DU CALCUL INTEGRAL.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

Et his principiis, via ad majora ſternitur. *NEWTON, in fine Tractatûs de quadraturâ curvarum.*

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT.

M. DCC. LXV.

Avec Approbation & Permiſſion.

AVERTISSEMENT.

1°. M. Fontaine avoit eu la bonté de me communiquer, avant l'impreſſion de ſes Mémoires, le Théorême fondamental qui s'y trouve pag. 24, & dont je me ſuis ſervi pag. 29, de même que l'Introduction à la nouvelle Méthode de Calcul Intégral qu'on y trouve pag. 89. Sa troiſieme Table, pag. 150, donne, pour le cas où l'intégrale eſt algébrique, les premiers termes des ſuites d'équations qu'on trouvera ici pag. 54 & ſuivantes : mais elles ſont ici réduites à un nombre fini de formes, ce qui eſt eſſentiel pour ma Théorie.

2°. La formule de la page 72 pour les différences finies a été donnée & démontrée d'une maniere très ingénieuſe pour le cas où Φ ne contient qu'une variable, par M. d'Alembert, dans *ſes Recherches ſur le Syſtême du Monde*. On la trouve auſſi dans les *Inſtitutions* de M. Euler.

3°. Les équations aux différences partielles, pour leſquelles je donne quelques principes, ont été d'abord traitées ſous un point de vue différent dans la Diſſertation de M. d'Alembert ſur la cauſe générale des Vents. On y trouve pluſieurs de ces équations intégrées par une méthode très ingénieuſe, qui joint l'élégance à la ſimplicité. MM. Euler & de la Grange en ont réſolu depuis quelques-unes par d'autres méthodes. Celle de ce dernier a une très grande généralité, & ſon Auteur l'a appliquée à des équations très compliquées.

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences,

Du 22 Mai 1765.

NOUS, Commiſſaires nommés par l'Académie, avons examiné un Traité du Calcul Intégral par M. le Marquis de Condorcet. Cet Ouvrage eſt diviſé en deux Parties, dont la premiere traite des équations différentielles aux différences infiniment petites, & la ſeconde conſidere les différences finies. Comme toute équation différentielle n'eſt pas toujours ſuſceptible d'une intégrale finie, que ſouvent même elle n'admet pas une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, M. de Condorcet s'occupe d'abord de la recherche des conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction, ou une équation différentielle propoſée, ait une intégrale. Il traite cette matiere de la maniere la plus générale ; ſoit qu'on ait ſuppoſé, ou non, une des différentielles conſtante, à quelque degré que montent les variables & leurs différentielles, & en tel nombre que puiſſent être ces variables.

Lorſqu'une équation eſt ſuſceptible d'une intégrale, il y a entre cette équation & ſon intégrale, une relation qui, quoiqu'elle ſoit une ſuite du principe de la différenciation, exige néanmoins de l'adreſſe & beaucoup de connoiſſances de calcul, pour être réduite en équation. C'eſt cette relation que M. de Condorcet enſeigne à trouver. Mais cette relation donneroit encore peu de connoiſſance ſur l'intégrabilité de l'équation propoſée, ſi, par des réflexions ultérieures, on ne parvenoit point à réduire l'équation, ou les équations qui expriment cette même relation, à ne renfermer d'autres quantités que celles qui appartiennent à l'équation proposée même, qui est ici la seule chose connue. M. de Condorcet en vient à bout : ensorte qu'il résout pleinement ce problême général : *Etant donnée une équation différentielle de tel ordre que ce soit, & qui renferme tant de variables qu'on voudra, déterminer si cette équation, dans l'état où elle est proposée, admet, ou non, une intégrale d'un degré immédiatement inférieur.* La solution qu'il donne de ce problême, joint au mérite de l'utilité, celui de l'élégance & de la généralité. M. de Condorcet remarque que les formules qui expriment les conditions cherchées, sont absolument les mêmes que celles qui expriment les conditions qui doivent avoir lieu entre plusieurs variables qui entrent dans une fonction intégrale indéfinie, pour que cette fonction devienne un *maximum* ou un *minimum*. Les questions de cette derniere espece ont été traitées par MM. Euler & de la Grange. M. de Condorcet fait voir que l'identité des formules est fondée sur l'identité analytique des deux sortes de questions. Lorsqu'un problême est possible, c'est déja avoir fait un pas utile vers sa solution, que d'avoir démontré que l'équation différentielle qui l'exprime, admet une intégrale du degré immédiatement inférieur. Mais il peut arriver souvent qu'une équation susceptible d'une pareille intégrale, exprime une chose impossible, & par conséquent n'admette point d'intégrale finie. C'est donc un travail fort utile que de déterminer dans quels cas une équation proposée peut être amenée à une intégrale finie. Cette recherche, qui paroît d'abord assez épineuse, & qui en effet exige une certaine sagacité, trouve assez naturellement sa solution par la méthode de M. de Condorcet. Il n'est pas néceſſaire de trouver toutes les intégrales ſucceſſives. M. de Condorcet donne la relation que doivent avoir les parties de l'équation propoſée, pour que la condition demandée ait lieu.

De ces recherches, qui renferment un très grand nombre de réflexions utiles & d'opérations ingénieuſes, M. de Condorcet paſſe à la méthode générale de trouver l'intégrale d'une équation différentielle propoſée. Il examine quel peut être le nombre & la nature des fonctions tranſcendantes qui peuvent entrer dans cette équation intégrale, comment ces fonctions tranſcendantes ont pu diſparoître dans les différenciations ſuceſſives. Il donne les moyens de préparer des équations générales, repréſentatives de l'intégrale, & qui, par différentes combinaiſons qu'il indique, puiſſent enfin devenir l'équation différentielle propoſée. Ce n'eſt que par la lecture de l'Ouvrage même, qu'on peut ſe former une idée ſuffiſante de l'étendue de ces méthodes : il nous ſuffit de dire qu'elles s'appliquent à toute équation différentielle.

Dans la ſeconde Partie, qui, comme nous l'avons déja dit, traite des différences finies, M. de Condorcet, après avoir expliqué la nature de ces différences, traite de l'intégration des équations qui renferment ces quantités. Il fait voir qu'on ne doit eſpérer l'intégration de ces ſortes d'équations, que dans le cas où la ſuppoſition que la différence ſoit infiniment petite les rendroit intégrables : mais cette condition, quoiqu'eſſentielle, n'eſt pas la ſeule à laquelle l'intégrabilité ſoit aſſujettie. C'eſt pourquoi M. de Condorcet s'occupe enſuite de la recherche des conditions néceſſaires pour qu'une équation à différences finies ait pour intégrale une fonction d'un ordre inférieur, & même une fonction ſans différences.

A la ſuite de ce travail, M. de Condorcet a ajouté un eſſai ſur les équations différentielles qui contiennent des différences partielles. On appelle ainſi les équations qui expriment la relation entre la différentielle d'une quantité priſe en faiſant varier quelques-unes de ſes parties ſeulement. M. de Condorcet donne les moyens de reconnoître dans quels cas ces ſortes d'équations ſont intégrables, & d'en trouver l'intégrale, lorſque cela eſt poſſible.

La nature des objets ſur leſquels roule cet Ouvrage, ne permet guere, dans un extrait, un plus grand développement ſur la fineſſe & la profondeur des vues que ſuppoſent les méthodes dont l'Auteur fait uſage, & qui, pour la plupart, lui ſont propres. Non ſeulement cet Ouvrage ſuppoſe dans l'Auteur des connoiſſances de calcul très étendues, & qu'il eſt très rare de trouver à pareil degré dans un âge auſſi peu avancé; mais il annonce encore les plus grands talens, & les plus dignes d'être excités par l'approbation de l'Académie. Fait à Paris, ce 22 Mai 1765. *Signé*, D'ALEMBERT & BEZOUT.

Je certifie le préſent Extrait conforme à ſon original & au jugement de l'Académie. A Paris, ce 29 Mai 1765.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secretaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

DU

DU CALCUL INTEGRAL.

JE me proposé dans cet Ouvrage de donner une méthode générale de déterminer l'intégrale finie d'une équation différentielle donnée. Je le divise en deux Parties. Je traiterai dans la premiere, avec assez d'étendue, des équations différentielles ordinaires : je donnerai dans la seconde quelques principes pour appliquer la théorie expliquée dans la premiere aux équations aux différences finies, & à celles où une même variable, égalée à une fonction de plusieurs autres, a été successivement supposée varier avec chacune d'entre elles.

PREMIERE PARTIE.

De l'intégration des équations différentielles aux différences infiniment petites.

PAR résoudre, ou intégrer une équation différentielle, j'entens, trouver l'équation finie, qui, par un nombre de différentiations successives égal à l'exposant de l'ordre de la proposée, la peut produire; ou trouver du moins une équation finie, telle, que tirant de cette équation la valeur d'une des variables, & substituant cette valeur pour la variable dans la proposée, celle-ci devienne nulle par elle-même. J'appellerai dans la suite une telle équation finie l'*intégrale finie*, ou simplement l'*intégrale de la proposée.*

J'entens encore, dans un autre sens, par résoudre ou intégrer une équation différentielle, trouver une équation d'un ordre moindre d'une unité, qui, par sa différentiation, produise la proposée, ou qui du moins la résolve : & j'appellerai une telle équation l'*intégrale de la proposée d'un ordre inférieur d'une unité*, ou simplement *de l'ordre inférieur.*

Si, par des différentiations successives, une équation finie a produit une équation différentielle d'un ordre n, il y aura nécessairement un nombre n des constantes qui entroient dans les coefficiens de l'équation finie, qui ne se trouveront plus dans ceux de l'équation différentielle ; & par conséquent, en repassant de cette équation différentielle à son intégrale finie, les constantes resteront nécessairement indéterminées : il y aura donc dans l'intégrale finie un nombre n de constantes arbitraires ; & il ne pourra y en avoir davantage.

Mais si je prends le terme d'*intégrale* dans le sens le plus étendu, c'est-à-dire, pour une équation finie qui résolve une équation différentielle proposée, il m'est aisé de voir, avec un peu d'attention, que, s'il ne peut y avoir dans les coefficiens de l'équation finie plus de constantes arbitraires que l'exposant de l'ordre de l'équation ne contient d'unités, il se peut faire au contraire qu'il y en ait moins, ou même qu'il n'y en ait pas du tout. Les intégrales, prises dans ce sens, seront donc générales ou particulieres, & les solutions qu'elles donnent, complettes ou incomplettes. Les intégrales seront générales & les solutions complettes, lorsqu'elles renfermeront un nombre d'arbitraires égal à l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle. Les intégrales seront particulieres & les solutions incomplettes, lorsqu'elles en renfermeront moins.

J'ignore si, en combinant à volonté des variables & leurs différentielles d'un ordre quelconque, il n'arrive pas souvent que la fonction ainsi formée ne soit la différentielle exacte d'aucune fonction finie, ou même d'aucune fonction d'un ordre inférieur d'une unité, ou que l'équation qu'on a en égalant cette fonction à zéro, n'ait aucune intégrale, soit finie, soit de l'ordre inférieur, ou n'en ait que de particulieres. Il paroît même naturel que cela soit ainsi. C'est pourquoi, avant de chercher à intégrer une équation ou une fonction, il est à propos de s'assurer si elle a une intégrale, & pour cela de trouver certaines conditions dépendantes de la forme générale d'une fonction ou équation différentielle qui aient toujours lieu, & qui n'aient jamais lieu que dans ce cas.

Je divise donc cette premiere Partie en deux Sections. Je donnerai dans la premiere le résultat de mes recherches sur ces conditions. Je traiterai dans la seconde de l'intégration des équations que j'aurai reconnu, par les méthodes de la premiere, avoir des intégrales finies possibles.

PREMIERE SECTION

De la recherche des conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction ou équation différentielle proposée ait une intégrale.

Je crois que toutes les recherches qu'on peut faire sur la forme que doit avoir une fonction ou une équation différentielle pour être intégrable, se réduisent à celles qui sont l'objet des problêmes suivans, dont les quatre premiers roulent sur les fonctions, & les trois derniers sur les équations différentielles.

Comme il n'y a encore que quelques Géometres qui se soient familiarisés avec la matiere que je traite ici, je crois qu'il n'est pas hors de propos d'avertir, 1°. que par équation de condition, j'entends une équation qui doit avoir lieu pour qu'une fonction ou équation différentielle ait une intégrale. 2°. Que par équation identique, j'entends une équation telle, que dans la fonction égalée à zero, tous les termes se détruisent. 3°. Que l'expression $\frac{dV}{dx}$ exprime la différence de V prise en ne faisant varier que x, & divisée par dx. 4°. Que $\frac{ddV}{dx\,dy}$ exprime la différence de $\frac{dV}{dy}$ prise en nefaisant varier que x, & divisée par dx, ou la différence de $\frac{dV}{dx}$ prise en ne faisant varier que y, & divisée par dy, ce qui revient au même. Enfin que $d\frac{dV}{dx}$ exprime la différence de $\frac{dV}{dx}$ prise en faisant tout varier. Cette explicatiion suffit pour faire entendre la valeur de toutes les autres expressions semblables.

PROBLÊME I.

TROUVER l'équation qui doit avoir lieu pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque de deux variables x, y, où dx est supposé constant, soit la différentielle exacte d'une fonction des mêmes variables d'un ordre moins élevé d'une unité.

SOLUTION. Soit V la fonction proposée, B la fonction de l'ordre inférieur dont V doit être la différence. Je fais dans V & dans B $dx = p$, $dy = p'$, $dp = 0$, à cause de dx constant, $ddy = dp' = q'$, $d^3y = d^2p' = dq' = r'$, $d^4y = d^3p' = d^2q' = dr' = s'$, & ainsi de ſuite : j'aurai donc V & B fonctions de x, y, p, p', q', r', s', &c. la derniere de ces lettres p', q', r', s', &c. qui ſe trouve dans V ne devant pas ſe trouver dans B, parce-que B eſt d'un ordre inférieur à V; & cette ſubſtitution me donnera moyen de diſtinguer les p, p', q', r', s', &c. qui ſe trouvent dans B, de ceux que la différentiation introduit dans dB.

Cela poſé, j'aurai par la ſuppoſition,

$$V = dB = \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp'}dp' + \frac{dB}{dq'}dq' + \frac{dB}{dr'}dr',$$

&c. & mettant dans cette valeur de V pour dx, dy, dp', dq', dr', &c. leurs valeurs, j'aurai

$$V = \frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s', \text{ \&c.}$$

forme que doit néceſſairemnt avoir V pour être la différentielle exacte de la fonction B. Pour parvenir à tirer de-là l'équation de condition que je cherche, je différencie les deux membres de l'équation ci-deſſus. Le premier me donne,

$$dV = N\,dx + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ds',$$

&c.

où N, N', P', Q', R', S', &c. ſont des quantités connues. Le ſecond me donne,

$$d\,\overline{\frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s', \text{ \&c.}} =$$

$$\overline{\frac{ddB}{dx^2}p + \frac{ddB}{dx\,dy}p' + \frac{ddB}{dx\,dp'}q' + \frac{ddB}{dx\,dq'}r' + \frac{ddB}{dx\,dr'}s', \text{ \&c.}}\;dx$$

$$+\overline{\frac{ddB}{dy\,dx}p + \frac{ddB}{dy^2}p' + \frac{ddB}{dy\,dp'}q' + \frac{ddB}{dy\,dq'}r' + \frac{ddB}{dy\,dr'}s', \text{ \&c.}}\;dy$$

$$+\overline{\frac{dB}{dy} + \frac{ddB}{dp'dx}p + \frac{ddB}{dp'dx}p' + \frac{ddB}{dp'^2}q' + \frac{ddB}{dp'dq'}r' + \frac{ddB}{dp'dr'}s',}$$

&c. dp'

$$\overline{+\frac{dB}{dp'}+\frac{ddB}{dq'dx}p+\frac{ddB}{dq'dy}p'+\frac{ddB}{dq'dp'}q'+\frac{ddB}{dq'^2}r'+\frac{ddB}{dq'dr'}s',}$$
&c. dq'

$$\overline{+\frac{dB}{dq'}+\frac{ddB}{dr'dx}p+\frac{ddB}{dr'dy}p'+\frac{ddB}{dr'dp'}q'+\frac{ddB}{dr'dq'}r'+\frac{ddB}{dr'^2}s',}$$
&c. dr'

$$+\overline{\frac{dB}{dr'}}+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ds'$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

& réduisant, en mettant pour les suites qui multiplient les dx, dy, dp', dq', dr', ds', &c. leurs valeurs $d\frac{dB}{dx}$, $d\frac{dB}{dy}$, $\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}$, $\frac{dB}{dp'}+d\frac{dB}{dq'}$, $\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}$, $\frac{dB}{dr'}$, &c. j'aurai

$$d\,\overline{\frac{dB}{dx}p+\frac{dB}{dy}p'+\frac{dB}{dp'}q'+\frac{dB}{dq'}r'+\frac{dB}{dr'}s'}, \text{ \&c.} =$$

$$\overline{d\frac{dB}{dx}}dx+\overline{d\frac{dB}{dy}}dy+\overline{\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}}dp'+\overline{\frac{dB}{dp'}+d\frac{dB}{dq'}}dq'+$$

$$\overline{\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}}dr'+\overline{\frac{dB}{dr'}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad ds', \text{ \&c.}$$

Mais puisque V & $\frac{dB}{dx}p+\frac{dB}{dy}p'+\frac{dB}{dp'}q'+\frac{dB}{dq'}r'+\frac{dB}{dr'}s'$, &c. doivent être une même chose, leurs différences doivent être égales terme à terme : j'aurai donc

$$N=d\frac{dB}{dx} \qquad\qquad N'=d\frac{dB}{dy}$$

$$P'=\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}$$

$$Q'=\frac{dB}{dp'}+d\frac{dB}{dq'}$$

$$R'=\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}$$

$$S'=\frac{dB}{dr'}+ \quad \ldots$$

équations qui donnent les valeurs que doivent avoir N, N', P', Q', R', S', &c. pour que V ſoit la différentielle exacte de B. Je remarque maintenant que, dans cette ſuite d'équations, le ſecond membre de la premiere & de la derniere ne peuvent avoir qu'un terme, & qu'ainſi chaque $\frac{dB}{dy}$, $\frac{dB}{dp'}$, $\frac{dB}{dq'}$, $\frac{dB}{dr'}$, ſe trouve dans une équation, & ſa différence dans une autre. Mettant donc ces équations ſous cette forme,

$$N' = d\frac{dB}{dy}$$
$$dP' = d\frac{dB}{dy} + d^2\frac{dB}{dp'}$$
$$d^2Q' = d^2\frac{dB}{dp'} + d^3\frac{dB}{dq'}$$
$$d^3R' = d^3\frac{dB}{dq'} + d^4\frac{dB}{dr'}$$
$$d^4S' = d^4\frac{dB}{dr'} + \cdot \cdot$$

j'aurai, en retranchant alternativement l'une de l'autre, $N' - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S'$, &c. $= 0$: équation identique qui doit avoir lieu pour que V ſoit la différentielle exacte d'une fonction d'un ordre inférieur d'une unité, & qui eſt par conſéquent l'équation de condition cherchée.

PROBLÈME II.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque de deux variables x, y, où aucune des différences premieres n'eſt ſuppoſée conſtante, ſoit la différentielle

férentielle exacte d'une fonction des mêmes variables d'un ordre moins élevé d'une unité.

