Einleitung in die höhere Geometrie, II.

Vorlesung,

gehalten im Sommersemester 1893

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von Fr. Schilling.

GÖTTINGEN 1893.

Autographie und Druck von Baumann & Cie., Cassel.

Vorwort.

Aeussere Gründe haben mich verhindert, die Vorlesung II über höhere Geometrie so zu führen, wie dies geplant war. Konnte ich dieselbe doch erst nach Schluss der Pfingstferien beginnen, während ich andererseits genötigt war, bereits am 1. August zu schliessen. So habe ich die in Betracht kommenden Entwicklungen vielfach nur in ganz allgemeinen Umrissen skizzieren können. Immerhin wird die charakteristische Tendenz hervortreten, die ganze Theorie der Transformationsgruppen zu umfassen, d. h. continuirliche und discontinuirliche Transformationsgruppen nebeneinander zu betrachten. Wenn meine Darstellung in dieser Hinsicht anregend wirken kann, und also überhaupt einigermassen beitragen kann, die zwischen den verschiedenen Disciplinen der Mathematik errichteten trennenden Schranken zurückzuschieben, so wird trotz aller Unvollkommenheiten, die sie im Einzelnen bietet, ihr Hauptzweck erreicht sein.

Göttingen, Anfang August 1893.

F. Klein.

Inhalt.

[Mo. 29. V. 1893]

Bereits in der vorigen Vorlesung war eine vollständige Disposition vorgesehen; ihr gemäß wird es die Aufgabe dieser Fortsetzung der „Höheren Geometrie" sein, den beiden ersten Teilen, der allgemeinen Coordinatenbestimmung und der Lehre von den Transformationen, die im letzten Semester erledigt wurden, jetzt als dritten Teil,

die Gruppentheorie

zur Seite zu stellen.

In der Einleitung wollen wir zunächst den Gruppenbegriff betrachten und seine Bedeutung für die verschiedenen Teile der Mathematik darlegen. Was ist überhaupt eine Gruppe? Es handelt sich da, allgemein gesprochen, um den Inbegriff gewisser

Operationen, die wir mit S, T, U u. s. w. bezeichnen mögen. Die Zusammenstellung zweier Buchstaben, sowie ST, soll bedeuten, daß man die betreffenden Operationen nacheinander anwenden soll. Nun pflegen die einen Mathematiker die Verbindung ST so zu lesen, daß man erst S und dann T, die anderen, daß man erst T und dann S anwenden soll. Natürlich kommt dies ja nur auf eine Verabredung hinaus, die man nach Belieben treffen kann. Wenn man aber das Objekt A, auf welches die beiden Operationen angewandt werden sollen, hinzufügt, dann gilt aus logischen Gründen jedenfalls die folgende Forderung: Liest man die Zusammensetzung ST von links nach rechts, dann müssen wir bei Anwendung der Operation auf irgend ein Objekt A die Operation hinter das Objekt schreiben. (Also AS, AST etc.) Wenn wir aber das Symbol ST von rechts nach links lesen, so werden wir die symbolische Bezeichnung der Operationen vor das Objekt setzen. (SA, STA.)

Wir wollen für unsere späteren Betrachtungen uns für die erste der genannten Schreibweisen erklären und demgemäß stets die Zusammensetzung mehrerer Operationen von links nach rechts lesen. Doch dies nur beiläufig. Nun entsteht vor allem die wichtige Frage, wann wir von einem Inbegriff von Operationen sagen, daß derselbe eine Gruppe bilde.

Hierzu ist notwendig, dass mit irgend zwei vorkommenden Operationen S u. T immer auch deren Zusammensetzung ST u. TS in der Gesammtheit enthalten ist, d.h. in Worten: Wir nennen einen Inbegriff von Operationen eine Gruppe, wenn mit irgend 2 Operationen immer auch deren Combination in dem gegebenen Inbegriff vorkommt, so dass letzterer gleichsam ein sich abgeschlossenes Ganze bildet. Hierin ist von selbst als Folgerung eingeschlossen, dass mit jeder Operation S auch ihre beliebige Wiederholung S^2, S^3, S^n in der Gruppe vorhanden ist.

Wir werden nun sogleich nach Beispielen fragen, um den abstrakt erklärten Begriff der Gruppe von Operationen in concreter Weise näher zu erläutern. Das älteste Auftreten derselben bezieht sich auf Buchstabenvertauschungen oder Substitutionen im engeren Sinne. Gegeben sind die Buchstaben $a, b, c \ldots n$; es handelt sich um sämmtliche, bestimmt definirte Vertauschungen, welche dieselben miteinander zulassen. Dieser Gruppenbegriff ist bereits im vorigen Jahrhundert (um 1770) gleichzeitig von Lagrange und Vandermonde angewandt worden, und seit jener Zeit spielt derselbe in der Theorie der algebraischen Gleichungen eine grosse Rolle. Man braucht in dieser Hinsicht nur an den Namen Galois zu erinnern.

Ja, man hat die Gruppentheorie infolge dessen geradezu als einen Anhang der Algebra betrachtet, doch gewiss mit Unrecht. Denn der Gruppenbegriff greift weit hierüber hinaus in fast allen anderen mathematischen Disciplinen Platz.

Demgemäss haben wir weiterhin die Transformationsgruppen zu nennen, die in der Analysis u. der Zahlentheorie immerfort zur Geltung kommen. Z. B. bildet die Gesammtheit aller linearen Substitutionen von beliebig vielen Variabeln mit nicht verschwindender Determinante, wie jene allgemein in der Formel $x_i' = \sum_1^n a_{ik} x_k$, $|a_{ik}| \gtrless 0$ gegeben wird, eine Gruppe, indem irgend zwei derartige Substitutionen miteinander combinirt stets wieder eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante geben. Aus dem Inbegriff aller jener linearen Substitutionen können wir nun gern andere Gesammtheiten herausgreifen, die für sich wieder eine Gruppe bilden; z. B. alle Substitutionen mit ganzzahligen Coefficienten a_{ik}. Während die Gruppe der allgemeinen Substitutionen in der Analysis (der linearen Invariantentheorie) zur Anwendung kommt, gebraucht man die Gruppe der ganzzahligen Substitutionen vornehmlich in der Zahlentheorie.

Was wir soeben im analytischen Gewande

vorgeführt haben, läßt sich nun unmittelbar auch geometrisch auffassen. Dementsprechend tritt uns drittens der <u>geometrische Gruppenbegriff</u> entgegen als die Gesammtheit <u>geometrischer Operationen</u>, die beliebig miteinander combinirt, stets wieder eine Operation derselben Gesammtheit geben. Ein einfaches Beispiel dieser Art, welches wir sogleich noch wiederholt heranziehen wollen, bietet <u>der Inbegriff der ∞^6 Bewegungen</u> des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes dar; als Objekt derselben gilt dann eben der Raum selbst. Ebensowohl könnten wir auch die <u>∞^{15} Collineationen</u> oder anderes dergleichen heranziehen, die gleichfalls eine Gruppe in dem erklärten Sinne bilden. War auch von Alters her es stets die Grundlage geometrischer Betrachtungen, daß die Bewegungen eine 6fach ∞ Gruppe bilden, so ist es insbesondere das Verdienst von <u>C. Jordan</u> in den Jahren 1860–70 diesen Umstand als solchen dargelegt und überhaupt die umfassende Bedeutung des Gruppenbegriffs weit über die nächste Anwendung in der Algebra hinaus nachdrücklich hervorgehoben zu haben. (In seinem Buche von 1870 („Substitutions et équations algébriques") hat C. Jordan freilich jenen Begriff ausschließlich nach seiner Bedeutung für die Algebra behandelt; man hat daher dasselbe, so wichtig es sonst ist, keineswegs als ein Lehrbuch der allgemeinen Gruppentheorie zu betrachten.

Wir wollen uns nun weiter über gewisse begriffliche Festsetzungen verständigen. Zunächst bietet sich in dem Betracht der Unterschied zwischen einer *unendlichen und einer endlichen Gruppe* dar. Während die letztere nun eine endliche Anzahl einzelner Operationen umfasst, gehören zu ersterer eben ∞ viele verschiedene Operationen.*) Nun ergeben sich *für endliche Gruppen* leicht einige Sätze, die wir, so einfach sie sind, doch entwickeln wollen. Wie in jeder Gruppe, so sind auch in einer endlichen Gruppe mit der einzelnen Operation S die beliebigen Wiederholungen S^2 S^3 S^ν derselben enthalten.

Da nun aber nur eine endliche Anzahl verschiedener Operationen vorhanden sein soll, so muss notwendig in der genannten Aufeinanderfolge einmal $S^{n+\alpha} = S^\alpha$ sein, d.h. $S^n = 1$, woselbst wir mit 1 im Sinne unserer Schreibweise die identische Operation bezeichnen. Aus $S^n = 1$ folgt dann sofort $S^{n-1} = S^{-1}$ d.h. die inverse Operation. Die hierin liegenden Sätze sprechen sich wie folgt aus:

Unter den Operationen einer endlichen

---

* Wir gebrauchen die Worte „endlich" und „unendlich" hier aber in ihrem unmittelbarsten Sinne; später werden wir in dieser Hinsicht eine andere Verabredung treffen.

Gruppe befindet sich immer die Identität. Zu jeder Operation S gehört ferner ein kleinster Index n der Art, daß $S^n = 1$ ist. Diese Zahl n nennt man die Periode von S. Endlich: Mit S zusammen tritt immer auch die inverse Operation S^{-1} auf.

Diese Sätze brauchen bei einer unendlichen Gruppe keineswegs zu gelten, so daß sie ausschließlich sich als Folgerungen der Endlichkeit einer Gruppe darstellen. Z. B. enthält das folgende Beispiel einer unendlichen Gruppe

$S)\; x' = x + 1$

$S^2)\; x' = x + 2$

$S^3)\; x' = x + 3$ u. so fort, allgemein $S^n = x' + n$ (für $n = 1, 2, 3 \ldots$) weder die Identität noch die inverse Operation. Wollen wir Letzteres bei einer ∞ Gruppe haben, so müßen wir es ausdrücklich in die Voraussetzungen aufnehmen. Dieses wollen wir nun in Zukunft stets thun und zwar aus folgendem Grunde: Wir werden doch die Operationen nicht an und für sich in abstracto betrachten, sondern sie auf bestimmte Objecte anwenden. Ist nun $A' = (A)\,S$, so nennen wir A' aequivalent zu A in Bezug auf die Gruppe. Für unsere späteren Betrachtungen ist es aber wünschenswert den

Begriff der Aequivalenz stets so zu gebrauchen, dass er eine gegenseitige Beziehung zweier Objekte ausdrückt. Es folgt aber aus der letzten Gleichung $\Lambda = (\Lambda') S^{-1}$. Soll also Λ aequivalent zu Λ' in Bezug auf unsere Gruppe sein, so muss letztere notwendig auch die Operation S^{-1} enthalten. Und dies ist der Grund zu unserer obigen Festsetzung. Mit S und S^{-1} ist in der That ja auch die Identität als die Aufeinanderfolge beider in der Gruppe enthalten.

Haben wir so den allgemeinen Gruppenbegriff näher umgrenzt, so gilt es noch eine Reihe von Hülfsbegriffen einzuführen, die wir stets an dem Beispiel der 6 fach ∞ Bewegungsgruppe näher erläutern wollen, um uns sogleich an geometrische Gruppen zu gewöhnen.

Es bietet sich zunächst der Begriff der Untergruppe dar; unter derselben versteht man, wie in der Bezeichnung selbst liegt, einen Teil der Gesammtgruppe, der für sich bereits Gruppeneigenschaft hat. In der Gesammtheit der Bewegungsgruppe bilden z. B. die ∞^3 Drehungen um einen festen Punkt, die ∞^2 Schraubungen um eine feste Gerade (deren jede sich aus einer Drehung um dieselbe und einer Verschiebung längs derselben zusammensetzen läßt) jedesmal eine Untergruppe. Dasselbe gilt von der Gesammtheit aller Drehungen, die einen regulären Körper mit sich selbst zur Deckung bringen; so geht bekanntlich das Ikosaëder durch eine Gruppe von 60 Drehungen in sich selbst über. Wir entnehmen diesen Beispielen das allgemeine Prinzip: Alle Bewegungen, welche einer einzelnen starren Figur (wie den einzelnen Punkt, die einzelne Gerade, das Ikosaëder) mit sich selbst zur Deckung bringen, bilden eo ipso eine Untergruppe der Gesammtheit.

Als besonderer Fall der Untergruppe sind die cyclischen Untergruppen zu nennen; eine solche entsteht als Gesammtheit der Wiederholungen einer und derselben Operation $S, S^2, S^3 \ldots S^\nu \ldots$ Das einfachste Beispiel einer cyclischen Untergruppe bietet im Falle der Bewegung des Raumes diejenige dar, die durch Wiederholung der Drehung eine festen Geraden durch einen aliquoten Teil von 2π statt findet. Natürlich ist diese Untergruppe eine endliche Gruppe; dem entgegen führt die Wiederholung der Operation, die in einer Drehung und Verschiebung in Bezug auf dieselbe Axe, d.h. in einer Schraubung um dieselbe besteht, jedenfalls zu einer <u>∞ cyclischen Untergruppe</u>. Nun wollen wir in unserem Beispiel noch einen Schritt weitergehen, und eine unendlich kleine infinitesimale Drehung oder ∞ kleine Schraubung um eine Axe zu Grunde legen. (Das Wort unendlich klein im Sinne der gewöhnlichen Infinitesimalrechnung verstanden.) Ihre Wiederholung führt zu einer <u>continuirlichen Gruppe</u>, im Gegensatz zu einer discontinuirlichen Gruppe, wie sie die vorigen Beispiele geben, doch haben wir auch jetzt wieder eine cyclische Gruppe.

Haben wir die Definition der cyclischen Gruppe an die Wiederholung <u>einer</u> Operation angeknüpft, so liegt es nahe letztere als die <u>erzeugende Operation</u> zu benennen. <u>Dementsprechend kann man bei einer allgemeinen Gruppe nach einer kleinsten Anzahl erzeugender Operationen fragen, d.h. nach einer kleinsten Anzahl von Operationen S, T u.s.w., aus welcher alle anderen durch Wiederholung und Combination in der Form $S^\alpha T^\beta S^{\alpha'} T^{\beta'} \ldots$ (wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \ldots$ ganze Zahlen sind) hervorgehen.</u> Dieselben werden wir dann gleichfalls als <u>erzeugende Operationen</u> der Gruppe bezeichnen. Es giebt natürlich Gruppen, bei denen die Anzahl der erzeugenden Operationen nicht auch endlich, sondern unendlich groß ist.

Jetzt kommen wir zu dem Begriff der gleichberechtigten Operationen. Um gleich ein Beispiel anzuführen, so werden wir gewiße Drehungen um 2 beliebige gerade Linien, etwa um die z-Axe und um eine andere Gerade g, aber von gleicher Winkelgröße, etwa beidemal durch den Winkel von 30°, als gleichberechtigte Operationen bezeichnen. Doch welches ist das allgemeine gruppentheoretische Princip, das diesem Begriffe zu Grunde liegt?

[Di. 30. V 93.]

Wir nennen beide Drehungen unseres Beispieles gleichberechtigt, weil die geraden Linien, welche die Axen der ersteren bilden, einander im Sinne der elementaren Geometrie congruent sind, d.h. durch eine Bewegung zur Deckung gebracht werden können. Nennen wir die Drehung um die z-Axe T, diejenige um die Gerade g T', so können wir deren Zusammenhang T u. T' leicht wie folgt aufstellen.

Wir wählen irgendeine Bewegung S aus, welche die z-Axe in die Gerade g überführt – es giebt natürlich sehr verschiedene solche Bewegungen. Nun bilden wir uns $S^{-1}T$, d.h. wir denken mit dem Gesammtraum R zunächst die inverse Bewegung ausgeführt, welche die Gerade g in die z-Axe übergehen läßt, und dann um die z-Axe die Drehung T ausgeführt. Darauf möge die direkte Bewegung S folgen, welche die z-Axe wieder in die Gerade g zurückführt. Wir behaupten, daß die Zusammensetzung $S^{-1}TS = T'$ ist d.h. dasselbe darstellt, als hätten wir allein um die Gerade g die betreffende Drehung T' ausgeführt. Durch die Operation S^{-1} möge aus unserem ursprünglichem Raum R der Raum R_1 entstanden sein, d.h. $RS^{-1} = R_1$; aus letzterem sei durch die Drehung um die z-Axe der Raum R_2 geworden, d.h. $R_1 T = R_2$. Unterwerfen wir dann die beiden nur durch die Drehung um die z-Axe durch den Winkel von $30°$ verschiedenen Räume R_1 u. R_2 der Operation S, so geht aus dem ersten natürlich wieder unser ursprünglicher Raum R hervor, aus letzterem ein neuer Raum, der sich von R nur um dieselbe Drehung von

30° um die Gerade g unterscheidet, wie unmittelbar evident ist; dies aber besagt, daß $R_2 S = R S^{-1} T S = R T'$ ist, was zu zeigen war. Kurz gesagt: Die Operation $S^{-1} T S$ ist gleich T', weil 2 Räume, welche längs der z-Axe einen Winkel von 30° einschliessen, durch die Operation S gerade in 2 solche Räume verwandelt werden, welche längs der geraden Linie g einen Winkel von 30° einschliessen. Auf Grund dieses Beispiel's definiren wir den Begriff gleichberechtigte Operationen nunmehr geradezu wie folgt: 2 Operationen T, T' einer Gruppe heissen innerhalb der Gruppe gleichberechtigt, wenn es eine Operation S innerhalb der Gruppe giebt, so daß $S^{-1} T S = T'$ ist. Man sagt in einem solchen Falle auch wohl, T' geht aus T durch Transformation vermöge S hervor. Ein particulärer Fall dieser Relation ist es, wenn $T' = T$ ist, d. h. wenn $S^{-1} T S = T$ oder $T S = S T$ ist. Alsdann nennt man die beiden Operationen T und S miteinander vertauschbar. Natürlich tritt letztere Eigenschaft nur in ganz besonderen Fällen ein.

Die obige Definition, die wir für einzelne Operationen T ausgesprochen haben, können wir nun sofort auf Untergruppen übertragen. Betrachten wir in der Gleichung $S^{-1}TS = T'$ T als gemeinsames Symbol für alle Operationen einer Untergruppe, während S eine einzelne beliebige Operation der Gesammtgruppe bezeichnet, dann wird behauptet, daſs auch die Gesammtheit der Operationen T' eine Untergruppe bildet. Und diese beiden Untergruppen T und T' nennt man dann miteinander gleichberechtigt. Zum Beweise unserer Behauptung ist folgendes zu zeigen: Es seien T_1' T_2' T_3' die den Operationen T_1 T_2 T_3 entsprechenden Operationen, so daſs $S^{-1}T_1S = T_1'$, $S^{-1}T_2S = T_2'$ und $S^{-1}T_3S = T_3'$ ist. Auſserdem sei T_3 als durch Aufeinanderfolge der Operationen T_1 und T_2 entstanden vorausgesetzt, d.h. $T_1T_2 = T_3$. Es ist nachzuweisen, daſs auch T_3' durch Aufeinanderfolge der Operationen T_1' u. T_2' entstanden gedacht werden kann, d.h. daſs $T_1'\,T_2' = T_3'$ ist. Wir setzen in die linke Seite dieser letzten Gleichung für T_1' u. T_2' ihre Werte ein und erhalten

$$S^{-1}T_1\underbrace{SS^{-1}}_{1}T_2S = S^{-1}\underbrace{T_1T_2}_{T_3}S = S^{-1}T_3S = T_3',$$

was zu beweisen war.

Um jedoch nicht nur diese abstrakten Symbole vor Augen zu haben, wollen wir wieder ein anschauliches Beispiel aus der Gesammtheit der ∞^6 Bewegungen auswählen. <u>So stellen uns stets sämmtliche Bewegungen, welche congruente geometrische Gebilde beziehungsweise ungeändert lassen, immer gleichberechtigte Untergruppen vor.</u>

Als specielle Beispiele stellen wir die sämtlichen Drehungen um einen festen Punkt P mit den sämmtlichen Drehungen um einen anderen festen Punkt O zusammen, ferner die Drehungen oder die Verschiebungen oder, allgemein die Schraubenbewegungen, welche jedesmal eine von 2 geraden Linien ungeändert lassen, endlich die 12 Drehungen, welche je eines zweier regulärer Tetraeder mit sich selbst zur Deckung bringen. Allemal sind die einander gegenübergestellten Untergruppen gleichberechtigt. Es ist das genau so nachzuweisen, wie oben die Gleichberechtigung zweier Drehungen gleicher Amplitude um zwei verschiedene Gerade.

Endlich haben wir noch als wichtigsten Begriff den der <u>ausgezeichneten Untergruppe oder der invarianten Untergruppe</u> zu erklären.

<u>Eine gegebene Untergruppe heißt innerhalb</u>

der Hauptgruppe ausgezeichnet, wenn sie nur mit mit sich selbst gleichberechtigt ist, so dass sie gewisser-massen nicht ihresgleichen hat, sondern einzig in ihrer Art dasteht. *Zugleich heisst eine solche Untergruppe eine „invariante", weil dieselbe bei Transformation durch ein beliebiges S ungeändert bleibt.* Denn gemäss der obigen Erklärung ist im Falle einer ausgezeich-neten Untergruppe stets $S^{-1} T_\alpha S = T_\beta$, woselbst T_α und T_β beide der Untergruppe als Operation an-gehören müssen.

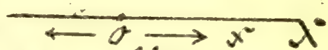
Ein Beispiel einer ausgezeichneten Unter-gruppe giebt innerhalb der Gesammtheit der 6fach ∞ vielen Bewegungen die 3fache Gruppe der Translationen (Parallelverschiebungen), wie sie durch die folgende Substitutionsformeln für belie-bige Werte $\alpha\beta\gamma$ gegeben werden: $x' = x + \alpha$, $y' = y + \beta$, $z' = z + \gamma$. Sei nämlich T irgend eine Translation des Raumes. Dieselbe wollen wir durch eine be-liebige Drehung S transformiren, d.h. wir haben die zusammengesetzte Operation $S^{-1} T S$ zu bilden, die aus der Aufeinanderfolge einer Drehung, der Parallelverschiebung und der inversen Drehung besteht. Dass wir solcherweise wieder nur eine Parallelverschiebung als Resultat bekommen, ist von selbst klar; um diese Thatsache aber gerade handelte es sich. – Wenn irgend eine Gruppe vorgelegt ist, so ist stets eine Hauptfrage, ob in ihr ausgezeichnete Untergruppen enthalten sind. Ist dies der Fall, so nennt man die Hauptgruppe eine zusammengesetzte, andernfalls eine einfache Gruppe. So ist die 6 fach ∞ Gruppe der Bewegungen eine zusammengesetzte Gruppe, weil eben eine ausgezeichnete Untergruppe, wie wir gesehen haben, darin enthalten ist.

Uebrigens wollen wir noch eine kleine Bemerkung hier hinzufügen. Je zwei Operationen in der Gruppe der Translationen sind offenbar mit einander vertauschbar, was übrigens mit dem Begriff der ausgezeichneten Untergruppe gar nichts zu schaffen hat. Eine aus lauter vertauschbaren Operationen bestehende Gruppe pflegt man eine Abel'sche Gruppe zu nennen.

Wir gehen nun zu dem zweiten Abschnitt dieser Einleitung über, indem wir die besonderen Gruppen etwas näher betrachten wollen, die unserer Vorlesung zu Grunde liegen werden. In ihr wird es sich stets um geometrische Gruppen handeln, d.h. um Gruppen, die sich auf ein continuirliches

Substrat beziehen. Ihre Operationen sind Raumtransformationen oder Transformationen einer continuirlichen Mannigfaltigkeit.

Gerade in Rücksicht hierauf haben wir vorhin das Beispiel der 6 fach ∞ Bewegungsgruppe zur Veranschaulichung der allgemeinen Betrachtungen ausgewählt. Nun kann natürlich die Gruppe selbst noch immer eine continuirliche oder discontinuirliche sein.

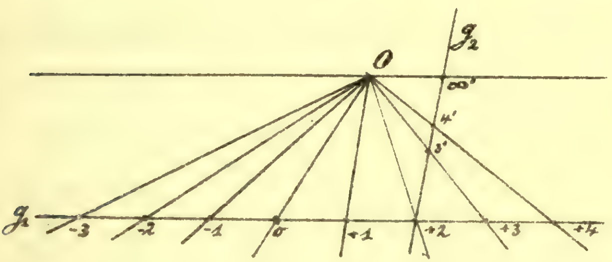
Wir müssen nun vorerst allgemein von dem Begriff des „Continuums" sprechen. Derselbe ist in neuerer Zeit wiederholt von Weierstraß, Dedekind und insbesondere Georg Cantor in eingehenden Untersuchungen behandelt worden. In den Arbeiten des letzteren vor allem sind gewisse Begriffsbestimmungen gegeben worden, die heutzutage jeder Mathematiker kennen muss. Es seien genannt die Abhandlungen von G. Cantor in den Annalen 15, 17, 20, 21, die zusammen gefasst auch in Acta B II. veröffentlicht sind. Dieselben tragen den gemeinsamen Titel: Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Wir wollen uns hier auf einige wenige Bemerkungen beschränken: Wir legen zu Grunde das eindimensionale Continuum, wie es durch die Punkte der geraden Linie vorgestellt wird, die wir uns als x Axe gegeben denken. Jedem  *rationalen wie irrationalen Werte der Abscisse gehört ein Punkt des Continuums zu und umgekehrt.* Dem gegenüber stellen wir eine zweite lineare Mannigfaltigkeit, die wir aus der continuirlichen Punktreihe erhalten, wenn wir sämmtliche irrationalen Punkte aus derselben fortnehmen, d.h. sämmtliche Punkte mit irrationaler Abscisse. Für die Gesammtheit der übrig bleibenden rationalen Punkte hat Cantor den Begriff „*überall dicht*" eingeführt, der besagt, dass in jedem noch so kleinen Intervall doch immer noch ∞ viele solcher Punkte liegen. Aber die letzte Mannigfaltigkeit, sagt Cantor, ist *nicht perfect* (nicht vollendet).

Um diese Bezeichnung zu verstehen, müssen wir den Begriff des Grenzpunktes einer Punktreihe heranziehen. Wir haben uns zu denken, dass eine gewisse Aufeinanderfolge unendlich vieler Punkte vorliegt, die immer mehr auf einen bestimmten, eben den Grenzpunkt, convergiren. Die Mannigfaltigkeit der rationalen Punkte wird nun nicht perfect genannt, weil sie *nicht die Eigenschaft hat*, wie

<u>das Continuum, daß ein jeder ihrer Grenzpunkte ihr selbst angehört.</u> Betrachten wir z. B. $\sqrt{2} = 1,414$ als Grenzwert der ∞ Reihe von rationalen Punkten $x = 1$; $x = 1,4$; $x = 1,41$; $x = 1,414$ u. s. w., so gehören zwar alle diese rationalen Punkte der genannten Mannigfaltigkeit an, aber nicht mehr der irrationale Grenzpunkt $\sqrt{2}$ selbst. Ebenso könnten wir jeden anderen unendlichen Decimalbruch heranziehen, der eine irrationale Zahl vorstellt. <u>Wir resumiren: Eine Punctmenge, welche auf der geraden Linie (oder auf einem Theile derselben) überall dicht liegt, braucht keineswegs perfect zu sein.</u>

Nehmen wir auf der geraden Linie eine andere bemerkenswerte Mannigfaltigkeit, nämlich die Reihe der ganzzahligen Punkte ..... $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ .... Diese liegen offenbar nicht überall dicht, doch haben sie eine andere merkwürdige Eigenschaft. Um diese deutlich zu erkennen, projiciren wir die genannte Punktreihe von einem außerhalb der Gerade g gelegenen Punkte O aus durch die „ganzzahligen" Strahlen eines Strahlbüschels; dem Punkte ∞ unserer Geraden wird dabei der Parallelstrahl zu letzterem zugeordnet sein.

Wir denken nochmals das Strahlbüschel durch eine beliebige zweite, nicht zur ersten geraden parallele Gerade g_2 geschnitten. Richten wir dann unser Augenmerk auf die in der Nähe des



dem Parallelstrahl zugehörigen Schnittpunktes ∞' auf g_2 gelegenen weiteren Schnittpunkte, so bemerken wir; dass dieselben sich in unendlicher Zahl beiderseits an den Punkt ∞' herandrängen. Eine solche Stelle ∞' nennt man dem entsprechend eine Häufungsstelle der Mannigfaltigkeit, (ist die Punktmannigfaltigkeit überall dicht, so ist natürlich jeder Punkt eine Häufungsstelle.)

<u>Die ganzzahligen Punkte einer geraden Linie geben uns ein Beispiel dafür, dass eine unendliche Punktmannigfaltigkeit keineswegs überall dicht zu sein braucht, aber sicher eine Häufungsstelle besitzt.</u>

Die Häufungsstelle selbst braucht übrigens der Punktmannigfaltigkeit nicht anzugehören, aber sie kann ihr angehören. Im ersten Falle wird die Punktmannigfaltigkeit wieder nicht perfect, im letztem Falle perfect heissen.

[Mi. 31 V. 93.]

Wir kehren nun zu der Einteilung der Gruppen in continuirliche Gruppen, discontinuirliche Gruppen und gemischte Gruppen (oder complexe Gruppen nach Lie) zurück. Eine continuirliche Gruppe enthält eine continuirliche Schaar von Operationen; eine solche wird beispielsweise durch die ∞^6 Bewegungen des Raumes vorgestellt. Eine discontinuirliche Gruppe dagegen besteht aus lauter getrennten Operationen; hier sind als Beispiel etwa die Drehungen der regulären Körper zu nennen.

Eine gemischte Gruppe endlich ist aus einer getrennten Zahl continuirlicher Schaaren von Operationen zusammengesetzt. Wollen wir auch für diese ein Beispiel anführen, so brauchen wir nur zu den ∞^6 Bewegungen des Raumes diejenigen Operationen, welche eine geometrische Figur in ihr Spiegelbild überführen, hinzuzunehmen. Letztere wollen wir kurz als die Operationen 2. Art bezeichnen, dieselben bilden gleichfalls eine 6 fach unendliche Mannigfaltigkeit, welche von der Mannigfaltigkeit der Bewegungen völlig getrennt ist.

Dass in der That die Bewegungen und Spiegelungen des Raumes zusammen eine Gruppe bilden, folgt einfach daraus, dass 2 Bewegungen oder 2 Spiegelungen nacheinander ausgeführt allemal wieder eine Bewegung oder eine Bewegung und eine Operation 2ter Art nacheinander angewandt allemal eine Operation 2ter Art ergeben.

Die gemischten Gruppen sind als die allgemeinen, als diejenigen, welche die continuirlichen und die discontinuirlichen Gruppen umfassen, schliesslich die wichtigsten; anderseits sind die Beispiele gewisser Gruppen mit denen wir zunächst zu thun haben, so einfach, dass eine besondere Theorie für sie nicht nötig ist. Wir werden uns daher vornehmlich mit jenen anderen beiden Gruppenarten beschäftigen.

Doch wollen wir sogleich der grösseren Klarheit wegen noch einige Beispiele den vorstehenden Bemerkungen anreihen. Wir gehen aus von einer beliebigen Drehung in der Ebene durch den Winkel φ um den Punkt O, dieselbe wollen wir mit S be-

bezeichnen. Dann betrachten wir die cyclische Gruppe, die aus dem

Wiederholungen dieser Drehung S besteht, wie sie symbolisch in ihren einzelnen Operationen durch ..... $S^{-2}, S^{-1}, 1, S, S^2, \dots S^n \dots$ gegeben wird. Wir haben dann die zwei Fälle zu unterscheiden, daß φ mit π commensurabel, etwa gleich $\frac{2m\pi}{n}$, wo m und n zu einander teilerfremd seien, ist, oder daß dies nicht der Fall ist.

Im ersteren Falle wird dann offenbar unsere Gruppe nur aus der endlichen Zahl der Drehungen durch die Winkel $0, \frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}, 3\frac{\pi}{n} \dots, \frac{n-1}{n} 2\pi$ bestehen. Ist aber der Winkel φ incommensurabel mit π, so werden wir niemals zu einer vollen Umdrehung gelangen, so oft wir auch die betreffende Drehung nacheinander ausführen mögen. Doch bekommen wir in diesem Falle aus einem Anfangsstrahl beliebig viele neue Strahlen, die überall dicht das Strahlbüschel in O ausfüllen. Unsere Gruppe enthält demnach unendlich viele voneinander verschiedene Operationen, unter diesen insbesondere auch ∞ kleine Operationen, d.h. Drehungen durch einen Winkel, welcher kleiner als jeder beliebig vorgegebene Winkel ist.

Gleichwohl ist diese Gruppe nicht continuirlich, sondern discontinuirlich. Denn die aequivalenten Strahlen liegen im Büschel zwar überall dicht, aber bilden keine perfecte Mannigfaltigkeit. Sie verhalten sich ganz analog, wie die rationalen Punkte der Zahlenreihe.

Wir müssen daher wohl auseinanderhalten, <u>daß nicht nur die continuirlichen, sondern auch die discontinuirlichen Gruppen unter Umständen mit ∞ kleinen Operationen zu thun haben</u>; dort haben wir ersteren falls den Begriff des ∞ Kleinen im gewöhnlichen Sinne der Differentialrechnung, im letzten Falle im arithmetischen Sinne zu verstehen. Hier ragt also die Zahlentheorie in die Geometrie hinein; Mathematiker, die ausschließlich geometrisch denken, wie Lie, werden dadurch veranlaßt, solche Vorkommnisse überhaupt bei Seite zu laßen. Daß auch sprungweise ein Uebergang um ∞ Kleines stattfinden kann, ist etwas, was den gewöhnlichen geometrischen Continuitätsvorstellungen völlig fern liegt. Wir müßen das jedoch mitnehmen, werden aber der Deutlichkeit halber mit Poincaré zwischen eigentlich discontinuirlichen und uneigentlich discontinuirlichen Gruppen unterscheiden; jene enthalten keine ∞ kleinen Operationen, die dagegen letzteren angehören.

Ein Beispiel der eigentlich discontinuirlichen Gruppen geben die Substitutionen $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, woselbst $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ ganze Zahlen mit der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ bezeichnen. Man überzeugt sich leicht, dass natürlich keine unendlich kleinen Substitutionen in dieser Gruppe enthalten sein können. Denn wenn wir verlangen, dass für jedes x das x' nur um ∞ wenig verschieden sein soll, so komme ich durchaus darauf, dass es sich um die identische Operation handelt.*) Unsere obige Gruppe ist aber einmal eine unendliche, denn es giebt doch ∞ viele Zusammenstellungen ganzer Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta$, deren Determinante gleich 1 ist. Anderseits sind mit $x = 0$ alle Punkte $\frac{\beta}{\delta}$ aequivalent, wo β u. δ ganze Zahlen sind, für welche sich die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ auflösen läßt; dies aber besagt nach den Grundsätzen der Zahlentheorie nicht mehr und nicht weniger, als dass β u. δ relativ prim sind. Es kommt dies darauf hinaus, was sehr merkwürdig ist, dass mit $x = 0$ alle rationalen Punkte der x-Axe aequivalent sind. Wir haben hier daher ein Beispiel, dass

*) In der That sollte $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ eine von der Identität verschiedene unendlich kleine Substitution sein, so müssen α und δ einander ungefähr gleiche, sehr grosse Zahlen, β u. γ sehr kleine Zahlen sein, was aber der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ widerspricht.

bei einer eigentlich discontinuirlichen Gruppe die aequivalenten Punkte trotzdem überall dicht liegen. Uebrigens gilt das in unserem Beispiele nur für die reellen Werte von x, für die complexen Werte von x ist es ganz anders, wie in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen ausführlich nachgewiesen wird.

Als drittes Beispiel wählen wir die ganz einfache Gruppe, die aus den Operationen $x' = x + n$ besteht, indem wir n alle ganzen Zahlen durchlaufen lassen. Dem Punkt $x = 0$ entsprechen hier alle Punkte mit ganzzahliger Abscisse, die dann an dem Unendlichkeitspunkt sich ∞ zusammendrängen. Unser Beispiel zeigt, dass bei einer unendlichen eigentlich discontinuirlichen Gruppe die aequivalenten Punkte zwar nicht etwa überall dicht zu liegen brauchen, aber dann jedenfalls eine Häufungsstelle haben. —

Jetzt wollen wir dazu übergehen zu betrachten, wie diese verschiedenen geometrischen Gruppen in den verschiedenen Gebieten der Mathematik zur Geltung kommen: Hier handelt es sich gewöhnlich um Geometrie im engeren Sinne. Und für sie eine Antwort auf die genannte Frage zu geben, ist gerade der Grundgedanke meines Erlanger Programms, der sich dahin präcisieren läßt zu untersuchen, wie die geometrischen Gruppen dazu dienen einen systematischen Ueberblick über die verschiedenen Behandlungsweisen der Geometrie zu geben. Schon im letzten Wintersemester haben wir ja beständig diesen Gedanken berührt, jetzt gilt es noch eine zusammenfassende Darstellung dieser Verhältnisse zu geben.

Zunächst werden wir uns zu fragen haben, worin eigentlich für den hier in Betracht kommenden Standpunkt das Wesen der Geometrie beruht. Da haben wir vor allem den Gegensatz zwischen Geometrie und Topographie zu constatiren. Man kann denselben wohl nicht besser characterisieren, als wenn ich einen Satz anführe, der von dem verstorbenen Prof. Höppnitz in Königsberg gesprächsweise angeführt zu werden pflegte, wenn es sich darum handelte, den hier in Betracht kommenden Character der Geometrie hervorzukehren.

Höppnitz sagte: In jedem Dreieck liegt der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises von dem des umbeschriebenen Kreises 3 mm. nach Osten entfernt; er habe sich davon durch Versuche überzeugt.

Natürlich mag ja in einem einzelnen Falle bei bestimmter Lage des vorliegenden Dreiecks jener Satz als topographische Wahrheit seine Richtigkeit haben; jedoch wird bei einem geometrischen Satz gewiss nicht allgemein von der Lage eines Dreiecks gegen die Himmelsrichtungen oder von bestimmten Entfernungen irgend welcher Punkte die Rede sein können. Geometrie unterscheidet sich eben dadurch von Topographie, dass nur solche Eigenschaften des Raumes geometrisch heissen, welche bei einer gewissen Gruppe von Operationen ungeändert bleiben. Welches ist nun jene Gruppe? Natürlich gehören zu ihr die ∞^6 Bewegungen des Raumes, doch auch die ∞^6 Operationen 2ter Art, die wir soeben schon nannten. Denn 2 Figuren, die einander spiegelbildlich gleich sind, kann ich nur insofern überhaupt von einander unterscheiden, als ich sie zu einer dritten Figur, etwa den menschlichen Körper in Beziehung setze. (vergl. Ampères Regel betr. die Ablenkung der Magnetnadel durch den electrischen Strom).

Man kann wohl sagen, dass zwei symetrische Figuren nicht zur Deckung zu bringen sind, doch welche von beiden man im besonderen Falle meint, lässt sich in abstracto absolut nicht angeben. Zu jenen Operationen kommen nun weiter noch die Aehnlichkeitstransformationen; ihnen gemäss sind zwei geometrische Figuren völlig aequivalent, die einander ähnlich sind; es gibt in der Geometrie keine absolute Grösse*). Aus diesem Grunde kann auch kein bestimmter Abstand, wie 3 mm. im obigen Bendosatze, nicht vorkommen. Insgesammt besteht daher unsere geometrische Gruppe aus ∞^7 Transformationen, die wir die Hauptgruppe nennen wollen. Dieselbe ist durch das Hinzutreten der Operationen 2ter Art zur <u>gemischten</u> Gruppe geworden. Unser Resultat ist dann dieses, dass <u>die Geometrie nicht ein Studium der Mannigfaltigkeit der Punkte $x\ y\ z$ unseres Raumes schlechtweg ist, sondern ein Studium der zu der Hauptgruppe der räumlichen Transformationen gehörenden Invariantentheorie</u>.

Wie gehen wir nun von dem Inbegriff der elementaren Geometrie zur <u>projectiven Geometrie</u> über? In ihr unterscheidet man, wie wir wissen, die geometrischen Eigenschaften der Figuren als reine projective oder aber als metrische, und letz-

---

*) nämlich in der Euklidischen Geometrie, im Gegensatz zu der Nicht Euklidische

tere fasst man als projective Beziehungen zu dem sogenannten Kugelkreise auf. Nun handelt es sich um die Frage, von der ich bei meinem Erlanger Programm ausging: Was ist eigentlich der innere Kern dieser Auffassung, worin liegt seine Berechtigung begründet? In gewissen mathematischen Kreisen hatte man sich damals und ist auch noch heute so sehr an die projective Auffassung gewöhnt, dass man dieselbe geradezu als die einzig "Wissenschaftliche" hinstellt. Jeder elementare Beweis, jede metrische Betrachtung sei nur dann zufriedenstellend, wenn in ihnen der Kugelkreis, Doppelverhältnisse u. dergl. ausschliesslich zur Anwendung kommen. Doch ist dieses gewiss nicht richtig gedacht, wie gerade das Erlanger Programm nachzuweisen sich zur Aufgabe stellt.

In der projectiven Geometrie liegt an Stelle der Hauptgruppe die umfassendere Gruppe aller Collineationen zu Grunde, d.h. ∞^{15} Operationen; deren Invariantentheorie wird dann studirt. Indem wir hierin das Wesen der projectiven Geometrie erkennen, sprechen wir zugleich aus, dass es ∞ viele Arten gibt, die elementare Geometrie zu erweitern, sofern man nämlich statt der 7 fach ∞ Hauptgruppe irgend eine andere Transformationsgruppe adjungiren will, welche die Hauptgruppe umschliesst, und dass alle diese Arten unter sich und mit der elementaren Geometrie selbst als gleichberechtigt zu gelten haben.

[Do. 1 VI 93.]

Die bereits erwähnte Einordnung der metrischen Eigenschaften der Figuren in das System der projectiven Geometrie mit Hülfe des Kugelkreises lässt eine doppelte Auffassung zu. Durch die Festhaltung dieses Gebildes geht ja aus der G_{15}, d. h. der 15 fach ∞ Gruppe der projectiven Geometrie, die G_7 unserer Hauptgruppe, hervor.

Nun kann man entweder zu der letzteren d. h. zur elementaren Geometrie von der projectiven Geometrie herabsteigen, indem man eben nur die Collineationen zu Grunde legt, welche den Kugelkreis festlassen, oder aber man behält die G_{15} bei, fügt jetzt jedoch den Kugelkreis den vorliegenden Figuren hinzu und behandelt dann nicht blos die projectiven Eigenschaften der Figuren an sich, sondern die simultanen Eigenschaften der gegebenen Figuren und des

Kugelkreises.

Das Wesen der Sache ist jedenfalls, dass die Hauptgruppe G_7 in der G_{15} als Untergruppe enthalten ist. Und so oft ein derartiges Vorkommniss vorliegt, bleibt stets eine derartige doppelte Wahl offen, wie man die Geometrie der Untergruppe (die Invariantentheorie der Untergruppe) in Beziehung zu der allgemeinen Geometrie (zur Invariantentheorie der allgemeinen Gruppe) auffassen will.

Nun können wir noch in der projectiven Geometrie selbst eine Abstufung eintreten lassen, je nachdem wir entweder nur reelle Collineationen betrachten oder auch complexe oder imaginäre Collineationen hinzunehmen. Die Mannigfaltigkeit der letzteren ist gerade doppelt so gross, als die der ersten. wir haben es im letzteren Falle eben mit einer G_{30} zu thun, sofern wir die Mannigfaltigkeit einer complexen Variablen eine zweifach unendliche nennen. Wir theilen dementsprechend die projective Geometrie ein in die Invariantentheorie der reellen Collineationen und in eine solche der complexen Collineationen. Um nun von der allgemeinsten projectiven Geometrie bei der auch complexe Collineationen als gleichwertig betrachtet werden, herabzusteigen zu jener, bei der nur reelle Collineationen in Betracht gezogen werden, wird man wieder ein Gebilde einführen, welches die der G_{30} auf die G_{15} reducirt, wenn es festgehalten wird. Als solches bietet sich die Gesammtheit der reellen Pkte dar, wie vorhin bei dem Abstieg zur elementaren Geometrie der Kugelkreis.

Das Entscheidende, wonach wir innerhalb der projectiven Geometrie gliedern, ist, wie Sie sehen, immer die Gruppe. Welche Art von Raumelement wir im übrigen zu Grunde legen, ob den Punkt, die Ebene oder die gerade Linie, macht für den Character der geometrischen Betrachtungen nur einen sekundären Unterschied.

Wir wollen jetzt unsere Gruppe noch so erweitern, dass wir auch die dualistischen Transformationen hinzunehmen. In Punktcoordinaten allein kann man natürlich die dualistische Transformation nicht darstellen, da ja dem einzelnen Punkt eine Ebene d.h. eine 2fach ∞ Mannigfaltigkeit einzelner Punkte zugeordnet ist. Wir müssen entweder den Punkten die Ebenen als neue Raumelemente hinzufügen, oder aber wir führen die geraden Linien als Raumelemente ein. Denn eine gerade Linie geht durch alle genannten Transformationen stets wieder in eine gerade Linie über. In meinem Programm habe ich an dieser Stelle das von Dedekind herrührende Wort „Körper" gebraucht; unter demselben soll jedesmal die Gesammtheit aller Elemente, die vermöge einer vorgelegten Gruppe auseinander hervorgehen, verstanden werden. So wird z. B. die Gesammtheit aller Punkte in Bezug auf die Gruppe der Collineationen einen Körper bilden. Nehmen wir jedoch zu letzteren die dualistischen Transformationen hinzu, so werden die Punkte für sich allein keinen Körper mehr bilden, sondern erst mit der Gesammtheit aller Ebenen, anderseits wird die Gesammtheit aller geraden Linien einen Körper bilden. Das allgemeine Princip ist dann: *Um die Transformationen einer Gruppe analytisch darzustellen, ist die eine Voraussetzung selbstverständlich festzuhalten, dass die Raumelemente, welche man der Coordinatenbestimmung* zu Grunde legen will, den Transformationen der Gruppe gegenüber einen Körper bilden.

Speciell werden nun auch vereinigte Punkte u. Ebenen für die Gesammtheit der linearen u. dualistischen Transformationen einen Körper bilden, d.h. Punkte x und Ebenen u, welche die Bedingung $u_x = 0$ erfüllen; diese Vereinigung von Punkt und Ebene ist aber identisch mit dem Lie'schen Flächenelement, das wir unhomogen durch die Coordinaten $x\,y\,z\,p\,q$ bestimmten. Daher werden wir für unsere erweiterte Gruppe auch diese Flächenelemente als Raumelemente gelten lassen können, was damit stimmt, dass alle Operationen der erweiterten Gruppe Berührungsformationen sind. Soviel zunächst über das Wesen der projectiven Geometrie. —

Wir wollen jetzt den Gedanken der gestrigen Vorlesung wieder aufgreifen, dass die Entwicklung der elementaren Geometrie zur projectiven Geometrie nicht die einzige Erweiterung der ersteren ist, sondern dass letztere noch auf manche andere Weise vorgenommen werden kann. Wir haben in diesem Sinne an Betrachtungen zu erinnern, die gleichfalls bereits im vorigen Semester uns beschäftigt haben. Da war zunächst die conforme Geometrie des Raumes oder die Geometrie der reciproken Radien. Bei ihr handelt es sich um eine G_{10}, die aus der Hauptgruppe G_7 durch Hinzunahme der Inversionen entsteht.

Wir wissen ferner bereits, dass die einfache analytische Darstellung der conformen Geometrie oder ihrer G_{10} sich unter Zugrundelegung homogener pentasphärischer Punkt-Coordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5$ mit der Bedingung $\Omega(x) = 0$ ergibt.

Es handelt sich einfach um diejenigen linearen Substitutionen dieser x, welche die Gleichung $\Omega = 0$ in sich selbst überführen. Das Gebilde, welches durch eine beliebige lineare Gleichung unserer x_i vorgestellt wird, war die Kugel. Aus einer solchen geht durch eine beliebige Substitution der Gruppe stets wieder eine Kugel hervor. Ebenso natürlich geht jeder Punkt wieder in einen Punkt über. D.h. die Gesammtheit der Kugeln wie die Gesammtheit der Punkte bildet gegenüber den Transformationen der Gruppe einen Körper. Dementsprechend können wir die Punkte oder auch die Kugeln als Raumelemente zur Darstellung unserer Gruppe zu Grunde legen. In letzterem Falle würden wir die Kugelcoordinaten u_i einzuführen haben, die in der Kugelgleichung $u_1x_1+u_2x_2+\ldots u_5x_5=0$ als Koëfficienten auftreten, in genau analoger Weise, wie wir sonst Ebenencoordinaten einführen und bei der Gruppe aller Collineationen zu Grunde legen können. In der conformen Geometrie bilden die Ebenen des Raumes keinen Körper, da ja aus einer Ebene im allgemeinen eine Kugel entsteht, wir können daher in der conformen Geometrie auch keine Ebenencoordinaten brauchen. Wir sagen ausdrücklich: Insofern wir die Kugel als Raumelement einführen, erscheint die conforme Geometrie insbesondere als die niedere Kugelgeometrie.

Letzterer reiht sich dann weiterhin die höhere Kugelgeometrie oder die Lie'sche Kugelgeometrie; ihr liegt, wie wir im vorigen Semester lernten, eine Gruppe von ∞^{15} Transformationen zu Grunde. Für sie bilden nun aber die Punkte keinen Körper mehr, indem

z. B. durch eine Paralleltransformation, die durch $x' = x + \mathfrak{C}$ charakterisirt ist, ein Punkt (d. h. eine Nullkugel) in eine eigentliche Kugel über geführt wird. Dagegen bildet einen Körper die Gesammtheit aller Kugeln. Wir können daher unsere Gruppe darstellen, indem wir die Kugeln als Raumelement einführen. Doch auch die Lie'schen Flächenelemente $x\,y\,z\,p\,q$ bilden hier einen Körper. Demnach wird man unsere Gruppe auch in Coordinaten dieser Flächenelemente wiedergeben können, wo dann die Transformationen der Gruppe als besondere Fälle von Berührungstransformationen erscheinen. (Vielleicht liegt es daran, dass die Punkte hier keinen Körper bilden, begründet, dass die höhere Kugelgeometrie bisher so wenig Anklang gefunden hat, so dass eine systematische Bearbeitung der höheren Kugelgeometrie, so wünschenswert dieselbe ist, noch immer aussteht.)

Nun gehen wir noch einen Schritt in der Erweiterung unser Gruppe vorwärts, indem wir die Geometrie aller Punkttransformationen betrachten. Wir haben dann die Hauptgruppe G_7 der elementaren Geometrie zunächst zur G_{15} der projectiven Geometrie, dann zu der weitumfassenden Gruppe aller Punkttransformationen ausgedehnt. (Wenn anders wie hier, was nicht nothwendig wäre, gerade die projective Geometrie als Zwischenstufe gelten lassen wollen.) Die genannte Geometrie erweist sich, wie wir wissen, besonders nützlich beim Studium der Differentialausdrücke (Pfaff'sche Ausdrücke bei ihr kann man sich dann je nachdem noch beschränken blos auf rationale Punkttransformationen d.h. Cremonatransformationen oder auf algebraische Punkttransformationen oder wenigstens auf analytische Punkttransformationen. Wie unsere Hauptgruppe G_7 ∞^7 verschiedene Operationen enthielt, ebenso die G_{15} ∞^{15} Operationen, so umfasst die Gruppe aller Punkttransformationen ∞^∞ Operationen. Hier ist Anlass, die bezügliche Lie'sche Terminologie zu erwähnen. Lie bezeichnet eine Gruppe, die eine endliche Zahl Parameter besitzt, trotzdem ja in Wirklichkeit ∞ viele Operationen vorhanden sind, als eine endliche Gruppe (im Gegensatz zu unserem früheren naiven Sprachgebrauch eine solche Gruppe endlich zu nennen, die nur aus einer endlichen Zahl einzelner Operationen besteht, und spricht von einer ∞ Gruppe erst dann, wenn ∞ viele Parameter vorliegen. In diesem Lie'schen Sinne unterscheidet sich daher die Geometrie aller Punkttransformationen von den vorhin aufgeführten Geometrieen dadurch, daß eine unendliche Gruppe von Punkttransformationen zu Grunde gelegt ist, während es sich früher immer nur um eine endliche Gruppe gehandelt hatte.

Schließlich führen wir noch den letzten Schritt aus und erheben uns zur Geometrie aller Berührungstransformationen. Das ist die allgemeinste Geometrie, die wir im vorigem Semester erreicht haben. Auch ihr liegt natürlich eine ∞ Gruppe zu Grunde, eine Gruppe, welche die vorige wieder umfaßt. Die Punkte des Raumes wie die Ebenen oder Kugeln bilden jedoch jetzt keinen Körper mehr, daher gelingt es nicht, Punktcoordinaten u.s.w. zur Darstellung der Gruppe zu Grunde zu legen, vielmehr müßen wir die Lie'schen Flächenelemente $x\,y\,z\,p\,q$ als Raumelemente wählen. Dann wißen Sie, handelt es sich um die Gesammtheit aller Transformationen der $xyzpq$, die den Differentialausdruck $dz - pdx - qdy$ in ein Multiplum seiner selbst überführen.

Nun wollen wir jedoch auch umgekehrt von der Geometrie aller Berührungstransformationen einmal bis zur gewöhnlichen Geometrie herabsteigen, indem wir uns fragen, welches Gebilde wir jedesmal zu adjungiren haben, um den Standpunkt der nächst niedrigeren Gruppe zu gewinnen. Hat man sich mit der Gruppe aller Berührungsformationen vertraut gemacht, so wird man zunächst das Gebilde der Mannigfaltigkeit aller Raumpunkte adjungieren. Dadurch wird die Gruppe aller Berührungstransformationen im Princip auf die Gruppe aller Punkttransformationen reducirt.

Sodann adjungirt man die Ebenen des Raumes. Hiermit sind allein diejenigen Punkttransformationen zugelassen, welche aus Ebenen wieder Ebenen machen; diese aber bilden die Gruppe der Collineationen, so daß wir den Standpunkt der projectiven Geometrie erreicht haben. Nun wissen wir bereits, wie wir von da durch weitere Adjunction des Kugelkreises zur Hauptgruppe G_7 und damit zur gewöhnlichen Geometrie gelangen.

Zusammenfassend ist unser Resultat: Wollen wir vom Standpunkte der Gruppe aller Berührungstransformationen die elementare Geometrie wiederfinden, so müssen wir die simultanen Eigenschaften betrachten, welche die gerade vorgelegten geometrischen Gebilde gemein haben einerseits mit der Mannigfaltigkeit aller Punkte, dann mit der Mannigfaltigkeit aller Ebenen, endlich mit dem Kugelkreise.

Fr. 2 VI 93.

Die gestrigen Betrachtungen wollen wir jetzt kurz zu Ende führen, indem wir noch darauf hinweisen, dass wir für die Behandlung einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen dieselben Unterschiede wie soeben in R_3 eintreten lassen können. Dabei tritt noch eine principielle Vereinfachung ein.

Für unseren Raum als M_3 ist von vornherein eine Gruppe gegeben, eben die Hauptgruppe G_7. Wir können wohl an ihre Stelle eine weitere Gruppe treten lassen, aber nicht eine engere Gruppe, wenn wir wollen, dass unsere Sätze einen geometrischen Inhalt haben. Wenn wir aber eine beliebig vorgegebene Mannigfaltigkeit der Untersuchung unterwerfen, so haben wir den Vorteil, dass keinerlei Hauptgruppe von Transformationen a priori vorgeschrieben ist, dass wir vielmehr eine ganz beliebige Gruppe adjungieren können und deren Invariantentheorie studieren. Doch wollen wir im Einzelnen hierauf näher nicht mehr eingehen.

Vielmehr wenden wir uns dazu, die Wichtigkeit der geometrischen Transformationsgruppen auch für andere Zweige der Mathematik zu zeigen. Dies wird uns natürlich hier nur an Beispielen auszuführen möglich sein.

Fragen wir zunächst nach der Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen, so ist in erster Linie die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen zu erwähnen. Nehmen wir zunächst ein Beispiel. Man beschäftigt sich z. B. damit auf einer Fläche Haupttangentencurven geodätische Linien u. s. w. zu bestimmen. Da ist es bekannt, dass für eine Rotationsfläche sich die jene Curven definirenden Differentialgleichungen durch einfache Quadratur integriren lassen; das Gleiche ist der Fall wenn die vorliegende Fläche durch gewöhnliche Schraubung einer Curve längs einer geradlinigen Axe entstanden gedacht werden kann. In dem Betracht hat nun Lie bereits 1869 die Aufmerksamkeit auf das hier eigentlich zu Grunde liegende Princip gelenkt. Ausgehend von dem genannten einfachen Beispielen hat Lie nämlich bemerkt, dass sich überhaupt immer Integrationsvereinfachungen einstellen, wenn man bei irgend einem System von Differentialgleichungen eine continuirliche Gruppe von Transformationen kennt, durch welche das Differentialgleichungssystem in sich übergeht. Dies ist im Einzelnen natürlich eine sehr ausgedehnte Theorie, indem die Differentialgleichungen wie die Transformationsgruppen sehr verschieden gewählt werden können. Als Einführung in dieses Gebiet dient am besten das Buch von Lie-Scheffers (1891), Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Dies Werk gibt allerdings nur erst eine Einleitung der Theorie; trotzdem werden in ihm bereits alle die einzelnen Thatsachen, welche von Euler her in den Lehrbüchern bei den Differentialgleichungen unvermittelt hinter einander aufgeführt werden, (wie die Fälle, in denen die Trennung der Variablen auszuführen ist oder solche bei denen die Integration mittels des Euler'schen Multiplicators gelingt u. s. w.) in eine grosse, geordnede Theorie verbunden. – Soviel über Differentialgleichungen. Allgemein werden wir sagen dürfen: Wenn wir Functionen mehrerer Variablen betrachten, so werden wir überhaupt die continuirlichen Transformationsgruppen gebrauchen können, um dieselben in Klassen einzuteilen. So haben wir dann für continuirlich Transformationsgruppen ein weites Gebiet der Anwendung.

Gehen wir nun zu den discontinuirlichen Transformationsgruppen über, so können wir da gleich ein dreifaches Anwendungsgebiet erwähnen die Algebra, die Zahlentheorie und die Functionentheorie im engeren Sinne.

Was die Algebra betrifft, so darf ich mich hier besonders auf meine Vorlesungen über das Icosaëder beziehen, woselbst die endlichen Gruppen linearer Substitution benutzt werden, um für die Theorie der algebraischen Gleichungen Normalformen aufzustellen. Hier haben wir es dann mit endlichen Gruppen linearer Substitutionen im ursprünglichen Sinne zu thun. Weiter ausgeführt sind diese Gedanken in meinen Vorlesungen über Algebra vom W. S. 91/92.

Was nun weiter <u>die Zahlentheorie</u> betrifft, so will ich mich auch hier auf das einfachste Beispiel beschränken, welches ich vor Kurzem in meinen Vorträgen über Zahlentheorie erwähnt habe. Wir haben damals die Gruppe der Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, woselbst $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen mit der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und ω eine complexe Variable sein sollen, benutzt, um die Lehre von der Aequivalenz der binären quadratischen Formen zu untersuchen.

Ueberhaupt wird man in der Theorie der Formen, soweit es sich um zahlentheoretische Fragen handelt, immer diejenigen Gruppen heranziehen, die von den ganzzahligen linearen Substitionen der Veränderlichkeiten gebildet werden.

Nun kämen wir zur <u>Functionentheorie</u>; bei ihrer Besprechung wollen wir uns auf den <u>Fall einer unabhängigen Variablen beschränken.</u>

Hier kommen gleichfalls Gruppen linearer Substitutionen zur Anwendung, und zwar werden diese sich entweder auf die abhängige oder auf die unabhängige Variable beziehen, wie wir sogleich näher sehen wollen. Was zunächst den ersten Punkt betrifft, so sei als einfachstes Beispiel ein Intergral $J = \int R(z)\,dz$, wo R_z eine rationale Function bezeichnet, vorgelegt. Wenn wir nun das Integral um irgend einen der Unendlichkeitspunkte der Function $R(z)$ in der z-Ebene herumführen, so wächst das Integral um eine Constante; es wird der neue Wert des Integrals $J' = J + C_\nu$, d. h. J erleidet eine lineare Substitution. Indem dieses nur für alle singulären Stellen in der z-Ebene gilt, so gewinnen wir, indem wir die Umläufe um die verschiedenen singulären Punkte beliebig wiederholen und combiniren in den Aenderungen, welche das Integral J bei Umlaufung der singulären Stellen erleidet, ein sehr einfaches Beispiel einer discontinuirlichen Gruppe.

Ein weiteres Beispiel wird uns die Theorie der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten bieten:

$$\frac{d^n s}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} s}{dz^{n-1}} + \cdots\cdots + p_n \cdot s = 0$$

Als singuläre Stellen einer solchen Differential-gleichung bezeichnet man ja die Unendlichkeits-stellen der Coefficienten $p_1 p_2 \dots p_0$. Zunächst wissen wir, wird unsere Differentialgleichung uns n verschiedene voneinander linear unabhängige Particularlösungen $s_1 s_2 \dots s_n$ liefern, die in der Nähe des Ausgangspunktes unseres Weges sich in convergierende Potenzreihen entwickeln lassen.

Aus ihnen folgt die allgemeinste Lösung als lineare Verbindung $S = c_1 s_1 + c_2 s_2 \dots + c_n s_n$, woselbst die Coefficienten c willkürlich Parameter dar-stellen. Was geschieht nun mit den Particular-lösungen s_i, wenn wir mit Schleifen um die singulären Punkte herumgehen? Wir erhalten offenbar jedesmal ein neues System linear un-abhängiger Particularlösungen s'_ν $(\nu = 1, 2 \dots n)$ die sich jedoch folgermaßen darstellen lassen müssen

$$\left.\begin{array}{l} s'_1 = \alpha_{11} s_1 + \dots + \alpha_{1n} s_n \\ s'_2 = \alpha_{21} s_1 + \dots + \alpha_{2n} s_n \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ s'_n = \alpha_{n1} s_1 + \dots + \alpha_{nn} s_n \end{array}\right\} \text{wo die } \alpha \text{ irgend welche Constante sind.}$$

Dieses Gleichungssystem liefert dann folgenden Fundamentalsatz in der Theorie der linearen Differentialgleichungen: <u>Wenn x um einen singulären Punkt herum einen geschlossenen Weg beschreibt, so erleiden dabei die n Particularlösungen $s_1 \ldots s_n$, die wir heraus gegriffen haben, eine lineare Substitution. – Die Substitutionen nun welche solcherweise zu den verschiedenen geschlossenen Wegen gehören, die man unterscheiden muss, erzeugen wiederholt und combinirt wieder eine Gruppe</u>, und diese Gruppe von Transformationen, die man geometrisch im Raume der $s_1 s_2 \ldots s_n$ als eine Gruppe von Collineationen denken kann, ist natürlich für das Studium der S. Function ganz fundamental.

In beiden Beispielen wird die betreffende Gruppe discontinuirliche, da sie ja aus einer endlichen Zahl erzeugender Substitutionen sich aufbauen. Doch können sie im einzelnen Falle je nachdem eigentlich oder uneigentlich discontinuirlich sein. Letzteres wird z. B. immer bei einem Integral unseres ersten Beispiels der Fall sein, welches mehr als 2 incommensurable Perioden enthält, einfach nach dem

Satze, daß man aus 3 linear unabhängigen complexen Größen durch lineare Zusammensetzung mit beliebigen ganzzahligen Coefficienten stets ∞ kleine Größen erhalten kann.

