewählt, dass die Curven $u = \text{const.}$ sich bei der Transformation der Gruppe untereinander vertauschen, speziell nach der Formel:

$$u_1 = u + \log \lambda.$$

28. Entsprechender allgemeinerer Ansatz. Im Anschluss hieran wollen wir sogleich einen allgemeineren Satz aussprechen, der sich jetzt mit Leichtigkeit ergibt:
Wenn eine Diff. Gl.

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

vorgelegt ist, und ferner eine eingliedrige kontinuierliche Gruppe durch die Formeln:

$$x_1 = \varphi_1(x, y, \lambda) \quad y_1 = \psi_1(x, y, \lambda)$$

wo λ ein beliebiger veränderlicher Parameter ist, dann kann man neue veränderliche t und u einführen, sodass u selbst nicht mehr in der transformierten Diff. Gl. vorkommt, sondern nur das du , worauf man durch eine einfache Quadratur die Gl. integriert.

Es möge entstanden sein:

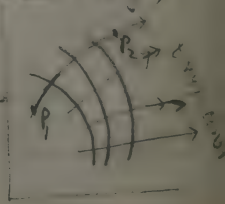
$$\bar{\Omega}(t, \frac{dt}{du}) = 0$$

so werden wir bekommen:

$$\frac{dt}{\pi(t)} = du$$

$$\int \frac{dt}{\pi(t)} = \int du$$

Die Frage ist nun, wie wählen wir die neuen Veränderlichen t und u ? Wir denken uns, dass durch ∞ oftmalige Wiederholung einer ∞ kleinen Transformation eine eingliedrige Gruppe erzeugt sei, dann gibt es eine Schar von Bahnkurven, an denen sich die Punkte der Ebene der Transformation entsprechend fortschieben. Diese Bahnkurven mögen nun die Gl. haben: $t(x, y) = \text{const.}$ Damit ist t eingeführt als eine Grösse, welche sich bei der ganzen Gruppe der Transformation nicht ändert. Man vergl. die Fig., in welcher sowohl für den Punkt P , wie für den durch eine endliche Transformation



gegebenen Punkt P_2 die Gl. $t=t_1$ gilt,
unabhängig von dem Werte von λ .

Für dieses t heißen die sämtlichen
Transformationen unserer Gruppe
 $t_1=t$, die ∞ kleine Transformation $\delta t=0$.

Jetzt aber müssen wir auch eine
geeignete zweite Veränderliche u finden:

Legen wir einmal eine beliebige
Curve durch unsere Bahncurve
quer hindurch, so werden wir bei
wiederholter Transformation eine
ganze Schaar von solchen Trajektorien
bekommen, deren Gl. wir zunächst
irgend wie in der Form ansetzen
wollen: $v(x, y) = \text{const.}$

Wie ändert sich nun das v bei einer
Transformation der Gruppe, speziell
bei der ∞ kleinen?

Allgemein werden wir schreiben: $\delta v = \sigma(v) \delta t$.
Weil aber aus einer Curve $v = \text{const.}$, wieder
eine Curve $v = \text{const.}$ werden soll, kann
dieses σ nur von v selbst nicht von t
abhängen. Wir haben also $\delta v = \sigma(v) \delta t$.

Wir können daher sagen: Die ∞ kleine Transformation der Gruppe stellt sich in der Variable v in der Gestalt dar: $\delta v = \tau \omega \cdot \varepsilon$.
Wir führen jetzt statt v eine Funktion von v , die wir u nennen, ein, und die definiert ist durch die Gl.

$$du = \frac{dv}{\tau \omega} \quad \text{oder}$$

$$u = \int^v \frac{dv}{\tau \omega}.$$

Natürlich können wir jetzt statt v auch u als Parameter einer Trajektorien-Schar benutzen, d. h. die einzelne Trajektorie ist ebensowohl durch Constantsetzen des u und des v gegeben. Für die Funktion u heisst dann die ∞ kleine Transformation

$$\delta u = \varepsilon$$

wozu von oben

$$\delta t = 0$$

tritt, und wenn wir von ihr zur endlichen Gruppe übergehen, so wird diese heissen:

$$t_1 = t, \quad u_1 = u + \text{const.}$$

wo die Constante als Parameter aufzufassen ist. Wir gewinnen daher das Resultat:

Jede eingliedrige kontinuierliche Transformationsgruppe der hier betrachteten Art lässt sich durch Einführung geeigneter Veränderlicher t und u in die kanonische Form bringen:

$$t_1 = t \quad u_1 = u + \text{const.}$$

Bei dem Fall unserer Ähnlichkeits-Transformation hatten wir für t $\frac{y}{x}$ und $\log x$ für u .

Wir können jetzt die Diff. Gl.

$$\Omega(x, y, y') = 0,$$

welche diese eingliedrige Gruppe gestattet in die Form schreiben:

$$\bar{\Omega}\left(t, \frac{dt}{du}\right) = 0.$$

In der That müssen wir verlangen, dass die Gl. ungeändert bleibt, wenn wir $t = t$, belassen und u nur um eine Constante vermehren. Wir können daher den Satz aussprechen:

Führen wir die kanonischen Variable ein, so erhalten wir aus der Diff. Gl. $\Omega(x, y, y') = 0$ eine neue $\bar{\Omega}\left(t, \frac{dt}{du}\right) = 0$, in welcher die neue Variable u nicht mehr explicite vorkommt.

Eine solche Gl. aber, wo u nicht mehr
explizite vorkommt, ist nach Trennung
der Variablen durch eine einfache
Quadratur zu integrieren.

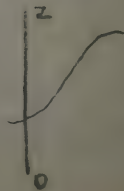
Wir erhalten nämlich sofort:

$$\frac{dt}{du} = F(t), \quad u = \int \frac{dt}{F(t)}$$

Das ist die allgemeine Theorie, die wir
speziell auf den Fall der homogenen
Diff. Gl. anwandten.

§ 29. Die Asymptotencurven auf den Schrauben-
flächen als Beispiel.

Nehmen wir als Beispiel die Diff. Gl.
der Asymptotencurven auf einer
Schraubenfläche (wir könnten eben-
sowohl, bei vertikalgestellter Schraubenaxe,
die Curve stärksten Falles nehmen),
wie sie durch Verschraubung einer
beliebigen Meridiancurve entsteht.
Eine solche Fläche geht durch
eine eingliedrige Gruppe in
sich über, und zwar eben



durch Schraubenbewegung. Haben wir eine Asymptotencurve und verschrauben wir die Fläche um die Spindel Oz , so bleibt die Curve immer Asymptotencurve und die Schar dieser geht also dabei in sich selbst über. Die Projektionen der Asymptotencurven auf xy müssen also in einander übergehen, wenn man xy um O dreht. Es sei:

$$z = F(x, y)$$

die zu betrachtende Schraubenfläche mit der Spindel Oz . Die Diff. Gl. der Asymptotencurven lautet bekanntlich:

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0$$

Von dieser Diff. Gl. wissen wir nach dem § 68, dass sie ungeändert bleibt, wenn wir die xy -Ebene um O drehen. Ja, dann sind die Bahncurven der Transformation concentrische Kreise, die bei der Drehung fortgesetzt in sich selbst übergehen. Also $\rho = \rho_1$ ist die Gl. eines solchen Kreises und damit haben wir die erste kanonische Variable

bereits gefunden.

Jetzt müssen wir noch die zweite u auch die sich bei der Drehung nur additiv ändert Das ist offenbar der Polarwinkel ω , der durch eine Drehung in

$$\omega_1 = \omega + \text{Const.}$$

übergeht. Wir gewinnen daher den Satz:

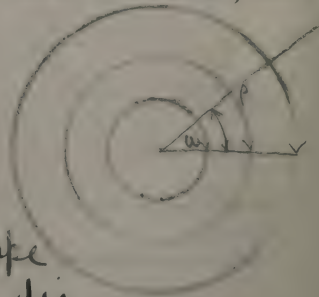
Um die eingliedrige Gruppe der Drehungen um O in die kanonische Form zu setzen, genügt es Polarkoordinaten einzuführen. In der That schreibt sich dann die Gruppe der Drehungen in diesen Grössen:

$$\rho_1 = \rho \quad \omega_1 = \omega + \text{Const.}$$

wo die Constante der Parameter der Gruppe wir bekommen daraufhin etwa die neue Diff. Gl.

$$L d\rho^2 + 2M d\rho d\omega + N d\omega^2 = 0$$

Hierin werden nur die L, M, N nicht mehr von ω abhängen, sondern nur von ρ . Lösen wir die Gl. nach $\frac{d\omega}{d\rho}$ auf, so erhalten wir:



$$\frac{dp}{dw} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - zn}}{z}$$

und daraus:

$$w = \int \frac{z dp}{-m \pm \sqrt{m^2 - zn}}$$

Wir begleiten dies mit den Worten:
Haben wir eine Schraubenfläche um Oz
als Spindel, so werden wir deren Asymp-
totencurven durch Quadratur bestimmen,
indem wir in der Horizontalebene Polar-
coordinaten einführen.

Diese Sätze haben wir nicht durch
Ausrechnung bekommen, sondern durch
blosse Ueberlegung, und es mag daher im
folgenden die Verifikation durch unmittel-
bare Ausrechnung erfolgen:

Es sei eine Curve als Meridian-
curve für eine Schraubenfläche
in der Form $z_0 = f(\rho^2)$ gegeben.

Drehen wir dann um w ,
so hebt sich dabei jeder Punkt
der Curve in die Höhe, entsprechend
der Steigung der Schraube, sodass
 z_0 um kw wächst.

also haben wir $z = k\omega + f(\varphi^2) = k \arctg \frac{y}{x} + f(x^2 + y^2)$
 Dies ist die allgemeine Gl. einer Schraubenspirale um OZ. Jetzt haben wir die Diff. Gl. der Haupttangentialcurven zu bilden. Es ist

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ky}{x^2+y^2} + 2x f'(\varphi^2)$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{kx}{x^2+y^2} + 2y f'(\varphi^2)$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2kxy}{(x^2+y^2)^2} + 2f''(\varphi^2) + 4x^2 f''(\varphi^2)$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{k}{x^2+y^2} + \frac{2ky^2}{(x^2+y^2)^2} + 4xy f''(\varphi^2)$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2kxy}{(x^2+y^2)^2} + 2f''(\varphi^2) + 4y^2 f''(\varphi^2)$$

Diese Werte haben wir in die Gl.

$$1) \quad 0 = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2$$

einzusetzen. Doch wollen wir vorher erst Polarcordinaten einführen; dann wird ganz von selbst die kanonische Form der Diff. Gl. entstehen. Wir setzen:

$$x = \rho \cos \omega \quad dx = \cos \omega d\rho - \rho \sin \omega d\omega$$

$$y = \rho \sin \omega \quad dy = \sin \omega d\rho + \rho \cos \omega d\omega$$

Dann erhalten wir:

$$r = \frac{2K \sin \omega \cos \omega}{\rho^2} + 2 f(\varphi^2) + 4 \rho^2 \cos^2 \omega f''(\varphi^2)$$

$$s = \frac{-K}{\rho^2} + \frac{2K \sin^2 \omega}{\rho^2} + 4 \rho^2 \sin \omega \cos \omega f'(\varphi^2)$$

$$t = \frac{-2K \sin \omega \cdot \cos \omega}{\rho^2} + 2 f(\varphi^2) + 4 \rho^2 \sin^2 \omega f''(\varphi^2)$$

