OHK

Cesàro

Al ch.mo Sig. Prof. G. Peano
Omaggio di
E. Cesaro.

ELEMENTI
DI
CALCOLO INFINITESIMALE

ERNESTO CESÀRO
PROFESSORE ORDINARIO DELLA R. UNIVERSITÀ DI NAPOLI

ELEMENTI
DI
CALCOLO INFINITESIMALE

CON NUMEROSE APPLICAZIONI GEOMETRICHE

(Seconda edizione, notevolmente ampliata)

No mathematician will wish to make a mystery of the infinite in analysis; mathematics has nothing to do with mysteries, except to endeavour to remove them.
(E. W. Hobson)

NAPOLI
LORENZO ALVANO LIBRAIO-EDITORE
Via Università, 26

1905

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI NAPOLI,
diretta da Eugenio de Rubertis fu Michele
Largo S. Marcellino all'Università, 6.

ALLA MEMORIA

DI

EUGENIO BELTRAMI

DEDICA,

CON DEVOZIONE DI DISCEPOLO,

E. CESÀRO.

Napoli, 18 Febbrajo 1901.

AI LETTORI

Mentre ferve nell'ombra la vana opera demolitrice di certi miei giudici improvvisati, mi conforta il poter dare alle stampe la *seconda* edizione del mio *corso di Calcolo,* conforme alla traduzione * fattane recentemente dal mio egregio Collega dell'Università di Greifswald, prof. G. Kowalewski. La presenza d'un gran numero di futuri ingegneri fra i miei discepoli mi ha consigliato di volgere alle applicazioni le cure del mio insegnamento. Ora vedranno i lettori e giudicheranno i competenti se ho raggiunto il mio scopo, di soddisfare cioè nel miglior modo possibile le vere esigenze d'un corso preparatorio allo studio dell'ingegneria *razionale*. Agli studenti di pura Matematica il mio libro viene offerto soltanto come una raccolta di *esercitazioni,* svolte in correlazione immediata delle parti più salienti, ma rudimentalmente esposte, del Calcolo infinitesimale propriamente detto, che ognuno potrà studiar *poi* in eccellenti opere italiane, quali sono i corsi di *Calcolo* o *Analisi infinitesimale* del Dini, del Genocchi, del Peano, del D'Arcais, dell'Arzelà, del Vivanti, e la magistrale opera del Dini: « *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* ».

Quanto ai novissimi riformatori di scuole, propugnatori impenitenti della cieca *rule of thumb*, li esorto a non ritentare la critica del mio insegnamento senza aver prima ben meditate le seguenti parole ** di F. Denison Maurice: « All experience is against the notion that the means to produce a supply of good ordinary men is to attempt nothing higher. I know that nine-tenths of those the university sends out must be hewers of wood and drawers of water, but if I train ten tenths to be so, then the wood will be badly cut and the water will be spilled ». E di ciò son prova le miserevoli opere dei miei critici stessi. Versata

Università di Napoli, 15 Giugno 1904.

E. C.

* *Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung*; B. G. Teubner, Lipsia, 1904; libri III, VI, VII.

** *The University* (of California) *Chronicle*; April 1903, p. 16.

INDICE

Teorie fondamentali

Calcolo differenziale

TEORIE FONDAMENTALI

LE FUNZIONI.

Nozioni preliminari.

1. Si consideri un *insieme* qualunque di numeri, dati tutti in una volta. I numeri d'una successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ quando si prescinde dall'ordine in cui si seguono, costituiscono un insieme; ma, viceversa, non sempre i numeri d'un insieme si lasciano ordinare in guisa da poter dire qual'è il numero che vien *dopo* un altro. Il più semplice esempio ci è fornito dall'insieme di *tutti* i numeri compresi fra due numeri dati, a e b. Un tale insieme si chiama *intervallo*, e si rappresenta con (a, b). I numeri a e b diconsi gli *estremi* dell'intervallo; e, qualora non si dichiari esplicitamente il contrario, essi debbono essere considerati come appartenenti all'intervallo stesso: il più piccolo dicesi *estremo inferiore*, l'altro è l'*estremo superiore*, e la loro differenza assoluta misura la *grandezza dell'intervallo*. Si possono anche avere intervalli infiniti, ossia *grandi quanto si vuole*. Così (a, ∞) va inteso come un intervallo (a, b), in cui sia lecito assegnare a b valori arbitrariamente grandi; ed è, per conseguenza, costituito da tutti i numeri non minori di a, come $(-\infty, b)$ da tutti quelli che non superano b. Può anche darsi che si debba invece considerare un intervallo *piccolo quanto si vuole*. Così, per dire che un fatto qualsiasi si verifica in un simile intervallo, di cui a è l'estremo inferiore o l'estremo superiore, si dice che ha luogo, rispettivamente, *a destra* o *a sinistra* di a, intendendo sempre escluso a; e si dice che avviene *intorno* ad a quando si verifica tanto a destra quanto a sinistra, senza tuttavia escludere che possa talvolta aver luogo da un lato solo di a. In altri termini la destra (sinistra) di a è l'insieme di tutti i numeri maggiori (minori) di a, vicini ad a quanto

sì vuole; e l'intorno di a è l'insieme di tutti i numeri vicini ad a quanto si vuole, escluso a. Quando tale esclusione non si vuol fare, bisogna dire esplicitamente che si considera la destra, o la sinistra, o l'intorno di un dato numero, *ed* il numero stesso.

2. Un insieme si dice *finito* se i numeri che lo costituiscono appartengono ad un intervallo finito. Evidentemente un tale intervallo (a, b) si può rendere grande quanto si vuole, facendo diminuire a e crescere b, senza che cessi di contenere tutti i numeri dell'insieme; ma non è possibile renderlo piccolo ad arbitrio, salvo che l'insieme racchiuda un sol numero. Quando a va crescendo e b diminuendo può darsi (e più oltre si vedrà che ciò avviene sempre) che si finisca per incontrare due numeri λ e μ, tali che nell'intervallo (λ, μ) cada, come in (a, b), ogni numero dell'insieme; ma che, per quanto poco si faccia ancora crescere λ o diminuire μ, il nuovo intervallo non contenga più *tutti* quei numeri. Orbene gli estremi di questo minimo intervallo (λ, μ) si chiamano *limite inferiore* e *limite superiore* dell'insieme che si considera, e si possono definire così: *il limite inferiore* (superiore) *d'un insieme di numeri è il massimo* (minimo) *fra i numeri non maggiori* (non minori) *di alcun numero dell'insieme.* Ciascuno di questi limiti non sempre appartiene all'insieme dato; ma è chiaro che, se ciò accade, esso è il minimo o il massimo numero dell'insieme. Viceversa, quando un tal minimo (o un tal massimo) esiste, esso è necessariamente il limite inferiore (o il limite superiore) dell'insieme che si considera. Così, per esempio, una successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ di numeri crescenti, tendenti ad a, ha i limiti a_1 ed a; ma, mentre a_1 è il minimo numero, a non si può chiamare massimo, perchè non sta fra i numeri dati, avendosi sempre $a_n < a$. Dunque a è semplicemente il limite superiore; ed infatti, qualunque sia $a' < a$, si finirà sempre per rendere $a_n > a'$, prendendo n abbastanza grande, d'onde segue che, fra i numeri non superati da qualche numero della successione, a è il più piccolo. Invece il minimo ed il massimo esistono entrambi in qualunque successione di numeri, i quali tendano ad un limite finito, oscillando intorno ad esso. Similmente la classe inferiore (superiore) d'un numero irrazionale a è un insieme di numeri razionali, fra i quali, per la definizione stessa di a, non esiste il massimo (minimo); ed appunto per questa ragione * la detta classe ammette a come limite superiore (inferiore).

3. **Lemma.** *Ogni criterio, che permette di scomporre l'insieme di tutti i numeri in due classi, tali che i numeri d'una classe siano inferiori*

---

* Cesàro « *Analisi algebrica* » pp. 79, 83.

a quelli dell'altra, individua un numero, massimo nella classe inferiore o minimo nella classe superiore.

Prendiamo infatti un numero a nella classe inferiore, un numero b nella classe superiore, e spezziamo in due l'intervallo (a, b) mediante il numero $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Secondo che questo appartiene alla classe inferiore o alla classe superiore, consideriamo l'intervallo (c, b) o (a, c), che rappresenteremo sempre con (a_1, b_1), dimodochè si ha, nel primo caso,

$$a_1 = c > a \ , \ b_1 = b \ ,$$

e nel secondo

$$a_1 = a \ , \ b_1 = c < b \ .$$

In entrambi i casi

$$a_1 \geqq a \ , \ b_1 \leqq b \ , \ b_1 - a_1 = \tfrac{1}{2}(b - a) \ .$$

Come dall'intervallo (a, b) si è dedotto (a_1, b_1), così da questo si può nello stesso modo dedurre un intervallo (a_2, b_2), poi (a_3, b_3), *ecc.*, e seguitando si perviene ad un (a_n, b_n), che si trova sempre, qualunque sia n, nelle identiche condizioni di (a, b), in quanto che il suo estremo inferiore appartiene alla classe inferiore, ed il superiore alla classe superiore. Intanto si ha

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \ , \ b \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \ , \ b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \ ,$$

e si vede che i numeri a_n, mantenendosi inferiori a b, vanno crescendo con n, o si serbano costanti. Essi tendono dunque * ad un limite finito ξ, al quale tendono anche i numeri b_n, perchè, crescendo n all'infinito,

$$\lim (b_n - a_n) = \lim \frac{b - a}{2^n} = 0 \ , \ \lim b_n = \lim a_n + \lim (b_n - a_n) = \xi \ .$$

Orbene è questo ξ il numero individuato dalle due classi. Fissato ad arbitrio $x < \xi$, siccome $\lim a_n = \xi$, si deve poter prendere n sufficientemente grande affinchè sia $a_n > x$, e però x appartiene, come a_n, alla classe inferiore; e nello stesso modo si dimostra che ogni numero maggiore di ξ appartiene alla classe superiore. Intanto ξ sta necessariamente in una delle due classi, poichè abbiamo supposto che *tutti* i numeri siano stati classificati; ed è chiaro che, in quella classe che lo racchiude, esso è il massimo o il minimo numero, giacchè, per poco che se ne aumenti o se ne diminuisca il valore, si cade nell'altra classe.

4. **Teorema I.** *Ogni insieme finito ammette il limite inferiore ed il limite superiore.*

---

* *Analisi algebrica*, p. 94.

Poniamo in una classe, che diremo inferiore, tutti i numeri non maggiori di alcun numero dell'insieme, e nell'altra quelli che superano qualche numero dell'insieme. Ogni numero a della classe inferiore è inferiore a qualunque numero b della classe superiore, giacchè, per dire che b appartiene a questa classe, è necessario che l'insieme contenga almeno un numero α minore di b, e d'altra parte, non potendo a superare α, è

$$a \leqq \alpha < b \ .$$

La classifica così fatta di *tutti* i numeri definisce, in virtù del precedente lemma, un numero λ. Intanto non può esistere nella classe superiore un numero b più piccolo di tutti gli altri, perchè ogni numero b', tale che $\alpha < b' < b$, appartiene alla stessa classe. Dunque λ è massimo nella classe inferiore, cioè *massimo fra i numeri non maggiori di alcun numero dell'insieme*: esso è dunque il limite inferiore. Nello stesso modo si dimostra l'esistenza del limite superiore.

5. **Estensione del concetto di limite.** Quando un insieme è costituito da infiniti numeri differenti, che tendono ad un limite finito, è chiaro che questo limite è *caratterizzato* dal fatto che *intorno ad esso, o soltanto da un lato, cadono infiniti numeri dell'insieme.* Da ciò viene spontanea l'idea di chiamar *limite*, nel caso generale, ogni numero che ha la detta proprietà, dimodochè le successioni di numeri tendenti ad un limite ci si presentano come particolarissime, in quanto ciascuna ammette un limite solo. Un insieme può dunque avere più limiti, ed anche infiniti limiti; anzi può accadere che tutti i suoi numeri, ed altri ancora, siano numeri limiti, come se ne ha un esempio semplicissimo nell'insieme dei numeri razionali, giacchè infiniti di questi cadono sempre intorno a qualunque numero, razionale o irrazionale. Si noti che, se alla destra (sinistra) di ξ cadono infiniti numeri d'un insieme, ξ è il limite inferiore (superiore) di quei numeri dell'insieme, che son maggiori (minori) di ξ. Inversamente il limite inferiore ed il limite superiore, quando non appartengono all'insieme, ne sono numeri limiti.

6. **Teorema II.** *Ogni insieme finito, costituito da infiniti numeri, ammette almeno un limite.*

Infatti, se dividiamo in due, come nel § 3, l'intervallo (a, b), che racchiude tutti i numeri dell'insieme, è chiaro che in uno almeno dei due intervalli parziali cadono ancora infiniti numeri dell'insieme. Un tale intervallo, metà del precedente, si rappresenti con (a_1, b_1), e da esso analogamente si deduca una successione di intervalli (a_n, b_n), i cui estremi tendono, come si è visto, ad un comune limite ξ. Ora, fissato il numero positivo h, si deve poter trovare un numero n sufficientemente grande perchè sia $a_n > \xi - h$, e simultaneamente $b_n < \xi + h$. Così l'intervallo (a_n, b_n) è contenuto in $(\xi - h, \xi + h)$, e però in questo cadono, come in (a_n, b_n), infiniti numeri dell'insieme, e ciò per valori di h piccoli quanto si vuole. Dunque ξ è un limite.

7. **Corollario.** *Da qualunque successione di numeri si può sempre staccare un'altra successione, che tenda ad un limite finito o infinito.*

Se l'insieme dei numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ non è finito nei due sensi, si può evidentemente staccarne una successione di numeri tendenti a $\pm\infty$. Se invece l'insieme è finito, esiste almeno un numero ξ, intorno al quale cadono infiniti numeri della successione. Se, per esempio, ciò avviene alla destra di ξ, si potrà sempre, partendo da un numero a_r maggiore di ξ, trovarne un altro $a_s < a_r$, poi un altro $a_t < a_s$, *ecc.*, riuscendo in tal modo a staccare dalla data successione l'altra $a_r, a_s, a_t, \ldots$, che tende ad un limite, che può non essere ξ.

8. **Teorema III.** *Ogni insieme finito, costituito da infiniti numeri, ammette sempre un limite minimo ed un limite massimo.* λ di

I limiti d'un insieme, racchiuso nel minimo intervallo (λ, μ), costituiscono un insieme finito, e per conseguenza ammettono il limite inferiore $\lambda_0 \geqq \lambda$ ed il limite superiore $\mu_0 \leqq \mu$. Per dimostrare il teorema basta far vedere che questi numeri λ_0 e μ_0 sono anch'essi limiti dell'insieme dato. Per λ_0 ciò è ovvio se si riesce a prendere x tanto vicino a λ_0, che in (λ_0, x), escluso l'estremo inferiore, non cada alcun limite. Se ciò non è possibile, vuol dire che, per quanto x si accosti a λ_0, nell'interno di (λ_0, x) cadono sempre limiti, e con essi infiniti numeri dell'insieme dato, d'onde segue che λ_0 è un limite dell'insieme stesso. Altrettanto dicasi di μ_0.

9. Per vedere come dalla maggior larghezza dei concetti venga una più chiara e più rapida percezione delle verità, mostriamo in qual modo la nota * *condizione necessaria e sufficiente perchè i numeri* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *tendano ad un limite finito* si lasci facilmente dedurre dall'osservazione ovvia che nell'eguaglianza fra il minimo ed il massimo limite sta quanto bene occorre e quanto basta per l'esistenza d'un limite unico. Infatti, se per un valore positivo ed arbitrariamente piccolo di ε si riesce a trovare un numero ν, tale che per n' ed n'' maggiori di ν sia sempre $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$, i numeri $a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots$ cadono tutti nell'intervallo $(a_{\nu+1} - \varepsilon, a_{\nu+1} + \varepsilon)$, e però solo in questo intervallo può esistere, ed effettivamente (§ 6) esiste un numero limite ξ; nè può esisterne un altro ξ', altrimenti ε non si potrebbe prendere minore di $\frac{1}{2}|\xi - \xi'|$.

* *Analisi algebrica*, p. 97.

10. In certe questioni i numeri λ_0 e μ_0 hanno maggiore importanza di λ e μ. Essi non variano, come possono λ e μ, quando nell'insieme dato si sopprimono uno o più numeri, perchè tali soppressioni non fanno sparire alcun limite. Se non è $\lambda_0=\lambda$, è chiaro che in (λ, x) non possono cadere, per $x<\lambda_0$, infiniti numeri dell'insieme, mentre ciò avviene certamente per $x>\lambda_0$. Un'osservazione analoga si può fare per μ_0. Dunque λ_0 e μ_0 sono, rispettivamente, il limite superiore ed il limite inferiore dei numeri x, tali che in (λ, x), o in (x, μ), non cadono infiniti numeri dell'insieme che si considera. Ciò non toglie che fuori dell'intervallo (λ_0, μ_0), e propriamente *alla sinistra* di λ_0 o *alla destra* di μ_0, possano cadere anche infiniti numeri dell'insieme stesso, giacchè λ_0, per esempio, può non appartenere all'insieme dei numeri x, dei quali è limite superiore.

11. Per rendere più chiare le considerazioni precedenti, immaginiamo che nella successione indefinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$, supposta finita nei due sensi, si sopprimano i primi n termini. La successione residua $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ ammette sempre il limite inferiore $\lambda_n \geqq \lambda_{n-1}$ ed il limite superiore $\mu_n \leqq \mu_{n-1}$. I numeri $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, non decrescenti, ed inferiori a μ, tendono, per n infinito, ad un limite $\lambda_0 \leqq \mu$; ed i numeri $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$, non crescenti, ma superiori a λ, tendono ad un limite $\mu_0 \geqq \lambda$. È poi facile constatare che questi due limiti sono appunto i numeri λ_0 e μ_0, definiti precedentemente. Essi sono caratterizzati dalle seguenti proprietà:

a) *i numeri della successione finiscono per esser tutti superiori a qualunque numero minore di* λ_0, *ed inferiori a qualunque numero maggiore di* μ_0:

b) *per quanto si vada oltre nella successione non si finirà mai d'incontrare termini minori e termini maggiori di qualunque numero compreso fra* λ_0 *e* μ_0.

In virtù della prima proprietà la sinistra del limite minimo e la destra del limite massimo sono come la sinistra e la destra del limite unico, quando questo esiste; e si può ben dire che i numeri della successione finiscono per oscillare *intorno* ad un intervallo, che può eccezionalmente ridursi ad un sol numero; ma se un tal numero, o limite unico, non esiste, è impossibile trovare, corrispondentemente ad ogni numero positivo ε, un numero ν, tale che per n' ed n'' maggiori di ν sia sempre

$$|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon ,$$

perchè, in virtù della seconda proprietà, se $\varepsilon < \mu_0 - \lambda_0$, esistono valori arbitrariamente grandi di n' ed n'', tali che $|a_{n'} - a_{n''}| > \varepsilon$: basta prendere

$$a_{n'} < {}^1/_2(\lambda_0 + \mu_0 - \varepsilon) \quad , \quad a_{n''} > {}^1/_2(\lambda_0 + \mu_0 + \varepsilon) .$$

Prime proprietà delle funzioni.

12. Si dice che la variabile x è *indipendente* quando è lecito assegnarle un valore qualsiasi, sia pure limitandone la variabilità mercè l'obbligo di rimanere in un dato intervallo (§ 1), o, più ancora, in un dato insieme di numeri, purchè non si debba aver riguardo ai valori che possono prendere altre variabili. Invece si chiama *funzione* ogni quantità y, vincolata alla variabile indipendente x in guisa che a ciascun valore di questa corrisponda uno ed un sol valore di y. Tale dipendenza si suole esprimere scrivendo $y = f(x)$, dove il simbolo f può rappresentare un complesso di operazioni conosciute da eseguire su x per ottenere y, ma più generalmente accenna soltanto al vincolo posto fra le due quantità, senza nemmeno supporre la possibilità di operazioni che permettano di dedurre il valore di y da quello di x. Evidentemente, se la corrispondenza fra x ed y è univoca, se cioè non corrisponde che un sol valore di x a ciascun valore di y, si può assumere y come variabile indipendente, ed allora $x = g(y)$, vale a dire che x è funzione di y; e le funzioni (ossia dipendenze) rappresentate dai simboli f e g si dicono *inverse* l'una dell'altra. Immaginandole, per maggior chiarezza, come riferentisi ad una stessa variabile t, le funzioni $f(t)$ e $g(t)$ sono tali, in virtù della definizione, che $f(g(t))$ e $g(f(t))$ si riducono identicamente a t.

13. **Esempii:** *a)* La più semplice funzione di x è quella che si definisce imponendole l'obbligo di conservare, qualunque sia x, un dato valore, per esempio $y = 1$. Scrivendo $y = x, y = x^2, \ldots$, o, più generalmente, y uguale ad un polinomio in x, si definiscono altrettante funzioni di x, a noi già note dall'Algebra. Più generalmente ancora, il simbolo f può rappresentare un complesso di operazioni algebriche fondamentali, in numero finito, ossia addizioni e sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, elevazioni a potenza ed estrazioni di radici (con esponente o indice intero); ed allora la funzione $f(x)$ si dice *algebrica*. Quando fra le dette operazioni manca l'ultima, si dice inoltre che la funzione è *razionale*: ed è poi facile * convincersi che una tal funzione, se non è un polinomio, è sempre esprimibile mediante il quoziente di due polinomii $\varphi(x)$ e $\psi(x)$. Alle funzioni non algebriche si dà il nome di *trascendenti*.

b) Tutte le volte che una funzione si presenta come quoziente di altre due $y = \varphi(x)/\psi(x)$, se si vuole che sia definita in tutto un intervallo, in cui cade qualche radice di $\psi(x)$, ossia qualche valore di x, per cui si abbia $\psi(x) = 0$, bisogna dichiarare qual'è il valore che s' intende attribuirle in corrispondenza a ciascuna radice. Così, per esempio, le funzioni

$$y = 1/x \quad , \quad y = x^2/x$$

non si possono considerare come definite in un intervallo che racchiude lo zero, se

* Per maggiori dettagli vedi il « *Corso di Analisi algebrica* » di Capelli e Garbieri; p. 418.

non a patto di aggiungere che ciascuna di esse prende, per $x=0$, un dato valore, che si può d'altronde assegnare a piacimento. Si noti infatti che i risultati $1/0$ e $0/0$, ottenuti col porre $x=0$ nei secondi membri delle precedenti uguaglianze, *son privi di significato*, perchè mai, in Aritmetica o in Algebra, si è definito il quoziente di due numeri, senza supporre *diverso da zero* il divisore. Si potrebbe dare a quei simboli un significato; ma ciò non è necessario, e sarebbe anzi dannoso in quanto che ne verrebbe menomata la generalità delle consuete regole del calcolo algebrico. Ad ogni modo bisogna ben guardarsi dal dire, come si fa comunemente, che $1/0$ è *infinito*, e $0/0$ *indeterminato*: ciò non avrebbe alcun senso. Sono infatti prive di senso le parole *numero infinito*, giacchè *il numero* è, per sè stesso, essenzialmente finito. Il concetto dell'infinito sta semplicemente in ciò * che, fissato un numero, ci è sempre dato di poterne pensare uno più grande. In altri termini l'infinito non misura uno *stato di grandezza* attualmente posseduto da qualche numero, ma consiste unicamente nel *modo di diventare* d'una quantità variabile, che non trovi limite alcuno nell'ingrandirsi. Ora voler definire, ossia voler *fissare* un numero, ed in pari tempo pretendere che *varii* per assumere valori arbitrariamente grandi, o attribuirgli addirittura *tutti* i valori possibili, è impresa da matti. Eppure son queste stranezze il miglior fondamento delle critiche, che infecondi filosofi ** non si stancano di rivolgere al Calcolo infinitesimale.

d. 1864 p. 452

c) La funzione x non differisce dalla propria inversa, ed altrettanto si può dire della funzione i cui valori sono 0 per $x=0$, ed $1/x$ per $x \gtrless 0$, sicchè godono entrambe della proprietà $f(f(x))=x$. Se si tenta l'inversione di $y=x^2$ si vede subito che y può ben esser presa come variabile indipendente, purchè ci limitiamo a considerarla nell'intervallo $(0, \infty)$; ma, in corrispondenza a ciascun numero di quest'intervallo, escluso l'estremo inferiore, si trovano *due* valori di x, cioè $\sqrt{y}$ e $-\sqrt{y}$. Adunque la ricerca della funzione inversa di t^2 fornisce due funzioni, $\sqrt{t}$ e $-\sqrt{t}$, ed anche infinite altre se si conviene di prendere, per ciascun valore di t, ora l'uno ora l'altro valore della sua radice quadrata. Per maggior chiarezza e precisione nello stabilire le proprietà fondamentali delle funzioni è conveniente non dipartirsi mai dalla definizione data nel § 12, ed in conseguenza riguardare come distinte le funzioni $\sqrt{t}$ e $-\sqrt{t}$, quantunque nel seguito degli studii di matematica convenga invece, ed anzi sia estremamente utile considerarle come costituenti una funzione *unica*, estendendo così il concetto di funzione in guisa che ad una funzione di x sia anche dato assumere, per ciascun valore di x, due o più valori, ed anche infiniti, soggetti ad una legge ben definita.

d) Già dall'Algebra ci è nota la funzione a^x, almeno per x razionale; e più oltre (§ 29, *b*) si vedrà come si possa estenderne il significato al caso di x irrazionale. La funzione inversa di a^x è, per definizione, $\operatorname{Log} x$, ossia il logaritmo di x in base a. Evidentemente questa funzione resta così definita solo per $x>0$. In particolare $\log x$ è la funzione inversa di e^x. In trigonometria, poi, sono state

---

* Si legga, in proposito, la terza delle « *sept leçons de physique générale* » di Cauchy. Così, del resto, intendeva l'infinito Leibniz, uno dei fondatori del Calcolo infinitesimale. Vedi il «*Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale* » di P. Mansion; p. 220.

** Degni piuttosto di « nomi risibili..... Il filosofo moderno si chiama Darwin, Helmholtz, Thomson,..... » (*Discorso di* Luigi Cremona *in Senato, 15 dic. 1886*).

studiate le funzioni $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, dette funzioni *circolari*, delle quali l'ultima deve ritenersi come priva di significato tutte le volte che si ha $\cos x = 0$, quantunque spesso si scriva $\operatorname{tg} {}^1/_2 \pi = \infty$; ma, naturalmente, questa uguaglianza non ha che un senso convenzionale, del quale si discorrerà più oltre. Hanno molta importanza le funzioni che nascono dall'inversione delle funzioni circolari. Per $y = \cos x$ non esiste funzione inversa fintantochè non si conviene di scegliere fra gli infiniti archi x, che hanno il coseno y, il più piccolo arco non negativo, che si rappresenta con $\operatorname{arc} \cos y$. Similmente si suole definire $\operatorname{arc} \operatorname{sen} y$ ed $\operatorname{arc} \operatorname{tg} y$, funzioni inverse di $y = \operatorname{sen} x$ e di $y = \operatorname{tg} x$, convenendo di far corrispondere a ciascun valore del seno o della tangente y quell'arco x, che in valore assoluto non supera ${}^1/_2 \pi$. In seguito a tali definizioni si ha sempre

$$-{}^1/_2 \pi \leqq \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \leqq {}^1/_2 \pi \quad , \quad 0 \leqq \operatorname{arc} \cos x \leqq \pi \ ;$$

quindi, essendo

$$\cos({}^1/_2 \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = x \quad , \quad 0 \leqq {}^1/_2 \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \leqq \pi \ ,$$

si è in diritto di rappresentare ${}^1/_2 \pi - \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$ con $\operatorname{arc} \cos x$, vale a dire che

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \operatorname{arc} \cos x = {}^1/_2 \pi \ .$$

Il lettore troverà da sè le altre relazioni che intercedono fra i simboli *arc sen*, *arc cos*, *arc tg*, avendo cura di tener sempre presenti le limitazioni imposte dalla definizione dei simboli stessi, senza di che è assai facile cadere in errore. Per convincersi di ciò basta osservare che la formola

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} u + \operatorname{arc} \operatorname{tg} v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u+v}{1-uv} \ ,$$

equivalente ad una nota formola di trigonometria, non è esatta se non per $uv < 1$: quando uv supera 1 bisogna aggiungere o sottrarre π al secondo membro, secondo che il comune segno di u e v è $+$ o $-$.

e) Quando si conviene di attribuire ad y il valore 0 o il valore 1 secondo che x è razionale o irrazionale, si definisce una funzione di x, che non si presta in alcun modo all'inversione. Altrettanto si può dire della funzione definita dall'obbligo di conservarsi uguale ad 1 per tutti i valori positivi di x, a -1 per tutti i valori negativi, e di essere 0 per $x = 0$. Questa notevole funzione s'incontra frequentemente nelle ricerche aritmologiche di Kronecker, il quale la rappresenta col simbolo $\operatorname{sgn} x$, che si legge *signum x*. A prima vista non sembra possibile esprimerla mediante i simboli funzionali già noti; ma invece è facile trovarne varie espressioni, sopratutto se si fa uso dell'operazione *lim*, quale si è studiata in Algebra, cioè il passaggio al limite nell'ipotesi che un numero *intero n* vada crescendo indefinitamente. Infatti si ha

$$\operatorname{sgn} x = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} \ , \quad \operatorname{sgn} x = \lim_{n=\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \ , \quad \operatorname{sgn} x = \frac{2}{\pi} \lim_{n=\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} nx \ .$$

Del resto, senza ricorrere all'operazione *lim*, se si conviene che la funzione $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$, priva di significato per $x=0$, valga 0 per questo valore di x, è facile vedere che si ha

$$\operatorname{sgn} x = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right).$$

Un' altra funzione, strettamente legata alla precedente, è definita dalla condizione di mantenersi uguale al *valore assoluto* della variabile. Si è soliti rappresentarla con $|x|$. Evidentemente $|x| = x \operatorname{sgn} x$. Finalmente la funzione

$$y = \lim_{n=\infty} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}^2 n!\,\pi x)$$

è appunto quella che abbiamo definita in principio, perchè, se x è *razionale*, $n!\,x$ finisce per diventare e rimanere, crescendo n, un numero intero, sicchè $y = \operatorname{sgn} 0 = 0$: ciò non accade mai quando x è *irrazionale*, $\operatorname{sen}^2 n!\,\pi x$ si conserva positivo, e però $y=1$.

f) La *frequenza* y della cifra 0 tra le cifre decimali di x è un' interessante funzione di x, che noi rappresenteremo sempre con $\varpi(x)$ per distinguerla, in seguito, quando avremo occasione di addurla in esempio. In altri termini, se fra le prime n decimali del valore attribuito ad x s' incontrano m zeri, e se il rapporto di m ad n tende al un limite, quando n cresce indefinitamente, è questo limite che noi conveniamo di assumere come valore di y, corrispondente al dato valore di x. Questa $y=\varpi(x)$ *non ammette funzione inversa*, e ciò non perchè non si possa (come nelle funzioni definite in ultimo luogo) assumere y a variabile indipendente, ma perchè ad ogni valore di y (necessariamente compreso fra 0 ed 1) corrispondono infiniti valori di x, fra i quali non si riesce ad isolarne uno, come si è potuto fare per le funzioni circolari inverse. Infatti, dato arbitrariamente il numero a, e *fissato* il numero positivo h, piccolo quanto si vuole, prendiamo ν sufficientemente grande perchè sia $10^\nu > 1/h$, e chiamiamo $x'-a$ il numero che si ottiene sopprimendo in $x-a$ tutte le cifre che stanno alla destra della ν^{esima} decimale. Evidentemente $|x-x'|<h$; e, d'altra parte, poichè l'addizione di $x'-a$ ad a modifica soltanto un numero limitato di cifre, è chiaro che $\varpi(x')=\varpi(a)$. Dunque il valore che la funzione prende per un valore qualunque a, attribuito ad x, si ripresenta infinite volte intorno a qualunque altro valore di x. Inoltre si noti che si può far variare m insieme ad n in modo che m/n non tenda ad alcun limite, e costruire così un numero a, tale che non esista $\varpi(a)$. Dalle considerazioni precedenti risulta che avviene altrettanto intorno ad ogni altro valore di x, vale a dire che in qualunque intervallo, per piccolo che sia, la funzione $\varpi(x)$, per infiniti valori di x, non è definita.

g) Le serie ed i prodotti infiniti ci forniscono altri esempii di funzioni. Così, ponendo

$$y = x - {}^1\!/_2 x^2 + {}^1\!/_3 x^3 - {}^1\!/_4 x^4 + \dots,$$

si definisce la funzione y nell'intervallo $(-1, 1)$, escluso l'estremo inferiore.

nel quale intervallo è noto * che y assume gli stessi valori dell'*altra* funzione $\log(1+x)$, definita in tutto l'intervallo $(-1, \infty)$, escluso sempre l'estremo inferiore. L'eguaglianza

$$F(x) = \operatorname{sen} 2\pi x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 4\pi x + {}^1/_3 \operatorname{sen} 6\pi x + \ldots$$

definisce $F(x)$ per tutti i valori di x, ed è utile sapere che questa funzione si può esprimere mediante altre due, semplicissime, cioè $[x]$, *massimo intero contenuto in* x, e $\operatorname{sgn} x$. Si riesce infatti con mezzi elementari ** a dimostrare che

$$\frac{2}{\pi} F(x) = \operatorname{sgn}(x - [x]) - 2(x - [x]) ,$$

o, se si vuole,

$$\frac{2}{\pi} F(x) = \rho(-x) - \rho(x) ,$$

rappresentando con $\rho(x)$ l'eccesso di x sul massimo intero contenuto in x, cioè $x - [x]$. In particolare se ne deduce che nell'intervallo $(0, 2\pi)$, *esclusi gli estremi* è vera la formola seguente, che ci sarà utile:

$$\operatorname{sen} x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots = {}^1/_2(\pi - x) .$$

h) Ha grande importanza in varii rami dell'Analisi matematica la funzione

$$\Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}} ,$$

definita così per x diverso da $-1, -2, -3, \ldots$. Giova porre questa definizione sotto un'altra forma, dovuta a Gauss. Basta osservare che il secondo membro equivale a

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n+1)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n}\right)} ,$$

per potere scrivere

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty} n^x \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} .$$

Se si osserva che

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{n+x} = x ,$$

---

* *Analisi algebrica*, p. 121.

** Pringsheim « *Mathematische Annalen* » vol. 26, p. 193. Vedi anche, più oltre, § 125.

si scopre subito la proprietà fondamentale: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Siccome poi per $x=0$ dalla definizione segue $\Gamma(1)=1$, si ha pure

$$\Gamma(2)=1!\,,\ \Gamma(3)=2!\,,\ \Gamma(4)=3!\,,\ \Gamma(5)=4!\,,\ \ldots\,.$$

i) Ma, come si è detto, non è necessario che y si sappia o soltanto si possa esprimere con simboli analitici, rappresentanti operazioni note da eseguire su x; basta che, in un modo qualsiasi, la conoscenza di *ciascun valore* di x determini *un valore* di y, per poter affermare che y è funzione di x. Per esempio la solubilità d'un sale, la tensione ed il calorico latente del vapore acqueo sono funzioni della temperatura. La più importante funzione d'una variabile indipendente, dice Thomson, è forse, a Liverpool, il *prezzo del cotone*, quantunque non si riesca a scorgere alcun legame analitico fra questo prezzo ed il *tempo*, computato a partire da un istante arbitrario. Altre funzioni del tempo sono: il tempo stesso, quale risulta dalle indicazioni d'un pessimo orologio; la temperatura in un dato punto dello spazio, o quella che vien segnata da un dato termometro, e che si lascia rappresentare *, in media ed approssimativamente, mediante le funzioni circolari; *ecc.* Per tutte queste funzioni non esiste funzione inversa. Come si potrebbe, infatti, asserire che il tempo è funzione della temperatura? Ma la più meravigliosa funzione del tempo è senza dubbio la pressione dell'aria sul timpano: immaginandola costruita, per esempio, mercè l'audizione d'un pezzo di musica, eseguito da una orchestra, per quanto i suoni di questa siano complicati, o bruschi, o discordi, e si sovrappongano ad altri, basterebbe la sua conoscenza per poter fedelmente riprodurre l'insieme dei suoni uditi, e per avere anche indicazioni sovrabbondanti, estranee alla effettiva percezione del suono **.

14. Una funzione si dice *finita* in un dato intervallo quando è finito l'insieme dei valori che essa prende nell'intervallo stesso; ed i limiti (§ 2) di questo insieme si chiamano limiti (inferiore e superiore) della funzione. In altri termini il limite inferiore d'una funzione, in un dato intervallo, è un numero caratterizzato dalla doppia proprietà di non superare alcun valore della funzione, e di esser tale che ogni numero superiore ad esso è anche superiore a qualche valore della funzione; ed analogamente il limite superiore, non superato da alcun valore della funzione, è tale che ogni numero inferiore ad esso è superato da qualche valore della funzione. Questi limiti possono dirsi *minimo* e *massimo* sol quando sian valori che la funzione raggiunge effettivamente nell'intervallo che si considera. Così, per esempio, la funzione $\operatorname{sen} x$ è finita in qualunque intervallo, e vi ammette sempre un minimo ed un massimo valore, che sono -1 e $+1$ quando l'intervallo non è minore di 2π. È anche finita la funzione $x-[x]$, che in ogni intervallo non minore di 1 assume il valore minimo 0, ma è

---

* Liagre « *Calcul des probabilités* » p. 288.

** Thomson « *Conférences scientifiques et allocutions* » pp. 178, 180.

priva di massimo, perchè 1, limite superiore, non è un valore che la funzione raggiunge. Invece la funzione che per $x \gtrless 0$ è espressa da $1/x$, e per $x = 0$ è uguale a 0, non è finita negli intervalli che contengono 0, perchè, dato l arbitrariamente grande, è sempre possibile trovare valori della funzione superiori ad l o inferiori a $-l$: basta prendere x inferiore, in valore assoluto, ad $1/l$. Una funzione può anche essere finita in un senso, e non essere finita nel senso opposto, come, per esempio, non è finita la funzione espressa dal quadrato della precedente, in ogni intervallo che racchiude zero; come non è finita $e^{\frac{1}{x}}$ quando nell'intervallo che si considera, escluso l'estremo superiore, è contenuto lo zero; *ecc.* Queste funzioni non sono finite, in quanto che son prive di limite superiore, pur ammettendo in qualunque intervallo un valor minimo.

15. **Teorema I.** *Se una funzione è finita in un intervallo, essa vi ammette sempre il limite inferiore ed il limite superiore.*

Ciò risulta immediatamente dalla definizione di funzione *finita*, e da un noto teorema (§ 4), affermante l'esistenza del limite inferiore e del limite superiore di qualsiasi insieme finito di numeri.

16. **Teorema II.** *Se una funzione è finita intorno a tutti i numeri d'un intervallo finito, essa è finita nell'intervallo.* F V p. 232

Procedendo per assurdo dimostreremo che, se la funzione non è finita nell'intervallo dato, esiste in questo almeno un numero, intorno al quale essa non è finita. Negando che la funzione sia finita si afferma la possibilità di trovare, fra i valori che la funzione assume nell'intervallo che si considera, almeno un valore y_1 superiore ad un numero l_1, arbitrariamente prestabilito, e quindi anche un valore y_2 superiore ad un numero arbitrario l_2, maggiore di y_1; e così di seguito, indefinitamente, avendo cura di costruire i numeri $l_1, l_2, l_3, \ldots$ in modo che vadano crescendo oltre ogni limite. I valori $y_1, y_2, y_3, \ldots$ della funzione corrispondono a valori x_1, $x_2, x_3, \ldots$ della variabile indipendente, *tutti differenti fra loro*, e per conseguenza in numero infinito. Questi appartengono ad un intervallo finito, e però, in virtù d'un noto (§ 6) teorema, ve ne sono infiniti intorno ad uno o più numeri dell'intervallo: sia ξ un tal numero. Fissiamo h positivo ed arbitrariamente piccolo, e dimostriamo che nell'intervallo $(\xi - h . \xi + h)$ la funzione può superare qualunque numero l, grande quanto si vuole. Infatti, se si prende ν sufficientemente grande perchè sia $l_n > l$ per ogni $n > \nu$, e se si osserva che nella successione $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, x_{\nu+3}, \ldots$ si deve sempre finire per incontrare un numero x_n appartenente all'intervallo $(\xi - h, \xi + h)$, si vede subito che in questo la funzione prende il valore $y_n > l_n > l$.

17. Del teorema precedente si può anche dare una dimostrazione di-

retta, evitando d'invocare il teorema del § 6. La funzione si supponga finita intorno a tutti i numeri dell'intervallo (a, b). In particolare, supporre che sia finita alla destra di a vuol dire supporla finita in un intervallo (a, x), il cui estremo superiore x si prenda sufficientemente vicino ad a; e ciò rimarrà vero per ogni altro numero $x' < x$, maggiore di a. L'insieme di siffatti numeri $x (\leqq b)$ ammette il limite superiore $\xi \leqq b$. Questo è il massimo numero dell'insieme. Infatti, preso $\xi' < \xi$ sufficientemente vicino a ξ, la funzione, finita per ipotesi alla sinistra di ξ, è finita in (ξ', ξ). D'altra parte essa è finita in (a, ξ'); *dunque è finita in* (a, ξ). Ed ora basta dimostrare che $\xi = b$. Orbene, se fosse $\xi < b$, si potrebbe prendere un numero $\xi'' > \xi$, sufficientemente vicino a ξ perchè in (ξ, ξ''), e per conseguenza in (a, ξ''), la funzione sia finita: ciò è assurdo, dal momento che ξ è il *massimo* fra i numeri $x \leqq b$, tali che in (a, x) la funzione è finita.

18. **Teorema III** (primo teorema di Weierstrass). *Se una funzione è finita in un intervallo finito, questo contiene almeno un numero, intorno al quale la funzione ha lo stesso limite inferiore che ammette nell'intervallo totale. Altrettanto dicasi del limite superiore.*

Possiamo limitarci a dimostrare il teorema per un solo dei limiti: sia, per esempio, il limite inferiore λ. Se questo *è un minimo*, esiste, nell'intervallo (a, b) che si considera, almeno un numero ξ, per cui si ha $f(\xi) = \lambda$, ed è chiaro che intorno a ξ il numero λ è sempre il minimo valore della funzione. Se λ *non è un minimo*, ciò vuol dire che $f(x) - \lambda$ si conserva sempre *positiva* in (a, b), ma può prendere valori piccoli quanto si vuole, d'onde segue che la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - \lambda}$$

è definita in tutto quell'intervallo, ma *non è finita*. Esiste dunque in (a, b) un numero ξ, intorno al quale $\varphi(x)$ non è finita, vale a dire che, dato un numero l, grande quanto si vuole, si riuscirà sempre a trovare nell'intervallo $(\xi - h, \xi + h)$, arbitrariamente piccolo, un numero x_0, tale che

$$\varphi(x_0) > l \quad , \quad \text{e per conseguenza} \quad f(x_0) < \lambda + \frac{1}{l} \; ,$$

cioè $f(x_0)$ inferiore ad un numero che, pur superando λ, è vicino a λ quanto ci piace. Dunque in $(\xi - h, \xi + h)$, come in (a, b), il numero λ è il massimo fra quelli che non superano alcun valore della funzione.

Tendenza al limite.

19. Per la variabile *indipendente* x il tendere ad un limite a significa assumere *tutti* i valori intorno (§ 1) ad a. Spesso torna utile distinguere il tendere ad a dalla *sinistra* o dalla *destra*; e si può immaginare che ciò avvenga col percorrere che fa x, crescendo, tutto un intervallo $(a-h, a)$, escluso l'estremo superiore, o, decrescendo, tutto un intervallo $(a, a+h)$, escluso l'estremo inferiore. Si dice poi che x tende all'infinito quando nel variare finisce per assumere qualunque valore maggiore d'un dato numero; e ciò si può sempre ottenere col far percorrere ad x, crescente, *tutto* un intervallo (ξ, ∞). Definizione analoga per x tendente a $-\infty$.

20. Si dice che i valori di $f(x)$, a destra di a, tendono al limite l, quando, tendendo x ad a, dalla destra, la differenza $f(x)-l$ finisce per *diventare* e *restare* inferiore, in valore assoluto, a qualsiasi numero positivo. In termini più espliciti, si dice che $f(x)$ ha per limite l, a destra di a, e si scrive

$$\lim_{x=a+0} f(x) = l\ ,$$

quando ad ogni numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, corrisponde un numero positivo h, tale che per ogni valore di x, appartenente all'intervallo $(a, a+h)$, escluso l'estremo inferiore, sia

$$|f(x)-l| < \varepsilon\ . \tag{1}$$

Similmente si dice che $f(x)$ ha per limite l, a sinistra di a, e si scrive

$$\lim_{x=a-0} f(x) = l\ ,$$

quando ad ogni numero $\varepsilon > 0$ corrisponde un numero $h > 0$, tale che sia vera la (1) per tutti i valori di x non inferiori ad $a-h$, ma inferiori ad a. Quando poi si scrive, come avviene comunemente,

$$\lim_{x=a} f(x) = l\ ,$$

si vuole affermare che i limiti di $f(x)$, a destra ed a sinistra di a, esistono entrambi, e sono uguali ad l. Solo per brevità si usa scrivere e dire che $f(x)$ tende ad l *per* $x=a$; ma è sottinteso che x deve assumere *tutti* i valori infinitamente prossimi ad a, *escluso* precisamente il valore a. Insomma non bisogna confondere i valori destro e sinistro, $f(a+0)$ ed $f(a-0)$, che una funzione *tende ad avere* in a, col valore $f(a)$ che essa *prende effettivamente* per $x=a$.

21. Si dice poi che, per x infinito, $f(x)$ tende ad un limite l, quando ad ogni numero positivo ε corrisponde un numero ξ, tale che per $x > \xi$ sia sempre vera la (1). Si dice che, per x tendente ad a, a destra o pure a sinistra, $f(x)$ tende all'infinito, e si conviene di scrivere

$$\lim_{x=a+0} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x=a-0} f(x) = \infty \ ,$$

quando ad ogni numero l, arbitrariamente grande, corrisponde un numero positivo h, tale che nell'intervallo $(a, a+h)$, o in $(a-h, a)$, escluso l'estremo a, sia sempre $f(x) > l$. In modo analogo si definisce la tendenza a $-\infty$. Si dice finalmente che, per x infinito, $f(x)$ tende all'infinito, e si conviene di scrivere

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \infty \ ,$$

quando ad ogni numero l, arbitrariamente grande, corrisponde un numero ξ, tale che per $x > \xi$ sia sempre $f(x) > l$. Per poco che vi si rifletta è facile convincersi che tutte queste definizioni sono informate ad un principio unico. Qui è bene osservare che spesso, invece di affermare che una funzione tende all'infinito quando x tende ad a, o che tende ad l quando x tende all'infinito, si dice che la funzione *è infinita* per $x = a$, o che, *per* x *infinito*, ha il valore l. Sono locuzioni puramente convenzionali, che hanno la loro utilità, e che non possono dar luogo ad inconvenienti quando se ne sia dichiarato, una volta per tutte, il significato preciso. Ed in corrispondenza a quel modo di esprimersi si usa scrivere

$$f(a) = \infty \ , \qquad \text{o} \qquad f(\infty) = l \ .$$

Così diventa lecito definire (*cfr.* § 13, *d*) la funzione $\operatorname{arc\,tg} x$ nel modo stesso di $\operatorname{arc\,sen} x$, senza escludere i valori $\pm {}^1/_2\pi$, altrimenti sarebbero prive di significato le uguaglianze $\operatorname{arc\,tg}(\pm\infty) = \pm {}^1/_2\pi$, come l'altra $\operatorname{tg} {}^1/_2\pi = \infty$: in questa, veramente, si sottintende qualche cosa di più, cioè che nel primo membro sia da porre ${}^1/_2\pi - 0$ per ${}^1/_2\pi$, giacchè si ha $\operatorname{tg}({}^1/_2\pi \pm 0) = \mp\infty$.

22. Mercè considerazioni identiche a quelle che sono state adoperate in Algebra, nel caso d'una variabile intera, si stabiliscono le seguenti proprietà. Una funzione che assume, al crescere di x, valori tali che nessuno sia più piccolo d'un valore precedente, deve, per x infinito, tendere ad un limite finito o infinito, perchè ad una simile funzione basta *diventare* maggiore d'un numero fisso per *restar* poi tale quando x cresce. Se una funzione è compresa fra altre due che tendono, per x tendente ad a, ad un comune limite l, tenderà anch'essa ad l. Se, per x tendente ad a,

una funzione ammette un limite diverso da zero, essa finisce per assumere e conservare il segno di questo limite; e però una funzione che, intorno ad un dato valore a della variabile indipendente, non cessa mai di assumere valori positivi e valori negativi, non può, quando x tende ad a, tendere ad un limite diverso da zero. Se $u, v, w, \ldots$ sono funzioni di x, ed è, per x tendente ad a,

$$\lim u = \alpha \ , \ \lim v = \beta \ , \ \lim w = \gamma \ , \ \ldots ,$$

è pure

$$\lim (u + v + w + \ldots) = \alpha + \beta + \gamma + \ldots \ , \ \lim uvw \ldots = \alpha\beta\gamma \ldots ,$$

purchè le funzioni considerate siano in numero finito. Il limite del quoziente di u per v è il quoziente di α per β, *purchè* β *non sia nullo*; ma qualche cosa si può anche dire nei casi in cui il denominatore non tende ad un limite finito, diverso da zero. Infatti, se v cresce indefinitamente, mentre u si mantiene finita, il quoziente u/v tende a zero; e se v tende a zero conservando il segno di u, mentre $1/u$ si mantiene finita, u/v cresce indefinitamente in valore assoluto. Non abbiamo ancora i mezzi per calcolare il limite del quoziente quando numeratore e denominatore tendono simultaneamente a zero o all'infinito; ma la questione sarà trattata più oltre.

23. **Teorema IV.** *Per l'esistenza d'un limite finito di* f(x), *a destra di* a, *occorre e basta che, dato* ε *positivo e piccolo quanto si vuole, si possa sempre trovare un numero positivo* h, *tale che, per ogni coppia di valori* x' *ed* x'', *presi nell'intervallo* (a, a + h), *escluso l'estremo inferiore, riesca* f(x') — f(x'') *inferiore ad* ε *in valore assoluto.*

La condizione è necessaria. Se, infatti, $f(x)$ tende ad l, quando x tende ad a, dalla destra, vuol dire che, dato $\varepsilon > 0$ piccolo quanto si vuole, esiste un numero positivo h, tale che per ogni valore di x non superiore ad $a + h$, ma superiore ad a, è sempre $|f(x) - l| < {}^1/_2\varepsilon$. Dunque, se x' ed x'' appartengono al detto intervallo, si ha simultaneamente

$$|f(x') - l| < {}^1/_2\varepsilon \ , \quad |f(x'') - l| < {}^1/_2\varepsilon \ ;$$

poi

$$|f(x') - f(x'')| \leqq |f(x') - l| + |l - f(x'')| < \varepsilon \ .$$

Inversamente, dato ad arbitrio il numero positivo ε, supponiamo determinato un intervallo $(a, a + h)$, in cui si abbia, escludendo l'estremo inferiore,

$$|f(x') - f(x'')| < {}^1/_2\varepsilon \ . \qquad (2)$$

Nel detto intervallo si costruisca una successione di numeri decrescenti, tendenti ad a, e si consideri la successione dei corrispondenti valori della funzione. È noto (§ 7) che da questa seconda successione si possono sempre staccare infiniti termini $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots\ldots$, che tendano ad un limite; e questo limite non può essere infinito, perchè dalla (2) si deduce

$$f(a_1) - \tfrac{1}{2}\varepsilon < f(a_n) < f(a_1) + \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Sia dunque

$$\lim_{n=\infty} f(a_n) = l ,$$

e si prenda n sufficientemente grande perchè si abbia $|f(a_n) - l| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$. Per ogni valore di x, preso in $(a, a+h)$, escluso sempre l'estremo inferiore, si ha pure, per l'ipotesi (2), $|f(x) - f(a_n)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$; quindi, sommando le ultime due disuguaglianze,

$$|f(x) - l| \leqq |f(x) - f(a_n)| + |f(a_n) - l| < \varepsilon .$$

È dunque l il limite di $f(x)$ a destra di a. Con lieve modifica il teorema vale anche per l'esistenza del limite a sinistra. È poi facile adattare la dimostrazione precedente al caso di x crescente all'infinito: basterà sostituire al numero h un numero ξ, estremo inferiore d'un intervallo infinito, in cui vanno presi x' ed x''.

24. Anche per le funzioni riesce assai utile l'introduzione di numeri analoghi a quelli che sono stati considerati nel § 8, e giova considerarli come nel § 11. L'insieme dei valori che una funzione finita $f(x)$ assume in $(x, x+h)$, escluso x, ammette il limite inferiore λ, funzione di h, che tende necessariamente ad un limite λ_0 quando h tende a zero, perchè non può, decrescendo h, variare senza crescere, pur mantenendosi inferiore al limite superiore μ. In modo analogo si definisce il limite massimo μ_0. Evidentemente i valori di questi limiti (detti *estremi oscillatorii* della funzione) dipendono unicamente da x, ma possono, a sinistra, differire da quelli di destra. Le funzioni $\lambda_0(x)$ e $\mu_0(x)$, relative, per esempio, alla destra dei valori di x, sono caratterizzate dalle seguenti proprietà: *ad ogni numero positivo* ε *corrisponde un numero* h, *tale che per ogni valore di* x, *preso fra* a *ed* a + h, *si ha*

$$\lambda_0(a) - \varepsilon < f(x) < \mu_0(a) + \varepsilon ;$$

ed in ogni intervallo (a, a + h), *piccolo quanto si vuole, esistono numeri* x' *ed* x'', *tali che*

$$\lambda_0(a) + \varepsilon > f(x') \quad , \quad f(x'') > \mu_0(a) - \varepsilon .$$

Dopo ciò è facile dimostrare il teorema IV, senza neppur servirsi della proposizione dimostrata nel § 7. Basta osservare che, quando non esiste il limite (unico) dei valori di $f(x)$ alla destra di a, è $\lambda_0 < \mu_0$, e si può sempre, dato il numero positivo $\varepsilon < \mu_0 - \lambda_0$, prendere x' ed x'' vicini ad a quanto si vuole, e tali che

$$f(x') < {}^1/_2(\lambda_0 + \mu_0 - \varepsilon) \quad , \quad f(x'') > {}^1/_2(\lambda_0 + \mu_0 + \varepsilon) ,$$

in guisa cioè che risulti $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$. Dunque, se per ogni ε è soddisfatta la condizione $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ in un intervallo $(a, a+h)$ sufficientemente piccolo, non è possibile che sia $\lambda_0 < \mu_0$. e però esiste necessariamente il numero $f(a+0)$, uguale al comune valore di $\lambda_0(a)$ e $\mu_0(a)$.

Continuità.

25. **Funzioni continue.** Una funzione si dice *continua*, per $x = a$, quando, a destra ed a sinistra di a, i limiti dei suoi valori coincidono col particolare valore che la funzione assume per $x = a$. La continuità di $f(x)$, per $x = a$, è dunque espressa dalle uguaglianze

$$f(a+0) = f(a) \quad , \quad f(a-0) = f(a) .$$

La funzione si dice *continua in un intervallo* quando è continua per *tutti* i valori di a contenuti nell'intervallo. Può darsi che la funzione sia continua *soltanto a destra* o *soltanto a sinistra* di a. Ciò avviene quando sussiste una sola delle precedenti uguaglianze. Si noti che nel dire, per esempio, che una funzione è *continua a destra* di a, si è costretti ad andar contro una definizione generale, posta precedentemente (§ 1); e però, ad evitare equivoci, quando si vuole asserire che in un intervallo, che ha l'estremo inferiore in a, la funzione è continua, bisogna aver cura di dirlo esplicitamente. Importa osservare che la definizione della continuità è tutta contenuta nell'uguaglianza

$$\lim f(x) = f(\lim x) ,$$

dimodochè si può dire che la possibilità di permutare il simbolo *lim* col simbolo f è caratteristica per le funzioni continue.

26. È chiaro che proprietà analoghe a quelle dimostrate nella teoria dei limiti si hanno per le funzioni continue. In particolare: *la somma ed il prodotto di più funzioni continue, in numero finito, sono funzioni continue.* Se, per esempio, sono continue per un determinato valore di x le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, per lo stesso valore di x sono continue

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \quad , \quad g(x) = \varphi(x)\psi(x) ,$$

perchè (§ 22)

$$\lim f(x) = \lim \varphi(x) + \lim \psi(x) = \varphi(\lim x) + \psi(\lim x) = f(\lim x) ,$$
$$\lim g(x) = \lim \varphi(x) \ . \ \lim \psi(x) = \varphi(\lim x) \ . \ \psi(\lim x) = g(\lim x) \ .$$

È anche funzione continua il quoziente di due funzioni continue, *purchè si escludano quei valori della variabile indipendente, che annullano il denominatore.* Finalmente si osservi che *ogni funzione continua d'una funzione continua di* x *è funzione continua di* x. Infatti, se con le funzioni continue $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si forma la funzione $f(x) = \varphi(\psi(x))$, si ha

$$\lim f(x) = \lim \varphi(\psi(x)) = \varphi(\lim \psi(x)) = \varphi(\psi(\lim x)) = f(\lim x) ,$$

purchè negli intervalli in cui si avvera la continuità di φ cadano valori, che ψ prende negli intervalli in cui è continua. Questi valori costituiscono, come poi (§ 35) si vedrà, uno o più intervalli, nei quali è continua la funzione f.

27. **Teorema V.** *Per la continuità di* f(x), *a destra di* a, *occorre e basta che, dato* ε *positivo e piccolo quanto si vuole, si possa sempre trovare un numero positivo* h, *tale che, per ogni coppia di valori* x' *ed* x'', *presi nell'intervallo* (a , a + h), *riesca* f(x') — f(x'') *inferiore ad* ε *in valore assoluto.*

Che la condizione sia più che sufficiente si vede subito prendendo $x' = a$, e ponendo per x'' un valore qualunque x, compreso fra a ed $a + h$; sicchè, essendo $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, è pure $f(a + 0) = f(a)$. Reciprocamente, se $f(a + 0)$ esiste, ed è uguale ad $f(a)$, è possibile trovare, in corrispondenza a ciascun numero positivo ε, due numeri positivi h' ed h'', tali che le disuguaglianze

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad , \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon ,$$

abbiano luogo: la prima, in virtù del teorema IV, per tutte le coppie x' ed x'' di valori, presi in $(a , a + h')$ *escludendo* a; e la seconda, in virtù della definizione del limite, per tutti i valori di x, presi in $(a , a + h'')$. Si può dunque asserire, fondendo in una le due disuguaglianze, e prendendo per h il più piccolo dei numeri h' ed h'', che per *tutte* le coppie di valori x' ed x'' nell'intervallo $(a , a + h)$ dev'essere $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Evidentemente il teorema si può enunciare ed in modo analogo dimostrare anche per la sinistra di a. Se poi si considerano ad un tempo la destra e la sinistra di a, si vede che il poter trovare, corrispondentemente ad ogni numero positivo ε, un numero positivo h, tale che per tutte le coppie di valori x' ed x'', presi in $(a - h , a + h)$, si abbia $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, *è condizione sufficiente e necessaria affinchè la funzione* f(x) *sia continua per* x = a.

28. La nozione di continuità è assai utile per *completare la definizione* di talune funzioni, segnatamente di quelle che ci sono già note dall'Algebra per i valori razionali della variabile indipendente. Se la funzione $f(x)$ è tale che, dato il numero positivo ε, piccolo quanto si vuole, sia possibile determinare intorno ad ogni valore di x un intervallo, nel quale la differenza fra due valori qualunque della funzione riesca in valore assoluto inferiore ad ε, è facile estendere il significato di $f(x)$ al caso di x irrazionale *in modo da ottenere una funzione continua* per tutti i valori della variabile indipendente. All'uopo si costruisca arbitrariamente una successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ di numeri razionali tendenti al limite irrazionale a, e si prenda intorno ad a un intervallo tale che nel suo interno il valore assoluto della differenza fra due valori qualunque della funzione risulti sempre minore di ε. In questo intervallo finiscono per cadere i termini della successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$, dimodochè, se n' ed n'' superano un certo numero, si ha sempre

$$|f(a_{n'}) - f(a_{n''})| < \varepsilon .$$

Dunque (§ 9) il limite di $f(a_n)$, per n infinito, esiste; ed è questo limite che noi *conveniamo di assumere come valore di* $f(a)$. Ora vogliamo dimostrare che *la funzione così definita è continua* per ogni valore a, razionale o irrazionale, della variabile indipendente. Infatti, dato $\varepsilon > 0$ piccolo quanto si vuole, già possiamo, per ipotesi, determinare h in modo che, per due valori *razionali* qualunque, x' ed x'', presi in $(a-h, a+h)$, sia $|f(x') - f(x'')| < {}^1/_3\varepsilon$. È chiaro che questa disuguaglianza sussiste anche quando uno dei due numeri, per esempio x', è irrazionale, purchè l'altro, razionale, si prenda sufficientemente vicino al primo; e ciò in virtù della definizione stessa di $f(x')$. Ne segue che, presi arbitrariamente nell'intervallo $(a-h, a+h)$ i numeri x' ed x'', irrazionali o pur no, è sempre possibile trovarne altri due a' ed a'', razionali, appartenenti al medesimo intervallo, e tali che

$$|f(x') - f(a')| < {}^1/_3\varepsilon \quad , \quad |f(x'') - f(a'')| < {}^1/_3\varepsilon .$$

Ora, osservando che la differenza $f(x') - f(x'')$ è scomponibile nella somma di queste altre

$$f(x') - f(a') \quad , \quad f(a') - f(a'') \quad , \quad f(a'') - f(x'') ,$$

ciascuna delle quali è inferiore ad ${}^1/_3\varepsilon$ in valore assoluto, si vede che si ha $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ per *tutte* le coppie di valori di x' ed x'', appartenenti all'intervallo $(a-h, a+h)$. Dunque, in virtù del teorema V, la funzione è continua per $x = a$.

29. **Esempii**: *a)* Si riconosce subito che le funzioni $y=1, x, x^2, \ldots, \sqrt{x}, \operatorname{sen} x$, $\cos x$, *ecc.*, sono continue. Per esempio, da

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}\,, \quad \operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a=2 \operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\,,$$

si deduce, per x tendente ad a, $\lim \sqrt{x}=\sqrt{a}$, $\lim \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} a$; e per la prima funzione, se $a=0$, si ha pure, alla destra, $\lim \sqrt{x}=0$. Anche la funzione espressa in generale dal quoziente di $\operatorname{sen} x$ per x, ma uguale ad 1 per $x=0$, è continua per $x \gtrless 0$ come quoziente di due funzioni continue, ed è continua per $x=0$ perchè l'arco x, nel tendere a zero, resta compreso fra il suo seno e la sua tangente, dimodochè si ha

$$\cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1\quad, \quad \lim\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1\,.$$

b) La funzione a^x ci è nota dall'Algebra solo per x razionale; ma è facile completarne la definizione, per $a>0$, seguendo le indicazioni del § 28. Bisogna prima di tutto ricordarsi che, per x' ed x'' razionali, la differenza fra i corrispondenti valori di a^x si può rendere piccola quanto si vuole prendendo $x'-x''$ sufficientemente piccolo in valore assoluto, giacchè in tal modo $a^{x'-x''}$ differirà da 1 tanto poco quanto ci piace, e sarà pertanto arbitrariamente piccolo anche $a^{x'}-a^{x''}$, prodotto di $a^{x''}$ per $a^{x'-x''}-1$. Dopo ciò si è sicuri, per quanto si è detto nel § 28, che, qualunque sia la successione di numeri razionali $x_1, x_2, x_3, \ldots$, tendenti ad un dato limite irrazionale x, la successione $a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \ldots$ ammette anch'essa un limite finito, che dipende solo da x: è questo limite che si rappresenta con a^x. È facile dimostrare che la funzione a^x, così definita, conserva le varie proprietà che noi già le conosciamo per x razionale, cioè il variare sempre in un senso quando x va crescendo, il crescere indefinitamente con x, o tendere a zero, secondo che a è maggiore o minore di 1, e finalmente la proprietà $a^x . a^{x'}=a^{x+x'}$.

c) Segue dalle ultime osservazioni che l'eguaglianza $a^y=x$ definisce y come funzione di x nell'intervallo $(0, \infty)$, escluso l'estremo inferiore, giacchè ad ogni valore positivo di x corrisponde uno ed *un sol* valore di y. Noi ci serviremo sempre dei logaritmi naturali, la cui base è il numero *

$$e=\lim_{n=\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718281828459045\ldots\,,$$

e li rappresenteremo con $\log x$. Del resto dall'identità $a^{\operatorname{Log} x}=e^{\log x}$ si deduce, prendendo i logaritmi dei due membri nell'uno o nell'altro sistema, $\operatorname{Log} x=\mathrm{M}\log x$, dove con M si designa la costante $\operatorname{Log} e=1/\log a$, che si suole chiamare *modulo* del sistema dei logaritmi in base a. In particolare si trova * che il modulo del sistema dei logaritmi volgari ($a=10$) è $\mathrm{M}=0{,}434294481\ldots$ La continuità di $\operatorname{Log} x$ è una immediata conseguenza della continuità di a^x.

---

* *Analisi algebrica*, pp. 109, 120, 267.

d) Quando x tende a zero, il quoziente di $a^x - 1$ per x resta compreso fra i numeri

$$n\left(\sqrt[n+1]{a}-1\right) \quad , \quad (n+1)\left(\sqrt[n]{a}-1\right) ,$$

dove $n=[1/x]$; e siccome * si ha $\lim\limits_{n=\pm\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\log a$, si ha pure

$$\lim_{x=0}\frac{a^x-1}{x}=\log a .$$

Un esempio di funzione continua per tutti i valori della variabile indipendente ci è dunque offerto dalla funzione che per $x \gtrless 0$ è espressa da $(a^x-1)/x$, e per $x=0$ è uguale a $\log a$. Analogamente si dimostra che

$$\lim_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \ ;$$

ed è continua, per conseguenza, la funzione espressa da $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ in generale, ma uguale ad e per $x=0$.

e) Per fare un'altra semplice applicazione delle cose dette nel § 28 proponiamoci di trovare, tra le funzioni che godono della proprietà $f(x)+f(x')=f(x+x')$, quelle che sono *continue*. Se x è un numero razionale positivo, posto $x=p/q$ con p e q interi e positivi, è chiaro che si deve avere

$$f(x)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{p}{q}\cdot qf\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1)=ax \ ,$$

rappresentando con a il valore di $f(1)$. Siccome per $x'=0$ si ha $f(x)+f(0)=f(x)$, si vede subito che $f(0)=0$; poi, per $x'=-x$, si ottiene $f(-x)=-f(x)$, e però $f(x)=ax$ anche quando ad x si attribuisce un valore razionale negativo. Se invece si attribuisce ad x un valore irrazionale, e si costruisce arbitrariamente una successione di numeri razionali $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ tendenti ad x, si deve avere, in virtù della continuità,

$$f(x)=f(\lim_{n=\infty} x_n)=\lim_{n=\infty} f(x_n)=\lim_{n=\infty} ax_n=ax \ .$$

Invitiamo il lettore a fare una ricerca analoga per le funzioni soddisfacenti alla condizione $f(x)f(x')=f(xx')$, notando che questa è soddisfatta, oltrechè dalla funzione continua x^m, anche da infinite funzioni discontinue, fra le quali è $\operatorname{sgn} x$.

30. Funzioni discontinue. Una funzione si dice *discontinua* per un certo valore di x, quando non è continua; e *discontinua in un intervallo* quando è discontinua per *un* valore almeno, appartenente all'intervallo stesso. La discontinuità può verificarsi da ciascun lato di $x=a$, o

* *Analisi algebrica*, p. 111.

da un lato solo, ed in ogni caso le discontinuità che si possono avere a destra o a sinistra di a sono fra loro indipendenti. Occupiamoci dunque delle discontinuità possibili a destra di a, ed osserviamo che la funzione è discontinua sia quando, esistendo il suo limite a destra, esso ha un valore finito, diverso da $f(a)$, sia quando tale limite è infinito o non esiste. Nel primo caso la discontinuità si dice *ordinaria* o di *prima specie*, nel secondo è di *seconda specie*. La differenza sostanziale fra le due specie sta in ciò, che la seconda non dipende dal valore che la funzione prende per quel valore di x che si considera, ma unicamente dal modo di comportarsi della funzione intorno al detto valore. In altri termini, per sapere se $f(x)$ è discontinua di seconda specie, a destra o a sinistra di a, è inutile conoscere $f(a)$: ciò è indispensabile, invece, per sapere se la funzione ha una discontinuità ordinaria, la quale potrebbe anche scomparire, almeno da un lato di a, cambiando il valore di $f(a)$.

31. **Esempii:** *a)* Dalle proposizioni finali del § 26 segue che $1/x$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ sono continue fintantochè $x \gtrless 0$; ma, per $x=0$, esse hanno una discontinuità di seconda specie. Per constatare ciò non occorre informarsi qual valore s' intenda assegnar loro per $x=0$; basta osservare che, per x tendente a zero, il valore assoluto di $1/x$ cresce oltre ogni limite, e che $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ non tende ad alcun limite, giacchè in un intervallo arbitrariamente piccolo $(-h, h)$ riprende, un dopo l' altro, i valori $0, 1, 0, -1$, tutte le volte che il valore assoluto di $2/\pi x$, crescendo oltre ogni limite, diventa un numero intero, congruo (*modulo* 4) ad uno dei numeri $0, 1, 2, 3$. Invece la funzione che per $x \gtrless 0$ è espressa da $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ è continua anche per $x=0$, o per questo valore presenta una discontinuità ordinaria, secondo che il valore attribuitole per $x=0$ è o non è zero. Che una discontinuità possa presentarsi anche da un lato solo d' un valore di x, si vede subito considerando, per esempio, la funzione che per $x=0$ è zero, e per $x \gtrless 0$ è espressa da $e^{\frac{1}{x}}$: questa è continua a sinistra dello zero, discontinua a destra, perchè i suoi valori tendono a zero o all' infinito secondo che x tende a zero per valori negativi o per valori positivi. Discontinua come $1/x$, a destra dello zero, è la funzione $\log x$, continua per $x>0$, priva di senso per $x<0$. Altrettanto si può dire di $\operatorname{sen}\log x$, discontinua come $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, ma continua per $x>0$ in virtù dell' ultima proposizione del § 26. Anche per questa ragione è continua $\log \operatorname{sen} x$ fintantochè non si ha $\operatorname{sen} x=0$; ma è discontinua come $1/x$ a destra dei multipli pari di π, ed a sinistra dei multipli dispari, comunque se ne completi la definizione. Le funzioni precedenti, come tutte quelle che sono discontinue un numero finito di volte in un intervallo finito, si dicono *generalmente continue*, per distinguerle dalle funzioni *infinite volte discontinue*.

b) Anche $\operatorname{tg} x$ è generalmente continua, non così $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$. La prima, quoziente delle funzioni continue $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, è continua fintantochè $\cos x \gtrless 0$; ma è discontinua di seconda specie intorno alle infinite radici $\alpha = \frac{1}{2}\pi \pm n\pi$ di $\cos x$, giacchè si ha

$$\lim_{x=\alpha-0} \operatorname{tg} x = +\infty \quad , \quad \lim_{x=\alpha+0} \operatorname{tg} x = -\infty \ .$$

Simili discontinuità si presentano per infiniti valori di x, vicini allo zero quanto ci piace, nella funzione definita, per $x \gtrless 0$, da $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$: questa è invece continua in tutto l'intervallo $(2/\pi, \infty)$ escluso l'estremo inferiore, ed in tutto $(-\infty, -2/\pi)$ escluso l'estremo superiore. Per $x = 0$ si ha sempre, come nelle vicinanze, una discontinuità di seconda specie, ma vi si osserva qualche cosa di più complicato, in quanto che la funzione riprende infinite volte tutti i valori possibili. Qui si noti che a destra come a sinistra dello zero la funzione *diventa*, ma *non resta* grande quanto si vuole: ecco perchè (§ 21) non si può dire che *cresce all'infinito*, ma soltanto che *non è finita* intorno allo zero.

c) L' ultima osservazione si può anche fare, a destra dello zero, a proposito della funzione che per x razionale ha il valore 0, e per x irrazionale è espressa da $\log x$. Inoltre questa è discontinua di seconda specie per *tutti* i valori di $x \gtrless 1$: è una funzione *totalmente discontinua*, mentre $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$ appartiene alla categoria delle funzioni *punteggiate discontinue*, perchè in $(-h, h)$, malgrado le infinite discontinuità, noi possiamo pur sempre trovare valori di x, ed anzi infiniti valori, per cui la funzione è continua. Son queste le due grandi categorie * di funzioni *infinite volte discontinue*. Un più semplice esempio di funzione totalmente discontinua ci è offerto dalla funzione che prende i valori 0 ed 1 secondo che x è razionale o irrazionale; ed anche da quella che abbiamo precedentemente (§ 13, *f*) rappresentata con $\varpi(x)$. Se poi si considera una funzione, definita a piacere tutte le volte che $\varpi(x)$ è nulla o priva di significato, ed uguale a $\log \varpi(x)$ in ogni altro caso, è chiaro non solo che questa funzione *non è continua*, ma che *non è finita* in qualunque intervallo, piccolo quanto si vuole.

d) La funzione $[x]$, continua a destra di tutti i valori di x, presenta discontinuità ordinaria soltanto a sinistra di ciascun valore intero di x. Infatti, quando x è un numero intero, si ha $[x] = x$, $[x+0] = x$, $[x-0] = x-1$. La funzione $[1/x]$, continua a sinistra di qualunque valore positivo o negativo di x, è discontinua di prima specie a destra di infiniti valori, vicini allo zero quanto si vuole, ed è invece discontinua di seconda specie per $x = 0$. La funzione espressa in generale da $x[1/x]$, ed uguale all' unità per $x = 0$, è continua per questo valore di x, quantunque intorno ad esso ne cadano infiniti altri, a destra dei quali la funzione subisce una discontinuità ordinaria, misurata appunto da x, e che tende perciò a scomparire quando x tende a zero.

e) Mediante la funzione $[x]$ è agevole mostrare che *una funzione continua di funzione discontinua non sempre è discontinua*. Sia $\varphi(x)$ una funzione continua, obbligata soltanto alla condizione $\varphi(0) = \varphi(1)$, come, per esempio, $\operatorname{sen} \pi x$, o $x - \sqrt{x}$; ecc. Si rappresenti, per brevità, con $\psi(x)$ la funzione $x - [x]$, e si

* Per convincersi che queste non sono vane distinzioni, ma che rispondono invece ad una sostanziale diversità nel modo di comportarsi delle funzioni discontinue, leggansi i *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* del Dini; p. 62.

consideri $f(x)=\varphi(\psi(x))$, funzione *continua* della funzione *discontinua* $\psi(x)$. Evidentemente $f(x)$ non può essere discontinua se non quando è discontinua $\psi(x)$, cioè a sinistra dei valori interi di x. Ciò premesso si osservi che, per questi valori, $\psi(x)=0$, $f(x)=\varphi(0)$, mentre a sinistra si ha

$$\psi(x-0)=1 \quad , \quad f(x-0)=\varphi(\psi(x-0))=\varphi(1)=\varphi(0)=f(x) \; .$$

Dunque $f(x)$ è continua. Un esempio più semplice si ha prendendo $\psi(x)=1/x^2$ per $x \gtrless 0$, e $\psi(0)=0$, e scegliendo $\varphi(x)$ fra quelle funzioni continue, che tendono a riprendere, per x infinito, il valore che hanno per $x=0$: per esempio $e^{-x}\operatorname{sen} x$. Malgrado che $\psi(x)$ sia discontinua per $x=0$, la funzione $f(x)=\varphi(\psi(x))$ è continua, perchè

$$f(0)=\varphi(\psi(0))=\varphi(0) \quad , \quad \lim_{x=0} f(x)=\varphi(\infty)=\varphi(0) \; .$$

f) È generalmente continua la funzione

$$f(x)=\operatorname{sen} x+{}^1/_2\operatorname{sen} 2x+{}^1/_3\operatorname{sen} 3x+\ldots\, ,$$

che si annulla insieme a $\operatorname{sen} x$, ma (§ 13, *g*) prende i valori

$$f(x)={}^1/_2(\pi-x)+\left[\frac{x}{2\pi}\right]\pi \, ,$$

ed è per conseguenza continua fintantochè x non diventa uguale ad un multiplo α di 2π. Intanto

$$f(\alpha)=0 \quad , \quad f(\alpha+0)={}^1/_2\pi \quad , \quad f(\alpha-0)=-{}^1/_2\pi \; ,$$

e però si ha, da ciascun lato dei valori $x=\alpha$, una discontinuità ordinaria. È notevole questo esempio perchè ci mostra che *una somma di infinite funzioni continue può non essere continua.* Inoltre, poichè

$$\lim(\operatorname{sen} x+{}^1/_2\operatorname{sen} 2x+\cdots)\gtrless\lim\operatorname{sen} x+{}^1/_2\lim\operatorname{sen} 2x+\cdots$$

per x tendente a zero, si vede (*cfr.* § 22) che *il limite d'una somma non sempre è uguale alla somma dei limiti delle parti*, quando queste sono in numero infinito.

32. **Teorema VI.** *Se* f(x) *è continua e diversa da zero per* x = a, *essa conserva intorno ad* a *il segno di* f(a).

Infatti, in virtù della continuità, $\lim_{x=a} f(x)=f(a)$: ciò vuol dire che, dato il numero positivo ε, piccolo quanto si vuole, esiste un numero positivo h, tale che in tutto l'intervallo $(a-h\,,a+h)$ si ha $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, cioè

$$f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon \; . \qquad (3)$$

Basta prendere $\varepsilon = |f(a)|$ per vedere che si ha $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ secondo che $f(a)$ è positivo o negativo.

33. **Teorema VII.** *Una funzione continua, in un intervallo finito, è anche finita nello stesso intervallo.*

Che la funzione sia finita intorno ad ogni numero dell'intervallo risulta immediatamente dalla limitazione (3): essa è dunque, in virtù del teorema II, finita nell'intervallo.

34. **Teorema VIII.** *Una funzione continua in un intervallo, negli estremi del quale prende segni opposti, deve annullarsi almeno una volta nell'intervallo stesso.*

In forza del teorema VI esistono sempre, alla destra dell'estremo inferiore a, infiniti valori di x, tali che per *tutti* i numeri dell'intervallo (a, x) la funzione conserva il segno di $f(a)$: sia, per esempio, il segno $+$. I predetti valori di x non sono grandi quanto si vuole, giacchè nell'altro estremo, in b, la funzione prende, per ipotesi, un valore negativo. Il loro insieme è dunque finito, e però (§ 4) ammette il limite superiore ξ. Siccome alla sinistra di ξ la funzione si conserva positiva, non è possibile, in virtù del medesimo teorema VI, che sia $f(\xi) < 0$. Ne segue, innanzi tutto, essendo $f(b) < 0$, che ξ è minore di b, e che per conseguenza si può, nell'intervallo (a, b), considerare anche la destra di ξ. Orbene, se fosse $f(\xi) > 0$, esisterebbero, alla destra di ξ, numeri x, tali che in tutto (ξ, x), e per conseguenza in tutto (a, x), la funzione si conserverebbe positiva, cioè ξ, limite superiore d'un insieme di numeri, si troverebbe superato da questi numeri: ciò è assurdo. Dunque $f(\xi) = 0$.

35. **Corollario.** *Una funzione continua non può passare da un valore ad un altro senza passare per tutti i valori intermedii.*

Sia l un numero qualunque, compreso tra $f(a)$ ed $f(b)$, e si consideri la funzione $f(x) - l$, evidentemente continua come $f(x)$ nell'intervallo (a, b), negli estremi del quale essa prende i valori $f(a) - l, f(b) - l$, che per le ipotesi fatte hanno segni opposti. Il teorema precedente afferma appunto l'esistenza d'un numero ξ, compreso fra a e b, per cui si ha $f(\xi) - l = 0$, cioè $f(\xi) = l$.

36. **Osservazioni:** *a)* Le ultime proprietà sono di natura assai più delicata che non apparisca. Non si creda, infatti, che si possa riguardare come intuitiva l'impossibilità in cui si trova una funzione continua di cambiar segno senza annullarsi, poichè *a priori* non ripugna al concetto di continuità che una simile funzione sia, per esempio, suscettibile di soli valori irrazionali. Or come potrebbe questa funzione annullarsi, cioè as-

sumere il valore zero, razionale? Solo in seguito alla dimostrazione del teorema VIII ci è permesso asserire che una funzione siffatta non può esistere.

b) Ma nemmeno si deve credere che la possibilità di cambiar valore saltando valori intermedii sia una proprietà essenziale della discontinuità, giacchè *vi sono funzioni discontinue che non passano da un valore ad un altro senza prendere successivamente tutti i valori intermedii.* Basterebbe citare (§ 31, *a*) la funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, discontinua per $x=0$. Quando x, decrescendo, passa da un valore positivo ad un valore negativo, la funzione, pur eseguendo continue oscillazioni fra -1 e $+1$, non salta mai da un valore ad un altro qualsiasi *. Non si può dire altrettanto di $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$, che passa bruscamente, intorno allo zero, da valori positivi a valori negativi, infinitamente grandi nel senso assoluto.

c) Anche una funzione totalmente discontinua può godere della proprietà di cui si discorre. Infatti, presi ad arbitrio i numeri a e b, vicini fra loro quanto si vuole, si può dimostrare che la funzione $\varpi(x)$ assume (infinite volte) nell'intervallo (a, b) *tutti* i valori compresi fra 0 ed 1, e quindi fra $\varpi(a)$ e $\varpi(b)$, concessa l'esistenza di questi numeri. Dopo quanto si è detto precedentemente (§ 13, *f*) intorno a questa funzione, possiamo limitarci a far vedere che, dato un numero qualunque l fra 0 ed 1, si può sempre trovare un valore di x, tale che $\varpi(x)$ riesca uguale ad l. Costruita nell'intervallo $(0, 1)$ una successione $l_1, l_2, l_3, \ldots$ di numeri tendenti ad l, scriviamo x nel sistema decimale, attribuendogli arbitrariamente la parte intera, distribuendone le cifre decimali in gruppi che abbiano successivamente $1, 2, 3, \ldots$ cifre, e prendendo anche ad arbitrio le cifre di ciascun gruppo, obbligandoci solo a far sì che, fra le ν cifre del ν^{imo} gruppo vi siano $[\nu l_\nu]$ zeri. Ciò premesso nel numero x, così costruito, prendiamo le prime n decimali, e supponiamo che la n^{ima} cada nel gruppo ν^{imo}, dimodochè

$$n'-\nu < n \leqq n' \quad , \quad m'-[\nu l_\nu] \leqq m \leqq m' \; ,$$

rappresentando con m il numero degli zeri, e ponendo

$$n' = 1+2+3+\cdots+\nu \quad . \quad m' = [l_1]+[2l_2]+[3l_3]+\cdots+[\nu l_\nu] \; .$$

Ora si osservi che, quando ν cresce all'infinito,

$$\lim \frac{\nu}{n'} = 0 \; , \quad \lim \frac{[\nu l_\nu]}{n'} = 0 \; ,$$

* Per altri esempii vedi una Memoria di Darboux nelle *Annales de l'École normale supérieure*, 2ème série, t. IV.

ed inoltre, per un noto teorema *,

$$\lim \frac{m'}{n'} = \lim \frac{[\nu l_\nu]}{\nu} = \lim l_\nu = l\ ;$$

quindi, essendo

$$\frac{m' - [\nu l_\nu]}{n'} \leq \frac{m}{n} < \frac{m'}{n' - \nu}\ ,$$

si ha pure

$$\varpi(x) = \lim \frac{m}{n} = \lim \frac{m'}{n'} = l\ .$$

37. **Teorema IX** (secondo teorema di Weierstrass). *Ogni funzione, continua in un intervallo finito, prende nell'intervallo stesso il minimo ed il massimo valore.*

Il teorema VII ci dice che la funzione è finita nell'intervallo (a, b), in cui è continua. Dunque, in virtù del teorema I, esiste in (a, b) il suo limite inferiore λ. Se supponiamo che questo *non sia* un valore di $f(x)$ nel detto intervallo, la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - \lambda}$$

è definita in tutto (a, b), *è continua* come quoziente di funzioni continue, ma *non è finita*, perchè, dato l grande quanto si vuole, siccome si può sempre trovare un valore di $f(x)$ inferiore a qualunque numero maggiore di λ, ed in particolare a $\lambda + \frac{1}{l}$, è chiaro che per lo stesso valore di x si ha $\varphi(x) > l$. Ora dal teorema VII sappiamo che non esiste funzione continua in un intervallo finito, la quale non sia anche finita nell'intervallo stesso. È dunque assurdo supporre che λ *non sia* un valore di $f(x)$ in (a, b), vale a dire che deve certamente esistere in (a, b) almeno un numero ξ, tale che $f(\xi) = \lambda$. Dunque λ è il minimo valore della funzione. Nello stesso modo si dimostra l'esistenza del massimo. Adunque il non raggiungere il limite inferiore o il limite superiore, in un dato intervallo, è per una funzione *un sicuro indizio di discontinuità* nell'intervallo stesso.

38. **Teorema X** (teorema di Cantor). *Se una funzione è continua in un intervallo finito, si può, per ogni numero positivo* ε, *piccolo quanto si vuole, determinare un numero* h, *tale che in qualunque intervallo, di grandezza* h, *contenuto nell'intervallo dato, l'oscillazione della funzione sia minore di* ε. F V p. 194

Per *oscillazione* d'una funzione in un intervallo s'intende la diffe-

---

* *Analisi algebrica*, p. 98.

renza fra il suo limite superiore ed il suo limite inferiore nell'intervallo stesso; e però, se la funzione è continua, l'oscillazione è l'eccesso del massimo sul minimo valore. Ciò premesso, dato $\varepsilon > 0$ piccolo quanto si vuole, la continuità di $f(x)$ ci permette, in virtù del teorema V, di costruire intorno a ciascun valore di x, appartenente all'intervallo che si considera, un intervallo $(x-h, x+h)$ tale che, per ogni coppia di valori x' ed x'', in esso inclusi, sia

$$|f(x')-f(x'')| < \varepsilon ; \tag{4}$$

ma, per determinati valori di ε e di x, infiniti sono i valori che si possono attribuire ad h, perchè, conosciutone uno, ogni numero positivo, inferiore a quello ottenuto, si trova *a fortiori* nelle medesime condizioni. Senonchè gli infiniti valori di h, relativi a determinati valori di ε e di x, non possono essere grandi quanto si vuole, se non altro perchè l'intervallo che si considera è finito; e però ammettono il limite superiore. È questo limite che d'ora innanzi rappresenteremo con h. Così, dato ε, ad ogni numero x corrisponde *un determinato* numero h, tale che per ogni coppia di numeri x' ed x'', superiori ad $x-h$, inferiori ad $x+h$, è soddisfatta la (4). Si è definita così una funzione $h(x)$, obbligata a prendere valori positivi in tutto l'intervallo. Questa funzione ammette dunque il limite inferiore λ, positivo *o, forse, nullo*; ed in virtù del primo teorema di Weierstrass esiste nell'intervallo considerato almeno un numero ξ, intorno al quale il limite inferiore di $h(x)$ è sempre λ. Ci proponiamo di dimostrare che λ non può essere nullo. Posto $h(\xi)=h_0$, consideriamo un valore qualunque di x, appartenente all'intervallo $(\xi - {}^1/_2 h_0, \xi + {}^1/_2 h_0)$. Ogni coppia di numeri x' ed x'', presi in $(x - {}^1/_2 h_0, x + {}^1/_2 h_0)$, appartiene anche all'intervallo $(\xi - h_0, \xi + h_0)$, e però soddisfa alla condizione (4). Dunque i valori che $h(x)$ assume in $(\xi - {}^1/_2 h_0, \xi + {}^1/_2 h_0)$ non sono inferiori ad ${}^1/_2 h_0$, e però $\lambda \geqq {}^1/_2 h_0$. Per conseguenza, anche in tutto il primitivo intervallo, $h(x)$ non è mai inferiore ad ${}^1/_2 h_0$. Ne segue subito che, dato ε, è verificata la (4), comunque si scelga nell'intervallo dato la coppia di numeri x' ed x'', purchè sia $|x'-x''| < h_0$. Osserviamo, per finire, che nell'enunciato del teorema, invece di parlare delle *infinite differenze*, che compariscono nel primo membro di (4), si è parlato soltanto dell'oscillazione, cioè della *differenza massima*, giacchè basta rendere questa minore di ε perchè tali diventino tutte le altre.

39. Del precedente teorema si può dare un'altra dimostrazione, evitando di servirsi del primo teorema di Weierstrass. Prendiamo le mosse dal punto in cui si è giunti a definire, in corrispondenza ad un dato numero $\varepsilon > 0$, la funzione $h(x)$. Nell'intervallo $(x-h(x), x+h(x))$ si prenda un numero qualunque $x+l$, e si osservi che la condizione (4) è soddis-

fatta in qualunque parte dell'intervallo, e per conseguenza nell'intervallo, diviso per metà da $x+l$, che ha un estremo coincidente con quello fra gli estremi del primo intervallo, che si trova *più vicino* ad $x+l$. Ne segue $h(x+l) \geqq h(x) \mp l$, secondo che l è positivo o negativo. Invece non sempre ciò accade quando si prende l'estremo *più lontano* da $x+l$; ed è poi certo che, se si considera un intervallo anche più grande, sempre diviso per metà da $x+l$, cessa di valere la (4); e ciò in virtù della stessa definizione di $h(x)$. Ne segue $h(x+l) \leqq h(x) \pm l$, secondo che l è positivo o negativo. Dunque, in tutti i casi,

$$|h(x+l)-h(x)| \leqq |l| \quad , \quad \lim_{l=0} h(x+l) = h(x) \; ,$$

vale a dire che la funzione $h(x)$ è continua. Intanto il secondo teorema di Weierstrass afferma l'esistenza del *minimo* valore di $h(x)$; e questo minimo λ è *positivo*, giacchè tali sono tutti i valori di $h(x)$. Ed ora è chiaro che l'intervallo, di cui si parla nell'enunciato del teorema di Cantor, è appunto 2λ.