Nun gibt es zweitens in der Functionentheorie auch Fälle, in denen die unabhängige Variable z eine Gruppe von Substitutionen erleidet. Beschränken wir uns auf eindeutige Functionen $s = f(z)$, so kommen wir auf sehr bekannte Functionsklassen. Das einfachste Beispiel liefern uns die einfach und doppelt periodischen Functionen, sodann die Modulfunctionen, bei denen die Variable z die ganzzahligen Substitutionen $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ erleidet. Endlich aber überhaupt die automorphen Functionen. Nun ist sofort klar, daß hier bei den eindeutigen Functionen mit linearen Substitutionen von z selbstverständlich nur solche Substitutionsgruppen in Betracht kommen können, welche eigentlich discontinuirlich sind. Denn anderenfalls würden in der Nähe eines jeden Punktes in der z-Ebene ∞ viele aequivalente Punkte liegen, was nicht möglich ist.

Ich habe im Vorstehenden diese kleine Aufzählung derjenigen Gebiete, in denen geometrische Transformationsgruppen zur Anwendung kommen, gegeben, um es von vornherein über jeden Zweifel erhaben sein zu lassen, dass geometrische Gruppen ein wichtiger Gegenstand der Mathematik sind. In Anbetracht dessen verlangen wir hier und verlangten Lie und ich im Jahre 1872 in den Schlussbemerkungen meines Erlanger Programms ausdrücklich eine Gruppentheorie, d.h. eine rationelle Aufzählung und Classification aller geometrischen Gruppen, die es überhaupt gibt.

Jene Forderung hat sich nun seitdem in der Weise entwickelt, dass Lie die continuirlichen Gruppen behandelt hat, während ich mich selbst den discontinuirlichen Gruppen zugewandt habe. Lie hat demgemäss von 1872 beginnend in der That für die continuirlichen Gruppen eine zusammenhängende Theorie geschaffen, die ja zum Teil bereits in den beiden vorliegenden Bänden des Buches von Lie-Engel systematisch bearbeitet ist: Die Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen oder die

Lie'sche Gruppentheorie.

Was ferner meine eigenen Arbeiten über die discontinuirlichen Gruppen angeht, so wissen Sie, dass diese durch Poincaré seit 1881 einen wesentlichen Aufschwung gewonnen haben. Die drei Werke, die Vorlesungen über das Ikosaëder, die Vorlesungen über Modulfunctionen u. die Vorlesungen über automorfphe Functionen, welch letztere Herr Dr Fricke jetzt gerade bearbeitet, sollen den Inbegriff dessen bringen, was wir zur Zeit von discontinuirlichen geometrischen Gruppen wissen. Dabei tritt freilich deren Bedeutung für andere Gebiete der Mathematik sehr in den Vordergrund.

An der genannten Zweiteilung wollen wir auch in gegenwärtiger Vorlesung festhalten. Daher werden wir zuerst eine Theorie der Lie'schen continuirlichen Gruppen geben u. dann die Theorie der discontinuirlichen Gruppen entwickeln, wobei wir hier ausdrücklich den geometrischen Inhalt als solchen zur Geltung zu bringen suchen. Alle die schönen Anwendungen also, über die ich mich andeutungsweise schon äusserte, treten in dieser Vorlesung dann natürlich zurück. – Doch ist diese Zweiteilung nur eine Vorstufe, wir werden zusammenfassend schliesslich eine Theorie der gemischten Gruppen gebrauchen. Es wird überhaupt weiterhin darauf ankommen die beiden Entwickelungsreihen miteinander zu verschmelzen und beispielsweise in der Theorie der Differentialgleichungen eine Auffassung zur Geltung zu bringen, welche gleichzeitig über die Theorie der continuirlichen und discontinuirlichen Gruppen verfügt.

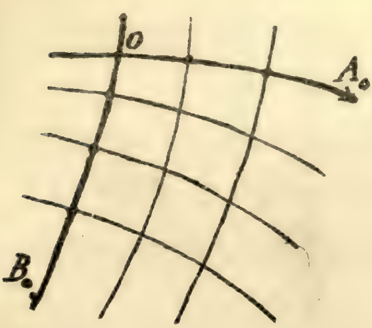
Mo. 5 VI 93.

Wir beginnen heute mit der

Theorie der continuirlichen Gruppen und schicken ihr zunächst einen Excurs über lineare partielle Differentialgleichungen I. Ordnung voraus. Wir werden in ihr insbesondere zu erläutern haben, was man unter einem vollständigen System solcher Differentialgleichungen versteht. Dabei werden wir uns durchaus der geometrischen Darstellung bedienen, indem wir uns an die Ideen von Lie anschliessen, wie sie sich in dem ersten Bande des genannten Buches von Lie-Engel pag. 88 ff. entwickelt finden. Betrachten wir zunächst den Fall dreier Variablen x_1, x_2 x_3, die wir als rechtwinkliche Coordinaten des gewöhnlichen Raumes deuten wollen. Es sei nun <u>die partielle Differentialgleichung</u> $A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ vorgegeben, die wir abkürzend mit $A(f) = 0$ bezeichnen wollen. Was diese Gleichung bedeutet und was es für Functionen $f = Const.$ sind, welche ihr genügen, haben wir bereits im vorigen Semester kennen gelernt. Dem einzelnen Raumpunkt $x_1 x_2 x_3$ wird durch die genannte Gleichung <u>eine Fortschreitungsrichtung</u> $dx_1 : dx_2 : dx_3$ zugeordnet, welch' letztere durch die Proportion $dx_1 : dx_2 : dx_3 = A_1 : A_2 : A_3$ gegeben wird. Und die Differentialgleichung selbst besagt dann dass die Tangentialebene der Fläche $f = C$ eben diese Fortschreitungsrichtung enthalten soll. Man erhält demgemäss folgendermassen die Integration der Differentialgleichung. Man integrire zuerst das System gewöhnlicher Differentialgleichungen $dx_1 : dx_2 : dx_3 = A_1 : A_2 : A_3$, d.h. man suche die Curven auf, welche durch Aneinanderreihung dieser Fortschreitungsrichtungen entstehen. <u>Diese Curven nennt man nach Monge die Characteristiken unserer partiellen Differentialgleichung.</u> Nun ist klar, dass jede Integralfläche der letzteren Gleichung von ∞ vielen Characteristiken übersponnen ist. dies besagt umgekehrt, <u>daß man die allgemeinste Integralfläche erhält, wenn man irgend wie einfach ∞ viele Characteristiken zusammenfaßt</u>. Analytisch stellt sich dieses Ergebniß so dar daß man ausgeht von irgend 2 unabhängigen Lösungen $f_1 = C_1$ und $f_2 = C_2$ der partiellen Differentialgleichung. Jede derselben stellt eine Schaar von Integralflächen dar und je zwei Flächen aus beiden Schaaren combinirt liefern als Schnittcurve eine Characteristik, so daß die Gleichung $f_1 = C_1$ und $f_2 = C_2$ zusammengenommen uns die Gesammtheit der 2fach ∞ vielen Characteristiken ergiebt. <u>Anderseits ist dann die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung eine beliebige Function $F(f_1, f_2)$</u> dieser Particularlösungen $f_1 = C_1$ u. $f_2 = C_2$, d.h. $F(f_1 f_2) = Const.$ ist die allgemeinste Integralfläche. In der That wird dieselbe ja von einfach ∞ vielen Characteristiken gebildet.

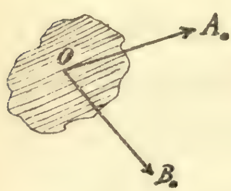
Dies ist ja sehr einfach; wir gehen nun weiter, indem wir <u>zwei Gleichungen $A(f) = 0$ u. $B(f) = 0$ neben einander betrachten</u>, die sich in extenso schreiben: $A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ und $B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ und die Frage untersuchen, wann dieselben eine gemeinsame Lösung $f =$ Const besitzen werden. Wir werden sogleich geometrisch so schliessen können: Soll $f =$ Const eine Integralfläche von $A(f) = 0$ wie von $B(f) = 0$ sein so muss dieselbe von Characteristiken sowohl der ersten wie der zweiten Gleichung übersponnen sein. Und diese Characteristiken müssen also im Raume in einer besonderen Weise gruppirt sein. Von einem einzelnen Punkte O des Raumes mögen die beiden Characteristiken A_0 und B_0 auslaufen, welche entsprechend der Gleichung $A = 0$ oder $B = 0$ angehören. Wir werden dann die durch O laufende Integralfläche auf 2 Weisen erzeugt denken können.

Entweder wir lassen von den einzelnen Punkten der Characteristik A_0 die zugehörigen Characteristiken B auslaufen oder aber von den einzelnen Punkten der Characteristik B die zugehörigen Characteristiken A. Im allgemeinen werden für 2 vorgegebene partielle



Differentialgleichungen die so von der einen oder der anderen Schaar Characteristiken gebildeten Flächen sich keineswegs decken. Dass beide Flächen sich identisch erweisen, ist eben das Characteristische für das Vorhandensein einer gemeinsamen Lösung der beiden Gleichungen $A = 0$ u. $B = 0$.

Dies Resultat wollen wir nun sogleich analytisch formuliren. Durch den Raumpunkt O und die Fortschreitungsrichtungen der von ihm auslaufenden Characteristiken A_0 u. B_0 ist allemal ein Flächenelement bestimmt. Eine gemeinsame Lösung der beiden vorliegenden Differentialgleichungen erfordert, dass diese Flächenelemente sich zu einer Fläche zusammensetzen lassen; dies besagt nur mit anderen Worten, dasselbe wie der obige Satz. Die allgemeinste Fortschreitungsrichtung des Büschels in O wird nun durch die folgenden Gleichungen gegeben:



$$\varrho\, dx_1 = \lambda A_1 + \mu B_1$$
$$\varrho\, dx_2 = \lambda A_2 + \mu B_2$$
$$\varrho\, dx_3 = \lambda A_3 + \mu B_3\,,$$ woselbst ϱ ein Proportionalitätsfactor und das Verhältniss $\lambda : \mu$ einen Parameter bezeichnet. Aus ihnen erhal-

ten wir durch Nullsetzen ihrer Determinante

$$\begin{vmatrix} dx_1, & A_1 & B_1 \\ dx_2 & A_2 & B_2 \\ dx_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung, welche jedem Raumpunkt sein Flächenelement zuordnet.

Nun muss man verlangen, dass es eine Flächenschaar $f = \text{const}$ giebt, an deren einzelnen Flächen sich die Flächenelemente anschliessen. Die letzte Gleichung ist aber nichts anderes als eine Pfaff'sche Gleichung. Wir werden daher die gewünschte Anordnung der Flächenelemente haben, wenn wir verlangen, dass unsere Pfaff'sche Gleichung unbeschränkt integrabel ist, d.h. dass ihre linke Seite bis auf einen unbekannten Multiplicator M ein exactes Differential df. darstellt. Wir konnten demgemäss die Entscheidung, ob $A = 0$ und $B = 0$ eine gemeinsame Lösung besitzen oder nicht, aus der Theorie des Pfaff'schen Problems entnehmen, doch wollen wir einen anderen Weg einschlagen, der ohne weiteres verallgemeinerungsfähig ist, und den wir späterhin doch benutzen müssen.

Es handelt sich um einen Ansatz von Jacobi und Clebsch. Die bezügliche Arbeit Jacobis ist aus seinem Nachlass in Crelle Bd. 60 veröffentlicht; die dort gegebene Theorie ist dann von Clebsch 1865 in Crelle Bd. 65 erweitert worden. In der letzt, genannten Abhandlung ist auch der Ausdruck „vollständiges System von Differentialgleichungen" eingeführt, den wir bald noch sehr oft gebrauchen werden. Betreffs unserer speciellen Aufgabe sagt man nun folgendermassen: Sind $A=0$ und $B=0$ zwei lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, dann kann man eine neue lineare partielle Differentialgleichung aufstellen, die eine Folge der gegebenen ist, und der also die gemeinsame Lösung gleichfalls genügen muss.

Diese neue Gleichung erhält man, indem man den Ausdruck $A(B(f)) - B(A(f))$, den wir abkürzend mit $(A,B)(f)$ bezeichnen wollen, bildet und ihn gleich 0 setzt, also $(A,B)=0$.

Wir wollen jenen Ausdruck in extenso ausführen, da er für uns noch sehr oft in Anwendung kommen wird.

Derselbe ist gleich:

$$\left(A_1 \frac{\partial Bf}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial Bf}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial Bf}{\partial x_3}\right) - \left(B_1 \frac{\partial Af}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial Af}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial Af}{\partial x_3}\right)$$

oder indem man für A und B ihre Werte einsetzt und bemerkt, daß die 18 zweiten Differentialquotienten, die sich bei Ausführung der angegebenen partiellen Differentiationen ergeben, sich glücklicherweise gerade wegheben, so bleibt zweckmäßig geordnet:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big[\Big(\mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial x_1} - \mathcal{B}_1 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1}\Big) + \Big(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial x_2} - \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2}\Big)$$

$$+ \Big(\mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial x_3} - \mathcal{B}_3 \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_3}\Big]$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big[\Big(\mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial x_1} - \mathcal{B}_1 \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1}\Big) + \Big(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial x_2} - \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_2}\Big)$$

$$+ \Big(\mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial x_3} - \mathcal{B}_3 \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_3}\Big)\Big]$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_3}\Big[\Big(\mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathcal{B}_3}{\partial x_1} - \mathcal{B}_1 \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_1}\Big) + \Big(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{B}_3}{\partial x_2} - \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_2}\Big)$$

$$+ \Big(\mathcal{A}_3 \frac{\partial \mathcal{B}_3}{\partial x_3} - \mathcal{B}_3 \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x_3}\Big)\Big].$$

Wenn nun unsere beiden Gleichungen $\mathcal{A} = 0$ und $\mathcal{B} = 0$ gemeinsame Lösungen haben sollen, so ergibt sich unmittelbar als notwendige Bedingung hierfür, daß der Klammerausdruck $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sich linear aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zusammensetzt, d.h. daß $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \lambda_0 \mathcal{A} + \mu_0 \mathcal{B}$ ist unter λ_0 und μ_0

irgendwelche Funktionen von x_1, x_2, x_3 verstanden. Die Richtigkeit dieses Satzes ist sofort aus der geometrischen Betrachtung, die wir angestellt haben, zu erkennen. Denn von dem beliebigen Raumpunkte O gehen ja die Fortschreitungsrichtungen A_0 und B_0 aus, und beide zusammen bestimmen das lineare Büschel aller Fortschreitungsrichtungen auf der gemeinsamen Integralfläche von $A = 0$ und $B = 0$, und da diese Integralfläche auch der Gleichung $(A, B) = 0$ zu genügen hat, so muss die durch letztere für den gewählten Raumpunkt gegebene Fortschreitungsrichtung gleichfalls dem linearen Büschel angehören. Dies aber besagt gerade der obige Satz.

Nun wollen wir jedoch andererseits zeigen, dass die genannte Bedingung zugleich eine hinreichende ist, um umgekehrt auf das Vorhandensein einer gemeinsamen Lösung beider Gleichungen schliessen zu können. Um dies zu zeigen, leiten wir zunächst eine wichtige Eigenschaft des Klammerausdrucks (A, B) selbst ab. Anstatt von den Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ auszugehen, hätten wir doch auch die linearen Verbindungen beider $\mathbf{A} = \alpha A + \beta B = 0$ und $\mathbf{B} = \gamma A + \delta B = 0$ zu Grunde legen und deren Klammerausdruck $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ bilden können.

Wie verhalten sich dann die Klammerausdrücke (A, B) und $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ zueinander? Um dies zu erkennen, werden, werden wir auch den zweiten Ausdruck $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ berechnen müssen. Es ergibt sich in symbolischer Schreibweise:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\alpha A + \beta B, \gamma A + \delta B) = (\alpha A, \gamma A) + (\alpha A, \delta B) + (\beta B, \gamma A) + (\beta B, \delta B).$$

Nun ist ferner:

$$(\alpha A, \gamma A) = A\left\{\left(\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} - \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\right) A_1 + \left(\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} - \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right) A_2 + \left(\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x_3} - \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x_3}\right) A_3\right\}$$ d.h. ein Multiplum von A und

$$(\alpha A, \delta B) = (A, B)\alpha\delta - A\delta\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} B_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} B_3\right) + B\alpha\left(\frac{\partial \delta}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial \delta}{\partial x_2} A_2 + \frac{\partial \delta}{\partial x_3} A_3\right);$$ analog berechnen sich Klammerausdrücke $(\beta B, \gamma A)$ und $(\beta B, \delta B)$. Wir entnehmen diesen Formeln sogleich den Satz: <u>Wenn der Klammerausdruck (A, B) eine lineare Verbindung von A und B ist, und es bezeichnen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ irgend 2 lineare Verbin-</u>

<u>dungen von A und B, so ist auch der Klammerausdruck (A, B) eine lineare Verbindung von A und B und darum von A und B selbst.</u>

Von dieser Eigenschaft des Klammerausdrucks wollen wir nun Gebrauch machen, um unseren in Aussicht gestellten Beweis zu erbringen.

Wir wollen zunächst die beiden gegebenen Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ „auflösen", d.h. durch diejenigen ihrer linearen Combinationen ersetzen, welche nur je 2 partielle Differentialquotienten enthalten.

$$A = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} - P \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3} \quad \text{und}$$

$$B = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_2} - Q \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Für diese beiden Gleichungen wollen wir dann den Klammerausdruck (A, B) bilden.

Di. 6 VI 93.

Derselbe wird, wie die einfache Berechnung zeigt, gegeben durch: $\frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \left(- \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} + P \frac{\partial Q}{\partial x_3} - Q \frac{\partial P}{\partial x_3} \right)$ Soll dieses (A, B) eine lienare Verbindung von A und B selbst darstellen, so muss notwendig, da (A, B) nur ein Glied mit $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ enthält, der Factor desselben:

$$-\frac{\partial Q}{\partial x_1}+\frac{\partial P}{\partial x_2}+P\frac{\partial Q}{\partial x_3}-Q\frac{\partial P}{\partial x_3}=0$$ sein, d. h.

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}-Q\frac{\partial P}{\partial x_3}=\frac{\partial Q}{\partial x_1}-P\frac{\partial Q}{\partial x_3}.$$

Nun behaupte ich, diese Gleichung stellt in der That die hinreichende Bedingung dafür dar, daß unsere partiellen Differentialgleichungen eine gemeinsame Lösung $f=$ Const haben. Wir zeigen dies wohl am einfachsten, wenn wir wieder ~~die~~ die zugehörige Pfaffsche Differentialgleichung betrachten, die jetzt wie folgt lautet:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & 1 & 0 \\ dx_2 & 0 & 1 \\ dx_3 & -P & -Q \end{vmatrix}=0 \quad \text{oder } dx_3+P\,dx_1+Q\,dx_2=0.$$

Für ihre unbeschränkte Integralität lautet doch die hinreichende Bedingung: daß $\frac{dP}{dx_2}=\frac{dQ}{dx_1}$ sein muß. Setzen wir aber für die totalen Differentialquotienten $\frac{dP}{dx_2}=\frac{\partial P}{\partial x_2}+\frac{\partial P}{\partial x_3}\cdot\frac{dx_3}{dx_2}$ und $\frac{dQ}{dx_1}=\frac{\partial Q}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial x_3}\cdot\frac{dx_3}{dx_1}$ ein und beachten das gemäß der Gleichung $dx_3+P\,dx_1+Q\,dx_2=0$ gerade $\frac{dx_3}{dx_2}=-Q$ und $\frac{dx_3}{dx_1}=-P$ zu zetzen ist, so geht die Gleichung $\frac{dP}{dx_2} = \frac{dQ}{dx_1}$ in die obige Gleichung $\frac{\partial P}{\partial x_1} - Q\frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{\partial Q}{\partial x_1} - P\frac{\partial Q}{\partial x_3}$ über.

Wir haben daher als Resultat unserer Betrachtung: Indem wir gerade auf das Verschwinden des Klammerausdrucks kommen, wenn wir verlangen, daß das zugehörige Pfaff'sche Problem unbeschränkt integrabel sei, bedeutet das Verschwinden unseres Klammerausdrucks umgekehrt in der That das Vorhandensein einer gemeinsamen Lösung f unserer beiden partiellen Differentialgleichungen.

Haben wir nun bisher den Fall zweier partiellen Differentialgleichungen mit 3 Variablen behandelt und die einzelnen Zwischenrechnungen, soweit es nötig war, wirklich ausgeführt, so wollen wir jetzt dazu übergehen, die analogen Betrachtungen allgemein für n Variable anzustellen. Doch wollen wir die Ausrechnung, die übrigens im Princip sich um nichts schwieriger gestaltet als soeben, jetzt nicht mehr im Einzelnen angeben, vielmehr betreffs derselben auf die Darstellung bei Lie-Engel I pag. 99 ff. verweisen. Man findet dieselben ja auch in den neueren Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, jedoch wird sie hier in weniger geometrischer Weise gegeben.

Es mögen die linear unabhängigen Differentialgleichungen vorliegen

$$\mathfrak{A}(f) = 0$$
$$\mathfrak{B}(f) = 0$$
$$\mathfrak{C}(f) = 0 \text{ u. so fort,}$$

woselbst $\mathfrak{A}(f)$, $\mathfrak{B}(f)$ u.s.w. nur die Abkürzung für $A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots A_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$, .. bezeichnen.

Wir stellen uns wieder die <u>Aufgabe</u> zu untersuchen, <u>wann die gegebenen Gleichungen gemeinsame Lösungen f besitzen werden</u>. Da werden wir uns wieder neue Gleichungen ableiten, indem wir die Klammerausdrücke für je 2 der gegebenen Gleichungen bilden: $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})(f) = 0$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})(f) = 0$ u. so fort. <u>Eine Function f, welche die ursprünglichen Gleichungen befriedigt, genügt dann auch diesen sämmtlichen abgeleiteten Gleichungen.</u>

Nun sind 2 Fälle möglich, je nachdem die abgeleiteten Gleichungen einfach lineare Combinationen der gegebenen sind oder nicht. d.h. je nachdem ein Gleichungssystem:

$$(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \alpha_1 \mathcal{A} + \beta_1 \mathcal{B} + \gamma_1 \mathcal{C} + \dots$$
$$(\mathcal{A},\mathcal{C}) = \alpha_2 \mathcal{A} + \beta_2 \mathcal{B} + \gamma_2 \mathcal{C} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

besteht oder nicht. Wenn dieses Gleichungssystem gilt, dann sagt man, es sei ein vollständiges System partieller Differentialgleichungen vorgegeben. Diese Bezeichnung ist insofern ohne weiteres verständlich, als letzteres System durch die Bildung der Klammerausdrücke sich nicht mehr erweitern läßt. Wenn aber anderseits mehrere der abgeleiteten Gleichungen sich nicht als lineare Combinationen der gegebenen ergeben, so wird man dieselben zu den letzteren einfach hinzunehmen können, da sie ja gleichfalls durch jede gemeinsame Lösung der gegebenen Gleichungen befriedigt werden müßen.

Auf das so erweiterte System partieller Differentialgleichungen wende man daßelbe Verfahren nochmals an, indem man wieder die Klammerausdrücke von je zweien bildet und gleich Null setzt und so fort, bis man schließlich ein vollständiges System partieller Differentialgleichungen erhält. In Anbetracht dessen daß n

Gleichungen, die linear unabhängig sind,

$$A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots\dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$M_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots\dots + M_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

an und für sich ein vollständiges System bilden, weil doch jede $(n+1)^{te}$ Gleichung aus ihren beiden Seiten linear zusammengesetzt werden kann, wird die Erweiterung eines vorgelegten Systems von Differentialgleichungen durch Hinzunahme der abgeleiteten Gleichungen, die nicht linear abhängig sind, nach einer endlichen Anzahl von Schritten immer zu einem vollständigen System führen müssen.

Wir werden auf Grund dieses Satzes nun annehmen, daß von vornherein ein vollständiges System gegeben sei, das aus den folgenden q Gleichungen bestehen möge:

$$A'(f) = 0, \; A''(f) = 0 \dots\dots \; A^q(f) = 0.$$

Eine jede unserer Gleichungen ordnet jetzt einem beliebigen Raumpunkte x_i unseres R_n eine bestimmte Fortschreitungsrichtung zu. Die q

Fortschreitungsrichtungen $A', A'', \dots A^q$ zusammen liegen dann natürlich in einem Bündel, welches eine lineare Mannigfaltigkeit von $q-1$ Dimensionen darstellt und durch folgendes Gleichungssystem gegeben wird:

$$\begin{aligned}
\rho \cdot dx_1 &= \lambda' A_1' + \lambda'' A_1'' + \dots\dots + \lambda^q A_1^q \\
\rho \cdot dx_2 &= \lambda' A_2' + \lambda'' A_2'' + \dots\dots + \lambda^q A_2^q \\
&\;\vdots \\
\rho \cdot dx_n &= \lambda' A_n' + \lambda'' A_n'' + \dots\dots + \lambda^q A_n^q .
\end{aligned}$$

Hier bezeichnen $\lambda', \lambda'', \dots \lambda^q$ beliebige Parameter u. ρ den Proportionalitätsfactor. Dieses Gleichungssystem können wir ersetzen durch Nullsetzen des rechteckigen Determinantenschemas:

$$\begin{vmatrix}
dx_1 & A_1' & \dots\dots & A_1^q \\
dx_2 & A_2' & \dots\dots & A_2^q \\
\vdots & & & \\
dx_n & A_n' & \dots\dots & A_n^q
\end{vmatrix} = 0$$

Diese Matrix stellt uns eben das System der $n-q$ totalen Differentialgleichungen 1. Ordnung vor, welches aequivalent ist mit den durch Elimination der Parameter λ aus dem angeführten System sich ergebenden Gleichungen. Nun ist der Hauptsatz, dass dieses System von $n-q$ totalen Differentialgleichungen, welches dem gegebenen vollständigen Systeme partieller Differentialgleichungen zugeordnet ist, dann u. nur dann unbeschränkt integrirbar ist, wenn die letzteren ein vollständiges System bilden.

Diesen Satz könnten wir gerade so beweisen wie soeben im Falle dreier Variablen, doch wollen wir darauf nicht weiter eingehen. Wir wollen ihn dafür desto genauer erläutern. Was meinen wir mit der Bezeichnung unbeschränkt integrirbar geometrisch? Durch unsere totalen Differentialgleichungen wird jedem Raumpunkte des R_n ein solches Bündel von Fortschreitungsrichtungen zugeordnet, welches $q-1$ Dimensionen besitzt. Unter unbeschränkter Integrirbarkeit eines Systems von $n-q$ totalen Differentialgleichungen haben wir nun zu verstehen, dass der Raum R_n sich in ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten q^{ter} Dimension zerlegen lässt, der Art dass die Fortschreitungsrichtungen, welche vom einzelnen Punkte zu den Nachbarpunkten der diesen Punkt enthaltenden M_q führen, gerade jenes Bündel bilden

<u>u. demgemäss die Integration unserer totalen Differentialgleichungen durch Angabe der Mannigfaltigkeiten q^{ter} Dimension erschöpft ist.</u>

Wir wollen diesen vielleicht in der Allgemeinheit etwas schwer verständlichen Satz sogleich an dem Beispiel des R_3 uns völlig nahe führen.

1, Es sei im R_3 zunächst <u>eine partielle Differentialgleichung</u> $(q = 1)$ gegeben. Dann bekommen wir $n - q = 2$ totale Differentialgleichungen und diese sind von selbst unbeschränkt integrirbar, indem sich doch der R_3 in ∞^2 Curven (M_1) der Art zerlegen lässt, dass die Tangenten der einzelnen Curven immer gerade die totalen Differentialgleichungen befriedigen.

2) Ferner seien im R_3 <u>2 partielle Differentialgleichungen</u> $(q = 2)$ gegeben, dann haben wir $n - q = 1$ totale Differentialgleichung. Diese ordnet jedem Raumpunkt ein eindimensionales Büschel von Fortschreitungsrichtungen, ein Flächenelement zu, und die Bedingung der unbeschränkten Integrabilität drückt sich dann aus, dass der R_3 sich zerlegt in ∞^1 M_2, d.h. in ∞ viele Flächen, der Art, dass diese von

den Flächenelementen völlig überdeckt werden, d.h. dass die Flächentangenten und keine anderen Fortschreitungsrichtungen der totalen Differentialgleichung genügen.

Der allgemeine Satz ist um nichts complicirter; es kommt nur darauf an, dass man sich an geometrisches Denken im Raum von n Dimensionen gewöhnt. Dies ist auch soweit unerlässlich, wenn man die Lie'schen Entwickelungen nach ihrer inneren Bedeutung verstehen will.

Im allgemeinen Falle wird also der ganze R_n in ∞^{n-q} M_q zerlegt; diese M_q wollen wir als die characteristischen Mannigfaltigkeiten des vorgelegten vollständigen Systems von q partiellen Differentialgleichungen bezeichnen.

Wir wollen nun von der geometrischen Eigenart dieser characteristischen M_q sprechen. Man kann die einzelnen Fortschreitungsrichtungen A', A'', A''' u.s.o fort von dem gewählten Raumpunkt aus beliebig weit auswachsen lassen; die entstehenden Curven des R_2 nennen wir entsprechend die Characteristiken der Differentialgleichung A' resp. A'' u.s.w. Offenbar ergibt sich das wichtige

Resultat, daß eine jede characteristische Mannigfaltigkeit M_q übersponnen ist einerseits von lauter Characteristiken der Differentialgleichung A', anderseits von lauter Characteristiken der Differentialgleichung A'' u. so fort, endlich von lauter Characteristiken der Differentialgleichung A^q.

Wir können sagen, *daß man überhaupt gerade darin die Eigenart eines vollständigen Systems erkennen muß, daß es solche Mannigfaltigkeiten M_q gibt, wie sie hier geschildert sind.*

Nun suchen wir aber doch für unsere partielle Differentialgleichungen nicht Mannigfaltigkeiten M_q, sondern Gleichungen $f = Const$, die erstere befriedigen. Für jeden Wert der Constante stellt die Gleichung $f = Const$ aber eine Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen dar. Wie werden wir dann eine solche M_{n-1} herstellen, wenn wir über die characteristischen Mannigfaltigkeiten verfügen? Die letzteren mögen durch die Gleichungen:

$f_1 = C_1,\ f_2 = C_2, \dots f_{n-q} = C_{n-q}$ gegeben sein, wo, selbst C, beliebige Constante bezeichnen. *Die allgemeinste M_{n-1}, die unsere partiellen Differentialgleichungen befriedigt, wird dann gegeben* sein, indem wir eine willkürliche Funktion $F(f_1 f_2 f_3 \cdots f_{n-q}) = C$ setzen. Denn diese stellt doch geometrisch betrachtet eine M_{n-1} dar, welche aus lauter charakteristischen Mannigfaltigkeiten M_q zusammengesetzt ist. Analytisch aber bezeichnet man den hiermit erkannten Sachverhalt dadurch, daß man sagt, unsere partiellen Differentialgleichungen haben $n-q$ unabhängige Lösungen $f_1 f_2 \cdots f_{n-q}$, und aus ihnen setzt sich die allgemeine Lösung in der Gestalt $F(f_1 \cdots f_q)$ zusammen.

[Do. 8 II 93] Diese im Vorstehenden gegebenen Erläuterungen über vollständige Systeme linearer Differentialgleichungen wollen wir nun in Beziehung setzen mit der Lie'schen Gruppentheorie. Zu dem Zweck führen wir, um uns der Lie'schen Bezeichnungsweise zu bedienen, eine Buchstabenvertauschung ein, indem wir fernerhin statt $A(f)$ setzen: $X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Dieser Ausdruck $X(f)$ gleich 0 gesetzt liefert uns aber eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Doch Lie betrachtet den Ausdruck $X(f)$ selbst und sieht in ihm das Symbol einer infinitesimalen Transformation, nämlich derjenigen Transformation, deren Anwendung die Coordinaten $x_1, x_2 \dots x_n$ um die folgenden Incremente vermehrt.

$$\delta x_1 = \xi_1 \delta t$$
$$\delta x_2 = \xi_2 \delta t$$
$$\delta x_3 = \xi_3 \delta t$$
$$\vdots$$
$$\delta x_n = \xi_n \delta t.$$

Wie leicht zu übersehen, wächst eine beliebige Function $f(x_1 \dots x_n)$ vermöge dieser infinitesimalen Transformation gerade um $X(f)\delta t$ und hierin liegt eben die Berechtigung ausgesprochen $X(f)$ als das Symbol einer ∞ kleinen Transformation zu betrachten.

Doch was hat die partielle Differentialgleichung $X(f) = 0$ mit dieser unendlich kleinen Transformation zu thun? Der Zusammenhang beider spricht sich zunächst darin aus, daß die Lösungen der Differentialgleichungen diejenigen Funktionen darstellen, welche bei der infinitesimalen Transformation invariant sind. Man kann jedoch noch mehr sagen. Denken wir uns auf einen beliebigen Raumpunkt x_n die infinitesimale Transformation $X(f)$ angewandt, so geht derselbe in einen neuen Punkt über. Auf diesen wenden wir wiederum dieselbe Transformation an u. so fort; der ausgewählte Raumpunkt wird solcherweise eine bestimmte Bahncurve im R_n beschreiben. Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die Gesammtheit aller Raumpunkte, so erkennen wir, dass der ganze Raum sich demnach in lauter neben einander herlaufende Bahncurven der infinitesimalen Transformation anordnen läßt. Und diese Bahncurven sind mit den Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen $X(f) = 0$ identisch, wie sofort zu sehen.

Die nächste Frage wird nun sein, wie die endlichen Transformationen lauten, die durch ∞ malige Wiederholung der ∞ kleinen Transformation zu Stande kommen. Wir behaupten, dass dieselben durch die folgende Formel gegeben werden:

$$f_1 = f + \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} X.X(f) + \frac{t^3}{1.2.3} XXX(f) + \dots$$

in der t einen Parameter bezeichnet.

Aus ihr gewinnt man die Transformationsformeln der Coordinaten $x_1 \dots x_n$ selbst, indem man letztere der Reihe nach statt f in diese Gleichung einsetzt und auf der linken Seite entsprechend $x_1' \ldots x_n'$ für f, schreibt. Bevor wir die Richtigkeit unserer Formel nachweisen, wollen wir die folgende Bemerkung hinzufügen. Wie in der Functionentheorie die Potenzreihenentwicklung einer analytischen Function nur innerhalb eines bestimmten Gebiets um einen ausgewählten Punkt herumconvergirt, so gilt natürlich auch die vorstehende Formel nur insofern, als wir den Parameter t klein genug wählen, damit die Convergenz der Reihe gesichert ist, d.h. wir beschränken uns auf Transformationen, die in der Nähe der Identität liegen, jedenfalls nicht soweit ausgedehnt gedacht sind, dass die Potenzreihe zu convergiren aufhört. (Kann es doch z. B. sehr wohl sein, dass bei hinreichender Wiederholung der Transformation ein Raumpunkt eine geschlossene Bahncurve beschreibt und daher an seine Ausgangstelle zurückgelangt etc. etc.)

<u>Die andere Auffassung, dass wir es mit einer Funktion von t zu thun haben, die wir über den Convergenzbereich der anfänglichen Potenzreihe analytisch fortsetzen können,</u> die

schieben wir zurück und halten uns vor später darauf zurückzukommen, wo wir dann vielleicht nur algebraische Transformationen oder lineare Transformationen betrachten.

Unter dieser Voraussetzung wollen wir uns nun überzeugen, dass in der That unsere Formel die aus der unendlich kleinen Transformation durch ∞ Wiederholung entstandenen endlichen Transformationen darstellt. Wir haben offenbar eine einfach ∞ Schaar von Transformationen vor uns, indem unsere Formel den Parameter t enthält. Diese Schaar enthält nun gewiss auch die ∞ kleine Transformation, die wir erhalten, wenn wir für t einsetzen δt, wobei wir uns dann auf die beiden ersten Glieder der rechten Seite beschränken können. Es kommt nun darauf an zu zeigen, dass diese Schaar von Transformationen zugleich eine Gruppe darstellt. Zu dem Zweck gehen wir von den beiden Transformationen aus:

$$\mathfrak{X}^{(t)}: \quad f_1 = f + \frac{t}{1}\cdot \mathfrak{X}(f) + \frac{t^2}{1.2}\cdot \mathfrak{X}\mathfrak{X}(f) + \ldots$$

und $\mathfrak{X}^{(t')}$: $$f_2 = f_1 + \frac{t'}{1}\cdot \mathfrak{X}(f_1) + \frac{t'^2}{1.2}\cdot \mathfrak{X}\mathfrak{X}(f_1) + \ldots$$

Diese beiden Transformationen wollen wir nun zusammensetzen; wir erhalten:

$$f_2 = f + \frac{t}{1} \cdot \mathcal{H}(f) + \frac{t^2}{1.2.} \cdot \mathcal{H}\mathcal{H}(f) + \dots$$
$$+ \frac{t'}{1} \cdot \mathcal{H}(f) + \frac{tt'}{1} \cdot \mathcal{H}\mathcal{H}(f) + \dots$$
$$+ \dots \qquad + \frac{t'^2}{2} \, \mathcal{H}\mathcal{H}(f) + \dots$$
$$+ \dots$$

oder

$$f_2 = f + \frac{t+t'}{1} \cdot \mathcal{H}(f) + \frac{(t+t')^2}{1.2.} \mathcal{H}\mathcal{H}(f) + \dots .$$

Hieraus folgt dann sofort, <u>daß unsere Schaar von Transformationen</u> eine Gruppe bildet. (denn die Operation t ergibt mit der Operation t' zusammengesetzt eine Operation $t+t'$, die gleichfalls der Schaar angehört.) Hieraus ist dann zugleich ersichtlich, daß alle endlichen Transformationen sich aus der ∞ kleinen durch unendliche Wiederholung zusammensetzen lassen; wir haben daher eine <u>cyclische</u> Gruppe, deren erzeugende Operation eben jene ∞ kleine Transformation ist.

Zugleich folgt die <u>Vertauschbarkeit je zweier Operationen</u>, in der wir eine Bestätigung zu-erblicken haben, daß wir es mit einer cyclischen Gruppe zu thun haben.

Man wird den Sachverhalt noch besser verstehen, wenn man sich überlegt, daß jede infinitesimale Transformation sich auf eine bestimmte einfache Normalform bringen läßt. Wir beschränken uns auf 3 Variable $x_1\ x_2\ x_3$. Wir wollen nun annehmen, wir haben unsere Charakteristiken durch die Integrale $f_1 = C_1$ und $f_2 = C_2$ der partiellen Differentialgleichung vollständig bestimmt. Dann wollen wir die folgende Punkttransformation machen:

$$f_1 = x,\ f_2 = y,\ f_3(x_1, x_2, x_3) = z,$$ woselbst f_3 eine beliebige Function der Coordinaten $x_1 x_2 x_3$ sein möge. Die Größen x, y, z denken wir hernach in einem zweiten Raume als gewöhnliche rechtwinklige Raumcoordinaten. Die Incremente derselben bei Ausführung der infinitesimalen Transformation sind dann:

$$\delta x = 0,\ \delta y = 0,\quad \delta z = \delta t \,.\, X(f_3) = \delta t\, \varphi(x\, y\, z)$$

Dies besagt, daß die Charakteristiken d. h. die Bahncurven der Transformationen sämmtlich in gerade Linien verwandelt sind, welche der z-Axe parallel laufen. Setzen wir noch

$d\mathfrak{Z} = \frac{dz}{\rho(xyz)}$ oder $\mathfrak{Z} = \int \frac{dz}{\rho(xyz)}$, woselbst wir das Integral immer ausführen können, da in ihm x und y als Constante gelten und schrei, ben der Gleichförmigkeit in der Bezeichnung we, gen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ für x, y, so haben wir für die Incre, mente der neuen Coordinaten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Glei, chungen:

$$\delta\mathfrak{X} = 0, \quad \delta\mathfrak{Y} = 0, \quad \delta\mathfrak{Z} = \delta t.$$

Und nun ist die Verschiebung $\delta\mathfrak{Z}$ für alle Raum, punkte dieselbe geworden. Zusammenfassend ge, winnen wir den Satz: <u>Man kann für jede einzelne infinitesimale Transformation Punktcoordinaten $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ so einführen, daß die Transformation die Ge, stalt annimmt: $\delta\mathfrak{X} = 0$, $\delta\mathfrak{Y} = 0$, $\delta\mathfrak{Z} = \delta t$, d. h. daß bei gewöhnlicher Interpretation der $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}.\mathfrak{Z}$. eine Ver, schiebung des Gesammtraumes parallel der $\mathfrak{Z}$-Axe vorliegt.</u> Die zugehörigen endlichen Transforma, tionen lauten dann wie folgt:

$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{X},$$
$$\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}$$
$$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} + t.$$

Daß diese einfache Transformationschaar eine Gruppe bildet, deren Operation zu je zweien vertauschbar sind und durch ∞ Wiederholung der infinitesimalen Transformation erzeugt gedacht werden kann, ist dann selbstverständlich. Die analogen Betrachtungen gelten natürlich im Raum von n Dimensionen.

Die vorstehende Ueberführung der Gruppe für die Coordinaten x_1 x_2 x_3 in die Gruppe für die Coordinaten X, Y, Z giebt uns noch Anlass eine neue Bezeichnung kennen zu lernen: <u>Man nennt allgemein 2 Gruppen, wie speciell 2 Transformationen, die durch Einführung neuer Coordinaten in einander übergehen, mit einander ähnlich</u>. Den soeben angeführten Satz können wir daher auch dahin formuliren: <u>Die eingliedrige Gruppe, welche aus einer beliebigen infinitesimalen Transformation durch Wiederholung erwächst, ist ähnlich mit einer gewöhnlichen Translationsgruppe</u>.

Haben wir gesehen, wie durch unendliche Wiederholung einer ∞ kleinen Transformation endliche Transformationen entstehen, so müssen wir uns jetzt umgekehrt auch darüber klar werden, dass wir jede endliche Transformation aus einer unendlich kleinen Transformation entstanden denken können. Es sei die Transformation gegeben, welche aus der beliebigen Function f die neue Function f_1 macht. Wir machen dann den Ansatz:

$$f_1 = f + \frac{t}{1} \cdot \mathcal{H}(f) + \frac{t^2}{1.2} \mathcal{H}\mathcal{H}(f) + \frac{t^3}{1.2.3} \mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{H}(f) + \dots$$

in dem uns das Symbol $\mathcal{H}(f)$ vorläufig noch unbekannt ist. Wir setzen ferner den Parameter $t = 1$, was auf dasselbe hinauskommt, als hätten wir ihn in das Symbol $\mathcal{H}$ hineingenommen. Es gilt nun, den Ausdruck $\mathcal{H}(f)$ selbst zu berechnen, d.h. die obige Reihe gleichsam zu convertieren. Es ist dies ganz die analoge Aufgabe, als die andere, die Exponentialreihe $e^x = 1 + y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$ in die logarithmische Reihe für $x = \log(1+y)$ entwickelt nach Potenzen von y umzusetzen.

Wir schreiben:

$$f_1 = f + \frac{1}{1} \mathcal{H}(f) + \frac{1}{1.2} \mathcal{H}\mathcal{H}(f) + \frac{1}{1.2.3} \mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{H}(f) + \dots$$
$$f_2 = f_1 + \frac{1}{1} \mathcal{H}(f_1) + \frac{1}{1.2} \mathcal{H}\mathcal{H}(f_1) + \frac{1}{1.2.3} \mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{H}(f_1) + \dots$$
$$f_3 = f_2 + \frac{1}{1} \mathcal{H}(f_2) + \frac{1}{1.2} \mathcal{H}\mathcal{H}(f_2) + \frac{1}{1.2.3} \mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{H}(f_2) + \dots$$

oder indem man auf den rechten Seiten der Gleichungen allemal f einführt:

$$f = f$$
$$f_1 = f + \frac{1}{1} \mathcal{H}(f) + \frac{1}{1.2} \mathcal{H}\mathcal{H}(f) + \frac{1}{1.2.3} \mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{H}(f) + \dots$$

$$f_2 = f + \frac{2}{1} X(f) + \frac{4}{2} XX(f) + \frac{8}{1.2.3} X.XX(f) \ldots$$
$$f_3 = f + \frac{3}{1} X(f) + \frac{9}{2} XX(f) + \frac{27}{1.2.3} XXX(f)$$

. . . .

Aus ihnen folgt, indem man ganz den Uebergang von der Exponentialreihe zur Logarithmenreihe nachmacht:

$$f_1 - f = X(f) + \tfrac{1}{2} XX(f) + \tfrac{1}{6} XXX(f) + \ldots$$
$$\frac{f_2 - 2f_1 + f}{2} = \tfrac{1}{2} XX(f) + \tfrac{1}{2} XXX(f) + \ldots$$

und also $X(f) = f_1 - f - \left(\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2}\right) + \left(\frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f}{3.}\right) \mp \ldots$

Diese Reihe wird natürlich nur dann convergiren, wenn f_1 hinreichend nahe an f liegt. Durch diese Reihe finden wir also unseren Ausdruck $X(f)$; setzen wir insbesondere für f nacheinander ein $x_1, x_2 \ldots x_n$ so wird der Wert der Reihe entsprechend gleich $\xi_1 \ldots \xi_n$ zu setzen sein, welch' letztere Ausdrücke nur die Coefficienten der gewohnten Form $X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ liefern. Haben wir so $X(f)$ bestimmt, so können wir dasselbe jetzt in unsere obige Reihe für f_1 einsetzen, und wir erhalten das Resultat: <u>Jede endliche Transformation, die in der Nähe der Identität liegt, wird entsprechend der von uns aufgestellten Formel von einer ∞ kleinen Transformation erzeugt.</u>

Aus diesem Satze folgt daher, dass die endlichen Transformationen mit Notwendigkeit an die ∞ kleinen gebunden sind. Von hieraus ist dann auch verständlich, dass Lie alle Untersuchungen über endliche Transformationen und ihre Gruppe an die ∞ kleinen Transformationen anknüpft.

Nun gehen wir wieder zu der partiellen Differentialgleichung $X(f) = 0$ zurück. Ihr hatten wir die infinitesimale Transformation zugeordnet:

$$\delta x_1 = \xi_1 \delta t$$
$$\vdots$$
$$\delta x_n = \xi_n \delta t$$

Man sieht sofort, an dieselbe Gleichung $X(f) = 0$ lassen sich noch sehr viele andere ∞ kleine Transformationen anknüpfen, die wir in den Gleichungen erhalten:

$$\delta x = \alpha \xi_1 \delta t$$
$$\delta x_2 = \alpha \xi_2 \delta t$$
$$\vdots$$
$$\delta x_n = \alpha \xi_n \delta t$$

woselbst α eine beliebige Function der Coordinaten $x_1 \dots x_n$ bezeichnen möge.

Der geometrische Character aller dieser

Transformationen spricht sich in dem Satze aus, dass wir mit den letzteren die sämmtlichen ∞ kleinen Transformationen erschöpfen, bei denen die Raumpunkte auf den Charakteristiken der Gleichung $X(f)=0$ verschoben werden. Nun können wir doch von jeder dieser ∞ kleinen Transformationen durch unendliche Wiederholung derselben zu endlichen Transformationen übergehen. Die Gesammtheit derselben erschöpft dann einfach alle endlichen Transformationen bei denen die einzelnen Raumpunkte auf den Charakteristiken von $X(f)=0$ verschoben werden; sie bildet wieder eine Gruppe, die jedoch eine unendliche Gruppe im Lie'schen Sinne darstellt, da sie aus ∞ vielen erzeugenden Operationen entstanden ist.

Dieser Satz ist am einfachsten einzusehen, wenn man um wieder nur vom R_3 zu sprechen, wie eben bereits geschah, die Charakteristiken in die vertikalen Linien eines Hülfsraumes $X\,Y\,Z$ verwandelt, wo dann nur zu zeigen ist, dass eine endliche Transformation, bei welcher jeder Raumpunkt auf seiner vertikalen Geraden bleibt, von einer ∞ kleinen Transformation erzeugt ist, bei welcher er ebenfalls auf seiner vertical.

len Geraden bleibt. Dies folgt in der That, wenn wir auf die endliche Transformation $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z + \Phi\,(X Y h)$ die Reihe für $X(f)$ anwenden. Uebrigens aber wiederholen wir: Zu jeder Gleichung $Xf = 0$ gehört eine bestimmte unendliche Transformationsgruppe.

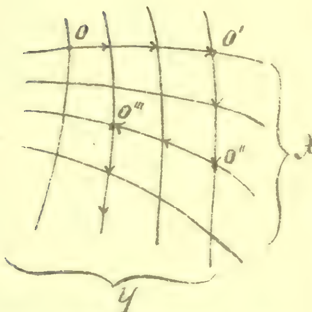
Fr. 9 VI 93] Wir wollen nun weiter dazu übergehen, 2 Ausdrücke $X(f)$, $Y(f)$ als Ausgangspunkt zu wählen. Wir nehmen sogleich wieder die lineare Verbindung beider hinzu $\alpha X + \beta Y$. Dann wird der Zuwachs einer beliebigen Funktion f bei der Anwendung der ∞ kleinen Transformation des Symbols $\alpha X + \beta Y$ gegeben durch die Gleichung:

$$df = \left\{ \alpha\left(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots\right) + \beta\left(\eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots\right) \right\} dt.$$

Da α und β 2 willkürliche Funktionen bezeichnen, so giebt uns das Symbol $\alpha X + \beta Y$ unendlich viele erzeugende Operationen, deren beliebige Wiederholung und Combination gewiss eine ∞ Gruppe erzeugt. Was bedeutet es nun, wenn $X(f) = 0$ und $Y(f) = 0$ ein vollständiges System bilden, d. h. wenn $(X, Y) = \kappa X + \lambda Y$ wird? Bleiben wir zu.

nächst im R_3, so wissen wir doch, dass dann derselbe sich in „characteristische" Mannigfaltigkeiten 2er Dimensionen zerspaltet, deren jede von Characteristiken X und Y überspannen wird.

Durch Anwendung einer Operation αX bewegt sich dann ein beliebiger Raumpunkt O auf der zugehörigen Characteristik X weiter etwa bis zum Punkte O'; durch die fernere Anwendung einer Operation βY bewegt sich O' weiter auf seiner Characteristik Y bis O'' u. so fort, wie es in der Figur angedeutet ist.



Dieses Ergebniss ist sogleich auf den Fall eines vollständigen Systems von q Gleichungen $X_1(f)=0 \dots X_q(f)=0$ und n Variablen $x_1, \dots x_n$ zu verallgemeinern. Von jedem Raumpunkte des R_n erstreckt sich eine characteristische Mannigfaltigkeit M_q. Bilden wir uns wieder alle infinitesimalen Transformationen $\alpha_1 X_1(f) + \dots + \alpha_q X_q(f)$, wo die $\alpha_1, \dots \alpha_q$ beliebige Functionen der $x_1, \dots x_n$ sind, so bekommen wir eine ∞ Gruppe continuirlicher Raumtransformationen, welche aber nicht transitiv ist, d. h. der einzelne Raumpunkt kann nicht in beliebige Raumpunkte durch die Transformationen der Gruppe übergeführt werden, derselbe wird vielmehr immer nur auf der durch ihn hindurchgehenden M_q verschoben.

Im Fall uns zwei Ausdrücke $X(f)$ und $Y(f)$ vorliegen und wir im R_3 uns bewegen, wird durch die Transformation $\alpha(X)$ der Raumpunkt in der Richtung der zugehörigen Characteristik X verschoben, durch die Transformation $\beta(Y)$ in der Richtung der zugehörigen Characteristik Y, entsprechend durch die Transformation $\alpha(X)+\beta(Y)$ in einer Richtung des durch die erstgenannten festgelegten Strahlbüschels. Umgekehrt wird durch $\alpha X+\beta Y$ die allgemeinste infinitesimale Transformation gegeben, welche in einer Richtung dieses Strahlbüschels verschiebt. Das Analoge gilt für den allgemeinen Fall des R_n.

Dies besagt aber, daß in unserer Gruppe keine anderen infinitesimalen Transformationen enthalten sind als die $\alpha_1 X_1(f)+\dots\alpha_q X_q(f)$ selbst, d. h. daß keine andere infinitesimalen Transformationen vorhanden sind als diejenigen, von denen wir bei der Erzeugung der

Gruppe ausgegangen sind.

Von dieser Auffassung aus ergiebt sich eine interessante Bedeutung der Klammerrelation $(XY) = \kappa X + \lambda Y$. Wir führen nämlich die folgende Rechnung durch: Unter $X^{(t)}$ und $Y^{(t')}$ verstehen wir entsprechend die Gesammtheit der endlichen Transformationen, die aus den unendlich kleinen Transformation X und Y erzeugt werden, unter $X^{(-t)}$ und $Y^{(-t')}$ dagegen die zugehörigen inversen Operationen, so dass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\text{für } X^{(t)}: \; f' = f + \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} XX(f) + \frac{t^3}{1.2.3} XXX(f) + \ldots$$

$$\text{für } Y^{(t')}: \; f' = f + \frac{t'}{1} Y(f) + \frac{t'^2}{1.2} YY(f) + \frac{t'^3}{1.2.3} YYY(f) + \ldots$$

$$\text{für } X^{(-t)}: \; f' = f - \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} XX(f) - \frac{t^3}{1.2.3} XXX(f) \pm \ldots$$

$$\text{für } Y^{(-t')}: \; f' = f - \frac{t'}{1} Y(f) + \frac{t'^2}{1.2} YY(f) - \frac{t'^3}{1.2.3} YYY(f) \pm \ldots$$

Diese Operationen wollen wir nun hintereinander auf eine Function f anwenden, wie es das Symbol andeutet: $(f)\, X^{(t)}\, Y^{(t')}\, X^{(-t)}\, Y^{(-t')}$. Wären die einzelnen Operationen vertauschbar, so würde diese Combination natürlich die Identität erzeugen.) Für beliebige Werte der Parameter t und t' stellt das letzte Symbol dann eine Schaar von 2fach ∞ vielen Transformationen dar, die an sich zwar keine Gruppe bildet, wohl aber in der Gruppe enthalten ist, welche man durch die beliebige Wiederholung und Combination der Operation X und Y erzeugen kann. Nun wollen wir die Reihenentwickelung für diese Schaar von Transformationen uns aufstellen.

Es ist zunächst:

für $X^{(t)}(f)$: $\quad f_1 = f + \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} X X(f) + \ldots\ldots$

Wenden wir nun weiter auf f_1 die Operation $Y^{(t')}$ an, so erhalten wir:

$$f_2 = f_1 + \frac{t'}{1} Y(f_1) + \frac{t'^2}{1.2} Y Y(f_1) + \ldots.$$

oder indem man für f_1 seinen Wert setzt:

$$\begin{aligned} f_2 = f &+ \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} X X(f) + \ldots \\ &+ \frac{t'}{1} Y(f) + \frac{t t'}{1} Y X(f) + \ldots \\ &+ \frac{t'^2}{1.2} Y Y(f) + \ldots \end{aligned}$$

Auf f_2 wenden wir dann die Operation $X^{(-t)}$ an;

wir bekommen:

$$f_3 = f_2 - \frac{t}{1} \mathfrak{X}(f_2) + \frac{t^2}{1.2} \mathfrak{X}\mathfrak{X}(f_2) \mp \dots$$

oder:

$$f_3 = f + \frac{t}{1} \mathfrak{X}(f) + \frac{t^2}{1.2} \mathfrak{X}\mathfrak{X}(f) + \dots$$

$$+ \frac{t'}{1} \mathfrak{Y}(f) + \frac{tt'}{1} \mathfrak{Y}\mathfrak{X}(f) + \dots$$

$$+ \frac{t'^2}{1.2} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f) + \dots$$

$$- \frac{t}{1} \mathfrak{X}(f) - \frac{t^2}{1} \mathfrak{X}\mathfrak{X}(f) - \dots$$

$$- \frac{tt'}{1} \mathfrak{X}\mathfrak{Y}(f) - \dots$$

$$+ \frac{t^2}{2} \mathfrak{X}\mathfrak{X}(f) + \dots$$

oder

$$f_3 = f + \frac{t'}{1} \mathfrak{Y}(f) + \frac{tt'}{1} (\mathfrak{Y}\mathfrak{X} - \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(f) + \frac{t'^2}{1.2} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f) + \dots$$

Auf f_3 wird endlich noch die Operation $\mathfrak{Y}^{(-t')}$ angewandt. Dann ergiebt sich:

$$f_4 = f_3 - \frac{t'}{1} \mathfrak{Y}(f_3) + \frac{t'^2}{1.2} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f_3) \pm \dots$$

$$= f + \frac{t'}{1} \mathfrak{Y}(f) + \frac{tt'}{1} (\mathfrak{Y}\mathfrak{X} - \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(f) + \frac{t'^2}{1.2} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f) + \dots$$

$$- \frac{t'}{1} \mathfrak{Y}(f) - \frac{t'^2}{1} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f) - \dots$$

$$+ \frac{t'^2}{1.2} \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}(f) + \dots$$

oder:

$$f_4 = f + * + \frac{tt'}{1}(\mathcal{Y}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{Y})(f) + \ldots$$

In solcher Weise läßt die Aufeinanderfolge der 4 Transformationen $\mathcal{X}^{(t)}\mathcal{Y}^{(t')}\mathcal{X}^{(-t)}\mathcal{Y}^{(-t')}$ aus f eine Function f_4 entstehen, welche bis auf Glieder höherer Ordnung folgendermaßen lautet:

$$f_4 = f + \frac{tt'}{1.}(\mathcal{Y}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{Y})f.$$

$$+ \frac{t^2t'}{2}\Big((\mathcal{Y}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{X}(f) - \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{Y})(f)\Big)$$

$$+ \frac{tt'^2}{2}\Big((\mathcal{Y}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Y}(f) - \mathcal{Y}(\mathcal{Y}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{Y})(f)\Big)$$

$$+ \text{ Glieder } 4^{\text{ter}} \text{ Ordnung} \ldots$$

In diesen Formel sehen Sie für beliebige Werte von t und t' die 2fach ∞ Schaar von endlichen Transformationen vor sich. Um die ∞ kleinen Transformationen derselben zu haben, werden wir einfach t und t' als ∞ kleine Größen, am einfachsten von der Ordnung ½ betrachten, und uns dann natürlich auf die ersten beiden Glieder der rechten Seite beschränken, da alle anderen unendlich klein von höherer Ordnung werden. Dann ergiebt sich:

$f_4 = f + \varepsilon(\mathcal{Y}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{Y})(f)$, wo ε eine kleine Größe erster Ordnung ist

oder:

$$\delta f = \varepsilon(\mathcal{Y}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{Y})(f).$$

Diese ∞ kleine Transformation wird daher durch das Symbol $\mathcal{Y}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{Y}$, d.h. durch den Klammerausdruck $(\mathcal{Y}\mathcal{X})$ gegeben. Hiermit haben wir den merkwürdigen und richtigen Satz abgeleitet, der sich durch die ganze Lie'sche Transformationstheorie hindurchzieht: <u>Wenn man sich die Gruppe aus den unendlich kleinen Transformationen $\mathcal{X}$ u. $\mathcal{Y}$ bildet, dann findet sich in dieser Gruppe immer auch die ∞ kleine Transformation $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.</u>

Wir machen sogleich Gebrauch von diesem Resultat. Vorhin erkannten wir doch, daß im Falle eines vollen Systems $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ eine Gruppe entsteht, welche nicht transitiv ist, sondern den Punkt nur auf einer hindurchgehenden Fläche verschiebt. Mögen nun umgekehrt $\mathcal{X}$ u. $\mathcal{Y}$ eine Gruppe erzeugen, die <u>nicht transitiv</u> ist, sondern den Punkt nur auf einer Fläche verschiebt, so dass jede ∞ kleine Transformation der Gruppe sich in die Gestalt $\alpha X + \beta Y$ setzen lassen muss. Nun ist in der Gruppe des Weiteren die infinitesimale Transformation $(X Y.)$ enthalten. Wir schliessen, dass dieses eine lineare Verbindung von X, Y sein muss, dass also ein vollständiges System vorliegt. Die durch den Klammerausdruck gegebene $(X Y)$ Richtung der Characteristik eines beliebigen Raumpunktes muss eben in dem linearen Büschel liegen, welches von den Fortschreitungsrichtungen der durch die Transformationen X u. Y. bestimmten Characteristiken angegeben wird.

Was wir hiermit für 2 Ausdrücke X u Y. entwickelt haben, lässt sich natürlich sofort auf eine grössere Zahl solcher Ausdrücke übertragen. Wir betrachten wieder die Gruppe, welche durch die ∞ kleinen Transformationen, deren Symbole die gegebenen Ausdrücke sind, erzeugt wird, bilden uns ferner auch die Klammerausdrücke aus je zweien der gegebenen Ausdrücke und untersuchen insbesondere, welche Bewandtniss es mit den vollständigen Systemen hat.

Die Betrachtung und die Resultate, zu denen

...kommt, sind ganz analog denen im R_3. Nur kommt das eine Moment hinzu, daß für je 3 Ausdrücke $X^l\,Y\,Z$, die sogenannte Jacobische Identität gilt, nämlich die Relation:

$$(X^l(YZ)) + (Y(Z X^l)) + (Z(X^l Y)) \equiv 0.$$

Hier bedeutet das erste Glied $(X^l(Y,Z))$, daß man zunächst den Klammerausdruck von Y u. Z und dann den Klammerausdruck von X^l und den soeben gebildeten Klammerausdruck (Y,Z) bilden soll, analog das zweite und dritte Glied. Führt man das erste Glied in extenso aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(X^l(Y,Z)) &= X^l(Y,Z) - (Y,Z)X^l \\ &= X^l(Y,Z - ZY) - (YZ - ZY)X^l \\ &= X^l YZ - X^l ZY - YZX^l + ZYX^l\end{aligned}$$

Wenn in gleicher Weise auch die beiden übrigen Glieder der identischen Gleichung in derselben Weise entwickelt werden, so erhält man linker Hand insgesammt 12 Glieder, die sich gerade wechsel.

seitig wegheben, so dass in der That die linke Seite identisch 0 wird. Hiermit sind wir mit dem einleitenden Kapitel zu Ende gekommen; dasselbe ist zwar wesentlich analytischen Charakters, indem wir zumeist mit Symbolen zu operieren hatten, ebenso wie auch die Lie'schen Bücher vorwiegend analytisch geschrieben sind, doch müssen wir festhalten, dass der ursprüngliche Ausgangspunkt dieser Theorieen ein geometrischer ist. Dieser geometrische Charakter wird erneut deutlicher hervortreten, wenn wir demnächst Gelegenheit nehmen, specielle Beispiele zu diesen allgemeinen Entwicklungen kennen zu lernen.

Di 13 VI 93 Heute beginnen wir mit einem allgemeinen Ueberblick über die Lie'sche Gruppentheorie.

Der erste Einteilungsgrund, den wir zu Grunde legen, ist uns bereits geläufig; wir zerlegen die continuirlichen Gruppen in endliche und in unendliche Gruppen, d.h. in solche, welche eine endliche Zahl Parameter $a_1\ a_2 \dots a_r$ und solche, welche ∞ viele Parameter d.h. willkürliche Functionen enthalten. In dem ersten Teile unserer folgenden Entwicklung beschäftigen wir uns zunächst ausschliesslich mit den <u>endlichen Gruppen.</u> Eine einzelne Transformation einer solchen Gruppe möge durch das folgende Gleichungssystem gegeben sein:

$$x_i' = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n,\, a_1 \ldots a_r) \text{ für } i = 1, 2 \ldots n.$$

Fügen wir zu dieser eine zweite derartige Transformation hinzu:

$$x_i'' = f_i(x_1'\, x_2' \ldots x_n',\, b_1 \ldots b_r), \text{ für } i = 1, 2 \ldots n, \text{ so}$$

muss die Zusammensetzung beider in beliebiger Combination stets wieder eine Transformation der Gruppe geben, d. h. es muss wieder eine Substitution resultiren:

$$x_i'' = f_i(x_1 \ldots x_n,\, c_1 \ldots c_r)$$ und hier müssen gemäss der Lie'schen Definition der endlichen Gruppen die Parameter $c_1\, c_2 \ldots c_n$ allein von den Grössen a und b abhängen.