Diese Werte setzen wir nun in Gl. (1) und erhalten:

$$\begin{aligned} r dx^2 = & \left[\frac{2K \sin \omega \cos^3 \omega}{\rho^2} + 2 \cos^2 \omega f'(\varphi^2) + 4 \cos^4 \omega \rho^2 f''(\varphi^2) \right] d\rho^2 \\ & + \left[\frac{4K \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{\rho} - 4 \sin \omega \cos \omega \rho f'(\varphi^2) - 8 \sin \omega \cos^3 \omega \rho^3 f''(\varphi^2) \right] d\rho d\omega \\ & + \left[2K \sin^3 \omega \cos \omega + 2 \sin^2 \omega \rho^2 f'(\varphi^2) + 4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \rho^4 f''(\varphi^2) \right] d\omega^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s dx dy = & \left[\frac{2K \sin \omega \cos \omega}{\rho^2} + \frac{4K \sin^3 \omega \cos \omega}{\rho^2} + 8 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \rho^2 f'(\varphi^2) \right] d\rho^2 \\ & + \left[\frac{2K \sin^2 \omega}{\rho} - \frac{4K \sin^4 \omega}{\rho} - 8 \sin^3 \omega \cos \omega \rho^3 f'(\varphi^2) \right. \\ & \quad \left. - \frac{2K \cos^2 \omega}{\rho} + \frac{4K \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{\rho} + 8 \sin \omega \cos^3 \omega \rho^3 f''(\varphi^2) \right] d\rho d\omega \\ & + \left[2K \sin \omega \cos \omega - 4K \sin^3 \omega \cos \omega - 8 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \rho^4 f''(\varphi^2) \right] d\omega^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t dy^2 = & \left[\frac{-2K \sin^3 \omega \cdot \cos \omega}{\rho^2} + 2 \sin^2 \omega f'(\varphi^2) + 4 \sin^4 \omega \rho^2 f''(\varphi^2) \right] d\rho^2 \\ & + \left[\frac{-4K \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{\rho} + 4 \sin \omega \cos \omega \rho f'(\varphi^2) + 8 \sin^3 \omega \cdot \cos \omega \rho^3 f''(\varphi^2) \right] d\rho d\omega \\ & + \left[-2K \sin \omega \cos^3 \omega + 2 \cos^2 \omega \rho^2 f'(\varphi^2) + 4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \rho^4 f''(\varphi^2) \right] d\omega^2 \end{aligned}$$

∴

$$0 = [f'(\varphi^2) + 2\rho^2 f''(\varphi^2)] d\rho^2 - \frac{K d\rho d\omega}{\rho} + \rho^2 [f'(\omega^2) + 2\rho^2 f''(\omega^2)] d\omega^2$$

In dieser Gl. ist in der That ω explicit
verschwinden, sodass einer Integration der
Gl. durch Separation und Integration nicht
im Wege steht.

Da wir die in den letzten Capitel
behandelten Dinge noch oft als notwendig
Werkzeuge benutzen werden, so stellen
wir als beiläufiges Ergebnis der ganzen
Betrachtung die Worte hin:

- 1) Punkttransformation -- Beispiel: Jakobische
- 2) Berührungs Clairautsche
- 3) Eingliedrige kontinuierliche Gruppe von
Punkttransformationen.
- 4) Infinitesimale Transformation einer
solchen Gruppe.

§ 30. Der Euler'sche Multiplikator.

Indem wir zum Euler'schen Multiplikator
übergehen, wiederholen wir noch einmal
kurz unsere früheren Betrachtungen hierüber.
Es sei uns eine Gl.

$$M dx + N dy = 0$$

gegeben, deren linke Seite ein exactes

Diff. ist, d. h. es besteht für die Diff. Gl.:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Wir lernen kennen, dass in diesem Falle
 $z = F(x, y) = \int^x M(s, y) ds + \int^y N(x, \eta) d\eta + \iint^x ds d\eta \left(\frac{\partial M(s, \eta)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial M(s, \eta)}{\partial \eta}$
war. Diese F Funktion hat wirklich
 $M dx + N dy$ zum Diff. Daher hat die Schar
unserer Integralcurven die Gl.

$$z = F(x, y)$$

wo z der Parameter ist. Wir können
also sagen: Ist die linke Seite unserer
Diff. Gl. ein exaktes Diff., so bekommen
wir unsere Integralcurve in der Gestalt
 $F(x, y) = \text{const.}$, wo das F durch zwei
einfache Quadraturen und eine doppelte
Quadratur genommen wird. Die
Integralcurven erscheinen dabei als
die Niveaucurven einer Fläche $z = F(x, y)$,
die wir uns construieren, indem wir
 z als Ordinate im Raum auffassen.
Wenn wir nun eine Gl. von der
Bauart geben: $dx : dy = x : y$ oder
 $y dx - x dy = 0$
so können wir uns doch die Gl.

der Integralcurven nach der willkürlich
 Constanten aufgelöst denken $F(x, y) = \text{const.}$
 sodass die Diff. Gl. vermöge eines
 Multiplikators in die Gestalt übergeht

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

Das ist ganz dasselbe, was wir früher
 schon sagten, dass wir nämlich, wenn der
 Ausdruck linker Hand kein exaktes Diff.
 ist, einen Faktor u zu Hülfe nehmen,
 durch welchen dann eben die linke Seite von

$$u Y dx - u X dy = 0$$

ein exaktes Diff. von F wird. Wir fassen
 dies in den Satz zusammen:

Ist die linke Seite der vorgelegten Diff. Gl.
 kein exaktes Diff., so sucht man einen
 Faktor u , sodass die mit u multiplizierte
 Seite ein exaktes Diff. wird, worauf man
 für u die partielle Diff. Gl. erhält:

$$\frac{\partial(-uX)}{\partial y} + \frac{\partial(uY)}{\partial x} = 0$$

An sich ist ja eine partielle Diff. Gl. ein
 schwierigeres Problem, aber wir brauchen

hier keine allgemeine Lösung derselben,
sondern nur eine particulare Lösung.
Nach Auffindung einer solchen u
kann man dann sofort die vorgelegte
Diff. Gl. integrieren.

31. Die linearen Diff. Gleichungen erster
Ordnung als Beispiel.

Nehmen wir hierfür ein erstes Beispiel.
Wir werden dabei sehen, dass unsere
Angaben in der That zum Ziele
führen, sodass der Nutzen des ganzen
Ansatzes ausser Frage steht.

Unser Beispiel soll uns mit der
wichtigen Classe der linearen Diff. Gl.
erster Ordnung bekannt machen.

Es sei uns also vorgelegt:

$$1) \quad y' + Py = Q$$

wo P und Q irgend welche Functionen
von x sind. Davon haben wir nun
bereits einen besonderen Fall betrachtet
nämlich

$$y' + cy = \varphi(x),$$

bei Eleganz der Construction von Apparaten zur mechanischen Integration von Diff. Gleichungen.

Um nun unsere Gl. (1) zu behandeln, wollen wir erst den besonderen Fall der linearen Diff. Gl. ohne 2^{tes} Glied betrachten also

2)

$$y' + Py = 0$$

Was Gl. (2) anbetrifft, so können wir sofort separieren. Wir bekommen:

$$\frac{dy}{y} = -P dx$$

$$y = K e^{-\int P dx}$$

Eine partikuläre Lösung sei y_0 , dann ist die allgemeine Lösung

$$y = K y_0$$

Es entsteht daher die allgemeine Lösung aus einer beliebigen partikulären Lösung y_0 durch Multiplikation mit einer willkürlichen Constante. Das erreicht man auch sofort aus der Gl. (2). Denn die partikuläre Lösung ergibt:

2°)

$$y_0' + P y_0 = 0$$

und $y = K y_0$ ergibt:

$$ky_0' + Pky_0 = 0$$

Da hebt sich k weg und wir bekommen wieder (2°)

$$y_0' + Py_0 = 0.$$

Wenn man also y_0 hat, so ist ky_0 eine neue Lösung.

Das obige war die Gl. ohne 2tes Glied.

Nehmen wir dieses jetzt dazu: wir schreiben jetzt:

$$dy + (Py - Q)dx = 0$$

Wir fügen den Multiplikator u hinzu und bekommen:

$$1) \quad u dy + u(Py - Q) dx = 0$$

und wollen nun u so bestimmen, dass linkerhand ein exaktes Diff. steht.

Es besteht dann also für u die partielle Diff. Gl.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u(Py - Q)}{\partial y}$$

Jetzt kommt es einzig darauf an, eine partikuläre Lösung dieser Gl. zu finden.

Wir machen den Kunstgriff und lassen u nur vom x abhängen; dann haben wir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = uP.$$

Wir finden also $u = e^{\int P dx}$ eine partikuläre Lösung ist. Das genügt bereits um die Gl. weiter zu behandeln. Wir bekommen:

$$e^{\int P dx} dy + P e^{\int P dx} y dx - P e^{\int P dx} dx = 0$$

$$\text{d.h.} \quad d(y e^{\int P dx}) - d(\int P e^{\int P dx} dx) = 0$$

$$y = e^{-\int P dx} \left\{ \int P e^{\int P dx} dx + \text{const.} \right\}$$

Wir bemerken ausdrücklich, dass wir dieses Resultat durch die Multiplikator Methode erhalten haben.

Beachten wir nun noch die Bauart unserer y , so haben wir zunächst einen Bestandteil, der mit der willkürlichen Constanten nichts zu thun hat. Wir wollen ihn mit $[y]$ bezeichnen, und haben also:

$$y = [y] + C e^{-\int P dx} = [y] + C y_0$$

Wir gewinnen so den Satz:

Die allgemeine Lösung der Diff. Gl. mit 2tem Gliede baut sich in der Weise auf, dass man zu einer partikulären Lösung $[y]$ der Gl. eine partikuläre Lösung der Gl. ohne 2tes Glied mit einer beliebigen Constante multipliziert, addiert.

Dies hätte man auch sofort aus der gegebenen Diff. Gl. erschließen können: denn wenn $[y]$ eine partikuläre Lösung der letzten Diff. Gl. ist, so haben wir

$$[y]' + P[y] = Q.$$

Jetzt wollen wir einmal addieren, entsprechend einer partikulären Lösung y_0 der ersten Diff. Gl. ohne 2tes Glied multipliziert mit c :

$$c y_0' + P c y_0 = 0$$

und bekommen

$$([y]' + c y_0') + P([y] + c y_0) = Q$$

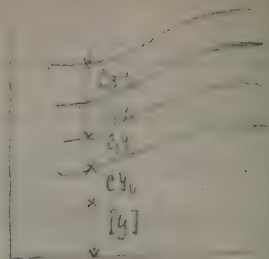
d. h. $y' + P y = Q$

wo $y = [y] + c y_0$ ist.

§ 32. Eine andere Behandlung derselben Gl. von der zugehörigen Transformationsgruppe aus.

Jetzt wollen wir bei dieser Diff. Gl. auch die Betrachtungen über die eingliedrige, kontinuierliche Gruppe von Transformationen zur Anwendung bringen.

In nebenstehender Fig.
mag die partikuläre Lösung
der partikulären Curve [4]
entsprechen. Addieren wir
dann zu den Ordinaten [4]



noch c_4 hinzu, so bekommen wir eine
neue Integralcurve u. s. f. wie die Figur
zeigt beliebig viele Integralcurven.

Ja, das heisst, dass die Integralcurven
unserer Diff. Gl. aus einer Integralcurve
durch eine ganze Schar von Transformationen
hervorgehen, die durch das Gleichungspaar
gegeben sind:

$$y_1 = y + C e^{-\rho a x} \quad x_1 = x$$

wo y_1 und x_1 neue Variable bedeuten.

Unsere Diff. Gl. verwandelt sich in sich
selbst wenn wir y_1 und x_1 statt y und x setzen.

Durch dieses Gleichungspaar ist uns
aber eine ganze Gruppe von Transfor-
mationen gegeben. Wir kennen also eine
eingliedrige kontinuierliche Gruppe von
Transformationen, welche unsere Diff. Gl.
in sich selbst verwandelt.

Nun führen wir nämlich als erste kanonische Variable das t so ein, dass es bei Ausübung der Gruppe konstant blieb.

Das t ist in diesem Falle $x = x_1$.

Das u aber sollte sich um eine additive Constante ändern, ja das ist hier

$$y_1 e^{-\int \rho dx} = \frac{y}{e^{\int \rho dx}} + C.$$

Wir werden daher sagen:

Ein Paar kanonischer Variablen dieser Gruppe sind uns hier von Haus aus bekannt; das t ist das x selbst und das u ist $y e^{\int \rho dx}$. Führen wir diese beiden Variablen in unsere Diff. Gl. ein, so muss dieselbe direkt integrierbar werden, also ohne dass wir von der Multiplikator Methode Gebrauch machen. Dieses werden wir jetzt prüfen und damit die vorigen Integrationsformeln wieder gewinnen.