TEORIA DELLE DERIVATE.

La derivazione.

40. **Definizioni**. Quando un numero z passa da uno stato di grandezza ad un altro, l'incremento (positivo, negativo o nullo) che subisce si suole rappresentare con δz. Ad ogni arbitrario incremento δx della variabile indipendente corrisponde un determinato incremento δy della funzione $y=f(x)$; poichè, fissato x,

$$\text{se} \quad \delta x = h \quad , \quad \text{è} \quad \delta y = f(x+h) - f(x) \; .$$

Il rapporto

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

chiamasi *rapporto incrementale* destro o sinistro, secondo che h è positivo o negativo. Se i rapporti incrementali, destro e sinistro, tendono, per h tendente a zero, verso limiti determinati, questi sono funzioni di x, che diconsi *derivata destra* e *derivata sinistra* di y. Le due derivate possono coincidere, ed in tal caso si dice che la funzione y ha una derivata unica, che si rappresenta con $f'(x)$, o più brevemente con y'. Le funzioni che più comunemente si considerano sono *a derivata unica*.

41. **Esempii**: *a)* La derivata d'una *costante* è *zero*, perchè, se y è costante, si ha sempre $\delta y = 0$, qualunque sia x. Dunque $y' = 0$. La derivata della *variabile indipendente* è l'*unità*, perchè, se $y = x$, è $\delta y = \delta x$. Dunque $y' = 1$.

b) Per convincersi che la derivata d'una funzione può avere valori differenti a destra ed a sinistra d'uno stesso valore della variabile indipendente, si consideri la funzione $y = f(x)$, che per $x = 0$ è zero, e per $x \gtrless 0$ è espressa da $x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$. Siccome

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(h) = h \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{h} \quad . \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{h} \ ,$$

e si ha

$$\lim_{h=+0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{h} = {}^1/_2 \pi \quad , \quad \lim_{h=-0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{h} = - {}^1/_2 \pi \ ,$$

si vede che, per $x = 0$, la funzione considerata ha la derivata destra uguale ad ${}^1/_2 \pi$, e la derivata sinistra uguale a $- {}^1/_2 \pi$.

c) Similmente, per la funzione che ha il valore 0 se $x = 0$, ed è espressa da $x/(1 + e^{\frac{1}{x}})$ se $x \gtrless 0$, si ha

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(h) = \frac{h}{1 + e^{\frac{1}{h}}} \quad , \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} \ .$$

Ora, secondo che h tende a zero dalla destra o dalla sinistra, $e^{\frac{1}{h}}$ cresce indefinitamente o tende a zero, e però

$$\lim_{h=+0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = 0 \quad , \quad \lim_{h=-0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = 1 \ ,$$

vale a dire che la funzione ammette, per $x = 0$, una derivata destra uguale a zero, ed una derivata sinistra uguale all'unità.

d) Un altro esempio ci è fornito (*cfr.* § 31, *e*) dalla funzione $y = \varphi(x - [x])$ nell'ipotesi che $\varphi(x)$ ammetta la derivata destra α per $x = 0$, la derivata sinistra β per $x = 1$, e che sia $\alpha \gtrless \beta$ e $\varphi(0) = \varphi(1)$. Si vede subito che, se si attribuisce ad x un valore intero, si ha

$$\lim_{\delta x = +0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{h=+0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \alpha \quad , \quad \lim_{\delta x = -0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{h=-0} \frac{\varphi(1 + h) - \varphi(1)}{h} = \beta \ ,$$

e però la funzione ammette una derivata destra ed una derivata sinistra, tra loro differenti, per ogni valore intero della variabile. Per esempio, si può prendere $\varphi(x) = \operatorname{sen} \pi x$, dopo avere osservato che (§ 29, *a*)

$$\alpha = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} \pi h - \operatorname{sen} 0}{h} = \pi \quad , \quad \beta = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}(\pi + \pi h) - \operatorname{sen} \pi}{h} = -\pi \ .$$

e) **Ma la derivata può anche *non esistere*, o *esistere soltanto da un lato di* x. Per esempio la funzione $y = \varpi(x)$, la cui definizione (§ 13, f) sia completata assegnando arbitrariamente (fra 0 ed 1) i valori di y quando $\varpi(x)$ non esiste, è priva di derivata per qualunque valore di x, perchè (§ 36, c), nel tendere di δx a zero, δy oscilla indefinitamente fra -1 e $+1$, dimodochè il rapporto incrementale, ben lungi dal tendere verso un limite, riprende infinite volte tutti i valori possibili. In modo analogo si comporta la funzione, che ha i valori 0 ed 1, secondo che x è razionale o irrazionale, giacchè δy è suscettibile dei soli valori $0, 1, -1$. La funzione $x - [x]$ ha una derivata uguale all'unità per ogni valore di x, eccetto a sinistra dei valori interi, dove, per $\delta x = h < 0$, si ha $\delta y = 1 + h$, sicchè il rapporto incrementale tende a $-\infty$. In questi casi la non esistenza della derivata è unicamente dovuta alla discontinuità della funzione, giacchè non è possibile che la derivata esista là dove la funzione è discontinua; ed infatti, perchè $\delta y / \delta x$ possa tendere ad un limite finito, quando δx tende a zero, occorre che anche δy tenda a zero, e quindi che y sia continua. Adunque *la continuità della funzione è condizione necessaria* perchè la derivata esista.**

f) ***La continuità non è condizione sufficiente* per l'esistenza della derivata.** Così, per esempio, la funzione $\sqrt{x}$ è continua per $x \geq 0$, ed intanto si ha

$$\lim_{h=+0} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \infty .$$

In seguito ci avverrà di affermare che la derivata di $\sqrt{x}$, per $x = 0$, è infinita; ma con ciò si vuole spesso intendere, nelle applicazioni geometriche, non che *il limite del rapporto incrementale* è infinito, ma che *la derivata*, calcolata per $x > 0$, cresce indefinitamente quando x tende a zero. Effettivamente, per $x > 0$,

$$\lim_{h=0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x=+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \ ;$$

ma è chiaro che non si potrebbe attribuire il medesimo significato all'asserzione che, per x intero, la derivata sinistra di $x - [x]$ è $-\infty$. Del resto è facile trovare funzioni continue, per le quali il rapporto incrementale non ha limite alcuno, finito o infinito. Manca, per esempio, la derivata della funzione $y = x\left[\frac{1}{x}\right]$, continua per $x = 0$, giacchè si ha

$$f(0) = 1 \quad , \quad f(h) = h\left[\frac{1}{h}\right] \quad , \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \left[\frac{1}{h}\right] - \frac{1}{h} \ ,$$

e si vede che, nel tendere di h a zero, il rapporto incrementale oscilla indefinitamente fra 0 e -1, escluso.

g) All'ultimo esempio si potrebbe obbiettare che la funzione considerata, sebbene continua, è infinite volte discontinua intorno allo zero; ma, per convincersi che non si deve a ciò la mancanza di derivata, basta considerare la funzione, che per $x=0$ è zero, e per $x \gtrless 0$ è espressa da $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$: continua sempre, essa non ha derivata per $x=0$, giacchè

$$f(0)=0 \quad , \quad f(h)=h \operatorname{sen} \frac{1}{h} \quad , \quad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\operatorname{sen} \frac{1}{h} \ ;$$

ed il limite di $\operatorname{sen} \frac{1}{h}$, per h tendente a zero, non esiste.

h) Un altro esempio notevole ci è dato dalla funzione $\varphi(x-[x])$ già considerata. Se si prende $\varphi(x)=x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ per $x \gtrless 0$, e $\varphi(0)=0$, si ha pure $\varphi(1)=0$, $\varphi'(0)$ *non esiste*, e

$$\varphi'(1)=\lim_{h=0} \frac{1+h}{h} \operatorname{sen} \frac{\pi}{1+h}=\lim_{h=0} \frac{1+h}{h} \operatorname{sen} \frac{\pi h}{1+h}=\lim_{\alpha=0} \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha}=\pi \ .$$

Dunque la funzione *continua*, rappresentata in generale da

$$(x-[x]) \operatorname{sen} \frac{\pi}{x-[x]} \ ,$$

è priva della derivata destra per tutti i valori interi di x, pur ammettendo la derivata sinistra uguale a π. Prendendo invece $\varphi(x)=x-\sqrt{x}$ si trova che la funzione continua $[x]+\sqrt{x-[x]}$ ha la derivata destra infinita e la derivata sinistra uguale ad $^1/_2$ per tutti i valori interi di x. Partendo da questa funzione Schwarz è riuscito a costruirne un'altra, per la quale si presentano infinite volte le analoghe circostanze in qualunque intervallo. Finalmente si deve a Weierstrass l'esempio *, che più oltre faremo conoscere, d'una *funzione continua, priva di derivata qualunque sia x.*

42. **Derivazione delle funzioni inverse.** Consideriamo la funzione $y=f(x)$, continua per $x=a$ ed intorno ad a; e supponiamo che, almeno per questi valori di x, si riesca a definire la funzione inversa
tona $x=g(y)$. Vogliamo dimostrare che *la derivata della funzione g esiste, quando esiste ed è diversa da zero la derivata della funzione f.* Dalla continuità di y per $x=a$ segue che δy, ossia $f(a+\delta x)-f(a)$, tende a 0 insieme a δx; e per la continuità di y intorno ad a avviene inoltre che δy è funzione continua di δx, e per conseguenza (§ 35) prende *tutti* i valori appartenenti ad un certo intervallo, convenientemente piccolo, che racchiude lo zero, *ad eccezione del valore zero.* La ragione di questa esclusione sta in ciò, che se in corrispondenza ad un certo valore h di δx si

* Esempii di funzioni analoghe, più generali, si trovano nei *Fondamenti per la teorica, ecc.*, del Dini; p. 147.

potesse avere $\delta y = 0$, ad uno stesso valore $f(a)$ di y corrisponderebbero i valori a ed $a+h$ di x, e quindi non si potrebbe dire che x è funzione di y. Solo in seguito alle precedenti osservazioni si è in diritto di considerare $\delta x/\delta y$ come il rapporto incrementale della funzione $x=g(y)$; e se poi si suppone che, col tendere di δx a zero, $\delta y/\delta x$ tende ad un limite $y' \gtrless 0$, si vede subito (§ 22) che il limite di

$$\frac{\delta x}{\delta y} = 1 \Big/ \frac{\delta y}{\delta x}$$

esiste, ed ha il valore $1/y'$. In termini più espliciti, quando si conosce la derivata $f'(x) \gtrless 0$ di $f(x)$, quella della funzione inversa $g(x)$ è

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} . \tag{1}$$

Le considerazioni precedenti valgono separatamente per ciascun lato del dato valore a. Così, per esempio, se si ammette l'esistenza della sola derivata destra di y, siccome δy finisce (§ 22) per assumere e conservare il segno di questa derivata, si potrà, secondo che questo segno è $+$ o $-$, rispettivamente affermare l'esistenza della derivata, *destra* o *sinistra*, della funzione inversa, per il valore $f(a)$ della variabile indipendente. Invece, se la derivata di y che si considera è la derivata sinistra, si potrà, secondo che questa è positiva o negativa, affermar l'esistenza della derivata *sinistra* o *destra*, rispettivamente, della funzione inversa, perchè, in questo caso, δy finisce per assumere e conservare il segno opposto a quello della derivata di y. Ne segue che, se la derivata di y rispetto ad x è *unica*, tale sarà anche quella di x rispetto ad y.

43. **Derivazione delle funzioni di funzioni**. Se y è data in funzione, non di x, ma d'una funzione u, se cioè $y=f(u), u=\varphi(x)$, e se inoltre si suppone che esistano le derivate $f'(x)$ e $\varphi'(x)$, è facile dimostrare che *la derivata di* y *esiste, ed è uguale al prodotto di* f'(u) *per* $\varphi'(u)$. Infatti si ha identicamente

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} ;$$

dove $\delta u/\delta x$ tende, per ipotesi, ad un limite u': ciò esige che δu tenda a zero insieme a δx; ed inoltre, poichè la funzione u, provvista di derivata, è necessariamente continua anche intorno a quel valore di x che si considera, δu prende *tutti* i valori appartenenti ad un certo intervallo, che racchiude lo zero. Ciò premesso, se a partire da un valore di δx, convenientemente piccolo nel senso assoluto, δu si mantiene costantemente diverso da zero (come sempre accade quando $u' \gtrless 0$), si ha il diritto di considerare $\delta y/\delta u$ come il rapporto incrementale di y rispetto ad u, e di dire, per conseguenza, che il rapporto stesso tende ad $f'(u)$, che per ipotesi esiste; poi dall'ultima identità risulta che anche $\delta y/\delta x$ tende ad un limite y', uguale al prodotto di $f'(u)$ per u'. Resta da far vedere che la proposizione enunciata regge anche quando intorno allo zero esiste un insieme di numeri $h, h', \ldots$, tali che, diventando δx uguale ad uno di essi, ne venga $\delta u = 0$. In questo caso la derivata u', che per ipotesi esiste, non può essere diversa da zero. Intanto si osservi che, se si fa tendere δx a zero evitando i valori $h, h', \ldots$, è ancora valido il ragionamento che precede, e però il rapporto $\delta y/\delta x$ tende al limite $f'(u) . 0 = 0$. Se invece δx tende a zero assumendo appunto i valori $h, h', \ldots$, il detto rapporto è nullo, perchè, essendo $\delta u = 0$, è anche nullo $\delta y = f(u + \delta u) - f(u)$. Esiste dunque la derivata y', limite di $\delta y/\delta x$ per δx tendente a zero, ed è nulla come il prodotto di $f'(u)$ per u', sicchè in tutti i casi si può scrivere l'eguaglianza $y' = f'(u) . u'$. Qui si noti che questa racchiude la (1) come caso particolare, giacchè (§ 12) per $u = g(x)$ si ha $y = x, y' = 1$. Più generalmente, se

$$y = f(u) \ , \ u = \varphi(v) \ , \ v = \psi(w) \ , \ \ldots \ ,$$

si ha $y' = f'(u)\varphi'(v)\psi'(w)\ldots$, purchè le funzioni $u, v, w, \ldots$ siano in numero finito. Così vediamo che *la derivata d'una funzione di funzioni è uguale al prodotto delle derivate di queste funzioni, supponendo presa ciascuna derivata rispetto alla variabile da cui la funzione dipende immediatamente.*

44. **Derivata d'una somma.** Sia $y = u + v + w + \ldots$, dove $u, v, w, \ldots$ sono funzioni di x, in numero finito, che ammettono le derivate; e si attribuisca ad x l'incremento δx, dal quale vengono per $y, u, v, \ldots$ gli incrementi $\delta y, \delta u, \delta v, \ldots$ Siccome si ha sempre

$$y + \delta y = u + \delta u + v + \delta v + w + \delta w + \ldots \ ,$$

ne segue

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta w}{\delta x} + \ldots \ ;$$

quindi, passando ai limiti per δx tendente a zero, $y' = u' + v' + w' + \ldots$ Dunque *la derivata d'una somma è uguale alla somma delle derivate delle parti,* purchè queste siano in numero finito.

45. **Derivata d'un prodotto.** Se $y = uv$, è

$$y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v) = uv + u\delta v + v\delta u + \delta u . \delta v \ ;$$

poi, successivamente,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x}\delta v \quad , \quad y' = uv' + vu' \ .$$

Ne segue che *la derivata d'un prodotto è uguale alla somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando la derivata di ciascun fattore per il prodotto degli altri fattori.* Infatti, ammesso che il teorema, già dimostrato per *due* fattori, valga per $n-1$ fattori, basta scrivere, nel caso d'un prodotto $y = uvw\ldots$ di n fattori,

$$y' = u'(vw\ldots) + u(vw\ldots)' = u'vw\ldots + uv'w\ldots + uvw'\ldots + \ldots \ ,$$

per accorgersi che sussiste in generale.

46. **Derivata d'un quoziente.** Ammessa l'esistenza delle derivate di u e v, esiste anche la derivata del quoziente $y = u/v$, perchè, essendo

$$\delta y = \frac{u+\delta u}{v+\delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v+\delta v)} \ ,$$

si ha

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\dfrac{\delta u}{\delta x} - u\dfrac{\delta v}{\delta x}}{v^2\left(1+\dfrac{\delta v}{v}\right)} \quad , \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \ .$$

In particolare, rappresentando con a una costante,

$$\text{se} \quad y = a/u \quad , \quad \text{è} \quad y' = -au'/u^2 \ .$$

47. **Derivata d'una potenza.** Sia $y = x^n$, con n intero e positivo. Dalla regola per la derivazione d'un prodotto, scrivendo $y = x.x\ldots x$, si deduce subito $y' = nx^{n-1}$. Vogliamo dimostrare che questa formola sussiste per ogni valore razionale di n. Prima supponiamo che n abbia la forma $1/m$, con m intero e positivo. Siccome esiste la derivata di x^m, esiste, per quanto si è detto nel § 42, anche la derivata della funzione inversa $y = x^{\frac{1}{m}}$. Constatata così l'esistenza di y', si è in diritto di derivare l'eguaglianza $y^m = x$ applicando la regola del § 43. Si ottiene

$$my^{m-1}.y' = 1 \quad , \quad y' = \frac{1}{m}y^{1-m} = ny^{m(n-1)} = nx^{n-1} \ .$$

Se poi n è il quoziente di due numeri interi, positivi, p e q, si ha, applicando la medesima regola, e tenendo presente l'ultimo risultato,

$$y=\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p \quad , \quad y'=p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}\cdot\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}=\frac{p}{q}x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1}=nx^{n-1} \; .$$

Finalmente, se n ha un valore negativo $-m$, si applichi la regola del precedente paragrafo. Si ottiene

$$y=1/x^m \quad ; \quad y'=-mx^{m-1}/x^{2m}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1} \; .$$

Ora, dato $y=u^n$, dove l'esponente n è un numero razionale qualunque, positivo o negativo, la regola del § 43 dà $y'=nu^{n-1}.u'$. In particolare,

$$\text{se} \quad y=\sqrt{u} \quad , \quad \text{è} \quad y'=u'/2\sqrt{u} \; .$$

Per evitare calcoli inutili è anche bene ricordarsi che

$$\text{se} \quad y=1/u^n \quad , \quad \text{è} \quad y'=-nu'/u^{n+1} \; .$$

48. **Derivate di a^x e $\mathrm{Log}\,x$.** Sia $y=a^x$. Se ad x si dà l'incremento $\delta x=h$, si ottiene

$$\delta y=a^{x+h}-a^x \quad , \quad \frac{\delta y}{\delta x}=a^x\frac{a^h-1}{h} \; ;$$

quindi, richiamando un risultato precedente (§ 29, *d*),

$$y'=a^x\lim_{h=0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\log a \; .$$

In particolare, se $y=e^x$, è $y'=e^x$. Analogamente per $y=\mathrm{Log}\,x$ si ha

$$\delta y=\mathrm{Log}(x+h)-\mathrm{Log}\,x \quad , \quad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{1}{h}\mathrm{Log}\left(1+\frac{h}{x}\right) \; ;$$

poi (§ 29, *c*, *d*)

$$y'=\frac{1}{x}\mathrm{Log}\lim_{h=0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{\mathrm{M}}{x} \; .$$

In particolare, se $y=\log x$, è $y'=1/x$. I due risultati precedenti sono fra loro legati mediante la formola (1), giacchè, posto $f(x)=a^x$, è $g(x)=\mathrm{Log}\,x$. Ne segue che, se si conosce una delle derivate, per esempio $f'(x)=a^x\log a$, l'altra è data dalla formola (1):

$$g'(x)=\frac{1}{f'(\mathrm{Log}\,x)}=\frac{1}{a^{\mathrm{Log}\,x}\log a}=\frac{\mathrm{M}}{x} \; .$$

Ora, per quanto si è detto nel § 43, possiamo aggiungere che, quando esiste la derivata di u, le derivate delle funzioni

$$y = e^u \quad , \quad y = \log u \ ,$$

sono rispettivamente

$$y' = e^u . u' \quad , \quad y' = u'/u \ .$$

Finalmente si osservi che il conoscere le derivate di e^u e $\log u$ permette di ritrovare la regola per la derivazione d'una potenza, *estendendola al caso d'un esponente irrazionale.* Infatti

da $y = u^n = e^{n \log u}$ si deduce $y' = e^{n \log u} . \dfrac{nu'}{u} = nu^{n-1} . u'$.

49. **Derivate delle funzioni circolari.** Sia $y = \operatorname{sen} x$. Se $\delta x = h$, è

$$\delta y = \operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} {}^1/_2 h \cos(x + {}^1/_2 h) \ .$$

Dunque (§ 29, a)

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} {}^1/_2 h}{{}^1/_2 h} \cos(x + {}^1/_2 h) = \cos x \ .$$

Se $y = \cos x$, si può fare un calcolo analogo, o anche scrivere, ricordando la regola del § 43,

$$y = \operatorname{sen}({}^1/_2 \pi - x) \quad , \quad y' = -\cos({}^1/_2 \pi - x) = -\operatorname{sen} x \ .$$

Se $y = \operatorname{tg} x$, si ottiene, considerando $\operatorname{tg} x$ come quoziente di $\operatorname{sen} x$ per $\cos x$, ed applicando la regola del § 46,

$$y' = \frac{\cos x . \cos x - \operatorname{sen} x (- \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \ ;$$

o pure, eseguendo il calcolo diretto,

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{tg}(x + h) - \operatorname{tg} x}{h} = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} . \frac{1}{\cos x . \cos(x + h)} = \frac{1}{\cos^2 x} \ .$$

Finalmente, se

$$y = \operatorname{sen} u \quad , \quad y = \cos u \quad , \quad y = \operatorname{tg} u \ ,$$

si ha rispettivamente

$$y' = u' \cos u \quad , \quad y' = -u' \operatorname{sen} u \quad , \quad y' = u'/\cos^2 u \ .$$

50. **Derivate delle funzioni circolari inverse.** Bisogna prima di tutto osservare che le derivate di queste funzioni esistono, in generale, in virtù del teorema dimostrato nel § 42. Soltanto dopo ciò, dedotte da

$$y = \text{arc sen}\, x \quad , \quad y = \text{arc cos}\, x \quad , \quad y = \text{arc tg}\, x$$

le relazioni $x = \text{sen}\, y$, $x = \cos y$, $x = \text{tg}\, y$, si ha il diritto di scrivere, derivando,

$$1 = y' \cos y \quad , \quad 1 = -y' \text{sen}\, y \quad , \quad 1 = y'/\cos^2 y \ ,$$

e quindi ricavarne i valori di y':

$$\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad -\frac{1}{\text{sen}\, y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2} \, .$$

Si può anche procedere con calcoli diretti, i quali hanno il vantaggio di fornire, insieme alle espressioni delle derivate, la prova dell'esistenza delle derivate stesse. Se, per esempio, si pone

$$y = \text{arc tg}\, x \quad , \quad \delta x = h = (1 + x(x+h))\, \alpha \ ,$$

si ha, quando h (e per conseguenza α) tende a zero,

$$y' = \lim \frac{\text{arc tg}(x+h) - \text{arc tg}\, x}{h} = \lim \frac{\text{arc tg}\, \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + x(x+h)} = \frac{1}{1+x^2} \, .$$

Si noti che, precedentemente, il radicale $\sqrt{1-x^2}$ è stato preso sempre positivo, perchè gli archi rappresentati dai simboli arc sen x ed arc cos x hanno rispettivamente il coseno ed il seno positivi. La somma di questi archi (§ 13, *d*) è costante, e ciò spiega perchè le loro derivate, uguali in valore assoluto, hanno segni opposti. Finalmente, riassumendo e ricordando la regola del § 43, vediamo che, se

$$y = \text{arc sen}\, u \quad , \quad y = \text{arc cos}\, u \quad , \quad y = \text{arc tg}\, u \ ,$$

si ha, rispettivamente,

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad y' = \frac{u'}{1+u^2} \, .$$

Aggiungiamo, per finire, che nell'invocare il teorema del § 42 abbiamo tacitamente lasciati da parte i casi nei quali la derivata della funzione non esiste. Ad esempio, per la funzione $y = \text{arc sen}\, x$ la derivata esiste fintantochè non sia $\cos y = 0$, cioè $x = \pm 1$; ma per questi valori di x si deve ritenere che la funzione è priva di derivata. Così, per $x=1$, è chiaro che la derivata di $\operatorname{arc\,sen} x$ non può esistere, nè come derivata destra (perchè a destra dell'unità non esiste la funzione), nè come derivata sinistra, perchè, posto $\operatorname{arc\,cos}(1-h) = 2\alpha$, si ha

$$\lim_{h=0} \frac{\operatorname{arc\,sen}(1-h) - \operatorname{arc\,sen} 1}{-h} = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{arc\,cos}(1-h)}{h} = \lim_{\alpha=0} \frac{\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \infty \ .$$

Altrettanto si può osservare per $\operatorname{arc\,cos} x$; ma la derivata di $\operatorname{arc\,tg} x$ esiste sempre, perchè la derivata di $\operatorname{tg} x$ non può annullarsi.

51. **Esercizii:** *a)* La derivata del polinomio

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} x + a_n \ ,$$

di grado n, è un polinomio di grado $n-1$:

$$y' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \dots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1} \ .$$

La derivata di y', che si suol chiamare *seconda derivata* di y, è

$$y'' = n(n-1) a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + \dots + 2 a_{n-2} \ .$$

Le successive derivate $y''', y^{\text{IV}}, \dots$ (terza, quarta, ...) son tanti polinomii dei gradi $n-3, n-4, \dots$; la derivata n^{ima} è costante, e le seguenti son tutte nulle:

$$y^{(n)} = n!\, a_0 \ , \quad y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \dots = 0 \ .$$

b) Se

$$y = x(\log x - 1) \ , \quad \log\cos x \ , \quad \log\log x \ , \quad \log\operatorname{tg}\frac{x}{2} \ , \quad \log\frac{1-\cos kx}{1+\cos kx} \ ,$$

l'applicazione delle regole dimostrate e dei risultati ottenuti nei precedenti paragrafi dà come valori delle rispettive derivate:

$$y' = \log x \ , \quad -\operatorname{tg} x \ , \quad 1/x\log x \ , \quad 1/\operatorname{sen} x \ , \quad 2k/\operatorname{sen} kx \ .$$

Se

$$y = \operatorname{arc\,cos}(1-x) - \sqrt{2x - x^2} \ , \quad \operatorname{arc\,cos}\frac{a}{x} + \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \ ,$$

si ottiene

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \ , \quad \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} \ .$$

Similmente, per le funzioni

$$y = \text{arc sen}\,\frac{\text{sen}\,a\ \text{sen}\,x}{1 - \cos a \cos x}\ ,\quad \text{arc cos}\,\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\ ,\quad \text{arc tg}\,\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ ,$$

si trova

$$y' = \frac{\text{sen}\,a}{1 - \cos a \cos x}\ ,\quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}\ ,\quad \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}\ .$$

c) Questi calcoli di derivate si eseguono molto facilmente applicando, se occorre, la regola per la derivazione d'una somma, d'un prodotto, o d'un quoziente, e derivando poi ciascuna parte del risultato secondo la regola per la derivazione d'una funzione di funzione: questa è la regola più importante, in quanto permette di superare tutte le difficoltà, che sembra presentare il calcolo della derivata d'una espressione complicata, separandole per affrontarle una dopo l'altra. Ecco, per esempio, come si procede per calcolare la derivata di

$$y = \text{arc tg}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right):$$

$$y' = \frac{1}{1 + \left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)^2}\left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right) = \ldots = \frac{1}{2(1 + x^2)}\ .$$

Questo risultato si verifica poi facilmente osservando che $y = {}^1/_2\,\text{arc tg}\,x - {}^1/_4\,\pi$. Similmente, per calcolare la derivata di $y = x\sqrt{1 + x^2} + \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, si scrive

$$y' = \sqrt{1 + x^2} + x\,.\,\frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right) = \ldots = 2\sqrt{1 + x^2}\ .$$

d) Date le relazioni

$$\text{tg}\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\ ,\quad \text{tg}\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 - k}{1 + k}}\,\text{tg}\,\frac{x}{2}\ ,$$

è facile dedurne, rispettivamente,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ ,\quad y' = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{1 + k\cos x}\ ,$$

mercè la derivazione dei due membri. Se poi son date le funzioni

$$y = x^x\ ,\quad y = x^{x^x}\ ,$$

si trova, prendendo i logaritmi dei due membri, e derivando,

$$y' = x^x(1 + \log x)\ ,\quad y' = x^{x + x^x}\left(\frac{1}{x} + \log x + \log^2 x\right);$$

ma procedendo in tal modo si ammette *a priori* l'esistenza di y'. Per evitare questa obbiezione bisogna prima di tutto far notare che la derivata esiste; e ciò si ottiene, per la penultima coppia di funzioni, osservando che y si può porre sotto la forma $\operatorname{arc\,tg} u$. Per $y = x^x$ si può anche scrivere $y = e^{x \log x}$; *ecc.*

e) La derivata n^{ima} di $y = x^m \log x$ è

$$y^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}\left(\log x + \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \dots + \frac{1}{m-n+1}\right).$$

In particolare

$$y^{(m)} = m!(\log x + 1 + {}^1/_2 + {}^1/_3 + \dots + {}^1/_m) \quad , \quad y^{(m+1)} = m!/x .$$

Similmente con successive derivazioni si giunge a trovare che le derivate n^{ime} delle funzioni

$$y = e^{x \cos a} \cos(x \operatorname{sen} a) \quad , \quad y = e^{x \cos a} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} a) ,$$

sono rispettivamente

$$y^{(n)} = e^{x \cos a} \cos(na + x \operatorname{sen} a) \quad , \quad y^{(n)} = e^{x \cos a} \operatorname{sen}(na + x \operatorname{sen} a) .$$

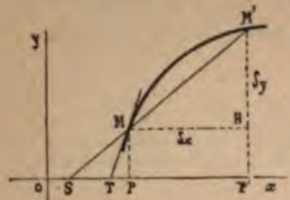
Meno facile è il calcolo della n^{ima} derivata di $y = \operatorname{arc\,tg} x$, la quale si può tuttavia esprimere in funzione della stessa y derivando $n-1$ volte di seguito $y' = \cos^2 y$:

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \,.\, \operatorname{sen} n(y + {}^1/_2 \pi) .$$

Proprietà delle derivate.

52. Prima d'inoltrarci vogliamo fare una breve digressione intorno ad un argomento molto importante per le applicazioni delle matematiche. Già nel dimostrare le proposizioni fondamentali della teoria delle funzioni è utile giovarsi d'una rappresentazione geometrica della variabile indipendente, che si esegue ponendo in corrispondenza, come si suol fare in Geometria analitica, i valori della variabile ed i punti d'una retta. In tal modo le dimostrazioni, pur rimanendo intatte nella sostanza (giacchè bisogna astenersi dal fondarle in alcun modo su concetti geometrici), acquistano una forma limpida ed efficace, e si lasciano condurre con maggior rapidità di linguaggio. Invece di parlare d'un *valore* attribuito alla variabile, si nomina il *punto*, immagine di quel valore; ed ogni intervallo (a,b) si trova così rappresentato da un segmento rettilineo, terminato nei punti a e b, cioè nei punti le cui distanze dall'origine, valutate in un dato senso, sono misurate dai numeri a e b. Per rappresentare poi una funzione y basta considerare ogni coppia di valori, fra loro corrispondenti, di x e di y, come il sistema delle coordinate cartesiane (ortogonali) d'un punto

del piano: l'equazione $y=f(x)$ rappresenta allora una *linea*, mediante la quale è facile rendersi conto delle principali proprietà delle funzioni



e delle derivate; ma prima è necessario conoscere il significato geometrico della derivata. Ora si consideri la *tangente* alla curva, nel punto M, cioè la posizione limite della secante MM′, quando M′, percorrendo la curva, tende a confondersi con M. Si chiamino S e T i punti nei quali la secante e la tangente incontrano l'asse x, siano P e P′ i piedi delle perpendicolari condotte a questo asse per M ed M′, e si osservi che, per la similitudine dei triangoli MHM′, SPM, si ha

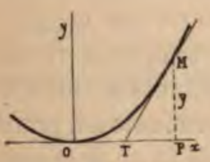
$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\mathrm{M'H}}{\mathrm{MH}}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{SP}}\,.$$

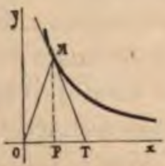
Col tendere a zero di δx e δy, M′ tende ad M, P resta fisso come M, ed S tende a T; quindi

$$y'=\lim\frac{\delta y}{\delta x}=\lim\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{SP}}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{TP}}=\mathrm{tg}\,\widehat{\mathrm{MT}x}\;,$$

vale a dire che *la derivata dell'ordinata d'una curva, rispetto all'ascissa, rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva.* Quando la variabile indipendente è il *tempo*, questo coefficiente rappresenta una *velocità*, ossia la misura della rapidità più o meno grande con cui la funzione tende a crescere o decrescere; ed è appunto così che la nozione di derivata, base del Calcolo infinitesimale, si è presentata la prima volta alla mente di Newton, poco prima del 1667 *.

53. **Esempii:** *a)* Grande ajuto si ha, per tracciare una curva $y=f(x)$, dal conoscere la derivata $f'(x)$ dell'ordinata, giacchè si possiede con ciò il mezzo di costruire la curva *per punti* e *per tangenti.* Qui vogliamo limitarci a qualche esempio, che valga a porre in luce l'utilità della rappresentazione grafica, non sotto l'aspetto geometrico, del quale si discorrerà in seguito distesamente, ma dal punto di vista della stessa teoria delle funzioni. Premettiamo due esercizii semplicissimi costruendo le tangenti alla *parabola* ed all'*iperbole equilatera*, rappresentate dalle equazioni





$$y=\frac{x^2}{2a}\;,\quad y=\frac{a^2}{x}\,.$$

Dalle formole

$$y'=\frac{x}{a}=2\,\frac{y}{x}\;,\quad y'=-\frac{a^2}{x^2}=-\,\frac{y}{x}$$

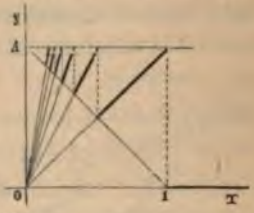
si deduce $\mathrm{TP}=y/y'={}^1/_2\,x$ per la prima curva, $\mathrm{PT}=-\,y/y'=x$ per l'altra; e

* Vedi Mansion « *Résumé du Cours d'Analyse*, etc. » p. 194.

si vede che, conoscendo il punto O, vertice della parabola o centro dell'iperbole, e projettato in P, sulla tangente nel vertice o sopra un assintoto, un punto qualunque M dell'una o dell'altra curva, rispettivamente, basta congiungere M al punto medio di OP, o al simmetrico di O rispetto a P, per ottenere la tangente in M.

b) La linea rappresentativa di $x - [x]$ consta di infiniti segmenti rettilinei, ciascuno dei quali va da un punto della retta $y=0$, con ascissa intera n, al punto di ascissa $n+1$ sulla retta $y=1$. Veramente i punti della seconda retta andrebbero esclusi dalla linea; ma è bene osservare che, dal punto di vista geometrico, siffatte esclusioni sono inutili, e che bisogna invece valersi del concetto di continuità per escludere il meno che si può punti e tangenti. Così, se un punto, percorrendo una curva, tende a confondersi con un punto fisso, le cui coordinate non soddisfano l'equazione della curva, si suole nondimeno considerare il punto fisso come appartenente alla curva; nè si potrebbe, d'altronde, escluderlo, ossia separarlo dagli altri, con mezzi grafici. Analogamente, se in un punto M manca la tangente, ma esiste una retta con cui tende a confondersi la tangente in un altro punto M', tendente ad M, è questa retta che si considera come tangente in M. Tali convenzioni servono a prevenire molti dubbii, che troppo spesso ci si presenterebbero nelle applicazioni geometriche qualora volessimo attenerci alla rigida interpetrazione dei principii fin qui esposti.

c) Un'altra linea interessante, anch'essa costituita dai segmenti che due rette determinano sopra infinite rette, concorrenti in un punto, è quella che serve a rappresentare la funzione $x[1/x]$. Quando x è superiore ad $\frac{1}{n+1}$, ma non ad $\frac{1}{n}$, si ha $y=nx$, equazione d'una retta, limitata fra le rette $y=1-x$ ed $y=1$, esclusi i punti della prima. Il punto A dell'asse y, che ha l'ordinata 1, si può considerare come appartenente alla linea; ma è graficamente impossibile tracciar questa nelle sue vicinanze, malgrado che in A l'ordinata sia continua.



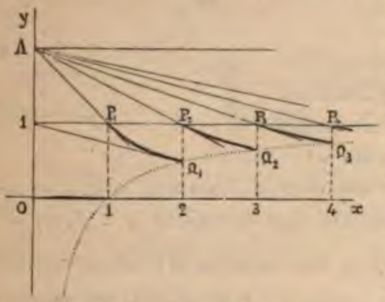
d) Nell'esempio precedente la funzione considerata, continua in A, è discontinua intorno ad A; ma la curva rappresentata dall'equazione $y=f(x)$, in cui $f(x)=x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ ed $f(0)=0$, quantunque $f(x)$ sia continua (§ 31, *a*) per tutti i valori di x, nemmeno si può costruire nelle vicinanze dell'origine. Ed altrettanto si può dire della funzione continua

$$f\big(f(x)\big)=x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}},$$

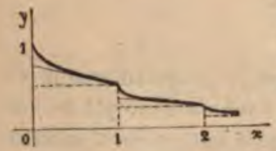
anche intorno ad infiniti punti dell'intervallo $(-1/\pi, 1/\pi)$, e propriamente in vicinanza di $\pm 1/\pi, \pm 1/2\pi, \pm 1/3\pi, \ldots$ Siffatti punti si vanno sempre più addensando per le funzioni $f(f(f(x)))$, $f(f(f(f(x))))$, *ecc.*, perchè ogni volta s'introducono, oltre i punti intorno ai quali *non è rappresentabile* la funzione precedente, anche quelli nei quali questa funzione si annulla. Non si creda, tuttavia, che la non rappresentabilità sia dovuta unicamente alla mancanza di derivata, ossia di tangente determinata nel punto che si considera, giacchè la curva $y = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ tocca l'asse x nell'origine, ma è materialmente impossibile tracciarla in vicinanza di questo punto.

e) Del resto vi sono funzioni, per le quali non è possibile tracciare neppure un tratto, sia pure piccolissimo, della linea che le rappresenta, malgrado che se ne possano segnare tanti punti quanti ci piace, ed anche vicini tra loro quanto si vuole. Tale, per esempio, è la funzione $\varpi(x)$, giacchè (§ 36, *b*) in ogni segmento rettilineo, parallelo all'asse x, compreso nella striscia di piano definita dalla limitazione $0 \leqq y \leqq 1$, ed arbitrariamente piccolo, cadono infiniti punti della linea rappresentativa, che *sembra* coprire la striscia intera. E se, in questo caso, la non rappresentabilità mediante una linea, intesa nel senso volgare della parola, si può imputare alla completa discontinuità della funzione, non si può dire lo stesso per la funzione di Weierstrass, continua ma *priva di derivata* in ogni punto. Valgano queste osservazioni a convincersi della necessità di dimostrare con pure considerazioni analitiche tutte quelle proprietà delle funzioni, che interpetrate geometricamente appariscono evidenti, giacchè tali proprietà sussistono indipendentemente dalla possibilità d'una rappresentazione geometrica, e d'altra parte questa può mancare per estese classi di funzioni, *non ostante la continuità*, ed anzi *malgrado l'esistenza della derivata.*

f) Il lettore potrà esercitarsi nella rappresentazione geometrica delle principali funzioni discontinue incontrate precedentemente; ma noi vogliamo qui limitarci a due sole funzioni, le cui linee rappresentative saranno in seguito utilizzate.



La linea $y = [x]/x$ consta di infiniti archi iperbolici, giacchè, per x intero, se n appartiene all'intervallo $(n, n+1)$, escluso l'estremo superiore, l'equazione diventa $xy = n$, e rappresenta un arco d'iperbole, che va da un punto P della retta $y = 1$ ad un punto Q dell'iperbole $x(1-y) = 1$. Per quanto si è visto nel primo esempio, la tangente in ciascun punto P passa per A, simmetrico dell'origine rispetto alla retta $y = 1$. Adunque *le tangenti nei punti* $P_1, P_2, P_3, \ldots$ *concorrono in* A. Siccome poi, per un punto qualunque M della linea, crescendo x all'infinito si ha $\lim y = 1$, è chiaro che anche la tangente in M, simmetrica di OM rispetto alla parallela condotta per M all'asse x, tende a passare per A, vale a dire che, *mentre un punto, percorrendo la linea, tende a collocarsi sulla retta* $y = 1$, *la tangente nel punto stesso tende a confondersi con la retta* $y = 2$. Con altrettanta facilità si costruisce la linea rappresentativa della funzione *continua* $2^{-[x]}\left(1 - {}^1/_2\sqrt{x - [x]}\right)$, linea evidentemente costituita da infiniti archi parabolici; e si riconosce che, *mentre un punto, allontanandosi all'infinito sulla curva, tende a collocarsi sull'asse* x, *l'angolo acuto che la tangente nel punto stesso fa con l'asse oscilla indefinitamente in un intervallo* $(\alpha, {}^1/_2\pi)$, *il cui estremo inferiore tende a zero.*



g) Nel seguito degli studii pratici si vedrà come una macchina possa tracciare da sè un *diagramma*, il suo diagramma, ossia una linea rappresentativa della pressione del vapore in funzione del volume generato dallo stantuffo. Così, col far conoscere le posizioni dello stantuffo negli istanti in cui cessa o comincia l'ammissione del vapore dalla caldaja nel cilindro, o l'emissione da questo nel condensatore, la macchina rivela a chi l'interroga i suoi pregi ed i suoi difetti. Svariati diagrammi s'incontrano in tutti i rami dell'ingegneria, e sono anche frequentissimi nello studio dei fenomeni naturali più varii, non esclusi quelli d'indole sociologica *. Per siffatte curve empiriche, sebbene abbiano importanza appunto in quanto servono a mostrare la *rapidità di variazione* delle rispettive funzioni, non si può teoricamente parlare di tangente o di derivata, perchè, soggette come sono ad errori, sia pure lievissimi, esse rappresentano effettivamente funzioni v, differenti dalle vere, u; ed è facile convincersi che, pur ammettendo che la derivata di u esiste, quella di v può non esistere, o differire molto da u'. Così, per esempio **, se fosse $u - v = \alpha \operatorname{sen} \frac{x}{\alpha^2}$, con α costante ed estremamente piccolo, si avrebbe anche $u' - v' = \frac{1}{\alpha} \cos \frac{x}{\alpha^2}$, e per conseguenza, malgrado che $|u - v|$ non superi mai α, potrebbe invece $|u' - v'|$ diventare estremamente grande intorno ad infiniti valori di x.

54. Una funzione $f(x)$ si dice rispettivamente *crescente*, o *decrescente*, o *costante* a destra di a, quando è possibile determinare un numero positivo h, tale che i valori di $f(x)$ in $(a, a+h)$ sian tutti superiori, tutti inferiori o tutti uguali ad $f(a)$. Si dice invece che $f(x)$ è crescente, decrescente, costante a sinistra di a, quando in $(a-h, a)$ i valori di $f(x)$ sono rispettivamente inferiori, superiori, o uguali tutti ad $f(a)$. Può anche darsi che non esista un tal numero h. È ovvio, per esempio, che intorno allo zero la funzione $f(x)$, uguale a 0 per $x=0$, ed espressa da $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ per $x \gtrless 0$, non cessa mai di assumere valori positivi, negativi, o nulli, cioè, preso h piccolo quanto si vuole, i valori di $f(x)$ nell'intervallo $(-h, h)$ sono sempre in parte *maggiori*, in parte *minori* di $f(0)$, ed infiniti di essi sono anche *uguali* ad $f(0)$. Dunque la funzione non si può chiamare crescente, e nemmeno decrescente o costante per $x=0$; ed è chiaro che proprio a ciò si deve l'impossibilità di eseguirne la rappresentazione geometrica in vicinanza dell'origine, giacchè, dopo aver costruito un punto intorno al quale l'ordinata non cresce, nè decresce, nè si mantiene costante, non si sa immaginare in qual modo sia esso seguito dai punti vicini. Altrettanto si può dire della funzione continua $x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$, che non si può chiamare crescente per $x=0$, sol perchè riprende infinite volte,

* Vedi, per esempio, il *Cours d'Économie politique* di V. Pareto.

** Laurent « *Calcul des probabilités* » p. 200. Vedi anche Genocchi e Peano « *Calcolo differenziale, ecc.* » p. XIII.

intorno allo zero, il valore $f(0)=0$. È poi notevole la funzione $\varpi(x)$, della quale non si sa dir nulla (§ 36, b) intorno a qualsiasi punto.

55. Una funzione $f(x)$ dicesi crescente, o decrescente, o costante *in un intervallo* quando per ogni coppia di numeri x' ed x'', presi nell'intervallo che si considera, la differenza $f(x')-f(x'')$ ha il segno di $x'-x''$, o il segno opposto, o è nulla. Per intender bene la differenza tra crescente (decrescente, *ecc.*) in un intervallo, e crescente *intorno ad un valore* della variabile indipendente, basti l'esempio della funzione $1/x$, che si deve chiamar *crescente* a destra dello zero, qualunque valore le si assegni per $x=0$, mentre è *decrescente* in ogni intervallo $(0, h)$, escluso l'estremo inferiore, per quanto piccolo sia h. È ovvio che una funzione crescente, o decrescente, o costante in un intervallo, è rispettivamente crescente, decrescente, costante intorno ad ogni numero dell'intervallo; ma non è altrettanto evidente la proposizione reciproca, che pure sussiste, come si dimostrerà nel paragrafo seguente. Tuttavia si noti subito che questa reciproca non regge se la funzione si suppone, per esempio, crescente solo da un lato di tutti i numeri d'un intervallo. Così $x-[x]$ è crescente a destra di tutti i valori di x, ma non è crescente in (a, b) se $[a]<[b]$.

56. **Teorema I.** *Una funzione crescente (o decrescente, o costante) intorno a tutti i valori della variabile, che appartengono ad un dato intervallo, è crescente (o decrescente, o costante) nell'intervallo stesso.*

Se la funzione non fosse crescente nell'intervallo (a, b), finito o infinito, questo conterrebbe almeno un intervallo (a_1, b_1), negli estremi del quale si avrebbe $f(a_1)\geqq f(b_1)$. Ora si chiami (a_2, b_2) la metà inferiore o la metà superiore di (a_1, b_1), secondo che per $x={}^1/_2(a_1+b_1)$ la funzione assume un valore inferiore o non inferiore ad $f(a_1)$, e si osservi che, in ogni caso, $f(a_2)\geqq f(b_2)$. Così proseguendo si perviene, come nel § 3, alla conoscenza d'un numero ξ, limite comune degli estremi inferiori $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e degli estremi superiori $b_1, b_2, b_3, \ldots$ degli intervalli costruiti. Preso h positivo e piccolo quanto si vuole, si può sempre determinare n in modo che a_n e b_n cadano entrambi in $(\xi-h, \xi+h)$, uno a sinistra, l'altro a destra di ξ. Si vede così che gli intervalli $(\xi-h, \xi)$ e $(\xi, \xi+h)$ contengono rispettivamente due numeri $x'=a_n$ ed $x''=b_n$, tali che si ha $f(x')\geqq f(x'')$; e ciò impedisce che la funzione sia crescente intorno a ξ, giacchè, per un valore di h convenientemente piccolo, dovrebbe essere sempre $f(x')<f(x'')$. In modo analogo procede la dimostrazione nell'ipotesi d'una funzione decrescente o costante.

57. La dimostrazione del precedente teorema si può anche condurre in modo da evitare la ripetizione del procedimento adoperato nel § 3. Sia

$f(x)$ crescente intorno ad ogni numero d'un intervallo, ed in questo si prendano *arbitrariamente* i valori x' ed $x''>x'$. Per dimostrare che la funzione è crescente nell'intervallo basta far vedere che $f(x')<f(x'')$. Siccome $f(x)$ è crescente a destra di x', esistono numeri $x\leqq x''$, maggiori di x', tali che $f(x')<f(x)$. Il loro insieme è finito, ed ammette perciò il limite superiore $\xi\leqq x''$. Ciò premesso, essendo la funzione crescente anche a sinistra di ξ, esiste un intervallo $(\xi-h,\xi)$ tale che $f(x)<f(\xi)$ per qualunque $x<\xi$ appartenente all'intervallo stesso. D'altra parte, per la definizione del limite superiore, esiste certamente nell'insieme considerato un numero ξ', che cade nel medesimo intervallo; e però, essendo $f(x')<f(\xi')$ ed $f(\xi')<f(\xi)$, si ha pure $f(x')<f(\xi)$, vale a dire che ξ appartiene all'insieme. Ora, se fosse $\xi<x''$, si potrebbe trovare a destra di ξ un numero $\xi''<x''$, tale che $f(\xi)<f(\xi'')$, e per conseguenza si avrebbe $f(x')<f(\xi'')$, sicchè ξ'' apparterrebbe all'insieme: ciò è assurdo, poichè il massimo numero dell'insieme è $\xi<\xi''$. Dunque $\xi=x''$, e finalmente $f(x')<f(x'')$. Si noti che in questa dimostrazione non si è fatto un pieno uso dell'ipotesi, perchè, mentre la funzione si è supposta crescente *a sinistra* di qualunque numero x_1 dell'intervallo, *a destra* si è ammessa soltanto la possibilità di trovar numeri x_2, vicini ad x_1 quanto si vuole, e tali che $f(x_1)<f(x_2)$. Senonchè, dimostrato il teorema, ci accorgiamo che da queste ipotesi, apparentemente più larghe, risulta per necessità che la funzione è crescente anche a destra di ciascun valore di x.

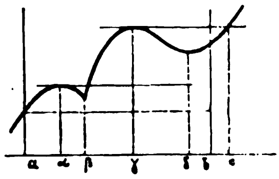
58. **Teorema II**. *Una funzione è crescente o decrescente alla destra (o alla sinistra) di* a, *secondo che la sua derivata destra (o sinistra) è positiva o negativa per* x = a.

In sostanza il fatto che una funzione cresce (o decresce) per un dato valore di x consiste nella possibilità di assegnare un numero positivo h, tale che, per $|\delta x|<h$, δy abbia il segno di δx (o il segno opposto). Ora, se per $x=a$ la derivata destra o sinistra di y è positiva, ciò vuol dire che il corrispondente rapporto incrementale finisce per diventare e restare positivo, quando δx tende a zero, e quindi che δy finisce per assumere e conservare il segno di δx. Dunque la funzione è crescente. Nello stesso modo si dimostra che la funzione è decrescente quando la derivata è negativa. Quando poi la derivata è nulla, ciò non impedisce che δy finisca per assumere e conservare un dato segno, e che per conseguenza la funzione possa crescere o decrescere per quel valore di x che si considera; ma può anche darsi che δy finisca per essere uguale a zero, o che non cessi mai di annullarsi o di cambiar segno, ed allora la funzione, se non è costante, non è nemmeno crescente o decrescente.

59. **Teorema III**. *Una funzione è crescente o decrescente, in un intervallo, secondo che la sua derivata, supposta unica, si conserva positiva o negativa nell'intervallo stesso.*

Infatti, se si ha, per esempio, $f'(x) > 0$, per tutti i valori di x appartenenti ad un certo intervallo, $f(x)$ è crescente intorno a ciascuno di questi valori, ed è per conseguenza crescente nell'intervallo, in virtù del teorema I.

60. **Minimi e massimi.** Si dice che, per $x = a$, $f(x)$ passa per un *minimo*, o che $f(a)$ è un minimo di $f(x)$, quando nessuno dei valori che $f(x)$ assume intorno ad a è minore di $f(a)$. Similmente si dice che $f(a)$ è un *massimo* di $f(x)$, quando, intorno ad a, nessun valore di $f(x)$ supera $f(a)$. Il minimo ed il massimo così definiti si chiamano anche *assoluti*, per distinguerli dal minimo e dal massimo valore, che una funzione può assumere in un dato intervallo: questi diconsi *relativi* perchè dipendono dall'insieme dei valori della funzione nell'intervallo considerato, mentre il minimo ed il massimo nel senso assoluto dipendono soltanto dai valori che la funzione prende intorno a determinati valori della variabile indipendente. In un intervallo si possono avere più minimi o massimi assoluti, ma un solo è il valore del minimo o del massimo relativo: questi possono variare insieme all'intervallo, ma i primi conservano il loro carattere in qualunque intervallo, e si verificano sempre per determinati valori di x, invariabili. Queste osservazioni riescono evidenti quando si fa uso della rappresentazione geometrica. Così, per esempio, riferendoci alla figura, vediamo che nell'intervallo (a, b) la funzione rappresentata ha il minimo relativo nell'estremo inferiore a, ed il massimo in un punto γ, nel quale si ha pure un massimo assoluto; un altro massimo assoluto si vede in α, e due minimi, uno in β e l'altro, maggiore del precedente massimo, in δ. Quando si sposta a verso la sinistra, il minimo relativo diminuisce, e si verifica nell'estremo inferiore del nuovo intervallo. Quando invece si comincia a spostare b verso la destra, il massimo relativo resta invariato, e persiste in γ, fintantochè b passa alla destra del punto c; allora il detto massimo aumenta, e si trasferisce bruscamente nell'estremo superiore del nuovo intervallo. Terminiamo con due osservazioni importanti: il minimo assoluto, per $x = a$, non è che il minimo *relativo ad un intervallo sufficientemente piccolo*, preso *intorno* ad a; ed il minimo relativo ad un dato intervallo, *esclusi gli estremi*, è anche un minimo assoluto. Altrettanto dicasi del massimo. D'ora innanzi il minimo ed il massimo si dovrà sempre intenderli nel loro nuovo significato, salvo che non si dichiari esplicitamente il contrario.



61. **Teorema IV.** *Quando una funzione a derivata unica passa per un minimo o per un massimo, la derivata si annulla.*

Supponiamo, per esempio, che $f(a)$ sia un minimo, ed osserviamo che, per la definizione stessa del minimo assoluto, la funzione *non è crescente* a sinistra di a, *non è decrescente* a destra, e però la derivata, supposta *unica* (§ 40), considerata come derivata sinistra non può, in virtù del teorema II, essere positiva; considerata come derivata destra non può essere negativa: essa è dunque nulla. Non sussiste la proposizione reciproca, giacchè la derivata può benissimo annullarsi per un valore di x, che non renda minima o massima la funzione: nulla impedisce, per esempio, che la funzione sia (come avviene per $y=x^3$) crescente tanto a sinistra quanto a destra del predetto valore.

62. **Teorema V** (teorema di Rolle). *Quando una funzione a derivata unica prende valori uguali negli estremi d'un intervallo, la derivata si annulla almeno una volta nell'intervallo stesso, esclusi gli estremi, purchè anche in questi la funzione sia continua.*

La funzione è continua in *tutto* l'intervallo (a,b), cioè continua negli estremi per l'ipotesi fatta esplicitamente, e continua nell'interno di (a,b) perchè in questo intervallo, esclusi al più gli estremi, si ammette l'esistenza di $f'(x)$. Dunque l'intervallo stesso racchiude, in virtù del secondo teorema di Weierstrass, almeno un numero ξ, in cui $f(x)$ raggiunge il minimo o il massimo valore. Se i valori della funzione fossero tutti uguali ad $f(a)$, la derivata sarebbe costantemente nulla. Supponiamo dunque che $f(x)$ prenda, in (a,b), valori differenti da $f(a)$. Allora almeno uno dei due numeri, che rappresentano il minimo ed il massimo valore della funzione, avrà un valore differente da $f(a)=f(b)$, e corrisponderà, per conseguenza, ad un numero ξ, differente da a e da b. Esclusi così gli estremi dell'intervallo, il minimo o massimo della funzione è tale (§ 60) anche nel senso assoluto, e però (§ 61) si ha necessariamente $f'(\xi)=0$.

63. **Osservazioni:** *a)* Circa le restrizioni imposte si osservi che la funzione $x-[x]$, nulla negli estremi di $(0,1)$, è in questo intervallo, quando si escludano gli estremi, continua e provvista di derivata unica; ma questa (uguale ad 1) non è mai nulla: ciò si deve alla discontinuità che la funzione possiede a sinistra dell'estremo superiore, discontinuità che le impedisce di raggiungere il suo limite superiore. Non è tuttavia impossibile che la proprietà enunciata sussista anche quando la funzione non è continua negli estremi, come accade nell'intervallo $(0,1/\pi)$ per la funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, discontinua nell'estremo inferiore. Invece, soddisfatta la condizione della continuità in *tutto* un intervallo, la proprietà si verifica indipendentemente dall'esistenza della derivata negli estremi. Basti l'esempio della funzione *continua* $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, priva di derivata per $x=0$: in ogni

intervallo $(0, 1/n\pi)$ la sua derivata si annulla infinite volte, per valori di x, che sono inversi delle radici dell'equazione $\operatorname{tg} x = x$.

b) Il teorema di Rolle ci dice, in particolare, che *fra due radici di* f(x) *cade sempre almeno una radice di* f'(x), purchè, beninteso, siano soddisfatte le condizioni di continuità e di esistenza della derivata unica, imposte dall'enunciato. Ne segue che, se per $x = a$ si annullano insieme $f(x)$ ed $f'(x)$, si può immaginare che il teorema di Rolle sussista nell'intervallo nullo (a, a), nel senso che in a si debbano considerare come sovrapposte due (o più) radici di $f(x)$. Per questa ragione si suol dire che a è radice *multipla* di $f(x)$, riservando il nome di radice *semplice* ad ogni radice di $f(x)$, che non annulla $f'(x)$. Una radice multipla a di $f(x)$ si dice poi *doppia* quando è radice semplice di $f'(x)$, quando cioè $f'(a) = 0$, ma $f''(a) \gtrless 0$; si dice *tripla* quando è radice doppia di $f'(x)$, nel qual caso si ha $f'(a) = 0, f''(a) = 0$, ma $f'''(a) \gtrless 0$; e così via. In generale si chiama radice di $f(x)$, dell'*ordine* n, ogni numero a, che annulla $f(x)$ e le sue derivate successive, fino alla n^{ima} esclusa. Una tale radice si suole considerare come risultante dalla sovrapposizione di n radici uguali ad a.

64. **Teorema VI** (teorema di Cauchy). *Se nell'intervallo finito* (a, b) *le funzioni* φ *e* ψ *sono continue, e se, esclusi al più gli estremi, le derivate uniche* φ' *e* ψ' *esistono e son prive di radici comuni, il detto intervallo racchiude almeno un numero* ξ, *diverso dagli estremi, per cui si ha*

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} .$$

Siccome nell'enunciare una proposizione non è possibile che si parli di quantità prive di significato, l'enunciato precedente implica l'ipotesi che almeno una delle funzioni, per esempio ψ, abbia valori disuguali negli estremi dell'intervallo. In tale ipotesi si può sempre determinare una costante k in modo che la funzione $\varphi(x) - k\psi(x)$ prenda valori uguali negli estremi stessi, giacchè basta porre $\varphi(a) - k\psi(a) = \varphi(b) - k\psi(b)$, e, ricordando che $\psi(a) \gtrless \psi(b)$, ricavarne

$$k = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} .$$

Intanto la funzione considerata, continua in *tutto* l'intervallo, ammette la derivata unica $\varphi'(x) - k\psi'(x)$, che deve, in virtù del teorema di Rolle, annullarsi almeno per un valore ξ, preso *nell'interno* di (a, b), dimodochè si ha $\varphi'(\xi) = k\psi'(\xi)$; e siccome non è possibile che sia $\psi'(\xi) = 0$, altrimenti sarebbe *anche* $\varphi'(\xi) = 0$, contrariamente all'ipotesi fatta su φ' e ψ', si può sempre dall'ultima eguaglianza (anche quando $k = 0$, nel qual caso si ricade sul teorema di Rolle) trarre $k=\varphi'(\xi)/\psi'(\xi)$. Eguagliando fra loro i due valori di k si ottiene il teorema di Cauchy. Si noti che per l'annullarsi di φ' e ψ' *negli estremi* non cessa la validità del teorema, come non cessa per l'inesistenza di φ' e ψ' negli estremi stessi; ma *potrebbe* cessare se in questi si presentasse una discontinuità per φ o per ψ.

65. **Teorema VII** (teorema di Lagrangia). *Per ogni funzione* f(x), *continua in un intervallo finito* (a, b), *nell'interno del quale ammette la derivata unica, si ha*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)\ ,$$

dove ξ *rappresenta un numero di* (a, b), *diverso dagli estremi.*

È questo un corollario immediato del teorema di Cauchy: basta fare $\varphi(x)=f(x)$, $\psi(x)=x$, ed osservare che $\psi'(x)=1$.

66. **Corollarii**: *a) Una funzione a derivata nulla è costante.* Infatti, se si ha $f'(x)=0$ per ogni numero x, preso in (a, b), si può applicare il teorema di Lagrangia ad ogni intervallo (a, x), il cui estremo superiore non sia maggiore di b; e si ottiene $f(x)=f(a)=$ *costante.* Questa proposizione è un complemento necessario del teorema III, complemento che non si potrebbe in alcun modo dare all'analogo teorema II. Ben s'intende che $f'(x)$ ha il significato di derivata *unica*; ed è facile convincersi che la proposizione non sussisterebbe se fosse costantemente nulla, per esempio, la sola derivata destra, come avviene per $y=[x]$.

b) Due funzioni, aventi la stessa derivata, non possono differire che per una costante. Infatti, se $\varphi'=\psi'$, è nulla la derivata di $\varphi-\psi$, e però si ha $\varphi-\psi=$ *costante.* Ne segue che, se di $f(x)$ si conosce una *funzione primitiva* $F(x)$, ossia una funzione che ammette $f(x)$ per derivata, *tutte* le altre funzioni primitive sono comprese nella formola $F(x)+C$, in cui C rappresenta una *costante arbitraria.*

67. **Osservazioni**: *a)* Per vedere come il teorema di Lagrangia possa trovarsi in fallo quando viene a mancare qualcheduna delle condizioni volute dall'enunciato, basta considerare la funzione definita da $f(0)=0$ ed $f(x)=1/x$ per $x \gtrless 0$. Applicando il teorema di Lagrangia in un intervallo (a, b), con gli estremi non nulli, si ottiene $\xi^2=ab$, risultato inammissibile quando a e b hanno segni opposti, cioè quando l'intervallo (a, b) racchiude il valore $x=0$, per cui non esiste $f'(x)$. Ed anche se questo valore capita in un estremo, se per esempio si considera l'intervallo $(0, x)$, si giunge al risultato inammissibile $\xi^2=-x^2$, unicamente dovuto alla discontinuità della funzione nell'estremo inferiore.

b) Consideriamo, più generalmente, una funzione $f(x)$, che da un lato di a, per esempio alla destra, non sia finita, pur ammettendo la derivata unica, vale a dire che questa derivata si suppone esistente in un intervallo convenientemente piccolo (a, x), ma non per $x = a$, giacchè nel tendere di x ad a si suppone inoltre che la funzione non cessi di assumere valori arbitrariamente grandi nel senso assoluto. Il teorema di Lagrangia si può dunque applicare ad $f(x)$ nell'intervallo (a, x), *escluso l'estremo inferiore,* ossia in un intervallo (x', x), il cui estremo inferiore, maggiore di a, sia vicino ad a quanto si vuole. Ora, dato un numero l arbitrariamente grande, si può sempre, per ipotesi, determinare x' in modo che il valore assoluto di $f(x')$ sia grande quanto si vuole, e quindi che si abbia

$$|f(x') - f(x)| > (x - a)l\,, \quad \text{ovvero} \quad (x - x')\,|f'(\xi)| > (x - a)l > (x - x')l\,,$$

e finalmente $|f'(\xi)| > l$, dove ξ, compreso fra x' ed x, tende ad a quando x tende ad a. Dunque, *se col tendere della variabile ad un limite finito accade che una funzione a derivata unica assume valori arbitrariamente grandi nel senso assoluto, altrettanto farà la derivata.*

c) In modo anche più semplice si dimostra che, *se una funzione a derivata unica tende ad un limite finito quando la variabile cresce indefinitamente, la derivata oscilla o tende a zero.* Infatti, fissato a, e preso $x > a$, da $f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi)$ segue che, quando x cresce indefinitamente, $(x - a)f'(\xi)$ tende ad un limite finito, e per conseguenza si ha $\lim\limits_{x=\infty} f'(\xi) = 0$. Qui si faccia attenzione a non considerare il primo membro come se fosse $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$, giacchè, pur essendo vero che a ξ possiamo far prendere valori grandi quanto si vuole, attribuendo ad a valori convenientemente grandi, non è detto che ξ debba assumere *tutti* i valori maggiori d'un dato numero. Si può dunque soltanto affermare che $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ è zero, o non esiste. In tutti i casi è certo che $f'(x)$ non cessa mai di assumere, quando x cresce all'infinito, valori piccoli quanto si vuole nel senso assoluto. Queste conseguenze del teorema di Lagrangia, come il teorema stesso, sono suscettibili di facili interpetrazioni geometriche; ma, per non cedere alla tentazione di accordar valore dimostrativo a tali interpetrazioni, il lettore farà bene a rileggere (§ 53, *e*) certe osservazioni precedenti.

d) Al teorema di Lagrangia si può dar la forma $\delta y / \delta x = f'(\xi)$, prendendo l'incremento δx a partire da un valore qualunque $x = a$. Si noti che il teorema vale anche quando *non esiste* $f'(a)$, giacchè in tutte le proposizioni precedenti, per non introdurre, senza necessità, condizioni sovrabbondanti, abbiamo sempre avuto cura di escludere gli estremi dell'intervallo, pur supponendo in essi continue le funzioni. Quando poi $f'($

esiste, dal teorema di Lagrangia segue, col far tendere δx a zero,

$$\lim_{x=a} f'(\xi) = f'(a) ;$$

ma il primo membro non è da confondersi con $\lim_{x=a} f'(x)$, quantunque col tendere di x ad a, anche ξ tenda ad a. Infatti ξ, pur rimanendo compreso fra a ed x, non è obbligato a prendere *tutti* i valori (*cfr.* § 19) intorno ad a, e però si può soltanto affermare * che, quando x tende ad a, la funzione $f'(x)$ passa per infiniti valori, che differiscono da $f'(a)$ tanto poco quanto si vuole; ma non si esclude con ciò che possa prenderne altri, che le impediscano di tendere ad un limite. Un esempio di ciò si ha nella funzione continua $x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, per la quale $f'(0)=0$, mentre, nel tendere di x a zero, $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ oscilla indefinitamente. Il teorema di Lagrangia dà

$$x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 2\xi \operatorname{sen} \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi} ;$$

e dal fatto stesso che si deve avere $\lim \cos \frac{1}{\xi} = 0$ si deduce che ξ è una tal funzione discontinua di x, che tende a zero, con x, evitando valori infinitamente più numerosi di quelli che va assumendo. Un altro esempio ci è offerto dalla funzione $f(x) = x \operatorname{sen} \log x$, per la quale si ha

$$\operatorname{sen} \log x = \sqrt{2} \operatorname{sen}({}^1/_4\pi + \log \xi) ;$$

sicchè, non potendo $\operatorname{sen}^2({}^1/_4\pi + \log\xi)$ superare ${}^1/_2$, vi sono sempre in $(0, h)$, per quanto piccolo sia h, infiniti intervalli, costantemente evitati da ξ: essi appartengono alla successione (q, q^2), (q^3, q^4), (q^5, q^6), ..., dove $q = e^{-\frac{1}{2}\pi}$.

e) Segue dalla precedente osservazione che ogni funzione, la quale possa venir considerata come derivata *unica* di un'altra, è suscettibile di sole discontinuità di seconda specie. In altri termini, quando un punto M' tende, lungo una curva, ad un punto fisso M, se sono ben determinate le tangenti alla curva in M ed in M', la tangente mobile tende a confondersi con la tangente fissa, o non tende ad alcuna posizione limite. Naturalmente la derivata d'una funzione può ben possedere discontinuità ordinarie; ma là dove queste si presentano si è sicuri che la derivata destra differisce dalla sinistra. Di ciò si ha un esempio nella funzione

$$f(x) = x[x] - {}^1/_2([x] + [x]^2) ,$$

* Vedi il *Calcolo* di Genocchi e Peano; p. 50.

che ha per derivata la funzione $[x]$; e la discontinuità ordinaria di questa, per ogni valore intero di x, rappresenta appunto il passaggio brusco dalla derivata sinistra, uguale ad $x-1$, alla derivata destra, uguale ad x.

Complementi della teoria dei limiti.

68. Mercè gli ultimi teoremi possiamo prepararci a lasciare il campo della pura teoria per entrare in quello, non meno interessante, delle applicazioni alla pratica del calcolo; e prima di tutto vogliamo dal teorema di Cauchy dedurre un altro importante teorema, per mezzo del quale ci sarà facile colmare una lacuna (§ 22) lasciata nella teoria dei limiti. Questo teorema ci metterà in grado di calcolare i limiti di molte funzioni, che per determinati valori della variabile indipendente si presenterebbero sotto forme prive di significato, come

$$0/0\ ,\ \infty/\infty\ ,\ 0.\infty\ ,\ \infty-\infty\ ,\ 0^0\ ,\ \infty^0\ ,\ 1^\infty\ ,$$

se fosse lecito applicare le ordinarie regole del calcolo dei limiti. Osserviamo subito che le forme precedenti son tutte riducibili alle prime due, le sole che siano contemplate nell'enunciato del teorema in discorso. Infatti, se il *prodotto* $\varphi\psi$ di due funzioni tende a presentarsi sotto la forma $0.\infty$, quando x tende ad un limite, basta applicare il teorema stesso al *quoziente* di φ per $1/\psi$. Similmente, se la differenza $\varphi-\psi$ tende ad assumere la forma $\infty-\infty$, basta considerare il prodotto di φ per $1-\dfrac{\psi}{\varphi}$ per essere subito ricondotti al caso precedente, purchè ψ/φ tenda ad 1, senza di che quella differenza non potrebbe rimanere finita. Al medesimo caso si riduce anche la ricerca del limite di φ^ψ, sia quando φ tende a zero o all'infinito, mentre ψ tende a zero, sia quando φ tende all'unità mentre ψ oltrepassa ogni limite. Basta considerare il logaritmo dell'espressione proposta, cioè $\psi\log\varphi$, che si presenterebbe appunto sotto la forma $0.\infty$, se si commettesse l'errore, del resto infecondo, di applicare illecitamente la nota regola che dà il limite del prodotto di più funzioni, in numero finito, *quando queste tendono a limiti finiti.*

69. **Teorema VIII** (teorema di l'Hospital). *Se due funzioni continue tendono simultaneamente a zero o all'infinito quando la variabile indipendente tende ad un limite finito* a, *o all'infinito, e se il rapporto delle derivate (supposte esistenti fuori di* a, *ed uniche) tende ad un limite, anche il rapporto delle funzioni tende allo stesso limite, purchè le derivate sian prive di radici comuni intorno ad* a, *o invece, nel caso che la variabile debba andare crescendo all'infinito, di radici comuni arbitrariamente grandi.*

a) Prima supponiamo che, per x tendente ad a, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tendano a zero, e per conseguenza si abbia, in virtù della continuità, $\varphi(a)=0$ e $\psi(a)=0$. Preso x sufficientemente vicino ad a perchè nessun numero dell'intervallo (a,x), diverso dagli estremi, annulli insieme φ' e ψ', il teorema di Cauchy dà

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

dove ξ, compreso fra a ed x, tende con x ad a. Ne segue

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

quando esiste il secondo membro. Questa conclusione regge ancora nell'ipotesi che x, invece di tendere ad a, vada crescendo oltre ogni limite. Infatti, posto $x=1/z$, si può scrivere

$$\lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{z=0}\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z=0}\frac{-\frac{1}{z^2}\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x=\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Nel far ciò si suppone che le funzioni $\varphi(1/z)$ e $\psi(1/z)$, continue fintantochè $z\gtrless 0$, siano continue anche per $z=0$, vale a dire che si conviene di attribuir loro il valore zero per $z=0$. Inoltre, per applicare con sicurezza il teorema di Cauchy, è necessario ammettere l'esistenza d'un tal numero l, che per $x>l$ non si annullino mai simultaneamente $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$. Considerazioni analoghe si possono fare quando x tende a $-\infty$, nel qual caso z dovrà tendere a zero dalla sinistra.

b) Ora supponiamo che, per x crescente all'infinito, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ oltrepassino ogni limite, e che il rapporto delle derivate tenda al limite l. Ciò esige che, dato il numero positivo ε, piccolo quanto si vuole, si possa trovare un numero a, tale che, per $x>a$, sia sempre

$$\left|\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}-l\right|<\varepsilon.$$

Posto che a sia stato già preso abbastanza grande perchè in (a,∞) non esistano radici comuni di φ' e ψ', si ha identicamente, applicando il teorema di Cauchy,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}\cdot\frac{1-\frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\cdot\frac{1-\frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}},$$

per ogni $x > a$, e per un conveniente $\xi > a$, inferiore ad x. Fissato a, si faccia crescere x indefinitamente. Il primo fattore non cessa di restar compreso fra $l - \varepsilon$ ed $l + \varepsilon$, mentre il secondo, che tende all'unità, finisce per cadere e restare nell'intervallo $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Ne segue che, a partire da un certo valore di x, si avrà costantemente

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = l + \theta\varepsilon \quad , \quad \frac{1 - \dfrac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1 - \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}} = 1 + \theta'\varepsilon ,$$

con θ e θ' minori di 1 in valore assoluto. Dunque

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = l + (\theta + l\theta' + \theta\theta'\varepsilon)\varepsilon .$$

Ora, fissato η, positivo e piccolo quanto si vuole, basta prendere simultaneamente, per $l \gtrless 0$,

$$\varepsilon < |l| \quad , \quad \varepsilon < \frac{\eta}{1 + 2|l|} ,$$

o $\varepsilon = \dfrac{\eta}{1 + \eta}$ per $l = 0$, perchè risulti

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - l \right| = |\theta + l\theta' + \theta\theta'\varepsilon| . \varepsilon < (1 + 2|l|)\varepsilon < \eta ,$$

nel primo caso, e

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \right| = |\theta + \theta\theta'\varepsilon| . \varepsilon < (1 + \varepsilon)\varepsilon = \frac{1 + 2\eta}{(1 + \eta)^2}\eta < \eta$$

nel secondo. Dunque, in tutti i casi,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = l .$$

Il teorema si deve ritenere come valido anche quando il numeratore si conserva finito, nel qual caso il limite del rapporto delle funzioni è zero; e per far vedere che il rapporto delle derivate non può tendere ad un limite diverso da zero basta scrivere

$$1 = \lim \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x) + \psi'(x)}{\psi'(x)} = 1 + \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} .$$

Finalmente, se x, invece di crescere all'infinito, tende ad un limite finito a, il teorema sussiste, perchè, posto $x-a=1/z$, si può scrivere

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{z=\infty}\frac{\varphi\left(a+\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a+\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z=\infty}\frac{-\frac{1}{z^2}\varphi'\left(a+\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}\psi'\left(a+\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\,.$$

70. **Osservazioni:** *a)* Nella ricerca del limite di φ/ψ, per x tendente ad a, i numeri $\varphi'(a)$ e $\psi'(a)$ possono non esistere, o entrambi essere nulli senza che il teorema cada in fallo, poichè soltanto *intorno* ad a, non per $x=a$, le funzioni sono obbligate ad ammettere le derivate, e queste ad esser prive di radici comuni. Se le derivate, oltre ad annullarsi per $x=a$, sono continue, la ricerca del limite del loro rapporto ci rimetterà in presenza del problema che si voleva risolvere; ma, supponendo soddisfatte anche le altre condizioni, noi potremo nuovamente applicare il teorema passando alle derivate seconde, poi, se occorre, alle terze; *ecc.*

b) Certe osservazioni precedenti conducono a formulare un'obbiezione, grave in apparenza, contro il teorema di l'Hospital, in quanto sembra che il procedimento che ne deriva per calcolare il limite d'un quoziente debba riuscir sempre illusorio, sia nel caso che le funzioni vadano crescendo all'infinito, col tendere della variabile ad un limite finito, sia quando tendono a zero mentre la variabile oltrepassa ogni limite. Infatti le derivate, se non oscillano indefinitamente, vanno anch'esse crescendo all'infinito nel primo caso (§ 67, *b*), e nel secondo (§ 67, *c*) tendono a zero. A ciò si risponde che l'importanza del procedimento di calcolo, indicato dal teorema di l'Hospital, risiede principalmente nella possibilità di trasformare un'espressione, che tende ad un limite, in un'altra che non può tendere ad un limite differente, e che si presenta quasi sempre sotto una forma più semplice, o si presta a semplificazioni tali che ne riesca facile il calcolo diretto del limite.

c) Il teorema di l'Hospital si può considerare come valido anche nel caso che il rapporto delle derivate, invece di tendere ad un limite finito, vada crescendo indefinitamente. Infatti, per x tendente ad a, nell'ipotesi che φ e ψ tendano a zero, preso intorno ad a un intervallo in cui φ'/ψ' si conservi superiore ad un dato numero l, grande quanto si vuole, anche φ/ψ si manterrà maggiore di l per gli stessi valori di x, perchè il valore dell'ultimo rapporto, per un dato valore di x, è uguale ad uno dei valori che il primo prende in (a, x). Nel caso poi che φ e ψ vadano crescendo all'infinito, si consideri il rapporto ψ/φ. Questo tende a zero, come ψ'/φ', e siccome finisce per conservarsi positivo si può asserire che φ/ψ cresce all'infinito come φ'/ψ'.

d) Se il limite del rapporto delle derivate ***non esiste***, non è lecito dedurne la non esistenza del limite del rapporto delle funzioni. Per esempio si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x=\infty} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1 \ ,$$

mentre non tende ad alcun limite il rapporto delle derivate, evidentemente uguale a $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$. Infatti dalla dimostrazione del teorema risulta che, quando esiste il limite del rapporto delle funzioni, per x crescente all'infinito o tendente ad un limite finito, esiste anche, non il secondo, ma il primo dei seguenti limiti:

$$\lim_{x=\dots} \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \quad , \quad \lim_{x=\dots} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \ .$$

In sostanza ξ è una funzione di x, che cresce all'infinito con x, o tende con questa variabile ad un comune limite finito, ma che può non assumere *tutti* i valori che va prendendo x, d'onde segue che dall'esistenza del primo limite non si può dedurre quella del secondo. Invece l'esistenza del secondo limite, ammessa nell'enunciato del teorema, include quella del primo, e per conseguenza anche quella del limite del rapporto delle funzioni.

e) Delle restrizioni concernenti le radici comuni di φ' e ψ' non si ha mai occasione di tener conto nelle ordinarie applicazioni; ma è utile essere avvertiti della possibilità che il rapporto delle funzioni oscilli, malgrado che tenda ad un limite il rapporto delle derivate. Così, per esempio, se si prende

$$\varphi(x) = x + \operatorname{sen} x \cos x \quad , \quad \psi(x) = (x + \operatorname{sen} x \cos x) e^{\operatorname{sen} x} \ ,$$

è chiaro che, crescendo x all'infinito, il rapporto delle funzioni oscilla indefinitamente fra e ed $1/e$; ma il rapporto delle derivate

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{2e^{-\operatorname{sen} x} . \cos x}{x + (2 + \operatorname{sen} x) \cos x}$$

tende a zero, perchè il numeratore resta finito, mentre il denominatore cresce all'infinito come x. Ciò si deve al simultaneo annullarsi di $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ tutte le volte che x passa per una delle radici di $\cos x$, fra le quali, come si sa, ve ne sono sempre maggiori di qualunque numero assegnato.

71. **Esercizii**: *a)* Qual'è, per x crescente all'infinito, il limite di $x^n e^{-x}$? Evidentemente il limite è zero per $n \leqq 0$. Se poi n è positivo, sia ν il massimo numero non positivo fra i numeri $n-1, n-2, \ldots$. Si ha, per x infinito,

$$\lim x^n e^{-x} = \lim \frac{x^n}{e^x} = n \lim \frac{x^{n-1}}{e^x} = n(n-1) \lim \frac{x^{n-2}}{e^x} = \ldots$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots(\nu+1) \lim \frac{x^\nu}{e^x} = 0 \ .$$

In altri termini e^x cresce all'infinito più rapidamente di qualunque potenza di x. Ne risulta, cambiando x in $\log x$, che questa funzione cresce all'infinito così lentamente, che qualunque sua potenza, con esponente grande quanto si vuole, cresce meno rapidamente di x. Ciò si può constatare in modo diretto, mediante il teorema di l'Hospital, scrivendo

$$\lim \frac{\log^n x}{x} = n \lim \frac{\log^{n-1} x}{x} = \ldots = n(n-1)\ldots(\nu+1) \lim \frac{\log^\nu x}{x} = 0 \ .$$

Il limite, per x infinito, di $x^{\frac{1}{x}}$, si può calcolare (ricordando la continuità di $\log x$) nel seguente modo:

$$\lim \log x^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\log x}{x} = 0 \quad , \quad \log \lim x^{\frac{1}{x}} = 0 \quad , \quad \lim x^{\frac{1}{x}} = 1 \ .$$

Se nei precedenti risultati si cambia x in $1/x$, si vede che si ha pure

$$\lim_{x=0} x \log^n x = 0 \quad , \quad \lim_{x=0} x^x = 1 \ .$$

b) Dato a calcolare il limite di $\cos x \,.\, \log \operatorname{sen} x - \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ per x tendente a zero, si cominci dal porre l'espressione proposta sotto la forma seguente:

$$\log 2 \,.\, \cos x + (1 + \cos x) \log \cos \frac{x}{2} - (1 - \cos x) \log \operatorname{sen} \frac{x}{2} \ .$$

La prima parte tende a $\log 2$, la seconda a 0, e la terza, evidentemente uguale a $-\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \log \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$, tende anch'essa a 0, per quanto si è visto in fine del precedente esercizio. Dunque

$$\lim_{x=0} \left(\cos x \,.\, \log \operatorname{sen} x - \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = \log 2 \ .$$

c) A titolo di verifica (*cfr.* § 29, *a*) si osservi che, quando x tende a zero,

$$\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1 \quad , \quad \lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim \frac{1}{\cos^2 x} = 1 \ .$$

Il teorema di l'Hospital conduce inoltre, sempre per x tendente a zero, ai seguenti risultati:

$$\lim \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{b - \sqrt{b^2 - x^2}} = \lim \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a},$$

$$\lim \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \lim \frac{a^x \log a - b^x \log b}{c^x \log c - d^x \log d} = \frac{\log(a/b)}{\log(c/d)};$$

$$\lim \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{3},$$

$$\lim \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{6} \lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{6},$$

$$\lim \frac{2x - 3\operatorname{sen} x + x\cos x}{x^5} = \frac{1}{5} \lim \frac{2 - 2\cos x - x\operatorname{sen} x}{x^4} = \frac{1}{20} \lim \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{60},$$

$$\lim \frac{(9 + 6\cos x)x - (14 + \cos x)\operatorname{sen} x}{x^7} = \frac{2}{7} \lim \frac{4\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \operatorname{sen} x \cos\frac{x}{2} - 3x\cos\frac{x}{2}}{x^5}$$

$$= \frac{3}{70} \lim \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{140}.$$

d) Analogamente si ottiene

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

o, in altro modo,

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3 \cos x} = \lim \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Se per calcolare il limite di $\frac{1}{x^2} - \cot^2 x$ si comincia dal porre questa espressione sotto la forma

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x},$$

si vede subito (senza applicare il teorema di l'Hospital) che il primo fattore tende a 2, e si sa che gli altri tendono rispettivamente ai limiti $^1/_3$ ed 1. Dunque

$$\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right) = \frac{2}{3}.$$

e) Quando si sa (§ 29, *d*) che, per x tendente a zero, $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ tende ad e, è naturale domandarsi come si comporta la differenza $e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$, e si è in tal modo condotti al seguente calcolo:

$$\lim\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=e\lim\frac{(1+x)\log(1+x)-x}{x^2}=\frac{e}{2}\lim\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{e}{2}\lim\frac{1}{1+x}=\frac{e}{2}\,.$$

Similmente

$$\lim\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}-e}{x^2}=\frac{e}{4}\lim\frac{2x+x^2-2(1+x)\log(1+x)}{x^3}$$

$$=\frac{e}{6}\lim\frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\frac{e}{12}\lim\frac{1}{1+x}=\frac{e}{12}\,.$$

f) Se si vuol calcolare, per x infinito, il limite di $x-\sqrt{(x-a)(x-b)}$, conviene porre $x=1/z$, per far poi tendere z a zero. Così l'espressione proposta diventa uguale al quoziente di $1-\sqrt{(1-az)(1-bz)}$ per z, e però il suo limite è uguale al limite di

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-az)(1-bz)}\left(\frac{a}{1-az}+\frac{b}{1-bz}\right)$$

per $z=0$. Dunque

$$\lim_{x=\infty}\left(x-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right)=\tfrac{1}{2}(a+b)\,.$$

A questo risultato si giunge subito, senza far uso del teorema di l'Hospital, se all'espressione proposta si dà la forma

$$\frac{(a+b)x-ab}{x+\sqrt{(x-a)(x-b)}}=\frac{a+b-\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)}}\,.$$

g) Più generalmente, tutte le volte che per due funzioni φ e ψ, crescenti all'infinito con x, si può determinare una funzione f, tale che i rapporti di φ e ψ ad f tendano verso un limite finito k, diverso da zero, se si conosce anche il limite l di $(\varphi'-\psi')\frac{\sqrt{f}}{f'}$, è facile calcolare il limite di $\sqrt{\varphi}-\sqrt{\psi}$. Infatti

$$\lim\left(\sqrt{\varphi}-\sqrt{\psi}\right)=\lim\frac{\varphi-\psi}{\sqrt{\varphi}+\sqrt{\psi}}=\frac{1}{2\sqrt{k}}\lim\frac{\varphi-\psi}{\sqrt{f}}=\frac{l}{\sqrt{k}}\,.$$

Per $f=\varphi=x^2$ e $\psi=(x-a)(x-b)$ si ricade sull'esercizio precedente. In modo analogo si tratta il caso delle radici n^{ime}, e si trova

$$\lim\left(\sqrt[n]{\varphi}-\sqrt[n]{\psi}\right)=\frac{1}{n}\lim\frac{\varphi'-\psi'}{x^{n-2}}$$

quando esiste il secondo membro, supponendo che i rapporti di φ e ψ ad x^n, per x infinito, tendano ad 1. In particolare

$$\lim_{x=\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+ax^{n-1}+\dots}-\sqrt[n]{x^n+bx^{n-1}+\dots}\right)=\frac{a-b}{n}.$$

Discussione delle funzioni.

72. Fra le più importanti applicazioni del teorema di l'Hospital è la *ricerca dei minimi e dei massimi assoluti* (§ 60) delle funzioni. Già si è visto (§ 61) che, se per $x=a$ la funzione $f(x)$, a derivata unica $f'(x)$, passa per un minimo o per un massimo, è $f'(a)=0$. Ora supponiamo che a annulli le successive derivate di $f(x)$, fino alla n^{ima} esclusa, o, come si suol dire (§ 63, b), che a sia una radice multipla di $f'(x)$, dell'ordine $n-1$. Applicando ripetutamente il teorema di l'Hospital si ottiene, per x tendente ad a, dalla destra o dalla sinistra,

$$\lim\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\frac{1}{n}\lim\frac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}}=\dots=\frac{1}{n!}\lim\frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a};$$

e poichè, per la definizione stessa di $f^{(n)}(a)$, si ha

$$\lim\frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a}=\lim\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=f^{(n)}(a),$$

si vede che

$$\lim\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Qui si noti che al medesimo risultato si giungerebbe anche applicando una volta di più il teorema di l'Hospital; ma con ciò si verrebbe ad ammettere l'esistenza di $f^{(n)}(x)$ intorno ad a, mentre a noi deve bastare che esista $f^{(n)}(a)$. Tornando al risultato ottenuto si osservi che, quando x tende ad a, $f(x)-f(a)$ finisce per assumere e conservare il segno di $(x-a)^n f^{(n)}(a)$. Questo segno varia con quello di $x-a$ se n è dispari, ma resta invariato e coincide col segno di $f^{(n)}(a)$ se n è pari. Ne segue che nel primo caso non si ha nè minimo nè massimo, e nel secondo si ha certamente un minimo o un massimo. In altri termini: *i valori di* x, *che rendono minima o massima una funzione di* x, *sono le radici semplici della derivata, e le radici multiple di ordine dispari.* Secondo che il valore di $f^{(n)}(a)$ è positivo o negativo si ha un minimo o un massimo (nel caso di n pari), o si può affermare che la funzione è crescente o decrescente (quando n è dispari). S'intende che in tutto ciò si suppone unica questa derivata n^{ima}, altrimenti, come si vedrà, può ben darsi che la proposizione enunciata cada in fallo.