SOLUTION. Soit, comme ci-dessus, V la fonction différentielle proposée, B la fonction d'un ordre inférieur dont V doit être la différentielle exacte : je fais, comme dans le problême précédent, $dx=p$, $dp=q$, $dq=r$, $dr=s$, &c. $dy=p'$, $dp'=q'$, $dq'=r'$, $dr'=s'$, &c. & B & V seront fonctions de x, y, p, q, r, s, &c. p', q', r', s', &c. les dernieres de ces lettres qui se trouvent dans V ne se trouvant pas dans B, parceque B doit être d'un ordre inférieur d'une unité. J'aurai donc par la supposition,

$$V=dB=\frac{dB}{dx}dx+\frac{dB}{dp}dp+\frac{dB}{dq}dq+\frac{dB}{dr}dr, \text{ \&c.}$$
$$+\frac{dB}{dy}dy+\frac{dB}{dp'}dp'+\frac{dB}{dq'}dq'+\frac{dB}{dr'}dr', \text{ \&c.}$$

& substituant pour dx, dp, dq, dr, &c. leurs valeurs p, q, r, s, &c. & pour dy, dp', dq', dr', &c. leurs valeurs p', q', r', s', &c. j'aurai

$$V=\frac{dB}{dx}p+\frac{dB}{dp}q+\frac{dB}{dq}r+\frac{dB}{dr}s, \text{ \&c.}$$
$$+\frac{dB}{dy}p'+\frac{dB}{dp'}q'+\frac{dB}{dq'}r'+\frac{dB}{dr'}s', \text{ \&c.}$$

forme que doit avoir V pour être une différentielle exacte.

Maintenant pour avoir les équations de condition, je prends, comme dans le problême précédent, la différence de chacun des membres de l'équation ci-dessus; & j'ai d'une part

$$dV=Ndx+Pdp+Qdq+Rdr+Sds, \text{ \&c.}$$
$$+N'dy+P'dp'+Q'dq'+R'dr'+S'ds', \text{ \&c.}$$

où N, P, Q, R, S, &c. N', P', Q', R', S', &c. sont donnés : & de l'autre, en réduisant comme ci-dessus,

$$d\left\{\begin{array}{l}\frac{dB}{dx}p+\frac{dB}{dp}q+\frac{dB}{dq}r+\frac{dB}{dr}s, \&c.\\ +\frac{dB}{dy}p'+\frac{dB}{dp'}q'+\frac{dB}{dq'}r'+\frac{dB}{dr'}s', \&c.\end{array}\right. =$$

$$\overline{d\frac{dB}{dx}}\,dx+\overline{\frac{dB}{dx}+d\frac{dB}{dp}}\,dp+\overline{\frac{dB}{dp}+d\frac{dB}{dq}}\,dq+$$
$$\overline{\frac{dB}{dq}+d\frac{dB}{dr}}\,dr+\overline{\frac{dB}{dr}}\;\ldots\ldots\; ds, \&c.$$
$$+\overline{d\frac{dB}{dy}}\,dy+\overline{\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}}\,dp'+\overline{\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dq'}}\,dq'+$$
$$\overline{\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}}\,dr'+\overline{\frac{dB}{dr'}}\;\ldots\ldots\; ds', \&c.$$

Mais puisque V doit être une même chose que

$$\frac{dB}{dx}p+\frac{dB}{dp}q+\frac{dB}{dq}r+\frac{dB}{dr}s, \&c.$$
$$+\frac{dB}{dy}p'+\frac{dB}{dp'}q'+\frac{dB}{dq'}r'+\frac{dB}{dr'}s', \&c.$$

leurs différences doivent être égales terme à terme. J'aurai donc ces deux suites d'équations

$$N=d\frac{dB}{dx} \qquad\qquad N'=\frac{dB}{dy}$$
$$P=\frac{dB}{dx}+d\frac{dB}{dp} \qquad\qquad P'=\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}$$
$$Q=\frac{dB}{dp}+d\frac{dB}{dq} \qquad\qquad Q'=\frac{dB}{dp'}+d\frac{dB}{dq'}$$
$$R=\frac{dB}{dq}+d\frac{dB}{dr} \qquad\qquad R'=\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}$$
$$S=\frac{dB}{dr}\;\ldots \qquad\qquad S'=\frac{dB}{dr'}\;\ldots$$

équations qui me donnent les formes que doivent avoir N, P, Q, R, S, &c. N', P', Q', R', S', &c. pour que V soit une différentielle exacte. Je remarque que, dans ces suites d'équations, chaque $\frac{dB}{dx}$, $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, $\frac{dB}{dr}$, &c. ou $\frac{dB}{dy}$, $\frac{dB}{dp'}$, $\frac{dB}{dq'}$, $\frac{dB}{dr'}$, &c. se trouve une fois, & sa différence une autre fois, parceque chaque premiere équation & chaque derniere n'ont qu'un terme. J'aurai donc les équations

$$N - dP + ddQ - d^3R + d^4S, \text{\&c.} = 0$$
$$N' - dP' + ddQ' - d^3R' + d^4S', \text{\&c.} = 0$$

équations identiques qui doivent avoir lieu pour que V soit la différentielle exacte d'une fonction B. C. Q. F. T.

PROBLEME III.

TROUVER les équations de condition pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque, & contenant un nombre quelconque de variables x, y, u, z, &c. soit la différentielle exacte d'une fonction d'un ordre inférieur d'une unité.

SOLUTION. Je ne mets ici ce problême, qui n'a aucune difficulté après ce qu'on a vu ci-dessus, que pour expliquer comment la méthode que j'ai détaillée pour deux variables s'étend à un nombre quelconque.

Soit donc toujours V la fonction proposée, B son intégrale : je fais

$$dz = p, \ dp = q, \ dq = r, \ dr = s, \text{ \&c.}$$
$$dy = p', \ dp' = q', \ dq' = r', \ dr' = s', \text{ \&c.}$$
$$du = p'', \ dp'' = q'', \ dq'' = r'', \ dr'' = s'', \text{ \&c.}$$
$$dz = p''', \ dp''' = q''', \ dq''' = r''', \ dr''' = s''', \text{ \&c.}$$

& ainsi de suite ; & j'ai

$$V = dB = \frac{dB}{dx}\,p + \frac{dB}{dp}\,q + \frac{dB}{dq}\,r + \frac{dB}{dr}\,s\text{, \&c.}$$
$$+ \frac{dB}{dy}\,p' + \frac{dB}{dp'}\,q' + \frac{dB}{dq'}\,r' + \frac{dB}{dr'}\,s'\text{, \&c.}$$
$$+ \frac{dB}{du}\,p'' + \frac{dB}{dp''}\,q'' + \frac{dB}{dq''}\,r'' + \frac{dB}{dr''}\,s''\text{, \&c.}$$
$$+ \frac{dB}{dz}\,p''' + \frac{dB}{dp'''}\,q''' + \frac{dB}{dq'''}\,r''' + \frac{dB}{dr'''}\,s'''\text{, \&c.}$$
$$+ \text{\&c.}$$

forme que doit avoir V pour être une différentielle exacte. Faisant donc les mêmes réflexions que ci-dessus, j'aurai

$$dV = N\,dx + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds\text{, \&c.}$$
$$+ N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ds'\text{, \&c.}$$
$$+ N''du + P''dp'' + Q''dq'' + R''dr'' + S''ds''\text{, \&c.}$$
$$+ N'''dz + P'''dp''' + Q'''dq''' + R'''dr''' + S'''ds'''\text{, \&c.}$$
$$+ \text{\&c.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad =$$

$$d\frac{dB}{dx}\,dx + \overline{\frac{dB}{dx} + d\frac{dB}{dp}}\,dp + \overline{\frac{dB}{dp} + d\frac{dB}{dq}}\,dq + \overline{\frac{dB}{dq} + d\frac{dB}{dr}}\,dr + \overline{\frac{dB}{dr}}\;.\;.\;.\;ds\text{, \&c.}$$

$$+ d\frac{dB}{dy}\,dy + \overline{\frac{dB}{dy} + d\frac{dB}{dp'}}\,dp' + \overline{\frac{dB}{dp'} + d\frac{dB}{dq'}}\,dq' + \overline{\frac{dB}{dq'} + d\frac{dB}{dr'}}\,dr' + \overline{\frac{dB}{dr'}}\;.\;.\;.\;ds'\text{, \&c.}$$

$$+ d\frac{dB}{du}\,du + \overline{\frac{dB}{du} + d\frac{dB}{dp''}}\,dp'' + \overline{\frac{dB}{dp''} + d\frac{dB}{dq''}}\,dq'' + \overline{\frac{dB}{dq''} + d\frac{dB}{dr''}}\,dr'' + \overline{\frac{dB}{dr''}}\;.\;.\;.\;ds''\text{, \&c.}$$

$$+ d\frac{dB}{dz}\,dz + \overline{\frac{dB}{dz} + d\frac{dB}{dp'''}}\,dp''' + \overline{\frac{dB}{dp'''} + d\frac{dB}{dq'''}}\,dq''' + \overline{\frac{dB}{dq'''} + d\frac{dB}{dr'''}}\,dr''' + \overline{\frac{dB}{dr'''}}\;.\;.\;.\;ds'''\text{, \&c.}$$

$$+ \text{\&c.}$$

& comme ces deux valeurs de dV doivent être égales terme à terme, j'aurai autant de suites semblables d'équations, que j'aurai eu de variables ; & chaque suite me donnera une équation de condition de la même forme. J'aurai donc les équations identiques

$$N - dP + ddQ - d^3R + d^4S, \&c. = 0$$
$$N' - dP' + ddQ' - d^3R' + d^4S', \&c. = 0$$
$$N'' - dP'' + ddQ'' - d^3R'' + d^4S'', \&c. = 0$$
$$N''' - dP''' + ddQ''' - d^3R''' + d^4S''', \&c. = 0$$

& ainsi de suite pour chaque variable. C. Q. F. T.

REMARQUE I.

EN suivant l'analyse du problême précédent, il est aisé de voir que, si une des différences du premier ordre eût été supposée constante, on auroit eu les mêmes équations de condition, excepté celle qui se rapporte à la variable dont la différence a été supposée constante : ensorte que, si aucune différence n'est supposée constante, le nombre des équations de condition est égal à celui des variables ; autrement il lui est inférieur d'une unité.

REMARQUE II.

LORSQUE $V = dB$, V est nécessairement de la forme

$$\frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dp}q + \frac{dB}{dq}r + \frac{dB}{dr}s, \&c.$$
$$+ \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s', \&c.$$
$$+ \frac{dB}{du}p'' + \frac{dB}{dp''}q'' + \frac{dB}{dq''}r'' + \frac{dB}{dr''}s'', \&c.$$
$$+ \frac{dB}{dz}p''' + \frac{dB}{dp'''}q''' + \frac{dB}{dq'''}r''' + \frac{dB}{dr'''}s''', \&c.$$
$$+ \&c.$$

On en auroit donc pu conclure d'abord, que les dernieres différences qui ne se trouvent pas dans B, ne peuvent être dans V que sous une forme linéaire : mais cette condition est renfermée dans nos équations de condition. En effet, si les différences les plus élevées se trouvoient dans les derniers termes de la valeur de dV, qui donnent les derniers termes de ces équations, il n'y auroit alors aucune fonction dans les termes précédens, qui pût donner dans l'équation des différences aussi élevées que celles que produisent les différentiations de ces derniers termes ; & par conséquent on ne pourroit faire disparoître ces différences, & l'équation ne sauroit être identique.

REMARQUE III.

CEUX qui connoissent les équations de condition qu'a donné M. Fontaine pour les équations différentielles du premier ordre, ne seront peut-être pas fâchés de voir ici l'identité de ses formules & des miennes, quoique trouvées par des méthodes toutes différentes.

M. Fontaine, dans sa premiere méthode de calcul intégral, démontre [Théo. 2 & 3] que, si une fonction

$$Adx + Bdy + Cdu + Ddz,$$

par exemple, A, B, C, D étant des fonctions finies, est la différentielle exacte d'une fonction finie des mêmes variables, on a les équations identiques

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}, \quad \frac{dA}{du} = \frac{dC}{dx}, \quad \frac{dA}{dz} = \frac{dD}{dx}, \quad \frac{dB}{du} = \frac{dC}{dy},$$

$$\frac{dB}{dz} = \frac{dD}{dy}, \quad \frac{dC}{dz} = \frac{dD}{du}.$$

Or, dans ce cas [Problême 3] nous avons

$$V = Ap + Bp' + Cp'' + Dp''',$$

& pour équations de condition

$N - dP = 0$, ou, mettant pour N & P leurs valeurs

$$p'\overline{\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}} + p''\overline{\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{du}} + p'''\overline{\frac{dD}{dz} - \frac{dA}{dz}} = 0$$

$N' - dP' = 0$, ou

$$p\overline{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}} + p''\overline{\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{du}} + p'''\overline{\frac{dD}{dy} - \frac{dB}{dz}} = 0$$

$N'' - dP'' = 0$, ou

$$p\overline{\frac{dA}{du} - \frac{dC}{dx}} + p'\overline{\frac{dB}{du} - \frac{dC}{dy}} + p'''\overline{\frac{dD}{du} - \frac{dC}{dz}} = 0$$

& enfin

$N''' - dP''' = 0$, ou

$$p\overline{\frac{dA}{dz} - \frac{dD}{dx}} + p'\overline{\frac{dB}{dz} - \frac{dD}{dy}} + p''\overline{\frac{dC}{dz} - \frac{dD}{du}} = 0$$

Mais les p, p', p'', p''', ne se trouvent pas dans A, B, C, D, & les équations ci-dessus doivent être identiques : donc chacun des coefficiens de p, p', p'', p''', doit être nul par lui-même : donc trois quelconques de mes équations donnent la quatrième & les six de la méthode de M. Fontaine.

Il en seroit de-même pour tout autre nombre de variables.

Si la fonction eût été $Adx + Bdy$, on n'auroit eu pour équations que

$$N - dP = 0$$
$$N' - dP' = 0$$

qui deviennent

$$p\overline{\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}}$$
$$p'\overline{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}} = 0$$

ce qui ne donne que l'équation de condition connue

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$$

REMARQUE IV.

LES formules des équations de condition que j'ai données dans les problêmes précédens, font identiquement les mêmes que, dans leurs excellens Ouvrages, MM. Euler & de la Grange donnent pour les équations qui doivent avoir lieu entre les variables, pour qu'une fonction intégrale indéfinie $\int V$ soit un *maximum*, ou un *minimum*. Cet accord est fondé sur une identité analytique entre les deux questions que je vais exposer.

Voici d'abord le procédé de M. de la Grange.

Soit $\int V$ une fonction intégrale indéfinie, qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*. Je suppose que V devienne en général $V + \partial V$, dans le cas du *minimum*, ou *maximum*, $\overline{\int V + \partial V}$ devra être $\int V$, & par conséquent $\partial V = 0$.

$$\begin{aligned} dV = {} & N dx + P dp + Q dq + R dr, \text{ \&c.} \\ & + N' dy + P' dp' + Q' dq' + R dr', \text{ \&c.} \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

& par conséquent

$$\begin{aligned} \partial V = {} & N \partial x + P \partial p + Q \partial q + R \partial r, \text{ \&c.} \\ & + N' \partial y + P' \partial p' + Q' \partial q' + R' \partial r', \text{ \&c.} \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

N, P, Q, R, &c. N', P', Q', R', &c. restant toujours

jours les mêmes, & les ∂x, ∂p, ∂q, ∂r, &c. ∂y, $\partial p'$, $\partial q'$, $\partial r'$, &c. étant des différences absolument indépendantes de celles qui se trouvent dans V.

Mettant donc pour p, q, r, &c. p', q', r', &c. leurs valeurs, j'aurai

$$\begin{aligned}\int\partial V = \int N\partial x + P\partial dx + Q\partial d^2x + R\partial d^3x, \text{ \&c.}\\ + N'\partial y + P'\partial dy + Q'\partial d^2y + R'\partial d^3y, \text{ \&c.}\\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0\end{aligned}$$

équation qui doit être identique. Je remarque maintenant que, par rapport aux différences affectées de la caractéristique d auxquelles se rapporte le signe $\int$, cette fonction est intégrable par parties; & l'équation devient alors $\overline{\int A\partial x + B\partial y + \text{\&c.}} + Z = 0$, A, B, &c. ne contenant point de ∂x ou ∂y, & par conséquent n'étant plus réductibles: j'aurai donc, pour qu'elle puisse être identique, A, B, &c. nuls par eux-mêmes, & conséquemment les équations $A = 0$, $B = 0$, &c. entre les variables: j'aurai aussi chaque terme de Z égal à zero. Mais comme ils ne sont plus sous le signe d'intégration, il suffit que ces équations aient lieu pour chaque valeur de $\int V$.

Je suppose maintenant que V doive être une différentielle exacte, $V + \partial V$, & par conséquent ∂V seront aussi des différentielles exactes par rapport aux différences affectées de la caractéristique d. Mais intégrant ∂V par parties, j'aurai

$$\overline{\int A\partial x + B\partial y + \text{\&c.}} + Z.$$

Donc lorsque V sera une différentielle exacte, A, B,

&c. seront nuls ; & j'aurai les équations identiques $A = 0$, $B = 0$, &c.

Les formules des équations de condition doivent donc être les mêmes que celles des équations qui doivent avoir lieu entre les variables, lorsqu'une formule intégrale indéfinie est un *maximum*, ou un *minimum*.

Si, dans le problême *de maximis & minimis*, A, B, &c. étoient nuls par eux-mêmes, il n'y auroit donc aucune équation nécessaire entre les variables ; ce qu'on sait d'ailleurs. *Voyez l'Ouvrage de M. Euler, Théorême premier.*

On voit aussi que, dans le même problême, il y a autant d'équations entre les variables, que de variables : d'où il suit que le problême n'est possible que lorsque ces équations se réduisent à une de moins. En effet, tout problême où l'on traite des formules qui renferment des différentielles des ordres supérieurs, n'est possible que lorsque, supposant une des différentielles constante, la fonction ne change point ; & cette condition réduit les équations à une de moins : car, dans ce cas, si toutes les équations de condition, hors une, sont supposées avoir lieu, celle-ci en suit nécessairement. *Voyez ci-dessus, Remarque I. Voyez l'Ouvrage de M. de la Grange, N°. VIII.*

PROBLEME IV.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque & comprenant un nombre quelconque de variables, soit la différentielle exacte d'une fonction finie.

SOLUTION. Soit, comme ci-dessus la fonction proposée V; B la fonction d'un ordre inférieur d'une unité, dont V doit être la différentielle exacte; B' la fonction d'un ordre inférieur, dont B doit être la différentielle exacte; B'' la fonction d'un ordre inférieur, dont B' doit être la différentielle exacte; & ainsi de suite jusqu'à l'intégrale finie.

Je fais

$$\begin{array}{l} dV = N\,dx + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds, \text{ \&c.} \\ \quad + N'\,dy + \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad + N''\,du + \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad + N'''\,dz + \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}$$

& j'ai 1°. par le Problême III, pour la variable x, l'équation de condition

$$N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S, \text{ \&c.} = 0,$$

& une équation semblable pour chaque autre variable.

J'ai 2°. par le même Problême, pour la variable x, l'équation de condition

$$\frac{dB}{dx} - d\frac{dB}{dp} + d^2\frac{dB}{dq} - d^3\frac{dB}{dr}, \text{ \&c.}$$

Mais [Prob. II.]
$$\begin{aligned} P &= \frac{dB}{dx} + d\frac{dB}{dp} \\ Q &= \frac{dB}{dp} + d\frac{dB}{dq} \\ R &= \frac{dB}{dq} + d\frac{dB}{dr} \\ S &= \frac{dB}{dr} + \ . \ . \end{aligned}$$

J'aurai donc $\frac{dB}{dx} = P - dQ + d^2R - d^3S$, &c.

$$\frac{dB}{dp} = Q - dR + d^2S, \text{ \&c.}$$

$$\frac{dB}{dq} = R - dS, \text{ \&c.}$$

$$\frac{dB}{dr} = S, \text{ \&c.}$$

& ſubſtituant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{dB}{dx} - d\frac{dB}{dp} + d^2\frac{dB}{dq} - d^3\frac{dB}{dr}, \text{ \&c.}$$

il en réſultera l'équation de condition

$$P - 2dQ + 3d^2R - 4d^3S, \text{ \&c.} = 0;$$

& j'aurai pour chaque variable une équation ſemblable.