(Halphen hat gelegentlich vorgeschlagen, auch solche Fälle zu betrachten, wo die c von den a, b und x abhängen, doch gehen wir darauf nicht weiter ein).

Ein zweiter Einteilungsgrund für unsere Gruppen liegt in der Unterscheidung von <u>Punkttransformationen</u> und von <u>Berührungstransformat.</u>

tionen. Bleiben wir bei 3 Variabelen x, y, z, so werden ja die Berührungstransformationen durch Anwendung der 5 Variablen $x, y\ z\ p\ q$ characterisirt sein. Dieselben sind dann der Art zu transformiren, dass der Differentialausdruck $dz - p\,dx - q\,dy$ bis auf einen Faktor in sich übergeht. Nun sieht man sofort, dass die Scheidung zwischen den Gruppen von Punkttransformationen und von Berührungstransformationen nur auf ein Anordnungsprincip des Stoffes hinauskommt. Denn die endlichen Gruppen von Berührungstransformationen des dreidimensionalen Raumes sind doch zugleich endliche Gruppen von Punkttransformationen des 5 dimensionalen Raumes und würden also bei 5 Variablen zur Aufzählung kommen, wenn wir uns eben durchaus auf Punkttransformationen beschränken wollen.

Wir wollen nun sogleich noch einige Bemerkungen über die endlichen Gruppen hinzufügen. Wir sagten schon früher, dass wir nur solche Gruppen behandeln wollen, welche die Identität unter ihren Transformationen enthalten. Die Identität möge dann insbesondere dargestellt sein, wenn wir den Parametern $a_1\, a_2 .. a_r$

sämmtlich den Wert 0 erteilen; also durch das Formelsystem:

$x_i' = f_i(x_1 \, x_2 \dots x_n, 0, 0, 0 \dots 0)$. Lie führt des Weiteren dann gewisse Voraussetzungen ein, die darauf hinauskommen, dass die Funktionen f_i in der Umgebung der Stellen 0, 0 … 0 analytische Funktionen der a sind, und dass übrigens die Grössen a als unbeschränkt complexe Veränderliche angesehen werden sollen.

Unter diesen Annahmen werden wir die infinitesimalen Transformationen, welche in der vorliegenden Gruppe vorhanden sind, erhalten, indem wir eine Entwickelung der f_i nach Potenzen der a eintreten lassen und dann a_1 durch da_1, a_2 durch da_2 u. so fort a_r durch da_r ersetzen.

Es wird dann also:

$dx_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_1}\right) da_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_r}\right) da_r$ zu setzen

sein. In dem Differentialquotienten $\left(\frac{\partial f_i}{\partial a_1}\right) \dots \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_r}\right)$

ist natürlich den Grössen $a_1 \dots a_r$ der Wert 0 zu erteilen, das Genannte ist nichts weiter als eine Anwendung der Mac Laurin'schen Reihenentwicklung. Die Aenderung δF einer beliebigen Funktion F vermöge der infinitesimalen Transformation ergibt uns sogleich die folgende Formel:

$$\delta F = da_1\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial a_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial a_1}\right)$$

$$+ da_2\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial a_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial a_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial a_2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ da_r\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial a_r} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial a_r} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial f_n}{\partial a_r}\right).$$

Nun ist sofort einleuchtend, dass wir die Klammerausdrücke der letzten Formel mit den Symbolen $X_1(F)$, $X_2(F)$ u. s. w. bezeichnen können. Wir gewinnen hierdurch die einfache Darstellung des Zuwachses von F in der Gestalt:

$$\delta F = X_1(F)\, da_1 + X_2(F)\, da_2 + \dots + X_r(F)\, da_r.$$

Indem wir noch setzen:

$$da_1 = c_1\, dt,$$
$$da_2 = c_2\, dt,$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$da_r = c_r\, dt,$$ woselbst die c_i Constante sind, d.h. Grössen, welche nicht von den x ab-

hängen, übrigens aber beliebig gewählt werden können, werden wir schreiben:

$$\delta F = \left(c_1 X_1^c(F) + c_2 X_2^c(F) + \ldots + c_r X_r^c(F)\right) dt.$$

Aus der vorstehenden Formel entnehmen wir dann die Sätze: Eine r gliedrige Gruppe enthält r unabhängige infinitesimale Transformationen, deren Symbole wir mit $X_1^c, X_2^c, \ldots X_r^c$ bezeichnen. Aus diesen unabhängigen infinitesimalen Transformationen setzt sich die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe in folgender Gestalt zusammen: $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_r X_r$. Hier wollen wir nochmals ausdrücklich betonen, daß die c_i Constante sind, d.h. Größen, welche die x_i nicht mehr enthalten, im Gegensatz zu dem, was wir in voriger Woche bei gewissen unendlichen Gruppen gesehen haben, wo wir die infinitesimale Transformation $\alpha_1 X_1^c + \alpha_2 X_2 + \ldots \alpha_n X_n$ hatten unter α_1, α_2 beliebige Funktionen der x_i verstanden. Diese Betrachtungen sind ja sehr einfach und von selbst einleuchtend; die eigentliche Leistung von Lie ruht auf dem Heranziehen des Klammerausdrucks, wie wir sehr bald sehen werden.

Doch wollen wir vorher uns die bis jetzt besprochenen Verhältnisse an speciellen Beispielen klar machen. Da ist zuerst zu nennen die Gruppe, welche Lie die allgemeine lineare Gruppe nennt. Dieselbe wird für die Ebene durch die Formeln gegeben:

$$x' = ax + by + c$$

$$y' = dx + ey + f.$$ Nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise wird man jede solche Transformation als affine Umformung der Ebene bezeichnen. Diese Gruppe ist, da sie 6 Parameter enthält, eine 6 gliedrige zu nennen. Gewiss auch hängt sie von den Parametern und zwar ausnahmslos analytisch ab. Desgleichen enthält sie die Identität: $x' = x$

$y' = y$, doch ergibt sich dieselbe nicht, wenn man alle Parameter, wie wir es verabredeten, gleich 0 setzt, sondern es muss $a = e = 1$, $b = c = d = f = 0$ sein.

Demgemäss werden wir besser schreiben:

$$x' = (a+1)x + by + c,$$

$$y' = dx + (e+1)y + f,$$

Äusserst einfach ist es jetzt, die infinitesimalen Transformationen zu bilden. Dieselben werden gegeben durch die folgenden Formalgruppen:

1) $dx = x\,da$, $dy = 0$ 2) $dx = y\,db$, $dy = 0$ 3) $dx = dc$, $dy = 0$

4) $dx = 0$, $dy = x\,dd$ *) 5) $dx = 0$, $dy = y\,de$ 6) $dx = 0$, $dy = df$.

Eine beliebige Funktion F ändert sich bei diesen infinitesimalen Transformationen dann entsprechend um: $\left(x\frac{\partial F}{\partial x}\right) \cdot da$, $\left(y\frac{\partial F}{\partial x}\right) db$. u.s.w.

Demnach lauten die Symbole für die 6 infinitesimalen Transformationen:

$$\mathcal{X}_1 = x\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mathcal{X}_2 = y\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mathcal{X}_3 = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\mathcal{X}_4 = x\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \mathcal{X}_5 = y\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \mathcal{X}_6 = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Es giebt nun 2 besonders einfache Untergruppen dieser allgemein linearen Gruppen:

---

*) Die doppelte Bedeutung des Buchstaben d wird wohl zu keinen Mißverständniß Anlaß geben.

Die erste wird gegeben, wenn man die Bedingung hinzunimmt, dass $(a+1)(e+1) - bd = 1$ sein soll. Den Ausdruck der linken Seite können wir die Determinante der Transformationen nennen. Man überzeugt sich leicht, dass 2 Transformationen, deren Determinanten gleich 1 sind, in der That sich wieder zu einer Transformation zusammensetzen, deren Determinante gleich 1 ist. Diese Untergruppe nennt Lie die specielle lineare Gruppe.

Eine zweite Untergruppe bekommen wir, wenn wir die beiden Constanten c und f gleich 0 annehmen, so dass die Substitutionen in x, y homogene Form bekommen. Dementsprechend nennt Lie diese zweite Untergruppe die allgemeine homogene lineare Gruppe. Nimmt man ferner auch hier wieder die Bedingung hinzu, dass die Determinante der Transformationen gleich 1 sein soll, dann erhalten wir die specielle homogene lineare Gruppe. Man sieht ferner sofort, dass

die specielle lineare Gruppe 5 gliedrig,
die allgeme homogene lineare Gruppe 4 gliedrig,
die specielle, homogene lineare Gruppe endlich 3 gliedrig ist.

Nun wollen wir uns die infinitesimalen Transformationen der Untergruppen bilden. Für die erstgenannte Untergruppe muss:

$(da + 1)(de + 1)$ d. h.: $dd = 1$ oder:

$\underline{da + de = 0}$ sein (indem wir uns auf die Glieder erster Ordnung beschränken.) Dies besagt, dass wir nicht a allein um da ändern können, ohne zugleich e um $de = -da$ zu ändern.

Die betreffende infinitesimale Transformation wird daher gegeben durch die Formeln:

$$dx = x\, da$$
$$dy = y\, de$$
$$= -y\, da$$

und eine beliebige Function F erhält hierbei den Zuwachs: $\delta F = \left(x\frac{\partial F}{\partial x} - y\frac{\partial F}{\partial y}\right) dt$,

woselbst wir dt statt da der gleichmässigen Schreibweise wegen gewählt haben. Bei der speciellen linearen Gruppe bleiben daher nur noch 5 infinitesimale Transformationen übrig, indem die früheren Operationen X_1^c und X_5^c jetzt nur in der Verbindung $X_1^c - X_5^c$ auftreten.

Betrachten wir in gleicher Weise auch die homogene lineare Gruppe, so kommen einfach die Symbole X_3^c und X_6^c hier in Wegfall.

Wir haben noch eine letzte Gruppe anzuführen, die mit den besprochenen in nächster Beziehung steht. Das ist (um gleich wieder die Lie'sche Benennung anzugeben) die projective Gruppe der eindimensionalen Mannigfaltigkeit.

Dieselbe wird gegeben durch die Formel:
$x' = \frac{(a+1)x + b}{d.x + (e+1)}$. Diese Gruppe enthält

wieder 3 unabhängige Parameter, d.h. sie ist dreigliedrig und wir haben diese Parameter wieder so gewählt, dass die Identität durch $a = b = d = e = 0$ gegeben wird.

[Do. 15 VI 93]

Wir werden nun die zugehörigen infinitesimalen Transformationen finden, indem wir die Parameter als Differentiale schreiben; wir erhalten dann:

$x' = ((1+\delta a).x + \delta b).(1 + \delta d.x + \delta e)^{-1}$ oder, indem wir uns auf erste Potenzen der Differentiale in der Entwicklung beschränken:

$x' = x + \delta a.x + \delta b - \delta d.x^2 - \delta e\, x$ oder

$\delta x = (\delta a - \delta e).x + \delta b - \delta d.x^2$. Wir haben in der That die 3 infinitesimalen Transformationen.

1) $\delta x = \delta b$, 2) $\delta x = (\delta a - \delta e).x$, 3) $\delta x = -\delta d.x^2$

Die Symbole dieser unendlich kleinen Transformationen ergeben sich, wenn man bedenkt, dass der Zuwachs einer beliebigen Function $\delta f(x) = \frac{df}{dx} \cdot \delta x = X(f) \delta t$ zu setzen ist, in der Form:

$$1) \; X_0(f) = \frac{df}{dx}, \quad 2.) \; X_1(f) = x \frac{df}{dx}, \quad 3.) \; X_2(f) = x^2 \frac{df}{dx}.$$

Wir haben die Indices $0, 1, 2$ auf der linken Seite gewählt dem Umstande entsprechend, dass rechts die 0^{te}, 1^{te} resp. 2^{te} Potenz der Variabeln x als Coefficient auftritt. Man beachte übrigens ganz besonders, dass diese letzten Formeln in den x eben bis zum 2^{ten} Grade ansteigen, d.h. dass der lineare Character verloren gegangen ist, was denen, die an homogene Schreibweise gewöhnt sind, auf den ersten Blick unbequem erscheinen mag. Es ist lehrreich, sich zu überzeugen, dass die endliche Gruppe, welche von $X_2(f)$ erzeugt wird, in der That linear ausfällt. Wir haben zu dem Zwecke zu schreiben:

$$x' = x + \frac{t}{1} \cdot X_2 x + \frac{t^2}{1.2} \cdot X_2 X_2(x) + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot X_2 X_2 X_2(x) + \ldots\ldots$$

das ist aber:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{tx^2}{1} + \frac{t^2x^3}{1} + \frac{t^3x^4}{1} + \ldots\ldots \\ &= x(1 + tx + t^2x^2 + t^3x^3 + \ldots\ldots) \\ &= \frac{x}{1-tx} \end{aligned}$$

Wir wollen auch die entsprechenden Formeln für die <u>projective Transformation in der Ebene</u> kennen lernen. Dieselbe wird gewöhnlich durch die Formeln gegeben:
$$x' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''},$$

$$y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}.$$
Indem wir jedoch wieder die Identität erhalten wollen, wenn man sämmtliche Parameter verschwinden läßt, legen wir besser die folgende Form zu Grunde:
$$x' = \frac{(1+a).x + by + c}{a''x + b''y + (1+c'')},$$
$$y' = \frac{a'x + (1+b')y + c'}{a''x + b''y + (1+c'')}.$$
Diese Formeln enthalten 8 wesentliche Parameter (da wir ja einen der 9 constant nehmen können).

Nun werden wir wieder die Parameter a, b, c u.s.w. durch ihre Differentiale $\delta a, \delta b, \delta c$ u.s.w. ersetzen und genau so verfahren wie oben für <u>eine</u> Variable. Nach geeigneter Ausrechnung erhält man dann die Symbole der zugehörigen 8 infinitesimalen Transformationen in der Form:
$$\frac{\partial f}{\partial x},\ x\frac{\partial f}{\partial x},\ y\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ x\frac{\partial f}{\partial y},\ y\frac{\partial f}{\partial y},\ x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y}$$

und $xy\frac{\partial f}{\partial y} + y^2\frac{\partial f}{\partial y}$.

Die vorstehenden Beispiele sind uns insbesondere ein Beleg dafür, daß zu einer r-gliedrigen endlichen Gruppe auch allemal r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen gehören. Umgekehrt wird man dann durch Wiederholung dieser infinitesimalen Transformationen die endlichen Transformationen der vorliegenden Gruppe erzeugt denken können, wie wir nicht weiter ausführen.

Nun kommt hinzu die Betrachtung des Klammerausdrucks; wir haben schon das vorige Mal gesagt, daß hierin gerade der Kernpunkt der Lie'schen Theorie ausgesprochen liegt.

Nehmen wir an, daß $X_i(f)$ und $X_k(f)$ 2 infinitesimale Transformationen der Gruppe sind, dann wissen wir von unseren früheren Entwicklungen, daß der Klammerausdruck $(X_i, X_k)(f)$, der sich aus beiden bilden läßt, gleichfalls eine infinitesimale Transformation der Gruppe ist und sich also als eine lineare Verbindung der r gegebenen unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X^{\prime}_{\sigma}$ darstellen lassen muss: $(X^{\prime}_i, X^{\prime}_k) = \sum_1^r c_{ik\sigma} X_\sigma$.

Den hierin ausgesprochenen Satz wollen wir als ersten Fundamentalsatz der Gruppentheorie bezeichnen. Es ist insbesondere zu betonen, dass die Coefficienten $c_{ik\sigma}$ hier Constante sind. Anders war es bei der Betrachtung des vollständigen Systems linearer partieller Differentialgleichungen, von denen irgend zwei durch die Gleichungen $X^{\prime}_i(f) = 0$, $X^{\prime}_k(f) = 0$ gegeben sein mögen. Auch hier mussten sich zwar die Klammerausdrücke $(X^{\prime}_i X^{\prime}_k)$ aus den X_σ linear zusammensetzen lassen in der Gestalt $(X^{\prime}_i X^{\prime}_k) = \sum_1^s \alpha_{ik\tau} X^{\prime}_\sigma$, aber die hier auftretenden Factoren $\alpha_{ik\sigma}$ brauchten keine numerischen Constanten zu sein, sondern konnten irgend welche Funktionen der Coordinaten x_i sein. In der That haben wir gelernt, dass mit einem r-gliedrigen vollständigen System immer eine unendliche Gruppe verknüpft ist, aber keineswegs ohne weiteres eine endliche Gruppe.

Die obigen Constanten $c_{ik\sigma}$ sind nun noch an gewisse Bedingungen gebunden, welche sich bei der Entwicklung der Jacobi'schen Identität ergeben. Es findet doch letztere ihren Ausdruck in der Formel:

$$(X_i^{\iota} \cdot (X_k X_e^{\iota})) + (X_k^{\iota} (X_e^{\iota} X_i^{\iota})) + (X_e^{\iota} (X_i^{\iota} X_k^{\iota})) \equiv 0$$

Indem wir für die ersten Klammerausdrücke ihre Werte einsetzen, erhalten wir:

$$(X_i^{\iota}, \sum_s c_{kes} X_s^{\iota}) + (X_k^{\iota}, \sum_s c_{eis} X_s^{\iota}) + (X_e^{\iota}, \sum_s c_{iks} X_s^{\iota}) \equiv 0$$

oder, indem wir auch die zweiten Klammerausdrücke noch entwickeln, können wir schließlich unsere Identität in der folgenden Doppelsumme darstellen:

$$\sum_s \sum_t (c_{kes} c_{ist} + c_{eis} c_{kst} + c_{iks} \cdot c_{est}) \cdot X_t^{\iota} \equiv 0.$$

Da nun aber zwischen der X_t^{ι} doch keine lineare Gleichung bestehen kann, – denn sie sollen doch unabhängig von einander sein –, so müssen die einzelnen Coefficienten gleich 0 sein, d.h. es ist:

$$\sum_s (c_{kes} c_{ist} + c_{eis} c_{kst} + c_{iks} c_{est}) = 0$$ für beliebige Indices i, k t. Dies sind dann die zwischen den Constanten c bestehenden Relationen.

Die obigen Formeln $(X_i, X_k) = \sum_s c_{iks} X_s^{\iota}$ sind nun um so bemerkenswerter als sie zugleich die nothwendige Bedingung enthalten, damit irgend welche infinitesimale Transformationen $X_1', X_2' \dots X_r'$ wirklich eine r gliedrige Gruppe erzeugen. Hierin liegt der zweite Fundamentalsatz der Lie'schen Gruppentheorie wie wir uns hier ausdrücken wollen, ausgesprochen.

Doch müssen wir den Beweis dieses Umkehrsatzes uns allerdings noch für später aufbewahren; einstweilen begnügen wir uns damit, dass unsere Relationen notwendig sind, damit eine r-gliedrige endliche Gruppe vorliegt.

Wir können jetzt dazu übergehen, einen Teil der speciellen Untersuchungen von Lie kennen zu lernen. Die allgemeine Aufgabe der Gruppentheorie wird die sein: alle Gruppen aufzuzählen. Insbesondere mag man dieses verlangen, wenn die Zahl der Veränderlichen gegeben ist ($n = 1, 2, 3 \dots$) oder aber zweitens, wenn die Parameterzahl gegeben ist ($r = 1, 2, 3 \dots$), oder endlich wenn irgendwelche besondere Eigenschaften der Gruppe gegeben sind, die uns interessieren mögen. Natürlich ist diese Aufgabe nicht so zu verstehen, als sei es möglich, diese Aufzählungen zu vollenden; es wird darauf ankommen, die jedesmal niedrigsten Fälle zu erledigen und von da aus allgemeine Ansätze zu gewinnen. Lie hat in dieser Hinsicht das gewiss sehr überraschende merkwürdige Resultat gefunden, dass in allen genannten Fällen eine begrenzte Zahl getrennter Gruppen-Typen vorhanden ist. Man sollte doch anfangs meinen, dass die Gesammtheit der continuirlichen Gruppen selber ein Continuum bilden würde, im „Gruppenraum" könnte man sagen; doch liegen die Individuen hier im Gegenteil in bestimmten Klassen getrennt.

Die ersten Mittheilungen Lie's über diesen Gegenstand finden sich in den Göttinger Nachrichten vom Dezember 1874; dann folgen in dem norwegischen Archiv Bd. 1, 3 und 4 (1876-79) die ersten ausführlichen Darstellungen, endlich findet sich in den Annalen 16 (1879-80) die erste grössere, zusammenfassende Abhandlung: „Theorie der Transformationsgruppen". Gerade das Studium dieser letzteren Arbeit ist als eine gute Einführung in die ganze Theorie zu empfehlen, mehr noch als das Buch von Lie-Engel, welches zu sehr abstract geschrieben ist.

Beginnen wir nun mit der Bestimmung aller möglichen endlichen Gruppen für $n = 1$. Wir wollen uns zunächst einmal alle continuirlichen projectiven Transformationsgruppen einer Veränderlichen aufschreiben, die uns bekannt sind, oder von deren Vorhandensein man sich sofort überzeugen kann:

1.) $x' = x + a$

2.) $x' = (1+a) \cdot x$

3.) $x' = (1+a)x + b$

4.) $x' = \frac{(1+a)x+b}{cx+(1+d}$. Diese letzte Formel stellt die bereits behandelte allgemeine projective Gruppe dar; die erste und zweite Gruppe haben im übrigen je einen Parameter, die dritte Gruppe hat 2, die vierte Gruppe 3 Parameter. Die zugehörigen infinitesimalen Transformationen werden in ihren Symbolen, wie folgt, gegeben:

Ad. 1.) $\mathcal{X} = \frac{df}{dx}$

Ad. 2.) $\mathcal{X} = x\frac{df}{dx}$,

Ad. 3.) $\mathcal{X}_0 = \frac{df}{dx}$, $\mathcal{X}_1 = x\frac{df}{dx}$.

Ad. 4.) $\mathcal{X}_0 = \frac{df}{dx}$, $\mathcal{X}_1 = x\frac{df}{dx}$, $\mathcal{X}_2 = x^2\frac{df}{dx}$

d.h. wir bekommen für 1 und 2. <u>eine</u>, für

3 zwei, für 4 drei infinitesimale Transformationen, wie es sein muß. Die letzteren insbesondere haben wir bereits am Anfang der Stunde aufzustellen Gelegenheit gehabt. Diesen Angaben wollen wir sogleich noch das System der Klammerausdrücke, die sich bilden lassen, hinzufügen: Die Gruppen 1. u. 2 gestatten natürlich keine Klammerausdrücke. Dagegen gilt:

<u>ad 3.</u> $$(X_0, X_1) = \frac{d}{dx}\left(x\frac{df}{dx}\right) - x\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$= \frac{df}{dx}$$

oder:

$$(X_0, X_1) = X_0$$

Analog haben die Klammerausdrücke für den Fall der vierten Gruppe die Gestalt:

<u>ad. 4.</u> $$(X_0, X_1) = X_0$$

$$(X_0, X_2) = 2X_1$$

$$(X_1, X_2) = X_2$$

In dem Vorstehenden haben wir natürlich erst

Beispiele für Gruppen von einer Variabeln kennen gelernt. Es gilt nun, die continuirlichen Gruppen einer Variabeln allgemein zu betrachten. Wir behaupten betreffs dieser Untersuchung:

1.) <u>Es giebt keine anderen continuirlichen projectiven Transformationsgruppen bei einer Veränderlichen als diese 4.</u> Dieser Satz ist ja sehr einleuchtend, doch werden wir hernach einen genauen Beweis geben.

Wir haben ferner doch solche Gruppen, welche durch Punkttransformationen in einander übergehen, <u>ähnliche</u> Gruppen genannt. Da ist dann leicht zu sehen, daß die erste und die zweite der genannten projectiven Gruppen einander ähnlich sind. Denn gehen wir von

2) $x' = (1+a)\cdot x$ zu der logarithmirten Gleichung über

2') $\log x' = \log x + \log(1+a)$ und substituiren $\log x' \parallel \xi$, $\log x \parallel \xi'$, und $\log(1+a) \parallel a'$, so geht diese letzte Gleichung sofort in die Form der Transformationsgleichung der ersten Gruppe über.

Vom Standpunkte aller Punkttransformationen aus, wo wir gleichmäßig über beliebige transcendente Funktionen verfügen ergeben sich daher die Typen 1, 2 als ähnliche Typen, so daß uns die projectiven Gruppen insgesammt nur 3 Typen repräsentiren.

Nun besteht:

2) der allgemeine Satz, den Lie im Jahre 1874 entdeckt hat, daß vom Standpunkt aller Punkttransformationen aus, wo ähnliche Gruppen als gleichwertig gelten, überhaupt keine anderen endlichen Transformationsgruppen einer Veränderlichen existiren als diejenigen, die im Beispiel durch 1, 3, 4 gegeben sind.

Wir fügen noch sogleich hinzu: Die Parameterzahl einer endlichen Transformationsgruppe einer Veränderlichen kann demnach nur 1, 2 oder 3 sein, und zwar kommt je nachdem sie 1, 2 oder 3 ist, jedesmal ein bestimmter der genannten 3 Typen in Betracht.

Für diesen letzten Satz gilt [Fr. 16 VI 93. es nun den Beweis zu erbringen: Gesetzt wir hätten eine r-gliedrige Gruppe mit folgenden r infinitesimalen Transformationen vorliegen:

$$X_0 f = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots) \frac{df}{dx}$$
$$X_1 f = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots) \frac{df}{dx}$$
$$\vdots$$
$$X_{r-1} f = (m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots\ldots) \frac{df}{dx}.$$ Wir

haben uns hier die Coefficienten von $\frac{df}{dx}$ sogleich in der Umgebung der Nullstelle nach Potenzen von x entwickelt gedacht. Indem wir solcherweise den Coordinatenanfangspunkt bevorzugen, <u>zerfallen die infinitesimalen Transformationen überhaupt in solche 0^{ter} Ordnung, erster Ordnung u. s. w.</u> fort, d. h. in solche, in welchen der erste Coefficient der Reihenentwicklung nicht verschwindet, in solche, in welchen der Coefficient von x^0 zwar verschwindet, aber nicht der von x^1 u. s. w., und hier sind es dann nur die Transformationen 0^{ter} Ordnung, die den Anfangspunkt selbst verschieben, die anderen lassen den Anfangspunkt fest. Nachdem wir dies verabredet haben, sage ich, dass unter den infinitesimalen Transformationen mindestens <u>eine</u> von der nullten Ordnung ist, insofern der Coordinatenanfangspunkt willkürlich gewählt sein soll. Denn wären sämmtliche Transformationen wenigstens von der ersten Ordnung, so würde ja bei ihnen allen der Anfangspunkt festbleiben, was gewiss auf eine ganz specielle Auswahl des Coordinatenanfangspunktes schliessen lassen würde.

Eine solche Transformation nullter Ordnung wollen wir jetzt als erste X_0 gewählt annehmen, so daſs sicher $a_0 \gtrless 0$ ist. Wir wollen nun durch a_0 den Coefficienten von $\frac{df}{dx}$ dividirt denken, so daſs die neue Potenzentwickelung jetzt mit 1 beginnt, mit anderen Worten wir setzen voraus, daſs X_0^c bereits diese Form besitzen möge:

$$X_0^c = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \cdot \frac{df}{dx}.$$

Jetzt gehen wir dazu über die folgenden Transformationen $X_1^c, X_2^c \dots$ zweckmäſsig zu vereinfachen. Wir können doch z. B. an Stelle von X_1^c irgend eine lineare Combination von X_0^c und X_1^c setzen; als solche wählen wir $X_1^c - b_0 X_0^c$. Dies kommt dann darauf hinaus, daſs in der zweiten Transformation, die wir der Einfachheit halber wieder X_1^c nennen wollen, das Glied b_0 fortfällt. Gleicherweise denken wir mit den übrigen Transformationen $X_2^c, X_3^c \dots X_r^c$ verfahren, mit anderen Worten: wir dürfen, nachdem wir X_0^c einmal in verabredeter Weise gewählt haben, alle anderen infinitesimalen Transformationen von vornherein von höherer als der nullten Ordnung annehmen.

Nun wiederholen wir dieselbe Ueberlegung für diese letzten $\underline{r} - 1$ Transformationen höherer Ordnung. Von ihnen ist mindestens eine von <u>erster</u> Ordnung, da sonst wieder der Anfangspunkt sehr singulär gewählt sein würde, eine solche Transformation wollen wir sogleich wieder als mit X_1^t bezeichnet annehmen, was darauf hinauskommt, dass $b_1 \gtrless 0$ sein wird. Wir denken ferner wieder durch b_1 dividirt, so dass X_1^t, wie folgt lauten möge:

$$X_1^t = (x + b_2 x^2 + \dots) \cdot \frac{df}{dx}.$$

In derselben Weise gehen wir jetzt weiter. Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir X_2 und die folgenden infinitesimalen Transformationen von höherer Ordnung als der ersten annehmen, von ihnen ist anderseits wieder mindestens eine von der zweiten Ordnung, diese sei X_3^t genannt, und in ihr überdies der Coefficient c_2 durch Division fortgeschafft u. so fort. Wir dürfen demgemäss jetzt annehmen, ohne der Allgemeinheit der Betrachtung Abbruch zu thun, dass die Reihenentwicklung in X_0^t mit 1, die in X_1^t mit x, die in X_ν mit x^ν beginnt, wie es das folgende Schema zeigt:

$$X_0 = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + + a_3 x^3 + \dots) \cdot \frac{df}{dx},$$

$$\mathfrak{X}^c_1 = (\quad x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots\ldots) \frac{df}{dx},$$

$$\mathfrak{X}^c_2 = (\qquad x^2 + c_3 x^3 + \ldots\ldots) \frac{df}{dx},$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{X}^c_{r-1} = (\qquad\qquad x^{r-1} + \ldots\ldots) \frac{df}{dx}$$

Hiermit ist <u>die Präparation unserer Formelgruppe</u>, wie wir dies nennen können, zu Ende.

An diese präparirten Formeln für $\mathfrak{X}^c_\nu$ knüpfen wir nun an, um uns die Klammerausdrücke zu bilden.

Aus $\mathfrak{X}^c_i = (x^i + \ldots) \frac{df}{dx}$ und

$$\mathfrak{X}^c_k = (x^k + \ldots) \frac{df}{dx} \text{ für } i \geqq k$$

folgt, wenn wir nur die niedrigsten Glieder der Potenzentwickelungen hinschreiben:

$$(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{X}_k) = \frac{x_i\, d\left(x^k \frac{df}{dx}\right)}{dx} - x^k \cdot \frac{d\left(x^i \frac{df}{dx}\right)}{dx},$$

$$(\mathfrak{X}^c_i, \mathfrak{X}^c_k) = \left[(k-i)\, x^{i+k-1} + \ldots\right] \cdot \frac{df}{dx}.$$

Indem der Coefficient $k-i$ sicher von Null ver.

schieden ist, gewinnen wir den Satz: Combiniren wir unsere Transformation i^{ter} Ordnung mit unserer Transformation k^{ter} Ordnung, so entsteht eine neue Transformation von der $(i+k-1)$sten Ordnung. Diese Transformation muss also gleichfalls in unserer Gruppe enthalten sein und somit sich als lineare Verbindung der $H_0\, H_1 \dots H_{r-1}$ darstellen lassen. – Bilden wir nun jetzt den Klammerausdruck für unsere beiden letzten Transformationen, d.h. für H_{r-2} und H_{r-1}, so werden wir finden, dass die Potenzentwicklung des Coefficienten in (H_{r-2}, H_{r-1}) mit der Potenz x^{2r-4} beginnt, die den Coefficienten 1 besitzt. Diese neue Transformation soll nun eine lineare Verbindung der gegebenen sein, d.h. es muss die Gleichung gelten:

$$(H_{r-2}, H_{r-1}) = c_0 H_0 + c_1 H_1 + \dots + c_{r-1} H_{r-1}.$$

hier sollen also auf der rechten Seite sich alle Glieder bis zu x^{2r-4} fortheben und dieses selbst mit dem Coefficienten $+1$ auftreten. Daraus folgt ersichtlich dass notwendig $2r-4 \leqq r-1$ oder $\leqq 3$ sein muss. Und damit haben wir das merkwürdige Theorem von der Begränzung der Parameterzahl: Die Zahl r der Parameter in einer endlichen Transformationsgruppe einer Veränderlichen kann nicht größer als 3 sein.

Wenn wir jetzt weiter alle Gruppen aufzählen wollen, die es giebt, so werden wir uns auf Grund des letzten Satzes auf eingliedrige, zweigliedrige und dreigliedrige Gruppen zu beschränken haben. Betrachten wir zunächst den Fall, daß eine eingliedrige Gruppe vorliegt, d.h. auch nur eine erzeugende infinitesimale Transformation, die wir in der Gestalt gegeben annehmen: $X_0(f) = \varphi(x)\frac{df}{dx}$. Ich behaupte, die zugehörige endliche Gruppe kann man immer durch eine Punkttransformation in die Gestalt setzen: $x' = x + t$. Diese Behauptung erweist sich nur als spezieller Fall der früheren Aussage, nach welcher jede eingliedrige Gruppe bei beliebig vielen Veränderlichen mit einer Translationsgruppe ähnlich ist. Im übrigen wollen wir mit wenigen Zeilen den damaligen Beweis hier wiederholen. Es wird der Zuwachs von x vermöge unserer infinitesimalen Transformation gleich: $\delta x = \varphi(x)\,\delta t$. Wir schreiben nun $\frac{\delta x}{\varphi(x)} = \delta t$ und $\frac{\delta x}{\varphi(x)} = \delta\xi$, d.h. $\xi = \int\frac{dx}{\varphi(x)}$, dann wird $\delta\xi = \delta t$ oder:

$\xi' = \xi + t$. Solcherweise erhält man sofort die Gestalt einer Translationsgruppe.

Wir wenden uns nun zu dem Fall <u>der zweigliedrigen Gruppe</u>, den wir gleich so präpariert denken, dass wir die Reihenentwickelungen haben:

$$\mathcal{X}_0 f = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \frac{df}{dx},$$

$$\mathcal{X}_1 f = (x + b_2 x^2 + \dots\dots) \frac{df}{dx}.$$

Der Klammerausdruck $(\mathcal{X}_0 f\, \mathcal{X}_1 f)$ wird dann selbst auch eine Reihenentwicklung geben, die mit 1 beginnt. Dies besagt, dass: $(\mathcal{X}_0 f, \mathcal{X}_1 f) = \mathcal{X}_0 f + \lambda \mathcal{X}_1 f$ sein muss, unter λ eine unbekannte Constante verstanden. Wenn wir dann von $\mathcal{X}_0 f + \lambda \mathcal{X}_1 f$ und $\mathcal{X}_1$ den Klammerausdruck bilden, so finden wir, dass gerade wieder $\mathcal{X}_0 f + \lambda \mathcal{X}_1 f$ herauskommt, d.h. <u>Es giebt eine Transformation $\mathcal{X}_0 f + \lambda \mathcal{X}_1 f$ nullter Ordnung, welche mit $\mathcal{X}_1 f$ im Klammerausdruck verbunden sich selbst reproducirt.</u>

Nun wählen wir natürlich (im Hinblick auf die zweigliedrige projective Gruppe, die uns als Normalform vorschwebt) diese Transformation $X^c_0 + \lambda X^c_1$ an Stelle der ursprünglichen X^c_0 als erzeugende Operation, und wollen sie dann gleich wieder mit X^c_0 bezeichnet annehmen. Dies besagt, dass wir unbeschadet der Allgemeinheit das X^c_0 und X_1 immer so annehmen können, dass $(X^c_0 X^c_1) = X^c_0$ wird. Nun haben wir gleich gewonnenes Spiel. Zunächst sagen wir jetzt, dass wir doch offenbar durch geeignete Koordinatentransformationen dem X^c_0 die Gestalt geben können: $X^c_0 = 1 \cdot \frac{df}{dx}$, wie wir das soeben im Falle der eingliedrigen Gruppen angeführt haben.

Durch diese Substitution wird aber die Eigenschaft dass $(X^c_0 X^c_1) = X^c_0$ ist, nicht geändert*). Es sei nun $X^c_1 = \psi(x)\frac{df}{dx}$. Rechnen wir den bezüglichen Klammerausdruck $(X^c_0 X^c_1)$ aus, so finden wir denselben gleich $\psi'(x)\frac{df}{dx}$. Da nun $(X^c_0 X^c_1) = X^c_0$ sein soll, so bekommen wir die Gleichung $\psi'(x) = 1$, d.h. $\psi = x + C$. Die Constante C müssen wir hier aber fortlassen, da ja X^c_1 eine Transformation <u>erster</u> Ordnung sein sollte. Also $\psi(x) = x$.

---

*) insofern $(X^c_i X^c_k)$ bei beliebigen Punkttransformationen invariant ist, wie man sofort nachrechnet.

Wir haben hiernach allgemein für jede 2gliedrige Gruppe wirklich die projective Normalform hergestellt:

$$\mathcal{H}^{c}_{0} = 1 \cdot \frac{df}{dx},$$

$$\mathcal{H}^{c}_{1} = x \cdot \frac{df}{dx}.$$

Nun wollen wir schliesslich auch die analogen Betrachtungen für die dreigliedrige Gruppe durchführen: Die Untersuchung gliedert sich genau in derselben Weise, wie soeben, nur ist sie natürlicherweise ein wenig complicirter.

Wir gehen aus von den 3 infinitesimalen Transformationen:

$$\mathcal{H}^{c}_{0} = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots) \frac{df}{dx},$$

$$\mathcal{H}^{c}_{1} = (\quad x + b_2 x^2 + \ldots\ldots) \frac{df}{dx},$$

$$\mathcal{H}^{c}_{2} = (\quad\quad x^2 + \ldots\ldots\ldots) \frac{df}{dx},$$

Wir müssen nun sehen, dass wir gerade das Schema 4 der vorigen Stunde aus den vorstehenden Transformationen ableiten. Zu dem Zweck bilden wir zunächst die Klammerausdrücke

$(X^c_0 X^c_1)$, $(X^c_0 X^c_2)$ u. $(X^c_1 X^c_2)$ und haben dann durch Einführung passender Verbindungen der X^c_0, X^c_1, X^c_2 es herbeizuführen, dass $(X^c_0 X^c_1) = X^c_0$, $(X^c_0 X^c_2) = 2X^c_1$, $(X^c_1 X^c_2) = X^c_2$ werden.

Haben wir diese „Zusammensetzung" der Gruppe erreicht, dann machen wir eine Coordinatentransformation, die uns wirklich die infinitesimalen Transformationen der projectiven Gruppe liefert. Im einzelnen lassen sich diese einzelnen Schritte wie folgt ausführen:

Zunächst werden wir allgemein setzen:

$$(X^c_1 X^c_2) = \lambda_0 X^c_0 + \lambda_1 X^c_1 + \lambda_2 X^c_2,$$

$$(X^c_2 X^c_0) = \mu_0 X^c_0 + \mu_1 X^c_1 + \mu_2 X^c_2,$$

$$(X^c_0 X^c_1) = \nu_0 X^c_0 + \nu_1 X^c_1 + \nu_2 X^c_2.$$

Nun werden wir die Jacobische Identität heranziehen, um zwischen den auf der rechten Seite stehenden Constanten, welche wir früher wohl mit c_{iks} bezeichnet haben, Beziehungen zu finden:

Es kommt: $\lambda_0 \nu_1 - \lambda_1 \nu_0 = \lambda_0 \mu_2 - \lambda_2 \mu_0$;

$\mu_1 \nu_0 - \mu_0 \nu_1 = \mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1$,

$\nu_2 \lambda_1 - \nu_1 \lambda_2 = \nu_2 \mu_0 - \nu_0 \mu_2$. Obige

Gleichungen stellen das allgemeinste Zusammensetzungschema einer 3 gliedrigen Gruppe dar.

Da nun aber unsere Transformationen $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}'_1$, $\mathcal{H}'_2$ entsprechend von der 0., 1. oder 2. Ordnung sind, so wird sich dieselbe bei uns so vereinfachen, dass wir schreiben können:

$$(\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2) = \mathcal{H}'_2$$

$$(\mathcal{H}'_2\ \mathcal{H}'_0) = -2\mathcal{H}'_1 + \mu_2 \mathcal{H}'_2$$

$$(\mathcal{H}'_0\ \mathcal{H}'_1) = \mathcal{H}'_0 + \nu_1 \mathcal{H}'_1 + \nu_2 \mathcal{H}'_2$$

Auf Grund der Jacobischen Identitätsgleichungen folgt dann weiter, dass $\mu_2 = \nu_1$ ist; dann sind die 3 Coefficientengleichungen sämmtlich identisch erfüllt. Wir erhalten daher das Schema:

$$(\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2) = \mathcal{H}'_2$$

$$(\mathcal{H}'_2\ \mathcal{H}'_0) = -2\mathcal{H}'_1 + \nu_1 \mathcal{H}'_2$$

$$(\mathcal{H}'_0\ \mathcal{H}'_1) = \mathcal{H}'_0 + \nu_1 \mathcal{H}'_1 + \nu_2 \mathcal{H}'_2 .$$

Nun machen wir die folgende einfache Substition: $\mathcal{H}'^{\prime}_0 = \mathcal{H}'_0 + \nu_1 \mathcal{H}'_1 + \frac{\nu_2}{2} \mathcal{H}'_2$ an Stelle von $\mathcal{H}'_0$ selbst; dann bekommen wir für die neuen Klammerausdrücke die Formeln:

$$(X_1^c, X_2^c) = X_2^c$$

$$(X_2^c, X_0^{c\prime}) = -2 X_1^c$$

$$(X_0^{c\prime} X_1^c) = X_0^c + \nu_1 X_1^c + \frac{\nu_2}{2} X_2^c = X_0^c \; !$$

<u>d. h. unsere Zusammensetzungsformeln haben genau die Gestalt angenommen, welche wir bei der dreigliedrigen projectiven Gruppe kennen.</u>

Nichts ist leichter, als nunmehr durch einen Wechsel der Variabelen wirklich zur dreigliedrigen projectiven Gruppe überzugehen.

So 17 VI 93]. Wir werden nämlich jetzt wieder eine solche Coordinatentransformation ausführen, dass $X_0^c = \frac{df}{dx}$ sind, d. h. dass X_0 als eine einfache Translation erscheint, wie wir es bereits im Beispiel der ein- und zweigliedrigen Gruppe analog gethan haben. Dann folgt aus $(X_0^c X_1^c) = X_0^c$ und $(X_0^c X_2^c) = 2 X_1^c$, dass:

$$X_1^c = x \frac{df}{dx} \text{ und}$$

$$X_2^c = x^2 \frac{df}{dx}$$ wird. Das

Merkwürdige ist nur, sozusagen, daſs hiermit zugleich auch die Relation $(X_0\, X_2^c) = 2 X_1^c$ erfüllt ist.

Hiermit haben wir nun folgerichtig bewiesen, daſs es vom Standpunkte aller Punkttransformationen für die M_1 nur die angeführten 3 endlichen continuirlichen Gruppen giebt, deren allgemeinste Form durch die Substitution $x' = \dfrac{(1+a)\,x + b}{c\,x + (1+d)}$ gegeben wird. Demgemäſs werden wir bei Zugrundelegung einer endlichen continuirlichen Gruppe im eindimensionalen Gebiete auch keine andere Geometrie erhalten als die projective Geometrie, so daſs die letztere hier eine gewiſse absolute Bedeutung beanspruchen kann.

Wir haben nun schon gesagt, daſs es vom Standpunkte aller projectiven Punkttransformationen überhaupt 4 projective Gruppen der eindimensionalen Mannigfaltigkeit giebt, während vom Standpunkt aller Punkttransformationen es sogar nur 3 Gruppen giebt. Doch auf Grund des besonderen Interesses, welches es für sich hat alle projectiven Gruppen der M_1 zu kennen, werden wir jetzt den Beweis dieser Behauptung nachgetragen haben. Die 4 Gruppen werden durch die Formeln gegeben:

1.) $x' = x + b$, 2.) $x' = (1+a) \cdot x$, 3.) $x' = ax + b$, 4.) $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$; von ihnen sind die Gruppen 1 u. 2 eingliedrig, 3 zweigliedrig, 4 dagegen dreigliedrig.

Beweis: Wenn wir eine einzige lineare Substitution haben, die wir in der homogenen Form voraussetzen wollen:

$$\varrho x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$\varrho x_2' = \gamma x_1 + \delta x_2$$, so hängen die festbleibenden Punkte der Mannigfaltigkeit von der Determinantengleichung: $\begin{vmatrix} \alpha - \varrho & \beta \\ \gamma & \delta - \varrho \end{vmatrix} = 0$ ab.

Hat diese getrennte Wurzeln für ϱ, so bleiben zwei Punkte des Gebildes fest; hat sie eine Doppelwurzel, so bleibt ein Punkt des Gebildes fest. Diesen letzten Fall pflegt man in der Functionentheorie ja als parabolischen Fall zu bezeichnen, während der Fall zweier getrennter Fixpunkte, je nachdem die Bezeichnung als loxodromische, elliptische oder hyperbolische Substitution bekommt.

Bleiben nun 2 Punkte fest, so denken wir uns dieselben durch geeignete lineare Transformationen in die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ verlegt. Die vorliegende Substitution geht dann über in die folgende: $\underline{x' = (1+a)\,x}$. Bleibt aber nur ein Punkt fest, so verlegen wir denselben nach $x = \infty$; dann wird die einzelne Substitution notwendig die Gestalt bekommen: $\underline{x' = x + \beta}$. Diese kanonischen Formen der einzelnen linearen Substitution gelten nun insbesondere auch für die ∞ kleinen Transformationen. Die einzelne ∞ kleine Transformation, die wir als erzeugende Operation unserer Gruppe ansehen, wird daher entweder: $x' = (1 + da)\,x$ oder

$x' = x + db$ heissen

müssen. Indem aus ihnen sich dann die endlichen Gruppen $x' = (1+a)\,x$ und $x' = x + b$ aufbauen, ist bewiesen, dass es keine anderen eingliedrigen projectiven Gruppen giebt als diese beiden.

Wir wollen nun weiter sehen, wie wir eine <u>2gliedrige Gruppe</u> allgemein aufbauen. Diese wird zwei erzeugende infinitesimale Transformationen haben: $X_0(f)$ und $X_1(f)$. Wir haben bereits gesehen, dass man dieselben immer so auswählen kann, dass $(X_0\, X_1) = X_0$ ist. Nun wollen wir eine solche lineare Coordinatentransformation ausgeführt denken, dass X_0^c in seine kanonischen Formen übergeht, also entweder $X_0 = \frac{df}{dx}$ oder aber

$$X_0 = x\frac{df}{dx}.$$

Was wird dann jedesmal aus der Transformation X_1^c werden? Wir können offenbar immer setzen: $X_1^c(f) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{df}{dx}$, denn dies ist der allgemeine Typus der ∞ kleinen linearen Transformation. Nun muss aber $X_1(f)$ die Beziehung $(X_0^c X_1^c) = X_0^c$ befriedigen. Machen wir dann die erste Annahme $X_0 = \frac{df}{dx}$, so werden wir einfach bekommen:

$$\frac{d(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)}{dx} = 1 \text{ oder}$$

$c_1 + 2c_2 x = 1$, d.h. $c_1 = 1$ u. $c_2 = 0$. Wir erhalten demnach als Lösung: $X_1 = (c_0 + x)\frac{df}{dx}$ oder

indem wir noch das Glied c_0 fortlassen, da wir ja event. $c_0\frac{df}{dx} = c_0 X_0$ subtrahieren könnten,

$X_1^c = x\frac{df}{dx}$. $X_0^c = \frac{df}{dx}$ u. $X^c = x\frac{df}{dx}$ führt uns

aber zu den endlichen Transformationen: $x' =$

$= (1+a) \cdot x + b$, d.h. genau zu der 2 gliedrigen Gruppe, die wir bereits kennen.

Dagegen die zweite Annahme $X_0 = x \frac{df}{dx}$ verlangt, wenn wir wieder $X_1' = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \cdot \frac{df}{dx}$ setzen und den Klammerausdruck $(X_0' X_1')$ berechnen, dass:

$$x \cdot \frac{d\left[(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \frac{df}{dx}\right]}{} - (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \frac{d\left(x \frac{df}{dx}\right)}{dx} =$$

$$= x \frac{df}{dx} \quad \text{oder} \; - c_0 \frac{df}{dx} + c_2 x^2 \frac{df}{dx} = x \frac{df}{dx}$$

d.h. $c_2 x^2 - c_0 = x$ sein müsste, was unmöglich ist. Die zweite Möglichkeit, dass $X_0' = x \frac{df}{dx}$ wäre, führt daher zu einem Widerspruch und existiert folglich nicht. Es giebt also nur den einen Typus einer zweigliedrigen continuirlichen projectiven Gruppe, einer Veränderlichen vom projectiven Standpunkte aus.

Dass es endlich keine andere eingliedrige Gruppe giebt als den einen allgemeinen Typus, ist an und für sich klar. Hiermit haben wir dann auch den Fall speciell der projectiven Gruppen einer Veränderlichen absolviert.

Wir wenden uns nun zu dem Fall $n = 2$, den Lie in Ann. 16 behandelt hat, also zur Bestimmung aller Transformationsgruppen der Ebene, doch können wir jetzt nicht mehr wie soeben alle Sätze mit vollständigen Beweisen vortragen, da zu viel Fallunterscheidungen in Frage kommen. Wir müssen uns auf ein Referat beschränken, welches die einzelnen Hauptpunkte andeutet. Wir nennen die beiden Variabeln x u. y und denken sie am einfachsten als Coordinaten in der Ebene.

1.) Wir denken uns wieder einen beliebigen Punkt als Anfangspunkt für $x=0$ u. $y=0$ ausgewählt und in der Nähe desselben Reihenentwickelungen der verschiedenen $X(f)$ gegeben. Dann werden wir wieder infinitesimale Transformationen 0ter, 1ter, 2ter .... u. s. w. Ordnung unterscheiden, je nachdem die Reihenentwicklung mit Gliedern der 0ten, 1ten, 2ten ... Potenz der Variabeln x und y beginnt. Z. B. bilden $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$ selbst die einfachsten Beispiele einer Transformation 0ter Ordnung; der Zuwachs der beiden Coordinaten wird entsprechend durch: $\delta x = \delta t$, $\delta y = 0$ resp. $\delta x = 0$, $\delta y = \delta t$ gegeben, so dass allgemein eine Funktion F um $\frac{df}{dx} = \delta t$ resp. $\frac{df}{dy}\delta t$ zunimmt.

Transformationen erster Ordnung sind z. B. $x\frac{df}{dx}, y\frac{df}{dx}, x\frac{df}{dy}, y\frac{df}{dy}$, Transformationen 2ter Ordnung: $x^2\frac{df}{dx}, xy\frac{df}{dx}$ u. s. w.

2) Das zweite Moment ist natürlich, dass man die Klammerausdrücke heranzieht, für welche dann die Relationen $(X_i\, X_k) = \sum c_{iks} X_s$ zu gelten haben.

3) Drittens macht Lie von einem geometrischen Hülfsmittel Gebrauch; er redet nämlich nicht nur von Punktcoordinaten der Ebene, sondern zieht auch die Linienelemente heran und sieht zu, wie diese transformirt werden. Unter einem Linienelement in der Ebene haben wir doch das Verbindungsstück der Punkte x, y und $x + dx$, $y + dx$ seiner Lage und Richtung nach zu verstehen; die Coordinaten der einzelnen Linienelemente sind demnach x, y und $\frac{dy}{dx} = y'$.

Nun ist die Frage, wenn irgend eine infinitesimale Punkttransformation gegeben ist: $X(f) = \xi\cdot\frac{df}{dx} + \eta\cdot\frac{df}{dy}$, woselbst ξ u. η irgendwelche Function von x und y sind, wie wirkt diese auf die Linienelemente der Ebene? Der einzelne Punkt x, y wird um $\delta x = \xi\,\delta t$ und $\delta y = \eta\cdot\delta t$ verschoben, der benachbarte Punkt $x + dx, y + dy$ dementsprechend um $\delta(x + dx) = (\xi)_{x+dx,y+dy}\cdot\delta t = (\xi + \frac{\partial\xi}{dx}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy)\,\delta t$ und

$$\delta t(y + dy) = (\eta)_{x+dx,y+dy}\cdot\delta t = (\eta + \frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy)\,\delta t.$$

Demnach geht y' über in:

$$y' + \delta y' = \frac{dy + (\frac{\partial\eta}{dx}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy)\,\delta t}{dx + (\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy)\,\delta t} \quad \text{oder:}$$

$$= \frac{y' + (\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}y')\,\delta t}{1 + (\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y')\,\delta t.}$$

Indem wir wieder den Nenner als (-1) <u>te</u> Potenz in den Zähler setzen und nach Potenzen von δt entwickeln, bekommen wir:

$$\delta y' = (\frac{\partial\eta}{\partial x} + (\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x})\,y' - \frac{\partial\xi}{\partial y}y'^2)\,\delta t.$$

Wenn wir jetzt x, y und y' als Variable ansehen, so werden dieselben folgende infinitesima, le Transformation erleiden:

$$X^{\prime}(f) = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y^{\prime} - \frac{\partial \xi}{\partial y} y^{\prime 2} \right) \frac{\partial f}{\partial y^{\prime}},$$

Diese Transformation nennt Lie di erste er-weiterte Transformation zu der gegebenen Trans-formation $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$. (Man kann auch zweite Erweiterungen in Betracht ziehen, in denen dan 2te Differentialquotienten vorkommen, d.h. nicht Linienelemente, sondern Liniencalotten trans-formirt werden etc.)

Diese kleine Entwicklung können wir nun in Verbindung setzen mit der Darstellung unserer Transformation im Anfangspunkt O (der unseinen beliebigen Punkt der Ebene vertritt) Wir wollen insbesondere diejenigen Transformationen un-serer Gruppe betrachten, die den Nullpunkt fortlassen, (und also für sich eine Untergruppe bilden) d.h. Transformationen von erster und höherer Ordnung. Indem wir dann unser Au-genmerk auf die von O auslaufenden Linien-elemente richten, gelten folgende Sätze:

Transformationen 2. oder noch höherer Ord.

nung lassen die sämmtlichen genannten Linienelemente überhaupt elementenweise ungeändert; die Transformationen erster Ordnung aber transformiren diese Elemente linear.

Um diese Sätze zu beweisen, knüpfen wir an unsere Formel für $\delta y'$ an. Nehmen wir hier Transformationen zweiter oder höherer Ordnung, so verschwinden $\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$ u.s.w. für $x=0$, $y=0$ und $\delta y'$ wird gleich 0.

Für Transformationen erster Ordnung aber werden $\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$ ... Constante, und wir erhalten:

$\delta y' = (c_0 + c_1 y' + c_2 y'^2) . \delta t$; die projective Natur der Transformation der Linienelemente zeigt sich dann eben darin, dass in der Klammer y' nur bis zur zweiten Potenz vorkommt.

[Mo. 19 V 93] Wir fahren heute fort, über den einen oder anderen Punkt zu referieren, den Lie teils durch Rechnung teils durch geometrische Betrachtungen in Ann. 16 entwickelt hat.

Wir haben am Schlusse der letzten Stunde gesehen, dass diejenigen infinitesimalen Transformationen einer Gruppe, welche den Anfangspunkt festlassen, die von ihm auslaufenden Linienelemente projectiv transformiren. Wir wissen aber bereits, dass es (einschliesslich der Identität) nur die folgenden 5 Typen projectiver Umformungen einer M_1 giebt:

1) $x' = x$.
2) $x' = x + b$
3) $x' = (1+a)\,x$
4) $x' = (1+a)\,x + b$
5) $x' = \dfrac{(1+a)\,x + b}{c\,x + (1+d)}$.

Diese 5 Typen die in 0gliedrige, eingliedrige, zweigliedrige und dreigliedrige zerfallen, werden daher auch betreffs der Transformation des Büschels unserer Linienelemente zu unterscheiden sein.

Wir wollen einmal die Transformationen 2, 3, 4 einen Augenblick noch näher betrachten. Bei den Transformationen der Gruppe $x' = x + b$ bleibt $x = \infty$ d. h. ein Linienelement ungeändert, bei $x' = (1+a)\,x$ dagegen gilt gleiches für die beiden Linienelemente $x = 0$ und $x = \infty$, endlich bei $x' = (1+a)\,x + b$ bleibt wieder nur ein Linienelement $x = \infty$ fest. Wir haben dann also von 0, und so von jedem anderen Punkte auslaufend, ein oder zwei ausgezeichnete Linienelemente.

Diese von den verschiedenen Punkten auslaufenden Linienelemente werden bei jeder Transformation der Gruppe unter einander vertauscht werden. Jetzt wollen wir unsere Linienelemente zu Curven an einander reihen.

Wir schliessen, dass in den Fällen 2, 3, 4 die Ebene von einem oder auch von 2 invarianten Curvensystemen überdeckt wird, d.h. von Curvensystemen, welche bei der vorgelegten Gruppe in sich selbst verwandelt werden. Wenn nun ein solches Curvensystem vorliegt, so führe man mit Lie neue Coordinaten ein der Art, dass dies Curvensystem in $x = \text{Const}$ übergeht; liegen aber 2 Curvensysteme vor, so sollen diese in den neuen Coordinaten durch $x = \text{Const.}$, $y = \text{Const}$ gegeben sein.

Wir haben dann eine Gruppe, welche die Parallellinien $x = c$, oder auch die Parallellinien $x = c$ und $y = c'$ mit einander vertauscht. Nun bilden diese Parallellinien doch jedesmal wieder eine infinitesimale Mannigfaltigkeit. Lie unterscheidet demnach des Weiteren, wie diese Curven bei der vorgelegten Transformationsgruppe unter sich vertauscht werden und hat offenbar wieder die 4 Möglichkeiten auseinander zu halten die überhaupt bei eindimensionalen Mannigfaltigkeiten vorliegen, dass nämlich die Curven nullgliedrig, eingliedrig, zweigliedrich oder dreigliedrig vertauscht werden. Durch solche und ähnliche Ueberlegungen kommt nun Lie schliesslich wirklich dazu, alle Gruppen der Ebene aufzuzählen, wie es in tabellarischer Form in Bd. 16 der Annalen pag. 523 - 25 geschehen ist. Lie unterscheidet daselbst:

1.) Gruppen ohne invariante Curvenschaaren.
2.) Gruppen mit einer invarianten Curvenschaar.
3.) Gruppen mit zwei invarianten Curvenschaaren.
4.) Gruppen mit ∞^1 invarianten Curvenschaaren.
5.) Gruppen mit ∞^∞ invarianten Curvenschaaren, d.h. Curvenschaaren in deren Gleichung eine willkürliche Function auftritt.

In jede dieser 5 Categorien findet nun eine grössere oder kleinere Zahl von Gruppen Platz.

Ad. 1 Hier sind nur 3 Gruppen aufzuzählen und zwar:

a) die allgemeine projective Gruppe mit 8 Parametern (d.h. die Gesammtheit aller gebrochenen linearen Substitutionen.)

b) die <u>allgemeine lineare Gruppe</u> oder die Gruppe der affinen Transformationen mit 6 Parametern:

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = dx + ey + f$$

c) die <u>specielle lineare Gruppe</u>, welche durch dieselben Formeln wie b gegeben wird jedoch mit der Bedingung $ae - bd = 1$, so dass nur noch 5 Parameter bleiben.

Allgemein gilt also der Satz: <u>Bleibt keine Curvenschaar invariant, so ist die Gruppe jedesmal mit einer projectiven Gruppe ähnlich und enthält hiernach gewiss nicht mehr als 8 Parameter.</u>

Dieser Satz hat für uns vielleicht nicht gerade etwas besonders Ueberraschendes; haben wir doch bei einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit analog gesehen, dass <u>jede</u> Gruppe mit einer projectiven ähnlich ist. Demgegenüber müssen wir betonen, dass das hier, in der Ebene, nur bei den Transformationen 1 so ist, bei den Gruppen 2 ist es schon ganz anders. In der That will ich hier einige Gruppen 2 mitteilen, welche gewiss nicht projectiv dargestellt werden können, da sie beliebig viele Parameter enthalten. Für sie alle ist $x = \mathrm{Const}$

das eine invariante Curvensystem.

Das erste Beispiel sei:

$x' = x$

$y' = ay + b + c\,\varphi(x) + d\,\psi(x) + e\,\chi(x) + \ldots\ldots,$

wo die φ, ψ, χ beliebige analytische Functionen von x sein sollen. Wir können die rechte Seite für y' so weit fortsetzen, als wir eben willkürliche Parameter $a, b, c, d \ldots$ haben wollen.

Ferner sei die Gruppe genannt:

$x' = x + k$

$y' = ay + b + c.e^{\lambda_1 x} + d.e^{\lambda_2 x} + e.e^{\lambda_3 x} + \ldots,$ mit den Parametern $k, a, b, c \ldots$

oder schliesslich:

$x' = kx + l$

$y' = ay + b + cx + dx^2 + ex^3 + \ldots$ mit den Parametern $k, l, a, b, c \ldots.$

Dies sind nun keineswegs die einzigen Gruppen, die Lie anführt, doch sind es einige typische Beispiele, bei denen man unmittelbar erkennt, dass sie sich gewiss nicht in projective Transformationen überführen lassen. Im letzten Falle haben wir aber wenigstens rationale Umformungen, während in den beiden anderen Fällen ausdrücklich transcendente Functionen in die Formeln eintreten.

Wir wenden uns nun zu einigen Beispielen *der 3. Categorie*, Gruppen mit 2 invarianten Curvensystemen.

Es sei $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$; $y' = \frac{\alpha' y + \beta'}{\gamma' y + \delta'}$. *Diese Formeln stellen die allgemeinsten Transformationen dar, welche die Curvensysteme x = Const u. y = Const in sich überführen.* Ihre Gruppe enthält 6 Parameter. Auch sie ist uns übrigens im letzten Semester bereits begegnet. Denken Sie, es sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem ξ, η gegeben und es sei gesetzt:

$$x = \xi + i\eta$$

$$y = \xi - i\eta.$$

Dann stellen jene Transformationsformeln der x' u. y' die allgemeinsten linearen Substitutionen der conjugirt complexen Variabelen x und y dar.

Ihre Gruppe ist nun dann wohl bekannt, als Gruppe der reciproken Radien, als Gruppe der Kreisverwandtschaften in der Ebene, wobei wir freilich $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$ conjugirt complex zu $\alpha \beta \gamma \delta$ nehmen müssen, wenn wir reelle Kreisverwandtschaften haben wollen.

Nun wollen wir noch auf eine speciellere hierhergehörige Gruppe unsere Aufmerksamkeit lenken. Es sei ein Kegelschnitt, etwa eine Parabel gegeben: $y^2 = x$, dann giebt es doch ∞^3 Collineationen des Kegelschnittes in sich. Diese ∞^3 Collineationen spielen ja in sehr vielen Betrachtungen eine wichtige Rolle, wie z. B. besonders in der Nicht-Euklidischen Geometrie. Bei dieser Gruppe der genannten Collineationen geht jede Tangente des Kegelschnittes natürlich wieder in eine Tangente über. Durch jeden Punkt der Ebene gehen aber 2 Tangenten. Vom algebraischen Standpunkte aus bilden nun zwar die Tangenten des Kegelschnittes eine einzige zusammenhängende Schaar, welche natürlich die Ebene doppelt überdeckt.