73. Esercizii: *a) Fra i rettangoli che hanno un dato perimetro, il quadrato è quello che racchiude l'area massima.* Infatti, se x è la lunghezza d'un lato, e $2a$ quella del perimetro, l'area è misurata dal numero $y = x(a - x)$. Intanto la derivata prima $y' = a - 2x$ si annulla per $x = {}^1/_2 a$, e poichè la derivata seconda è *negativa*, si vede che per $x = {}^1/_2 a$ la funzione y raggiunge il valore *massimo* ${}^1/_4 a^2$. Similmente, *fra tutti i rettangoli che racchiudono un'area* a^2, *il quadrato è quello che ha il minimo perimetro.* Infatti, se x è la lunghezza d'un lato, e $2y$ quella del perimetro, si ha $y = x + \frac{a^2}{x}$, $y' = 1 - \frac{a^2}{x^2}$, $y'' = \frac{2a^2}{x^3}$. La prima derivata si annulla per $x = a$ e per $x = -a$; per questi valori è $y'' > 0$, $y'' < 0$, rispettivamente, e però la funzione ammette un minimo $2a$ ed un massimo $-2a$; ma soltanto il primo risponde alla questione proposta, perchè questa richiede che sia $x > 0$.

b) Con un foglio rettangolare proponiamoci di *costruire una scatola di volume massimo*, tagliando via dagli angoli quattro quadrati uguali. Se a e b sono le dimensioni del foglio, ed x l'altezza che si vuol dare alla scatola, il volume di questa è misurato dal numero

$$y = x(a - 2x)(b - 2x) = abx - 2(a + b)x^2 + 4x^3 .$$

Ponendo uguale a zero la derivata $y' = ab - 4(a + b)x + 12x^2$, si ottiene

$$x = {}^1/_6\left(a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right) .$$

La derivata seconda $y'' = -4(a + b) + 24x$ diventa $\pm 4\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. Per avere il massimo di y bisogna dunque ritenere il segno $-$, si deve cioè prendere $x = {}^1/_6(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2})$, valore sempre compreso fra ${}^1/_6 a$ ed ${}^1/_6 b$. Del resto l'altra soluzione è illusoria, perchè dà un valore superiore alla metà della più piccola dimensione del foglio.

c) Se si vuol *discutere la funzione* $y = x^{\frac{1}{x}}$ nell'intervallo $(0, \infty)$, si cominci dal notare che, quando x tende a zero, dalla destra, basta porre $x = 1/z$, e far poi crescere z all'infinito, per trovare $y = 1/z^z$, $\lim y = 0$. Per $x = 1$ è $y = 1$, e per x crescente all'infinito la funzione tende a riprendere (§ 71, *a*) il valore 1. Si capisce dunque che, quando x varia da 1 all'infinito, la funzione deve passare per un minimo o per un massimo, ed è facile prevedere che si ha un massimo, giacchè $y > 1$ per $x > 1$. Per accertarsene si osservi che la derivata

$$y' = x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - \log x) ,$$

positiva per $x < e$, diventa negativa per $x > e$, e però la funzione, prima crescente, decresce poi. Essa raggiunge dunque per $x = e$ il massimo valore $e^{\frac{1}{e}} = 1{,}444667\ldots$. Se si vuol constatare mediante l'esame di y'' che la funzione passa effettivamente per un massimo, e non per un minimo, si osservi che

$$\text{da} \quad \frac{y'}{y} = \frac{1 - \log x}{x^2} \quad \text{si deduce} \quad \frac{yy'' - y'^2}{y^2} = -\frac{3 - 2\log x}{x^3} .$$

Ora, facendo $x=e$, $y=e^{\frac{1}{e}}$, $y'=0$, si ottiene $y''=-e^{\frac{1}{e}-3}$: ciò basta per asserire che $e^{\frac{1}{e}}$ è il *massimo* valore di $x^{\frac{1}{x}}$.

d) Proponiamoci di *trovare le basi dei sistemi di logaritmi, nei quali può esistere un logaritmo uguale al numero corrispondente.* Sia a la base incognita, e si cerchi se la funzione $y=x-\operatorname{Log} x$ può annullarsi. È manifesto che, per x positivo e sufficientemente piccolo, come per x abbastanza grande, y è positivo. Affinchè questa funzione possa annullarsi occorre dunque e basta che il suo minimo valore sia negativo o nullo. Questo minimo è determinato dall'equazione $y'=1-\dfrac{\operatorname{Log} e}{x}=0$; e per convincersi che si tratta realmente d'un minimo, e non d'un massimo, basta riflettere che per $x<\operatorname{Log} e$ la funzione decresce, per cominciare poi a crescere a partire da $x=\operatorname{Log} e$. Il minimo valore di y è dunque

$$\operatorname{Log} e-\operatorname{Log}\operatorname{Log} e=\operatorname{Log}(e/\operatorname{Log} e)\ .$$

Perchè questo valore sia negativo o nullo è necessario che si abbia $e\leqq\operatorname{Log} e$, cioè $1\leqq\operatorname{Log} e^{\frac{1}{e}}$, e per conseguenza $a\leqq e^{\frac{1}{e}}$.

e) A quali condizioni debbono soddisfare i numeri p *e* q *affinchè il trinomio* x^3+px+q *si annulli per tre distinti valori reali di* x? Perchè la funzione proposta y possa annullarsi tre volte, quando x varia da $-\infty$ a $+\infty$, è anzitutto necessario (§ 63, *b*) che la derivata $y'=3x^2+p$ possa annullarsi per due distinti valori reali di x: ciò esige che sia $p<0$. Supponendo soddisfatta questa condizione, si osservi che nel primo e nel terzo degli intervalli

$$\left(-\infty\,,\,-\sqrt{-{}^1/_3 p}\right)\ ,\quad \left(-\sqrt{-{}^1/_3 p}\,,\,\sqrt{-{}^1/_3 p}\right)\ ,\quad \left(\sqrt{-{}^1/_3 p}\,,\,\infty\right)$$

è $y'>0$, mentre nell'intervallo di mezzo è $y'<0$. Dunque y non può annullarsi che una volta sola in ciascuno di questi intervalli, e perchè si annulli effettivamente in uno di essi occorre e basta che negli estremi prenda segni opposti. Siccome intanto negli estremi dell'intervallo di mezzo essa prende i valori

$$-{}^2/_3 p\sqrt{-{}^1/_3 p}+q\quad,\quad {}^2/_3 p\sqrt{-{}^1/_3 p}+q\ ,$$

rispettivamente *massimo* e *minimo* nel senso assoluto, è prima di tutto *necessario* che questi numeri abbiano segni opposti, cioè che si abbia

$$\left(-{}^2/_3 p\sqrt{-{}^1/_3 p}+q\right)\left({}^2/_3 p\sqrt{-{}^1/_3 p}+q\right)<0\ ,\quad \text{ossia}\quad 4p^3+27q^2<0\ .$$

Questa condizione è *sufficiente*, perchè, quando è soddisfatta, è $p<0$ necessariamente, e la funzione, che nell'intervallo di mezzo è decrescente, prende il segno $+$ nell'estremo inferiore, il segno $-$ nell'estremo superiore, e però si annulla anche negli altri due intervalli.

f) Vogliamo dimostrare che, nell'ellisse, *la distanza del centro ad una nor-*

male qualunque non supera la differenza dei semi-assi. A $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, equazione dell'ellisse, si può soddisfare ponendo $x=a\cos\varphi$, $y=b\,\mathrm{sen}\,\varphi$, dove φ varia da 0 a 2π. Il coefficiente angolare della tangente (§ 52) si ottiene derivando l'equazione della curva:

$$b^2x+a^2yy'=0 \quad , \quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{b\cos\varphi}{a\,\mathrm{sen}\,\varphi} .$$

Dunque l'equazione della normale è

$$y-b\,\mathrm{sen}\,\varphi=\frac{a\,\mathrm{sen}\,\varphi}{b\cos\varphi}(x-a\cos\varphi) ,$$

cioè $ax\,\mathrm{sen}\,\varphi-by\cos\varphi=(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi$; e però la distanza di questa retta al centro è

$$h=\frac{(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}} .$$

Ora dovremmo calcolare la derivata di h rispetto a φ per porla uguale a zero; ma qui conviene osservare che si ha

$$\left(\frac{a^2-b^2}{h}\right)^2=\frac{a^2}{\cos^2\varphi}+\frac{b^2}{\mathrm{sen}^2\varphi}=a^2+b^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\varphi+b^2\cot^2\varphi ,$$

sicchè la ricerca del massimo valore di h si trova ridotta alla ricerca del minimo valore di $a^2\,\mathrm{tg}^2\varphi+b^2\cot^2\varphi$, ossia della somma di due quantità variabili, il cui prodotto ha il valore costante a^2b^2. Dunque, valendosi del risultato ottenuto nel primo esercizio, si può subito affermare che il massimo di h si presenta quando $a^2\,\mathrm{tg}^2\varphi$ e $b^2\cot^2\varphi$ diventano entrambi uguali ad ab, ossia per $\mathrm{tg}\,\varphi=\pm\sqrt{b/a}$, nel qual caso si ha

$$\left(\frac{a^2-b^2}{h}\right)^2=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2 , \quad \text{d'onde} \quad h=a-b .$$

g) Si può dimostrare che *la luce impiega il minor tempo possibile* quando passa da un punto ad un altro attraverso due mezzi omogenei, separati da un piano. Siano infatti a e b le distanze dei punti, che si considerano nei due mezzi, al piano di separazione; sia φ l'angolo d'incidenza, ψ l'angolo di rifrazione, nv e v le velocità della luce nei due mezzi; e si osservi che il tempo impiegato nel passaggio da un punto all'altro è

$$t=\frac{1}{v}\left(\frac{a}{n\cos\varphi}+\frac{b}{\cos\psi}\right) .$$

Gli angoli φ e ψ sono fra loro vincolati mediante la relazione

$$a\,\mathrm{tg}\,\varphi+b\,\mathrm{tg}\,\psi=\textit{costante} ,$$

dalla quale, derivando rispetto a φ, si deduce

$$\frac{a}{\cos^2\varphi}+\frac{b\psi'}{\cos^2\psi}=0 \ .$$

Intanto si ha

$$t'=\frac{1}{v}\left(\frac{a\,\text{sen}\,\varphi}{n\cos^2\varphi}+\frac{b\,\text{sen}\,\psi}{\cos^2\psi}\psi'\right)=\frac{a(\text{sen}\,\varphi-n\,\text{sen}\,\psi)}{nv\cos^2\varphi} \ ,$$

e si vede che dev' essere $\text{sen}\,\varphi/\text{sen}\,\psi=n$ affinchè t' si annulli. È questa appunto la notissima legge di rifrazione, scoperta da Cartesio, e presentata da Fermat e da Leibniz come un caso particolare della legge universale di *risparmio*, che presiede alle manifestazioni di tutti i fenomeni naturali, anche di quelli che più sembrano ribelli alle investigazioni matematiche *.

h) Nelle questioni geometriche accade talvolta che il minimo (o il massimo) di cui si va in cerca sia *relativo* (§ 60) ad un certo intervallo, in cui la variabile indipendente è obbligata a rimanere per le condizioni stesse del problema; ed allora può ben darsi che la derivata non si annulli, e che, per conseguenza, la ricerca riesca infruttuosa. Bisogna pertanto, ogni volta che la variabile indipendente non può uscire da un determinato intervallo, aver cura di scegliere altrimenti tale variabile, o pure indagare direttamente se per avventura *negli estremi* non si verifichi un minimo o un massimo, che potrebbe rispondere alla questione proposta, quantunque non sia minimo o massimo nel senso assoluto. Un esempio semplicissimo ci si presenta nella ricerca della minima o massima fra le corde di un circolo, che hanno un estremo fisso A, ed un altro mobile M. È chiaro *a priori* che si ha il minimo $r=0$ quando M coincide con A, ed il massimo $r=2a$ quando M coincide col punto B, diametralmente opposto ad A sulla circonferenza. Se si prende AB come asse delle ascisse, ed A come origine, si ha $r^2=2ax$, poi $rr'=a$, e si vede che r' non si annulla nè in A nè in B. Ciò si deve al fatto che la variabilità di x è limitata all'intervallo $(0, 2a)$, e che il minimo ed il massimo cercati avvengono proprio negli estremi. Se invece si prende come variabile indipendente l'angolo $\theta=\widehat{MAB}$, si ha $r=2a\cos\theta$, $r'=-2a\,\text{sen}\,\theta$, e si trova il solo massimo $r=2a$, corrispondente a $\theta=0$. Ciò si spiega osservando che θ varia soltanto nell'intervallo $(-{}^1/_2\pi, {}^1/_2\pi)$, negli estremi del quale si verifica il minimo $r=0$, relativo all'intervallo stesso, mentre il massimo $r=2a$ avviene per $\theta=0$, cioè per un valore che cade *nell'interno* del predetto intervallo. Questo massimo è dunque tale anche nel senso assoluto, e però r' deve annullarsi. Sparisce ogni difficoltà se il punto A si sposta, per esempio, verso B, arrivando alla distanza b dal centro, nel qual caso si ha $r^2-2br\cos\theta+b^2=a^2$; poi derivando, e ponendo $r'=0$, si ottiene $\text{sen}\,\theta=0$, cioè $\theta=0$ ed $r=a+b$, o $\theta=\pi$ ed $r=a-b$. Una nuova derivazione dà

$$r''=\frac{br\cos\theta}{b\cos\theta-r}=\frac{\pm b(a\pm b)}{\pm b-(a\pm b)}=\mp\frac{b}{a}(a\pm b)\lesssim 0 \ ,$$

e così si vede che $a+b$ è il massimo, $a-b$ il minimo valore di r.

* Leggi, in proposito, l'interessante capitolo sulla ***direzione del movimento*** nei ***First principles*** di Spencer.

i) Sia $\varphi(x)$ una funzione continua intorno ad $x=0$, ma discontinua di prima specie per $x=0$: sia $\varphi(-0)<0$, $\varphi(+0)>0$. Per esempio si potrebbe prendere $\varphi(x)=(e^{\frac{1}{x}}-1)/(e^{\frac{1}{x}}+1)$, osservando che $\varphi(\mp 0)=\mp 1$. La funzione $f(x)=x^2\varphi(x)$ non ha, per $x=0$, nè minimo nè massimo, perchè intorno allo zero la funzione $\varphi(x)$, continua, ha il segno di x, e però altrettanto si può dire di $f(x)$, che per conseguenza è crescente tanto a sinistra quanto a destra dello zero. Intanto

$$f'(0)=\lim_{x=0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x=0}x\varphi(x)=0 \; .$$

Analogamente $f''(0)$ può non esistere; ma, nel caso opposto, si ha

$$f''(0)=\lim_{x=\pm 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=2\lim_{x=\pm 0}\frac{f(x)}{x^2}=2\lim_{x=\pm 0}\varphi(x)=2\varphi(\pm 0)\gtrless 0 \; .$$

In tutti i casi si può affermare che non è $f''(0)=0$. Adunque *per* $x=0$ *è nulla la derivata prima di* f(x), *ma non la derivata seconda*, *eppure* f(0) *non è nè un minimo nè un massimo di* f(x). Ciò si spiega osservando che la derivata seconda non è unica.

j) Discutiamo, per finire, il modo di variare della funzione $\Gamma(x)$, supponendo prima che x varii da 0 all'infinito. Dalla definizione (§ 13, *h*) di $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ si deduce, prendendo i logaritmi dei due membri,

$$\log\Gamma(x)=-\log x+\sum_1^\infty\left\{x\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\} .$$

Deriviamo, riserbandoci di legittimare (*cfr.* § 44) in seguito la derivazione del secondo membro, come somma che consta di infinite parti:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\frac{1}{x}+\sum_1^\infty\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{x+n}\right)=\sum_1^\infty\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x+n}\right)-\sum_1^\infty\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ora, se per brevità si rappresenta con H_n la somma dei primi n termini della serie armonica, si vede che l'ultima somma è il limite, per n infinito, di

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)=H_n-\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

ed è per conseguenza * uguale alla *costante di Eulero*

$$\lim_{n=\infty}(H_n-\log n)=\mathbf{C}=0{,}577215664\ldots\ldots \; .$$

---

* *Analisi algebrica*, p. 147.

Dunque

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\mathbf{C}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{x+2}+\cdots .$$

Il secondo membro cresce con x; e, poichè per $x=1$ e per $x=2$ prende i valori $0<\mathbf{C}$ ed $1>\mathbf{C}$, diventa uguale a $\mathbf{C}$ una volta sola: ciò avviene per un certo valore $x=\xi$, compreso fra 1 e 2, radice unica di $\Gamma'(x)$. Siccome si ha $\Gamma'(x)<0$ o $\Gamma'(x)>0$ secondo che $x<\xi$ o $x>\xi$, si vede che $\Gamma(x)$ è prima decrescente, poi crescente, sicchè $\Gamma(\xi)$ è il *minimo* valore di $\Gamma(x)$ nell'intervallo $(0,\infty)$. Alla medesima conclusione si perviene osservando che

$$\frac{\Gamma''(\xi)}{\Gamma(\xi)}=\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{(\xi+1)^2}+\frac{1}{(\xi+2)^2}+\cdots>0 .$$

Il valore della radice ξ, già isolata nell'intervallo $(1,2)$, si ottiene applicando un noto * metodo, che dà

$$\xi=1{,}4616321\ldots\ldots \quad , \quad \Gamma(\xi)=0{,}8856032\ldots\ldots .$$

Quando x varia da ξ all'infinito, la funzione, crescendo sempre, oltrepassa ogni limite, giacchè $\Gamma(x+1)\geq[x]!$. Essa cresce anche quando x va invece decrescendo da ξ verso zero; e cresce indefinitamente, perchè

$$\lim_{x=0}x\Gamma(x)=\lim_{x=0}\Gamma(x+1)=\Gamma(1)=1 .$$

k) Per x negativo, i valori di $\Gamma(x)$ dipendono, mercè la relazione

$$\Gamma(x)=\frac{(-1)^n\Gamma(\rho)}{(1-\rho)(2-\rho)(3-\rho)\ldots(n-\rho)} ,$$

in cui $\rho=x-[x]$, e $-n=[x]$, da quelli che la funzione prende nell'intervallo $(0,1)$, esclusi gli estremi. Ne segue che negli intervalli $(-1,0)$, $(-2,-1)$, $(-3,-2)$, ..., la funzione è alternativamente negativa e positiva, e che intorno a tutti gli estremi $(0,-1,-2,-3,\ldots)$ diventa infinitamente grande in valore assoluto. Si prevede dunque che in ciascun intervallo $(-n,-n+1)$ essa deve raggiungere, almeno una volta, un valore *massimo* o *minimo*, secondo che n è dispari o pari. Un tal minimo o massimo si ha quando ρ soddisfa all'equazione

$$\frac{\Gamma'(\rho)}{\Gamma(\rho)}+\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{2-\rho}+\cdots+\frac{1}{n-\rho}=0 .$$

Ora, variando ρ da 0 ad 1, il primo membro va sempre crescendo da $-\infty$ a $+\infty$, e però diventa una volta sola uguale a zero, per un certo valore di ρ, che resta così definito come una funzione ρ_n di n. Vi è dunque in $(-n,-n+1)$ un

* *Analisi algebrica*, p. 420.

sol minimo o massimo di $\Gamma(x)$, che si presenta quando la variabile x prende il valore $x_n = -n + \rho_n$. Intanto, essendo

$$-\frac{\Gamma'(\rho_n)}{\Gamma(\rho_n)} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} ,$$

si vede che, per n crescente all'infinito, il primo membro deve (come il secondo) crescere indefinitamente. Dunque ρ_n tende a zero. Inoltre, siccome

$$\lim_{x=0} x \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -1 ,$$

si ha pure

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\rho_n}{1-\rho_n} + \frac{\rho_n}{2-\rho_n} + \cdots + \frac{\rho_n}{n-\rho_n} \right) = 1 ;$$

e poichè la somma in parentesi è compresa fra

$$\rho_n \mathrm{H}_n \qquad \text{e} \qquad \frac{\rho_n}{1-\rho_n} + \rho_n \mathrm{H}_{n-1} ,$$

ne risulta $\lim_{n=\infty} \rho_n \mathrm{H}_n = 1$, ossia $\lim_{n=\infty} \rho_n \log n = 1$. Ciò premesso, essendo

$$|\,\Gamma(x_n)\,| < \frac{\Gamma(\rho_n + 1)}{(1-\rho_n)\rho_n \log n} \cdot \frac{\log n}{(n-1)!} ,$$

siccome, nel secondo membro, il primo fattore tende ad 1, ed il secondo a 0, si ha $\lim_{n=\infty} \Gamma(x_n) = 0$. Ne segue che la funzione $\Gamma(x)$ prende (infinite volte) qualunque valore diverso da zero *. In altri termini l'equazione $\Gamma(x) = k$, priva di radici per $k = 0$, ne ammette infinite per qualunque altro valore di k.

* Veggasi a pag. 65 della monografia *La fonction gamma*, di M. Godefroy, la linea rappresentativa di $y = \Gamma(x)$.

SVILUPPI IN SERIE.

Serie di funzioni.

74. Ora vogliamo particolarmente occuparci delle funzioni definite per mezzo di serie. I valori di x, per i quali converge una data serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots ,$$

i cui termini sono funzioni di x, possono costituire uno o più intervalli, nei quali viene così ad essere definita la *somma* della serie come funzione di x. Se si considera un intervallo qualunque (a, b) in cui la serie converge, anche il resto $\varphi_n(x)$, cioè la somma della serie che si ottiene sopprimendo nella serie data i primi n termini, è una funzione di x, definita nel detto intervallo. Si sa * che, quando n cresce all'infinito, il resto tende a zero, vale a dire che, dato ε positivo, e piccolo quanto si vuole, si può, per ogni valore di x compreso in (a, b), trovare un numero ν, tale che il valore assoluto di φ_n rimanga sempre inferiore ad ε quando n supera ν. Se si riesce a determinare ν *indipendentemente da* x, la serie si dice convergente *uniformemente*. In altre parole, se, in corrispondenza a ciascun valore di x, immaginiamo scelto per ν (che supporremo intero) il più piccolo valore possibile, si può dire che ν è una funzione di x, definita nell'intervallo (a,b). Se questa funzione è finita in tale intervallo, qualunque sia ε, essa vi ammette (§ 15) il limite superiore (che nel caso attuale è un massimo); ed è chiaro che, per n maggiore di questo limite, sarà sempre $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$, comunque si fissi x in (a,b). In questo caso la convergenza è uniforme. Ma può anche darsi che, per un valore di ε convenientemente piccolo (ed *a fortiori* per ogni valore più piccolo), la funzione ν non sia finita nell'intervallo che si considera. Allora è impossibile determinare un valore di n, *lo stesso per tutti i valori di* x in (a, b), a partire dal quale φ_n restì, in valore assoluto, inferiore ad ε; e però la serie non converge uniformemente.

75. **Teorema I.** *Per l'uniforme convergenza d'una serie di funzioni di* x, *in un dato intervallo, occorre e basta che il resto* $\varphi_n(\mathrm{x})$ *tenda*

* *Analisi algebrica*, p. 117.

a zero anche quando vi si fa arbitrariamente variare x *con* n, *nell'intervallo che si considera.*

Dalla definizione stessa della convergenza uniforme risulta che, se la serie converge uniformemente, si ha sempre $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x_n)=0$, qualunque sia la successione $x_1, x_2, x_3, \ldots$ di numeri, presi nell'intervallo considerato. Reciprocamente, se ciò accade, la serie converge uniformemente; e per convincersene basta far vedere che, quando la convergenza *non* è uniforme, esiste nel detto intervallo almeno una successione di numeri $x_1, x_2, x_3, \ldots$, tali che $\varphi_n(x_n)$ *non* tende a zero. Infatti, nella detta ipotesi, dato un numero positivo ε, convenientemente piccolo, la funzione ν, definita nel precedente paragrafo, non è finita. Ne segue che si può trovare una successione $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ di valori di ν, *crescenti all'infinito*, in corrispondenza a valori di x, che si possono sempre rappresentare con $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$ Ora, comunque si scelgano gli altri valori di x_n, è chiaro che $\varphi_n(x_n)$ non può tendere a zero, giacchè per $n = \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ si ha $|\varphi_n(x_n)| \geq \varepsilon$.

76. **Esempii:** *a)* La serie

$$(1-x)+(x-{}^1/_2x^2)+({}^1/_2x^2-{}^1/_3x^3)+({}^1/_3x^3-{}^1/_4x^4)+\cdots \qquad (1)$$

converge uniformemente nell'intervallo $(-1, 1)$, perchè il resto x^n/n si mantiene, in valore assoluto, inferiore ad ε, quando n supera il numero $1/\varepsilon$, *indipendente da* x. Non avviene altrettanto per la serie

$$(1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+(x^3-x^4)+\ldots, \qquad (2)$$

convergente nel medesimo intervallo, escluso l'estremo inferiore, giacchè il resto è x^n, se $x<1$, e non si può fissare ν in modo che, per $n>\nu$, sia $|x^n|<\varepsilon$ *per ogni valore di* x. Infatti, se si concede che x possa accostarsi ad 1 quanto si vuole, basta porre $x = 1-\dfrac{1}{n}$ perchè l'espressione del resto diventi $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$, e così, per n infinito, non tenda a zero; ma è chiaro che la serie converge uniformemente nell'intervallo $(-1, 1)$, *esclusi gli estremi*.

b) La serie $1+x+x^2+\ldots$, convergente nell'intervallo $(-1, 1)$, esclusi gli estremi, converge uniformemente, vale a dire che la sua convergenza è uniforme in un intervallo $(-\alpha, \alpha)$, il cui estremo superiore, minore di 1, si può pensare vicino ad 1 quanto si vuole. Infatti, fissato ad arbitrio il numero positivo ε, se si prende ν abbastanza grande perchè α^ν non sia maggiore di $(1-\alpha)\varepsilon$, è chiaro che, per $n>\nu$, il resto $x^n/(1-x)$ si manterrà inferiore ad ε in valore assoluto. Altrettanto si può dire della serie $1+2x+3x^2+\ldots$, convergente nel medesimo intervallo: basta determinare ν in modo che $(\nu+1)\alpha^\nu$ non sia maggiore di $(1-\alpha)^2\varepsilon$. Queste due determinazioni di ν sono possibili, perchè (§ 71, *a*) qualunque sia p, e per ν crescente all'infinito, $\nu^p\alpha^\nu$ tende a zero.

c) La somma dei primi n termini della serie

$$(x - xe^{-x^2}) + (xe^{-x^2} - 2xe^{-2x^2}) + (2xe^{-2x^2} - 3xe^{-3x^2}) + \cdots \qquad (3)$$

è $x - nxe^{-nx^2}$, e tende al x per n crescente all'infinito. La serie converge dunque, ma non uniformemente, perchè, posto $x=1/n$, il resto nxe^{-nx^2} diventa $e^{-\frac{1}{n}}$, e non tende a zero. Similmente la serie

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)(1+3x)} + \cdots$$

è convergente per $x \geqq 0$, perchè la somma dei primi n termini è $1 - \dfrac{1}{1+nx}$, ed ha per limite 1, quando n cresce all'infinito; ma essa non converge uniformemente, perchè il resto diventa uguale ad $^1/_2$ quando si attribuisce ad x il valore $1/n$, che appartiene a qualunque intervallo, il cui estremo inferiore sia 0. La medesima serie converge invece uniformemente in ogni intervallo, il cui estremo inferiore α è positivo, perchè, dato ε positivo e piccolo quanto si vuole, basta prendere n superiore ad $(1 - \varepsilon)/\alpha\varepsilon$, numero *indipendente da* x, per essere sicuri che riuscirà e rimarrà inferiore ad ε il resto n^{imo}.

77. **Teorema II.** *Se i valori assoluti dei termini d'una serie di funzioni, data in un intervallo, formano una serie uniformemente convergente nel medesimo intervallo, converge anche uniformemente ed assolumente la serie ottenuta moltiplicando i termini della serie data per funzioni, i cui valori costituiscano un insieme finito nell'intervallo che si considera.*

Sia $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$ la serie data nell'intervallo (a, b), e siano v_1, $v_2, v_3, \ldots$ funzioni, i cui valori assoluti in (a, b) non superino un certo numero l. La serie $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots$ converge *assolutamente*, perchè i valori assoluti dei suoi termini non superano i corrispondenti termini della serie convergente $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$, moltiplicati per l. Dato ad arbitrio il numero positivo ε, si può sempre trovare, per ipotesi, un numero ν, *indipendente da* x, tale che, per $n > \nu$, riesca

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \cdots < \varepsilon/l\,,$$

ed *a fortiori* sia $|u_{n+1}v_{n+1} + u_{n+2}v_{n+2} + u_{n+3}v_{n+3} + \ldots| < \varepsilon$. Dunque la serie $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots$ converge anche *uniformemente.*

78. **Corollarii:** *a) La serie ottenuta moltiplicando i termini, costanti, d'una serie assolutamente convergente, per funzioni, i cui valori costituiscono un insieme finito in un dato intervallo, è assolutamente ed uniformemente convergente nell'intervallo stesso.* Basta infatti supporre

costanti le u, nel teorema precedente, ed osservare che la convergenza d'una serie a termini costanti è necessariamente uniforme.

b) Una serie di funzioni converge assolutamente ed uniformemente, se converge la serie formata dai limiti superiori dei valori assoluti dei termini. Data la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, a ciascuna funzione $u_n(x)$ si sostituisca il limite superiore μ_n di $|u_n(x)|$ nell'intervallo che si considera. Se la serie $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots$ (a termini positivi) converge, la convergenza è assoluta. Intanto la serie data si può considerare come dedotta da $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots$ moltiplicando il termine generale di questa per $v_n = u_n/\mu_n$; e poichè $|v_n| \leqq 1$, il teorema è dimostrato.

79. **Esempii:** *a)* Se α è un numero positivo, minore di 1, è noto che la serie $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots$ è convergente, e ciò basta, in virtù del secondo corollario, per arrivare più rapidamente (*cfr.* § 76, *b*) alla conclusione che la serie $1 + x + x^2 + \ldots$ converge assolutamente ed uniformemente nell'intervallo $(-\alpha, \alpha)$, ossia (giacchè si può pensare α vicino ad 1 quanto si vuole) nell'intervallo $(-1, 1)$ esclusi gli estremi. Altrettanto dicasi della serie $1 + 2x + 3x^2 + \ldots$. Infatti α^{n-1} ed $n\alpha^{n-1}$ sono, per ciascun valore di n, i massimi valori assoluti delle funzioni x^{n-1} ed nx^{n-1} nell'intervallo $(-\alpha, \alpha)$.

b) Per l'uno o per l'altro corollario, se $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ è una serie assolutamente convergente, è assoluta ed uniforme in qualunque intervallo la convergenza della serie

$$a_1 \operatorname{sen}(b_1 x) + a_2 \operatorname{sen}(b_2 x) + a_3 \operatorname{sen}(b_3 x) + \ldots,$$

qualunque siano i numeri $b_1, b_2, b_3, \ldots$ Per esempio, se p supera 1, sono convergenti assolutamente ed uniformemente le serie

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nx}{n^p}.$$

Per $p = 1$ cessa la validità delle proposizioni invocate, sicchè bisogna procedere allo studio diretto delle serie proposte.

c) Si consideri, un po' più generalmente, la serie

$$a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \ldots,$$

a noi già nota * come serie che converge, qualunque sia x, quando i numeri a_1, $a_2, a_3, \ldots$, pur costituendo una serie divergente, si seguono decrescendo, e tendono a zero, come appunto accade per $a_n = 1/n$. Siccome la serie resta inalterata quando x viene aumentato o diminuito d'un multiplo di 2π, possiamo limitarci a studiarla nell'intervallo $(0, 2\pi)$. È noto * che

$$\operatorname{sen}(n+1)x + \operatorname{sen}(n+2)x + \ldots + \operatorname{sen}(n+p)x = \frac{\operatorname{sen}\frac{px}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\left(n + \frac{p+1}{2}\right)x.$$

---

* *Analisi algebrica*, p. 155.

Ne segue, fissando un numero positivo α, piccolo quanto si vuole, e prendendo x in $(\alpha, 2\pi - \alpha)$,

$$|\operatorname{sen}(n+1)x + \operatorname{sen}(n+2)x + \dots + \operatorname{sen}(n+p)x| < 1/\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

Quindi * si ha $|\varphi_n(x)| < a_n/\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$; sicchè, dato il numero positivo ε, se si prende ν abbastanza grande perchè risulti $a_\nu < \varepsilon \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, sarà pure $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ per $n \geqq \nu$. Dunque la serie considerata converge uniformemente in qualunque intervallo, da cui siano esclusi i multipli di 2π.

80. **Teorema III.** *Se, per* $x = a$, *i termini d'una serie uniformemente convergente tendono a limiti finiti, anche la somma della serie tende ad un limite finito, uguale alla somma dei limiti dei termini.*

a) Si considerino, per fissare le idee, i limiti *a destra* di a, e si stacchi un intervallo arbitrariamente piccolo $(a, a+h)$ dall'intervallo in cui la serie converge uniformemente. In forza di simile convergenza, dato ε positivo e piccolo quanto si vuole, è sempre possibile determinare ν in modo che, per $n > \nu$, si abbia

$$|\varphi_n(x')| < {}^1/_3\varepsilon\,, \quad |\varphi_n(x'')| < {}^1/_3\varepsilon\,; \quad \text{e quindi} \quad |\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < {}^2/_3\varepsilon\,,$$

per due valori *qualunque* x' ed x'', appartenenti all'intervallo $(a, a+h)$. Ora, *fissato* n, si osservi che, quando x tende ad a, la somma $f_n(x)$ dei primi n termini della serie tende ad un limite finito, uguale alla somma dei limiti di $u_1, u_2, \dots, u_n$, e però si può sempre far impicciolire h sufficientemente perchè si abbia $|f_n(x') - f_n(x'')| < {}^1/_3\varepsilon$. Ne segue, chiamando $f(x)$ la somma della serie, che si ha

$$|f(x') - f(x'')| \leqq |f_n(x') - f_n(x'')| + |\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < \varepsilon\,;$$

per ogni coppia di valori di x' ed x'' presi in $(a, a+h)$. Dunque $f(x)$ ammette (§ 23) per x tendente ad a, dalla destra, il limite $f(a+0)$.

b) Ciò premesso, dimostriamo che questo limite è appunto la somma della serie formata dai limiti dei termini della serie data. Si ha

$$f(x) - \sum_1^n u_i(a+0) = \sum_1^n \big(u_i(x) - u_i(a+0)\big) + \varphi_n(x)\,. \tag{4}$$

Dato ε positivo e piccolo ad arbitrio, esiste un numero ν, tale che, per $n > \nu$, è sempre $|\varphi_n(x)| < {}^1/_3\varepsilon$ per *tutti* i valori di x presi in $(a, a+h)$. Ora, *fissato* n, si faccia tendere x ad a. Poichè $u_i(x)$ tende ad $u_i(a+0)$, si

* *Analisi algebrica*, p. 126.

ha, per h sufficientemente piccolo,

$$\left|\sum_1^n (u_i(x) - u_i(a+0))\right| < {}^1/_3\varepsilon ,$$

e però, in virtù di (4),

$$|f(x) - \sum_1^n u_i(a+0)| < {}^2/_3\varepsilon .$$

Quindi, osservando che anche $f(x) - f(a+0)$ si può rendere, in valore assoluto, inferiore ad ${}^1/_3\varepsilon$, facendo sì che rimanga tale quando x si accosta indefinitamente ad a,

$$|f(a+0) - \sum_1^n u_i(a+0)| \leqq |f(a+0) - f(x)| + |f(x) - \sum_1^n u_i(a+0)| < \varepsilon .$$

Dunque $f(a+0) = u_1(a+0) + u_2(a+0) + u_3(a+0) + \dots$

81. **Teorema IV.** *Se una serie di funzioni continue converge uniformemente, la somma della serie è una funzione continua.*

Infatti

$$f(a) = \sum_1^\infty u_i(a) \quad , \quad f(a \pm 0) = \sum_1^\infty u_i(a \pm 0) .$$

La seconda uguaglianza si può affermare in virtù dell'uniformità e del teorema precedente. D'altra parte si ha, per la continuità dei termini,

$$u_i(a) = u_i(a \pm 0) \ ; \quad \text{quindi} \quad f(a) = f(a \pm 0) .$$

Dunque $f(x)$ è una funzione continua.

82. **Teorema V.** *Se le derivate dei termini d'una serie convergente di funzioni formano una serie uniformemente convergente, la somma di questa serie è la derivata della somma della prima serie.*

Limitandoci a considerare, per esempio, le derivate destre, osserviamo che, se a appartiene all'intervallo in cui si avvera l'uniforme convergenza, e se si prende h abbastanza piccolo perchè $a+h$ cada nel medesimo intervallo, si può sempre trovare, corrispondentemente a ciascun numero positivo ε, un numero ν, *indipendente da* x, tale che per $n \geqq \nu$ sia

$$\left|\sum_{n+1}^\infty u'_i(x)\right| < {}^1/_8\varepsilon ,$$

per tutti i valori di x presi in $(a, a+h)$. Ne segue

$$\left|\sum_{\nu+1}^{n} u'_i(x)\right| \leqq \left|\sum_{\nu+1}^{\infty} u'_i(x)\right| + \left|\sum_{n+1}^{\infty} u'_i(x)\right| < {}^1/_4\varepsilon .$$

Intanto, dopo aver posto, per brevità,

$$\sigma_n = \sum_{1}^{n} \left\{ \frac{u_i(a+h) - u_i(a)}{h} - u'_i(a) \right\},$$

si osservi che si ha, applicando il teorema di Lagrangia (§ 65) alla somma dei rapporti incrementali negli ultimi $n-\nu$ termini,

$$\sigma_n = \sigma_\nu + \sum_{\nu+1}^{n} \left(u'_i(\xi_i) - u'_i(a) \right),$$

dove ξ_i, maggiore di a, è minore di $a+h$. Ora, *fissato* ν nel modo precedentemente accennato, ne risulta anzitutto

$$\left|\sum_{\nu+1}^{n} \left(u'_i(\xi_i) - u'_i(a) \right)\right| < {}^1/_2\varepsilon ;$$

poi, osservando che

$$\lim_{h=0} \frac{u_i(a+h) - u_i(a)}{h} = u'_i(a),$$

si può far impicciolire h sufficientemente perchè sia $|\sigma_\nu| < {}^1/_2\varepsilon$. Ne risulta $|\sigma_n| < \varepsilon$ per n arbitrariamente grande ed $h > 0$ arbitrariamente piccolo. Ora, fissati ν ed h, se in σ_n si fa crescere n all'infinito, si ottiene, in virtù della convergenza delle due serie considerate,

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_{1}^{\infty} u'_i(a) \right| \leqq \varepsilon :$$

quindi

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \sum_{1}^{\infty} u'_i(a) ,$$

cioè $f'(a) = u'_1(a) + u'_2(a) + u'_3(a) + \ldots$

83. **Osservazioni:** *a*) Gli ultimi tre teoremi provvedono in parte alle lacune lasciate nei §§ 22, 26, 44, in quanto che ci segnalano infiniti casi, nei quali le proposizioni concernenti il *limite* o la *continuità* o la *de-*

rivabilità d'una somma di funzioni sussistono malgrado che queste siano in numero infinito, ma senza escludere che le proposizioni stesse possano valere anche in altri casi.

b) Ogni funzione continua è rappresentabile mediante una serie uniformemente convergente. Infatti, costruita una successione qualunque di numeri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, tendenti a zero, se si prende $u_1 = f(x+\alpha_1)$ ed $u_n = f(x+\alpha_n) - f(x+\alpha_{n-1})$, la somma dei primi n termini della serie $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ è $f_n(x) = f(x+\alpha_n)$, e si ha $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$. Dunque la serie è convergente, ed il suo resto è $\varphi_n(x) = f(x) - f(x+\alpha_n)$. Ciò premesso, dato ad arbitrio il numero positivo ε, si può sempre, in virtù del teorema di Cantor (§ 38), poichè $f(x)$ è continua, determinare h in modo che la differenza $f(x') - f(x'')$ sia minore di ε, in valore assoluto, tutte le volte che $|x'-x''|<h$. Ne segue, prendendo ν sufficientemente grande affinchè per $n>\nu$ risulti e rimanga $|\alpha_n|<h$, che si ha $|\varphi_n(x)|<\varepsilon$ per i medesimi valori di n, maggiori del numero ν, *indipendente da* x. La funzione continua $f(x)$ si trova così rappresentata come somma della serie uniformemente convergente

$$f(x+\alpha_1) + \{f(x+\alpha_2) - f(x+\alpha_1)\} + \{f(x+\alpha_3) - f(x+\alpha_2)\} + \cdots.$$

c) Invece il teorema IV ci dice che una funzione discontinua non è mai rappresentabile mediante una serie uniformemente convergente di funzioni *continue*. Così, per esempio, la somma della serie (2) presenta una discontinuità ordinaria a sinistra di $x=1$, e ciò basta per asserire che la serie non converge uniformemente; ma non bisogna credere che, inversamente, la convergenza *non uniforme* sia un sicuro *indizio di discontinuità* per la somma della serie: basti l'esempio della serie (3), che ha per somma la funzione continua x, mentre non converge uniformemente.

d) Analogamente il teorema V mostra che la convergenza uniforme della serie derivata *è sufficiente* perchè si possa affermare che la derivata della somma della serie primitiva esiste ed è uguale alla somma delle derivate dei termini; ma la condizione stessa *non è necessaria*, poichè vi sono * serie che si possono derivare termine a termine, quantunque non siano uniformemente convergenti le relative serie delle derivate. È poi facile dare un esempio di serie, per cui non è lecita la derivazione termine a termine. Così la serie (1) ha per somma 1; e si ottiene, derivando, la relazione $1=(1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+\ldots$, *inesatta* per $x=1$: ciò si deve appunto alla *non uniforme* convergenza dell'ultima serie.

---

* Vedi un esempio nel *Résumé du Cours d'Analyse* di Mansion; p. 255.

Sviluppi in serie di potenze.

84. Ha per noi speciale importanza la rappresentazione delle funzioni mediante serie di potenze:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (5)$$

Per tali serie è fondamentale il seguente teorema: *una serie di potenze converge assolutamente ed uniformemente nell'intervallo* $(-\alpha, \alpha)$, *esclusi al più gli estremi, se per* $x = \alpha$ *i suoi termini costituiscono un insieme finito.* Si osservi, infatti, che la serie si può considerare come ottenuta moltiplicando per le quantità $a_0, a_1\alpha, a_2\alpha^2, \ldots$ (supposte tutte, in valore assoluto, minori d'un certo numero) i termini della serie $1 + \frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha^2} + \ldots$; e siccome (§ 79, a) questa converge assolutamente ed uniformemente in $(-\alpha, \alpha)$, esclusi gli estremi, altrettanto (§ 77) si può affermare della serie proposta. Evidentemente la condizione enunciata può essere soddisfatta quando la serie non converge in un estremo, giacchè, crescendo n all'infinito, può anche darsi che $a_n\alpha^n$ rimanga finito; ma è certo che la condizione stessa è sempre soddisfatta quando la serie converge in un estremo, perchè, in questa ipotesi, essendo $\lim a_n\alpha^n = 0$, si può, datosi ad arbitrio un numero positivo l', e determinato *il più piccolo* numero intero ν, tale che per $n > \nu$ sia $|a_n\alpha^n| < l'$, trovare un numero l abbastanza grande perchè si abbia $|a_n\alpha^n| < l$ per $n \leqq \nu$; ed è chiaro che si avrà pure $|a_n\alpha^n| < l$ qualunque sia n, giacchè $l' \leqq |a_\nu\alpha^\nu| < l$. Ne segue che *la serie, se converge in uno degli estremi dell'intervallo* $(-\alpha, \alpha)$, *converge anche in tutto l'intervallo, escluso al più l'altro estremo;* ed è uniforme la sua convergenza nell'intervallo stesso, esclusi al più gli estremi.

85. **Raggio di convergenza.** Può darsi che non esista un numero positivo α, tale che la serie (5) sia convergente per $x = \alpha$. In questo caso risulta subito dall'ultimo teorema che la serie converge *solo per* $x = 0$ (ciò accade per la serie il cui termine generale è $n! x^n$). Può darsi invece che i numeri come α siano grandi quanto si vuole, nel qual caso la serie sarà convergente *per tutti i valori* di x (basti l'esempio della serie che ha per termine generale $x^n/n!$). Ma quando per un valore di x la serie non è convergente, l'insieme dei numeri positivi α è necessariamente finito, e però (§ 4) ammette il limite superiore ρ, che può non essere un massimo. Adunque *i valori di* x, *che fanno convergere una serie procedente secondo le potenze di* x, *costituiscono un intervallo* $(-\rho, \rho)$, negli estremi del quale può nondimeno cessare la convergenza, mentre *nell'interno* questa è sempre assoluta ed uniforme. I due casi considerati in principio si

possono includere nel caso generale: essi corrispondono alle ipotesi $\rho=0$, $\rho=\infty$. In tutti i casi il numero ρ si chiama *raggio di convergenza* della serie che si considera. Per le serie

$$\sum_1^\infty x^n\,,\quad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\,,\quad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2}\,,$$

si ha $\rho=1$, vale a dire che l'intervallo di convergenza è $(-1, 1)$ per le tre serie; ma, mentre per la prima bisogna escludere entrambi gli estremi, e per la seconda il solo estremo superiore, soltanto la terza converge in tutto l'intervallo. In altri termini, i valori di x che rendono convergenti le tre serie son privi di minimo e di massimo nella prima serie, hanno soltanto il minimo nella seconda, ed ammettono minimo e massimo nella terza.

86. Determinazione di ρ. Ammessa l'esistenza del numero

$$\rho=\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\,,$$

si dimostra agevolmente che questo, appunto, è il valore del raggio di convergenza Si consideri infatti la serie formata dai valori assoluti u_n dei termini della serie (5), e si osservi che, per n infinito,

$$\lim\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim\left|\frac{a_n x}{a_{n-1}}\right|=\frac{|x|}{\rho}\,.$$

È noto * che, se $|x|<\rho$, la serie delle u è convergente, e però, ricordando un teorema di Dirichlet *, converge assolutamente la serie (5). Ne segue che il raggio di convergenza non è *minore* di ρ; nè potrebbe essere *maggiore*, altrimenti nell'intervallo di convergenza esisterebbero valori di $x>\rho$, per i quali la convergenza della (5) sarebbe assoluta, come sempre accade *nell'interno* del detto intervallo, mentre d'altra parte, essendo $\lim\frac{u_n}{u_{n-1}}>1$, la serie dei valori assoluti dei termini sarebbe divergente, contrariamente al teorema di Dirichlet. In modo analogo si dimostra che, se esiste il numero

$$\rho=\lim_{n=\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\,,$$

questo è il valore del raggio di convergenza. Basta osservare che, per n infinito,

$$\lim\sqrt[n]{u_n}=\lim\sqrt[n]{|a_n x_n|}=\frac{|x|}{\rho}\,,$$

* *Analisi algebrica*, pp. 138, 163.

e ripetere le considerazioni precedenti, invocando un noto * tèorema. Per questa via si riesce anche, indirettamente, a constatare l'identità necessaria fra i due limiti considerati. Quando questi limiti non esistono, si può ricorrere al teorema che segue.

auchy

87. **Teorema di Hadamard.** *Se i numeri* $\sqrt[n]{|a_n|}$, *per* $n=1,2,3,\ldots$, *costituiscono un insieme finito, il numero inverso del loro limite massimo misura il raggio di convergenza della serie* $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ **

Infatti, se si rappresenta con $1/\rho$ il detto limite, che sempre (§ 8) esiste, è noto (§ 11) che le disuguaglianze

$$\sqrt[n]{|a_n|}<l \quad , \quad \sqrt[n]{|a_n|}>l' \quad , \quad \left(l'<\frac{1}{\rho}<l\right)$$

sono soddisfatte, la prima per *tutti* i valori di n, superiori ad un certo numero, la seconda per *taluni* valori di n, grandi quanto si vuole. Ora, se nella serie data, il cui termine generale è $u_n=a_nx^n$, si suppone $|x|<\rho$, si può fra $|x|$ e ρ inserire un numero $q\rho$; poi, preso l in modo che sia $q=|x|.l$, si ha sempre, a partire da un certo valore di n,

$$\sqrt[n]{|u_n|}=|x|.\sqrt[n]{|a_n|}<q<1 \quad , \quad |u_n|<q^n,$$

e però la serie proposta converge assolutamente, giacchè i suoi termini finiscono per essere inferiori, in valore assoluto, ai corrispondenti termini della progressione geometrica convergente $1+q+q^2+\ldots$ Se invece si ha $|x|>\rho$, si può prendere l' in modo che sia $1=|x|.l'$, e non si cesserà mai d'incontrare valori di n, per i quali si avrà

$$\sqrt[n]{|u_n|}=|x|.\sqrt[n]{|a_n|}>1 \quad , \quad |u_n|>1\,.$$

Ne segue, in questo caso, che la serie non è convergente, perchè la condizione $\lim u_n=0$, necessaria per la convergenza, non può essere soddisfatta. Dunque ρ è il limite superiore dei valori di $|x|$, per i quali converge la serie considerata. Si noti, per finire, che, per avere $\rho=\infty$, è necessario e sufficiente che il limite massimo (e per conseguenza anche il limite minimo) di $\sqrt[n]{|a_n|}$ sia nullo. Dunque *in* $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$ *sta quanto occorre e basta affinchè la serie* $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ *sia convergente per tutti i valori di* x.

* *Analisi algebrica*, p. 140.

** « *Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable* » nei *Comptes-rendus* dell'Accademia delle scienze di Parigi, 1888, p. 259.

88. **Derivazione.** Passiamo ora a considerare la serie formata dalle derivate dei termini della serie (5):

$$g(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots \tag{6}$$

Il raggio di convergenza ρ' di questa serie non può essere *maggiore* del raggio ρ della (5), perchè, crescendo n all'infinito, il termine generale na_nx^{n-1} della serie (6) finisce sempre per superare, in valore assoluto, il termine a_nx^n della serie (5). D'altra parte si attribuisca ad x un valore positivo qualunque ξ, minore di ρ, ma vicino a ρ quanto si vuole, e si prenda fra ξ e ρ un numero α. Siccome la serie (5) è convergente per $x=\alpha$, si ha $\lim a_n\alpha^n = 0$, e però (§ 77) la serie (6) converge assolutamente ed uniformemente in $(-\xi, \xi)$, perchè si può considerare come ottenuta moltiplicando per le quantità $a_1, a_2\alpha, a_3\alpha^2, \dots$, costituenti un insieme finito, i termini della serie $1 + 2\frac{x}{\alpha} + 3\frac{x^2}{\alpha^2} + \dots$, la cui convergenza (§ 79, a) è, per $|x| < \alpha$, assoluta ed uniforme. Dunque ρ' non può essere *minore* di ρ. Ne segue che la serie (6) ammette lo stesso intervallo di convergenza della serie (5), esclusi al più *gli estremi*, nei quali si capisce che la derivazione può far comparire la divergenza o l'indeterminazione, mentre *nell'interno* persiste inalterata la convergenza assoluta ed uniforme. In virtù di questa uniformità possiamo affermare (§ 82) che $g(x)$ *è la derivata di* $f(x)$; e siccome questa conclusione vale per qualunque serie di potenze, sarà lecito applicarla alle serie che si ottengono derivando successivamente, termine a termine, la serie (6), dimodochè si ha

$$f'(x) = \sum_1^\infty na_nx^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_2^\infty n(n-1)a_nx^{n-2}, \quad f'''(x) = \sum_3^\infty n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}, \; \dots .$$

Da queste relazioni e dalla (5) si ricava subito, per $x = 0$,

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad f'''(0) = 6a_3, \; \dots ,$$

e si perviene così all'importante conclusione: *se una funzione* f(x) *è rappresentabile mediante una serie di potenze, questa è necessariamente*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \dots . \tag{7}$$

Così noi già possediamo una regola per isvolgere in serie di potenze una data funzione $f(x)$; ma non abbiamo ancora il diritto di applicarla, perchè ci manca un criterio che ci assicuri, volta per volta, della legittimità d'un tale sviluppo. Questa lacuna sarà subito colmata.

89. Formole di Taylor e di Maclaurin. Alla (7) si può dare una forma più generale cambiando prima $f(x)$ in $f(x+a)$, poi x in $x-a$. In tal modo si ottiene lo sviluppo di $f(x)$ in serie che procede secondo le potenze di $x-a$:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\,.\,2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(a)+\cdots\qquad(8)$$

Per poter decidere della legittimità d'un tale sviluppo si è sempre in diritto di porre

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\,.\,2}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n\,,\quad(9)$$

e di dare al *resto* R_n la forma

$$R_n=\frac{(x-a)^\nu\varphi(x)}{(n-1)!\,\nu}\;,$$

in cui ν è un numero arbitrario, positivo, e φ è una certa funzione di x, che dipende anche da n e da ν. Ammessa l'esistenza della derivata n^{ima} di $f(x)$ in tutto un intervallo, in cui cade a, fissiamo momentaneamente in tale intervallo un altro numero b, e consideriamo la funzione

$$F(x)=f(x)+\frac{b-x}{1}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{1\,.\,2}f''(x)+\cdots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{(b-x)^\nu}{(n-1)!\,\nu}\varphi(b)\;.$$

In virtù di (9) si ha $F(a)=f(b)$, ed è poi visibile che $F(b)=f(b)$. Adunque la funzione $F(x)$ prende valori uguali negli estremi di $(a\,,b)$, e però la sua derivata deve annullarsi (§ 62) per qualche valore ξ, appartenente a tale intervallo. Intanto un calcolo facile dà

$$F'(x)=\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)-\frac{(b-x)^{\nu-1}}{(n-1)!}\varphi(b)\;.$$

Quindi, esprimendo che questa funzione prende il valore 0 per $x=\xi$, si trova il valore di $\varphi(b)$; e finalmente si ottiene, dopo aver restituito x nel posto di b,

$$\varphi(x)=(x-\xi)^{n-\nu}f^{(n)}(\xi)\quad,\quad R_n=\frac{(x-a)^\nu(x-\xi)^{n-\nu}}{(n-1)!\,\nu}f^{(n)}(\xi)\;,$$

dove ξ è compreso fra a ed x. Se si pone $\xi=(1-\theta)a+\theta x$, con θ compreso fra 0 ed 1, si può anche scrivere

$$R_n=\frac{(x-a)^n}{(n-1)!\,\nu}(1-\theta)^{n-\nu}f^{(n)}(\xi)\;.$$

La formola (9), completata con questa espressione del resto, si chiama *formola di Taylor*. In particolare, per $\nu = n$ e $\nu = 1$, si trovano le seguenti espressioni del resto, dovute rispettivamente a Lagrangia ed a Cauchy:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \, , \quad R_n = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\xi) \, .$$

La forma di Lagrangia è indubbiamente la più semplice, ma non sempre permette di rendersi conto del modo di comportarsi di R_n quando n cresce all'infinito. Si ricorre allora alla forma di Cauchy; ma neppur questa è sufficiente in qualche caso, e si è pertanto obbligati a servirsi della forma generale. Ad ogni modo, data una funzione $f(x)$, e costruita l'una o l'altra espressione di R_n, se si riconosce che questa tende a zero per n infinito, si è in diritto di svolgere $f(x)$ in serie secondo la formola (8). In particolare, per $a = 0$, si ricade sullo sviluppo (7); ma noi possiamo ora, ponendo $a = 0$ in (9), scrivere con maggior precisione e generalità, anche quando $f(x)$ non è rappresentabile mediante una serie di potenze,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n \, , \quad (10)$$

dove

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) \, , \quad \text{o} \quad R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x) \, ,$$

o, più generalmente,

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!\,\nu}(1-\theta)^{n-\nu} f^{(n)}(\theta x) \, .$$

La formola (10), completata con una di queste espressioni del resto, è la *formola di Maclaurin*. Ed ora, riferendoci a quanto abbiamo detto in fine del precedente paragrafo, ci accorgiamo di esser giunti a possedere nell'esame di R_n, per n infinito, il mezzo di giudicare, volta per volta, se lo sviluppo (7) è legittimo.

90. **Osservazioni:** *a)* Non si creda che basti la convergenza delle serie di Taylor o di Maclaurin perchè i corrispondenti sviluppi siano legittimi. Può ben darsi, per esempio, che la serie (7) sia convergente, ma non rappresenti $f(x)$. Bisogna infatti notare che R_n *non è il resto della serie*, ma è semplicemente la differenza tra $f(x)$ e la somma dei primi n termini della serie (7), e però nulla impedisce che tenda, per n infinito, ad un limite $g(x)$, non costantemente uguale a zero, nel qual caso la serie rappresenterebbe, non $f(x)$, ma $f(x) - g(x)$. Naturalmente, siccome lo sviluppo di $f(x) - g(x)$ non può aver luogo se non nell'unico modo indicato dalla (7), la $g(x)$ non è una funzione qualunque, ma è tale che deve

per $x=0$ annullarsi insieme a tutte le sue derivate; ed è appunto quest'obbligo di soddisfare ad infinite condizioni che rende assai difficile l'esistenza di siffatte funzioni g. Tuttavia se ne ha un esempio semplice nella funzione *continua* $g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, necessariamente uguale a zero per $x=0$. Prima si osservi, richiamando un precedente risultato (§ 71, *a*), che

$$g'(0)=\lim_{x=0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x=0} x^{-1}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{z=\infty} z^{\frac{1}{2}}e^{-z}=0\ .$$

È poi facile dimostrare che, se per $x=0$ è nulla la funzione $g^{(n)}$, anche $g^{(n+1)}$ è uguale a zero. Infatti le successive derivazioni di g, per $x \gtrless 0$, conducono a risultati della forma

$$g^{(n)}(x)=\sum \mathrm{A}x^{-\alpha}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

e però

$$g^{(n+1)}(0)=\lim_{x=0}\sum \mathrm{A}x^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{1}{x^2}}=\sum \mathrm{A}\lim_{z=\infty} z^{\frac{\alpha+1}{2}}e^{-z}=0\ .$$

b) Un'altra osservazione riesce utile in varii casi, in quanto che rende superfluo l'esame diretto del modo di comportarsi di R_n per n infinito. Abbiamo detto che per esser sicuri della legittimità dello sviluppo (7) è indispensabile constatare, non che la serie converge, ma che R_n tende a zero. Orbene, sempre che si riesce ad assicurarsi che la derivata n^{ima}, pur crescendo n all'infinito, si conserva finita nell'intervallo $(0,x)$, quella condizione è soddisfatta, e lo sviluppo è legittimo. Per dimostrar ciò, poichè il valore assoluto di $f^{(n)}(\theta x)$ non può, crescendo n, superare un certo numero, basta far vedere che $x^n/n!$ tende a zero; ed effettivamente dall'eguaglianza

$$\frac{x^n}{n!}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{x}{n}$$

si deduce subito che il primo membro finisce per decrescere sempre in valore assoluto, appenachè n supera $|x|$, e però tende ad un limite l; poi si ha, prendendo i limiti dei due membri, $l=l.0=0$.

91. **Esercizii:** *a)* La derivata n^{ima} di $f(x)=e^x$ è $f^{(n)}(x)=e^x$, funzione finita in ogni intervallo, qualunque sia n (giacchè *non dipende* da n). È dunque inutile esaminare l'espressione di R_n, perchè si è sicuri *a priori*, in virtù dell'ultima osservazione, che R_n tende a zero quando n cresce all'infinito. Intanto si ha $f^{(n)}(0)=1$, e conseguentemente

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

qualunque sia x. In modo analogo si ottengono gli sviluppi seguenti:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad , \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots .$$

b) Per $f(x) = e^{x\cos a}\cos(x\operatorname{sen} a)$ o $f(x) = e^{x\cos a}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen} a)$ è noto (§ 51, *e*) che si ha, rispettivamente,

$$f^{(n)}(x) = e^{x\cos a}\cos(na + x\operatorname{sen} a) \quad , \quad f^{(n)}(x) = e^{x\cos a}\operatorname{sen}(na + x\operatorname{sen} a) \ ,$$

sicchè $f^{(n)}(0) = \cos na$ o $f^{(n)}(0) = \operatorname{sen} na$; e però

$$e^{x\cos a}\cos(x\operatorname{sen} a) = 1 + \frac{x}{1}\cos a + \frac{x^2}{1.2}\cos 2a + \frac{x^3}{1.2.3}\cos 3a + \cdots ,$$

$$e^{x\cos a}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen} a) = \frac{x}{1}\operatorname{sen} a + \frac{x^2}{1.2}\operatorname{sen} 2a + \frac{x^3}{1.2.3}\operatorname{sen} 3a + \cdots .$$

Queste formole includono le precedenti per $a=0$ ed $a = {}^1/_2\pi$. Si trovano poi gli sviluppi di $e^x\cos x$ e di $e^x\operatorname{sen} x$ facendo $a = {}^1/_4\pi$, e cambiando x in $x\sqrt{2}$; *ecc.*

c) Per $f(x) = \log(1+x)$ si ottiene

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad , \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} .$$

Quindi

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n ,$$

dove

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n \quad \text{o} \quad R_n = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} .$$

Per $x > 1$, come per $x \leqq -1$, possiamo dispensarci dall'esaminare le espressioni del resto, giacchè si vede direttamente che in questi casi la serie non converge. Quando x si suppone non maggiore di 1, ma positivo, il rapporto di x ad $1+\theta x$ è inferiore ad $x \leqq 1$, e però la sua potenza n^{ima} si conserva finita mentre $1/n$ tende a zero. Ne segue, adoperando la prima forma del resto, $\lim R_n = 0$. Invece per x maggiore di -1, ma negativo, si deve ricorrere alla seconda forma del resto, perchè la prima non lascia vedere come si comporta R_n per n infinito. Ora, poichè i rapporti di 1 ed $1-\theta$ ad $1+\theta x$ si mantengono inferiori rispettivamente ad $1/(1+x)$ e ad 1, mentre x^n tende a zero, è chiaro che, anche in questo caso, $\lim R_n = 0$. Adunque nell'intervallo $(-1, 1)$, escluso l'estremo inferiore,

$$\log(1+x) = x - {}^1/_2 x^2 + {}^1/_3 x^3 - {}^1/_4 x^4 + \cdots .$$

d) Per sviluppare in serie la funzione $y = \operatorname{arc\,tg} x$, rammentiamoci (§ 51, *e*) che la derivata n^{ima} è $(n-1)!\cos^n y \,.\, \operatorname{sen} n(y + {}^1/_2\pi)$. Il resto nella serie di Maclaurin, sotto la forma di Lagrangia, è il prodotto di x^n/n per una quantità che si conserva finita senza tendere a zero, e però R_n tende a zero solo nel caso che il valore assoluto di x non superi l'unità. In questa ipotesi, osservando che

$$f^{(n)}(0) = (n-1)! \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2},$$

la formola di Maclaurin dà

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - {}^1/_3 x^3 + {}^1/_5 x^5 - {}^1/_7 x^7 + \cdots.$$

Questa formola è stata utilizzata per calcolare π. Negli estremi dell'intervallo di convergenza essa dà

$${}^1/_4 \pi = 1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 + \cdots;$$

ma così non può servire al detto calcolo, perchè la serie converge molto lentamente: occorrerebbero *ventimila* termini per avere *quattro* decimali esatte. Una formola molto vantaggiosa è stata proposta da Machin. Sia $\operatorname{tg} \alpha = {}^1/_5$; quindi, successivamente, $\operatorname{tg} 2\alpha = {}^5/_{12}$, $\operatorname{tg} 4\alpha = 1 + {}^1/_{119}$. Se si osserva che $\operatorname{tg} 4\alpha$ supera di poco l'unità, si è condotti a porre $4\alpha = {}^1/_4 \pi + \beta$, con β molto piccolo. Del resto

$$\beta = 4\alpha - {}^1/_4 \pi \quad . \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - 1}{\operatorname{tg} 4\alpha + 1} = \frac{1}{239}.$$

Dunque, essendo ${}^1/_4 \pi = 4\alpha - \beta = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$, si ha

$$\pi = \frac{16}{5}\left(1 - \frac{4}{3.100} + \frac{4^2}{5.100^2} - \frac{4^3}{7.100^3} + \cdots\right)$$
$$- \frac{4}{239}\left(1 - \frac{1}{3.57121} + \frac{1}{5.57121^2} - \frac{1}{7.57121^3} + \cdots\right).$$

Servendosi di questa formola W. Shanks ha potuto calcolare π con 707 cifre decimali. Le prime trenta si possono agevolmente ritenere mediante i *versi*:

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Se a ciascuna parola si sostituisce il numero delle lettere che la compongono, si trova

$$\pi = 3{,}141592653589793238462643383279\ldots.$$

Altre due cifre si possono scrivere ricordando l'osservazione di Catalan *, che cioè un tal lavoro poetico non potrebbe essere continuato, perchè dopo un altro 5 si presenta uno *zero*; ma ben più utile è il conoscere qualche valore approssimato di π, onde trarne profitto geometricamente. Così, limitandosi alle prime quattro

* *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 44.

decimali in $\pi^2=9,8696044...$, si trova per π il valore $0,26.\sqrt{146}=3,141591953...$, la cui interpetrazione geometrica (fatta osservando che $146=5^2+11^2$) fornisce una *rettificazione della circonferenza* *, assai soddisfacente in quanto che si sbaglierebbe, adoperandola, di *circa un millimetro* sopra una circonferenza d'*un chilometro di diametro.*

e) Proponiamoci, per finire, di svolgere $(1+x)^m$ in serie di potenze. La derivata n^{ima} di questa funzione è

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}\ ;$$

quindi la (7) dà

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\dots\ , \qquad (11)$$

tutte le volte che, supposta convergente la serie del secondo membro, si ha inoltre $\lim R_n=0$ per n infinito. Presto vedremo che questa condizione è sempre soddisfatta quando la serie converge, purchè il primo membro abbia un significato, per la qual cosa bisogna escludere che sia $m=0$ ed in pari tempo $x=-1$. Metteremo anzi una volta per sempre in disparte il caso ovvio di $m=0$, giacchè si vede subito che la (11) sussiste, in questo caso, qualunque sia $x \gtrless -1$. Ciò premesso, assumiamo il resto sotto la forma di Cauchy:

$$R_{n+1}=mx(1+\theta x)^{m-1}.\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{1.2.3\dots n}x^n\ .$$

Si noti che R_{n+1} si trova così decomposto in tre fattori, l'ultimo dei quali è il termine generale della serie binomiale, relativa all'esponente $m-1$, serie convergente ** per $|x|<1$, qualunque sia m, ed anche per $x=-1$ ed $m\geq 1$, come per $x=1$ ed $m>0$. In tutti questi casi i primi due fattori si serbano finiti, mentre il terzo tende a zero, come termine generale d'una serie convergente; e però $\lim R_{n+1}=0$. Ci resta dunque da esaminare soltanto i casi nei quali non è convergente la seconda serie, mentre converge la prima; e questi casi sono due, corrispondenti alle ipotesi $x=-1$ con $0<m<1$, ed $x=1$ con $-1<m<0$. Nel primo caso l'espressione di R_{n+1} contiene $(1-\theta)^{m-1}$ nel primo fattore, e non si può esser sicuri che questo rimarrà finito, perchè l'esponente $m-1$ è negativo, e θ, pur mantenendosi inferiore ad 1, potrebbe indefinitamente avvicinarsi ad 1 quando n cresce all'infinito. Nell'altro caso è il terzo fattore che non tende più a zero, giacchè il suo valore assoluto

$$\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\dots\left(1-\frac{m}{n}\right)>1-m\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

* Proposta da Specht nel *Giornale di Crelle*, t. III, p. 83. Un'altra costruzione, che dà per π il valore meno approssimato $4-2\sqrt{2}+{}^2/_3\sqrt{3}+{}^1/_3\sqrt{6}=3,14277...$, è stata recentemente proposta da G. Peirce nel *Bulletin of the American Mathematical Society*, July, 1901, p. 427.

** *Analisi algebrica*, p. 276.

cresce all'infinito con n. In quest' ultimo caso ($x=1$) si provvede subito assumendo R_n sotto la forma di Lagrangia:

$$R_n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}(1+\theta)^{m-n}.$$

Il fattore $(1+\theta)^{m-n}$, comunque varii θ con n, resta compreso fra 0 ed 1, mentre l'altro fattore, termine generale della serie che si considera, tende a zero. Dunque $\lim R_n = 0$. Finalmente nell'altro caso ($x=-1$) nessuna delle due forme particolari del resto può servire a riconoscere che questo tende a zero. Infatti, presa l' espressione generale

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1}(1-\theta)^{m-\nu}.\frac{m}{\nu}.\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{1.2.3\dots n},$$

si vede subito che non si può esser sicuri che il fattore $(1-\theta)^{m-\nu}$ resta finito, se non quando è $\nu \leqq m < 1$. Prendendo $\nu = m$ sparisce θ, e si giunge alla conoscenza completa del resto:

$$R_{n+1} = -\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\dots\left(1-\frac{m}{n}\right).$$

Evidentemente, giacchè m è positivo e minore di 1, si ha

$$-\frac{1}{R_{n+1}} > \left(1+\frac{m}{1}\right)\left(1+\frac{m}{2}\right)\dots\left(1+\frac{m}{n}\right) > 1 + m\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right),$$

e però $\lim R_{n+1} = 0$. Così non solo abbiamo il diritto di scrivere, come caso particolare della (11) per $x=-1$,

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots = 0,$$

qualunque sia $m > 0$, ma ci accorgiamo che questa eguaglianza è per così dire il limite, per n infinito, dell' identità

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \dots \pm \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n} = \left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\dots\left(1-\frac{m}{n}\right).$$

92. Altre utili applicazioni si possono fare della formola di Taylor alla teoria delle serie numeriche. Data la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ a termini positivi decrescenti, immaginiamo una funzione $f(x)$, che vada sempre decrescendo, al crescere di x, assumendo per $x = 1, 2, 3, \dots$ i valori $u_1, u_2, u_3, \dots$; e supponiamo che della $f(x)$ si conosca una funzione primitiva $F(x)$. Questa va sempre crescendo con x, perchè (§ 59) la sua derivata è positiva; e però (§ 22) tende, per x infinito, ad un limite finito o

infinito. Intanto, se con α e β rappresentiamo certi due numeri degli intervalli $(n-1, n)$ ed $(n, n+1)$, si ha

$$F(n) - F(n-1) = f(\alpha) \quad , \quad F(n+1) - F(n) = f(\beta) \quad , \quad f(\alpha) > u_n > f(\beta) \ ;$$

quindi

$$F(n+1) - F(1) < u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n < F(n) - F(0) \ .$$

Ne segue che *la serie* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ *è convergente o divergente, secondo che* $F(x)$ *tende, per* x *infinito, ad un limite finito o all'infinito.* Infatti, nel primo caso, la somma dei suoi primi n termini si mantiene, crescendo, inferiore ad $F(n) - F(0)$, che ammette, per ipotesi, un limite finito; nel secondo caso la detta somma, superiore ad $F(n+1) - F(1)$, che cresce indefinitamente insieme ad n, deve *a fortiori* oltrepassare ogni limite. Questo notevole *criterio di convergenza* è dovuto a Cauchy. Mach

93. Ora la formola di Taylor ci offre il mezzo di addentrarci sempre più nello studio della serie data, anche quando i termini non si seguono decrescendo. Prima di tutto vogliamo dimostrare il seguente teorema di Franel *: *se, crescendo* x *all'infinito, la derivata di* $f(x)$, *supposta unica, tende a zero conservando un certo segno, e decrescendo in valore assoluto, l'espressione* $f \varepsilon q F Q . Df \varepsilon Q F Q$ decr. lim $Df = 0 . \supset . \lim \Sigma f - \int f x dx + \frac{1}{2} f n$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + {}^1/_2 u_n - F(n) \qquad (12)$$

tende, per n *infinito, ad un limite finito* l. Infatti a questa espressione si può sempre dar la forma $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$ ponendo

$$v_n = F(n-1) - F(n) + {}^1/_2\big(f(n-1) + f(n)\big) \ ;$$

e d'altra parte, se si applica la (9), adoperando la prima forma del resto, si ottiene

$$F(n - {}^1/_2) = F(n-1) + {}^1/_2 f(n-1) + {}^1/_8 f'(\alpha) \ ,$$
$$F(n - {}^1/_2) = F(n) - {}^1/_2 f(n) + {}^1/_8 f'(\beta) \ ,$$

dove α e β sono certi due numeri, presi rispettivamente nella metà inferiore e nella metà superiore dell'intervallo $(n-1, n)$. Ne segue subito, eguagliando fra loro i due precedenti valori di $F(n - {}^1/_2)$,

$$v_n = -{}^1/_8 f'(\alpha) + {}^1/_8 f'(\beta) \ .$$

Così $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ ci si presenta, almeno da un certo termine in poi, sotto la forma d'una serie a termini alternativamente positivi e negativi, che vanno decrescendo in valore assoluto, e tendono a zero. Ne segue

* *Intermédiaire des mathématiciens*, t. I, p. 234.

che $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ è convergente, e la sua somma l rappresenta appunto il limite dell'espressione (12). Ciò premesso, se si osserva che la somma $v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots$ resta sempre compresa fra 0 e $-{}^1\!/_8 f'(n)$, si può scrivere

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = F(n) + {}^1\!/_2 f(n) + {}^\theta\!/_8 f'(n) + l\,, \qquad (13)$$

dove θ è compreso fra 0 ed 1. Questa formola è molto utile per la valutazione approssimata di talune somme; ma in ciascun caso converrà studiare direttamente $v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots$ per ottenere una maggiore approssimazione. Vedremo infatti che, ponendo ρ_n al posto di ${}^\theta\!/_8 f'(n)$ nella (13), si può facilmente riuscire a dedurre, volta per volta, una più soddisfacente espressione approssimata di ρ_n dalla considerazione diretta dell'espressione equivalente $-(v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots)$. Del resto, nel caso generale, la formola di Taylor può fornire uguaglianze analoghe alla (13), sempre più precise; ed infatti basta prendere due soli termini di più, nella detta formola, per essere condotti a sostituire ${}^\theta\!/_8 f'(n)$ con ${}^1\!/_{12} f'(n) \pm {}^\theta\!/_{192} f'''(n)$, in (13), purchè le ipotesi già fatte per f' si trasportino ad f'''.

94. **Esempii:** *a)* Mediante il criterio di Cauchy, dimostrato nel § 92, si riesce a constatare in modo assai rapido la divergenza delle serie, definite dai termini generali

$$\frac{1}{n}\,, \quad \frac{1}{n\log n}\,, \quad \frac{1}{n\log n \log\log n}\,, \;\ldots\,.$$

Basta osservare che, per n infinito, queste funzioni tendono a zero decrescendo, e che ammettono le funzioni primitive

$$\log n \quad , \quad \log\log n \quad , \quad \log\log\log n \;, \;\ldots\,,$$

indefinitamente crescenti con n. Poi dal teorema di Franel si possono avere altre indicazioni sulle dette serie. Così, per esempio, si può esser sicuri che il numero

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

esiste; ed infatti noi già sappiamo (§ 73) che questo numero non è che la costante di Eulero $\mathbf{C} = 0{,}577215664901\ldots$. Similmente esiste il numero

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n} - \log\log n\right),$$

il cui valore si riesce a calcolare per altre vie, ed è * 0,794678645453...

b) Mercè la (13), presa sotto la forma più generale

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = F(n) + {}^1\!/_2 f(n) + \rho_n + l\,, \qquad (14)$$

* *Intermédiaire des mathématiciens*, t. V, p. 101.

si può andare oltre nella valutazione approssimata del primo membro. Così, per $u_n = 1/n$, si ha $f(n) = 1/n$, $F(n) = \log n$, $l = \mathbf{C}$, e ci resta da valutare la somma $\rho_n = -(v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots)$, della quale, per ora, sappiamo soltanto che tende a zero quando n cresce all'infinito. Nel caso attuale

$$v_n = -\log\frac{n}{n-1} + {}^1/_2\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right);$$

e poichè

$$\log\frac{n}{n-1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3(2n-1)^3} + \frac{1}{5(2n-1)^5} + \cdots\right),$$

$${}^1/_2\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = 2\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(2n-1)^3} + \frac{1}{(2n-1)^5} + \cdots\right),$$

si vede subito che si ha

$$v_n = 4\left(\frac{1}{3(2n-1)^3} + \frac{2}{5(2n-1)^5} + \frac{3}{7(2n-1)^7} + \cdots\right);$$

quindi

$$0 < v_n < \frac{4}{3(2n-1)}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{2}{(2n-1)^4} + \frac{3}{(2n-1)^6} + \cdots\right),$$

e finalmente

$$0 < v_n < \frac{2n-1}{12n^2(n-1)^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Dunque $0 < -\rho_n < 1/12n^2$; e però, rappresentando con θ un numero compreso fra 0 ed 1, si vede che *la somma dei primi* n *termini della serie armonica è*

$$H_n = \log n + \frac{1}{2n} - \frac{\theta}{12n^2} + \mathbf{C}\,. \tag{15}$$

Così, per esempio, se ci si domanda la somma dei primi *centomila* termini, ora siamo in grado di rispondere, ponendo $n = 10^5$ nel secondo membro di (15), che la somma richiesta è 12,090146.... Invece per $n = 10$, nella quale ipotesi il primo membro si può calcolare direttamente, se inoltre si prende $\theta = 1$, la (15) fa conoscere $\mathbf{C}$ con *cinque* cifre decimali esatte.

c) Se $u_n = \log n$, si può prendere $F(n) = n\log n - n$, giacchè la derivata di $x\log x - x$ è $\log x$. Il numero

$$\lim_{n=\infty}\Big(\log(n!) - (n + {}^1/_2)\log n + n\Big)$$

esiste, in virtù del teorema di Franel; ed in seguito ne troveremo il valore l uguale a $\log\sqrt{2\pi}$. Intanto, per applicare la formola (14), osserviamo che

$$-v_n = -1 + (n - {}^1/_2)\log\frac{n}{n-1} = \frac{1}{3(2n-1)^2} + \frac{1}{5(2n-1)^4} + \frac{1}{7(2n-1)^6} + \cdots,$$

d'onde

$$0 < -v_n < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^4} + \cdots\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

e per conseguenza $0 < \rho_n < 1/12n$. Ora la (14) diventa

$$\log(n!) = (n + {}^1/_2)\log n - n + \frac{\theta}{12n} + \log\sqrt{2\pi}\ , \tag{16}$$

e se ne deduce, passando dai logaritmi ai numeri, l'importante *formola di Stirling*:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,.\,n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$$

Valutazione assintotica delle serie di potenze.

95. Se il rapporto di due funzioni tende ad 1 quando la variabile indipendente cresce all'infinito, o pure quando, nel tendere di questa ad un limite finito, le funzioni vanno crescendo oltre ogni limite, si dice che una delle funzioni è *assintotica* all'altra. Se, dopo aver trovata una funzione φ_0, assintotica ad una data f, si riesce a trovarne un'altra φ_1, assintotica ad $f - \varphi_0$, poi un'altra φ_2, assintotica ad $f - \varphi_0 - \varphi_1$, e così via, si ottiene la rappresentazione assintotica della funzione data:

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots .$$

Questa eguaglianza va intesa in un senso convenzionale, come quella che compendia le seguenti, il cui senso preciso ci è noto:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi_0(x)} = 1 \quad , \quad \lim \frac{f(x) - \varphi_0(x)}{\varphi_1(x)} = 1 \quad , \quad \lim \frac{f(x) - \varphi_0(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = 1 \ , \ \ldots .$$

Evidentemente le funzioni $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sono tali, che il rapporto di ciascuna alla precedente ha per limite 0, dimodochè, se nel costruire successivamente le funzioni φ si perviene ad una costante, le funzioni seguenti hanno tutte 0 per limite. Tutto ciò è applicabile al caso d'una variabile crescente all'infinito per valori *interi*; ed è anzi questo un caso importante, come presto vedremo, rispetto al caso generale.

96. **Esempii:** *a)* Si è visto (§ 73, *j*) che, quando x tende a zero, dalla destra, $x\Gamma(x)$ tende all'unità: ciò si può esprimere dicendo che, *a destra dello zero*, $\Gamma(x)$ *è assintotica ad* $1/x$. Se poi si osserva che

$$\lim\left(\Gamma(x) - \frac{1}{x}\right) = \lim \frac{\Gamma(x+1) - 1}{x} = \Gamma'(1) = -\mathbf{C}\ ,$$

si può scrivere l'eguaglianza *assintotica* $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x} - \mathbf{C}$; ma questa si stabilisce più semplicemente svolgendo $\Gamma(x+1)$ in serie di potenze, e dividendo poi tutto per x.

b) Per avere esempii di sviluppi assintotici di funzioni di variabile *intera* basta riprendere le uguaglianze (15) e (16), scrivendole nel seguente modo:

$$H_n = \log n + C + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \dots ,$$

$$\log(n!) = n\log n - n + {}^1/_2 \log n + \log \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + \dots .$$

Come si vede, il rapporto di ciascun termine, nei secondi membri, al termine che lo precede, tende a zero quando la variabile cresce indefinitamente. Gli sviluppi potrebbero essere continuati all'infinito, senza menomamente preoccuparsi della loro convergenza, giacchè essi non sono, come gli ordinarii sviluppi in serie *, il risultato d'un *unico* passaggio al limite, ma implicano invece una *infinità* di simili passaggi, eseguiti successivamente.

c) Dalla formola di Stirling è facile dedurre una proprietà, utile a ricordare per l'uso che spesso ne faremo: *il coefficiente di* x^n *nello sviluppo di* $1/\sqrt{1-x}$ *è assintotico ad* $1/\sqrt{\pi n}$. Infatti si ha

$$\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} = \frac{1.2.3\dots 2n}{(2.4.6\dots 2n)^2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{e^{\frac{\theta - 4\theta'}{24n}}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} + \dots ,$$

cioè

$$\lim_{n=\infty} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} .$$

d) Del precedente risultato possiamo fare una prima applicazione alla funzione Γ. Dalla definizione (§ 13, *h*) segue

$$\Gamma(x+1)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \lim_{n=\infty} n^{2x-\frac{1}{2}} \frac{(2.4.6\dots 2n)^2}{(2x+1)(2x+2)\dots(2x+2n)} ,$$

ed anche (cambiando x ed n in $2x$ e $2n$)

$$\Gamma(2x+1) = 4^x \lim_{n=\infty} n^{2x} \frac{1.2.3\dots 2n}{(2x+1)(2x+2)\dots(2x+2n)} ;$$

sicchè

$$\frac{\Gamma(2x+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)} = 4^x \lim \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \sqrt{n} = \frac{4^x}{\sqrt{\pi}} .$$

In particolare, per $x=0$, si vede che $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Siamo giunti così alla *formola di Legendre*

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)} ,$$

---

* Anche per questi un più largo modo di considerarli è stato indicato da Peano negli *Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino* (1891).

dalla quale, per x intero, risulta

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=3\frac{\sqrt{\pi}}{2^2}\ ,\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=3.5\frac{\sqrt{\pi}}{2^3}\ ,\ \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=3.5.7\frac{\sqrt{\pi}}{2^4}\ ,\ \ldots$$

e) Ad un'altra interessante eguaglianza, che fra breve utilizzeremo, si perviene cercando di valutare assintoticamente il numero totale dei divisori dei primi n numeri interi, ossia, rappresentando con $\theta(n)$ il *numero dei divisori* di n, la somma $\theta(1)+\theta(2)+\ldots+\theta(n)$. Partiamo dalla seguente osservazione:

$$\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n-1}{p}\right]=\left|\begin{array}{l}0\ ,\ \text{in generale}\\ 1\ ,\ \text{quando } p \text{ divide } n.\end{array}\right.$$

Sommando tutte queste espressioni, in cui p percorre la successione dei numeri interi fino a $\nu=[\sqrt{n}]$, si ottiene il numero dei divisori di n, non superiori a $\sqrt{n}$, ossia $^1/_2\theta(n)$ in generale, ed $^1/_2\theta(n)+{}^1/_2$ quando n è un quadrato perfetto. Ne segue

$$\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)=2\sum_{p=1}^{p=\nu}\left(\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n-1}{p}\right]\right)-\nu\ .$$

Intanto la somma che comparisce nel secondo membro si riduce facilmente a

$$\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{n}{p}\right]-\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{p^2-1}{p}\right]=\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{n}{p}\right]-{}^1/_2\nu(\nu-1)\ .$$

Dunque

$$\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)=2\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{n}{p}\right]-\nu^2\ ,$$

e per conseguenza

$$\frac{\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)}{n}-\log n=2(H_\nu-\log\nu)-\frac{\nu^2}{n}+\log\frac{\nu^2}{n}-\frac{2}{n}\sum_{p=1}^{p=\nu}\left(\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]\right).$$

D' altra parte, siccome si ha

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2<\frac{\nu^2}{n}\leq 1\ \ ,\ \ 0\leq\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]<1\ ,$$

è chiaro che, per n infinito,

$$\lim\frac{\nu^2}{n}=1\ \ ,\ \ \lim\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=\nu}\left(\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]\right)=0\ .$$

Dunque

$$\lim\left(\frac{\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)}{n}-\log n\right)=2\mathbf{C}-1=0{,}15443132\ldots\ .$$

Siamo in tal modo giunti a stabilire l'interessante formola assintotica * di Dirichlet:

$$\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)=n\log n+(2C-1)n+\cdots.$$

97. Ora noi vogliamo specialmente occuparci delle funzioni rappresentabili mediante serie di potenze in un intervallo finito $(-\rho,\rho)$. Già sappiamo che queste funzioni sono continue, ed anzi derivabili per $|x|<\rho$, ma ignoriamo ancora ciò che accade per $x=\pm\rho$; ed è appunto dal modo di comportarsi d'una serie negli estremi dell'intervallo di convergenza che si può spesso trarre profitto per valutarne assintoticamente la somma in prossimità degli estremi stessi. D'altra parte si vedrà che, in certe questioni, la conoscenza di siffatte espressioni assintotiche può tener luogo di quella della somma esatta, quasi sempre inaccessibile. Premettiamo il seguente teorema: *se in un estremo dell'intervallo di convergenza una serie di potenze è divergente, la funzione rappresentata dalla serie cresce oltre ogni limite quando la variabile indipendente tende dall'interno dell'intervallo verso l'estremo che si considera.* Per fissar meglio le idee, e per semplificare le dimostrazioni, considereremo sempre l'estremo superiore ρ, e supporremo $\rho=1$: ciò è lecito, perchè basta cambiare x in ρx nella serie proposta per ridurre ad 1 il raggio di convergenza. Sia

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\quad,\quad a_0+a_1+a_2+\cdots=\infty\ ,$$

cambiando, se occorre, i segni di tutti i coefficienti. Bisogna far vedere che, dato un numero l, arbitrariamente grande, $f(x)$ diventa e resta maggiore di l, appena x supera un certo numero, sufficientemente vicino ad 1. Preso $l'>l$, si approfitti della divergenza della serie $a_0+a_1+a_2+\ldots$ per determinare ν in modo che, per $n>\nu$, la somma $a_0+a_1+\ldots+a_n$ sia maggiore di l'; e si osservi che, per x compreso fra 0 ed 1,

$$(a_0+a_1+\cdots+a_{\nu+1})+(a_0+a_1+\cdots+a_{\nu+2})x+(a_0+a_1+\cdots+a_{\nu+3})x^2+\cdots>\frac{l'}{1-x}\ ,$$

ossia

$$(a_0+a_1+\cdots+a_\nu)+a_{\nu+1}+a_{\nu+2}x+a_{\nu+3}x^2+\cdots>l'\ .$$

Intanto il primo membro, moltiplicato per $x^{\nu+1}$, non differisce da

$$(a_0+a_1+\cdots+a_\nu)x^{\nu+1}-(a_0+a_1x+\cdots+a_\nu x^\nu)+f(x)\ .$$

Dunque

$$f(x)>a_0(1-x^{\nu+1})+a_1(x-x^{\nu+1})+\cdots+a_\nu(x^\nu-x^{\nu+1})+l'x^{\nu+1}\ .$$

Ora, *fissato* ν, se si fa tendere x ad 1, il secondo membro tende ad l', e però finisce per mantenersi superiore al dato numero $l<l'$; ed *a fortiori* si avrà $f(x)>l$. Dunque $\lim_{x=1}f(x)=\infty$.

* *Journal de Liouville*, 1856, p. 359. Vedi anche una comunicazione di Stieltjes all'Accademia delle Scienze di Parigi, *Comptes-rendus*, t. XCVI, p. 764.

98. **Teorema.** *Se due serie di potenze, a coefficienti positivi, sono divergenti per uno stesso valore* $x=\rho$, *estremo del comune intervallo di convergenza, e se, crescendo* n *indefinitamente, il rapporto dei coefficienti di* x^n *tende ad un limite, anche il rapporto delle funzioni rappresentate dalle due serie tende allo stesso limite quando* x *tende a* ρ.

È questo il teorema su cui si fonda la determinazione assintotica delle serie di potenze. Ridotto ad 1 il raggio di convergenza, se si osserva che le funzioni

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots \quad , \quad \psi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

debbono, in virtù del teorema precedente, diventare infinite quando x tende ad 1, si vede che la proposizione enunciata è, per così dire, il teorema di l'Hospital (§ 69, b) delle serie di potenze. Del resto si noti che, nel caso attuale, l'applicazione del teorema di l'Hospital non condurrebbe a nulla, perchè le derivate delle funzioni φ e ψ si presentano nuovamente sotto la forma di serie di potenze, divergenti per $x=1$. Ciò premesso, supponiamo che, almeno a partire da un certo valore di n, i coefficienti a_n e b_n siano positivi, ed ammettiamo l'esistenza, per n infinito, del limite l del loro rapporto, dimodochè, dato arbitrariamente il numero positivo ε, si possa trovare un numero ν, tale che per $n>\nu$ sia sempre

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon ,$$

cioè a_n compreso fra $(l-\varepsilon)b_n$ ed $(l+\varepsilon)b_n$. Ne segue anche (per $x>0$)

$$\left|\frac{a_{\nu+1}+a_{\nu+2}x+a_{\nu+3}x^2+\cdots}{b_{\nu+1}+b_{\nu+2}x+b_{\nu+3}x^2+\cdots}-l\right|<\varepsilon .$$

D'altra parte, *fissato* ν, poichè $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ oltrepassano ogni limite quando x tende ad 1, il rapporto

$$\frac{1-\dfrac{1}{\psi(x)}(b_0+b_1x+\cdots+b_\nu x^\nu)}{1-\dfrac{1}{\varphi(x)}(a_0+a_1x+\cdots+a_\nu x^\nu)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{b_{\nu+1}+b_{\nu+2}x+b_{\nu+3}x^2+\cdots}{a_{\nu+1}+a_{\nu+2}x+a_{\nu+3}x^2+\cdots}$$

tende ad 1. Dunque, per ogni numero positivo ε, si potrà trovare, alla sinistra di 1, un intervallo sufficientemente piccolo perchè si abbia

$$(l-\varepsilon)(1-\varepsilon')<\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}<(l+\varepsilon)(1+\varepsilon')$$

per tutti i valori di x presi nel detto intervallo. Ne segue che, se si dà arbitrariamente il numero positivo η, si può, per gli stessi valori di x

avere

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - l\right| < \eta \,, \qquad \text{sicchè} \qquad \lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = l \,,$$

prendendo, per esempio, $\varepsilon = l\varepsilon' = {}^1/_3\eta < l$.