3°. J'ai, pour la variable x, l'équation de condition

$$\frac{dB'}{dx} - d\frac{dB'}{dp} + d^2\frac{dB'}{dq}, \text{ \&c.} = 0,$$

qui, par le N°. 2, devient

$$\frac{dB}{dp} - 2d\frac{dB}{dq} + 3d^2\frac{dB}{dr}, \text{ \&c.} = 0,$$

qui, en faiſant les mêmes ſubſtitutions que dans le N°. précédent pour $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, $\frac{dB}{dr}$, &c. devient enfin

$$Q - 3dR + 6d^2S, \text{ \&c.} = 0;$$

& j'aurai une équation de condition ſemblable pour chaque variable.

On voit aiſément que je puis continuer les mêmes opérations juſqu'à ce que je parvienne à une fonction finie, & qu'ainſi, ſans avoir beſoin de connoître B, B', B'', &c. j'aurai les équations de condition cherchées.

REMARQUE I.

Il ſuit de ce qui précede, que j'aurai autant de ſuites d'équations que de variables, à moins qu'il n'y ait une différentielle supposée constante, & qu'alors il y en aura une de moins. Le nombre des équations sera, dans chaque suite, égal à l'exposant de l'ordre des différences; ensorte que, pour la variable x, par exemple, la premiere sera

$$N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S, \&c. = 0,$$

la 2^e $P - 2dQ + 3d^2R - 4d^3S$, &c. . . $= 0$.

la 3^e $Q - 3dR + 6d^2S$, &c. . . . . . $= 0$,

& ainsi de suite, les coefficiens étant, dans la premiere, les nombres constans, dans la seconde, les nombres naturels, dans la troisieme, les nombres triangulaires, les nombres pyramidaux dans la quatrieme; & ainsi de suite.

REMARQUE II.

Il suit des valeurs que j'ai trouvées dans le Problême précédent pour les $\frac{dB}{dx}$, $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, $\frac{dB}{dr}$, &c. que, si V est une différentielle exacte de B, j'aurai

$$\begin{aligned}
V = \; & P - dQ + d^2R - d^3S, \&c. \; dx \\
& + Q - dR + d^2S, \&c. \; . \; . \; dp \\
& + R - dS, \&c. \; . \; . \; . \; . \; dq \\
& + S, \&c. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; dr \\
& + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
& + P' - dQ' + d^2R' - d^3S', \&c. \; dy \\
& + Q' - dR' + d^2S', \&c. \; . \; . \; dp' \\
& + R' - dS', \&c. \; . \; . \; . \; . \; dq' \\
& + S', \&c. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; dr' \\
& + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .
\end{aligned}$$

continuant de même pour chaque variable : & pour avoir la valeur de B, je n'aurai qu'à intégrer la fonction précédente, comme différence d'une fonction de x, p, q, r, &c. y, p', q', r', &c.

Si j'avois V égale à la différence d'un ordre quelconque d'une fonction finie, je n'aurai, si, par exemple, la fonction est du troisieme ordre, qu'à intégrer la fonction $\quad R\,dx + R'dy + R''du + R'''dz$, &c.

ou $\quad S\,dx + S'dy + S''du + S'''dz$, &c.

si elle est du quatrieme, pour avoir cette fonction finie, à laquelle il faudra ajouter les constantes convenables.

PROBLEME V.

TROUVER l'équation de condition qui doit avoir lieu pour qu'une équation différentielle à deux variables x & y, où aucune des différentielles n'est supposée constante, ait une intégrale de l'ordre inférieur d'une unité.

SOLUTION. Soit fait, comme ci-dessus, $dx = p$, $dp = q$, $dq = r$, &c. $dy = p'$, $dp' = q'$, $dq' = r'$, &c. & que l'équation proposée soit $V = 0$. Je suppose que, multipliant V par A, fonction de x, p, q, r, &c. y, p', q', r', &c. AV devienne une différentielle exacte ; & il suffit pour cela de faire $A = \frac{dB}{V}$, B étant une fonction quelconque de l'ordre inférieur. J'aurai donc, par le Problême II, en faisant

$$\begin{aligned} dV &= N\,dx + P\,dp + Q\,dq + R\,dr, \text{ \&c.} \\ &\quad + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr', \text{ \&c.} \end{aligned}$$

&

$$\begin{aligned} dA &= \mathrm{N}\,dx + \Pi\,dp + \Psi\,dq + \mathrm{P}\,dr, \text{ \&c.} \\ &\quad + \mathrm{N}'dy + \Pi'dp' + \Psi'dq' + \mathrm{P}'dr', \text{ \&c.} \end{aligned}$$

les équations de condition

$$\overline{N - dP + d^2Q - d^3R, \&c.}\ A - \overline{P - 2dQ + 3d^2R, \&c.}\ dA + \overline{Q - 3dR, \&c.}\ d^2A - \overline{R, \&c.}\ d^3A, \&c.$$

$$+ \overline{\mathrm{N} - d\Pi + d^2\Psi - d^3\mathrm{P}, \&c.}\ V - \overline{\Pi - 2d\Psi + 3d^2\mathrm{P}, \&c.}\ dA + \overline{\Psi - 3d\mathrm{P}, \&c.}\ d^2V - \overline{\mathrm{P}, \&c.}\ d^3V, \&c. = 0$$

$$\& \ \overline{N' - dP' + d^2Q' - d^3R', \&c.}\ A - \overline{P' - 2dQ' + 3d^2R', \&c.}\ dA + \overline{Q' - 3dR', \&c.}\ d^2A - \overline{R', \&c.}\ d^3A, \&c.$$

$$+ \overline{\mathrm{N}' - d\Pi' + d^2\Psi' - d^3\mathrm{P}', \&c.}\ V - \overline{\Pi' - 2d\Psi' + 3d^2\mathrm{P}', \&c.}\ dV + \overline{\Psi' - 3d\mathrm{P}', \&c.}\ d^2V - \overline{\mathrm{P}', \&c.}\ d^3V, \&c. = 0:$$

équations que je puis toujours rendre identiques en faisant $A = \frac{dB}{V}$.

Pour avoir maintenant l'équation de condition que je cherche, je remarque que l'équation $V = 0$ ne peut être intégrable, dans quelque sens que ce soit, que lorsqu'une même fonction égalée à zero rend V & B nuls en même-tems. Mais s'il y a une telle fonction, elle rendra aussi égaux à zero les membres des équations ci-dessus, qui sont multipliés par V, dV, d^2V, &c. & il est clair qu'elle ne peut les rendre nuls dans aucun autre cas. Donc, si l'équation est possible, la fonction affectée de V dans chacune des équations ci-dessus sera nulle par elle-même, ou deviendra telle, en faisant égale à zero une fonction qui rende $V = 0$; & il en sera de même du premier terme de ces équations, qui lui est identiquement égal. J'aurai donc les deux équations

$$\overline{N - dP + d^2Q - d^3R, \&c.}\; A - \overline{P - 2dQ + 3d^2R, \&c.}\; dA + \overline{Q - 3dR, \&c.}\; d^2A - \overline{R, \&c.}\; d^3A, \&c. = 0$$

$$\overline{N' - dP' + d^2Q' - d^3R', \&c.}\; A - \overline{P' - 2dQ' + 3d^2R', \&c.}\; dA + \overline{Q' - 3dR', \&c.}\; d^2A - \overline{R', \&c.}\; d^3A, \&c. = 0:$$

équations qui seront identiques, ou auront lieu en même-tems que l'équation $V = 0$, lorsque celle-ci aura une intégrale. Donc éliminant A, j'aurai une équation où tout sera connu, & qui sera identique, ou aura lieu en même-tems que $V = 0$, toutes les fois qu'il y aura une fonction d'un ordre inférieur, qui, égalée à zero, rendra $V = 0$. C. Q. F. T.

REMARQUE.

Si j'avois supposé

$$\begin{aligned} dAV = {} & [N]dx + [P]dp + [Q]dq + [R]dr, \&c. \\ & + [N']dy + [P']dp' + [Q']dq' + [R']dr', \&c. \end{aligned}$$

& que j'eusse fait égal à zero, dans les valeurs de $[P]$, $[Q]$, $[R]$, &c. $[P']$, $[Q']$, $[R']$, &c. le terme multiplié par V, le résultat eût été le même. En effet, ce terme ne peut être nul en même-tems que V, que lorsque l'équation $V = 0$ est possible. Cette remarque me donnera lieu de simplifier les calculs dans les Problêmes suivans.

PROBLEME

PROBLEME VI.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque, comprenant un nombre quelconque de variables, ait une intégrale de l'ordre inférieur.

SOLUTION. L'analyse de ce Problême est précisément la même que celle du Problême précédent, qu'il est facile d'appliquer à un nombre quelconque de variables.

Soit donc les variables x, y, u, z, &c. l'équation $V = 0$. Je suppose que AV devienne une différentielle exacte ; ce que je peux faire toujours en supposant $A = \frac{dB}{V}$. J'aurai donc, en faisant

$$\begin{aligned} dAV = & [N]dx + [P]dp + [Q]dq + [R]dr, \text{ \&c.} \\ & + [N']dy + [P']dp' + [Q']dq' + [R']dr', \text{ \&c.} \\ & + [N'']du + [P'']dp'' + [Q'']dq'' + [R'']dr'', \text{ \&c.} \\ & + [N''']dz + [P''']dp''' + [Q''']dq''' + [R''']dr''', \text{ \&c.} \end{aligned}$$

des équations de condition, semblables à celles du Problême III : équations qui devront être identiques, & auxquelles je satisferai toujours en faisant $A = \frac{dB}{V}$. Mais comme l'équation ne peut être possible, que lorsqu'une même fonction, égalée à zero, rend nuls B & V en même-tems, & que toutes les fois qu'il y a une telle fonction, elle rend aussi nuls les termes multipliés par V dans les valeurs de $[N]$, $[P]$, $[Q]$, $[R]$, &c. $[N']$, $[P']$, $[Q']$, $[R']$, &c. $[N'']$, $[P'']$, $[Q'']$, $[R'']$, &c. $[N''']$, $[P''']$, $[Q''']$, $[R''']$, &c. il est clair que, supposant ces termes tels dans les équations de condition qui sont identiques, la fonction qui restera, égalée à zero, donnera une équation identique, ou une équation qui aura lieu en même-tems que $V = 0$. Mais, dans cette supposition, les équations de condition deviennent

$$\overline{N - dP + d^2Q - d^3R, \&c.}\; A - \overline{P - 2dQ + 3d^2R, \&c.}\; dA + \overline{Q - 3dR, \&c.}\; d^2A - \overline{R, \&c.}\; d^3A, \&c. = 0$$

$$\overline{N' - dP' + d^2Q' - d^3R', \&c.}\; A - \overline{P' - 2dQ' + 3d^2R', \&c.}\; dA + \overline{Q' - 3dR', \&c.}\; d^2A - \overline{R', \&c.}\; d^3A, \&c. = 0:$$

$$\overline{N'' - dP'' + d^2Q'' - d^3R'', \&c.}\; A - \overline{P'' - 2dQ'' + 3d^2R'', \&c.}\; dA + \overline{Q'' - 3dR'', \&c.}\; d^2A - \overline{R'', \&c.}\; d^3A, \&c.$$

$$\overline{N''' - dP''' + d^2Q''' - d^3R''', \&c.}\; A - \overline{P''' - 3dQ''' + 3d^2R''', \&c.}\; dA + \overline{Q''' - 3dR''', \&c.}\; d^2A - \overline{R''', \&c.}\; d^3A, = 0;$$

& ainsi de suite pour chaque variable. D'où éliminant A, j'aurai des équations où tout sera donné, qui seront identiques, ou auront lieu en même-tems que $V = 0$, toutes les fois que cette équation sera possible, & qui ne pourront être telles que dans ce cas. C. Q. F. T.

REMARQUE I.

SI aucune différentielle n'est supposée constante, le nombre des équations de condition sera égal à celui des variables diminué d'une unité ; & si une des différentielles est supposée constante, ce nombre sera celui des variables diminué de deux unités ; & la même chose aura lieu pour les équations de la forme $Adx + Bdy + Cdu$, &c. $= 0$ (Remarque III, page 15).

REMARQUE II.

TOUTE équation qui satisfera aux conditions du problême sera possible, c'est-à-dire, admettra une solution complette ou incomplette. Pour distinguer ces deux cas, je remarque 1°. que, pour que la solution puisse être complette, il faut que les différentielles de l'ordre le plus élevé puissent être mises sous une forme linéaire, & que les équations de condition qu'on trouve pour cela par l'algebre ordinaire soient identiques. En effet, quand d'ailleurs elles rendroient $V = 0$, comme elles ne contiennent pas d'arbitraires, & qu'elles sont d'un ordre inférieur, elles ne peuvent fournir de solutions complettes.

2°. Si cette condition a lieu, il faudra tirer de la proposée toutes les équations linéaires qu'elle renferme, prendre pour chacune à part les équations de condition, & la solution pourra être complette, lorsque, substituant dans ces équations la valeur d'une des plus hautes différences prise de la proposée, pour sa différence supérieure, sa valeur tirée d'une équation formée en égalant à zero la différentielle de la proposée, & ainsi de suite, les équations deviendront identiques, ou le seront par elles-mêmes ; car alors cette valeur, substituée dans

dB, rend $dB = 0$; & conséquemment $A = \frac{dB}{V}$ devient d'un ordre inférieur à B : & intégrant AV, on a une intégrale générale.

Dans tout autre cas, l'intégrale ne peut être que particuliere ; car, de ce que la valeur de la différence supérieure, prise de la proposée, ne rend pas $dB = 0$, aucune fonction du même ordre, égalée à zero, ne peut rendre V & dB nuls en même-tems, & par conséquent aucune fonction de l'ordre inférieur qui contienne une arbitraire.

Il est clair par la nature du Problême, & l'on verra en en suivant l'analyse, que les équations de condition qu'on trouveroit en suivant pied à pied les opérations indiquées dans cette Remarque, sont contenues dans les équations de condition générales du Problême, & qu'ainsi, plus simplement, l'équation proposée admettra une solution complette toutes les fois que les équations de condition seront identiques, ou le deviendront en substituant, pour les différences de l'ordre de l'équation, ou d'un ordre supérieur, leurs valeurs tirées de $V = 0$, $dV = 0$, &c. & n'en admettra que dans ce cas, ce qui est évident par soi-même ; car alors on aura une fonction du même ordre que V, qui étant égalée à zero, rendra V & $B = 0$; & l'on n'aura pas besoin de recourir à une équation d'un ordre inférieur, qui rende $V = 0$. Donc, &c.

REMARQUE III.

SOIT une équation $dx + Ady + Bdz = 0$: A &

B étant des fonctions finies, j'aurai $V = p + Ap' + Bp'' = 0$, & les équations de condition

$$\frac{N - dP}{P} = \frac{N' - dP'}{P'}$$
$$\frac{N - dP}{P} = \frac{N'' - dP''}{P''}$$

où mettant pour N, P, N', P', N'', P'', leurs valeurs, & éliminant p qui reste à l'aide de l'équation $p + Ap' + Bp'' = 0$, je n'aurai plus que l'équation

$$A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0,$$

qui est celle de M. Fontaine, & qui sera identique lorsque la proposée aura une intégrale générale, & aura lieu en même-tems que la proposée lorsque l'intégrale ne sera que particuliere.

REMARQUE IV.

SOIT V du premier ordre, & à deux variables seulement : on pourra toujours mettre la proposée sous la forme $Adx + Bdy = 0$; cas pour lequel (Remar. I.) il n'y a pas d'équations de condition : d'où je conclus que, quel que soit A & B, cette équation admet une solution complette.

Si pourtant on vouloit le démontrer directement, voici comme il faudroit s'y prendre. Le Problême II donne, dans ce cas, l'équation de condition

$$\frac{N - dP}{P} = \frac{N' - dP'}{P'}$$

Faisant disparoître les dénominateurs, & multipliant par pp', elle devient

$$\overline{Np - pdP}\, P'p' = \overline{N'p' - p'dP'}\, Pp.$$

Mais à cause que les dx, dy se trouvent toujours à une même dimension, on a $aV = Pp + P'p'$, a désignant cette dimension. Donc, puisque $V = 0$, $Pp = -P'p'$; & l'équation précédente devient

$$Np + N'p' - pdP - p'dP = 0.$$

Mais . . $dV = Np + N'p + Pdp + P'dp' = 0.$

Donc l'équation précédente devient

$$Pdp + pdP + P'dp' + pdP' = adV = 0.$$

Donc elle est nulle lorsque $V = 0$, & cela sans avoir besoin de supposer qu'une fonction d'un ordre inférieur rende $V = 0$. Donc la proposée admet une solution complette.

PROBLEME VII.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une équation différentielle d'un ordre quelconque, comprenant un nombre quelconque de variables, puisse avoir une intégrale finie.

SOLUTION. Soit toujours $V = 0$. Je suppose, comme dans le Problême VI, que V multiplié par A devienne une différentielle exacte, & que j'aie $AV = dB$, ensorte que $B = 0$ ait lieu en même-tems que $V = 0$: je suppose encore que B multiplié par A' devienne une différentielle exacte, & que j'aie $A'B = dB'$, ensorte que $B' = 0$ ait lieu en même-tems que $B = 0$, que $V = 0$, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation finie.

Cela posé, j'aurai 1°. par le Problême VI, pour la variable x, l'équation

$$\overline{N - dP + d^2Q - d^3R, \&c.}\; A - \overline{P - 2dQ + 3d^2R, \&c.}\; dA + \overline{Q - 3dR, \&c.}\; d^2A - \overline{R, \&c.}\; d^3A, \&c.$$

& une équation ſemblable pour chacune des autres variables; enſorte que, pour avoir les équations de condition, il n'y a plus qu'à éliminer A.

J'aurai 2°. par le même Problême, pour que l'équation $B = 0$ ſoit poſſible par rapport à la variable x, l'équation

$$\overline{\frac{dB}{dx} - d\frac{dB}{dp} + d^2\frac{dB}{dq}, \&c.}\; A' - \overline{\frac{dB}{dp} - 2d\frac{dB}{dq}, \&c.}\; dA + \overline{\frac{dB}{dq}, \&c.}\; d^2A', \&c. = 0,$$

& une équation ſemblable pour chaque variable.

Prenant maintenant, par le Problême VI, les valeurs des $\frac{dB}{dx}$, $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, &c. en $d\frac{AV}{dp}$, $d\frac{AV}{dq}$, $d\frac{AV}{dr}$, &c. & faiſant égaux à zero les termes multipliés par V, dV, &c. ce qui peut toujours ſe faire, lorſque l'équation $V = 0$ a une intégrale de l'ordre inférieur, & ne peut ſe faire que dans ce cas, j'aurai l'équation

$$\overline{AP - 2dAQ + 3d^2AR, \&c.}\; A' - \overline{AQ - 3dAR, \&c.}\; dA' + \overline{AR, \&c.}\; d^2A', \&c. = 0,$$

& une équation ſemblable pour chaque variable.

J'aurai 3°. pour que l'équation $B' = 0$ ſoit poſſible, des équations ſemblables aux précédentes, en mettant A'' pour A'; A' pour A; $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, &c. pour P, Q, &c. & pour $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, &c. leurs valeurs, en ſuppoſant nuls les termes multipliés par V: & continuant ces opérations jusqu'à ce que je parvienne à l'équation finie, j'aurai les équations de condition cherchées, en éliminant les A, A', A'', &c. ce qui n'a besoin que des regles ordinaires de l'Algebre. C. Q. F. T.