Vom analytischen Standpunkte dagegen, wo wir in der Umgebung der einzelnen Stelle der Ebene Reihenentwicklungen machen, und wir uns über die analytische Fortsetzung dieser Reihen gar nicht sorgen, da müssen wir sagen, dass wir im vorliegenden Falle 2 invariante Curvenschaaren haben, deren jede unseren Bereich einfach überdeckt. Demnach gehört unsere Gruppe auch der 3^{ten} Lie'schen Categorie an. Des Näheren lautet die Transformationsgruppe, welche die Parabel $y^2 = x$ in sich überführt,

$$x = \frac{\alpha^2 x + 2\alpha\beta y + \beta^2}{\gamma^2 x + 2\gamma\delta y + \delta^2},$$

$$y = \frac{\alpha\gamma + (\alpha\delta + \beta\gamma) y + \beta\delta}{\gamma^2 x + 2\gamma\delta y + \delta^2}.$$

Dass vermöge dieser Substitutionen $y'^2 - x'$ ein Multiplum von $y^2 - x$ wird, d. h. $y^2 - x = 0$ in sich übergeht, ist ja leicht durch Einsetzung zu verificieren.

Bis hierher haben wir bei unserer Aufzählung der continuirlichen Gruppen der M_2 alle diejenigen Gruppen, die durch beliebige Punkttransformationen in einander übergehen, d. h. die ähnlichen Gruppen, als gleichwertig angesehen. Nun werden wir jedoch anderseits wieder fragen können, *was für projective Gruppen giebt es in der Ebene? Dann werden wir natürlich nur solche 2 Gruppen als aequivalent anzusehen haben, die durch projective Coordinatentransformation in einander übergeführt werden können.* Daneben werden wir freilich auch dualistische Transformationen heranziehen wollen. Der Gruppe aller Collineationen der Ebene, die z. B. eine gerade

Linie in sich überführen, steht dann die Gruppe aller Collineationen gegenüber, die einen Punkt in sich transformiren. Man wird jedenfalls solche 2 Gruppen, die durch dualistische Verwandtschaft aus einander hervorgehen, neben einander aufführen. Die hiermit präcisirte Aufgabe, alle projectiven Gruppen aufzuzählen ist von Lie im Archiv Bd. 9 (1884) behandelt worden. Sie ist aber neuerdings von Franz Meyer durchgearbeitet worden, und zwar stellt dieser alle Gruppen sogleich in endlicher Form dar, nicht wie Lie durch infinitesimale Transformationen. Das Resultat von Franz Meyer, welches mir vorliegt, ist dann dieses, dass er unter Zusammenfassung jedesmal dual entgegenstehender Gruppen im Ganzen 31 verschiedene Typen bekommt.

Hier seine Tabelle:

I Achtgliedrig

1. Die allgemeine Gruppe

II Sechsgliedrig.

$2^{\underline{a}} \begin{cases} x_1 = ax + by + k \\ y_1 = cx + dy + e \end{cases}$ (Invariante Gerade

$2^{\underline{b}}$ dual

III Fünfgliedrig

$3^{\underline{a}}$: 2^{a} mit der Bedingung $ad - bc = 1$ (Invarianz des Flächeninhaltes)

$3^{\underline{b}}$ dual

$$4 \begin{cases} x_1 = ax + k \\ y_1 = cx + dy + e \end{cases}$$ (Invariantes Linienelement)

IV Viergliedrig.

$$5^{\underline{a}} \begin{cases} x_1 = t^{c} x + k \\ y_1 = t^{c+1} y + gx + e \end{cases}$$ (c eine willkürliche Constante)

$5^{\underline{b}}$ dual

6 (4) mit $ad = 1$

$$7 \begin{cases} x_1 = ax + k \\ y_1 = a^2 y + cx + e \end{cases}$$ (5), (6), (7) sind Untergruppen von (4).

$$8 \begin{cases} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{cases}$$ (Invarianter Punkt und invariante Gerade getrennt.)

$$9^{\underline{a}} \begin{cases} x_1 = ax + k \\ y_1 = dy + e \end{cases}$$ (Invariante Gerade und zwei invariante Punkte auf ihr)

$9^{\underline{b}}$ dual

III Dreigliedrig.

$$10\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = y + c x + e \end{cases}$$

$$11\begin{cases} x = a x + k \\ y_1 = a y + ak x + e \end{cases}$$

$$12^{\underline{a}}\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = e^k y + c x + e \end{cases}$$

$12^{\underline{b}}$ dual

13 (8) mit $ad - bc = 1$

$14^{\underline{a}}$ (9) mit $ad = 1$

$14^{\underline{b}}$ dual

$$15\begin{cases} x_1 = a x \\ y_1 = c x + dy \end{cases}$$ (Zwei invariante Punkte, ihre invariante Verbinde und noch eine invariante Gerade durch einen der Punkte)

$$16^{\underline{a}}\begin{cases} x_1 = a x + k \\ y_1 = ay + e \end{cases}$$ (Invariante Punkte einer Geraden)

$16^{\underline{b}}$ dual

17. $x_1 : y_1 : 1 = a^2 x + 2ab y + b^2 : ac x + (ad + bc) y + bd$
$: c^2 x + 2 c d y + d^2$

(Invarianter Kegelschnitt $y^2 - x = 0$).

VI Zweigliedrig

18. $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = y + kx + e \end{cases}$ Untergruppe von 11.

19 a. $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = e^k y + e \end{cases}$ Untergruppe von 9 a. 19 b. dual.

20 a. $\begin{cases} x_1 = t^c x \\ y_1 = t^{c+1} y + y \end{cases}$ (Untergruppe von 15 (c eine willkürliche Const) 20 b. dual

21. $\begin{cases} x_1 = a x \\ y_1 = ay + c x \end{cases}$ (Untergruppe von 15) 22 (15 mit ad = 1

23 a. $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = y + e \end{cases}$ (Untergruppe von 16 a) 23 b. dual

24. $\begin{cases} x_1 = a x \\ y_1 = d y \end{cases}$ (Invariantes Dreieck)

25 a. $\begin{cases} x_1 = x + by \\ y = dy \end{cases}$ (Invariante Punkte einer Geraden und noch eine invariante Gerade.) 25 b. dual

26 $\begin{cases} x_1 = a x + k \\ y_1 = a^2 y + a k x + k^2 \end{cases}$ (Invarianter Kegelschnitt mit einem invarianten Punkt darauf.)

VII Eingliedrig.

27. $\begin{cases} x_1 = a x \\ y_1 = a^c y \end{cases}$ (Invariantes Dreieck und ∞^1 einzeln invariante Curven (W-Curven) c ist eine willkürliche Constante.)

28 $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = e^k \cdot y. \end{cases}$ (20^a mit der Bedingung, daß ∞^1 invariante Curven hinzukommen)

29 $\begin{cases} x_1 = x + k \\ y_1 = y + k x + \frac{k^2}{2} \end{cases}$ (Invariantes Linienelement und ∞^1 Kegelschnitte, die dieses gemein haben.)

30 $\begin{cases} x = a x \\ y_1 = a y \end{cases}$ (Invariante Punkte einer Geraden und invariante Strahlen eines Büschels, deßen Spitze nicht auf der Geraden liegt.)

31 $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y + e \end{cases}$ (wie 30), nur daß die Spitze des Büschels auf der Geraden liegt.)

Di. 20 VI 93 Ich will heute zunächst noch 2 kleine Bemerkungen dem Vorstehenden anreihen. Unter den Gruppen, die Franz Meyer angiebt, befinden sich z. B. auch die folgenden:

$$x' = e^{\alpha t}\cdot x \qquad\qquad x' = x + k$$
$$y' = e^{\beta t}\cdot y \quad \text{und} \quad y' = e^k y + c\,x + b$$

mit dem Parameter t mit den Parametern k, b, c

Diese beiden Gruppen haben das Gemeinsame, daß ihre Parameter nicht algebraisch sondern in transcendenter Verbindung auftreten. Nun können wir zwar die erste Gruppe z. B. so ändern, daß wir schreiben:

$$x' = e^{\alpha t}\cdot x$$

$y' = (e^{\alpha t})^{\beta/\alpha}\cdot y$ und dann $e^{\alpha t} = a$ setzen. Dann erhalten wir:

$$x' = a\,x$$

$y' = a^{\beta/\alpha}\cdot y$. Ist dann β/α eine rationale Zahl, so haben wir in der That erreicht, daß der Parameter a algebraisch vorkommt. ist aber β/α irrational, so ist dies nicht der Fall.

<u>Auch wenn man sich daher auf projective Gruppen beschränkt, brauchen die Parameter noch nicht in allen Fällen algebraisch vorzukommen, und man wird also immer noch algebraische</u>

und transcendente Gruppen unterscheiden können, was die Parameter angeht.

Von dieser Bemerkung aus können wir nun den allgemeinen Gedanken meines Erlanger Programms, dass zu jeder Gruppe von Transformationen eine Invariantentheorie gehört, dahin präcisieren, dass eine algebraischen Invariantentheorie auch im Gebiet der linearen Transformationen nur bei einer algebraischen Gruppe möglich ist, d.h. bei einer solchen Gruppe, welche ~~sowohl~~ die Varia. sondern auch die Parameter algebraisch enthält.

Nehmen wir z. B. an, es sei eine algebraische Function $f(x,y)$ gegeben, und es wäre zu untersuchen durch welche Gruppe projectiver Substitutionen dieselbe in sich übergeht. Dann hätten wir doch auszugehen von der Gleichung:

$$f\left(\frac{ax+by+c}{gx+hy+i}\ \frac{dx+ey+f}{gx+hy+i}\right)=f(x,y)$$ und aus ihr

die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten a, b, c .... abzuleiten. Hierbei werden wir natürlich auf algebraische Bedingungsgleichungen geführt werden, und daher wieder die Transformationen, welche f in sich überführen, sofern es überhaupt solche giebt, eine algebraische Gruppe bilden. Diese Grup.

pe braucht noch nicht <u>continuirlich</u> zu sein, doch wollen wir auf die verschiedenen Möglichkeiten, die in dieser Hinsicht vorliegen, erst später eingehen. Dieser Gedanke, dass man in der algebraischen Invariantentheorie sich auf <u>algebraische</u> Gruppen zu beschränken hat, ist neuerdings von Maurer im Journal Bd. 107 (1891) skizzirt worden; an diese Arbeit schliesst sich dann noch in den Ann. Bd. 39 (1891) eine nähere Betrachtung über algebraische Transformationsgruppen an.

Die zweite Bemerkung, die ich hinzufügen wollte, zielt auf eine Frage von mehr formalen Character ab. Wir haben bisher die projectiven Transformationen doch stets unhomogen dargestellt. Wollen wir homogene Schreibweise anwenden, so werden wir zwecks Darstellung einer infinitesimalen Transformation setzen:

$$dx_1' = da_{11}\,x_1 + da_{12}\,x_2 + da_{13}\,x_3$$
$$dx_2' = da_{21}\,x_1 + da_{22}\,x_2 + da_{23}\,x_3$$
$$dx_3' = da_{31}\,x_1 + da_{32}\,x_2 + da_{33}\,x_3$$

Nun kommt es natürlich nur auf das Verhältniss der 9 Substitutionscoefficienten an. Man kann dies ja dadurch zum Ausdruck bringen, dass man links den x_1', x_2', x_3' den Proportionalfactor ϱ hinzufügt; doch ist auch dieses immerhin unbequem.

Demgegenüber bringt Study in Vorschlag bei der analytischen Darstellung der infinitesimalen projectiven Transformation zwar an der homogenen Schreibweise festzuhalten, dafür aber den Grössen da_{ik} die Bedingung aufzuerlegen: $da_{11} + da_{22} + da_{33} = 0$. Vergl. pag. 132 ff von Study's „Methoden der Theorie der ternären Formen", 1889, wo man das Nähere vergleichen mag.

Wir gehen nun in unseren Betrachtungen weiter und fragen uns, was weiss man von den Transformationsgruppen für $n = 3$ d. h. für den dreidimensionalen Raum? Lie hat bereits Mitte der 70er Jahre die sämmtlichen Gruppen für $n = 3$ bestimmt, aber sie sind von ihm noch nicht veröffentlicht worden, weil die Sache sehr umständlich sich darstellt.*) Was speciell die projectiven Gruppen des R_3 angeht, so hat Lie dieselben im Archiv Bd. 9 u. 10 (1884–85) angegeben.

Lie kommt da zu einem nicht sehr complicirten

---

*) Uebrigens sollen alle die Einzelheiten die wir berühren, in dem bald erscheinenden dritten Bande von Lie-Engel ihre Stelle finden.

Resultat. Wir können aus den ∞^{15} Collineationen des R_3, die es allgemein giebt, als Untergruppen zunächst ausscheiden alle diejenigen, die z. B. einen Punkt, eine Ebene oder eine Gerade festlassen; dies führt uns entsprechend zu einer G_{12}, G_{12} oder G_{11}. Doch können wir sogleich noch weitere Beispiele aufzählen, die wir sämmtlich bereits im letzten Wintersemester kennen gelernt haben, etwa die Gesammtheit G_3 aller Collineationen, welche eine Raumcurve 3. Ordnung in sich überführen, die G_6, welche eine Fläche 2ten Grades, oder die G_{10}, welche einen linearen Complex unverändert läßt. Besonders die letztgenannte Gruppe zieht die Aufmerksamkeit auf sich. Ich habe hier die Dissertation von Knothe (Leipzig 1892) zu nennen, der die in der G_{10} vorkommenden Untergruppen untersucht hat. Alle die aufgeführten Gruppen stellen Untergruppen der Gesammtheit aller projectiven Transformationen des Raumes dar. Lie hat nun den folgenden allgemeinen Satz aufgestellt: <u>Bei jeder Untergruppe der projectiven Gruppe ist entweder ein Punkt oder eine Curve, oder eine Fläche, oder ein linearer Complex invariant.</u> Da geben also unsere Beispiele einen ersten Ansatz.

Jetzt wenden wir uns sogleich zu den Gruppen der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Das Hauptinteresse richtet sich hier auf die Construction transitiver Gruppen, insofern, wenn eine Gruppe intransitiv ist und der einzelne Punkt nur auf einer Mannigfaltigkeit von $n-\mu$ Dimensionen verschoben wird, dann zunächst jedenfalls das Interesse ein $(n-\mu)$ dimensionales ist, indem wir zu wissen wünschen, wie innerhalb dieser $M_{n-\mu}$ sich die Punkte verschieben. Eine Reihe von Entwickelungen betr. die transitiven Gruppen des R_n sind dann wieder von Lie selbst gegeben worden; vergleiche insbesondere Leipziger Berichte, 1890 pag. 478 ff und 1892 pag. 300 ff; in dieser letzten Arbeit setzt Lie insbesondere auseinander, wie seine eigenen bezüglichen Arbeiten sich zu denen von Schur in Aachen verhalten, Math. Annalen 38, 1891.

Im übrigen sind diese Betrachtungen von Lie noch nicht abgeschlossen, doch zeigt er bisher, dass bei beliebigem n auch wieder eine endliche Anzahl von transitiven Gruppen existiert, die man alle einzeln aufstellen kann, und er vermutet des Weiteren, dass man dabei immer mit ganzen nationalen Functionen und Exponentialfunctionen reicht. Es ist natürlich ein großer Mangel unserer Darstellung, daß wir alle diese wichtigen Fragen nur im Referat berühren können.

Nun wollen wir noch von der „Zusammensetzung der Gruppen" sprechen. Es seien die unabhängigen infinitesimalen Transformationen einer Gruppe gegeben: $X_1(f), X_2(f) \dots X_r(f)$. Dann wissen wir, daß der beliebige Klammerausdruck $(X_i \cdot X_k) = \sum c_{ik\sigma} X_\sigma$ ist, woselbst die $c_{ik\sigma}$ Constante sind. Wir wollen einstweilen noch annehmen, daß diese Relationen zugleich hinreichend sind für die Existenz einer Gruppe, welche jene r infinitesimalen Transformationen als erzeugende hat. Unter der Zusammensetzung einer Gruppe versteht man nun mit Lie einfach die Werte der Constanten $c_{ik\sigma}$, die in den genannten Relationen $(X_i X_k) = \sum c_{ik\sigma} X_\sigma$ vorkommen.

Wir nennen ferner eine zweite Gruppe mit einer ersten Gruppe gleich zusammengesetzt, wenn ich die erzeugenden Substitutionen $X_1', X_2', \dots X_r'$ der zweiten Gruppe, (die natürlich linear unabhängig sein sollen) so auswählen kann, daß die Zusammensetzungsconstanten $c'_{ik\sigma}$ genau dieselben

Werte haben wie die c_{iks}. Ich behaupte nun weiter, dass „gleichzusammengesetzte Gruppen überhaupt dieselbe Substitution haben, also insbesondere dieselben Untergruppen aufweisen, kurz gesagt, dass sie „isomorph" sind. Um dies nachzuweisen, überlegen wir nur einmal, wie wir überhaupt Untergruppen einer vorliegen Gruppe finden:

Es seien die infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2, X_3 \dots X_r$ gegeben. Man wird dann zu versuchen haben, aus den X_i auf alle Weise lineare Verbindungen mit constanten Coefficienten $Y_1, Y_2 \dots Y_{r'}$, wo $r' < r$ sein soll, herauszuheben, die für sich in der Klammerbeziehung stehen: $(Y_i Y_k) = \sum_1^{r'} \delta_{iks} Y_s$; denn dann bilden

die $Y_1 \dots Y_{r'}$ für sich wieder eine Gruppe. So oft wir nun in solcher Weise aus den X_i uns eine Untergruppe gebildet haben, werden wir aus der gleich zusammengesetzten Gruppe in genau derselben Weise eine Untergruppe erhalten.

Aus dieser Ueberlegung erkennen Sie schon, welches Gewicht auf die Zusammensetzung einer Gruppe zu legen ist. Von den Constanten c_{iks} hängt eben die ganze Structur der Gruppe ab. Fragen wir uns nun, <u>wie wir überhaupt die Constante $c_{ik\sigma}$ wählen dürfen?</u>

Zunächst ist $c_{ik\sigma} = - c_{ki\sigma}$; dies liegt in der Eigenschaft des Klammerausdrucks. Ferner haben wir die Beziehungen, die aus der Jacobi'schen Identität folgen: $\sum_\sigma (c_{kl\sigma} c_{i\sigma t} + c_{li\sigma} c_{k\sigma t} + c_{ik\sigma} c_{l\sigma t}) = 0$.

Dies sind jedenfalls <u>notwendige</u> Relationen, denen die Grössen $c_{ik\sigma}$ genügen müssen. Lie hat nun die wichtige Umkehrung aufgestellt: <u>Wenn wir n^3 Constante $c_{ik\sigma}$ haben, die diesen hingeschriebenen Relationen genügen, dann kann man allemal auch Gruppen bilden, deren Zusammensetzung gerade durch diese $c_{ik\sigma}$ gegeben ist.</u>

Ich behaupte, man kann bei der genannten Voraussetzung sogar eine <u>homogene lineare Gruppe</u> für r Variabeln $x_1, x_2 \dots x_r$, bilden, die adjungierte Gruppe nach Lie. Und zwar wird dieselbe gegeben durch die r infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2 \dots X_r$, welche bestimmt sind durch die Formeln:

$$X_k(f) = \sum_i \sum_\sigma c_{ik\sigma} x_i \frac{\partial f}{\partial x_\sigma}$$

Daß dieselbe in der That eine Gruppe erzeugen und daß diese Gruppe die gewünschte Zusammensetzung hat, davon überzeugen wir uns, indem wir direct die Gültigkeit der Klammerrelation
$$(X_k^l, X_e^l) = \sum_s c_{kls} X_s^l$$
als eine Folge der Bedingungen nachweisen, die wir den c_{iks} auferlegt haben. Es ergiebt sich durch directe Ausrechnung:
$$(X_k^l X_e^l) = \sum_i \sum_s \sum_t c_{iks} x_i \cdot c_{slt} \frac{\partial f}{\partial x_t} - \sum_i \sum_t \sum_s$$
$$- \sum_i \sum_t \sum_s c_{ilt} x_i c_{tks} \frac{\partial f}{\partial x_s}$$
oder nach Vertauschung der Buchstaben s u. t im zweiten Glied in eine dreifache Summe zusammengefaßt:
$$(X_k^l X_e^l) = \sum_i \sum_s \sum_t (c_{iks} c_{slt} - c_{ils} c_{skt}) \cdot x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}.$$

Wenn wir dann die Relation hinzunehmen, daß eine Vertauschung der Indicis i, k die Größe c_{iks} ihr Vorzeichen ändert, so ergiebt sich:
$$(X_k X_e^l) = \sum_i \sum_s \sum_t (- c_{iks} c_{lst} - c_{lis} c_{kst}) x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}.$$

Diese letzte Formel geht dann vermöge der dreigliedrigen Relationen zwischen den $c_{ik\sigma}$, die aus der Jacobischen Identität folgen, nämlich:

$$\sum_\sigma c_{ke\sigma} c_{i\sigma t} = \sum_\sigma (c_{ei\sigma} c_{k\sigma t} - c_{ik\sigma} c_{e\sigma t}),$$

in: $(X_k X_e) = \sum^i \sum^\sigma \sum^t \left(c_{ke\sigma} c_{i\sigma t} x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}\right)$ über

Aber $\sum^i \sum^t c_{i\sigma t} x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}$ ist direct X_σ. Daher

haben wir $(X_k X_e) = \sum^\sigma c_{ke\sigma} X_\sigma$,

was zu beweisen war.

Uebrigens gilt dieser Beweis nur für den allgemeinen Fall, wo die Matrix des
$$\begin{vmatrix} c_{i1\sigma} \\ c_{i2\sigma} \\ \cdots\cdots \\ c_{ik\sigma} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

d.h., wo es keine Constante a_k giebt, so dass $\sum a_k c_{ik\sigma} = 0$ für alle Wertepaare i, σ.

Giebt es nämlich solche Constante a_k, so sind die r infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe nicht linar unabhängig, die Gruppe enthält gar nicht r Parameter und es kann davon, dass sie die gewünschte Zusammensetzung habe, garnicht die Rede sein.

Da wird man sich nun folgendermaßen helfen können. Mögen zwischen den $c_{ik\sigma}$ ϱ linear unabhängige Bedingungsgleichungen:

$\sum a_k c_{ik\sigma} = 0$, $\sum b_k c_{ik\sigma} = 0$ ... (für alle Werte der i, σ), aber nicht mehr bestehen. Nun sollen die Relationen statt haben:

$$(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_k) = \sum c_{ik\sigma} \mathcal{X}_\sigma .$$

Wir schliessen, dass

$$(\mathcal{X}_i, \sum \varphi a_k \mathcal{X}_k) = 0$$

$$(\mathcal{X}_i, \sum \varphi b_k \mathcal{X}_k) = 0 \text{ etc., für alle Wer-}$$

te von i, so dass ϱ linear unabhängige infinitesimale Transformationen vorhanden sind:

$$\sum a_k \mathcal{X}_k, \sum b_k \mathcal{X}_k, \ldots \text{(und nämlich nicht mehr)},$$

die mit den anderen $\mathcal{X}$ im Klammerausdruck verbunden identische Null ergeben.

Diese ϱ infinitesimalen Transformationen wollen wir uns jetzt von vornherein mit unter die

$X'_1, \dots X'_r$ aufgenommen denken, und zwar als die ρ letzten derselben. Die Constanten $c_{ik\sigma}$ werden dann für i oder $k > (r-\rho)$ identisch verschwinden, übrigens aber zwischen den nicht verschwindenden $c_{ik\sigma}$ für alle Werte der i, σ keine Relation der Form $\sum_k^{r-\rho} a_k c_{ik\sigma} = 0$ bestehen können. Auf solche Weise haben wir das System unserer $c_{ik\sigma}$ auf eine gewisse Normalform gebracht, mit der wir nun weiter operiren.

Wir schreiben nämlich zunächst die infinitesimale Transformation der zugehörigen adjungierten Gruppe an (deren jetzt nur $r-\rho$ sind, welche als linear unabhängig zu gelten haben):

$$X'_k(f) = \sum_i \sum_\sigma c_{ik\sigma}\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_\sigma}$$

(für $k = 1, 2, \dots r-\rho$)

und fügen nun, indem wir noch ρ neue Veränderliche $x_{r+1}, \dots x_{r+\rho}$ einführen, die folgenden ρ infinitesimalen Transformationen hinzu:

$$X'_{r-\rho+1}(f) = x_{r+1} \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}$$

$$\vdots$$

$$X'_r(f) = x_r \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

Die so erhaltenen r infinitesimalen Transformationen, welche gewiss linear unabhängig sind, erfüllen dann in der That genau die Bedingungen $(X_i^c X_k^c) = \sum c_{iks} X_s^c$, unter den c_{iks} die invarianten Werte unserer Constanten verstanden. Hiermit ist also in dem speciellen Falle zwischen den ursprünglichen c_{iks} bestehender linearer Relationen in der That dasselbe geleistet, wie vorhin im allgemeinen Falle, und unser Satz ist somit in allen Fällen bewiesen.

Do: 22 VI 93 Wir haben das letzte Mal von den Constanten c_{iks} gesprochen, welche die Zusammensetzung einer Gruppe ausmachen. dieselben mussten gewissen algebraischen Beziehungen einfacher Art genügen. Es ist dementsprechend ein rein algebraisches Problem, alle Typen der Zusammensetzung, die es für r Parameter giebt, aufzuzählen.

In dieser Hinsicht sei neben den Untersuchungen von Lie folgende Litteratur genannt:

Engel, Leipziger Berichte (1886)

Killing, Math. Ann. Bd. 31, 33, 34 u. 36 (1887–1889)
Umlauf, Dissertation, Leipzig (1891.)
Maurer in Strassburg, Ann. 39 (1891.)

Letzterer wirft insbesondere die Frage auf, wie die Constanten c_{iks} beschaffen sein müssen, damit die adjungirte Gruppe von der wir kürzlich sprachen, algebraische Coefficienten besitzt. – Endlich Cartan, der in den Comptes Rendus 1893, No. 16 und 18 die Untersuchungen von Killing einer eingehenden Discussion unterwirft. Wir berichten hier insbesondere über die Lehre von der Zerlegung der Gruppe.

Was versteht man unter dieser Theorie und welches ist innerhalb der sonstigen Lie'schen Untersuchungen ihre Bedeutung? Um eine Beantwortung dieser Frage zu geben, müssen wir etwas weiter ausholen und zunächst von den gewöhnlichen Substitutionsgruppen berichten, wie sie in der Lehre von den algebraischen Gleichungen zur Geltung kommt. Eine solche Substitutionsgruppe möge n. Vertauschungen enthalten, wir wollen sie daher mit G_n bezeichnen, so dass der Index n, wie wir ausdrücklich hervorheben wollen, nicht die Zahl der Buchstaben, die vertauscht werden, bezeichnet. Nun untersuchen wir in der Lehre von den

Substitutionsgruppen, ob es in der Gn eine „umfassendste ausgezeichnete Untergruppe Gn'" giebt.

Was überhaupt eine ausgezeichnete Untergruppe ist, wissen wir ja bereits; als eine „umfassendste ausgezeichnete" Untergruppe bezeichnet man dann eine solche ausgezeichnete Gruppe, die selbst nicht in einer höheren ausgezeichneten Untergruppe der Gn. enthalten ist, sondern nur in der Gn. selbst.

In dieser Gn' suchen wir dann abermals eine umfassendste ausgezeichnete Untergruppe Gn'' u. so fahren wir fort, bis wir schliesslich zu der Identität als der letzten Untergruppe gelangen. Dieses Schema der Gruppe Gn mit den aufeinander folgenden umfassendsten ausgezeichneten Untergruppen bezeichnet man als eine Zerlegung der Gn. Nun kann es natürlich sein, dass eine Gruppe Gn mehrere umfassendste ausgezeichnete Untergruppen neben einander enthält, von denen keine in den anderen enthalten ist, so dass sich verschiedene Zerlegungen der Gruppe ergeben. Es kann jedoch auch sein, dass eine Gruppe Gn keine andere ausgezeichnete Untergruppe enthält als die Identität. Dann nennt man nach Galois die vorliegende Gruppe einfach, während man sonst von einer zusammengesetzten Gruppe spricht. (Hier bedeutet also das Wort „Zusammensetzung" natürlich ganz etwas anderes wie in letzter Stunde.)

Die Zahlen $\frac{n}{n'}$, $\frac{n'}{n''}$, $\frac{n''}{n'''}$ u. s. w. ferner bezeichnet C. Jordan als die Faktoren der Composition.

Betreffs derselben hat er in seinem Buche „Traité des substitutions" ein sehr wichtiges und interessantes Theorem aufgestellt. Wir sahen bereits, dass der Process der Zerlegung einer Gruppe keineswegs notwendig ein eindeutiger ist; man kann demnach auch verschiedene Faktoren der Composition erhalten. C. Jordan hat dann den wichtigen Satz bewiesen, dass die Faktoren der Composition, welche sich bei verschiedener Zerlegung ein und derselben Gruppe einstellen, nur durch die Reihenfolge verschieden sein können. Dieser Satz hat nun in der Gleichungstheorie auch seine sehr gute Bedeutung, die wir doch auch erwähnen müssen. Es sei eine beliebige Gleichung $f_n = 0$ vorgelegt; der Index n möge nicht den Grad, sondern wieder die Anzahl der Vertauschungen bezeichnen, welche die zu den Gleichungen gehörende Galois-sche Gruppe G_n darbietet. So oft man dann für G_n ein Zerlegungsschema hat, so oft kann man die Gleichung $f_n = 0$ auf eine Reihenfolge anderer Gleichungen zurückführen. Diese Hülfsgleichungen lauten im Anlehnung an das aufgestellte Zerlegungsschema:

$$f_{\frac{n}{n'}} = 0,\ f_{\frac{n'}{n''}} = 0,\ \dots$$

u. so fort, wo $f_{\frac{n}{n'}} = 0$ eine Gleichung bedeutet, deren Galois'sche Gruppe $\frac{n}{n'}$ Vertauschungen enthält, $f_{\frac{n'}{n''}} = 0$ eine Gleichung, deren Galois'sche Gruppe $\frac{n'}{n''}$ Vertauschungen enthält u. s. w. Die von C. Jordan eingeführten Factoren der Zusammensetzung bezeichnen also die Vertauschungszahlen, welche in den Galois'schen Gruppen der Hülfsgleichungen auftreten, und der von ihm aufgestellte Satz betreffend die Constanz der Factoren der Composition bedeutet hier, daß bei der Ersetzung von $f = 0$ durch Hülfsgleichungen die Gruppen der Hülfsgleichungen gewisse Vertauschungszahlen aufweisen müssen, wenn auch nicht gesagt ist, in welcher Reihenfolge sie dieselben aufweisen. Diese Theorie ist ganz besonders klar auseinandergesetzt von Hölder

Ann. 34 (1886) pag. 28–39. Daselbst ergänzt Hölder den C. Jordan'schen Satz weiter dahin, dass für die Hülfsgleichungen, die man bei der Auflösung von $f_n = 0$ gebraucht, immer abgesehen von der Reihenfolge derselben nicht nur die Grade der Galois'schen Gruppe, sondern die Galois'schen Gruppen selbst eindeutig gegeben sind.

Nun wäre die Frage, wie weit alle diese Dinge ihr Analogon finden in der Lehre von den kontinuirlichen Transformationsgruppen.

Auf diese gegenseitige Beziehung hinzuweisen sollte gerade der Zweck der heutigen Stunde sein. Auch in der Theorie der Transformationsgruppen wollen wir uns ein Zerlegungsschema aufstellen.

Gegeben sei die endliche Gruppe G_r, wo r die Anzahl der Parameter in der Gruppe (nicht mehr die Anzahl der Transformationen selbst, die ja natürlich ∞ ist) bezeichnet. Es sei dann $G_{r'}$ eine „umfassendste ausgezeichnete" Untergruppe, d.h. eine solche ausgezeichnete Untergruppe, die in keiner anderen höheren ausgezeichneten Untergruppe enthalten ist. Innerhalb der Gruppe $G_{r'}$ suche man dann wieder eine „umfassendste ausgezeichnete" Untergruppe $G_{r''}$ u. so fort, bis man schliesslich zu der

Untergruppe mit 0 Parametern, d. h. zu der Identität gelangt. Die Reihenfolge der Gruppen G_r, G_r', G_r'' u. s. w. Bezeichnet man wieder als das Zerlegungsschema der Gruppe und nennt die Zahlen: $r - r'$, $r' - r''$ $r'' - r'''$ u. so fort die Factoren der Zerlegung. Der Satz ist nun wieder der, daß diese Factoren der Zerlegung bei gegebener G_r, abgesehen von der Reihenfolge, in der sie zum Vorschein kommen und die möglicherweise abgeändert werden kann, feste Zahlen sind. Dieses Theorem hat Lie 1887 in Bd 14 der Leipziger Abhandlungen mitgetheilt in einer Arbeit „zur Theorie der Berührungstransformationen". Doch geht die angedeutete Analogie der Theorieen der Substitutionsgruppen und der Transformationsgruppen noch weiter.

Die Theorie der Substitutionsgruppen findet wie wir sagten, in der Algebra ihre Anwendung und die Gruppeneigenschaften, welche die Galois'sche Gruppe zeigt, beherrschen die algebraischen Gleichungen. Etwas Entsprechendes giebt hier in der Theorie der Transformationsgruppen.

Wir können heute uns jedoch nur unbestimmt äußern, um wenigstens die Gedanken auf diese Punkte hinzulenken. Lie betrachtet gewisse

Differentialgleichungen, die durch ein endliche continuirliche Transformationsgruppe G mit r Parametern charakterisirt sind. Wenn man nun diese G_r zerlegt, so daß die Untergruppen $G_{r'}$, $G_{r''}$ u. s. w. auftreten, so geht den einzelnen Schritten dieser Zerlegung die Auflösung der vorgelegten Differentialgleichungen $f_r = 0$ durch Hülfsgleichungen parallel, die entsprechend durch $f_{r-r'} = 0$, $f_{r'-r''} = 0$ u. s. w. zu bezeichnen sind. Die Factoren der Zerlegung der Gruppe geben also an, wie viel Parameter in der Gruppe dieser Hülfsgleichungen auftreten. Und da die Factoren der Zerlegung abgesehen von der Reihenfolge festliegende Zahlen sein sollen, so wird dies eben heißen, daß in der Gruppe dieser Hülfsgleichungen, sofern man eben von ihrer Reihenfolge absieht, bestimmte Parameter auftreten. Es ist nun gar kein Zweifel, daß auch die Höldersche Erweiterung des Satzes hier ihre analoge Gültigkeit behält. Man wird daher sagen dürfen, daß nicht nur die Parameterzahlen der Gruppen, sondern diese Gruppen selber gegeben sind.

Es giebt nun einen besonders bemerkenswerten Fall des so bezeichneten allgemeinen

Schemas, das ist derjenige, in dem die Factoren der Zerlegung $r - r'$, $r' - r''$, $r'' - r'''$ u. so fort sämtlich gleich 1 sind. Dann kommt man also auf lauter Hülfsgleichungen mit einer eingliedrigen Gruppe. Nun besteht der Satz, dass eine Hülfsgleichung dann und nur dann durch Quadratur erledigt werden kann, wenn ihre Gruppe eingliedrig ist. Wir schliessen hieraus, dass die vorgelegte Gleichung $f_r = 0$ auch nur dann u. stets dann durch eine Reihenfolge von Quadraturen erledigt werden kann, wenn alle diese Differenzen $r - r'$, $r' - r''$ u.s.w. fort gleich 1 sind, und deshalb nennt Lie eine so beschaffene Gruppe G_r eine integrable Gruppe. In Rücksicht auf unsere Analogie fügen wir noch hinzu, dass diese Hülfsgleichungen, welche durch eine Quadratur erledigt werden können das Entsprechende sind zu den algebraischen Gleichungen, welche durch ein Wurzelzeichen aufgelöst werden können, den sogenannten Abel'schen Gleichungen.

Beidemal haben wir eine cyclische Gruppe, das eine Mal eine eingliedrige continuirliche Transformationsgruppe, das andere Mal eine cyclische Gruppe von Buchstabenvertauschungen.

Mit dem Vorstehenden eröffnet sich zugleich ein Ausblick auf die rationelle Behandlung der Differentialgleichungen, mit der wir uns bald näher zu beschäftigen haben werden. Darin liegt ja gerade eine Hauptleistung der Lie'schen Gruppentheorie ausgesprochen, daß sie die hiervorliegenden algebraischen Fragen in principieller Weise zu behandeln gestattet. Vergleiche übrigens eine Auseinandersetzung von Drach in № 19 der Comptes Rendus von 1893.

[Fr. 23 VI 93.] Heute kommen wir nun zu dem Beweise der bereits genannten Fundamentalsatzes der Lie'schen Gruppentheorie, daß die unendlich kleinen Transformationen in ihrer Combination und Wiederholung dann und nur dann eine n-gliedrige Gruppe bilden, wenn die Relationen gelten $(X_i\, X_k) = \sum c_{iks} X_s$, wo die c_{iks} Constante bezeichnen. Wir schließen uns bei diesem Beweise einer Darstellung von Lie an, die sich in den Leipziger Berichten 1890 pag. 453 ff. findet; dieselbe bedient sich fast gar nicht der Rechnung, sondern operirt besonders mit geometrischen Überlegungen, die sich auf einen Raum von höheren Dimensionen beziehen, und giebt sonach ein echtes Beispiel der Lie'schen Denkweise überhaupt.

Wir zerlegen den Beweis der besseren Uebersicht wegen in einzelne Teile:

1.) Aus den r infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2 \dots, X_r(f)$ gewinnen wir als allgemeinste unendlich kleine Transformation die lineare Verbindung $t_1 X_1(f) + \dots + t_r X_r(f)$, woselbst die Grössen $t_1, t_2 \dots t_r$ Parameter bezeichnen.

Aus dieser allgemeinsten Transformation denken wir durch unendliche Wiederholung eine endliche Transformation erzeugt; dieselbe ist dadurch charakterisirt, dass ihr zufolge eine beliebige Function f in die neue Function f' übergeht, wie es die folgende Gleichung angiebt:

$$f' = f + \frac{\sum t_i X_i(f)}{1} + \sum \sum \frac{t_i t_k X_i X_k(f)}{1.\ 2} + \sum \sum \sum \frac{t_i t_k t_e X_i X_k X_e(f)}{1.\ 2.\ 3.}$$

2.) Es soll nun gezeigt werden, unter welchen Bedingungen die hiermit gewonnenen endlichen Transformationen eine Gruppe bilden, d.h. welche Relationen müssen di X_i erfüllen, damit je 2 Transformationen der aufgestellten ∞^r Schaar

<u>miteinander verbunden wieder eine Transformation der Schaar geben?</u>

Wir wollen die einzelne Transformation in der ∞^r Schaar allgemein mit T bezeichnen; T_a und T_b mögen 2 bestimmte beliebig ausgewählte Transformationen dieser Schaar sein.

Dann soll also untersucht werden, wann $T_a \cdot T_b = T$ ist, d.h. wann T_a u. T_b nacheinander angewandt wieder eine Transformation T der Schaar ergeben.

3.) Wir befinden uns zunächst im Raum von n Dimensionen, dessen einzelne Punkte durch die Coordinaten $x_1\ x_2 \ldots x_n$ festgelegt sind.

Wenn wir dann die Transformationen T unserer Schaar auf einen willkürlich ausgewählten Punkt anwenden, so ist die Frage, wie vielfach unendlich die Gesammtheit aller aus diesem einen Punkte entstehenden transformirten Punkte ist. Sagen wir, der Punkt nimmt ∞^ρ neue Lagen an; dann können wir nun behaupten, dass $\rho > 0$ und nicht größer als r ist. Doch wollen wir einmal 2 Punkte neben einander betrachten mit den Coordinaten $x_1'\ x_2' \ldots x_n'$, $x_1''\ x_2'' \ldots x_n''$, darauf ein Punkttripel, ein Punktquadrupel u. so fort, schliesslich n Punkte oder ein n – Eck mit den Coordinaten:

$$\begin{array}{llll} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^r & x_2^r & \dots & x_n^r \end{array}$$

Dann behaupten wir, dass die Unbestimmtheit, die uns stört, wenn wir nur einen Punkt oder ein Punktepaar u. s. w. betrachten, sicher fortfällt, sobald wir ein r - Eck von Punkten betrachten, oder auch ein $(r+1)$ Eck, ein $(r+2)$ Eck u. so fort.

Ein n - Eck wird nämlich bei der Gesamtheit der Transformationen T genau ∞^r Lagen annehmen, ebenso ein $(r+1)$ Eck u. s. w.

4) Diesen Hülfssatz gilt es zunächst zu beweisen. Möge ein einzelner Punkt durch die Transformationen T ∞^ρ neue Lagen annehmen, wobei $0 < \rho \leqq n$ ist, zwei Punkte dagegen oder ein Punktepaar möge $\infty^{\rho'}$ Lagen annehmen, wobei wieder $0 < \rho' \leqq n$ gilt.

Dann wollen wir zunächst nachweisen, dass, wenn $\rho < n$ ist, notwendig $\rho' > \rho$, und nur, wenn $\rho = r$ ist, $\rho' = \rho$ ist. Dies ergiebt sich folgendermaßen: Wenn der erste Punkt x' durch die ∞^r Transformationen der Schaar nur in ∞^ϱ neue Lagen übergeht, dann muß er jedenfalls stets durch $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen in dieselbe Lage y' übergeführt werden. Würde nun das durch Hinzunahme des beliebigen zweiten Punktes x'' entstehende Punktepaar x' u. x'' gleichfalls nur ∞^ϱ Lagen durch sämmtliche Transformationen T annehmen, so müßten die $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen, welche den Punkt x' nach y' führen, jeden Raumpunkt x'' auch nur in *einen* Punkt y'' überführen, oder auch in mehrere Punkte, jedoch nur in eine *endliche* Zahl verschiedener Punkte, was dann in unserer Schreibweise auf dasselbe hinauskommt. Mit anderen Worten: die neue Lage y' des Punktes x' würde zugleich eine bestimmte neue Lage y'' des beliebigen zweiten Punktes x'' bedingen für die sämmtlichen $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen. Wird aber jeder Raumpunkt in einen bestimmten Raumpunkt übergeführt, so kann nur von einer einzigen Transformation die Rede sein, nicht von einer Schaar von Transformationen. Daher müßte $\infty^{r-\varrho} = 1$, d. h. $r = \varrho$ sein. Ist also $\varrho < r$, so muss notwendig ϱ' grösser als ϱ sein. –

In derselben Weise ist dann weiter zu schliessen, dass die Dimensionszahl ϱ'' der Mannigfaltigkeit aller neuen Lagen für ein Punkttripel jedenfalls um 1 grösser sein muss als ϱ', wenn eben ϱ' noch nicht gleich r ist, u. so fort.

Unser Ergebniss wollen wir in der folgenden Tabelle kurz zusammenstellen:

Ein Eineck kann durch die Transformationen $T \infty^{\varrho}$ Lagen annehmen, wo $\varrho = 1, 2, \dots \underline{r}$ sein mag.
ein Zweieck kann dann
$\infty^{\varrho'}$ Lagen annehmen, " $\varrho' = 2, 3, \dots \underline{r}$ " "
ein Dreieck $\infty^{\varrho''}$ Lagen " $\varrho'' = 3, 4, \dots \underline{r}$ " "
u. so fort.

Schliesslich muss ein n – Eck hiernach sicher ∞^{r} Lagen annehmen, dasselbe gilt natürlich um so mehr für ein $\underline{(n+1)}$ Eck etc.

5.) Diesen Hülfssatz wollen wir nun benutzen, um unsere Fragestellung, wann die Aufeinanderfolge $T_a \cdot T_b$ wieder eine Transformation der Schaar giebt, (d.h. wann wir es mit einer Gruppe T zu thun haben) in eine aequivalente geometrische Form überzuführen. Dass unsere T eine Gruppe bilde, drückt sich doch darin aus, dass $T_a \cdot T_b = T$

ist; wir können dies jedoch auch in der Forderung aussprechen, dass die Transformation $T_a T_b$ nicht mehr Parameter enthalten soll, als das Symbol T selber, nämlich $\underline{r}$ Parameter. Dieses aber können wir an dem Verhalten eines beliebigen $(\underline{r}+1)$-Ecks prüfen. Das $(\underline{r}+1)$ Eck nimmt bei den Transformationen T ∞^r Lagen an, wie wir eben gezeigt haben. Wenn wir nun den Nachweis führen können, dass es bei den Transformationen $T_a T_b$ auch nur diese ∞^r Lagen annimmt, dann sind wir sicher, dass die $T_a \cdot T_b$ nur n. Parameter enthalten. Denn enthielten sie $(r+1)$ Parameter, so würde das $(r+1)$ Eck mindestens $\infty^{(r+1)}$ Lagen annehmen. Dies also wird zu zeigen sein, wenn wir wollen, dass die T eine Gruppe bilden.

6. Wir sagen nun, dass das einzelne $(\underline{r}+1)$ Eck des Raumes von n Dimensionen durch die Coordinaten seiner Ecken:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' \ldots x_n' \\ x_1'' \ldots x_n'' \\ \vdots \\ x_1^{(r+1)} \ldots x_n^{(r+1)} \end{array}\right.$$

festgelegt wird. Das $(r+1)$ Eck können wir daher auch ansehen als ein Eineck in einem Raum von $(r+1)n$ Dimensionen. Aus dem einzelnen Punkt dieses $R_{(r+1)n}$ entstehen dann durch unsere Transformationen T ∞^r neue Punkte. Nun wollen wir alle einzelnen Punkte einer in diesem $R_{(r+1)n}$ enthaltenen bestimmten Mannigfaltigkeit nehmen, nämlich einer $M_{(r+1)n-r)}$ d.h. einer Mannigfaltigkeit von $(r+1).n-r$ Dimensionen. Von jedem ihrer Punkte denken wir uns eine M_r auslaufend, nämlich die Mannigfaltigkeit der ∞^n Punkte, die aus dem einzelnen Punkte durch die Transformationen T entstehen. Auf diese Weise erhalten wir dann gerade den Gesammtraum $R_{(r+1).n}$.

<u>Wenn wir nun jetzt verlangen, daß die Punkte unseres höheren Raumes durch die Transformationen T_a T_b nicht mehr Lagen annehmen sollen als durch die T_a allein, dann kommt dies augenscheinlich darauf hinaus zu verlangen, daß unsere Mannigfaltigkeiten M_r durch die Transformationen T_b in sich selbst übergeführt werden.</u>

Unsere r infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \dots X_r(f)$ werden also dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, wenn ihnen gegenüber der Raum von $(r-1)n$ Dimensionen der durch die $(r+1)$ Ecke des n dimensionalen Raumes vorgestellt wird, sich diesen infinitesimalen Transformationen gegenüber zerlegt in lauter Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen, (d. h. in $\infty^{(r+1)n-r} M_r$) die vermöge der infinitesimalen Transformationen in sich verschoben werden.

Die hiermit bezeichnete Frage kommt nun weiter darauf hinaus, zu untersuchen, wann ein gewisses System von Differentialgleichungen ein vollständiges System bildet. Hierin beruht gerade der anzuwendende Kunstgriff, wie wir in nächster Stunde noch ausführlich zu betrachten haben. –

So. 24 VI 93.]

f.) Das Symbol der einzelnen infinitesimalen Transformation $X(f)$ wird ausführlich geschrieben: $\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ lauten; dieser Ausdruck multipliciert mit δt ist eben das Maß der Änderung, welche die beliebige Function f bei

Aenderung der Transformation $X^t(f)$ erleidet. Die Aenderung des einzelnen Punktes $x_1 \dots x_n$ wird hiernach, wie wir wissen, gegeben durch:

$$\partial x_1 = \xi_1 \, \partial t.$$
$$\partial x_2 = \xi_2 \, \delta t$$
$$\vdots$$
$$\delta x_n = \xi_n \, \delta t.$$

Wenn wir mehrere Punkte $x', x'' \dots x^{(r+1)}$ nebeneinander betrachten, so wird natürlich für jeden einzelnen das letzte Schema der Coordinatenzuwächse gelten. Und denken wir jetzt eine beliebige Function F, die sowohl von dem x', wie den x'', $x'' \dots x^{(r+1)}$ abhängt, so wird für diese die infinitesimale Transformation folgendermaßen lauten:

$$\left(\xi_1' \frac{\partial F}{\partial x_1} + \xi_2' \frac{\partial F}{\partial x_2'} + \dots \xi_n' \frac{\partial F}{\partial x_n'}\right) + \left(\xi_1'' \frac{\partial F}{\partial x_1''} + \xi_2'' \frac{\partial F}{\partial x_2''} + \dots \xi_n'' \frac{\partial F}{\partial x_n''}\right)$$

$$+ \dots\dots\dots \left(\xi_1^{(r+1)} \frac{\partial F}{\partial x_1^{(r+1)}} + \xi_2^{(r+1)} \frac{\partial F}{\partial x_2^{(r+1)}} + \dots \xi_n^{r+1} \frac{\partial F}{\partial x_n^{(r+1)}}\right.$$

oder algebraisch geschrieben:

$$X^{t\prime}(F) + X^{t\prime\prime}(F) + \dots + X^{t(r+1)}(F).$$

Dies ist dann die infinitesimale Transformation, die wir dem höheren Raum von $(r+1)\cdot n$ Dimensionen zu Grunde legen müssen.

8.) Wie wir nun für den R_n r infinitesimale Transformationen X_i haben, so haben wir auch für den $R_{(r+1)n}$ die folgenden r infinitesimalen Transformationen:

$$X_1' (F) + X_1'' (F) + \dots + X_1^{(r+1)}(F) = Y_1(F)$$
$$X_2' (F) + X_2'' (F) + \dots + X_2^{(r+1)}(F) = Y_2(F)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$X_r' (F) + X_r'' (F) + \dots + X_r^{(r+1)}(F) = Y_r(F)$$

<u>Indem wir dann verlangen, dass sich unser Raum von $(r+1)\cdot n$ Dimensionen gegenüber unseren r infinitesimalen Transformationen in lauter Mannigfaltigkeiten r^{ter} Dimension zerspalten lässt, besagen wir einfach, dass die linearen partiellen Differentialgleichungen für F, die durch Nullsetzen unserer letzten Ausdrücke entstehen, ein vollständiges System bilden sollen.</u> Hiermit haben wir den am Schlusse der vorigen Stunde angedeuteten Ansatz gewonnen. Der bis jetzt erreichte Fortschritt ist der, dass wir die ursprüngliche Frage, wann die infinitesimalen

Transformationen $\mathfrak{X}_1(F), \mathfrak{X}_2(F) \ldots \mathfrak{X}_r(F)$ eine r gliedrige Gruppe erzeugen, umgewandelt haben in die andere Frage, wann die hier vorliegenden Differentialgleichungen mit $(r+1)n$ Variabeln ein vollständiges System bilden.

9.) Nun wissen wir, dass diese r Gleichungen ein vollständiges System bilden, wenn die Klammerausdrücke $(Y_i\, Y_k)$ sich linear aus den Y_s zusammensetzen, also die Beziehungen gelten:

$$(Y_i\, Y_k) = \sum_1^r{}_s\, \omega_{iks}\, Y_s,$$ wo die ω irgend welche Functionen der $x'\, x'' \ldots x^{(r+1)}$ sind.

Aber bemerken Sie sofort, weil sich das Y_i aus einzelnen Bestandteilen $\mathfrak{X}_i{}', \mathfrak{X}_i{}'', \ldots \mathfrak{X}_i^{(r+1)}$ aufbaut, deren jeder nur von den Coordinaten eines Eckpunktes abhängt, darum spaltet sich der Klammerausdruck $(Y_i\, Y_k)$ einfach in die Summe: $(\mathfrak{X}_i{}'\, \mathfrak{X}_k{}') + (\mathfrak{X}_i{}''\, \mathfrak{X}_k{}'') + \ldots + (\mathfrak{X}_i^{(r+1)}\, \mathfrak{X}_k^{(r+1)})$, gerade wie das Y_s der rechten Seite der Gleichung $(Y_i\, Y_k) = \sum_1^r{}_s\, \omega_{iks}\, Y_s$ sich spaltet in $\mathfrak{X}_s{}' + \mathfrak{X}_s{}'' + \ldots + \mathfrak{X}_s^{(r+1)}$. Da wird dann weiter (X_i', X_k') ein Ausdruck der folgenden Form sein:

$$(X_i', X_k') = \sum_1^n \eta'_{ikt} \frac{\partial f}{\partial x'_t}$$

$$(X_i'', X_k'') = \sum_1^n \eta''_{ikt} \frac{\partial f}{\partial x''_t}$$ u. so fort, d.h.

der erste Klammerausdruck wird nur die $\frac{\partial f}{\partial x'}$, der zweite nur die $\frac{\partial f}{\partial x''}$ u. so weiter enthalten.

Da nun ebenso auf der rechten Seite unserer Gleichungen die X_s' nur die Coordinaten x', die X_s'' nur die Coordinaten x'' enthalten, so schließen wir, daß die einzelnen Bestandteile beider Seiten analog entsprechen, d.h. daß:

$$(X_i' X_k') = \sum_1^r \omega_{iks} \cdot X_s',$$

$$(X_i'' X_k'') = \sum_1^r \omega_{iks} \cdot X_s'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(X_i^{(r+1)} X_k^{(r+1)}) = \sum_1^r \omega_{iks} \cdot X_s^{(r+1)}$$ ist.

Die Forderung, daß die Gleichungen $Y_i = 0$ ein vollständiges System bilden sollen, führt daher zu dem soeben hingeschriebenen Gleichungssystem, welches für jede Combination der Indices i, k gilt. Die ω_{iks} sind hier zunächst noch unbekannte Functionen der sämmtlichen Argumente $x_1', x_1'', x_1''' \dots x^{(r+1)}$.

10.) Nun sind wir sogleich am Schlusse. Ich behaupte nämlich, dass die ω_{iks} Constante sein müssen, die wir dann mit c_{iks} bezeichnen können.

Wenn dies aber der Fall ist, dann haben wir ja nachgewiesen, was wir wollten, dass nämlich notwendig die Klammerausdrücke $(X_i^L X_k^L) = \sum c_{iks} X_s^L$ sind, wenn durch die Transformationen X_i^L eine Gruppe erzeugt werden sollte. Dass diese Bedingung dann zugleich hinreichend ist, erkennt man leicht, wenn man den Beweisgang rückwärts durchläuft. Den Beweis nun, dass die ω_{iks} Constante sind, erbringen wir folgendermassen: Unser letztes Schema enthielt im Ganzen für alle die möglichen $\frac{r(r-1)}{2}$ Combinationen der Indices i u. k $\frac{r.(r^2-1)}{2}$ Gleichungen. Zur Bestimmung der $\frac{r^2(r-1)}{2}$ Grössen ω_{iks} sind aber nur ebensoviel Gleichungen, also $\frac{r^2(r-1)}{2}$ Gleichungen nötig.

Man kann daher z. B. alle Gleichungen bei Seite lassen, welche die letzte Gleichung $(X_i^{L(r+1)}, X_k^{L(r+1)}) = \sum_1^r \omega_{iks} X_s^{L(r+1)}$ für beliebige Wahl der Indices i, k umfasst, d. h. $\frac{r(r-1)}{2}$ Gleichungen, dann bleiben richtig $\frac{r.(r^2-1)}{2} - \frac{r.(r-1)}{2} = \frac{r^2(r-1)}{2}$ Gleichungen zur Bestimmung der Grössen ω_{ik5} übrig. Da jedoch die übrigen Gleichungen die Coordinaten $x_i^{(r+1)}$ der $(r-1)$sten Punktes gar nicht enthalten, so können dann auch die ω_{ik5} nicht von den $x_i^{(r+1)}$ abhängen. Dasselbe gilt natürlich für die Coordinaten der übrigen Punkte x', x'', x'''....

Man kann eben immer aus dem Gleichungssystem die ω_{ik5} so berechnen, dass man einen der $(r+1)$ Eckpunkte völlig bei Seite lässt; sie hängen daher von diesem einen Eckpunkt überhaupt gar nicht ab, und da dieser Eckpunkt ein beliebiger Eckpunkt ist, so hängen sie von keinem der $(r+1)$ Eckpunkte ab, d.h. <u>die Grössen ω_{ik5} sind Constante</u>, was zu beweisen war.

Der Gesammtbeweis gliedert sich, wie wir nochmals hervorheben wollen, daher folgendermassen:

1.) <u>Indem wir das $(r+1)$Eck des n dimensionalen Raumes an Stelle des einzelnen Punktes als Element eines höheren Raumes einführen, werfen wir die ganze Frage darauf, dass die Gleichungen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ ... $y_r = 0$ ein vollständiges</u>

System bilden sollen.

2.) Die Bedingung hierfür zerlegt sich in, folge der besonderen Bauart der Y_i so, daß die zunächst unbestimmten Factoren ω_{iks} sich als constante Größen erweisen. Wenn dies aber der Fall ist, dann haben wir ein vollständiges System und also eine Gruppe u.s.w.

Di. 28. VI 93.] An die bisherigen Betrachtungen über continuirliche, endliche Transformationsgruppen wollen wir nun specielle Ausführungen anschließen, indem wir ihre Beziehung zu einigen Nachbargebieten angeben. Und zwar wollen wir diese Anwendung der Transformationsgruppen nach 5 Richtungen verfolgen. dieselben beziehen sich auf die folgenden Disciplinen:

1.) die gewöhnliche Invariantentheorie, 2. Theorie der complexen Zahlen aus n Haupteinheiten. 3. v. Helmholtz' Raumproblem, betreffend die Grundlagen der Geometrie. 4. Differentialinvarianten. 5. Integration von Differentialgleichungen. Natürlich stehen die genannten Einzelgegenstände nicht weiter im logischen Zusammenhang, sondern sollen von uns unabhängig neben einander besprochen werden.

Ad. 1. Was die gewöhnliche Invariantentheorie betrifft, so beschränken wir uns auf den einfachsten Ansatz, da es uns nur darauf ankommt zu sehen, in welcher Weise dieselbe mit der Lie'schen Gruppentheorie zusammenhängt. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung einer einzelnen binären Form. Die einzelne Form mag durch den Ausdruck:

$$F = A_0 x_1^n + A_1 x_1^{n-1} x_2 + A_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots$$

gegeben sein.

Man unterwirft nun in der Invariantentheorie die Variabeln x_1 u. x_2 irgendwelchen binären linearen Substitutionen; es sei

$$x_1' = \alpha_1 x_1 + \beta x_2$$

$$x_2' = \gamma x_1 + \delta x_2$$ u. die Determinante der Coefficienten $\alpha\delta - \beta\gamma = r$ gesetzt. Hierdurch möge aus der ursprünglichen Form F die neue Form:

$$F' = A_0' x_1'^n + A_1' x_1'^{n-1} \cdot x_2' + A_2' x_1'^{n-2} \cdot x_2'^2 + \dots$$

hervorgegangen sein. Hier ist also vermöge der angewandten Substitution $F' = F$.

Setzt man in die neue Form F' für x_1' u. x_2'

ihre Substitutionswerte ein, so erhält man:

$$F' = A_0' (\alpha x_1 + \beta x_2)^n + A_1' (\alpha x_1 + \beta x_2)^{n-1}(\gamma x_1 + \delta x_2) + \ldots$$

oder nach Potenzen von x_1 und x_2 geordnet:

$$\begin{aligned} F' = \; & x_1^n (A_0' \alpha^n + A_1' \alpha^{n-1} \gamma + A_2' \alpha^{n-2} \gamma^2 + \ldots) \\ & + x_1^{n-1} x_2 (n . A_0' \alpha^{n-1} \beta + \ldots\ldots\ldots\ldots) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Vergleicht man dann diese so geordnete Form F' mit der ursprünglichen Form F, so findet man folgenden Zusammenhang der Coefficienten:

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0' \alpha^n + A_1' . \alpha^{n-1} \gamma + A_2' \alpha^{n-2} \gamma^2 + \ldots \\ A_1 &= n A_0' \alpha^{n-1} \beta + A_1' \alpha^{n-1} \delta + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d. h.

die alten Coefficienten A drücken sich als solche lineare Verbindungen der neuen Coefficienten A' aus, welche in den Coefficienten der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vom n^{ten} Grade sind.

Nun ist leicht zu sagen, was eine „Invariante" der gewöhnlichen Invariantentheorie" ist. Als solche versteht man einfach eine rationale ganze homogene Function $J(A_0 A_1 .. A_n)$ der Coefficienten A, welche bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante r. gleich ist der,

<u>selben rationalen ganzen homogenen Function $Y'(A_0', A_1', \ldots A_n')$ der Coefficienten A_0', d. h</u>

$$\underline{Y = r^\lambda \cdot Y'}$$

Diese Definition kann man sehr leicht noch etwas modificieren. Man kann offenbar die Substitution zerlegen:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{r}} & \frac{\beta}{\sqrt{r}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{r}} & \frac{\delta}{\sqrt{r}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{r} & 0 \\ 0 & \sqrt{r} \end{vmatrix}$$

und dementsprechend anstatt einer Transformation der Determinante r zunächst die zu dem ersten Factor der rechten Seite gehörige Transformation von der Determinante $\underline{1}$ und darauf die zu dem zweiten Factor gehörige Transformation anwenden, welch' letztere ein, fach durch: $x_1' = \sqrt{r} \cdot x_1$

$x_2' = \sqrt{r} \; x_2$ gegeben wird. Bei dem ersten Schritt bleibt dann die invariante Form $Y(A_0 \ldots A_n)$ völlig ungeändert, bei dem zweiten Schritt tritt einfach r^λ als Factor hinzu. Lassen wir diesen zweiten Schritt, der nichts Wesentliches enthält, (da wir f ausdrücklich als homogene Function des A voraus-setzen) ganz fort, dann gewinnen wir folgende neue Definition:

<u>Eine Invariante ist eine rationale ganze homogene Function der Coefficienten, welche bei jeder linearen Transformation von der Determinante 1 ungeändert bleibt.</u>

In wiefern spielt nun die <u>Gruppentheorie</u> hier hinein? Offenbar bilden doch die linearen Transformationen von der Determinante 1 eine Gruppe mit den Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die an die Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ gebunden sind, aber mit 3 Parametern. Aus dieser Transformationsgruppe wird eine andere ebenfalls dreigliedrige Gruppe für die Coefficienten $A_0, A_1, \dots A_n$ abgeleitet und <u>es handelt sich darum, Functionen der $A_0, A_1, \dots A_n$ zu finden, welche bei dieser Gruppe unveränderlich sind.</u>

Soweit kennzeichnet sich die Fragestellung als eine allgemeine Aufgabe der Gruppentheorie.

Speciell fügt dann die Invariantentheorie die Forderung hinzu, dass wir nach <u>rationalen, ganzen, homogenen Functionen</u> fragen; hiermit wird von selbst die Untersuchung angeregt, welches etwa die niedrigsten Functionen dieser Art sind, wie sich aus diesen die höheren zusammensetzen u. s. w. kurz alle die Theorieen betreffend volle Systeme von Invarianten, mit denen man sich in der Invariantentheorie beschäftigt. Auf diese letzen Fragen werden wir hier nicht weiter eingehen haben, doch wollen wir die Beziehung zur Gruppentheorie weiter verfolgen. Wir suchen zunächst die infinitesimalen Transformationen der allgemeinen linearen Substitution der x_1, x_2, die wir zudem Zweck in der Gestalt schreiben:

$$x_1' = (1+a)\,x_1 + b\,x_2$$
$$x_2' = c\,x_1 + (1+d)\,x_2$$

Man gewinnt die folgenden 4 erzeugenden infinitesimalen Transformationen:

$$1)\ \delta x_1 = x_1\,\delta a,\quad \delta x_2 = 0\qquad 2)\ \delta x_1 = x_2\,\delta b,\quad \delta x_2 = 0\qquad 3)\ \delta x_1 = 0,\quad \delta x_2 = x_1\,\delta c\qquad 4)\ \delta x_1 = 0,\quad \delta x_2 = x_2\,\delta d.$$

Irgend eine Function $f(x_1, x_2)$ wird dann durch diese Substitution infinitesimale Zunahmen erfahren, die entsprechend durch die folgenden 4 Symbole (abgesehen etwa von dem Differential δt) gegeben werden:

$$X_1 = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1},\ X_2 = x_2\frac{\partial f}{\partial x_1},\ X_3 = x_1\frac{\partial f}{\partial x_2},\ X_4 = x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Soll nun insbesondere die Determinante der Substitutionen gleich 1 sein, d.h. haben wir nur unsere dreigliedrige Gruppe vorliegen, so müssen wir stets $\delta\alpha + \delta d = 0$ nehmen; dies aber kommt darauf hinaus, dass wir die infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_1$ u. $\mathfrak{X}_4$ stets in der Verbindung $(\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_4)(f)$ anzusetzen haben. Unter den linearen Transformationen für $x_1\, x_2$ der Determinante 1 finden sich daher die 3 infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ und $\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_4$.