99. Ora siamo in grado di completare ciò che si è detto circa la continuità delle serie di potenze nell'intervallo di convergenza, giacchè possiamo aggiungere che *anche negli estremi*, se in essi converge, la serie rappresenta una funzione continua. In altri termini: *se in un estremo dell'intervallo di convergenza una serie di potenze ha la somma l, la funzione rappresentata dalla serie tende ad l quando la variabile indipendente tende dall'interno dell'intervallo verso l'estremo che si considera.* Questo importante teorema, dovuto ad Abel, si trova già completato dal teorema del § 97. Sia

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad , \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = l \,,$$

e si supponga $l > 0$: ciò è sempre lecito, giacchè nel caso opposto si potrebbe aumentare convenientemente a_0. Ora si consideri la serie

$$\varphi(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots \,,$$

e prima di tutto si noti che il suo raggio di convergenza (§ 86) è 1; ma che per $x = 1$ essa è divergente, perchè il suo termine generale tende ad $l > 0$. Poichè i coefficienti, almeno a partire da un certo termine, son tutti positivi, si può applicare il teorema del precedente paragrafo alla funzione φ ed all'altra: $\psi = 1 + x + x^2 + \ldots$. Si ottiene

$$\lim_{x=1}(1 - x)\varphi(x) = \lim_{n=\infty}(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \,, \qquad \text{cioè} \qquad \lim_{x=1} f(x) = l \,.$$

100. **Osservazione.** Non si tenga per evidente il teorema di Abel. Si noti, infatti, che in esso si afferma l'eguaglianza fra i valori di due quantità, sostanzialmente diverse nel significato:

$$\lim_{x=1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \quad , \quad \lim_{n=\infty}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \,.$$

Inoltre il detto teorema ci dà come sicura l'esistenza del primo di questi limiti quando esiste il secondo; ma può ben darsi che questo non esista quando esiste il primo. Eccone un esempio semplicissimo:

$$\lim_{x=1}(1 - x + x^2 - \cdots) = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{n=\infty}(1 - 1 + \cdots \pm 1) \ \text{non esiste.}$$

Del resto per altre serie il teorema non regge, giacchè i numeri

$$\lim_{x=a}\big(u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots\big) \quad , \quad \lim_{n=\infty}\big(u_0(a) + u_1(a) + \cdots + u_n(a)\big)$$

possono esistere entrambi, senza essere uguali. Per esempio

$$\lim_{x=1}\left((x-x^2)+(x^2-x^3)+(x^3-x^4)+\cdots\right)=1 \quad , \quad \lim_{n=\infty}(0+0+\cdots+0)=0\,.$$

101. **Esercizii:** *a)* Col teorema di Abel abbiamo acquistato quanto ancora ci mancava per arrivare, in modo assai più rapido, alla conoscenza completa di certi sviluppi in serie, evitando l'uso, spesso incomodo, della formola di Maclaurin. Così, per isvolgere in serie di potenze $\log(1+x)$ ed $\operatorname{arc\,tg} x$, basta osservare che le derivate di queste funzioni sono

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots \quad , \quad \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots\,,$$

e che le funzioni stesse si annullano per $x=0$, per potere scrivere, in base alle sole indicazioni del § 88,

$$\log(1+x)=x-{}^1/_2x^2+{}^1/_3x^3-\cdots \quad , \quad \operatorname{arc\,tg} x=x-{}^1/_3x^3+{}^1/_5x^5-\cdots\,,$$

in ogni intervallo $(-\alpha\,,\,\alpha)$, con α vicino quanto si vuole (ma inferiore) ad 1. Ora il teorema di Abel ci autorizza ad estendere gli ultimi risultati anche al caso di $\alpha=1$, subordinatamente alla sola condizione che le serie restino convergenti: ciò accade per $x=1$ nella prima serie, e per $x=\pm1$ nella seconda. Dunque

$$\log 2=1-{}^1/_2+{}^1/_3-\cdots \quad , \quad {}^1/_4\pi=1-{}^1/_3+{}^1/_5-\cdots\,.$$

b) In modo analogo si può determinare la somma della serie binomiale

$$f(x)=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

per tutti i valori di x e di m, per i quali la serie stessa converge, purchè non siano ad un tempo $x=-1\,,\,m=0$. Infatti si ha

$$f'(x)=m\left(1+\frac{m-1}{1}x+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^2+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}x^3+\cdots\right);$$

poi, moltiplicando i due membri per $1+x$, ed osservando che

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\,,$$

si ottiene $(1+x)f'(x)=mf(x)$, ossia $f'(x)/f(x)=m/(1+x)$. Il primo membro è visibilmente la derivata di $\log f(x)$, il secondo è la derivata di $m\log(1+x)$, e però (§ 66, *b*) queste funzioni possono differire solo per una costante, la quale, del resto, è nulla, perchè tali sono, per $x=0$, le due funzioni. Dunque $f(x)=(1+x)^m$.

c) Ora vogliamo utilizzare il teorema del § 98 per valutare assintoticamente la somma $f(x)$ della serie $x+x^4+x^9+\ldots$, manifestamente divergente per $x=1$, ma convergente a sinistra di 1. Prima consideriamo la funzione

$$\varphi(x)=[\sqrt{1}]x+[\sqrt{2}]x^2+[\sqrt{3}]x^3+\cdots+[\sqrt{n}]x^n+\cdots\,,$$

legata ad $f(x)$ dalla relazione evidente $(1-x)\varphi(x)=f(x)$; e paragoniamola all'altra

$$(1-x)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}x+\frac{3.5}{2.4}x^2+\frac{3.5.7}{2.4.6}x^3+\dots,$$

in cui il coefficiente di x^n è (§ 96, c)

$$\frac{3.5.7\dots(2n+1)}{2.4.6\dots 2n}=\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}(2n+1)=\frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}}+\dots=2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}+\dots.$$

Il limite del rapporto dei coefficienti di x^n nelle due serie ha dunque il valore

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\lim_{n=\infty}\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Ne segue, in virtù del teorema invocato,

$$\lim_{x=1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\varphi(x)=\lim_{x=1}(1-x)^{\frac{1}{2}}f(x)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

e però si può scrivere l'eguaglianza

$$x+x^4+x^9+\dots=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}},$$

assintoticamente vera a sinistra di 1. Proseguendo il calcolo si può giungere ad ottenere nel secondo membro, senza gravi difficoltà, l'espressione più approssimata

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}\sqrt{\pi(1-x)}+\dots.$$

Al medesimo risultato si perviene direttamente quando si conosce una certa proprietà * di $f(x)$, che noi qui proponiamo come esercizio al lettore, quantunque non si sappia stabilire con mezzi elementari, quali son quelli di cui attualmente disponiamo:

$$(\tfrac{1}{2}+x+x^4+x^9+\dots)\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}=(\tfrac{1}{2}+x'+x'^4+x'^9+\dots)\left(\log\frac{1}{x'}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

I numeri x ed x', presi fra 0 ed 1, si suppongono vincolati dalla relazione $\log\frac{1}{x}\cdot\log\frac{1}{x'}=\pi^2$. In virtù di questa x' tende a zero quando x tende ad 1, nella quale ipotesi si ottiene subito

$$\lim(x+x^4+x^9+\dots)\sqrt{1-x}=\tfrac{1}{2}\lim\left(\frac{\log x'}{\log x}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-x}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\lim\sqrt{\frac{1-x}{\log\frac{1}{x}}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

---

* Cauchy, *Mémoire sur la théorie des nombres*, 1830, p. 614.

d) La serie $f(x) = x - x^4 + x^9 - \ldots..$ non converge per $x = 1$, ma ciò non toglie che la sua somma possa tendere ad un limite quando x tende ad 1 crescendo. Per trovare questo limite si osservi che nella serie

$$\frac{f(x)}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^9 + x^{10} + \cdots + x^{15} + x^{25} + x^{26} + \cdots$$

il coefficiente di x^n è $a_n = 1$ o $a_n = 0$, secondo che il massimo intero contenuto in $\sqrt{n}$, ossia $\nu = [\sqrt{n}]$, è dispari o pari. Un calcolo facile dà

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{1-(-1)^\nu}{2}(n+1) + \frac{(-1)^\nu}{2}\nu(\nu+1) ;$$

poi, osservando che $0 \leqq n - \nu^2 \leqq 2\nu$, si ottiene

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+1} = {}^1/_2 \pm \lim \frac{n-\nu^2}{2n} = {}^1/_2 .$$

Ciò premesso, basta paragonare la serie

$$\varphi(x) = a_1 x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2 + a_3)x^3 + \cdots$$

con

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots ,$$

per vedere che si ha $\lim\limits_{x=1}(1-x)^2\varphi(x) = {}^1/_2$. Del resto $(1-x)^2\varphi(x) = f(x)$. Dunque

$$\lim_{x=1}(x - x^4 + x^9 - x^{16} + \cdots) = {}^1/_2 .$$

e) Data a valutare la funzione $f(x) = x + {}^1/_2 x^4 + {}^1/_3 x^9 + \ldots$, conviene considerare le serie

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-x} , \quad \psi(x) = \frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x} ,$$

nelle quali i coefficienti di x^n sono H_ν ed H_n, continuando a rappresentare con ν il massimo intero contenuto in $\sqrt{n}$. Il limite del rapporto di questi coefficienti è $\lim\limits_{n=\infty}(\log\nu/\log n) = {}^1/_2$, e però $f(x)$ è assintotica ad ${}^1/_2\log\frac{1}{1-x}$. Per andare più oltre si consideri la funzione

$$f(x) - {}^1/_2\log\frac{1}{1-x} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots ,$$

in cui

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = H_\nu - {}^1/_2 H_n = {}^1/_2 \mathbf{C} + \log\frac{\nu}{\sqrt{n}} + \cdots ,$$

e conseguentemente $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = {}^1/_2\mathbf{C}$; quindi, in virtù del teorema di Abel,

$$\lim_{x=1}\left(f(x) - {}^1/_2\log\frac{1}{1-x}\right) = {}^1/_2\mathbf{C} .$$

Al primo membro si può dare un'altra forma osservando che, per x tendente ad 1,

$$\lim \log \frac{\log \frac{1}{x}}{1-x} = \log \lim \frac{\log \frac{1}{x}}{1-x} = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad \lim\left(\log\log\frac{1}{x} + \log\frac{1}{1-x}\right) = 0 \ .$$

Possiamo dunque scrivere, a sinistra dell'unità, l'eguaglianza assintotica *

$$x + {}^1/_2 x^4 + {}^1/_3 x^9 + \ldots = -{}^1/_2 \log\log\frac{1}{x} + {}^1/_2 \mathbf{C} \ .$$

f) La funzione $f(x) = 1^{\mu-1}x + 2^{\mu-1}x^2 + 3^{\mu-1}x^3 + \ldots$ per $x=1$ prende il valore finito $1^{\mu-1} + 2^{\mu-1} + 3^{\mu-1} + \ldots$ quando μ è negativo, ed invece cresce indefinitamente a sinistra di 1 nel caso opposto, cioè per $\mu \geq 0$. Siccome si sa che $f(x) = -\log(1-x)$ per $\mu = 0$, ci resta da esaminare ciò che avviene nel caso di μ positivo, per la qual cosa basta paragonare $f(x)$ con

$$(1-x)^{-\mu} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3 + \ldots ,$$

richiamando (§ 13, *h*) la definizione della *funzione gamma*:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\,n^x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} \ .$$

Si vede subito che il rapporto dei coefficienti di x^n tende appunto a $\Gamma(\mu)$, quando n cresce all'infinito, e però **

$$\lim_{x=1} (1^{\mu-1}x + 2^{\mu-1}x^2 + 3^{\mu-1}x^3 + \ldots)(1-x)^{\mu} = \Gamma(\mu) \ .$$

Questa formola conduce ad un altro modo di considerare la funzione Γ. All'espressione che comparisce nel primo membro si può dar la forma $a_1x + a_2x^2 + \ldots$ ponendo

$$a_n = n^{\mu-1} - \frac{\mu}{1}(n-1)^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}(n-2)^{\mu-1} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}(n-3)^{\mu-1} + \ldots .$$

Invocando poi il teorema di Abel possiamo esprimere $\Gamma(\mu)$ come somma della serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$; e siccome si ha

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^{\mu-1} - \frac{\mu-1}{1}(n-1)^{\mu-1} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}(n-2)^{\mu-1} - \ldots ,$$

si vede che si può *** anche scrivere, dopo aver cambiato μ in $x+1$,

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty}\left(n^x - \frac{x}{1}(n-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.2}(n-2)^x - \ldots\right) .$$

---

* Sonin, *Sur les polynômes de Bernoulli*, Giornale di Crelle, t. 116, p. 147.

** Appell, *Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes d'une variable*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1878.

*** *Intermédiaire des mathématiciens*, t. VI, p. 148.

g) Per finire applichiamo la formola di Dirichlet, dimostrata nel § 96, alla valutazione assintotica della serie di Lambert

$$f(x)=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\cdots.$$

Già sappiamo * che questa serie si può trasformare in $x\theta(1)+x^2\theta(2)+x^3\theta(3)+\ldots$. D'altra parte la formola citata ci suggerisce di studiare la funzione

$$f(x)-\frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x}=\sum_1^\infty(\theta(n)-H_n)x^n$$

per x tendente ad 1, dalla sinistra. La somma dei primi n coefficienti è

$$\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)-(n+1)H_n+n=\mathbf{C}n+\cdots,$$

e però la funzione stessa, divisa per $\mathbf{C}(1-x)$, è assintotica ad $x+2x^2+3x^3+\ldots$, ossia ad $x/(1-x)^2$. Dunque

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x}+\frac{\mathbf{C}x}{1-x}+\cdots.$$

Questa espressione, per un'osservazione fatta a proposito della serie di Sonin, si trasforma facilmente in

$$f(x)=\frac{\mathbf{C}-\log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}}+\cdots.$$

Si trova così la parte infinitamente grande d'un notevole sviluppo **, ed essa basta per rendersi conto del modo di comportarsi della serie di Lambert a sinistra dell'unità; ma se si vuol calcolare la somma della serie con una certa approssimazione, bisogna conoscere lo sviluppo completo:

$$\frac{\mathbf{C}-\log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}}+\frac{1}{4}-\frac{\log\frac{1}{x}}{144}-\frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^3}{86400}-\cdots.$$

Formole d'interpolazione.

102. Costruire una funzione $y=f(x)$, tale che ai valori $x_1, x_2, x_3, \ldots$ della variabile indipendente corrispondano *dati* valori $y_1, y_2, y_3, \ldots$ della funzione, tale cioè che si abbia $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2, f(x_3)=y_3, \ldots$: que-

* *Analisi algebrica*, p. 181.

** Schlömilch, *Giornale di Liouville*, 1863, p. 99.

sto è il problema dell'*interpolazione*, problema naturalmente indeterminato, in generale. Nondimeno, se si vuole che y sia una funzione intera, di grado inferiore ad n, basterà prescrivere n coppie di valori corrispondenti perchè la funzione sia pienamente determinata. È infatti nota fin dagli elementi l'identità necessaria fra due polinomii, uguali per valori della variabile, in numero superiore al grado dei polinomii stessi. Del resto questo particolare problema d'interpolazione si riduce, se si vuole, a ricavare dal sistema di equazioni

$$a_0 x_i^{n-1} + a_1 x_i^{n-2} + a_2 x_i^{n-3} + \cdots + a_{n-2} x_i + a_{n-1} = y_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

i valori dei coefficienti incogniti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$; e poichè il determinante del sistema è diverso da zero, si vede subito che la soluzione è unica. Similmente, quando $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$, il problema è determinato se si vuole che la funzione sia sviluppabile in serie di potenze; ma può anche darsi che in questa forma non ammetta soluzione. Infatti, supposte esistenti due siffatte funzioni, la loro differenza $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ deve annullarsi per infiniti valori di x, tendenti a zero, e per conseguenza, in virtù della continuità, deve annullarsi per $x = 0$. Ne segue $a_0 = 0$; ed osservando che anche $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots$ è annullata dai medesimi valori di x, si trova analogamente $a_1 = 0$, poi $a_2 = 0$, *ecc.*, vale a dire che le due funzioni coincidono. È poi evidente che, se i numeri $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sono dati a caso, è ben difficile che la funzione cercata esista, giacchè occorre, prima di tutto, che, nel crescere di n all'infinito, i predetti numeri tendano ad un limite finito.

103. Funzioni interpolari *. L'espressione

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

si chiama *prima* funzione interpolare di $f(x)$, ed è come il rapporto incrementale (*cfr.* § 40) relativo ad un dato intervallo (x_1, x_2). La *seconda* funzione interpolare di $f(x)$ è

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3)}{x_2 - x_3}\,,$$

vale a dire che, fissato x_1, essa rappresenta, per l'intervallo (x_2, x_3), la prima funzione interpolare della funzione $f(x_1, x)$. Così proseguendo si

* Vedi gli *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino* (1881-82-83). Nel volume del 1878 trovasi una prima Memoria di Genocchi *intorno alle funzioni interpolari*, con molte indicazioni sulle ricerche anteriori.

arriva alla $(n-2)^{ima}$ funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, e si definisce la $(n-1)^{ima}$ come prima funzione interpolare di $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x)$ per l'intervallo (x_{n-1}, x_n), ossia

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) - f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_n)}{x_{n-1} - x_n} .$$

Tutte queste funzioni si possono esprimere direttamente mediante i numeri dati $y_1, y_2, y_3, \dots$. Infatti si ha

$$f(x_1, x_2) = \frac{y_1}{x_1 - x_2} + \frac{y_2}{x_2 - x_1} \quad , \quad f(x_1, x_3) = \frac{y_1}{x_1 - x_3} + \frac{y_3}{x_3 - x_1} ;$$

poi, sottraendo e dividendo per $x_2 - x_3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} .$$

È facile intuire il risultato generale

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_n)} + \dots + \frac{y_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})} ,$$

che si verifica col solito procedimento. Questa formola, dovuta ad Ampère, mostra che *ogni funzione interpolare di* f(x) *è simmetrica rispetto ai valori di* x, *da cui dipende.*

104. **Formola di Newton.** Dalla definizione della prima funzione interpolare di $f(x)$, relativa ad un intervallo qualunque (x, x_1), si trae

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x) ;$$

e siccome, analogamente, si ha

$$f(x_1, x) = f(x_1, x_2) + (x - x_2) f(x_1, x_2, x) ,$$

si vede che

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x) .$$

Così proseguendo è chiaro che si perviene alla seguente formola

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x_3) + \dots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}) f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x) . \qquad (17)$$

Ora, se si vuole che $f(x)$ sia un polinomio di grado $n-1$ (o, eventualmente, di grado inferiore), si osservi che, in questa ipotesi, $f(x) - f(x_1)$ è divisibile per $x - x_1$, sicchè $f(x_1, x)$ risulta un polinomio del grado

$n-2$. Ne segue che la funzione $f(x_1, x_2, x)$, considerata come prima funzione interpolare di $f(x_1, x)$, è un polinomio di grado $n-3$; e così via, fino ad $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x)$, che deve ridursi ad una *costante*. Adunque

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) ;$$

poi, sostituendo in (17),

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x_3) + \cdots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) . \qquad (18)$$

Questa è la *formola di Newton*, mediante la quale si può sempre costruire l'unico polinomio, di grado inferiore ad n, che prende i valori prescritti $y_1, y_2, \ldots, y_n$, in corrispondenza dei valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di x. Il grado del polinomio, generalmente uguale ad $n-1$, può riuscire più basso, ed effettivamente ciò avviene tutte le volte che i numeri y sono dati in modo che $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ risulta uguale a zero.

105. **Formola di Lagrangia.** Per far comparire esplicitamente, nel secondo membro di (18), i numeri $y_1, y_2, \ldots, y_n$, basta fare uso della formola di Ampère, dimostrata nel § 103. Prima si osservi che, essendo ogni funzione interpolare esprimibile in forma lineare ed omogenea delle y, anche $f(x)$ ha questa forma, vale a dire che si può scrivere

$$f(x) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + \cdots + y_n f_n(x) . \qquad (19)$$

Ciò premesso, la funzione $f_n(x)$ si determina subito, mercè la formola di Ampère, dopo avere osservato che soltanto l'ultimo termine di (18) contiene y_n. Basterà poi cambiare x_n in qualunque x_i per ottenere, in virtù della simmetria, l'espressione di $f_i(x)$:

$$f_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{i-1}) . (x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_{i-1}) . (x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)} . \qquad (20)$$

La formola (19), in cui le f_i hanno il significato (20), è la *formola di Lagrangia*. Questa si può, del resto, stabilire direttamente, osservando che, se si vuol tentare la risoluzione del problema con un'espressione della forma (19), occorre che $f_i(x)$ sia un polinomio di grado inferiore ad n, che diventi uguale ad 1 per $x = x_i$, ed invece si annulli per ogni $x = x_j \gtrless x_i$. A tali condizioni si soddisfa evidentemente attribuendo ad $f_i(x)$ l'espressione (20). Trovata così una funzione intera $f(x)$, che risponde alla questione, già sappiamo che non può esisterne un'altra, salvo che il suo grado non raggiunga o superi n.

106. Il secondo membro di (18) rappresenta una funzione che prende i valori prescritti $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2), \ldots, y_n=f(x_n)$ quando ad x si attribuiscono i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La differenza fra il primo ed il secondo membro è una funzione $R_n(x)$, che si riduce identicamente a zero sol quando f sia quella particolare funzione intera, di grado inferiore ad n, che viene individuata dalle precedenti condizioni; ma, in generale, di $R_n(x)$ si può dire soltanto che ammette le radici $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supponiamo questi numeri già disposti in ordine crescente, ed osserviamo che la derivata $R'_n(x)$ deve annullarsi (§ 62) per $n-1$ valori di x, presi rispettivamente negli intervalli $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$. Similmente $R''_n(x)$ si annulla per $n-2$ valori di x, certamente compresi fra x_1 ed x_n; *ecc.* Finalmente $R_n^{(n-1)}(x)$ deve annullarsi per un numero ξ, appartenente all'intervallo (x_1, x_n). Intanto si ha

$$R_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x)-(n-1)!f(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

Dunque

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} . \tag{21}$$

Questo teorema è assai utile in certe questioni geometriche. Si noti che, *se* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *tendono simultaneamente ad* a, anche ξ tende ad a; quindi, ammessa la continuità di $f^{(n-1)}(x)$ per $x=a$,

$$\lim f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} . \tag{22}$$

Tornando ad R_n, osserviamo che dalla (17), dopo aver cambiato n in $n+1$, risulta

$$R_n=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) ;$$

quindi, indicando con ξ un *numero medio fra* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ed* x,

$$R_n=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} . \tag{23}$$

Così la formola di Newton, in cui si aggiunga questa espressione di R_n al secondo membro, ci si presenta come un'estensione della formola di Taylor (§ 89) completata col resto di Lagrangia, ed in virtù di (22) si riduce effettivamente a quest'ultima formola quando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si fanno tendere simultaneamente verso un limite a.

107. **Applicazioni:** *a)* La proprietà (22) ci mette in grado di rispondere ad una questione accennata in fine del § 102, ci permette cioè di trovare quella funzione $f(x)$, sviluppabile in serie di potenze, che prende valori assegnati *a priori*

corrispondentemente ai valori $x_1, x_2, x_3, \ldots$ di x, tendenti a zero. Siano n', n'', $n''', \ldots$ numeri qualunque, differenti tra loro e maggiori di n. Se i numeri

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = a_0 \quad , \quad \lim_{n=\infty} f(x_n, x_{n'}) = a_1 \quad , \quad \lim_{n=\infty} f(x_n, x_{n'}, x_{n''}) = a_2 \ , \ \ldots$$

esistono, la funzione cercata è $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$.

b) Il calcolo del logaritmo volgare (cioè in base 10) d'un numero qualunque si può sempre ridurre al calcolo del logaritmo d'un numero grande quanto si vuole, moltiplicando, se occorre, il dato numero per una potenza di 10. Vogliamo far vedere che, quando le tavole di cui si dispone sono a ν decimali, basta rendere il numero x (di cui si vuol calcolare il logaritmo) maggiore di $10^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}$, per poter fare uso della nota regola

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} n + (x - n) \operatorname{Log} \frac{n+1}{n} ,$$

in cui n rappresenta il massimo intero contenuto in x. Infatti, se si applica la formola di Newton, completata col resto (23), alla funzione $\operatorname{Log} x$, prendendo $x_1 = n$, $x_2 = n + 1$, si ottiene appunto la precedente uguaglianza, col secondo membro aumentato di

$$R = (x - n)(n + 1 - x) \frac{M}{2\xi^2} .$$

Ora osserviamo che $(x - n)(n + 1 - x)$, prodotto di due fattori, la cui somma è 1, non può (§ 73, a) superare $^1/_4$; e ricordiamoci (§ 29, c) che $M < {}^1/_2$. Ne segue subito che, entro i limiti di approssimazione, fra i quali sono stati eseguiti i calcoli, R è trascurabile, perchè

$$R < \frac{1}{16\xi^2} < \frac{1}{16 \cdot 10^{2\left[\frac{\nu}{2}\right]}} < \frac{1}{10^\nu} .$$

c) Se le x e le corrispondenti y si considerano come coordinate di punti d'una curva, la prima funzione interpolare rappresenta il coefficiente angolare di una corda M_1M_2. Immaginiamo presi M_1 ed M_2 in prossimità del punto M, corrispondente all'ascissa a, e facciamoli tendere ad M. Se la derivata y' è continua per $x = a$, l'eguaglianza (22) dà *

$$\lim \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = f'(a) ,$$

e ci dice che *la tangente in* M *è la posizione limite di tutte le secanti* M_1M_2, mentre la definizione della tangente non ci permette di affermar ciò se non quando un estremo della corda si trova già fissato in M.

---

* Questa eguaglianza si potrebbe assumere come *definizione* della derivata, e con ciò si avrebbero certi vantaggi, indicati da Peano in *Mathesis*, 1892, p. 12.

d) Anche la seconda funzione interpolare ha un semplicissimo significato geometrico. Si sa infatti dalla Geometria analitica che l'area del triangolo $M_1M_2M_3$, nell'ipotesi che i vertici siano incontrati in quest'ordine stesso da un punto che percorre il perimetro lasciando il triangolo alla sua sinistra, è

$$\sigma = {}^1/_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = {}^1/_2 (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) f(x_1, x_2, x_3) .$$

Ora, data la curva $y = f(x)$, supponiamo continua e diversa da zero, per $x = a$, la derivata seconda $f''(x)$, e determiniamo (§ 32) intorno ad a un intervallo, nel quale $f''(x)$ conservi il segno di $f''(a)$. Agli estremi d'un tale intervallo corrispondono sulla curva due punti P e Q; ed in virtù di (21), per tre punti qualunque M_1, M_2, M_3, presi sull'arco PQ, è chiaro che $f(x_1, x_2, x_3)$ ha il segno di $f''(a)$. Ciò premesso, dopo aver fissato M_1, si prenda M_2 alla destra di M_1, in modo cioè che sia $x_2 > x_1$, e si scelga M_3 in guisa che un punto mobile, arrivato da M_1 in M_2, debba voltare a sinistra se vuol proseguire per M_3. In queste condizioni

σ sarà positivo, e però $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ avrà il segno di $f''(a)$, d'onde segue che $f''(a)$ è positivo o negativo secondo che x_3 sta fuori o dentro l'intervallo (x_1, x_2). Intanto è facile riconoscere che il punto M_3 deve star fuori dell'arco M_1M_2, o deve invece cadere nell'interno di tale arco, secondo che questo è *convesso* o *concavo* verso la parte inferiore della figura. Ne segue che $f''(a)$ è *positivo* nel primo caso, *negativo* nel secondo. A tale conclusione si perviene più semplicemente prendendo sulla curva un punto qualunque M fra M_1 ed M_2, e considerando sulla corda M_1M_2 il punto M', che ha la medesima ascissa x. L'equazione della retta M_1M_2 è

$$y = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) ,$$

e però la differenza fra l'ordinata di M e quella di M' è, per le formole (17) e (21),

$$(x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x) = {}^1/_2 (x - x_1)(x - x_2) f''(\xi) ,$$

dove ξ, come x, è compreso fra x_1 ed x_2. La differenza suddetta ha dunque il segno opposto a quello di $f''(\xi)$, ossia di $f''(a)$, sicchè i punti M si trovano *tutti* al disotto della corda M_1M_2, o *tutti* al disopra, secondo che $f''(a)$ è positivo o negativo; e ciò vale per qualunque arco compreso in M_1M_2, e la corrispondente corda. Così il segno di $f''(x)$ può servire a riconoscere, lungo la curva $y = f(x)$, quali archi (convenientemente piccoli) volgono in su la loro concavità $(f'' > 0)$, quali invece la volgono in giù $(f'' < 0)$.

e) Quando, nelle circostanze indicate precedentemente, i punti M_1, M_2, M_3 tendono simultaneamente a confondersi col punto fisso $M(x = a)$, anche il circolo circoscritto al triangolo $M_1M_2M_3$ tende a confondersi con un circolo fisso, che si chiama *circolo osculatore* alla curva, in M, per ragioni che appariranno in seguito. Per dimostrare l'esistenza d'un tal circolo limite basta far vedere che il centro del circolo $M_1M_2M_3$ tende a collocarsi sopra una retta fissa, e che il raggio tende ad un limite ρ. Intanto è noto dagli elementi della Geometria che la lunghezza di questo raggio si ottiene dividendo per 4σ il prodotto $l_1 l_2 l_3$ delle lunghezze dei lati del triangolo $M_1M_2M_3$. D'altra parte, se con $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ si rappresentano le inclinazioni dei lati stessi sull'asse delle x, si ha

$$\pm(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) = l_1 l_2 l_3 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 .$$

Ne segue, osservando che questi tre angoli tendono all'analogo angolo φ, relativo al punto fisso M, e ricordando la proprietà (22),

$$\pm\frac{1}{\rho} = 2\lim f(x_1, x_2, x_3)\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 = f''(a)\cos^3\varphi ;$$

dove $\operatorname{tg}\varphi = f'(a)$. Dunque

$$\rho = \pm\frac{(1+f'^2(a))^{\frac{3}{2}}}{f''(a)} .$$

Questa lunghezza, molto importante per lo studio delle curve, si chiama *raggio di curvatura*. Si noti, per finire, che il centro del circolo $M_1M_2M_3$ si trova costantemente sulla perpendicolare elevata ad M_1M_2 nel punto di mezzo; e poichè, nel tendere di M_1 ed M_2 ad M, la retta M_1M_2 tende alla *tangente* in M, è chiaro che la suddetta perpendicolare tende invece a confondersi con la *normale*, d'onde segue che il circolo osculatore in qualunque punto d'una curva sta fra i circoli che toccano la curva nel punto che si considera.

Decomposizione delle funzioni razionali in somme di frazioni semplici.

108. Abbiamo detto (§ 13, a) che una funzione razionale si può sempre esprimere come quoziente $f(x)/g(x)$ di due funzioni intere; ed è poi evidente che queste si possono sempre supporre prime fra loro. Inoltre, immaginando già estratta la parte intera del quoziente predetto, è lecito supporre il grado di f inferiore a quello di g. Data

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

con radici tutte semplici, si rappresenti f mediante la formola d'interpolazione di Lagrangia. Prima si osservi che nell'espressione (20) il numeratore ed il denominatore valgono rispettivamente

$$g(x)/(x - x_\nu) \quad , \quad g'(x_\nu) \gtrless 0 .$$

Ne segue

$$y_\nu f_\nu(x) = \frac{f(x_\nu)}{x - x_\nu}\cdot\frac{g(x)}{g'(x_\nu)} = \frac{a_\nu g(x)}{x - x_\nu} \quad , \quad \text{dove} \quad a_\nu = \frac{f(x_\nu)}{g'(x_\nu)} \gtrless 0 ; \qquad (24)$$

quindi, sostituendo in (19),

$$\frac{f'(x)}{g(x)}=\frac{a_1}{x-x_1}+\frac{a_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-x_n}. \tag{25}$$

Così la funzione data si trova decomposta in una somma di frazioni semplici. Si vedrà nella terza parte del corso quale sia l'utilità di questa decomposizione.

109. Poniamoci ora nel caso generale: sia

$$g(x)=(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\cdots=(x-\alpha)^r\varphi(x),$$

dimodochè $\varphi(\alpha)\gtrless 0$. Identicamente

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_r}{(x-\alpha)^r}+\frac{f(x)-a_r\varphi(x)}{(x-\alpha)^r\varphi(x)},$$

qualunque sia a_r; ma questo numero si può fissare in modo che $f-a_r\varphi$ riesca divisibile per $x-\alpha$, per la qual cosa occorre che $f(\alpha)-a_r\varphi(\alpha)$ sia 0, cioè

$$a_r=\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=r!\frac{f(\alpha)}{g^{(r)}(\alpha)}\gtrless 0. \tag{26}$$

Allora, chiamati f_1 e g_1 i quozienti di $f-a_r\varphi$ e di g per $x-\alpha$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_r}{(x-\alpha)^r}+\frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

e si è condotti a decomporre la frazione f_1/g_1, più semplice di f/g perchè l'ordine di α, come radice del denominatore, si trova abbassato ad $r-1$. Immaginando ripetute le considerazioni precedenti si può senz'altro scrivere

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{a_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

dove

$$a_{r-1}=\frac{f_1(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=\frac{f'(\alpha)-a_r\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=\frac{r!}{g^{(r)}(\alpha)}\left(f'(\alpha)-\frac{f(\alpha)}{r+1}\cdot\frac{g^{(r+1)}(\alpha)}{g^{(r)}(\alpha)}\right),$$

e così di seguito, finchè si giunge a

$$\frac{f_{r-1}(x)}{g_{r-1}(x)}=\frac{a_1}{x-\alpha}+\frac{f_r(x)}{g_r(x)},$$

dove $g_r(x)$, ossia $\varphi(x)$, non ha più la radice α. Passando ora a considerare la radice β, poi le altre, successivamente, si vede che si perverrà finalmente alla formola

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1}{x-\alpha}+\frac{a_2}{(x-\alpha)^2}+\dots+\frac{a_r}{(x-\alpha)^r}$$
$$+\frac{b_1}{x-\beta}+\frac{b_2}{(x-\beta)^2}+\dots+\frac{b_s}{(x-\beta)^s}+\dots,$$

che include (25) per $r=s=\ldots=1$, come la legge (24) per la formazione dei coefficienti è inclusa in (26). Gli altri coefficienti, nel caso generale, sono dati da formole sempre più complicate *; ma di queste, come della (26), si fa raramente uso nella pratica del calcolo, dove, una volta che si è riusciti a constatare la possibilità di porre la frazione sotto la forma precedentemente ottenuta, si ricorre di preferenza al metodo dei *coefficienti indeterminati.*

110. Ordinariamente la frazione data ha i coefficienti reali; ed è conveniente, per ragioni che potremo intendere in seguito, decomporla in frazioni semplici, che siano anch'esse a coefficienti reali. Con questo scopo i fattori lineari di g, corrispondenti a due radici immaginarie conjugate $\alpha\pm i\beta$, si lasciano accoppiati nel prodotto x^2+px+q, che si considera come denominatore d'una frazione semplice. Per calcolarne il numeratore applichiamo la formola (24) ricordandoci ** che i numeri ottenuti sostituendo in f/g' una volta $x=\alpha+i\beta$, ed un'altra $x=\alpha-i\beta$, sono conjugati. Se li rappresentiamo con $\lambda+i\mu$ e $\lambda-i\mu$, le radici considerate daranno luogo, nella formola (25), alla somma

$$\frac{\lambda+i\mu}{x-(\alpha+i\beta)}+\frac{\lambda-i\mu}{x-(\alpha-i\beta)}=\frac{ax+b}{x^2+px+q},$$

in cui a e b sono, come p e q, numeri reali. Se, per esempio, g ammette soltanto radici immaginarie semplici, si potrà scrivere, invece di (25),

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1x+b_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{a_2x+b_2}{x^2+p_2x+q_2}+\dots+\frac{a_nx+b_n}{x^2+p_nx+q_n},$$

supponendo $g(x)=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\dots(x^2+p_nx+q_n)$. Ora, passando al caso delle radici multiple, supponiamo $g(x)=(x^2+px+q)^r\varphi(x)$, ed osserviamo che nell'identità

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^r}+\frac{f(x)-(ax+b)\varphi(x)}{(x^2+px+q)^r\varphi(x)}$$

* *Analisi algebrica*, p. 495.
** *Analisi algebrica*, p. 396.

si può disporre delle costanti a e b in guisa che $f-(ax+b)\varphi$ riesca divisibile per x^2+px+q: basta mettere $\lambda+\mu\frac{x-\alpha}{\beta}$ al posto di $ax+b$, dopo aver calcolato $\lambda\pm i\mu=f(\alpha\pm i\beta)/\varphi(\alpha\pm i\beta)$. Proseguendo in tal modo, come nel paragrafo precedente, si vede che ogni coppia di radici immaginarie, conjugate, multiple dell'ordine r, dà luogo, nella decomposizione di f/g in frazioni semplici, ad una somma di questa forma:

$$\frac{a_1x+b_1}{x^2+px+q}+\frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{a_rx+b_r}{(x^2+px+q)^r}.$$

Numeri di Bernoulli e di Eulero.

111. Varie importanti funzioni non si sanno svolgere in serie di potenze mediante la formola (10), o formola di Maclaurin, per l'impossibilità di trovare l'espressione generale della derivata n^{ima}. D'altronde, se si riflette che in detta formola non compariscono proprio le derivate successive della funzione, ma soltanto i loro valori per $x=0$, si capisce che il calcolare la derivata n^{ima} di $f(x)$ è fare assai più di quanto strettamente occorre per lo sviluppo di $f(x)$ in serie di potenze, e che per conseguenza altre vie debbono pur presentarsi per giungere alla semplice conoscenza d'un tale sviluppo. Per questo scopo riescono utilissime certe speciali successioni di numeri, delle cui proprietà vogliamo in primo luogo occuparci, avvertendo che il loro uso frequentemente conduce a serie *non convergenti*; le quali sono nonpertanto utilizzabili in quanto che la somma dei primi n termini si approssima rapidamente ad una quantità determinata, da cui si allontana poi, crescendo n, in modo da rendere manifesta la divergenza o l'indeterminazione. Per questa proprietà siffatte serie si dicono *pseudo-convergenti.*

112. La teoria delle predette successioni di numeri è fondata sulla seguente osservazione: *l'identità*

$$f(a+(h+x))=f((a+h)+x)\,, \tag{27}$$

nella quale i due membri si suppongono sviluppati secondo la formola di Taylor, sussiste quando alle potenze della variabile x *si sostituiscono numeri arbitrarii.* Applicando infatti la formola di Taylor allo sviluppo di $f(a+h+x)$ si può scrivere, in due diversi modi,

$$f((a+h)+x)=f(a+h)+\frac{x}{1}f'(a+h)+\frac{x^2}{1.2}f''(a+h)+\cdots,$$

$$f(a+(h+x))=f(a)+\frac{h+x}{1}f'(a)+\frac{(h+x)^2}{1.2}f''(a)+\cdots.$$

Ora, se nella seconda serie raccogliamo tutti i termini che contengono x^n, dobbiamo necessariamente (§ 88) ritrovare lo stesso coefficiente che x^n ha nella prima serie. Ne risulta che le due espressioni considerate restano fra loro identiche anche quando alla successione $1, x, x^2, x^3, \ldots$ si sostituisce una successione qualunque $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Così, per esempio, sviluppando $(a + h + x)^2$, si ha identicamente

$$a^2 + 2a(h + x) + (h^2 + 2hx + x^2) = (a + h)^2 + 2(a + h)x + x^2 \ ;$$

ma si può anche scrivere

$$a^2\alpha_0 + 2a(h\alpha_0 + \alpha_1) + (h^2\alpha_0 + 2h\alpha_1 + \alpha_2) = (a + h)^2\alpha_0 + 2(a + h)\alpha_1 + \alpha_2 \ ,$$

qualunque siano i numeri $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. L'espressione

$$\alpha_0 f(x) + \frac{\alpha_1 h}{1} f'(x) + \frac{\alpha_2 h^2}{1.2} f''(x) + \frac{\alpha_3 h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$

si suole rappresentare simbolicamente con $f(x + \alpha h)$. È particolarmente notevole la funzione simbolica $e^{\alpha x}$, ossia

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1 x}{1} + \frac{\alpha_2 x^2}{1.2} + \frac{\alpha_3 x^3}{1.2.3} + \ldots \ ,$$

che dicesi *funzione generatrice* della successione $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Qui è bene osservare che la regola di moltiplicazione * delle serie si traduce nell'eguaglianza simbolica

$$e^{\alpha x} . e^{\beta x} = e^{(\alpha+\beta)x} \ , \tag{28}$$

che spesso adopreremo in seguito.

113. **Numeri di Bernoulli.** Chiamansi *numeri di Bernoulli* i numeri definiti dall'eguaglianza simbolica

$$(B + 1)^p - B^p = p \ , \tag{29}$$

in cui p deve successivamente assumere i valori $1, 2, 3, \ldots$: si suppone inoltre $B_0 = 1$. Così, per $p = 2$, si trova

$$2B_1 + 1 = 2 \quad , \quad \text{d'onde si trae} \quad B_1 = \frac{1}{2} \ ;$$

poi, per $p = 3$,

$$3B_2 + 3B_1 + 1 = 3 \quad , \quad \text{d'onde si trae} \quad B_2 = \frac{1}{6} \ ;$$

* *Analisi algebrica*, p. 164.

e così via si ottiene

$$B_3=0\ ,\quad B_4=-\frac{1}{30}\ ,\quad B_5=0\ ,\quad B_6=\frac{1}{42}\ ,\quad B_7=0\ ,\quad B_8=-\frac{1}{30}\ ,$$

$$B_9=0\ ,\quad B_{10}=\frac{5}{66}\ ,\quad B_{11}=0\ ,\quad B_{12}=-\frac{691}{2730}\ ,\quad B_{13}=0\ ,\quad B_{14}=\frac{7}{6}\ ,$$

$$B_{15}=0\ ,\quad B_{16}=-\frac{3617}{510}\ ,\quad B_{17}=0\ ,\quad B_{18}=\frac{43867}{798}\ ,\quad B_{19}=0\ ,\ldots .$$

Ciò premesso, si ha identicamente

$$f(x+(B+1)h)-f(x+Bh)=\sum_{p=1}^{p=\infty}\big((B+1)^p-B^p\big)\frac{h^pf^{(p)}(x)}{p!}\ ,$$

ed il secondo membro si riduce, in virtù di (29), a

$$hf'(x)+\frac{h^2}{1}f''(x)+\frac{h^3}{1\,.\,2}f'''(x)+\cdots=hf'(x+h)\ .$$

Per conseguenza, se si tien conto dell'identità (27), si può scrivere

$$f\big((x+h)+Bh\big)-f(x+Bh)=hf'(x+h)\ . \tag{30}$$

È questa la *formola fondamentale* nella teoria dei numeri bernoulliani. Ponendo $x=-h$, poi cambiando h in x, si ottiene

$$f(Bx)-f(Bx-x)=xf'(0)\ . \tag{31}$$

114. *I numeri di Bernoulli, con indice dispari, sono nulli,* tranne $B_1=\frac{1}{2}$. Infatti per $f(x)=x^p$ la formola (31) dà

$$B^p-(B-1)^p=0\ , \tag{32}$$

purchè non sia $p=1$, nel qual caso il secondo membro è 1. Dunque per $p>1$ si ha $(B+1)^p-(B-1)^p=p$, ossia, dopo aver cambiato p in $2p$,

$$B_{2p-1}+\tfrac{1}{6}(2p-1)(2p-2)B_{2p-3}+\cdots+\tfrac{1}{6}(2p-1)(2p-2)B_3=0\ .$$

Ponendo successivamente $p=2,3,4,\ldots$, si vede che $B_3, B_5, B_7,\ldots$ son tutti nulli.

115. Per $f(x)=e^x$ la formola (21) fornisce la *funzione generatrice dei numeri bernoulliani.* Infatti, osservando la (28), si può scrivere, successivamente,

$$e^{Bx}-e^{Bx}\,.\,e^{-x}=x\ ;\quad e^{Bx}=\frac{xe^x}{e^x-1}\ ,$$

ossia

$$\frac{xe^x}{e^x-1}=1+B_1x+\frac{B_2x^2}{1.2}+\frac{B_3x^3}{1.2.3}+\dots=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\dots.$$

Per altre forme di $f(x)$ la formola (31) somministra altri interessanti sviluppi in serie. Per esempio, se $f(x)=\cos x$, si ha

$$\cos Bx-\cos Bx.\cos x-\operatorname{sen}Bx.\operatorname{sen}x=0\ .$$

Intanto si osservi che, essendo $B_3=B_5=B_7=\dots=0$, è pure

$$\operatorname{sen}Bx=B_1x-\frac{B_3x^3}{1.2.3}+\frac{B_5x^5}{1.2.3.4.5}-\dots=\frac{x}{2}\ .$$

Dunque, cambiando x in $2x$,

$$\cos 2Bx=\frac{x\operatorname{sen}2x}{1-\cos 2x}=x\cot x\ .$$

In altri termini

$$x\cot x=1-\frac{4B_2x^2}{1.2}+\frac{4^2B_4x^4}{1.2.3.4}-\frac{4^3B_6x^6}{1.2.3.4.5.6}+\dots.$$

Da questo sviluppo si deducono poi subito quelli di $x/\operatorname{sen}x$, $\operatorname{tg}x$, *ecc.*, osservando che

$$\cot\frac{x}{2}-\cot x=\frac{1}{\operatorname{sen}x}\ ,\quad \cot x-2\cot 2x=\operatorname{tg}x\ ,$$

ecc. Si ottiene così

$$x\cot x=1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{45}-\frac{2x^6}{945}-\frac{x^8}{4725}-\dots,$$

$$\frac{x}{\operatorname{sen}x}=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+\frac{31x^6}{15120}+\frac{127x^8}{604800}+\dots,$$

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\dots.$$

116. **Numeri di Eulero.** Diconsi *numeri di Eulero* i numeri definiti dalla relazione simbolica

$$(E+1)^p+(E-1)^p=0\ ,$$

dove a p si attribuiscono successivamente i valori $1,2,3,\dots$: si suppone inoltre $E_0=1$. Si ottiene così la successione

1 , 0 , —1 , 0 , 5 , 0 , —61 , 0 , 1385 , 0 , —50521 , 0 , 2702765 , ...

È conseguenza evidente della definizione che *i numeri di Eulero, con in-*

dice dispari, son tutti nulli. Intanto si ha identicamente, in virtù della definizione stessa,

$$f(x+(\mathrm{E}+1)h)+f(x+(\mathrm{E}-1)h)=2f(x)\ ;$$

quindi, ricordando l'identità (27),

$$f((x+h)+\mathrm{E}h)+f((x-h)+\mathrm{E}h)=2f(x)\ .$$

È questa la *formola fondamentale* nella teoria dei numeri euleriani. Facendo $x=0$, poi cambiando h in x, si ottiene

$$f(\mathrm{E}x+x)+f(\mathrm{E}x-x)=2f(0)\ .$$

In particolare per $f(x)=e^x$ si trova, osservando la (28),

$$e^{\mathrm{E}x}.e^x+e^{\mathrm{E}x}.e^{-x}=2\quad,\quad e^{\mathrm{E}x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}\ .$$

In altri termini la *funzione generatrice dei numeri euleriani* è

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}-\frac{61x^6}{720}+\frac{277x^8}{8064}-\dots\ .$$

Altri interessanti sviluppi si ottengono per altre forme di $f(x)$. Per esempio, per $f(x)=\cos x$ si trova $\cos \mathrm{E}x=\sec x$, cioè

$$\sec x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\frac{61x^6}{720}+\frac{277x^8}{8064}+\dots\ .$$

117. I numeri di Eulero godono di varie interessanti proprietà. Così, per esempio, se si considerano i soli numeri non nulli, escluso E_0, è facile accorgersi che son tutti della forma $6k-1$, e che quelli di posto pari terminano con 5, gli altri con 1; *ecc.* Orbene queste proprietà sono contenute nel seguente teorema di Sylvester *, che ci limitiamo ad enunciare: *se* $\alpha,\beta,\gamma,\dots$ *sono i divisori di* $\mathrm{p}-\mathrm{p}'$, *la differenza* $\mathrm{E}_{2p}-\mathrm{E}_{2p'}$ *è divisibile per quelli, fra i numeri* $2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma+1, \dots$, *che son primi.* In ciò che segue ci occuperemo esclusivamente dei numeri bernoulliani; ma prima vogliamo far notare che questi son legati agli euleriani in modo assai semplice. Infatti si ha

$$e^{(4\mathrm{B}-1)x}-e^{(4\mathrm{B}-3)x}=\frac{4xe^{4x}}{e^{4x}-1}(e^{-x}-e^{-3x})=\frac{4x}{e^x+e^{-x}}=2xe^{\mathrm{E}x}\ ,$$

---

* *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 52, p. 212. La dimostrazione, dovuta a Stern, trovasi nel *Giornale di Crelle*, t. 79, p. 67.

ed il paragone fra i coefficienti di x^p porge subito l'eguaglianza simbolica

$$E_{p-1} = \frac{(4B-1)^p - (4B-3)^p}{2p} .$$

Inversamente dall'identità

$$e^{4Bx} - e^{2Bx} = \frac{4xe^{4x}}{e^{4x}-1} - \frac{2xe^{2x}}{e^{2x}-1} = \frac{2xe^{x}}{e^{x}+e^{-x}} = xe^{(E+1)x}$$

si trae

$$B_p = \frac{p(E+1)^{p-1}}{2^p(2^p-1)} .$$

118. **Formola sommatoria di Eulero**. Per giustificare gli sviluppi precedentemente ottenuti è necessario conoscere l'errore che si commette fermandosi ad un termine qualunque, e dimostrare poi che questo errore tende a zero quando cresce indefinitamente il numero dei termini adoperati. Se scriviamo la formola fondamentale (30) prendendo soltanto $n+1$ termini nello sviluppo di ciascuna parte del primo membro, e rappresentando il *resto* con R_n, troviamo la *formola sommatoria di Eulero* *

$$hf'(x+h) = \delta f(x) + \frac{B_1 h}{1}\delta f'(x) + \frac{B_2 h^2}{1\,.\,2}\delta f''(x) + \cdots$$
$$+ \frac{B_n h^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\delta f^{(n)}(x) + R_n , \qquad (33)$$

in cui abbiamo ancora da cercare i limiti fra i quali può variare R_n. Tale determinazione è stata fatta da Malmstén **, che ha trovato, per n pari, queste due espressioni:

$$R_n = \frac{B_{n+2}}{(n+2)!}h^{n+3}f^{(n+3)}(x+\theta h) \quad , \quad R_n = \frac{\theta B_{n+2}}{(n+2)!}\,\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}}\,h^{n+2}\delta f^{(n+2)}(x) .$$

Siccome la dimostrazione di queste formole richiede la conoscenza del Calcolo integrale ***, qui ci contenteremo d'una espressione meno soddisfacente, ma che basta per le ordinarie applicazioni, e si può stabilire in modo semplicissimo. Alla funzione

$$F(z) = f(z) + \frac{x-z+Bh}{1}f'(z) + \cdots + \frac{(x-z+Bh)^n}{n!}f^{(n)}(z)$$

si applichi il teorema di Lagrangia

$$F(x+h) - F(x) = hF'(x+\theta h) . \qquad (34)$$

* *Institutiones calculi differentialis*, cap. V.

** *Giornale di Crelle*, 1847, p. 55. Un'altra forma di R_n è stata proposta da Sonin nelle *Annales de l'École normale supérieure*, 1889, p. 257.

*** Tannery: *Fonctions d'une variable*, p. 353. Darboux: *Sur les développements en série*, Giornale di Liouville, serie 3ª, t. II.

Poi si osservi che

$$F(x)=f(x)+\frac{B_1 h}{1}f'(x)+\frac{B_2 h^2}{1.2}f''(x)+\cdots+\frac{B_n h^n}{n!}f^{(n)}(x)\ ,$$

mentre, in virtù di (32), si ha

$$F(x+h)=f(x+h)+\frac{B_1 h}{1}f'(x+h)+\frac{B_2 h^2}{1.2}f''(x+h)+\cdots$$
$$+\frac{B_n h^n}{n!}f^{(n)}(x+h)-hf'(x+h)\ ,$$

e però, sostituendo in (34), e tenendo presente la formola (33),

$$R_n=-hF'(x+\theta h)\ .$$

Intanto è facile vedere che

$$F'(z)=\frac{(x-z+Bh)^n}{n!}f^{(n+1)}(z)\ .$$

Dunque

$$R_n=-\frac{(B-\theta)^n}{n!}h^{n+1}f^{(n+1)}(x+\theta h)\ .$$

Per poter impiegare questa formola è anzitutto necessario conoscere i limiti, fra i quali varia l'espressione simbolica $(B-\theta)^n$ quando θ varia da 0 ad 1; e si vedrà che bisogna anche sapere come varia B_n quando n oltrepassa ogni limite. Alla fine di questo capitolo saremo in grado di rispondere a tali questioni, e potremo allora convincerci della legittimità degli sviluppi di $xe^x/(e^x-1)$, $x/\text{sen}\,x$, $x\cot x$, $\text{tg}\,x$, *ecc.*, ed indagare con quale approssimazione si possano adoperare altri importanti sviluppi *non convergenti*, che fra breve incontreremo.

110. **Formola sommatoria di Maclaurin.** Se si cambia x in $x+h$, $x+2h$,... nella formola (30), si ottiene, sommando,

$$h\big(f'(x+h)+f'(x+2h)+\cdots+f'(x+nh)\big)=f(x+nh+Bh)-f(x+Bh)\ .$$

In particolare, per $x=0$ ed $h=1$,

$$f'(1)+f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(n)=f(n+B)-f(B)\ . \qquad (35)$$

È questa la *formola sommatoria di Maclaurin.* Si osservi che il secondo membro non è che la rappresentazione simbolica di

$$l+f(n)+\frac{B_1}{1}f'(n)+\frac{B_2}{1.2}f''(n)+\frac{B_3}{1.2.3}f'''(n)+\cdots\ ,$$

dove l è una *costante* da determinare in ciascun caso. Così la formola (35) spiega e completa certi risultati ottenuti con maggior rigore nel § 93; ma si sottintende che la formola stessa non si può adoperare con sicurezza se non dopo avervi introdotto l'espressione del *resto*.

120. **Applicazioni**: *a) Somma delle potenze simili dei primi* n *numeri interi.* Per $f(x) = x^{p+1}$ la formola (35) dà subito

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p = \frac{(n+B)^{p+1} - B^{p+1}}{p+1},$$

cioè

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + {}^1/_2 n^p + \frac{p}{12} n^{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{720} n^{p-3} + \dots + B_p n .$$

Per esempio

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = {}^1/_2 n(n+1) ,$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = {}^1/_6 n(n+1)(2n+1) ,$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = {}^1/_4 n^2(n+1)^2 ,$$

$$1^4+2^4+3^4+\dots+n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = {}^1/_{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) ,$$

$$1^5+2^5+3^5+\dots+n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} = {}^1/_{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) ,$$

$$1^6+2^6+3^6+\dots+n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} = {}^1/_{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) ,$$

$$1^7+2^7+3^7+\dots+n^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12} = {}^1/_{24} n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) ,$$

. . . .

b) Serie armonica (cfr. § 94, *b*). Per $f(x) = \log x$ la formola (35) dà

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \log(n+B) - \log B = \mathbf{C} + \log n + \log\left(1 + \frac{B}{n}\right) ,$$

cioè, in serie pseudo-convergente,

$$H_n = \mathbf{C} + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{240n^8} - \frac{1}{132n^{10}} + \dots .$$

c) Formola di Stirling (cfr. § 94, *c*). Similmente, per $f(x) = x\log x - x$, si ottiene

$$n! = \sqrt{2\pi n} \,.\, n^n e^{-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^3} - \frac{1}{1680n^7} + \frac{1}{1188n^9} - \dots} ;$$

ma non bisogna dimenticare che la serie contenuta in esponente *non converge*. Come esercizio potrà il lettore trasformare la precedente espressione in

$$n! = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{e}\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{6} + \frac{1}{120n^2} + \dots}\right)^{n+\frac{1}{2}} .$$

Trascurando i termini in $1/n$, sotto il radicale, si trova la formola proposta * da Forsyth per il calcolo di $n!$

121. **Polinomii di Bernoulli**. Si chiamano così i polinomii

$$\varphi_p(x) = \frac{(x-1+B)^{p+1} - B^{p+1}}{p+1}, \tag{36}$$

che per x intero rappresentano, come si è visto, le somme $1^p + 2^p + \ldots + (x-1)^p$. Evidentemente $\varphi_p(1) = 0$, e si vede anche, osservando (32), che $\varphi_p(0) = 0$. Qual'è il valore di $\varphi_p\left(\frac{1}{2}\right)$? Si ha

$$e^{(B-\frac{1}{2})x} = e^{Bx} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^x - 1} = \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - 1} - \frac{xe^x}{e^x - 1},$$

e se ne deduce, uguagliando fra loro i coefficienti di $x^p/p!$ nei due membri,

$$\left(B - \frac{1}{2}\right)^p = 2\frac{B_p}{2^p} - B_p = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)B_p .$$

Dunque

$$\varphi_p\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right)\frac{B_{p+1}}{p+1} . \tag{37}$$

Ne segue che, se p è pari, $\varphi_p(^1/_2) = 0$. Del resto è facile dare all'espressione di $\varphi_p(x)$ una forma che ne porti in evidenza le radici $0, 1, ^1/_2$. Se il secondo membro di (36), dopo avere scritto $(x - ^1/_2) + (B - ^1/_2)$ al posto di $x - 1 + B$, si sviluppa secondo le potenze di $x - ^1/_2$, si ottiene per $\varphi_p(x)$ l'espressione

$$\frac{(x - ^1/_2)^{p+1}}{p+1} - \frac{p}{24}(x - ^1/_2)^{p-1} + \frac{7p(p-1)(p-2)}{5760}(x - ^1/_2)^{p-3} - \ldots ,$$

in cui l'ultimo termine è

$$\frac{B_{p+1}}{(p+1)2^p} \quad \text{o} \quad -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)B_p(x - ^1/_2) ,$$

secondo che p è dispari o pari. Qui si osservi che, siccome $x - ^1/_2$ non fa che cambiar segno quando si cambia x in $1 - x$, si ha

$$\varphi_p(1-x) = (-1)^{p+1}\varphi_p(x) . \tag{38}$$

Nel caso di p dispari lo sviluppo precedente si può ordinare secondo le potenze di $x(x-1)$ osservando che $(x - ^1/_2)^2 = x(x-1) + ^1/_4$. Altret-

* Nei *Reports* della *British Association* (Rep. of the 53rd meeting, 1884, p. 407).

tanto si può fare nell'altro caso, dopo aver messo $x - {}^1/_2$ in evidenza. In tal modo si giunge, distinguendo il caso dell'indice dispari da quello dell'indice pari, alle seguenti notevoli espressioni:

$$2p\varphi_{2p-1}(x) = x^2(x-1)^2 \left\{ x^{p-2}(x-1)^{p-2} - \frac{p(p-2)}{6} x^{p-3}(x-1)^{p-3} \right.$$
$$\left. + \frac{p(p-1)(p-3)(7p-8)}{360} x^{p-4}(x-1)^{p-4} - \ldots + p(2p-1)B_{2p-2} \right\},$$
$$(4p+2)\varphi_{2p}(x) = x(x-1)(2x-1) \left\{ x^{p-1}(x-1)^{p-1} - \frac{p(p-1)}{6} x^{p-2}(x-1)^{p-2} \right.$$
$$\left. + \frac{p(p-1)(p-2)(7p-1)}{360} x^{p-3}(x-1)^{p-3} - \ldots + (4p+2)B_{2p} \right\}.$$

122. Ora vogliamo dimostrare che nell'intervallo $(0, 1)$ *i polinomii di Bernoulli, con indice pari, si annullano solo negli estremi e nel punto medio, dove cambiano segno;* e che *i polinomii con indice dispari si annullano solo negli estremi, e raggiungono il massimo valore assoluto nel punto medio dell'intervallo.* Già sappiamo che $\varphi_{2p}(x)$ si annulla per $x=0$, ${}^1/_2$, 1, e che, in virtù della (38), cambia segno quando x passa da un lato all'altro di ${}^1/_2$. Ci resta dunque soltanto da far vedere che $\varphi_{2p}(x)$ non si annulla fra 0 ed ${}^1/_2$, nè fra ${}^1/_2$ ed 1. Ammesso che ciò sia vero per $\varphi_{2p-2}(x)$, e che per conseguenza questa funzione conservi un certo segno fra 0 ed ${}^1/_2$, ed il segno opposto fra ${}^1/_2$ ed 1, si applichi la nota (§ 106) formola d'interpolazione

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f(x_1, x_2) + {}^1/_2(x - x_1)(x - x_2)f''(\xi)$$

alla funzione $f = \varphi_{2p}$, prendendo $x_1 = 0$, $x_2 = {}^1/_2$, ed osservando che

$$\varphi''_{2p}(x) = 2p(x - 1 + B)^{2p-2} = 2p(2p-1)\varphi_{2p-2}(x) .$$

Si ottiene

$$\varphi_{2p}(x) = p(2p-1)x(x - {}^1/_2)\varphi_{2p-2}(\xi) ,$$

dove ξ è compreso, come x, fra 0 ed ${}^1/_2$. Questa formola mette bene in evidenza, non solo che $\varphi_{2p}(x)$ non può annullarsi nell'intervallo $(0, 1)$, fuori degli estremi e del punto medio, ma che il suo segno è costantemente opposto a quello di $\varphi_{2p-2}(x)$. Siccome poi si vede direttamente che la funzione $\varphi_2(x)$, ossia ${}^1/_6 x(x-1)(2x-1)$, è positiva a sinistra, negativa a destra di ${}^1/_2$, è lecito affermare per qualunque valore di p la proposizione enunciata, aggiungendo che $\varphi_{2p}(x)$ ha il segno di $(-1)^{p+1}$ a sinistra di ${}^1/_2$, ed il segno opposto a destra. Inoltre $\varphi_{2p-1}(x)$, la cui derivata è

$$\varphi'_{2p-1}(x) = (x - 1 + B)^{2p-2} = (2p-1)\varphi_{2p-2}(x) ,$$

è crescente o decrescente fra 0 ed ${}^1/_2$, ed invece decrescente o crescente fra ${}^1/_2$ ed 1, secondo che p è pari o dispari. Essa conserva dunque nell'interno di $(0,1)$ il segno di $(-1)^p$, e raggiunge per $x=\frac{1}{4}$ il massimo valore assoluto.

123. Le proprietà precedenti hanno conseguenze importanti per gli stessi numeri di Bernoulli. Infatti nel § 114 abbiamo bensì dimostrato che i numeri $B_3, B_5, \ldots$ son tutti nulli, ma ci è rimasto il dubbio che vi possano essere numeri nulli anche nella successione $B_2, B_4, \ldots$. La (34) ci toglie subito tale dubbio, ed inoltre ci dice che il segno di B_{2p} è opposto a quello di $\varphi_{2p-1}(\frac{1}{2})$, ed è per conseguenza il segno di $(-1)^{p+1}$. Adunque *i numeri di Bernoulli, con indice pari, sono a segni alternati.* Altrettanto si può affermare dei numeri di Eulero. Infatti la (33) dà

$$(2p+1)\varphi_{2p}(\tfrac{1}{4})=(B-\tfrac{3}{4})^{2p+1} \quad , \quad (2p+1)\varphi_{2p}(\tfrac{3}{4})=(B-\tfrac{1}{4})^{2p+1} ,$$

d'onde segue (§ 117), tenendo presente la (35),

$$E_{2p}=2^{4p+1}\left(\varphi_{2p}(\tfrac{3}{4})-\varphi_{2p}(\tfrac{1}{4})\right)=-4^{2p+1}\varphi_{2p}(\tfrac{1}{4}) \,.$$

Dunque E_{2p} ha il segno di $(-1)^p$.

124. Segue altresì dalle cose dette nel § 122 che, se n è un numero pari, si ha

$$|\varphi_{n-1}(x)| \leqq 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{|B_n|}{n}$$

nell'intervallo $(0,1)$. In altri termini

$$|(B-\theta)^n - B^n| \leqq 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)|B_n| \,,$$

per qualunque valore di θ, compreso fra 0 ed 1. Siccome poi φ_{n-1} conserva nel detto intervallo il segno opposto a quello di B_n, si ha

$$|(B-\theta)^n - B^n| = \left(1-\frac{(B-\theta)^n}{B^n}\right)|B_n| \,,$$

e per conseguenza

$$-1+\frac{1}{2^{n-1}} \leqq \frac{(B-\theta)^n}{B^n} \leqq 1 \,.$$

Così vediamo che il valore assoluto di $(B-\theta)^n$ non supera mai quello di B_n, e però l'espressione del resto R_{n+2}, trovata nel § 118, non supera, in valore assoluto, la prima delle espressioni di R_n, date da Malmstén. Ciò prova che le due espressioni sono ugualmente vantaggiose allorchè trattasi di dimostrare che, per n infinito, il resto tende a zero; ma non si può dire altrettanto quando si cerca di limitare $|R_n|$ nelle serie *pseudo-convergenti* che fornisce il calcolo simbolico.

125. Le proprietà dei polinomii di Bernoulli, dimostrate nel § 122, trovano una facile ed interessante spiegazione nella possibilità di rappresentare i polinomii stessi mediante l'una o l'altra delle serie

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^p} \ , \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nx}{n^p} \ , \tag{39}$$

secondo che il loro indice è pari o dispari; ma prima è necessario valutare la somma della serie

$$f(x) = \operatorname{sen} x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3x + \dots , \tag{40}$$

dimostrando una formola importante, già invocata in due occasioni (§§ 13, g; 31, f). Se si osserva che

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos mx = \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\left(m - \frac{1}{2}\right)x \ ,$$

si trova facilmente che la derivata della somma dei primi n termini della serie considerata è

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \ .$$

Ne segue che la funzione

$$\mathrm{F}(x) = \operatorname{sen} x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + \dots + {}^1/_n \operatorname{sen} nx + \frac{x}{2} + \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{(2n + 1)\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \ ,$$

definita in qualunque intervallo, da cui siano esclusi i multipli di 2π, ha la derivata

$$\mathrm{F}'(x) = -\frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{(4n + 2)\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} \ ;$$

e si vede che $\lim\limits_{n=\infty} \mathrm{F}'(x) = 0$. Ciò premesso, se k è il massimo intero contenuto in $x/2\pi$, il teorema di Lagrangia (§ 65) si può applicare alla funzione $\mathrm{F}(x)$ per qualunque coppia di valori (per esempio x e $\pi + 2k\pi$) presi nell'intervallo $(2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, gli estremi esclusi. In tal modo si ottiene, chiamando ξ un numero compreso fra x e $\pi + 2k\pi$,

$$\operatorname{sen} x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + \dots + {}^1/_n \operatorname{sen} nx$$
$$= \frac{\pi - x}{2} + k\pi - \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{(2n + 1)\operatorname{sen} \frac{x}{2}} + (x - \pi - 2k\pi)\mathrm{F}'(\xi)$$

quindi, per n infinito,

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} + \left[\frac{x}{2\pi}\right]\pi . \tag{41}$$

126. Ora siamo in grado di valutare la somma $\Phi_p(x)$ della prima o della seconda serie (39), secondo che p è dispari o pari. È noto (§ 79, *b*, *c*) che la convergenza delle serie (39), per $p > 1$, è uniforme in qualunque intervallo, e che altrettanto si può dire per $p = 1$, ossia per la serie (37), purchè si escludano i valori di x, multipli di 2π. Si può dunque (§ 82) affermare che si ha

$$\Phi'_p(x) = (-1)^{p-1}\Phi_{p-1}(x) . \tag{42}$$

Già conosciamo $\Phi_1(x) = f(x)$, data dalla (41), che conviene ora scrivere $\Phi_1(x) = \pi(B - \rho)$, ponendo

$$\rho = \frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right] .$$

Siccome $\pi(B - \rho)$ è la derivata di $-\pi^2(B - \rho)^2$, si ha (§ 66, *b*)

$$\Phi_2(x) = \pi^2(B - \rho)^2 + \alpha ,$$

dove α è una costante, almeno in ciascun intervallo $(2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, gli estremi esclusi. Del resto α non dipende da k, perchè Φ_2 e $(B - \rho)^2$ non variano quando si fa variare x per un multiplo di 2π. Per conoscere il valore di α, si noti che

$$\Phi_p(\pi) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^p} = -\sum_1^\infty \frac{1}{n^p} + 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^p} = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\sum_1^\infty \frac{1}{n^p} ,$$

ossia $\Phi_p(\pi) = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\Phi_p(0)$, per qualunque valore pari di p; e si richiami l'eguaglianza $\left(B - \frac{1}{2}\right)^p = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)B_p$, dimostrata nel § 121. Per $p = 2$

$$\Phi_2(\pi) = \pi^2\left(B - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha = -\frac{\pi^2}{2}B_2 + \alpha ,$$

ed anche

$$\Phi_2(\pi) = -\frac{1}{2}\Phi_2(0) = -\frac{\pi^2}{2}B_2 - \frac{\alpha}{2} .$$

Dunque $\alpha = 0$. Ora per determinare $\Phi_3(x)$ si ha

$$\Phi'_3(x) = \Phi_2(x) = \pi^2(B - \rho)^2 :$$

e siccome $\pi^2(B - \rho)^2$ è la derivata di $-\frac{2}{3}\pi^3(B - \rho)^3$, si può scrivere

$$\Phi_3(x) = -\frac{2}{3}\pi^3(B - \rho)^3 + \beta .$$

dove la costante β si determina subito osservando che, in virtù della continuità (§ 81) di $\Phi_3(x)$, il secondo membro deve tendere a $\Phi_3(2k\pi)=0$ quando ρ tende a zero. Ne segue $\beta=0$. Per determinare $\Phi_4(x)$, si ha

$$\Phi'_4(x) = -\Phi_3(x) = \frac{2}{3}\pi^3(B-\rho)^3 ;$$

quindi

$$\Phi_4(x) = -\frac{\pi^4}{3}(B-\rho)^4 + \gamma ;$$

e per calcolare γ basta osservare che si ha

$$\Phi_4(\pi) = -\frac{\pi^4}{3}\left(B-\frac{1}{2}\right)^4 + \gamma = \frac{\pi^4}{3}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)B_4 + \gamma ,$$

ed anche

$$\Phi_4(\pi) = -\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\Phi_4(0) = \frac{\pi^4}{3}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)B_4 - \left(1-\frac{1}{2^3}\right)\gamma ,$$

sicchè $\gamma=0$. Così proseguendo si prevede che in generale $\Phi_p = \lambda_p(B-\rho)^p$. Per determinare λ_p, la (42) ci dà

$$\lambda_p = \frac{(-1)^p}{p} . 2\pi\lambda_{p-1} = \frac{(-1)^{2+3+\dots+p}}{2.3\dots p}(2\pi)^{p-1}.\pi .$$

Dunque

$$\Phi_p(x) = (-1)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} . 2^{p-1}\frac{\pi^p}{p!}(B-\rho)^p . \qquad (43)$$

Questa formola ci dice in quale relazione si trovano le somme Φ_p con i polinomii di Bernoulli. Servendosi infatti delle uguaglianze (36) e (38) si giunge, per x compreso fra 0 ed 1, alla formola

$$\varphi_{p-1}(x) = (-1)^{\left[\frac{p}{2}\right]}\frac{(p-1)!}{2^{p-1}\pi^p}\left\{\Phi_p(0) - \Phi_p(2\pi x)\right\} ,$$

che mette in piena evidenza le proprietà dimostrate nel § 122.

127. **Applicazioni:** *a)* Una delle più interessanti applicazioni della formola (43) consiste nel calcolo delle somme

$$s_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$$

per tutti i valori *pari* di p. Se in (43) si cambia p in $2p$, si ottiene

$$\frac{\cos x}{1^{2p}} + \frac{\cos 2x}{2^{2p}} + \frac{\cos 3x}{3^{2p}} + \dots = (-1)^{p-1} . 2^{2p-1}\frac{\pi^{2p}}{(2p)!}(B-\rho)^{2p} :$$

ed in particolare, per $x=0$,

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \dots = \frac{(-1)^{p-1}2^{2p-1}B_{2p}\pi^{2p}}{1.2.3\dots 2p} .$$ FVn. 250

Per esempio

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6}\ , \quad s_4 = \frac{\pi^4}{90}\ , \quad s_6 = \frac{\pi^6}{945}\ , \quad s_8 = \frac{\pi^8}{9450}\ , \ldots$$

Quando p cresce all'infinito, il primo membro tende ad 1, e perciò, ricordando la formola di Stirling (§ 94, c), si ha, per rispondere ad una questione posta in fine del § 118,

$$\lim_{p=\infty} |B_{2p}| \cdot \left(\frac{\pi e}{p}\right)^{2p+\frac{1}{2}} = 4\pi\sqrt{e}\ .$$ FVp. 260 P11·2

Finora non si è riusciti ad esprimere la somma s_p per i valori *dispari* di p. Si conoscono soltanto delle trasformazioni in serie più convergenti, che consentono un calcolo numerico rapido. Così, per esempio, si è trovato

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots = 1{,}2020569031595942854 0\ldots$$

adoperando pochi termini di un'altra serie *.

b) Similmente, se si cambia p in $2p+1$, la (43) ci dà

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1^{2p+1}} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^{2p+1}} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^{2p+1}} + \ldots = (-1)^p . 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} (B - \rho)^{2p+1}\ .$$

Ora per $x = {}^1/_2\pi$, si ha $\rho = {}^1/_4$, e nel § 123 si è visto che

$$\left(B - \frac{1}{4}\right)^{2p+1} = \frac{2p+1}{4^{2p+1}} E_{2p}\ .$$

Dunque

$$1 - \frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{5^{2p+1}} - \frac{1}{7^{2p+1}} + \ldots = \frac{(-1)^p E_{2p} \pi^{2p+1}}{4^{p+1} . 1 . 2 . 3 \ldots 2p}\ .$$

Per esempio

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}\ , \quad 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots = \frac{\pi^3}{32}\ , \ldots .$$

Intanto, mentre si conoscono le somme $1 - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} - \ldots$ per tutti i valori *dispari* di p, non si sa esprimere, nel caso di p pari, neppure la più semplice di tali somme, ossia

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots,$$

sulla quale si ha ** un lungo studio di Catalan.

* Questa è

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1} . 1^3 . 2^3 . 3^3 \ldots (n-1)^3}{1 . 2 . 3 \ldots (3n-2)} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{5}{12n(3n-1)}\right)\ .$$

Vedi una comunicazione di A. Markoff all'Accademia di Parigi (*Comptes-rendus*, 15 Décembre, 1889). Fino a $p=70$ le somme s_p sono state calcolate con *trentadue* decimali da Stieltjes (*Acta Mathematica*, 1887).

** Memorie dell'Accad. di Pietroburgo, 7ª serie, t. XXXI. Nei *Comptes-rendus* (t. LXIV, p. 1139) Bresse ha trovato $G = 0{,}915965594177219054 60357 \ldots$

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI.

Prime nozioni e derivazione.

128. Immaginiamo n variabili $x, y, z, \ldots$, *indipendenti* fra loro, cioè tali che il valore attribuito ad una non menomi in alcun modo la libertà d'imporre ad un'altra qualsiasi quel valore che più ci piace. L'insieme dei sistemi di valori che ad esse possono attribuirsi costituisce un *campo ad* n *dimensioni*, di cui è caso particolare, per $n=1$, ciò che abbiamo precedentemente chiamato intervallo. Se ad ogni sistema di valori delle n variabili, appartenente ad un certo campo, si fa, con un criterio qualunque, corrispondere un numero, l'insieme di questi numeri costituisce una *funzione* delle n variabili, definita in quel campo, e si rappresenta con $f(x, y, z, \ldots)$. Si suole anche dire che la funzione è definita per ogni *punto* del campo, intendendo per punto niente altro che un sistema di n valori particolari qualunque, attribuiti alle variabili indipendenti. Le proprietà dimostrate per le funzioni d'una variabile possono senza difficoltà estendersi alle funzioni di più variabili *; ma noi, qui, siamo obbligati a limitarci.

129. **Continuità.** Quando alle variabili indipendenti si attribuiscono gli incrementi $\delta x, \delta y, \ldots$, ne risulta per la funzione l'incremento

$$\delta f = f(x+\delta x, y+\delta y, \ldots) - f(x, y, \ldots) .$$

Si dice che la funzione è *continua* se, col far tendere simultaneamente a zero gli incrementi $\delta x, \delta y, \ldots\ldots$, senza porre tra loro alcun legame, δf tende *sempre* a zero. Fissati i valori di $n-1$ variabili, f può riguardarsi come funzione della rimanente variabile, ed è chiaro che, quando è continua rispetto al sistema delle variabili, la funzione è continua rispetto a ciascuna di esse; ma non bisogna credere che la reciproca sia vera, vale a dire che la continuità di $f(x, y, \ldots)$ consista semplicemente nella continuità rispetto ad $x, y, \ldots$, variabili separatamente. Per convincersi che *una funzione può essere discontinua, malgrado che sia continua rispetto a ciascuna delle variabili da cui dipende*, basta considerare, per esempio, una funzione delle coordinate cartesiane d'un punto, la quale

* Vedi, per esempio, il *Calcolo* di Genocchi e Peano; p. 129.

abbia il valore 1 sugli assi, e sia nulla in ogni altro punto. Una simile funzione è manifestamente discontinua nell'origine, sebbene sia continua rispetto a ciascuna variabile, quando l'altra si pone uguale a zero. Basta il semplice cambiamento del valore 1 in 0, nell'origine, perchè in questo punto la funzione perda la continuità rispetto alle variabili considerate separatamente; eppure si può dire, malgrado ciò, che la nuova funzione è infinitamente meno discontinua dell'antica.

130. **Derivate parziali**. Quando la f si considera come funzione della sola x, o della sola y, e così via, le sue derivate successive si dicono *derivate parziali* rispetto ad x, ad y,..., e si rappresentano con $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, \ldots$ Per esempio, nel caso di due variabili indipendenti, si ha, dopo aver fissati arbitrariamente x ed y,

$$f'_x(x, y) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad , \quad f'_y(x, y) = \lim_{h=0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \; ;$$

poi da f'_x si deducono analogamente f''_{xx} ed f''_{xy}, come da f'_y si deducono f''_{yx} ed f''_{yy}; *ecc.* Perchè esistano le derivate *parziali* occorre, naturalmente, che la funzione sia continua rispetto a ciascuna variabile, ma *non è necessaria la continuità* nel senso complessivo, dichiarato nel precedente paragrafo. Ora vogliamo dimostrare che, nella ricerca delle derivate parziali successive, *l'ordine in cui si eseguono le derivazioni non influisce sul risultato, purchè le funzioni che successivamente si ottengono siano continue.* Possiamo evidentemente limitarci al caso di due sole derivazioni, e far vedere che la derivata di f'_x rispetto ad y non differisce dalla derivata di f'_y rispetto ad x, tutte le volte che le funzioni fornite dalla derivazione, ossia f''_{xy} ed f''_{yx}, sono continue. Attribuiti ad x e ad y gli incrementi $\delta x = h$, $\delta y = k$, si consideri l'espressione

$$\rho = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y) \; .$$

Scritta nel seguente modo

$$\rho = \{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)\} - \{f(x, y+k) - f(x, y)\} \; ,$$

essa rappresenta l'incremento che subisce la funzione $f(x, y+k) - f(x, y)$, quando, *lasciando costanti* y e k, si passa dal valore x al valore $x+h$: e però, se si applica il teorema di Lagrangia (§ 65) alla predetta *funzione di* x, si ottiene

$$\rho = h\{f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)\} \; ,$$

per un conveniente numero θ, compreso fra 0 ed 1. Ora ci troviamo in presenza dell'incremento che subisce $f'_x(x+\theta h, y)$ quando, fissato $x+\theta h$, si attribuisce ad y l'incremento k. Ne segue, in virtù del medesimo teorema, applicato, questa volta, ad una funzione della sola y,

$$\rho = hkf''_{xy}(x + \theta h, y + \theta' k) ,$$

dove θ' è compreso fra 0 ed 1. Dunque, se la funzione f''_{xy} è continua nel punto (x, y), il suo valore in questo punto rappresenta, per h e k tendenti a zero, il limite del quoziente ρ/hk. Prendendo invece ρ sotto la forma

$$\rho = \{f(x + h, y + k) - f(x, y + k)\} - \{f(x + h, y) - f(x, y)\} ,$$

si riesce a dimostrare che il detto limite è uguale al valore di f''_{yx} nel punto che si considera, purchè * nel punto stesso questa funzione sia continua. Dunque $f''_{xy} = f''_{yx}$.

131 **Funzioni composte**. Se in $y = f(u, v, w, \ldots)$ le variabili u, $v, w, \ldots$ non sono indipendenti, ma sono invece funzioni d'una stessa variabile indipendente x, anche y è funzione della sola x, quantunque apparisca funzione di più variabili. In tal caso si dice che y è una *funzione composta*, ed $u, v, w, \ldots$ sono le funzioni componenti. Dimostriamo che, se le derivate parziali prime di f sono continue, e se esistono le derivate prime delle funzioni componenti, *la derivata della funzione è uguale alla somma delle derivate parziali, ottenute applicando la regola per la derivazione delle funzioni di funzioni.* S'intende che le derivate parziali di f rispetto alle variabili $u, v, w, \ldots$ si calcolano trattando queste come indipendenti. Possiamo, per semplicità, limitarci a dimostrare il teorema nel caso di due sole funzioni componenti. Corrispondentemente all'incremento δx siano h e k gli incrementi delle funzioni u e v. L'incremento di y è $\delta y = f(u + h, v + k) - f(u, v)$. Intanto si ha, in virtù del teorema di Lagrangia,

$$f(u + h, v) - f(u, v) = hf'_u(u + \theta h, v) ,$$

$$f(u + h, v + k) - f(u + h, v) = kf'_v(u + h, v + \theta' k) .$$

Ne segue, sommando e dividendo per δx,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} f'_u(u + \theta h, v) + \frac{\delta v}{\delta x} f'_v(u + h, v + \theta' k) ;$$

poi, passando ai limiti, e tenendo presenti le ipotesi fatte,

$$y' = u' f'_u(u, v) + v' f'_v(u, v) . \tag{1}$$

---

* Qui, veramente, si suppone troppo. Le condizioni per poter affermare l'eguaglianza $f''_{xy} = f''_{yx}$ sono state ridotte al minimo da Peano in *Mathesis*, 1890, p. 153

132. **Osservazioni:** *a)* Il teorema evidentemente sussiste anche quando una sola delle derivate parziali è continua, purchè l'altra sia continua rispetto alla corrispondente variabile.

b) La regola (1) include come casi particolari tutte le regole di derivazione precedentemente dimostrate (§ 44, *ecc.*). Se, per esempio, si ha $y = u + v\,, uv\,, u/v$, *ecc.*, si ha pure, rispettivamente,

$$f'_u = 1\ ,\ v\ ,\ \frac{1}{v}\ ,\ \dots\ ;\ f'_v = 1\ ,\ u\ ,\ -\frac{u}{v^2}\ ,\ \dots\ ,$$

e la (1) dà

$$y' = u' + v'\ ,\ vu' + uv'\ ,\ \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2}\ ,\ \dots\ .$$

c) Inoltre la regola (1) permette di ottenere direttamente le derivate di certe funzioni; per le quali si è dovuto precedentemente (§ 51, *d*) ricorrere a particolari artificii. Così, per calcolare la derivata di $y = x^x$, basta considerare successivamente come sola variabile la *x base* o la *x esponente*, derivare, e sommare i risultati, dimodochè si ha subito

$$y' = x\,.\,x^{x-1} + x^x \log x = x^x(1 + \log x)\ .$$

Più generalmente, se u e v sono funzioni di x, la derivata di $y = u^v$ è

$$y' = vu^{v-1}\,.\,u' + u^v v' \log u = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v'\log u\right)\ .$$

133. **Omogeneità.** La funzione $f(x, y, z, \dots)$ si dice *omogenea*, di grado m, se si ha identicamente

$$f(tx, ty, tz, \dots) = t^m f(x, y, z, \dots)\ . \qquad (2)$$

Tali sono, per esempio, le *forme algebriche* considerate in Algebra, ed in particolare le quadriche, le quali sono funzioni omogenee del secondo grado. Similmente sono omogenee, dei gradi $0\,, {}^1/_2\,, -1$, rispettivamente, le funzioni

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}\ ,\quad \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y}\ ,\quad \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{x+y+z}\right)^2\ ;$$

ecc. Si noti che *le derivate parziali prime d'una funzione omogenea, di grado* m, *sono funzioni omogenee di grado* m — 1. Infatti, derivando la (2) rispetto ad x, poi dividendo per t, viene appunto l'eguagiianza

$$f'_x(tx, ty, tz, \dots) = t^{m-1} f'_x(x, y, z, \dots)\ ,$$

che differisce dalla (2) solo per il cambiamento di f in f'_x, e di m in $m - 1$.

134. Le funzioni omogenee *sono caratterizzate* dalla seguente notevo-

le proprietà, segnalata da Eulero: *la somma delle derivate parziali prime d'una funzione omogenea di grado* m, *moltiplicate per le rispettive variabili, è identicamente uguale alla funzione stessa, moltiplicata per* m. Infatti, posta la (2) sotto la forma

$$\frac{1}{t^m} f(tx, ty, tz, \dots) = f(x, y, z, \dots), \tag{3}$$

se ne deduce, derivandola rispetto a t, dopo aver fissati arbitrariamente $x, y, z, \dots$,

$$\frac{1}{t^m}\left\{ x f'_x(tx, ty, \dots) + y f'_y(tx, ty, \dots) + \dots \right\} - \frac{m}{t^{m+1}} f(tx, ty, \dots) = 0 \; ; \tag{4}$$

quindi, per $t=1$,

$$x f'_x(x, y, \dots) + y f'_y(x, y, \dots) + \dots = m f(x, y, \dots) .$$

Questo è il *teorema di Eulero*. Ora osserviamo che, sostituendo ad x, y, z,..., nell'ultima eguaglianza, rispettivamente $tx, ty, tz, \dots$, e dividendo tutto per t^{m+1}, si ricostituisce l'eguaglianza (4), la quale ci dice che la derivata del primo membro di (3), rispetto a t, è uguale a zero, cioè che questo primo membro è indipendente da t, ed è perciò sempre uguale al valore che si ottiene facendo $t=1$. Si ricade così sulla (2), vale a dire sulla definizione stessa dell'omogeneità.

135. **Derivazione dei determinanti.** Come applicazione della regola (1) consideriamo il primo dei determinanti

$$y = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ,$$

supponendo che l'altro sia il reciproco di y. La derivata parziale di y rispetto ad un suo elemento è uguale al corrispondente complemento algebrico. Infatti si ha, per esempio, $y = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$, ed il solo termine che contenga u_1 è $a_1 u_1$. Inoltre a_1 è indipendente da u_1. Dunque $y'_{u_1} = a_1$. Se poi tutti gli elementi sono funzioni d'una stessa variabile x, il determinante y rappresenta una funzione di x, la cui derivata è, in virtù di (1),

$$y' = a_1 u'_1 + a_2 u'_2 + a_3 u'_3 + b_1 v'_1 + b_2 v'_2 + b_3 v'_3 + c_1 w'_1 + c_2 w'_2 + c_3 w'_3 .$$

Oltre l'ipotesi che gli elementi del determinante siano funzioni derivabili, non ne occorrono altre, giacchè le derivate parziali di y sono continue, come somme di prodotti di funzioni continue. All'ultimo risultato si può dar la forma seguente:

$$y' = \begin{vmatrix} u'_1 & v_1 & w_1 \\ u'_2 & v_2 & w_2 \\ u'_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v'_1 & w_1 \\ u_2 & v'_2 & w_2 \\ u_3 & v'_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w'_1 \\ u_2 & v_2 & w'_2 \\ u_3 & v_3 & w'_3 \end{vmatrix} . \qquad (5)$$

Questa è la regola per la derivazione d'una funzione di x, data sotto forma di determinante: essa vale, evidentemente, per determinanti di qualunque ordine.

136. **Determinanti wronskiani.** Sono particolarmente importanti, in certe applicazioni, i determinanti wronskiani, i quali hanno la prima verticale costituita da funzioni qualunque d'una variabile x, mentre le verticali seguenti sono formate dalle successive derivate delle medesime funzioni. Il calcolo delle derivate di tali determinanti si può eseguire assai rapidamente mercè la regola (5). Per esempio,

$$\text{se} \quad y = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix} , \quad \text{si ha} \quad y' = \begin{vmatrix} u & u' & u''' \\ v & v' & v''' \\ w & w' & w''' \end{vmatrix} ,$$

cosicchè, per derivare un determinante wronskiano qualunque dell'ordine n, basta sostituire alle derivate $(n-1)^{ime}$ delle funzioni le derivate n^{ime}. Se poi si rappresenta brevemente con $(u, v, w, \ldots)$ il determinante wronskiano delle n funzioni $u, v, w, \ldots$, è facile vedere che si ha

$$(tu, tv, tw, \ldots) = t^n (u, v, w, \ldots) . \qquad (6)$$

Questa proprietà, che ha tanta analogia di forma con la proprietà caratteristica delle funzioni omogenee, si dimostra subito costruendo il determinante wronskiano delle funzioni $tu, tv, tw, \ldots$, ed osservando che nella seconda verticale si possono sopprimere i termini che contengono t', perchè proporzionali agli elementi della prima verticale; poi, nella terza, è lecito sopprimere i termini che contengono t'' o t', perchè rispettivamente proporzionali agli elementi della prima o della seconda verticale; ecc. Si finisce così per trovare il determinante $(u, v, w, \ldots)$ con tutti gli elementi moltiplicati per t, cioè appunto il secondo membro di (6).