Um die kanonischen Variablen, für welche sich die Transformationen der

Entwickeln wir die linke Seite der letzten Gl., so gewinnen wir als eine erste Gl. für dx und

$$a) \quad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = dC$$

Eine zweite Gl. bekommen wir aus der Bedingung, dass wir senkrecht zu $F=C$ weiter schreiten, also aus

$$b) \quad dx : dy = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$$

Aus a) und b) ergibt sich:

$$dx = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} dC \quad dy = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} dC$$

Wir haben also:

Satz 1: Die Breite B des zwischen zwei Nachbarkurven liegenden Streifens ist

$$(1) \quad dB = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dC}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}$$

2.) Nun wollen wir die ganze Betrachtung auf eine vorgelegte Diff. Gl. beziehen.

Es sei gegeben: $dx : dy = X : Y$ oder
 $Y dx - X dy = 0$.

Wenden wir hierauf die Entwicklung von (1) an, so müssen wir zunächst

mit einem Multiplikator multiplizieren und können dann schreiben:

$$u y = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad u x = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Die Breite des Streifens wird also:

$$2) \quad d\beta = \frac{dC}{u\sqrt{x^2+y^2}}$$

Wir sagen:

Satz 2: Ist eine Diff. Gl. $dx:dy = x:y$ vorgelegt und ist u ein Multiplikator so wird die Breite des zwischen zwei benachbarten Integralcurven eingeschlossenen Streifens gleich sein einer willkürlich zu wählenden Constante dC dividirt durch $u\sqrt{x^2+y^2}$.

Daraus können wir sofort folgern:

Satz 3: Weiss man einen Multiplikator u , so kennt man auch das \mathcal{G} esetz, nach welchem sich die Breite des Streifens beim Entlanggehen an der Integralcurve bestimmt. Umgekehrt, kennt man irgendwie das \mathcal{G} esetz, nach welchem die Breite des Streifens beim Entlanggehen längs der Integralcurve variiert,

so erfährt man daraus einen Multiplikator.
Indem wir so den Multiplikator mit der
Breite in Beziehung setzen, können wir
noch einige wichtige Sätze ableiten:

Angenommen z. B. wir kennen zwei verschie-
dene Multiplikatoren u_1 und u_2 , für welche
also $\frac{u_1}{u_2} \equiv C$ ausgeschlossen ist, dann bekommen
wir für $d\beta$

$$1) \quad d\beta = \frac{dC}{u_1}$$

$$2) \quad d\beta = \frac{dC'}{u_2}$$

Beide müssen natürlich einander
gleich sein, also wird:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{dC}{dC'} = K$$

wo K irgend eine Constante ist. Das heisst
aber, dass wir die Gl. der Integralcurve
haben in der Form:

$$u_1 = u_2 K.$$

und dass wir also unsere Diff. Gl.
integriert haben. Wir werden daher sagen:

Satz 4: Kennen wir für eine Diff. Gl.
zwei verschiedene Multiplikatoren, deren
Quotient nicht etwa $\equiv C$ ist so können wir die
Gl. der Integralcurven hinschreiben, indem wir

$$u_1 = u_2 K$$

setzen.

↳ gehen wir jetzt dazu über, den eigentlichen Hauptsatz von Lie aufzustellen:

Es liege eine Diff. Gl.

$$Y dx - X dy = 0$$

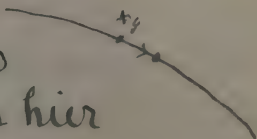
von und diese möge durch eine infinitesimale Transformation in sich selbst übergehen. Sie soll sich also nicht ändern, wenn wir x und y vermehren um

$$\delta x = \xi(x, y) d\omega, \quad \delta y = \eta(x, y) d\omega$$

wo $d\omega$ eine beliebig anzunehmende ∞ kleine Grösse ist.

Aus einer Integralcurve soll also bei infinitesimaler Verschiebung wieder eine Integralcurve werden. Diese kann speziell in sich wieder übergehen, wenn die Verschiebung in Richtung der jeweiligen Tangente geschieht (Fig.).

Diesen trivialen Fall, wo $\delta x : \delta y = X : Y$ ist, wollen wir hier



ausdrücklich ausschliessen.

Wir sprechen nun den Satz aus:

Kennen wir bei einer Diff. Gl. eine infinitesimale Transformation

$\delta x : \delta y = \xi(x, y) : \eta(x, y)$ welche die Diff. Gl. in sich überführt, und ist nicht etwa:

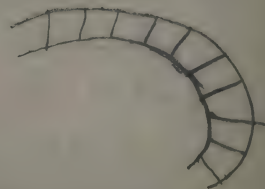
$$\xi : \eta = x : y$$

dann können wir einen Multiplikator für unsere Diff. Gl. angeben und also unsere Gl. auf Quadraturen zurückführen.

Das heisst in der Fig: Wenn unser Gleichungspaar für δx und δy nicht etwa trivial ist, also $\frac{\xi}{\eta} \neq \frac{x}{y}$, so gehen wir von

jedem Punkte x, y der Curve $F = C$ zu einem Punkte $x + \delta x, y + \delta y$

über, wobei die Fortschreitungsrichtung nicht in die Richtung der Tangente fällt.



Durchläuft also der Punkt x, y eine Integralcurve, so wird der Punkt $x + \delta x, y + \delta y$ eine benachbarte Integralcurve durchlaufen. Dann können wir aber sofort die Breite der

Canals berechnen: Wir brauchen nur den Abstand des Punktes $x + \delta x, y + \delta y$ von der Parabel in x, y zu bestimmen. Derselbe ist:

$$d B = \frac{4\delta x - \delta y}{\sqrt{4^2 + 1^2}}$$

Für δx und δy ihre Werte eingesetzt gibt:

$$d B = \frac{4\xi - \eta}{\sqrt{4^2 + 1^2}} d\omega$$

wo für $d\omega$ auch dC gesetzt werden kann. Diese Gl. bringen wir überein mit der Gl. des 2ten Satzes, wenn wir setzen:

$$u = \frac{1}{4\xi - \eta}$$

Damit gewinnen wir den eigentlichen Lie'schen Satz

Satz 5: Geht unsere Diff. Gl. durch die nicht triviale Transformation

$$\delta x : \delta y = \xi(x, y) : \eta(x, y)$$

in sich über, so ist uns ein Multiplikator bekannt:

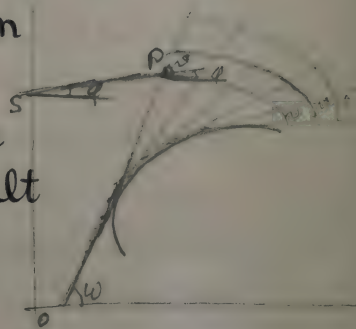
$$u = \frac{1}{4\xi - \eta}$$

und wir können unsere Diff. Gl. sofort integrieren.

§ 34. Beispiel: Die Trajektorien einer Geradenschaar.

Wir wollen jetzt hinzu eine ganz besonders interessante Anwendung geben, nämlich auf das Problem der sogenannten Trajektorien.

Es sei uns eine Schar von geraden Linien gegeben, welche eine gewisse Curve umhüllen werden. Es soll nun die Diff. Gl. derjenigen Trajektorien aufgestellt werden, welche diese geraden Linien unter einem constanten



Winkel α schneiden. Bezeichnen wir mit ω den Winkel, den eine solche Gerade mit der x -axe bildet und mit $f(\text{tg } \omega)$ den Abschnitt Os auf der y -axe, so lautet die Gl. dieser Geraden:

$$y = \text{tg } \omega \cdot x + f(\text{tg } \omega)$$

vermöge derer nunmehr $\text{tg } \omega$ als Funktion von x und y zu betrachten ist. Also zu

jedem Punkte x, y gehört eine Gerade, die unter ganz bestimmtem Winkel durch diesen Punkt läuft. Bezeichnen wir den Richtungswinkel der Trajektorie in einem Punkte P mit φ , so haben wir:

$$\operatorname{tg} \varphi = y'.$$

Das Gesetz für unsere Trajektorien lautet nun:

$$\varphi = \omega - \alpha.$$

Um die Diff. Gl. zu bilden, werden wir schreiben:

$$y' = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\omega - \alpha);$$

Also ist

$$y' = \frac{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \alpha}$$

wo $\operatorname{tg} \omega$ eine Funktion von x und y ist.

Jetzt wollen wir den Streifen betrachten, der zwischen zwei benachbarten Trajektorien liegt, und untersuchen, wie sich die Breite dieses Streifens beim Entlanggehen an der Integralcurve ändert. Nehmen wir zunächst einen Streifen

von endlicher Breite, wie Fig. 1) und fassen die Strecke ε ins Auge, welche die beiden Trajektorien von der einzelnen geraden Linie ausschneiden.

Eine zweite benachbarte gerade Linie wird uns den Winkel $d\omega$ geben. Wenn wir nun die beiden von den geraden Linien ausgeschnittenen Curvenstückchen in erster Annäherung als gradlinig betrachten, so wird Fig. 2).

Ziehen wir nun von C aus noch eine Parallele zur ersten Geraden, so haben wir ein Dreieck mit den 3 Winkeln: $d\omega$, $\pi - \omega$, $\omega - d\omega$ (Fig. 3).

Es verhält sich also:

$$\varepsilon : \varepsilon + d\varepsilon = \sin(\omega - d\omega) : \sin \omega$$

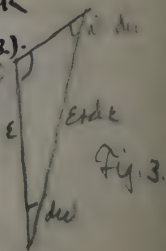
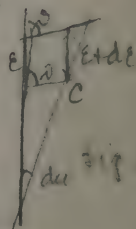
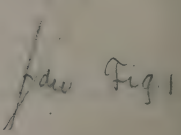
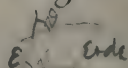
Dies können wir auch schreiben:

$$\varepsilon : \varepsilon + d\varepsilon = \sin \omega - \cos \omega d\omega : \sin \omega$$

$$\therefore \varepsilon \sin \omega = \varepsilon \sin \omega - \varepsilon \cos \omega d\omega + \sin \omega d\varepsilon$$

wo wir das Glied 2ter Ordnung weggelassen haben. Es ist also:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \cotg. \omega \cdot d\omega$$



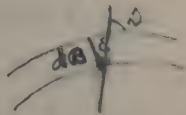
$$\varepsilon = \kappa e^{\cot \gamma \cdot \vartheta \cdot \omega}$$

Soll es sich nun um einen sehr schmalen Streifen handeln, so wird κ sehr klein, also $\kappa = d\varepsilon$ und das abgeschnittene Stück wird:

$$\varepsilon = e^{\cot \gamma \cdot \vartheta \cdot \omega} d\varepsilon$$

In H. inblick auf Fig. 4) werden wir weiter sehen:

Wir können sofort hinschreiben, wie die Breite eines solchen ∞ schmalen Streifens beim Entlanggehen längs der Integralcurve variiert, nämlich



$$a) \quad d\beta = \sin \vartheta \cdot e^{\cot \gamma \cdot \vartheta \cdot \omega} d\varepsilon$$

Wenn wir aber die Breite kennen, so haben wir auch einen Multiplikator. Um denselben bequem hinzuschreiben, werden wir unsere Diff. Gl.

$$y' = \operatorname{tg}(\omega - \vartheta)$$

in die Form setzen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\omega - \vartheta)}{\cos(\omega - \vartheta)}$$

oder

$$y dx - x dy = \sin(\omega - \vartheta) dx - \cos(\omega - \vartheta) dy = 0$$

Als Breite eines infinitesimalen Streifens ergab sich allgemein:

$$dB = \frac{dc}{u\sqrt{x^2+y^2}}$$

also in unserem Falle

$$b.) \quad dB = \frac{dc}{u}$$

Aus a) und b) ergibt sich sofort der Wert des Multiplikators zu

$$u = \frac{1}{\sin \omega} \cdot e^{-\cot \omega \cdot \omega}$$

Daraufhin können wir nun unsere Diff. Gl. durch Quadratur erledigen, und der allgemeine Satz, den wir hieran gewonnen haben, lautet:

Das Problem der Trajektorien einer Geradenschaar in der Ebene ist hierdurch auf Quadraturen zurückgeführt.

Meist findet man in den älteren Lehrbüchern ganz spezielle Diff. Gl. in dieser Art gegeben und dann wird nach einem bekannten Schema die Integral Gl. aufgestellt. Wir hingegen haben hier das Problem der Trajektorienschaar in der

Ebene ganz allgemein gelöst und zwar auf Grund der geometrischen Bedeutung des Multiplikators. Die rechnerische Durchführung im einzelnen Falle hat für uns nur noch die Bedeutung einer Verifikation.