Welche infinitesimale Transformationen erleiden nun also unsere Coefficienten A selbst?

Vermöge der ersten Substitution $\mathfrak{X}_1$

$$\delta x_1 = x_1\,\delta\alpha$$
$$\delta x_2 = 0$$

wird aus der Form F':

$$F' = A_0'(x_1 + x_1\delta a)^n + A_1'(x_1 + x_1\delta a)^{n-1}\cdot x_2 + \dots$$

oder in entwickelter Form

$$F' = A_0' x_1^n + A_1' x_1^{n-1} x_2 + \dots$$
$$+ \delta a\,(n A_0' x_1^n + (n-1) A_1' x_1^{n-1} x_2 + \dots)$$

Dieses soll nun gleich

$F = A_0 x_1^n + A_1 x_1^{n-1} + \dots$ sein. Setzen wir $A_0' = A_0 + \delta A_0$, $A_1' = A_1 + \delta A_1$ und so fort, so erhalten wir daher für die Incremente der A die

Formeln:

$$\delta A_0 = -n\, A_0\, \delta\alpha$$
$$\delta A_1 = -(n-1)\, A_1\, \delta\alpha$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus ihnen setzt sich weiter das Symbol zusammen:

$$Y_1(f) = -n\, A_0 \frac{\partial f}{\partial A_0} - (n-1)\, A_1\, \frac{\partial f}{\partial A_1} - (n-2)\, A_2\, \frac{\partial f}{\partial A_2} - \cdots$$

Dieses Symbol stellt daher die infinitesimale Transformation dar, welche im Raume der A der Transformation X_1 entspricht. Analog stehen den Transformationen X_2, X_3, X_4 entsprechende Transformationen Y_2, Y_3, Y_4 der Coefficienten A gegenüber wie sie zusammengestellt die folgenden Formeln angeben:

$$Y_1(f) = \left(-n\, A_0 \frac{\partial f}{\partial A_0} - (n-1)\, A_1 \frac{\partial f}{\partial A_1} - \cdots\right)$$

$$Y_2(f) = \left(-n\, A_0 \frac{\partial f}{\partial A_1} - (n-1)\, A_1 \frac{\partial f}{\partial A_2} - \cdots\right)$$

$$Y_3(f) = \left(-A_1 \frac{\partial f}{\partial A_0} 2 - A_2 \frac{\partial f}{\partial A_1} - 3\, A_3 \frac{\partial f}{\partial A_2} - \cdots\right)$$

$$Y_4(f) = \left(- A_1 \frac{\partial f}{\partial A_1} - 2\, A_2 \frac{\partial f}{\partial A_2} - \cdots\right)$$

Wollen wir uns hier jedoch wieder auf die infinitesimalen Transformationen der $x_1\ x_2$, die der Determinante 1 entsprechen, beschränken, dann ist Y_1 u. Y_4 stets nur in der Verbindung $Y_1 - Y_4$ anzuwenden.

Soll dann eine Function der $A_0\ A_1 \dots A_n$ bei den linearen Substitutionen der Variabeln $x_1\ x_2$ der Determinante 1 ungeändert bleiben, also im allgemeinen Sinne eine Invariante sein, dann hat sie die 3 partiellen Differentialgleichungen zu erfüllen:

$$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_1 - Y_4 = 0.$$

(Soll sie im speciellen Sinne eine Invariante sei, so kommt natürlich wieder die Bedingung hinzu, daß eine rationale ganze homogene Function der A vorliegt.) Die so gewonnenen Differentialgleichungen sind nun keineswegs etwa neu, sondern bilden von Anfang an ein Hauptstück in der Invariantentheorie. Cayley, Sylvester u. Aronhold in den 50.er Jahren legen dieselben vielfach zu Grunde. Auch sind diese Gleichungen immer in der hier benutzten Weise abgeleitet worden, nämlich durch Betrachtung infinitesimaler linearer Transformationen.

Wollen wir doch jetzt noch, um die Verhältnisse völlig deutlich zu übersehen, die Zusammensetzungsformeln aufstellen für die infinitesimalen Transformationen X_i^c u. Y_i. Die Y_i ergeben dabei offenbar dieselben Zusammensetzungsconstanten c_{iks}, welche auch bei den X_i^c auftreten, in Uebereinstimmung damit, dass die Gruppe der Y mit der Gruppe der X isomorph ist. Es ist nun, wie die einfache Ausrechnung zeigt (um bei den Y zu bleiben):

$$(Y_1 Y_2) = -Y_2,\ (Y_1 Y_3) = -Y_3,\ (Y_1 Y_4) = 0$$

$$(Y_2 Y_3) = Y_4 - Y_1,\ (Y_2 Y_4) = -Y_2,\ (Y_3 Y_4) = Y_3,$$ und

zwar gelten diese Formeln für die allgemeine 4-gliedrige Gruppe.

Die Klammerausdrücke stellen sich also in der That dar als lineare Verbindungen der Symbole Y_i mit constanten Coefficienten. Beschränken wir uns auf die dreigliedrige Gruppe d.h. auf die Substitutionen der Determinante 1, dann lauten die entsprechenden Formeln:

$$(Y_1 - Y_4,\ Y_2) = -2Y_2,\ (Y_1 - Y_4,\ Y_3) = -2Y_3,\ (Y_2\ Y_3) = -(Y_1 - Y_4)$$

Wir fügen schließlich noch folgende Bemerkung hinzu:

Denkt man $A_0 \dots A_n$ als Coordinaten eines Raumpunktes im Raum von $n+1$ Dimensionen, so wird unser Raum vermöge der unimodularen Substitutionen d. h. der Substitutionen der Determinante 1 in lauter characteristischen M_3 zerlegt werden und unsere partiellen Differentialgleichungen sagen aus, daß f eine Invariante ist (im allgemeinen Sinne), wenn alle die Mannigfaltigkeiten $f = \text{const}$ aus characteristischen M_3 zusammengesetzt sind.

In diesem Sinne wird man sich geometrisch das Problem der Invariantentheorie zurechtlegen können.

Do 29 VI 93 Heute haben wir von der Beziehung der Theorie der complexen Zahlen zur Gruppentheorie zu sprechen. Für die complexen Zahlen $x + iy$ gelten ja dieselben Rechenregeln wie für die gewöhnlichen Zahlen. Auf Grund dieser Thatsache hat sich etwa in den vierziger Jahren (insbesondere von Graßmann u. Hamilton) die Tendenz ausgebildet, doch noch allgemeinere Zahlen zu bilden und zu untersuchen, ob man sie mit Vorteil anwenden könne. Hiervon wollen wir jetzt zunächst in Kürze berichten.

Wir wollen gleich die aus n Haupteinheiten e_i gebildete allgemein complexe Zahl $\sum^n x_i e_i$ unserer Betrachtung zu Grunde legen; die Coefficienten x_i bezeichnen irgend welche Zahlenfactoren. Was heisst es insbesondere, 2 solche complexe Zahlen zu addiren oder zu multiplicieren? Was die Addition betrifft, so ist dieselbe von allen Autoren durch die Gleichung definirt worden: $\sum x_i e_i + \sum y_i e_i = \sum (x_i + y_i) e_i$ oder abgekürzt geschrieben: $(x) + (y) = (x + y)$. Es hat gewiss auch keinen Zweck, eine andere Rechenregel an Stelle der genannten einzuführen. Es bleiben also die beiden wesentlichen Eigenschaften der Addition auch in ihrer Anwendung auf allgemein complexe Zahlen bestehen: 1) ihr associatives Verhalten, dasselbe drückt sich in der Formel aus: $(x + y) + (z) = (x) + (y + z)$ Sodann 2) das commutative Verhalten der Addition; dasselbe besagt, dass $x + y = y + x$ ist.

Doch anders ist es für die Erweiterung der Multiplication. In der gewöhnlichen Multiplication tritt gleichfalls das associative und commutative Princip hervor: es ist einmal $(x . y) . z$

$= x \cdot (y \cdot z)$ und ferner $x \cdot y = y\, x$. Doch hierzu kommt noch als characteristische Eigenschaft der Multiplication, dass sie bezüglich der Addition distributiv ist; hierunter versteht man, dass $x(y+z) = xy + xz$ ist, d.h. die Multiplication mit x vertheilt sich auf die Summanden y und z. Wenn man nun für allgemein complexe Zahlen Multiplicationsgesetze aufstellte, dann sah man sich genöthigt, eine der genannten Eigenschaften fallen zu lassen. Und zwar hat man sich entschlossen, die Multiplication auf n gliedrige complexe Zahlen in der Weise zu übertragen, <u>dass man zwar den associativen und distributiven Character beibehielt, aber den commutativen Character preisgab.</u> Im einzelnen wird sich dann die Multiplication so darstellen, dass man zunächst das Produkt

$$\sum_i x_i e_i \cdot \sum_k y_k e_k = \sum_\sigma z_\sigma e_\sigma$$ setzt. Dies

wird man erreichen, wenn man die Produkte je zweier der Einheiten e_i gleich bestimmten linearen Functionen der e_i annimmt, also: $e_i e_k = \sum g_{ik\sigma} e_\sigma$. Dann erhält man in der That für das Produkt $\sum x_i e_i \sum y_k e_k$ die Gleichung:

$$\sum x_i e_i \cdot \sum y_k e_k = \sum_i \sum_k \sum_\sigma \gamma_{ik\sigma} x_i y_k e_\sigma, \text{ so}$$

daß $z_\sigma = \sum_i \sum_k \gamma_{ik\sigma} x_i y_k$ wird. Mit diesen Annahmen ist gewiß das distributive Princip aufrecht erhalten. Setzen wir nämlich einmal $x_i' + x_i''$ an Stelle von x_i in $\sum x_i e_i$ ein, dann tritt auch rechts eine Zerlegung in zwei entsprechende Summanden ein. $\sum_i \sum_k \sum_\sigma \gamma_{ik\sigma} x_i' y_k e_\sigma + \sum_i \sum_k \sum_\sigma \gamma_{ik\sigma} x_i'' y_k e_\sigma$. Doch wie steht es mit dem commutativen Princip? Diesem würde man nur dann gerecht werden, wenn von vornherein $\gamma_{ik\sigma} = \gamma_{ki\sigma}$ gesetzt würde, was wir jedoch nicht verabreden wollen. Schließlich wollen wir jedoch das associative Gesetz wieder ausdrücklich aufrecht erhalten. Dies führt uns dann zu einer Anzahl Bedingungen für die Coefficienten γ. Es soll also sein: $(e_\lambda \cdot e_\mu) \cdot e_\nu = e_\lambda \cdot (e_\mu \cdot e_\nu)$.

Dies geht in die folgende Gleichung über, wenn wir allemal für das Produkt zweier Einheiten seinen Wert einsetzen:

$$\sum_\rho \gamma_{\lambda\mu\rho} \underbrace{e_\rho e_\nu} = \sum_\rho \gamma_{\mu\nu\rho} \underbrace{e_\lambda e_\rho} \qquad \text{oder:}$$

$$\sum_\rho \sum_\sigma \gamma_{\lambda\mu\rho} \cdot \gamma_{\rho\nu\sigma} e_\sigma = \sum_\rho \sum_\sigma \gamma_{\mu\nu\rho} \gamma_{\lambda\rho\sigma} e_\sigma .$$

Diese beiden Doppelsummen können nun nur dann einander gleich sein, wenn die Coefficienten derselben Einheiten e_σ beiderseits dieselben sind. Wir erhalten daher als Folge des associativen Principes die <u>Bedingungsgleichungen:</u>

$$\underline{\sum_\rho \gamma_{\lambda\mu\rho} \cdot \gamma_{\rho\nu\sigma} = \sum_\rho \gamma_{\mu\nu\rho} \cdot \gamma_{\lambda\rho\sigma}},$$ die für

alle Zahlenwerte der $\lambda\,\mu\,\nu\,\sigma$ gelten. Wir werden endlich noch eine weitere Bedingung finden, wenn wir sagen, die Division soll sich im allgemeinen ausführen lassen. Aus der Gleichung $\sum x_i e_i = \sum y_k e_k = \sum z_s e_s$ hatten wir bereits die Gleichungen gefolgert:

$$z_1 = \sum_i \sum_k \gamma_{ik1} \cdot x_i y_k,$$

$$z_2 = \sum_i \sum_k \gamma_{ik2} \cdot x_i y_k,$$

. . . .

$$z_n = \sum_i \sum_k \gamma_{ikn} x_i y_k$$

Es giebt nun offenbar 2 Arten der <u>Division</u>, wir denken uns die Grössen z_i gegeben und ausserdem entweder die Grössen x_i oder die Grössen y_k, sodass entsprechend die Grössen y_k resp. x_i zu bestimmen sind. Nehmen wir einmal an, die z_i und x_i seien gegeben. Dann haben wir n lineare Gleichungen zwischen den n Unbekannten y_k, und letztere sind aus denselben eindeutig bestimmt, sobald nur die Determinante

$$\left|\sum_i g_{iks}\,x_i\right|_{s,k}$$

deren Horizontalreihen sich für $s = 1, 2, \ldots n$, deren Verticalreihen sich für $k = 1, 2 \ldots n$ ergeben, von Null verschieden ist, für allgemeine Werte von x. (Im speciellen Falle kann es natürlich immer eintreten, dass für bestimmte Werte der Grössen x_i die Determinante verschwindet).

Analog ist für die Bestimmung der Grössen x_i aus den Grössen y_k und z_i notwendig, dass die Determinante $\left|\sum_k g_{iks}\,y_k\right|_{i,s}$ bei allgemeinen Werten des y von Null verschieden ist. Die Forderung, dass die beiden genannten Determinanten nicht identisch verschwinden sollen, wollen wir daher noch zu den obigen Bedingungen hinzufügen.

Eine Folge unserer Voraussetzungen ist es dann, dass es im System unserer complexen Zahlen eine Einheit giebt, d.h. eine complexe Zahl, welche mit einer beliebigen complexen Zahl rechter Hand oder linker Hand multiplicirt, gerade immer diese beliebige complexe Zahl reproducirt.

Dieses schliessen wir folgendermassen: Die gesuchte Einheit sei bezeichnet mit: $\sum_s y_s^0 e_s$. Nun soll für irgend eine ausgewählte Zahl (y) zunächst gelten:

$$(y) = (y)\cdot(y^0) \quad \text{d.h.}$$

$$y_s = \sum_i \sum_k \gamma_{iks}\, y_i\, y_k^0 .$$

Aus diesen Gleichungen können wir aber die Grössen y_k^0 berechnen, da ja für die beliebig ausgewählten Grössen y_i die Determinante $\left|\sum_i \gamma_{iks} y_i\right|_{k,s}$ nicht verschwinden soll.

Haben wir so die Zahl $\sum_k y_k^0 e_k$ bestimmt, dann gilt doch auch die Gleichung:

$(x)\cdot(y) = (x)\cdot(y)\cdot(y^0)$ oder genauer geschrieben

$(x)\cdot(y) = (x)\cdot((y)\cdot(y^0))$, unter x eine beliebige complexe Zahl verstanden.

Nach dem associativen Princip können wir jedoch die Hauptklammer rechter Hand auch in der folgenden Weise setzen:

$$(x)\cdot(y) = \big((x)(y)\big)(y^0).$$

Da nun $(x)(y)$ doch eine beliebige complexe Zahl darstellt, so haben wir dann hiermit die Hälfte unserer Behauptung bewiesen, dass nämlich eine beliebige complexe Zahl rechter Hand mit (y^0) multiplicirt unverändert bleibt.

Nun können wir weiter setzen:

$$(y)\cdot(x) = \big((y)(y^0)\big)(x)$$

oder:

$$(y)\cdot(x) = (y)\big((y^0)\cdot(x)\big)$$

Hieraus folgt aber:

$(x) = (y^0)\cdot(x)$ d.h. Vermöge unseres neuen Ansatzes wird auch $(x) = (y^0)\cdot(x)$ sein, unter (x) eine beliebige complexe Zahl verstanden.

Unsere Zahl (y^0) ist daher in der That in jeder Weise eine Einheit.

Hat man sich so über bestimmte Systeme complexer Zahlen geeinigt, dann gilt es die Theorie in betreff folgender Punkte fortzuentwickeln:

1) Die erste Aufgabe besteht darin, für jedes n die verschiedenen Typen complexer Zahlen aufzu-

zählen, die es giebt, wenn man alle diejenigen Zahlenarten als gleichwertig betrachtet, die durch lineare Transformation der e_i auseinander hervorgehen. Denn darin ist keine wesentliche Änderung eines Systems zu erblicken, wenn man irgend n lineare Verbindungen der e_i, die linear unabhängig von einander sind, als neue Einheiten e_i' einführt.

2.) Die zweite Aufgabe verlangt dann, gerade zu eine Algebra des einzelnen Typus dieser complexen Zahlen auszubilden. Man bekommt doch, wenn man Addition und Multiplication in beliebiger Reihenfolge wiederholt rationale ganze Functionen oder Formen der allgemeinen Zahlen; die Frage ist, was für Sätze für dieselben gelten.

3) Schliesslich würde man sich zu fragen haben, worin denn der Nutzen dieser Theorieen für andere Disciplinen besteht. Nehmen wir hier als einfachstes Beispiel die Quaternionen, d.h. die aus 4 Einheiten in bestimmter Weise sich aufbauenden Zahlen. Diese sind gewiss von grossem Vorteil anzuwenden, sobald es sich um orthogonale Substitutionen dieser Variabelen handelt oder um Drehungen des R_3 um einen festen Punkt.

Analoges gilt auch für alle anderen complexen Zahlensysteme, die man aufstellen mag; es wird hier oder dort ein specielles Gebiet geben, in der sie mit Nutzen verwandt werden können.

Nun ist aber das Merkwürdige, daß verschiedene Mathematiker von dem Wert der allgemeinen Zahlensysteme ganz verschiedene extreme Ansichten hegen. Die einen sagen, daß der Fortschritt der Mathematik geradezu von der erweiterten Kenntniß solcher complexer Zahlensysteme abhänge. Auch Gibbs ist z. B. der Ansicht, daß die Mathematik durch die Bereicherung unserer Kenntnisse von den complexen Zahlen einen ungeahnten Aufschwung nehmen werde, indem überhaupt die complexen Zahlen von je ein Lieblingsgegenstand der amerikanischen Mathematiker gewesen sind. Dem entgegen halten andere Mathematiker von den complexen Zahlen wenig oder nichts. Es ist dies besonders der Standpunkt, der früher in Berlin vertreten war, woselbst eine ausgesprochene Abneigung gegen die complexen Zahlen bestand.

Wir wollen jetzt noch einige Litteraten über complexe Zahlen hinzufügen. Es ist zu nennen:

<u>Hankel</u>, 1867. Theorie der complexen Zahlensysteme, sowie die ausführlichen Litteraturangaben, die <u>Scheffers</u> in Ann. 39 (1891) zusammengestellt hat. Leider ist hier jedoch eine wichtige Arbeit übersehen worden, die <u>Laguerre</u> in dem Heft 42 der École polytechn. 1867 veröffentlicht hat: sur le calcul des systèmes linéaires.

Im übrigen werden wir hier nicht darauf eingehen, die einzelnen angedeuteten Untersuchungen weiter auszuführen, sondern uns kommt es vornehmlich auf den <u>Zusammenhang der Theorie der complexen Zahlen mit der Gruppentheorie an.</u>

Fr. 30. VI 93] In der am Schlusse der letzten Stunde genannten Hinsicht sei auf die Litteratur verwiesen:

<u>Poincaré</u>, Comptes Rendus 99. 1884

<u>Schur</u> Math. Ann. 33. 1888.

u. <u>Study</u> in den Göttinger Nachrichten u. den Leipziger Berichten von 1889

Die Sache selbst ist ganz einfach darzulegen. Wir haben die Multiplicationsformeln abgeleitet:

$x_s' = \sum_i \sum_k g_{iks}\, x_i\, y_k$ oder in abgekürzter Schreibweise: $(x') = (x) \cdot (y)$; zwischen den g_{iks} bestanden die Relationen, die sich aus der Forderung des associativen Princips ergeben hatten.

Diese Formeln können wir ansehen als eine Schaar linearer Transformationen der Grössen x_i mit den Parametern $y_1\, y_2 \dots y_n$. Nun behaupte ich, diese Schaar bildet eine n-gliedrige Gruppe linearer Transformationen der x_i. Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich einfach als eine Folge des associativen Principes. In der That, wendet man 2 Operationen hinter einander an, etwa

$(x') = (x)\cdot(y)$ und $(x'') = (x')\cdot(z)$, dann ist doch:

$(x'') = ((x)(y))\cdot(z) = (x)\cdot((y)(z))$, d.h. x'' geht aus den x auch durch eine lineare Transformation, der Schaar hervor, natürlich durch diejenige lineare Transformation, deren Parameter $((y)(z))$ sind. Ferner haben wir unter den complexen Zahlen eine besonders bestimmt, die wir als die Einheit $(y_1^\circ \dots y_n^\circ)$ bezeichneten. Es war für sie eben: $(x) = (x)\cdot(y^\circ)$. In unserer Gruppensprache heisst dies Resultat, dass sich unter den Transformationen der Gruppe insbesondere auch die identische Transformation findet. dieselbe gehört eben zu den Parametern y°. Hieraus folgt dann weiter, dass es auch infinitesimale Transformationen giebt. Dieselben erhält man, wenn man setzt:

$$(x') = (x)(y^0 + \delta y^0), \text{ oder:}$$

$$x'_s = x_s + \delta x_s = \sum_i \sum_k \gamma_{iks} x_i (y_k^0 + \delta y_k^0)$$

d. h.

$$\underline{\delta x_s = \sum_i \sum_k \gamma_{iks} x_i \delta y_k}$$

Wenn wir nun eine beliebige Function $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ diesen infinitesimalen Transformationen unterwerfen, dann wird der Zuwachs derselben gleich:

$$\delta f = \sum_k \delta y_k \cdot \sum_i \sum_s \gamma_{iks} x_i \frac{\partial f}{\partial x_s} \text{ sein.}$$

Aus dieser Formel bekommen wir leichtn unabhängige infinitesimale Transformationen, wenn wir nacheinander $\delta y_1, \delta y_2 \ldots$ von 0 verschieden, alle übrigen δy_k jedoch gleich 0 annehmen.

Symbolisch werden diese n infinitesimalen Transformationen demnach durch die Formeln gegeben:

$$X^l_k(f) = \sum_i \sum_s \gamma_{iks} x_i \frac{\partial f}{\partial x_s}$$

(für $k = 1, 2 \ldots n$.)

Nun wollen wir auch die <u>Zusammensetzung</u>

unserer Gruppe berechnen. Es ergiebt sich der Klammerausdruck:

$$(X_k^{\iota}, X_l^{\iota}) = \sum_i \sum_s \sum_t (\gamma_{iks}\,\gamma_{slt} - \gamma_{ils}\,\gamma_{skt}) \cdot x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}$$

oder, indem wir die Klammern auf der rechten Seite mit Hülfe der aus dem associativen Princip für die γ abgeleiteten Relationen umformen:

$$(X_k^{\iota}, X_l^{\iota}) = \sum_i \sum_s \sum_t (\gamma_{kls} - \gamma_{lks}) \cdot \gamma_{ist} \cdot x_i \frac{\partial f}{\partial x_t}$$

$$= \sum_s (\gamma_{kls} - \gamma_{lks}) \cdot X_s^{\iota} = \sum_s c_{kls}\, X_s^{\iota}.$$

<u>Die Zusammensetzungsconstanten c_{kls} unserer Gruppe haben daher den Wert $\gamma_{kls} - \gamma_{lks}$.</u>

Soviel wollte ich von dem Zusammenhang der complexen Zahlen mit der Theorie der Gruppen hier berichten. Hier anknüpfend hat man erneut unternommen, die verschiedenen Zahlsysteme aufzuzählen, die es für $n = 3, 4, 5 \ldots$ giebt. Man vergleiche in dem Betracht die Arbeiten: <u>Scheffers</u> Ann. 39 (1891), <u>Molien</u> Ann. 41. (1892).

Jetzt wenden wir uns zu der neuen Frage, die wir bereits als <u>Helmholtz' Raumproblem</u> bezeichneten. Damit ist jene Fragestellung gemeint, die Helmholtz 1868 in seiner berühmten Arbeit „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen" aufgestellt hat. (Göttinger Nachrichten)

Ich denke hier gar nicht an das philosophische Problem, wie man dazu kommt, die Axiome der Geometrie aufzustellen. Vielmehr wollen wir uns gern unserer gewöhnlichen geometrischen Anschauung bedienen, ~~die~~ ja nicht in sich fehlerhaft ist, sondern nur in Rücksicht auf ihren Ursprung und ihre Zweckmässigkeit untersucht werden kann

Ferner wollen wir die moderne Ausdrucksweise der Gruppentheorie anwenden; denn es handelt sich in Wirklichkeit um eine Frage dieser Disciplin. Was ich also von Helmholtz berichte, soll sogleich in diesem übertragenen Sinne angeführt werden. Des Näheren handelt es sich nun um das folgende Problem. Denken wir uns aus dem Raum ein beliebig grosses Stück ausgeschnitten, den einzelnen Raumpunkt in ihm legen wir durch die Werte x_1 x_2 x_3 fest, welche wir als beliebige Punktcoordinaten, nicht gerade als rechtwinkliche Coordinaten ansehen wollen. Die Bewegungen des Raumes werden sich dann darstellen durch irgendwelche Formeln:

$$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2, x_3;\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

; woselbst $a_1, a_2 \dots a_6$ Parameter sind d.h. die Bewegungen repräsentieren uns eine 6 fach ∞ Schaar von Transformationen des Raumes. Diese Schaar bildet natürlich eine Gruppe, da ja doch 2 Bewegungen hintereinander angewandt immer wieder eine Bewegung abgeben. (Helmholtz drückt das so aus, dass er zwei Raum-Figuren, die einer dritten congruent sind, untereinander congruent setzt.) Die Frage soll nun sein, wie sich unter allen 6 gliedrigen continuirlichen Transformationsgruppen, die es bei 3 Variabeln giebt, diese Gruppe der Bewegungen am einfachsten eindeutig characterisieren lässt.

Ehe wir hierauf die Antwort geben, wollen wir zunächst Einiges über die Nicht Euklidische Geometrie berichten, um gewisse Vorkenntnisse hier zur Verfügung zu haben. Betreffs der näheren Begründung verweise ich auf meine diesbezügliche Vorlesung von 1889 - 90.

Man stellt der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie 2 andere Geometrieen gegenüber, die man als die hyperbolische und die elliptische Geometrie zu bezeichnen pflegt, während man demgemäss die Euklidische Geometrie auch die parabolische Geometrie nennt. Alle diese 3 Arten der Geometrie ergeben sich am einfachsten, wenn man von der projectiven Geometrie ausgeht.

Der parabolischen Geometrie liegt der Kugelkreis als Fundamentalgebilde zu Grunde; derselbe stellt nach der in der genannten Vorlesung gebrauchten Terminologie einen nullteiligen Kegelschnitt dar, d.h. einen Kegelschnitt mit reeller Gleichung, aber ohne reelle Punkte. Die hyperbolische Geometrie dagegen legt eine ovale Fläche 2^{ten} Grades, d.h. ein Ellipsoid oder auch eine Kugel, zu Grunde, die uns umschliesst, die elliptische Geometrie endlich eine nullteilige Fläche 2^{ten} Grades, d.h. wieder eine Fläche mit reeller Gleichung, jedoch ohne reelle Punkte. Wie man nun die Entfernung zweier Punkte wie den Winkel zweier Ebenen in diesen verschiedenen Geometrieen definirt, dies möge hier unerörtert bleiben. Uns kommt es vornehmlich auf die Bewegungen des Raumes an. Mag man die parabolische, hyperbolische oder elliptische Geometrie haben, immer giebt es ∞^6 Bewegungen des Raumes.

Was zunächst die Euklidischen Bewegungen angeht, so bilden dieselben jedenfalls eine 6 gliedrige continuirliche Gruppe von Collineationen, bei welchen der Kugelkreis in sich selbst übergeht. Doch liegt hierin noch keine ausreichende Charakterisirung der Bewegungen. Denn eine einfache Abzählung zeigt, dass der Kugelkreis (wie jeder Kugelschnitt) durch ∞^7 Raumcollineationen in sich übergeführt wird. Zu den Bewegungen kommen nämlich noch die Aehnlichkeitstransformationen hinzu, die durch $x_i' = \lambda \cdot x_i$ gegeben werden, wo λ ein Parameter ist.

Wie werden wir nun aus dieser 7 gliedrigen Gruppe die 6 gliedrige Gruppe aller Bewegungen ausscheiden? Legen wir rechtwinkliche Coordinaten x, y, z zu Grunde, so werden die Bewegungen durch solche Substitutionsformeln

$$x' = ax + by + cz + d$$
$$y' = a'x + b'y + c'z + d'$$
$$z' = a''x + b''y + c''z + d'',$$

die den Kugelkreis in sich überführen, nur unter der Bedingung gegeben sein, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1 \text{ ist,}$$

d.h. dass wir uns auf unimodulare lineare Substitutionen der x, y, z beschränken. Doch besser wird es sein, ein geometrisches Kennzeichen zu haben. Wir wollen zu dem Zweck einmal alle die Transformationen unserer Gruppen betrachten, die den Anfangspunkt O, der übrigens beliebig gewählt sein soll, fortlassen. Beschränken wir uns auf die Gruppe der Bewegungen, so haben wir es nur mit einfachen Drehungen um eine beliebige durch O gehende Axe zu thun. Wählen wir letztere speciell als z-Axe, so wird die Drehung durch die Formeln:

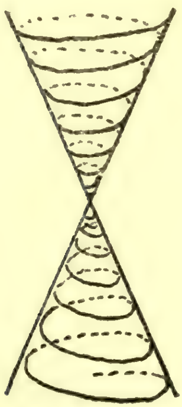
$$x' + iy' = e^{i\varphi}(x + iy)$$
$$z' = z$$

gegeben sein. Wenn wir aber Aehnlichkeitstransformationen hinzunehmen, so werden die Abstände der einzelnen Raumpunkte von O entweder sämtlich vergrößert oder verkleinert werden können. Dann haben wir entsprechende Formeln der folgenden Art:

$$x' + iy' = \alpha \cdot e^{i\varphi}(x + iy)$$
$$z' = \alpha \cdot z.$$

Wenn wir uns nun fragen, wie insbesondere eine solche Transformation durch beständige Anwendung einer ∞ kleinen Transformation erzeugt wird, so erkennen wir, dass jeder einzelne Punkt des Raumes sich auf einer offenen Spirale bewegt, die immerfort um die Axe herumläuft und sich um so mehr zusammenzieht, je näher sie dem Anfangspunkt verläuft.

Diese Spirale ist natürlich auf einem von O ausstrahlenden Rotationskegel gelegen; ihre eine Hälfte ist rechts, die andere links geworden.



Man wird also die 6 gliedrige Gruppe der Bewegungen aus der 7 gliedrigen Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen dadurch ausscheiden, dass man die Spiraltransformationen bei Seite lässt, was Bewegungen um einen festen Punkt angeht, d.h. also nur solche Transformationen beibehält, die jeden anderen Punkt auf einer geschlossenen Bahn herumführen.

So liegt die Sache in der parabolischen Geometrie. Demgegenüber sind die 6 gliedrigen Bewegungsgruppen der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie direct zu definieren als diejenigen continuirlichen Transformationsgruppen von Collineationen, welche die zugehörige fundamentale Fläche 2^ten Grades in sich überführen. Auf Grund dieser Erörterungen modificiren wir nun die anfängliche Fragestellung. Wir werden die Unterschiede, welke unsere 3 Bewegungsgruppen unter einander zeigen, bald näher besprechen. Daraufhin werden wir dann fragen: wie unsere 3 Bewegungsgruppen zusammengenommen sich unterscheiden von der Gesammtheit aller 6 gliedrigen continuirlicher Gruppen des Raumes, die es giebt.

Sa. 1 VII 93.] Um zunächst Unterschiede zwischen unseren dreierlei Gruppen zu haben, fragen wir uns, giebt es ausgezeichnete Untergruppen in unseren Bewegungsgruppen (und zwar handelt es sich selbstverständlich nur um reelle ausgezeichnete Untergruppen, wie denn überhaupt nur reelle Bewegungen in Frage kommen.) Wir richten unsere Aufmerksamkeit damit auf einen Punkt, der unabhängig ist von der besonderen Coordinatenwahl, die wir getroffen haben mögen.

a). In der parabolischen Geometrie haben wir eine ausgezeichnete G_3, dies ist die Gesammtheit aller Translationen des Raumes.

b.) In der elliptischen Geometrie dagegen finden sich 2 ausgezeichnete G_3, die wie folgt näher zu characterisieren sind. Die Fundamentalfläche 2. Grades enthält 2 Systeme gradliniger Erzeugende.

Man kann dann diejenigen Bewegungen des Raumes betrachten, bei denen jede Erzeugende der ersten Art sich in sich selbst verschiebt, und solche, bei denen jede Erzeugende der zweiten Art sich in sich selbst verschiebt. Beiderlei Bewegungen bilden in ihrer Gesammtheit eine 3 gliedrige Gruppe, die sich in Band 37 der Annalen (1890) Schiebungen genannt habe. Des Näheren sei auf diese angeführte Arbeit verwiesen.

c) In der <u>hyperbolischen Geometrie</u> findet sich dagegen keine ausgezeichnete G_3 vor.

Im Vorstehenden haben wir also eine Untersuchung der 3 Geometrieen vom Standpunkte der Gruppentheorie aus. Nach anderer Seite werden wir sehr leicht eine Reihe gemeinsamer Eigenschaften zusammenstellen können:

1) Alle 3 Gruppen sind 6 gliedrig, d.h. bestehen aus 6 fach ∞ vielen Transformationen.

2). Sie sind innerhalb unseres ausgewählten Raumstückes transitiv; man kann jeden Raumpunkt in jeden anderen überführen.

3). Bei festgehaltenem Punkt ergiebt sich eine G_3 als Untergruppe, welche von den dreifach unendlich vielen Drehungen um diesen Punkt gebildet wird.

4). Zwei Punktepaare kann man nur dann zur Drehung bringen, wenn ihre Entfernungen beidemal dieselben sind. Gegenüber der Mannigfaltigkeit der Punktepaare ist also die G_6 eine intransitive Gruppe.

5) Bei festgehaltenem einzelnen Punktepaar bleibt eine G_1 übrig.

6). Aus den Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3,\; y_1\, y_2\, y_3$ zweier Punkte läßt sich ein Ausdruck $\Omega(x_1\, x_2\, x_3\; y_1\, y_2\, y_3)$ construieren, der gegenüber allen Transformationen der G_6 eine Invariante darstellt.

7.) Bei festgehaltenen Punktetripel ist, um allgemein zu reden, eine einzelne Transformation, die Identität, möglich, d.h. wenn wir 3 Punkte festhalten, dann ist der ganze Raum festgelegt.

8). Es giebt keine Spiraltransformationen; jeder Punkt beschreibt bei den Drehungen um irgendwelchen festzuhaltenden Punkt unseres Raumstücks je eine geschlossene Bahn.

Helmholtz drückt diese Eigenschaft dahin aus, daß er die Gruppe als „monodrom" bezeichnet. (In der That liegt hier eine gewisse Aehnlichkeit vor mit dem, was die Functionentheorie unter „monodromen Verhalten" einer Function in einem Punkte versteht, indem der Functionswert sich reproducirt, wenn das Argument einen Umlauf um den betreffenden Punkt ausführt.)

Dies Alles sind Eigenschaften, die wir gemeinsam bei unseren G_6 bemerken. Daß wir gerade 8 Eigenschaften aufgezählt haben, ist dabei zufällig, denn es ist klar, daß 2 und 3 sowie 4, 5 und 6 dasselbe besagen. Helmholtz kommt nun zu dem Resultate, daß durch die hiermit aufgeführten Eigenschaften unsere 3 Bewegungsgruppen geradezu definirt werden können, natürlich gegenüber der Gesammtheit aller anderen 6fach ∞ Transformationsgruppen.

Hier will ich nun die Aufmerksamkeit vor Allem auf die Eigenschaft der Monodromie lenken.

Helmholtz hat die Forderung der Monodromie um so mehr mit auf die Liste gesetzt, als er sich im Falle zweier Variablen überzeugt hatte, daß die Monodromie keine Folge der vorangehenden Voraussetzungen sei.

Wollen wir doch diese Behauptung für 2 Variable zunächst beweisen: Die Gesammtheit aller

Bewegungen bildet hier eine G_3; diese wird wieder in Bezug auf die einzelnen Punkte transitiv, in Bezug auf die Punktepaare intransitiv sein. Bei festgehaltenem Punkte giebt es eine G_1 als Untergruppe, bei festgehaltenem Punktepaare nur die Identität.

Je zwei Punkte haben gegenüber allen Transformationen der G_3 eine bleibende Entfernung, die wir wieder als Invariante $\Lambda(x_1 x_2 \; y_1 y_2)$ gegenüber den Transformationen der Gruppe anzusehen haben. Die Drehung um 0 wird im Gebiet der Euklidischen Geometrie beim Gebrauch rechtwinkeliger Coordinaten durch die Formel gegeben:

$x' + iy' = e^{i\varphi} \cdot (x + iy)$ oder indem wir $\varphi = \beta t$ setzen durch: $x' + iy' = e^{i\beta t}(x + iy)$ gegeben, wo selbst β irgendwelche (natürlich reelle) Constante, t der Parameter sein möge. Für continuirlich sich ändernde Werte des t haben wir gerade die continuirliche Drehung des Systems um den Anfangspunkt vor uns. Wenn wir dann schreiben:

$x' + iy' = e^{i\beta t}(x + iy) + a + ib$, mit den weiteren Parametern a und b, so haben wir zu der Drehung noch eine beliebige Verschiebung der Ebene hinzugenommen. Dies ist die altbekannte Formel für die allgemeine Bewegung in der Euklidischen Ebene. Jetzt aber wollen wir die Formel betrachten:

$x'+iy'=e^{(\alpha+i\beta)t}(x+iy)+a+ib$, wieder mit den 3 Parametern t, a u. b und den Constanten α und β. Diese Formel stellt wieder eine G_3 für 2 Variable dar. Lassen wir insbesondere $a=0$ u. $b=0$ sein, so haben wir bei festgehaltenem Punkte jedoch eine Spiraltransformation um 0 als Centrum, d. h. eine Transformation, welche jeden anderen Punkt auf einer Spirale um den festgehaltenen Punkt herumführt.

Dies hindert jedoch nicht, daß diese G_3 eine Invariante 1 besitzt für je 2 Punkte (die wir daher als Entfernung derselben definieren können.) Um einen solchen invarianten Ausdruck zu finden, wählen wir den einen der Punkte zunächst als den Anfangspunkt, den anderen als den Punkt x, y und gehen aus von den beiden Formeln:

$x'+iy'=e^{(\alpha+i\beta)t}.(x+iy)$,

$x'-iy'=e^{(\alpha-i\beta)t}.(x-iy)$, von denen die zweite eine Folge der ersten ist. Dann logarithmieren wir beiderseits und erhalten:

$\log(x'+iy')=\lg(x+iy)+(\alpha+i\beta).t.$

$$\log(x'-iy') = \log(x-iy) + (\alpha - i\beta)t.$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminieren wir ferner den Parameter t, so dass sich ergiebt:

$$(\alpha - i\beta).\log(x'+iy') - (\alpha+i\beta)\log(x'-iy') = (\alpha - i\beta)\log(x+iy) - (\alpha+i\beta)\log(x-iy).$$

Wir haben hier auf beiden Seiten denselben Ausdruck und damit in der That eine Invariante. Doch haben wir noch den Coordinatenanfangspunkt festgehalten, wir müssen jetzt noch die Verschiebungen in Betracht ziehen. Wir thun dies, indem wir für 2 beliebige Punkte x, y und $x_1\ y_1$ den folgenden Ausdruck zu bilden:

$$(\alpha - i\beta)\log((x+x_1)+i(y-y_1)) - (\alpha+i\beta)\log((x-x_1)-i(y-y_1))$$

Dieser stellt dann ganz allgemein eine Invariante gegenüber aller Transformationen der G_3 vor.

<u>Dieses Beispiel einer Spiral-G_3 zeigt ohne Zweifel, dass bei 2 Dimensionen die Monodromie der Gruppe keine Folge der vorangehenden Prämisse ist, sondern ausdrücklich, wenn man sie hab will, postulirt werden muss.</u>

Ich will nun weiter vortragen, dass ich vorerst einiges Persönliche erwähne. Zwischen Lie und Helmholtz hat sich nämlich eine Discussion entwickelt, an der ich selbst bis zu gewissem Grade betheiligt bin, und ich will in dieser Vorlesung ausdrücklich angeben, wie ich zur Zeit die sämmtlichen hier in Betracht kommenden Fragen auffasse.

Es war gegen Ende der 70er Jahre, als ich Lie auf die Arbeit von Helmholtz aufmerksam machte mit dem Bemerken, dass in ihr eine Gruppenfrage vorliege, und dass ich Schwierigkeiten finde mir im R_3 eine sechsgliedrige Gruppe von den sonst vorausgesetzten Eigenschaften zu bilden, die nicht monodrom sei. Meine damalige Aufforderung an Lie, diese ganze Frage doch einmal mit Hülfe seiner gruppentheoretischen Methoden zu behandeln, hat dann dieser entsprochen und zwar zuerst im Jahre 1886, woselbst er vor der Berliner Naturforscher Versammlung über diese Sache vortrug. Er hat eben damals in den Leipziger Berichten eine vorläufige Mitteilung veröffentlicht. Dann folgen im Jahre 1890 2 grössere Arbeiten von Lie, gleichfalls in den Leipziger Berichten, und schliesslich 1892 kritische Bemerkungen, auch in den Leipziger Berichten und in den Comptes Rendus (1892. I p. 461 ff.). – Ich meinerseits habe in der Zwischenzeit einmal die Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie 1889–90 gehalten; in ihr wird über die Arbeit von Helmholtz referirt I pag 270 ff. Insofern Lie nun Helmholtz' Arbeit angreift, wendet er sich auch gegen mein Referat.

Ferner habe ich in den Math. Ann. Bd. 37 (1890) einen Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie veröffentlicht, in dem ich insbesondere auch zu der Frage der Monodromie Stellung nehme. Die Lie'schen Arbeiten von 1890 und dieser Aufsatz in Band 37 sind durchaus unabhängig von einander entstanden, jeder Autor hat die Darstellung des anderen erst kennen gelernt, als sie publicirt waren. Nun beziehen sich die kritischen Bemerkungen von Lie einmal auf Helmholtz' ganze Theorie und dann auch auf meine Auffassung der Monodromie bei 3 Dimensionen. Die Einwürfe von Lie gegen Helmholtz muss ich gelten lassen, wie ich schon andeutete, und es war insbesondere ein Fehler meiner Vorlesung von 1889-90, dass ich Lie's vorläufige Note von 1886 nicht hinreichend beachtet hatte, dagegen scheinen mir die Ausführungen von Lie gegen meine Auffassung der Monodromie in Bd. 37 auf einem blossen Missverständnisse zu beruhen, hervorgerufen durch die Kürze meiner Ausdrucksweise.

Wollen wir nun des Näheren diese Verhältnisse darlegen.

Das Hauptresultat zunächst, dass Lie in seiner Arbeit 1886 angiebt und 1890 ableitet, ist dieses, dass durch unsere f ersten Eigenschaften im Raum von 3 Dimensionen unsere 3 Bewegungsgruppen in der That eindeutig characterisirt sind, ohne dass man von Monodromie ausdrücklich zu sprechen braucht, vorausgesetzt, dass unsere f Eigenschaften ausnahmslos für alle Punktepaare des endlichen Raumstückes gelten sollen. Wenn man dagegen nur im allgemeinen ihre Geltung verlangt, wenn man beispielsweise zugiebt, dass es besondere Punktepaare giebt, die bei mehr als einfach ∞ vielen Bewegungen festbleiben, dann giebt es noch andere G_6 und unter ihnen nicht monodrome.

Steht nun dieses Resultat von Lie mit dem von Helmholtz nicht so sehr im Widerspruch, so tadelt jener um so mehr die Methode von Helmholtz. Nämlich Helmholtz macht, in unserer Terminologie ausgesprochen, folgenden Ansatz: Er hält einen Punkt fest und sieht zu, wie die von dem Punkte auslaufenden Linienelemente dx_1, dx_2 dx_3 sich bei unseren

Bewegungsgruppen umsetzen. Bei jeder einzelnen der 3fach ∞ vielen Transformationen, welche einen Punkt festlassen, erleiden diese Linienelemente offenbar lineare Transformationen:

$$
\begin{aligned}
dx_1' &= a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2 + a_{13}\,dx_3\,,\\
dx_2' &= a_{21}\,dx_1 + a_{22}\,dx_2 + a_{23}\,dx_3\,,\\
dx_3' &= a_{31}\,dx_1 + a_{32}\,dx_2 + a_{33}\,dx_3\,.
\end{aligned}
$$

Man kann nun jedoch nicht ohne weiteres den Schluss machen, dass die dx_1, dx_2, dx_3 auf 3fach ∞ viele Weise linear transformirt werden. Denn es kann doch unter den infinitesimalen Transformationen unserer G_3 solche geben, die in der Nähe des festgehaltenen Punktes infinitesimal von 2. oder höherer Ordnung sind und bei diesen erleiden dann die dx_1, dx_2, dx_3 einfach die identische Substitution, und es bleiben dann event. nur noch 2fach ∞ viele eigentliche Substitutionen für die dx_1, dx_2, dx_3 übrig oder noch weniger. Nun braucht Helmholtz aber für seine Schlussweise nicht nur, dass die dx_1, dx_2, dx_3 selbst sich auf dreifach ∞ viele Weisen linear umsetzen, sondern auch, dass ihre Verhältnisse dies auf dreifach ∞ viele Weisen thun.

Dies würde schon unrichtig sein, wenn unter den dreifach ∞ vielen Substitutionen der dx_i eine Substitution der Art:

$$d'x_1 = \lambda \cdot dx_1$$
$$d'x_2 = \lambda\, dx_2$$
$$d'x_3 = \lambda\, dx_3,$$ welche eine reine Aehnlichkeitstransformation ist, auftrete.

Da Helmholtz diese beiden Möglichkeiten nicht erläutert, sondern ohne weiteres annimmt, dass bei der G_3 sich die Verhältnisse der dx_1, dx_2, dx_3 auf dreifach ∞ viele Weisen projectiv transformieren, so betrachtet Lie den Helmholtz'schen Beweis als wesentlich unvollständig.

[o. 3 VIII 93.] Auf diesen angegebenen Einwand könnte Helmholtz nun allerdings erwidern, dass er nicht ein abstractes mathematisches Problem, sondern eine bestimmte Frage der Erkenntnisstheorie behandelt, eben die Frage, wie sich unsere Raumvorstellung aufbaut. Damit sei dann von vornherein die Auffassung gegeben, dass die Beweglichkeit des Raumes im unendlich Kleinen ohne weiteres denselben Gesetzen genügt, wie die Beweglichkeit im Endlichen. Wenn also allgemein 2 festgehaltene Punkte nur noch eine Drehung des Raumes um ihre Verbindungslinie zulassen, so gelte dieser Satz auch dann noch, wenn die beiden Punkte einander unendlich nahe gerückt seien. Darauf wird Lie wieder antworten, dass die vorausgesetzten Verhältnisse im unendlich Kleinen eben keine mathematische Folge der vorausgesetzten Verhältnisse im Endlichen sind und dass man bei der Darstellung dieses jedenfalls ausdrücklich constatieren solle, um jeden Schein einer anderen Auffassung zu vermeiden.

Nun, wir wollen nicht länger hierbei verweilen, sondern uns dazu wenden, die Lie'schen Arbeiten des Jahres 1890 in ihren Grundgedanken näher zu betrachten.

In der ersten Arbeit stellt sich Lie die Frage, wie sich die Helmholtz'schen Prämissen einfacher u. präziser fassen lassen, um die Bewegungsgruppen vollständig zu charakterisieren. Er nimmt zu dem Zweck die Verhältnisse im unendlich Kleinen bez. die Transformation de dx, dx_1 dx_3 als Grundlage seiner Voraussetzungen u. ~~kommt~~ hierbei zu folgendem Resultat:

Wenn bei einer G_6 von Punktransformationen des R_3 noch eine G_3 übrig bleibt, sofern der einzelne Punkt festgehalten wird, dagegen eine G_1

sofern das einzelne durch den Punkt gehende Linienelement festgehalten wird, endlich nur noch die Identität (d.h. eine G_0) bleibt, sofern noch das einzelne durch das Linienelement gelegte Flächenelement festgehalten wird, dann sind durch diese Voraussetzungen über das Infinitesimale auch unsere 3 Bewegungsgruppen unter allen überhaupt möglichen G_6 gerade vollständig charakterisirt. Jedoch ist ausdrücklich zu verlangen, daß diese Voraussetzungen hinsichtlich aller von einem Punkte auslaufenden Linienelemente bezw. Flächenelemente ausnahmslos gelten. — Der Gang der Lie'schen Untersuchungen ist nun einfach der folgende: Wir setzen voraus daß die Linienelemente $dx_1\, dx_2\, dx_3$ durch 3fach unendlich viele Transformationen projectiv transformirt werden, daß also eine Formelgruppe gilt:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, d'x_1 &= a_{11}\, dx_1 + a_{12}\, dx_2 + a_{13}\, dx_3 \\ \varrho\, d'x_2 &= a_{21}\, dx_1 + a_{22}\, dx_2 + a_{23}\, dx_3 \\ \varrho\, d'x_3 &= a_{31}\, dx_1 + a_{32}\, dx_2 + a_{33}\, dx_3 \end{aligned}\right\} \text{die 3 Parameter enthält.}$$

Zugleich wissen wir aus den Voraussetzungen, daß bei der einzelnen Transformation niemals ein Linienelement und ein durch dieses gelegtes Flächenelement gleichzeitig festbleiben können, ohne daß die Transformation die Identität darstellt. Nun haben wir seiner Zeit die sämmtlichen projectiven Gruppen an der Hand der von Franz Meyer gegebenen Tabelle aufgezählt. Aus ihr entnehmen wir direct, dass es nur eine einzige G_3 giebt, welche die angegebenen Eigenschaften besitzt, und zwar ist dies diejenige dreigliedrige Gruppe, die einen vom festgehaltenen Punkte ausstrahlenden, nullteiligen Kegel $\sum_i \sum_k f_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$

unverändert lässt. (Man beachte eben, dass die Geometrie im Punkte mit den Coordinaten $dx_1\, dx_2\, dx_3$ identisch ist mit der Geometrie der Ebene mit 3 homogenen Coordinaten) Also wird auch die gesuchte G_6 die Eigenschaft haben, eine Gleichung 2ten Grades für die dx_i $\sum \sum f_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ invariant zu lassen, wobei die linke Seite eine definite quadratische Form vorstellt und die f_{ik} übrigens irgendwelche, uns noch unbekannte Functionen der $x_1\, x_2\, x_3$ vorstellen.

Damit ist dann ein Punkt erreicht, zu dem auch Helmholtz in seiner Arbeit gelangt. Von hier kann man dann, wie Helmholtz es thut, alles weitere auf die Untersuchung der quadratischen Differentialausdrücke $\sum \sum f_{ik}\, dx_i\, dx_k$ werfen, indem man auf die Litteratur Bezug nimmt, die ich diesbezüg.

lich auf Seite 426 ff etc. des ersten Teiles der „Höheren Geometrie" gegeben habe. Insbesondere findet Helmholtz solcher Weise den Anschluss an Riemanns hierher gehörige Untersuchungen. Es handelt sich dann einfach um die Frage, welche quadratischen Differentialausdrücke gehen durch eine G_6, wie sie hier vorliegt in sich selbst über. Dieses ist an sich eine schwierige Theorie, deren Erledigung ein grosses Verdienst von Riemann ist. – Lie dagegen hat es vorgezogen, in anderer Weise weiter zu gehen, indem er bei der Gruppentheorie bleibt. Er hat bereits im 10. Bande des norwegischen Archivs (1885) alle Gruppen von Raumtransformationen bestimmt, durch welche eine Gleichung $\sum\sum f_{ik}\, dx_{ik}\, dx_k$ in sich übergehen kann, bei geeigneten Werten der f_{ik}. In dieser Hinsicht kommt Lie zu folgendem Resultat. Erstens giebt es eine G_{10}, welche eine solche Gleichung in sich überführt, das typische Beispiel hierfür ist die Gruppe der conformen Transformationen des R_3, mit der wir uns im Winter soviel beschäftigten. Dann giebt es eine G_7, die von den Euklidischen Bewegungen zusammen mit den Aehnlichkeitstransformationen repräsentirt wird. Endlich giebt es die dreierlei Arten der G_6, wie sie bei unseren dreierlei Bewegungsgruppen auftreten. Da dieses dieses die sämmtlichen Gruppen sind, durch welche eine Gleichung $\sum\sum f_{ik}\,dx_i\,dx_k = 0$ in sich übergehen kann, so folgt, dass nur die 3 letzten Möglichkeiten übrig bleiben, sofern man sich auf Gruppen mit 6 Parametern beschränken will. Damit sind wir am Ziele.

In dieser ersten Arbeit von Lie, die gewissermassen an Stelle der ursprünglichen Darstellung von Helmholtz zu setzen ist, ist nun gar nicht davon die Rede, dass man hinsichtlich der Monodromie der Gruppe ein besonderes Axiom formulieren müsse.

Wir kommen nun zu der 2ten Arbeit von Lie in den Leipziger Berichten. In dieser stellt Lie sich das Problem, die bekannten Voraussetzungen hinsichtlich der Beweglichkeit des Raumes nur im Endlichen gelten zu lassen, während er betreffend das unendlich Kleine alle damit verträglichen Möglichkeiten zulässt, und insbesondere nimmt er auch in Betracht, dass die Verhältnisse im Endlichen nur im allgemeinen gelten sollen, nicht allgemein. Er betrachtet z. B. solche Fälle, in denen bei der G_6 ein bestimmtes System von

∞^2 Curven des Raumes in sich selbst übergeht, worauf 2 Punkte, die einer solchen Curve angehören, gewiss bei 2 fach ∞ vielen Transformationen der Gruppe festbleiben und also der Satz, dass das einzelne Punktepaar nur durch einfach unendlich viele Transformationen in sich verwandelt wird, für diese besonderen Punktepaare nicht richtig ist. Dabei lässt also Sie die philosophische Fragestellung ganz aus dem Augen, und gliedert dafür die mathematischen Entwickelungen von den obersten Prämissen ausgehend in aller Strenge und in allen ihren Einzelheiten. Der Wert der Arbeit beruht daher darin, dass sie das Beispiel eines durchgeführten Problems der Gruppentheorie giebt. Die Ergebnisse, zu denen Sie gekommen ist, sind nun kurz die folgenden:

Wenn man die bekannten Prämissen, hinsichtlich der G_3 ausnahmslos aufrecht erhalten will, dann kommt man auch hier nur auf unsere 3 Bewegungsgruppen und braucht hinsichtlich der Monodromie der Gruppe keinerlei weiteren Voraussetzungen zu formulieren. Wenn man aber die Prämissen nur im allgemeinen gelten lässt, dann giebt es noch eine Reihe weiterer Fälle von Transformationsgruppen und unter ihnen sind auch nicht monodrome.

Nun will ich dazu übergehen, meine eigenen Monodromiebetrachtungen in Ann. Bd. 37 pag: 565 in ihrem wesentlichen Punkte zu erklären und dieselben namentlich gegen den Lie'schen Angriff in den Leipziger Berichten 1892 (pag. 111) zu vertheidigen, der in der That nur auf einem Mißverständniß beruht, aber freilich die Nothwendigkeit zeigt, daß ich ausführlicher sage, was ich meine.*)

Bei 2 Dimensionen giebt es, wie wir wissen, als Seitenstück zu den anderen Bewegungsgruppen, die G_3 mit Spiraltransformationen, wie sie die Formel giebt:

$$(x'+iy') = e^{(\alpha+i\beta)t}\cdot(x+iy)+a+ib.$$

Ich behaupte nun l. c. das, daß bei 3 Dimensionen eine solche Gruppe unmöglich ist, dies soll heißen: es giebt dort keine Bewegungsgruppe, keine G_6, welche Spiraltransformationen enthielte. Lie aber ließt hieraus, im R_3 gäbe es überhaupt keine Gruppe mit Spiraltransformationen bei festgehaltenem Punkte! Eine solche Behauptung wäre freilich so unvernünftig, wie möglich. Denn daß es solche Gruppen giebt, lie

*) Ich sehe übrigens diese meine Betrachtungen nur mehr als ein Aperçu an, durch welches deutlich wird, daß hier zwischen 2 und 3 Dimensionen wirklich ein Unterschied besteht, durch welches aber die eingehenden Lie'schen Untersuchungen keineswegs überflüssig gemacht werden.

doch ohne Weiteres zu Tage; man construire die einfachen Formeln:

$$x' + iy' = e^{(\alpha+i\beta)t} \cdot (x+iy)$$
$$h' = e^{\alpha t} \cdot h$$

, mit dem Parameter t. Wenn ich dies hätte leugnen wollen, so ist der Sinn der Ueberlegungen, die ich l. c. folgen lasse, vollkommen dunkel. Um so mehr muss ich auseinandersetzen, wie dieselben verstanden sein sollen. Ich werde dabei, um allen Einwürfen zu entgehen, die man aus dem Begriff des Unendlich Kleinen ableiten könnte, meine Voraussetzungen so eng fassen, wie möglich; der Kernpunkt meines Gedankens, auf den es mir allein ankommt, tritt dann um so deutlicher hervor.

Bei 2 Dimensionen haben wir neben die Gruppe der Euklidischen Bewegungen:

$$x' + iy' = e^{i\beta t} (x+iy) + a + ib$$

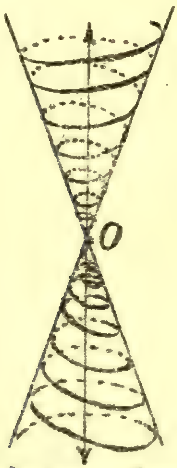
die Spiraltransformation gesetzt:

$$x' + iy' = e^{(\alpha+i\beta)t} \cdot (x+iy) + a + ib.$$

Beide G_3 sind in der G_4 enthalten, die aus den Euklidischen Bewegungen und den Aehnlichkeitstransformationen sich zusammensetzt, d. h. aus denjenigen Collineationen, welche die beiden Kreispunkte festlassen.

Gehen wir nun zu <u>3 Dimensionen</u>. Wir haben dann eine G_7 derjenigen Collineationen, die den Kugelkreis festlassen. Nun wollen wir uns fragen, was giebt es in dieser G_7 für Gruppen G_6, welche die von einem Punkte auslaufenden Linienelemente genau so vertauscht, wie die G_6 der Euklidischen Bewegungen. Ich behaupte, <u>dass innerhalb einer solchen G_6 bei festgehaltenem Punkte keine Spiraltransformationen auftreten können</u>.

[Di. 4 VII 93] Wir wollen einen Raumpunkt O und ein Linienelement, die von ihm einseitig nach bestimmter Richtung ausläuft, festgehalten denken. Dann giebt es doch zunächst allemal auch das entgegengesetzt gerichtete Linienelement, und vermöge unserer G_6 sind der Voraussetzung nach alle Linienelemente, die vom Punkte O ausstrahlen, gleichberechtigt und insbesondere also auch die 2 entgegengesetzten Linienelemente gleichberechtigt, d.h. man kann vermöge unserer Gruppe bei festgehaltenem Punkte (durch eine Drehung um $180°$) jedes Linienelemente in sein entgegengesetztes überführen. Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die G_1, die bei festgehaltenem Linienelement des Punktes O noch übrig bleibt. Gesetzt nun die G, bestände aus Spiraltransformationen. Dann werden wir uns also etwa einen Rotationskegel um jenes Linienelement von O auslaufend denken und auf ihm würden die Bahncurven auf seiner oberen Hälfte etwa aus rechts gewundenen Schrauben, auf seiner unteren Hälfte aus links gewundenen Schrauben bestehen.



Dies aber widerspricht unmittelbar der Gleichberechtigung der beiden entgegengesetzten Linienelemente in der Axe des Kegels, indem bei einer geeigneten Drehung um 180° nicht nur das eine Linienelement in das andere übergehen muss, sondern auch die Bahncurven, die das eine Element umgeben, in die Bahncurven, die das entgegengesetzte Linienelement umgeben, was unmöglich ist. (Denn eine rechts gewundene Schraubenlinie kann nie durch Drehung oder Ähnlichkeitstransformation in eine linksgewundene verwandelt werden.) Also kann es keine Spiraltransformation sein, und es ist überflüssig ausdrücklich unserer G_6 auch die Bedingung aufzuerlegen, dass sie keine Spiraltransformationen enthalten solle. –

Ich will nun noch ein Wort über den sonstigen Zweck meiner Arbeit in Ann. Bd. 37 hinzufügen. Wir haben wollen wir voraussetzen, unsere dreierlei Gruppen in einem begrenzten Raumstück charakterisirt, haben aber die Transformationen nur in soweit betrachtet als sie in der Nähe der Identität liegen, aber doch sich in unserem begrenzten Raumstücke abspielen.

Es ist nun die Frage, was eintritt, wenn man die Betrachtung über das begrängte Raumstück hinaus unbegrängt fortsetzt? Die Fragestellung stimmt durchaus mit dem Gedanken, die immerfort in dem ersten Hefte der Höheren Geometrie hervortreten, dass wir eben der Geometrie in der Umgebung des einzelnen Punktes die Geometrie im Gesammtraume gegenüberstellen sollen. Mein Resultat in Bd 37 ist dann, dass in dieser Hinsicht noch sehr verschiedene Möglichkeiten vorliegen. Ich kann natürlich auf keine Einzelheiten hier eingehen.

Hieran schliesst sich dann die Auffordeung, in ähnlicher Weise alle anderweitig aufgestellten continuirlichen Gruppen zu discutieren. Es ist das eine neue weitreichende Fragestellung. –

Wir wenden uns weiter zu dem vierten Gegenstande, den wir hier erläutern wollten, derselbe handelt von den Differentialinvarianten einer Gruppe. Da muss ich zunächst einige Betrachtungen über allgemeine Invariantentheorie vorausschicken, die an die früher entwickelten Gedanken anknüpfen. Wir hatten seiner Zeit Variable, die wir damals $A_0, A_1, \dots A_n$ nannten, 3 infinitesimalen Transformationen $Y_1 - Y_4, Y_2, Y_3$ unterworfen. Wir bezeichneten eine Funktion $f(A_0 A_1 \dots A_n)$ dann als eine Invariante, wenn für sie $Y_1 - Y_4 = 0$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 0$ war.

2) Dies gilt es nun zu verallgemeinern. Es seien die Variabeln $x_1, x_2 \dots x_n$ zu Grunde gelegt, und die r infinitesimalen Transformationen $X_1, X_2, \dots X_r$. Dann werden wir die Funktion $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ eine Invariante nennen, wenn sie den Transformationen der aus der $X_1, X_2 \dots X_r$ sich zusammensetzenden Gruppe gegenüber unverändert ist, d.h. wenn für diese Function $X_1(f) = 0$, $X_2(f) = 0$ $\dots X_r(f) = 0$ ist. Nun haben wir noch eine Ergänz-

zung hinzuzufügen. Zwischen den $X_r^{\prime}$ soll zwar keine lineare Relation mit <u>constanten</u> Coefficienten bestehen, wohl aber kann eine Relation der Form: $\omega_1 X_1^{\prime} + \omega_2 X_2^{\prime} + \dots + \omega_r X_r^{\prime} = 0$ gelten, wo die ω selbst Functionen der Variabeln sind.