REMARQUE I.

Il suit de l'analyse du Problême, que le nombre des équations qui contiennent A, A', A'', &c. étant égal au produit de l'exposant de l'ordre de l'équation par le nombre des variables, & celui des quantités à éliminer étant égal au même exposant, il en résultera un nombre d'équations de condition égal au produit de l'exposant de l'ordre des différences par le nombre des variables diminué de l'unité. Et si une des différentielles est supposée constante, le nombre des équations sera encore diminué d'un nombre égal à l'exposant de l'ordre de l'équation.

REMARQUE II.

Si l'équation $V = o$ admet une solution complette, A peut être supposée telle, que la valeur d'une des plus hautes différences tirée de $AV = dB$ soit identiquement la même que la valeur de la même différence tirée de $V = o$: si donc $B = o$ a une solution complette, tirant de $V = o$, $dV = o$, &c. les valeurs d'une des plus hautes différences, & de ses différences supérieures, & substituant dans les équations de condition, elles deviendront identiques.

On

On peut appliquer ce raiſonnement aux équations des ordres inférieurs à $B = 0$, & conclure en général que, lorſque toutes les équations de condition ſeront identiques, ou deviendront telles en y ſubſtituant les valeurs des plus hautes différences tirées de $V = 0$, $dV = 0$, &c. la propoſée aura une intégrale finie complette, & n'en aura qu'une incomplette dans tout autre cas.

On voit aiſément que, s'il n'y avoit que deux variables & une différentielle ſuppoſée conſtante, la propoſée admettroit toujours une ſolution complette.

REMARQUE III.

SI l'équation $V = 0$ étoit telle que V fût la différentielle exacte d'une fonction finie, l'équation auroit une intégrale complette qu'on trouveroit en intégrant la formule que je donne à la fin de la Remarque II, page 22. Mais comme cette intégration ne donne qu'une arbitraire, au lieu d'un nombre égal à celui de l'expoſant de l'ordre de l'équation, je remarque, pour ôter tout nuage, que cette arbitraire doit alors être ſuppoſée de la forme $ax'^{n} + bx'^{n-1} + \ldots + g$, n étant l'expoſant de l'ordre de l'équation, & x' pouvant être une variable quelconque dont la différence ſoit conſtante.

REMARQUE VI.

JE ſuppoſe que j'aie une équation entre Z, dZ, x, y, z, &c. & leurs différences d'un ordre quelconque, il eſt clair que les équations que j'aurai pour que cette équation ait pour intégrale une équation entre x, y, z, &c. leurs différences, & Z, devront être identiques, lorſque j'en aurai éliminé Z & dZ à l'aide de la propoſée, & qu'ainſi elles doivent être les mêmes que celles que l'on auroit eues, ſi l'équation eût été $dZ = M$, M étant une fonction ſans Z, & par conſéquent les mêmes qu'on auroit pour que M ſoit une différentielle exacte.

Soit donc une équation d'un ordre quelconque entre x, y, z, &c. & Z, & que Z doive être un *maximum*, j'aurai (Remarque IV, page 17) les équations qui devront avoir lieu entre les variables, en éliminant les Z, dZ, &c. des équations que donnera le Problême VII, pour que l'équation en Z, dZ puiſſe avoir une intégrale en Z; & il faudra de plus, qu'en ſuppoſant que ces équations aient lieu entre les variables, on puiſſe avoir une intégrale de la propoſée du premier ordre. Donc toutes les équations du Problême VII devront avoir lieu en même-tems, & ſe réduire, pour que le Problême *de maximis* ſoit poſſible, à un nombre égal à celui des variables, en y comprenant la propoſée; & les équations qu'on aura alors en éliminant Z, dZ, &c. ſeront les équations cherchées.

Le cas où la formule $\int V$ devant être un *maximum*; V contiendroit une intégrale indéfinie, ſe rappelle aiſément au cas préſent : on pourroit auſſi alors trouver les équations par les Problêmes III & IV. S'il y avoit une équation qui dût avoir lieu entre les x, y, z, &c. on élimineroit, à l'aide de cette équation, une des variables, & on traiteroit ensuite la formule comme ci-dessus. M. de la Grange a étendu sa méthode à tous ces cas.

CONCLUSION.

VOILA, je crois, comme je l'ai annoncé, tout ce qu'on peut exiger sur les équations de condition. Je puis m'assurer si une équation différentielle proposée a une intégrale finie : il ne me reste donc plus qu'à déterminer cette intégrale, lorsqu'il y en a une : c'est ce que je me propose de faire dans la Section qui suit.

SECONDE SECTION.

Méthode générale de trouver l'intégrale d'une équation différentielle proposée.

QUELLE que soit l'équation différentielle que l'on me propose d'intégrer, je puis la mettre sous une forme telle qu'il ne s'y trouve plus que des puissances entieres & positives des différentielles. Les coefficiens finis de ces différentielles ne peuvent être non plus que des fonctions algébriques des variables

$$x, y, \&c.\ r = l.\Phi x, y, \&c.\ s = l.\Phi' x, y, \&c.\ r,$$
$$\text{ou } e^{\Phi x, y, \&c.} \qquad \text{ou } e^{\Phi' x, y, \&c.\ r};$$

& ainsi de suite, Φ, Φ', &c. désignant des fonctions algébriques des variables x, y, &c. ou x, y, &c. r; &c.

& il n'y a point de fonctions analytiques qu'on ne puisse réduire à cette forme ; & je pourrai préparer l'équation ensorte que ces coefficiens ne contiennent plus ni dénominateurs ni radicaux.

J'appellerai une équation différentielle ainsi préparée, *une équation rationnelle & entiere*, *une équation algébrique entre* x, y, *&c. leurs différences*, *&* r, s, *&c.*

L'intégrale finie d'une telle équation pourra toujours être aussi une équation algébrique rationnelle & entiere entre x, y, &c. r, s, t, &c.

Une équation différentielle étant ainsi préparée, j'y remarque quatre points qui la distinguent de tout autre.

1°. L'ordre de l'équation, & le nombre des fonctions r, s, t, &c. qui s'y trouvent.

2°. Le degré où y montent les différences, & celui des équations rationnelles entre x, y, &c. Φ; x, y &c. r, Φ'; &c.

3°. Le degré où montent les x, y, &c. r, s, &c. dans les coefficiens des différentielles, & dans les coefficiens des équations rationnelles & entieres entre x, y, &c. Φ; x, y, &c. r, Φ'; &c.

4°. Les coefficiens constans.

Et, de ces quatre points, je détermine quatre points qui distinguent l'intégrale de cette équation différentielle de toute autre équation finie.

1°. Le nombre des fonctions r, s, t, &c.

2°. Le degré des équations rationnelles entre Φ, Φ', Φ'', &c. & les variables x, y, &c. r, s, t, &c. & le degré où doivent monter les r, s, t, &c. dans l'intégrale mise sous une forme rationnelle & ordonnée par ordre par rapport à ces fonctions, en commençant par la derniere.

3°. Le degré où doivent monter les x, y, &c. dans les coefficiens des fonctions r, s, t, &c. dans l'intégrale cherchée, mise sous une forme rationnelle & entiere.

4°. Les coefficiens constans.

Cette Section se divise donc naturellement en quatre Articles.

ARTICLE I.

Trouver le nombre & la nature des fonctions transcendantes qui peuvent entrer dans l'intégrale d'une équation différentielle proposée.

JE suppose que j'aie une fonction algébrique de x, y, &c. leurs différentielles, & r, fonction transcendante de x, y, &c. & que cette fonction soit égalée à zero. Si je différencie cette fonction, j'aurai une fonction algébrique d'un ordre supérieur entre x, y, &c. leurs différences, r & dr. Donc, égalant cette fonction à zero, si la valeur de dr en x, y, &c. ne contient pas de fonction transcendante, ou n'en contient point d'autre que r, je pourrai éliminer r à l'aide des deux équations, & j'aurai une fonction algébrique des variables x, y, &c. & leurs différences seulement, d'un ordre plus élevé que la proposée, fonction égale à zero : & cela ne peut arriver que dans ces deux cas, parceque je n'ai pas d'équations à l'aide desquelles je puisse éliminer les nouvelles transcendantes que la différentiation auroit produites.

Je dis maintenant que le premier cas ne peut avoir lieu que lorsque la fonction $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. ou $m\,\mathrm{l}.\, a + n\,\mathrm{l}.\, b + p\,\mathrm{l}.\, c$, &c. a, b, c, &c. étant des fonctions algébriques, & m, n, p, &c. des nombres même incommensurables : & le second, lorsque $r = e^{\Phi x,\, y,\, \&c.}$, Φ désignant une fonction algébrique, ou que $r = e^{q\,\mathrm{l}.\, a^m b^n c^p,\, \&c.}$; q désignant un nombre irrationnel, sans quoi cette fonction seroit algébrique ; & la constante que la différentiation aura fait disparoître, se trouvera être, pour le premier cas, dans les coefficiens de la proposée, & pour les autres, dans la fonction r; dans le premier, le terme constant de la valeur de r, tirée de la proposée; dans le second, le terme constant de Φ; & dans la troisieme, le coefficient de $a^m b^n c^p$, &c.

Cela posé, soit 1°. une équation du premier ordre entre x, y, &c. dx, dy, &c. sans fonction transcendante : il suit de ce qui précede, que son intégrale finie ne peut être qu'une équation algébrique entre x, y, &c. & $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c.

$$\text{ou } e^{\Phi x,\, y,\, \&c.},$$

$$\text{ou } e^{q\,\mathrm{l}.\, a^m b^n c^p,\, \&c.}$$

Mais il est clair que repassant des logarithmes aux nombres, ces trois formes d'équations se réduisent à la premiere. Donc l'équation intégrale finie pourra toujours être une équation algébrique entre x, y, &c. & $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c.

$$dr = \overline{\frac{m}{a}\frac{da}{dx} + \frac{n}{b}\frac{db}{dx}, \&c.}\, dx + \overline{\frac{m}{a}\frac{da}{dy} + \frac{n}{b}\frac{db}{dy}, \&c.}\, dy + \&c.$$

& par conséquent étant sans fonctions transcendantes : & cette équation pourra être r égale à une constante, & par-là se réduire à une équation algébrique.

Cette derniere remarque s'applique également à ce qui suit.

2°. Soit une équation du premier ordre entre x, y, &c. leurs différences, & $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c.

ou $e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}$,

ou $e^{q\,\mathrm{l}.\, a^m b^n c^p,\, \&c.}$,

regardant r comme une nouvelle variable : il suit de ce qui précede, que l'intégrale finie de cette équation peut toujours être une équation algébrique entre x, y, &c. r, & $s = \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c. a', b', c', &c. étant des fonctions algébriques de x, y, &c. r.

Soit aussi une équation différentielle du second ordre entre x, y, &c. & leurs différences du premier & second ordre, sans fonction transcendante, son intégrale finie ne pourra être qu'une équation algébrique entre x, y, &c. $r = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. & $s = \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c.

ou $e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}$, ou $e^{\Phi'\, x,\, y,\, \&c.\, r}$,

ou $e^{q\,\mathrm{l}.\, a^m b^n c^p,\, \&c.}$, ou $e^{q'\,\mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'},\, \&c.}$;

car, dans toute autre supposition, on ne peut parvenir à une équation du second ordre sans transcendante ; &

par conséquent l'intégrale pourra toujours être supposée une équation algébrique entre x, y, &c. &

$$r = \text{l}.a^m b^n c^p\,,\quad \& \quad s = \text{l}.a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}\,,\ \&c.$$

$$\text{ou}\quad e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}\,,$$

$$\text{ou}\quad e^{q\text{l}.a^m b^n c^p,\ \&c.}.$$

Une des arbitraires sera le terme constant de la valeur de s, prise de l'équation intégrale : la seconde sera, pour la premiere forme, le terme constant de la valeur de r, prise de l'équation algébrique du premier ordre, qu'on a entre x, y, &c. leurs différences, & r; pour la seconde, le terme constant de Φ; pour la troisieme, le coefficient de $a^m b^n c^p$, &c.

3°. Soit encore une équation différentielle du premier ordre entre x, y, &c. leurs différences, & r, s, regardant r & s comme de nouvelles variables : il est clair, par ce qui précede, que l'intégrale en pourra toujours être une équation algébrique entre x, y, &c. r, s & $t = \text{l}.a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''}$, &c. a'', b'', c'', &c. étant des fonctions algébriques de x, y, &c. r, s.

Soit une équation du second ordre en x, y, &c. leurs différences, & r, regardant r comme une nouvelle variable : il suit de ce qui précede, que son intégrale finie pourra toujours être une équation algébrique entre x, y, &c. r, $s = \text{l}.a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c.

$$\text{ou}\quad e^{\Phi'\, x,\, y,\, \&c.}\,,$$

$$\text{ou}\quad e^{q'\text{l}.a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}}$$

& $t = \text{l}.a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''}$, &c.

Soit

Soit enfin une équation du troisieme ordre entre x, y, &c. leurs différences des premier, second & troisieme ordres, sans fonction transcendante : l'intégrale ne pourra jamais être qu'une équation algébrique entre x, y, &c. $r = \mathrm{l}.\, a^{m} b^{n} c^{p}$, &c. $\quad s = \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c.

ou $e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}$, $\quad$ ou $e^{\Phi'\, x,\, y,\, \&c.\, r}$,

ou $e^{q\, \mathrm{l}.\, a^{m} b^{n} c^{p},\, \&c.}$, $\quad$ ou $e^{q'\, \mathrm{l}.\, a'^{m} b'^{n'} c'^{p'},\, \&c.}$,

& . $t = \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{q''}$, &c.

ou $e^{\Phi''\, x,\, y,\, \&c.\, r,\, s}$,

ou $e^{q''\, \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''},\, \&c.}$,

& conséquemment pourra toujours être supposée une équation algébrique entre . . . x, y, &c. $r = \mathrm{l}.\, a^{m} b^{n} c^{p}$, &c. $\quad s = \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c.

ou $e^{\Phi\, x,\, y,\, \&c.}$, $\quad$ ou $e^{\Phi'\, x,\, y,\, \&c.\, r}$,

ou $e^{q\, \mathrm{l}.\, a^{m} b^{n} c^{p},\, \&c.}$, $\quad$ ou $e^{q'\, \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'},\, \&c.}$;

& . $t = \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''}$, &c.

ce qui donne neuf formes différentes d'intégrales. Une des arbitraires sera le terme constant de la valeur de t, prise de l'intégrale. La seconde, pour la premiere forme de s, sera le terme constant de la valeur de s, prise de l'équation algébrique du premier ordre, qu'on a entre x, y, &c. r, s; pour la seconde, le terme constant de Φ'; pour la troisieme, le coefficient de $a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c. La troisieme sera, pour la premiere forme de r, le terme constant de la valeur de r, prise de l'équation algébrique du second ordre entre x, y, &c. & r; pour la seconde, le terme constant de Φ; pour la troisieme, le coefficient de $a^m b^n c^p$, &c.

Il est aisé d'appliquer le même raisonnement aux équations des ordres supérieurs; & l'on peut conclure en général, 1°. que l'intégrale finie d'une équation de l'ordre n n'est susceptible que de 3^{n-1} de formes semblables à celles que j'ai déterminées ci-dessus; 2°. que ces formes pourront contenir un nombre n de fonctions transcendantes, formées comme ci-dessus, & dans lesquelles entreront celles qui se trouvent déja dans la proposée; 3°. que, dans le cas où l'équation intégrale contient ce nombre de fonctions transcendantes, elle a nécessairement aussi un nombre égal d'arbitraires, qui se trouveront distribuées dans les coefficiens de l'équation intégrale, ou des fonctions transcendantes, selon la nature de celles-ci, comme il a été remarqué ci-dessus.

Si donc une équation proposée n'est susceptible que d'une solution incomplette, les formes générales devront être moins composées, & ne pourront contenir qu'autant de fonctions transcendantes, qu'il doit rester de constantes arbitraires.

La même chose suit aussi de la Section précédente; car si la proposée n'a point d'intégrale générale, en comparant avec la proposée les équations de condition, je parviendrai à une équation d'un ordre inférieur, qui n'aura ni nouvelle transcendante ni arbitraire, & qui aura lieu en même-tems que la proposée; & de-là par le même moyen, à une équation, ou finie, ou qui admettra une solution complette, & où il ne se trouvera ni arbitraire ni nouvelle transcendante, & qui résoudra la proposée : & je n'aurai plus, pour avoir l'intégrale de la proposée, qu'à chercher celle de cette nouvelle équation.

Si, dans les opérations qu'on a été obligé de faire pour mettre l'équation différentielle sous la forme que je considere ici, on avoit eu besoin de la différencier, ce qui a lieu lorsque les fonctions transcendantes qui se trouvent dans cette équation contiennent des différences, ou lorsqu'il s'y trouve des formules sous le signe d'intégration, l'intégrale sera d'une des formes trouvées ci-dessus pour l'ordre où monte la proposée après la différentiation. Mais, dans le premier cas, il faudra déterminer dans l'intégrale un nombre d'arbitraires égal à celui dont l'exposant de l'ordre de la proposée se trouve augmenté : car, sans cela, repassant de l'intégrale finie à la proposée, il y resteroit des arbitraires ; ce qui est contre l'hypothese. Il n'en est pas de même dans le second cas, parceque chaque fonction sous le signe d'intégration contient une arbitraire.

Il suit de ce qui précede, qu'une des intégrales d'un ordre inférieur quelconque d'une équation des ordres supérieurs, qui a une intégrale finie, est toujours une équation algébrique entre x, y, &c. leurs différences, & r, s, &c. mais que les autres peuvent contenir des fonctions transcendantes où entrent des différences, comme on peut s'en assurer en cherchant à produire ces équations par la différentiation de la forme générale de l'intégrale finie de la proposée.

ARTICLE II.

Du degré où doivent monter les r, s, *&c. dans l'équation intégrale mise sous une forme rationnelle & entiere, c'est-à-dire, débarrassée de dénominateurs & de radicaux, & aussi du degré ou des équations entre* Φ, Φ', *&c.* a, b, c, *&c.* a', b', c', *&c. &* x, y, *&c.*

JE ne supposerai ici, & dans l'Article suivant, que deux variables, pour abréger seulement; car il sera facile de voir que la méthode s'applique également à un plus grand nombre, sans aucune nouvelle difficulté.

I. Soit l'équation proposée du premier ordre, & sans fonctions transcendantes. Je fais disparoître les dénominateurs & les radicaux; & elle devient de la forme

$$A\,dx^{\Pi} + B\,dx^{\Pi-1}\,dy \quad \dots \quad + P\,dy^{\Pi} = 0,$$

A, B ... P étant des fonctions entieres & rationnelles de x, y, & Π un nombre entier. Par l'Article précédent, l'intégrale de cette équation peut toujours être une équation algébrique entre x, y, & $r = \text{l.}\, a^m b^n c^p$, &c. $= m\,\text{l.}\, a + n\,\text{l.}\, b + p\,\text{l.}\, c$, &c. a, b, c, &c. étant des fonctions algébriques: & par conséquent l'équation intégrale pourra être mise sous la forme

$$F'r' + G'r'^{-1} + H'r'^{-2} + K'r'^{-3} + \dots = 0,$$

F', G', H', K' étant des fonctions algébriques sans dénominateurs ni radicaux; ensorte que prenant de cette équation la valeur de r, elle ſoit $X+N$, N étant l'arbitraire, & X étant ſans N: ce qui fait qu'on peut changer la forme précédente en celle-ci,

$$\begin{array}{llll} Fr^{\nu} & +\nu NFr^{\nu-1} & +\frac{\nu.\overline{\nu-1}}{1.2}N^2Fr^{\nu-2} & +\frac{\nu.\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}}{1.2.3}N^3Fr^{\nu-3}+\ldots=0 \\ +G & +\overline{\nu-1}\,NG & +\frac{\overline{\nu-1}.\overline{\nu-2}}{1.2}N^2G & \\ & +H & +\overline{\nu-2}\,NH & \\ & & +K & \end{array}$$

F, G, H, &c. étant ſans N. On aura auſſi, à cauſe de $dr = d\,\mathrm{l}.\,a^m b^n c^p$, &c. une équation

$$\mathrm{a}\,dr^{\theta}+\overline{\mathrm{b}\,dx+\mathrm{c}\,dy}\,dr^{\theta-1}+\overline{\mathrm{e}\,dx^2+\mathrm{f}\,dx\,dy+\mathrm{g}\,dy^2}\,dr^{\theta-2}+\ldots=0;$$

a, b, c, &c. étant ici des fonctions algébriques de x, y, ſans radicaux & ſans dénominateurs: & à l'aide de la valeur de dr, qu'on tire de cette derniere équation, on doit parvenir à une équation de la même forme que la propoſée.