137. Ora vogliamo dimostrare la seguente importantissima proprietà dei determinanti wronskiani: *affinchè due o più funzioni siano linearmente indipendenti occorre e basta che il loro wronskiano non sia nullo.* Prima bisogna sapere che due o più funzioni si dicono *indipendenti linearmente* quando non sono tra loro vincolate con una relazione lineare ed o-

mogenea, a coefficienti costanti. In altri termini le funzioni $u, v, w, \ldots$ non sono linearmente indipendenti se esistono n costanti $a, b, c, \ldots$, non tutte nulle, tali che si abbia identicamente

$$au + bv + cw + \cdots = 0 \,. \tag{7}$$

Quando ciò accade è chiaro che, essendo anche

$$au' + bv' + cw' + \cdots = 0 \quad , \quad au'' + bv'' + cw'' + \cdots = 0 \;, \;\ldots\;,$$

è necessario, per la compatibilità fra queste uguaglianze, considerate come equazioni lineari ed omogenee nelle incognite $a, b, c, \ldots$, che si abbia $(u, v, w, \ldots) = 0$. Ciò che maggiormente importa dimostrare è che, reciprocamente, se questo determinante è identicamente nullo, tra le funzioni $u, v, w, \ldots$ intercede un vincolo (7). Prima si noti che, per $n = 1$, l'eguaglianza (7) esprime appunto l'annullarsi di $(u) = u$. Ne segue che per dimostrare * il teorema, si può, ammettendolo per meno di n, far vedere che sussiste per n funzioni. Se fosse $u = 0$, la relazione (7) sarebbe manifestamente vera per $a = 1, b = c = \ldots = 0$. Supponiamo dunque che non sia identicamente $u = 0$, ed osserviamo, ricordando il teorema (6), che

$$0 = (u, v, w, \ldots) = u^n \left(1, \frac{v}{u}, \frac{w}{u}, \ldots\right) = u^n \left(\left(\frac{v}{u}\right)', \left(\frac{w}{u}\right)', \ldots\right) ;$$

ma l'ultimo wronskiano è dell'ordine $n-1$, e però dal suo annullamento si può trarre la conclusione $b\left(\frac{v}{u}\right)' + c\left(\frac{w}{u}\right)' + \ldots = 0$, con $b, c, \ldots$ costanti non tutte nulle. Dunque $b\frac{v}{u} + c\frac{w}{u} + \ldots$ ha un valore costante, che si può chiamare $-a$, e così finalmente si vede che le n funzioni sono legate da una relazione (7).

Sviluppi in serie; minimi e massimi.

138. Le formole di Taylor e di Maclaurin si estendono assai facilmente alle funzioni di più variabili. Fissato un punto $(a, b, c, \ldots)$, ed in vicinanza di esso un altro punto $(x, y, z, \ldots)$, entrambi appartenenti a quel campo in cui è definita la funzione $f(x, y, z, \ldots)$, si ponga

$$u = a + t(x - a) \quad , \quad v = b + t(y - b) \quad , \quad w = c + t(z - c) \;, \;\ldots\;,$$

e si consideri $f(u, v, w, \ldots)$ come funzione dell'unica variabile t. La derivata prima di questa funzione $F(t)$ si calcola facilmente mercè la regola (1), dopo avere osservato che, rispetto all'unica variabile t, si ha

$$u' = x - a \quad , \quad v' = y - b \quad ; \quad w' = z - c \;; \;\ldots\;.$$

* Demoulin, *Mathesis*, 1897, p. 62.

In tal modo si ottiene

$$F'(t)=(x-a)f'_x(u,v,\ldots)+(y-b)f'_y(u,v,\ldots)+(z-c)f'_z(u,v,\ldots)+\ldots\,.$$

Una nuova derivazione dà

$$F''(t)=(x-a)^2f''_{xx}(u,v,\ldots)+(y-b)^2f''_{yy}(u,v,\ldots)+(z-c)^2f''_{zz}(u,v,\ldots)+\ldots$$

$$+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(u,v,\ldots)+2(x-a)(z-c)f''_{xz}(u,v,\ldots)+2(y-b)(z-c)f''_{yz}(u,v,\ldots)+\ldots$$

Così proseguendo si riconosce che si può scrivere simbolicamente

$$F^{(n)}(t)=\Big\{(x-a)f'_x(u,v,\ldots)+(y-b)f'_y(u,v,\ldots)+\ldots\Big\}^n,$$

convenendo di sostituire ad ogni prodotto $f'_x f'_y f'_y\ldots$, nello sviluppo della n^{ima} potenza, la derivata $f^{(n)}_{xyy\ldots}$, calcolata nel punto $(u,v,w,\ldots)$, che coincide con $(a,b,c,\ldots)$ o con $(x,y,z,\ldots)$ secondo che si fa $t=0$ o $t=1$. Ciò premesso, basta portare le espressioni di $F, F', F'',\ldots$ nella formola di Maclaurin

$$F(1)=F(0)+F'(0)+{}^1\!/_2F''(0)+{}^1\!/_6F'''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta)$$

per trovare

$$f(x,y,\ldots)=f(a,b,\ldots)+(x-a)f'_x(a,b,\ldots)+(y-b)f'_y(a,b,\ldots)+\ldots$$

$$+{}^1\!/_2\Big\{(x-a)^2f''_{xx}(a,b,\ldots)+(y-b)^2f''_{yy}(a,b,\ldots)+\ldots+2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a,b,\ldots)+\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\Big\{(x-a)^nf^{(n)}_{xx\ldots x}(\xi,\eta,\ldots)+n(x-a)^{n-1}(y-b)f^{(n)}_{xx\ldots y}(\xi,\eta,\ldots)+\ldots\Big\},$$

dove $\xi,\eta,\zeta,\ldots$ sono numeri intermedii fra $a,b,c,\ldots$ ed $x,y,z,\ldots$ rispettivamente. È questa la *formola di Taylor* per le funzioni di più variabili. Ponendovi $a,b,c,\ldots$ uguali a zero si ottiene la *formola di Maclaurin*

$$f(x,y,\ldots)=f(0,0,\ldots)+xf'_x(0,0,\ldots)+yf'_y(0,0,\ldots)+\ldots$$

$$+{}^1\!/_2\Big\{x^2f''_{xx}(0,0,\ldots)+y^2f''_{yy}(0,0,\ldots)+\ldots+2xyf''_{xy}(0,0,\ldots)+\ldots\Big\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\Big\{x^nf^{(n)}_{xx\ldots x}(\theta x,\theta y,\ldots)+nyx^{n-1}f^{(n)}_{xx\ldots y}(\theta x,\theta y,\ldots)+\ldots\Big\},$$

mercè la quale, nell'ipotesi che l'ultimo termine tenda a zero per n crescente all'infinito, la funzione $f(x,y,z,\ldots)$ si trova sviluppata in una serie di forme algebriche, dei gradi rispettivi $0,1,2,3,\ldots$.

139. Ed ora veniamo alla discussione dei *minimi* e dei *massimi*. Quando si dice che un fatto qualsiasi avviene *intorno* ad un punto $(a, b, c, \ldots)$ si vuole affermare l'esistenza d'un numero positivo h, sia pure piccolissimo, tale che il fatto stesso si verifica per *tutti* i punti $(x, y, z, \ldots)$ soddisfacenti alle condizioni

$$|x-a| \leqq h \quad , \quad |y-b| \leqq h \quad , \quad |z-c| \leqq h \; , \; \ldots \; , \tag{8}$$

eccettuato al più lo stesso $(a, b, c, \ldots)$. Ciò premesso, si dice che la funzione $f(x, y, z, \ldots)$ diventa minima (o massima) in $(a, b, c, \ldots)$ se, intorno a questo punto, nessun valore della funzione è minore (o maggiore) di $f(a, b, c, \ldots)$. In altri termini si deve poter trovare un numero positivo h, convenientemente piccolo, tale che per *tutti* i sistemi di valori di $x, y, z, \ldots$, soddisfacenti alle (8), si verifichi l'una o l'altra relazione

$$f(a, b, c, \ldots) \leqq f(x, y, z, \ldots) \quad , \quad f(a, b, c, \ldots) \geqq f(x, y, z, \ldots) \; . \tag{9}$$

Quando ciò avviene, è chiaro che la funzione precedentemente rappresentata con $F(t)$ è anch'essa minima o massima per $t = 0$. Infatti, in virtù delle (9), si ha

$$F(0) \leqq F(t) \quad \text{o} \quad F(0) \geqq F(t)$$

per tutti i valori di t, il cui valore assoluto non supera 1, giacchè per tali valori i numeri $u, v, w, \ldots$ soddisfano, come $x, y, z, \ldots$, alle condizioni (8). Così la ricerca dei minimi e dei massimi di $f(x, y, z, \ldots)$ si trova ridotta alla ricerca dei minimi e dei massimi di *tutte* le funzioni $F(t)$, corrispondenti agli infiniti punti $(x, y, z, \ldots)$ che si possono arbitrariamente assumere intorno a ciascun punto $(a, b, c, \ldots)$.

140. Se le variabili sono indipendenti, la nota condizione $F'(0) = 0$, cioè

$$(x-a)f'_x(a, b, c, \ldots) + (y-b)f'_y(a, b, c, \ldots) + (z-c)f'_z(a, b, c, \ldots) + \ldots = 0 \; ,$$

si scinde, per l'arbitrarietà di $x, y, z, \ldots$, in

$$f'_x(a, b, c, \ldots) = 0 \quad , \quad f'_y(a, b, c, \ldots) = 0 \quad , \quad f'_z(a, b, c, \ldots) = 0 \; , \; \ldots$$

Dunque *i sistemi di valori di* x, y, z, ..., *che possono rendere minima o massima la funzione* f *delle variabili indipendenti* x, y, z, ..., *si ottengono risolvendo il sistema di equazioni*

$$f'_x(x, y, z, \ldots) = 0 \quad , \quad f'_y(x, y, z, \ldots) = 0 \quad , \quad f'_z(x, y, z, \ldots) = 0 \; , \; \ldots \tag{10}$$

Per riconoscere se si ha un minimo o un massimo si consideri la forma quadratica

$$F''(0) = (x-a)^2 f''_{xx}(a, b, \ldots) + (y-b)^2 f''_{yy}(a, b, \ldots) + (z-c)^2 f''_{zz}(a, b, \ldots) + \ldots$$
$$+ 2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a, b, \ldots) + 2(x-a)(z-c)f''_{xz}(a, b, \ldots) + 2(y-b)(z-c)f''_{yz}(a, b, \ldots) + \ldots$$

delle n variabili *indipendenti* $x-a$, $y-b$, $z-c$,..., forma che ha per discriminante il determinante

$$H=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \dots \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \dots \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

calcolato per $x=a, y=b, z=c, \dots$. Questa importante funzione H di $x, y, z, \dots$ si chiama *hessiana* di f. In ciò che segue noi lasceremo in disparte il caso di $H(a, b, c, \dots)=0$, e rammenteremo * che, se $H(a, b, c, \dots) \gtrless 0$, le condizioni necessarie e sufficienti perchè la quadrica $F''(0)$ sia essenzialmente *positiva* sono

$$f''_{xx}>0 \quad , \quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} >0 \ , \dots , \ H>0 \ , \tag{11}$$

per $x=a, y=b, z=c, \dots$. Invece, affinchè $F''(0)$ si conservi *negativa* per tutti i sistemi di valori (non tutti nulli) attribuiti alle variabili $x-a$, $y-b$, $z-c$,..., è necessario e sufficiente che si abbia

$$f''_{xx}<0 \quad , \quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} >0 \ ; \dots , \ (-1)^n H>0 \ . \tag{12}$$

Dunque, se per un sistema di valori $a, b, c, \dots$ di $x, y, z, \dots$, soddisfacenti alle (10), sono anche soddisfatte le condizioni (11), la funzione f di $x, y, z, \dots$ è *minima* per $x=a, y=b, z=c, \dots$. È invece *massima* quando sono soddisfatte le (12); ma non è nè minima nè massima quando non sono soddisfatte nè le (11) nè le (12) mentre $H \gtrless 0$. Resta in dubbio il caso di $H=0$, che richiede ulteriori studii.

141. Se, per esempio, si vogliono i minimi ed i massimi d'una funzione di due variabili indipendenti $f(x, y)$, bisognerà cominciare dal cercare quei valori delle variabili, che annullano le derivate prime, per sostituirli poi nelle derivate seconde. Si potranno allora presentare le seguenti circostanze:

$$f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0 \quad (\textit{minimo se } f''_{xx}>0, \textit{ massimo se } f''_{xx}<0)$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \quad <0 \quad (\textit{nè minimo, nè massimo})$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \quad =0 \quad (\text{incertezza}).$$

Nemmeno per le funzioni di tre variabili x, y, z, indipendenti, si può avere un

* *Analisi algebrica*, p. 76.

minimo o un massimo quando $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0$; ma ciò accade anche se si ha $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$ tutte le volte che l'hessiana

$$H = f''_{xx} f''_{yy} f''_{zz} + 2 f''_{yz} f''_{zx} f''_{xy} - f''_{xx} f''^2_{yz} - f''_{yy} f''^2_{zx} - f''_{zz} f''^2_{xy}$$

non prende il segno di f''_{xx}. Nel caso opposto si ha un minimo o un massimo secondo che il segno comune è $+$ o $-$. Si noti che i minimi ed i massimi tendono a presentarsi sempre più raramente a misura che le variabili diventano più numerose.

142. Per procedere più speditamente, nel § 140, abbiamo lasciato sussistere una grave lacuna, che conviene ora colmare. Quando si è trovato che, soddisfatte le condizioni (11) o (12), si ha sempre $F''(0) > 0$ o $F''(0) < 0$, si può soltanto concludere che le infinite funzioni $F(t)$ son tutte minime o tutte massime per $t = 0$; ma da ciò non è lecito dedurre che $f(x, y, z, ...)$ è minima o massima nel punto $(a, b, c, ...)$. Occorrerebbe infatti invocare la proposizione reciproca di quella enunciata in fine del § 139; e tale reciproca, come fra breve si vedrà, è ben lungi dall'esser vera in generale. Prendiamo dunque ad esaminare direttamente l'incremento

$$f(x, y, z, \ldots) - f(a, b, c, \ldots) = {}^1/_2 F''(\theta) ,$$

ed osserviamo che $F''(\theta)$ si può considerare come una quadrica, i cui coefficienti, *variabili* con $x, y, z, ...$, tendono (per la supposta continuità delle derivate seconde) agli analoghi coefficienti di $F''(0)$, quando, in qualsiasi modo, il punto $(x, y, z, ...)$ tende a confondersi con $(a, b, c, \ldots)$, nella quale ipotesi altrettanto deve fare il punto intermedio $(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, in cui s'intendono calcolati i coefficienti di $F''(\theta)$. Ciò, evidentemente, non ci autorizza ad affermare che, se $F''(0)$ conserva un certo segno intorno al punto $(a, b, c, \ldots)$, $F''(\theta)$ tende ad assumere quel segno. Infatti i valori dell'una e dell'altra quadrica sono, intorno al detto punto, infinitamente prossimi allo zero, e però, pur differendo tra loro infinitamente poco, non è escluso che possano aver segni opposti. Ora si tratta appunto di far vedere che ciò non accade, per la qual cosa conviene dividere le due quadriche per

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + \ldots ,$$

e considerare i quozienti come due forme quadratiche delle variabili

$$\alpha = \frac{x - a}{r} \quad , \quad \beta = \frac{y - b}{r} \quad , \quad \gamma = \frac{z - c}{r} \; , \; \ldots ,$$

vincolate dalla relazione $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots = 1$. Sia infatti h il più piccolo, in valore assoluto, tra i coefficienti d'una forma canonica * di $F''(0)/r^2$,

* *Analisi algebrica*, p. 70.

e si osservi che, essendo tali coefficienti tutti positivi o tutti negativi, secondo che la quadrica è *essenzialmente positiva* o *essenzialmente negativa*, si ha $|F''(0)| > |k| . r^2$, sicchè il rapporto di $F''(0)$ ad r^2 *non tende a zero*. Invece tende a zero il rapporto ad r^2 di $F''(\theta) - F''(0)$, perchè è una forma quadratica delle variabili $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, tutte comprese fra -1 e $+1$, ed i suoi coefficienti tendono a zero. Dunque

$$\lim \frac{F''(\theta)}{F''(0)} = 1 + \lim \left(\frac{F''(\theta) - F''(0)}{r^2} \Big/ \frac{F''(0)}{r^2} \right) = 1 \, .$$

Ne segue che si può sempre trovare un numero positivo h, tale che, per tutti i valori di $x, y, z, \ldots$ soddisfacenti alle (8), il precedente rapporto sia, per esempio, maggiore di $^1/_2$, e per conseguenza si abbia

$$F''(\theta) > {}^1/_2 kr^2 \qquad \text{o} \qquad F''(\theta) < {}^1/_2 kr^2 \, ,$$

secondo che k è positivo o negativo, ossia $f(x, y, z, \ldots) > f(a, b, c, \ldots)$ nel primo caso, ed $f(x, y, z, \ldots) < f(a, b, c, \ldots)$ nel secondo *.

143. Le considerazioni precedenti sono tanto più necessarie in quanto che, nel caso generale, può benissimo accadere che *tutte* le funzioni $F(t)$ siano minime o massime per $t = 0$, senza che sia minima o massima la funzione $f(x, y, z, \ldots)$ nel punto $(a, b, c, \ldots)$. Per intender bene le ragioni d'un tal fatto conviene limitarsi a considerare una funzione di due variabili $(x = a + r\cos\theta \, , y = b + r\,\text{sen}\,\theta)$, i cui valori intorno al punto (a, b) dipendono, per conseguenza, da r e da θ. Se, per un dato valore di θ, la funzione ha un minimo in (a, b), ciò vuol dire che $f(a, b) \leqq f(x, y)$ per quel valore di θ che si considera, e per tutti i valori di r compresi in un certo intervallo $(-\rho, \rho)$. Questo numero positivo ρ è ben determinato per ciascun valore di θ se si conviene di attribuirgli il più gran valore possibile. Al variare di θ fra 0 e π (escluso un estremo), varia, in generale, anche ρ, e la corrispondente coppia di punti $(a \pm \rho\cos\theta \, , b \pm \rho\,\text{sen}\,\theta)$ descrive una curva chiusa, tale che nell'interno di essa si ha sempre $f(a, b) \leqq f(x, y)$, mentre all'esterno, in punti vicini al contorno quanto si vuole, $f(x, y)$ diventa inferiore ad $f(a, b)$. Ciò premesso, se la funzione ρ, come accade ordinariamente, raggiunge un valor minimo $h\sqrt{2}$, si ha certamente $f(a, b) \leqq f(x, y)$ tutte le volte che $|x - a| \leqq h, |y - b| \leqq h$. Allora la funzione $f(x, y)$ ha un minimo nel punto (a, b). Ciò non accade, invece, se i valori di ρ hanno semplicemente un limite inferiore *nullo*, perchè, dato h arbitrariamente piccolo, basterà prendere θ sufficientemente vicino a quel valore, intorno a cui (§ 18) il limite inferiore di ρ è sempre 0, per poter rendere $\rho < h\sqrt{2}$; ed allora, prendendo $r > \rho$, si do-

* Per maggiori dettagli vedi il *Calcolo* di Genocchi e Peano; pp. 186, 197.

vranno trovare valori di x e di y, tali che, pur essendo $|x-a| \leqq h$, $|y-b| \leqq h$, si ha $f(x,y) < f(a,b)$.

144. Ora supponiamo che fra le n variabili esistano relazioni

$$\varphi(x,y,z,\dots)=0 \quad , \quad \psi(x,y,z,\dots)=0 \;, \;\dots \;, \tag{13}$$

in numero $m<n$, e siano tali che m variabili $u,v,w,\dots$ si possano * considerare come funzioni delle rimanenti $n-m$: queste indichiamole più specialmente con $x,y,z,\dots$, ed assumiamole come variabili indipendenti. I valori delle variabili, che rendono minima o massima la funzione data

$$f(x,y,z,\dots\;,\;u,v,w,\dots)\;,$$

debbono annullare (§ 140) le derivate parziali prime, prese rispetto alle variabili indipendenti. In particolare, applicando la regola per la derivazione delle funzioni composte (§ 131), si deve avere

$$f'_x+u'_x f'_u+v'_x f'_v+\cdots=0\;, \tag{14}$$

e le derivate $u'_x, v'_x, w'_x \dots$ si calcolano derivando rispetto ad x le relazioni (13), si deducono cioè, mediante la regola di Cramer, dal sistema

$$\begin{cases} \varphi'_x+u'_x\varphi'_u+v'_x\varphi'_v+\cdots=0\;, \\ \psi'_x+u'_x\psi'_u+v'_x\psi'_v+\cdots=0\;, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\;; \end{cases} \tag{15}$$

purchè si abbia

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w\cdots \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w\cdots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \gtrless 0\;; \tag{16}$$

ma, invece di portare i valori di $u'_x, v'_x, w'_x,\dots$, ricavati dalle (15), nell'equazione (14), possiamo, aggregando questa al sistema (15), immediatamente scrivere la condizione di compatibilità

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_u & f'_v\cdots \\ \varphi'_x & \varphi'_u & \varphi'_v\cdots \\ \psi'_x & \psi'_u & \psi'_v\cdots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0\;.$$

Basta porre successivamente nella prima verticale le derivate parziali prime di $f,\varphi,\psi,\dots$ rispetto alle $n-m$ variabili, che sono state scelte come indipendenti, per ottenere $n-m$ equazioni, sufficienti, insieme

* Delle condizioni di questa possibilità, fra le quali è la relazione (16), e dell'esistenza delle derivate prime di $u,v,w,\dots$, si discorrerà nella seconda parte del corso.

alle (13), per la determinazione di $x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$. Adunque *i sistemi di valori di* x, y, z, ..., *che, soddisfacendo alle* (13), *rendono minima o massima la funzione* f(x, y, z, ...), *sono fra quelli che annullano tutti i determinanti maggiori della matrice*

$$\left\| \begin{array}{cccc} f'_x & f'_y & f'_z & \ldots \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \ldots \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\| . \tag{17}$$

145. Per dare ai calcoli maggior simmetria si suole procedere nel seguente modo. Dal simultaneo annullamento dei maggiori determinanti della matrice (17) si deduce * che una stessa relazione lineare lega gli elementi di ciascuna verticale. La relazione di cui si tratta involge necessariamente gli elementi della prima orizzontale, perchè, se fossero linearmente vincolate le sole $\varphi', \psi', \ldots$, sarebbe nullo ogni determinante maggiore della matrice ottenuta sopprimendo in (17) la prima orizzontale; ma ciò è contrario all'ipotesi (16). Quindi si può, per convenienti valori di $\lambda, \mu, \ldots$, scrivere

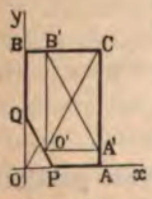
$$f'_x = \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x + \cdots, \quad f'_y = \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y + \cdots, \quad f'_z = \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z + \cdots, \ \ldots$$

In altri termini, per cercare i minimi ed i massimi della funzione f, quando le variabili sono legate dalle relazioni (13), *si porranno uguali a zero, non le derivate prime di* f, *sì bene quella della funzione*

$$f(x, y, z, \ldots) - \lambda\varphi(x, y, z, \ldots) - \mu\psi(x, y, z, \ldots) - \ldots,$$

e si otterranno così n equazioni, riducentisi a sole $n - m$ per eliminazione di $\lambda, \mu, \ldots$. Aggregando ad esse le (13) si costituirà un sistema di n equazioni, che servirà a determinare le n variabili.

146. **Esercizii:** *a)* Prendiamo una lastra rettangolare OABC, rotta ad un angolo O nel modo indicato sulla figura, e proponiamoci di *ricavarne un'altra lastra rettangolare, la cui area sia massima*. È naturale conservare nella nuova lastra i due lati rimasti intatti, AC e BC, scegliendo convenientemente il nuovo vertice O′, opposto a C, sul lato PQ, creato dalla rottura. Se p e q sono le lunghezze dei segmenti OP ed OQ, le coordinate del vertice incognito O′, rispetto agli assi OA ed OB, soddisfano all'equazione $qx + py = pq$; e la funzione da rendere massima è l'area $(a - x)(b - y)$ del nuovo rettangolo, sicchè debbono le derivate parziali prime di questa funzione, ossia $y - b$ ed $x - a$, essere proporzionali a q ed a p. Dunque, se alla retta che congiunge O col punto medio di PQ si conduce da C la parallela, questa incontra PQ nel punto cercato



* *Analisi algebrica*, p. 47.

O'. Quando O' cade fuori del segmento PQ, si vede facilmente che bisogna sostituirgli il più vicino dei due estremi. Più generalmente, qualunque sia la forma della rottura PQ, si può dimostrare che una diagonale del nuovo rettangolo deve risultar parallela alla retta che tocca in O' il contorno PQ.

b) Mostriamo come si possa dare all'equazione generale d'una conica

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0 \qquad (18)$$

una forma più comoda, mettendo in evidenza le coordinate x_0 ed y_0 del centro, le quali, come si sa, son date dalle equazioni

$$ax_0 + hy_0 + g = 0 \quad , \quad hx_0 + by_0 + f = 0 \qquad (19)$$

ossia $\Phi'_x(x_0, y_0) = 0$, $\Phi'_y(x_0, y_0) = 0$, se si conviene di rappresentare con $\Phi(x, y)$ il primo membro di (18). Prima si noti che la formola di Taylor permette di dar subito a questa funzione la forma

$$\Phi(x_0, y_0) + a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + 2h(x - x_0)(y - y_0) \ .$$

Poi, per calcolare $\Phi(x_0, y_0)$, basta osservare che si ha identicamente

$$\Phi(x, y) = (ax + hy + g)x + (hx + by + f)y + (gx + fy + c) \ :$$

ciò equivale ad applicare il teorema di Eulero (§ 134) al primo membro di (18), reso omogeneo. In particolare $\Phi(x_0, y_0) = gx_0 + fy_0 + c$, sicchè, eliminando x_0 ed y_0 fra questa equazione e le (19), si ottiene

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - \Phi(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

d'onde si trae $\Phi(x_0, y_0) = D/(ab - h^2)$, rappresentando con D il discriminante $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$.

c) Per *calcolare le lunghezze degli assi della conica* (18), conviene cominciare dal porre l'equazione sotto la forma

$$a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + 2h(x - x_0)(y - y_0) + \frac{D}{ab - h^2} = 0 \ ,$$

trovata nel precedente esercizio. Ora si tratta di trovare il minimo ed il massimo valore di $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, sapendo che le variabili x ed y sono legate dalla precedente equazione. Bisogna dunque, secondo le indicazioni del § 145, porre

$$x - x_0 = \lambda \{ a(x - x_0) + h(y - y_0) \} \quad , \quad y - y_0 = \lambda \{ h(x - x_0) + b(y - y_0) \} \ .$$

Intanto, se si moltiplica la prima eguaglianza per $x - x_0$, la seconda per $y - y_0$, si ottiene, sommando, $(ab - h^2)r^2 = -\lambda D$. D'altra parte si può determinare λ eliminando $x - x_0$ ed $y - y_0$ fra le medesime uguaglianze:

$$0 = \begin{vmatrix} a\lambda - 1 & h\lambda \\ h\lambda & b\lambda - 1 \end{vmatrix} = (ab - h^2)\lambda^2 - (a + b)\lambda + 1 \ .$$

Ne segue che i quadrati dei semi-assi sono le radici della seguente equazione in r^2:

$$r^4+\frac{(a+b)D}{(ab-h^2)^2}r^2+\frac{D^2}{(ab-h^2)^3}=0 .$$

d) Ora proponiamoci di *calcolare gli assi della sezione fatta in un ellissoide da un dato piano diametrale*. Siano a, b, c le lunghezze dei semi-assi, ed α, β, γ i coseni degli angoli che le sezioni principali fanno col piano dato. Prendendo come assi coordinati gli assi dell'ellissoide, le equazioni di questa superficie e del piano dato sono rispettivamente

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad ; \quad \alpha x+\beta y+\gamma z=0 ,$$

e si tratta di trovare il minimo ed il massimo valore di $r^2=x^2+y^2+z^2$. Per quanto si è detto nel § 145 si può subito porre

$$x=\frac{\lambda x}{a^2}+\mu\alpha \quad ; \quad y=\frac{\lambda y}{b^2}+\mu\beta \quad , \quad z=\frac{\lambda z}{c^2}+\mu\gamma .$$

Sommando queste uguaglianze, dopo averle rispettivamente moltiplicate per x, y, z, si ottiene $r^2=\lambda$; quindi, sostituendo nell'equazione del piano i valori

$$x=\frac{\mu\alpha a^2}{a^2-r^2} \quad , \quad y=\frac{\mu\beta b^2}{b^2-r^2} \quad ; \quad z=\frac{\mu\gamma c^2}{c^2-r^2} ,$$

forniti dalle uguaglianze stesse, ed osservando che μ non può essere nullo, si perviene all'equazione

$$\frac{a^2\alpha^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2\beta^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2\gamma^2}{r^2-c^2}=0 ;$$

del secondo grado in r^2, le cui radici sono i quadrati dei semi-assi cercati. Se dal centro, perpendicolarmente al piano di ciascuna sezione, si erigono segmenti uguali ai semi-assi della sezione stessa, gli estremi di tali segmenti stanno sopra una superficie del quarto ordine, importantissima nello studio dell'ottica *. Poichè le coordinate degli estremi dei segmenti anzidetti sono $x=\pm\alpha r$, $y=\pm\beta r$, $z=\pm\gamma r$, basta sostituire nell'ultima equazione i valori di α, β, γ per ottenere l'equazione della superficie

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0 ,$$

che in forma intera si riduce a

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-(b^2+c^2)a^2x^2-(c^2+a^2)b^2y^2-(a^2+b^2)c^2z^2+a^2b^2c^2=0.$$

È questa la *superficie delle onde*. Dall'esame di talune sue proprietà fu condotto Hamilton a prevedere il singolare fenomeno della *rifrazione conica*, confermato

* Vedi, per esempio, la « *Théorie mathématique de la lumière* » di Poincaré; p. 296.

poi dall'esperienza. In simili scoperte teoriche * di fatti naturali, sfuggiti per secoli all'osservazione diretta, sta la prova migliore dell'alta importanza delle matematiche.

e) Il calcolo della *minima distanza di due rette* conduce a cercare, più generalmente, il minimo valore di

$$r^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 ,$$

sapendo che le $2n$ variabili soddisfano alle $2n - 2$ condizioni

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n} , \quad \frac{y_1 - b_1}{\beta_1} = \frac{y_2 - b_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{y_n - b_n}{\beta_n} ,$$

dimodochè r^2 è, in realtà, funzione di due sole variabili indipendenti. Assumiamo come tali i valori u e v delle due serie di rapporti, ed osserviamo che, sostituendo $x_i = \alpha_i u + a_i$, $y_i = \beta_i v + b_i$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, nell'espressione di r^2, questa diventa

$$r^2 = au^2 + bv^2 + c + 2fv + 2gu + 2huv , \qquad (20)$$

dove si è posto

$$a = \sum_1^n \alpha_i^2 , \quad b = \sum_1^n \beta_i^2 , \quad h = -\sum_1^n \alpha_i \beta_i ,$$

$$-f = \sum_1^n (a_i - b_i)\beta_i , \quad g = \sum_1^n (a_i - b_i)\alpha_i , \quad c = \sum_1^n (a_i - b_i)^2 .$$

Qui si noti che i determinanti

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} ,$$

rappresentano ** i quadrati delle matrici

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_n \end{Vmatrix} , \quad \begin{Vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \ldots a_n - b_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \ \ldots \ \beta_n \end{Vmatrix} .$$

Perchè r^2 diventi minimo o massimo sono (§ 140) necessarie le condizioni

$$au + hv + g = 0 , \quad hu + bv + f = 0 , \qquad (21)$$

verificate le quali l'espressione (20) si riduce a

$$r^2 = gu + fv + c , \qquad (22)$$

* Delle quali si hanno altri bellissimi esempii in Fisica ed in Astronomia. Vedi una comunicazione di G. Cesàro all'Accademia del Belgio; *Bulletins*, 1891, p. 503.

** *Analisi algebrica*, p. 23.

in virtù del teorema di Eulero. Il determinante hessiano ci r^2 è $ab - h^2$, e siccome tanto a quanto $ab - h^2$ sono somme di quadrati, si può asserire (§ 141) che si ha effettivamente un minimo. Intanto da (21) e (22) si deduce, eliminando u e v,

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - r^2 \end{vmatrix} = 0 \, , \quad \text{cioè} \quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} r^2 \, .$$

Dunque il minimo cercato è

$$r^2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \dots & a_n - b_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_n \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_n \end{vmatrix}^2} \, .$$

f) Altri calcoli di minime distanze (punto e piano, o punto e retta nel piano e nello spazio) conducono a *cercare il minimo valore della somma dei quadrati di* n *variabili, soddisfacenti ad* m $<$ n *equazioni lineari.* Siano

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = k_1 \, , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = k_2 \, , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = k_m \, , \end{cases} \tag{23}$$

le equazioni, nessuna delle quali sia conseguenza delle altre: ciò esige che i determinanti maggiori della matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} \end{vmatrix}$$

non siano tutti nulli, e per conseguenza che sia diverso da zero il quadrato

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \dots c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \dots c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} \dots c_{mm} \end{vmatrix}$$

della matrice stessa. Ciò premesso, per trovare i minimi ed i massimi della funzione $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, si è condotti a porre

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1} \, , \\ x_2 = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_m a_{m2} \, , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn} \, . \end{cases} \tag{24}$$

Sommando queste equazioni, dopo averle moltiplicate per $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si ottiene

$$r^2 = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_m k_m \,, \tag{25}$$

e tutto si riduce a calcolare i coefficienti λ. Ora, moltiplicando le (24) per a_{i1}, $a_{i2}, \ldots, a_{in}$, poi sommando, si trova

$$k_i = \lambda_1 c_{i1} + \lambda_2 c_{i2} + \cdots + \lambda_m c_{im} \,.$$

Dunque i coefficienti λ sono determinati dal sistema

$$\begin{cases} k_1 = \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{12} + \cdots + \lambda_m c_{1m} \,, \\ k_2 = \lambda_1 c_{21} + \lambda_2 c_{22} + \cdots + \lambda_m c_{2m} \,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_m = \lambda_1 c_{m1} + \lambda_2 c_{m2} + \cdots + \lambda_m c_{mm} \,, \end{cases}$$

che ammette una soluzione sola. Del resto è inutile risolvere questo sistema, giacchè basta esprimere la compatibilità con la relazione (25) per ottener subito l'equazione

$$0 = \begin{vmatrix} r^2 & k_1 & k_2 & \ldots k_m \\ k_1 & c_{11} & c_{12} & \ldots c_{1m} \\ k_2 & c_{21} & c_{22} & \ldots c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_m & c_{m1} & c_{m2} & \ldots c_{mm} \end{vmatrix} \,,$$

dalla quale si ricava il minimo valore cercato:

$$r^2 = -\frac{1}{C} \begin{vmatrix} 0 & k_1 & k_2 & \ldots k_m \\ k_1 & c_{11} & c_{12} & \ldots c_{1m} \\ k_2 & c_{21} & c_{22} & \ldots c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_m & c_{m1} & c_{m2} & \ldots c_{mm} \end{vmatrix} \,.$$

g) Nelle applicazioni si è spesso condotti, per determinare un certo numero di quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a stabilire equazioni lineari, nelle quali i coefficienti ed i termini noti vengono forniti dall'osservazione diretta. Basterebbero n equazioni per la determinazione delle incognite se, per l'inevitabile imperfezione delle misure, non ne risultassero valori necessariamente inesatti delle x. Spinti ad eseguire nuove misure, si finisce per costituire un sistema (23) con un numero m di equazioni, di gran lunga superiore a quello delle incognite, ed il problema che allora ci si presenta è il seguente: *come far concorrere tutte le equazioni ottenute alla determinazione la più probabilmente esatta dei valori delle incognite?* E la *teoria delle probabilità*, uno dei più interessanti rami della Matematica, che dà la risposta a simile questione, insegnando che, nell'impossibilità di *render nulli tutti gli errori* (vale a dire di trovare valori delle x che annullino le differenze fra i primi ed i secondi membri di tutte le m equazioni), bisogna ***render minima la somma dei loro quadrati.*** Da questa indicazione derivano, per la determinazione delle x, alcuni procedimenti di calcolo, che costituiscono quello che si suol chiamare il ***metodo dei minimi quadrati.*** In sostanza tutto si riduce a render minima la funzione di n variabili indipendenti

$$\sum_1^m (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - k_i)^2 \ ;$$

e però, derivando successivamente rispetto ad $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bisogna che sia

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \cdots + c_{n1}x_n = k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \cdots + k_n a_{n1} \ , \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{n2}x_n = k_1 a_{12} + k_2 a_{22} + \cdots + k_n a_{n2} \ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n = k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n} + \cdots + k_n a_{nn} \ . \end{cases}$$

È questo il sistema che porge per le x i valori più accettabili. Per meglio spiegarsi tutto ciò è bene limitarsi al caso d'una sola quantità incognita x, per determinare la quale siano state prese successivamente n misure $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pochissimo differenti tra loro. Qui bisogna render minima la somma

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2 \ ,$$

per la qual cosa basta prendere

$$x - a_1 + x - a_2 + \cdots + x - a_n = 0 \quad . \quad \text{cioè} \quad x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \ :$$

è proprio quello che si suol fare comunemente *.

* Quetelet « *Théorie des probabilités* » p. 47.

CALCOLO DIFFERENZIALE

LA DIFFERENZIAZIONE.

Funzioni d'una variabile.

117. **Infinitamente piccoli ed infinitamente grandi.** Come per *infinitamente grande* o *infinito* si vuole intendere un numero che tende, in valore assoluto, ad oltrepassare qualunque limite, così ogni numero variabile, che ha per limite zero, si chiama *infinitamente piccolo* o *infinitesimo* *. Il concetto d'infinitesimo, come quello d'infinito (*cfr.* § 13, *b*), implica dunque, innanzi tutto, l'ipotesi della *variabilità*. Così, per esempio, è infinitesimo il volume occupato da un corpo solido, che si dissolve; ma non è lecito chiamare infinitesimo, nell'Universo, il volume di un corpuscolo invariabile. Ed infatti, se si tentasse il paragone d'un tal volume con quello dell'Universo intero, supposto infinito, si sarebbe obbligati ad assumere l'unità di misura crescente oltre ogni limite; ed a ciascuno degli stati di questa unità si vedrebbe allora corrispondere un numero, sempre più piccolo, atto a misurare il volume che si considera. Così non questo volume, sì bene il numero che serve a misurarlo, risulterebbe variabile ed infinitesimo; ma ciò non accade, perchè i numeri sottoposti ad un calcolo sono da intendersi tutti riferiti ad una medesima unità di misura. Per grande che questa sia, il volume considerato resterà misurato da un numero, estremamente piccolo forse, ma invariabile. Per la chiara intelligenza del Calcolo infinitesimale è indispensabile non per-

---

* Cauchy « *Analyse algébrique* » Paris, 1821. Ben quaranta pagine del *Bulletin de la Classe des sciences de l'Académie de Belgique* (1901, p. 549) sono consacrate a combattere questa « *pessima* » definizione, con argomenti che valgono, in parte, soltanto a mostrare l'attuale insufficienza di talune definizioni (probabilità, *ecc.*), le quali però richiedono appunto, per essere completate, che si respinga ogni malsana concezione dell'infinito e dell'infinitesimo.

dere mai di vista che gli infinitesimi sono, come gli infiniti, essenzialmente variabili, sono cioè da considerare (così avverte lo stesso Newton) come «quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite» in valore assoluto.

148. Due infinitesimi si dicono dello stesso ordine quando il loro rapporto tende ad un limite finito, diverso da zero. Se invece il rapporto d'un infinitesimo β ad un infinitesimo α tende a zero (nel qual caso β è uguale al prodotto di α per un altro infinitesimo), si dice che β è di *ordine superiore* ad α. Nel caso opposto, quando cioè il detto rapporto cresce indefinitamente in valore assoluto, β è di *ordine inferiore* ad α. Non è sempre possibile decidere se due infinitesimi sono, o pur no, del medesimo ordine, perchè non sempre il loro rapporto tende ad un limite. Così, per esempio, $\beta = \alpha \operatorname{sen}\frac{1}{\alpha}$ è infinitesimo insieme ad α, ma non si sa dire se tende a zero come α, o più rapidamente di α. Nondimeno, tutte le volte che il rapporto di β ad α, preso in valore assoluto, oscilla fra due limiti positivi, si può ben dire che β è dell'ordine di α. Quando si hanno più infinitesimi da paragonare fra loro, si usa sceglierne arbitrariamente uno, α, che si chiama l'*infinitesimo principale*, e considerare i rapporti degli altri ad α ed alle sue potenze. Si chiamano allora infinitesimi dell'ordine $n(>0)$ tutti quelli che hanno l'ordine di α^n. Per esempio $\log(1+\alpha)$, $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, *ecc.*, sono infinitesimi del *primo* ordine fintantochè α è l'infinitesimo principale. Similmente $1-\cos\alpha$ è del *secondo* ordine, $\alpha-\operatorname{sen}\alpha$ del *terzo*, $\alpha\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\alpha)-\operatorname{sen}^2\alpha$ del *sesto*, $\operatorname{tg}(\operatorname{sen}\alpha)-\operatorname{sen}(\operatorname{tg}\alpha)$ del *settimo*; *ecc.* * Del resto si noti che non sempre si può assegnare l'ordine d'un infinitesimo. Così, per esempio, se α è un infinitesimo, anche e^{-1/α^2} ed $1/\log\alpha$ sono infinitesimi; ma, mentre (§ 71, *a*) il rapporto del primo ad α^n tende a zero qualunque sia n, il rapporto analogo, per l'altro, tende all'infinito, sicchè non si sa dire quanto sia grande l'ordine del primo, e quanto, invece, sia piccolo l'ordine del secondo. Gli infinitesimi

$$\ldots, \frac{1}{\log\log\frac{1}{\alpha^2}}, \frac{1}{\log\frac{1}{\alpha^2}}, \ldots, \sqrt{\alpha}, \operatorname{sen}\alpha, 1-\cos\alpha, \alpha-\operatorname{sen}\alpha, \ldots, e^{-1/\alpha^2}, e^{-e^{1/\alpha^2}}, \ldots$$

si trovano ordinati in modo che ciascuno è infinitesimo rispetto a tutti quelli che lo precedono, in modo cioè che, procedendo da destra verso sinistra, l'ordine, partendo da valori grandi quanto si vuole, tende a zero decrescendo sempre. In modo analogo si classificano gli infinitamente grandi.

---

* Vedi, in proposito, due esercizii in *Mathesis* (1898, p. 31; 1902, p. 145).

149. Non si creda, tuttavia, che qualunque numero, infinitamente piccolo o infinitamente grande, debba necessariamente trovare il suo posto in simili scale di paragone. Così non si può dire quale sia l'ordine n di $\beta = \alpha / \log \alpha$. Infatti da una parte è chiaro che n dovrebbe superare 1, e dall'altra ciò non può accadere, perchè il rapporto di β ad α^n cresce indefinitamente in valore assoluto per qualunque $n > 1$. In un certo senso (§ 1) si potrebbe dire che, nella scala di paragone, costituita dalle potenze di α, l'infinitesimo $\alpha/\log \alpha$ sta *alla destra* di α, o che il suo ordine è $1 + 0$. Similmente si cercherebbe invano il posto da assegnare all'infinitesimo β, legato ad α dalla relazione $\beta = \alpha^2 \log \frac{\alpha}{\beta}$. Infatti, posto $\alpha = \beta t$, si ottiene $\alpha = 1/t \log t$, $\beta = 1/t^2 \log t$, e si riconosce che t deve crescere all'infinito affinchè α e β tendano a zero; quindi, osservando che $\beta/\alpha^n = t^{n-2}(\log t)^{n-1}$, si vede che questo rapporto cresce indefinitamente per $n \geqq 2$, e tende a zero per $n < 2$. Dunque β sta, per così dire, *alla sinistra* di α^2, cioè tende a zero meno rapidamente di α^2, ma più rapidamente di qualunque α^n, per $n < 2$: ciò si potrebbe esprimere dicendo che il suo ordine è $2 - 0$. Insomma, se esistono numeri n' ed n'', tali che

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^{n'}} = 0 \quad , \quad \lim \frac{\beta}{\alpha^{n''}} = \pm \infty ,$$

siccome ad ogni numero n' si può, in queste uguaglianze, sostituire un numero minore, e ad ogni n'' un numero maggiore, è chiaro che i numeri n' costituiscono un insieme, che ammette (§ 4) il limite superiore μ, come l'insieme dei numeri n'' ammette il limite inferiore $\lambda \geqq \mu$. Ora, se λ e μ hanno un unico valore n, si può ben dire che n è l'ordine di β, tutte le volte che n non appartiene nè all'uno, nè all'altro insieme, ancorchè non esista il limite di β/α^n. Ma può accadere che n sia il massimo fra i numeri n', o il minimo fra i numeri n''. Allora è certo che l'ordine di β non è n; ma si potrebbe rappresentarlo con $n + 0$ nel primo caso, con $n - 0$ nel secondo. Finalmente può anche darsi che non sia $\lambda = \mu$; ed allora viene a mancare ogni mezzo di misurare l'ordine di β mediante un numero. Valga l'esempio dell'infinitesimo $\beta = \alpha^{1 + \frac{1}{\alpha} - \left[\frac{1}{\alpha}\right]}$, per cui si ha

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{se} & n < 1 , \\ \pm \infty & \text{»} & n > 2 . \end{array} \right.$$

Si noti che β/α non tende a zero, perchè riprende infinite volte il valore 1 quando α percorre la successione $1, {}^1/_2, {}^1/_3, \ldots$. Ne segue $\mu = 1$. Similmente β/α^2 non cresce all'infinito, perchè resta inferiore ad e quando α percorre la successione

$$\frac{1}{2 - \dfrac{1}{\log 2}} , \quad \frac{1}{3 - \dfrac{1}{\log 3}} , \quad \frac{1}{4 - \dfrac{1}{\log 4}} , \quad \frac{1}{5 - \dfrac{1}{\log 5}} , \ldots .$$

Dunque $\lambda = 2$. Per ogni altro valore di n, compreso fra 1 e 2, il rapporto β/α^n può prendere valori grandi o piccoli quanto si vuole, sicchè non si riesce a trovare un numero che possa darci la misura dell'ordine d'infinitesimo di β.

150. **Proposizione fondamentale**. Dire che *due infinitesimi differiscono per un infinitesimo di ordine superiore*, o che *il loro rapporto tende all'unità*, è affermare due fatti che sostanzialmente si equivalgono, perchè ciascuna delle uguaglianze

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0 \quad , \quad \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

è una conseguenza dell'altra. Ciò premesso, è facile dimostrare il seguente teorema, fondamento del Calcolo differenziale: *resta invariato il limite del rapporto di due infinitesimi, quando questi vengono alterati di quantità infinitesime d'un ordine superiore*. Infatti, per calcolare il limite di β/α, se β' ed α' differiscono da β ed α, rispettivamente, per infinitesimi di ordine superiore, basta calcolare il limite di β'/α', ed osservare che

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \ .$$

151. Ora supponiamo di avere l'eguaglianza tra infinitesimi $\alpha \doteq \beta$, della quale si debba fare uso dividendo i due membri per un conveniente infinitesimo γ, in modo da ottenere, *passando al limite*, l'eguaglianza $a = b$ fra quantità invariabili. L'utilità del teorema dimostrato sta in ciò che l'eguaglianza $\alpha = \beta$, spesso complicata, ed inaccessibile alle ordinarie regole del calcolo dei limiti, si può semplificare sopprimendo, in ciascun membro, qualunque parte, riconosciuta infinitesima d'un ordine superiore alla parte che rimane. Si ottiene così un'altra eguaglianza tra infinitesimi $\alpha' = \beta'$, generalmente *inesatta*; ma ciò non importa per l'uso che se ne deve fare, giacchè, dividendo i due membri per γ (o, se si vuole, per qualche altro infinitesimo γ', che da γ differisce per un infinitesimo di ordine superiore), si finirà sempre per trovare, passando al limite, l'eguaglianza esatta $a = b$. Ma, si noti, non sta in ciò l'essenza del Calcolo differenziale, che risiede invece nell'uso sistematico d'un certo simbolo, mediante il quale si può fare in modo da essere sicuri *a priori* che l'eguaglianza $\alpha' = \beta'$ è anch'essa esatta, vale a dire che, nel cercare infinitesimi α' e β' da sostituire rispettivamente ad α e β, si trascurano, senza avvedersene, infinitesimi uguali nei due membri, e si riesce in tal modo a metter la mano, per così dire, sugli infinitesimi $\alpha' = a\gamma'$, $\beta' = b\gamma'$. Ed allora, essendo l'eguaglianza $\alpha' = \beta'$ immediatamente riducibile ad $a = b$,

non si ha più bisogno del passaggio al limite. Sparisce così il *calcolo* dei limiti, grazie al detto simbolo, per far posto al Calcolo differenziale, che pur si fonda sul *concetto* di limite.

152. Dal punto di vista accennato in ultimo luogo ben si può dire che il Calcolo differenziale è tutto dovuto al genio di Leibniz; e, del resto, questa scienza si trova oggi saldamente stabilita nella forma ideata da Leibniz, con le stesse denominazioni e gli stessi segni, dovuti, più che ad una scelta fortunata, alla perspicacia dell'inventore. La cura che questi poneva nella scelta dei simboli ci è rivelata dal fatto * che, nel confrontare il suo metodo con quello di Newton, e nell'affermarne la superiorità, egli opinava « essere la segnatura parte cospicua dell'arte d'inventare ». Anche recentemente l'importanza delle notazioni e della nomenclatura è stata messa in rilievo nelle « *Populär-wissenschaftliche Vorlesungen* » da Mach, il quale « considera il linguaggio ed un appropriato sistema di simboli e denominazioni tecniche, non solo come organi indispensabili per la cooperazione tra gli investigatori e per l'accumulazione e trasmissione dei risultati man mano ottenuti, da una generazione alla successiva, ma anche e sopratutto come unico mezzo efficace a sgravare la memoria e l'intelligenza umana da ogni peso e lavoro inutile, rendendo possibile la loro sempre crescente utilizzazione per le funzioni più importanti ed essenziali. Chi si occupa di studii matematici si trova spesso dominato dall'impressione che i suoi simboli e le sue formole s'incarichino quasi di lavorare per lui, o, per usare la famosa frase di Eulero, che la sua matita vinca di perspicacia il suo cervello. Per quanto possa parere strano, dice Mach, la grande potenza delle scienze matematiche consiste sopratutto nel fatto, che esse sono riuscite a risparmiare alla mente ogni lavoro inutile ed a spingere fino all'estremo l'economia degli sforzi intellettuali. Ed allo stesso ideale tendono, secondo lui, anche le scienze fisiche, specialmente nei rami più progrediti » **.

153. **Il primo differenziale.** Dalla definizione (§ 40) della derivata d'una funzione y di x si deduce $\delta y = y'\delta x + \rho\delta x$, per ciascun valore di x, con ρ tendente a zero quando, fissato x, si fa tendere a zero δx. Ora, poichè la differenza fra δy ed $y'\delta x$ è infinitesima d'un ordine superiore a δx, è lecito sostituire, in virtù del teorema fondamentale, $y'\delta x$ a δy, nelle ricerche di limiti di rapporti; e noi ben presto ci accorgeremo dei grandi vantaggi di questa sostituzione. La quantità $y'\delta x$, nell'ipotesi che la variabile indipendente sia x, la rappresenteremo con dy, e la chia-

* Mansion « *Résumé du Cours d'Analyse* » p. 209.

** Da una recensione di G. Vailati, nella *Rivista sperimentale di Freniatria*, 1896.

meremo il *differenziale* di y. Adunque *si chiama differenziale d'una funzione il prodotto della derivata della funzione per l'incremento infinitesimo, arbitrariamente attribuito alla variabile indipendente.* Da questa definizione si deducono subito le conseguenze:

a) il differenziale della variabile indipendente x non è che l'incremento arbitrario δx, supposto variabile e tendente a zero per ciascun valore di x. Infatti, se $y=x$, è $y'=1$, e la definizione del differenziale (cioè $dy=y'\delta x$) dà $dx=\delta x$;

b) ora l'eguaglianza di definizione diventa $dy=y'dx$, e se ne ricava

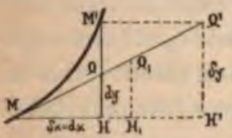
$$y'=\frac{dy}{dx}\,. \tag{1}$$

È con questa nuova segnatura che la derivata si adopera in Calcolo differenziale: così le derivate ci si presenteranno come *rapporti*, e non più come *limiti di rapporti* tra infinitesimi;

c) più generalmente *il rapporto dei differenziali di due funzioni rappresenta la derivata della prima funzione rispetto alla seconda*, considerata come variabile indipendente. Infatti (§ 43), se $y=f(u)$, dove u è una funzione della variabile indipendente x, si ha

$$dy=y'dx=f'(u)u'dx=f'(u)du\quad,\quad f'(u)=\frac{dy}{du}\,.$$

154. **Interpetrazione geometrica.** Sulla curva rappresentata dall'equazione $y=f(x)$ si consideri, in vicinanza d'un punto fisso M, di ascissa x, un punto M', la cui ascissa sia $x+\delta x$. Supporre δx infinitesimo significa (§ 147) supporre M' mobile lungo la curva, e tendente a confondersi con M. Siano H e Q i punti nei quali l'ordinata di M' incontra due rette condotte per M, la prima parallelamente all'asse x, l'altra tangenzialmente alla curva. Se la variabile indipendente è x, è chiaro (§ 52) che si ha



$$MH=dx=\delta x\quad,\quad HQ=dy\quad,\quad HM'=\delta y\,.$$

Sostituire dy a δy significa dunque trascurare QM', ossia sostituire Q ad M' per *tutte* le posizioni di M' intorno ad M, e per conseguenza significa *sostituire la tangente alla curva*, in prossimità di ciascun punto. Del resto, qualunque sia la variabile indipendente, *il punto* $(x+dx\,,y+dy)$ *appartiene sempre alla tangente*, come $(x+\delta x\,,y+\delta y)$ appartiene sempre alla curva. Per una data posizione M' del secondo punto, il primo può cadere in Q, in Q', o in qualunque altro posto, sulla tangente, secondo che la variabile indipendente è x, y, o un'altra qualsiasi.

155. **Regole per la differenziazione**. Per *differenziare*, ossia per calcolare il differenziale d'una funzione di x, basta, in virtù della definizione stessa del differenziale, calcolare la derivata della funzione, e moltiplicarla per dx. In tal modo si ottiene

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx \quad , \quad de^x = e^x dx \quad , \quad d\,\mathrm{sen}\, x = \cos x\, dx \quad , \quad d\cos x = -\,\mathrm{sen}\, x\, dx \; ,$$

$$d\log x = \frac{dx}{x} \; , \; d\,\mathrm{tg}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x} \; , \; d\,\mathrm{arc\,tg}\, x = \frac{dx}{1+x^2} \; , \; d\,\mathrm{arc\,sen}\, x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \; , \; ecc.,$$

anche quando x non è la variabile indipendente. Dopo ciò le note regole di derivazione si traducono facilmente in altrettante regole di differenziazione. Così, per esempio, la somma di due o più funzioni si differenzia sommando i differenziali delle parti; il prodotto di due funzioni si differenzia moltiplicando ciascuna funzione per il differenziale dell'altra, e sommando i risultati; *ecc.* Infatti si ha

$$d(u+v) = (u+v)'dx = (u'+v')dx = u'dx + v'dx = du + dv \; ,$$

$$duv = (uv)'dx = (uv'+vu')dx = uv'dx + vu'dx = u\,dv + v\,du \; ,$$

$$d\frac{u}{v} = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{vu'-uv'}{v^2}\,dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}\; ; \; ecc.$$

156. **Differenziali successivi**. Prima di andare oltre è necessario fermarci a considerar bene il significato del differenziale dx della variabile indipendente. Fissato x, il corrispondente dx è un infinitesimo, che giova immaginare, provvisoriamente, come dipendente da un certo infinitesimo α, che si assume come infinitesimo principale. Quando si passa da un valore di x ad un altro, non vi è ragione perchè non varii anche la legge (arbitraria) che fa dipendere dx da α, sicchè dx è funzione tanto di x, quanto di α:

$$dx = \varphi(x, \alpha) \; . \tag{2}$$

Se immaginiamo l'asse delle x deformabile in sè stesso, e supponiamo che ciascun punto x si trasferisca in $x + dx$, l'eguaglianza (2) esprime la legge con cui, tendendo α a zero, i punti dell'asse deformato vengono restituiti alle primitive posizioni. Alla funzione *arbitraria* φ s'impone soltanto di tendere a zero con α, qualunque sia x, e di possedere le successive derivate parziali (§ 130) rispetto ad x. In queste condizioni dx, in quanto è funzione di x, ammette a sua volta un differenziale, che si chiama il *secondo differenziale* di x, e si rappresenta con d^2x:

$$d^2x = ddx = \varphi'_x(x, \alpha)dx = \varphi(x, \alpha)\varphi'_x(x, \alpha) \; . \tag{3}$$

Qui vogliamo fare una convenzione, di capitale importanza per quel che segue. Vogliamo in primo luogo supporre che nell'espressione (2) si trovino separati, per così dire, i due caratteri che deve possedere il dx, di tendere cioè a zero con α, e di dipendere da x; ed all'uopo basta prendere

$$dx = \alpha\chi(x) \ , \tag{4}$$

lasciando momentaneamente arbitraria la funzione $\chi(x)$. Così dx è il prodotto d'un infinitesimo, indipendente da x, per una funzione di x, indipendente da α; ed è un infinitesimo del *primo* ordine, che d'ora innanzi assumeremo sempre come infinitesimo principale. Invece

$$d^2x = d\alpha\chi = \alpha d\chi = \alpha\chi' dx = \alpha^2\chi\chi'$$

è un infinitesimo del *secondo* ordine. Continuando a differenziare si trovano analogamente, l'un dopo l'altro, i differenziali *terzo*, *quarto*, e così via:

$$d^3x = \alpha^3(\chi\chi'^2 + \chi\chi'') \quad , \quad d^4x = \alpha^4(\chi\chi'^3 + 4\chi^2\chi'\chi'' + \chi^3\chi''') \ , \ \dots .$$

Il differenziale n^{imo} di x, ossia il risultato di n differenziazioni, applicate successivamente, si rappresenta con d^nx, ed è un infinitesimo dell'ordine n. Come si vede, i risultati delle successive differenziazioni si vanno rapidamente complicando, e molti beneficii del Calcolo differenziale andrebbero perduti se si volesse mantenere a $\chi(x)$ la sua arbitrarietà. Conviene invece prendere $\chi(x) = 1$, perchè in tal guisa si ha

$$d^2x = 0 \quad , \quad d^3x = 0 \quad , \quad d^4x = 0 \ , \ \dots \ , \tag{5}$$

e tutti i calcoli, come presto si vedrà, si semplificano notevolmente. È questa la convenzione fondamentale, che si esprime così: *il primo differenziale della variabile indipendente si suppone indipendente dalla variabile stessa.* Ciò premesso, è facile calcolare i differenziali successivi d'una funzione qualunque, e constatare che *il differenziale* n^{imo} *è sempre un infinitesimo dell'ordine* n:

$$d^2y = ddy = d(y'dx) = dy'.dx = y''dx.dx = y''dx^2 \ ,$$
$$d^3y = dd^2y = d(y''dx^2) = dy''.dx^2 = y'''dx.dx^2 = y'''dx^3 \ , \ \text{ecc.}$$

In generale $d^ny = y^{(n)}dx^n$, convenendo di scrivere dx^n per $(dx)^n$. Si giunge in tal modo alla relazione

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} \ , \tag{6}$$

che include la (1) per $n = 1$. Adunque *la derivata* n^{ima} *d'una funzione rispetto alla variabile indipendente è uguale al quoziente del differen-*

ziale n^{imo} *della funzione per la* n^{ima} *potenza del differenziale della variabile indipendente.* Senonchè, mentre per $n=1$ si può (§ 153, *c*) sopprimere la restrizione che la variabile sia indipendente, altrettanto non si può fare per $n>1$, perchè nelle successive differenziazioni di dy sono state adoperate le (5), non più vere quando non è x la variabile indipendente.

157. Ed ora siamo in grado di capire ciò che nel § 151 è stato solamente accennato, vale a dire che si può esser sicuri dell'esattezza dell'eguaglianza tra infinitesimi $\alpha'=\beta'$ (ottenuta trascurando infinitesimi di ordine superiore in $\alpha=\beta$) *tutte le volte che in essa non compariscono altri infinitesimi se non quelli che risultano da differenziazioni*, purchè l'eguaglianza stessa (ridotta, s'intende, a forma intera) sia resa *omogenea*, vale a dire che vi si lascino i soli termini, infinitesimi dell'ordine minimo n. Infatti in ogni caso si dovrebbe, per trovare un'eguaglianza esatta, dividere i due membri per dx^n, e passare al limite; ma, si noti, questo passaggio al limite è diventato inutile, *perchè i rapporti fra potenze di differenziali, infinitesime dello stesso ordine, sono uguali ai proprii limiti*, dimodochè l'eguaglianza esatta da trovare è appunto $\alpha'/dx^n=\beta'/dx^n$, ossia $\alpha'=\beta'$. Qui sta tutto il segreto del Calcolo differenziale. Inoltre l'*omogeneità* delle relazioni definitive tra differenziali ci offre un mezzo di controllo, utile nella pratica del Calcolo. Ben si comprende, ora, quale importanza abbia la ricerca degli infinitesimi *differenziali*, risultanti dalla soppressione di parti infinitesime, d'un ordine superiore, negli infinitesimi che si presentano nei calcoli. Per ogni α vi sono innumerevoli altri infinitesimi, che da α differiscono per infinitesimi d'un ordine superiore; ma *un solo* fra essi è il differenziale di qualche funzione u. Infatti, se per un'altra funzione v potesse $\alpha-dv$ risultare, come $\alpha-du$, infinitesima d'un ordine superiore, basterebbe sopprimere questi infinitesimi in

$$du=dv+(\alpha-dv)-(\alpha-du)$$

per trovare l'eguaglianza $du=dv$, necessariamente esatta. Questi due infinitesimi differenziali coincidono dunque in valore; ed è facile vedere che coincidono anche nel significato, giacchè si ha $d(u-v)=0$, e però $u-v=$ *costante*, vale a dire che v non differisce sostanzialmente da u. Nella pratica del Calcolo si cerca sempre di porre α sotto forma di variazione infinitesima d'una funzione u, ed allora (§ 153) l'infinitesimo differenziale unico, sostituibile ad α, è appunto du. Così, mediante l'operazione d, il Calcolo differenziale raggiunge una precisione estrema, in quanto che permette *in un sol modo* di sostituire agli infinitesimi, che si presentano in una ricerca qualsiasi, altrettanti infinitesimi, risultanti tutti per differenziazione da ben determinate funzioni, e *vincolati da* *quelle stesse relazioni* che intercedono fra gli infinitesimi, dei quali prendono il posto nei calcoli.

158. **Cambiamento della variabile indipendente.** Poichè la formola (6), per $m>1$, implica l'ipotesi che la variabile x è *indipendente*, se si vuole assumere (come spesso se ne sente il bisogno) un'altra variabile indipendente, è innanzi tutto necessario restituire alla formola stessa tutta la sua generalità, e procedere poi al cambiamento di variabile. Per questo basta ripetere le successive derivazioni di dy, eseguite nel § 156, ma senza servirsi delle (5). In tal modo si ottiene

$$d^2y=d(y'dx)=dy'dx+y'ddx=y''dx^2+y'd^2x\ ;$$

poi

$$d^3y=y'''dx^3+3y''dx\,d^2x+y'd^3x\ ,$$
$$d^4y=y^{\text{IV}}dx^4+6y'''dx^2d^2x+3y''d^2x^2+4y''dx\,d^3x+y'd^4x\ ;\ \textit{ecc.}$$

Dalla prima eguaglianza si trae

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}-y'\frac{d^2x}{dx^2}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}\ . \tag{7}$$

Similmente

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3}-3y''\frac{d^2x}{dx^2}-y'\frac{d^3x}{dx^3}=\frac{dx^2d^3y-3\,dx\,d^2x\,d^2y+3\,dy\,d^2x^2-dx\,dy\,d^3x}{dx^5}\ ; \tag{8}$$

ecc. Ai medesimi risultati si giunge più rapidamente differenziando una o più volte di seguito i due membri della (1). Si trova infatti

$$y''dx=d\frac{dy}{dx}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2}\ ,$$

d'onde la (7); poi, differenziando questa,

$$y'''dx=\frac{dx(dx\,d^3y-dy\,d^3x)-3\,d^2x(dx\,d^2y-dy\,d^2x)}{dx^4}\ ,$$

d'onde la (8); *ecc.* Talvolta ci accadrà di considerare $\frac{d}{dx}$ come il *simbolo della derivazione* rispetto ad x, sicchè, replicando tale operazione, $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}$ servirà a rappresentare la derivazione seconda rispetto ad x, qualunque sia la variabile indipendente, mentre $\frac{d^2}{dx^2}$ rappresenta la medesima operazione solo nell'ipotesi che la variabile indipendente sia x. Infatti per la (7) si ha

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}=\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d^2x}{dx^2}\frac{d}{dx}\ . \tag{9}$$

Similmente, per la (8),

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}=\frac{d^3}{dx^3}-3\frac{d^2x}{dx^2}\frac{d^2}{dx^2}+\left(3\frac{d^2x^2}{dx^4}-\frac{d^3x}{dx^3}\right)\frac{d}{dx}\ ;\ ecc.$$

159. **Esercizii**: *a)* Se in un'espressione, che racchiude le derivate di y, prese rispetto ad una variabile x, si vuole che compariscano invece le derivate relative ad un'altra variabile t, le formole trovate nel precedente paragrafo possono far subito conoscere le espressioni da sostituire ad $y', y'', \ldots$, quando sia data x in funzione di t, e per conseguenza sian note le derivate dx/dt, $d^2x/dt^2, \ldots$. Infatti si ha

$$\frac{dx}{dt}y'=\frac{dy}{dt}\ ,\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 y''=\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\ ,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^5 y'''=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2-\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}\ ;\ ecc.$$

Invece, quando è data la nuova variabile t in funzione di x, e si vuole che sia *indipendente*, si ha sempre

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}t'\ ; \tag{10}$$

poi, per calcolare y'', si può fare uso della (7), dopo avere osservato che, dovendo essere $d^2t=0$, si ha $t''dx^2+t'd^2x=0$, e però

$$dx=\frac{dt}{t'}\ ,\quad d^2x=-\frac{t''dt^2}{t'^3}\ . \tag{11}$$

Dopo ciò la (7) diventa

$$y''=\frac{d^2y}{dt^2}t'^2+\frac{dy}{dt}t''\ ; \tag{12}$$

ma più agevolmente si stabilisce questa relazione col derivare rispetto ad x i due membri di (10). Derivando analogamente la (12) si giunge subito al risultato

$$y'''=\frac{d^3y}{dt^3}t'^3+3\frac{d^2y}{dt^2}t't''+\frac{dy}{dt}t'''\ .$$

Con maggior fatica si deduce questo dalla (8), dopo avere aggregato alle (11) la formola

$$d^3x=\frac{3t''^2-t't'''}{t'^5}dt^3\ , \tag{13}$$

che si ottiene scrivendo $d^3t=0$, o pure differenziando la seconda formola (11); *ecc.*

b) Supponiamo che per variabile indipendente si voglia assumere la stessa funzione y, proponendosi di calcolare le derivate $x', x'', \ldots$ di x rispetto ad y. Le formole (11), (13), *ecc.*, danno

$$x'=\frac{1}{y'}\ ,\quad x''=-\frac{y''}{y'^3}\ ,\quad x'''=\frac{3y''^2-y'y'''}{y'^5}\ ;\ \ldots .$$

Queste, del resto, dalla seconda in poi, si ottengono più rapidamente derivando successivamente la prima. Si può anche fare uso delle formole (7), (8), *ecc.*, introducendovi l'ipotesi dell'indipendenza di y mercè le uguaglianze $d^2y=0, d^3y=0, \ldots$ Si giunge così alle formole

$$y'=\frac{1}{x'} \quad , \quad y''=-\frac{x''}{x'^3} \quad , \quad y'''=\frac{3x''^2-x'x'''}{x'^5} \quad , \ldots$$

che non differiscono dalle precedenti se non per lo scambio di x con y. È del resto evidente che queste relazioni debbono essere simmetriche rispetto alle due variabili; ed effettivamente si può dar loro la forma

$$x'y'=1 \quad , \quad x''x'^{-\frac{3}{2}}+y''y'^{-\frac{3}{2}}=0 \quad , \quad \frac{3x''^2-2x'x'''}{x'^3}+\frac{3y''^2-2y'y'''}{y'^3}=0 \, , \ldots ,$$

o forme equivalenti, che si possono anche dedurre direttamente, per derivazione, dalla prima $x'y'=1$. Secondo che, nel derivare, si pensa x come variabile indipendente, o pure y, si ottiene l'una o l'altra eguaglianza

$$x'y''+x''y'^2=0 \quad , \quad y'x''+y''x'^2=0 \; .$$

Moltiplicando la prima per $x'^{\frac{1}{2}}$, o la seconda per $y'^{\frac{1}{2}}$, si trova

$$x''y'^{\frac{3}{2}}+y''x'^{\frac{3}{2}}=0 \; .$$

Derivando invece la prima rispetto ad y, o la seconda rispetto ad x, si ottiene

$$x'''y'^2+3x''y''+y'''x'^2=0 \; ;$$

e così via.

c) È facile constatare che $dx\,d^2y-dy\,d^2x$ si può esprimere mediante le derivate prime e seconde di x e di y, relative ad una variabile qualunque t, ed il solo differenziale *primo* di t; e però, per renderne più agevole il calcolo nei varii casi particolari, si può sempre supporre t variabile indipendente, ed essere sicuri *a priori* che il risultato rimarrà valido anche quando non è t la variabile indipendente. Infatti si ha

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x \\ dy & d^2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt}dt & \frac{d^2x}{dt^2}dt^2+\frac{dx}{dt}d^2t \\ \frac{dy}{dt}dt & \frac{d^2y}{dt^2}dt^2+\frac{dy}{dt}d^2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} dt^3 \, ,$$

ossia

$$dx\,d^2y-dy\,d^2x=\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt^3 \; .$$

Questa osservazione è più generalmente applicabile a qualunque determinante, di ordine n, in cui la ν^{ima} verticale sia costituita dai differenziali ν^{imi} di n funzioni. Per esempio

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^3x}{dt^3} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^3y}{dt^3} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix} dt^6 .$$

Tornando a dxd^2y-dyd^2x, supponiamo che x ed y siano le coordinate cartesiane ortogonali d'un punto, nel piano, e proponiamoci di trasformare in coordinate polari, r e θ, l'espressione considerata. Giovandosi dell'osservazione precedente si può, *per semplificare i calcoli*, prendere θ come variabile indipendente, nel qual caso, essendo $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$, si ha

$$dx=\cos\theta\,.\,dr-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,.\,d\theta\quad,\quad d^2x=\cos\theta\,.\,d^2r-2\,\mathrm{sen}\,\theta\,.\,drd\theta-r\cos\theta\,.\,d\theta^2\ ,$$
$$dy=\mathrm{sen}\,\theta\,.\,dr+r\cos\theta\,.\,d\theta\quad,\quad d^2y=\mathrm{sen}\,\theta\,.\,d^2r+2\cos\theta\,.\,drd\theta-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,.\,d\theta^2\ ;$$

quindi si vede che

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x \\ dy & d^2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dr & d^2r-rd\theta^2 \\ rd\theta & 2drd\theta \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{vmatrix} ;$$

e finalmente

$$dxd^2y-dyd^2x=r^2d\theta^3+2d\theta dr^2-rd\theta d^2r=(r^2+2r'^2-rr'')d\theta^3\,. \qquad (14)$$

Quantunque ottenuto supponendo $d^2\theta=0$, l'ultimo risultato è già libero dall'ipotesi che θ sia la variabile indipendente, purchè per r'' s'intenda, non $\frac{d^2r}{d\theta^2}$, ma $\frac{d}{d\theta}\frac{dr}{d\theta}$, ossia $\frac{d^2r}{d\theta^2}-r'\frac{d^2\theta}{d\theta^2}$.

d) Proponiamoci di trasformare l'espressione (§ 107, *e*) del *raggio di curvatura*:

$$\rho=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}\,.$$

Questa formola non suppone necessariamente che la variabile indipendente sia x, purchè si abbia cura di prendere y'' sotto la forma generale (7). Così, adoperando anche la (1), si trova

$$\rho=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x}\,. \qquad (15)$$

In coordinate polari, siccome

$$dx^2+dy^2=(\cos\theta\,.\,dr-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,.\,d\theta)^2+(\mathrm{sen}\,\theta\,.\,dr+r\cos\theta\,.\,d\theta)^2=dr^2+r^2d\theta^2\ ,$$

si ha, ricordando la (14), e dividendo per $d\theta^2$ numeratore e denominatore,

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} .$$

A questa, poi, si può dare una forma più semplice, ed utile nelle applicazioni, supponendo data la curva mediante un' equazione della forma $r = 1/f(\theta)$, e cercando di esprimere ρ in funzione di f, f', f''. Si ottiene subito

$$\frac{r'}{r} = -\frac{f'}{f} \quad , \quad r^2 + r'^2 = \frac{f^2 + f'^2}{f^4} \quad , \quad r'^2 - rr'' = \frac{ff'' - f'^2}{f^4} \; ;$$

quindi

$$\rho = \frac{(f^2 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{(f + f'')f^3} .$$

e) Ad altre notevoli forme di ρ si giunge adoperando la variabile s, che soddisfa alla relazione $ds^2 = dx^2 + dy^2$, e che in seguito si vedrà rappresentare la *lunghezza dell' arco*, computata a partire da un punto fisso. Eliminando d^2y o d^2x dalla (15), mediante la relazione

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y \; ,$$

si ottengono le formole

$$\rho = \frac{-\,dy\,ds^2}{ds\,d^2x - dx\,d^2s} \quad ; \quad \rho = \frac{dx\,ds^2}{ds\,d^2y - dy\,d^2s} \; ,$$

le quali, per la (9), si possono anche scrivere nel seguente modo:

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = -\frac{1}{\rho}\frac{dy}{ds} \quad , \quad \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\rho}\frac{dx}{ds} .$$

Queste formole, che in seguito (§ 192) ci sembreranno evidenti, sono specialmente utili in questioni di Meccanica. Elevandole al quadrato, e sommandole, si ottiene

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2 ;$$

ovvero, in virtù della medesima relazione (9),

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2 .$$

160. **Osservazioni:** *a)* L'ordinario Calcolo differenziale è tutto fondato, come si è visto nel § 156, sull'ipotesi (4), con l'aggiunta dell'altra $\chi(x) = 1$. Le infinite forme che potrebbe assumere il Calcolo differenziale, in corrispondenza delle infinite possibili funzioni $\chi(x)$, si riducono tutte ad una sola, perchè il passare da una funzione χ ad un'altra vale quanto cambiare la variabile indipendente nell'ordinario Calcolo. Per convincersi

di ciò bisogna premettere che, essendo necessariamente continua la funzione $\chi(x)$, esiste sempre (come si vedrà in principio della terza parte del Corso) una funzione t di x, che ha la derivata uguale ad $1/\chi(x)$. Nel Calcolo differenziale, costruito in base alla funzione $\chi(x)$, i differenziali di t sono

$$dt = t'dx = \frac{1}{\chi(x)} \cdot \alpha\chi(x) = \alpha \quad , \quad d^2t = d^3t = \ldots = 0 \ ,$$

vale a dire che le proprietà (5) si trovano trasferite da x a t, e però il Calcolo ideato non differisce dal Calcolo fatto nel modo ordinario in base alla variabile indipendente t. È dunque ben naturale assegnare fin dal principio alla variabile indipendente la proprietà di avere il differenziale *costante*. Contro questa convenzione, senza nemmeno cercare d'intenderne prima il significato, si scaglia da tempo la turba dei metafisici. Alcuni credono che dx costante voglia dire che per dx si *fissa* un valore piccolissimo; altri che si *salta* da x successivamente ad $x+dx, x+2dx, x+3dx, \ldots$; altri soltanto che dx si conserva *invariato* da una differenziazione alla differenziazione successiva; altri, finalmente, mostrano * di accettare (tutte in una volta!) queste assurde o grossolane o insulse interpetrazioni. Invece, quando si afferma che dx è costante, non si vuol dire altro se non questo: *dx non dipende da x*. Così il far tendere dx a zero equivale ad immaginare che, dopo aver fatto scorrere su sè stesso l'asse delle x, *supposto rigido*, questo tenda a riprendere l'antica posizione.

b) Non è tuttavia da escludere la possibilità d'un Calcolo differenziale, in cui a nessuna variabile spetti un differenziale costante. Affinchè ciò avvenga per qualche funzione t, è necessario che sia $t''dx^2 + t'd^2x = 0$, e per conseguenza, dividendo (3) per (2), che il rapporto

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{d}{dx} \log \varphi(x, \alpha)$$

dipenda unicamente da x. Ne segue $\varphi(x, \alpha) = \chi(x)\psi(\alpha)$, dove $\psi(\alpha)$, infinitesimo con α, si può sempre chiamare α, sicchè si è ricondotti alla (4). Quando si rinunzia a questa ipotesi (caratteristica del Calcolo di Leibniz) sussistono intatti nella forma i calcoli del § 158; ma profonde alterazioni si producono nel modo di comportarsi dei varii differenziali. Così, per esempio, per $dx = \alpha e^{\alpha x}$, il differenziale n^{imo} di x, invece di essere infinitesimo dell'ordine n, ha l'ordine $2n-1$; e soltanto in generale d^ny è dell'ordine n, giacchè invece di (6) si ha, per $n > 1$,

$$y^{(n)} = \lim \frac{d^ny}{dx^n} \ ,$$

* « *Nuove considerazioni sulla metafisica del Calcolo infinitesimale* » nelle Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1895, p. 309.

senza poter togliere il segno *lim*. Similmente, per $dx = \alpha e^{-\frac{x}{\alpha}}$, convenendo che l'infinitesimo α conservi il segno di x, ogni differenziale n^{imo} è *quasi* (§ 149) dell'ordine n rispetto a dx; ma non sussiste più l'eguaglianza (6), perchè il rapporto $d^n y / dx^n$ è infinitamente grande in valore assoluto, ed invece si ha

$$y' = \lim \frac{d^n y}{d^n x},$$

qualunque sia n. Un tal Calcolo differenziale potrebbe forse avere dei vantaggi; ma è certo che gli mancherebbero quelli che il Calcolo usuale attinge nella semplicità e nell'omogeneità delle sue formole, e nella precisione del computo dell'ordine degli infinitesimi; ma sopratutto verrebbe meno quella che (per quanto si è detto nel § 157) si può considerare come la vera ragione di essere del Calcolo differenziale, giacchè i rapporti tra potenze di differenziali, infinitesime del medesimo ordine, non si manterrebbero più *eguali ai proprii limiti*; e però nel nuovo Calcolo non si troverebbe per così dire assorbito il Calcolo dei limiti.

Funzioni di più variabili.

161. **Differenziazione parziale.** Nella funzione $f(x, y, z, \ldots)$ si attribuiscano arbitrarii incrementi $\delta x, \delta y, \ldots$ alle variabili, supposte indipendenti. Considerata come funzione (*cfr.* § 129) della sola x, o della sola y, *ecc.*, la predetta funzione ammette i differenziali

$$d_x f = f'_x . \delta x \quad , \quad d_y f = f'_y . \delta y \quad , \quad d_z f = f'_z . \delta z \, , \ldots ,$$

che si chiamano *differenziali parziali*. La loro somma è il *differenziale totale*, che si rappresenta con df. Cominciamo dal notare che i differenziali totali delle variabili indipendenti sono gli stessi incrementi arbitrarii $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ Infatti, se si prende $f = x$, si ha $f'_x = 1$, $f'_y = f'_z = \ldots = 0$, e conseguentemente $dx = \delta x$; *ecc.* Ora le uguaglianze che definiscono i differenziali parziali diventano

$$f'_x = \frac{d_x f}{dx} \quad , \quad f'_y = \frac{d_y f}{dy} \quad , \quad f'_z = \frac{d_z f}{dz} \, , \ldots .$$

Così ogni derivata parziale si trova rappresentata mediante il quoziente di due infinitesimi. Per la semplicità della scrittura conviene sopprimere, nei numeratori, gli indici $x, y, z, \ldots$, senza che si possa temere confusione tra i varii df, ciascuno dei quali s'intende preso parzialmente rispetto alla variabile che comparisce in denominatore. Siccome, tuttavia, una confusione sarebbe ancora possibile fra i detti differenziali e la loro somma df, nelle differenziazioni parziali si suole adoperare il segno ∂ invece di d, e scrivere

$$f'_x=\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\quad f'_y=\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\quad f'_z=\frac{\partial f}{\partial z}\ ,\ \ldots .$$

Sotto questa forma interverranno d'ora innanzi nei calcoli le derivate parziali.

162. **Differenziazione totale.** Per definizione il differenziale totale è

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\cdots \tag{16}$$

quando le variabili indipendenti sono $x, y, z, \ldots$; ma importa osservare che *la relazione* (16) *sussiste quando le variabili non sono indipendenti.* Si consideri infatti la funzione $f(u, v, w, \ldots)$, in cui $u, v, w, \ldots$ sono funzioni di altre variabili $x, y, z, \ldots$, in numero qualunque, indipendenti fra loro. Evidentemente le derivate parziali di f rispetto ad $u, v, w, \ldots$ si possono sempre rappresentare con

$$f'_u=\frac{\partial f}{\partial u}\ ,\quad f'_v=\frac{\partial f}{\partial v}\ ,\quad f'_w=\frac{\partial f}{\partial w}\ \ldots .$$

giacchè, nel calcolarle, $u, v, w, \ldots$ sono da considerare come variabili indipendenti; ma niente ci autorizza ad affermare che il differenziale totale, definito dalla (16), sia anche espresso da

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw+\cdots . \tag{17}$$

È chiaro che, derivando la funzione f nell'ipotesi che varii la sola x, o la sola y, *ecc.*, si ha, applicando (§ 131) la regola per la derivazione delle funzioni composte,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}+\cdots ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sostituendo in (16), ed osservando che

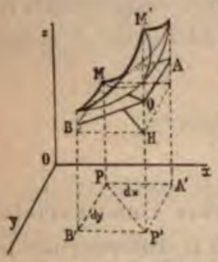
$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\cdots ,$$
$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz+\cdots ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

si ottiene precisamente la formola (17), che si deve considerare come fondamentale nei calcoli di differenziazione. La grande efficacia della differenziazione totale si deve appunto al fatto che, per applicarla, non occorre conoscere nè *quali* nè *quante* siano le variabili indipendenti. In particolare, se $y, z, \ldots$ fossero funzioni di x, la funzione $f(x, y, z, \ldots)$ sarebbe una funzione di x, la cui derivata si otterrebbe dividendo la (16) per dx:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \cdots .$$

Valga questa osservazione a rendere manifesta la necessità di adoperare il segno ∂ invece di d, giacchè df/dx differisce, in generale, da $\partial f/\partial x$.

163. **Interpetrazione geometrica.** Per interpetrare geometricamente il differenziale totale, almeno nel caso di due variabili indipendenti, si consideri la funzione definita dall'uguaglianza $z = f(x, y)$, che nello spazio rappresenta, in coordinate cartesiane, una superficie. Un arco MM′ di questa superficie si projetti, parallelamente all'asse z, in MQ, sul piano che tocca la superficie in M; e si completi la costruzione del parallelepipedo, che ha per base, nel piano xy, il parallelogramma PA′P′B′ costruito sui lati dx e dy (incrementi arbitrarii delle coordinate di M), ed ha la faccia opposta nel piano tangente. Siccome questa è un parallelogramma MAQB, il punto medio di MQ coincide col punto medio di AB, e però si ha MP + QP′ = AA′ + BB′. D'altra parte, ricordando ciò che si è detto nel § 164,



$$\mathrm{MP} = z \quad , \quad \mathrm{AA'} = z + \frac{\partial z}{\partial x}dx \quad , \quad \mathrm{BB'} = z + \frac{\partial z}{\partial y}dy .$$

Dunque $\mathrm{QP'} = z + \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = z + dz$. In altri termini dz rappresenta l'incremento HQ dell'ordinata del piano tangente, come δz rappresenta l'incremento analogo HM′ per la superficie. Adunque sostituire dz a δz è come sostituire alla superficie, nelle vicinanze di ciascun punto, il piano tangente nel punto stesso.

164. **Differenziazioni successive.** Quando in $f(x, y, z, \ldots)$ si suppone variabile la sola x, sono applicabili le considerazioni fatte per le derivate successive delle funzioni d'una sola variabile indipendente, e però alle successive derivate parziali di f rispetto ad x si può dar la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} , \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} , \cdots ,$$

se si conviene di non far dipendere da $x, y, z, \ldots$ gli incrementi arbitrarii

$dx, dy, dz, \ldots$. Si è visto (§ 130) che, sotto certe condizioni, generalmente soddisfatte nei calcoli usuali, il risultato di n *derivazioni* parziali successive, nelle quali si suppone i volte variabile la sola x, j volte la sola y, *ecc.* (essendo necessariamente $i+j+\ldots=n$), non dipende dall'ordine delle derivazioni, e però si può supporre che si eseguano in primo luogo le i derivazioni rispetto ad x, poi le j derivazioni rispetto ad y, *ecc.* Il risultato delle n derivazioni si conviene di rappresentarlo così:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \ldots}.$$

Per esempio, le derivate parziali di z, funzione delle variabili x ed y, sono

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \ldots.$$

Le prime cinque, frequentemente adoperate nella teoria delle superficie, si usa designarle per brevità con p, q, r, s, t. Ora, passando alle *differenziazioni*, partiamo dall'eguaglianza (16), e differenziamola supponendovi $dx, dy, dz, \ldots$ indipendenti da $x, y, z, \ldots$. Si ottiene

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \ldots\right).dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \ldots\right).dy + \ldots \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \ldots. \end{aligned}$$

Siccome si può, indipendentemente dalla funzione che subisce l'operazione d, rappresentar questa scrivendo

$$d = \frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy + \frac{\partial}{\partial z}.dz + \ldots,$$

si vede che si ha pure

$$d^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.dx^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.dy^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.dx dy + \ldots,$$

ovvero, *simbolicamente*,

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy + \frac{\partial}{\partial z}.dz + \ldots\right)^2.$$

Differenziando nuovamente, e proseguendo sempre nello stesso modo, è chiaro che si perviene alla relazione simbolica

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy + \frac{\partial}{\partial z}.dz + \ldots\right)^n,$$

la quale suppone, se n supera 1, che $x, y, z, \ldots$ sono le variabili indipendenti. Invece se si ha, per esempio, $z=f(x,y)$, con x ed y funzioni di altre variabili indipendenti, si ottiene, con successive differenziazioni,

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \quad , \quad d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}.dx+\frac{\partial}{\partial y}.dy\right)^2 f+\frac{\partial f}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y \ ,$$

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}.dx+\frac{\partial}{\partial y}.dy\right)^3 f+3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx\,d^2x+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy\,d^2x$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x}d^3x+\frac{\partial f}{\partial y}d^3y+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\,d^2y+3\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx\,d^2y \ ,$$

. . . .

165. **Formola di Taylor.** La segnatura differenziale permette di porre la formola di Taylor (§ 89) sotto una forma notevolmente semplice, che conviene ugualmente alle funzioni di una o di più variabili:

$$\delta f=df+{}^1/_2 d^2f+{}^1/_6 d^3f+{}^1/_{24} d^4f+\cdots \qquad (18)$$

Limitandoci, per maggior chiarezza, al caso d'una sola variabile, osserviamo che la detta formola si può scrivere nel seguente modo:

$$\delta f(x)=f'(x)\delta x+{}^1/_2 f''(x)\delta x^2+{}^1/_6 f'''(x)\delta x^3+\cdots \qquad (19)$$

Se x è la variabile indipendente, si ha $\delta x=dx$, $f^{(m)}(x)\delta x^m=d^mf(x)$, e si trova così la formola (18). Siccome poi il significato di ciascun termine di questa non è legato ad una speciale scelta della variabile, è chiaro che la formola stessa vale *qualunque sia la variabile indipendente*. Questa osservazione è necessaria, altrimenti non si potrebbe affermare che, nel secondo membro di (19), il termine n^{simo} è $\frac{1}{n!}d^nf$. Invece, elevando

$$\delta x=dx+{}^1/_2 d^2x+{}^1/_6 d^3x+{}^1/_{24} d^4x+\cdots$$

successivamente al quadrato, al cubo, *ecc.*, si dovrebbe scrivere

$$\delta f=(dx+{}^1/_2 d^2x+{}^1/_6 d^3x+\ldots)f'+{}^1/_2(dx^2+dx\,d^2x+\ldots)f''+{}^1/_6(dx^3+\ldots)f'''+\cdots,$$

e si ricadrebbe sulla (18) raccogliendo i termini infinitesimi del medesimo ordine:

$$f'dx=df \ , \ {}^1/_2(f'd^2x+f''dx^2)={}^1/_2 d^2f \ ,$$
$${}^1/_6(f'd^3x+3f''dx\,d^2x+f'''dx^3)={}^1/_6 d^3f \ , \ \ldots .$$

166. **Cambiamento di variabili.** Se della funzione $f(x,y,z,\ldots)$ si vogliono esprimere le derivate parziali supponendo che si assumano altre variabili $u,v,w,\ldots$, in egual numero, si ha subito, facendo prima va-

riare la sola u, poi la sola v, e così via.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dots\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v}+\dots\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial w}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial w}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial w}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial w}+\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right.$$

Questo sistema di equazioni lineari somministra i valori di $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dots$ purchè non sia nullo * il determinante

$$\mathfrak{J}=\left|\begin{array}{cccc}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dots\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dots\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{array}\right|,$$

che si chiama determinante funzionale o *jacobiano* delle funzioni $x, y, z, \dots$, rispetto ad $u, v, w, \dots$, e si rappresenta così:

$$\mathfrak{J}=\frac{\partial(x, y, z, \dots)}{\partial(u, v, w, \dots)}.$$

Ciò premesso si ottiene, risolvendo il sistema considerato,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\cdot\frac{\partial(f, y, z, \dots)}{\partial(u, v, w, \dots)}, \tag{20}$$

e similmente

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\,\frac{\partial(x, f, z, \dots)}{\partial(u, v, w, \dots)}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\,\frac{\partial(x, y, f, \dots)}{\partial(u, v, w, \dots)}, \dots.$$

Per calcolare poi le successive derivate basta operare analogamente sulle derivate già ottenute.