Nehmen wir einmal an, dass vermöge solcher Gleichungen die Zahl der in diesem erweiterten Sinne linear unabhängigen $X^{\prime}$ gleich s sei, wo, selbst $s \leqq r$ ist. Dann werden die r Gleichungen $X_1^{\prime}(f) = 0 \dots X_r^{\prime}(f) = 0$ offenbar aequivalent sein mit einem vollständigen System von s Differential-Gleichungen. Nun wissen wir aber, wie ein solches vollständiges System zu integrieren ist. Man suche zunächst $n-s$ particuläre Integrallösungen $f_1, f_2 \dots f_{n-s}$. Dann stellt eine willkürliche Function $F(f_1 f_2 \dots f_{n-s})$ die allgemeine Lösung des Systems dar. In geometrischer Denkweise ist dieses so zu verstehen. Entsprechend den vorliegenden s Differentialgleichungen gehen von jedem Raumpunkte charakteristische M_s aus und zwar wird der ganze Raum von ∞^{n-s} solcher characteristischen M_s gerade ausgefüllt.

Diese M_s sind analytisch definirt durch die Gleichungen: $f_1 = C_1, f_2 = C_2 \dots f_{n-s} = C_{n-s}$ woselbst die C_i willkürliche Constante sind. Das allgemeine Integral $F(f_1 \cdots f_{n-5}) = $ Const giebt uns daraufhin eine Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen, die von lauter M_5 gebildet wird. Dies ist ja nur eine Recapitulation von bereits früher Entwickeltem. Verstehen wir also unter einer Invariante eine beliebige Function, die sich bei der vorgelegten Gruppe nicht ändert, so werden die Invarianten einer Gruppe schlechtweg durch die Lösungen eines vollständigen Systems von linearen Differentialgleichungen definirt sein, und unsere früheren allgemeinen Erörterungen über die Lösungen eines vollständigen Systems sind also eben so viele Beiträge zur Invariantentheorie.

3) Nun wollen wir noch einen neuen Gedanken hinzufügen.

Wir können den Begriff „Invariante" auch allgemeiner auffassen und sagen: wir wollen unter der Invariante eine Function f verstehen, für die

$$X_1(f) = c_1 \cdot f$$
$$X_2(f) = c_2 \cdot f$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$X_r(f) = c_r \cdot f$$

ist, woselbst die Coefficienten c beliebige Functionen von $x_1, x_2 \cdots x_n$ sein mögen. Also f stellt dann eine Function dar, die sich nur um <u>gewisse Factoren</u> ändert. Wir nennen solche f <u>relative</u> Invarianten im Gegensatz zu den <u>absoluten</u> Invarianten, die wir vorhin ausschliesslich betrachteten. Lie betrachtet insbesondere die Gleichung $f=0$ und nennt diese eine <u>invariante Gleichung</u>.

Wir stellen uns die Aufgabe, <u>bei gegebener Gruppe alle invarianten Gleichungen zu finden</u>. Es kommt dieses darauf hinaus, alle solche Functionen f zu finden, welche $X_1'(f)=0, \dots X_s'(f)=0$ <u>vermöge $f=0$</u> befriedigen. Eine solche Gleichung $f=0$ stellt dann eine M_{n-1} im R_n vor, und wir verlangen daher in unserer Aufgabe nicht nur die <u>Schaaren</u> der M_{n-1} des R_n, sondern die einzelnen M_{n-1}, welche unsere Differentialgleichungen befriedigen.

Nun bekommen wir sofort unendlich viele Beispiele solcher invarianten Gleichungen, wenn wir beliebige absolute Invarianten f der Gruppe gleich C, d.h. gleich einer beliebigen Constante setzen. — Es handelt sich jedoch um die Frage, ob durch die solcherweise entstehenden M_{n-1}, die der allgemeinen Lösung unseres vollständigen Systems entsprechen, alle invarianten Gleichungen erschöpft werden, oder aber es nicht noch besondere Auflösungen, singuläre M_{n-1} giebt, die nicht in dieser allgemeinen Vorschrift enthalten sind. Von jedem Raumpunkt strahlen doch 5 Characteristiken aus, die zu den 5 - linear unabhängigen Differentialgleichungen $H_1^i(f)=0, \dots H_5^i(f)=0$ gehören. Diese 5 Characteristiken zusammen bestimmen in einzelnen Punkte allgemeiner Lage ein Bündel von ∞^{5-1} Fortschreitungsrichtungen, welche eben in ihrer Fortsetzung die von unserem Punkte auslaufende characteristische M_5 definieren. Auf dieser bestimmten M_5 wird dann unser ausgewählte Punkt vermöge der Transformationen der vorliegenden Gruppe beliebig verschoben.

Soll daher unsere M_{n-1}, die durch die invariante Gleichung gegeben ist, einen Punkt in allgemeiner Lage enthalten, so muss sie auch die ganze characteristische M_5 enthalten, die von diesem Punkte ausgeht. Wenn also unsere M_{n-1} überhaupt Punkte allgemeiner Lage enthält, dann wird sie vollständig überdeckt sein von den M_5, die von diesen Punkten ausstrahlen, d.h. aus lauter M_5 erzeugt sein und somit unter die M_{n-1} der allgemeinen Lösung fallen. Hieraus können wir nun sogleich schliessen, in welcher Weise sich singuläre Lösungen ergeben werden. Als specielle Punkte werden wir zunächst solche Raumpunkte zu bezeichnen haben, für die von den Differentialgleichungen $X_1(f)=0 \ldots \ldots X_r(f)=0$ weniger als 5 linear unabhängig sind. Die charakteristischen Mannigfaltigkeiten, die von solchen Punkten ausstrahlen, werden unter Umständen weniger als 5 Dimensionen besitzen können, wenn sie nämlich ganz im Gebiet der singulären Punkte verlaufen. Um nicht in Weitläufigkeiten zu gerathen, werden wir in jedem Falle untersuchen, ob es Mannigfaltigkeiten $(n-1)$ster Dimensionen giebt, die aus lauter solchem speciellen Punkten bestehen und alle unsere Differentialgleichungen befriedigen. Diese Frage wird nun noch genauer analytisch zu formulieren sein. Jedenfalls werden diese singulären M_{n-1} nichts mit den absoluten Invarianten zu thun haben, sondern uns nur relative Invarianten liefern.

Do 6 [VII 93] Gegeben ist das System der r infinitesimalen Transformationen der Gruppe

$$X_1 = \xi_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \xi_{1n}\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$X_2 = \xi_{21}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \xi_{2n}\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_r = \xi_{r1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \xi_{rn}\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die Matrix, die durch die Coefficienten ξ dargestellt wird:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \cdots & \xi_{rn} \end{vmatrix}.$$

Wenn von den r Transformationen X^i nur s, wo $s \leqq r$, im allgemeinen Sinne, linear unabhängig sind, so besagt dies einfach, daß alle $(s+1)$ gliedrigen Determinanten, die sich aus dieser Matrix bilden lassen, verschwinden müssen, und zwar ist dieses der Fall für jeden beliebigen Raumpunkt. Für die singulären Punkte aber, von denen am Schlusse der letzten Stunde die Rede war, wird noch eine höhere Abhängigkeit der Transformationen X^i statt haben müssen. das Mindeste, was eben weiter eintreten kann, wird dann sein, daß alle s-reihigen Determinanten gleich null sind. Umgekehrt bekommt man daher geradezu die Mannigfaltigkeit aller singulären Punkte des Raumes, indem man alle s-reihigen Determinanten unserer Matrix gleichzeitig gleich 0 setzt. Um dann weiter alle relativen Invarianten zu finden, die nicht mit der Aufstellung der absoluten Invarianten von selbst gegeben sind, wird man zunächst zusehen, ob unsere singulären Punkte vielleicht eine M_{n-1} ausfüllen, deren Gleichung $f=0$ ist. Ist dieses der Fall, dann prüfe man schliesslich, ob für diese Function f vielleicht $X_1(f)=0$, $X_2(f)=0$ .... $X_n(f)=0$ wird eben vermöge $f=0$. Denn damit ist eben f eine relative Invariante und $f=0$ eine invariante Gleichung.

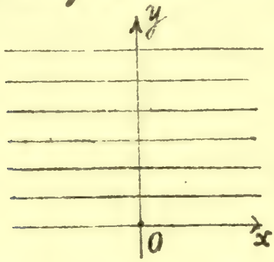
Sie werden nun natürlich auch ein Beispiel für diese Theorie wünschen; Sie finden dieselben in grösserer Zahl in dem Buche Lie-Scheffers (1891) Hier wollen wir uns begnügen, das einfachste Beispiel anzuführen. Es sei:

$x' = ax$

$y' = y$ die vorgelegte Gruppe mit dem Parameter a. Die einzige infinitesimale Transformation derselben giebt $\delta x = x \cdot \delta a$

$\delta y = 0$ oder das Symbol $X(f) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$.

Wir stellen daher die Differentialgleichung auf: $x\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und betrachten, um sie zu integrieren, die einzelnen characteristischen Mannigfaltigkeiten, die vom einzelnen Punkte x, y auslaufen. Diese Characteristiken, auf denen die Punkte durch die Transformationen hin und her geschoben werden, werden einfach durch sämtliche Horizontallinien dargestellt, d.h. durch die Curven $y = \text{const}$. Indem nun die allgemeine



Lösung aus lauter characteristischen M_1 zusammengesetzt ist, ergibt sich als ihre Gleichung $F(y) = \text{const}$, wo F eine beliebige Function bezeichnet, d.h. die allgemeinen Lösungen unseres vollständigen Systems werden durch beliebige Functionen von y gebildet. Diese beliebigen $F(y)$ bilden daher auch die absoluten Invarianten der Gruppe. Die Frage wird nun sein, ob es neben ihnen noch besondere relative Invarianten giebt. Wir bilden, um sie zu finden die Determinantenmatrix der Coefficienten, diese lautet einfach $|x|$. Sollen dann auch sämmtlich eingliedrigen Determinanten verschwinden, d.h. in diesem einfachen Falle, soll auch $x = 0$ sein, so liefert diese Gleichung die Punkte der y-Axe.

Diese bilden eine M_1, und die einfache Prüfung zeigt uns schliesslich sofort, dass in der That $x = 0$ ein invariante Gleichung von singulärer Stellung, x selbst eine relative Invariante ist.

Die Curve $x=0$ bleibt eben invariant, weil ihre einzelnen Punkte invariant sind, und steht damit im Gegensatz zu den Curven $y=\text{const}$, welche als Bahncurven der infinitesimalen Transformation invariant sind.

Haben wir bisher nur von Invarianten gesprochen, welche von den Coordinaten $x_1\, x_2 \cdots x_n$ eines einzelnen Punktes abhängen, so wird man weiterhin versuchen, die Invarianten eines Punktepaares, eines Punktetripels etc aufzustellen. Diese Theorie ist nun im Grunde von der bisherigen gar nicht verschieden. Haben wir nämlich neben dem ersten Punkt $x_1\, x_2 \ldots x_n$ noch einen zweiten x_1' $x_2' \ldots x_n'$, so können wir die Coordinaten $x_1\, x_2 \ldots x_n,\ x_1'\, x_2' \ldots x_n'$ neben einander als ebensoviele neue Coordinaten eines höheren Raumes betrachten und sie den Transformationen $X_1 + X_1'$, $X_2 + X_2'$, $\ldots X_n + X_n'$ unterworfen denken. Dann hat es gar keine Schwierigkeit für das Punktepaar genau nach der früheren Methode, absolute Invarianten und relative Invarianten aufzustellen. Ebenso ist es weiter für das Punktetripel u.s.w. fort. Da aber die Zahl der Variabeln dann immer wächst, während die Zahl der Operationen X constant gleich r bleibt, so wird hier gewiss eine immer wachsende Zahl von Invarianten hervorkommen, (während für das einzelne Werthsystem x möglicherweise überhaupt noch keine Invarianten existiren).

Auch hier wollen wir wieder ein ganz einfaches Beispiel betrachten:
Die Gruppe sei durch die Substitution

$$x_1 \parallel \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$x_2 \parallel \gamma x_1 + \delta x_2 \text{ gegeben }^{*)}$$

Diese Formeln stellen eine 4 gliedrige Gruppe dar, ihr liegen die 4 infinitesimalen Transformationen zu Grunde: $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$. Für ein Punktepaar: x_1, x_2, x_1', x_2' welches wir diesen Transformationen unterwerfen, haben wir daher die Symbole: $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'}, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial f}{\partial x_1'}, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1' \frac{\partial f}{\partial x_2'}$,

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2' \frac{\partial f}{\partial x_2'} \quad \text{zu nehmen.}$$

Wollen wir nun die absoluten Invarianten der Punktepaare finden, so setzen wir die 4 letzten Aus-

---

*) Um weitere Indices zu vermeiden, ist hier diese andere Schreibweise einer Transformation benutzt.

drücke gleich. Wir bekommen die 4 Differentialgleichungen: $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0$, $x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0$,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1' \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0 \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0.$$

Die Determinantenmatrix der einzelnen $\frac{\partial f}{\partial x}$ lautet hier:

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_1'} & \frac{\partial f}{\partial x_2'} \\ \end{array}$$
$$\left|\begin{array}{cccc} x_1 & 0 & x_1' & 0 \\ x_2 & 0 & x_2' & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_1' \\ 0 & x_2 & 0 & x_2' \end{array}\right|$$

. Diese Matrix ist zufällig gerade eine 4 gliedrige Determinante

Da diese im allgemeinen nun nicht verschwindet, wie sofort zu sehen, so folgt aus den obigen 4 Gleichungen allgemein zu reden das Bestehen der folgenden 4 einfachen Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0$$

Diese Gleichungen führen auf $f = const$, dies aber besagt, <u>dass es keine absoluten Invarianten der Punktepaare für unsere Gruppe giebt.</u> Um nun zu sehen, ob es singuläre Lösungen giebt, setzen wir die Determinante gleich 0; dies führt ausgerechnet zu der Gleichung: $(x_1 x_2' - x_2 x_1')^2 = 0$ oder:

$x_1 x_2' - x_2 x_1' = 0$

Diese Gleichung genügt aber in der That unmittelbar den vier Bedingungen:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0 \;\ldots\ldots\; x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2' \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0$$

Wir haben also eine einzige relative Invariante, das ist $x_1 x_2' - x_2 x_1'$.

Von der Invariantentheorie der Punktepaare, Punktetripel u. s. w. gelangt man nun leicht zu der Theorie der Differentialinvarianten. Man kann natürlich die Differentialinvarianten auffassen als Gränzfälle der Invarianten eines Punktepaares, Punktetripels u. s. w., die entstehen, wenn man die beiden Punkte des Paares oder die drei Punkte des Tripels u. s. w. consecutiv werden läßt.

Wollen wir diesen Gedanken jetzt für die Ebene noch weiter ausgestalten. In der Ebene mögen wir die Coordinaten x, y haben. Wir nehmen dann y als abhängige, x als unabhängige Variable und bilden uns demgemäß die Differentialquotienten y', y'', y''' u. so fort. Nun ist der erste Schritt, daß wir unsere gegebenen Transformationen $X(f)$, die sich zunächst nur auf die Variabelen x und y beziehen, zu allgemeinen Symbolen erweitern, in welchen die Differentialquotienten y', y'', y''' u. w. als Variable mit aufgenommen sind. Wir haben diesen ersten Schritt, was das y' angeht, schon vor einiger Zeit gelegentlich ausgeführt, indem wir von der ursprünglichen Transformation $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$, woselbst ξ und η beliebige Funktionen von x und y darstellen, zu der "ersten erweiterten Transformation" übergingen:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2\right) \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Die Differentialinvarianten der gegebenen Gruppe werden sich nun ergeben, wenn wir für die Variabelen $x, y, y', \ldots$ unter Zugrundelegung der erweiterten Symbole die gewöhnlichen Invarianten suchen.

Analog ist es, wenn von Anfang an nicht zwei Veränderliche, x und y, vorgegeben sind, sondern beliebig viele. Nur wird man dann sich noch verschiedene Annahmen machen können, welche von ihnen als abhängige, welche als unabhängige Variable beim Differentiiren gelten sollen.

Diese allgemeinen Angaben über Differential-invarianten will ich nun durch den Hinweis auf die bezügliche Litteratur ergänzen. Was zunächst Beispiele von Differentialinvarianten der Ebene angeht, so beziehe ich mich auf Autographie meiner ersten Vorlesung über „Höhere Geometrie", woselbst auf pag. 340 von den „metrischen Differentialinvarianten" und auf pag. 341 ff. von den „projectiven Differentialinvarianten" der Ebene gehandelt wird. Die „metrischen" Differentialinvarianten sind dort speciell solche, die bei den Euklidischen Bewegungen ungeändert bleiben. Hierher gehören beispielsweise als relative Invarianten die Ausdrücke $1+y'^2$ und y''; denn $1+y'^2=0$ besagt, dass die gerade Linie, die das Integral dieser Gleichung darstellt, durch die beiden Kreispunkte geht, und $y''=0$, dass wir überhaupt mit einer geraden Linie zu thun haben; — Beides sind doch aber Eigenschaften, die den Euklidischen Bewegungen gegenüber unveränderlich sind; ja die Gleichung $y''=0$ bleibt sogar bei allen Collineationen der Ebene unverändert. Aus diesen beiden Ausdrücken setzt sich dann als absolute metrische Invariante der Krümmungsradius ρ zusammen: $\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. — Was dann ferner allgemein projective Invarianten angeht, so habe ich damals ausführlich von den betreffenden Untersuchungen von Halphen berichtet, auf die ich mich hier wieder beziehe.

[Fr. 7 VII 93] Ich berichte nun noch kurz über Arbeiten von Lie und Sylvester.

Die hauptsächliche Arbeit von Lie, die wir hier nennen müssen, findet sich im Archiv Bd. 8 (1883) und ist in Annalen 32 abgedruckt, unter dem Titel: Ueber Classification und Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zwischen x und y, welche eine Gruppe gestatten. Man vergleiche dazu die Abhandlung Lie's in Ann. 24, wo Differentialinvarianten insbesondere auch für „unendliche" Gruppen betrachtet werden, und die Erläuterungen in Lie-Engel I, Kap. 25.

Die Untersuchungen von Sylvester andererseits, die 1884 beginnen, ohne dass Sylvester damals von den Lie'schen Untersuchungen irgendwie Kenntniss hatte, sind in den Jahren 1886-88 im American Journal Bd. 8-10 im Zusammenhange veröffentlicht worden, unter dem Titel: Vorlesungen über Reciprokanten.

Um von letzteren zunächst zu sprechen, so werden wir vorerst fragen, woher die Bezeichnung „Reciprokante" stammt. Der Name ist anfangs von Sylvester weit specieller gebraucht worden als späterhin, da seine Untersuchungen sich weiter ausdehnten. Sylvester ging, wie er selbst sagt, ursprünglich aus von dem Ausdruck: $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$.

Dieser Ausdruck ist bekanntermaßen in der Functionentheorie sehr vielfach gebraucht, besonders in den Untersuchungen von Schwarz, von Cayley und Sylvester wird er daher als der „Schwarz'sche Differentialparameter" bezeichnet. Sylvester verglich nun insbesondere diesen Ausdruck $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$, den ich abkürzend gern mit $[y]_x$ bezeichne, mit dem umgekehrten Ausdruck $[x]_y$: Man findet leicht, daß hier die Gleichung besteht: $[y]_x = -y'^2 \cdot [x]_y$.

Diese Gleichung kann man dann auch so schreiben: $\frac{y'''y' - \frac{3}{2}y''^2}{y'^3} = -\left(\frac{x'''x' - \frac{3}{2}x''^2}{x'^3}\right)$, wo natürlich die Differentialquotienten x', x'', x''' der rechten Seite so zu bilden sind, daß man y als unabhängige, x als abhängige Variable ansieht. Hierauf bezieht sich nun das Wort Reciprocante. Sylvester versteht nämlich unter einer Reciprocante eine solche rationale Function der Differentialquotienten y', y'', y''' u. s. w. fort, welche ungeändert bleibt bis auf einen Factor, wenn man y mit x vertauscht.

Bei welchen Operationen bleibt nun eine solche Reciprocante überhaupt bis auf einen Factor ungeändert? Zunächst offenbar bei der Gruppe der Translationen: $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$, für die jeder Differentialquotient unverändert bleibt. Dann jedoch kommen noch weiter wegen der Vertauschung von x und y hinzu die Transformationen:

$$x_1 = y + b$$
$$y_1 = x + a$$

Diese bilden mit den Translationen zusammen eine gemischte Gruppe, d.h. eine Gruppe, die aus anderen, discontinuirlich neben einander stehenden continuirlichen Schaaren von Transformationen zusammengesetzt ist. Im Hause aus sind daher die Reciprocanten die Differentialinvarianten einer gemischten Gruppe.

Bei seinen weiteren Untersuchungen ist Sylvester nun ganz von selbst dazu geführt worden, an Stelle der anfänglichen gemischten Gruppe allgemeine continuirliche Gruppen linearer Transformationen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ y_1 &= \alpha' x + \beta y + \gamma' \end{aligned}\right\}$$

oder auch projectiver Transformationen in Betracht zu ziehen und deren Differentialinvarianten zu studieren.

Wenn dann aber Sylvester für diese weiter Differentialinvarianten das Wort Reciprocante beibehalten hat, so ist diese Bezeichnung doch eigentlich unzweckmäßig; denn die Bezeichnung „Reciprocante" verliert dabei immer mehr ihre ursprüngliche specielle Bedeutung.

Nun wäre die Frage, wie die Untersuchungen von Sylvester sich zu denen von Lie verhalten. Hier werden wir sagen, daß die begriffliche Grundlage bei Lie weit allgemeiner gehalten ist; dagegen führt Sylvester die Betrachtungen viel weiter explicit durch. Haben wir z. B. bei Lie beliebige Gruppen, so legt Sylvester von vornherein nur lineare Gruppen zu Grunde und nimmt auch bei ihnen nur Beispiele. Insbesondere aber beschränkt sich Sylvester auf rationale ganze Differentialinvarianten und fragt bei ihnen nach vollen Systemen von Differentialinvarianten, d. h. solchen Systemen, aus denen alle anderen Differentialinvarianten durch bestimmte Prozesse deriviert werden können.

An jene Vorlesungen von Sylvester haben sich nun sehr viele englische Arbeiten angeschlossen, die ich nicht näher aufzählen will, sondern betreffs deren ich auf das ausführliche Referat verweise, welches Franz Meyer in Bd. I der Jahresberichte der deutschen mathematischen Vereinigung über die Entwickelung der Invariantentheorie gegeben hat. (die Differentialinvarianten finden sich daselbst pag. 230 ff.) Leider ist nun die Sache die, daß die englische Schule bis jetzt die allgemeineren Grundlagen der Lie'schen Theorie in keiner Weise aufgenommen hat, während Lie wieder verschmäht, auf die Entwickelungen der Engländer irgend näher einzugehen.

Ich will nun in Kürze noch die Anwendung der Theorie der Differentialinvarianten auf die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen: $f(x, y, y', y'', y''' \ldots) = 0$, wie sie Lie in der genannten Arbeit giebt, erwähnen. Wir nehmen an, dass eine solche Differentialgleichung durch eine bestimmte Gruppe von Transformationen in sich übergeht. Die Integration dieser Differentialgleichung werden wir dann in zwei Schritte zerlegen können. Wir nehmen erstlich 2 unabhängige Differentialinvarianten Φ_1, Φ_2 der Gruppe an Stelle von x u. y als Veränderliche und bekommen eine Differentialgleichung $\xi(\Phi_1, \Phi_2, \frac{d\Phi_2}{d\Phi_1}, \frac{d^2\Phi_2}{d\Phi_1^2}, \ldots) = 0$, welche die beiden neuen Veränderlichen verbindet, und die allgemein zu reden einfacher sein wird als die ursprüngliche Differentialgleichung. Haben wir dann diese Hülfsgleichung integrirt, so ergiebt sich etwa Φ_2 als Function ω von Φ_1, und wenn wir in dieser einfachen Gleichung $\Phi_2 = \omega(\Phi_1)$ wieder x und y als Veränderliche ansehen, so ist dies eine zweite

Differentialgleichung, die ebenfalls integrirt werden muss. Die Integration der Differentialgleichung ist also in 2 Schritte zerlegt. Als Litteratur sei an dieser Stelle noch das Buch von Lie-Scheffers genannt (1891), welches ja den Titel trägt: Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Im übrigen wollen Sie das Vorstehende nur als blosse Andeutung betrachten, die weiter ausgeführt eine specielle Vorlesung über Differentialgleichungen bilden würden.

Schliesslich wollen wir als letzte Anwendung der continuirlichen Transformationsgruppen 5) weitere Integrationsprobleme behandeln, doch werde ich mich auch hier auf die Besprechung einzelner Punkte beschränken müssen. Neben die gerade besprochene Theorie der Differentialgleichungen $f(x\ y, y', y'' \ldots) = 0$ stellt sich die Verallgemeinerung zunächst die von Lie immer wieder behandelte Theorie derjenigen vollen Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welche eine bekannte Gruppe gestatten. (Was ein volles System ist haben wir ja zu Anfang des Semesters bereits erörtert.) Diese Untersuchungen finden sich in den Annalen Bd. 11 und Bd. 25; ebendarauf bezieht sich die Schlußbemerkung des Buches von Lie-Scheffers.

Es ist jedoch noch ein anderes Beispiel, welches in neuerer Zeit im Mittelpunkte des Interesses steht. Dieses betrifft die homogenen linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit 2 Variabeln. Ihre allgemeine Form ist:

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^m y}{dx^{m-1}} + \ldots\ldots + p_n \cdot y = 0.$$

Für die Integration solcher Differentialgleichung hat man in besonders schöner Weise die Gruppentheorie herangezogen. Es ist dies zuerst geschehen von Picard im Jahre 1887 im ersten Bande der Annales de Toulouse, in der Arbeit: „Sur les équations differentielles lineaires et les groupes algébriques de transformations". sowie ganz neuerdings von Vessiot, der ein Schüler von Lie im Jahre 1892 in Paris mit einer These promovirte, die dann in den Annales de l'Ecole normale veröffentlicht ist. Der Titel derselben ist einfach: sur l'intégration des équations differentielles linéaires. Diese Arbeit von Vessiot hat nun eine ganz besondere Beachtung des mathemat. Publikums gefunden und zwar aus folgendem Grunde: Lie spricht bei seinen allgemeinen Betrachtungen über die Integration von Differentialgleichungen allerdings sehr vielfach davon, ob man eine Gleichung durch Quadratur lösen kann, ob man sie auf eine Gleichung zurückführen kann u. s. w. Aber er bezeichnet die Functionsklasse, welche er dabei als bekannt ansehen will, nicht näher; es bleibt eben unbestimmt, über welche Functionen z. B. die Quadratur zu nehmen ist. Solcherweise behalten seine Entwickelungen etwas Unbestimmtes. Es findet hier etwas Analoges statt wie bei den allgemeinen Galois'schen Sätzen über die Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen, solange man nicht mit Kronecker die Rationalitätsbereiche genau bezeichnet, in denen diese Sätze über die Auflösung der Gleichungen im einzelnen Falle gelten sollen. Die Dissertation von Vessiot bedeutet den Lie'schen Untersuchungen gegenüber gerade einen Schritt analog diesen Kronecker'schen Entwickelungen, indem ausdrücklich unterschieden wird, ob eine Gleichung durch Quadratur rationaler Functionen integrirbar ist oder nicht u. s. w. fort.

Ein weiterer Grund, weswegen wir ganz besonders auf Vessiot's Arbeit eingehen wollen, wird für uns dann noch der Umstand sein, dass ich ohnehin beabsichtige im nächsten Semester die Theorie der linearen Differentialgleichungen zwischen y und x zum Gegenstand einer Vorlesung zu machen.

Mo. 10 VII 93. Wir beginnen heute mit dem Referat über Picard und Vessiot, dass wir jedoch ganz freigeben wollen. Der Gegenstand, um den es sich handelt, gehört zwar nicht ganz an diese Stelle der Vorlesung; denn es werden auch discontinuirliche Gruppen vorkommen, die doch erst später uns beschäftigen werden. Zunächst haben wir zu erläutern, was unter dem Begriff einer algebraischen Gruppe linearer oder projectiver Transformationen zu verstehen ist. (Unter projectiven Transformationen seien allgemein die gebrochen linearen, unter linearen Transformationen dagegen homogene Transformationen ohne Nenner verstanden.)

Wir werden eine Gruppe dann algebraisch nennen, wenn sie durch Angabe algebraischer absoluter Invarianten Alg. $F(x_1, \ldots x_n)$ definirt werden kann. Gehen durch eine Substitution unserer Gruppe aus den x_i neue Coordinaten x_i' hervor, dann sollen die Gleichungen gelten:

$\mathrm{Alg}\, F(x_1' x_2' \dots x_n') = \mathrm{Alg}.\, F(x_1, x_2 \dots x_n)$, und durch diese Gleichungen sollen die x' als Functionen der x definirt sein. Setzen wir aber in diese Gleichung für $x_1', x_2' \dots x_n'$ ihre Werte aus den Substitutionsformeln ein, dann erhalten wir durch Coefficientenvergleichung eine Anzahl bestimmter algebraischer Gleichungen für die n^2 Coefficienten a_{ik} der Substitutionen. Wollen wir doch dieses Ergebniss geometrisch auffassen, indem wir die Coefficienten $a_{11} \dots a_{nn}$ als n^2 Coordinaten der Punkte eines R_{n^2} denken. <u>In diesem R_{n^2} haben wir dann ein algebraisches Gebilde aus einem oder mehreren irreduciblen Stücken bestehend.</u> Besteht das Gebilde nur aus einem Stücke, so werden sich die Coordinaten $a_{11} \dots a_{nn}$ der Punkte derselben als <u>algebraische</u> Functionen einer gewissen Anzahl unabhängiger Parameter $t_1 \dots t_r$ darstellen lassen:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varphi_{11}(t_1 \dots t_r) \\ a_{12} &= \varphi_{12}(t_1 \dots t_r) \\ &\vdots \\ a_{nn} &= \varphi_{nn}(t_1 \dots t_r). \end{aligned}$$

Das Entsprechende gilt, wenn mehrere irreducible

Stücke vorliegen; wir werden dann eben für jedes einzelne derselben eine solche Formelgruppe haben. Die Anzahl dieser Formelgruppen wird aber immer endlich sein. Also: eine endliche Anzahl von Substitutionsformeln, deren jede eine endliche Anzahl von Parametern und zwar in algebraischer Form enthält.

Jetzt gehen wir gleich dazu über, alle algebraischen Gruppen projectiver Transformationen einer Veränderlichen η aufzuzählen.

a, Wir fragen zunächst nach den continuirlichen algebraischen Gruppen. Wir wissen von früher, dass es überhaupt insgesammt 4 Typen continuirlicher Gruppen giebt, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind:

1) $\eta_1 = \eta + \beta$,

2) $\eta_1 = \alpha\eta$,

3) $\eta_1 = \alpha\eta + \beta$,

4) $\eta_1 = \dfrac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$.

Die Gruppen 1. u. 2 haben je einen, die Gruppe 3 hat zwei, die Gruppe 4 drei Parameter. Alle diese 4 Typen stellen von selbst zugleich algebraische Gruppen vor. Dies ist keineswegs auch bei mehr als einer Veränderlichen der Fall, dass alle continuirlichen Gruppen linearer oder projectiver Transformationen zugleich algebraisch sind, wie wir für den Fall zweier Variabelen schon oben hervorgehoben haben.

b.) Was nun die discontinuirlichen Gruppen betrifft, so fällt bei ihnen der Begriff der algebraischen Gruppe zusammen mit dem Begriff der endlichen Gruppe, d.h. aus einer endlichen Zahl von Transformationen entstehenden Gruppe.

Es giebt, (was projective Gruppen einer Veränderlichen angeht) 6 Typen endlicher Gruppen, wie wir dies freilich erst in einer der späteren Stunden begründen werden. Diese sind:

1) die Identität $\eta_1 = \eta$, also eine G_1.

2) die Kreisteilungsgruppe $\eta_1 = \varepsilon^\nu \cdot \eta$, wo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{r}}$ und r eine beliebige ganze Zahl ist. Dieser Typus hängt daher noch von dem Werte vor r ab. Die Gruppe ist eine G_r.

3) die Diedergruppe: $\eta_1 = \varepsilon^\nu \eta$ oder $\frac{\varepsilon^\nu}{\eta}$, eine G_{2r}

4) die Gruppe des regulären Tetraeders, eine G_{12}.

5) die Gruppe des regulären Oktaeders,

eine G_{24}.

6.) die Gruppe des regulären Ikosaeders, eine G_{60}.
Diese letzten 3 Gruppen wollen wir hier nicht im einzelnen näher durch Angabe der Formeln ausführen. Alle diese 6 Gruppen sind, da sie endlich sind, zugleich auch algebraisch. (Wollen wir im Gegensatz hierzu auch Beispiele unendlicher discontinuirlicher Gruppen, die also nicht algebraisch sind, kennen lernen, so sei auf die Gruppe der elliptischen Functionen oder der Modulfunctionen verwiesen.)

c). Wie verhält es sich nun mit den <u>gemischten Gruppen, die algebraischen Character haben</u>?
Eine gemischte Gruppe ist doch eine solche, die aus einer endlichen Zahl von einander getrennten continuirlichen Transformationsschaaren besteht. Wir müssen uns eine solche folgendermaßen denken:

Es sei T das allgemeine Symbol der Transformation einer continuirlichen Gruppe. Zu ihr nehmen wir hinzu irgend eine endliche Reihe von Operationen $S_0 = 1, S_1, S_2 \dots S_\varrho$ und bilden uns die Operationen:

$$\Sigma_0 = S_0 T = T, \quad \Sigma_1 = S_1 T, \dots \Sigma_\varrho = S_\varrho T,$$

von denen wir jetzt verlangen, dass sie eine gemischte Gruppe bilden sollen. Da wird also jedes einzelne Σ_i mit jedem einzelnen Σ_k verbunden irgend ein anderes Σ, sagen wir, ein Σ_λ liefern. Der Index λ kann dabei nur von den Indices i und k, nicht von der Auswahl der einzelnen Σ_i, Σ_k abhängig sein; denn die Σ_i, wie die Σ_k, bilden in ihrer Gesammtheit je ein Continuum, und es werden daher die sämmtlichen $\Sigma_i\,\Sigma_k$ ihrerseits ein Continuum vorstellen.

Insbesondere wird $\Sigma_i\,\Sigma_0\,\Sigma_i^{-1}$ allemal ein Σ_0 ergeben; ist dies doch der Fall, sobald wir für Σ_0 die Identität 1 setzen (die ja in der That unter den Σ_0 enthalten sein muss). Die continuirliche Gruppe der Σ_0, d.h. der T, wird daher innerhalb der Gesammtheit der Transformationen der gemischten Gruppe nothwendig ausgezeichnet sein.

Hiernach ergiebt sich nun der folgende Weg zur Aufstellung aller gemischten Gruppen:

Man nehme die einzelnen continuirlichen Gruppen T, und frage jedesmal, ob dieselben so durch Hinzunahme weiterer Transformationen erweitert werden können, dass sie innerhalb der erweiterten Gruppe ausgezeichnet sind. Diese erweiterten Gruppen sind dann vielleicht an sich bereits gemischte Gruppen, vielleicht auch continuirliche Gruppen. Jedenfalls wird die Aufgabe sein, aus ihnen alle Untergruppen auszuscheiden, welche die Gruppe der Teilhalten, und von diesen Untergruppen dann eben alle diejenigen beizubehalten, welche gemischte Gruppen sind.

Diese allgemeine Regel werden wir sogleich bei unseren continuirlichen Gruppen der Transformtionen <u>einer</u> Veränderlichen bestätigt sehen. Wir wollen sogleich das sich ergebende Resultat, welches wir in nächster Stunde im einzelnen zu entwickeln haben, hier noch angeben. <u>Auf Grund der mitgeteilten Regeln werden den bisher aufgezählten 4 continuirlichen und 6 discontinuirlichen Gruppen von η noch 2 (und nicht mehr) gemischte Gruppen hinzutreten.</u> Dieselben sind gegeben durch die Formeln: 1) $\eta_1 = \varepsilon^\nu . \eta + \beta$, woselbst ε wieder eine ν^{ten} Einheitswurzel u. β ein willkürlicher Parameter ist.

und 2) $\eta_1 = \alpha\eta$ oder $= \frac{\alpha}{\eta}$. Während wir unter 1 ν continuirliche Schaaren von Transformationen in der gemischten Gruppe haben, besteht unsere gemischte Gruppe 2 nur aus 2 Schaaren.

Di. 11 VII. 93. Wir wollen jetzt das am Schlusse der letzten

Stunde angeführte Resultat ableiten. Wir hatten gesehen, dass es die folgenden 4 continuirlichen Gruppen Γ projectiver Substitutionen giebt:

I	II	III	IV
$\eta_1 = \eta + \beta$	$\eta_1 = \alpha\,\eta$	$\eta_1 = \alpha\,\eta + \beta$	$\eta_1 = \dfrac{\alpha\,\eta + \beta}{\gamma\,\eta + \delta}$

Wir werden uns jetzt zunächst zu fragen haben, ob wir diese Gruppen zu höheren Gruppen projectiver Transformationen erweitern können, innerhalb deren erstere ausgezeichnet sind. Zu dem Zwecke bedienen wir uns einer Methode, welche wir als „das Princip der Fixpunkte" bezeichnen wollen. Wir sehen die Gruppen I u. III haben je den Unendlichkeitspunkt als Fixpunkt, die Gruppe II hat den Nullpunkt u. den Unendlichkeitspunkt als Fixpunkt, während die Gruppe IV keine allgemeinen Fixpunkte besitzt. Die Gruppe IV kommt übrigens nicht weiter in Betracht, da sie ja keine Erweiterung mehr gestattet. Nun nehmen wir an, dass Σ irgend eine einzelne Operation der erweiterten Gruppe sei, und dass: $\Sigma\, T_a\, \Sigma^{-1} = T_b$ sei, woselbst T_a u. T_b zwei Operationen der Gruppe Γ seien, unter der wir uns eine der genannten Gruppen I II oder III zu denken haben. Letzteres besagt ja eben, dass die Gruppe T_a eine ausgezeichnete Untergruppe bildet.

Aus $\Sigma T_\alpha \Sigma^{-1} = T_b$ folgt: $\Sigma T_\alpha = T_b \Sigma$. Ich sage nun, dass in Folge dieser Formel aus einem Fixpunkt von T vermöge Σ nothwendig wieder ein Fixpunkt von T hervorgeht. Wäre das nämlich nicht der Fall, so würde die Aufeinanderfolge ΣT_α ihm bei wechselnden T_α eine continuirliche Reihe von Lagen anweisen, während er doch vermöge $T_b \Sigma$ in eine einzige wohlbestimmte Lage übergeht.

Wir wiederholen: <u>Jeder Punkt, der bei den Operationen T Fixpunkt ist, wird bei einer beliebigen Operation Σ der erweiterten Gruppe entweder ebenfalls festbleiben, oder sich in einen anderen Fixpunkt von T verwandeln müssen.</u>

Auf Grund dieses Satzes können wir nun sofort für die einzelnen Gruppen I, II, III die Form des Σ angeben, die in der erweiterten Gruppe vorkommen können. Im Falle der Gruppe I, für die der Punkt ∞ fest bleibt, können die Σ nur die allgemeine Form $\alpha\eta + \beta$ haben. Im Falle der Gruppe II, für welche die Punkte 0 und ∞ Fixpunkte sind, kann nur die doppelte Möglichkeit eintreten, dass Σ entweder auch diese Punkte 0 und ∞ festlässt oder sie miteinander vertauscht; daher gilt als allgemeine Form für Σ neben einander $\alpha\eta$ und $\frac{\beta}{\eta}$. Im

Falle der Gruppe III endlich, für die der Punkt ∞ wieder ein Fixpunkt ist, kann wieder Σ nur die allgemeine Form $\alpha\eta+\beta$, d.h. die Form der Transformationen der Gruppe selbst haben. Dieser Fall scheidet also aus. Es bleiben demnach nur die beiden Möglichkeiten zur Bildung gemischter Gruppen bestehen:

1) Die Gruppe $\eta+\beta$ wird durch Hinzunahme von Operationen $\alpha\eta+\beta$ erweitert: Aus solchen Operationen $a\eta+\beta$ wollen wir jetzt also eine gemischte Gruppe zusammensetzen, welche $\eta+\beta$ als Untergruppe enthält. Aber gleichzeitig mit $\alpha\eta+\beta$ tritt $\alpha^2\eta+\beta$, $\alpha^3\eta+\beta$ ... ein. Daher muss α als Einheitswurzel gewählt werden. Umgekehrt bilden für $\varepsilon = \frac{2i\pi}{e^{\tau}}$ die Substitutionen $\eta+\beta$, $\varepsilon\eta+\beta$, ... $\varepsilon^{\tau-1}\eta+\beta$ in der That eine gemischte Gruppe. Unser Princip der Fixpunkte führt uns daher mit Notwendigkeit im Falle der Gruppe I zu der erweiterten Gruppe $\eta_1 = \varepsilon^\nu\eta+\beta$ für $\nu = 1, 2 \dots \tau$, woselbst $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{\tau}}$ ist und τ irgend eine projective ganze Zahl bedeutet. Es giebt auch keine allgemeinere hier in Betracht kommende Gruppe. Denn wenn wir zwei Gruppen $\varepsilon^\nu\eta+\beta$ und $\varepsilon'^\nu\eta+\beta$ (mit verschiedenen Einheitswurzeln) combiniren, so kommt das darauf hinaus, statt ε und ε' eine

neue Einheitswurzel eingeführen.

2) Die Erweiterung der Gruppe II ist noch viel einfacher. Zu der Gruppe $\eta_1 = \alpha\,\eta$ tritt hinzu $\eta = \frac{k}{\eta}$ oder $\eta_1 = \frac{1}{\eta}$, indem der Parameter k ja schon in dem Parameter α enthalten ist. Wir haben daher an zweiter Stelle ohne weiteres die gemischte Gruppe $\eta_1 = \alpha \cdot \eta^{\pm 1}$.

Stellen wir nun noch einmal alle discontinuirlichen, continuirlichen und gemischten Gruppen projectiver Umformungen, die wir erhalten haben, u. die sämmtlich algebraische sind, zusammen: Insgesammt ergeben sich die 12 Typen, wie sie die folgende Tabelle angiebt:

1) $\eta_1 = \eta$
2) $\eta_1 = \varepsilon^{\nu}\eta$. (Kreisteilungstypus).
3) $\eta_1 = \varepsilon^{\nu}\eta;\ \eta = \frac{\varepsilon^{\nu}}{\eta}$ (Diedertypus)
4) Tetraedergruppe
5) Oktaedergruppe
6) Ikosaëdergruppe.
7) $\eta_1 = \eta + \beta$
8) $\eta_1 = \varepsilon^{\nu}\eta + \beta$.
9) $\eta_1 = \alpha \cdot \eta$
10) $\eta_1 = \alpha\,\eta;\ \eta = \frac{\alpha}{\eta}$.
11) $\eta_1 = \alpha\,\eta + \beta$.
12) $\eta_1 = \frac{\alpha\,\eta + \beta}{\gamma\,\eta + \delta}$

Was wir nun hiermit bei den projectiven Transformationen einer Veränderlichen ausgeführt haben, dies wäre weiterhin natürlich auch bei den projectiven Transformationen von 2, 3, 4 ... Veränderlichen zu versuchen. Andererseits würde man auch die homogenen linearen Transformationen von 2, 3, 4, .. Variablen in analoger Weise behandeln können.

Die nächste Aufgabe würde also sein, zunächst für die homogenen linearen Transformationen zweier Veränderlicher die Aufzählung der algebraischen Gruppen zu machen, dann für die projectiven Transformationen von 2 Veränderlichen und die homogenen linearen Transformationen von 3 Veränderlichen u. s. w. fort. Ich will doch auch die Hülfsmittel angeben, die uns hierfür ohne weiteres zur Hand sind.

Um z. B. die algebraischen Gruppen der projectiven Transformationen von 2 Veränderlichen aufzuzählen, entnehmen wir zuerst aus der Tabelle von Franz Meyer die continuirlichen Gruppen, jedoch nur diejenigen, in welchen die Parameter algebraisch auftreten. Andererseits hätten wir uns die discontinuirlichen Gruppen zu verschaffen; Diese sind in einer Arbeit von C. Jordan aufgezählt worden, die wir später noch genauer zu besprechen haben. Dann wäre das Prinzip der Fixpunkte anzuwenden, um aus den genannten Gruppen erweiterte Gruppen zusammensetzen, aus denen dann schliesslich die gemischten Gruppen ausgeschieden werden müssen. Die hier angedeutete Zusammenstellung, die bisher noch nicht durchgeführt ist, ist eine gewiss dankenswerte Arbeit.

Wir gehen nun zurück zu dem Referat über Vessiot, indem wir an die von uns aufgestellte Tabelle weiter anknüpfen. Unsere weitere Aufgabe sei es jetzt, für jede der dort aufgezählten Gruppen die fundamentalen Differentialinvarianten aufzustellen, d.h diejenigen Differentialinvarianten, aus denen sich alle anderen rational oder durch Differentiation berechnen lassen. Diese Beschränkung auf die Gruppen unserer Tabelle ist natürlich nur eine vorläufige, man wird fordern müssen, dass später analoge Betrachtungen für die Gruppen mit 2, 3 .... Veränderlichen angestellt werden. Wir denken uns y in der Tabelle als Funktion von x; y' y'' u.s.w. sind dann die Differentialquotienten dieses y nach x. Nun wollen wir der Reihe nach die 12 Typen unserer Gruppen durchgehen und uns jedesmal fragen, welches die einfachste Invariante für jede derselben ist, die sich aus η und seinen Differentialquotienten zusammensetzt.

Aus diesen einfachsten Invarianten, welche wir für diese 12 Fälle bekommen, werden sich alle anderen Invarianten rational bezw. durch Differentiation berechnen lassen.

Wir finden leicht die folgenden Ausdrücke als einfachste Invarianten bezw. Differentialinvarianten:

Ad 1. η selbst *)

Ad 2. η^{ν}

Ad 3. $\eta^{\nu} + \frac{1}{\eta^{\nu}}$

Ad 4. $r_{12}(\eta)$

Ad 5. $r_{24}(\eta)$

Ad 6. $r_{60}(\eta)$

d. h. rationale Functionen 12, 24 resp. 60. Grades. Näheres betreffs derselben sehe man in meinen Vorlesungen über das Icosaëder.

Ad 7. η'

Ad 8. η'^{ν}

Ad 9. $\frac{\eta'}{\eta}$

---

*) Wir nennen auch die Ausdrücke hier Differentialinvarianten, die gar keine Differentialquotienten enthalten, aus leicht verständlichen Gründen.

Ad 10. $\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2$

Ad 11. $\frac{\eta''}{\eta'}$

Ad 12. $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$ (Schwarz'scher Differentialparameter.)

Das diese Ausdrücke in der That in jedem Falle die einfachsten Invarianten sind, ist ja klar; dass man hieraus aber alle anderen rational resp. durch Differentiation ableiten kann, muss eine Specialbetrachtung zeigen, bei der wir jedoch jetzt nicht verweilen wollen.

Nun zeigt sich in der vorstehenden Zusammenstellung das folgende einfache Princip. Ist die Gruppe g in der Gruppe G enthalten, woselbst g. u. G. irgend welche Gruppen unserer Tabelle sein mögen, und sind die Invarianten von g. u. G. entspr. φ u. Φ, dann lässt allemal Φ sich aus φ rational ev. durch Differentiation ableiten. Um dies zu beweisen, braucht man ja nur die einzelnen Fälle der Reihe nach durchzugehen. Die Gruppe 1 ist z. B. in allen folgenden enthalten; demgemäss leiten sich auch alle folgenden Invarianten aus der ersten Invariante y durch Differentiation und rationale Zusammensetzung ab. Ebenso ist die Gruppe 2 in der Gruppe 3 enthal-

-en, daher leitet sich auch die Invariante $\eta^\nu + \frac{1}{\eta^\nu}$ rational aus η^ν ab. Schliesslich wollen wir noch die zu der Gruppe 12 u. der in ihr enthaltenen Gruppe 11 gehörenden Invarianten miteinander in Beziehung setzen. Dies ist sofort geschehen, wenn wir nur: $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$ in der Form schreiben
$$\frac{d\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2.$$

Von diesem Zusammenhang der 12 Invarianten wollen wir nun eine <u>Anwendung auf die Classification gewisser Differentialgleichungen machen.</u>

Wir betrachten allemal die Gl. $\varphi = R(x)$ woselbst φ die einzelne Invariante, $R(x)$ irgend eine rationale Function von x bezeichnet. Die erste Gl. lautet daher $\eta = R(x)$ *), die letzte $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = [\eta]_x = R(x)$. Der Satz, dass sich die Invariante Φ aus der Invariante φ berechnet, lässt sich jetzt dahin wenden, dass von unseren 12 Typen von Differentialgleichungen die ersten 11 als specielle Fälle des letzten Typus angesehen werden können. <u>Solcherweise erhalten wir für diese letzte Differentialgleichung</u>

---

*) Wieder wollen wir eine solche Gl. eine Differentialgleichung nennen, wenn auch keine Differentialquotienten vorkommen.

$[\eta]_x = R(x)$ ein gruppentheoretisches Princip der rationellen Classification. Wir werden die Gleichungen $[\eta]_x = R(x)$ eintheilen, jenachdem sie bereits bei einem der 11 vorangehenden Typen auftreten, oder dem Typus 12 eigentlich angehören.

Do. 11 VIII. 93. Diese Einteilung unserer Differentialgleichungen 3. Ordnung trifft in der That das Wesen der Sache, insofern die Gleichungen jeder einzelnen Categorie ihre eigene Theorie der Auflösung, ihre eigene „Integrationstheorie" haben. (Das Wort „Integration" ist hier wieder in der allgemeinen Bedeutung zu verstehen, wie oben das Wort „Differentiation")

Gehen wir nun die einzelne Differentialgleichung einmal daraufhin der Reihe nach durch.

Die erste Gleichung $\eta = R(x)$ ist bereits in sich aufgelöst. Die folgenden Gleichungen 2-6 haben das gemeinsame, daß sie zu discontinuirlichen Gruppen gehören und also nur algebraische Operationen verlangen. Zunächst haben wir in der Gleichung 2 $\eta^r = R(x)$ die einfachste algebraische Normalgleichung vor uns, die es überhaupt giebt; ihre Auflösung wird durch einfaches Wurzelziehen geschehen. Diese Operation des Wurzelziehens werden wir fortan als eine ausführbare Operation postulieren.

Dann sind auch die Fälle 3, 4, 5 d.h. die Dieder, Tetraeder u. Oktaedergleichung direct zu lösen, nämlich durch wiederholtes Wurzelziehen, z. B. die Gleichung 3. $\eta^r + \frac{1}{\eta^r} = R(x)$ läßt als eine r^{te} Wurzel aus einem Ausdrucke berechnen, der selbst eine Quadratwurzel enthält. Dagegen giebt der Fall der Gleichung 6, die Ikosaedergleichung, das erste Beispiel eines höheren algebraischen Normalproblems, das eben nicht mehr durch einfaches Wurzelausziehen erledigt werden kann. Früher fragte man in der Theorie der algebraischen Gleichungen überhaupt nur, ob eine vorliegende Gleichung durch Wurzelziehen ausführbar ist oder nicht, und war letzteres der Fall, so sprach man von einer nicht auflösbaren Gleichung. Der gereiftere Standpunkt ist aber der, nicht alle „nicht auflösbaren" Gleichungen einfach bei Seite zu lassen, sondern vielmehr aus ihrer Gesammtheit die einfachsten Gleichungen aufsuchen, deren Lösung man wieder adjungieren wird, um mit ihrer Hülfe in der Theorie der übrigen algebraischen Gleichungen weiter zu kommen. In diesem Sinne bietet sich zunächst eben die Ikosaedergleichung dar und es gilt zu untersuchen, wie weit man in der Theorie der algebraischen Gleichungen kommt, wenn man die Auflösung der Ikosaedergleichung, die ebenso wie das Wurzelziehen durch einfache Reihenentwickelung geleistet wird, hinzunimmt.

Die vorstehenden Angaben hängen übrigens auf's Genaueste mit der Struktur der Gruppen, der G_n, G_{2n}, G_{12}, G_{24}, G_{60}, zusammen, die den einzelnen Gleichungen zugehören. Während sich die übrigen Gruppen noch in einfachere zerlegen lassen, ist die G_{60} der Ikosaëdergleichung eine einfache, unzerlegbare Gruppe, und hieraus erklärt sich eben die besondere Stellung dieser Gleichung. Dieses haben wir ja schon neulich einmal angedeutet, als wir von C. Jordan sprachen. Vergl. übrigens hierüber, all meine Vorlesung über algebraische Gleichungen vom Winter 91 – 92.

Gehen wir nun weiter zur Differentialgleichung f. $\eta' = R(x)$ Die Lösung derselben giebt man an, indem man $\eta = \int R(x)\,dx$ setzt. Diese Operation des Integrierens, „die Quadratur" betrachtet man ja als etwas ganz Gewöhnliches, als eine Operation, die man jederzeit ausführen kann. Aber die nähere Ueberlegung zeigt, dass hier auch wieder nur das erste Glied einer Kette vorliegt. Es ergiebt sich eine ganz ähnliche Abstufung wie bei der Auflösung der algebraischen Gleichungen. Die Quadratur stellt eben den einfachsten Prozess dar, den man überhaupt adjungieren muss (entsprechend dem

Wurzelzeichen der Algebra.) um von Lösungen irgend welcher Differentialgleichungen sprechen zu können. Durch Wiederholung von Quadraturen integrirt man dann je eine ganze Reihe von Differentialgleichungen. Man hat nun wieder lange Jahrzehnte hindurch sich begnügt, alle die ∞ vielen Differentialgleichungen, die sich nicht auf Quadraturen zurückführen lassen, schlechtweg als „nicht auflösbare Gleichungen" zu betrachten. Der moderne Standpunkt dagegen ist es, diese nicht auflösbaren Gleichungen nicht einfach bei Seite zu lassen, sondern weiter zu classificiren: Man wird unter ihnen den einfachsten Fall als einen zweiten Fundamentaltypus gelten lassen, dessen Lösung man postulirt, um ferner zu untersuchen, wie weit man mit diesem Resultat kommt. Unter den Gleichungen, die dann noch unerledigt bleiben, wird man abermals die einfachste herausgreifen u. ihre Lösung verlangen u. s. weiter fort.

Sehen wir uns nun in Rücksicht auf diese allgemeinen Bemerkungen die folgenden Differentialgleichungen unserer Tabelle an. Da zeigt sich denn, dass wir die Gleichungen 8 – 11 gleichfalls durch Quadraturen lösen können, wenn wir noch algebraische Operationen (oder die nicht viel weiter gehende Operation der Exponentialfunction) hinzunehmen. Die Lösung der Gleichung 8 wird einfach durch das Integral eines Wurzelausdrucks $\eta = \int \sqrt[\nu]{R(x)}\,dx$ gegeben, die Lösungen der Gleichungen 9, 10 u. 11 durch $\eta = e^{\int R(x)\,dx}$, resp. $\eta = e^{\pm\int\sqrt{R(x)}\,dx}$ und $\eta = \int e^{\int R(x)\,dx}\,dx$. Dagegen erweist es sich als unmöglich, die Gleichung (12) in entsprechender Weise zu erledigen. Es besteht da eine vollständige Analogie mit der Theorie der ersten 6 Gleichungen. Wie die 6te Gleichung, die Ikosaedergleichung, ein vollständiges Problem bot, so läßt sich auch die letzte Gleichung $[\eta]_x = R(x)$ nicht auf Quadraturen zurückführen, sondern bietet einen neuen Typus für die Integration der Differentialgleichungen dar, den man als Fundamentaltypus gelten lassen wird. Man wird in der ferneren Theorie der Differentialgleichungen zu untersuchen haben, wie weit man kommen kann, sofern man die Integration von (12) als einen durchführbaren Prozeß betrachtet.

Fragen wir uns nun wieder, woran es liegt, daß die Gleichungen 8–11 sich wie die Gleichung 7 durch Quadraturen erledigen lassen, während die Gleichung 12 eine Sonderstellung einnimmt.

Dieses Verhalten der Gleichungen kommt ebenfalls zurück auf die <u>Structur der zugehörigen Substitutionsgruppe</u>. Die Gruppe der Gleichung 7 ist die Translationsgruppe. Die Gruppe der Gleichung 8 ist eine gemischte Gruppe, in der die Gruppe 7 als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist, dies entspricht genau dem Umstande, dass man das Integral 8 durch ein Wurzelziehen und eine Quadratur erhält. Die Gruppe der Gleichung 9 $\eta' = \alpha\,\eta$ geht in die Translationsgruppe über, wenn man $\log \eta$ als neue Variable an Stelle von η eingeführt denkt, wie denn in der Lösung 9 die Exponentialfunction auftritt, deren Exponent die Gestalt eines einfachen Integrals hat.

So gilt ähnliches von der Gruppe der Gleichungen 10 und 11. Die Gruppen der Gleichungen 8–11 sind eben, so weit sie continuirlich sind, aus lauter Bestandtheilen „zusammengesetzt", die entweder selbst Translationsgruppen sind oder einer Translationsgruppe ähnlich sind. Die Gleichung 12 dagegen lässt sich nicht auf Quadraturen zurückführen, weil ihre Gruppe eine einfache Gruppe ist.

Indem wir die Gleichung 12 als Definition eines besonderen Integrationsprozesses auffassen, entsteht dann die Aufgabe, dass wir uns das Wesen dieses letzteren möglichst klar machen. Die Gleichung 2 schon führte uns zu einer neuen Operation, dem Wurzelausziehen, dessen numerische Durchführung auf der Schule gelernt wird. Dann tritt die Ikosaedergleichung als neues Problem hinzu. Es ist im einzelnen in meinen Vorlesungen über das Ikosaeder gezeigt, welche numerischen Prozesse man auszuführen hat, um die Lösungen der Ikosaedergleichung zu finden. Ebenso weiss man, welcher Art der Grenzprozess ist, um das $\int R(x)\,dx$ der Gleichung 5 zu bestimmen; man hat das bekannte Verfahren der mechanischen Quadratur, um jedes Integral wirklich numerisch auszuwerten. Genau so werden wir im Falle unserer allgemeinen Gleichung 3. Ordnung (12) verlangen, dass man sich auch hier genau die Grenzprozesse überlegt, die uns diesen Fall beherrschen lassen, dass man insbesondere geradezu Anweisungen zur numerischen Rechnung giebt. Dabei empfiehlt es sich, dies sogleich in einer Weise auszuführen, die sich sofort auf alle höheren Probleme ausdehnt, welche entstehen, indem man die Differentialinvarianten irgend welcher Gruppe als gegeben ansieht. Diese Gedanken sind von mir in den Sächsischen Berichten 1883 u. in den Annalen 23 (1884) näher auseinander gesetzt worden, worauf ich hier verweise.

Uebrigens kann man für die Gleichung 12 immer eine sogenannte "Riccati'sche Differentialgleichung 1 Ordnung" setzen und vice versa, so daß wir den Typus, den wir nächst der Gleichung f als zweite Art von normalen Differentialgleichungen aufführen, auch als den Typus der Riccati'schen Differentialgleichung bezeichnen können, wie es vielfach geschieht. Zum Beispiel werden Sie etwa bei Lie oder bei französischen Autoren oft lesen können, daß eine vorliegende Gleichung sich sagen wir durch 4 Quadraturen und 2 Riccati'sche Gleichungen lösen lasse.

Nun müssen wir noch lernen, welcher Art allgemein der Zusammenhang der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit unserer Differentialgleichung 3. Ordnung ist. Es sei die allgemeine Form der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung: $y'' + p y' + q y = 0$, woselbst wir y als Function von x ansehen und p u. q rationale Functionen von x seien. Eine solche Differentialgleichung hat 2 unabhängige Particularlösungen y_1 u. y_2., aus denen setzen sich die allgemeinsten Paare unabhängiger Particularlösungen als lineare Verbindungen $\alpha y_1 + \beta y_2$; $\gamma y_1 + \delta y_2$ zusammen. Führt man nun den Quotienten $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ als unabhängige Variable ein, dann berechnet sich für dieses η eine Differentialgleichung dritter Ordnung vom Typus (12): $[\eta]_x = R(x)$, woselbst die rationale Function $R(x) = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}$ wird. Kennt man nun die Lösung dieser Differentialgleichung 3. Ordnung, so findet man rückwärts folgendermaßen die Lösungen y_1 y_2 der zugehörigen Differentialgleichung 2. Ordnung.

Es ist $\eta' = \frac{y_2 y_1' - y_1 y_2'}{y_2^2}$. Ferner kann man nach einem Abelschen Satze schliessen, dass $y_2 y_1' - y_1 y_2' = C \cdot e^{-\int p\,dx}$ ist. Aus beiden Beziehungen folgt dann $y_2^2 = \frac{C}{\eta'} \cdot e^{-\int p\,dx}$ oder:

$$y_2 = \sqrt{\frac{C}{\eta'} \cdot e^{-\int p\,dx}} \quad \text{d.h.}$$

<u>Hat man die Differentialgleichung 3. Ordnung integrirt, so erledigt sich die lineare</u>

Differentialgleichung 2. Ordnung durch eine Quadratur und eine Quadratwurzel.

Wie wir nun unsere Differentialgleichung 3. Ordnung für y in 12 Categorieen eingetheilt haben, so wird man auf Grund des dargelegten Zusammenhangs für die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit rationalen Coefficienten eine analoge Classification erhalten. Diese nämliche Classification der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung werden wir, anstatt sie auf der Eintheilung der Differentialgleichung 3. Ordnung aufzubauen, direct bekommen, wenn wir von der Gruppe der homogenen linearen Substitutionen $\alpha y_1 + \beta y_2$, $\gamma y_1 + \delta y_2$ ausgehen und bei ihnen alle algebraischen Untergruppen suchen. Es handelt sich zunächst um eine geeignete Auffassung der Differentialgleichung $y'' + p y' + q y = 0$.

Setzen wir die Particularlösungen [Fr. 14 VII 93] y_1 u. y_2 in die allgemeine Gleichungsform $y'' + p y' + q y = 0$ ein, so bekommen wir die Gleichungen:

$$\begin{cases} y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0 \end{cases}$$

Aus ihnen berechnet sich

dann:

$$p = -\frac{y_1'' y_2 - y_2'' y_1}{y_1' y_2 - y_2' y_1} \quad \text{und}$$

$$q = +\frac{y_1'' y_2' - y_2'' y_1'}{y_1' y_2 - y_2' y_1}, \quad \text{d.h. die Werte von } p \text{ u. } q,$$

ausgedrückt durch die Particularlösungen y_1 u. y_2 und ihre Ableitungen.

Setzen wir für y_1 und y_2 beliebige lineare Combinationen derselben ein, so bleiben die Ausdrücke für p und q völlig unverändert. Dies besagt soviel, als dass p u. q Differentialinvarianten u. zwar offenbar die einfachsten Differentialinvarianten sind, welche y_1 u. y_2 aufgefasst als Functionen von x gegenüber der homogenen linearen Gruppe besitzen. Die Classification der Differentialgleichung 2. Ordnung wird nun hiernach ganz einfach in der Weise zu machen sein, dass wir neben die allgemeine homogene Gruppe $\frac{\alpha y_1 + \beta y_2}{\gamma y_1 + \delta y_2}$ ihre sämmtlichen algebraischen Untergruppen setzen und nun der Reihe nach für jede dieser Untergruppen uns die ein-

<u>fachsten Differentialinvarianten gegeben den-</u>
<u>ken</u>. So erhalten wir eine Reihenfolge von Problemen, die immer complicirter werden, je complicirter die gewählte Gruppe ist, bis wir eben zu der allgemeinen Gruppe der linearen Transformationen das Problem der allgemeinen hierher gehörigen Differentialgleichung 2. Ordnung erhalten. Und in der Aufzählung dieser Probleme liegt dann die Classification der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, die wir anstreben.