Wegen weiterer Beispiele verweisen wir auf das schon mehrfach citierte Buch von Lie-Scheffers: Ueber Diff. Gl. en mit bekannten infinitesimalen Transformationen, 1891.

§ 35. Die Sonderstellung der Riccati'schen Gleichung.

Indem wir so die Substitutions- und Multiplikator-Methode behandeln haben wir immer solche Beispiele gewählt, wo es gelingt, die Integration durch Quadraturen zu geben. Wenn es jedoch nicht gelingt, durch Einführung neuer Veränderlicher oder durch die Multiplikator-Methode eine Diff. Gl. auf Quadraturen zurückzubringen,

dann wird man immer versuchen, wie weit man die Diff. Gl. durch Einführung neuer veränderlichen vereinfachen kann, und dann sagen wir, diese vereinfachte Gl. ist nun als Definition einer neuen Funktions-Art anzusehen. Wir können hierüber in dieser Vorlesung natürlich nur historisch berichten.

In nächster Zeit werden wir nun Diff. Gl'en höherer Ordnung behandeln und zwar speziell zunächst lineare Diff. Gl'en 2ter Ordnung ohne zweites Glied, also Diff. Gl'en von der Form:

$$z'' + p(x) \cdot z' + q(x) \cdot z = 0.$$

Wir wollen jetzt eine Diff. Gl. 1ter Ordnung betrachten, welche auf diese Form zurückgeführt und im Zusammenhange damit als Definition einer neuen Funktions-Art angesehen werden kann; das ist die sogenannte Riccati'sche Gl.

Die lineare Diff. Gl. 1ter Ordnung lautet doch:

$$y' + P y = Q,$$

Fügt man noch ein Glied mit y^2 hinzu,
so hat man:

$$1) \quad y' + P y + R y^2 = Q$$

Diese Gl. (1) ist nun die allgemeine
Riccati'sche Gl. Die spezielle ist die,
wo das Glied mit y fehlt, R constant
und $Q = c x^m$ ist, also:

$$1^a) \quad y' + b y^2 = c x^m$$

Was ist das nun für eine Funktion,
die durch 1) definiert wird?

Wir machen da eine Hülfssubstitution
wodurch die ganze Frage in das
folgende Capitel verschoben wird.

Wir werden setzen:

$$y = \lambda x \frac{z'}{z}$$

$$y' = \lambda' \frac{z'}{z} + \lambda \frac{z''}{z} - \lambda \frac{z'^2}{z^2}$$

Wenn wir dies in die gegebene Riccati'sche
Gl. (1) einsetzen, so bekommen
wir:

$$\lambda' \frac{z'}{z} + \lambda \frac{z''}{z} - \lambda \frac{z'^2}{z^2} + P \lambda \frac{z'}{z} + R \lambda^2 \frac{z'^2}{z^2} = Q$$

Setzen wir noch $\lambda = \frac{1}{R}$, dann werden
wir haben:

$$z'' + \frac{PR - R'}{R} \cdot z' - Q \cdot R z = 0.$$

Das ist in der That eine lineare Diff. Gl. 2ter Ordnung ohne zweites Glied.

Wir werden also den Satz aussprechen:

Unsere allgemeine Riccatische Gl.

wird also auf diese lineare Diff. Gl.

2ter Ordnung ohne zweites Glied

zurückgeführt.

Im Falle der speziellen Riccatischen

Gl. $y' + by^2 = cx^m$, heisst die lineare Diff. Gl.

2ter Ordnung, auf die wir zurückgehen:

$$z'' - bcx^m z = 0$$

Dies ist die sogenannte Bessel'sche

Diff. Gl., die man noch in verschiedenen

anderen Formen schreiben kann.

Capitel II.

Differential Gleichungen höherer Ordnung zwischen zwei veränderlichen

§ 36. Genauere Fixierung der Funktionstheoretischen Auffassung: das absolute und das relative System.

Wir verfahren bisher so, dass wir die vorgelegte Diff. Gl. durch eine geeignete Substitution oder einen geeigneten Multiplikator integrierbar machten. Dabei gingen wir jedoch nicht systematisch vor, sondern blieben auf einer gewissen Vorstufe der Theorie stehen, über die man aber heutzutage schon weit hinausgeschritten ist. Und zwar bestand der Mangel der bisherigen Auseinandersetzungen darin, dass wir es dem glücklichen Zufall überließen, ob wir eine geeignete Substitution fanden oder nicht, ob wir einen Multiplikator fanden oder nicht. Die neuere Theorie jedoch verlangt

in jedem Falle eine objektive Entscheidung über die Möglichkeit der Integration herbeizuführen.

Zum Zwecke einer exakten Theorie wird vor allen Dingen nötig sein, klar zu verabreden, welche Funktionen als bekannt gelten sollen, und welche Hilfsmittel man gebrauchen darf, um von ihnen zu neuen Funktionen aufzusteigen. In dieser Hinsicht wollen wir folgende beiden Systeme der Verabredung nennen:

I. Das absolute System.

II. " relative "

I. Bei Zugrundelegung des absoluten Systems setzt man folgende Funktionen als bekannt voraus:

1) rationale Funktionen.

2) algebraische "

3) Abel'sche Integrale, darin inbegriffen die cyclotomischen und elliptischen Integrale und deren Umkehrfunktionen.

Wenn uns nun irgend eine Gl. $y' = F(x, y)$ vorliegt, so wird man bei Anwendung des absoluten Systems nur solche Funktionen als Coefficienten in der Gl. gegeben denken, die selbst zu den rationalen und algebraischen Functionen gehören.

Ist uns nun eine Diff. Gl. mit rationalen oder mit algebraischen Coefficienten gegeben, so kann man verlangen, ganz systematisch zu entscheiden, ob diese Diff. Gl. eine rationale oder eine algebraische Function oder ein Abel'sches Integral oder eine neue transcendente Function definiert. Unsere bisherigen Entwicklungen geben Beispiele hierfür; aber sie geben keine klare Theorie, wann und ob es eintrifft.

Im Gegensatz hierzu geht eben die neuere Theorie systematisch vor.

Das weitestgehende in Richtung der bezeichneten Fragestellung findet

man bei Painlevé in den Vorlesungen:
Leçons sur la Théorie analytique des
Equations diff., prof. à Stockholm.
(Paris, Hermann 1897).

II. Was das relative System anbetrifft,
so geht man dabei folgendermassen vor:
man setzt als bekannt voraus alles
Frühere und die Coefficienten der
Diff. Gl., wobei man sich nicht darum
kummert, wie die Coefficienten gegeben
sind. In präzisen Worten werden wir
so sagen:
Das relative System entsteht, wenn
man den Functionen, welche von Haus
aus bekannt sind, die Coefficienten
der vorgelegten Diff. Gl. als willkürliche
Functionen hinzufügt, adjungiert,
und nun Alles als bekannt ansieht,
was sich aus diesen Coefficienten
rational oder algebraisch oder durch
Differentiation oder durch Quadratur-
ableiten lässt.

Ziehen wir als Beispiel die allgemeine Riccati'sche Gl. heran:

$$y' + P y + R y^2 = Q$$

wo P, Q, R Funktionen von x sind; dabei sagten wir aber nicht, was für welche Funktionen. Die allgemeine Riccati'sche Gl. bietet also ein Beispiel für das relative System.

Nehmen wir hingegen die spezielle Riccati'sche Gl.

$$y' + h y^2 = c x^m$$

so bietet uns diese ein Beispiel für das absolute System, indem eben die Coefficienten ganz genau spezialisiert sind.

Die Verabredung die nun Lie in seinen Werken trifft, steht durchweg auf dem Standpunkte des relativen Systems.

Ganz analoge Forderungen müssen nun bei allen höheren Arten von Diff. Gl'en nach der Auffassung der neueren Theorie erhoben werden.

Diese Forderungen sind eben, dass man deutlich verabredet, welche Funktionen als bekannt gelten sollen, und dass man nach objektiven Kriterien fragt, ob eine vorgelegte Diff. Gl. mittels bekannter Funktionsklassen integriert wird. Dabei wird man in jedem Falle ein absolutes und ein relatives System unterscheiden können. Doch sind diese Betrachtungen zumeist noch wenig entwickelt.

Man steht eben noch vielfach auf dem traditionellen Standpunkte, dass man sich auf gut Glück verlässt, ob eine Integration der Diff. Gl. durch einen gewählten Ansatz gelingt oder nicht.

Dasjenige Gebiet, wo dies noch am meisten gelingt, ist das der linearen Diff. Gl. in.

§ 37. Diff. Gl. en höherer Ordnung zwischen zwei veränderlichen und Systeme von Diff. Gl. in

mit mehreren Veränderlichen.

Mit Rücksicht darauf, dass wir mit der Ordnung des Differenzierens beliebig hoch gehen können, ist es nun ziemlich gleichgültig, ob man eine abhängige Variable und eine Diff. Gl. hat oder n abhängige Variable und n Diff. Gl'en. Nehmen wir an, wir hätten vorliegen die Diff. Gl.

$$\Omega(x, y, y', y'') = 0$$

Setzen wir hier $y = z$ also $y'' = z''$, so können wir sagen, y und z sind beide von x abhängig und für diese beiden abhängigen Veränderlichen haben wir die beiden Gl'en:

$$\Omega(x, y, z, z') = 0 \quad z - y' = 0$$

Also haben wir die eine Diff. Gl. 2ter Ordnung mit einer abhängigen Veränderlichen in zwei Diff. Gl'en 1ter Ordnung mit zwei abhängigen Veränderlichen zerlegt.

Jetzt wollen wir uns einmal zwei Diff. Gl'en gegeben denken, und zwar

mögen nur erste Diff. Quotienten vorkommen, so dass wir die Gl'en in die Form setzen können:

$$1) \quad y' = F(x, y, z) ; \quad 2) \quad z' = \phi(x, y, z).$$

Differentiieren wir hier Gl. (1.) so ist

$$3) \quad y'' = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z'$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot F + \frac{\partial F}{\partial z} \phi$$

Durch Elimination von z zwischen 1) und 3) erhalten wir

$$\Omega(x, y, y', y'') = 0$$

Wir werden also sagen: Sind zwei Gl'en 1ter Ordnung für 2 unabhängige Größen vorgelegt, so kann man die eine der abhängigen Größen eliminieren und bekommt eine Gl. 2ter Ordnung für die andere abhängige Größe.

Haben wir sie integriert, so erfahren wir z ohne weitere Integration aus der Gl. (2.).

Dies vorausgeschickt, wollen wir uns jetzt zu den linearen Diff. Gl'en beliebig höher Ordnung mit einer oder mehreren veränderlichen wenden. Und zwar werden

wir uns besonders mit denjenigen
Gebieten befassen, welche zum meist
in der Mechanik und der Physik,
z. B. bei der Lehre von den kleinsten
Schwingungen Anwendung finden.

A. Die linearen Diff. Gl'en höherer Ordnung.
 § 38. Beschränkung auf zwei Veränderlichen
 Nehmen wir zunächst nur eine abhängige Variable, und eine unabhängige an und ferner, dass die Diff. Gl. linear in y und in seinen Ableitungen vorliegt, also die Form hat:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = q.$$

Eine solche einzelne Diff. Gl. n-ter Ordnung kann nun auch in die Form eines Systems von Diff. Gl'en geschrieben werden. Setzen wir nämlich:

$$y = y_0, y' = y_1, y'' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_{n-1}$$

so können wir sagen: Wir haben n Variable y_0, y_1, \dots, y_{n-1} und diese sind aneinander durch folgendes System von Diff. Gl'en geknüpft:

$$\frac{dy_0}{dx} = y_1$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$$\frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = -p_1 y_{n-1} - p_2 y_{n-2} - \dots - p_n y_0 + q.$$

Wir gewinnen daraus den Satz:
Die einzelne lineare Diff. Gl. nter
Ordnung mit einer unbekanntem
Grösse lässt sich umsetzen in ein
System von n linearen Diff. Gl'en
1ter Ordnung mit n abhängigen
Grössen.