167. Al problema precedente si è condotti quando, data un'equazione o un'espressione qualsiasi, che racchiude le derivate di f rispetto ad $x, y, z, \dots$, si vuole trasformarla in guisa che vi compariscano invece le derivate rispetto alle nuove variabili. Si debbono allora esprimere $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$, ecc.,

* Fra breve si vedrà che questa condizione è soddisfatta quando $x, y, z, \dots$ sono indipendenti fra loro.

mediante $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$, *ecc.*; e se son date $x, y, z, \ldots$ in funzione di $u, v, w, \ldots$, il procedimento indicato è generalmente preferibile a qualsiasi altro. Accade talvolta che sian date invece $u, v, w, \ldots$ in funzione di $x, y, z, \ldots$; ed allora si può immediatamente scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots. \tag{21}$$

In modo analogo si otterrebbero $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots$. Come queste formole siano riducibili a quelle del precedente paragrafo si può agevolmente vedere supponendo $f=x, y, z, \ldots$ nelle formole stesse, purchè si ammetta la possibilità (che verrà esaminata nel capitolo seguente) di considerare anche $x, y, z, \ldots$ come funzioni di $u, v, w, \ldots$, dotate di derivate parziali prime:

$$\left\{\begin{array}{l}
1=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots\\[2mm]
0=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots\\[2mm]
0=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots\\[2mm]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

Da queste si trae

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(y, z, \ldots)}{\partial(v, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(y, z, \ldots)}{\partial(u, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(y, z, \ldots)}{\partial(u, v, \ldots)}, \ldots;$$

quindi, sostituendo in (21), si ritrova la (20), nella quale sono d'altronde incluse anche le ultime formole, come subito si riconosce prendendo successivamente $f=u, v, w, \ldots$.

168. Un'altra via si presenta per giungere alla (20); e noi vogliamo qui indicarla solo per metter bene in evidenza che una derivata parziale *non è che un quoziente*, il quoziente di due differenziali parziali. Così, per esempio, si può ottenere $\frac{\partial f}{\partial x}$ dividendo l'uno per l'altro i differenziali

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\cdots, \quad dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv+\cdots,$$

resi parziali mercè le ipotesi $dy=0, dz=0, \ldots$, sicchè si ha

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)dv+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}-\frac{\partial f}{\partial w}\right)dw+\cdots=0,$$

purchè fra $du, dv, dw, \ldots$ intercedano i vincoli

$$\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \ldots = 0 \,,$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw + \ldots = 0 \,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ne segue, eliminando $du, dv, dw, \ldots,$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \,,$$

d'onde si trae l'espressione (20) di $\partial f / \partial x$.

169. **Derivate in una data direzione**. Supponiamo, per fissare le idee, che si abbia una funzione $f(x, y, z)$ di tre variabili indipendenti, ossia una quantità, della quale sono dati i valori in ogni punto dello spazio. Il modo più naturale di estendere la nozione di derivata, quando si passa dalle funzioni d'una variabile unica a quelle di più variabili, consiste nel considerare l'incremento che subisce la funzione quando da un punto M si va in un altro punto M', e nel cercare il limite del rapporto di tale incremento alla grandezza h del segmento MM', nell'ipotesi che, fissato M, si faccia tendere M' ad M in una data direzione, definita dai coseni α, β, γ dei suoi angoli con le direzioni degli assi. È questo limite che si chiama *derivata* della funzione nella direzione considerata. Esistono dunque intorno ad ogni punto M *infinite* derivate; ma esse sono tra loro vincolate in modo assai semplice e notevole. La derivata nella direzione (α, β, γ) è infatti

$$\lim_{h=0} \frac{f(x + \alpha h, y + \beta h, z + \gamma h) - f(x, y, z)}{h}$$
$$= \lim_{h=0} \left[\alpha f'_x(x + \theta\alpha h, \ldots) + \beta f'_y(x + \theta\alpha h, \ldots) + \ldots \right] = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} \,,$$

dove le derivate parziali prime di f, supposte continue, s'intendono calcolate nel punto M. Immaginando un segmento infinitesimo $d\sigma$, collocato, con un estremo in M, sulla retta spiccata da M nella direzione (α, β, γ), la derivata in questa direzione si suole rappresentare con $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$, sicchè

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} \,.$$

Fissiamo una direzione, i cui coseni direttori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ siano proporzionali alle derivate parziali prime di f, dimodochè

$$\frac{\alpha_0}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{\beta_0}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{\gamma_0}{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\ , \quad \text{dove} \quad \Delta f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 .$$

Se θ rappresenta l'angolo della direzione (α, β, γ) con $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}=(\alpha\alpha_0+\beta\beta_0+\gamma\gamma_0)\sqrt{\Delta f}=\cos\theta . \sqrt{\Delta f} .$$

Dunque, se portiamo nella direzione $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ un segmento $\sqrt{\Delta f}$, *la projezione di questo segmento sopra ogni altra direzione misura la derivata della funzione nella direzione stessa.* Ne segue, in particolare, che la direzione $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ è quella secondo cui *più rapidamente varia* la funzione. Nelle infinite direzioni perpendicolari ad essa la funzione *tende* invece *a rimanere costante.*

170. **Parametri differenziali.** Si chiamano così quelle espressioni, formate con le derivate parziali d'una funzione f, che son dotate di carattere *invariantivo*, hanno cioè un significato indipendente dalla scelta degli assi. Si capisce che siffatte espressioni sono destinate ad avere grande importanza in Geometria, in Meccanica, in Fisica, dovunque si tratta di studiare fatti, che non hanno nulla da vedere con gli assi che si scelgono *. Così le derivate parziali prime di f sono evidentemente vincolate agli assi di riferimento, e cambiano con essi; ma resta invariata la somma Δf dei loro quadrati, che per questa ragione si chiama *parametro differenziale* del *primo* ordine. Infatti si è visto nel paragrafo precedente che Δf è uguale al quadrato di $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ nella direzione della *più rapida* variazione di f, ed è ovvio che tale direzione dipende solo dai valori di f, e non dagli assi di riferimento. È anche invariante l'espressione

$$\Delta^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} ,$$

che si chiama *parametro differenziale* del *secondo* ordine. Infatti si ha, ripetendo la derivazione nella direzione (α, β, γ),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}=\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots\right)+\cdots ;$$

* A questo concetto s'informa il *Calcolo differenziale assoluto*, ideato da G. Ricci, dell'Università di Padova. Vedi il *Bulletin des sciences math. et astr.*, 1892, p. 186.

e se si cerca il luogo delle rette, uscenti da M, secondo le quali è nulla la derivata seconda, si trova il cono quadrico

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \cdots + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdots = 0 . \tag{22}$$

Evidentemente questo cono non dipende dalla scelta degli assi. È dunque invariante il discriminante (hessiano della funzione f) della forma quadratica (22), e godono della proprietà invariantiva anche le somme * dei suoi minori principali del primo o del secondo ordine, ed in particolare $\Delta^2 f$. Le funzioni per le quali si ha sempre $\Delta^2 f = 0$ (equazione di Laplace) si dicono *armoniche*, ed hanno molta importanza nelle applicazioni del Calcolo. Armonica, per esempio, è la temperatura in un corpo termicamente equilibrato; è armonica la funzione potenziale fuori dello spazio occupato dalle masse attive; *ecc.*

171. Le considerazioni precedenti gettano molta luce sulla discussione dei minimi e dei massimi delle funzioni di più variabili. Se per M si conduce una retta qualunque, e si considerano soltanto i valori che una funzione f prende lungo questa retta, è chiaro che in M non si avrà nè minimo, nè massimo, salvo che non sia $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$. Siccome ciò avviene nelle infinite direzioni perpendicolari ad $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, si vede che *per ogni punto* M *dello spazio passano infinite rette, situate in un piano, lungo le quali la funzione subisce, in* M, *un minimo o un massimo.* Possono tuttavia fare eccezione certe due rette, generatrici del cono (22), giacchè lungo tali rette la derivata seconda si annulla in M. Tutto ciò suppone che le derivate parziali prime non si annullino simultaneamente nel punto che si considera, altrimenti, essendo allora $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$ in ogni direzione, è chiaro che *lungo tutte le rette uscenti da siffatti punti la funzione subisce, in essi, un minimo o un massimo*, fatta eccezione, forse, di quelle che son collocate sul cono (22). Se questo è immaginario, non si presenta l'eccezione, e $\partial^2 f / \partial \sigma^2$, funzione continua di α, β, γ, non potendo annullarsi per valori reali di α, β, γ, conserva un segno invariato per tutte le direzioni. Così si spiega perchè, avendosi in M sempre un minimo, o sempre un massimo, in qualunque direzione, la funzione ha effettivamente nello spazio, in M, un minimo o un massimo. Invece, se il cono (22) è reale, non si avrà nè minimo nè massimo, perchè lungo certe rette la funzione diventa minima in M, lungo certe altre diventa massima, e le due regioni costituite da tali rette sono separate appunto dal cono (22). Nel caso particolare delle funzioni armoniche, le tre derivate parziali seconde, la cui somma è $\Delta^2 f = 0$, non possono aver tutte lo stesso segno, e però il cono

* *Analisi algebrica*, p. 68.

(22) è sempre reale. Ne segue che le funzioni armoniche son prive di m
nimi e di massimi.

172. **Esercizii**: *a)* Proponiamoci di esprimere in coordinate polari i paramet
differenziali d'una funzione $f(x, y)$ dei punti d'un piano. Si ha

$$x = r\cos\theta \quad . \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \ .$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta \quad . \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta \ .$$

Dunque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \quad . \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta \ . \quad (2$$

Del resto queste ultime formole si possono (*cfr.* § 167) stabilire direttamente, c
me le prime, dopo avere osservato che dalle relazioni $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \mathrm{arc\,tg}$
si deduce

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta \ , \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \mathrm{sen}\,\theta \ , \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r} \ .$$

Quadrando e sommando le (23) si ottiene

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 .$$

Ora, se applichiamo le (23) a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, invece che ad f, troviamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right).\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right).\mathrm{sen}\,\theta \ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta\right).\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta\right).\cos\theta \ .$$

cioè

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta + 2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \theta}\right)\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)\mathrm{sen}^2\theta \ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\,\mathrm{sen}^2\theta - 2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \theta}\right)\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)\cos^2\theta \ .$$

Dunque

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \ .$$

Nel caso di n variabili, se f è funzione della sola $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \dots}$, si l

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{df}{dr} \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{df}{dr} \ , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{df}{dr} \ , \ \dots ;$$

poi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\frac{x^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)\,,\ \text{ecc.}$$

Dunque

$$\Delta f=\left(\frac{df}{dr}\right)^2\,,\quad \Delta^2 f=\frac{n}{r}\frac{df}{dr}+r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{df}{dr}\right).$$

Dall'ultima formola risulta che, se si vuole una funzione armonica della sola r, bisogna che $r^{n-1}\frac{df}{dr}$ sia costante, e conseguentemente che si abbia, a meno di costanti, $f=\log r$ per $n=2$, ed $f=r^{2-n}$ per $n\gtrless 2$.

b) Se si vuol calcolare anche l'hessiano $H=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$, bisogna ancora conoscere

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\right).\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\right).\cos\theta\ .$$

Posto, per brevità,

$$\varphi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)\,,\quad \psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\,,$$

si trova

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\varphi\operatorname{sen}2\theta-\psi\cos 2\theta\ :$$

ed anche le formole ottenute nel precedente esercizio si possono scrivere in modo analogo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\tfrac{1}{2}\Delta^2 f+\varphi\cos 2\theta+\psi\operatorname{sen}2\theta\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\tfrac{1}{2}\Delta^2 f-\varphi\cos 2\theta-\psi\operatorname{sen}2\theta\ .$$

Dunque $H=\tfrac{1}{4}(\Delta^2 f)^2-(\varphi^2+\psi^2)$, ossia

$$H=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} & \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\end{vmatrix}.$$

c) Passiamo a calcolare, più generalmente, le derivate seconde di $f(x\,,y)$ rispetto ad una qualsiasi coppia $u\,.\,v$, di variabili indipendenti. Procedendo come nel § 166 si trova, in primo luogo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\,: \qquad (24)$$

poi, analogamente, dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\,,
\end{aligned}\right.$$

si possono dedurre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Il determinante del sistema è

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix} = \mathfrak{J}^3 .$$

ed i complementi algebrici dei suoi elementi sono gli omologhi elementi del determinante

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 & -\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \\ -2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & -2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 & -\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \end{vmatrix},$$

moltiplicati per $\mathfrak{J}$. Ne segue

$$\mathfrak{J}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)\right]+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right)\right]$$
$$-2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\right)\right], \text{ ecc.},$$

dove per $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ bisogna sostituire i valori (24). Ma più rapidamente e più direttamente si raggiunge lo scopo applicando come nel primo esercizio le stesse (24) alle funzioni $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, invece che ad f. In tal modo si ottiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right),$$

ossia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right]$$
$$+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial v};$$

e similmente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right]$$
$$+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial v}$$

d) Ora siamo in grado di calcolare anche i parametri differenziali, primo e secondo, di f, nei quali vedremo comparire le funzioni

$$a=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 , \quad b=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 , \quad c=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} ,$$

che si presentano quando il $ds^2=dx^2+dy^2$ si trasforma in

$$ds^2=a\,du^2+2c\,du\,dv+b\,dv^2 . \tag{25}$$

Prima dalle (24) si ha subito, quadrando e sommando,

$$\Delta f=\frac{1}{\vartheta^2}\left[b\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2-2c\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}+a\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right] .$$

Poi dalle ultime formole del precedente esercizio si deduce, sommando,

$$\Delta^2 f=\frac{1}{\vartheta^2}\left(b\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2c\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}+a\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$
$$+\frac{1}{\vartheta}\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{b}{\vartheta}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{c}{\vartheta}\right)\frac{\partial f}{\partial u}+\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{a}{\vartheta}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{c}{\vartheta}\right)\frac{\partial f}{\partial v}\right] ,$$

ossia

$$\Delta^2 f=\frac{1}{\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b}{\vartheta}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{c}{\vartheta}\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a}{\vartheta}\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{c}{\vartheta}\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right] ,$$

importante *formola di Lamé*. A questa formola si giunge anche seguendo la via indicata nel § 167. Si trova subito

$$\Delta^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\Delta u+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\Delta v+\frac{\partial f}{\partial u}\Delta^2 u+\frac{\partial f}{\partial v}\Delta^2 v .$$

D'altra parte, essendo

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} , & 0=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} , \\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} , & 1=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} , \end{cases}$$

si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial y}{\partial v} , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial y}{\partial u} , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial x}{\partial v} , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial x}{\partial u} ;$$

quindi

$$\Delta u=\frac{b}{\vartheta^2} , \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{c}{\vartheta^2} , \quad \Delta v=\frac{a}{\vartheta^2} ,$$

$$\Delta^2 u=\frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{b}{\vartheta}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{c}{\vartheta}\right) , \quad \Delta^2 v=\frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{a}{\vartheta}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{c}{\vartheta}\right) ;$$

ec. Costruite le linee u e v, ossia le linee rappresentate dalle equazioni $v=co$-

stante ed u=*costante*, i valori di a, b, c, possono risultare direttamente da considerazioni geometriche. Infatti per la (25) si vede che $\sqrt{a}.du$ e $\sqrt{b}.dv$ rappresentano il ds sulle linee u e v, rispettivamente. Se α e β sono le inclinazioni di queste linee, in M, sull'asse x, si ha dunque

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial x}{\partial u}\,,\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial y}{\partial u}\,,\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\quad \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial y}{\partial v}\,,$$

e l'angolo ω delle linee stesse è dato da

$$\cos\omega = \cos(\beta - \alpha) = c/\sqrt{ab}\,,$$

sicchè, essendo evidentemente $\mathfrak{J}^2 = ab - c^2$, si ha pure $\operatorname{sen}\omega = \mathfrak{J}/\sqrt{ab}$. Per esempio, nel caso delle coordinate polari, se si prende $u = r, v = \theta$, si vede direttamente sulla figura che $a = 1, b = r^2, c = 0$, e la formola di Lamé si riduce subito alla formola ottenuta nel primo esercizio. Per qualunque doppio sistema *ortogonale* di linee, essa prende la forma semplicissima

$$\Delta^2 f = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right].$$

Funzioni implicite.

173. Se nella relazione $f(x, y) = 0$ si pensa y come funzione della x, si può, applicando la regola (§ 131) per la derivazione delle funzioni composte, immediatamente scrivere l'eguaglianza

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0\,, \tag{26}$$

dalla quale si deduce, quando $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$, il valore di y'; ma nel far ciò si viene tacitamente ad *ammettere l'esistenza* di y', mentre nulla ci autorizza ad asserire *a priori*, non solo che y' esista, ma neppure che *y possa riguardarsi come funzione* di x. Nondimeno queste affermazioni sono lecite. Sia infatti (x_0, y_0) una coppia qualunque di valori di x e di y, soddisfacenti ad $f = 0$; e supponiamo che, per x ed y variabili rispettivamente negli intervalli $(x_0 - h, x_0 + h)$ e $(y_0 - k, y_0 + k)$, siano continue le funzioni f'_x ed f'_y. Supponiamo ancora che h e k siano stati presi sufficientemente piccoli perchè f'_y conservi sempre il segno di $f'_y(x_0, y_0) \gtrless 0$. Ciò è possibile, per la continuità stessa di f'_y. È poi chiaro che, in forza delle ipotesi, il rapporto di f'_y ad f'_x non può diventare, in valore assoluto, arbitrariamente piccolo, e però esiste un numero positivo α, tale che, variando x ed y nei rispettivi intervalli, è costantemente $|f'_y| > \alpha |f'_x|$.

Se h, che si può prendere piccolo quanto si vuole, è minore di $k\alpha$, si ha

$$h\,|f'_x| < k\alpha\,|f'_x| < k\,|f'_y|\,.$$

Ne segue che nell'eguaglianza

$$f(x_0+\xi\,, y_0\pm k) = \xi f'_x(x_0+\theta\xi\,, y_0\pm\theta k) \pm k f'_y(x_0+\theta\xi\,, y_0\pm\theta k)\,,$$

a cui si riduce la formola di Taylor tenendo presente che $f(x_0\,, y_0)=0$, il valore assoluto della prima parte del secondo membro è inferiore al valore assoluto della seconda parte, per qualunque ξ compreso fra $-h$ ed h. Dunque il segno di $f(x_0+\xi\,, y_0\pm k)$ è quello di $\pm k f'_y(x_0+\theta\xi\,, y_0\pm\theta k)$; e però, siccome il segno di f'_y non cambia, si vede che, fissato ξ, i valori di $f(x_0+\xi\,, y)$, funzione della sola y, corrispondenti ai valori y_0-k ed y_0+k di y, hanno segni opposti. Ora la detta funzione è continua, perchè ammette la derivata f'_y. Essa è dunque (§ 34) nulla per qualche valore $y_0+\eta$ di y, appartenente all'intervallo $(y_0-k\,, y_0+k)$; e non può annullarsi più d'una volta, perchè, restando invariato il segno della sua derivata, essa (§ 59) cresce sempre, o decresce nel detto intervallo. È dunque vero che, fissato arbitrariamente un valore $x=x_0+\xi$, vi è un valore $y_0+\eta$ di y, ed uno solo, per cui sussiste la relazione $f(x, y)=0$. Fra i limiti assegnati questa relazione definisce dunque una funzione y di x; funzione evidentemente continua, perchè, se si fa tendere ξ a zero in $f(x_0+\xi\,, y_0+\eta)=0$, ossia in

$$\xi f'_x(x_0+\theta\xi\,, y_0+\theta\eta) + \eta f'_y(x_0+\theta\xi\,, y_0+\theta\eta) = 0\,,$$

si vede che, essendo f'_x finita ed $f'_y \gtrless 0$, anche η tende a zero. La funzione ammette inoltre la derivata, giacchè si ha, col far tendere ξ a zero,

$$\lim\frac{\eta}{\xi} = -\lim\frac{f'_x(x_0+\theta\xi\,, y_0+\theta\eta)}{f'_y(x_0+\theta\xi\,, y_0+\theta\eta)} = -\frac{f'_x(x_0\,, y_0)}{f'_y(x_0\,, y_0)}\,.$$

Così, partendo dal punto $(x_0\,, y_0)$, siamo giunti a trovarne infiniti altri (x, y) soddisfacenti ad $f=0$, nell'interno del rettangolo definito dai vertici $(x_0\pm h\,, y\pm k)$; ed essi si trovano tutti nelle condizioni stesse di (x_0, y_0), sicchè l'ultima conclusione è applicabile a ciascun punto (x, y). Resta così dimostrata la formola (26). Si noti, per finire, che, essendo f'_x ed f'_y continue, ed $f'_y \gtrless 0$, anche y' è una funzione continua.

174. Più generalmente, se la relazione

$$f(x, y, z, \ldots, u) = 0 \tag{27}$$

è soddisfatta dai valori $x_0, y_0, z_0, \ldots, u_0$ delle variabili, se intorno a questi valori esistono e sono continue le derivate parziali prime di f, e se, per i valori considerati, è $f'_u \gtrless 0$, si può affermare che u è una funzione delle variabili $x, y, z, \ldots$, che ammette le derivate parziali prime continue. Queste si ottengono derivando parzialmente la relazione (27), così:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad . \quad \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad ; \ldots .$$

La dimostrazione è identica a quella del caso particolare già considerato.

175. Ulteriori differenziazioni porgeranno i valori delle successive derivate. Per esempio, nel caso della relazione $f(x, y)=0$, basta differenziare $\frac{\partial f}{\partial x} dx+\frac{\partial f}{\partial y} dy=0$ per calcolare y'', giacchè si ottiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2+\frac{\partial f}{\partial y} d^2 y=0 \ ,$$

e se ne ricava subito, mettendo per y' il suo valore, dato dalla (26),

$$-y''\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 ,$$

ovvero

$$y''=\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} ;$$

ecc. Proponiamoci ancora di calcolare le derivate parziali p, q, r, s, t della funzione z, definita implicitamente dalla relazione $f(x, y, z)=0$. Le prime due derivate si deducono dalle uguaglianze

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z} p=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z} q=0 \ , \qquad (28)$$

ottenute derivando parzialmente $f=0$ rispetto ad x e ad y. Ora, derivando la prima eguaglianza rispetto ad x, la seconda rispetto ad y, si trovano le relazioni

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} p+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} p^2+\frac{\partial f}{\partial z} r=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} q+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} q^2+\frac{\partial f}{\partial z} t=0 \ ,$$

dalle quali si ricavano i valori di r e di t:

$$r=\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{vmatrix}, \quad t=\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{vmatrix}.$$

Derivando la prima delle (28) rispetto ad y, o la seconda rispetto ad x, si ottiene

$$s=\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{vmatrix}.$$

Qui si noti che i tre determinanti precedenti si deducono dall'unico determinante

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{vmatrix}$$

prendendo i complementi algebrici degli elementi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Ne segue, in virtù di note * proprietà dei determinanti,

$$rt-s^2=-\frac{D}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^4}.$$

176. Più generalmente ancora, date le m relazioni

$$\left\{\begin{array}{l} f(x\,,y\,,z\,,\ldots,u\,,v\,,w\,,\ldots)=0\;, \\ \varphi(x\,,y\,,z\,,\ldots,u\,,v\,,w\,,\ldots)=0\;, \\ \psi(x\,,y\,,z\,,\ldots,u\,,v\,,w\,,\ldots)=0\;, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;, \end{array}\right. \qquad (29)$$

* *Analisi algebrica*, p. 31.

soddisfatte per $x=x_0, y=y_0, \ldots, u=u_0, v=v_0, \ldots$, si potranno considerare le m variabili $u, v, w, \ldots$ come funzioni, dotate di derivate parziali prime, delle n variabili $x, y, z, \ldots$, *purchè le derivate parziali prime di* $f, \varphi, \psi, \ldots$ *siano continue, ed inoltre sia diverso da zero, per i valori considerati, il determinante jacobiano*

$$\mathfrak{J}=\frac{\partial(f, \varphi, \psi, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} .$$

Per $m=1$ si ricade sul teorema del § 174. Per dimostrare il teorema generale basterà dunque far vedere che, se il teorema stesso è vero nel caso di $m-1$ relazioni, esso sussiste per m relazioni. Ora, poichè nel punto $(x_0, y_0, \ldots, u_0, \ldots)$ si suppone $\mathfrak{J} \gtrless 0$, si può essere sicuri che almeno una delle derivate $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}, \ldots$ è diversa da zero nello stesso punto. Supponiamo che sia $\frac{\partial f}{\partial u} \gtrless 0$. Allora, rammentando le ipotesi fatte, ed invocando il teorema del § 174, si può affermare che u è una funzione di $x, y, \ldots$ $v, w, \ldots$, dotata di derivate parziali prime *continue*. Se immaginiamo che se ne sostituisca l'espressione nelle rimanenti equazioni (29), troviamo

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_1(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots)=0 , \\ \psi_1(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots)=0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right. \tag{30}$$

È questo un sistema di $m-1$ equazioni, che lega le $m-1$ variabili $v, w, \ldots$ alle rimanenti n. Le derivate parziali prime di $\varphi_1, \psi_1, \ldots$ esistono, *e sono continue*, perchè si ha

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} , \text{ ecc.}$$

Ben presto vedremo che il nuovo jacobiano

$$\mathfrak{J}_1=\frac{\partial(\varphi_1, \psi_1, \ldots)}{\partial(v, w, \ldots)}$$

è, come $\mathfrak{J}$, diverso da zero. Dunque il sistema (30) definisce $v, w, \ldots$ come funzioni di $x, y, z, \ldots$, dotate di derivate parziali prime; ed altrettanto si può dire di u, quando si immagina che nella sua espressione, dedotta dalla prima delle (29), si sostituiscano $v, w, \ldots$ in funzione di $x, y, z, \ldots$ Si ottiene così un sistema di funzioni $u, v, w, \ldots$, le quali prendono i valori $u_0, v_0, w_0, \ldots$ per $x=x_0, y=y_0, z=z_0, \ldots$, ed ammettono, intorno a questo punto, le derivate parziali prime. Adunque tutto si riduce a dimostrare che $\mathfrak{J}_1 \gtrless 0$. Orbene supponiamo che, in $\mathfrak{J}$, gli elementi della prima verticale, moltiplicati per $\frac{\partial u}{\partial v}$, si aggiungano ordinatamente a quelli della seconda; poi gli stessi elementi, moltiplicati per $\frac{\partial u}{\partial w}$, si aggiungano a quelli della terza verticale; *ecc.* Gli elementi del nuovo determinante sono

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f}{\partial u}\,, & \frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}=0\,, & \frac{\partial f}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}=0\,,\ldots \\
\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,, & \frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\,, & \frac{\partial \varphi}{\partial w}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial w}\,,\ldots \\
\frac{\partial \psi}{\partial u}\,, & \frac{\partial \psi}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{\partial \psi_1}{\partial v}\,, & \frac{\partial \psi}{\partial w}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{\partial \psi_1}{\partial w}\,,\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Dunque $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_1\frac{\partial f}{\partial u}$; e siccome $\frac{\partial f}{\partial u}$ è finita, e $\mathfrak{J}$ si suppone diverso da zero, è pure $\mathfrak{J}_1 \gtrless 0$.

177. Constatata così l'esistenza delle derivate parziali prime delle funzioni definite dal sistema (29), si possono rapidamente calcolare le derivate stesse derivando parzialmente le uguaglianze (29) rispetto a ciascuna delle variabili $x, y, z, \ldots$, che si assumono come indipendenti. Così, per esempio, derivando rispetto ad x, si ottiene il sistema di equazioni lineari

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0\,, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0\,, \\
\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{array}\right.$$

il cui determinante è appunto $\mathfrak{J} \gtrless 0$. Ne segue, per la regola di Cramer,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(f,\varphi,\ldots)}{\partial(x,v,\ldots)}\,,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(f,\varphi,\ldots)}{\partial(u,x,\ldots)}\,,\ \text{ecc.}$$

178. **Esercizii:** *a)* Calcolare l'angolo ω di due linee piane $\varphi=0$, $\psi=0$, incrociantisi in un punto (x, y). Per la formola (26) i coefficienti angolari delle tangenti alle due curve sono

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,\quad \operatorname{tg}\beta=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial y}\,,$$

sicchè

$$\operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,$$

$$\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,,\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}}\frac{\partial\psi}{\partial y}\,,$$

e per conseguenza (*cfr.* § 172, *d*)

$$\operatorname{sen}\omega = \operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi . \Delta\psi}} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} .$$

Si noti che il *contatto* fra le due curve ci è rivelato dall'annullarsi del determinante jacobiano delle funzioni φ e ψ.

b) Se ad una linea piana, rappresentata dall'equazione

$$f(x, y, u, v, \ldots) = 0 ,$$

in cui $u, v, \ldots$ sono implicitamente definite in funzione delle coordinate x ed y mercè le n relazioni

$$\varphi(x, y, u, v, \ldots) = 0 \quad , \quad \psi(x, y, u, v, \ldots) = 0 \; , \; \ldots \; ,$$

si vuole costruire la tangente in un punto qualunque, non è necessario eliminare $u, v, \ldots$ fra le $n+1$ uguaglianze per ottenere prima l'equazione della linea in x ed y; ma, considerando invece le predette uguaglianze come quelle che definiscono $y, u, v, \ldots$ in funzione dell'unica variabile indipendente x, basterà derivarle ed eliminare le derivate di $u, v, \ldots$ dalle equazioni in tal modo ottenute:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \cdots = 0 \; , \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \cdots = 0 \; , \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \cdots = 0 \; , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Uno dei grandi vantaggi del Calcolo differenziale consiste appunto nell'evitare eliminazioni quasi sempre impossibili praticamente, conducendo invece, mercè la derivazione o la differenziazione, a sistemi di equazioni *lineari*, che si sanno sempre risolvere. Così, nel caso attuale, si giunge alla formola

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial(f, \varphi, \psi, \ldots)}{\partial(x, u, v, \ldots)} \Big/ \frac{\partial(f, \varphi, \psi, \ldots)}{\partial(y, u, v, \ldots)} ,$$

estensione manifesta della (26).

c) Similmente una superficie sia data mediante due equazioni, vale a dire che la relazione fra le coordinate dei suoi punti si debba considerare come risultante dall'eliminazione di u fra le equazioni

$$\varphi(x, y, z, u) = 0 \quad ; \quad \psi(x, y, z, u) = 0 \; ;$$

e supponiamo che si vogliano calcolare p, q, r, s, t, cioè le derivate parziali prime e seconde di z, funzione delle variabili indipendenti x ed y. Derivando le due equazioni una volta rispetto ad x, l'altra rispetto ad y, si ottengono i sistemi

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases},$$

dai quali si deduce, eliminando le derivate di u,

$$p=-\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,u)}\Big/\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,u)}, \quad q=-\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,u)}\Big/\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,u)}.$$

Le altre derivate si possono ricavare, con derivazione diretta, da p e q, o pure risolvendo le equazioni che si ottengono col derivare parzialmente i sistemi precedenti. In particolare, se l'equazione della superficie è $z=f(x,y,u)$, dove u è implicitamente definita in funzione di x e di y mediante l'equazione $\varphi(x,y,u)=0$, si ha subito

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0\ ;$$

quindi

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}=\frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,u)}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Ne segue

$$r=\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dove per $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ bisogna porre i valori che si ricavano dalle equazioni

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0\ , \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\ ;\ ecc.$$

179. Date m funzioni $y_1, y_2, \dots, y_m$ delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, è importante saper riconoscere se esse sono fra loro *indipendenti*, cioè se nessuna di esse è funzione delle altre. Per questo basta esaminare la matrice jacobiana del sistema, ossia

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \frac{\partial y_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{matrix}\right|,$$

i cui elementi si suppongono funzioni continue. *Se μ è la caratteristica della jacobiana, il sistema considerato racchiude μ funzioni indipendenti*, e le altre $m-\mu$ sono funzioni delle prime. Dimostriamo questo importante teorema:

a) È lecito ammettere che il determinante

$$\mathfrak{J}=\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_\mu)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_\mu)}$$

è diverso da zero, perchè la jacobiana racchiude, per ipotesi, almeno un determinante, non nullo, dell'ordine μ, e si può sempre supporre che tale determinante sia proprio $\mathfrak{J}$, perchè basta immaginare che si numerino con indici non maggiori di μ appunto le funzioni y e le variabili x che compariscono nel suddetto determinante. Intanto siano

$$y_1=f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad y_2=f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \ , \ \dots$$

le espressioni delle funzioni considerate, si ponga

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2 \dots, y_m)=f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)-y_i \ ,$$

e si consideri il sistema

$$\varphi_1=0 \ , \ \varphi_2=0 \ , \ \dots \ , \ \varphi_m=0 \ , \tag{31}$$

come atto a definire implicitamente, secondo quello che si è detto nel § 176, le variabili

$$x_1, x_2, \dots, x_\mu, y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \dots, y_m \ , \tag{32}$$

in funzione delle rimanenti

$$y_1, y_2, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \dots, x_n \ . \tag{33}$$

Per questo occorre che non sia nullo il determinante funzionale

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu, \varphi_{\mu+1}, \varphi_{\mu+2}, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_\mu, y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \dots, y_m)} \ ,$$

e ciò effettivamente ha luogo, perchè, essendo

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \ , \ \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_i}=-1 \ , \ \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}=0 \ ,$$

è chiaro che il detto determinante si riduce a $(-1)^{m-\mu}\mathfrak{J}$. Dunque, se b_i è il valore di y_i nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, intorno al quale si ammette l'esistenza (e la continuità) delle derivate parziali prime delle f, si può affermare che il sistema (31) definisce le (32) come funzioni implicite delle rimanenti variabili intorno al punto $(b_1, b_2, \dots, b_\mu, a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \dots, a_n)$. In altri termini, per ogni sistema di valori, arbitrariamente attribuiti alle (33), purchè questi valori differiscano da $b_1, b_2, \ldots, b_\mu, a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \ldots, a_n$, rispettivamente, per meno d'una certa quantità, si hanno valori ben determinati per le (32); e però, immaginando che alle prime μ variabili x si attribuiscano appunto questi valori, e che le rimanenti $n-\mu$ prendano i valori già loro dati in principio, si vede che $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ assumono i valori prescritti, i quali, fra certi limiti, sono stati presi ad arbitrio. È dunque vero che le prime μ funzioni y sono tra loro indipendenti.

b) Bisogna ancora far vedere che le altre $m-\mu$ funzioni y sono funzioni delle prime μ. Da quanto precede risulta solo che ciascuna di esse è funzione delle (33). Pertanto ci basterà provare che, se i e j sono maggiori di μ, la funzione y_j è indipendente da x_i. Ora, se deriviamo le (31) rispetto ad x_i, continuando sempre a considerare le (32) come funzioni delle (33), si ottiene

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_1}{\partial x_i}=0\,, \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_2}{\partial x_i}=0\,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}=0\,, \\
\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_j}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_j}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0\,,
\end{array}\right.$$

e però, eliminando le derivate delle x,

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \\
\frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \frac{\partial f_j}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial y_j}{\partial x_i}
\end{vmatrix}=0\,,$$

cioè $\mathfrak{J}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0$, e finalmente $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0$.

180. Corollario. *Perchè* n *funzioni* u, v, w, ... *di* n *variabili* x, y, z, ... *siano tra loro indipendenti, è necessario e sufficiente che sia*

$$\frac{\partial(u, v, w, \ldots)}{\partial(x, y, z, \ldots)} \gtrless 0\,.$$

Qui, come precedentemente, le funzioni si suppongono dotate di derivate prime continue.

181. Segnaliamo, per finire, una notevole proprietà dei determinanti funzionali, la quale si può considerare come un'estensione della regola (§ 43) per la derivazione delle funzioni di funzioni. Supponiamo che le y dipendano dalle x mediante altre funzioni u delle stesse x. Siccome si ha

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=\frac{\partial y_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial y_j}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial y_j}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i},$$

si vede subito che la moltiplicazione dei determinanti

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}\ ,\quad \frac{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

produce appunto il determinante funzionale delle y rispetto alle x. In altri termini

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}\cdot\frac{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\,. \tag{34}$$

In particolare

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}\cdot\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=1\,. \tag{35}$$

182. **Esercizii**: *a)* La formola (34) ne include altre, ottenute precedentemente. Per esempio, quando si vuol fare un cambiamento di variabili in una funzione f, si può subito scrivere

$$\frac{\partial(f,y,z,\ldots)}{\partial(u,v,w,\ldots)}=\frac{\partial(f,y,z,\ldots)}{\partial(x,y,z,\ldots)}\cdot\frac{\partial(x,y,z,\ldots)}{\partial(u,v,w,\ldots)}\,;$$

e poichè il primo fattore del secondo membro si riduce a $\partial f/\partial x$, si ritrova la formola (20):

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(f,y,z,\ldots)}{\partial(u,v,w,\ldots)}\Big/\frac{\partial(x,y,z,\ldots)}{\partial(u,v,w,\ldots)}\,.$$

Analogamente si trova subito

$$\frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(f,\varphi,z,\ldots)}{\partial(x,y,z,\ldots)}=\frac{\partial(f,\varphi,z,\ldots)}{\partial(u,v,w,\ldots)}\Big/\frac{\partial(x,y,z,\ldots)}{\partial(u,v,w,\ldots)}\,;$$

ed in particolare

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(z,\ldots)}{\partial(w,\ldots)}\Big/\frac{\partial(x,y,z,\ldots)}{\partial(u,v,w,\ldots)}\,;\ \textit{ecc.} \tag{36}$$

b) Per mostrare l'utilità delle formole precedenti, ci limitiamo al caso di tre variabili x,y,z, *date esplicitamente* in funzione di u,v,w, proponendoci di calcolare le derivate di u,v,w rispetto ad x,y,z, *senza cercare di conoscere prima* *le espressioni di* u, v, w *in funzione di* x, y, z. Le due terne si suppongono costituite da variabili indipendenti, dimodochè

$$\mathfrak{J}=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\gtrless 0 .$$

La formola (20) dà immediatamente

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial(y,z)}{\partial(w,u)}\ ,\ \dots\ , \tag{37}$$

e la questione è risoluta. Si noti che non è necessario conoscere queste derivate per calcolare il determinante funzionale di u, v, w rispetto ad x, y, z, ed i suoi minori del secondo ordine, perchè, in virtù di (35) e delle (36), o per le (37) stesse, si ha

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\ ,\quad \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial(v,w)}{\partial(z,x)}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\ ,\ \dots .$$

Similmente, se si tratta di calcolare i differenziali totali di u, v, w, si comincia dall'eseguire la differenziazione totale su x, y, z; poi le relazioni

$$\left\{\begin{aligned} dx&=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv+\frac{\partial x}{\partial w}dw\ ,\\ dy&=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv+\frac{\partial y}{\partial w}dw\ ,\\ dz&=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv+\frac{\partial z}{\partial w}dw\ ,\end{aligned}\right. \tag{38}$$

porgono i valori

$$du=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}dx+\frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)}dy+\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)}dz\right]\ ,\ \text{ecc.}$$

dai quali si possono nuovamente dedurre le (37).

c) In parecchie applicazioni si ha bisogno delle (38) per calcolare la somma $dx^2+dy^2+dz^2$, che si trasforma subito in un'espressione della forma

$$a\,du^2+b\,dv^2+c\,dw^2+2f\,dv\,dw+2g\,dw\,du+2h\,du\,dv\ ,$$

dove per brevità si è posto

$$a=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\ ,\quad b=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\ ,\ \dots\ ,\ f=\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}\ ,\ \dots .$$

È importante osservare che, quando sono note le sei funzioni a, b, c, f, g, h, è anche noto il determinante funzionale $\mathfrak{J}$, perchè si ha

$$\mathfrak{J}^2=\begin{vmatrix} a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}\ ;$$

ed analogamente si possono esprimere le somme

$$\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 , \quad \sum\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 , \ldots , \quad \sum\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} , \ldots ,$$

i cui valori sono dati dai minori $bc - f^2$, $ca - g^2, \ldots, gh - af, \ldots$, divisi per $\mathfrak{J}^2$. Particolarmente notevole è il caso in cui f, g, h sono identicamente nulli. Allora per le ultime osservazioni si ha $\Delta u = 1/a$, *ecc.*; e si può inoltre dimostrare che

$$\Delta^2 u = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathfrak{J}}{a} , \quad \Delta^2 v = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathfrak{J}}{b} , \quad \Delta^2 w = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial}{\partial w}\frac{\mathfrak{J}}{c} .$$

Ne segue (*cfr.* § 172, *d*), per esprimere l'operazione Δ^2 applicata ad una funzione qualunque,

$$\Delta^2 = \sum\left(\Delta u \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \Delta^2 u \cdot \frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{1}{\mathfrak{J}}\sum\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{J}}{a}\frac{\partial}{\partial u}\right) ,$$

ossia

$$\Delta^2 = \frac{1}{\sqrt{abc}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\right)\right] . \tag{40}$$

È questa la *formola di Lamé* nello spazio.

d) Quando x, y, z dipendono anche da un'altra variabile t, indipendente da u, v, w, anche $\mathfrak{J}$ dipende, in generale, da t, e si può aver bisogno di calcolarne la derivata $\mathfrak{J}'$. Se si designa con un apice ogni derivata, presa rispetto a t, la regola (§ 135) per la derivazione dei determinanti dà

$$\mathfrak{J}' = \frac{\partial(x', y, z)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial(x, y', z)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial(x, y, z')}{\partial(u, v, w)} ;$$

quindi, dividendo per $\mathfrak{J}$, si ottiene la formola

$$(\log\mathfrak{J})' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} , \tag{41}$$

che si utilizza in idrodinamica. Noi qui ne faremo uso per dimostrare in altro modo * la formola di Lamé. Si pensino x, y, z come funzioni delle variabili indipendenti ξ, η, ζ, t, e le derivate x', y', z' come uguali a funzioni note di x, y, z. Evidentemente anche u, v, w, funzioni di x, y, z, dipendono da ξ, η, ζ, e da t; e le loro derivate rispetto a t sono vincolate ad x', y', z' mediante le relazioni

$$x' = u'\frac{\partial x}{\partial u} + v'\frac{\partial x}{\partial v} + w'\frac{\partial x}{\partial w} , \quad \textit{ecc.}$$

Se x', y', z' si prendono uguali alle tre derivate parziali prime d'una funzione $\varphi(x, y, z)$, si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = x'\frac{\partial x}{\partial u} + y'\frac{\partial y}{\partial u} + z'\frac{\partial z}{\partial u} = au' + hv' + gw' , \quad \textit{ecc.},$$

* Beltrami, *Memorie dell'Accademia di Bologna*, serie 3ª, t. I, p. 467.

d'onde, rappresentando con $a_0, b_0, \ldots, h_0$ i quozienti per ϑ dei complementi algebrici di $a, b, \ldots, h$ nel determinante (39), si trae

$$\vartheta u' = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + g_0 \frac{\partial \varphi}{\partial w} \ ; \ \text{ecc.}$$

Ciò premesso, si applichi la formola (41) al primo ed al terzo determinante nell'eguaglianza

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)},$$

dopo avere osservato che, non essendo più u, v, w indipendenti da t, la formola stessa cessa di essere applicabile al determinante ϑ. Si ottiene

$$\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} = (\log \vartheta)' + \frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial w'}{\partial w}$$

$$= \frac{1}{\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\vartheta u') + \frac{\partial}{\partial v} (\vartheta v') + \frac{\partial}{\partial w} (\vartheta w') \right];$$

cioè

$$\Delta^2 \varphi = \frac{1}{\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + g_0 \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) + \cdots \right].$$

In particolare per $f = g = h = 0$ si ha

$$\vartheta = \sqrt{abc}\ , \quad a_0 = \sqrt{bc/a}\ , \quad b_0 = \sqrt{ca/b}\ , \quad c_0 = \sqrt{ab/c}\ , \quad f_0 = g_0 = h_0 = 0\ ,$$

e si ritrova così la formola (40).

APPLICAZIONI ALLE CURVE PIANE.

Differenziale dell'arco.

183. La definizione rigorosa della *lunghezza* d'un segmento curvilineo suscita questioni assai ardue *, che noi qui vogliamo evitare. Supponiamo pure che si possegga la nozione intuitiva della lunghezza, almeno per le poche curve piane che si considerano nelle applicazioni. Per queste curve, rappresentabili tutte geometricamente, è anche lecito ammettere che ogni arco MM′ è tale che, tendendo un estremo M′ verso l'estremo fisso M, l'arco finisce per essere tutto convesso da uno stesso lato, in guisa che la sua lunghezza resti compresa fra quella della corda MM′ e la somma dei segmenti delle tangenti in M ed M′, limitati fra i punti di contatto ed il punto comune Q. Se la derivata y' si suppone continua, la retta QM′ tende, come MM′, a confondersi con QM, e però gli angoli QMM′ e QM′M sono infinitesimi insieme ad MM′. Ne segue che i rapporti di QM e di QM′ alle loro projezioni su MM′ tendono all'unità, e quindi (§ 150) che le predette lunghezze differiscono dalle loro projezioni per infinitesimi superiori. Anche QM + QM′ differisce dunque da MM′ per un infinitesimo superiore, ed altrettanto si può dire *a fortiori* dell'*arco* MM′. Per conseguenza

$$\lim \frac{\text{arco}\,MM'}{\text{corda}\,MM'} = 1 .$$

184. Rappresenti s la lunghezza dell'arco di curva, che ha un estremo in un punto fisso, arbitrariamente scelto sulla curva, e l'altro nel punto M. Evidentemente s varia insieme alle coordinate x ed y del punto M, e quando questo va in M′, le cui coordinate sono $x+\delta x$ ed $y+\delta y$, l'arco s diventa $s+\delta s$, rappresentando così δs la lunghezza dell'arco MM′. Sia l la lunghezza della corda MM′, che differisce da δs, e per conseguenza (§ 153) anche da ds, per un infinitesimo superiore. Se ad l, δx, δy, nella relazione $l^2 = \delta x^2 + \delta y^2$, si sostituiscono rispettivamente ds, dx, dy, si trascurano, in ciascun membro, infinitesimi d'un ordine superiore; ma, poichè nell'eguaglianza cui si perviene

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{1}$$

non compariscono più infinitesimi, che non siano differenziali, si può

* Vedi, per esempio, il « *Cours d'Analyse* » di Jordan (2ème éd. 1er vol., pp. 90-107).

(§ 157) esser sicuri che l'eguaglianza stessa è esatta. Questa importante formola serve a calcolare s. Essa ci dice che, considerando s come funzione di x, la derivata di questa funzione è $\sqrt{1+y'^2}$; e nella terza parte del Corso si apprenderà a determinare una funzione quando se ne conosce la derivata. Se la variabile indipendente è x, ds rappresenta (§ 154) la lunghezza del *segmento di tangente* in M, limitato fra M e l'ordinata di M'; e non si ha $ds=$ arco MM' se non quando la variabile indipendente è s. In tutti i casi ds rappresenta la lunghezza di quel segmento di tangente, che va dal punto di contatto (x, y) al punto $(x+dx, y+dy)$.

185. Trasformando la (1) in coordinate polari si ottiene (§ 159, d)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \; ; \tag{2}$$

ma a questa formola si perviene anche, come alla prima, mediante considerazioni geometriche dirette. Sul raggio vettore OM' si porti OM'' $=$ OM $=r$, e sia P la projezione di M su OM'. Si ha $l^2 = \mathrm{MP}^2 + \mathrm{PM}'^2$, ed in questa eguaglianza si può ad l sostituire ds; ad $\mathrm{MP} = r\,\mathrm{sen}\,\delta\theta$ si possono successivamente sostituire $r\delta\theta$ ed $rd\theta$; e finalmente a PM', trascurando l'infinitesimo del secondo ordine $\mathrm{PM}'' = r(1-\cos\delta\theta)$, si può sostituire $\mathrm{M''M'} = \delta r$, poi dr. Si ottiene così la relazione (2), necessariamente esatta poichè ha luogo fra soli infinitesimi differenziali. Si può anche partire dalla relazione

$$l^2 = r^2 + (r+\delta r)^2 - 2r(r+\delta r)\cos\delta\theta \; ,$$

ed esser sicuri *a priori* che dal secondo membro debbono scomparire i termini non infinitesimi, o infinitesimi del primo ordine, e che ds^2 resterà esattamente rappresentato dall'insieme dei soli termini infinitesimi del secondo ordine, qualora in essi rimangano soltanto infinitesimi differenziali. Ed effettivamente la precedente espressione si riduce a

$$l^2 = \delta r^2 + 4r(r+\delta r)\,\mathrm{sen}^2\frac{\delta\theta}{2} \; ;$$

poi, sostituendo ds ad l, dr a δr, $^1/_2 d\theta$ a sen $^1/_2\delta\theta$, e trascurando $rdrd\theta^2$, si ritrova la formola (2). Di questa si fa uso, per calcolare s, osservando che, se si considera s come funzione di θ, la derivata di questa funzione è $\sqrt{r^2+r'^2}$.

186. Ora vogliamo dimostrare che *la differenza fra un arco infinitesimo e la corrispondente corda è generalmente infinitesima del terzo ordine* rispetto all'arco stesso. Infatti (§ 165) si ha, per la formola di Taylor,

$$\delta x = dx + {}^1/_2 d^2x + {}^1/_6 d^3x + \cdots \; , \quad \delta y = dy + {}^1/_2 d^2y + {}^1/_6 d^3y + \cdots \; , \tag{3}$$

qualunque sia la variabile indipendente. Se questa è s, siccome (§ 150, *e*)

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 \quad , \quad d^2x^2 + d^2y^2 = \frac{ds^4}{\rho^2} \, ,$$

si ottiene, differenziando due volte di seguito la prima eguaglianza,

$$dx d^2x + dy d^2y = 0 \quad , \quad dx d^3x + dy d^3y = -\frac{ds^4}{\rho^2} \, ;$$

quindi

$$l^2 = \delta x^2 + \delta y^2 = ds^2 - \frac{ds^4}{12\rho^2} + \cdots .$$

Ora, trascurando infinitesimi superiori, ed in particolare scrivendo $2ds$ per $\delta s + l$ in

$$\delta s^2 - l^2 = \frac{ds^4}{12\rho^2} + \cdots \quad , \quad \text{si trova} \quad \delta s - l = \frac{ds^3}{24\rho^2} + \cdots .$$

In forma precisa

$$\lim \frac{\text{arco MM}' - \text{corda MM}'}{(\text{arco MM}')^3} = \frac{1}{24\rho^2} \, .$$

Per verificare questo risultato in un caso particolare, si consideri, sopra una circonferenza di raggio ρ, un arco $\text{MM}' = 2\rho\alpha$. La lunghezza della corda è $\text{MM}' = 2\rho \operatorname{sen}\alpha$, ed il primo membro dell'ultima eguaglianza diventa

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{4\rho^2\alpha^3} = \frac{1}{24\rho^2} \, .$$

Dunque, rispetto alla questione trattata, si può dire che la curva si comporta, intorno ad M, come il suo circolo osculatore (§ 107, *e*).

Tangente e normale.

187. Sulla curva rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali dall'equazione $Y = f(X)$ si prenda un punto M, le cui coordinate siano x ed y. L'equazione d'una retta qualunque, che passa per M, è

$$Y - y = m(X - x),$$

ed è noto (§ 52) che si ha $m = y'$ per la *tangente*, e conseguentemente $m = -1/y'$ per la *normale*. Le equazioni della tangente e della normale sono dunque

$$Y - y = y'(X - x) \quad , \quad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \, , \qquad (4)$$

dove y' sta per $f'(x)$, cioè rappresenta il valore di $f'(X)$ nel punto M. In Calcolo differenziale la tangente ci si presenta sotto un aspetto anche più semplice, cioè (§ 154) come quella retta che congiunge il punto (x, y) al punto $(x+dx, y+dy)$. Questa osservazione conduce a scrivere immediatamente le equazioni della tangente e della normale sotto la forma

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}\ ,\quad (X-x)dx+(Y-y)dy=0\ , \tag{5}$$

dalla quale si passa subito alla (4) scrivendo $y'dx$ per dy, e sopprimendo il comune fattore dx. Riesce comoda la forma (5) specialmente nel caso che la curva sia rappresentata dalle equazioni $X=\varphi(t)$, $Y=\psi(t)$. Se poi la curva è data mediante l'equazione $f(X,Y)=0$, siccome si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

in ciascun punto (x, y), le equazioni (5) diventano

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0\ ,\quad \frac{X-x}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\,. \tag{6}$$

Anche a queste si può pervenire direttamente. Infatti la direzione secondo la quale la funzione $f(X,Y)$ tende a conservare il valore che ha nel punto (x, y), ossia il valore 0, è quella della tangente, e però (§ 167) i coseni direttori della normale sono proporzionali alle derivate parziali prime di f, calcolate nel detto punto, e supposte non entrambe nulle. Del resto la prima equazione (6) si può anche considerare come quella a cui si riduce l'equazione stessa della curva, quando, per punti (X, Y) infinitamente vicini ad (x, y), si trascurano gli infinitesimi d'un ordine superiore, e si osserva che in

$$f(X,Y)=f(x,y)+(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots\,.$$

è $f(x,y)=0$. Abbiamo infatti già osservato (§ 154) che, nelle circostanze accennate, la curva vien sostituita dalla tangente, intorno al punto di contatto. Nelle applicazioni conviene tener presenti le forme (4), (5), (6) delle equazioni della tangente e della normale, per adoperarle secondo l'opportunità.

188. È anche utile sapere scrivere in forma *omogenea* l'equazione della tangente ad una *curva algebrica*. Sia $f(X,Y)=0$ l'equazione della curva in forma razionale ed intera. È noto che, per renderla omogenea, si lasciano intatti i termini di più alto grado n, mentre quelli dei gradi $n-1, n-2, \ldots$ si moltiplicano per $Z, Z^2, \ldots$, rispettivamente. Si riesce così a mettere l'equazione sotto la forma omogenea $f(X,Y,Z)=0$, e basterà porre $Z=1$ per ritrovare la primitiva forma. Per un punto (x,y,z) situato sulla curva si ha $f(x,y,z)=0$; e si ha pure, identicamente, in

virtù del teorema di Eulero (§ 134),

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)=0 .$$

Intanto si è visto che l'equazione della tangente, in coordinate cartesiane non omogenee, è

$$(X-x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1+(Y-y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1=0 ,$$

dove $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1$ stanno a rappresentare ciò che diventano $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ quando vi si pone $z=1$. Ora si ha

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1+y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1=0 ,$$

e però l'ultima equazione diventa

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1+Y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1=0 ;$$

poi, rendendola omogenea, si ottiene finalmente

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0 .$$

189. Delle equazioni della tangente e della normale si fa uso quando queste rette intervengono in questioni di Geometria analitica; ma se si tratta soltanto di *costruire* la tangente o la normale ad una curva, in un dato punto, basta trovare un altro punto per ottenere, congiungendolo al punto dato, la retta che si desidera. È con questo scopo che si calcolano le lunghezze di certi segmenti, detti *sottotangente* e *sottonormale*. Se P è la projezione di M sull'asse delle ascisse, se T ed N sono i punti nei quali la tangente e la normale in M incontrano il detto asse, si chiama sottotangente il segmento TP, e sottonormale il segmento PN. Dalla figura risulta immediatamente

$$TP=y\cot\varphi=y/y' \quad , \quad PN=y\,\mathrm{tg}\,\varphi=yy' .$$

Quando si fa uso di coordinate polari, giova conoscere, per la determinazione della tangente, l'angolo ω che questa retta fa col raggio vettore. Nel triangolo MPM', già considerato (§ 185), si ha

$$\mathrm{tg}\,\omega=\lim \mathrm{tg}\,\widehat{OM'M}=\lim\frac{MP}{PM'}=\lim\frac{MM''}{M''M'}=\lim\frac{r\delta\theta}{\delta r}=\frac{r}{r'} .$$

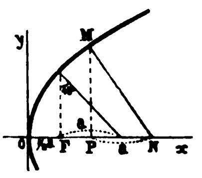
Elevata dal polo la perpendicolare al raggio vettore, essa incontra in T la tangente, in N la normale; e si chiama *sottotangente polare* il segmento OT, *sottonormale polare* il segmento ON. Evidentemente

$$OT = r\,\mathrm{tg}\,\omega = r^2/r' \quad , \quad ON = r\cot\omega = r' .$$

Quando si parla della lunghezza della normale in M si vuole intendere la lunghezza del segmento intercetto sulla normale, a partire da M, dall'asse delle ascisse o dalla perpendicolare elevata nel polo al raggio vettore, secondo che si fa uso di coordinate cartesiane o di coordinate polari. Le misure delle due lunghezze menzionate sono evidentemente

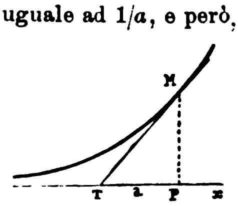
$$y\sqrt{1+y'^2} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{r^2+r'^2} .$$

190. **Esercizii:** *a)* Nella *parabola* del secondo ordine è molto semplice la costruzione (*cfr.* § 53, *a*) della normale, perchè, se si prende come asse delle x l'asse della curva, si trova che *la sottonormale è costante*; ed è questa una proprietà caratteristica della parabola, perchè da $yy' = a$ si deduce $^1/_2 y^2 = ax +$ *costante*, poi (prendendo l'origine sulla curva) $y^2 = 2ax$.



b) Quale curva *ha la sottotangente costante?* Si deve avere $y/y' = a$, cioè la derivata di $\log y$ dev'essere costantemente uguale ad $1/a$, e però, ricordando che due funzioni con derivate uguali non possono differire se non per una costante, si ha

$$\log y = \frac{x}{a} + \textit{costante}.$$

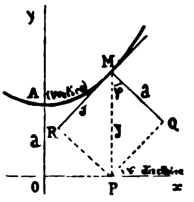


La costante si può prendere uguale a $\log a$ spostando convenientemente l'origine sull'asse delle x, e si perviene così all'equazione d'una *logaritmica*: $y = ae^{\frac{x}{a}}$.

c) Una delle più interessanti curve è rappresentata dall'equazione

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) ,$$

e si chiama *catenaria*, perchè in Meccanica si dimostra che un filo flessibile ed inestendibile, pesante ed omogeneo, sospeso per gli estremi, assume appunto la forma d'un arco di tale curva; ed inoltre, col vertice in alto, questa curva dà il profilo delle *volte senza attrito*. Si ha



$$y' = {}^1/_2\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) , \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2} .$$

Ne segue

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + y'^2 = 1 + {}^1/_4\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = {}^1/_4\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2} ,$$

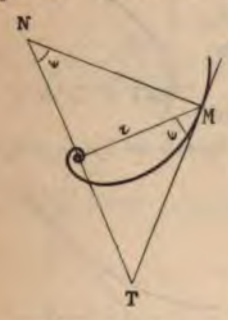
cioè $y\cos\varphi = a$. Dunque *la projezione dell'ordinata sulla normale è costante.* Inoltre

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{y}{a} = ay''$$

si deduce $ds = a\,dy'$, poi $s = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, contando gli archi a partire dal vertice A. Dunque *si rettifica l'arco* AM *projettando l'ordinata sulla tangente.*

d) Si dimostra inoltre, in Meccanica, che si può far variare la densità da un capo all'altro del filo in modo che questo opponga, su tutta la sua lunghezza, egual resistenza alla rottura; ma in tal caso la forma che il filo assume è quella di un'altra curva, che si chiama appunto *catenaria di eguale resistenza*, ed è rappresentata dall'equazione $y = -a \log\cos\frac{x}{a}$. Questa curva è costituita da infiniti rami, che si ottengono spostando successivamente di $2\pi a$, parallelamente all'asse delle ascisse, in un senso e nell'altro, il ramo compreso fra gli assintoti * $x = \pm {}^1/_2\pi a$, il quale tocca l'asse nell'origine, dove tende a comportarsi come la parabola $x^2 = 2ay$. Questo ramo centrale, col vertice in alto, dà il profilo delle *volte senza sovracarico*.

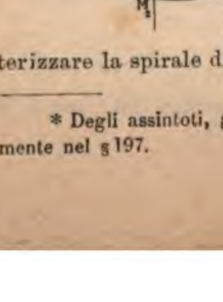
e) Molto notevole è la *spirale logaritmica*, ossia la curva che *incontra sotto un angolo costante le rette uscenti da un punto.* Se ω è costante, posto $m = \cot\omega$, da $\operatorname{tg}\omega = r/r'$ si ricava $r'/r = m$, poi $\log r = m\theta + \log a$, e finalmente $r = ae^{m\theta}$. Questa è l'equazione della spirale logaritmica. La sottonormale polare è $r' = mr$, la sottotangente è $r^2/r' = r/m$. Dunque sottotangente e sottonormale (polari) sono proporzionali al raggio vettore. Si ha pure, successivamente,



$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} r' \quad , \quad s = \frac{r}{\cos\omega} = \mathrm{MT}\ ,$$

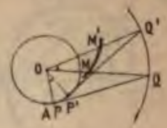
e così, mentre M percorre la curva, l'arco di spirale, contato a partire dal polo, fino ad M, si trova ad ogni istante rettificato in MT. Da questa proprietà ne segue immediatamente un'altra, per la quale la spirale logaritmica viene utilizzata in pratica: *se la spirale rotola, senza strisciare, sopra una retta, il suo polo descrive una retta.* Finalmente qui ci si presenta l'occasione di far notare come il rapporto d'un arco infinitesimo alla sua corda possa (*cfr.* § 183) non tendere ad 1. Infatti, quando M tende, lungo una spirale logaritmica, a confondersi col polo O di questa curva, il rapporto della corda OM all'arco OM non cessa di mantenersi uguale a $\cos\omega$. Peraltro si noti che non esiste la tangente in O.

f) Se si vuole una curva che abbia la *sottonormale polare costante*, bisogna porre $r' = a$. Ne segue, orientando convenientemente l'asse polare, $r = a\theta$. La curva rappresentata da questa equazione si chiama *spirale di Archimede*. Mentre θ cresce da 0 all'infinito, ω va da 0 ad ${}^1/_2\pi$, perchè $\operatorname{tg}\omega = \theta$, e però la curva esce dal polo tangenzialmente all'asse polare, per tendere poi a diventare normale ai suoi raggi vettori. Evidentemente i punti N, estremi delle sottonormali polari, stanno sopra una circonferenza di raggio a, col centro nel polo. Da ogni punto di questa circonferenza si possono condurre alla curva infinite normali, i cui punti d'incidenza stanno sopra una retta, che contiene il polo. Ma questa proprietà è ben lungi dal caratterizzare la spirale di Archimede. Così, per esempio, godono di tale proprietà a



* Degli assintoti, già noti dalla Geometria analitica, prenderemo a discorrere più ampiamente nel § 197.

che le curve rappresentate dall'equazione $\theta = \frac{r}{a} + k \log \frac{r}{a}$, fra le quali, per $k = 0$, è la spirale di Archimede. Un'altra proprietà di questa curva si può dedurre dall'equazione $r = a\theta$, dopo aver tracciato un circolo di raggio arbitrario, maggiore di a, e concentrico al circolo di raggio a, e dopo avere dai punti Q e Q', nei quali i raggi vettori OM ed OM' incontrano la circonferenza del suddetto circolo, condotte le tangenti QP e Q'P' all'altra circonferenza. Si osservi infatti che, per l'eguaglianza evidente fra i triangoli rettangoli OPQ ed OP'Q', l'angolo POP' è uguale a QOQ', ossia a $\delta\theta$, e però la lunghezza dell'arco PP' è $a\delta\theta = \delta r$. Intanto, se si fissa in A l'origine degli archi della circonferenza interna, si ha



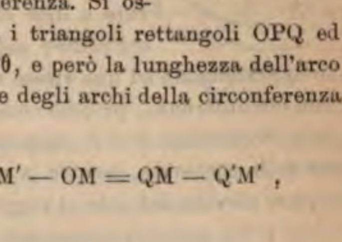
$$\text{arco PP}' = \text{arco AP}' - \text{arco AP} \quad , \quad \delta r = \text{OM}' - \text{OM} = \text{QM} - \text{Q}'\text{M}' \ ,$$

d'onde, aggiungendo anche $\text{PQ} = \text{P}'\text{Q}'$, segue

$$\text{arco AP} + \text{PQ} + \text{QM} = \text{arco AP}' + \text{P}'\text{Q}' + \text{Q}'\text{M}' \ ,$$

vale a dire che il punto M, mobile lungo la curva, può essere collegato al punto fisso A mediante un filo flessibile ed inestendibile APQM, costantemente teso, ma obbligato a poggiare sulla circonferenza ed a passare per Q. Su questa osservazione è fondato un apparecchio assai semplice *, che può servire a descrivere la spirale di Archimede; ed alla medesima proprietà ($\delta r = a\delta\theta$) si deve l'uso che si fa in pratica della spirale stessa come profilo di eccentrico, atto a produrre un moto uniforme.

g) Un'altra curva è caratterizzata dalla proprietà di avere la ***sottotangente polare costante***. Essa si chiama *spirale iperbolica*, ed è rappresentata dall'equazione $r\theta = a$. Per θ infinitesimo, r è infinitamente grande, e però la curva si estende all'infinito; ma ciò avviene assintoticamente ad una retta, che dista per a dall'asse polare, perchè $\lim_{\theta=0} r \operatorname{sen}\theta = a$. Invece, quando θ cresce all'infinito, r tende a 0, decrescendo sempre, cioè la curva si avvolge indefinitamente intorno al polo, senza raggiungerlo mai. I punti T, estremi delle sottotangenti, stanno evidentemente sopra una circonferenza di raggio a, col centro nel polo. Da ogni punto di questa circonferenza si possono condurre infinite tangenti alla curva, ed i punti di contatto stanno sopra una retta, che contiene il polo. Ciò spiega la completa indeterminazione della tangente nel polo.



h) L'ultima proprietà della spirale iperbolica appartiene anche ad altre curve, ed in particolare alla *cocleoide*, linea rappresentata dall'equazione $r = a \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$.

atti

$$\cot\omega = \frac{r'}{r} = \cot\theta - \frac{1}{\theta} \ , \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\operatorname{sen}(\omega - \theta)}{\operatorname{sen}\omega} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \frac{r}{a} \ ,$$

* Clifford « *Il senso comune nelle scienze esatte* » p. 198.

e d'altra parte nel triangolo OMS, il cui vertice S sta all'intersezione della tangente in M con la retta simmetrica dell'asse polare rispetto al raggio vettore, si ha

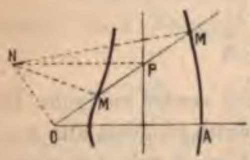
$$\mathrm{OS} = \frac{r \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen}(\omega - \theta)} = a ,$$

vale a dire che S appartiene alla circonferenza di raggio a, col centro nel polo. Dunque le tangenti negli infiniti punti, che appartengono ad uno stesso raggio vettore, concorrono in un punto della predetta circonferenza, proprio come avviene per la spirale iperbolica, tranne che il punto di concorso S è il simmetrico del vertice A rispetto al raggio vettore nel caso della cocleoide, mentre per l'altra curva il punto S appartiene alla perpendicolare elevata dal polo al raggio vettore.

i) La curva rappresentata dall'equazione $r = a\theta/\operatorname{sen}\theta$ si chiama *quadratrice*, e consta d'una infinità di rami, fra i quali uno, compreso fra gli assintoti $x = \pm \pi a$, ha qualche rassomiglianza con un ramo di catenaria di eguale resistenza, ed è particolarmente notevole per l'applicazione fattane dagli antichi * al problema della *quadratura* del circolo. Si costruisce la normale in un punto qualunque osservando che *la projezione della normale polare sull'asse polare è costante*. Infatti da $r \operatorname{sen}\theta = a\theta$ si ricava, derivando, $r\cos\theta + r'\operatorname{sen}\theta = a$.

Dall'equazione in coordinate cartesiane $\left(y = x \cot \dfrac{x}{a}\right)$ si deduce, ponendo per $x \cot \dfrac{x}{a}$ il suo sviluppo $a - \dfrac{x^2}{3a} + \ldots$, che la curva, intorno al vertice, si comporta come la parabola $x^2 = 3ay$.

j) Se a tutti i raggi vettori d'una curva si aggiunge o si sottrae una lunghezza costante, si ottiene un'altra curva, che si dice *concoide* della prima. Siccome la funzione r' resta invariata quando ad r si aggiunge una costante, si vede subito che *le normali a tutte le concoidi d'una curva, nei punti situati sopra uno stesso raggio vettore, concorrono in un punto della perpendicolare elevata dal polo al raggio vettore*. Con ciò si ha il mezzo di costruire le normali ad una curva quando si conoscono le normali ad una delle sue concoidi. È interessante osservare che le concoidi d'una spirale di Archimede rispetto al polo son tutte uguali alla spirale stessa, e ne rappresentano le infinite posizioni possibili intorno al polo. Notevole è la *concoide* propriamente detta, ossia la concoide della retta, che ha due forme differenti secondo che il segmento da aggiungere o sottrarre ai raggi vettori è minore o maggiore della distanza fra la retta ed il polo. Questa curva fu ideata, come la quadratrice ed altre curve, per *trisecare* ** gli angoli.



k) Più importante ancora è la concoide del circolo rispetto ad uno dei suoi

---

* Vedi le *Conferenze* di F. Klein *sopra alcune questioni di Geometria elementare* (trad. F. Giudice, p. 48).

** Klein « *Conferenze*, ecc. » p. 38. Per aver notizie su centinaja di altre curve vedi Loria: *Spezielle algebraischen und transcendenten Kurven der Ebene* (Leipzig, Teubner).

punti: $r = a\cos\theta + b$. Essa si chiama *lumaca*, ed ha tre forme differenti secondo che la lunghezza b (che si può sempre supporre positiva) è minore di a, o compresa fra a e $2a$, o maggiore di $2a$. Per $b = a$ si ha una speciale lumaca, detta *cardioide*, che separa, per così dire, il tipo delle lumache che contengono il polo, e son provviste d'un cappio interno ($b < a$), dalle altre ($b > a$) che non contengono il polo. Per sapere, intanto, se la curva passa nel polo, e quali rette tocca in questo punto, basta porre $r = 0$, per ricavarne $\cos\theta = -b/a$, equazione che fornisce valori reali di θ solo per $b \leq a$. Per sapere se la curva

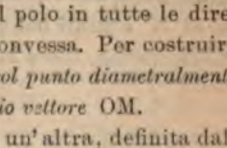
incontra in altri punti l'asse polare bisogna porre $\theta = h\pi$, e portare la lunghezza $r = (-1)^h a + b$ nel senso positivo dell'asse polare, o nel senso negativo, secondo che h è pari o dispari. Si ottengono così due punti, situati alle distanze $a + b$ ed $a - b$ dal polo, e si vede che per $b > a$ la curva circonda il polo in tutte le direzioni. Più oltre si vedrà che solo per $b \geq 2a$ essa è tutta convessa. Per costruire la normale in un punto qualunque M basta *congiungere* M *col punto diametralmente opposto, sulla circonferenza, al punto di questa, che sta sul raggio vettore* OM.

l) Se ad una curva $r = f(\theta)$ se ne fa corrispondere un'altra, definita dall'equazione

$$r = \frac{af(\theta)}{a + f(\theta)},$$

basta osservare che $r^2/r' = f^2/f'$ per accorgersi che *le tangenti nei punti delle due curve, che appartengono ad uno stesso raggio vettore, concorrono sulla perpendicolare elevata dal polo al raggio vettore.* In particolare, fra le curve che corrispondono alla retta $r = p/k\cos\theta$, si trova la conica $r = p/(1 + k\cos\theta)$, e si ottiene una costruzione delle tangenti ad una conica, che in fondo equivale alla nota proprietà: *se due rette si tagliano ortogonalmente in uno dei fuochi d'una conica, ciascuna di esse incontra la direttrice, corrispondente al fuoco che si considera, nel polo dell'altra.*

m) Si chiamano *spirali sinusoidi* * le curve rappresentate dall'equazione $r^m = a^m \operatorname{sen} m\theta$. Siccome si ha $r^{m-1}r' = a^m \cos m\theta$, $\operatorname{tg}\omega = r/r' = \operatorname{tg} m\theta$, si vede che ω varia proporzionalmente a θ, vale a dire che, *se il raggio vettore rota uniformemente intorno al polo, la tangente rota uniformemente intorno al punto di contatto.* Per questa ragione le spirali sinusoidi si chiamano anche *linee ad inflessione proporzionale*. Esse comprendono parecchie curve notevoli, come la *parabola* (col fuoco nel polo) per $m = -\frac{1}{2}$, e l'*iperbole equilatera* (col centro nel polo) per $m = -2$. Per $m = \frac{1}{2}$ si ritrova la cardioide, e per $m = 2$



si ottiene un'altra notevole curva, detta *lemniscata*. Questa, come ogni altra spirale sinusoide corrispondente ad un valore positivo di m, passa nel polo, ed è tutta raccolta a distanza finita, mentre le spirali corrispondenti a valori negativi di m si estendono all'infinito, e non contengono il polo.

---

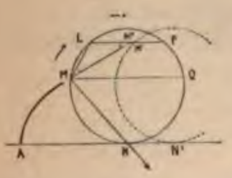
* Per le proprietà di queste e di altre curve analoghe vedi la citata opera di Loria, ed anche le nostre *Lezioni di Geometria intrinseca*, p. 45.

191. La proposizione fondamentale del Calcolo (§ 150) si può anche utilizzare in forma geometrica. Se, per esempio, si tratta di costruire la tangente ad una curva, in un punto M, si può al punto M', infinitamente vicino ad M sulla curva, sostituire un punto M'' infinitamente vicino ad M', purchè la distanza M'M'' sia infinitamente piccola rispetto ad MM', vale a dire che si abbia $\lim(M'M''/MM')=0$. Infatti, ammessa l'esistenza della tangente, a cui tende MM', anche MM'' deve tendere alla medesima retta, perchè nel triangolo MM'M'', qualunque sia l'angolo in M'', si ha

$$\lim \operatorname{sen} \widehat{M'MM''} = \lim \frac{M'M''}{MM'} \operatorname{sen} \widehat{MM''M'} = 0 \ .$$

Diamo qui appresso alcuni * esempii:

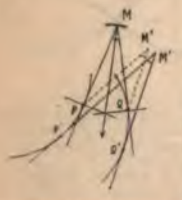
a) Quando un circolo rotola, senza strisciare, sopra una retta, ciascun punto della sua circonferenza descrive una curva, che si chiama ***cicloide***. Siano N ed N' i punti nei quali la circonferenza, considerata in due posizioni infinitamente vicine, tocca la retta; e siano M ed M' le corrispondenti posizioni di quel punto che descrive la cicloide. Per passare da M ad M' si può evidentemente immaginare che il circolo prima roti intorno al suo centro, in modo da portare in L il punto M, allontanandolo così da N (sulla retta) per un arco ML uguale ad NN'; e poi che il circolo stesso si trasferisca, parallelamente alla retta, nella sua seconda posizione, in modo che il punto M, già venuto in L, vada poi in M', descrivendo il segmento LM' = NN'. Orbene su questo segmento si può ad M' sostituire un punto M'', tale che LM'' = LM, trascurando così la differenza



$$LM' - LM'' = \text{arco}\, LM - \text{corda}\, LM \ ,$$

infinitesima del terzo ordine; e la normale in M alla cicloide si potrà considerare come limite della perpendicolare condotta da L ad MM''. Intanto, se le parallele condotte per L ed M alla retta fissa incontrano la circonferenza in P e Q, è chiaro che, essendo isoscele il triangolo LMM'', la suddetta perpendicolare divide per metà l'arco MNP, e però *la normale in* M divide per metà l'arco MNQ, cioè *passa per* N. Questa proprietà sarà più innanzi (§ 196, *n*) confermata dal calcolo.

b) Consideriamo la curva descritta dal vertice M d'un angolo *costante*, i cui lati si spostano nel piano tangenzialmente a due curve date. Siano P e Q i punti di contatto per una data posizione dell'angolo; siano P' e Q' gli analoghi punti quando il vertice si trova nella posizione M', infinitamente prossima ad M; sia M'' il punto comune alle parallele condotte per P e Q ai lati dell'angolo nella seconda posizione, e si noti che le distanze di M'' a questi lati sono generalmente infinitesime del secondo ordine, perchè ciascuna di esse è uguale alla distanza fra la tangente ad una curva ed un punto infinitamente vicino al punto di contatto. È facile dedurne che anche M'M''



* Il lettore troverà più estese applicazioni di questo principio nei vecchi ma sempre interessanti *Éléments de Calcul infinitésimal*, di Duhamel (t. I, livre I).

è infinitesimo d'un ordine superiore, e però la tangente cercata è il limite della retta MM″; ma, per l'eguaglianza fra gli angoli M ed M″, il punto M″ appartiene alla circonferenza fissa MPQ, e però MM″ tende a toccare, in M, questa circonferenza. Dunque la normale, in M, al luogo dei vertici, *si ottiene congiungendo* M *col punto d'incontro delle normali in* P *e* Q *alle curve date.*

c) Si chiama *pedale* d'una curva, rispetto ad un punto qualunque O, il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte da O sulle tangenti alla curva. Se M è un punto di questa curva, e P la projezione di O sulla tangente in M, la normale in P alla pedale *si costruisce congiungendo* P *al punto medio di* OM. Questa costruzione si deduce subito dalla precedente, dopo avere osservato che, nel caso attuale, l'angolo è retto, ed una delle due curve si riduce ad un punto. Così, per esempio, si ritrova la costruzione già ottenuta (§ 190, k) per le normali ad una lumaca, giacchè si constata facilmente che la curva $r = a\cos\theta + b$ si può anche considerare come pedale d'un circolo di raggio b, rispetto ad un punto situato alla distanza a dal centro. In particolare, se si hanno due circoli tangenti, uno dei quali doppio dell'altro, la pedale de' circolo esterno, rispetto al punto di contatto, è concoide del circolo interno: essa è una cardioide.

d) Per finire si consideri un'ellisse. Siano M ed M′ due punti infinitamente vicini su questa curva, siano F ed F′ i fuochi, e si projetti M in P su M′F, ed M′ in P′ su MF′. A prescindere da infinitesimi del secondo ordine si può scrivere

$$M'P = M'F - MF\ ,\quad MP' = MF' - M'F'\ ,\quad M'P - MP' = (M'F + M'F') - (MF + MF') = 0\ .$$

Dunque $M'P = MP'$; poi, dividendo per MM′, si ottiene $\cos\widehat{MM'F} = \cos\widehat{M'MF'}$, e finalmente, passando al limite, $\widehat{TMF} = \widehat{TMF'}$, cioè *la tangente è ugualmente inclinata sui raggi vettori.* È questa una proprietà caratteristica dell'ellisse, giacchè dall'ultima eguaglianza si trae, seguendo il cammino inverso, $M'P = MP'$; quindi, scrivendo dMF per M′P, e $-dMF'$ per MP′, si ottiene l'eguaglianza *esatta* $dMF + dMF' = 0$, e finalmente $MF + MF' =$ *costante.* In modo analogo si conduce la dimostrazione nel caso dell'iperbole, e più semplicemente ancora per la parabola.

Curvatura.

192. **Definizioni.** Si chiama *angolo di contingenza* il differenziale sostituibile (*cfr.* § 157) all'angolo delle tangenti ad una curva, in due punti infinitamente vicini; ed il suo rapporto al differenziale dell'arco si chiama *curvatura* della linea nel punto che si considera. Evidentemente, se φ è l'inclinazione della tangente sopra una retta fissa, l'angolo di contingenza è $d\varphi$, e però la curvatura è misurata dalla derivata di φ rispetto all'arco s. Per giustificare la precedente definizione della curvatura si osservi che, se fuori del punto M si prende, sulla curva, un punto M′, abbastanza (*cfr.* § 183) vicino ad M perchè l'arco MM′ sia tutto convesso da uno stesso lato, è naturale dire che questo arco è, per un dato valore δs della sua lunghezza, tanto più *curvo* quanto più grande è l'angolo $\delta\varphi$ delle tangenti estreme; ed è, per conseguenza, naturale assumere come

misura della curvatura del detto arco il rapporto $\delta\varphi/\delta s$, che tende appunto a $d\varphi/ds$ quando, fissato M, si fa tendere M' ad M. Ciò premesso, se la retta fissa è l'asse delle ascisse, i coseni direttori della tangente sono

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\varphi \ ,$$

e da queste uguaglianze si deduce, derivando,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\operatorname{sen}\varphi\frac{d\varphi}{ds} \quad , \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} \ ;$$

poi (§ 159, *d*)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3} = \frac{d\varphi}{ds} \ . \tag{7}$$

Nel caso d'una circonferenza di raggio ρ questa formola ci dice che la curvatura è costantemente espressa, in tutti i punti, da $1/\rho$; e però si può asserire che *la curvatura d'una linea piana qualunque è misurata, in ogni punto, dalla curvatura della circonferenza del suo circolo osculatore* (§ 107, *e*). È per questo che il raggio ed il centro del circolo osculatore si chiamano anche *raggio di curvatura* e *centro di curvatura.*

193. La definizione della curvatura si può anche giustificare per altra via, assumendo prima come misura della curvatura d'una circonferenza il numero inverso di quello che ne misura il raggio, come evidentemente si può fare dopo avere osservato che le piccole circonferenze sono, nel senso volgare della parola, più curve delle grandi. Dopo ciò, per misurare la curvatura d'una linea qualunque nel punto M, si considerino tutte le circonferenze che toccano in M la linea stessa, e che insieme a questa rivolgono la loro concavità tutte in un senso. È chiaro che, sempre secondo il concetto intuitivo che si ha della curvatura, si può dire che la linea data è più curva delle circonferenze *esterne*, meno curva delle *interne*, e si è in tal modo condotti ad asserire che la linea è tanto curva quanto la circonferenza del suo circolo osculatore, purchè prima si dimostri che questa appunto è la linea che separa le circonferenze esterne dalle interne. Ed infatti, se r è il raggio d'una circonferenza tangente alla curva in M, ed h la distanza di M' alla circonferenza stessa, si ha

$$(2r+h)h = (\delta x + r\operatorname{sen}\varphi)^2 + (\delta y - r\cos\varphi)^2 - r^2 \ ,$$

poi, trascurando gli infinitesimi d'un ordine superiore al terzo,

$$2rh = l^2 - 2r\frac{dx\,\delta y - dy\,\delta x}{ds} + \dots \ ,$$

ovvero, ricordando ciò che si è detto nel § 186,

$$h = \frac{ds^2}{2r} - \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{2ds} - \frac{dx\,d^3y - dy\,d^3x}{6ds} - \dots \ .$$

Intanto, se si prende s per variabile indipendente,

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{ds^3}{\rho} \quad , \quad dx\,d^3y - dy\,d^3x = ds^3 d\,\frac{1}{\rho} \, .$$

Dunque

$$h = \frac{ds^2}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) + \frac{ds^3 d\rho}{6\rho^2} + \dots \, .$$

In generale h è un infinitesimo del secondo ordine, positivo o negativo, *intorno ad* M, secondo che $r < \rho$ o $r > \rho$, vale a dire che i punti M' sufficientemente vicini ad M sono *tutti esterni* o *tutti interni* al circolo, secondo che questo è interno o esterno al circolo osculatore; ma per $r = \rho$ la distanza h diventa infinitesima d'un ordine superiore al secondo, ed ha il segno di $d\rho$. Ne segue, se la derivata di ρ rispetto ad s si suppone continua e diversa da zero in M, e se la curva s'immagina percorsa nel senso in cui l'arco s va crescendo, che i punti M' sufficientemente vicini ad M sono, *prima* di M, interni al circolo osculatore, ed esterni *dopo*, se la curvatura va decrescendo; ed invece, quando la curvatura cresce con s, i punti M' sono esterni prima di M, ed interni dopo. Dunque, in generale, *il circolo osculatore attraversa la curva nel punto stesso in cui la tocca*. Tuttavia può darsi che ciò non avvenga nei punti in cui si annulla $d\rho$, e nei quali, per conseguenza, h diventa infinitesima almeno del quarto ordine; ma, in tutti i casi, *il circolo osculatore in un punto* M *d'una curva è caratterizzato dalla proprietà di avere, dai punti* M' *infinitamente vicini ad* M *sulla curva, distanze infinitesime d'un ordine superiore al secondo.*

101. Se H è il punto d'incontro delle normali in M ed M', è facile dimostrare che il centro di curvatura, in M, è la posizione limite del punto H, quando, fissato M, si fa tendere M' ad M. Infatti, se si rappresenta con n la lunghezza del segmento MH, la distanza di M alla normale in M', evidentemente uguale ad $n \,\mathrm{sen}\, \delta\varphi$, si può d'altra parte esprimere come somma delle projezioni di δx e δy sulla tangente in M', dimodochè

$$n \,\mathrm{sen}\, \delta\varphi = \cos(\varphi + \delta\varphi) . \delta x + \mathrm{sen}(\varphi + \delta\varphi) . \delta y \; ;$$

quindi, se si chiama ρ il limite di n, si ha

$$\rho\, d\varphi = \cos\varphi . dx + \mathrm{sen}\,\varphi . dy = ds \, ,$$

vale a dire che ρ è proprio il raggio di curvatura. Si può dunque affermare che *le normali in punti infinitamente vicini ad* M *passano a distanze infinitesime dal centro di curvatura in* M; ed è poi facile apprezzare queste distanze osservando che si ha, a prescindere da infinitesimi superiori, nell'ipotesi che la variabile indipendente sia φ,

$$n = (\cos\varphi . \delta x + \mathrm{sen}\,\varphi . \delta y)\cot\delta\varphi = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{ds\,d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi} + \frac{d^2 s}{2 d\varphi} \, , \, .$$

e finalmente $n = \rho + {}^1/_2 d\rho$.

195. La (7) include tutte le altre formole, che servono a calcolare la curvatura, e spesso le supera per semplicità e rapidità di calcolo. Prendendo

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} y' \qquad \text{o} \qquad \varphi = \theta + \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{r'},$$

secondo che si fa uso di coordinate cartesiane o di coordinate polari, si ottiene, derivando,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2} \; ; \qquad \frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} \; ;$$

e poichè $ds = \sqrt{1+y'^2}\,.dx = \sqrt{r^2+r'^2}\,.d\theta$, si ritrovano le formole

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \; , \qquad \rho = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \; . \tag{8}$$

Quando la curva è data mediante l'equazione $f(x, y) = 0$, basta richiamare un precedente risultato (§ 175) per trasformare la prima delle (8) in

$$1/\rho = -\frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} . \tag{9}$$

Orbene anche questa si può far discendere dalla (7). Trattando φ come funzione di x e di y, funzioni di s, si ha

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \cos\varphi \,.\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \operatorname{sen}\varphi \,.\frac{\partial \varphi}{\partial y} ,$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sen}\varphi - \frac{\partial}{\partial y}\cos\varphi \, .$$

D'altra parte (§ 187) si sa che i coseni direttori della normale sono

$$-\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x} \; ; \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y} \, . \tag{10}$$

Dunque

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

ovvero

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta^2 f}{\sqrt{\Delta f}} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \, . \tag{11}$$

È questa un'importante *formola di Bonnet*. Un calcolo facile dà

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}=-\frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right];$$

e poichè

$$\frac{\Delta^2 f}{\sqrt{\Delta f}}=\frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right],$$

si trova finalmente la formola

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right],$$

che non differisce dalla (9). Quanto alla (11), essa è importante perchè mette in evidenza il carattere invariantivo della curvatura. Infatti un tal carattere ci è già noto (§ 170) per ciò che riguarda il primo termine del secondo membro; e però ci basterà mostrare che l'insieme degli altri termini ha un significato geometrico, indipendente dagli assi. Ora, se si rappresenta brevemente con g la funzione $1/\sqrt{\Delta f}$, e se per un qualunque punto M della data curva $f=0$ si conduce la linea lungo la quale rimane costante la funzione g, è facile calcolare l'angolo ω delle due linee, in M. Infatti, scritte le (10) relative alla seconda linea, si trova subito (*cfr.* § 178, *a*)

$$\cos\omega=\frac{1}{\sqrt{\Delta f.\Delta g}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

196. **Esercizii:** *a)* Proponiamoci di costruire i centri di curvatura delle linee che più frequentemente si adoperano nella pratica; e cominciamo dalla più semplice di tutte, dopo il circolo, ossia dalla *spirale logaritmica* ($r=ae^{m\theta}$), che del resto si riduce ad un circolo per $m=0$. Siccome $r'=mr$, $r''=mr'=m^2r$, si ha $r'^2=rr''$, e la seconda formola (8) mostra che ρ diventa uguale a $\sqrt{r^2+r'^2}=n$. Più rapidamente si giunge a questo risultato mercè la (7), osservando che da $\varphi=\theta+\omega$ segue $d\varphi=d\theta$; sicchè, essendo $ds=n\,d\theta$, si trova subito $\rho=n$, vale a dire che *nella spirale logaritmica il raggio di curvatura è uguale alla normale polare*. Dunque (*cfr.* § 190, *e*) il centro di curvatura è N. Questa proprietà apparisce evidente se, ricordando le cose dette nel § 194, si osserva che il punto H, comune alle normali in M ed M′, appartiene alla circonferenza OMM′, giacchè $\widehat{\mathrm{OMH}}=\widehat{\mathrm{OM'H}}$. Quando M′ tende ad M, la circonferenza tende a diventare tangente alla curva, in M, e però H tende a confondersi con N, punto diametralmente opposto ad M sulla circonferenza limite. Precedentemente si è visto che la tangente polare, cioè MT, rappresenta la lunghezza dell'arco OM; ed ora si noti la relazione $\rho=ms$, che si legge, per così dire, nel triangolo NMT. Per ogni curva piana si può analogamente considerare la relazione fra s e ρ, che si chiama *equazione intrinseca* della curva, ed è sufficiente * per definirne la forma.