Wenn wir nun noch einen letzten Schritt ausführen u. an Stelle der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit rationalen Coefficienten eine solche n^{ter} Ordnung setzen, dann haben wir die Untersuchungen von <u>Vessiot</u> in ihrer Allgemeinheit. Es sei:

$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0$, woselbst die $p_1\, p_2 \dots p_n$ rationale Functionen von x sein sollen. Wir betrachten dann wieder ein System von n unabhängigen Particularlösungen $y_1\, y_2 \dots y_n$. Diese können wieder durch n unabhängige lineare Verbindungen $\sum_1^n \alpha_{1k} y_k$, $\sum_1^n \alpha_{2k} y_k \dots \sum_1^n \alpha_{nk} y_k$ ersetzt werden.

Diese Ausdrücke geben uns zugleich die allgemeine lineare Gruppe der n Veränderlichen y_i. Wenn wir jetzt die Particularlösungen $y_1 \cdots y_n$ in unsere Differentialgleichungen einsetzen, dann erhalten wir n solche Gleichungen; aus ihnen berechnen sich die $p_1 \cdots p_n$ als Quotienten von Determinanten n^{ter} Ordnung. Man sieht leicht, dass diese Ausdrücke für $p_1 \cdots p_n$ die einfachsten Differentialinvarianten der allgemeinen homogenen linearen Gruppe sind. Hiernach wird man jetzt auch die Classification der Differentialgleichungen durchführen, indem man sämmtliche algebraische Untergruppen der allgemeinen homogenen linearen Gruppe für n Veränderliche aufsucht u. für jede einzelne derselben das System der einfachsten Differentialinvarianten bestimmt.

Vessiot behauptet geradezu: Zu jeder vorgelegten linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gehört eine und nur eine algebraische Untergruppe hinzu, welche folgende doppelte Eigenschaft hat:

1) Alle rationalen Functionen der $y_1 y_2 \cdots y_n$ und ihre n Differentialquotienten, welche bei der Operation der Untergruppe ungeändert bleiben, sind rationale Functionen von x.

2) Umgekehrt bleibt jede rationale Function von $y_1 y_2 y_3 \cdots y_n$ u. ihrer Differentialquotienten, wel-

che gleich einer rationalen Function von x ist, bei der genannten algebraischen Gruppe ungeändert.

Sie sehen, diese Vessiot'schen Sätze behaupten etwas ganz Aehnliches, als was in der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen bekannt ist. Sind $y_1\, y_2 \dots y_n$ Wurzeln einer vorliegenden algebraischen Gleichung, so wird die Galois'sche Gruppe doch durch gewisse Vertauschungen dieser Wurzeln gegeben. Die Galois'sche Gruppe hat dabei gerade die entsprechenden beiden Eigenschaften. Eine rationale Function der y_i, welche bei der Gruppe ungeändert bleibt, ist rational bekannt, u. umgekehrt bleibt eine rationale Function der y_i, die rational bekannt ist, bei der Gruppe ungeändert. Von hier aus beherrscht bekanntlich die Structur der Galois'schen Gruppe den ganzen Auflösungsprozeß der zugehörigen algebraischen Gleichung. Die Integration einer vorgelegten Gleichung wird wieder genau von der Structur der Vessiot'schen Gruppe abhängen.

Man denke sich nämlich die Vessiot'sche Gruppe nach ausgezeichneten Untergruppen zerlegt. Jeder einzelne Zerlegungsfactor, welcher dabei auftritt, wird einen bestimmten Schritt im Integrationsgeschäft bedeuten, und insbesondere wird man die vorgelegte Gleichung durch eine ganze Reihenfolge von Quadraturen erledigen können, wenn alle Zerlegungsfactoren eingliedrig sind.

Im übrigen muss man für jeden mehrgliedrigen Zerlegungsfactor eine eigene Integrationstheorie sich zurecht legen, genau so wie ich dies in Bd. 23 der Annalen für die allgemeine Differentialgleichung 3. Ordnung gethan habe; ich deutete dies bereits soeben an.

In der That hat Volterra für den Fall, dass die allgemeine homogene lineare Gruppe vorliegt, die betreffenden Erläuterungen in seiner italienischen Arbeit 1886/87 gegeben, die in den Memorie dell' Academia dei XL t. 6 veröffentlicht ist. Wie Volterra die Integrationstheorie für diesen allgemeinen Fall gegeben hat, so wäre eben eine entsprechende Durchführung der einzelnen speciellen Fälle zu wünschen. –

Ich habe nun meinem Referat über Vessiot noch einige Bemerkungen hinzuzufügen. Ich will voranstellen, dass ich mit den Beweisen von Vessiot nicht zufrieden bin, so sehr ich glaube, dass seine Resultate richtig sind. Um dies verständlich zu machen, muss ich wieder an die Galois'sche Theorie anknüpfen. Bei Galois versteht man unter der Unveränderlichkeit einer rationalen Function $r(y_1 y_2 \cdots y_n)$ der Wurzeln einer vorliegenden algebraischen Gleichung bei irgendwelcher Vertauschung der y_i deren <u>numerische</u> Unveränderlichkeit, und eben hierauf bezieht sich die Leistung von Galois, von der man nur eine sehr unvollständige Darstellung bekommt, wenn man von <u>formaler</u> Unveränderlichkeit reden wollte. Trotzdem geschieht dies letztere in manchen Lehrbüchern, z. B. in Netto's Substitutionstheorie. Dies hat neuerdings Bolza in dem Bulletin of the New York Math. Society II 1893 pag. 83 ff. überzeugend hervorgehoben in der Besprechung einer englischen Bearbeitung des genannten Buches.

<u>Genau das Entsprechende gilt nun von den Vessiot'schen Sätzen.</u> Es wird sich derselbe Unterschied von numerischer und formaler Unveränderlichkeit irgendwelcher Functionen der $y_1 y_1' \ldots$ hier einstellen, insofern doch unsere $y_1 y_2 \ldots y_n$ Functionen der einen Variablen x sind. <u>Es kann daher eine rationale Function der $y_1 y_2 \ldots y_n$ und $y_1' y_2' \ldots y_n'$ sehr wohl bei einer linearen Transfor-</u>

mation der y ungeändert bleiben, ohne dass sie es formal thut. Diesen Punkt hat Vessiot, wie mir scheint, bei Aufstellung seiner Sätze nicht hinreichend berücksichtigt, und man wird seine Beweise deshalb umändern müssen, etwa so wie Picard 1887 ursprünglich seine Betrachtungen beginnt, die er freilich nicht bis zu Ende durchgeführt hat.

Eine andere Bemerkung, die ich noch hinzufügen möchte, ist diese: In der Algebra geht man über das allgemeine Schema von Galois hinaus, in der Art, dass man bei jeder vorgelegten Gleichung entscheiden kann, in welche Galois'sche Categorie sie bei gegebenem Rationalitätsbereich gehört, und dass man geradezu alle Gleichungen aufstellen kann, die bei gegebenem Rationalitätsbereich in eine bestimmte Galois'sche Categorie gehören, wozu Kronecker vielfach die Mittel gegeben hat.*) Entsprechend wünschen wir bei den Differentialgleichungen eine Durchführung der Vessiot'schen Theorie an concreten Beispielen, zunächst den niedrigsten concreten Beispielen.

---

*) Vergleiche z. B. Aufstellung aller ganzzahligen Gleichungen, die sich durch Wurzelzeichen lösen lassen.

Das einfachste Beispiel der Differentialgleichung 2. Ordnung für y_1, y_2 oder der Differentialgleichung 3. Ordnung für y, welches es hier überhaupt giebt, ist die Theorie der hypergeometrischen Functionen.

Ein erster Beitrag zu unserer Forderung wäre daher die Verteilung der hypergeometrischen Functionen resp. der zugehörigen y-Functionen auf die 12 bezüglichen Typen unserer Tabelle. Hier müßte dann alles das seine Stelle finden, was uns historisch überkommen ist, z. B. die algebraisch integrirbaren Fälle. Insbesondere sind hier auch einzuordnen die alten Untersuchungen von Euler, Joh. Fr. Pfaff etc über diejenigen Fälle hypergeometrischer Differentialgleichungen, die durch Quadraturen erledigt werden können, Untersuchungen, welche Markoff noch neuerdings in den Ann. 28, 29 zu einem gewissen Abschluß gebracht hat. Die betreffenden Untersuchungen von Pfaff, die ich hier besonders betonen möchte, finden sich in seinen Disquisitiones analyticae (Helmstedt 1797, unicum Band); dort werden eine ganze Reihe von „casus integrabiles“ für die hypergeometrische Differentialgleichung aufgezählt. Es wäre insbesondere zu prüfen, inwieweit seine Angaben vollständig sind oder nicht, etc. etc.

[Mo. 17. VII 93] Jetzt sollte in dieser Vorlesung zunächst noch ein Abschnitt über <u>endliche continuirliche Gruppen von Berührungstransformationen</u>, so wie sodann ein weiterer Abschnitt über <u>unendliche continuirliche Gruppen</u> folgen. Doch da uns die Zeit fehlt, so müssen wir auf die nähere Behandlung dieser Kapitel verzichten; wir begnügen uns für die genannten Gegenstände einige Litteraturangaben zu machen. Was die endlichen continuirlichen Gruppen von Berührungstransformationen betrifft, so finden Sie dieselben im Zusammenhange behandelt in dem zweiten Bande des Buches von <u>Lie - Engel</u>.

An dieser Stelle würden sich dann auch die Beispiele der endlichen Gruppen von Berührungstransformationen einreihen, die wir ausführlich im letzten Semester besprochen haben, wie z. B. die ∞^{15} Kugeltransformationen. Was dann die unendlichen Gruppen angeht, so hat Lie ein=mal in den Ann. Bd. 24, dann in den Leipziger Berichten 1891 hierauf bezügliche Zusammenstel=lungen gegeben.

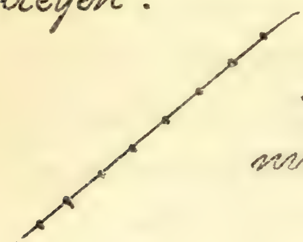
Wir wenden uns nunmehr, in Ueberein=stimmung mit der anfänglichen Disposition die=ser Sommervorlesung, zu dem zweiten Theil der=selben, zu den discontinuirlichen Gruppen.

Man sollte dieselben vielleicht in der Weise in An=griff nehmen, dass man vorerst alle continuirlichen Gruppen betrachtet und dann aus ihnen die disconti=nuirlichen Untergruppen herausgreift. Doch ist die=se allgemeine Problemstellung erst in soweit behan=delt worden, als man von projectiven oder von homo=genen linearen continuirlichen Gruppen ausging, durch welche natürlich die Gesammtheit aller conti=nuirlichen Gruppen keineswegs erschöpft ist. Die genannten Gruppen wollen auch wir hier zu Grun=de legen. Wir beginnen wieder mit einem speciellen Falle, indem wir zunächst die „Hauptgruppe" der räum=lichen Transformationen, insbesondere die Gruppe aller Bewegungen, in dem angegebenen Sinne un=tersuchen. Die hierin liegende Fragestellung hat unmittelbar elementargeometrisches Interesse, und wir werden bald auch lernen, wie sich die Krystallographie auf diese gruppentheoretischen Untersuchungen aufbaut.

Wir beginnen mit der Gruppe der <u>Ebene</u>. Hier liefert uns zunächst die continuirliche Gruppe aller <u>Translationen</u> die folgende <u>discontinuirliche Gruppe</u>:

$$1)\quad \begin{cases} x' = x + m\,a \\ y' = y + m\,b \end{cases}$$

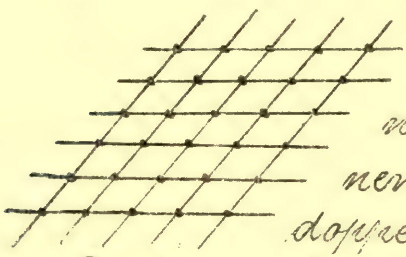
woselbst m alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen mag und a, b irgendwelche Constante bezeichnen. Insbesondere stellen diese Formeln eine <u>eigentlich</u> discontinuirliche Gruppe dar, da ∞ kleine Coordinatenänderungen nicht auftreten können. Dem einzelnen Punkt der Ebene ordnen sich eine ganze Reihe aequivalenter Punkte vermöge der Gruppe zu, die sämtlich in gleichen Intervallen auf einer geraden Linie liegen.



Neben diese erste Gruppe stellt sich nun sofort die zweite:

$$2)\quad x' = x + m.\,a + n\,c$$
$$y' = y + m\,b + n.\,d,$$

wo für m u. n wieder alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ gelten. Wir werden hier jedenfalls eine discontinnvilliche, von der Gruppe 1 verschiedene Gruppe erhalten, sobald das Verhältniss $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$ ist, was wir voraussetzen wollen. Dem einzelnen Punkte der Ebene sind dann 2 fach ∞ viele Punkte zugeordnet, die wie die Figur andeutet, sich auf 2 Parallelschaaren gerader Linien in gleichen Intervallen verteilen.



Gewöhlich lernt man diese Verhältnisse nicht in der Geometrie, sondern in der Functionentheorie kennen, wenn von doppelt periodischen Functionen die Rede ist. Dann werden die beiden Gleichungen 2 in die eine zusammengefasst:

$$(x' + iy') = (x + iy) + m(a + ib) + n(c + id) \text{ oder}$$

$$z' \quad = \quad z \quad + m \cdot \omega \quad + n \cdot \omega' .$$

Aus der Theorie der elliptischen Functionen ist weiter auch der folgende Satz bekannt, dass dreifach periodische eindeutige Functionen einer complexen Veränderlichen unmöglich sind. Dieser Satz wird hier wieder in einf...e geometrische Form sich umsetzen. Seien $a + ib$, $a' + ib'$, $a'' + ib''$ die 3 Perioden, zwischen ihnen soll keine ganzzahlige lineare Gleichung statthaben, d. h. es soll nicht gelten:

$k(a+ib)+k'(a'+ib')+k''(a''+ib'')=0$, woselbst k, k', k'' ganze Zahlen bezeichnen. Denn anderenfalls könnte man allemal zwei neue Perioden einführen aus denen die 3 Perioden sich ganzzahlig linear zusammensetzen ließen. Nun besteht der bekannte Satz von Jacobi, daß man aus derartig charakteristischen Grössen $(a+ib)$, $(a'+ib')$, $(a''+ib'')$ allemal eine lineare Combination

$k(a+ib)+k'(a'+ib')+k''(a''+ib'')$ bilden kann mit ganzzahligen Coefficienten, die kleiner als jede beliebig vorgegebene Grösse δ wird.

Dies aber liefert geometrisch das einfache Resultat: Wollten wir eine Gruppe mit 3 linear unabhängigen Verschiebungen in der Ebene bilden, so würden wir auch ∞ kleine Transformationen heraus bekommen; die Gruppe würde also aufhören eigentlich discontinuirlich zu sein und kommt eben darum hier zuvörderst nicht in Betracht.

Gehen wir nun zu den Drehungen in der Ebene über. Es ist auch hier bequem, mit den complexen Variabeln $z = x+iy$ zu operieren.

Die Drehungen um den Anfangspunkt O werden dann gegeben durch $z' = e^{i\varphi}\cdot z$, woselbst φ den Drehungswinkel bezeichnet.

Wir haben bereits in der Einleitung dieser Vorlesung gesehen, dass die Formel

$z' = e^{i\varphi\nu} \cdot z$ für $\nu = -\infty, \ldots +\infty$ allgemein eine uneigentlich discontinuirliche Gruppe darstellt, wenn nicht ν commensurabel ist mit 2π. Soll daher eine Gruppe von Drehungen um ein festes Centrum eigentlich discontinuirlich sein, so wird sie endlich sein und die Gestalt haben:

$z' = \varepsilon^{\nu} \cdot z$, für $\nu = 0, 1 \ldots n-1$, woselbst $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ eine Einheitswurzel ist. In unserer Untersuchung treten hier also die Einheitswurzeln in entscheidender Weise ein.

Die Grösse ε kann natürlich hier eine beliebige Einheitswurzel sein. Wie gestaltet sich aber die Sache, wenn wir noch Translationen hinzunehmen? Wir wollen wieder rein geometrisch vorgehen. Es sei die Drehung T durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ um den Punkt O gegeben, sowie die Translation S, derzufolge O in einen neuen Punkt O' übergeht. Dann ist zunächst sicher, dass um den aequivalenten Punkt O' innerhalb unserer Gruppe auch eine Drehung T' durch den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ stattfindet, und zwar setzt sich, wie leicht zu übersehen ist, und schon früher ausgeführt wurde T' aus S u. T nach der Formel zusammen:

$$T' = S^{-1}\, T\, S.$$

Nun wollen wir die Transformation betrachten $T^{\nu} \cdot T'^{-\nu}$, die jedenfalls auch in unserer Gruppe enthalten sein muss, d. h. wir wollen zunächst um O durch den Winkel $\frac{2\pi}{n} \cdot \nu$ in positivem Sinne, darauf um O' wieder durch den Winkel $\frac{2\pi}{n} \cdot \nu$ jedoch in negativem Sinne die Ebene gedreht denken. Dies kommt offenbar auf eine reine Translation hinaus. Diese Translation wollen wir nun berechnen. Es ist:

die Operation T^{ν} gleich $z' = \varepsilon^{\nu} \cdot z$

$T'^{-\nu}$ gleich $(z' - \xi) = \varepsilon^{-\nu}(z - \xi)$,

wenn wir dem Punkte O' das Argument ξ geben. Statt der letzten Gleichung schreiben wir die neue mit anderen Accenten:

$(z'' - \xi) = \varepsilon^{\nu}(z' - \xi)$ und setzen nun aus der ersten Gleichung für z' seinen Wert ein. Dann kommt: $z'' = z + \xi(1 - \varepsilon^{-\nu})$, also in der That eine reine Translation. Nun kann ν alle Werte $0, 1, \dots n-1$ bekommen.

<u>Enthält daher eine Gruppe neben einer Verschiebung ξ eine Drehung um ε, dann enthält sie überhaupt alle Verschiebungen $\xi \cdot \varepsilon^{\nu}$ für $\nu = 0, 1, 2 \dots n-1$.</u>

Dies sind insgesammt n Verschiebungen. Nun gilt aber der oben angeführte Jacobi'sche Satz, daß in einer eigentlich discontinuirlichen Gruppe nur 2 ganzzahlige von einander linear unabhängige Translationen enthalten sein können, d.h. zwischen den Größen $1, \varepsilon, \varepsilon^2 \ldots, \varepsilon^{n-1}$ müßen $(n-2)$ unabhängige ganzzahlige, lineare Gleichungen stattfinden, wenn anders wir eine brauchbare Gruppe haben wollen. Damit haben wir das folgende wichtige Resultat abgeleitet: Aus einer Rotation ε und Verschiebungen läßt sich nur dann eine eigentlich discontinuirliche Gruppe zusammensetzen, wenn sich die Größen $1, \varepsilon, \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^{n-1}$ linear u. ganzzahlig aus 2 Hülfsgrößen zusammensetzen laßen.

Gehen wir nun die einzelnen Drehungen ε der Reihe nach daraufhin durch.

Für $n=2$ ist $\varepsilon^\nu = +1$ u. -1; dies sind überhaupt 2 ganze Zahlen; die Drehung um den Winkel π läßt sich daher jedenfalls mit Verschiebungen zusammensetzen.

Für $n=3$ ist $\varepsilon^\nu = 1, \alpha, \alpha^2$, wo wir $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3}}$ als Abkürzung eingeführt haben;

Nun ist $1+\alpha+\alpha^2=0$, (wie überhaupt jedesmal <u>eine</u> derartige Relation für die Einheitswurzeln gilt) Die dritte Größe ist also eine lineare Combination der beiden anderen, daher ist auch diese Drehung in unserem Sinne zu gebrauchen.

Wir sehen dies noch deutlicher, wenn wir die Zahlenwerte einführen: es ist:

$$\alpha^0 = 1.$$
$$\alpha^1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$\alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$, diese

3 Größen lassen sich daher aus $1/2$ u. $\frac{\sqrt{-3}}{2}$ linear und ganzzahlig zusammsetzen.

<u>Für $n = 4$</u> ist $\varepsilon^\nu = \pm 1, \pm i$; aus 1 u. i lassen sich daher alle Wurzeln zusammensetzen, auch dieser Fall ist also brauchbar.

<u>Für $n = 6$</u> ist: $\varepsilon^\nu = \pm 1, \pm \alpha, \pm \alpha^2$. Diese 6 Größen setzen sich wieder aus zweien (z. B. $+1$ u. $+\alpha$) linear u. ganzzahlig zusammen, also ist auch diese Drehung hier zulässig.

Mit diesen Beispielen sind wir aber auch am Ende; denn z. B. für $n = 8$ ist $\varepsilon^\nu = \pm 1, \pm i, \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$, diese Größen setzen sich aus $1, i, \frac{1}{\sqrt{2}}$ u. $\frac{i}{\sqrt{2}}$ ganzzahlig linear zusammen, niemals aber aus nur 2 Größsen.

Der Fall $n = 8$ ist also ausgeschlossen, u. dasselbe gilt für alle weiteren Fälle. Es bleiben daher nur 4 Fälle von Drehungen übrig, die wir mit Translationen zu einer eigentlich discontinuirlichen Gruppe zusammen setzen können, d.h. es können nur 2, 3, 4 oder 6-zählige Drehpunkte in solchen Gruppen vorhanden sein.

Dieses merkwürdige Theorem hat weiterhin in der Krystallographie seine gute Bedeutung, weil es die Zahl der Drehungen, die möglich sind, außerordentlich einschränkt. Im übrigen ist nun nichts leichter, als betreffende Gruppen jetzt wirklich zu bilden:

Wir hatten $z' = z + m.\omega$ oder

$$z' = z + m\omega + n\omega'$$ gesetzt.

Nehmen wir jetzt die Drehung um den Winkel π, d.h. den Fall $n = 2$ hinzu, dann lauten die erweiterten Gruppen:

$$z' = \pm z + m.\omega$$

$$z' = \pm z + m\omega + n.\omega'$$, beide Formeln geben brauchbare Gruppen, d.h. jede einfach oder zweifach periodische Gruppe läßt sich durch die Operation $z' = -z$ zu einer ebenfalls eigentlich discontinuirlichen, doppelt so großen Gruppe erweitern.

Für $n = 3$ gilt, daß mit der Periode A auch die

Periode $\alpha . A$ in der Gruppe enthalten sein muss; d.h. wir müssen notwendig von einer zweifach periodischen Gruppe ausgehen, deren Perioden in der hiermit bezeichneten Weise verknüpft sind. Es ist die erste Gruppe gegeben durch:

$$z' = \alpha^{\nu} . z + m A + n . \alpha A \text{ oder:}$$

$$z' = \alpha^{\nu} . z + (m + n \alpha) . A \text{ für } \nu = 0, 1, 2.$$

Für $\underline{n = 4}$ lautet die entsprechende Formel in derselben Weise:

$$z' = i^{\nu} . z + (m + n i) A \text{ für } \nu = 0, 1, 2, 3$$

und für $\underline{n = 6}$

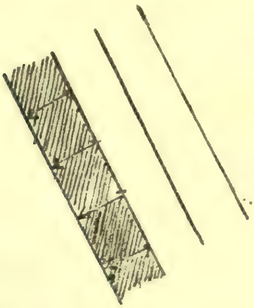
$$z' = \pm \alpha^{\nu} . z + (m + n \alpha) . A \text{ für } \nu = 0, 1, 2.$$

Dieses sind dann alle eigentlich discontinuirlichen Gruppen, die gleichzeitig aus Translationen u. Drehungen bestehen; sie bilden eben nur eine ganz beschränkte Zahl.

Fr. 18 VII 93. Wir gehen nun zu der Darstellung der hiermit besprochenen discontinuirlichen Gruppen durch das wichtige Hülfsmittel der <u>Fundamentalbereiche</u> über. Diese sind dadurch definirt, dass <u>für eine vorliegende Gruppe jeder Punkt der Ebene in dem Bereiche einen aequivalenten Punkt besitzt, andererseits aber keine 2 Punkte des Fundamental-</u>

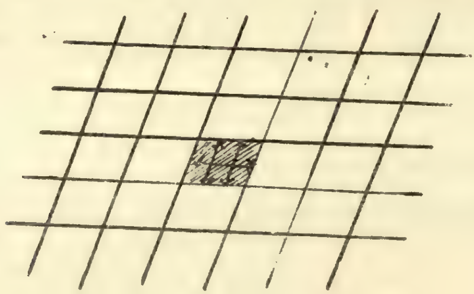
<u>bereiches selbst aequivalent sind</u>. Wir wollen in der Weise vorgehen, dass wir der Reihe nach die einzelnen Beispiele besprechen.

Was die aus reinen Translationen sich zusammensetzenden Gruppen betrifft, so kann für die <u>einfach periodische Gruppe</u> ein geeigneter <u>Parallelstreif der Ebene</u> als Fundamentalbereich gewählt werden. Man bekommt denselben sehr leicht, indem man durch zwei benachbarte aequivalente Punkte zwei Parallellinien zieht. An diesen einfachen Fall werden wir nun sogleich noch einige wichtige Bemerkungen knüpfen können. An diesen ersten Parallelstreif wird sich sogleich ein zweiter anschliessen, indem wir auf den ersten die gegebene Translation anwenden, u. so wird es fortgehen.



Die ganze Ebene ist sonach in lauter Parallelstreifen zerlegt, welche einzeln aus nicht aequivalenten Punktgebieten bestehen. Eben hierin tritt der Character der Parallelstreife als Fundamentalbereich hervor. Der Genauigkeit halber müssen wir noch eine bestimmte Verabredung betreffend der Ränder des einzelnen Parallelstreifens treffen. Indem die Punkte der einen Randcurve denen der anderen Randcurve aequivalent sind, so werden wir offenbar von den beiden Randcurven entweder nur die eine dem Fundamentalbereich zuzählen dürfen, oder aber wir müssen die Zugehörigkeit der beiden Randcurven uns fortgesetzt vor Augen halten. Dementsprechend empfiehlt es sich, in der Zeichnung die Zuordnung der Randcurven durch Pfeile anzudeuten, wie es vorstehend auch geschehen ist. –

Gehen wir weiter zu der doppeltperiodischen Translationsgruppe $h' = h + m\omega + n\omega'$, so haben wir bei ihr anknüpfend an die Figur der letzten Stunde eine Einteilung der ganzen Ebene in lauter Parallelogramme, deren jedes wieder einen Fundamentalbereich der Gruppe darstellt. Die Kanten des einzelnen Parallelogramms sind vermöge der gegebenen Translationen in einfachster Weise wieder einander zugeordnet.

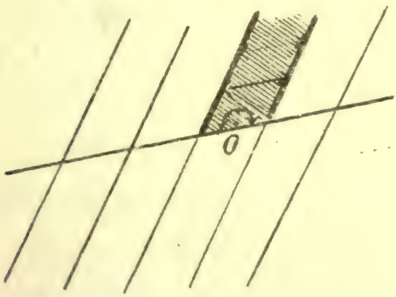


Welcher Art ist jedoch der <u>Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe für n = 2</u>:

$$z' = \pm z + m\omega$$

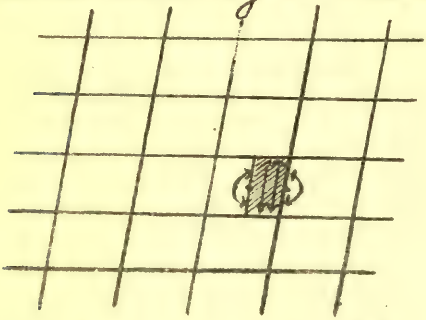
und $z' = \pm z + m\omega + n\omega'$?

Was zunächst die Gruppe $z' = \pm z + m\omega$ betrifft, so wollen wir ausgehen von dem Parallelstreifen der zugehörigen Translationsgruppe, denselben jedoch so gezeichnet denken, daß der Drehpunkt O von beiden Randcurven gleich weit absteht. Dann wird der zu der erweiterten Gruppe gehörige Fundamentalbereich durch die Hälfte des Parallelstreifens gegeben, dessen Ränder jetzt wie die Figur es



zeigt, einander zuzuordnen sind: Für die Parallellinien bleibt die frühere Zuordnung, dagegen werden die beiden Hälften des durch O gehenden Randes durch die gegebene Drehung einander punktweise zugeordnet.

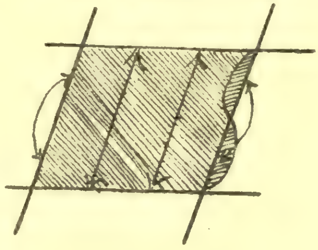
In derselben Weise zeichnen wir für die Gruppe $z' = \pm z + m\omega + n\omega'$ das einzelne Parallelogramm der zugehörigen Translationsgruppe zunächst wieder so, daß der Drehpunkt O in der Mitte desselben zu liegen kommt und zerlegen dann durch eine weitere durch O hindurchlaufende Gerade, welche wir am bequemsten als Parallele zu einer der Seiten des Parallelogramms wählen, dieses in zwei Hälften, deren jede für sich den neuen Fundamentalbereich darstellt. Die Zusammenordnung der Begrenzung ist dann analog wie vorhin; zwei der Seiten sind durch die Translation einander zugeordnet, in den beiden anderen Seiten sind die Hälften einer jeden durch die Drehung einander zugeordnet.



In ähnlicher Weise lassen sich auch die Fundamentalbereiche der übrigen erweiterten Gruppen behandeln, wie wir nicht weiter ausführen wollen.

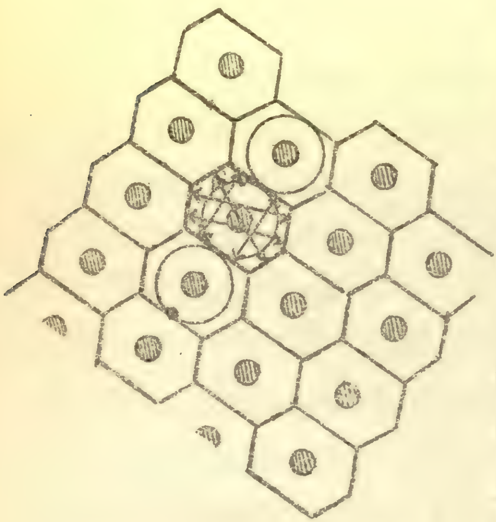
Nun ist jedoch zu beachten, <u>daſs keineswegs die bislang betrachteten Fundamentalbereiche in sich eindeutig bestimmt sind</u>, vielmer können dieselben noch in mannigfacher Weise durch Abänderung der Begrenzungscurven modificirt werden. („<u>Princip der erlaubten Abänderung</u>"). Z. B. kann man im Falle des einfachen Parallelstreifens den Fundamentalbereich auch von 2 beliebigen gekrümmten Linien begrenzt sein lassen, die zu einander vermöge der gegebenen Translation zu geordnet werden. (v. Fig.)

Oder aber bei dem zuletzt betrachteten Fundamentalbereich



läßt sich etwa an der einen Hälfte einer der in zwei Hälften geteilten begrenzenden Strecke ein beliebiges Stück vom Fundamentalbereich fortnehmen, dafür aber an der zugehörigen Hälfte ein aequivalentes Stück ansetzen u. so fort.

Doch giebt es eine Art, hier, bei den Bewegungsgruppen, in eindeutiger Weise zu gesetzmäßigen Fundamentalbereichen zu gelangen. Diese werden wir in Rücksicht auf die Methode, welche sie uns liefert, „<u>centrirte Fundamentalbereiche</u>" nennen. Nehmen wir, pour fixer les idées, als Beispiel eine doppelperiodische Gruppe an. Wir denken uns dann zu einem beliebigen Punkte der Ebene seine sämmtlichen aequivalenten Punkte gezeichnet. Um den ersten Punkt construiren wir jetzt eine kleine Kreisscheibe; diese denken wir wieder auf alle anderen aequivalenten Punkte übertragen. Nun lassen wir die Kreisscheiben immer mehr wachsen. Dann wird es sehr bald eintreten, dass die Kreisscheibe des ausgewählten Punktes an eine (oder mehrere) der benachbarten Kreisscheiben stösst. Allemal wo eine Berührung stattfindet, soll das Wachstum der Scheiben dann so stattfinden, dass sie sich geradlinig aneinander abplatten. In unserem Beispiel entsteht solcherweise, wie die nähere Ueberlegung zeigt als Fundamentalbereich ein bestimmtes Sechseck, um welches herum sich weitere aequivalente Sechsecke gruppieren.

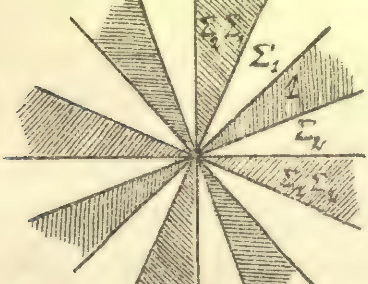


Allgemein gilt der Satz, dass solche centrirte oder natürliche Fundamentalbereiche immer von geraden Linien begrenzt sind, und dass sie lauter concave Winkel haben, endlich dass bei ihnen im einzelnen Punkte der Ebene (wenn dieses nicht gerade im Drehcentrum ist) höchstens 3 solcher Bereiche zusammenstossen

Die Operationen, welche wir bisher zur Zusammensetzung der Gruppen benutzten, waren gewöhnliche Bewegungen. Nun können wir, indem wir einen Schritt weiter gehen, die Frage aufwerfen, <u>was es für Gruppen mit Operationen zweiter Art giebt?</u> Operationen 2ter Art werden dabei allgemein diejenigen genannt werden, die sich aus Bewegungen und Spiegelungen zusammensetzen.

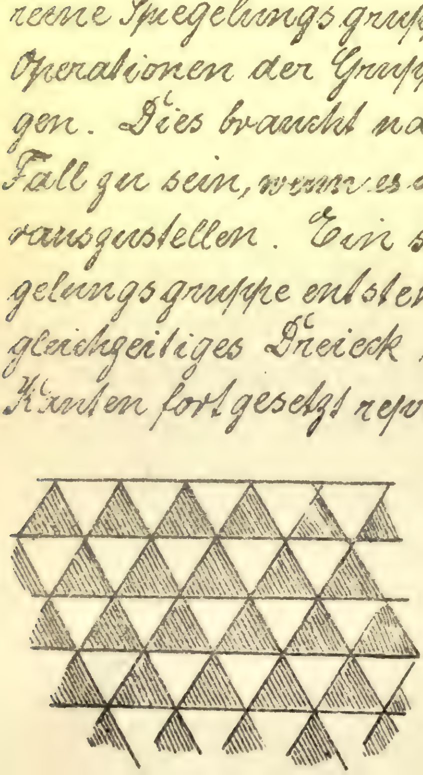
Als einfaches Beispiel, für welches wir sogleich von dem Fundamentalbereich ausgehen wollen, sei ein Winkelraum $\frac{\pi}{n}$ gewählt. Wir denken uns denselben an seinen Kanten wiederholt gespiegelt, dann wird derselbe sich insgesamt um den Scheitelpunkt $2n$ mal wiederholen.

Die einzelnen Sectoren werden teils congruent, teils invers congruent sein, d.h. eine beliebige Figur im ersten Sector findet sich im zweiten als Spiegelbild, im dritten als congruente Figur u.s.w. wieder. Die beiden erzeugenden Operationen, die Spiegelungen Σ_1 u. Σ_2 bilden also in ihrer Com-



bination eine <u>eigentlich discontinuierliche Gruppe</u>. Nun tritt hier im Gegensatz zu unseren früheren Beispielen der Fundamentalbereiche die charakteristische Eigenschaft auf, dass unser Bereich notwendig bezüglich seiner Begrenzung <u>eindeutig</u> gegeben ist, d.h. keine Abänderung seiner Begrenzung zulässt. Etwas Aehnliches wird immer statthaben, wenn unter den Operationen der Gruppe eine Spiegelung auftritt. <u>Die Spiegelkante muss allemal notwendig den Fundamentalbereich begrenzen.</u>

Unser soeben behandeltes Beispiel stellte eine reine Spiegelungsgruppe dar, d.h. die erzeugenden Operationen der Gruppe waren sämmtlich Spiegelungen. Dies braucht natürlich keineswegs immer der Fall zu sein, ~~wenn es auch bequem ist~~ solche Beispiele vorauszustellen. Ein sehr schönes Beispiel einer Spiegelungsgruppe entsteht z.B. auch, wenn man ein gleichseitiges Dreieck durch Spiegelung an seinen Kanten fortgesetzt reproducirt.



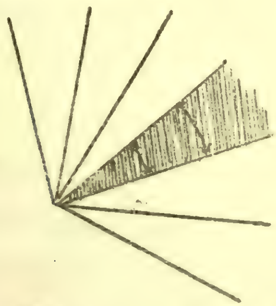
Das allgemeine Problem, das sich hier darbietet, wird dann sein, alle eigentlich discontinuierlichen Gruppen aufzuzählen, welche sich aus Bewegun-

gen und Operationen 2^ter^ Art in der Ebene zusammensetzen. In dieser Hinsicht sei auf die Arbeit von Sohnke in Crelle Bd. 77 (1873) hingewiesen:
„Ueber die regelmäßigen Punktsysteme in der Ebene."
Derselbe spricht in dieser Abhandlung nicht von dem Gruppenbegriff als solchem, sondern er verfährt vielmehr rein empirisch-geometrisch, wodurch die Discussion sehr umständlich wird. Dementgegen ist zu nennen C. Jordan, dessen Verdienst es überhaupt ist, den Gruppenbegriff nach den verschiedensten Seiten hin zur Geltung gebracht zu haben; er hat bereits in den Annali di Mat. II 1868-69 (serie) („Sur les groupes de mouvements") das genannte Problem unter gruppentheoretischem Gesichtspunkten in Angriff genommen und zwar in allgemeinster Weise, indem er in den dreidimensionalen Raum geht, und doch ebensowohl continuirliche als discontinuirliche Gruppen aufzählt, leider läßt er dabei aber Operationen zweiter Art bei Seite.

Wir könnten jetzt noch einen zweiten Schritt ausführen und Aehnlichkeitstransformationen zu den Bewegungen u. Spiegelungen hinzunehmen und zusehen, was sich dann für eigentlich discontinuirliche Gruppen ergeben. Damit erst würden wir der gesammten „Hauptgruppe" der räumlichen Transformationen Rechnung getragen haben.

Doch wollen wir lieber unsere Aufmerksamkeit sogleich einem anderen Punkte zuwenden. In der Functionentheorie betrachtet man doch „Riemañsche Flächen", die sich über der z-Ebene ausbreiten, eventuell sogar aus ∞ vielen Blättern bestehen. Diese Riemann'schen Flächen sind aber nicht nur in der Functiontheorie ein gutes geometrisches Hülfsmittel, sondern beanspruchen an und für sich auch rein geometrisches Interesse und eröffnen geradezu ein neues Forschungsgebiet für die Geometrie selbst. Dementsprechend können wir hier nicht nur in der schlichten Ebene, sondern auch auf solchen Riemann'schen Flächen reguläre Gebietseinteilungen betrachten, wir können studieren, wie sie von den Fundamentalbereichen einer Gruppe überdeckt werden u. dergl. Da zeigt sich denn insbesondere, daß man für jede discontinuirliche Gruppe Gebietseinteilungen construieren kann, auch wenn die Gruppe nicht eigentlich discontinuirlich ist.

Ein einfaches Beispiel bietet uns hier wieder die discontinuirliche Gruppe, die sich aus der Wiederholung einer bestimmten Drehung $z' = e^{i\varphi} z$ zusammensetzt. Wir wissen diese Gruppe ist nur dann eigentlich discontinuirlich, wenn $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ ist. Diese Bedingung soll jetzt aber bei Seite bleiben. Wir wählen vielmehr allgemein als Fundamentalbereich einfach den Winkelraum φ aus, dessen Kanten einander durch die Drehung zugeordnet sind, und denken diesen beliebig oft nach der positiven Seite wie nach der negativen Seite wiederholt. Wir bekommen dann auf alle Fälle eine Gebietseinteilung in einer Riemann'schen Fläche, die sich um 0 herumwindet. Ist φ

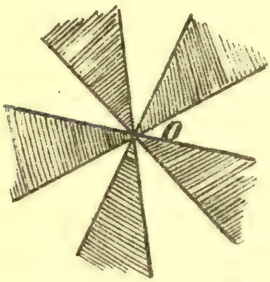


incommensurabel mit π, so wird niemals der Fundamentalbereich bei seiner Wiederholung durch die Drehung sich mit seiner Ausgangslage genau decken, d.h. die Riemann'sche Fläche wird eine ∞ Zahl von Blättern enthalten.

Ist dagegen φ commensurabel, so wird nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen der Fundamentalbereich in seine ursprüngliche Lage zurückgelangt sein. Die Riemann'sche Fläche besteht daher aus einer endlichen Blätterzahl und nur dann, wenn φ ein aliquoter Teil von 2π ist, stellt sich die schlichte Ebene ein.

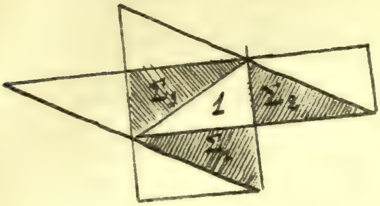
Es bietet sich nun die allgemeine Aufgabe dar, diese Gedanken in der angegebenen Richtung weiter zu verfolgen.

[Do. 20. VII 93] Wir wollen dem zuletzt betrachteten Fundamentalbereich jetzt den ihm gestaltlich gleichen Fundamentalbereich zur Seite stellen, welcher der aus den Spiegelungen an 2 durch O gehenden Geraden sich zusammensetzenden Gruppe entspricht.



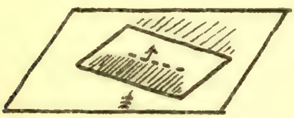
Für ihn entsprechen daher die Punkte der Begrenzungen sich selbst, d.h. letztere sind notwendige Begrenzungen. Hier werden wir dann die sich um O gruppierenden Winkelräume abwechselnd zu schraffieren haben. Wieder entsteht im allgemeinen eine unendlichfach überdeckte Fläche.

In analoger Weise kann man von einem beliebigen geradlinigen <u>Polygon</u> ausgehen und dieses fortgesetzt an den Kanten durch Spiegelung wiederholen. Wählen wir z. B. ein Dreieck ABC als Ausgangspunkt aus, so lagern sich um dieses zunächst drei symmetrische Dreiecke, die wir schraffieren werden, dann an jedes von den letzteren weitere nicht schraffierte Dreiecke u. so fort.



Bezeichnen wir die ersten Spiegelungen mit $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, so wird die Gruppe, welche durch die Gesammtheit aller sich aneinander lagernder Dreiecke bestimmt ist, durch die Wiederholung u. Combination dieser drei erzeugenden Operationen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ entstehen. Hier ist nun wieder zunächst gar keine Rede davon, ob diese Dreiecke in ihrer unendlichen Wiederholung sich schlicht in der Ebene ausbreiten, oder ob dabei in ihren Ecken Windungspunkte von im allgemeinen ∞ hoher Ordnung auftreten werden, so dass sie eine ∞ blättrige Riemann'sche Fläche erfüllen. Man ist ja in der Theorie der automorphen Functionen gewöhnt, nur derartige Dreiecke oder Polygone zu betrachten, deren Wiederholung die einfache Ebene gerade lückenlos bedeckt; doch sind diese Fälle keineswegs nicht die einzigen, welchen eine functionentheoretische Bedeutung zukommt. Vielmehr gilt letzteres auch von den allgemeinen Aggregaten der Dreiecke oder Polygone, die wir hier vor uns haben, man vergleiche beispielsweise <u>meine Vorlesungen über lineare Differen-</u>

Nun sei noch auf ein anderes Beispiel einer Gebietseinteilung auf einer unendlichblättrigen Riemann'schen Fläche aufmerksam gemacht, wie es die Theorie der Abelschen Functionen darbietet. (Des Näheren ausgeführt in meinen Vorlesungen über Riemann'sche Flächen 1891–92.) Man gehe aus von einem gewöhnlichen Parallelogramm und denke auf dasselbe ein zweites Parallelogramm vermittels eines Verzweigungsschnittes befestigt, der zwei Windungspunkte erster Ordnung verbindet, wie die Figur angiebt.



Die 4 Seiten dieser Parallelogramme werden wir als complexe Grössen $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4$ bezeichnen, gerade wie im einfacheren Falle des Periodenparallelogramms der elliptischen Functionen. Wir wollen ferner festsetzen (um gleich den allgemeinen Fall zu haben), dass zwischen diesen 4 Grössen keine lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten $k_1\omega_1 + \ldots + k_4\omega_4 = 0$ bestehe. Von jener Ausgangsfigur aus denken wir nun zunächst das grosse Parallelogramm in bekannter Weise wiederholt, so dass ein ganzes Netz von grossen Parallelogrammen entsteht, welche

eine Ebene gerade schlicht erfüllen, genau wie im analogen Falle der elliptischen Functionen. Auf jedem dieser grossen Parallelogramme sitzt hier jedoch ein kleines Parallelogramm in der bezeichneten Weise auf. Auch dieses können wir dann beliebig wiederholt denken, so dass jedes der kleinen Parallelogramme zu einer neuen Ebene anwächst, die in kleine Parallelogrammen zerlegt ist. In solcher Weise werden wir dann die auf den kleinen Parallelogramme aufsitzenden grossen Parallelogrammen weiter behandeln u. so fort.

Es entsteht eine ∞ blättrige Riemann'sche Fläche mit einer Gebietseinteilung, welche wir als 4fach periodische bezeichnen dürfen, insofern eine Verschiebung um ω_1, ω_2, ω_3 u. ω_4 die ganze Fläche in sich selbst überführt. (Es sei daran erinnert, dass jener Jacobische Satz, der 3 oder mehrfach periodische Functionen einer complexen Variabelen ausschloss, sich ja ausdrücklich auf eindeutige Functionen bezieht; es sei ferner noch functionentheoretisch bemerkt, dass auf diese Gebietseinteilung die Umkehr eines überall endlichen hyperelliptischen Integrals vom Geschlecht 2 führt).

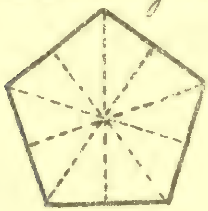
Nun wollen wir dazu übergehen, Gruppen

im Raume zu betrachten, und zwar wollen wir wieder zunächst die Frage aufwerfen, was es für discontinuirliche Gruppen giebt, die sich aus Bewegungen erster und zweiter Art aufbauen und einen bestimmten Anfangspunkt festlassen.

1.) Was die reinen Drehungsgruppen betrifft (d.h. die Gruppen, welche keine Operationen 2. Art enthalten), so will ich hier zuerst historisch referieren. Wir haben es mit den Drehungen der regulären Körper zu thun, die ich in meinen Vorlesungen über das Ikosaëder ausführlich dargestellt habe. Und zwar giebt es insgesammt 5 Typen. Auf den Beweis, dass es nicht mehr giebt als diese wollen wir nicht näher eingehen, doch werden wir bald darauf zurückkommen. Zunächst sind zu nennen die cyklischen Gruppen. Diese bestehen einfach in der Wiederholung einer und derselben Drehung, die nach n-maliger Ausführung zur Identität führt.

Wir bezeichnen diese G_n mit C_n für $n = 1, 2 \cdots 3$.
Weiter kommen die Diëdergruppen. Unter einem Diëder verstehen wir folgendes: Denken wir uns in ein reguläres Polygon von n Seiten, etwa ein Fünfeck, eine Membran ausgespannt, so hat diese doch eine Oberseite u. eine Unterseite, und diese

wollen wir als die Fläche eines regulären Körpers auffassen. In der That sind alle Bedingungen eines regulären Körpers, Gleichheit der Flächenwinkel u. s. w., erfüllt, nur dass der Körper einen verschwindenden Inhalt hat. Man kann dann dieses „Dieder" um die in seinen Mittelpunkte errichtete Axe durch n verschiedene Drehungen mit sich zur Deckung bringen, ebenso wird



dasselbe durch halbe Drehungen um seine Symetrielinien in sich selbst übergehen. Diese Operationen zusammen bilden eine G_{2n}, die wir als D_n bezeichnen. Endlich kommt noch hinzu die G_{12} des Tetraedrs, die G_{24} des Oktaeders oder des Würfels, die G_{60} des Ikosaëders oder des Pentagondodekaëders, die wir mit T, O u. Ik bezeichnen wollen. Denn das reguläre Tetraeder geht doch durch 12, das Oktaeder durch 24, das Ikosaëder durch 60 Drehungen in sich über.

2.) Nun ist weiter die Frage, wie man diese reinen Drehungsgruppen durch Operationen zweiter Art erweitern kann. Diese Untersuchung habe ich in meinen Vorlesungen über das Ikosaëder nur beiläufig berührt. Ausführlich wird dieselbe behandelt von Schoenflies in seinem Buche: Ueber Krystallsysteme und Krystallstruktur (1891). Ich will doch die Liste der Gruppen 2. Art, die Schoenflies aufstellt, hier wiedergeben. Dieselbe findet sich in der Tabelle auf pag. 146 seines Buches, allerdings bereits nach krystallographischen Gesichtspunkten zurechtgemacht. Schoenflies gebraucht die folgenden Abkürzungen als Indices:

h bedeutet die Spiegelung an der horizontalen Ebene,
v die Spiegelung an einer verticalen Ebene,
d die Spiegelung an einer diagonalen Ebene,
i die Inversion an O, welche jeden Punkt durch den zu ihm diametralen ersetzt.

Man hat sich eben z. B. das Dieder so gestellt zu denken, daß seine Mittelaxe vertikal ist. Dann kann man entweder an der Horizontalebene (h) oder an einer Vertikalebene gespiegelt denken, und man wird bei einem Dieder mit einer geraden Eckenzahl noch Verticalebenen durch 2 Gegenecken (d) und solche durch die Mitten zweier Gegenseiten (v) unterscheiden können.

Ferner muß ich noch das Wort Drehspiegelung erklären. Unter derselben versteht Schoenflies einfach die Operation, welche sich aus einer Drehung um eine Axe und der Spiegelung an der durch den festgehaltenen Punkt gehenden Normalebene zusammensetzt. Es gilt dann der Satz, dass jede Operation 2. Art in vorliegendem Falle, wo ein Punkt festgehalten ist, eine Drehspiegelung ist.

Nun gehen wir zu der Zusammenstellung der erweiterten Gruppen. Wir wollen allemal die durch Spiegelungen erweiterte Gruppe mit einem horizontalen Strich in ihrer Abkürzung versehen.

a.) Die Ik liefert die erweiterte Gruppe Ik^h, eine $\overline{G}_{120}$; man denke sich eben das Ikosaëder in gewohnter Weise aufgestellt, und dann nehme man die Spiegelung an der Horizontalebene zu den Drehungen hinzu. (Wir würden diese Gruppe ebensowohl Ik^v oder Ik^i nennen können, wie wir nicht weiter verfolgen).

b.) In derselben Weise wird aus der Gruppe des Oktaeders eine O^h oder $\overline{G}_{48}$.

c.) Aus der Gruppe des Tetraëders dagegen entstehen 2 erweiterte Gruppen, die wir als T^h und T^d oder als $\overline{G}'_{24}$ u. $\overline{G}''_{24}$ unterscheiden wollen.

Hier haben eben die Indices h u. d die Bedeutung, dass man die Spiegelung an der Horizontalebene resp. einer Verticalebene hinzunehmen soll.

d.) Die Gruppe D_n^i liefert gleichfalls 2 erweiterte Gruppen, die $D_n^{ih} = \bar{G}'_{4n}$ und die $D_n^{id} = \bar{G}''_{4n}$.

e.) Die Gruppe C_n liefert die Erweiterungen

$$\bar{G}'_{2n} = C_n^{h};\ \bar{G}''_{2n} = C_n^{v};\ \bar{G}'''_{2n} = \bar{C}_{2n}.$$

Hier soll $\bar{C}_{2n}$ diejenige cyklische Gruppe bedeuten, welche durch eine Wiederholung einer Drehspiegelung von der Amplitude $\frac{\pi}{n}$ entsteht. Ist n ungerade, so kann man $\bar{C}_{2n}$ auch durch C_n^i bezeichnen.

3.) Aus dieser Gesammtheit der erweiterten Gruppen, die Schoenflies findet, kann man dann nach irgendwelchen Gesichtspunkten die eine oder die andere Art herausgreifen. Wir wollen dieses einmal in Rücksicht auf functiontheoretische oder auf krystallographische Betrachtungen ausführen.

Was letzteres betrifft, so bietet doch der Krystall um einen Punkt herum, um eines seiner Moleküle gewisse Symetrieen dar, d.h. durch bestimmte Drehungen um diesen Punkt oder Operationen zweiter Art geht die Molecülanordnung des Krystalls oder besser gesagt, da wir ja nicht von der Begränzung des Krystalls handeln, das krystallinische Medium in sich über. (Des Weiteren wird es sich in der Krystallographie natürlich nicht nur um die Translationsgruppen 1. u. 2. Art handeln, welche einen Punkt festlassen, sondern man wird überhaupt die discontinuirlichen Gruppen von Raumtransformationen zu betrachten haben, welche die verschiedenen Molecüle des Krystalls vertauschen und unter denen immer eine Translationsgruppe mit 3 Translationen ausgezeichnet ist.)

Wir hatten nun schon bei den discontinuirlichen Gruppen der Ebene gesehen, daß nicht alle Drehungen sich mit Translationen zu eigentlich discontinuirlichen Gruppen zusammensetzen lassen. So wird es auch hier sein. Es gilt daher aus der Gesammtheit aller von uns aufgestellten einfachen und erweiterten Gruppen, die einen Punkt festlassen, die „krystallographischen Gruppen" auszusondern.

Dem Gesagten gemäß sind in Rücksicht auf unsere Betrachtungen in der Ebene von unseren Gruppen 1. u. 2. nur diejenigen hier brauchbar, welche keine anderen Drehaxen besitzen als 2-, 3-, 4- oder 6-zählige. Solcherweise bleiben, wie die einzelne Aufzählung zeigt, insgesammt 32 brauchbare Gruppen übrig oder wie die Krystallographen sagen, <u>32 Arten der Krystallsymmetrie</u>.

Dieses Resultat ist zuerst von einem Mathematiker abgeleitet worden, der unbekannt geblieben ist, so lange er lebte. Es ist <u>Hessel</u> in Marburg; derselbe hat 1830 in Gehler's physicalischem Lexicon in einem Artikel über Krystallographie diese 32 Symmetriefälle richtig aufgezählt. Die Zusammenstellung derselben ergiebt sich nun wie folgt:

1, 2) die beiden Oktaedergruppen $\mathfrak{G}_{24}$ und $\bar{\mathfrak{G}}_{48}$

3–5) die drei Tetraedergruppen $\mathfrak{G}_{12}$, $\mathfrak{G}'_{24}$, $\mathfrak{G}''_{24}$

6–15) die Diedergruppen $\mathfrak{G}_{2n}$ für $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{D}_6$.

die erweiterten Diedergruppen $\bar{\mathfrak{G}}^h_{4n}$ für $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{D}_6$.

die erweiterten Diedergruppen $\bar{\mathfrak{G}}^d_{4n}$, für $\mathfrak{D}_2$ u. $\mathfrak{D}_3$

16–27) die erweiterten cyclischen Gruppen

$$\begin{matrix} \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{C}_3 & \mathfrak{C}_4 & \mathfrak{C}_6 \\ \mathfrak{C}^h_2 & \mathfrak{C}^h_3 & \mathfrak{C}^h_4 & \mathfrak{C}^h_6 \\ \mathfrak{C}^v_2 & \mathfrak{C}^v_3 & \mathfrak{C}^v_4 & \mathfrak{C}^v_6 \end{matrix}$$

28–29) die Drehspiegelungsgruppen, $\bar{\mathfrak{C}}_4$ und

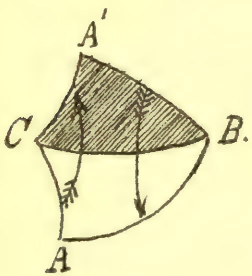
30) die reine Spiegelung an einer Ebene $\mathfrak{S}$.

31) die reine Inversion am Anfangspunkt, $\mathfrak{J}$.

32) die Identität.

Fr. 21 VII. 93] Heute wollen wir unter unseren erweiterten Gruppen die functionentheoretischen heraussuchen im Anschluss an die bekannte Arbeit von Schwarz in Crelle Bd. 75. Dort geht Schwarz davon aus, ein sphärisches Dreieck an seinen drei Kreisbogen durch Symetrie zu wiederholen, mit den neuentstehenden Dreiecken in derselben Weise zu verfahren u. so fort. Dann werden alle die Dreiecke ausgewählt, die nur zu einer endlichen Zahl von aequivalenten Dreiecken bei dieser Spiegelung führen und die Kugel nur einfach überdecken. Was nun die zu jenen Dreiecken zugehörigen Gruppen betrifft, so ist hier zu nennen die $\bar{G}_{120}$ des Ikosaëder (I^h), die $\bar{G}_{48}$ des Oktaëder (O^h) die $\bar{G}_{24}$ des Tetraëder (T^h), u. endlich die $\bar{G}'_{4n}$ des Dieder (D_n^h). Nehmen wir noch den Fall hinzu, dass wir eine einfache cyclische Gruppe haben, d. h. von einem Zweieck ausgehen, dann ist in derselben Weise noch anzuführen die $\bar{G}''_{2n}$ der C_n^v. Dieses sind dann <u>alle</u> jene erweiterten Gruppen, welche sich bei der genannten functionentheoretischen Fragestellung darbieten. Diese „<u>functionentheoretischen Gruppen</u>", wie wir sie nennen <u>können, sind dadurch ausgezeichnet, dass ihre Fundamentalbereiche, nämlich die Dreiecke oder Zweiecke, von denen man ausgeht, lauter <u>notwendige</u> Begrenzungsstücke tragen, nämlich Kanten, welche punktweise festbleiben.</u>

Es ist natürlich nicht schwer, auch für die anderen Gruppen die Fundamentalbereiche zu bilden. So erscheint beispielsweise als Fundamentalbereich einer Rotationsgruppe d.h. einer Gruppe erster Art ein Doppeldreieck, d.h. die Vereinigung eines Dreiecks mit einem seiner Symetriedreiecke, wobei von den freien Kanten jedesmal die symetrischen zugeordnet sind. Wir wollen jedoch nicht weiter ins Détail eindringen, sondern uns lieber der Frage zuwenden, wie man denn die Vollständigkeit unserer Aufzählungen controlieren mag. Denn außer den von uns aufgestellten Gruppen erster u. zweiter Art giebt es bei festgehaltenem Punkt O in der That keine anderen eigentlich discontinuirlichen Bewegungsgruppen. Wir wollen dieses Problem im folgenden wenigstens dem allgemeinen Ansatz nach näher betrachten, indem wir verlangen, alle Spiegelungsgruppen aufzuzählen, d.i. solche Gruppen, die durch Spiegelung eines sphärischen Polygons in derselben Weise entstehen, wie vorhin die „functionentheoretischen" Gruppen durch Spiegelung an den Seiten eines Dreiecks. Wir denken uns



um den festgehaltenen Punkt O eine Kugel vom Radius 1) gelegt u. auf ihr den Fundamentalbereich der Gruppe gezeichnet. Da jede discontinuirliche Gruppe auf der Kugel einen endlichen Fundamentalbereich haben muss, da ferner alle Fundamentalbereiche direct oder invers congruent sind, also denselben Flächeninhalt haben, da endlich der Flächeninhalt der Gesammtkugel eine endliche Grösse ist, so kann es nur eine endliche Zahl neben einander liegender Fundamentalbereiche geben, d.h. sich nur um eine endliche Gruppe handeln. Dies besagt eben nichts weiteres als dass alle eigentlich discontinuirlichen Gruppen in unserem Falle auch endlich sind. Sei nun irgend eine endliche Gruppe vorgelegt, so werden wir ihren Fundamentalbereich nach der Centrirungsmethode bestimmen können. Wir denken wieder alle aequivalenten Punkte eines beliebig ausgewählten Punktes gezeichnet u. um jeden derselben die kleinen, centrirten Kugelcalotten gelegt, die einander entsprechend sind. Dann lassen wir die letzteren wieder immer mehr wachsen, bis sie einander berühren. Wie wir früher bei der entsprechenden Construction der Ebene dann 2 Kreise, scheiben stets längs einer geraden Linie sich abplatten ließen, so werden wir hier auf der Kugel die sich treffenden Kugelcalotten sich längs größter Kreise bei weiterem Wachstum abplatten lassen.

Solcherweise werden wir dann schließlich als Fundamentalbereich der endlichen Gruppe auf der Kugel ein Polygon bekommen, welches von einer endlichen Zahl größter Kreise begrenzt ist. Alles dieses gilt noch für unsere sämmtlichen Gruppen. Bei den Spiegelungsgruppen insbesondere werden wir so weiter raisonniren.

Da in einem beliebigen Eckpunkte unseres Polygons notwendig eine gerade Zahl abwechselnd schraffirter und nicht schraffirter Bereiche zusammenstößt, werden die Winkel unseres sphärischen Polygons notwendig aliquote Teile von π sein, die wir mit $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2} \cdots \frac{\pi}{l_n}$ bezeichnen wollen. Jetzt drückt sich durch die Winkel der Flächeninhalt des Polygons nach der bekannten Formel aus als:

$$\pi\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \cdots + \frac{1}{l_n} + 2 - n\right)$$

oder anders geschrieben:

$$\pi.\left(2 - \frac{l_1 - 1}{l_1} - \frac{l_2 - 1}{l_2} - \frac{l_3 - 1}{l_3} \cdots - \frac{l_n - 1}{l_n}\right)$$

Bezeichnen wir nun die Gesammtzahl aller Polygone auf der Kugel mit $2N$ (da dieselbe dort eine gerade Zahl sein muss) dann ergiebt sich der Flächeninhalt der ganzen Kugel als

$$4\pi = 2N\cdot\pi\left(2 - \frac{l_1-1}{l_1} - \frac{l_2-1}{l_2} \cdots - \frac{l_n-1}{l_n}\right)$$

d. h. es wird:

$$\frac{l_1-1}{l_1} + \frac{l_2-1}{l_2} + \cdots\cdots + \frac{l_n-1}{l_n} = 2 - \frac{2}{N} \text{ sein.}$$

Nun müssen aber die Grössen l u. N ganze Zahlen sein. *Der wesentliche Gedanke ist demnach hier, diese Gleichung als eine diophantische Gleichung aufzufassen und alle ihre ganzzahligen Lösungen zu suchen.* (Das ist überhaupt die allgemeine Regel, dass man bei der Aufsuchung der verschiedenen discontinuirlichen Gruppen irgend welcher Art immer auf diophantische Gleichungen geführt wird).

Wir discutiren unsere Gleichung nun folgendermassen:

1) Es ist nun der Ausdruck $\frac{l-1}{l}$ offenbar am kleinsten für $l = 2$, und zwar wird derselbe gleich $1/2$. Es ist daher sicher stets $\frac{l-1}{l} \geqq 1/2$. *Hieraus folgt, dass die Zahl n nicht grösser als 3 sein kann,* da 4 Summanden auf der linken Seite eine Summe $\geqq 2$ liefern, was wegen der rechten Seite keineswegs

angeht. Damit ist bereits die Beschränkung auf Kugelzweiecke und Dreiecke gegeben.

2) Es seien fernerhin die Zahlen l nach ihrer Grösse geordnet, also: $\underline{l_1 \leqq l_2 \leqq l_3}$.