Je ſuppoſe d'abord $\Pi=1$: j'aurai une équation différentielle $A\,dx+B\,dy=0$, dont l'intégrale ſera

$$\begin{array}{l} Fr+NF=0; \\ +G \end{array}$$

& j'aurai $\mathrm{a}\,dr+\mathrm{b}\,dx+\mathrm{c}\,dy=0$; ce qui donne $a+f=0$, $b+f'=0$, $c+f''=0$, &c. f, f', f'', &c. étant des fonctions algébriques rationnelles & entieres de x, y; car toute autre ſuppoſition donneroit $\Pi>1$.

Je ſuppoſe en ſecond lieu que $\Pi=2$: j'aurai une équation différentielle $A\,dx^2+B\,dx\,dy+C\,dy^2=0$,

Donc l'intégrale sera
$$\begin{array}{lll} Fr^2 & + 2NFr & + N^2F = o\,; \\ + G & + NG & \\ & + H & \end{array}$$

& j'aurai . . . . $\mathrm{a}dr + \mathrm{b}dx + \mathrm{c}dy = o$: ce qui donne $a + f = o$, $b + f' = o$, $c + f'' = o$, &c.

Ou . . . . .
$$\begin{array}{ll} Fr & + NF = o\,; \\ & + G \end{array}$$

& j'aurai $\mathrm{a}dr^2 + \overline{\mathrm{b}dx + \mathrm{c}dy}\,dr + \mathrm{e}dx^2 + \mathrm{f}dxdy + \mathrm{g}dy^2 = o$: ce qui donne
$$fa^2 + ga + h = o,\ f'b^2 + g'b + h' = o,\ \&c.$$
avec les conditions que $\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f} = \frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f} = \&c.$ & un nombre aussi indéfini de fonctions sans radicaux, semblables à celles du cas précédent.

Ou enfin . . . .
$$\begin{array}{lll} Fr^2 & + 2NFr & + N^2F = o\,; \\ + G & + NF & \\ & + H & \end{array}$$

& j'aurai $\mathrm{a}dr^2 + \overline{\mathrm{b}dx + \mathrm{c}dy}\,dr + \mathrm{e}dx^2 + \mathrm{f}dxdy + \mathrm{g}dy^2 = o$: ce qui donne, comme ci-dessus,
$$fa^2 + ga + h = o,\ f'b^2 + g'b + h' = o,\ \&c.$$
avec un nombre aussi indéfini de fonctions sans radicaux ; & il faudra que
$$\frac{G^2}{4F^2} - \frac{H}{F} = \frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f} = \frac{g'^2}{4f'^2} - \frac{h'}{f'} = \&c.$$
& l'intégrale ne pourra être autre chose, car toute autre supposition donne $\Pi > 2$.

Je suppose en troisieme lieu que $\Pi = 3$: & j'aurai l'équation différentielle
$$Adx^3 + Bdx^2dy + Cdxdy^2 + Edy^3 = o.$$

Donc l'intégrale sera

$$\begin{array}{llll} Fr^3 & +3NFr^2 & +3N^2Fr & +N^3F=0;\\ & +G & +2NG & +N^2G\\ & & +H & +NH\\ & & & +K \end{array}$$

& j'aurai . . . $a\,dr + b\,dx + c\,dy = 0$: ce qui donne . . . $a + f = 0$, $b + f' = 0$, &c.

Ou bien l'intégrale sera . . $\begin{array}{ll} Fr & +NF = 0;\\ & +G \end{array}$

& j'aurai

$$a\,dr^3 + \overline{b\,dx + c\,dy}\,dr^2 + \overline{e\,dx^2 + f\,dx\,dy + g\,dy^2}\,dr + h\,dx^3 + i\,dx^2dy + k\,dx\,dy^2 + l\,dy^3 = 0:$$

ce qui donne

$fa^3 + ga^2 + ha + k = 0$, $f'b^3 + g'b^2 + h'b + k' = 0$, &c. &c. avec cette condition, que les racines de toutes ces équations soient commensurables entre elles; & de plus un nombre aussi indéfini de fonctions sans radicaux.

Ou enfin l'intégrale sera

$$\begin{array}{llll} Fr^3 & +3NFr^2 & +3N^2Fr & +N^3F=0;\\ & +G & +2NG & +N^2G\\ & & +H & +NH\\ & & & +K \end{array}$$

& j'aurai

$$a\,dr^3 + \overline{b\,dx + c\,dy}\,dr^2 + \overline{e\,dx^2 + f\,dx\,dy + g\,dy^2}\,dr + h\,dx^3 + i\,dx^2dy + k\,dx\,dy^2 + l\,dy^3 = 0:$$

ce qui donne

$fa^3 + ga^2 + ha + k = 0$, $f'b^3 + g'b^2 + h'b + k' = 0$, &c. & un nombre aussi indéfini de fonctions sans radicaux, mais avec cette condition, que les racines; tant de la proposée, que de ces équations du troisieme degré, seront commensurables entre elles : & l'intégrale ne pourra être autre chose, car toute autre supposition donneroit $\pi > 3$.

Je parviendrai aisément par la même méthode à déterminer les formes que peut avoir l'intégrale pour les cas où $\pi = 4, 5, 6$, &c. & à en former des tables. On voit en effet que, quel que soit π, le degré de l'équation en r ne peut être qu'un des facteurs de π, & qu'il en est de même de l'équation en dr: d'où il suit que le nombre de ces formes est toujours fini. On voit aussi qu'il pourra y avoir entre les variables & a, b, c, &c. autant de suites d'équations, que π a de facteurs; comptant pour plusieurs facteurs différens le même facteur, lorsque pour produire π il est répété plus d'une fois; & chacune de ces suites contiendra un nombre indéfini d'équations. Quant aux conditions qui doivent avoir lieu entre les coefficiens, soit de la proposée, soit de ces équations en a, b, c, &c. pour que certaines formes conviennent à la proposée, on pourra les trouver facilement : & 1°. si on veut que plusieurs équations, du cinquieme degré par exemple, aient lieu en mêmetems pour $\pi = 5$, on supposera leurs racines commensurables entre elles, ce qui se peut faire sans résoudre l'équation. 2°. Si l'on veut que des équations du second degré aient lieu avec une du quatrieme, pour que $\pi = 4$, il faudra que l'équation du quatrieme ait pour racine la somme des racines de deux équations du second

ſecond ; & le reſte comme ci-deſſus : & pour avoir alors les conditions, on n'aura pas non plus beſoin de réſoudre l'équation.

Si l'équation différentielle propoſée étoit réſolue en facteurs linéaires de dx & dy, alors, comme on connoîtroit les radicaux qui entrent dans la compoſition des coefficiens, & qu'ils ſont les mêmes que ceux qui entrent dans la compoſition de ceux de l'intégrale, on ſauroit immédiatement quelles ſont, entre toutes ces formes, celles qu'on doit choiſir.

Il paroît au premier coup d'œil, que la méthode ne donne aucun réſultat pour le cas le plus ſimple, qui eſt celui où l'intégrale eſt algébrique : car, dans ce cas, π peut être 1, 2, 3, 4, &c. Mais avec un peu d'attention, on verra que ce cas ſe rappelle de lui-même à celui où on auroit dans $Fr + FN + G = 0$, $F = 1$, $G = 0$, & une équation en dr, telle qu'elle doit être pour la valeur de π : & il n'y aura plus qu'à repaſſer des logarithmes aux nombres. On en verra des exemples dans l'Art. III.

II. Je ſuppoſe maintenant que l'équation propoſée eſt du ſecond ordre & de cette forme,

$$\overline{Adx^{\pi} + Bdx^{\pi-1}dy + \ldots}\; ddy^{p} + \overline{A'dx^{\pi-2} + B'dx^{\pi-1}dy + \ldots}\; ddy^{p-1} + \ldots = 0,$$

dont elle eſt ſuſceptible toutes les fois qu'elle admet une ſolution complette. On a vu dans l'Article I, que ſon intégrale pouvoit toujours être ſuppoſée une équaquation algébrique entre

$x, y, r = \mathrm{l}. a^m b^n c^p$, & $s = \mathrm{l}. a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c.

ou $e^{\Phi x, y, \&c.}$,

ou $e^{q \mathrm{l}. a^m b^n c^p, \&c.}$,

& sera par conséquent de la forme

$$(1)\ \overline{Fr^{\alpha} + Gr^{\alpha-1} + Hr^{\alpha-2} + \ldots}\, s^{\epsilon} + \overline{F'r^{\alpha'} + G'r^{\alpha'-1} + H'r^{\alpha'-2} + \ldots}\, s^{\epsilon-1} + \ldots = 0:$$

& j'aurai aussi les équations

$$(2)\ a'ds^{\theta'} + \overline{b'dx + c'dy + e'dr}\, ds^{\theta'-1} + \ldots = 0,$$

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{a}dr^{\theta} + \overline{\mathrm{b}dx + \mathrm{c}dy}\, dr^{\theta-1} + \ldots\ldots = 0 \\ \text{pour le premier cas; \&} \\ \mathrm{a}dr^{\theta} + \overline{\mathrm{b}dx + \mathrm{c}dy}\, r\, dr^{\theta-1} + \ldots\ldots = 0 \end{array}\right.$$

pour les deux autres; a', b', c', &c. a$'$, b$'$, c$'$, &c. étant des fonctions de x, y, r; & a, b, c, &c. a, b, c, &c. de x, y seulement. Je différencie l'équation (1), j'élimine ds avec l'équation (2), puis s avec avec l'équation (1), & dr avec l'équation (3), & j'ai une équation (4) du premier ordre, où il ne se trouve plus que x, y, r, dx & dy. Je différencie cette équation (4): j'élimine de cette différence dr avec l'équation (3), & r avec l'équation (4); & j'ai une équation différentielle du second ordre, qui ne contient plus que x, y, dx, dy, ddy, sans fonctions transcendantes, & qui doit être de la forme de la proposée: & pour satisfaire aux équations (2), (3), j'aurai des équations en

a', x, y, r; b', x, y, r; c', x, y, r; &c. & en a, x, y; b, x, y; c, x, y; &c.

Tout cela posé, si je veux dresser, pour ce second ordre, des tables semblables à celles dont j'ai exposé ci-dessus les principes, je n'aurai qu'à faire 1°. σ, ω, θ', θ, successivement 1, 2, 3, 4, 5, &c. observer les valeurs de Π & P, qui naissent de chacune de ces suppositions, & les cas généraux où la valeur de Π & P peut s'abaisser; ce qui donne des conditions générales entre les coefficiens en x, y. 2°. Je mettrai à côté de chaque valeur de Π & de P les formes que j'aurai vu pouvoir leur convenir, avec les conditions, lorsqu'il y en a : & de plus, je mettrai à côté de chaque valeur de θ', θ, dans ces formes, les équations en Φ, Φ', a, b, c, &c. a', b', c', &c. que j'aurai trouvé leur convenir par la même méthode. Il est aisé de voir que le nombre de ces formes ne peut être que fini; car σ & θ' ne peuvent être plus grands que $\Pi + 1$; de même que le degré de l'équation (4) & θ ne peuvent être plus grands que P.

Soit, par exemple, $\Pi = 0$, $P = 1$; on aura $Fr^{n} + Gr^{n-1} \ldots s + F'r^{n'} + G'r^{n'-1} + \ldots = 0$, $a'ds + b'dx + c'dy + e'dr = 0$, $adr + \overline{bdx + cdy}$ $= 0$, ou $a\,dr + r\,\overline{b\,dx + c\,dy} = 0$: & il faudra que l'équation (4) soit $rdx + a''dx + b''dy = 0$, a'' & b'' étant des fonctions sans radicaux : & on aura les intégrales qui répondent à cette formule, en trouvant, par l'Article qui suit, celles qui répondent à l'équation $rdx + a''dx + b''dy = 0$, où il faut observer que r ne doit être qu'au premier degré, & n'avoir pour facteur que dx. Ces formes, une fois déterminées, donneront celles de toutes les équations qu'on peut réduire à la forme $A ddy + B dx^2 + C dx dy + D dy^2 = 0$, A, B, C, D contenant des fonctions irrationnelles. En effet elles seront les mêmes, excepté que les fonctions qui, pour le cas précédent, étoient irrationnelles, pourront, dans celui-ci, contenir les mêmes fonctions irrationnelles que A, B, C, D.

Si l'équation étoit ou pouvoit être $A d^2 y + B d^2 x + C dx^2 + D dx dy + F dy^2 = 0$, la proposée ne pourroit contenir qu'une seule transcendante.

Quelque forme qu'ait la proposée, elle peut avoir une intégrale, soit algébrique, soit avec une seule transcendante: mais ces cas se ramenent au cas général; & pour lors l'équation (1) est $Fs + G = 0$, F & G étant des constantes: & dans le premier seulement l'équation (2) sera $rds - dr = 0$.

Les intégrales des équations différentielles qui auroient une fonction transcendante dans leurs coefficiens, se trouvent par cette méthode, observant seulement que, comme la différentielle de cette fonction transcendante, dont on a la valeur, a été éliminée, il faut voir quelles formes pouvoit avoir la proposée avant l'élimination: & le reste se fera comme ci-dessus.

Il est aisé de voir que les principes que je viens d'appliquer aux premier & second ordres, sont généraux pour un ordre quelconque.

ARTICLE III.

Du degré où peuvent monter les variables x, y, *soit dans les coefficiens des équations intégrales en* r, *&c. ordonnées par rapport à ses fonctions transcendantes, soit dans les coefficiens des équations en* a, b, c, *&c.* x, y, *ou* Φ, x, y; *&c.*

I. SOIT l'équation proposée du premier ordre, & $\Pi = 1$: l'équation différentielle sera $A\,dx + B\,dy = 0$, dont l'intégrale ne peut être que $\begin{matrix} Fr + FN = 0, \\ + G \end{matrix}$

N étant l'arbitraire, & $r = l.\,a^m\,b^n\,c^q$, &c. ensorte qu'on ait $a + f = 0$, $b + f' = 0$, $c + f'' = 0$, &c.

Soit maintenant 1°. A & B constant, l'équation différentielle proposée sera $\pi dx + \pi' dy = 0$; & je pourrai faire $a = \frac{ax + by + cp}{p}$; $F = 1$, $G = 0$.

Les a, b, c, &c. ainsi que les π, ϱ, &c. sont ici des nombres, ainsi que dans le reste de cet Article, & p est un parametre constant qui conserve l'homogénéité, & par conséquent différent du p qui multiplie $l.\,c$, & qui est un nombre. Et comme aucune autre supposition ne peut donner la proposée, son intégrale ne peut être que $l.\,\frac{ax + by + cp}{p} + N = 0$, équation qui, repassant des logarithmes aux nombres, est purement algébrique.

Soit 2°. A & B du premier degré : l'équation sera $\overline{\pi x + \varrho y + \upsilon p}\,dx + \overline{\pi' x + \varrho' y + \upsilon' p}\,dy = 0$, &

je pourrai faire.

1°. $a = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2}$, $G = 0$, $F = 1$,

2°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = 0$, $F = 1$,

3°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $G = a'x + b'y + c'p$, $F = p$,

4°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $G = a'x + b'y + c'p$, $F = ax + by + cp$.

Et comme aucune autre ſuppoſition ne peut donner la forme de la propoſée, ſon intégrale ne peut être qu'une de ces quatre équations

1. $\mathrm{l.}\,\frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2} + N = 0$,

équation qui, repaſſant des logarithmes aux nombres, eſt toujours algébrique.

2. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax + by + cp}{p} + n\,\mathrm{l.}\,\frac{a'x + b'y + c'p}{p} + N = 0$,

équation qui eſt algébrique, lorſque m & n ſont rationnels.

3. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax + by + cp}{p} + \frac{a'x + b'y + c'p}{p} + N = 0$.

4. $m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax + by + cp}{p} + \frac{a'x + b'y + c'p}{ax + by + cp} + N = 0$.

a' & b' peuvent manquer à la fois dans cette équation.

Soit 3°. A & B du ſecond degré : la propoſée ſera

$$\pi x^2 + \varrho xy + \upsilon y^2 + \delta px + \varepsilon py + \nu p^2 dx + \pi' x^2 + \varrho' xy + \upsilon' y^2 + \delta' px + \varepsilon' py + \nu' p^2 dy = 0;$$

& je pourrai faire

1°. $a = \frac{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^3 + fpx^2 + gpxy + hpy^2 + ip^2x + kp^2y + lp^3}{p^3}$, $G = 0$, $F = 1$.

$2^{\circ}.\ a = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2},\ b = \frac{a' + b'y + c'p}{p},$
$G = 0,\ F = 1.$

$3^{\circ}.\ a = \frac{ax + by + cp}{p},\ b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p},\ c = \frac{a'' + b''y + c''p}{p},$
$G = 0,\ F = 1.$

$4^{\circ}.\ a = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2},\ G = a'x + b'y$
$+ c'p,\ F = p.$

$5^{\circ}.\ a = \frac{ax + by + cp}{p},\ b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p},\ G = a''x + b''y$
$+ c''p,\ F = p.$

$6^{\circ}.\ a = \frac{ax + by + cp}{p},\ b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p},\ G = a''x + b''y$
$+ c''p,\ F = ax + by + cp.$

$7^{\circ}.\ a = \frac{ax + by + cp}{p},\ G = a'x^2 + b'xy + c'y^2 + e'px$
$+ f'py + g'p^2,\ F = p^2.$

$8^{\circ}.\ a = \frac{ax + by + cp}{p},\ G = a'x^2 + b'xy + c'y^2 + e'px$
$+ f'py + g'p^2,\ F = p\,\overline{ax + by + cp}.$

$9^{\circ}.\ a = \frac{ax + by + cp}{p},\ G = a'x^2 + b'xy + c'y^2 + e'px$
$+ f'py + g'p^2,\ F = \overline{ax + by + cp}^2.$

$10^{\circ}.\ a = \frac{ax + by + cp}{p},\ G = a''x + b''y + c''p,\ F = a'x$
$+ b'y + c'p.$

Et puifqu'aucune autre fuppofition ne convient à la propofée, fon intégrale ne peut être qu'une de ces dix équations,

$1.\ l.\ \frac{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^3 + fpx^2 + gpxy + hpy^2 + ip^2x + kp^2y + lp^3}{p^3}$
$+ N = 0,$

équation qui, repassant des logarithmes aux nombres, est toujours algébrique.

2. $m\,\mathrm{l}.\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+n\,\mathrm{l}.\frac{a'x+b'y+c'p}{p}$
$+N=0$,

équation algébrique, lorsque m & n sont rationnels.

3. $m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+p\,\mathrm{l}.\frac{a''x+b''y+c''p}{p}$
$+N=0$,

équation algébrique, lorsque m, n, p sont rationnels.

4. $m\,\mathrm{l}.\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+\frac{a'x+b'y+c'p}{p}$
$+N=0$.