Und nun umgekehrt:

Setzen wir fest, dass in einem
solchen Systeme die n Diff. Quotienten
lineare Funktionen der n Variablen
sein, dass also die Gl'en vorliegen:

$$\frac{dy_0}{dx} = p_{00} y_0 + p_{01} y_1 + \dots + p_{0, n-1} y_{n-1} + q_0$$

$$\frac{dy_1}{dx} = p_{10} y_0 + p_{11} y_1 + \dots + p_{1, n-1} y_{n-1} + q_1$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = p_{n-10} y_0 + p_{n-11} y_1 + \dots + p_{n-1, n-1} y_{n-1} + q_{n-1}$$

so ist uns damit der allgemeine Typus
eines Systems linearer Diff. Gl'en mit
n abhängigen Veränderlichen gegeben.
Für die einzelne Variable y_r findet man
dann durch Verallgemeinerung des in §37
gegebenen Ansatzes eine lineare Diff. Gl. nter Ord.

1. Constante Coefficienten.

§ 39. Die Diff. Gl. : der kleinen Schwingungen

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = 0.$$

Beginnen wir jetzt mit denjenigen einfachen Fällen, die in der Mechanik eine besonders hervorragende Rolle spielen. Wir nehmen jetzt nur eine unabhängige Variable x und eine abhängige y an. Stellen wir die Gl.

$$y'' = cy$$

auf, und interpretieren wir dabei $x=t$ als Zeit, und denken wir uns y als Strecke auf einer gegebenen geraden Linie aufgetragen, so ist uns durch diese Gl. die Bewegung eines Punktes auf dieser Gerade gegeben, dessen Beschleunigung y'' ist. Die Diff. Gl. sagt nun aus, dass die Beschleunigung proportional mit dem Ausschlage ist. Ja das ist der Fall bei den Schwingungen des Pendels oder des Galvanometers etc.

Bei den oscillatorischen Bewegungen ist nun c negativ d.h. die Beschleunigung

wirkt dem Ausschlage entgegen.
Wir setzen es daher $-\beta^2$, so dass unsere Gl. lautet:

$$1) \quad y'' + \beta^2 y = 0$$

Jetzt machen wir noch die Annahme, der Punkt unterliege einer Kraft, die proportional der Geschwindigkeit ist und die Bewegung zusammen suchen. Dieses Zusatzglied hat dann die Form $c_1 y'$ und ist beim Pendel oder Galvanometer auf Rechnung der Reibung oder Dämpfung zu setzen. Da diese neue Kraft erzeugend wirkt, ist c_1 negativ zu setzen, etwa gleich $-\alpha^2$, sodass wir als 2ten Typus erhalten:

$$2) \quad y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = 0$$

Bisher hatten wir nun angenommen, dass der Punkt nur solchen Kräften unterlag, die von y und y' abhängen, nicht etwa von t . Nun möge also noch eine äussere Kraft hinzutreten, die nur von der Zeit abhängt. Wir werden also noch ein Glied $f(t)$ zufügen und erhalten:

$$3) \quad y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f(t)$$

Im Falle (1.) und (2.) sagt man, der Punkt vollführt freie Schwingungen, während man im Falle (3.) von erzwungenen Schwingungen redet.

Wir sehen aus all' diesem, dass bereits die einfachen Gl'en die hauptsächlichsten Eigentümlichkeiten zeigen, die bei linearen Diff. Gl'en mit constanten Coefficienten in Betracht kommen.

Man hat nun zwecks Integration dieser Diff. Gl. insbesondere den Zusammenhang der Exponentialfunktion mit den trigonometrischen Functionen im Auge zu behalten.

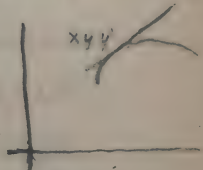
Es ist nämlich:

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

Integrieren wir jetzt Gl. (1.): wir machen uns zunächst ein geometrisches Bild allgemein für Diff. Gl'en 2ter Ordnung ganz entsprechend dem, wie wir es bei den Diff. Gl'en 1ter Ordnung thaten.

Im rechtwinklig Koordinatensystem geht durch einen beliebigen Punkt x, y eine Curve, die eine bestimmte Richtung haben soll. Dieselbe hat in diesem Punkte die bestimmte Krümmung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$



Wir können nun sagen: Irgend eine Diff. Gl. zwischen x, y, y', y'' giebt, wenn wir den Curvenpunkt x, y und die Curvenrichtung y' beliebig annehmen, y'' und somit auch die Curvenkrümmung an.

Durch eine Diff. Gl. 1ter Ordnung war uns für jeden Punkt eine bestimmte Fortschreitungsrichtung in der x, y -Ebene gegeben.

Da wir jetzt für gegebenes x den Anfangswert des y' noch beliebig annehmen dürfen, so erhält die allgemeine Lösung der Diff. Gl. 2ter Ordnung zwei willkürliche Constanten.

Um die Integration dieser Diff. Gl. durchzuführen, sucht man sich immer Particular-Lösungen zu verschaffen, aus denen man dann die allgemeine Lösung aufbauen kann. Es sei $y_1(x)$ eine erste Partikular-Lösung und $y_2(x)$ " zweite " " Dann ist die allgemeine Lösung für die lineare Diff. Gl. 2. Ordnung ohne zweites Glied:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Ganz entsprechend ist die allgemeine Lösung einer linearen Diff. Gl. n-ten Ordnung ohne zweites Glied von der Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

- § 40. Integration der vorstehenden Gl.
 Um nun für Gl. (1.) zwei Partikular-Lösungen zu finden, wendet man den Kunstgriff an, $y = e^{\lambda t}$ zu setzen. Es ist dann
- $$y = e^{\lambda t} \quad y' = \lambda e^{\lambda t} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$
- Gl. (1.) erhält daher die Gestalt
- 1^a) $e^{\lambda t} (\lambda^2 + \lambda^2) = 0$

$$\lambda = \pm i\beta$$

$$y_1 = e^{i\beta t}, \quad y_2 = e^{-i\beta t}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Für die Anwendung wünscht man natürlich reelle Lösungen zu haben; man wird daher Verbindungen aufsuchen, die reell sind.

Eine erste und zweite reelle partikuläre Lösung sind resp.

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \cos \beta t, \quad \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = \sin \beta t$$

Aus diesen zusammengesetzt ist dann die allgemeine Lösung

$$y = a \cos \beta t + b \sin \beta t$$

$$= r \sin(\beta t + \varphi) = r \sin \beta(t - t_0)$$

$$\text{wo } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{a}{b}, \quad \varphi = -\beta t_0$$

In dieser Schreibweise der Lösung nennt man r die Amplitude der Schwingung und t_0 die Phase "

β hängt zusammen mit der Dauer einer ganzen Schwingung T , nach welcher sich die Ausschläge periodisch wiederholen.

Das ist für $\beta T = 2\pi$, also

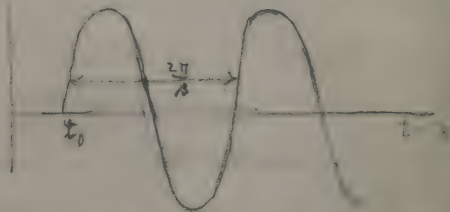
$$T = \frac{2\pi}{\beta}$$

ist die Dauer einer ganzen Schwingung.

Nebenstehende Figur

gibt uns die geometrische Deutung unserer Gl. Wir sehen

daraus:



Unsere Diff. Gl. $y'' + \beta^2 y = 0$ stellt das Gesetz der harmonischen Schwingungen dar, wie sie in der Physik vielfach, z. B. bei den Tönen einer Stimmgabel vorkommen.

§ 41. Speziell der Einfluss des Dämpfungs. Wir wenden uns jetzt zur Diff. Gl. der gedämpften Schwingungen:

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = 0,$$

in welcher durch das Glied $\alpha^2 y'$ der Dämpfung Rechnung getragen wird. Wir sehen wiederum zu, ob es gelingt, eine Particular-Lösung zu finden. Wir setzen wieder: $y = e^{\lambda t}$.

Dann erhält die vorgelegte Gl. die Form:

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + \alpha^2 \lambda + \beta^2) = 0$$

also $\lambda^2 + \alpha^2 \lambda + \beta^2 = 0$

welche Gl. wir die charakteristische Gl. nennen. Die Wurzeln derselben sind:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^4 - 4\beta^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^4 - 4\beta^2}$$

Wenn die beiden Wurzeln verschieden sind, so lautet die allgemeine Lösung:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

im Falle $\lambda_1 \neq \lambda_2$ d.h. $\alpha^4 - 4\beta^2 \neq 0$.

Wir unterscheiden 3 Fälle

I $\alpha^4 - 4\beta^2 < 0$, II $\alpha^4 - 4\beta^2 > 0$, III $\alpha^4 - 4\beta^2 = 0$

I. $\alpha^4 - 4\beta^2 < 0$. Dies tritt ein, wenn $\alpha = 0$ ist, wie im letzten §, oder wenn nur geringe Dämpfung vorhanden ist. Erst dann wenn die Dämpfung oder Reibung beträchtlich ist, dann wird der Ausdruck linkerhand positiv und dazwischen liegt der Fall, wo er 0 ist.

Wenn $\alpha^4 - 4\beta^2 < 0$ ist, dann haben wir

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{i}{2}\sqrt{4\beta^2 - \alpha^4}; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{i}{2}\sqrt{4\beta^2 - \alpha^4}$$

wo die Wurzel reell ist. Es ist dann

$$y_1 = e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} \cdot e^{\frac{i}{2}\sqrt{4\beta^2 - \alpha^4}t}; \quad y_2 = e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} \cdot e^{-\frac{i}{2}\sqrt{4\beta^2 - \alpha^4}t}$$

Reelle Partikular-Lösungen sind dann

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t} \cdot \cos \sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \cdot t = (y_1)$$

$$\frac{1}{2}(y_1 - y_2) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t} \cdot \sin \sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \cdot t = (y_2)$$

Die allgemeine Lösung lautet:

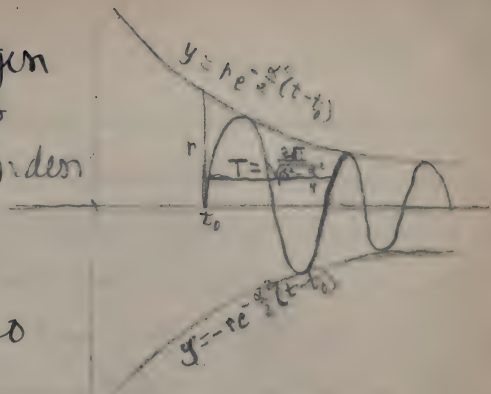
$$\begin{aligned} y &= C_1(y_1) + C_2(y_2) \\ &= r e^{\frac{\alpha}{2}(t_0 - t)} \sin(-\sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \cdot t_0) \cos \sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}} t \\ &\quad + r e^{\frac{\alpha}{2}(t_0 - t)} \cos(-\sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \cdot t_0) \cdot \sin \sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}} t \\ &= r e^{-\frac{\alpha}{2}(t - t_0)} \sin \left[\sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}} (t - t_0) \right] \end{aligned}$$

wo r und t_0 die Integrationskonstanten sind. Dabei wird t_0 die Phase genannt und r die zum Anfangswerte t_0 gehörige Amplitude.

Zeichnen wir uns die dieser Gl. entsprechende Curve, so wird uns dieselbe den Einfluss der Reibung sehr anschaulich darstellen. Während im vorigen § die Curve als eine Sinus-curve zwischen zwei Parallelen zur t -Axe auf und ab oscilliert, haben wir jetzt als Grenz-curve zwei zur t -Axe symmetrische Exponentialcurven, die sich derselben immer mehr nähern.

Die Nullstellen liegen bei t_0 und von da ab in constanten Abständen

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$



Wir gewinnen also den Satz:

Mit wachsender Zeit kommt der Punkt y immer mehr zur Ruhe. Das ist das bekannte Bild, welches ein Pendel oder eine Galvanometernadel bietet, wo die Schwingungen immer kleiner und schliesslich gleich 0 werden.

Sehen wir zu, worin der wesentliche Unterschied gegenüber $\alpha=0$ besteht. Da war die Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\beta}$;

jetzt ist dieselbe $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$

Die Schwingungen sind also unter sich wieder isochron, aber die Schwingungszeit ist etwas länger geworden, als wenn keine Reibung vorhanden wäre.

Der zweite Unterschied besteht darin, dass die Amplitude der Schwingungen

$$r e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-t_0)}$$

asymptotisch gegen 0 abnimmt.