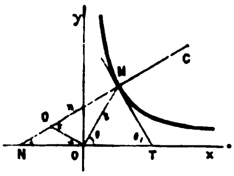
* *Geometria intrinseca*, p. 7.

b) Per la *logaritmica* $\left(y = ae^{\frac{x}{a}}\right)$ si ha $y' = \frac{y}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, $y'' = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{a}$; quindi la prima delle (8) dà

$$\rho = \frac{1}{y''\cos^3\varphi} = \frac{a}{\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi} = \frac{a}{\operatorname{sen}\varphi} + \frac{y}{\cos\varphi}\,.$$

Siano T ed N i punti nei quali la tangente e la normale incontrano l'assintoto. Se la perpendicolare elevata da T all'assintoto incontra in H la normale, *il raggio di curvatura è lungo quanto il segmento* NH, e però il centro C si può costruire prendendo $HC = NM$.

c) Per l'*iperbole equilatera*, riferita agli assintoti, si ha



$$y = \frac{a^2}{x}\,,\quad y' = -\frac{a^2}{x^2} = -\frac{y}{x}\,,$$

e però $\widehat{MTO} = \theta$; poi

$$y'' = \frac{2a^2}{x^3} = \frac{2y}{x^2}\,,\quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}\;;\quad \rho = \frac{r^3}{2a^2}\,.$$

Dunque *il raggio di curvatura varia proporzionalmente al cubo del diametro.* Per costruire il centro di curvatura si osservi che si ha

$$\rho = \frac{r^3}{2a^2} = \frac{r^3}{2xy} = \frac{r}{\operatorname{sen}2\theta} = MQ\,.$$

Dunque $MC = MQ$, cioè *il centro di curvatura è simmetrico di* Q *rispetto ad* M. Al medesimo risultato si giunge immediatamente mercè la (7), giacchè, essendo $\varphi = \pi - \theta$, si ha $d\varphi = -d\theta$, e per conseguenza $\rho = -n$. Qui notiamo che, se si prendono altri due punti M' ed M'' sulla curva, il segmento rettilineo, che va dal centro del circolo MM'M'' all'ortocentro del triangolo MM'M'', è diviso nel rapporto di 1 a 2 dal baricentro dello stesso triangolo; e che, d'altra parte, per una nota proprietà dell'iperbole equilatera, l'ortocentro appartiene alla curva. Dunque, se M' e M'' tendono ad M, siccome il baricentro ed il centro del circolo circoscritto tendono a confondersi rispettivamente con M e con C, è chiaro che l'ortocentro tende al punto H d'incontro della normale con l'altro ramo dell'iperbole, e che si ha $MH = 2\rho$. In altri termini *il diametro del circolo osculatore in un punto qualunque di un'iperbole equilatera è uguale al segmento che la curva stessa determina sulla normale.*

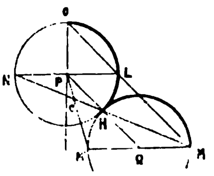
d) Notevole è la *cardioide*, anche per la facilità con cui si lascia rettificare. Da $r = a(1 + \cos\theta)$ si deduce, successivamente,

$$r' = -a\operatorname{sen}\theta\,,\quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = 2a\cos\frac{\theta}{2}\,,\quad s = 4a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,$$

ponendo nel vertice A l'origine degli archi. Se il raggio vettore OM incontra in K la circonferenza che passa per A, col centro nel polo, si vede che *l'arco* AM *è lungo quanto il segmento rettilineo* AK. Ne segue, in particolare, che la lunghezza dell'intera cardioide è $8a$. Inoltre

$$r'' = -a\cos\theta\,,\quad r'^2 - rr'' = a^2(1 + \cos\theta) = {}^1/_2 n^2\,,\quad \rho = \frac{n^3}{n^2 + {}^1/_2 n^2} = {}^2/_3 n\,.$$

Dunque *il centro di curvatura, in* M, *divide la normale polare nel rapporto di* 2 *ad* 1. A questa proprietà si giunge più rapidamente mercè la (7), quando sia già nota la costruzione della normale. Si descriva infatti la circonferenza di diametro a, che ha per concoide (§ 190, k), rispetto ad un suo punto O, la curva considerata; sia P il suo centro, L quel suo punto, che sta sul raggio vettore OM, ed N il punto diametralmente opposto al L. È noto che la normale alla cardioide, in M, è MN. Dal fatto che il triangolo MLN è isoscele, come OPL, segue $\widehat{LMN} = \frac{1}{2}\theta$. Dunque l'inclinazione della normale sull'asse polare è $\frac{3}{2}\theta$, sicchè $d\varphi = \frac{3}{2}d\theta$, e per conseguenza $\rho = \frac{2}{3}n$. Sia H l'altro punto della circonferenza, che sta su MN. Evidentemente, poichè il triangolo MLN è isoscele, H, projezione di L su MN, divide MN per metà. Sia M′ il simmetrico di L rispetto ad H. La retta PM′ incontra MN nel centro di curvatura. Infatti il punto C, così costruito, è il baricentro del triangolo LNM′; e però



$$MC = MH + \frac{1}{3}HN = \frac{4}{3}MH = \frac{2}{3}MN\ .$$

Finalmente si noti che l'equazione intrinseca della cardioide è $s^2 + 9\rho^2 = costante.$ Se poi si computano gli archi a partire dal polo, si trova che la *lunghezza dell'arco* OM è $s = 4a\,(1 - \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta)$, e d'altra parte la *lunghezza della corda* OM è

$$r = a(1 + \cos\theta) = s - \frac{s^2}{8a}\ .$$

A questa relazione si può anche giungere per via geometrica, dopo avere osservato che, in virtù dell'equazione stessa della cardioide, la perpendicolare condotta per A ad OM passa nel simmetrico di K rispetto ad M; quindi $AK^2 = 4a.2MK$, ossia $(4a - s)^2 = 8a(2a - r)$, *ecc.* Ne segue che, quando M tende ad O, la differenza fra l'arco e la corda è infinitesima, non del *terzo* ordine (*cfr.* § 186), ma del *secondo*: ciò si deve al fatto che, in O, la curvatura è infinita.

e) Dall'equazione delle *spirali sinusoidi* $r^m = a^m \operatorname{sen} m\theta$ si deduce $r^{m-1}r' = a^m \cos m\theta$, poi $(m-1)r^{m-2}r'^2 + r^{m-1}r'' = -mr^m$, cioè $(m-1)r'^2 + rr'' = -mr^2$, e finalmente $r'^2 - rr'' = m(r^2 + r'^2)$. Dunque

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+m)(r^2 + r'^2)} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{1+m} = \frac{n}{1+m}\ ,$$

risultato evidente, per la (7), giacchè $\varphi = \theta + \omega = (1+m)\theta$. Ne segue che *il raggio di curvatura è proporzionale alla normale polare.* Per $m = -2$ e per $m = \frac{1}{2}$ si ritrovano le precedenti costruzioni del centro di curvatura dell'iperbole equilatera e della cardioide; per $m = 2$ si ottiene l'analoga costruzione per la *lemniscata*; per $m = -\frac{1}{2}$ si trova che, nella *parabola*, la perpendicolare condotta per il fuoco al raggio vettore divide per metà il raggio di curvatura; *ecc.* Finalmente facendo $m = 0$ si ricade sulla costruzione trovata per la spirale logaritmica. Per questa ragione, siccome d'altra parte l'equazione $r^m = a^m \operatorname{sen} m\theta$ diventa illusoria per

$m = 0$, si suole considerare anche la spirale logaritmica come una spirale sinusoide, corrispondente al valore 0 dell' indice m. Essa è come la linea di separazione fra la classe (*cfr.* § 190, m) delle spirali sinusoidi finite, e quella delle spirali sinusoidi che si estendono all' infinito.

f) Le due classi di spirali sinusoidi si deducono l'una dall'altra per *inversione*. Si chiama così quella trasformazione geometrica, che fa corrispondere a ciascun punto del piano il suo reciproco rispetto ad un circolo fisso. Se $r = f(\theta)$ è l'equazione d'una curva qualunque, $r = a^2 : f(\theta)$ è l'equazione della sua inversa rispetto ad un circolo, che ha il raggio a e il centro nel polo. Così la spirale di Archimede e la spirale iperbolica, la cocloide e la quadratrice, l'iperbole equilatera e la lemniscata, la parabola e la cardioide, e più generalmente due spirali sinusoidi con indici m uguali, ma opposti nel segno, ci offrono altrettanti esempii di coppie di curve inverse. È dunque utile sapere come si costruiscono i centri di curvatura d'una linea quando si sanno costruire quelli d'una sua inversa. Lasciamo al lettore la cura di far vedere che, in due punti che si corrispondono su due curve inverse, le tangenti sono antiparallele rispetto al raggio vettore, ed *i centri di curvatura sono in linea retta col centro d'inversione.*

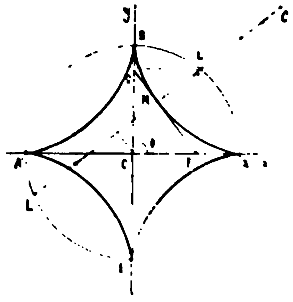
g) Si chiama *asteroide* la curva rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali dall'equazione $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Simmetrica rispetto agli assi, la curva è costituita da quattro archi uguali, tangenti agli assi negli estremi. Sia AB uno di questi quadranti, e si fissi nel suo punto di mezzo $\left(x = y = a : 2\sqrt{2}\right)$ l'origine degli archi. Evidentemente

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad s = {}^3/_2 (ax^2)^{\frac{1}{3}} - {}^3/_4 a .$$

Ne segue, in particolare, che la lunghezza dell'intera curva è $6a$. Inoltre

$$y'' = \frac{1}{3x}\left(\frac{a^2}{xy}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \rho = 3\,(axy)^{\frac{1}{3}} ;$$

poi un calcolo facile mostra che $4s^2 + \rho^2 = {}^9/_4 a^2$ è l'equazione intrinseca dell'asteroide. Ma più agevolmente si riesce a scoprire le proprietà di questa curva,



considerandola come un luogo geometrico, definito nel seguente modo. Dall'origine, col raggio a, si descriva la circonferenza, e ciascun punto di questa, L, si projetti prima sugli assi, in P e Q, poi su PQ, in M. Il luogo di M è un'asteroide, perchè, se si rappresenta con θ l'angolo LOA, si ha $MP = a \operatorname{sen}^2\theta$, $MQ = a\cos^2\theta$, e però le coordinate di M sono

$$x = MQ \cdot \cos\theta = a\cos^3\theta, \quad y = MP \cdot \operatorname{sen}\theta = a \operatorname{sen}^3\theta ,$$

e soddisfano, come si vede, all'equazione $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Ciò premesso, si ha

$$dx = -3a \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta\, d\theta, \quad dy = 3a\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta, \quad ds = 3a \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta .$$

Dunque, in primo luogo, l'inclinazione della tangente sull'asse delle x è $\pi - \theta$, vale a dire che la tangente in M è la stessa retta PQ. Ne segue subito che *il segmento determinato dagli assi sulla tangente è costantemente uguale ad* a. Inoltre, se l'origine degli archi si pone nel punto medio dell'arco AB, si ha $s = -{}^3/_4\, a\cos 2\theta$, e però

$$\text{arco}\,\mathrm{MA} = {}^3/_4\, a(1 - \cos 2\theta) = {}^3/_2\, a\,\mathrm{sen}^2\theta = {}^3/_2\,\mathrm{MP} \ .$$

Dunque gli archi MA ed MB si possono subito rettificare, sulla tangente, prolungando per una metà i segmenti MP ed MQ. Finalmente il raggio di curvatura, a prescindere dal segno, è

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = {}^3/_2\, a\,\mathrm{sen}\, 2\theta \ ;$$

e si vede nuovamente che $4s^2 + \rho^2 = {}^9/_4\, a^2$; poi, se si osserva che $\mathrm{ML} = a\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta$, si ottiene $\rho = 3\mathrm{ML}$. Dunque *il raggio di curvatura è triplo di* ML. Se poi si designa con L' l'altro punto d'incontro della normale con la circonferenza, si può anche dire che *il centro di curvatura è il simmetrico di* L' *rispetto ad* M.

h) Lungo una conica la curvatura varia come il cubo della distanza fra la tangente ed il centro. Se, per fissare le idee, si prende un'ellisse, riferita ai suoi assi, si può dall'equazione $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ successivamente dedurre

$$b^2x + a^2yy' = 0 \quad , \quad b^2 + a^2y'^2 + a^2yy'' = 0 \quad , \quad a^2y^3y'' = -b^4 \ ;$$

poi, introducendo la distanza del centro alla tangente

$$h = \frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -\frac{b^2}{y\sqrt{1 + y'^2}} \ ,$$

e scegliendo convenientemente il segno di ρ,

$$\rho = \frac{a^2b^2}{h^3} \ .$$

Altre forme di ρ si ottengono cercando di far comparire, invece di h, la lunghezza l del semi-diametro conjugato ad OM, o la lunghezza n del segmento MN di normale, compreso fra il punto d'incidenza e l'asse focale. Basta infatti osservare che $lh = ab$, $nh = b^2$, per trovare

$$\rho = \frac{l^3}{ab} \quad , \quad \rho = \frac{n^3}{p^2} \ ,$$

dove, secondo l'uso, $p = b^2/a$. All'ultima formola si giunge rapidamente in coordinate polari. Infatti, essendo $r = p/(1 - k\cos\theta)$ l'equazione della conica, riferita ad un fuoco F come polo, ed all'asse focale come asse polare, una nota formola (§ 159, *d*), in cui si pone

$$f = \frac{1 - k\cos\theta}{p} \quad ; \quad f' = \frac{k}{p}\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad f'' = \frac{k}{p}\cos\theta \quad , \quad f + f'' = \frac{1}{p} \ ,$$

ci dà subito

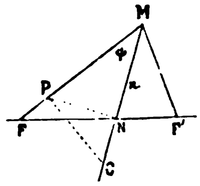
$$\rho = \frac{(r^2 - 2kr^2\cos\theta + k^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} .$$

Intanto si noti che nel triangolo FMF', poichè MN è bisettrice dell'angolo M, si ha (ricordando che $MF + MF' = 2a$, $NF + NF' = 2ka$)

$$\frac{FN}{2ka} = \frac{FM}{2a} \quad . \quad FN = kr \quad , \quad n^2 = r^2 - 2kr^2\cos\theta + k^2r^2 .$$

Si ricade così sulla formola ottenuta precedentemente.

i) Ed ora, interpetrando geometricamente l' ultima forma di ρ, cerchiamo di costruire il centro di curvatura in un punto d' una conica. Prima osserviamo che, se si projetta FNM su FM, si trova



$$n\cos\psi = r - kr\cos\theta = p ,$$

vale a dire che *la projezione della normale sul raggio vettore è costantemente uguale a p.* Ciò premesso, si ha

$$\rho = \frac{n^3}{p^2} = \frac{n}{\cos^2\psi} .$$

Dunque *per* N *si elevi la perpendicolare alla normale fino all' incontro con un raggio vettore, in* P; *poi da* P *si elevi la perpendicolare al raggio vettore: questa incontra la normale nel centro cercato.* Si giunge per altra via alla medesima costruzione richiamando alcune osservazioni di geometria infinitesimale (§ 191, *d*), per le quali, se si pone $MF = r$, $MF' = r'$, e si rappresentano con θ e θ' gli angoli in F ed F' del triangolo MFF', si ha

$$r d\theta = - r' d\theta' = \cos\psi . ds .$$

Siccome l'inclinazione della normale sull'asse focale si può esprimere sia con $\theta + \psi$, sia col supplemento di $\theta' + \psi$, è chiaro che per l'angolo di contingenza si ha

$$d\varphi = d\theta + d\psi \quad , \quad - d\varphi = d\theta' + d\psi .$$

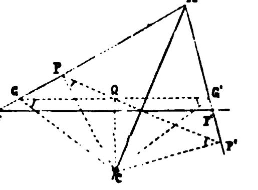
Ne segue, sottraendo e dividendo per ds,

$$\frac{2}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\theta'}{ds} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\cos\psi .$$

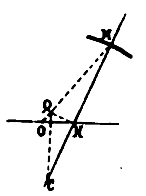
D' altra parte, essendo i fuochi separati armonicamente dalla normale e dalla tangente, le loro projezioni sulla normale dividono armonicamente il segmento n, sicchè

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{r\cos\psi} + \frac{1}{r'\cos\psi} = \frac{2}{\rho\cos^2\psi} ,$$

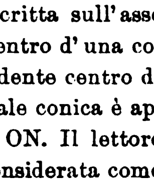
ossia $\rho\cos^2\psi = n$; ecc. Mediante semplicissime considerazioni geometriche si trasforma poi la costruzione precedente in un'altra, parimenti utile, dovuta a Mannheim *. La perpendicolare condotta per C ad FF' incontri PP' in Q, e siano G e G' i punti d'incontro con MF ed MF' della parallela condotta per Q ad FF'. Siccome gli angoli CPG e CQG sono retti, i punti C, P, Q, G stanno sopra una circonferenza, e però $\widehat{CGQ} = \widehat{CPQ}$. Analogamente si dimostra che $\widehat{CG'Q} = \widehat{CP'Q}$;



e siccome, evidentemente, si ha $\widehat{CPQ} = \widehat{CP'Q}$, si ha pure $\widehat{CGQ} = \widehat{CG'Q}$, cioè il triangolo CGG' è isoscele, e però Q divide GG' per metà. Ne risulta che la retta MQ incontra FF' nel punto di mezzo, cioè nel centro della conica. Si perviene così a quest'altra costruzione: *per* N *si elevi la perpendicolare alla normale fino all'incontro col diametro, in* Q; *poi da* Q *si conduca la perpendicolare all'asse focale: questa incontra la normale nel centro di curvatura.*



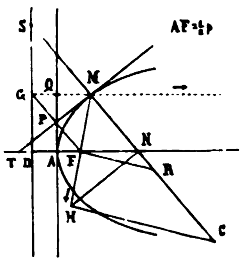
j) La prima costruzione del centro di curvatura d'una conica ci mette in grado di *costruire, in un punto, il centro di curvatura della pedale d'una curva qualunque, rispetto ad un punto dato, quando si conosce il corrispondente centro di curvatura della curva stessa.* Al punto M della curva data corrisponda, sulla pedale, il punto P, sia cioè P la projezione d'un punto fisso O sulla tangente alla curva, in M. Il centro di curvatura di questa linea si projetti su OM, in Q, poi si projetti Q sulla normale MC, ed il punto N così ottenuto si congiunga ad O. *Il centro di curvatura della pedale, in* P, *sta all'intersezione* K *di* ON *con la normale, in* P, *alla pedale.* Infatti, quando si trascurano gli infinitesimi d'un ordine superiore al secondo, alla curva data si può, intorno ad M, sostituire la circonferenza del circolo osculatore (§ 193), o qualunque altra curva che in M ammetta il medesimo centro di curvatura C; ed è chiaro che alla pedale della curva data, rispetto ad O, verrà a sostituirsi, intorno a P, la pedale della nuova curva, senza che ne rimanga alterata la posizione del centro di curvatura K. Intanto si sa dalla Geometria analitica che la pedale d'una conica rispetto ad un fuoco è la circonferenza descritta sull'asse maggiore come diametro. Dunque possiamo affermare che K è il centro d'una conica, che ha un fuoco in O, passa per M, ed ha in C il corrispondente centro di curvatura. Ora dalla costruzione apparisce in modo evidente che tale conica è appunto quella che ha l'asse focale ON. Dunque K appartiene ad ON. Il lettore potrà esercitarsi ad applicare questa costruzione alla lemniscata, considerata come pedale d'una iperbole equilatera rispetto al centro, ed alla cardioide, pedale di una circonferenza rispetto ad uno dei suoi punti; ed in tal modo ritroverà, con l'ajuto di considerazioni geometriche elementarissime, le costruzioni particolari già segnalate.



k) Quando si applica alla parabola la prima costruzione del centro di curvatura d'una conica, si riconosce facilmente, per mezzo di eguaglianze di angoli,

* *Cours de Géométrie descriptive*, p. 175.

che i triangoli MFN, HFN, sono isosceli, e se ne deduce che MH è diviso per metà da F. Si ricade così sulla costruzione già trovata, in virtù della quale si può dire che *la parabola è una spirale sinusoide*, col polo nel fuoco. Ma se invece del *fuoco* è data la *direttrice*, conviene sostituire alla costruzione precedente quella che ora ne dedurremo per mezzo di semplicissime osservazioni. Si projetti M in G, sulla direttrice, e sia S il punto d'incontro della normale con la direttrice. I triangoli rettangoli MFR, MGS, sono uguali, perchè hanno uguali gli angoli in M, ed inoltre, per una notissima proprietà della parabola, è $MF = MG$. Sono dunque uguali fra loro le ipotenuse MR, MS. Ne segue che *il raggio di curvatura è doppio del segmento di normale, staccato dalla direttrice a partire dal punto d'incidenza.* E siccome si chiamano *linee di Ribaucour* tutte quelle linee, che hanno il raggio di curvatura proporzionale alla normale cartesiana, si può dire che *la parabola è una linea di Ribaucour.*



l) Anche la *catenaria* è una linea di Ribaucour. Infatti, siccome si è dimostrato (§ 190, *c*) che, nel triangolo rettangolo MPN, la projezione di $MP = y$ sull'ipotenusa $MN = n$ è $MQ = a$, dimodochè si ha $y^2 = an$, dall'equazione della curva segue

$$y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2} \quad , \quad \rho = \frac{n^3}{y^3 y''} = \frac{a^2 n^3}{y^4} = n \ .$$

Dunque *il centro di curvatura è simmetrico di* N *rispetto ad* M. Si è anche visto precedentemente che l'arco s, contato a partire dal vertice A, è uguale a PQ. Ne segue che nel triangolo MPN si ha $s^2 = MQ \, . \, QN$; quindi, essendo $n = MQ + QN$, si vede che l'equazione intrinseca della catenaria è $\rho = a + \dfrac{s^2}{a}$.

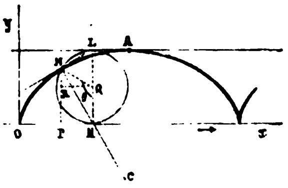
m) Per la *catenaria di eguale resistenza* $\left(y = -\, a \log \cos \dfrac{x}{a}\right)$ si ha

$$y' = \operatorname{tg}\frac{x}{a} \quad , \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{\cos\frac{x}{a}} \quad , \quad y'' = \frac{1}{a\cos^2\frac{x}{a}} \quad , \quad \rho = \frac{a}{\cos\frac{x}{a}} \ ,$$

cioè $\rho \cos \varphi = a$. Dunque *la projezione del raggio di curvatura sull'asse di simmetria della curva è costantemente uguale ad* a. Meno facile è il calcolo di s, che potremo eseguire nella terza parte del corso; ed allora saremo in grado di vedere che l'equazione intrinseca della catenaria di eguale resistenza è

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

n) Altra importante linea di Ribaucour è la *cicloide* (§ 191, *a*). **Riferiamoci** alla figura, ed osserviamo che, essendo (per definizione) $ON = \text{arco}\, MN = a\theta$, le coordinate di M sono



$$x = ON - PN = a(\theta - \text{sen}\,\theta)\ ,$$
$$y = PR + RM = a(1 - \cos\theta)\ .$$

Ne segue

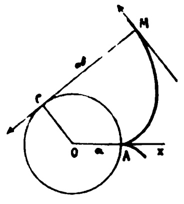
$$dx = a(1 - \cos\theta)d\theta\ ,\ dy = a\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\ ;$$

quindi $dy/dx = \cot\dfrac{\theta}{2}$. D'altra parte $\widehat{MLN} = {}^1/_2 \widehat{MQN} = {}^1/_2\theta$. Dunque ML è la tangente, e per conseguenza MN è la normale alla curva, in M. Quadrando e sommando le ultime uguaglianze si ottiene ds^2, poi successivamente

$$ds = 2a\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta\quad ,\quad s = 4a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8a\,\text{sen}^2\,\frac{\theta}{4}\ ,$$

convenendo di contare gli archi a partire dal punto O. La *lunghezza d'un arco completo di cicloide*, ossia d'un arco generato in un giro completo del circolo, si ottiene facendo $\theta = 2\pi$: essa è dunque $8a$, cioè *quattro volte il diametro del circolo generatore*. Siccome poi, a prescindere dal segno, l'angolo di contingenza è ${}^1/_2 d\theta$, si ha subito $\rho = 4a\,\text{sen}\ {}^1/_2\theta$, ossia $\rho = 2n$. Dunque *il centro di curvatura è simmetrico di M rispetto ad N*. È questa una proprietà quasi evidente *, in virtù di cose dette precedentemente (§§ 194; 191, *a*). Finalmente, se l'origine degli archi si pone nel vertice A (punto medio d'un arco completo), si ha $s = 4a \cos {}^1/_2\theta$, e si vede subito che l'equazione intrinseca della cicloide è $s^2 + \rho^2 = costante$.

o) Più generalmente chiamansi *rullette* le curve descritte da un punto di una linea che rotola, senza strisciare, sopra un'altra linea, fissa nel piano. Per tutte le rullette si ha la proprietà, osservata nella cicloide, che *la normale passa per il punto istantaneo di contatto della linea mobile con la linea fissa*. Quando la linea fissa è una retta, mentre la linea mobile è una circonferenza, si ha la cicloide. Nel caso inverso, cioè quando una retta rotola, senza strisciare, sopra una circonferenza, ogni suo punto descrive una curva chiamata *sviluppante di circolo*. Se θ è l'angolo di cui la retta ha rotato intorno al centro del circolo, nel senso opposto a quello degli indici d'un orologio, a partire dal momento in cui il punto mobile M si trovava in A, sulla circonferenza, e se si dirige l'asse delle x secondo OA, le coordinate di M sono



$$x = a(\cos\theta + \theta\,\text{sen}\,\theta)\quad ,\quad y = a(\text{sen}\,\theta - \theta\cos\theta)\ ,$$

dimodochè si ha

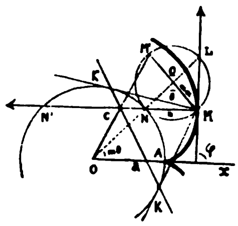
$$dx = a\theta\cos\theta\, d\theta\ ,\ dy = a\theta\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\ ,\ \frac{dy}{dx} = \text{tg}\,\theta\ ,\ ds = a\theta\, d\theta\ ;\ \rho = \frac{ds}{d\theta} = a\theta\ .$$

Dunque la curva si mantiene costantemente normale alla retta mobile, ed ha il

* Duhamel « *Éléments de Calcul* » t. I, p. 177.

centro di curvatura nel punto di contatto della retta con la circonferenza fissa. La lunghezza dell'arco AM è $s = \frac{1}{2}a\theta^2$, e però l'equazione intrinseca della sviluppante di circolo è $\rho^2 = 2as$. Essa ci dice che, se la retta che congiunge M col punto C', diametralmente opposto a C sulla circonferenza, incontra in L la circonferenza stessa, la retta CL intercetta sulla tangente, a partire da M, un segmento uguale ad s.

p) Quando poi entrambe le linee sono circonferenze, si hanno le ***ipocicloidi*** o le ***epicicloidi*** secondo che una circonferenza è interna o esterna all'altra. Noi qui vogliamo fermarci a studiare queste particolari rullette, delle quali si vedrà l'importanza nella teoria dei meccanismi; e supporremo, per fissare le idee, che una circonferenza di raggio ma rotoli esternamente, senza strisciare, sopra una circonferenza di raggio a, dimodochè i risultati ai quali perverremo saranno applicabili tanto alle epicicloidi quanto alle ipocicloidi, secondo che m si supporrà positivo o negativo. Immaginiamo che il punto mobile M si trovi prima in A, sulla circonferenza fissa, che ha il centro in O, e dirigiamo secondo OA l'asse delle ascisse. Rotolando la circonferenza di raggio ma, col centro Q, nel senso inverso di quello degli indici d'un orologio, consideriamola in un'altra posizione qualunque, dopo una rotazione $m\theta$ della linea dei centri intorno ad O. Sia N il punto di contatto delle due circonferenze, ed osserviamo che, dovendo essere uguali fra loro, in virtù della definizione, gli archi AN ed MN, l'angolo NQM è necessariamente uguale a θ. Ne segue che le coordinate di M sono



$$x=a\left\{(1+m\theta)\cos m\theta - m\cos(\theta+m\theta)\right\}, \quad y=a\left\{(1+m)\operatorname{sen} m\theta - m\operatorname{sen}(\theta+m\theta)\right\};$$

quindi

$$dx=2m(1+m)a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}+m\theta\right)d\theta, \quad dy=2m(1+m)a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}+m\theta\right)d\theta;$$

e finalmente

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}+m\theta\right), \quad \frac{ds}{d\theta}=2m(1+m)a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}.$$

L'inclinazione della tangente sull'asse delle x è dunque $\varphi = \frac{1}{2}\theta + m\theta$. Ora, se si congiunge M col punto L, diametralmente opposto ad N sulla circonferenza mobile, l'inclinazione di ML su Ox è appunto uguale alla somma degli angoli

$$QLM = \tfrac{1}{2}\theta, \quad AON = m\theta.$$

Dunque ML *è la tangente*, e per conseguenza MN *è la normale*. Inoltre, se si contano gli archi a partire dal punto A $(\theta = 0)$, è chiaro che dev'essere

$$s = 4m(1+m)a\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right) = 8m(1+m)a\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{4},$$

e però *la lunghezza d'un arco completo è* $8m(1+m)a$. Se invece si computa s a partire dal punto di mezzo $(\theta = \pi)$ d'un arco completo, si ha

$$s = -4m(1+m)a\cos\frac{\theta}{2};$$

e siccome, d'altra parte,

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{2}{1+2m} \frac{ds}{d\theta} = \frac{4m(1+m)}{1+2m} a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2},$$

si vede che $s^2 + (1+2m)^2 \rho^2 =$ *costante* è l'equazione intrinseca delle epicicloidi e delle ipocicloidi. Per costruire il centro di curvatura si osservi che il segmento di normale MN ha la lunghezza $n = 2ma \operatorname{sen} {}^1/_2\,\theta$: l'altro segmento MN', determinato sulla normale dalla circonferenza fissa, ha la lunghezza n', che si calcola osservando la proporzione $(n'-n)/n = a/ma$, da cui si ricava $mn' = (1+m)n$. Ciò premesso, si ha

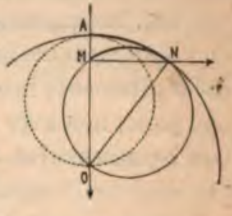
$$\rho = \frac{2(1+m)}{1+2m} n \quad , \quad \text{ovvero} \quad \frac{2}{\rho} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n'} .$$

Dunque C è il conjugato armonico di M rispetto ad NN', vale a dire che *il centro di curvatura, in ciascun punto* M, *appartiene alla polare di* M *rispetto al circolo fisso.* Questa proprietà si trasforma subito in un'altra osservando che, essendo il raggio ON' manifestamente parallelo a QM, se la quaterna armonica MNCN' si projetta da O sulla retta QM, siccome la projezione di N' è all'infinito, quella di N, cioè Q, divide per metà la projezione di MC, vale a dire che C si projetta nel simmetrico di M rispetto a Q. In altri termini: *il centro di curvatura, in ciascun punto* M, *si trova su quel diametro del circolo fisso, che passa nel punto diametralmente opposto ad* M *sulla circonferenza mobile.*

q) In particolare per $m=0$ (purchè si mantenga costante ma, immaginando che a vada crescendo all'infinito mentre m tende a zero) si ottiene la *cicloide* ($\rho = 2n$). Invece per $m = \infty$ (cioè se si fa crescere m indefinitamente, in modo che $m\theta$ conservi un valore ϑ) si ritrovano le proprietà della *sviluppante di circolo* ($\rho = n$):

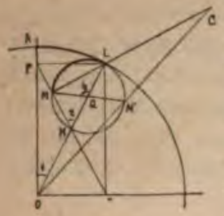
$$\rho = 2a \lim m \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = a\vartheta \quad , \quad s = 8a \lim m(1+m) \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{4} = {}^1/_2\, a\vartheta^2.$$

Del resto è chiaro che, in questo caso, confondendosi in uno i punti N ed N', con essi deve confondersi anche C. Per $m = -{}^1/_2$ si ottiene $\rho = \infty$, e però l'ipocicloide è una *retta*, come si riconosce anche eseguendo la costruzione della normale o quella del centro di curvatura. In altri termini, *se una circonferenza rotola internamente, senza strisciare, sopra una circonferenza due volte più grande, ciascuno dei suoi punti si sposta lungo un diametro del circolo fisso.* Questa proprietà, evidente sulla figura, viene utilizzata in taluni ingranaggi. Anche la *cardioide* è un'epicicloide, come si vede subito facendo $m=1$ nelle formole generali. Ciò risulta, del resto, anche dalla figura (§ 196, *d*). Infatti, se si osserva che l'angolo



LPH è doppio di LNH, e per conseguenza uguale a θ, si vede che PH è parallela ad OM, e però, come divide LM' per metà, così passa nel punto medio Q di MM'. Ne segue che la circonferenza descritta su MM' come diametro tocca in N la circonferenza fissa; e d'altra parte l'eguaglianza evidente fra gli angoli OPH ed

MQH mostra che sono anche uguali gli archi OH ed MH sulle due circonferenze. Dunque *la cardioide si può considerare come generata da un punto d'una circonferenza che rotola, senza strisciare, sopra una circonferenza uguale.* Se si applica la costruzione generale del centro di curvatura, si ricade sulla costruzione particolare già trovata. Finalmente per $m = -\frac{1}{4}$ si ottiene l'*asteroide*. La figura mostra subito che la circonferenza descritta sulla metà HL del raggio OL, come diametro, passa nel punto M dell'asteroide; e siccome l'angolo MQL è manifestamente quadruplo di AOL, l'arco LM della circonferenza interna è sempre uguale all'arco AL della circonferenza esterna. Dunque *l'asteroide si può considerare come generata da un punto di una circonferenza che rotola internamente, senza strisciare, sopra una circonferenza quadrupla.* La costruzione generale del centro di curvatura conduce alla costruzione ottenuta precedentemente, giacchè per la nota relazione, che deve aver luogo fra i segmenti determinati dalla trasversale OC sui lati del triangolo MQL, si ha



$$LC = \frac{QM'}{MM'} \cdot \frac{OL}{OQ} \cdot MC = \tfrac{2}{3} MC \quad , \quad \rho = \tfrac{3}{2} LC = 3ML \; .$$

r) La prima forma della costruzione del centro di curvatura delle epicicloidi o ipocicloidi suggerisce lo *studio* (che noi qui vogliamo soltanto proporre come esercizio ai nostri lettori) *delle curve che hanno il raggio di curvatura, in ciascun punto* M, *proporzionale al segmento di normale, compreso fra* M *e la polare di* M *rispetto ad un circolo fisso.* Oltre le precedenti, godono di questa proprietà infinite altre curve, ed in particolare *tutte le coniche*. Per queste il circolo fisso è il circolo di Monge, ossia il circolo concentrico, di raggio $\sqrt{a^2 + b^2}$. Quando, nel caso generale, il circolo fisso si riduce ad un *punto*, si ritrovano le *spirali sinusoidi*; quando, invece, diventa una *retta*, si hanno le *linee di Ribaucour*. La famiglia delle coniche comprende dunque una spirale sinusoide, col polo nel centro, ed una linea di Ribaucour: la prima si ottiene facendo $a^2 + b^2 = 0$, ed è, per conseguenza, l'*iperbole equilatera*; all'altra si giunge facendo crescere indefinitamente $a^2 + b^2$, ovvero immaginando che il centro si allontani all'infinito. Essa è dunque la *parabola*.

Assintoti.

197. Immaginiamo che due punti tendano a confondersi percorrendo due linee, mentre la retta che li congiunge si allontana all'infinito, o gira indefinitamente intorno ad un punto fisso. Se ciò accade (senza escludere che possa non aver luogo quando vi è fra i due punti qualche particolare corrispondenza) si dice che le due linee sono fra loro *assintotiche*. Così, per esempio, supponiamo che un punto M si allontani all'infinito lungo una linea $y = f(x)$, vale a dire che la sua distanza dall'origine tenda ad oltrepassare ogni limite, e che per conseguenza almeno una delle sue coordinate cartesiane vada crescendo all'infinito. Quando ciò avviene per una sola coordinata, potremo sempre supporre che questa sia la x, scambiando, se occorre, x con y. Ciò premesso, si consideri sopra un'altra li-

nea $y=g(x)$, per ciascuna posizione di M, il punto che ha la medesima ascissa di M, e si supponga che, per x tendente all'infinito (positivo o negativo), la differenza delle ordinate $f(x)-g(x)$ tenda a zero. Allora si potrà affermare che le due linee sono fra loro assintotiche; ed altrettanto si potrà dire delle linee rappresentate in coordinate polari dalle equazioni $r=f(\theta)$ ed $r=g(\theta)$. Siccome poi anche la differenza $f'(x)-g'(x)$ tende a zero (§ 67, c), salvo che non oscilli indefinitamente, si vede che le due linee, oltrechè ad avere un punto comune, tendono in generale a toccarsi; ma questo fatto va studiato con maggiori cautele.

198. Se, chiamate x ed y le coordinate del punto M, che si allontana all'infinito lungo una data curva, si riesce a determinare le costanti m ed h in modo che $y-mx-h$ abbia per limite zero quando x tende all'infinito (positivo o negativo), si potrà dire che la retta $Y=mX+h$ è un *assintoto* della curva data. È della ricerca di questi assintoti rettilinei che noi vogliamo più specialmente occuparci. Dalla stessa eguaglianza

$$\lim_{x=\pm\infty}(y-mx-h)=0$$

risulta subito che $y-mx$, ossia $x\left(\frac{y}{x}-m\right)$, tende al limite finito h; e siccome il fattore x cresce indefinitamente in valore assoluto, è necessario che l'altro fattore tenda a zero. Dunque

$$\lim_{x=\pm\infty}\frac{y}{x}=m \quad , \quad \lim_{x=\pm\infty}(y-mx)=h \ .$$

Nella successiva applicazione di queste due uguaglianze (geometricamente evidenti) risiede la regola per la ricerca degli assintoti quando si fa uso di coordinate cartesiane. Invece in coordinate polari l'assintoto potrà essere determinato mediante la sua inclinazione α sull'asse polare, e la distanza q dal polo. Prima si osservi che, se $1/r=f(\theta)$ è l'equazione della curva, $f(\theta)$ tende a zero quando M si allontana all'infinito; e però, se la detta funzione è continua, gli angoli che l'asse polare fa con gli assintoti sono le radici dell'equazione $f(\theta)=0$. Per completare la determinazione dell'assintoto, corrispondente ad una data radice α, basta osservare che la distanza di M all'assintoto deve tendere a zero, e che per conseguenza, in virtù della definizione stessa di $f'(\alpha)$,

$$q=\lim_{r=\infty} r\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha)=\lim_{\theta=\alpha}\frac{\theta-\alpha}{f(\theta)}=\frac{1}{f'(\alpha)} \ .$$

199. Ora vogliamo dimostrare che, allontanandosi M all'infinito, *se la tangente in* M *tende ad una posizione limite, questa è necessariamente un assintoto.* È per questa proprietà che si suole, in Geometria analitica, considerare gli assintoti come le tangenti nei punti d'incontro della curva con la retta all'infinito. Paragonando infatti l'equazione della tangente

$Y = Xy' + (y - xy')$ con quella della posizione limite $Y = m_1 X + h_1$, si vede che, ammettere l'esistenza di questa posizione limite vale quanto ammettere l'esistenza dei limiti di y' e di $y - xy'$ per x infinito, dimodochè sia

$$\lim y' = m_1 \quad , \quad \lim (y - xy') = h_1 \; .$$

Intanto si ha, applicando il teorema di l'Hospital,

$$m = \lim \frac{y}{x} = \lim y' = m_1 \; ;$$

poi

$$h = \lim (y - mx) = \lim \frac{\dfrac{y}{x} - m}{\dfrac{1}{x}} = \lim (y - xy') = h_1 \; .$$

Al medesimo risultato si giunge con altrettanta facilità adoperando coordinate polari. Infatti la distanza della tangente al polo, computata come nel paragrafo precedente, è $-r \operatorname{sen} \omega$, e non può tendere ad un limite q_1 per r infinito, senza che ω tenda ad un multiplo di π. Ne segue che, se α_1 è l'inclinazione, sull'asse polare, della retta con cui si suppone che tenda a confondersi la tangente, vale a dire, se $\theta + \omega$ tende ad un limite α_1, esiste anche $\alpha = \lim \theta = \alpha_1 - n\pi$; ed inoltre

$$q = \lim \frac{1}{f'(\theta)} = - \lim \frac{r^2}{r'} = - \lim r \operatorname{tg} \omega = - \lim r \operatorname{sen} \omega = q_1 \; .$$

200. **Esempii:** *a)* La curva $xy = \cos x$ è manifestamente assintotica ad entrambi gli assi; ma, mentre l'asse delle y si può considerare come limite della tangente in M, quando cresce indefinitamente l'ordinata y di questo punto, altrettanto non si può dire per l'asse delle x, perchè $y - xy'$ non tende ad alcun limite quando x cresce all'infinito. In altri termini la tangente non cessa di oscillare, come si riconosce anche osservando che le tangenti negli infiniti punti d'incontro della curva con l'asse delle x concorrono tutte sull'asse delle y, nei punti $y = \pm 1$. Adunque *un assintoto può non essere la posizione limite della tangente*, vale a dire che non sussiste la proposizione reciproca di quella che abbiamo dimostrata nel precedente paragrafo.

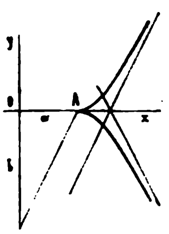
b) Nell'esempio precedente la tangente, pur non ammettendo una posizione limite, tende a diventar parallela all'assintoto; ma nella curva

$$y = 2^{-[x]} \left(1 - {}^1\!/_2 \sqrt{x - [x]}\right) ,$$

già considerata (§ 53, *f*), la tangente oscilla indefinitamente anche in orientazione, in modo da diventare infinite volte perpendicolare all'assintoto. Invece per la curva $xy = [x]$ si ha $\lim y = 1$, per x infinito, mentre $\lim y' = 0$, $\lim (y - xy') = 2 \lim ([x]/x) = 2$, vale a dire che *la tangente tende ad una posizione limite* ($y = 2$), *ma questa non coincide con l'assintoto* ($y = 1$). Ciò non contraddice al teorema dimostrato nel precedente paragrafo, perchè nella dimostrazione di quel teorema, invocando il teorema di l'Hospital, tacitamente si suppone che la derivata di y

sia unica, mentre nel caso da noi considerato manca la derivata a sinistra di tutti i punti ad ascissa intera. Valga questo esempio a mostrare come si debba stare attenti, quando si applica un teorema, a curare che le condizioni restrittive dell'enunciato siano soddisfatte.

c) Per trovare gli assintoti della curva (profilo dell'elicoide sviluppabile) rappresentata dalle equazioni $x\cos\theta = a$, $y = b(\operatorname{tg}\theta - \theta)$, o, meglio, di quel ramo della curva, che corrisponde ai valori di θ, compresi fra $-\frac{1}{2}\pi$ ed $\frac{1}{2}\pi$, si deve prima osservare che, per far crescere all'infinito una coordinata, bisogna far tendere θ a $\pm\frac{1}{2}\pi$, nelle quali ipotesi si ha



$$m = \lim \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta) = \pm\frac{b}{a} .$$

$$h = \lim\left(y \mp \frac{b}{a}x\right) = b \lim \frac{\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta \mp 1}{\cos\theta} = -b\lim\theta = \mp\tfrac{1}{2}\pi b .$$

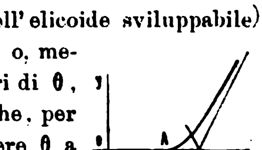
Gli assintoti cercati sono dunque le rette rappresentate dalle equazioni

$$\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = \frac{\pi}{2} .$$

d) Nella ricerca degli assintoti non bisogna trascurare di far tendere x a $-\infty$ come a $+\infty$, giacchè si possono avere assintoti differenti nei due casi. Così, per esempio, per la curva $y = x\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, si ha, quando x tende a $\pm\infty$,

$$m = \lim \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \pm 1 ,$$

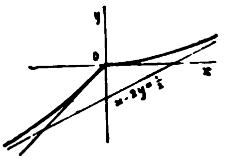
$$h = \lim(y \mp x) = \mp \lim \frac{2x}{e^{2x} + 1} = 0 ,$$



e però la curva è assintotica alle bisettrici degli assi. Un esempio più semplice ci è dato dalla curva $y = \operatorname{arc\,tg} x$. La considerazione dei due casi è necessaria anche per sapere se la curva si accosta indefinitamente all'assintoto nei due sensi, o in un senso solo.

e) La curva $y = x/(1 + e^{\frac{1}{x}})$ ha, nell'origine, due tangenti, perchè (§ 41, *c*) si ha $y' = 1$ a sinistra, $y' = 0$ a destra dell'origine. Quando x tende a $\pm\infty$, anche y va crescendo sempre in valore assoluto; ma i due rami infiniti, che in tal modo si ottengono, sono assintotici ad una stessa retta, perchè si ha $\lim e^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$, e conseguentemente $m = \lim \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{2}$,

$$h = \lim(y - \tfrac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\lim x \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{4} ,$$



per $x = \pm\infty$. Dunque l'equazione dell'assintoto è $x - 2y = \frac{1}{2}$. A questo risultato si giunge anche sviluppando y in serie: $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{48x^2} + \dots$.

f) Gli sviluppi in serie sono molto utili per lo studio del modo di comportarsi delle curve nei rami che si estendono all'infinito. Così, data la curva $y=xe^{\frac{1}{x}}$, basta osservare che si ha $y=x+1+\dfrac{1}{2x}+\dots$ per accorgersi che la curva è assintotica alla retta $y=x+1$. Inoltre, siccome y cresce all'infinito anche quando x tende a zero decrescendo, mentre invece ha per limite zero quando x tende a zero crescendo, si vede che la curva consta di due rami, entrambi assintotici a quella retta, ma tali che un solo di essi è assintotico anche all'asse delle y, mentre l'altro si ferma nell'origine. Similmente si vede subito che la curva $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$ ammette l'asse delle y come unico assintotico rettilineo (del solo ramo di destra), ma è dotata invece dell'assintoto parabolico $y=x^2+x+{}^1/_2$, che si estende internamente al ramo di sinistra, ed esternamente a quello di destra. È poi notevole la curva $y=x^2/(1+e^{\frac{1}{x}})$ perchè rassomiglia molto ad una parabola, e tende (all'infinito) a comportarsi appunto come la parabola $y={}^1/_4(2x^2-x)$. Se a questa si fa subire una traslazione nel piano, in modo che il vertice vada nell'origine, in questo punto le due curve *si attraversano* nel tempo stesso che si toccano, perchè $y<{}^1/_2x^2$ a destra dell'origine, $y>{}^1/_2x^2$ a sinistra.

g) Quando si applicano alla spirale iperbolica le formole date in fine del § 198, si ottiene

$$f(\theta)=\frac{\theta}{a}\quad,\quad f'(\theta)=\frac{1}{a}\quad,\quad \alpha=0\quad,\quad q=a\,,$$

e si ritrova così l'assintoto parallelo all'asse polare, segnalato precedentemente (§ 190, *g*). Similmente per la quadratrice (§ 190, *i*) si ha

$$f(\theta)=\frac{\operatorname{sen}\theta}{a\theta}\quad,\quad f'(\theta)=\frac{\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{a\theta^2}\quad,\quad \alpha=n\pi\quad,\quad q=(-1)^n n\pi a\,.$$

In modo analogo si dimostra che le spirali sinusoidi (§ 190, *m*) ammettono assintoti a distanza finita soltanto per $m<-1$; ed in questo caso gli assintoti escono tutti dal polo, e fanno con l'asse polare gli angoli $0\,,\,\dfrac{\pi}{m}\,,\,\dfrac{2\pi}{m}\,,\,\dfrac{3\pi}{m}\,,\dots$.

h) Per la conica rappresentata dall'equazione $r=p/(1-k\cos\theta)$ si ha

$$f(\theta)=\frac{1-k\cos\theta}{p}\quad,\quad f'(\theta)=\frac{k}{p}\operatorname{sen}\theta\quad,\quad \cos\alpha=\frac{1}{k}\quad,\quad q=\frac{\pm p}{\sqrt{k^2-1}}\,.$$

Solo nel caso dell'iperbole, cioè per $k>1$, α è reale; ma gli infiniti angoli α, che hanno il coseno $1/k$, determinano due sole direzioni, antiparallele rispetto all'asse focale. In questo caso $p=-b^2/a$, $k^2-1=b^2/a^2$, e però $q=\pm b$, ed anche $q=\pm ka\operatorname{sen}\alpha$. Dunque i due assintoti passano per il centro e distano di b dal polo, ossia dai fuochi.

i) Tutte le volte che, nel discutere curve date in coordinate polari, si trova che r tende ad un limite a quando θ tende all'infinito (positivo o negativo), si può affermare che la curva ammette un *circolo assintotico* di raggio a, col centro nel polo. Ed è utile notare che, col tendere di r ad a, avviene ordinariamente (§ 67, c) che r' tende a zero, e conseguentemente ω ad $\frac{1}{2}\pi$, cioè la curva tende a toccare il circolo. In particolare, se $a=0$, il polo è un *punto assintotico*: ciò accade per varie curve studiate precedentemente (§ 190, e, g, h), come la spirale logaritmica, la spirale iperbolica, la cocleoide. Basta prendere le concoidi (§ 190, j) di queste curve rispetto al polo per ottenere altre curve, dotate di circoli assintotici. Particolarmente notevoli sono le concoidi della spirale logaritmica, le quali sono tutte, per una data spirale, simili fra loro. Dirigendo infatti l'asse polare dal polo della spirale al punto d'incontro di questa con la circonferenza assintotica di una sua concoide, l'equazione della concoide è necessariamente $r=a(e^{m\theta}\pm 1)$, dove soltanto a, raggio della circonferenza, è arbitrario. Il ramo corrispondente al segno $+$, tutto esterno al circolo, si avvolge indefinitamente intorno ad esso. L'altro ramo penetra nel circolo, passa nel polo, dove si comporta come una spirale di Archimede ($r=ma\theta$); ed allontanandosene, con infiniti giri, si accosta indefinitamente alla circonferenza.

201. Occupiamoci ora più particolarmente degli assintoti delle curve algebriche; e prima, per cercare quelli che son paralleli all'asse delle y, ordiniamo l'equazione della curva, già ridotta a forma razionale ed intera, rispetto ad y:

$$y^n\psi(x)+y^{n-1}\psi_1(x)+y^{n-2}\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)=0\ .$$

Per y infinito x deve tendere ad un limite l, che si tratta appunto di calcolare; e però $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, ..., funzioni continue, tendono ai limiti finiti $\psi(l)$, $\psi_1(l)$, ... Ne segue, dividendo l'equazione per y^n, e facendo poi tendere y all'infinito, $\psi(l)=0$. Questa è l'equazione che fornisce i valori di l, a ciascuno dei quali corrisponde un assintoto $X=l$. Ora, messi da parte gli assintoti paralleli all'asse delle y, ordiniamo l'equazione della curva per gruppi omogenei. Posto $y=tx$, si potrà scrivere

$$x^n\varphi(t)+x^{n-1}\varphi_1(t)+x^{n-2}\varphi_2(t)+\cdots+\varphi_n(t)=0\ . \tag{12}$$

Intanto si ha $m=\lim t$, ed m è finito; quindi, se si divide per x^n l'equazione precedente, si ottiene, per x infinito, $\varphi(m)=0$. Basta risolvere questa equazione per determinare le direzioni degli assintoti. Prima supponiamo che m sia una radice semplice di φ, dimodochè $\varphi'(m)\gtrless 0$, e cerchiamo di calcolare h. Se si divide per x^{n-1} l'equazione (12) si ha

$$x\varphi(t)+\varphi_1(t)+\frac{\varphi_2(t)}{x}+\cdots=0\ ; \tag{13}$$

poi, per x infinito, dopo avere osservato che

$$\lim x(t-m)=\lim(y-mx)=h\ ,$$

si ottiene, ricordando che $\varphi(m)=0$,

$$\lim x\varphi(t)=\lim x(t-m)\,.\lim\frac{\varphi(t)}{t-m}=h\varphi'(m)\ ,$$

in virtù della definizione stessa di $\varphi'(m)$. Dunque la (13) diventa

$$h\varphi'(m)+\varphi_1(m)=0 \quad , \quad \text{e dà} \quad h=-\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)} .$$

Se m è radice multipla di φ, si ha $\varphi'(m)=0$; e se non è $\varphi_1(m)=0$ si può dire che l'assintoto è infinitamente lontano; ma, se anche $\varphi_1(m)=0$, l'ultimá formola è illusoria, e bisogna risalire alla (12). Dividendo questa per x^{n-2} si ottiene

$$x^2\varphi(t)+x\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\frac{\varphi_3(t)}{x}+\cdots=0 . \tag{14}$$

Intanto

$$\lim x^2\varphi(t)=\lim x^2(t-m)^2 . \lim \frac{\varphi(t)}{(t-m)^2}={}^1/_2 h^2\varphi''(m) ;$$

quindi, per x infinito, l'equazione (14) diventa

$${}^1/_2 h^2\varphi''(m)+h\varphi_1'(m)+\varphi_2(m)=0 , \tag{15}$$

e somministra due valori di h, corrispondenti a due assintoti (reali o immaginarii) paralleli. Se poi m è radice tripla di φ, uno degli assintoti corrispondenti è generalmente a distanza infinita; ve ne son due infinitamente lontani se anche $\varphi_1'(m)=0$, e finalmente, se sono nulli tutti i coefficienti dell'equazione (15), bisogna riprendere l'equazione (12), dividerla per x^{n-3}, e passare al limite per x infinito, in modo da ottenere

$${}^1/_6 h^3\varphi'''(m)+{}^1/_2 h^2\varphi_1''(m)+h\varphi_2'(m)+\varphi_3(m)=0 ;$$

e così via.

202. Mercè le coordinate omogenee la ricerca degli assintoti delle curve algebriche si può condurre con maggiore semplicità, purchè si faccia uso del teorema dimostrato nel § 199. Prima si noti che il risultato $\varphi(m)=0$ si può enunciare dicendo che, quando si sopprimono nell'equazione d'una curva dell'ordine n tutti i termini di grado inferiore ad n, l'equazione che si ottiene rappresenta l'insieme delle parallele condotte per l'origine agli n assintoti, reali o immaginarii, distinti o coincidenti. Ciò riesce quasi evidente se, dopo aver posto

$$\Phi(x,y,z)=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+zx^{n-1}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)+z^2x^{n-2}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)+\cdots$$

per rendere omogenea l'equazione della curva, si osserva che scrivere l'equazione $\varphi=0$ equivale a porre $z=0$ in $\Phi=0$, è lo stesso cioè che considerare gli n punti d'incontro della curva con la retta all'infinito. Ora si scriva l'equazione (§ 188) della tangente

$$X\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+Z\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 ; \tag{16}$$

e, per esprimere che il punto di contatto sta all'infinito, si ponga $z=0$ nei coefficienti. Si ottiene così un'equazione omogenea in x ed y; poi, eliminando il rapporto y/x fra questa equazione e ciò che diventa $\Phi=0$ per $z=0$, si giunge all'equazione complessiva degli assintoti. In sostanza questo metodo non differisce dal precedente. Infatti per $z=0$ si ha $\Phi=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, cioè $\Phi=0$ quando si pone per y/x un valore m soddisfacente a $\varphi=0$. Inoltre

$$x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+y\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0\ ,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=x^{n-1}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\ ,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=x^{n-1}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-mx^{n-1}\varphi'(m)\ ,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=x^{n-1}\varphi'(m)\ ,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=x^{n-1}\varphi_1(m)\,.$$

Quindi l'equazione (16) diventa, in coordinate non omogenee,

$$\mathrm{Y}=m\mathrm{X}-\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)}\,.$$

203. **Esercizii:** *a)* Data la curva $x^3+y^3=3axy$, che si chiama *folium* di Cartesio, si ha, per la determinazione dei coefficienti angolari degli assintoti, l'equazione $1+m^3=0$, che ammette l'unica radice reale $m=-1$; poi

$$h=-\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)}=\frac{3ma}{3m^2}=-a\,.$$

Dunque la curva ha un solo assintoto reale, rappresentato da $x+y+a=0$. Per le applicazioni bisogna ricordare, non le formole ottenute nel § 200, ma il solo procedimento adoperato per giungere alle formole stesse. Così, nel caso del folium, dopo avere osservato che $x+y$ è l'unico fattore reale dell'insieme x^3+y^3 dei termini di più alto grado, si può immediatamente scrivere l'equazione dell'assintoto:

$$x+y=\left(\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}\right)_{y=-x}=-a\,.$$

Al medesimo risultato si giunge sviluppando y in serie:

$$y=-x-a+\frac{a^3}{3x^2}-\frac{a^4}{3x^3}+\dots\,.$$

b) Un po' più generalmente, si consideri l'equazione

$$(x+y)(x^2-2kxy+y^2)=2(1+k)axy\,,$$

che per $k=\frac{1}{2}$ rappresenta il folium, e per $k=0$ un'altra importante curva, detta *logociclica*. Fintantochè $k^2<1$, non si ha che un solo assintoto reale, la cui equazione è

$$x+y=\left(\frac{2(1+k)axy}{x^2-2kxy+y^2}\right)_{y=-x}=-a\,,$$

dimodochè le curve considerate son tutte assintotiche ad una stessa retta; ma quelle per le quali è $k^2 > 1$ ammettono altri due assintoti reali, paralleli alle rette $x^2 - 2kxy + y^2 = (y - mx)(y - m'x) = 0$, dove $m = k \pm \sqrt{k^2 - 1}$. L'equazione d'un assintoto è

$$y - mx = \left(\frac{2(1+k)axy}{(x+y)(y-m'x)}\right)_{y=mx} = \frac{2(1+k)ma}{(1+m)(m-m')} = \frac{ma}{m-1} ;$$

quindi si trova

$$y = kx + {}^1\!/_2 a \pm \left(x + \frac{{}^1\!/_2 a}{k-1}\right)\sqrt{k^2 - 1}$$

per rappresentare i due assintoti. Questi s'incontrano nel punto

$$x = y = - {}^1\!/_2 a/(k-1)$$

sotto un angolo, il cui coseno è $1/k$. Solo per $k = 2$ i tre assintoti concorrono in un punto, ed allora son paralleli ai lati d'un triangolo equilatero.

c) Per mostrare in qual modo si adoperano le coordinate omogenee riprendiamo il folium, e poniamo

$$\Phi(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3axyz$$

per applicare le cose dette nel paragrafo precedente. Per $z = 0$ si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2 \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -3axy ,$$

e però l'equazione complessiva degli assintoti risulta dall'eliminazione del rapporto y/x fra le equazioni

$$x^3 + y^3 = 0 \quad , \quad Xx^2 + Yy^2 - axy = 0 ,$$

ossia (scrivendo x ed y per le coordinate correnti) dall'eliminazione di m fra $1 + m^3 = 0$ ed $x + m^2 y = ma$. Eseguendo l'eliminazione si ottiene

$$x^3 + y^3 + a^3 = 3axy ,$$

e questa equazione si decompone nelle tre seguenti

$$x + y + a = 0 \quad , \quad x + \omega y + \omega^2 a = 0 \quad , \quad x + \omega^2 y + \omega a = 0 ,$$

dove ω rappresenta una radice cubica immaginaria dell'unità. Il folium ha dunque, oltre l'assintoto reale $x + y + a = 0$, due assintoti immaginarii, che s'intersecano nel punto (a, a). L'equazione ottenuta si può anche stabilire immediatamente lasciandosi guidare dall'osservazione che l'equazione complessiva degli assintoti d'una curva dell'ordine n si deve poter dedurre dall'equazione stessa della curva, alterando i coefficienti dei termini di grado inferiore ad $n - 1$ in modo che l'equazione si spezzi in n equazioni lineari. Nel caso del folium questa osservazione conduce subito al risultato, perchè si sa * che basta aggiungere

* *Analisi algebrica*, p. 366.

a^3 ad x^3+y^3-3axy per trovare il valore del circolante (x,y,a), scomponibile in tre fattori lineari.

d) Sia ancora

$$\Phi(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy\ .$$

L'equazione della tangente è

$$(ax+hy+gz)X+(hx+by+fz)Y+(gx+fy+cz)Z=0\ ,$$

quindi, facendovi $z=0\,,Z=1$, si ottiene

$$(aX+hY+g)x+(hX+bY+f)y=0\ ,$$

e bisogna eliminare y/x fra questa equazione e l'altra

$$ax^2+by^2+2hxy=0\ ;$$

sicchè, ponendo x ed y per X ed Y, si trova

$$a(hx+by+f)^2+b(ax+hy+g)^2-2h(ax+hy+g)(hx+by+f)=0\ ,$$

ossia

$$\begin{vmatrix} a & h & ax+hy+g \\ h & b & hx+by+f \\ ax+hy+g & hx+by+f & 0 \end{vmatrix}=0\ .$$

Sottraendo dall'ultima verticale la prima moltiplicata per x, e la seconda moltiplicata per y, poi operando analogamente sulle orizzontali, si trova

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c-\Phi \end{vmatrix}=0\ .$$

Dunque l'equazione complessiva degli assintoti della conica

$$ax^2+by^2+c+2fy+2gx+2hxy=0$$

si ottiene ponendo nel secondo membro, invece di 0, il discriminante D, diviso per $ab-h^2$. A questo risultato si perviene assai più rapidamente mercè l'osservazione fatta nel precedente esercizio, cioè sostituendo a c un numero c', tale che l'equazione si spezzi in due equazioni lineari, per la qual cosa occorre che sia nullo il nuovo discriminante

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & h & 0 \\ h & b & 0 \\ g & f & c'-c \end{vmatrix}=D+(ab-h^2)(c'-c)\ ,$$

ossia che si abbia $c'=c-\dfrac{D}{ab-h^2}$.

Singolarità.

204. **Flessi**. Talune particolarità, che possono presentarsi in certi punti d'una curva, e che sono inerenti alla sua forma, fanno dare a tali punti il nome di *punti singolari*. Così, per esempio, quantunque nei punti per i quali è $y'=0$ si presenti la particolarità che l'ordinata diventa, generalmente, minima o massima, pure essi non sono punti singolari, perchè basta un cambiamento nell'orientazione degli assi per trasportare altrove l'osservata particolarità. Non così avviene dei punti nei quali è $y''=0$: questi si chiamano *flessi* o punti d'inflessione, e sono punti singolari, perchè in essi *è nulla la curvatura*, si verifica cioè un fatto, che nessun cambiamento di assi vale a distruggere. Del resto è facile constatare che, intorno ad un tal punto M, la curva si comporta, rispetto alla tangente in M, in modo eccezionale, perchè, trasportata in M l'origine, se si dirigono gli assi secondo la tangente e la normale, si ha, per la definizione di y'' come derivata di y', $\lim(y'/x)=0$; poi, in virtù del teorema di l'Hospital, $\lim(y/x^2)=0$, vale a dire che la distanza della tangente in M dai punti infinitamente vicini ad M *è infinitesima d'un ordine superiore al secondo*, diguisachè si potrebbe quasi dire che nei punti d'inflessione una curva *tocca maggiormente* le sue tangenti. Per giustificare poi la denominazione di *punti d'inflessione* bisogna osservare che y'', annullandosi, generalmente cambia segno, e però (§ 107, *d*) avviene che nel passare da una parte all'altra d'un flesso, lungo la curva, la convessità di questa si muta in concavità, o viceversa. Si ha dunque una vera e propria inflessione, nel senso volgare della parola, vale a dire che la curva attraversa la tangente; ma ciò non accade quando y'' conserva, intorno ad M, un segno determinato, nel qual caso il valore *zero* rappresenta un minimo o un massimo di y'', d'onde segue (§ 72) che le ascisse dei punti, nei quali una curva attraversa le sue tangenti, sono le radici semplici di y'', o quelle multiple d'un ordine dispari. Ciò si spiega facilmente osservando che son questi, appunto, i valori di x che rendono minima o massima la funzione y', cioè le ascisse di quei punti, intorno ai quali avviene che la tangente cessa di progredire in un senso, e prende a spostarsi nel senso opposto, come più chiaramente ancora risulta dalla formola (7).

205. Per determinare i flessi della curva $y=f(x)$ bisogna dunque risolvere l'equazione $f''(x)=0$, o qualunque altra equivalente (§ 195), ossia atta ad esprimere che la curvatura è nulla. Così, per esempio, quando la curva è data mediante una coppia di equazioni $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, invece di $y''=0$ conviene scrivere $dx d^2y - dy d^2x = 0$. In altri termini i flessi corrispondono a quei valori di t, che annullano $\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)$. Invece, se la curva è data in coordinate polari, l'equazione che si adopera

è $r^2+2r'^2-rr''=0$, escluse le radici (necessariamente multiple) di r; o pure, se l'equazione della curva è data sotto la forma $1/r=f(\theta)$, si scrive $f+f''=0$. Se poi, pur facendo uso di coordinate cartesiane, si considera la curva rappresentata dall'equazione $f(x,y)=0$, l'equazione che dà i flessi è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{17}$$

purchè si escludano i punti, nei quali è anche $\Delta f=0$. Alla (17) si può dare una forma notevole, nel caso delle curve algebriche, quando l'equazione della curva sia stata già resa omogenea. Sia n il suo grado, e nel determinante che precede si sottraggano dall'ultima verticale, moltiplicata per $n-1$, la prima moltiplicata per x, e la seconda moltiplicata per y; poi si faccia altrettanto per le orizzontali. I primi due elementi dell'ultima verticale o dell'ultima orizzontale si cambiano (§ 133) in

$$(n-1)\frac{\partial f}{\partial x}-\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)=z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\,,\quad (n-1)\frac{\partial f}{\partial y}-\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=z\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}:$$

e l'ultimo in

$$-(n-1)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)-z\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)=(n-1)z\frac{\partial f}{\partial z}-z\left((n-1)\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right),$$

che si riduce a $z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Così l'equazione considerata diventa

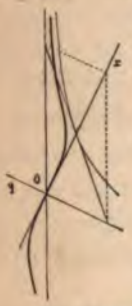
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Adunque *i flessi della curva algebrica* f=0 *si determinano ponendo uguale a zero l'hessiano* H *della funzione* f, *resa omogenea* (*cfr.* §§ 139, 170). La curva $H=0$ si chiama la *hessiana* della curva $f=0$. I flessi d'una curva algebrica sono dunque fra i punti, nei quali essa incontra la propria hessiana; e siccome questa ha l'ordine $3(n-2)$, si hanno, in generale, $3n(n-2)$ flessi lungo una curva dell'ordine n. Per esempio, una conica non ha flessi, una cubica ne ha nove (sei dei quali son sempre immaginarii); *ecc.* Si noti, richiamando la formola (9), che ogni punto comune alle curve $f=0$ ed $H=0$ è un flesso della prima curva, sempre che non sia $\Delta f=0$, cioè che non vi si annullino ad un tempo le derivate prime di f. La condizione $\Delta f=0$ basta da sola (con $f=0$) a definire altri punti singolari, soddisfacenti altresì alla (17), e situati perciò sull'hessiana. Di questi punti si discorrerà fra breve (§ 207); ma intanto si noti che la loro presenza produce un abbassamento nel numero $3n(n-2)$ dei flessi.

206. **Esercizii**: *a)* Per la quadratrice $\left(y = x\cot\dfrac{x}{a}\right)$, essendo $y''=\dfrac{2(y-a)}{a^2\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{a}}$, l'equazione dei flessi si riduce ad $y=a$, purchè $x \gtrless 0$. Dunque il ramo centrale non s'inflette, ma la tangente nel vertice taglia tutti gli altri rami nei rispettivi flessi. Le normali alla curva, in tutti questi punti, concorrono nell'origine.

b) La forma della curva (§ 200, *d*) rappresentata dall'equazione $y=x\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ lascia subito indovinare l'esistenza di due flessi, simmetrici rispetto all'asse delle y; ed effettivamente l'equazione $y''=0$ conduce ad $y=1$, equazione d'una retta, che incontra la curva data nei suoi punti d'inflessione.

c) Per la curva $y=x^2\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ l'equazione dei flessi è troppo complicata perchè se ne possa trarre profitto; ma è facile rendersi conto della forma generale della curva, osservando che questa passa per l'origine (*cfr.* § 53, *b*) tangenzialmente all'asse delle x, e si estende all'infinito assintoticamente alla retta $y={}^1/_2x$. Anzi lo sviluppo $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8x}+\ldots$ ci dice che la curva è assintotica all'iperbole $x^2-2xy={}^1/_4$, e ciò ne rende più agevole la costruzione approssimata. In tal modo si riesce a prevedere che la curva s'inflette in tre punti, fra i quali è l'origine O. Nondimeno bisogna notare che O non è un flesso, e si ha così un esempio di curva *attraversata dalla tangente in un punto, che non è un punto d'inflessione.* Infatti si sa (§ 73, *i*) che y'', considerata come derivata destra o sinistra di y', ha il valore 2 o il valore -2. Del resto basta osservare che $\lim(y/x^2)=\pm 1$ per accorgersi che nel punto O viene a mancare una proprietà essenziale dei punti di inflessione, giacchè la distanza della tangente in O dai punti infinitamente vicini ad O *non è infinitesima d'un ordine superiore al secondo*, ma è proprio del secondo ordine, come nei punti ordinarii.



d) Per convincersi dell'utilità di possedere un criterio analitico sicuro ($y''=0$) per la ricerca dei punti d'inflessione, basta costruire la curva $y=e^x+\operatorname{sen}x$ aggiungendo $\operatorname{sen}x$ alle ordinate della logaritmica $y=e^x$. Una costruzione grossolana condurrebbe a credere che la curva s'inflette, anche per $x>0$, infinite volte; ma ciò non avviene, perchè la funzione $y''=e^x-\operatorname{sen}x$ non ammette radici positive, essendo $e^x>1\geqq\operatorname{sen}x$ per $x>0$. Si hanno invece, per $x<0$, infiniti flessi, le cui ascisse son quelle dei punti d'incontro della logaritmica con la sinusoide $y=\operatorname{sen}x$.

e) Data una lumaca qualunque ($r = a\cos\theta + b$), si trova facilmente

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 2a^2 + b^2 + 3ab\cos\theta .$$

…a, perchè questa funzione di θ si annulli per valori reali di θ, bisogna che …$^2 + b^2$ non superi $3ab$, e quindi che b cada nell'intervallo $(a, 2a)$; ma l'estre…o inferiore va escluso, perchè per $b = a$ è $\theta = \pi$, radice doppia di r. Dunque …r. § 190, *k*) le sole lumache dotate di flessi son quelle per le quali b è maggiore … a, ma non di $2a$.

f) Fra le concoidi (§ 190, *j*) della retta si consideri quella che contiene il …lo. Dalla sua equazione $(r - a)\cos\theta = a$ si deduce, per determinare i flessi, l'e…uazione $\cos^3\theta + 3\cos^2\theta - 2 = 0$, dalla quale si traggono per $\cos\theta$ i valori -1, …$-1 + \sqrt{3}$, $-1 - \sqrt{3}$. Del primo non si devè tener conto, perchè annulla r …d insieme r'); l'ultimo non corrisponde a valori reali di θ; resta il secondo, che …à $r = {}^1/_2 a(3 + \sqrt{3})$: è questo il raggio d'una circonferenza, col centro nel polo, …he taglia la curva nei due punti d'inflessione. È facile dimostrare che i punti di inflessione di tutte le concoidi della stessa retta, rispetto al medesimo polo, cadono sulla parabola semi-cubica $x^3 = 4ay^2$.

g) Finalmente domandiamoci se le concoidi (§ 200, *i*) d'una spirale logaritmica possono inflettersi, quantunque *a priori* sembri che ciò non debba accadere. Da $r = a(e^{m\theta} \pm 1)$ si deduce

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = (1 + m^2)r^2 \mp 3m^2ar + 2m^2a^2 ,$$

e si vede che, se $m^2 < 8$, questo trinomio non può annullarsi per valori reali di r. Ne segue che le spirali cercate sono soltanto quelle che incontrano i loro raggi vettori sotto un angolo sufficientemente piccolo, cioè tale che il suo seno non superi ${}^1/_3$. Ciascuna di esse ha tutte le concoidi dotate di due punti d'inflessione, corrispondenti a valori di r che son sempre compresi fra a e $2a$. Gli archi delle infinite concoidi d'una stessa spirale, che hanno gli estremi nei punti d'inflessione, son visti dal polo sotto un angolo costante, nullo per $m = 2\sqrt{2}$ e piccolissimo per m grandissimo.

207. **Punti multipli.** È noto (§ 173) che, per la determinazione della tangente in un punto della curva $f(x, y) = 0$, si fa uso dell'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0 , \tag{18}$$

che fornisce il valore di y', nell'ipotesi che $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ siano continue, ed inoltre si abbia $\dfrac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$. Se in un punto M è $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, non si può più asserire che, intorno ad M, y è funzione di x, cioè che ad ogni valore di x corrisponde uno ed un sol valore di y; ma ciò rimane vero, per la supposta continuità, intorno ad M, vale a dire che in punti M', infinitamente vicini ad M, la derivata y' esiste, ed ha il valore che si ricava dalla (18). Quando M' tende ad M, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ tende ad annullarsi, mentre $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ tende ad un limite generalmente diverso da zero, e però y' cresce indefinitamente. Ne segue che, in M, la tangente è parallela all'asse delle y, e ciò non costituisce singolarità. Ma se tendesse a zero anche $\frac{\partial f}{\partial x}$, nulla si potrebbe asserire, senza un ulteriore esame, circa il limite di y'. L'equazione (18) tende allora a divenire illusoria, e si ricorre perciò ad una nuova differenziazione:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y'\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+y''\frac{\partial f}{\partial y}=0 \;. \tag{19}$$

Ammettiamo che, nel tendere di M' ad M, y' tenda ad un limite finito, e cerchiamo di determinarlo, avvertendo che, se y' crescesse indefinitamente, basterebbe considerare dx/dy (che tende a zero) invece di dy/dx, per convincersi che sussistono i risultati che siamo per ottenere. Ora, per dimostrare che $y''\frac{\partial f}{\partial y}$ non può tendere ad un limite diverso da zero, adoperiamo il teorema di l'Hospital, e scriviamo

$$\lim y'=\lim\frac{y'\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\lim\left(y'+\frac{y''\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}}\right).$$

Siccome la funzione

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y'\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

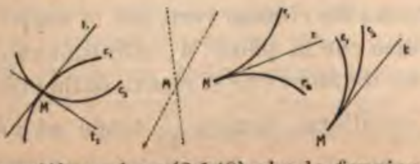
resta finita, per ipotesi, si ha $\lim y''\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Dunque l'equazione (19) diventa, al limite,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2y'\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \;, \tag{20}$$

intendendo che alle derivate seconde di f si attribuiscano i valori che assumono in M. Adunque si hanno per y', in M, due valori, vale a dire che la curva ammette, nel detto punto, due tangenti, le quali possono essere reali e distinte, o coincidenti, o immaginarie: ciò dipende dal segno di

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}\;. \tag{21}$$

Nel primo caso il punto M si chiama *punto doppio*, nel secondo caso *punto di regresso* o *cuspide*, e nel terzo esso è un *punto isolato*, perchè intorno ad M non può esistere alcun altro punto reale della curva.



Infatti, quando il determinante (21) è positivo, si sa (§ 140) che la funzione f ha, in M, un minimo o un massimo; e poichè in questo punto il suo valore è *zero*, vuol dire che, intorno ad esso, la funzione è sempre positiva o sempre negativa. Invece, se il determinante (21) è negativo, lo spazio angolare intorno ad M vien diviso (*cfr.* § 171) in due regioni, in una delle quali $f>0$, in vicinanza di M, mentre nell'altra è $f<0$; e tali regioni sono separate mercè le rette, in direzione delle quali f tende a conservare il valore 0. Son queste rette appunto le due tangenti alla curva $f=0$, in M. Veramente la discussione che precede è poco rigorosa; e per condurla accuratamente bisognerebbe lasciarsi guidare * da considerazioni analoghe a quelle, che sono state svolte nel § 173.

208. Riassumendo vediamo che, per cercare lungo una data curva $f=0$ le singolarità ultimamente descritte, bisogna porre uguali a zero le derivate prime di f, e cercare tutte le soluzioni $x=a$, $y=b$ del sistema così formato, ritenendo soltanto quelle che soddisfano anche all'equazione della curva. Sostituiti i valori a, b ad x, y nelle derivate seconde, se essi non annullano $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ si ha un punto doppio, una cuspide, o un punto isolato, secondo che la funzione (21), ossia $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$, assume un valore negativo, nullo, o positivo. Se poi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, ma $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\gtrless 0$, l'equazione (20) ammette una sola radice finita, e si ha un punto doppio, con una tangente parallela all'asse delle y. Se anche $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$, ma $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\gtrless 0$ nel punto (a, b), si può dire che le radici dell'equazione (20) sono entrambe infinite, e però si ha una cuspide, con la tangente parallela all'asse delle y. Finalmente può accadere che tutte le derivate seconde siano nulle nel punto (a, b); ed allora, diventando illusoria l'equazione (20), bisogna ricorrere all'altra

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3y'\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}+3y'^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}+y'^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=0 ,$$

che somministra, in generale, tre valori per y', sicchè si trova un punto triplo. Così continuando si perviene alla nozione di *punto multiplo* dell'ordine m, o punto m^{-uplo}, geometricamente caratterizzato dall'appartenere ad m rami della curva, reali o immaginarii, ed analiticamente dal fatto che in esso si annullano tutte le derivate parziali, il cui ordine è inferiore ad m, mentre almeno una, fra quelle dell'ordine m, è diversa da zero. Quando l'equazione si rende omogenea si può anche dire, più semplicemente, che il punto m^{-uplo} è caratterizzato dall'annullamento di tutte le

* D'Arcais « *Corso di Calcolo infinitesimale* » vol. I, pp. 509-515.

derivate parziali $(m-1)^{esime}$. Osserviamo, per finire, che *i punti multipli d'una curva*, come i punti d'inflessione, *appartengono all'hessiana della curva*; e si può inoltre dimostrare che sono multipli anche per l'hessiana.

209. **Cuspidi.** Fra i punti doppii hanno speciale importanza le cuspidi, perchè intorno a siffatti punti, come intorno ai flessi, la curva si comporta in modo eccezionale rispetto alla tangente. Infatti, se si prende come origine il punto che si vuol considerare, e come assi la tangente e la normale alla curva, è chiaro che debbono con x ed y annullarsi f e le sue derivate prime e seconde, tranne $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, giacchè l'equazione (20) deve fornire $y'=0$ come radice doppia. Siccome poi, in generale, anche $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ ha, nell'origine, un valore diverso da zero, l'equazione della curva si riduce alla forma $y^2=kx^3$ quando si trascurano gli infinitesimi d'un ordine superiore al terzo. Dunque la curva si comporta, in vicinanza dell'origine, come una parabola semi-cubica, e però tende a svolgersi da un lato solo della normale, in due rami separati fra loro per mezzo della tangente. Questo avviene generalmente, e si suole esprimere dicendo che la cuspide è di *prima specie*, riservando il nome di cuspide di *seconda specie* al caso eccezionale dei rami non separati per mezzo della tangente, che può presentarsi solo quando è anche $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=0$ nel punto che si considera. Nel caso generale, essendo $\lim(y/x^2)=\infty$, si vede che la curva *si distacca maggiormente* dalla tangente, e se ne deduce che *nelle cuspidi la curvatura è generalmente infinita*. In altri termini il raggio di curvatura si annulla; e siccome, nell'annullarsi, in generale avviene che il suo segno cambia, si vede così, in altro modo, che solo eccezionalmente può darsi il caso d'una cuspide di seconda specie.

210. Conviene ora ritornare, per un istante, sulla ricerca dei flessi d'una curva piana, rappresentata in coordinate polari. Nel § 205 abbiamo esclusi i valori di θ che annullano r insieme ad $r^2+2r'^2-rr''$, perchè annullano anche r', e per conseguenza $r^2+r'^2$, dimodochè non si sa dire che cosa diventa la curvatura. Anzi, in generale, è facile constatare che questa, invece di tendere a zero, cresce oltre ogni limite, sicchè si ha una cuspide invece d'un flesso. Per sapere, dunque, se il polo è un punto d'inflessione, bisogna porre uguale a zero l'espressione completa della curvatura, e non il solo numeratore; o pure discutere direttamente l'andamento della curva intorno al polo. Supponiamo che r si annulli per $\theta=\alpha$, ed in vicinanza del polo consideriamo, sulla curva, un punto, le cui coordinate rispetto alla tangente ed alla normale nel polo siano

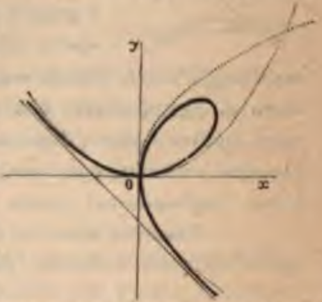
$$x=r\cos(\theta-\alpha)\quad,\quad y=r\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha)\ .$$

Evidentemente si ha, per θ tendente ad α,

$$\rho = \lim \frac{x^2}{2y} = \lim \frac{r\cos^2(\theta-\alpha)}{2\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha)} = {}^1\!/_2 \lim \frac{r}{\theta-\alpha} = {}^1\!/_2 r',$$

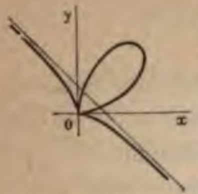
in virtù della definizione stessa della derivata r', che s'intende calcolata per $\theta=\alpha$. Del resto anche la seconda formola (8) si riduce, per $r=0$ ed $r' \gtrless 0$, a $\rho={}^1\!/_2 r'$. Dunque, se la funzione r' si annulla insieme ad r per $\theta=\alpha$, si ha $\rho=0$. Per avere un punto d'inflessione bisognerebbe invece che fosse $r'=\infty$.

211. **Esercizii:** *a)* Nel folium, rappresentato dall'equazione $x^3+y^3=3axy$, l'origine è un punto doppio, perchè le funzioni ${}^1\!/_3 \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - ay$, ${}^1\!/_3 \frac{\partial f}{\partial y} = y^2 - ax$ si annullano simultaneamente per $x=0$, $y=0$ (ed anche per $x=a$, $y=a$, che non soddisfano all'equazione della curva); poi si ha ${}^1\!/_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x$, ${}^1\!/_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -a$, ${}^1\!/_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y$; quindi l'equazione (20), che diventa $0+y'+0.y'^2=0$, ammette una radice nulla e l'altra infinita, e però la curva tocca, nell'origine, entrambi gli assi. Del resto, senza ricorrere al procedimento generale, se si ammette che, per x tendente a zero, y' ha un limite finito, basta dare all'equazione della curva la forma $x + y\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 3a\,\frac{y}{x}$ per convincersi che il detto limite è necessariamente nullo. Dunque la curva tocca, nell'origine, l'asse delle x, e (per ragione di simmetria) anche l'asse delle y. Se poi, per costruirla, se ne vuole conoscere l'andamento intorno all'origine, basta far tendere x a zero in modo che y/x tenda a zero, e trascurare nell'equazione gli infinitesimi d'un ordine superiore al terzo. Allora si vede che il ramo tangente all'asse delle x si comporta come la parabola $x^2=3ay$, e per conseguenza l'altro come la parabola $y^2=3ax$. A conseguenze simili conduce lo studio della logociclica e delle curve più generali considerate nel § 203.

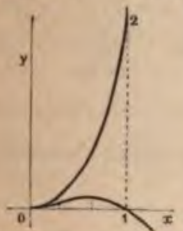


b) La curva $x^4=(x^2-y^2)y$ ha un punto triplo nell'origine, come si può constatare col metodo esposto nel § 208, o riconoscere in modo più semplice e rapido scrivendo l'equazione della curva sotto la forma $x = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^3$. Col tendere di x a zero si ottiene $y'-y'^3=0$, e però y' ha, nell'origine, i valori 0, 1, -1. Per costruire la curva è utile assumere come variabile indipendente il rapporto $t=y/x$, sostituendo così all'equazione data la coppia di equazioni $y=t-t^3$, $y=t^2-t^4$. Sulla figura sono segnati gli estremi degli intervalli nei quali varia t quando un punto, proveniente dall'infinito, percorre la curva tornando all'infinito, dopo esser passato tre volte $(t=-1,0,1)$ per l'origine.

c) Per la curva $x^5 + y^5 = 5ax^2y^2$ si arriva ad un punto quadruplo, risultante dalla riunione di due cuspidi nell'origine. Più generalmente l'equazione $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (2n+1)ax^ny^n$ rappresenta una curva di questo tipo, o del tipo del folium, secondo che n è pari o dispari: ciò si deve alla diversa posizione dell'unico assintoto reale $x + y = (-1)^n a$.



d) Esempii di cuspidi ne abbiamo già parecchi nelle curve studiate precedentemente (cardioide, sviluppante di circolo, asteroide, cicloide, *ecc.*), ed il lettore potrà esercitarsi a verificare che intorno a tali punti le dette curve si comportano come una parabola semi-cubica in vicinanza della propria cuspide, e constaterà facilmente che in essi il raggio di curvatura è sempre nullo. Così, per esempio, nel profilo verticale (§ 200, c) dell'elicoide sviluppabile, trasportata l'origine nella cuspide, si ha $\lim(x/\theta^2) = {}^1/_2 a$, $\lim(y/\theta^3) = {}^1/_3 b$, e però l'equazione $9a^3y^2 = 8b^2x^3$ tende ad esser vera per θ infinitesimo. Invece sulla curva $(y - x^2)^2 = x^5$ si riscontra una cuspide di seconda specie. Evidentemente, perchè sia reale y, occorre che sia positivo x. Scrivendo



$$y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$$

si vede subito che la curva consta di due rami tangenti, nell'origine, all'asse delle x, ma i due rami si comportano, rispetto alla tangente, come in un punto ordinario, giacchè si ha $\lim(y/x^2) = 1$, d'onde segue che la curvatura è misurata, nell'origine, dal numero 2. Aggiungiamo che uno dei rami si estende, in forma parabolica, all'infinito, mentre l'altro, dopo un'inflessione nel punto di ascissa $({}^8/_{15})^2$, acquista la massima ordinata per $x = ({}^4/_5)^2$, e poi scende anch'esso parabolicamente all'infinito, tagliando nel punto $x = 1$ l'asse delle ascisse.

e) Esempio notevole di curva con flessi e cuspidi si ha nella curva detta *cocked hat*, ossia *bicorno*, dagli inglesi:

$$y = \frac{a^2 - x^2}{2a \pm \sqrt{a^2 - x^2}} .$$

Per applicare il metodo indicato nel § 208 bisognerebbe porre l'equazione sotto forma razionale ed intera; ma qui conviene lasciarla come si trova, ed osservare che si hanno due rami, secondo che si prende il segno $+$ o il segno $-$ in denominatore. Multipli sono evidentemente quei punti, nei quali avviene che si confondono le due determinazioni di y. Occorre perciò che sia $x^2 = a^2$, e per conseguenza $y = 0$. Per calcolare y' in tali punti $(\pm a, 0)$ si può, evitando la derivazione, osservare che, in virtù della definizione stessa della derivata, si ha

$$y' = \lim_{x=\pm a} \frac{y}{x \mp a} = \pm 2a \lim_{x=\pm a} \frac{y}{x^2 - a^2} = \mp 1 ,$$

ossia $y' = -1$ per $x = a$, ed $y' = 1$ per $x = -a$. Poichè, in ciascun punto, la tangente è unica, si hanno due cuspidi; e le tangenti in tali punti concorrono in un vertice $(0, a)$ della curva. Anche la curvatura in questo punto A si può calcolare con procedimento analogo:

$$\frac{1}{2\rho} = \lim_{x=0} \frac{a-y}{x^2} = \frac{1}{a} + \lim_{x=0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} = \frac{3}{2a} .$$

Adunque $\rho = {}^1/_3 a$, sicchè, chiamando A′ l'altro vertice $(0, {}^1/_3 a)$, si vede che la curva oscula, in A, la circonferenza descritta sul diametro AA′. Quanto ai flessi, se si pone $y'' = 0$, si trova $3\sqrt{a^2-x^2} \pm 2a = 0$, equazione soddisfatta (purchè si prenda il segno —) solo per $x = \pm {}^1/_3 a\sqrt{5}$, e conseguentemente $y = {}^1/_3 a$. Dunque i punti d'inflessione si trovano sulla tangente nel vertice A′.

f) Quando il procedimento esposto nel § 208 si applica all'equazione complessiva di due curve $(\varphi = 0, \psi = 0)$, si trovano, oltre i punti multipli delle due curve, anche i loro punti d'incontro. Infatti, posto $f = \varphi\psi$, è chiaro che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ si annullano, come f, tutte le volte che si annullano insieme φ e ψ; ed essendo inoltre, in questo caso,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}^2 ,$$

si vede che i punti comuni alle due curve appariscono come veri punti doppii. In particolare, se si annulla il secondo membro, come accade (§ 178, *a*) quando le due curve si toccano, si annulla anche il primo, e però i punti di contatto delle due curve ci si presentano come cuspidi, quantunque le curve si estendano dall'uno all'altro lato della normale.