5. $m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+\frac{a''x+b''y+c''p}{p}$
$+N=0$.

6. $m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+\frac{a''x+b''y+c''p}{ax+by+cp}$
$+N=0$.

a″ & b″ peuvent manquer en même-tems.

7. $m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{p^2}$
$+N=0$.

8. $m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{p\,\overline{ax+by+cp}}$
$+N=0$.

9. $m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{\overline{ax+by+cp}^2}$
$+N=0$.

a′, b′, c′, e′, f′ peuvent manquer en même tems.

10. $m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a''x+b''y+c''p}{a'x+b'y+c'p}+N=0$.

a″ & b″ peuvent manquer en même-tems.

Soit

Soit 4°. *A* & *B* du troisieme degré, l'équation sera
$$\psi x^3+\varrho x^2y+\upsilon xy^2+\delta y^3+\epsilon px^2+\eta pxy+\mu py^2+\nu p^2x+\pi p^2y+\varphi p^3dx$$
$$+\psi'x^3+\varrho'x^2y+\upsilon'xy^2+\delta'y^3+\epsilon'px^2+\eta'pxy+\mu'py^2+\nu'p^2u+\pi'p^2y+\varphi'p^3dy$$
$$=0:$$
& je pourrai faire

$$1^\circ.\quad a=\frac{\left\{\begin{array}{l} ax^4+bx^3y+cx^2y^2+exy^3+fy^4 \\ +gpx^3+hp^2xy+ipxy^2+kpx^2y+lpy^3 \\ \qquad +mp^2x^2+np^2xy+pp^2y^2 \\ \qquad\qquad +qp^3y+rp^3y \\ \qquad\qquad\qquad +sp^4 \end{array}\right.}{p^4},\ G=0,$$
$F=1.$

$$2^\circ.\quad a=\frac{ax^3+bx^2y+cxy^2+ey^3+fpx^2+gpxy+hpy^2+ip^2x+kp^2y+lp^3}{p^3}$$
$b=\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}$, $G=0$, $F=1$.

$3^\circ.\quad a=\dfrac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}$, $b=$
$\dfrac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{p^2}$, $G=0$, $F=1$.

$4^\circ.\quad a=\dfrac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}$, $b=\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}$,
$c=\dfrac{a''x+b''y+c''p}{p}$, $G=0$, $F=1$.

$5^\circ.\quad a=\dfrac{ax+by+cp}{p}$, $b=\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}$, $c=\dfrac{a''x+b''y+c''p}{p}$,
$\dfrac{a'''x+b'''y+c'''}{p}$, $G=0$, $F=1$.

$$6^\circ.\quad a=\frac{ax^3+bx^2y+cxy^2+ey^3+fpx^2+gpxy+hpy^2+ip^2y+kp^2y+lp^3}{p^3}$$
$G=a'x+b'y+c'p$, $F=p$.

$7^\circ.\quad a=\dfrac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}$, $b=\dfrac{a'x+b'y+cp}{p}$,
$G=a''x+b''y+c''p$, $F=p$.

$8^\circ.\quad a=\dfrac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}$, $b=\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}$,
$G=a''x+b''y+c''p$, $F=a'x+b'y+c'p$.

9°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $c = \frac{a''x + b''y + c''p}{p}$, $G = a'''x + b'''y + c'''p$, $F = p$.

10°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $c = \frac{a''x + b''y + c''p}{p}$, $G = a'''x + b'''y + c'''p$, $F = ax + by + cp$.

11°. $a = \frac{ax^2 + bxy + + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2}$, $G = a'x^2 + b'xy + c'y^2 + e'px + f'py + g'p^2$, $F = p^2$.

12°. $a = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p}$, $G = a'x^2 + b'yx + c'y^2 + e'px + f'py + g'p^2$; $F = ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2$.

13°. $a = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + epx + fpy + gp^2}{p^2}$, $G = a''x + b''y + c''p$, $F = a'x + b'y + c'p$.

14°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = p^2$.

15°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = p\,\overline{ax + by + cp}$.

16°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = \overline{ax + by + cp}^2$.

17°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''p + e''px + f''py + g''p^2$, $F = \overline{ax + by + cp}\,.\,\overline{a'x + b'y + c'p}$.

18°. $a = \frac{ax + by + cp}{p}$, $b = \frac{a'x + b'y + c'p}{p}$, $G = a'''x + b'''y + c'''p$, $F = a''x + b''y + c''p$.

19°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + e'x^3 + f'px^2 + g'pxy + h'py^2 + i'p^2x + k'p^2y + l'p^3$, $F = p^3$.

20°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + e'y^3 + f'px^2 + g'pxy + h'py^2 + i'p^2x + k'p^2y + l'p^3$, $F = p^2 . ax + by + cp$.

21°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + e'y^3 + f'px^2 + g'pxy + h'py^2 + i'p^2x + k'p^2y + l'p^3$, $F = p . \overline{ax + by + cp}^2$.

22°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + e'y^3 + f'px^2 + g'pxy + h'py^2 + i'p^2x + k'p^2y + l'p^3$, $F = \overline{ax + by + cp}^3$.

23°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = p . a'x + b'y + c'p$.

24°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a''x + b''yx + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = \overline{ax + by + cp} . \overline{a'x + b'y + c'p}$.

25°. $a = \frac{ax+by+cp}{p}$, $G = a''x^2 + b''xy + c''y^2 + e''px + f''py + g''p^2$, $F = \overline{a'x + b'y + c'p}^2$.

Et comme aucune autre ſuppoſition ne peut donner la propoſée, l'intégrale ne pourra être qu'une des vingt-cinq équations ſuivantes.

$$1.\quad \mathrm{l.}\,\frac{\left\{\begin{array}{l} ax^4+bx^3y+cx^2y^2+exy^3+fy^4 \\ \quad +gpx^3+hpx^2y+ipxy^2+kpy^3 \\ \qquad +lp^2x^2+mp^2xy+np^2y^2 \\ \qquad\quad +pp^3x+qp^3y \\ \qquad\qquad +rp^4 \end{array}\right.}{p^4}+N=0,$$

équation qui, repassant des logarithmes aux nombres, est purement algébrique.

$$2.\quad m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax^3+bx^2y+cxy^2+ey^3+fpx^2+gpxy+hpy^2+ip^2x+kp^2y+lp^3}{p^3}$$
$$+n\,\mathrm{l.}\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+N=0,$$

équation algébrique, lorsque m & n sont rationnels.

$$3.\quad m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+$$
$$n\,\mathrm{l.}\,\frac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{p^2}+N=0,$$

équation algébrique, lorsque m & n sont rationnels.

$$4.\quad m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+n\,\mathrm{l.}\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}$$
$$+p\,\mathrm{l.}\,\frac{a''x+b''y+c''p}{p}+N=0,$$

équation encore algébrique, lorsque m, n & p sont rationnels.

$$5.\quad m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l.}\,\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+p\,\mathrm{l.}\,\frac{a''x+b''y+c''p}{p}$$
$$+q\,\mathrm{l.}\,\frac{a'''x+b'''y+c'''p}{p}+N=0,$$

équation algébrique, lorsque m, n, p & q sont rationnels.

$$6.\quad m\,\mathrm{l.}\,\frac{ax^3+bx^2y+cxy^2+ey^3+fpx^2+gpxy+hpy^2+ip^2x+kp^2y+lp^3}{p^3}$$
$$+\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+N=0.$$

7. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+n\,\mathrm{l}.\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}$
$+\dfrac{a''x+b''y+c''p}{p}+N=0.$

8. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+n\,\mathrm{l}.\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}$
$+\dfrac{a''x+b''y+c''p}{a'x+b'y+c'p}+N=0.$

a″ & b″ peuvent manquer en même-tems.

9. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}+p\,\mathrm{l}.\dfrac{a''x+b''y+c''p}{p}$
$+\dfrac{a'''x+b'''y+c'''p}{p}+N=0.$

10. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}+p\,\mathrm{l}.\dfrac{a''x+b''y+c''p}{p}$
$+\dfrac{a'''x+b'''y+c'''p}{ax+by+cp}+N=0.$

11. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+$
$\dfrac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{p^2}+N=0.$

12. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+$
$\dfrac{a'x^2+b'xy+c'y^2+e'px+f'py+g'p^2}{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}+N=0.$

a′, b′, c′, e′, f′ peuvent manquer en même-tems.

13. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax^2+bxy+cy^2+epx+fpy+gp^2}{p^2}+\dfrac{a''x+b''y+c''p}{a'x+b'y+c'p}$
$+N=0.$

a″, b″ peuvent manquer en même-tems.

14. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}+$
$\dfrac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{p^2}+N=0.$

15. $m\,\mathrm{l}.\dfrac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\dfrac{a'x+b'y+c'p}{p}+$
$\dfrac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{p.\,ax+by+cp}+N=0.$

16. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{\overline{ax+by+cp}^2}+N=0.$$

a'', b'', c'', e'', f'' peuvent manquer en même tems.

17. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{\overline{ax+by+cp}\,.\,\overline{a'x+b'y+c'p}}+N=0.$$

a'', b'', c'', e'', f'' peuvent manquer en même-tems.

18. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+n\,\mathrm{l}.\frac{a'x+b'y+c'p}{p}+\frac{a'''x+b'''y+c'''p}{a''x+b''y+c''p}+N=0.$$

a''' & b''' peuvent manquer en même-tems.

19. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\left\{\frac{\begin{array}{r}a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+e'y^3\\ +f'px^2+g'pxy+h'py^2\\ +i'p^2x+k'p^2y\\ +l'p^3\end{array}}{p^3}\right.+N=0.$$

20. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\left\{\frac{\begin{array}{r}a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+e'y^3\\ +f'px^2+g'pxy+h'py^2\\ +i'p^2x+k'p^2y\\ +l'p^3\end{array}}{p^2\,\overline{ax+by+cp}}\right.+N=0.$$

21. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\left\{\frac{\begin{array}{r}a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+e'y^3\\ +f'px+g'pxy+h'py^2\\ +i'p^2x+k'p^2y\\ +l'p^3\end{array}}{p\,\overline{ax+by+cp}^2}\right.+N=0.$$

22. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\left\{\frac{\begin{array}{r}a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+e'y^3\\+f'px^2+g'pxy+h'py^2\\+i'p^2x+k'p^2y\\+l'p^3\end{array}}{\overline{ax+by+cp}^3}\right.+$$

$N=0.$

a', b' c', e', f', g', h', i', k' peuvent manquer.

23. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{p.\overline{a'x+b'y+c'p}}$$

$+N=0.$

24. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{\overline{ax+by+cp}.\overline{a'x+b'y+c'p}}$$

$+N=0.$

a'', b'', c'', e'', f'' peuvent manquer.

25. $$m\,\mathrm{l}.\frac{ax+by+cp}{p}+\frac{a''x^2+b''xy+c''y^2+e''px+f''py+g''p^2}{\overline{a'x+b'y+c'p}^2}.$$

$+N=0.$

a'', b'', c'', e'', f'' peuvent manquer.

L'on voit aiſément de-là comment il faudroit s'y prendre pour déterminer les formes dont eſt ſuſceptible l'intégrale finie des équations où les variables ſont d'un degré plus élevé. Le produit de tous les a, b, c ne peut être en général que d'un degré ſupérieur d'une unité à celui où montent les variables, & G ne peut jamais être d'un degré plus élevé ; & par conſéquent le nombre de ces formes ſera toujours fini.

II. Soit l'équation du ſecond degré de différences, & . . $Adx^2+Bdxdy+Cdy^2=0$: l'intégrale ne pourra être que d'une des trois formes ſuivantes.

1.
$$\begin{array}{lll} Fr^2 & + 2FNr & + FN^2 = 0; \\ + G & & + GN \\ & & + H \end{array}$$

$r = \mathrm{l}.a^m b^n c^p$, &c. $a + f = 0$, $b + f' = 0$, &c.

2.
$$\begin{array}{ll} Fr & + FN = 0, \\ & + G \end{array}$$

$$r = \mathrm{l}.a^m b^n c^p, \text{ \&c.}$$

& $fa^2 + ga + h = 0$, $f'b^2 + g'b + h' = 0$, &c.
ou $a^2 + ga + hf = 0$, $b^2 + g'b + h'f' = 0$, &c.
car en général, dans ce cas, au lieu d'une équation

$$fa^r + ga^{r-1} + ha^{r-2} + ia^{r-3}, \text{ \&c.} = 0,$$

on peut mettre l'équation

$$a^r + ga^{r-1} + hfa^{r-2} + ifa^{r-3}, \text{ \&c.} = 0.$$

On aura avec cela un nombre aussi indéfini d'équations rationnelles, comme dans l'Article précédent; & il faudra que $\frac{g^2}{4} - hf = \frac{g'^2}{4} - h'f'$, &c.

3.
$$\begin{array}{lll} Fr^2 & + 2FNr & + FN^2 = 0; \\ + G & & + GN \\ & & + H \end{array}$$

$$r = \mathrm{l}.a^m b^n c^p, \text{ \&c.}$$

$a^2 + ga + hf = 0$, $b^2 + g'b + h'f' = 0$, &c.
& un nombre indéfini d'équations rationnelles, comme pour la premiere forme; & il faudra que

$$\frac{G^2}{4} - HF = \frac{g^2}{4} - hf = \frac{g'^2}{4} - h'f', \text{ \&c.}$$

Je traiterai chacune de ces formules générales de maniere à produire l'équation différentielle sans r ni dr, qui y répond: & faisant dans chacune les quantités F, G,

G, H, &c. f, g, h, &c. f', g', h', &c. des degrés 0, 1, 2, 3, 4, &c. égales ou inégales, produits de plusieurs facteurs, ou sans facteurs, j'aurai, dans chacune de ces suppositions, le degré de A, B, C. Je pourrai par conséquent dresser des tables, où, faisant successivement A, B, C, des degrés 1, 2, 3, 4, 5, &c. je mettrai à côté de chacune de ces suppositions celles que j'aurai trouvé pouvoir leur convenir, & dont il est clair que le nombre est toujours fini.

Je dois faire observer ici que tout ce que j'ai dit jusqu'ici est également vrai pour un nombre quelconque de variables, & que pour avoir les formes des intégrales des équations différentielles à trois variables, il n'y a qu'à mettre dans les formules des pages 54 & suiv. des fonctions à trois variables, semblables à celles à deux variables qui s'y trouvent. Cette remarque me sert à résoudre une objection qu'on pourroit me faire. L'équation entre deux variables $\overline{\psi x + \varrho y + \upsilon p}\; dx + \overline{\psi' x + \varrho' y + \upsilon' p}\; dy = 0$ est toujours possible. Pourquoi donc n'ai-je pas une équation finie entre x, y, qui soit l'intégrale de cette équation, quelque valeur qu'aient les coefficiens, comme cela devroit être ? La réponse est simple : les formes que donne la méthode sont également pour un nombre quelconque de variables; & l'équation semblable pour un nombre quelconque de variables n'est pas toujours possible : il ne faut donc pas qu'il y ait une forme unique d'intégrale, indépendante des coefficiens.

On pourroit traiter par la même méthode les équations du premier ordre qui contiendroient une fonction transcendante, & dresser des tables des formes de leurs intégrales, puisque, par l'Article précédent, on en connoît déja les formes les plus générales. On pourroit aussi, puisqu'on connoît la différence dr qui a été éliminée, s'assurer de quelle forme pouvoit être la proposée avant l'élimination : & dès-lors, regardant r comme une nouvelle variable, on n'auroit besoin que des tables pour les équations à trois variables sans transcendantes.

Si on avoit à intégrer une équation du premier ordre à deux variables, où une des variables seulement eût des exposans indéterminés, telle est celle de Ricati par exemple, il est clair qu'on peut regarder ces exposans comme entiers, puisqu'on peut les rendre tels par les plus simples substitutions. Alors on supposera que l'intégrale de la proposée est d'une des formes que donnent les tables pour le plus haut exposant de la variable dont les exposans sont déterminés, ayant soin de substituer dans ces formes des puissances indéterminées de l'autre variable, au lieu des puissances déterminées qui s'y trouvent, & des coefficiens constans : & on aura la forme générale des intégrales de cette équation, qu'il faudra déterminer ensuite pour chaque cas particulier. Si, au lieu de puissances indéterminées, on avoit une fonction quelconque, on se conduiroit de même.

Ce que j'ai dit jusqu'ici suffit, je crois, pour faire entendre la généralité de la méthode, & la maniere de l'appliquer aux cas plus compliqués : ainsi je ne m'étendrai pas davantage.

Il arrive quelquefois que certaines équations finies résolvent la proposée dont elles donnent des intégrales particulieres, & ne sont pas contenues dans l'intégrale générale, quelque valeur qu'on donne aux arbitraires. Cette remarque, qui a été faite par M. Euler, pourroit paroître contraire aux principes généraux que j'ai établis : & je crois devoir analyser ce cas, pour ne rien laisser à desirer sur la nature du calcul intégral, & sur la généralité de la méthode que je donne ici.

Soient A, A', &c. des fonctions finies; B, B', &c. des fonctions du premier ordre; C, C', &c. des fonctions du second, &c. je remarque que ces équations sont nécessairement des formes

$$\left.\begin{array}{r} AB = 0 \\ AB + A'dA = 0 \end{array}\right\} \text{pour le premier ordre,}$$

$$\left.\begin{array}{r} AC = 0 \\ AC + C'dA + Bd^2A = 0 \\ C''dA = 0 \\ CdA + Bd^2B = 0 \end{array}\right\} \text{pour le second:}$$

& ainsi de suite.

Ou, ce qui revient au même,

$$A . B = 0$$

$$A . B + A' \frac{dA}{A} = 0;$$

& . . . . $A . C = 0$

$$A . C + C . \frac{dA}{A} + B \frac{d^2A}{A} = 0$$

$$dA . C'' = 0$$

$$dA . C + B \frac{d^2A}{dA} = 0, \text{ \&c.}$$

& ces équations donnent les solutions particulieres $A = 0$, ou $dA = 0$, sans arbitraires.

Soit maintenant S l'intégrale finie de $B = 0$

$$B + A'\frac{dA}{A} = 0,$$

S' l'intégrale du premier ordre de . . . $C = 0$

$$C + C'\frac{dA}{A} + B\frac{ddA}{A} = 0,$$

S'' l'intégrale du premier ordre de . . . $C'' = 0$

$$C + B\frac{ddA}{dA} = 0.$$

Je dis que $AS = 0$, $AS' = 0$, $dAS'' = 0$ sont les intégrales des proposées. En effet, différenciant & faisant disparoître l'arbitraire qui ne se trouve que dans S, S', S'', on aura les proposées.

Cela posé, je distingue deux cas: le premier, où la proposée a un facteur A, ou dA, facteur d'un ordre inférieur, que je puis trouver par l'analyse ordinaire, n'a dès-lors aucune difficulté: & même lorsque ce facteur est fini, la méthode générale s'y applique sans peine. Il n'en est pas de même pour les autres cas: l'Algebre ordinaire n'est d'aucun secours: & comme, pour traiter l'équation différentielle, je la suppose sous une forme rationnelle & entiere, on voit aisément que l'intégrale de $AB + A'dA = 0$, par exemple, doit être la même que celle de $B + A'\frac{dA}{A} = 0$, qui ne contient point la solution particuliere $A = 0$. Si je veux donc trouver toutes les solutions particulieres de cette espece, qui ne sont pas contenues dans la complette, je différencie l'équation intégrale trouvée, ordonnée ensorte que l'arbitraire soit le terme constant : & si la proposée est du premier ordre, j'aurai toutes les équations particulieres, en égalant à zero les fonctions finies par lesquelles il faut multiplier cette différence, pour qu'elle devienne la proposée. Si elle est du second ordre, je répéterai la différenciation, en observant toujours qu'une des arbitraires soit le terme constant; & j'aurai toutes les équations particulieres, en égalant à zero les fonctions finies, ou du premier ordre, par lesquelles il faut multiplier cette seconde différence, pour qu'elle devienne la proposée.