Man drückt dies letztere physikalisch meist in folgender Weise aus: Man betrachtet nämlich den Logarithmus der Amplitude; er ist

$$\log r e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-t_0)} = \log r - \frac{1}{2}\alpha^2(t-t_0).$$

Dabei wird der Subtrahend rechterhand das "logarithmische Dekrement" genannt.

Wir fassen dies in dem Satz zusammen: Der Logarithmus der Amplitude nimmt proportional mit der Zeit ab. Dies nennt man die Regel vom logarithmischen Dekrement.

[Die physikalische Terminologie wird vielfach anders gewählt; vergl. die Darstellung bei Herznst und Schönflies.]

II. Gehen wir jetzt zum anderen allgemeinen Falle, also zum Falle starker Dämpfung, wo $\frac{\alpha^2}{4} - \beta^2 > 0$ ist,

die Wurzel daraus somit null.

Dann sind die beiden Partikular-Lösungen, die wir vom Haus aus hatten, beide null, und wir haben sofort die allgemeine Lösung in der nullen ζ Gestalt.

$$y = c_1 \cdot e^{(-\frac{1}{2}\zeta^2 + \sqrt{\frac{\zeta^4}{4} - \sigma^2})t} + c_2 \cdot e^{(-\frac{1}{2}\zeta^2 - \sqrt{\frac{\zeta^4}{4} - \sigma^2})t}$$

Was bedeutet nun diese Gl.?

Beachten wir, dass beide Exponenten negativ sind. Die beiden Partikular-Lösungen sind in der Fig. dargestellt.

Beide Curven nähern sich asymptotisch

der t -Achse. Auch dieser

Fall wird in der Physik

angewandt, z. B. beim Galvanometer, um die Schwingungen zu vermeiden, und eine möglichst ruhige Einstellung der Nadel zu erzielen.

Dies ist der Fall der sogenannten aperiodischen Dämpfung. y nimmt mit wachsendem t asymptotisch gegen null ab. von Schwingungsdauer 21



natürlich hier keine Rede mehr denn
 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ verschwindet höchstens
in einem Punkte der t -Achse.

§ 42 Der Fall (III) zusammenfallender
Wurzeln der charakteristischen Gl.

III. Wie ist es nun mit dem Spezial-
fall, wo $\frac{\alpha^2}{4} - \beta^2 = 0$ ist?

Hier lautet die Diff. Gl.

$$y'' + \alpha^2 y' + \frac{1}{4} \alpha^4 y = 0.$$

Setzen wir $y = e^{\lambda t}$, so bekommen wir
nur eine Partikular-Lösung: $y_1 = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t}$.

Eine zweite: " " " " ist $y_2 = t \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t}$

wie man leicht verifiziert.

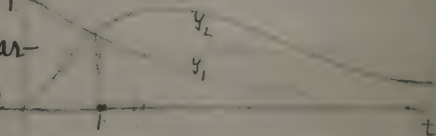
Die allgemeine Lösung ist wieder

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Wie die Figur zeigt,
ergeben beide Partikular-
Lösungen Curven, die
sich asymptotisch

an die t -Achse anschließen, nur dass
 y_2 dieses viel langsamer thut als y_1 .

Wie kommt man nun darauf y_2 in dieser



§ stellt zu vermuten?

Seien etwa $e^{\lambda t}$ und $e^{\lambda' t}$ zwei Lösungen unserer Diff. Gl. ($\alpha^4 - 4\beta^2 \neq 0$) wo λ' sehr nahe an λ liegt: $\lambda' = \lambda + \epsilon$.

Es wird dann auch

$$\underline{e^{(\lambda+\epsilon)t} - e^{\lambda t}}$$

eine Partikular-Lösung sein.

Wenn nun ϵ gegen 0 geht, so verwandelt sich diese letzte Lösung in

$$\frac{d e^{\lambda t}}{d \lambda} = t e^{\lambda t}$$

und diese Funktion wie wir gesehen haben erfüllt unsere Diff. Gl. in dem Falle wo $\lambda' = \lambda$.

Unser Spezialfall erscheint danach nicht als ein Ausnahmefall der allgemeinen Theorie, sondern als ein Grenzfall der sich zwischen die beiden Fälle der allgemeinen Theorie einordnet.

Wir fassen das Resultat so zusammen wenn α von 0 beginnend wächst, so wächst auch die anfängliche Schwingungsdauer immer mehr, um für $\frac{1}{4} \alpha^4 - \beta^2$

unendlich gross zu werden, und von da ab unendlich gross zu bleiben, d.h. es findet ein Oscillieren überhaupt nicht mehr statt.

§ 43. Hinzubringen einer äusseren Kraft:

(Erzwungene Schwingungen).

Erweibern wir die letzten Betrachtungen so, dass auf die rechte Seite ein Glied $f(t)$ tritt, d.h. im Bilde der Mechanik, dass der bewegte P nicht nach einer von der Zeit abhängigen äusseren Kraft unterliegt.

Wir haben dann: $y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f(t)$, also eine lineare Diff. Gl. 2ter Ordnung mit 2ten Gliede.

Wir wollen zunächst betrachten, wie sich die allgemeine Lösung aus Partikularlösungen zusammensetzt.

In dem Falle, wo das zweite Glied nicht vorhanden ist, erhielten wir als allgemeine Lösung $c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Hier ist es ganz ähnlich und zwar werden wir diese Lösungen der Diff. Gl.

ohne zweites Glied zu Hilfe nehmen.
Es sei y eine Partikularlösung der
vollständigen Diff. Gl.

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f(t)$$

Dann besteht die Gl.

1)
$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f(t)$$

Wenn wir dann setzen:

$$y = Y + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

so befriedigt auch diese allgemeine
Form die vorgelegte Diff. Gl. u. u.

Dies ist die allgemeine Lösung
der vollständigen Gl.

Wir nannten bereits eingangs dieser
Betrachtungen die Schwingungen,
die uns durch eine Partikularlösung
 Y der vollständigen Diff. Gl. dargestellt
worden: erzwungene Schwingungen.

Zu diesen treten also jetzt noch die
freien Schwingungen entsprechend
 $c_1 y_1 + c_2 y_2$ hinzu. Also: Mit der erzwungenen
Bewegung unseres Massenpunktes überlegen sich die allgemeinsten
freien Schwingungen desselben, wie wir

sie vor Kurzem betrachtet haben.

§44. Einfachstes Beispiel hierfür bei wegfällender Dämpfung:

Wir wollen sogleich zu einem ganz speziellen Beispiel übergehen, nämlich zu dem speziellen Beispiel der Bewegung eines Pendels oder einer Galvanometernadel etc. unter dem Einfluss einer mit $\sin \omega t$ proportionalen Kraft:

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = \gamma \sin \omega t.$$

Hierbei werden wir zunächst $\alpha = 0$ annehmen, d.h. also die Reibung vernachlässigen. Wir haben dann:

a)
$$y'' + \beta^2 y = \gamma \sin \omega t$$

Da wir es hier mit dem Falle einer direkten Anwendung zu thun haben, wollen wir sofort die reellen Lösungen angeben:

$$y_1 = \sin \beta t, \quad y_2 = \cos \beta t.$$

mögen die beiden zu benutzenden Partikulärlösungen der linearen Diff. Gl. 2ter Ordnung ohne zweites Glied sein.

Hinsichtlich der Partikular-Lösung der vollständigen Diff. Gl. wollen wir versuchsweise eine mit der äusseren Kraft synchron schwingung wählen, d.h.

$$y = c \sin ut.$$

Also ist $y' = cu \cos ut$, $y'' = -cu^2 \sin ut$.

Dies in Gl. (a) eingesetzt:

$$-cu^2 + c\beta^2 = \gamma$$

$$c = \frac{\gamma}{\beta^2 - u^2}$$

$$\therefore y = \frac{\gamma}{\beta^2 - u^2} \sin ut$$

Diese Partikular-Lösung wollen wir jetzt kurzweg als "die" erzwungene Schwingung bezeichnen, während wir vorher jede Partikular-Lösung als gezwungene Schwingung des Punktes bezeichneten.

Das allgemeine Integral wird dann lauten:

$$y = \frac{\gamma}{\beta^2 - u^2} \sin ut + c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t.$$

Wir sehen: Die allgemeine Bewegung des Punktes entsteht, indem sich über die erzwungene Schwingung die

allgemeinen freien Schwingungen
überlegen.

Betrachten wir jetzt diese mit der ausseren Kraft synchrone Schwingung hinsichtlich ihrer Amplitude, so können wir folgendes, dem Beobachter solcher Schwingungen ganz geläufigen Satz aussprechen:

Die Amplitude der erzwungenen Bewegung wächst nicht nur proportional der Stärke der ausseren Kraft y , sondern sie wächst auch umgekehrt proportional mit $\beta^2 - u^2$. Sie wird also um so grösser, je mehr die Periode der erzwungenen Schwingung und der freien Schwingung übereinstimmt.

Was wird nun entstehen für den Fall, dass β und u genau übereinstimmen? Man denke sich hierzu ein Pendel, bei welchem die Dauer der freien Schwingung übereinstimmt mit der von aussen einwirkenden periodischen Kraft. Unsere Gl. zeigt, dass dann gar keine gleichförmigen Schwingungen

mehr eintreten, die Amplitude wächst ins Unendliche, die Formel verliert ihren Sinn.

Jedoch ist unter den allgemeinen Lösungen dieses Falles $\beta = \epsilon$ insbesondere eine partikuläre Lösung enthalten, deren Gl. zunächst eine unbestimmte Form annimmt. Es wird darauf ankommen die Bedeutung dieser Partikular-Lösung zu erfassen.

Wir wollen uns dies ganz entsprechend dem Vorgange beim Ausnahmefall der vorigen Stunde klar machen:

Es sei u nahezu gleich β , also

$$u = \beta + \epsilon.$$

Wir wählen nun diejenige Partikular-Lösung, für welche c_2 verschwindet, und c_1 , das ist jetzt die Amplitude der freien Schwingung, mit der der erzwungenen übereinstimmt.

Wir haben dann:

$$(4) = \gamma \frac{\sin \epsilon t - \sin \beta t}{\beta^2 - u^2} = -\gamma \frac{\sin \beta + \epsilon t - \sin \epsilon t}{2\beta\epsilon + \epsilon^2}$$

Wenn jetzt ε gegen 0 geht, so fällt zunächst das Glied ε^2 als \mathcal{O} ränge zweiter Ordnung weg, und wir erhalten:

$$(4) = -\frac{\gamma}{2\beta} \frac{\varepsilon \sin(\varepsilon t) - \varepsilon t \cos \varepsilon t}{\varepsilon} =$$

$$(4)_{\beta=\mu} = -\frac{\gamma t}{2\beta} \frac{d \sin \beta t}{d \beta t} = -\frac{\gamma t}{2\beta} \cos \beta t.$$

Damit haben wir eine Partikular-Lösung gefunden, die wir durch unmittelbares Einsetzen in

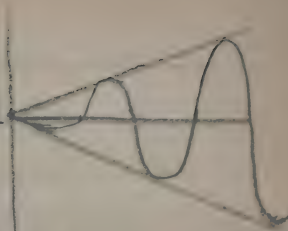
$$y'' + \beta^2 y = \gamma \sin \beta t$$

verifizieren können. Wir gewinnen daher den Satz:

Es ist uns durch das Grenzwertverfahren in der \mathcal{P} hat gelungen für den Ausnahmefall unserer Diff. Gl. eine Partikular-Lösung zu finden. Diese Partikular-Lösung wollen wir die erzwungene Schwingung des Ausnahmefalles nennen. Um die allgemeine Lösung für $\beta = \mu$ zu erhalten, haben wir noch $c_1 y_1 + c_2 y_2$ zuzufügen.

Diese erzwungene Schwingung des

Ausnahmefalles hat also eine mit der Zeit wachsende Amplitude und über diese erzwungene Schwingung lagert sich einmal eingelebt eine beliebige freie Schwingung über.



§45. Modification der Lösung bei zunehmender Dämpfung.

Dies war der Fall ohne Reibung.