Sei nun $l_1 \geqq 3$, dann gilt Gleiches auch für l_2 und l_3. Da aber dann der Ausdruck $\frac{l-1}{l} \geqq \frac{2}{3}$ u. somit für $n = 3$ die ganze linke Seite unserer Gleichung $\geqq 2$ würde, was wegen der rechten Seite nicht möglich ist, so kann für $l_1 \geqq 3$ die Anzahl n der l nur gleich 2 sein. Wir haben daher die beiden Fälle fernerhin zu untersuchen:

a) $\underline{n = 2}$, dann gilt: $\frac{l_1 - 1}{l_1} + \frac{l_2 - 1}{l_2} = 2 - \frac{2}{N}$.

b) $\underline{n = 3,\ l_1 = 2.}$

Ad. a. Behandeln wir zunächst den ersten Fall weiter; $n = 2$ besagt, dass ein Zweieck zu Grunde gelegt ist. In einem solchen sind aber die Winkel allemal gleich, d.h. es ist $l_1 = l_2$. Dann lautet unsere Gleichung $\frac{2l - 2}{l} = \frac{2N - 2}{N}$ oder $N = l$, d.h. der Wert von l bleibt beliebig, und N hat denselben Wert.

Diese Lösung der diophantischen Gleichung führt daher geometrisch interpretiert auf die Gruppe $\underline{C_n^v}$.

Ad b. Es war $n = 3, l_1 = 2$ gesetzt. Dann geht unsere diophantische Gleichung über in:

$$\frac{1}{2} + \frac{l_2 - 1}{l_2} + \frac{l_3 - 1}{l_3} = 2 - \frac{2}{N}.$$

Ich behaupte nun weiter, daß l_2 nicht größer als 3 sein kann; denn sonst würde die linke Seite unserer Gleichung wieder größer als 2 werden.

Also bleiben die beiden Möglichkeiten bestehen: $l_2 = 2$ u. $l_2 = 3$.

α) Ist $l_2 = 2$, dann wird unsere Gleichung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{l_3 - 1}{l_3} = 2 - \frac{2}{N} \text{ oder:}$$

$$\frac{l_3 - 1}{l_3} = \frac{N - 2}{N} \text{ oder } N = 2 l_3.$$ Dieses aber führt bei weiterer geometrischer Discussion zu der Gruppe des Diedertypus D_n^h

β) Ist $l_2 = 3$, dann lautet unsere Gleichung

$$1/2 + 2/3 + \frac{l_3 - 1}{l_3} = 2 - \frac{2}{N}.$$ Nun läßt sich wieder sofort direct schließen, daß l_3 nicht $\geqq 6$ sein kann, da sonst wieder die linke Seite größer oder gleich 2 würde. Es bleiben allein die 3 Möglichkeiten

α′) $l_3 = 3$, und daher $N = 12$

β′) $l_3 = 4$, und daher $N = 24$

γ′) $l_3 = 5$, und daher $N = 60$.

Diese Fälle stellen aber geometrisch behandelt, den Tetraeder, den Oktaëder- und den Ikosaëder, typus unserer früheren Aufzählung dar.

Aus der Discussion unserer diophantischen Glei, chung ergiebt sich solcherweise also unserer Voll, ständigkeitsbeweis, indem wir bei der Aufsuchung der Spiegelungsgruppen zu gar keiner anderen Ku, gelteilung kommen als zu derjenigen, die wir oh, nehin (bei der Aufzählung der functionentheore, tischen Gruppen) berücksichtigt haben. Wir ha, ben diesen Ansatz gemacht, indem wir von dem Begriff des Fundamentalbereiches ausgingen. Doch kann man den Ansatz noch in sehr verschiedener anderer Weise formulieren, (vergl. z. B. was die Aufstellung der Rotationsgruppen angeht, die Vor, lesungen über das Ikosaëder pag. 115.) Auf alle Arten kommt man aber schliesslich immer zu derselben diophantischen Gleichung, und die Discussion derselben ist es also, die schliesslich den Kern des ganzen Beweises ausmacht, wie wir wie, derholt hervorheben.

[Mo. 24 VII 93] Wir haben nun noch in Kürze von den allgemeinen discontinuirlichen Bewegungsgrup, pen des Raumes, bei denen nicht mehr ein bestimmter

Raumpunkt festgehalten wird, zu berichten. Wie wir schon sagten, hängt ihre Theorie auf's engste mit der Krystallographie zusammen. So kommt es denn auch, dass die Aufzählung jener Gruppen wesentlich von Krystallographen gefordert ist. Ich hatte nemlich bereits die Arbeit von C. Jordan genannt, Annali II, 1868–69. An sie schliesst sich an Sohncke's Entwickelung der Krystallstructur, 1879. Beiden Arbeiten ist eigentümlich, dass in ihnen nur Bewegungen 1. Art in Betracht gezogen werden, während man natürlich die Aufgabe allgemein fassen kann, indem man auch Operationen 2. Art in Betracht zieht. Der erste, der letzteres allgemein durchgeführt hat, ist der russische Mineralog Fedorow 1883 gewesen; nächst ihm ist zu nennen Curie in Paris 1884.

Endlich hat dann Schoenflies in seinem schon öfter von uns genannten Werke über Krystallsysteme u. Krystallstructur auf Grund eigener Untersuchungen eine zusammenfassende Darstellung gegeben. Die Resultate, zu denen man auf Grund der genannten Untersuchungen gekommen ist, und die trotz der grossen Zahl der aufzuzählenden Fälle als sicher gelten können, sind die, dass es 65 Gruppen erster Art und 165 Gruppen 2. Art insgesammt also 230 krystallographische Gruppen giebt.

Schoenflies hat für diese Gruppen insbesondere zweierlei Modelle ausgeführt, die wir in unserer Sammlung haben. Dies sind zunächst Fadenmodelle, indem für die ausgewählte Gruppe die einzelnen Drehungsaxen oder die Schraubungsaxen in einem bestimmten Raumstück als farbige Fäden ausgespannt sind. Man hat daran zu denken, dass ja doch jede Bewegung des Raumes (jede Operation erster Art), sich als eine Drehung oder Schraubung um eine bestimmte Axe ansehen lässt. Zweitens hat Schoenflies für verschiedene Gruppen die Fundamentalbereiche modellirt, in welche der Raum sich zerlegen lässt. Diese Fundamentalbereiche sind aus Gyps gleichsam als Bausteine geformt. Diese müssen sich dann gerade so an einander legen lassen, dass der Raum lückenlos ausgefüllt wird. Die Gestalt der Fundamentalbereiche ist ja nur in dem Falle a priori festgegeben, dass eine reine Spiegelungsgruppe vorliegt, wo dann der Bereich die Gestalt eines ebenflächigen Polyeders hat, an dessen Seitenflächen der Raum fortgesetzt gespiegelt wird. Aber auch in allen anderen Fällen hat Schoenflies ebenflächige Bereiche gewählt, die er von Fall zu Fall nach Belieben construirt.

Vielleicht wäre es zweckmäßig bei der Construction dieser Bereiche <u>das Princip der centrirten Bereiche</u> zu Grunde zu legen. Also, um zu wiederholen, was wir in der Ebene sagten: Man bestimmt erst alle mit einem ausgewählten Punkte aequivalente Punkte, legt um jeden derselben kleine Kugeln desselben Radius und läßt diese dann immer mehr zunehmen, bis sie sich berühren. Dann soll ihr weiteres Wachstum wieder so stattfinden, daß sie sich gegenseitig ebenflächig abplatten. <u>Auf diese Weise bekommt man dann gesetzmäßige Fundamentalbereiche, die insbesondere gar keine einspringenden Winkel haben.</u>

Nehmen Sie nun an, daß wir die 230 Gruppen mit ihren Fundamentalbereichen vollständig klar vor Augen haben, was haben wir dann hierdurch für die Krystallographie gewonnen? Wir sagen so: Was im Falle eines krystallinischen Mediums in dem einzelnen Fundamentalbereiche enthalten zu denken ist, dies ist uns ganz gleichgültig, es mag dies ein einzelnes Atom, ein einzelnes Molecül oder ein Complex von Molecülen, eine ganze Welt im Kleinen sein. Das Wesentliche ist nur, daß in dem einen Fundamentalbereiche genau die nämliche Anordnung der Materie herrscht, wie in jedem anderen. Es handelt sich also nur um einen regelmäßigen Aufbau der Materie. <u>Unser Schema behauptet dann für die Krystallographie nichts mehr und nichts weniger als dieses, daß jedes krystallinische Medium sich notwendig in einen der 230 Typen einordnen muß.</u> Was hier von dem krystallinischen Medium gesagt ist, gilt natürlich in gleichem Sinne von jeder anderen regelmäßigen Anordnung des Stoffes, wie sie sonst die Naturwissenschaft oder auch die Technik bietet. Man kann hier z. B. an ein regelmäßiges Zellgewebe oder an ein regelmäßiges Mauerwerk vielleicht aus verschwundener Culturperiode denken, allemal wird für sie eines der 230 Systeme in Anwendung kommen müssen. Die obige Behauptung ist nun vielfach in der Weise mißverstanden worden, als müsse es alle 230 Typen von Krystallen wirklich geben. Dies ist aber keineswegs ausgesprochen, sondern nur daß jede Krystallanordnung, die es giebt, in unser Schema sich einreiht. Ich persönlich glaube allerdings gern daran, daß die Natur jedes Schema, welches möglich ist, auch wirklich bildet.

Wir haben ferner 65 Typen erster Art u. 165 Typen 2. Art genannt. Gehört nun irgend ein Krystall zu einer Gruppe der 165 Typen 2. Art, so ist er alternierend aus direct und invers congruenten Elementarteilen aufgebaut, während ein Krystall der in einen der 65 Typen erster Art gehört, aus lauter direct congruenten Bausteinen besteht. Damit ist also gar nicht gesagt, dass etwa jeder Krystall aus abwechselnden Bestandteilen aufgebaut ist. Trotzdem ist Schoenflies vorgeworfen worden, er stelle eine dahin gehende allgemeine Hypothese auf! In besonderen Fällen ist man auch von naturwissenschaftlicher Seite längst zur Annahme abwechselnder Elementarbestandteile geführt worden.

Als klassisches Beispiel sei an dieser Stelle die Weinsäure genannt, an der Pasteur z. B. seine Untersuchungen angestellt hat. Man hat die Weinsäure in der rechtsdrehenden, der linksdrehenden und der neutralen Modification. Diese Bezeichnungen beziehen sich bekanntlich auf das Verhalten der Weinsäure zum polarisirten Lichte, wie wir nicht weiter auszuführen brauchen. Man denkt sich dabei den rechtsdrehenden Krystall aus lauter gleichartigen Bausteinen bestehend, den linksdrehenden ebenfalls, nur dass deren Bausteine zu denen der rechtsdrehenden invers congruent sind. Verschafft man sich jetzt Lösungen der zweierlei Modificationen, mischt dieselben und lässt aufs neue krystallisieren, so entsteht die neutrale Weinsäure, bei der die entsprechenden Bausteine dann alternirend gelagert sein werden, so dass man ein Schema 2. Art hat.

Soviel über die discontinuirlichen Gruppen, die sich aus Bewegungen erster und zweiter Art bilden lassen. Wir werden nun weiter gehen und überhaupt Gruppen aufstellen, die sich *entweder aus projectiven Transformationen oder aus homogenen linearen Transformationen* aufbauen. Auch hier werden wir wesentlich nur historisch referieren können.

Wir handeln zunächst von den *endlichen* Gruppen, d.h. denjenigen Gruppen der bezeichneten Art, die sich aus einer endlichen Zahl von Operationen zusammensetzen lassen. Dabei werden wir so vorgehen, dass wir zunächst nur eine Variable mit homogenen Transformationen, dann eine Variable mit projectiven oder zwei Variable mit homogenen Transformationen zusammen betrachten u. so fort. Bei *einer homogenen Variablen* haben wir nur die *eine Gruppe* $z' = az$ zu nennen, und soll diese endlich sein, so muss der Parameter a noch als Einheitswurzel gewählt sein, so dass wir schreiben $z' = \varepsilon^{\nu} \cdot z$

Bei einer „projectiven Variablen" vermittelt gerade wieder die Theorie der regulären Körper die Kenntniss der endlichen discontinuirlichen Gruppen.

Wir haben oben um den festgehaltenen Anfangspunkt des Raumes eine Kugel gelegt und gesehen, wie dieselbe z. B. bei den 60 Ikosaederdrehungen in bestimmter Weise mit sich zur Drehung kommt. Die Drehung der Kugel und mit ihr des Gesammtraumes bedeutet aber zugleich eine projective Transformation der auf der Kugel gedeuteten complexen Variablen z. Diese werden dann gegebenenfalls ebenso eine Gruppe bilden, wie die Drehungen selbst. Z. B. wird also den 60 Ikosaederdrehungen eine aus 60 linearen Transformationen von z bestehende Gruppe entsprechen.

In solcher Weise bekommen wir sogleich eine grössere Reihe von Beispielen endlicher Gruppen projectiver Transformationen einer Veränderlichen.

Hiermit sind dann in der That bereits alle endlichen projectiven Gruppen einer Veränderlichen gefunden, wie sich beweisen läfst. Diese Theorie ist zuerst von mir in den Erlanger Berichten des Sommers 1874 gegeben. Des Näheren mögen Sie auch in den Vorlesungen über das Ikosaëder pag 40 u. pag. 115 nachlesen. Der Verständlichkeit halber wollen wir hier die analytischen Formen jener Gruppen bei geeigneter Lage des Coordinatensystems zusammenstellen:

α) $z' = \varepsilon^\nu \cdot z$, Typus der cyclischen Gruppe.

b) $z' = \varepsilon^\nu z, = -\frac{\varepsilon^\nu}{z}$, Typus des Dieders.

c) $z' = \pm z, \quad \pm\frac{1}{z}, \quad \pm i\,\frac{z+1}{z-1}, \quad \pm i\,\frac{z-1}{z+1}, \pm\frac{z+i}{z-i}, \pm\frac{z-i}{z+i}$.

Diese 12 Ausdrücke bekommt man bei der Tetraedergruppe.

d.) $z' = i^\rho \cdot z, \frac{i^\rho}{z}, i^\rho \cdot \frac{z+1}{z-1}, i^\rho\frac{z-1}{z+1}, i^\rho\frac{z+i}{z-i}, i^\rho \cdot \frac{z-i}{z+i}$.
für $\rho = 0, 1, 2, 3$.

Dies sind die 24 Substitutionen der Oktaëdergruppe.

e). $z' = \varepsilon^\mu \cdot z, -\frac{\varepsilon^\mu}{z}, \varepsilon^\nu \cdot \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4).\varepsilon^\mu \cdot z-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3).\varepsilon^\mu \cdot z+(\varepsilon-\varepsilon^4)},$

$$-\varepsilon^\nu \cdot \frac{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\,\varepsilon^\mu \cdot z+(\varepsilon-\varepsilon^4)}{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\,\varepsilon^\mu z-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}.$$

Hier bedeutet $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ und $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$.
Insgesammt stellen diese Formeln die 60 Transformationen des Ikosaëder dar.
Die 4 Gruppen α, b, c, d finden sich nun bereits in der Litteratur, wenn auch nicht unter principiel,

len Gesichtspunkte. Dagegen ist die Existenz der Ikosaëdergruppe erst aus der Betrachtung der geometrischen Figur in der angegebenen Weise erschlossen worden.

Im Uebrigen bemerken wir: Mit dieser Aufzählung der endlichen discontinuirlichen Gruppen projectiver Transformationen einer Veränderlichen ist nun in keiner Weise die Aufzählung der discontinuirlichen Gruppen projectiver Transformationen einer Veränderlichen überhaupt erschöpft, sondern es giebt neben den endlichen Gruppen noch eine ∞ grosse Zahl unendlicher discontinuirlicher Gruppen dieser Art, wie in der Theorie der automorphen Functionen nachgewiesen wird und demnächst noch von uns besprochen ist.

Heute gehen wir dazu über, die aufgezählten Gruppen der regulären Körper in homogene Form für 2 homogene Variable $z_1 : z_2$ zu setzen. [Di. 25 VII 93.]

Aus $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ wird natürlich: $z_1' = \mu(\alpha z_1 + \beta z_2)$

$$z_2' = \mu(\gamma z_1 + \delta z_2),$$ wo

μ zunächst ein unbekannter Multiplicator ist. Um ihn festzulegen, fragen wir, welche Festsetzung wir über die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ machen wollen. Die einfachste Festsetzung ist, dass $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sein soll.

Dann spaltet sich jede Substitution $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ nur in 2 homogene Substitutionen (indem noch das Vorzeichen der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unbestimmt bleibt). Der Gruppencharakter bleibt bei dieser Uebertragung in homogene Form erhalten, indem 2 homogene Substitutionen der Determinande 1 zusammengesetzt wieder eine Substitution der Determinante 1 ergeben. Jede nicht homogene Gruppe mit N Substitutionen führt daher zu einer homogenen Gruppe mit $2N$ Substitutionen, indem wir die Forderung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ an die Spitze stellen. Die letzte Forderung ist anderseitz natürlich keine notwendige, wir könnten z. B. auch $\alpha\delta - \beta\gamma$ als eine Einheitswurzel ε wählen. Dann würde die Uebertragung der unhomogenen Gruppe immer noch eine <u>endliche</u> homogene Gruppe ergeben; denn durch Wiederholung der einzelnen homogenen Substitution der Determinante ε entsteht eine neue Substitution mit der Determinante ε^2, so daß bei weiterer Wiederholung man schließlich zu Substitutionen von der Determinante 1 zurückgelangt. Im einzelnen stellt sich die Uebertragung wie folgt am einfachsten dar. Man suche zunächst erzeugende Substitutionen der einzelnen Gruppe, z. B. bei der Tetraeder, Oktaëder und Icosaëder-gruppe hat man immer 2 erzeugende Substitutionen S u. T, aus deren Combination und Wiederholung alle anderen Substitutionen der Gruppe entstehen. Diese erzeugenden Substitutionen wird man dann jede für sich in homogener Form setzen, jede mit einer Determinante, welche gleich irgendwelcher Einheitswurzel ε resp. ε' ist.

Solcherweise bekommt man also eine unbegrenzte Menge homogener Gruppen, deren Substitutionen an Zahl ein Multiplum von N bilden. Eine wichtige Frage ist nun, ob man die homogenen Substitutionen durch geeignete Annahme der Einheitswurzeln ε u. ε' nicht so auswählen kann, daß N derselben für sich bereits eine Gruppe bilden. Diese Gruppe wird man dann mit der anfänglichen Gruppe der nicht-homogenen Substitutionen holoëdrisch isomorph nennen.

Diese übrigens sehr elementare Frage finden Sie in den Vorlesungen über das Icosaëder behandelt pag 44-47. Ich begnüge mich wieder nur das Resultat mitzuteilen. Der aufgestellten Forderung kann man sofort genügen bei jeder einzelnen cyclischen Gruppe und bei jeder Diëdergruppe D_n, deren n eine ungerade Zahl ist. Bei allen anderen Gruppen aber ist es überhaupt unmöglich. Diese Gedanken, die wie gesagt, ganz elementar sind, werden für die weiteren Anwendungen ganz besonders wichtig.

Die Theorie der Gleichungen 5. Grades, wie sie in meinen Vorlesungen über das Ikosaëder gegeben ist, gipfelt in dem sogenannten Kronecker'schen Satze, wonach gewisse Ansätze bei den Gleichungen 5. Grades unmöglich sind, und der Beweis dieses Kronecker'schen Satzes, wie ich ihn gebe, beruht gerade auf jener Eigenschaft der Gruppen bei Homogenemachen. Obwohl hiernach diese Betrachtung über den Isomorphismus der homogenen und der nicht homogenen Gruppen im Mittelpunkte der ganzen Theorie steht, hat sie bisher doch nicht die gewünschte Beachtung gefunden.

Wir gehen nun weiter zu den <u>endlichen discontinuirlichen Gruppen linearer Transformationen für eine grössere Zahl von Variabelen</u>, und hier will ich wieder zunächst einen Bericht über meine eigenen Arbeiten u. die sich anschliessenden Arbeiten Anderer geben. Diese Untersuchungen haben gewissermassen einen inductiven Character, ich gebe Beispiele endlicher Gruppen, die besonders bemerkenswert scheinen, und diese Beispiele werden dann näher untersucht. Doch der Vollständigkeitsbeweis, in wie weit hiermit alle überhaupt möglichen Gruppen erschöpft sind, steht noch aus. Wir sprechen hier übrigens der Kürze halber nur von den projectiven Gruppen und nicht von den entsprechenden homogenen linearen Gruppen; auch beschränken wir uns auf die hauptsächlichsten Typen endlicher Gruppen.

1.) Die erste Bemerkung, die hierzu machen wäre, ist die folgende: Wenn n Variable $x_1, x_2 \dots x_n$ vorliegen, und man vertauscht dieselben irgend wie untereinander, indem man setzt $x_i' = x_j$, dann kann dieses immer als eine specielle Collineation im Raume der Coordinaten x_i gedeutet werden. Wie werden wir aber zweckmäßig die Grössen x_i als Coordinaten interpretieren? Wir wollen die Verhältnisse der Variabeln x_i als Coordinaten deuten und überdies die Bedingung hinzunehmen, daß $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ sei; diese letzte Gleichung wird ja bei allen Vertauschungen der x_i untereinander unverändert bleiben. Wir werden also in einem Raume von $n-2$ Dimensionen operieren. Jede Gruppe von Vertauschungen von n Buchstaben liefert uns dann solcherweise eine endliche Gruppe von Collineationen in diesem R_{n-2}. Nehmen wir z.B. $n=5$ an, die Gesammtheit der Vertauschungen von 5 Buchstaben liefert uns eine Gruppe von 120 Collineationen unseres gewöhnlichen discontinuirlichen Raumes. Diese Gedanken finden sich zuerst ausgesprochen in Ann. 4 (1871.)

2.) Ebenda ist noch eine weitere Gruppe von Raumcollineationen hervorgehoben, deren Aufstellung sich liniengeometrischer Ueberlegungen bedient. Sie erinnern sich, daß wir im letzten Semester der geraden Linie 6 homogene Coordinaten ertheilten, welche einer Gleichung 2. Grades genügen. Insbesondere konnten wir die Liniencoordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : \ldots x_6$ so einrichten, daß $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 0$ die Bedingungsgleichung war. Diese Gleichung hat nun eine solche symmetrische Form, daß man sofort sieht, es giebt einfache lineare Transformationen der x_i, bei denen sie unverändert erhalten bleibt. Dies sind einmal die Vertauschungen der x_i untereinander, was 720 Arten der Transformationen giebt, und sodann lassen sich noch die Vorzeichen der x_i umändern, dies liefert wieder für sich $2^5 = 32$ Transformationen.

Indem nun beide Dinge zugleich vorgenommen werden können, haben wir eine Gruppe von ins-gesammt 720. 32 Raumtransformationen vor uns, die sich in den Liniencoordinaten x_i linear aus-drücken. Nun ist die Sache die, dass von ihnen die Hälfte Collineationen, die Hälfte dualistische Umformungen darstellen.

Haben wir daher blos Interesse für Gruppen von Collineationen, so ist die Zahl der in dieser Gruppe hier auftretenden Transformationen 720. 16. In dieser Gruppe kann man natürlich wieder verschiedene Untergruppen unterscheiden. Doch um nicht zu viele Détails hier anzuführen, sei einfach auf die bezügliche Litteratur hingewiesen. Zuerst ist zu nennen eine Untersuchung von Reichhardt, 1886 (Ann. 28), sodann Maschke in den Ann. Bd 30 (1887), endlich Hess in der Acta Leopoldina Bd 55 (1889).

3) Nun hat aber das liniengeometrische Prin-cip noch eine neue Gruppe gegeben, die aus $\frac{7!}{2} = 2520$ Raumcollineationen besteht. Sie finden dies ausgeführt in den Ann. 28 (1886). Im einzelnen er-giebt die Gruppe sich folgendermassen: Man kann zunächst doch an Stelle der sechs Liniencoordi-naten überzählige Coordinaten einführen, zwischen

denen man dann noch lineare Gleichungen be-stehen läßt. Es seien die homogenen Variabelen $x_1 : x_2 : \ldots x_3 \ldots : x_7$ gleichzeitig der Bedingung $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_7^2 = 0$ und der Bedingung $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 0$ unterworfen. Es zeigt sich, das man in der That Systeme von 7 Liniencoordinaten x_i finden kann, die diesen beiden Gleichungen genügen.

Die verschiedene mögliche Vertauschung der x_i führt dann zu 7! Raumtransformationen. von diesen ist wieder die Hälfte aus Collineationen, die Hälfte aus dualistischen Transformationen gebildet. Die ersteren bilden für sich die genannte Gruppe. Dieselbe ist dann später in Ann. 36 (1889) von Maschke nach geometrischer Seite untersucht worden. Dürfen wir diese vorstehenden beiden Gruppen als liniengeometrische Gruppen bezeichnen, blos weil ihre Kenntniß aus der Liniengeometrie entnommen ist, so werden wir in demselben Sinne der Bezeichnung:

4) eine functionentheoretische Gruppe haben, deren Existenz also aus der Functionentheorie geschlossen wird. Diese besteht aus 168 Collineationen der Ebene.

Sie ist zuerst in Ann. 14 (1878) abgeleitet worden und dann (um keine andere Literatur zu nennen) in den Vorlesungen über Modulfunctionen im Schlußcapitel je des ersten u. des zweiten Bandes ausführlich unter- sucht worden. Ihre Kenntniss entstammt der Theorie der elliptischen Functionen und zwar der Betrachtung der Transformationen 7. Ordnung derselben. Diese Gruppe bildet sozusagen das weitestgehende Ergebniss meiner direct functionentheoretischen Untersuchungen.

5.) Endlich analytische Gruppen, d. h. Gruppen, die durch analytischen Ansatz gewonnen werden.

Was für die Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen functionentheoretisch durch Betrachtung der Riemann'schen Flächen hat erschlossen werden können, das wird man verallgemeinern können, wenn man die Theorie der ~ - Functionen heranzieht. Dann bekommt man eine sehr ausgezeichnete Kategorie endlicher Substitutionsgruppen, die in den Vorlesungen über Modulfunctionen Bd II pag 312 ff besprochen wird. Diese Kategorie umfasst alle die particulären Gruppen des Tetraëder, Oktaëder, Ikosaëder, wie unsere soeben genannte G_{168} als Specialfälle. Nun ist noch ein weiterer Schritt, dass man von den elliptischen Thetafunctionen zu höheren Thetafunctionen, zu hyperelliptischen Thetafunctionen etc. übergeht. Auch hier kann man immer wieder endliche Gruppen linearer

Substitutionen aufstellen. Der niedrigste Fall, den wir dann bekommen, (entsprechend den Transformation 3. Ordnung der hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht 2) ist eine Gruppe von 25920 Collineationen des R_3. Dieselbe ist eingehend untersucht worden 1887 von Witting in seiner Göttinger Dissertation, ferner 1888 in Ann. 33 von Maschke und endlich 1890 in Ann. 38 von Burckhardt.

[Do. 27 VII 93.] Es sei nun mit wenigen Worten auf das Interesse hingewiesen, welches jede endliche discontinuirliche Gruppe beanspruchen kann. Zunächst liefert uns dieselbe bemerkenswerte Configurationen in dem Raume, in dem man operiert, wie im einfachen Falle das Tetraëder, Oktaëder usw.

Wenn wir z. B. im R_3 die Gruppe der 25920 Collineationen haben, so werden die Punkte des Raumes sich zu ebensovielen Bereichen zusammengruppieren, wobei dann die merkwürdigsten Configurationen hervortreten.

Zweitens liefert eine endliche discontinuirliche Gruppe allemal ein algebraisches Normalproblem. So führt die Ikosaëdergruppe zu der Ikosaëdergleichung, auf die wir andere Gleichungen

wie z. B. die Gleichung 5. Grades zurückführen.
Dies ist in meinen Vorlesungen über das Ikosaë-der, sowie besonders auch in der von mir 1891–92 gehaltenen Vorlesung über Algebra des Näheren ausgeführt.

Endlich kommt noch die Anwendung unserer Gruppen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen in Betracht. Hier gilt dann, daß jede endliche discontinuirliche Gruppe linearer Transformationen eine ganze Klasse algebraisch integrirbarer Differentialgleichungen giebt.

Im Einzelnen können wir natürlich auf diese 3 Punkte hier nicht näher eingehen. Was ferner noch die systematische Aufzählung der endlichen Gruppen betrifft, so hat man bisher nur die Arbeiten von C. Jordan in Crelle Bd. 84, 1878 u. Atti di Napoli 1880. Dort ist der Fall dreier homogener Veränderlichen vollständig erledigt, der Fall von 4 Veränderlichen jedoch erst begonnen.
Seitdem ist aber merkwürdigerweise in dieser Richtung nicht weiter gearbeitet worden. Es giebt noch eine hierhergehörige Arbeit von Valentiner 1889 in den Abhandlungen der dänischen Akademie 6 Reihe V Band. Dort wird

eine zusammenfassende Darstellung gegeben, jedoch nur in dem Fall $n = 2$ u. $n = 3$, ohne dass wie es scheint etwas wesentlich Neues entwickelt wird.

Wir wenden uns nun zu den unendlichen discontinuirlichen Gruppen. Hier will ich dann diejenigen Gruppen voranstellen, die von den Zahlentheoretikern seit lange behandelt sind, wenn auch meist nicht unter geometrischem Gesichtspunkte. Wir wollen hier nicht zwischen homogenen und projectiven Gruppen weiter scheiden, wie es natürlich die genaue Darstellung erfordern würde. Vom projectiven Standpunkte aus würde man eben danach fragen, was für Gleichungen bei den Transformationen der betreffenden Gruppe unverändert bleiben, vom homogenen Standpunkte aus dagegen, was für invariante Formen es giebt.

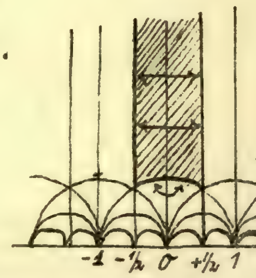
Zahlentheoretische Gruppen.

In erster Reihe steht hier die Ihnen allen bekannte Gruppe, die in den elliptischen Modulfunctionen immer benutzt wird. Dieselbe umfasst die Substitutionen $\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$, woselbst $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige ganze Zahlen von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ bedeuten. Ich will mich darauf beschränken, die hauptsächlichsten Punkte betreffs dieser Gruppe hier hervorzuheben:

α) Die Gruppe enthält keine Substitutionen, welche der Identität beliebig nahe liegen, außer der Identität selbst. Denn um solche unendlich kleine Substitutionen zu haben müßte offenbar: $\frac{\alpha}{\delta} = 1 + \eta$, $\frac{\beta}{\delta} = \xi$, $\frac{\gamma}{\delta} = \vartheta$ sein, unter η, ξ, ϑ ∞ kleine Größen verstanden. Die Substitution würde also lauten: $z' = \frac{(1+\eta)z + \xi}{\vartheta z + 1}$. Setzen wir jene Werte für die Coefficienten aber in die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ein, so bekommen wir: $\delta^2(1 + \eta - \xi\vartheta) = 1$.

Da nun δ eine ganze Zahl sein soll, so muß notwendig $\delta = \pm 1$ und $\eta - \xi\vartheta = 0$ sein. Aus $\frac{\alpha}{\delta} = 1 + \eta$ folgt dann weiter $\alpha = 1$, ebenso aus $\frac{\beta}{\delta} = \xi$ und $\frac{\gamma}{\delta} = 0$ $\beta = \gamma = 0$, da doch die Größen α, β, γ ihrerseits auch ganze Zahlen sein sollen. Diese Werte aber liefern als zugehörige Substitution die Identität. Unsere Gruppe ist daher eigentlich discontinuirlich, und zwar deßhalb, weil die Forderung einer ∞ kleinen Substitution zusammen mit der Forderung der Ganzzahligkeit der Coefficienten notwendig auf die identische Substitution selbst hinführt.

Ganz anders ist es dagegen, wenn wir allein die reellen Punkte in Betracht ziehen; auf der reellen z-Axe ist unsere Gruppe natürlich uneigentlich discontinuirlich. Wir erkennen dies leicht, wenn wir bemerken, dass vermöge unserer Gruppe alle reellen rationalen Werte aequivalent sind. Hinwieder ist unsere Gruppe im complexen Gebiet eigentlich discontinuirlich. Man bekommt als Fundamentalbereich ein Dreieck, (oder besser Viereck) welches von den beiden Geraden $x = \pm \frac{1}{2}$ und von dem Einheitskreise eingeschlossen ist und dessen Ränder, wie in der Figur angegeben ist paarweise einander zugeordnet sind.



b.) In der Zahlentheorie hat man nun namentlich danach gefragt, was diese Gruppe für <u>cyclische Untergruppen</u> hat. Wenn wir eine einzelne Substitution herausgreifen, so hat diese doch 2 Fixpunkte, (die im besonderen in einen zusammenfallen können) und diese müssen natürlich bei allen Wiederholungen dieser Transformation festbleiben.

Indem wir diese Fixpunkte als Wurzeln einer ganzzahligen quadratischen Gleichung ansehen, so sehen wir, kommt die Aufsuchung der cyclischen Untergruppe darauf hinaus, <u>die Substitutionen unserer Gruppe zu suchen, welche eine ganzzahlige quadratische Gleichung oder homogen geschrieben</u>

eine ganzzahlige binäre quadratische Form ohne Vertauschung der Wurzeln in sich selbst überführen.

Diese Aufgabe ist ja nun vielfach von den Zahlentheoretikern behandelt worden. Eine quadratische binäre Form gleich 0 gesetzt kann 2 conjugirt complexe, oder 2 reelle oder eine reelle doppeltzählende Wurzel darstellen. Diese 3 Fälle sind hier aus einander zu halten; sie unterscheiden sich, was die Discriminante der Form betrifft, darin, daß diese im ersten Falle negativ, im zweiten Falle positiv, im dritten Falle gleich 0 ist. Die quadratischen Formen von negativer Discriminante geben ganz einfache endliche Gruppen, die eine G_1, G_2 oder G_3 darstellen. Dagegen geben anderweite Formen von verschwindender oder positiver Determinante unendliche cyclische Untergruppen unserer Hauptgruppe, was nur durch längere zahlentheoretische Betrachtungen nachzuweisen ist, in welche die sogenannte Pell'sche Gleichung hineinkommt.

c) Demgegenüber wird man nun weiter fragen, ob es noch andere Untergruppen in der Hauptgruppe giebt außer den cyclischen Untergruppen.

Diese Frage wird in den Vorlesungen über Modulfunctionen ausführlich discutirt und greift übergens über die herkömmliche Zahlentheorie hinaus.

Diese Bemerkung werden wir immer machen, dass nämlich die Zahlentheorie explicit nur erst einen kleinen Teil derjenigen Probleme behandelt, die sich in der Theorie der discontinuirlichen Gruppen ohne weiteres einstellen und auch der geometrischen Auffassung durchaus zugänglich sind.

d.) Endlich muss ich noch einer Auffassung der in der complexen z-Ebene gelegenen Gebietseintheilung gedenken, vermöge deren unsere Betrachtungen sich verallgemeinerungsfähig erweisen. Die Wurzeln einer gleich 0 gesetzten quadratischen Form mit negativer Discriminante liegen doch in der z. Ebene symmetrisch zur Axe des Reellen. Nun wird vermöge unserer Hauptgruppe eine Einteilung sowohl in der positiven wie in der negativen Halbebene gegeben; die Einteilung der z Ebene können wir daher so auffassen, als handele es sich um eine Einteilung der von den reellen quadratischen Formen von negativer Discriminante gebildeten Mannigfaltigkeit. <u>Während also unsere Gruppe im Raume der reellen Lineargleichungen $az+b=0$ noch uneigentlich discontinuirlich ist, wird sie eigentlich discontinuirlich im Rau-</u>

me der reellen quadratischen Gleichungen von negativer Discriminante. Diesen Satz wollen wir noch mit einigen Formeln stützen. Wir denken uns die quadratische Gleichung gegeben $az^2+bz+c=0$ und wenden auf die Variable z jetzt unsere Substitution $z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ an. Dann möge die neue Gleichung entstehen: $a'z'^2+b'z'+c'=0$ oder in den Coefficienten der Substitution geschrieben:

$$a'(\alpha z+\beta)^2+b'(\alpha z+\beta)(\gamma z+\delta)+c'(\gamma z+\delta)^2=0$$

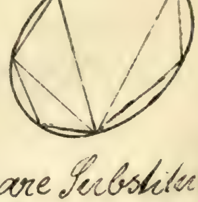
Führt man die linke Seite dieser Gleichung aus und vergleicht die Coefficienten der Glieder z^2, z^1, z^0 mit den entsprechenden Coefficienten der Ausgangsgleichung, dann gilt bis auf einen Proportionalitätsfactor:

$$\left\{\begin{array}{l} a=\alpha^2 a'+\alpha\gamma b'+\gamma^2 c' \\ b=2\alpha\beta a'+(\alpha\delta+\beta\gamma)b'+2\gamma\delta c' \\ c=\beta^2 a'+\beta\delta b'+\delta^2 c'. \end{array}\right.$$

Wir sehen hier explicite, wie die Coefficienten der neuen Gleichung mit denen der alten Gleichung zusammenhängen, nämlich durch eine ternäre lineare Substitutionsgruppe.

Nun machen wir noch den letzten Schritt, indem wir a, b, c als Dreieckscoordinaten in der

Ebene denken. Dann stellt die Discriminantengleichung $b^2 - 4ac = 0$ einen Kegelschnitt dar, den wir den Discriminantenkegelschnitt nennen, die quadratischen Gleichungen von negativer Discriminante aber werden durch die Punkte im Innern des Discriminantenkegelschnittes vorgestellt. In der That zeigt sich dann auch, dass unserer ternären Gruppe gegenüber sich das Innere unseres Kegelschnittes in endlich ausgedehnte Fundamentalbereiche zerlegt, woran wir unsere Aussage bestätigt erkennen, dass die Gruppe im Raume der reellen quadratischen Gleichungen negativer Discriminante eigentlich discontinuirlich ist. (s. Fig.) Die verschiedenen Formulirungen sind natürlich allen denen, welche sich mit der Theorie der Modulfunctionen beschäftigt haben, sehr geläufig.



Fr. 28 VII. 93. Wir wollen heute für ganzzahlige lineare Substitutionen dreier homogener oder zweier projectiver Variabeln dieselben Betrachtungen durchführen wie gestern für die Substitutionen zweier homogener oder einer projectiven Variabelen. Eine derartige

Substitution wird gegeben durch die Formeln:

$$\varrho \cdot x' = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$
$$\varrho \cdot y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$
$$\varrho \cdot z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

Wir haben sogleich den Proportionalitätsfactor ϱ hinzugefügt, da für uns nur die Verhältnisse der Coordinaten wesentlich sein werden. Die Coefficienten α, β γ etc sollen wieder ganze Zahlen sein, überdies setzen wir wieder voraus, dass die Determinante der Coefficienten $|\alpha \beta \gamma|$ gleich $+1$ sei. Man kann dann gerade so wie gestern im analogen Falle, sehen, dass die Gruppe jener ganzzahligen Substitutionen abstract zu reden eigentlich discontinuirlich ist, d.h. keine ∞ kleine Substitutionen enthält, die von der Identität verschieden wäre. Arbeiten wir in der Ebene der reellen Werte x, y, z, dann ist die Gruppe daselbst freilich uneigentlich discontinuirlich, indem die einander aequivalenten Punkte überall dicht liegen, also sich keine endlichen Fundamentalbereiche abgrenzen lassen.

Nun ist die Frage, in welcher Weise wir zu einem erweiterten Gebiet übergehen können, so dass für dieses unsere Gruppe wieder eigentlich discontinuirlich wird. Wie gestern die Gruppe $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ im Raume der reellen Werte z uneigentlich discontinuirlich, im Raume der complexen Werte z, d. h. der z Ebene, dagegen eigentlich discontinuirlich war, so könnte man hier fragen, ob unsere ternäre homogene Gruppe etwa eigentlich discontinuirlich wird, wenn wir zu den complexen Punkten der Ebene $x : y : z$ gehen (die eine 4 fach ∞ Mannigfaltigkeit bilden)

Doch hat man hierüber noch nichts veröffentlicht, wohl deswegen weil eine geeignete, einfache geometrische Versinnlichung jener M_4 fehlt. Das Mittel, welches man benutzt um, die Gruppe eigentlich discontinuirlich zu machen, ist ein anderes. Man betrachtet die quadratischen Formen oder besser die quadratischen Gleichungen mit reellen Coefficienten der Form: $ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$

Diese Gleichung stellt uns geometrisch einen Kegelschnitt dar. Indem es nur auf die Verhältnisse der Coefficienten $a : b : c : d : e : f$ ankommt, erfüllt die Gesammtheit aller dieser Kegelschnitte eine Mannigfaltigkeit von 5 Dimensionen. In diesem 5 fach ausgedehnten Raume der reellen Kegelschnitte achten wir nun besonders auf die <u>definiten</u> quadratischen Formen oder auf die <u>nullteiligen</u> Kegelschnitte. Diese letzteren bilden innerhalb jener M_5 gleichfalls eine 5 fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, und in diesem Gebiete ist unsere Gruppe dann eigentlich discontinuirlich. Betreffs des Beweises dieser Behauptung vergleiche man die Entwickelungen in der Theorie der definiten ternären quadratischen Formen, wie sie beispielsweise Selling im Jahre 1874 im Crelle Bd. 77 giebt. (Was einen solchen Vergleich erschwert, ist der Umstand, daß jeder Autor seine besondere Terminologie hat. So kommt bei Selling die Bezeichnung Gruppe oder gar discontinuirliche Gruppe überhaupt nicht vor, wenn auch der gedankliche Inhalt dieser Bezeichnung bei ihm durchaus vorhanden ist.) Die Folge dieses Satzes, daß die Gruppe im Gebiete der reellen nullteiligen Kegelschnitte eigentlich discontinuirlich wird, wird dem analog sein, wie man im Falle einer Veränderlichen bei der Untersung der ganzzahligen Gruppe $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ durchweg mit den Punkten der complexen z-Ebene operirt u. dort die Gebietseinteilungen studirt. Es ergiebt sich so als Princip, daß, wenn man mit der ternären ganzzahligen Gruppe beschäftigt ist, man als Raumelement nicht den Punkt der Ebene, sondern geradezu den reellen nullteiligen Kegelschnitt wählen soll, um eben in einem Raume zu sein, in dem die Gruppe eigentlich discontinuirlich ist.

Die erste Frage beim näheren Studium unserer Gruppe wird wieder die sein, wie wir alle discontinuirlichen Untergruppen in derselben bekommen?

Nun hat bisher noch niemand die Antwort hierauf gegeben; wir werden daher zu einer anderen Forderung heruntergehen. Wir betrachten einmal alle ternären Substitutionen, indem wir den Coefficienten α, β, γ etc. beliebige Werte zugestehen; diese Substitutionen bilden dann eine 8 fach ∞ continuirliche Gruppe. Aus ihr scheiden wir alle discontinuirlichen Untergruppen aus, was wir ja im Princip können, und verlangen nun, daß wir wenigstens aus diesen continuirlichen Untergruppen die Gruppen der ganzzahligen Substitutionen herausgreifen.

Auch dieses Problem ist in seiner allgemeinen Fassung bisher von den Zahlentheoretikern noch nicht bearbeitet worden, vielmehr erweisen sich, wenn man die zahlentheoretische Literatur durchgeht, erst einige Beispiele dieser Fragestellung behandelt.

Das erste Beispiel liefern die ganzzahligen Kegelschnitte. Der einzelne Kegelschnitt geht bekanntlich durch 3 fach ∞ viele Collineationen in sich über; diese bilden für sich eine continuirliche Gruppe. Was sind in ihr für ganzzahlige Substitutionen enthalten und was für eine Gruppe bilden diese dann, vorausgesetzt dass der Kegelschnitt selbst ganzzahlig ist.? Da haben wir die zwei Fälle zu unterscheiden:

a.) Für einen nullteiligen Kegelschnitt, dessen linke Seite also eine ganzzahlige definite quadratische Form darstellt, gilt, dass nur ganz kleine endliche Gruppen ganzzahliger Substitutionen, im allgemeinen nur eine G_1 (d.h. die Identität) auftreten, gerade wie wir gestern im Falle der binären quadratischen Formen negativer Determinante nur eine G_1, G_2 oder G_3 hatten.

b.) Ein einteiligen Kegelschnitt dagegen, d.h. eine indefinite ganzzahlige quadratische Form, geht immer durch ∞ viele ganzzahlige Collineationen in sich über, die dann natürlich eine unendliche discontinuirliche Gruppe bilden. Diese Gruppe gestattet dann eine ganze Theorie aufzustellen, die von grossem Interesse ist Wir hatten gestern bereits ein hierher gehöriges Beispiel gehabt. Dieses gaben die ganzzahligen Collineationen, welche den Discriminantenkegelschnitt $b^2 - 4ac = 0$,

$a_i : b : c$ als Coordinaten in der Ebene gedacht, in sich selbst überführen. Jeder einzelne Kegelschnitt hat nun gleicherweise eine individuelle Theorie. Diese Gedanken sind wieder von Selling in der citirten Arbeit besonders ausgeführt. In moderne Form werden dieselben gesetzt von Poincaré in einem Aufsatze: l'arithmétique et la théorie des fonctions fuchsiennes, Liouville's Journal (4), III. 1887. Der hiermit besprochenen Lehre von den ganzzahligen Kegelschnitten stellt sich als zweites Beispiel die Lehre von den ganzzahligen Dreiseiten gegenüber, die gleichfalls von den Zahlentheoretikern vielfach behandelt ist. Was werden wir unter einem ganzzahligen Dreiseit verstehen? Dies soll einfach das Gebilde dreier gerader Linien, d.h. eine C_3 sein, welche in 3 Gerade zerfällt. Wir denken uns also jedenfalls eine cubische Gleichung $f_3(x, y, z) = 0$ gegeben.

Wir haben nun noch die Bedingung aufzustellen, dass diese C_3 in drei gerade Linien zerfällt. Bekanntlich werden die Wendepunkte einer beliebigen C_3 durch die Curve der Hesse'schen Determinante

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ ausge-}$$

schnitten, (woselbst wir durch die 2 Indices die 2ten Differentialquotienten von f bezeichnet haben)

Diese Hesse'sche Curve ist gleichfalls eine C_3. Da nun für unser Dreiseit jeder Punkt ein Wendepunkt ist, so müssen alle Punkte desselben auch der Curve $H = 0$ angehören, d.h. es muss: $H = C \cdot f$ sein, in Worten: Eine cubische Gleichung $f = 0$ stellt ein Dreiseit dar, wenn H mit f proportional ist. Den Proportionalitätsfactor C bezeichnen wir nun (vorbehaltlich eines etwa abzutrennenden numerischen Factors) als die Discriminante von f. Nun kommt weiter noch hinzu, dass die Form f ganzzahlige Coefficienten haben soll; dann ist auch die Discriminante C eine ganze Zahl. Natürlich ist es eine Frage für sich, wie man die allgemeinste solche ganzzahlige Form f überhaupt bekommt, insofern doch ihre Coefficienten so viele Bedingungen zu erfüllen haben. –

Sehen wir nun einmal zunächst wieder von der Ganzzahligkeit der Substitutionscoefficienten ab, und fragen uns; durch wie viel Collineationen überhaupt ein Dreiseit, dessen Seiten durch $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gegeben seien, in sich übergeht. Dann finden wir sofort, dass diese Collineationen abgesehen von den Vertauschungen der Seiten unter sich, die man vornehmen könnte, durch die folgenden Gleichungen gegeben werden:

$$\rho\, x_1' = a\, x_1,$$
$$\rho\, x_2' = b\, x_2,$$
$$\rho\, x_3 = c\, x_3,$$ d. h. jedes Dreiseit geht durch 2fach ∞ viele Collineationen, die paarweise unter sich vertauschbar sind, in sich über. Mit dieser 2fach ∞ Gruppe haben wir uns schon im Winter beschäftigt, als wir die sogenannten W-Curven betrachteten (Winterautographie p. 329), die durch eine continuirliche Gruppe von einfach ∞ vielen Collineationen der betrachteten Art in sich übergehen. Unser ganzzahliges Dreiseit wird also auch durch zweifach unendlich viele Collineationen in sich übergehen. Wir fragen jetzt weiter, welche von diesen Collineationen denn ganzzahlig mit der Determinante 1 sind (natürlich in den Substitutionen der ursprünglichen Coordinaten $x\, y\, z$.)

Mit dieser Frage haben sich die Zahlentheoretiker bereits vielfach beschäftigt; nur sprechen sie von „ganzzahligen zerlegbaren ternären cubischen Formen" anstatt wie wir hier in geometrischer Weise von einem ganzzahligen Dreiseit. Den Anfang macht bereits 1770 Lagrange. Ganz besonders viel hat aber Dirichlet in den 40er Jahren in diesem Gebiet gearbeitet. (Er hat seine Untersuchungen dann sogleich auf n Veränderliche ausgedehnt, indem er ganzzahlige zerlegbare Formen n^{ten} Grades mit n Variabeln zu Grunde legt.) Seine Hauptarbeit über diesen Gegenstand findet sich in den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1846. Im übrigen bildet diese Theorie der zerlegbaren Formen die Grundlage für einen grossen Teil der höheren Zahlentheorie. Man vergleiche z. B. den letzten Abschnitt des von Dedekind herausgegebenen Buches über Zahlentheorie (die sogenannte allgemeine Zahlentheorie). Endlich sei noch eine Arbeit von Charve, einem französischen Geometer genannt, der 1880 in dem Journal der École normale Ser. II Bd. IX speciell die zerlegbaren cubischen Formen genauer untersucht hat.

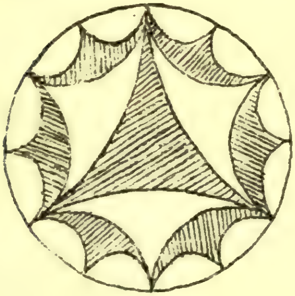
Wir wollen jetzt kurz das Resultat angeben, zu dem man gekommen ist, jedoch wieder unter Beschränkung auf unsere cubischen Formen der Ebene. Es sind dann die 2 Fälle des ganzzahligen Dreiseits zu unterscheiden, dass entweder 2 Seiten imaginär u. die dritte reell, oder aber alle drei Seiten reell sind. Dirichlet hat in Bezug hierauf gefunden, dass es in jedem Falle eine unendliche

Gruppe ganzzahliger Collineationen giebt, und zwar erwächst dieselbe, im Falle zwei Dreiseitseiten imaginär sind, aus einer einzelnen ganzzahligen Collineation durch unbestimmte Wiederholung; im anderem Falle, wenn alle drei Seiten reell sind, aus 2 unabhängigen, aber natürlich vertauschbaren, ganzzahligen Collineationen. Damit soll denn mein Bericht über zahlentheoretische Gruppen abgeschlossen sein, indem wir nicht weiter auf n Veränderliche u. ihre Gruppen eingehen. Jedenfalls ist in der Zahlentheorie über einige Probleme ja viel gearbeitet; dagegen machen diese nur erst einen Teil von allen denen aus, die sich bei unserem Ausgangspunkte von selbst aufdrängen.

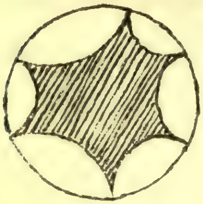
Allgemeine discontinuirliche Gruppen.

[Mo. 31 VII. 93.] Heute wollen wir zum Schlusse noch von den weit allgemeineren discontinuirlichen Gruppen sprechen, wie sie in der modernen Functionentheorie, insbesondere von Poincaré behandelt sind.

Dieser Gegenstand ist in den letzten Semester ausführlich von Herrn Dr. Fricke in seinen Vorlesungen hier in Göttingen entwickelt worden, wie denn voraussichtlich in nicht langer Zeit der erste Band über der Theorie der automorpher Functionen von demselben erscheinen wird, in welchem in erster Linie die in Rede stehenden Gruppen entwickelt werden sollen. Die Untersuchung der allgemeinsten linearen discontinuirlichen Gruppen einer Veränderlichen, wie sie in der Functionentheorie auftreten, knüpft direct an den geometrisch vorzugebenden Fundamentalbereich an. Wir müssen uns darauf beschränken, heute nur einige Beispiele zur Behandlung auszuwählen. Wir nehmen an, dass ein endlicher Fundamentalbereich in der z-Ebene gegeben sei; derselbe wird dann gewisse Kanten darbieten, die irgend wie durch lineare Substitutionen von z zu je zweien einander punktweise zugeordnet sind. Der einfachste Fall ist der, dass eine reine Spiegelungsgruppe vorliegt. Unter Spiegelung ist hier allgemeiner eine Spiegelung an einem Kreise, d. h. die Transformation durch reciproke Radien an diesem Kreise zu verstehen. Wir haben uns dann zu denken, dass ein Kreisbogenpolygon gegeben ist; dieses wird an seinen begrenzenden Seiten gespiegelt, wodurch neue Kreisbogenpolygone sich an das erste anschliessen, und mit diesen wird dann in gleicher Weise verfahren. Durch den (im allgemeinen) ∞ oft fortgesetzten Prozess wird dann die Gruppe definirt. Wollen wir (in der z Ebene) eine eigentlich discontinuirliche Gruppe haben, so müssen wir das Spiegelungspolygon so einrichten, dass die gespiegelten Polygone in ihrer Gesammtheit gerade eine einfache Ueberdeckung der Ebene oder eines Teiles derselben ergeben. Zu dem Zwecke müssen natürlich alle Winkel des Polygons aliquote Teile von π sein, also gleich $\frac{\pi}{l_1}$, $\frac{\pi}{l_2}$ u. s. w. fort, woselbst l_1, l_2 ... ganze Zahlen bezeichnen. Beschränken wir uns auf Dreiecke, so genügt diese letzte Bedingung bereits, um auf eine einfache Ueberdeckung der Ebene bei fortgesetzter Spiegelung schliessen zu können. Es ergeben sich hier die bekannten Figuren, wie sie z. B. in den Modulfunctionen Bd. I pag. 106 ff angegeben werden. Es sind insbesondere drei Fälle zu unterscheiden je nachdem $\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} \gtreqless 1$ ist. Ist $\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} > 1$, dann ergeben sich dieselben Figuren in der Ebene, wie wir sie neulich in der Theorie der regulären Körper auf der Kugel kennen gelernt haben. Ist aber jener Ausdruck gleich 1, dann bekommt man geradlinige Dreiecke. Ist endlich jener Ausdruck < 1, dann giebt es Dreiecke, die einen reellen Orthogonalkreis besitzen. In diesem letzten Falle tritt dann die merkwürdige Erscheinung ein, daß dieser Orthogonalkreis die „natürliche Grenze" bildet für die durch die fortgesetzte Spiegelung entstehender Dreiecke. Das einfachste Beispiel eines solchen Dreiecks mit Orthogonalkreis ist dasjenige, für welches $l_1 = l_2 = l_3 = \infty$ ist, d.h. dessen Winkel sämmtlich gleich 0 sind. Das Ausgangsdreieck an seinen Seiten fortgesetzt gespiegelt giebt dann die nebenstehende Figur, die aus ∞ vielen Kreisbogendreiecken besteht, die alle im Inneren des Orthogonalkreises liegen, ohne miteinander zu collidieren. Diese Figur wird speciell in den Modulfunctionen Bd. I pag. 270 ff. sehr ausführlich discutirt.



An dieses Beispiel wollen wir nun mit einer Verallgemeinerung anknüpfen. Statt ein Dreieck mit lauter verschwindenden Winkeln zu betrachten, können wir auch ein beliebiges Polygon mit verschwindenden Winkeln als Ausgangspunkt wählen, das überdies gleichfalls einen Orthogonalkreis besitzen möge, z. B. ein Sechsseit, wie es die Figur darstellt, indem die Seiten sämmtlich orthogonal zu einem gemeinsamen Kreise stehen. Durch fortgesetzte Spiegelung dieses Sechsseits legen

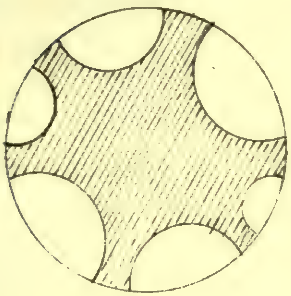


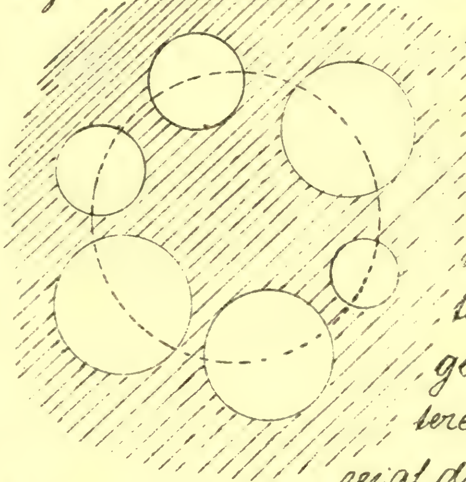
sich dann stets weitere Sechsseite an die vorhergehenden an, indem allemal die neuen Ecken wieder auf dem Orthogonalkreis liegen. Nach wie vor werden wir daher wieder eine eigentlich discontinuirliche Gruppe durch diesen Prozess definirt erhalten, und in dem Orthogonalkreis die natürliche Grenze unserer Figur vor uns sehen. Wir werden nun nach 2 Richtungen hin eine weitere Verallgemeinerung eintreten lassen.

Zunächst wollen wir einen Fundamentalbereich uns construieren, dessen Kreisbogen zwar auch sämmtlich zu einem gegebenen Kreis orthogonal stehen, dagegen sollen dieselben sich nicht mehr berühren, sondern ganz ausserhalb von einander liegen. (v. Fig.)

Dann können wir ferner noch Stücke des Orthogonalkreises selbst zur Begrenzung unseres

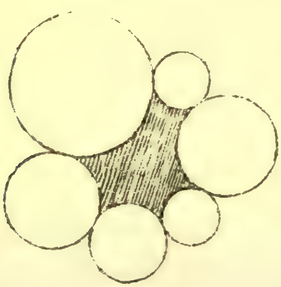
Bereiches hinzunehmen, wie die erste Figur zeigt, oder den Bereich sogleich über den Orthogonalkreis hinüber fortgesetzt denken, wie die zweite Figur angiebt.





Im letzteren Falle zeigt die Figur dann wieder ein Sechsseit; die Winkel desselben sind aber jetzt imaginär geworden. Die festgesetzte Reproduction des Ausgangspolygons an allen freien Seiten liefert uns ebenfalls wieder eine discontinuirliche Gruppe; bei ihr füllen aber die Grenzpunkte nicht mehr den ganzen Orthogonalkreis gleichmässig aus, sondern sind als getrennte Punkte in ∞ Zahl über denselben zerstreut. *Wir kommen solcherweise zu einem Beispiel einer ∞ Punktmannigfaltigkeit, deren Punkte auf einer analytischen Curve angeordnet sind, ohne dieselbe darum überall dicht zu überdecken,* wie solche Beispiele in modernen Untersuchungen ja auch sonst vorkommen und insbesondere von <u>G. Cantor</u> in ihren allgemeinen Begriffsbestimmungen discutirt worden sind.

Als zweite Verallgemeinerung wollen wir einen Fundamentalbereich construirt denken, der wieder von sich in fortlaufender Kette berührenden Kreisen begrenzt wird; doch sollen, während wir an dem Nullsein der Polygonwinkel festhalten die Berührungspunkte selbst nicht mehr auf einem gemeinsamen Kreise liegen. Des Näheren vergleiche man die nebenstehende Figur. Wieder denken wir das erste Polygon durch Spiegelung vervielfältigt. Dann ergiebt sich wie früher eine Aufeinanderfolge solcher Polygone, die sich ohne mit einander zu collidieren neben einander legen, und damit ist nach wie vor eine brauchbare discontinuirliche Gruppe definirt. Doch die Frage ist, was für eine natürliche Grenze jetzt durch die Spitzen aller Polygone gebildet wird. Da zeigt sich denn das merkwürdige Resultat, daß die letzteren in ihrer Gesammtheit als geometrischen Ort jetzt <u>eine Curve</u> er-



füllen, welche nicht mehr analytisch ist und darum auch nicht mehr genau gezeichnet werden kann, da die Definition einer nicht analytischen Curve unserer gewöhnlichen Vorstellung einer continuirlichen Curve entgegensteht. Hier führt also ein rein geometrisches Problem von elementarem Character, nämlich die fortgesetzte Spiegelung unseres Kreisbogenpolygons zu einer nicht analytischen Curve und damit zu einer Fragestellung, welche man sonst nur mit Formeln zu behandeln pflegt.

Was hier von den einzelnen Beispielen gesagt ist, gilt allgemein von den Figuren aus der Theorie der automorphen Functionen; sie alle sind in rein geometrischer Hinsicht besonders merkwürdig und interessant. Mit diesen wenigen Bemerkungen mag unsere Erwähnung der Theorie der automorphen Functionen und ihrer Gruppen dann beendet sein.

Wenn wir nun zurückblicken auf alles das, was wir in den beiden letzten Semestern zusammen durchlaufen haben, dann tritt gewiss hervor, dass wir uns um die Abgrenzung der einzelnen mathematischen Disciplin nicht gekümmert haben. Zahlentheorie u. Differentialgleichungen, Functionentheorie, projective Geometrie, Invarianten u. s. w., alle diese Gebiete sind in gleicher Weise herangezogen worden. Hierin ruht gerade das Characteristische der gegenwärtigen Vorlesung, (und vielleicht meiner Vorlesungen überhaupt) dass diese einzelnen mathematischen Disciplinen in ihrer Wechselbeziehung zu einander zur Geltung gebracht werden. Demgemäss steht aber unser Weg, den wir eingeschlagen haben, im Gegensatze zu dem von sehr vielen Mathematikern gegebenen Weisung, dass man sich concentriren müsse, um etwas leisten zu können.

Gewiss ist letzteres ja richtig, wenn man in irgend einem Gebiete selbstständig weiter arbeiten, vielleicht gar als Fachmann gelten will. Aber darum darf der allgemeine Ausblick nicht fehlen. Wenn fortgesetzt die einzelnen Mathematiker ein jeder nur in seiner speciellen Richtung arbeiten, dann ist dies schliesslich von ~~hemmendem~~ Einfluss auf die Gesammtentwickelung der Wissenschaft. Denn die einzelne mathematische Fragestellung, welche irgend welche Schule zum Mittelpunkte ihrer Thätigkeit erwählt haben mag, ist der Natur der Sache nach immer nur eine Zeit lang triebkräftig, und es tritt also, wenn die heranwachsende Generation nicht den allgemeinen Inhalt der Wissenschaft kennen lernt, und so in der Lage ist, sich ev. selbständig neue Arbeitsgebiete zu suchen, nothwendig Stagnation ein.

Man wird anderseits fragen dürfen, mit welchem Rechte diese Vorlesung als höhere Geometrie bezeichnet werden durfte, wo doch so viele andere mathematische Disciplinen hinter einander in den Vordergrund treten. Die Geometrie ist jedenfalls stets in sofern zur Geltung gekommen, als sie uns durch ihre Figuren die mathematischen Sätze veranschaulichte u. dadurch der unmittelbaren Auffassung näher führte. Ich darf hier zum Schlusse einen Ausspruch von Plücker in der Vorrede zum zweiten Bande seiner analytisch geometrischen Entwickelungen (1830) heranziehen, der in treffender Weise gerade die Auffassung der analytischen Geometrie bezeichnet, wie ich sie für diese meine Vorlesungen gelten lassen will:

„Man kann das Verhältniß der Geometrie zur Analysis aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachten. Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, daß die Analysis eine Wißenschaft ist, die unabhängig von jeder Anwendung selbständig für sich allein dasteht und die Geometrie, sowie von einer anderen Seite die Mechanik, blos als bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem großen erhabenen Ganzen erscheint."

H.