ARTICLE IV.

Trouver les coefficiens constans.

APRÈS avoir trouvé, dans les Articles précédens, les différentes formes dont est susceptible l'intégrale d'une équation différentielle d'une forme donnée, il ne me reste plus qu'à déterminer, entre ces formes, celle qui convient aux coefficiens donnés de la proposée, & les coefficiens de l'intégrale qui en résultent. Pour cela, différenciant chaque forme d'intégrale, & la réduisant à la forme de la proposée, j'aurai une fonction qui devra être identiquement la même : comparant donc terme à terme, j'aurai les coefficiens de l'intégrale, & les conditions que chaque supposition peut demander entre les coefficiens de la proposée ; & je joindrai dans les tables, à côté de chaque forme, & les conditions & la valeur des coefficiens.

Il n'y a aucune forme générale d'équations qui ne puiſſe avoir une intégrale, puiſque le nombre des variables y eſt ſuppoſé quelconque : les équations de condition ne tombent donc que ſur les coefficiens : on trouveroit donc toutes ces conditions dans la table. Mais cela ne diminue rien de l'utilité des formules générales de la Section précédente ; puiſqu'étant pour un ordre & un degré quelconques, elles donnent des réſultats généraux où les tables n'en donnent que de particuliers, & diſpenſent du travail de continuer les tables en pure perte, ſi on avoit à traiter une équation abſurde qui ne s'y trouvât pas.

CONCLUSION.

CEUX qui auront ſuivi l'eſprit de cette méthode, verront que j'ai réſolu le problême que je m'étois propoſé dans toute ſon étendue. En effet, 1°. il n'y a aucune équation différentielle à laquelle cette méthode ne s'applique : 2°. je donne pour chacune la maniere de trouver toutes les formes dont l'intégrale eſt ſuſceptible, & je démontre que le nombre en eſt fini. Le reſte ne dépend donc plus que de l'Algebre ordinaire : j'intégrerai donc toute équation différentielle qui ne ſera pas abſurde.

SECONDE PARTIE.

PREMIERE SECTION.

Des différences finies.

I. *De la nature des différences finies*

Je ſuppoſe que dans une fonction donnée φ de x, y, &c. x, y, &c. deviennent $x + \delta x$, $y + \delta y$, &c. δx, δy, &c. étant des quantités finies; la fonction φ variera auſſi & deviendra $\varphi + \delta\varphi$, $\delta\varphi$ devenant nul lorſqu'on ſuppoſe δx, δy, &c. $= 0$: & j'aurai

$$\varphi + \delta\varphi = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi'''', \text{ \&c.}$$

cette ſuite pouvant être infinie, φ', φ'', φ''', φ'''', &c. étant des fonctions des variables & de δx, δy, &c. enſorte qu'il ne s'y trouve que des puiſſances rationnelles & entieres de δx, δy, &c. & ces différences finies étant au premier degré dans φ', au ſecond dans φ'', au troiſieme dans φ''', & ainſi de ſuite. Tout cela ſuit de la nature d'une fonction quelconque.

Si je ſuppoſois maintenant $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, &c. $\varphi + \delta\varphi$ deviendroit $\varphi + d\varphi$, & la ſuite deviendroit $\varphi + \varphi'$: donc dans ce cas $d\varphi = \varphi'$. Donc en général, pour avoir φ', il faut prendre la différence infiniment petite de φ, & ſubſtituer pour dx, dy, &c. δx, δy,

&c. & j'appellerai $\Delta\varphi$ cette différence ainsi changée par la substitution. On trouvera enfin, par des raisonnemens analogues, que si je désigne par $\Delta^2\varphi$, $\Delta^3\varphi$, &c. les différences successives de φ, prises en supposant les différences constantes, & dans lesquelles on auroit substitué δx, δy, &c. pour dx, dy, &c. j'aurai $\varphi'' = \frac{\Delta^2\varphi}{1.2}$, $\varphi''' = \frac{\Delta^3\varphi}{1.2.3}$, $\varphi'''' = \frac{\Delta^4\varphi}{1.2.3.4}$, &c. & par conséquent $\varphi + \delta\varphi = \varphi + \Delta\varphi + \frac{\Delta^2\varphi}{1.2} + \frac{\Delta^3\varphi}{1.2.3} + \frac{\Delta^4\varphi}{1.2.3.4}$, &c. forme générale de la différence finie d'une fonction donnée, qu'on trouve par le calcul différentiel ordinaire.

Si maintenant, au lieu de φ, fonction de x, y, &c. seulement, j'avois à différencier une fonction de x, y, &c. & de leurs différences finies de différens ordres, j'aurois la différence par la même méthode, en faisant $\delta x = p$, $\delta p = q$, &c. $\delta y = p'$, $\delta p' = q'$, &c. &c. regardant p, q, &c. p', q', &c. &c. comme de nouvelles variables, & dans les termes affectés de la caractéristique Δ, les δx, δy, δq, &c. δy, $\delta p'$, $\delta q'$, &c. &c. comme constans.

II. *De l'intégration des équations différentielles aux différences finies.*

Soit $\varphi = 0$ une équation sans différences : différenciant, j'aurai $\delta\varphi = 0$: substituant dans $\delta\varphi$, pour un des coefficiens, sa valeur tirée de l'équation $\varphi = 0$, j'aurai une équation aux premieres différences finies, dont l'intégrale sera $\varphi = 0$, & où le coefficient que j'ai j'ai fait disparoître sera arbitraire : & il est clair que faisant dans cette équation $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, &c. j'aurai la même équation que si, dans $d\varphi$, j'avois substitué, pour ce même coefficient, sa valeur tirée de la même équation, & dont l'intégrale est la même. Si donc je veux avoir l'intégrale d'une semblable équation, je n'aurai qu'à prendre, par la méthode de la premiere Partie, celle de l'équation aux différences ordinaires, qui y répond, & que me donne cette substitution.

Si je différencie maintenant cette équation du premier ordre, & que je substitue dans cette différence la valeur d'un des coefficiens de φ, qui se trouve encore dans l'équation du premier ordre, car toute autre supposition ne s'accorderoit pas à la supposition que je fais ici d'une équation produite par une équation sans différences & susceptible d'avoir une intégrale générale, j'aurai une équation du second ordre, dont $\varphi = 0$ sera l'intégrale, les deux coefficiens qu'on a fait évanouir restant arbitraires : & faisant dans cette équation $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, j'aurai la même équation que si, dans le cas des différences ordinaires, j'avois traité semblablement la même équation $\varphi = 0$. Mais il est clair que l'intégrale de cette derniere équation est la même que celle de la proposée. Donc, &c. Et en général, toutes les fois qu'une équation aux différences finies admet une solution complette, son intégrale sera la même que celle de l'équation aux différences ordinaires qui y répond ; car elles ont les mêmes variables, ont le même nombre d'arbitraires, & doivent avoir lieu en même-tems.

Si donc j'ai à intégrer une équation aux différences finies, je commencerai par résoudre les équations aux différences ordinaires qui y répondent. Si l'intégrale de la proposée admet un nombre d'arbitraires égal, alors quelques-unes de ces équations seront les intégrales cherchées : sinon on les aura en déterminant la valeur des arbitraires qui devront être déterminées, ce qui est facile. J'ai dit *quelques-unes*, parceque, si dans la proposée les plus hautes différences ne sont pas sous une forme linéaire, elle n'est plus une équation simple, mais le produit de plusieurs autres qui peuvent être impossibles, quoique l'équation aux différences ordinaires, qui y répond, soit possible.

III. *Des équations de condition.*

Si l'équation différentielle aux différences infiniment petites, qui répond à une équation aux différences finies, n'est pas possible, il est clair que celle-ci ne l'est pas non plus : mais de ce que la premiere a une intégrale finie, on n'en peut pas conclure que la proposée en ait une aussi ; ce qui donne lieu à la recherche de nouvelles équations de condition. Il paroît ici que, comme il n'en est pas des équations aux différences finies impossibles, auxquelles répond une équation aux différences infiniment petites qui soit possible, comme d'une équation aux différences ordinaires qui seroit absurde, parceque cette derniere n'est susceptible d'aucune solution, & que la premiere en admet une dans le cas particulier des différences infiniment petites, il ne sera pas inutile de chercher quelle sera l'intégrale dans ce cas; que cette intégrale une fois trouvée, comme elle sera celle de la proposée en général, s'il y en a une, il ne faudra plus que voir si elle résout la proposée; & qu'ainsi toute autre recherche d'équations de condition sera superflue. Cependant on verra que la solution directe de cette question, que je vais donner dans les trois Problêmes suivans, n'est pas sans utilité, indépendamment du mérite analytique de la méthode.

PROBLEME I.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction aux différences finies d'un ordre quelconque soit la différentielle exacte d'une fonction d'un ordre moins élevé d'une unité.

SOLUTION. 1°. Je suppose la fonction proposée de x, y, &c. & de leurs différences finies ordonnées par rapport à ces différences, regardant $\delta^2 x$ comme homogene à δx^2, $\delta^3 x$ comme homogene à $\delta x \delta^2 x$, à δx^3, & ainsi de suite; elle sera nécessairement de la forme

$$\begin{array}{l} V + V' + V'' + V''', \text{ \&c.} \\ + Y + Y' + Y'' + Y''', \text{ \&c.} \\ + \text{ \&c.} \end{array}$$

V étant une fonction du degré n, V' du degré $n+1$, V'' du degré $n+2$, V''' du degré $n+3$, & ainsi de suite; Y étant du degré ν, Y' du degré $\nu+1$, Y'' du degré $\nu+2$, Y''' du degré $\nu+3$, & ainsi de suite.

2°. Il est évident que si cette fonction est une différentielle exacte, son intégrale ne peut être que

$$B + B' + B'' + B''', \&c.$$
$$+ \text{p} + \text{p}' + \text{p}'' + \text{p}''', \&c.$$
$$+ \&c.$$

les B, B', B'', B''', &c. p, p′, p″, p‴, &c. &c. étant d'un ordre inférieur d'une unité, & B du degré $n - 1$, B' du degré n, B'' du degré $n + 1$, B''' du degré $n + 2$, &c. p du degré $\nu - 1$, p′ du degré ν, p″ du degré $\nu + 1$, p‴ du degré $\nu + 2$, &c. &c. ensorte que $B + B' + B'' + B'''$, &c. soit l'intégrale de $V + V' + V'' + V'''$, &c. & p + p′ + p″ + p‴, &c. l'intégrale de $Y + Y' + Y'' + Y'''$, &c. &c. & la fonction

$$V + V' + V'' + V''', \&c.$$
$$+ Y + Y' + Y'' + Y''', \&c.$$
$$+ \&c.$$

ne pourra être une différentielle exacte, que chacune de ses parties ne le soit aussi.

3°. Je fais pour δx, &c. δy, &c. les substitutions indiquées (Art. I.) & j'ai par la supposition

$$V + V' + V'' + V''', \&c. = \delta.\overline{B + B' + B'' + B'''}, \&c. =$$
$$\Delta B + \Delta B' + \Delta B'' + \Delta B''', \&c.$$
$$+ \frac{\Delta^2 B}{1.2} + \frac{\Delta^2 B'}{1.2} + \frac{\Delta^2 B''}{1.2}, \&c.$$
$$+ \frac{\Delta^3 B}{1.2.3} + \frac{\Delta^3 B'}{1.2.3}, \&c.$$
$$+ \frac{\Delta^4 B}{1.2.3.4}, \&c.$$

Puis donc que la fonction $V + V' + V'' + V'''$, &c. doit avoir cette forme pour être une différentielle exacte, j'aurai, comparant terme à terme,

$$V = \Delta B$$
$$V' = \Delta B' + \frac{\Delta^2 B}{1.2}$$
$$V'' = \Delta B'' + \frac{\Delta^2 B'}{1.2} + \frac{\Delta^3 B}{1.2.3}$$
$$V''' = \Delta B''' + \frac{\Delta^2 B''}{1.2} + \frac{\Delta^3 B'}{1.2.3} + \frac{\Delta^4 B}{1.2.3.4}:$$

& ainsi de suite. Ou, ce qui est la même chose,

$$V = \Delta B$$
$$V' - \tfrac{1}{2}\Delta^2 B = \Delta B'$$
$$V'' - \tfrac{1}{2}\Delta^2 B' - \tfrac{1}{6}\Delta^3 B = \Delta B''$$
$$V''' - \tfrac{1}{2}\Delta^2 B'' - \tfrac{1}{6}\Delta^3 B' - \tfrac{1}{24}\Delta^4 B = \Delta B''':$$

& ainsi de suite.

4°. ΔB, $\Delta B'$, $\Delta B''$, $\Delta B'''$ sont ce que deviennent dB, dB', dB'', dB''', en substituant les différences finies aux différences infiniment petites : j'aurai donc

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dp}q + \frac{dB}{dq}r + \frac{dB}{dr}s, \text{ \&c.} \\ & + \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s', \text{ \&c.} \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}$$

& faisant

$$\Delta V = Np + Pq + Qr + Rs + St, \text{ \&c.}$$

j'aurai $\frac{dB}{dx} = P - dQ + d^2R - d^3S$, &c.

$$\frac{dB}{dp} = Q - dR + d^3S, \text{ \&c.}$$

& de même pour chaque variable, en supposant toujours que, pour les dx, dp, dq, &c. dy, dp', dq', &c. on a mis p, q, r, &c. p', q', &c.

$$5^\circ.\ \Delta^2 B = p\,\Delta\frac{dB}{dx} + q\,\Delta\frac{dB}{dp} + r\,\Delta\frac{dB}{dq} + s\,\Delta\frac{dB}{dr}, \text{ \&c.}$$
$$+ p'\Delta\frac{dB}{dy} + q'\Delta\frac{dB}{dp'} + r'\Delta\frac{dB}{dq'} + s'\Delta\frac{dB}{dr'}, \text{ \&c.}$$
$$+ \text{ \&c.}$$

J'aurai donc $\Delta^2 B$ en valeurs dépendantes de V. Il en sera de même de $\Delta^3 B$, $\Delta^4 B$, &c. & j'aurai pareillement $\Delta^2 B'$, &c. en V & V', $\Delta^2 B''$, &c. en V, V', V''; & ainsi de suite.

6°. Cela bien entendu, je substituerai ces valeurs dans les équations du N°. 3, & j'aurai des fonctions données, qui devront être des formes ΔB, $\Delta B'$, $\Delta B''$, $\Delta B'''$, &c. dB, dB', dB'', dB''', &c. après les substitutions : & par conséquent les équations qu'on trouve pour ce cas par le Problême III de la Section I de la premiere Partie, devront avoir lieu après les mêmes substitutions.

Répétant les mêmes opérations pour la suite $Y + Y' + Y'' + Y'''$, &c. $= \int \overline{P + P' + P'' + P'''}$, &c. & ainsi de suite, on aura les équations de condition cherchées.

REMARQUE.

On aura donc pour chaque variable une suite d'équations identiques : joignant toutes ces équations par le signe +, on aura alors autant d'équations en suites, que de variables ; & ces équations donneront le même résultat que toutes les précédentes, parcequ'elles doivent être identiques, & qu'elles ne peuvent l'être, que chacun de leurs termes ne soit nul : enfin ces équations de condition, présentées sous cette forme, seront les mêmes qu'on auroit eues pour que

$$V+V'+V''+V''', \&c. = \Delta. B+B'+B''+B''', \&c. \quad + P+P'+P''+P''', \&c.$$
$$-\frac{\Delta^2 B}{1.2}-\frac{\Delta^2 B'}{1.2}-\frac{\Delta^2 B''}{1.2}, \&c.$$
$$-\frac{\Delta^3 B}{1.2.3}-\frac{\Delta^3 B'}{1.2.3}, \&c. \quad + \ldots\ldots \&c.$$
$$-\frac{\Delta^4 B}{1.2.3.4}, \&c.$$
$$+Y+Y'+Y''+Y''', \&c.$$
$$-\frac{\Delta^2 P}{1.2}-\frac{\Delta^2 P'}{1.2}-\frac{\Delta^2 P''}{1.2}, \&c.$$
$$-\frac{\Delta^3 P}{1.2.3}-\frac{\Delta^3 P'}{1.2.3}, \&c.$$
$$-\frac{\Delta^4 P}{1.2.3.4}, \&c.$$
$$+ \ldots\ldots \&c.$$

ou, ce qui revient au même,

$$V+V'+V''+V''', \&c. = \delta. B+B'+B''+B''', \&c.$$
$$+Y+Y'+Y''+Y''', \&c. \quad + P+P'+P''+P''', \&c.$$
$$+ \ldots\ldots \&c. \quad + \ldots\ldots \&c.$$

ce qui donne une maniere de trouver les mêmes formules des équations de condition, plus abrégée que celle du Problême.

PROBLEME II.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction aux différences finies d'un ordre quelconque soit la différentielle exacte d'une fonction sans différences.

SOLUTION. Il est clair que cette fonction doit être de la forme $V+V'+V''+V'''$, &c. Ainsi, quoique la méthode donne des formules pour tout autre cas, je me bornerai à considérer celui-ci.

Soit donc $V + V' + V'' + V'''$, &c. qui doit être la différentielle exacte d'une fonction sans différences : j'aurai d'abord les équations du Problême précédent : j'aurai de plus, pour que $B + B' + B'' + B'''$, &c. soit une différentielle exacte, des équations semblables, qui ne contiendront que des différences partielles de B, B', B'', B''', &c. & j'ai les valeurs en quantités dépendantes de V, V', V'', V''', &c. J'aurai par conséquent des équations en B, B', B'', B''', &c. pour que l'intégrale de $B + B' + B'' + B'''$, &c. soit une différentielle exacte : je les aurai donc en V, V', V'', V''', &c. Continuant donc ainsi jusqu'à ce que je sois parvenu à une équation sans différences, j'aurai les équations de condition cherchées.

Remarque.

Si l'équation $V + V' + V'' + V'''$, &c. est une différentielle exacte d'une fonction sans différences, il suit des principes de l'Art. II, que je l'aurai en prenant l'intégrale de V; en y supposant les différences infiniment petites, ce que je réduis aux quadratures par la Remarque II, page 21. Mais si je ne cherche que l'intégrale d'un ordre inférieur d'une telle fonction, j'aurai aisément, par le Problême I, ΔB, $\Delta B'$, $\Delta B''$, $\Delta B'''$, &c. & pour avoir B, B', B'', B''', &c. je n'aurai plus besoin que d'intégrations ordinaires, que, par la même Remarque, je réduis aux quadratures.

PROBLEME

PROBLEME III.

TROUVER les équations de condition qui doivent avoir lieu pour que l'équation $V + V' + V'' + V'''$, &c. $= 0$ ait pour intégrale une équation sans différences.

1°. Je suppose que, multipliant $V + V' + V'' + V'''$, &c. par $A + A' + A'' + A'''$, &c. A, A', A'', A''', &c. étant des fonctions de même ordre que V, V', V'', V''', &c. ou d'un ordre inférieur, le produit devienne une différentielle exacte; ce qui, par le Problême II, me donne des équations de condition qui devront être identiques, & auxquelles je satisferai toujours en faisant

$$A + A' + A'' + A''', \&c. = \frac{\delta^n \kappa}{V + V' + V'' + V''', \&c.};$$

n étant l'exposant de l'ordre de l'équation, & κ une fonction quelconque.