Ganz besonders interessant aber wird es sein diese Beobachtungen dahin zu erweitern, dass auch ein Reibungs-glied in die Gl. eingeht. Dabei wollen wir immer unsere Formeln mit den aus der Beobachtung entstandenen Resultaten vergleichen. Wir haben also:

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = \gamma \sin \omega t$$

Wir nehmen α als kleine Größe an und zwar sei $\frac{1}{4}\alpha^2 < \beta^2$, d. h. wir nehmen nur geringe Reibung an. Die beiden freien Schwingungen waren nun

in reeller Form angesetzt:

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \sin \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{4}\alpha^2} t \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \cos \sqrt{\beta^2 - \frac{1}{4}\alpha^2} t$$

Die Amplituden werden hier also immer kleiner, die Schwingungen erlöschen mit der Zeit. Wie aber werden wir jetzt eine Partikular-Lösung y finden? Gehen wir wieder versuchsweise vor. Wir setzen

$$y = c \sin ut + c' \cos ut$$

(weil ein Sinusglied oder Cosinusglied allein genommen nicht genügt).

Dann wird:

$$y' = cu \cos ut - c'u \sin ut$$

$$y'' = -cu^2 \sin ut - c'u^2 \cos ut$$

Diese Werte in die linke Seite unserer Diff.-Gl. eingebracht, gibt:

$$\sin ut \cdot [-cu^2 - c'u^2 + c\beta^2] + \cos ut [-c'u^2 + cu^2 + c'\beta^2] = \gamma \sin ut$$

Daraus bekommen wir für c und c' zwei lineare Gleichungen:

$$(\beta^2 - u^2)c - u^2 c' = -cu^2 - c'u^2 + c\beta^2 = \gamma$$

$$u^2 c + (\beta^2 - u^2)c' = -c'u^2 + cu^2 + c'\beta^2 = 0$$

so berechnen sich leicht die Größen c und c' .

Wir können daher sagen: Schreiben wir

$$y = c \sin ut + c' \cos ut,$$

und berechnen wir c und c' aus obigen linearen Gl.-en, so haben wir eine Partikular-Lösung unserer vollständigen Diff. Gl. gefunden und diese Partikular-Lösung wollen wir die erzwungene Schwingung unseres Punktes nennen.

Wir erhalten für dieselbe:

$$y = \frac{Y}{(\beta^2 - u^2)^2 + \alpha^4 u^2} [(\beta^2 - u^2) \sin ut - \alpha^2 u \cos ut].$$

Um dies nun besser zu verstehen, machen wir folgende trigonometrische Zusammenziehungen: Wir setzen:

$$\frac{\beta^2 - u^2}{\sqrt{(\beta^2 - u^2)^2 + \alpha^4 u^2}} = \cos u t_0, \quad \frac{\alpha^2 u}{\sqrt{(\beta^2 - u^2)^2 + \alpha^4 u^2}} = \sin u t_0$$

Dann erhalten wir:

$$y = \frac{Y}{\sqrt{(\beta^2 - u^2)^2 + \alpha^4 u^2}} \sin u(t - t_0).$$

Die allgemeine Lösung lautet dann:

$$y = Y + c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Wir sehen zunächst dass für $\alpha^2 = 0$ unsere Gl. dasselbe Resultat giebt, das wir schon bei reibungslosen Schwingungen hatten.

Nehmen wir nun aber $\alpha' > 0$; da die y_1 und y_2 hier mit der Zeit immer mehr zurücktreten, so können wir sagen: Die freien Schwingungen erlöschen mit wachsender Zeit immer mehr, sodass zuletzt nur noch die eine erzwungene Schwingung vorhanden ist. Ferner ist die Amplitude der erzwungenen Schwingung infolge des Auftretens von α etwas kleiner als im reibungslosen Zustande.

Insbesondere aber bleibt die Amplitude auch für $\beta = \omega$ endlich und der Ausnahmefall, mit dem wir uns im reibungslosen Falle beschäftigten, ordnet sich der allgemeinen Gl. von selbst ein.

Schliesslich unterscheidet sich der Fall mit Reibung vom reibungslosen Falle insbesondere dadurch, dass eine Phasenverschiebung eintritt; die erzwungene Schwingung folgt der äusseren Kraft erst mit einer gewissen Verspätung.

§ 46. Überlagerung verschiedener
gezwungener Schwingungen.

Knüpfen wir hieran noch einige
Verallgemeinerungen. Wir nehmen
an, wir hätten zwei solcher Gl-ern:

$$1) \quad y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f_1(t)$$

$$2) \quad y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f_2(t)$$

und es sei uns nun gelungen eine
Partikular-Lösung y_1 der ersten Gl.
und ebenso eine Partikular-Lösung
 y_2 der zweiten Gl. zu finden. Um
dann die allgemeine Lösung zu
erhalten, haben wir beiden noch
zuzufügen: $c_1 y_1 + c_2 y_2$. In diesem
Falle ist nun auch $y = y_1 + y_2$ eine
Partikular-Lösung der Gl.

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = f_1 + f_2$$

Wir begleiten dies mit den Worten:
Wenn man die Partikular-Lösungen
zweier solcher Gl-ern überlagert, so
addieren sich die Glieder rechterhand.
Vergleichen, wenn wir statt 2 noch mehr:
3, 4, ... k solcher periodischen Kräfte wirken.

lassen, so erhalten wir:

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 = \sum y_k \sin \alpha_k t.$$

Ist uns also eine solche Gl. vorgelegt, so wird man sich die Particular-Lösung y_k für jede einzelne Kraft suchen und das allgemeine Integral unserer Diff. Gl. setzt sich dann so zusammen:

$$y = \sum y_k + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

d.h. es setzt sich zusammen aus den erzwungenen Schwingungen der Teilgleichungen und übrigens den freien Schwingungen.

Dabei haben wir noch immer an der Idee festgehalten, dass rechterhand nur trigonometrische Funktionen auftreten, aber auch für folgende Gl.

$$y'' + \alpha^2 y' + \beta^2 y = \gamma e^{\lambda t}$$

ist sofort eine Particular-Lösung gefunden, wenn wir nur $y = c \cdot e^{\lambda t}$ setzen. Es ist dann

$$c(\lambda^2 + \alpha^2 \lambda + \beta^2) = \gamma$$

also

$$c = \frac{\gamma}{\lambda^2 + \alpha^2 \lambda + \beta^2}$$

Demnach können wir jede Gl. durch den bisherigen Ansatz integrieren, wenn auf der rechten Seite eine beliebige Zahl trigonometrischer Glieder oder Exponentialglieder steht.

Allerdings, wenn rechterhand bei unserer Gl. eine unendliche Summe verschiedener Funktionen $f_k(x)$ (von Sinus oder Exponentialgliedern) steht, so ist unsere Spaltungsmethode nur bedingungsweise anwendbar; wenn nämlich die Summe $\sum y_k$, die man bei dem Spaltungssatze erhält, zweimal hintereinander gliedweise differentiiert werden kann.

§ 47 Allgemeines über das Auftreten der linearen Diff. Gl-en mit constanten Coefficienten in der Mechanik.

Die ganze Methode, die wir zuletzt gebraucht haben, möge die Methode der Partikular-Lösungen heißen, man suche Partikular-Lösungen e^{xt} oder $\sin \omega t$.

auf und baute dann die allgemeine Lösung aus den Particular-Lösungen in einfachster Weise auf.

Die so geschilderte Methode reicht nur auch aus für die linearen Diff. Gl'en n-ter Ordnung mit constanten Coefficienten, d.h. für Gl'en von der Form:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0.$$

und auch für ein allgemeines System linearer Diff. Gl'en 1-ter Ordnung mit n abhängigen Variablen und constanten Coefficienten, d.h. für ein System von der Form:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n + \dots$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n + \dots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n + \dots$$

wo dann rechts noch Sinus oder Exponentialglieder hinzutreten können. Ohne uns hier auf Details einzulassen, machen wir nun noch folgende Bemerkung. In den Lehrbüchern findet man, wie man

dieselbe Methode der Particular-Lösungen ausdehnt, entweder auf eine einzelne lineare Diff. Gl. nter Ordnung oder auf ein System von n linearen Diff. Gl. nter Ordnung mit n Variablen, immer vorausgesetzt, dass die Coefficienten constant sind. Dabei kann auf der rechten Seite ein Aggregat von Sinus oder Exponential Gliedern hinzubekommen. Hier in der Vorlesung wollen wir nun noch schildern, wie so solche allgemeine Gl. en bei den Schwingungsproblemen der Mechanik vorkommen.

Wir haben bisher nur einen Punkt betrachtet, der auf der y -Achse vermöge einer Kraft hin und her schwingt, die proportional dem y war.

Erfolgen die Schwingungen des Punktes jedoch in einer Ebene x, y , so tritt neben y noch x als Variable auf. Dergleichen, wenn es sich um ein Problem im Raume handelt nach z .



Die Mechanik ist aber nicht auf diese drei Grade der Freiheit beschränkt, vielmehr kann eine beliebige Anzahl von Graden der Freiheit vorkommen. Und zwar ist es da nur eine verschiedene Ausdrucksweise für ein und dieselbe Sache, wenn wir in der Mechanik Systeme von κ Graden der Freiheit betrachten, oder in der Mathematik einen Punkt im Raume von κ Dimensionen betrachten. Nehmen wir einmal κ Grade der Freiheit an und seien die κ verschiedene Coordinaten des Systems y_1, \dots, y_κ , welche zusammen gerade ausreichen, um die Lage des Systems zu beschreiben.

Denn wollen wir uns die Beschleunigung eines Punktes als lineare Function der Coordinaten gegeben denken, und zwar erstens für den Fall, dass keine Reibung vorhanden ist, also in der Form:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2 + \dots + \beta_{1K} y_K$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = \beta_{21} y_1 + \beta_{22} y_2 + \dots + \beta_{2K} y_K$$

$$\frac{d^2 y_K}{dt^2} = \beta_{K1} y_1 + \beta_{K2} y_2 + \dots + \beta_{KK} y_K$$

und zweitens für den Fall, dass auch Reibung auftritt, also in der Form:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \alpha_{11} y_1' + \dots + \alpha_{1K} y_K' + \beta_{11} y_1 + \dots + \beta_{1K} y_K$$

$$\frac{d^2 y_L}{dt^2} = \dots$$

$$\frac{d^2 y_K}{dt^2} = \alpha_{K1} y_1' + \dots + \alpha_{KK} y_K' + \beta_{K1} y_1 + \dots + \beta_{KK} y_K$$

($y_1 = 0 \dots y_K = 0$ gibt dabei ersichtlich die Gleichgewichtslage? des Systems)

In dieser Form werden die Diff. Gl'en für die kleinen Schwingungen eines Systems von K Graden der Freiheit in den Lehrbüchern der Mechanik angesetzt, wobei die $\alpha_{1K} \dots \beta_{1K} \dots$ constante Größen sind, von denen man gewöhnlich voraussetzt, dass $\alpha_{1K} = \alpha_{K1}, \beta_{1K} = \beta_{K1}$ ist. Auch diese Gl'en erledigt man durch

die Methode der Partikular-Lösungen.
Diese k linearen Gl'en 2ter Ordnung sind
sogar mit $2k$ linearen Gl'en 1ter Ordnung
mit constanten Coefficienten äquivalent,
wenn wir uns die y' als neue Serie von
variablen deuten.

Eine genaue Durchführung dieser Dinge
findet man in Routh: Rigid Dynamics, Part

2. Veränderliche Coefficienten.

§48. Die Existenz der Lösungen: Begriff
des Fundamentalsystems.

Wir wollen jetzt die linearen Diff. Gl'en
mit veränderlichen Coefficienten
betrachten. Dabei wollen wir uns
beschränken auf die lineare Diff. Gl.
2ter Ordnung. Es sei vorgelegt:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q$$

wo p_1, p_2, q rationale Funktionen von
 x sind. Da wird es uns darauf
ankommen, gewisse allgemeine Sätze
aufzustellen und zwar zunächst für
den Fall der Diff. Gl. ohne zweites Glied.

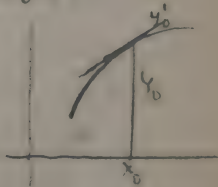
Das erste soll sein, dass wir uns die Unendlichkeiten überstellen von p_1 und p_2 ansehen, eine Untersuchung, die bei den bisherigen Diff. Gl'en wegfällt.

Diese Stellen, wo p_1 und p_2 gleich ∞ sind, nennen wir singuläre Werte von x im Gegensatz zu den gewöhnlichen Stellen, wo dies nicht statt hat.

1) Werfen wir zunächst die Frage nach der Existenz der Lösungen auf.

XOY sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Wir fragen nun, gibt es wirklich eine Funktion

(oder Curve) für gegebenes y_0 und y_0' ?



Bisher im Falle constanten Coefficienten waren wir dieser Frage überhoben, da wir direkt eine Lösung angeben konnten.

Hier also haben wir diese Untersuchung zu führen und wollen die Frage dahin spezialisieren, wann lässt sich y in der Nähe von x in eine

Potenzreihe

$$y = y_0 + y_1'(x-x_0) + \dots$$

entwickeln!

Diese Betrachtungen gehen im Grunde immer im Grunde auf die Untersuchung von Cauchy zurück. Da man das Existenztheorem in den meisten bezüglichen

Lehrbüchern behandelt findet, und uns über dies hier zu weit führen würde, so geben wir nur die Tatsache:

Man beweist nach Cauchy, dass in der Nähe jeder nicht-singulären Stelle x_0 eine und nur eine Lösung der Gl.

existiert, welche die vorgeschriebenen Werte y_0 und y_0' besitzt, und sich nach dem obigen Schema in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

2) Wie wird sich zweitens die allgemeine Lösung aus Partikular-Lösungen zusammensetzen?

Angenommen wir hätten eine Partikular-Lösung y_1 und eine zweite y_2 berechnet, so wird genau wie im Falle

konstanter Coefficienten $c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung sein. Die Frage ist, ob dies nun die allgemeine Lösung ist?

An der Stelle $x = x_0$ habe y_1 den Wert y_1^0 und y_1' den Wert $y_1'^0$, ferner y_2 den Wert y_2^0 und y_2' den Wert $y_2'^0$; dann werden y und y' resp. gleich sein

$$y^0 = c_1 y_1^0 + c_2 y_2^0$$

$$y'^0 = c_1 y_1'^0 + c_2 y_2'^0$$

Wann können wir diese beiden letzten Gleichungen nach c_1 und c_2 auflösen? Das ist möglich, wenn die Determinante:

$$y_1^0 y_2'^0 - y_2^0 y_1'^0 \neq 0$$

ist. Das ist nun in der That eine sehr vernünftige Voraussetzung.

Denn wäre es nicht der Fall, und

wir setzten $y_2^0 = k y_1^0$ so hätten wir auch $y_2'^0 = k y_1'^0$, und es würde die eine Potenzreihe für y_2 einfach das k -fache der anderen für y_1 sein. Wir fassen das Resultat in die Worte:

Wäre die Determinante $= 0$, dann

würde y_2 direkt ein Multiplum von y_1 sein, und dann ist ja ganz selbstverständlich, dass man in der Gestalt $c_1 y_1 + c_2 y_2$ nicht die allgemeine Lösung hat; denn $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ist dann immer nur ein Multiplum von y_1 .

Was wir hier im speziellen Falle uns klar machen, hat in der allgemeinen Theorie seine Terminologie: Man sagt nämlich, wenn die Determinante nicht verschwindet, dass dann y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem bilden.

Wir sprechen im Anschluss hieran den Satz aus:

Wenn zwei Partikular-Lösungen unserer Gl. bekannt sind, die ein Fundamentalsystem bilden, deren Determinante also an einer bestimmten Stelle $x = x_0$ nicht verschwindet, dann stellt sich die allgemeine Lösung unserer Gl. in der Gestalt dar

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

3). Unter diesen Betrachtungen kommen wir dazu, diese Determinante genauer anzusehen. Wir setzen voraus, zwei Partikular-Lösungen y_1 und y_2 befriedigen unsere Gl. Dann haben wir:

$$1) \quad y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1 = 0$$

$$2) \quad y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2 = 0$$

etc etc etc.

Wir finden leicht für die Determinante

$$\Delta = K e^{-\int_{x_0}^x p_1 dx} = \Delta_0 e^{-\int_{x_0}^x p_1 dx}$$

wo Δ_0 der Wert von Δ an der Stelle x_0 ist.

4). Wie steht es nun mit $e^{-\int p_1 dx}$?

In dieser Exponentialfunktion ist für alle Werte von x , die nicht singular sind der Exponent endlich und die Funktion selbst daher von

0 verschieden:

Resultat: Außer etwa an singulären Stellen wird Δ von 0 verschieden, sobald Δ_0 es ist und umgekehrt; d. h. wenn zwei Partikular-Lösungen

y_1 und y_2 an einer einzelnen nicht-singulären Stelle ein Fundamentalsystem bilden, dann bilden sie es an anderen nicht-singulären Stellen auch. Dies war zu erwarten, denn $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ sollte doch nicht bloss an einer Stelle x_0 die allgemeine Lösung unserer Diff. Gl. sein.

§3) Aus einer Lösung y_1 der Diff. Gl. kann man leicht eine zweite durch Quadratur erhalten

$$y_2 = y_1 \int \frac{\Delta_0 x^{-\int_{x_0}^x p_1 dx}}{y_1^2} dx$$

etc. etc. wie leicht zu zeigen ist.

§49 verschiedene Umformungen der Gl.

6) Es wäre nun die Frage noch, ob man die vorgelegte Diff. Gl. nicht vereinfachen kann? Und da kennt man drei Mittel zur typischen Umgestaltung:

a) Es liege die Diff. Gl. in der Form vor:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

Man mache die Substitution

$$y = z e^{-\frac{1}{2} \int p_1 dx}$$

und es wird die Gl.

$$z'' + (p_2 - \frac{1}{2} p_1' - \frac{1}{4} p_1^2) z = 0$$

erhalten, eine Gl. der Form

$$z'' + P z = 0$$

6 a)

b) Eine zweite charakteristische Umformung wird erhalten durch die Substitution

$$z = \frac{y_1}{y}$$

Es wird nämlich

$$z' + z^2 + p_1 z + p_2 = 0$$

Diese Gl. ist insofern einfacher, als in ihr nur die erste Ordnung vorkommt. Sie ist die Riccati'sche Gl.

c) Setzen wir drittens

$$z = \frac{y_1}{y_2}$$

dann ist

$$\frac{z'''}{z^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''}{z} \right)^2 = 2 \left(p_2 - \frac{1}{2} p_1' + \frac{1}{4} p_1^2 \right)$$

Diese Rechnung geschah also in umgekehrter Richtung wie Subst. b). Hier erhalten wir eine Diff. Gl. 3ter Ordnung, wobei der Fortschritt darin besteht, dass nur der Ausdruck rechterhand

von den Coefficienten unserer Diff. Gl.
abhängen.

Zugleich sehen wir auch, dass dieser
Ausdruck rechts derselbe ist, wie
die Klammer sub. a). Man nennt ihn die
Invariante unserer Diff. Gl. Wir verweisen
auf Schwarz.

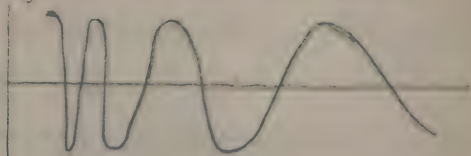
Der Ausdruck $\frac{1}{2} p_1^2 - \frac{1}{4} p_2^2$ heißt deshalb
die Invariante der linearen Diff. Gl.
2ter Ordnung, weil er ungeändert bleibt,
wenn man die Gl. 2ter Ordnung selbst
abändert, indem man ny für y als
neue Variable einführt, unter m irgend
einen Multiplikator verstanden.

Von diesen drei charakteristischen Formu-
wähle man immer diejenige aus, die für
die einzelne Fragestellung am
geeignetsten scheint. Schliesslich
knüpfen wir noch folgende kurze
Bemerkung an die typische Form a) an

- 7) Die Frage soll sein, welches ist die
Lsg. d. Integralcurve unserer Diff. Gl.
Wir betrachten $t=x$ als Zeitcoordinate

und z als Ausschlag. Unsere Gl. hat die Form $z'' = -\gamma z$.

Wenn da γ constant ist und zugleich positiv, dann ist



uns die Gl. als Diff. Gl. reibungsloser Pendelschwingungen wohl bekannt. Immerhin wissen wir auch jetzt, dass die Beschleunigung z'' des sich bewegenden Punktes proportional dem Ausschlage z ist, multipliciert noch mit einem Factor γ , der mit der Zeit variiert. Der allgemeine Verlauf der Bewegung spricht sich daher so aus. In den Intervallen, wo γ positiv ist, unterliegt der Punkt einer zum Ausschlag proportionalen Anziehung gegen die x -Achse, und die Integralcurve verläuft oscillatorisch nach Art einer Sinuscurve. In den Intervallen aber, wo γ negativ ist, unterliegt der Punkt einer zum Ausschlage proportionalen Abstoßung und jetzt verläuft die Curve

wie eine Art Exponentialcurve.

So gibt es für das Coordinatensystem $z-x$. Das ursprüngliche y ergibt sich aus dem z der so geschilderten Curve, indem wir das letztere mit einem Faktor multiplizieren, der nirgends 0 oder ∞ wird, ausser etwa in den singulären Punkten. Wie aber die Curve beim Herangehen an die singulären Punkte verhalte, ist Sache einer Spezialuntersuchung, die uns hier zu weit führen würde.

§ 50. Diff. Gl-en mit zweitem Gliede.

a) Betrachten wir jetzt den Fall einer linearen Diff. Gl. 2ter Ordnung mit zweitem Gliede

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q.$$

Setzen wir

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

wo y_1, y_2 Lösungen der Gl. $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ sind und wo c_1, c_2 als jetzt unbekannt Funktionen von x sind.

Es ist

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2$$

Nehmen wir an dass

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

Es wird dann

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'$$

und unsere Diff. durch Ersetzung dieser Werte für y' und y'' ergibt

$$c_1 (y_1'' + p_1 y_1' + k_1 y_1) + c_2 (y_2'' + k_2 y_2' + p_2 y_2) + c_1' y_1 + c_2' y_2 = q$$

Unsere Diff. Gl. wird daher durch

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

befriedigt wenn c_1, c_2 den Gleichungen

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

$$c_1 y_1' + c_2 y_2' = q$$

Es ist dann

$$c_1 = \frac{q y_2}{y_1' y_2 - y_2' y_1}, \quad c_2 = \frac{-q y_1}{y_1' y_2 - y_2' y_1}$$
$$= \int \frac{q y_2 e^{\int p_1 dx}}{K} dx, \quad = - \int \frac{q y_1 e^{\int p_2 dx}}{K} dx$$

Als eine Lösung unserer Diff. Gl. haben wir dann

$$y = y_1 \int \frac{q y_2 e^{\int p_1 dx}}{K} dx - y_2 \int \frac{q y_1 e^{\int p_2 dx}}{K} dx$$

Als willkürliche Glieder treten noch $c_1 y_1 + c_2 y_2$ hinzu, um die allgemeine Lösung der Diff. Gl. zu ergeben.

Wir gewinnen den Satz:

Die vollständige Gl. mit zwei Gliedern lässt sich durch Quadraturen erledigen sobald man die unvollständige Gl. (d. h. die Gl. ohne zweites Glied) als gelöst voraussetzt.

§ 57. Litteratur

1) Craig 1889 Bd. I

2) Heffer

3) Schlesinger

} Schüler von Fuchs

(2) ist wenig umfangreich und befasst sich vornehmlich mit dem singulären Punkten.

(3) Handbuch.

4) Picard, Traité d'Analyse II, III

5) Jordan, Cours d'Analyse III

6) Klein: Ueber die hypergeometrischen Funktionen.

Lineare Diff. Gl. in 2ter Ordnung } 1883

Hier in der Vorlesung können wir nur diejenige linearen Diff. Gl'en behandeln, die in den Anwendungen die wichtigsten sind. Das sind die durch folgende Funktionsclassen definierten:

- 1) Hypergeometrische Funktionen.
- 2) Kugelfunktionen.
- 3) Besselsche Funktionen.

Hier können natürlich diese Funktionsclassen nicht ausführlich behandelt werden, vielmehr beschränken wir uns mehr oder weniger auf eine allererste Übersicht.

§57. Die hypergeometrischen Funktionen von der Potenzreihe aus, Diff. Gl., Integraldarstellung.



gral-

r

QA Klein, Felix
303 Differential- und Integral-
K54 Rechnung

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