2°. Mettant les équations de condition sous la forme de la Remarque qui suit le Problême I, il est clair que ces équations de condition ne contiendront que des fonctions de $V + V' + V'' + V'''$, &c. & de $A + A' + A'' + A'''$, &c. toujours multipliées les unes par les autres: mais lorsque la proposée est possible, $\delta^n \kappa$ doit être nul en même-tems que $V + V' + V'' + V'''$, &c. (Problêmes V, VI, VII, premiere Part.). Donc supposant nuls les termes multipliés par $V + V' + V'' + V'''$, &c. le reste de l'équation identique sera nul par lui-même, ou en même-tems que $V + V' + V'' + V'''$, &c. $= 0$.

3°. Substituant ensuite dans toutes ces équations, pour $A + A' + A'' + A'''$, &c. & ses différences partielles, leur valeur identique, tirée de l'équation $A + A' + A'' + A'''$, &c. $= \frac{\delta^n K}{V + V' + V'' + V''', \&c.}$, il ne me restera plus d'inconnues que des différences partielles de K.

4°. K étant une fonction finie, il est aisé de voir que ses différences partielles ne seront prises que par rapport aux différentes variables. Ainsi les équations de condition seront des équations données entre K & les variables de l'espece de celles que je traiterai dans la Section suivante. Je pourrai, à l'aide de différenciations réitérées aux différences infiniment petites, éliminer K & ses différences partielles; & alors j'aurai des équations de condition de la nature de celles dont je parlerai ci-dessous, qui seront toujours en suites, & qui devront être identiques, ou compatibles avec la proposée, pour qu'elle soit possible: & il ne sera plus question que de les vérifier. C. Q. F. T.

REMARQUE I.

Si j'avois à intégrer une équation

$$\begin{aligned} &V + V' + V'' + V''', \&c. = 0 \\ &+ Y + Y' + Y'' + Y''', \&c. \\ &+ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \&c. \end{aligned}$$

il est clair que n'ayant non plus dans les équations de condition, mises sous la forme indiquée ci-dessus, que des fonctions de la proposée, ou du facteur que je supposerois la rendre la différentielle exacte d'une fonction sans différences, on pourroit la traiter de même, & qu'il n'y auroit aucune difficulté de plus.

REMARQUE II.

LA solution sera complette, lorsque les équations trouvées par le Problême seront identiques, ou n'auront pas besoin, pour être compatibles avec la proposée, qu'une équation d'un ordre inférieur les résolve en même-tems.

REMARQUE III.

APPLIQUANT aux différences finies les principes expliqués dans la Remarque IV, page 16, j'observe que, si

$$\begin{aligned} &V + V' + V'' + V''', \text{ \&c.} \\ &+ Y + Y' + Y'' + Y''', \text{ \&c.} \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

est une différentielle exacte, la fonction

$$\begin{aligned} &\partial V + \partial V' + \partial V'' + \partial V''', \text{ \&c.} \\ &+ \partial Y + \partial Y' + \partial Y'' + \partial Y''', \text{ \&c.} \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

(la caractéristique ∂ désignant une différence infiniment petite quelconque) en sera une aussi, étant rapportée à la caractéristique δ; & intégrant par parties, j'aurai la formule

$$\begin{aligned} &A + A' + A'' + A''', \text{ \&c. } \partial x \\ &+ B + B' + B'' + B''', \text{ \&c. } \partial y \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

qui devra être nulle par elle-même : j'aurai donc nécessairement les équations identiques

$$A + A' + A'' + A''', \&c. = 0,$$
$$B + B' + B'' + B''', \&c. = 0,$$

& ainsi de suite : & ces équations de condition seront les mêmes que celles que me donne pour chaque variable la Remarque de la page 78. Si donc on veut maintenant que

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} V + V' + V'' + V''', \&c. \\ Y + Y' + Y'' + Y''', \&c. \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

Σ désignant l'intégrale prise par rapport aux différences finies, soit un *maximum*, j'aurai de même

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \partial V + \partial V' + \partial V'' + \partial V''', \&c. \\ \partial Y + \partial Y' + \partial Y'' + \partial Y''', \&c. \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right\} = 0,$$

&

$$A + A' + A'' + A''', \&c. = 0$$
$$B + B' + B'' + B''', \&c. = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

équations qui doivent avoir lieu entre les variables ; lorsque la formule proposée sera un *maximum* ou un *minimum* ; & il faudra que le nombre de ces équations diminue d'une unité, pour que la question soit possible.

Il suit de ceci & de l'Article II, que, s'il n'y a aucune supposition particuliere, on a pour la fonction aux différences finies les mêmes équations que pour la fonction aux différences infiniment petites qui y répond.

Ce que j'ai dit (Remarque IV, page 33) étant vrai aussi ici, j'aurai les équations entre les variables, pour que la fonction Z, déterminée par une équation aux différences finies, soit un *maximum* ou un *minimum*, à l'aide des équations de condition que donne le Problême III pour l'équation entre Z & les variables, & de cette équation même : & les observations générales qu'on trouve dans cette même Remarque peuvent également s'appliquer ici.

Comme les équations de condition que donne le Problême peuvent être difficiles à traiter, je remarque 1°. que, si l'équation aux différences infiniment petites qui répond à la proposée est possible, je n'ai qu'à l'intégrer par la méthode de la seconde Section de la premiere Partie, & substituer pour les différences partielles de x, les valeurs que donne cette intégrale : 2°. que, si elle n'est pas possible, je n'ai qu'à prendre les équations sans différences que ce cas donne pour le *maximnm*, & que j'aurai par la même Section, & que ces équations la rendant intégrable, lorsque le Problême est possible, ce cas se réduit alors au précédent : de façon que le nombre total de ces équations, y compris la proposée, doit se réduire à un nombre égal à celui des variables.

SECONDE SECTION.

Essai sur les équations différentielles qui contiennent des différences partielles.

Les équations différentielles dont je me propose de traiter ici, sont celles dans lesquelles, outre les différences dx, dy, dz des variables x, y, z, se trouvent aussi des différences partielles $\frac{dz}{dx}dx$, $\frac{dz}{dy}dy$, &c. d'une des variables z; ensorte que, soit $z = Z$, Z étant une fonction de x, y, j'aurai une équation formée de deux des équations $dz = dZ$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dZ}{dx}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dZ}{dy};$$

car deux quelconques donnent nécessairement la troisieme : & ceci étant vrai en général pour un ordre quelconque, il me restera toujours à intégrer une équation entre x, y, z, dx, dy, dz, $\frac{dz}{dx}$, ddx, ddy, ddz, $d\frac{ddz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$,&c. En effet, toutes les autres formules qui paroîtroient s'y trouver, peuvent en être chassées. Pour m'assurer d'abord si une telle équation a une intégrale, je remarque que, soit la proposée $V = 0$, je pourrai supposer un facteur A, tel que $AV = dB$, B étant une fonction différentielle ordinaire d'un ordre de différences moindre d'une unité, & que la proposée aura une intégrale de l'ordre inférieur, toutes les fois que B pourra être supposée nulle en même-tems que V. Mais $\frac{dz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$, &c. peuvent être regardées comme des fonctions de x, y. Les traitant donc comme telles, j'aurai, par la premiere Section de la premiere Partie, des équations de condition qui contiendront de ces différences partielles : elles devront être identiques, ou avoir lieu en même-tems que $V = 0$; & il n'est plus question que de les vérifier.

Soit, pour donner un exemple de la méthode que je propose ici, l'équation $\frac{dz}{dx} = e\frac{dz}{dy}$:
elle devient . . . . $dz = \frac{edz}{dy}dx + \frac{dz}{dy}dy$:
ce qui me donne l'équation de condition

$$\frac{eddz}{dy^2} = \frac{ddz}{dxdy}, \text{ ou } \frac{d\frac{edz}{dy}}{dy} = \frac{d\frac{dz}{dx}}{dy},$$

équation qui devient identique, lorsque, pour $\frac{edz}{dy}$, je substitue sa valeur $\frac{dz}{dx}$ prise de la proposée : d'où il suit que celle-ci admet une solution complette.

M'étant assuré par cette méthode, qu'une équation proposée a une intégrale, il me reste à la trouver. Je ferai usage pour cela de la méthode que j'ai exposée dans la seconde Section de la premiere Partie : mais je n'entrerai dans quelque détail pour l'espece d'équations que je considere, que sur le nombre & la nature des fonctions que peut renfermer l'intégrale de la proposée : ce point étant le plus important, & celui sur lequel ces équations different le plus des équations ordinaires.

Pour cela, ſoit 1°. une équation algébrique entre les variables x, y, z, leurs différences entieres ou partielles, & deux fonctions r, s, formées comme dans l'Art. I, page 38 & ſuivantes. Il eſt clair qu'à l'aide de la propoſée & des deux équations différentielles que j'en tire, je pourrai éliminer r & s.

Soit 2°. une équation algébrique entre les mêmes variables, & $r' = \text{l}.\, a^m b^n c^p + F\varphi x, y, z$, F déſignant une fonction quelconque de φ, fonction de x, y, z. J'aurai, en différenciant, deux équations ſans r, dont l'une contiendra $\frac{d.F\varphi x,y,z}{d.\varphi x,y,z} d\varphi x, y, z$; l'autre $\frac{d.F\varphi x,y,z}{d.\varphi x,y,z} . \frac{d.\varphi x,y,z}{dx} dx$. Donc ſi $d.\varphi x, y, z$ & $\frac{d.\varphi x,y,z}{dx} dx$ ſont tous deux algébriques, ou ne contiennent que des fonctions tranſcendantes qui leur ſoient facteurs communs, on éliminera $\frac{d.F\varphi x,y,z}{d.\varphi x,y,z}$ à l'aide de ces équations, & il ne reſtera plus qu'une équation algébrique, dont la propoſée ſera l'intégrale, & dont l'arbitraire ſera la fonction F. Mais cela arrive lorſque $\varphi x, y, z$ eſt une fonction algébrique de x, y, z, que je déſigne par $\Phi x, y, z$; ou que

$$\varphi x, y, z = \text{l}.\, a^m b^n c^p, \text{ \&c.} + \Phi x, y, z,$$

$$\text{ou } e^{\Phi x, y, z}\, \Phi' x, y, z,$$

$$\text{ou } e^{q\,\text{l}.\, a^m b^n c^p, \text{ \&c.}}\, \Phi x, y, z.$$

Donc, &c.

Soit 3°. une équation algébrique entre les mêmes variables s' & $r' = \text{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F\varphi x, y, z$: j'aurai j'aurai, en différenciant, deux équations qui contiendront $\frac{d.F\varphi x, y, z}{d.\varphi x, y, z}$, & r'. Donc, éliminant $\frac{d.F\varphi x, y, z}{d.\varphi x, y, z}$, il me restera une équation algébrique entre les variables, & r': & (N°. précédent) j'éliminerai r' par une nouvelle différenciation.

Soit 4°. une équation algébrique entre les mêmes variables, & $r = \text{l}.a^m b^n c^p + F\varphi x, y, z + F'\varphi' x, y, z$: j'aurai, en différenciant, deux équations, à l'aide desquelles je ferai disparoître une des fonctions F ou F'; & une seconde différenciation fera disparoître l'autre.

Soit 5°. enfin une équation algébrique, toujours des mêmes variables, & de

$$s' = \text{l}.a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'} + F'\varphi' x, y, z, r'.$$

$$\& \cdot \cdot \; r = \text{l}.a^m b^n c^p + F\varphi x, y, z.$$

Une différenciation éliminera s': & comme $\frac{d.F\varphi x, y, z}{d.\varphi x, y, z}$ se trouvera alors dans l'équation avec r', il faudra une seconde différenciation pour faire évanouir cette fonction, & une troisieme pour faire évanouir r'.

Si l'on avoit eu une équation qui contînt t', s', r', il auroit fallu une différenciation pour faire évanouir t'; deux, par le N°. précédent, pour faire évanouir s'; & comme après on a r', dr', d^2r', d^3r', il en faudroit quatre pour faire évanouir r'.

Ces principes, qu'il suffit d'exposer, étant bien entendus, on trouvera sans difficulté les différentes formes d'intégrales qui répondent à une équation différentielle.

Ainsi, 1°. une équation différentielle du premier ordre aura pour intégrale *une équation algébrique* entre x, y, z, r & s: *ou une équation algébrique* entre x, y, z, & $t' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p + F \varphi x, y, z$, l'arbitraire étant la fonction F.

2°. Une équation du second ordre aura pour intégrale *une équation algébrique* entre x, y, z, r, s &c. ces fonctions transcendantes étant au nombre de quatre : *ou une équation algébrique* entre x, y, z, r, s, & $t' = \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''}$, &c. $+ F'' \varphi'' x, y, z, r, s$; & une des arbitraires sera la fonction F'' : *ou une équation algébrique* entre x, y, z, $r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F \varphi x, y, z$ & s'; & la fonction F sera une des arbitraires : *ou enfin une équation algébrique* entre x, y, z, &c. & $r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F \varphi x, y, z + F' \varphi x, y, z$, les fonctions F & F' étant les arbitraires.

3°. Une équation du troisieme ordre aura pour intégrale *une équation algébrique* entre x, y, z, r, s, &c. ces fonctions étant au nombre de six : *ou une équation algébrique* entre x, y, z, r, s, &c. ces fonctions étant au nombre de quatre, & $t' = \mathrm{l}.\, a''''^{m''''} b''''^{n''''} c''''^{p''''}$, &c. $+ F'''' \varphi'''' x, y, z, r, s$, &c. *ou une équation algébrique* entre x, y, z, r, s, $t' = \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''}$, &c. $+ F'' \varphi'' x, y, z, r, s$, & une fonction logarithmique de x, y, z, r, s, t' : *ou une équation algébrique* entre x, y, z, r, s, $t' = \mathrm{l}.\, a''^{m''} b''^{n''} c''^{p''}$, &c. $+ F'' \varphi'' x, y, z, r, s$

$+ F''' \varphi''' x, y, z, r, s$: *ou une équation algébrique* entre $x, y, z, r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F \varphi x, y, z, s'$ & t' : *ou une équation algébrique* entre $x, y, z, r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F \varphi x, y, z + F' \varphi' x, y, z$, & s': *ou une équation algébrique* entre $x, y, z, r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F \varphi x, y, z$, & $s' = \mathrm{l}.\, a'^{m'} b'^{n'} c'^{p'}$, &c. $+ F' \varphi' x, y, z, r'$: *ou enfin une équation algébrique* entre x, y, z, & $r' = \mathrm{l}.\, a^m b^n c^p$, &c. $+ F \varphi x, y, z + F' \varphi' x, y, z + F'' \varphi'' x, y, z$.

Et il en ſera de même pour les ordres plus élevés, les fonctions F, F', F'', &c. étant toujours arbitraires: & il y aura de plus autant de conſtantes d'arbitraires, que de fonctions r, s, &c. & le terme conſtant de φ le ſera toujours.

Si, au lieu d'une équation entre trois variables x, y, z, j'avois à intégrer une équation entre quatre variables x, y, z, u, chaque différenciation me donneroit trois équations, au lieu de deux que j'avois lorſque l'équation étoit à deux variables : d'où l'on voit qu'il me ſeroit facile de déterminer pour ce cas les différentes fonctions, ſoit tranſcendantes, ſoit arbitraires, qui peuvent entrer dans l'intégrale.

Si j'avois auſſi à intégrer une équation dans laquelle, outre les différences partielles de z en x, y, &c. il ſe trouveroit des différences partielles de x en z, y, &c. de y en z, x, &c. il eſt clair que le raiſonnement que j'ai fait (page 76) au ſujet des équations de condition, s'y appliqueroit, & que chaque différenciation donneroit un nombre d'équations égal au quarré du nombre des variables diminué de l'unité ; & qu'ainsi on parviendroit, à l'aide des mêmes principes que ci-dessus, à déterminer les formes que peut avoir l'intégrale.

Je ne m'étendrai pas davantage sur ces équations, quelqu'intéressante qu'en puisse être la théorie ; & je me contenterai de joindre ici une remarque sur la nature des fonctions arbitraires F, F', &c. Supposant donc l'équation à trois variables : je dis que, différencier une fonction, n'est autre chose qu'y substituer, pour x, y, z ; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; & retrancher la fonction elle-même de ce qu'elle devient par cette substitution. Donnant donc cette signification à la caractéristique d, je remarque que si, au lieu de supposer que F devienne $F + dF$, je suppose que F devienne $F' + dF'$, F' étant une autre fonction, c'est-à-dire, ce que devient F pour cette valeur des variables, j'aurai, au lieu de dF, $F' - F + dF$; & qu'ainsi je ne pourrai faire disparoître F, que $F' - F$ ne soit nul ; ce qui ne demande point que la fonction F' soit la même que la fonction F, mais seulement qu'elle lui soit égale pour cette valeur particuliere des variables. Si l'équation est supposée du second ordre, j'aurai $d^2 F = F'' - 2F' + F + 2dF'' - 2dF' + d^2 F''$: & pour que la fonction F puisse être éliminée, il faut seulement que, pour la valeur particuliere des variables, $F'' + 2F' + F$ & $dF'' - dF'$ soient nuls : & ainsi de suite. Si donc on a une courbe dont l'abciſſe ſoit ce qu'on voudra, & l'ordonnée F; elle devra, pour le premier ordre, être telle qu'il n'y ait pas de ſaut dans ſon cours, c'eſt-à-dire, être continue ou formée de parties de courbes continues qui ſe coupent : il faudra pour le ſecond, que les différentes courbes dont elle ſeroit compoſée, ſe touchent; qu'elles ſe touchent à un point d'inflexion pour le troiſieme, à un point de ſerpentement pour le quatrieme, & ainſi de ſuite, mais en ſuppoſant toujours que l'intégrale, pour cet ordre, ſoit auſſi compliquée qu'elle peut l'être; car il eſt clair que ſi l'équation pouvoit avoir une intégrale algébrique ſans F d'un ordre inférieur, les conditions doivent être pour cet ordre. Et ſi on avoit une équation à quatre variables du premier ordre, par exemple, & qu'elle ne contînt qu'une fonction arbitraire F, il arriveroit qu'il n'y auroit aucune condition, & que les F ne ſeroient aſſujettis à aucune loi.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

LA méthode d'intégrer, que je donne dans cet Ouvrage, joint au mérite d'être directe, celui de la plus grande généralité qui en eſt une ſuite. Mais le défaut d'exiger beaucoup de calcul & de travail, auſſi longtems ſur-tout qu'il n'y aura pas de tables d'intégrales toutes dreſſées, fait que juſques-là elle ne peut guere être d'uſage, que pour les cas qui ont échappé aux méthodes particulieres. La conſtruction de ces tables, poussées même assez loin, exigeroit plus de connoissances que celle des tables des logarithmes, mais moins de travail; seroit incomparablement plus utile, & feroit infiniment plus d'honneur à ceux qui exécuteroient ce projet, dont les difficultés ne sont pas purement méchaniques, comme l'étoient celles de la construction des tables de logarithmes.

FIN.

APPROBATION.

J'AI lu, par l'ordre de Monſeigneur le Vice-Chancelier, & approuvé un Ouvrage qui a pour titre, *Du Calcul Intégral.* A Paris, ce 30 Mai 1765.

LA CHAPELLE,
Membre de la Soc. Roy. de Londres.

ERRATA.

Page 3, ligne 3, les, *lisez* ces.
Page 17, ligne 7, N, mettez N'.
Page 23, ligne 6, dA, mettez dV.
Page 30, ligne 5, $p'dP$, mettez $p'dP'$.
Idem, ligne 8, pdP', mettez $p'dP'$.
Page 31, ligne 12, dA, mettez dA'.
Page 33, ligne 25, *REMARQUE VI*, lis. *REM. IV.*
Page 40, ligne 25, $e^{\Phi' x, y, \&c.}$, mettez $e^{\Phi' x, y, \&c.} r$.
Page 64, ligne 13, $ifa^{\int -3}$, mettez $if^2 a^{\int -3}$.
Page 73, ligne 13, supposition, *lisez* substitution.