212. Le singolarità finora studiate sono le sole che si osservino sulle curve algebriche, considerate nella loro generazione per punti. Quando poi si fa uso di coordinate tangenziali, ed invece dei punti si considerano le tangenti alla curva, si può ripetere, con perfetta dualità, tutta la discussione precedente, ed invece dei punti doppii, tripli, *ecc.*, s'incontrano le *tangenti doppie*, triple, *ecc.*; ma non si ottengono altre singolarità essenzialmente nuove. Si trovano infatti le *tangenti regredienti* e le *tangenti inflessionali*; ma le prime non sono che le tangenti nei punti d'inflessione, e le altre sono invece le tangenti nei punti di regresso. Per questa ragione il numero ν delle cuspidi e quello μ dei flessi si corrispondono per dualità, nello stesso modo che al numero ν' dei punti doppii corrisponde il numero μ' delle tangenti doppie, ed all'*ordine* n la *classe* m. Un altro numero importantissimo, che corrisponde a sè stesso, si chiama il *genere* della curva, e si rappresenta abitualmente con p. Si dimostra * che questo numero sarebbe uguale, per una curva priva di punti multipli, ad ${}^1/_2(n-1)(n-2)$. È anche noto che, nelle medesime condizioni, la

* Il lettore potrà studiare la *Théorie des courbes planes algébriques* nel t. I del *Cours d'Analyse* di Jordan.

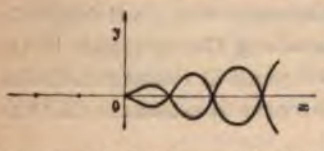
classe m risulterebbe uguale ad $n(n-1)$, ed il numero μ dei flessi (§ 205) a $3n(n-2)$. Orbene si dimostra che, per effetto della presenza di ν' punti doppii e di ν cuspidi, i numeri precedenti si abbassano rispettivamente di $\nu+\nu'$, $3\nu+2\nu'$, $8\nu+6\nu'$. Quindi, per dualità, se da $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, $m(m-1)$, $3m(m-2)$ si sottraggono rispettivamente $\mu+\mu'$, $3\mu+2\mu'$, $8\mu+6\mu'$, si trovano i numeri p, n, ν. Le formole alle quali in tal modo si perviene si chiamano *formole di Plücker*. Da esse è facile dedurre che, per una curva di ordine n, di classe m, di genere p, i numeri delle singolarità sono

$$\nu=2(n+p-1)-m \quad , \quad \nu'=\frac{1}{2}(n-1)(n-6)+m-3p \; ,$$
$$\mu=2(m+p-1)-n \quad , \quad \mu'=\frac{1}{2}(m-1)(m-6)+n-3p \; ,$$

qualora non si abbiano altre singolarità più complicate. Particolarmente notevoli sono le *curve di genere zero*, le quali hanno, tutte, la proprietà (che le caratterizza) di essere *unicursali*, cioè di avere le coordinate x, y dei loro punti esprimibili razionalmente in funzione d'una terza variabile: tali sono, per esempio, le coniche e le prime tre curve studiate nel precedente paragrafo.

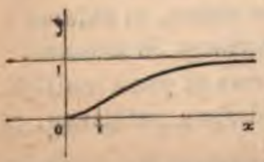
213. Altre singolarità possono verificarsi solo nelle curve trascendenti:

a) Prima di tutto ci si convince facilmente che su tali curve si possono avere infinite singolarità. Ciò si è già constatato nella quadratrice (infiniti flessi), nella cicloide (infinite cuspidi), *ecc.*; ed ora si può aggiungere che la curva $y^2=x\,\mathrm{sen}^2 x$, dotata d'una cuspide nell'origine, e di due flessi fuori dell'asse x, possiede inoltre, su questo asse, infiniti punti isolati ed infiniti punti doppii, i quali sono anche punti di inflessione.



b) Infiniti punti d'inflessione presenta anche, in un intervallo finito, la curva $y=x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}$, che ha un assintoto ($y=1$) parallelo all'asse x. Siccome si ha $x^4y''=-y$, l'inflessione avviene sempre sull'asse x. Oltre le tangenti regredienti (che concorrono in due punti dell'asse y), la curva ammette come tangenti singolari le bisettrici degli assi, dalle quali è toccata, infatti, in infiniti punti. Questa curva è poi notevole per la seguente proprietà: da ogni punto dell'asse y, compreso nell'intervallo $(-1, 1)$, le si possono condurre infinite tangenti, i cui punti di contatto stanno sopra una retta uscente dall'origine. Analoghe proprietà si riscontrano sulla curva $y=x\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{x}$, assintotica all'asse x.

c) Punti di fermata son quelli nei quali termina bruscamente un ramo di curva, come accade nell'origine per uno dei rami della curva $y=e^{-\frac{1}{x}}$, dotata inoltre d'un flesso per $x=\frac{1}{2}$, ed assintotica alla retta $y=1$. La curva $y=\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)/\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)$ consta anch'essa di due rami, i quali si fermano sull'asse delle y nei punti $y=\pm 1$, s'inflettono sulla retta $y=2x$, e sono entrambi assintotici all'asse delle x. Anche la curva $y=x\log x$ offre un



empio assai semplice di fermata nell' origine, dove tocca l' asse delle y. Altri e-mpii ci sono dati dalle curve

$$y = \frac{x^2}{\log x} \quad , \quad y = x^2 \log \frac{x}{y} \, ,$$

ascuna delle quali ha un ramo che si ferma nell' origine; e ciò avviene perchè on vi sono punti reali sulla prima curva per $x < 0$, nè sull'altra per $x < y$. La rima sembra comportarsi, rispetto alla tangente nell' origine, come in un punto ' inflessione, perchè (*cfr.* § 149)

$$\lim \frac{y}{x^2} = 0 \quad , \quad \text{ma} \quad \lim \frac{y}{x^n} = \infty \quad \text{per} \quad n > 2 \; ;$$

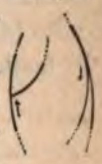
la seconda come in un punto di regresso, perchè

$$\lim \frac{y}{x^2} = \infty \quad , \quad \text{ma} \quad \lim \frac{y}{x^n} = 0 \quad \text{per} \quad n < 2 \; .$$

Entrambe le curve posseggono un altro ramo, assintotico, come il primo, alla retta $x = 1$ per la prima curva, ed alla retta $x - y = 1$ per la seconda. Questi rami si estendono poi nuovamente all' infinito, volgendo sempre la convessità verso l'asse delle x, dal quale hanno una distanza minima $2e$.

d) Se due rami d' una curva s' incontrano in un punto M, e vi si fermano, M è un ***punto saliente***. In M la curva tocca due rette, come in un punto doppio, ma ciascun ramo esiste, come in una cuspide, da un lato solo della corrispondente normale. Un punto saliente lo abbiamo già incontrato (§ 200, *e*) sulla curva definita dall' equazione $y = x / \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)$, ed un altro esempio semplicissimo ne abbiamo (§ 41, *b*), per $x = 0$, nella curva $y = x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$.

e) Quando poi un solo dei due rami si ferma nel punto comune, questo è un ***punto di sdoppiamento*** *, ossia la curva presenta ivi un bivio, per così dire, ad un punto che la percorre in un certo senso. Per averne esempii basta aggiungere $e^{-\frac{1}{x}}$, o $x \log x$, o $[x]$, ecc., ad y, nell' equazione d'una curva dotata d' un punto doppio, per esempio in $x^3 + y^3 = 3axy$. Si viene così a sopprimere o ad asportare uno dei quattro rami uscenti dal punto doppio; ed è chiaro che lo stesso procedimento permette di sopprimere due, tre o quattro rami, e può quindi servire a costruire curve dotate di punti salienti, punti di fermata o punti isolati.



Contatti.

214. **Ordine del contatto.** Intorno ad un punto ordinario M, comune a due linee, consideriamo due punti P e Q, uno sopra una linea, l'altro sull' altra. Immaginiamo che P e Q tendano simultaneamente ad

* Su queste singolarità, segnalate venticinque anni fa dal fisico belga Plateau, vedi un articolo di Mansion in *Mathesis*, 1883, p. 193.

M, e per fissare le idee supponiamo (quantunque non sia necessario) che la retta PQ tenda ad una posizione limite, nella quale siano diversi da zero (e da π) i suoi angoli α e β con le due linee, ossia con le loro tangenti in M. È anzitutto facile vedere che gli archi MP ed MQ sono infinitesimi del medesimo ordine. Infatti il limite del loro rapporto ha il valore

$$\lim \frac{MP}{MQ} = \lim \frac{\operatorname{sen} \widehat{MQP}}{\operatorname{sen} \widehat{MPQ}} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha},$$

finito e diverso da zero, in virtù dell'ipotesi. Ora, preso MP o MQ come infinitesimo principale, e chiamato ω l'angolo delle due linee, in M, si ha pure

$$\lim \frac{PQ}{MQ} = \lim \frac{\operatorname{sen} \widehat{PMQ}}{\operatorname{sen} \widehat{MPQ}} = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \alpha},$$

e si vede che la distanza PQ è infinitesima del primo ordine, o d'un ordine superiore, secondo che $\operatorname{sen} \omega$ è diverso da zero o uguale a zero, vale a dire secondo che, in M, le due linee si tagliano o si toccano. Adunque il diventare PQ infinitesimo d'un ordine superiore al primo è un fatto che caratterizza il *contatto* delle linee. È dunque naturale assumere come indice del contatto più o meno stretto, che si può avere fra le linee considerate, l'ordine d'infinitesimo di PQ. Pertanto diremo che *il contatto è dell'ordine* n *quando* PQ *è infinitesimo dell'ordine* n + 1. Bisogna tuttavia far vedere, prima di adottare questa definizione, che il numero n è *unico* per gli infiniti possibili modi di assumere coppie di punti P, Q, tendenti ad M. Suppongasi che, mentre il punto Q tende ad M, invece di congiungerlo a P, si congiunga ad altro punto P', tendente anch'esso ad M in guisa che P'Q tenda ad una posizione limite, non tangente alle linee, in M. È noto (§ 107, *c*) che, tendendo P e P' ad M lungo una delle due linee, PP' tende a confondersi con la tangente, in M, a questa linea; e però

$$\lim \frac{PQ}{P'Q} = \lim \frac{\operatorname{sen} \widehat{PP'Q}}{\operatorname{sen} \widehat{P'PQ}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Dunque P'Q è infinitesimo dello stesso ordine di PQ.

215. È facile trovare le condizioni analitiche del contatto n^{-uplo} per due linee, date in coordinate cartesiane mediante le equazioni $Y = \varphi(X)$, $Y = \psi(X)$. Supponiamo che, in M, le linee ammettano una tangente comune, non parallela all'asse delle y, e tagliamole, intorno ad M, con una parallela al detto asse, che le incontri in P e Q. Qui si noti che, se la tangente fosse parallela all'asse delle y, basterebbe scambiare fra loro gli as-

i, e conseguentemente le coordinate, per rimanere nell'ipotesi fatta. Ciò premesso, se x è l'ascissa di M, ed $x+h$ quella di P e Q, è chiaro che l'infinitesimo h è dell'ordine di MP e di MQ, cioè del primo ordine, perchè il rapporto di h ad MP o ad MQ tende al coseno dell'angolo che la tangente in M fa con l'asse delle x; e per ipotesi questo coseno non è nullo. Anche per ipotesi la retta PQ non tende a confondersi con la tangente in M, e però le condizioni del contatto n^{-uplo} son tutte racchiuse nel fatto che PQ è infinitesimo dell'ordine $n+1$; e siccome, posto $\chi(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, si ha

$$\mathrm{PQ}=\chi(x+h)=\chi(x)+h\chi'(x)+{}^1/_2 h^2\chi''(x)+\ldots,$$

si vede che per un tal fatto sono necessarie e sufficienti le condizioni

$$\chi(x)=0\;,\;\chi'(x)=0\;,\;\ldots\;,\;\chi^{(n)}(x)=0\;,\;\chi^{(n+1)}(x)\gtrless 0\;. \qquad (22)$$

Dunque, *affinchè fra le due linee vi sia, nel punto* M, *un contatto dell'ordine* n, *occorre e basta che si abbia*

$$\varphi(x)=\psi(x)\;,\;\varphi'(x)=\psi'(x)\;,\;\ldots\;,\;\varphi^{(n)}(x)=\psi^{(n)}(x)\;,\;\varphi^{(n+1)}(x)\gtrless\psi^{(n+1)}(x)\;,$$

cioè che le prime n derivate dell'ordinata rispetto all'ascissa siano fra loro uguali, nelle due linee, ma le derivate $(n+1)^{esime}$ siano differenti. Si noti che la prima di queste condizioni esprime semplicemente che, in M, le linee s'incontrano, e la seconda che esse si toccano.

216. Osserviamo che, quando n è *dispari*, le condizioni trovate son quelle stesse che permettono di asserire (§ 72) che la funzione $\chi(\mathrm{X})$ ha, per $\mathrm{X}=x$, un minimo o un massimo; e siccome la funzione è nulla per quel valore di X, essa conserverà invariato un certo segno intorno ad M, e per conseguenza le due linee, in M, *non si attraversano*. Se, invece, n è *pari*, la funzione considerata non ha nè minimo nè massimo per $\mathrm{X}=x$, e però si ha $\varphi(\mathrm{X})>\psi(\mathrm{X})$ da un lato di M, e $\varphi(\mathrm{X})<\psi(\mathrm{X})$ dall'altro lato, cioè le due linee, pur toccandosi in M, *si attraversano*. Dunque il solo fatto che due linee nel toccarsi si attraversano rivela un contatto superiore, ed in tutti i casi d'un ordine pari. Nondimeno questa conclusione è subordinata all'ipotesi implicitamente contenuta nelle precedenti considerazioni, cioè che le funzioni φ e ψ ammettano le successive derivate uniche. Così, per esempio, nel § 206 abbiamo incontrata una curva che attraversa la tangente nell'origine, malgrado che il contatto fra le due linee sia semplice. Un caso analogo si dà per la curva $y=x^2/(1+e^{\frac{1}{x}})$, che nell'origine tocca ed attraversa (§ 200, *f*) la parabola $y={}^1/_2x^2$, quantunque non vi sia che un contatto semplice fra le due curve. È poi da notare che il contatto della medesima curva con la propria tangente è semplice a sinistra dell'origine, mentre a destra non si saprebbe dire quanto ne sia elevato l'ordine.

217. Algebricamente considerate le condizioni (22) dicono ancora che l'equazione $\chi(X)=0$ ha in $X=x$ una radice $(n+1)^{-uple}$; e siccome questa è l'equazione che fornisce le ascisse dei punti d'incontro delle due linee, si può dire che in M sono riuniti $n+1$ punti comuni alle linee stesse. Questo modo di vedere è poi geometricamente giustificato dal fatto che, se si conduce per un punto M d'una linea $Y=f(X)$ una linea variabile $Y=\varphi(X)$, la cui equazione racchiuda più di n parametri arbitrarii, e se si dispone di questi parametri in modo che la linea passi per altri n punti M', M'', ... della prima linea, e se finalmente questi n punti si fanno simultaneamente tendere ad M in modo che la linea variabile tenda ad occupare una posizione limite, in questa essa ha un contatto di ordine generalmente uguale ad n con la linea data. Supponiamo infatti che $n+1$ parametri della linea variabile siano stati determinati in modo da soddisfare alle condizioni

$$\varphi(x)=f(x)\ ,\ \varphi(x_1)=f(x_1)\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi(x_n)=f(x_n)\ ,$$

nelle quali $x, x_1, x_2, \ldots$ sono le ascisse di M, M', M'', ... È noto (§ 100) che si può scrivere

$$\varphi(X)=f(x)+(X-x)f(x,x_1)+(X-x)(X-x_1)f(x,x_1,x_2)+\cdots$$
$$+(X-x)(X-x_1)\ldots(X-x_{n-1})f(x,x_1,\ldots,x_n)+(X-x)(X-x_1)\ldots(X-x_n)\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ ,$$

rappresentando con ξ un numero compreso fra la più piccola e la più grande delle ascisse $X, x, x_1, \ldots\ldots, x_n$. È anche noto che, quando x_1, $x_2, \ldots, x_n$ tendono (insieme) ad x, si ha

$$\lim f(x, x_1, x_2, \ldots, x_\nu)=\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\ .$$

Dunque, se si rappresenta con ξ un numero compreso fra X ed x,

$$\varphi(X)=f(x)+(X-x)\frac{f'(x)}{1}+(X-x)^2\frac{f''(x)}{1.2}+\cdots+(X-x)^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+(X-x)^{n+1}\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ .$$

D'altra parte, se ξ_1 è un altro numero compreso fra X ed x,

$$f(X)=f(x)+(X-x)\frac{f'(x)}{1}+(X-x)^2\frac{f''(x)}{1.2}+\cdots+(X-x)^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+(X-x)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}\ .$$

Per conseguenza

$$\lim_{X=x}\frac{f(X)-\varphi(X)}{(X-x)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(x)-\varphi^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\ ,$$

cioè la differenza $f(X)-\varphi(X)$ è infinitesima d'un ordine superiore ad n, e però le due linee hanno, in M, un contatto di ordine non inferiore ad n.

Il contatto può diventare d'un ordine superiore ad n quando altri punti d'incontro delle due linee, oltre quelli da noi considerati, vadano a confondersi con M. Naturalmente in tutto ciò si suppone n intero; ma, nel definire l'ordine del contatto, non si esclude che possa essere frazionario, come accade, per esempio, nel contatto fra una curva ed una sua tangente inflessionale, dove l'ordine è, in generale (§ 209), uguale ad $^1/_2$.

218. **Osculazione.** Ora supponiamo che ad una data linea $f(X, Y)=0$ si voglia condurre, in un punto (x, y), una linea che abbia con essa un contatto n^{-uplo}, ed appartenga ad una famiglia di linee, definita dall'equazione $\varphi(X, Y)=0$, che racchiude più di n parametri arbitrarii. Bisognerà derivare le due equazioni n volte di seguito, come per calcolare le prime n derivate di Y rispetto ad X, ed esprimere poi che, in entrambe le serie di equazioni così ottenute, le dette derivate hanno, per $X=x$ ed $Y=y$, gli stessi valori. Si ottengono così $n+1$ equazioni, comprendendovi quella che si ha ponendo $X=x$ ed $Y=y$ nell'equazione della linea incognita. Esse servono a determinare $n+1$ parametri, ed in generale avverrà che, soltanto se i parametri arbitrarii saranno in numero maggiore di n, si potrà ottenere un contatto n^{-uplo}. Quando si dispone di tutti i parametri, in modo da raggiungere il *contatto massimo*, ossia dell'ordine più elevato, si dice che le due linee sono *osculatrici*. Ciò non toglie che, per una particolarità inerente alla prima linea, si possa oltrepassare l'ordine massimo, ed allora si dice che le linee sono *surosculatrici*. Per sapere in quali punti avviene la surosculazione, basta derivare una volta di più, ed eliminare i parametri fra tutte le equazioni ottenute.

219. **Esempii:** *a)* Quando ad una curva si vuol condurre, in un punto (x, y), una retta tangente, se si osserva che l'equazione della retta $Y=mX+h$ contiene due parametri arbitrarii, si prevede che non si può ottenere, in generale, se non un contatto semplice. Intanto, col procedimento indicato nel precedente paragrafo, si trovano le condizioni $y=mx+h$, $y'=m$, nelle quali bisogna pensare che x, y, y' si riferiscano alla curva data. Se ne ricavano i valori dei parametri $m=y'$, $h=y-xy'$, e si trova (*cfr.* § 187) che l'equazione della retta tangente è

$$Y=Xy'+(y-xy'), \quad \text{ossia} \quad Y-y=y'(X-x).$$

Per un contatto superiore bisogna che sia $y''=0$, e ciò dipende dalla curva data; e precisamente si vede che solo nei flessi una curva ha, con la propria tangente, un contatto di ordine superiore al primo. Questo contatto è generalmente del secondo ordine, e la tangente *attraversa* la curva; ma, perchè ciò avvenga, occorre inoltre e basta che la prima delle successive derivate y''', y^{IV}, ..., che non è nulla, sia di ordine dispari. Con linguaggio geometrico si può dire che in un punto d'inflessione M sono confusi almeno tre punti comuni alla curva ed alla sua tangente, e che in ogni caso il numero dei punti accumulati in M è dispari o pari secondo che la retta è attraversata o no dalla curva.

b) Un circolo di centro (ξ, η) e di raggio ρ è rappresentato dall'equazione $(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2=\rho^2$. Derivando e ponendo $X=x$, $Y=y$, ecc., si ottiene

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2 \ , \ x-\xi+(y-\eta)y'=0 \ , \ 1+y'^2+(y-\eta)y''=0 \ , \qquad (23)$$

d'onde si trae, successivamente,

$$y-\eta=-\frac{1+y'^2}{y''} \ , \quad x-\xi=y'\frac{1+y'^2}{y''} \ , \quad \rho=\pm\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} .$$

Si ritrova così il circolo già chiamato osculatore, e si vede che il suo contatto con la curva è generalmente del secondo ordine, d'onde segue (*cfr.* § 193) che *la circonferenza osculatrice attraversa la curva nel punto stesso in cui la tocca.* Si può anche dire, riferendosi a quanto si è visto nel § 217, che la circonferenza osculatrice passa per tre punti della curva, infinitamente vicini, ed è bene rammentarsi che proprio così questa circonferenza ci si è presentata per la prima volta (§ 107, *e*).

c) Se poi si vuole che una circonferenza abbia con una curva data un contatto di ordine superiore al secondo, bisogna che sia soddisfatta anche l'eguaglianza che si ottiene derivando l'ultima delle (23), cioè

$$3y'y''+(y-\eta)y'''=0 \quad , \quad \text{ovvero} \quad 3y'y''^2=\left(1+y'^2\right)y''' :$$

ciò dipende dalla natura della curva, nel punto particolare che si considera. Ora si noti che la derivata di ρ, rispetto ad x, è precisamente

$$\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{y''^2}\left(3y'y''^2-\left(1+y'^2\right)y'''\right) .$$

Dunque (*cfr.* § 193), immaginando che M percorra la curva, avviene che *il circolo osculatore, quando diventa minimo o massimo, acquista con la curva un contatto di ordine superiore al secondo.* Ciò non toglie che la suroscuIazione possa aver luogo anche quando il circolo non diventa minimo o massimo.

Inviluppi.

220. **Definizione.** Sia data una famiglia di linee mediante l'equazione $f(x, y, a)=0$, dove ciascun valore del parametro a individua una linea. Supponiamo che f sia continua anche rispetto ad a, ed ammetta le derivate prime continue. Sia M un punto d'incontro delle linee (a) ed $(a+h)$, ossia delle linee corrispondenti ai valori a ed $a+h$ del parametro. Quando, fissato a, si fa tendere h a zero, la linea $(a+h)$ tende a confondersi con (a), e può darsi che il punto M, scorrendo su (a), tenda ad occupare una posizione limite A. Se le linee non s'incontrano, possono tuttavia esistere punti A, sulla linea (a), tali che il segmento determinato dall'altra linea sulla normale in M, a partire da M, diventi, in A,

nfinitesimo d'un ordine superiore; e tali punti di *massimo infinito avvicinamento* possono venir considerati anch'essi come appartenenti alle ue linee, a prescindere da infinitesimi superiori. Il luogo dei punti A hiamasi *inviluppo* delle linea $f(x, y, a) = 0$.

221. **Equazione dell'inviluppo.** Nell'ipotesi che A non sia un unto multiplo della linea (a), questa, per la supposta continuità delle derivate prime di f, sarà priva di punti multipli anche intorno ad A. Ne egue che, se si prende sulla medesima linea un punto M, sufficientemene vicino ad A, si ha in M una normale ben determinata, i cui coseni direttori α e β differiscono infinitamente poco dagli analoghi coseni della normale in A:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \frac{\partial f}{\partial x} + \cdots \quad , \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots .$$

Siano ξ ed η le coordinate di M, tendenti, per h infinitesimo, alle coordinate x ed y di A. Sia l la lunghezza del segmento MM', che la linea $(a + h)$ determina sulla normale in M. Tale lunghezza si dovrà supporre nulla quando M è un punto d'incontro delle due linee. In tutti i casi le coordinate di M' sono $\xi + l\alpha, \eta + l\beta$, e debbono soddisfare all'equazione della linea $(a + h)$:

$$f(\xi + l\alpha, \eta + l\beta, a + h) = 0 .$$

Ne segue, ricordando che $f(\xi, \eta, a) = 0$, e trascurando infinitesimi d'un ordine superiore,

$$l\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y}\right) + h \frac{\partial f}{\partial a} = 0 ,$$

d'onde

$$l = -\frac{h}{\sqrt{\Delta f}} \frac{\partial f}{\partial a} .$$

Affinchè l sia nullo, o soltanto infinitesimo d'un ordine superiore ad h, occorre e basta che si abbia $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, giacchè si escludono i punti multipli. Dunque *l'equazione dell'inviluppo si ottiene eliminando* a *fra le equazioni*

$$f(x, y, a) = 0 \quad , \quad f'_a(x, y, a) = 0 . \qquad (24)$$

222. **Proprietà caratteristica.** Si può anche dire che l'equazione dell'inviluppo è l'equazione stessa della famiglia di linee, ossia la prima delle (24), quando vi si pensi a come funzione di x e di y, definita dalla seconda equazione (24). In queste condizioni la differenziazione totale della prima equazione dà

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dx} = 0 . \qquad (25)$$

che generalmente si riduce, in virtù della seconda, a $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$, ossia a quella stessa equazione che dà il valore di y' per la linea (a). Dunque *l'inviluppo tocca tutte le linee della famiglia.* È poi questa una proprietà caratteristica dell'inviluppo, perchè, qualunque sia la linea che si vuol supporre tangente a tutte le linee della famiglia, si può sempre immaginare che la sua equazione sia la prima delle (24), dove a è una funzione incognita, da determinare convenientemente. Questa determinazione dev'esser fatta in guisa che la (25) somministri per y' lo stesso valore che si ha per ciascuna linea (a), qualunque sia a. È dunque necessario che sia $\frac{\partial f}{\partial a}=0$; e però l'equazione della linea cercata è appunto quella che risulta dall'eliminazione di a fra le (24).

223. L'equazione $f(x, y, a)=0$ coordina i punti del piano lungo linee, che sono abitualmente situate da una stessa parte dell'inviluppo, sicchè questo segna il confine della regione solcata dalle linee della famiglia. Invece che nell'unica maniera prescritta dalla suddetta equazione, i punti del piano potrebbero anche, in infiniti modi, essere coordinati in linee dalle equazioni

$$f(x, y, a, b)=0 \quad , \quad g(x, y, a, b)=0 \ , \qquad (26)$$

le quali stabiliscono una corrispondenza fra le coppie di valori dei parametri indipendenti a, b, ed i punti (x, y) del piano. Se si domanda il confine della regione occupata da questi punti, si è condotti a cercare l'inviluppo della famiglia di linee rappresentata, per esempio, dalla prima equazione (26), quando vi si pensa a come unico parametro arbitrario, e b come funzione di x, y ed a, definita dalla seconda equazione (26). Si ha dunque $\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}=0$, dove $\frac{\partial b}{\partial a}$ è data da $\frac{\partial g}{\partial a}+\frac{\partial g}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a}=0$. Ne segue

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(a, b)}=0 \ . \qquad (27)$$

Basta eliminare a, b fra questa e le (26) per ottenere l'equazione della linea cercata. Una delle (26) potrebbe anche non contenere x, y; ed allora si è ricondotti al caso d'un sol parametro, giacchè nell'altra equazione uno dei parametri si deve considerare come funzione dell'altro parametro. Il risultato (27) sussiste tal quale. Più generalmente, date m equazioni

$$f(x, y, a, b, c, \ldots)=0 \quad , \quad g(x, y, a, b, c, \ldots)=0 \ , \ \ldots \ ,$$

con n parametri, vincolati da $n-m$ relazioni

$$\varphi(a, b, c, \ldots)=0 \quad , \quad \psi(a, b, c, \ldots)=0 \ , \ \ldots \ ,$$

si trova, differenziando totalmente tutte le equazioni rispetto ai parametri, ed eliminando $da, db, dc, \ldots$, che dev'essere nullo il determinante funzionale di $f, g, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$ rispetto ad $a, b, c, \ldots$. Aggregando l'equazione così ottenuta alle n precedenti, si giunge poi, per eliminazione di $a, b, c, \ldots$, all'equazione dell'inviluppo.

224. **Sviluppata e sviluppanti**. Si chiama *sviluppata* d'una curva l'inviluppo delle sue normali. Ogni curva, poi, si dice *sviluppante* della propria sviluppata. Per quanto si è visto nel § 191 si può subito affermare che *la sviluppata d'una curva piana è il luogo dei suoi centri di curvatura*. Ora questo teorema si può anche dimostrare applicando all'equazione della normale $X - x + (Y - y)y' = 0$ il procedimento accennato in fine del § 221. Si ottiene infatti $-(1 + y'^2) + (Y - y)y'' = 0$, e però le coordinate del punto di contatto della normale col suo inviluppo sono

$$X = x - y'\frac{1 + y'^2}{y''} \quad , \quad Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''} .$$

D'altra parte si è visto nel § 210 che, se ξ ed η sono le coordinate del centro di curvatura, si ha

$$x - \xi = y'\frac{1 + y'^2}{y''} \quad , \quad y - \eta = -\frac{1 + y'^2}{y''} .$$

Dunque $X = \xi$, $Y = \eta$.

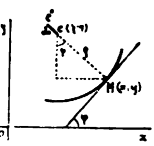
225. Scritte le coordinate del centro di curvatura sotto la forma

$$\xi = x - \rho \operatorname{sen}\varphi \quad . \quad \eta = y + \rho \cos\varphi ,$$

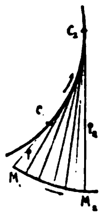
se ne deduce

$$d\xi = dx - \rho\cos\varphi\, d\varphi - \operatorname{sen}\varphi . d\rho \quad , \quad d\eta = dy - \rho \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi + \cos\varphi . d\rho ;$$

quindi, ricordando che $dx = \cos\varphi . ds$, $dy = \operatorname{sen}\varphi . ds$, e ponendo ds per $\rho d\varphi$, si trova $d\xi = -\operatorname{sen}\varphi . d\rho$, $d\eta = \cos\varphi . d\rho$. Queste formole mostrano che l'elemento CC' di sviluppata si può considerare come se fosse collocato sulla normale alla sviluppante, e come se avesse la lunghezza $d\sigma = d\rho$. Ne segue, ancora una volta, che *le tangenti alla sviluppata sono normali alla sviluppante*. Inoltre l'eguaglianza $d(\sigma - \rho) = 0$ mostra che $\sigma - \rho$ è costante; e però, se si considera un arco di sviluppata $C_1C_2 = \sigma_2 - \sigma_1$, negli estremi del quale i raggi di curvatura della sviluppante considerata abbiano i valori ρ_1 e ρ_2, si ha $\sigma_1 - \rho_1 = \sigma_2 - \rho_2$, cioè $\sigma_2 - \sigma_1 = \rho_2 - \rho_1$. In altri termini



$$\text{arco}\, C_1C_2 = M_2C_2 - M_1C_1 \; . \qquad (28)$$



Segnaliamo alcune notevoli conseguenze di questa proprietà:

a) Se l'arco M_1M_2 è sufficientemente piccolo perchè la sua curvatura vada variando sempre in un senso da un estremo all'altro, le circonferenze osculatrici in M_1 ed M_2 non possono incontrarsi, perchè (§ 193) separate appunto dall'arco M_1M_2. Del resto è facile calcolarne la distanza, uguale alla distanza dei loro punti Q_1, Q_2, che giacciono (in vicinanza dell'arco M_1M_2) sulla retta che ne congiunge i centri. Si ha

$$Q_1Q_2 = Q_2C_2 - Q_1C_1 + C_1C_2 = M_2C_2 - M_1C_1 - C_1C_2 ,$$

ossia $Q_1Q_2 = \text{arco}C_1C_2 - \text{corda}C_1C_2 > 0$. È dunque evidente che due circonferenze osculatrici, sufficientemente vicine, non s'incontrano; ma possiamo anche affermare (§ 186) che *due circonferenze osculatrici infinitamente vicine non hanno alcun punto comune: e la loro distanza è infinitesima del terzo ordine rispetto alla distanza dei centri.*

b) Segue ancora dalla (28) che, se si immagina avvolto un filo sopra una curva piana, e che poi, tenendo fisso un capo del filo, questo si svolga, restando teso, nel piano della curva, ciascuno dei suoi punti descrive una sviluppante della curva data. Una curva ha dunque infinite sviluppanti, le quali costituiscono un sistema di curve *parallele* ed *equidistanti.* Si possono anche considerare le sviluppanti d'una curva come rullette, generate dai punti d'una retta che rotola, senza strisciare, sulla curva stessa.

226. Per la completa conoscenza della sviluppata d'una data curva, ci resta ancora da determinarne la curvatura. All'uopo si osservi che nelle due curve l'angolo di contingenza ha lo stesso valore. Ne segue subito che *il raggio di curvatura della sviluppata è uguale a* $\rho \frac{d\rho}{ds}$; e perciò accade, in generale, che nei punti di minima o massima curvatura della sviluppante, la sviluppata presenta altrettante cuspidi. Invece le cuspidi della sviluppante (almeno quelle di prima specie) cadono sulla sviluppata, perchè, annullandosi ρ, il punto M della sviluppante ed il punto C della sviluppata si confondono in un punto A; ed inoltre, se a è il raggio di curvatura della sviluppata, in A, dall'eguaglianza $\lim \rho \frac{d\rho}{ds} = a$ si deduce, ponendo in A l'origine degli archi della sviluppante, ed invocando il teorema di l'Hospital,

$$\lim \frac{\rho^2}{s} = 2a .$$

Dunque la sviluppante si comporta, intorno ad A, come se la sua equazione intrinseca fosse $\rho^2 = 2as$, ossia (*cfr.* § 196, *o*) come si comporta la sviluppante d'un circolo di raggio a intorno alla propria cuspide.

227. **Esercizii**: *a*) L'equazione $y = (x - a)^3$ rappresenta una infinità di parabole cubiche uguali, inviluppate dall'asse delle x. Questa retta tocca tutte le parabole nei loro punti d'inflessione, e perciò *non* divide il piano in due regioni, delle quali una sola contenga le curve inviluppate, e l'altra no, come accade ordi-

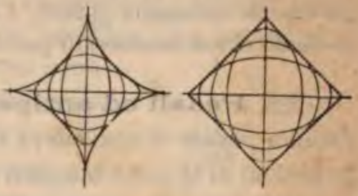
nariamente (*cfr.* § 223). Similmente l'inviluppo delle parabole $y = a^2(x - a)^2$ è costituito dall'asse delle x e dalla curva $16y = x^4$; ma questa, pur toccando in un punto ($x = 2a$) ciascuna curva, l'attraversa in altri due ($x = -2a \pm 2a\sqrt{2}$), e così la regione occupata dalle parabole si trova limitata dal solo asse delle x.

b) Si cerchi l'inviluppo d'una retta, mobile nel piano in guisa che due suoi punti restino sui lati d'un angolo retto. Se l è la distanza di questi punti, l'equazione della retta è $\dfrac{x}{\cos\theta} + \dfrac{y}{\operatorname{sen}\theta} = l$, e θ si può considerare come quel parametro arbitrario, a ciascun valore del quale corrisponde una posizione della retta. Derivando rispetto ad esso la precedente equazione si ottiene

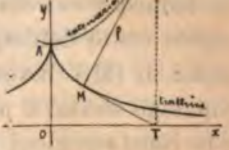
$$\frac{x}{\cos^3\theta} = \frac{y}{\operatorname{sen}^3\theta}\ , \quad \text{ovvero} \quad \frac{x/\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{y/\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = l\ ,$$

e conseguentemente $x = l\cos^3\theta$, $y = l\operatorname{sen}^3\theta$; poi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. Dunque (§ 196, *g*) la retta inviluppa un'asteroide.

c) L'asteroide è anche l'inviluppo delle ellissi descritte da tutti gli altri punti della retta. Infatti, spezzato il segmento l in $a + b$, l'equazione dell'ellisse descritta dal punto di divisione è $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: differenziandola rispetto ai parametri a e b, ed osservando che $da + db = 0$, si trova $x^2/a^3 = y^2/b^3$, ovvero $\dfrac{x^2/a^2}{a} = \dfrac{y^2/b^2}{b} = \dfrac{1}{l}$; quindi, successivamente, $x^2 = a^3/l$, $y^2 = b^3/l$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. Se invece le lunghezze degli assi sono vincolate dalla relazione $a^2 + b^2 = l^2$, si trova, in modo analogo, che l'inviluppo è costituito dalle quattro rette $\pm x \pm y = l$, vale a dire che le infinite ellissi, che hanno in comune gli assi ed il circolo di Monge, sono inscritte in un medesimo quadrato.



d) Fra le sviluppanti della catenaria è particolarmente notevole quella che prende origine nel vertice della curva, e che si chiama *trattrice*. Le proprietà (§ 196, *l*) della catenaria conducono immediatamente a scoprire le seguenti proprietà della trattrice: *è costante il segmento staccato dall'assintoto sulle tangenti, a partire dai rispettivi punti di contatto; ed il centro di curvatura sta sulla perpendicolare elevata all'assintoto dal piede della tangente.*



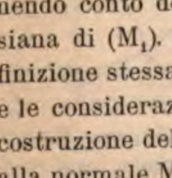
e) È facile constatare, anche per via geometrica, che la cicloide è uguale alla propria sviluppata, che la sviluppata della cardioide è una cardioide tre volte più piccola, che la sviluppata dell'asteroide è un'asteroide due volte più grande, *ecc.*; ma più generalmente si può dimostrare che, esclusa la sviluppante di circolo, *ogni epicicloide o ipocicloide è simile alla propria sviluppata*: il rapporto di similitudine è $1 + 2m$ (se m è il rapporto della circonferenza mobile alla circonferenza fissa), ed ha, per conseguenza, i valori 1, 3, $^1/_2$, *ecc.*, per la cicloide ($m = 0$), per la cardioide ($m = 1$), per l'asteroide ($m = -\,^1/_4$), *ecc.*

f) Sia da cercare l'inviluppo d'una famiglia di circoli, conoscendo la linea dei centri e la legge di variazione del raggio, lungo la linea stessa. Se ξ, η, ρ sono le coordinate del centro ed il raggio d'un circolo, dati in funzione dell'arco σ della linea dei centri, si è condotti a derivare l'equazione $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2$ rispetto a σ, trattando x ed y come costanti. Si ottiene

$$(x-\xi)\frac{d\xi}{d\sigma}+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\sigma}+\rho\frac{d\rho}{d\sigma}=0 ,$$

e si vede che la circonferenza tocca il suo inviluppo sulla retta, parallela alla normale, tracciata alla distanza $-\rho\dfrac{d\rho}{d\sigma}$. Affinchè l'inviluppo sia reale occorre e basta che il valore assoluto di $d\rho$ non superi quello di $d\sigma$. In altri termini l'inviluppo è reale soltanto se la rapidità con cui si sposta il centro non è superata da quella con cui si dilata o si contrae il circolo. Per $|d\rho|<|d\sigma|$ l'inviluppo consta di due rami, che si confondono in uno per $d\rho=\pm d\sigma$. In questo caso la tangente alla linea dei centri è normale all'inviluppo, e però la curva (ξ, η) altro non è che la sviluppata della curva (x, y). Adunque la condizione $d\rho=\pm d\sigma$, già trovata necessaria (§ 225), è anche *sufficiente perchè una famiglia di circoli sia quella dei circoli osculatori di qualche curva.*

228. **Pedali ed antipedali.** Abbiamo già detto (§ 191, *c*) che si chiama *pedale* d'una curva (M_1), rispetto ad un polo Q, il luogo delle projezioni di Q sulle tangenti di (M_1). Se (M) è la pedale di (M_1), si dice che (M_1) è l'*antipedale* di (M) rispetto a Q. È ovvio che l'antipedale di una curva rispetto ad un punto Q si può considerare come l'inviluppo delle perpendicolari elevate alle rette uscenti da Q, nei loro punti d'incontro con la curva data. Questa osservazione indica la via da seguire per trovare l'equazione dell'antipedale di una curva. Sia $x\cos\theta+y\,\text{sen}\,\theta=r$ l'equazione di MM_1. Derivandola rispetto a θ si ottiene $-x\,\text{sen}\,\theta+y\cos\theta=r'$, equazione (§ 189) della perpendicolare condotta per l'estremità N della normale polare su MM_1. Dunque *il punto* M_1 *dell'antipedale di* (M) *è la projezione di* N *su* MM_1. Dalle due equazioni si deduce $x=r\cos\theta-r'\,\text{sen}\,\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta+r'\cos\theta$. Se si elimina θ, tenendo conto dell'equazione polare di (M), si ottiene l'equazione cartesiana di (M_1). Inversamente, data la curva (M_1), si conosce, per la definizione stessa, il punto M che corrisponde ad M_1 sulla pedale di (M_1), e le considerazioni precedenti permettono di ritrovare per altra via la costruzione della tangente in M ad (M): questa è infatti perpendicolare alla normale MN, che si costruisce congiungendo M al punto di mezzo di QM_1. Se poi si vuol conoscere il raggio di curvatura di (M_1), nel punto M_1, si noti che



$$\frac{dx}{d\theta}=-(r+r'')\,\text{sen}\,\theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta}=(r+r'')\cos\theta .$$

Siccome $d\theta$ è, per (M_1), l'angolo di contingenza, il raggio di curvatura è $\rho_1 = r + r''$, basta cioè prolungare M_1N di $NC_1 = r''$ per ottenere il centro di curvatura di (M_1). A questo risultato si suole dare un'altra forma introducendo la lunghezza $r_1 = QM_1$ ed il raggio di curvatura di (M). Questo è dato, per la seconda formola (8), da

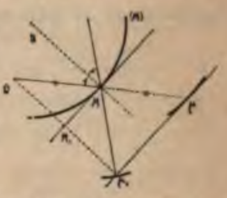
$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = \frac{r_1^3}{2r_1^2 - r\rho_1}\,.$$

Si ha dunque la relazione

$$\frac{r\rho_1}{r_1^3} = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{\rho}\,, \tag{29}$$

che permette (*cfr.* § 196, *j*) di costruire C_1 quando è nota la posizione di C.

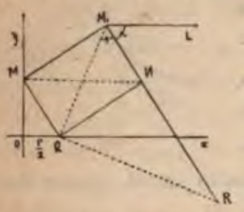
229. **Caustiche.** Immaginiamo che da un punto Q emanino raggi luminosi, i quali vengano poi riflessi da uno specchio (M). I successivi punti d'incontro dei raggi infinitamente vicini costituiscono una linea luminosa, che i fisici chiamano *caustica* per riflessione. Adunque la caustica della linea (M) rispetto al polo Q è l'inviluppo dei raggi che, provenienti dal punto luminoso Q, si riflettono sulla linea (M) seguendo la nota legge dell'eguaglianza fra gli angoli d'incidenza e di riflessione. Il raggio riflesso in M passa nel punto μ_1, simmetrico di Q rispetto alla tangente in M. Se si considera la linea (μ), luogo dei simmetrici di Q rispetto ai punti M, è quasi evidente che la linea (μ_1) è la pedale di (μ) rispetto a Q, e però la normale a (μ_1), in μ_1, passa nel punto medio di $Q\mu$, cioè per M. Per conseguenza i raggi riflessi sono tutti normali alla linea (μ_1), e però il loro inviluppo è la sviluppata di (μ_1). Dunque *la caustica d'una curva è la sviluppata della pedale d'una curva simile, rispetto al punto luminoso.* Ne segue subito che i punti della caustica si costruiscono (*cfr.* § 196, *j*) come i centri di curvatura della pedale di (μ) rispetto a Q; ed è facile riconoscere che la costruzione si può eseguire sostituendo alla linea (μ) la stessa (M). Nel caso poi che i raggi luminosi vengano dall'infinito, la costruzione si riduce ad una forma assai semplice, giacchè si trova che *le normali alla caustica, prodotta da un fascio di raggi paralleli, dividono per metà i raggi di curvatura dello specchio nei rispettivi punti d'incidenza.* Finalmente, nel caso generale d'un punto Q a distanza finita, si vede subito, invocando il teorema sulla lunghezza della sviluppata, dimostrato nel § 225, che *ogni arco di caustica, con un estremo in un punto convenientemente scelto, è lungo quanto il cammino totale percorso dalla luce per*



giungere nell' altro estremo; d'onde segue, in particolare, che se si vuole che i raggi uscenti da Q tornino a convergere in un punto P, è *necessario* farli riflettere sopra un'ellisse, che abbia i fuochi in P e Q.

230. **Esercizii**: *a)* Riferiamoci al penultimo paragrafo, ed osserviamo che, se la curva (M) è una lumaca, dalla sua equazione $r = a\cos\theta + b$ si deduce $r + r'' = b$, e basta questa eguaglianza per confermare che l'antipedale è una circonferenza di raggio b. Similmente, se la curva (M) è una spirale di Archimede, si ha $r' = a$, $r'' = 0$, e però il punto N, centro di curvatura di (M_1) in virtù della seconda eguaglianza, resta, in virtù della prima, sopra una circonferenza. Dunque *la spirale di Archimede è la pedale d'una sviluppante di circolo.* Per questa proprietà, quasi evidente, si è condotti (*cfr.* § 196, *j*) ad una facile costruzione del centro di curvatura della spirale di Archimede in un dato punto M: se la projezione del polo O sulla normale si projetta, in L, sulla parallela condotta per N alla normale stessa, il centro di curvatura appartiene ad OL.

b) Qual'è l'*antipedale d'una retta* rispetto ad un punto Q? Presa la retta come asse delle y, e la perpendicolare condotta per Q come asse delle x, l'equazione di MM_1 è $my = m^2x + {}^1/_2 p$, rappresentando con m il coefficiente angolare (variabile), e con ${}^1/_2 p$ la lunghezza (costante) del segmento OQ. Derivando rispetto ad m si ottiene $y = 2mx$; poi, eliminando m, si trova $y^2 = 2px$. Dunque l'antipedale d'una retta rispetto ad un punto è la parabola che ha questo punto per fuoco, ed è toccata dalla retta nel vertice. Del resto ciò risulta immediatamente dalla costruzione della tangente, indicata nel § 228. Tale costruzione mostra infatti che $\widehat{QM_1N} = \widehat{NM_1L}$, cioè che la normale è bisettrice dell'angolo QM_1L; e da quanto altrove (§ 191, *d*) si è visto risulta che questa proprietà caratterizza appunto la parabola. Ancora si noti che la formola (29) nel caso attuale diventa $r\rho_1 = 2r_1^2$; e siccome nel triangolo rettangolo RQM_1 si ha $r_1^2 = r.RM_1$, si vede che R divide per metà il raggio di curvatura: si ricade così sopra una nota (§ 196, *k*) costruzione.



c) Se i raggi provenienti da un punto luminoso Q vengono riflessi da uno specchio circolare, la corrispondente curva (μ) è un'altra circonferenza, e però (§ 191, *c*) la curva (μ_1) è una lumaca. In particolare, se il punto Q appartiene alla circonferenza data, esso appartiene anche alla circonferenza (μ), e la lumaca è una cardioide, la cui sviluppata è un'altra cardioide, tre volte più piccola ed inversamente situata. Dunque *la caustica d'uno specchio circolare, per un fascio di raggi provenienti da un punto dello specchio stesso, è una cardioide*, che tocca la circonferenza nel punto luminoso Q, ed ha la cuspide ai due terzi del diametro che parte da Q. Se invece i raggi provengono dall'infinito, si è visto che la normale alla caustica in un punto P, corrispondente ad un dato punto d'incidenza M, passa nel punto N, medio del raggio OM; e però, costruite la circonferenza di centro O, che passa per N, e quella che ha per diametro MN, si vede che la curva (P) si può considerare come generata dal punto P della seconda circonferenza nel rotolamento puro di questa sulla prima circonferenza. Dunque *la caustica d'uno specchio circolare, per un fascio di raggi paralleli, è un'epicicloide a due cuspidi.*

APPLICAZIONI ALLE CURVE STORTE.

Formole fondamentali.

231. **Tangente e piano normale.** La *tangente* in un punto M di una curva qualunque, piana o storta, è sempre la retta a cui tende la secante MM' quando, fissato M, si fa tendere M' ad M lungo la curva. Noi vogliamo limitarci a studiare le linee per le quali si ha, come per le curve piane considerate nel precedente capitolo,

$$\lim \frac{\text{arco MM}'}{\text{corda MM}'} = 1 \ .$$

Ora, poichè i coseni direttori della secante MM' sono uguali agli eccessi δx, δy, δz delle coordinate di M' su quelle di M, divisi per la lunghezza della corda MM', si trova, passando al limite, dopo aver sostituito l'arco δs alla corda MM', che *i coseni direttori della tangente alla curva, nel punto* (x, y, z), *sono*

$$a = \frac{dx}{ds} \quad , \quad b = \frac{dy}{ds} \quad , \quad c = \frac{dz}{ds} \ . \tag{1}$$

Quadrate e sommate, queste formole conducono all'altra

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \ . \tag{2}$$

Così, date le coordinate x, y, z in funzione d'un parametro qualunque t, se si calcola prima ds mercè la formola (2), le (1) faranno poi conoscere i coseni direttori della tangente. Le equazioni della tangente sono dunque

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz} \ ,$$

e si possono scrivere immediatamente considerandole come le equazioni della *retta che congiunge il punto* (x, y, z) *al punto* (x + dx, y + dy, z + dz). Giova conoscere un'altra forma delle medesime equazioni, utile nel caso che la curva sia rappresentata da una coppia di equazioni

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad , \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Allora, dovendo $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ essere proporzionali ai differenziali dx, dy, dz, vincolati dalle relazioni

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=0 \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz=0 \,,$$

si deve avere

$$\begin{cases} (X-x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+(Y-y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+(Z-z)\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \,, \\ (X-x)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+(Y-y)\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+(Z-z)\dfrac{\partial\psi}{\partial z}=0 \,. \end{cases}$$

Adunque son queste le equazioni della tangente. Si chiama poi *piano normale* il luogo delle normali alla curva, in M, ossia delle perpendicolari condotte per M alla tangente. L'equazione d'un tal piano è

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0 \,,$$

o pure, se la curva è data mediante le equazioni $\varphi=0, \psi=0$,

$$\begin{vmatrix} X-x & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ Y-y & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ Z-z & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix}=0 \,.$$

232. **Binormale e piano osculatore; normale principale e piano rettificante.** Quando M' tende, lungo la curva, a fissarsi in M, il piano condotto per la tangente in M parallelamente alla tangente in M' può tendere ad una posizione limite, ed in questa esso prende il nome di *piano osculatore*. Una delle infinite normali è situata nel piano osculatore, un'altra è perpendicolare a questo piano: la prima dicesi *normale principale*, l'altra si chiama *binormale*, perchè è perpendicolare a due tangenti infinitamente vicine, vale a dire che può essere considerata come limite della retta condotta per M perpendicolarmente alle tangenti in M ed M'. Il piano determinato dalla tangente e dalla binormale si chiama *piano rettificante*. Le tre rette (tangente, binormale, normale principale) ed i tre piani (normale, osculatore, rettificante), definiti precedentemente, sono gli spigoli e le facce d'un triedro trirettangolo, che si chiama il *triedro fondamentale*. In seguito si vedrà che, per conoscere la posizione relativa dei triedri fondamentali in M ed M', basta la conoscenza di due infinitesimi ε ed η, caratterizzati dalla doppia propri

di essere dei differenziali, e di rappresentare, a prescindere da infinitesimi superiori, l'angolo delle tangenti in M ed M', e l'angolo delle binormali nei medesimi punti. Il primo si chiama *angolo di contingenza*, il secondo *angolo di torsione*.

233. Qui è necessaria una breve digressione. Per una retta qualunque, i cui coseni direttori A, B, C sono funzioni continue d'una variabile indipendente t, si può sempre trovare un *differenziale*, sostituibile (§ 157) all'angolo della direzione (A, B, C) con $(A+\delta A, B+\delta B, C+\delta C)$, ossia delle direzioni della retta, corrispondenti ai valori t e $t+dt$ della variabile indipendente. Conduciamo infatti, nella sfera di raggio 1, che ha il centro nell'origine, i raggi OP ed OP′ nelle predette direzioni. Al variare di t il punto P descrive sulla sfera una linea, ed è chiaro che all'angolo delle due direzioni, misurato dall'arco di circolo massimo PP′, si può prima sostituire la corda PP′, poi l'arco PP′ della linea descritta da P, e finalmente il differenziale dell'arco σ di questa curva, contato a partire da un'origine arbitraria. Ne segue subito, in virtù di (2), dopo avere osservato che le coordinate di P sono appunto A, B, C,

$$d\sigma^2 = dA^2 + dB^2 + dC^2 \,. \tag{3}$$

Ad un'altra forma notevole di $d\sigma$ si giunge osservando che, essendo $\Sigma A^2=1$, e per conseguenza $\Sigma A dA = 0$, si ha

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma A^2 & \Sigma A dA \\ \Sigma A dA & \Sigma dA^2 \end{vmatrix} = d\sigma^2 \,;$$

quindi

$$d\sigma^2 = (B dC - C dB)^2 + (C dA - A dC)^2 + (A dB - B dA)^2 \,. \tag{4}$$

234. Ora, per conoscere la direzione della normale principale, osserviamo che, se la direzione (A, B, C) è quella della tangente, in M, alla curva (M), il piano OPP′ è parallelo alle tangenti in M ed M′, e però tende ad esser parallelo al piano osculatore quando M′ tende ad M (e conseguentemente P′ a P, se a, b, c sono funzioni continue di t). Intanto PP′, che tende a toccare, in P, la curva (P), diventando così perpendicolare ad OP, tende ad esser parallela tanto al piano osculatore quanto al piano normale, e per conseguenza alla normale principale. Dunque, in virtù di (1), *i coseni direttori della normale principale sono*

$$\lambda = \frac{da}{\varepsilon} \;, \quad \mu = \frac{db}{\varepsilon} \;, \quad \nu = \frac{dc}{\varepsilon} \,. \tag{5}$$

235. Ciò premesso, la direzione (α, β, γ) della binormale è determinata, a meno del senso, dalle condizioni di ortogonalità $\Sigma\alpha a = 0$, $\Sigma\alpha\lambda = 0$;

e queste, insieme all'altra $\Sigma a\lambda = 0$, mostrano che il determinante dei nove coseni fondamentali

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1 \tag{6}$$

è ortogonale, d'onde segue * che il suo valore è 1 o — 1; ma si può sempre fissare il verso positivo della direzione della binormale in modo che sia vera la (6): geometricamente ciò equivale a supporre che, quando si porta il triedro fondamentale a coincidere col triedro degli assi, in guisa che le direzioni *positive* della tangente e della normale principale coincidano rispettivamente con quelle degli assi x e z, la direzione *positiva* della binormale vada a coincidere con quella dell'asse y. Ed è anche noto * che, in queste condizioni, *ogni elemento del determinante* (6) *è uguale al proprio complemento algebrico.* Ne segue, tenendo conto delle (5), che *i coseni direttori della binormale sono dati dalle formole*

$$\frac{\alpha}{b\,dc - c\,db} = \frac{\beta}{c\,da - a\,dc} = \frac{\gamma}{a\,db - b\,da} = -\frac{1}{\varepsilon}\,. \tag{7}$$

Ed ora siamo in grado di scrivere anche l'equazione del piano osculatore $\Sigma(b\,dc - c\,db)(X - x) = 0$, alla quale, in virtù delle (1), possiamo dar la forma

$$\begin{vmatrix} X - x & dx & d^2x \\ Y - y & dy & d^2y \\ Z - z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0\,;$$

e così vediamo che *il piano osculatore nel punto* (x, y, z) *si può considerare come determinato dalla tangente e dal punto*

$$(x + dx + {}^1/_2 d^2x \quad , \quad y + dy + {}^1/_2 d^2y \quad , \quad z + dz + {}^1/_2 d^2z)\,.$$

236. Le formole (7) e (5) permettono di determinare le direzioni della binormale e della normale principale quando sono noti i coseni a, b, c, poichè l'angolo di contingenza si può, per le (3) e (4), calcolare mediante l'una o l'altra delle seguenti formole:

$$\varepsilon^2 = da^2 + db^2 + dc^2 \quad , \quad \varepsilon^2 = (b\,dc - c\,db)^2 + (c\,da - a\,dc)^2 + (a\,db - b\,da)^2\,.$$

Il segno con cui va preso ε resta arbitrario, giacchè il cambiamento di questo segno nelle formole (7) e (5) produrrebbe il cambiamento simultaneo dei segni di α, β, γ e λ, μ, ν, dimodochè resterebbe intatta la (6). Se

* *Analisi algebrica*, p. 54.

invece di a, b, c fossero noti i coseni α, β, γ, si potrebbe calcolare l'angolo di torsione mediante una delle formole

$$\eta^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 \quad , \quad \eta^2 = (\beta d\gamma - \gamma d\beta)^2 + (\gamma d\alpha - \alpha d\gamma)^2 + (\alpha d\beta - \beta d\alpha)^2 \, ;$$

poi, con formole analoghe alle (7) e (5), si riuscirebbe a determinare le direzioni degli altri due spigoli del triedro fondamentale. Infatti la differenziazione delle uguaglianze $\Sigma a\alpha = 0, \Sigma\alpha^2 = 1$ dà, ricordando le (5),

$$\sum a\, d\alpha = -\sum \alpha\, da = -\varepsilon \sum \alpha\lambda = 0 \quad , \quad \sum \alpha\, d\alpha = 0 \; ;$$

quindi $d\alpha/\lambda = d\beta/\mu = d\gamma/\nu = \pm\eta$, ovvero, prendendo η con un segno conveniente,

$$\lambda = \frac{d\alpha}{\eta} \quad , \quad \mu = \frac{d\beta}{\eta} \quad , \quad \nu = \frac{d\gamma}{\eta} \; : \tag{8}$$

poi $\beta d\gamma - \gamma d\beta = (\beta\nu - \gamma\mu)\eta = a\eta$, *ecc.*, ossia

$$\frac{a}{\beta d\gamma - \gamma d\beta} = \frac{b}{\gamma d\alpha - \alpha d\gamma} = \frac{c}{\alpha d\beta - \beta d\alpha} = \frac{1}{\eta} \, . \tag{9}$$

Anche qui si noti che il cambiamento di segno di η o di α, β, γ nelle formole (8) e (9) lascerebbe intatta la condizione (6).

237. **Formole di Frenet.** Dalle relazioni $\Sigma a\lambda = 0, \Sigma\alpha\lambda = 0, \Sigma\lambda^2 = 1$ si deduce, differenziando e tenendo presenti le (5) e le (8),

$$\sum a\, d\lambda = -\sum \lambda\, da = -\varepsilon \sum \lambda^2 = -\varepsilon \, ,$$

$$\sum \alpha\, d\lambda = -\sum \lambda\, d\alpha = -\eta \sum \lambda^2 = -\eta \, ,$$

e $\Sigma\lambda d\lambda = 0$. Dunque $d\lambda, d\mu, d\nu$ soddisfano al sistema di equazioni

$$\begin{cases} a\,d\lambda + b\,d\mu + c\,d\nu = -\varepsilon \, , \\ \alpha\,d\lambda + \beta\,d\mu + \gamma\,d\nu = -\eta \, , \\ \lambda\,d\lambda + \mu\,d\mu + \nu\,d\nu = 0 \, , \end{cases}$$

che ha il determinante (6), ossia un determinante uguale all'unità, in cui ogni elemento è uguale al proprio complemento algebrico. Ne segue subito

$$d\lambda = -a\varepsilon - \alpha\eta \quad , \quad d\mu = -b\varepsilon - \beta\eta \quad , \quad d\nu = -c\varepsilon - \gamma\eta \, . \tag{10}$$

Son queste le *formole di Frenet*. Esse ci dicono, insieme alle formole (5) ed (8), che *i differenziali dei nove coseni fondamentali sono esprimibili linearmente nei coseni stessi*; i coefficienti di tali espressioni dipendono unicamente da ε e da η. Se poi si chiama ω il differenziale sostituibile all'angolo di due normali principali infinitamente vicine, le formole (10), quadrate e sommate, danno $\omega^2 = \varepsilon^2 + \eta^2$. Quest'ultima proposizione, che si può dimostrare mediante semplici considerazioni geometriche, è conosciuta col nome di *teorema di Lancret*.

238. È utile osservare che per qualunque terna ortogonale di direzioni sussistono formole analoghe alle precedenti. Prima, considerando due direzioni variabili qualunque, conveniamo di chiamare *rotazione di una direzione verso l'altra* il differenziale ω, sostituibile allo spostamento angolare infinitesimo della projezione della prima sopra un piano parallelo ad entrambe, e proponiamoci di calcolare ω, supponendo conosciuti i coseni A, B, C ed A', B', C', che definiscono le due direzioni. Conduciamo per l'origine le parallele, nel verso positivo, alle direzioni (A, B, C), (A', B', C'), $(A + \delta A, B + \delta B, C + \delta C)$, ed alla projezione di questa sul piano determinato dalle prime due rette. Siano P, P', P'' i punti in cui la prima, la terza e la quarta retta incontrano la sfera di raggio 1, col centro nell'origine. Evidentemente, poichè A, B, C sono le coordinate di P, ed $A + \delta A, B + \delta B, C + \delta C$ quelle di P', le differenze $\delta A, \delta B, \delta C$ misurano le projezioni di PP' sugli assi. D'altra parte l'elemento PP'', che differisce da ω per un infinitesimo superiore, si può considerare come la projezione di PP' sulla direzione (l, m, n) dell'elemento stesso, evidentemente perpendicolare ad (A, B, C). Dunque, conservando i soli infinitesimi differenziali, $\omega = l dA + m dB + n dC$; e poichè, chiamando φ l'angolo delle due direzioni, si ha manifestamente

$$A' = A\cos\varphi + l\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad , \quad B' = B\cos\varphi + m\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad , \quad C' = C\cos\varphi + n\,\mathrm{sen}\,\varphi \, ,$$

si vede subito, moltiplicando per dA, dB, dC, e sommando, che

$$\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi = A'dA + B'dB + C'dC \, .$$

È questa una formola spesso utile nelle applicazioni geometriche e meccaniche. Ciò premesso, se le direzioni (A', B', C') ed (A'', B'', C'') costituiscono con (A, B, C) una terna *ortogonale*, e se (A, B, C) rota di ω' verso la prima, e di ω'' verso la seconda, si ha

$$\sum A\,dA = 0 \quad , \quad \sum A'dA = \omega' \quad , \quad \sum A''dA = \omega'' ,$$

e se ne ricava

$$dA = A'\omega' + A''\omega'' \quad , \quad dB = B'\omega' + B''\omega'' \quad , \quad dC = C'\omega' + C''\omega'' \, ;$$

poi si vede che, se ω è il differenziale sostituibile allo spostamento angolare assoluto di (A, B, C) nello spazio, in virtù di (3) si ha $\omega^2 = \omega'^2 + \omega$

In particolare le formole (5) ed (8) ci dicono che gli spostamenti angolari della tangente e della binormale consistono in rotazioni ε ed η verso la normale principale, e le (10) significano invece che lo spostamento angolare ω della normale principale risulta da due rotazioni $-\varepsilon, -\eta$, che questa retta esegue verso le prime due.

Curvature.

239. Come per le curve piane, così anche per le curve storte il rapporto ε/ds serve a misurare una prima curvatura, o *flessione* della curva che si considera; ed analogamente si assume η/ds per misurare un'altra curvatura, o *torsione*, che non ci si è presentata nelle curve piane, perchè in esse è costantemente nulla. Mentre poi si continua a dare al rapporto $\rho = ds/\varepsilon$ il nome di *raggio di curvatura* (o raggio di flessione), la lunghezza $\tau = ds/\eta$ si conviene di chiamarla *raggio di torsione*. L'introduzione delle lunghezze determinate ρ ed τ al posto degli infinitesimi ε ed η, in tutte le formole precedenti, giova a metter queste sotto una forma precisa. Così le (5), (8) e (10) diventano

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{da}{ds} = \dfrac{\lambda}{\rho}, & \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\lambda}{\tau}, & \dfrac{d\lambda}{ds} = -\dfrac{a}{\rho} - \dfrac{\alpha}{\tau}, \\ \dfrac{db}{ds} = \dfrac{\mu}{\rho}, & \dfrac{d\beta}{ds} = \dfrac{\mu}{\tau}, & \dfrac{d\mu}{ds} = -\dfrac{b}{\rho} - \dfrac{\beta}{\tau}, \\ \dfrac{dc}{ds} = \dfrac{\nu}{\rho}, & \dfrac{d\gamma}{ds} = \dfrac{\nu}{\tau}, & \dfrac{d\nu}{ds} = -\dfrac{c}{\rho} - \dfrac{\gamma}{\tau}. \end{array}\right. \tag{11}$$

Alla terna di sinistra si può, ricordando le (1), dar la forma

$$\lambda = \rho \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}, \quad \mu = \rho \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}, \quad \nu = \rho \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}, \tag{12}$$

o, se si vuole,

$$\lambda = \rho\left(\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right), \quad \mu = \rho\left(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right), \quad \nu = \rho\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right). \tag{13}$$

Similmente, in virtù delle (1), le (7) si possono scrivere nel seguente modo:

$$\alpha = \rho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right), \quad \beta = \rho\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right), \quad \gamma = \rho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right). \tag{14}$$

240. **Calcolo della flessione.** Le formole (1), (12), (14) fanno conoscere i valori dei nove coseni fondamentali in funzione delle derivate prime e seconde delle coordinate, purchè prima si conosca il valore di ρ. Ora questo valore risulta dalle formole stesse, giacchè le (12), quadrate e

sommate, danno

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2, \tag{15}$$

o, se si vuole, adoperando invece le (13),

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2,$$

vale a dire che per le curve storte, come (§ 159, *e*) per le curve piane, *il quadrato della curvatura è uguale alla somma dei quadrati delle derivate seconde delle coordinate rispetto all'arco.* Se poi si elevano al quadrato le (14), e si sommano, si ottiene l'altra formola

$$\rho=\frac{\pm(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}}, \tag{16}$$

che include (per z costante) quella che più comunemente (§ 159, *d*) si adopera per le curve piane. Dalla formola (15) si deduce subito che *le sole linee a flessione nulla sono le rette.* Infatti non si può costantemente avere $1/\rho=0$ senza che siano ad un tempo nulle le derivate seconde delle coordinate, e per conseguenza le derivate prime uguali a costanti a, b, c, d'onde segue, chiamando x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto scelto come origine degli archi, $x=as+x_0$, $y=bs+y_0$, $z=cs+z_0$, e finalmente, eliminando s,

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},$$

equazioni della retta condotta dal punto (x_0, y_0, z_0) nella direzione (a, b, c).

241. **Calcolo della torsione.** Dalla seconda terna (11), moltiplicando per λ, μ, ν, e sommando, si ricava

$$\frac{1}{\tau}=\lambda\frac{d\alpha}{ds}+\mu\frac{d\beta}{ds}+\nu\frac{d\gamma}{ds}.$$

D'altra parte la derivazione delle (14) conduce alle formole

$$\frac{d\alpha}{ds}=\rho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^3y}{ds^3}-\frac{dy}{ds}\frac{d^3z}{ds^3}\right)+\frac{\alpha}{\rho}\frac{d\rho}{ds}, \text{ ecc.}$$

e per conseguenza, se si tien conto anche delle (13),

$$\frac{1}{\tau}=\rho^2\sum\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^3y}{ds^3}-\frac{dy}{ds}\frac{d^3z}{ds^3}\right).$$

ossia

$$\frac{1}{\tau\rho^2}=\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^3x}{ds^3} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^3y}{ds^3} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Questa importante formola fa conoscere la torsione quando è nota la flessione. Del resto, se si sostituisce a ρ la sua espressione (16), si può anche scrivere

$$\frac{1}{\tau}=\frac{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)d^3x+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)d^3y+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)d^3z}{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}.$$

Questa è la torsione. In forma più elegante:

$$\frac{1}{\tau}=\frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2}.$$

Evidentemente nelle linee piane la torsione è nulla, purchè si escluda la retta, la cui torsione è dappertutto indeterminata, visto che si può in ciascun punto considerare come osculatore ogni piano che passa per la retta. Ora è utile osservare che *le sole linee a torsione nulla sono le curve piane*. Infatti, quando la torsione è costantemente nulla, è tale anche il secondo membro di (17), d'onde segue (§ 137) che si ha $\Sigma\alpha dx=0$ per tre convenienti valori delle costanti α, β, γ; quindi $\Sigma\alpha x=$ *costante*. Alla medesima conclusione, come all'altra ottenuta in fine del precedente paragrafo, si perviene anche mercè la considerazione diretta delle prime due terne (11).

242. Il calcolo della torsione si può eseguire in modo simile a quello che ci ha condotti alla formola (15). Infatti dalle (12) si deduce, derivando,

$$\lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\left(\frac{a}{\rho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\rho}=\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}, \text{ ecc.};$$

poi, quadrando e sommando,

$$\left(\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

A questa formola, che permette di calcolare τ quando è noto ρ, si giunge anche elevando al quadrato la formola (17), dopo aver messo il secondo membro sotto la forma più generale

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} \end{vmatrix},$$

come sempre (§ 159, c) si può.

Discussione delle curve storte.

243. Note le curvature, è determinato il triedro fondamentale in M' rispetto al triedro che ha l'origine in M. Si calcoli infatti la distanza $\Sigma A\delta x$ del punto M' al piano condotto per M perpendicolarmente alla direzione (A, B, C). Per lo sviluppo di δx secondo la formola di Taylor (§ 165) si può sempre assumere s come variabile indipendente, nella quale ipotesi dalle (11) si ha

$$\frac{dx}{ds} = a \quad , \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\lambda}{\rho} \quad , \quad \frac{d^3x}{ds^3} = \lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho} - \left(\frac{a}{\rho} + \frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\rho} \quad , \ldots ;$$

quindi

$$\delta x = a\,ds + \frac{\lambda}{\rho}\frac{ds^2}{2} + \left(\lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho} - \left(\frac{a}{\rho} + \frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\rho}\right)\frac{ds^3}{6} + \cdots ,$$

e finalmente

$$\Sigma A\delta x = \mathfrak{A}\,ds + \frac{\mathfrak{C}}{\rho}\frac{ds^2}{2} + \left(\mathfrak{C}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho} - \left(\frac{\mathfrak{A}}{\rho} + \frac{\mathfrak{B}}{\tau}\right)\frac{1}{\rho}\right)\frac{ds^3}{6} + \cdots \qquad (18)$$

dove $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sono i coseni che definiscono la direzione (A, B, C) rispetto al triedro fondamentale, ossia

$$\mathfrak{A} = \Sigma A a \quad , \quad \mathfrak{B} = \Sigma A\alpha \quad , \quad \mathfrak{C} = \Sigma A\lambda \, .$$

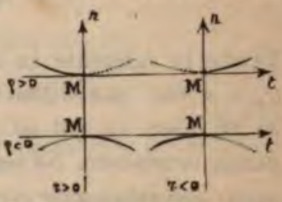
Soltanto per $\mathfrak{A} = 0$ il secondo membro di (18) è infinitesimo del secondo ordine, e diventa d'un ordine superiore al secondo se si ha inoltre $\mathfrak{C} = 0$. Dunque la distanza di M' ai piani che passano per la tangente in M è generalmente infinitesima del secondo ordine rispetto all'arco MM'; ma, fra tutti questi piani, un solo ha da M' una distanza infinitesima del terzo ordine almeno, ed è il piano osculatore. Bene a ragione, dunque, questo piano si è chiamato *osculatore*, poichè, fra tutti i piani dello spazio, è quello che *più si accosta* alla curva intorno ad M.

244. La formola (18) ci dà subito le coordinate u, v, w di M' rispetto

al triedro fondamentale: basta far coincidere (A, B, C) successivamente con le direzioni della tangente ($\mathfrak{A}=1$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{C}=0$), della binormale ($\mathfrak{B}=1$, $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}=0$), della normale principale ($\mathfrak{C}=1$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=0$), per ottenere

$$u = ds - \frac{ds^3}{6\rho^2}\;,\quad v = -\frac{ds^3}{6\rho\tau}\;,\quad w = \frac{ds^2}{2\rho} - \frac{ds^2\,d\rho}{6\rho^2}\;, \qquad (19)$$

prescindendo dagli infinitesimi d'un ordine superiore al terzo. Queste formole permettono di discutere l'andamento della curva intorno a ciascuno dei suoi punti. È chiaro, infatti, che se le curvature, in M, non sono nulle, un osservatore che cammini sulla curva, tenendo la testa sulla parte positiva della normale principale, e procedendo nel senso positivo della tangente, vedrà, in M, la curva *elevarsi* o *abbassarsi* secondo che ρ è positivo o negativo, e la vedrà volgere *a sinistra* o *a destra* secondo che τ ha il segno di ρ o il segno opposto. Siccome poi il cambiamento di ds in $-ds$ altera il segno di v, ma non quello di w, si vede che, se si prende intorno ad M un arco convenientemente piccolo, *ogni piano che passa per la tangente lascia l'arco tutto da una parte, ad eccezione del piano osculatore, il quale attraversa la curva.* Ora i quattro modi di comportarsi della curva, intorno ad un punto ordinario M, si possono rappresentare, come si vede nella figura, segnando con puntini gli archi situati alla sinistra dell'osservatore. Si riesce in tal modo a constatare che, se $\tau < 0$, l'osservatore vedrà la curva passare (rasentando il piano osculatore) dalla sinistra alla destra volgendo in su, o dalla destra alla sinistra volgendo in giù, sicchè in entrambi i casi l'andamento della curva sarà *destrorso*, vale a dire che, agli occhi dell'osservatore, un punto che percorra la curva, allontanandosi nel verso positivo della tangente, sembrerà muoversi nel senso degli indici d'un orologio. Invece per $\tau > 0$ si avrà l'andamento *sinistrorso*. Adunque *una curva è sinistrorsa o destrorsa, intorno ad un suo punto ordinario, secondo che la torsione, in questo punto, è positiva o negativa.* È poi facile convincersi che questo carattere della curva resta inalterato quando si fa variare la posizione dell'osservatore nello spazio. Esempii * di curve a torsione positiva o negativa ci offrono, in Natura, i viticci del luppolo e della vite, rispettivamente sinistrorsi e destrorsi.



245. Una più minuziosa discussione della curva, intorno ad M, si può fare, mercè le medesime formole (19), osservando che, a prescindere dagli infinitesimi d'un ordine superiore al terzo, se il punto M si assume come

* Maxwell « *Traité d'électricité et magnétisme* » t. I, p. 26.

origine degli archi e delle coordinate, l'arco infinitesimo MM' si può considerare come appartenente alla curva rappresentata dalle equazioni

$$x = s - \frac{s^3}{6\rho^2}\ ,\quad y = -\frac{s^3}{6\rho\tau}\ ,\quad z = \frac{s^2}{2\rho} - \frac{s^3}{6\rho^2}\frac{d\rho}{ds}\ ;$$

dove ρ, τ, e $d\rho/ds$ s'intendono calcolati in M, ossia per $s=0$. Eliminando s in tutti i modi possibili fra le ultime equazioni si trova

$$y^2 = \frac{2\rho}{9\tau^2}z^3\ ,\quad z = \frac{x^2}{2\rho} - \frac{x^3}{6\rho^2}\frac{d\rho}{ds}\ ;\quad y = -\frac{x^3}{6\rho\tau}\ ;$$

d'onde segue che, projettata la curva sul piano normale, sul piano osculatore e sul piano rettificante in M, questo punto è rispettivamente una cuspide, un punto ordinario o un punto d'inflessione sulle tre projezioni. Siccome la tangente in M' ha i coseni direttori uguali alle derivate di x, y, z rispetto ad s, e per conseguenza proporzionali ad $x - {}^2/_3 s$, y, $z - \frac{s^2}{6\rho}$, si trova che le coordinate d'un punto qualunque della tangente sono

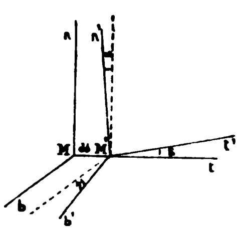
$$kx + {}^2/_3(1-k)s\ ,\quad ky\ ,\quad kz + (1-k)\frac{s^2}{6\rho}$$

sicchè la tangente in M' incontra il piano osculatore (in M) nel punto $({}^2/_3 s, s^2/6\rho)$, che si trova, rispetto al piano rettificante, dalla stessa parte di M'. Essa va poi ad incontrare questo piano alla distanza $-{}^1/_2 y$ dal piano osculatore. Ne segue che *le tangenti ad una curva storta, in due punti infinitamente vicini, non s'incontrano*: la loro distanza è $ds^3/12\rho\tau$. Questo teorema si deve a Bonnet.

246. Dalle medesime formole si deduce $\rho z - \tau y\frac{d\rho}{ds} = {}^1/_2 s^2$; quindi, sostituendo alla lunghezza s dell'arco MM' quella della corda, si vede che l'arco stesso si può considerare come appartenente alla sfera rappresentata dall'equazione

$$x^2 + \left(y + \tau\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + (z-\rho)^2 = \mathfrak{R}^2\ ,$$

dove $\mathfrak{R}^2 = \rho^2 + \left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)^2$. Questa sfera di raggio $\mathfrak{R}$, che ha il centro nel piano normale, alle distanze $-\tau\frac{d\rho}{ds}$ e ρ dal piano osculatore e dal piano rettificante, si chiama *osculatrice* alla curva, in M, in quanto è, fra tutte le sfere dello spazio, quella che *più si accosta* alla curva intorno ad M. Quando poi si trascurano gli infinitesimi del terzo ordine, l'arco MM' si può considerare come situato nel piano osculatore; e, se si trascurano anche quelli del secondo ordine, si può addirittura riguardare MM' come un segmento rettilineo, situato sulla tangente. Per conseguenza, in quelle questioni per le quali è lecito prescindere dagli infinitesimi superiori, è anche lecito assimilare la curva ad una linea poligonale MM'M''M'''..., dai lati infinitamente piccoli, e considerare la tangente come la retta su cui giace un *elemento* MM', il piano osculatore come il piano determinato da due elementi *consecutivi* MM' ed M'M'', o dai punti M, M', M''; la sfera osculatrice come determinata dai punti M, M', M'', M'''. Questo modo di vedere e di esprimersi, quantunque scorretto, è talvolta utile per rendersi conto geometricamente di certi risultati del Calcolo differenziale. Ed ora è facile constatare che si passa da una posizione del triedro fondamentale (origine M) alla posizione *successiva* (origine M') facendo scorrere di ds il vertice sulla tangente, e facendo poi rotare gli spigoli intorno al vertice, in modo che acquistino, rispetto alle loro primitive posizioni t, b, n, i seguenti coseni direttori:



$$\begin{array}{cccc} t' : & 1 & 0 & \varepsilon \\ b' : & 0 & 1 & \eta \\ n' : & -\varepsilon & -\eta & 1 \end{array}$$

Ciò si deduce dalle formole (5), (8) e (10), nell'ipotesi che sia

$$a = \beta = \nu = 1 \quad , \quad b = c = \gamma = \alpha = \lambda = \mu = 0 \; ;$$

ed è reso anche più chiaro e più preciso dalle considerazioni del § 238.

247. **Singolarità.** Ciò che si è detto nei precedenti paragrafi accade soltanto in generale, poichè cessa di aver luogo nei punti (analoghi, *nello spazio*, ai punti d'inflessione delle curve piane) soddisfacenti alla condizione (*cfr.* § 205)

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} = 0 \; . \tag{20}$$

In siffatti punti è nulla, in virtù di (17), almeno una delle curvature, e però v diventa d'un ordine superiore al terzo. Per valutare questa distanza bisogna proseguire il calcolo iniziato nel § 243, osservando innanzi tutto che

$$\frac{d^4x}{ds^4} = -3\frac{a}{\rho}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho} - \alpha\rho\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau\rho^2} + \lambda\left[\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{\rho} - \left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\frac{1}{\rho}\right], \tag{21}$$

per dedurne, a prescindere dagli infinitesimi d'un ordine superiore al quarto,

$$v = \frac{1}{24}\sum \alpha\, d^4x = -\frac{\rho\, ds^3}{24}\, d\frac{1}{\tau\rho^2} \; ;$$

quindi, secondo che $\frac{1}{\rho}=0$ $\left(\text{ma } d\frac{1}{\rho}\gtrless 0\right)$, o $\frac{1}{\tau}=0$ $\left(\text{ma } d\frac{1}{\tau}\gtrless 0\right)$, è

$$v=-\frac{ds^3}{12\tau}d\frac{1}{\rho} \qquad \text{o} \qquad v=-\frac{ds^3}{24\rho}d\frac{1}{\tau}.$$

Ne segue, in generale, che nei punti singolari M, definiti dalla (20), secondo che *una delle curvature si annulla per prendere o per lasciare il segno dell'altra*, un arco convenientemente piccolo, preso intorno ad M, sta *tutto a sinistra* o (rispettivamente) *tutto a destra* del piano osculatore. Ma quando le due curvature si annullano ad un tempo, anche in generale accade che v diventa infinitesimo del quinto ordine, giacchè, se si deriva la (21), si trova facilmente, nelle ipotesi fatte,

$$v=\frac{1}{120}\sum\alpha d^5x=-\frac{ds^3}{40}d\frac{1}{\rho}d\frac{1}{\tau},$$

sicchè il piano osculatore attraversa la curva, come nei punti ordinarii; ed in questo caso il punto che si considera è un punto d'inflessione anche per la projezione della curva sul piano normale. Sono poi notevoli, fra i punti definiti dalla (20), quei punti M nei quali si annulla la sola flessione, perchè in essi avviene proprio l'opposto di ciò che si verifica nei punti ordinarii, vale a dire che *la curva attraversa tutti i piani che passano per* M, *tranne il piano osculatore*: ciò si deve al fatto che, mentre l'infinitesimo v diventa, come si è visto, del quarto ordine, w diventa del terzo, e però, come u, cambia segno insieme a ds. Ne segue che si ha una inflessione per la projezione della curva, non sul piano rettificante, ma sul piano osculatore, e però son questi i punti che veramente corrispondono ai punti d'inflessione delle curve piane. Inoltre la projezione della curva sul piano normale in M, anche quando è nulla la sola torsione, presenta una cuspide, in M; ma questa è di prima specie (§ 209) nel primo caso, e di seconda specie nel secondo. Più difficile è lo studio delle singolarità dovute all'annullarsi di ρ o di τ, non reggendo più, in simili punti, i precedenti sviluppi di u, v, w, giacchè le formole adoperate per ottenerli suppongono essenzialmente finite le curvature.

Contatti.

248. Terminiamo con pochi cenni intorno al contatto fra una curva ed una superficie, rinviando il lettore ad altri trattati * per uno studio più accurato del contatto d'una curva con una superficie o con altre curve. Qui, per potere svolgere la teoria dei contatti con procedimento più

---

* Vedi, per esempio, il *Cours d'Analyse* di Hermite; p. 116.

rapido ed intuitivo, ci appoggeremo a certi risultati ottenuti precedentemente (§ 217) nello studio del contatto fra curve piane, e diremo che una superficie ha con una curva data, in un punto M, un contatto dell'ordine n, se occupa la posizione limite d'una superficie passante per M e per altri n punti della curva, quando questi ultimi tendono ad M, senza che ciò avvenga per altri punti d'incontro. Se la superficie che si considera è di quelle che nello spazio a tre dimensioni sono determinate da $n+1$ punti (o, ciò che vale lo stesso, se appartiene ad una famiglia di superficie, rappresentata da un'equazione che racchiude $n+1$ parametri arbitrarii) l'ordine del contatto non supera n, in generale, e quando un tal valore è raggiunto, la superficie dicesi *osculatrice* alla curva, nel punto considerato. Per esprimere che una superficie è osculatrice ad una data curva, in un dato punto, basta evidentemente differenziarne l'equazione tante volte quante sono necessarie per determinare i valori dei parametri, e scrivere che tutte le equazioni così ottenute sono soddisfatte dalle coordinate x, y, z del punto M e dai successivi differenziali delle coordinate stesse. In tal modo si viene infatti ad esprimere, usando il solito linguaggio convenzionale (§ 246), che la superficie contiene, oltre il punto M, gli n punti M′, M″, ..., infinitamente vicini ad M.

249. **Piano osculatore.** L'equazione del piano $AX+BY+CZ+D=0$ contiene *tre* parametri veramente arbitrarii, cioè i rapporti di tre coefficienti ad un quarto non nullo. Esprimiamo che questa equazione, e le prime due che se ne deducono per differenziazione, o per derivazione rispetto all'arco s d'una curva, sono soddisfatte dalle coordinate x, y, z d'un punto M di questa curva:

$$Ax+By+Cz+D=0\ ,\ Aa+Bb+Cc=0\ ,\ A\lambda+B\mu+C\nu=0\ . \quad (22)$$

Dalla prima condizione il piano è obbligato soltanto a passare per M; ma, se vi si aggiunge la seconda, il piano dovrà contenere la tangente in M. Dunque ogni piano che passa per la tangente si può ben chiamare *piano tangente*, in quanto ha con la curva un contatto generalmente del primo ordine, ossia la sua distanza ad un punto M′, infinitamente vicino ad M, è infinitesima del secondo ordine rispetto ad MM′. Se poi si aggiunge la terza condizione, si obbliga il piano a contenere anche la normale principale, ossia a coincidere con quello che già precedentemente abbiamo chiamato *piano osculatore*. Il suo contatto con la curva è del secondo ordine, ma può accidentalmente riuscire d'un ordine superiore: allora il piano è surosculatore, o, come si suol dire, è un piano osculatore *stazionario*.

250. La surosculazione avviene, naturalmente, in punti singolari, caratterizzati dalla condizione a cui si giunge derivando ancora una volta

l'ultima delle (22), ed eliminando A, B, C; ma, per essere sicuri di considerare tutti i casi possibili, conviene osservare che, in realtà, la condizione ottenuta derivando la seconda eguaglianza (22) è

$$(A\lambda + B\mu + C\nu)\frac{1}{\rho} = 0 , \tag{23}$$

dimodochè si ha, tornando a derivare,

$$(A\lambda + B\mu + C\nu)\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho} = (A\alpha + B\beta + C\gamma)\frac{1}{\rho\tau} . \tag{24}$$

Ora, se non è $1/\rho = 0$, dev'essere $\Sigma A\lambda = 0$, e per conseguenza si può porre $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$; quindi la condizione (24) diventa $1/\tau = 0$. Nel caso opposto l'eguaglianza (23) è vera qualunque siano A, B, C, e però tutti i piani tangenti hanno un contatto del secondo ordine con la curva; ma il nome di piano osculatore spetta a quello, fra essi, per cui è soddisfatta la condizione (24); e poichè questa, in generale, torna a prendere la forma $\Sigma A\lambda = 0$, si ritrova il piano osculatore, con un contatto del terzo ordine almeno. Se poi si avesse anche $d\frac{1}{\rho} = 0$ basterebbe derivare la condizione (24), una o più volte di seguito, per convincersi che si ritrova sempre il medesimo piano. Ben s'intende che, per la validità delle formole adoperate, le curvature si debbono supporre finite. Adunque *il piano osculatore stazionario si presenta in quei punti della curva, nei quali è nulla almeno una delle curvature*, cioè quando è soddisfatta la condizione (20). Del resto, quando non si voglia studiare il vario modo di comportarsi della curva, rispetto al piano che la suroscula, la (20) si ottiene più rapidamente per differenziazione, scrivendo cioè $\Sigma A dx = 0$ invece della seconda uguaglianza (22), ed eliminando A, B, C fra questa e le due che se ne deducono differenziando: $\Sigma A d^2x = 0$, $\Sigma A d^3x = 0$.

251. **Sfera osculatrice**. Partendo dall'equazione generale d'una sfera

$$(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + (Z-\zeta)^2 = \mathfrak{R}^2$$

(in cui $\xi, \eta, \zeta, \mathfrak{R}$ sono quattro *costanti* da determinare convenientemente), troviamo, con successive derivazioni rispetto all'arco d'una curva qualunque, sostituendo alle coordinate correnti le coordinate x, y, z d'un punto M della curva stessa:

$$\left\{\begin{aligned} &(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \mathfrak{R}^2 , \\ &a(x-\xi) + b(y-\eta) + c(z-\zeta) = 0 , \\ &\lambda(x-\xi) + \mu(y-\eta) + \nu(z-\zeta) = -\rho , \\ &\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta) = \tau\frac{d\rho}{ds} . \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Dalle ultime tre equazioni si ricava subito, ricordando le osservazioni fatte circa il determinante (6),

$$x-\xi=-\lambda\rho+\alpha\tau\frac{d\rho}{ds}\ ,\ y-\eta=-\mu\rho+\beta\tau\frac{d\rho}{ds}\ ,\ z-\zeta=-\nu\rho+\gamma\tau\frac{d\rho}{ds}\ , \quad (26)$$

e si conoscono così i valori di ξ, η, ζ, coordinate del centro: sostituendoli nella prima equazione si ottiene, per esprimere il raggio, la formola

$$\mathfrak{R}^2=\rho^2+\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)^2 . \quad (27)$$

La sfera così determinata è proprio quella che abbiamo incontrata in principio del § 246, giacchè le ultime tre condizioni (25) ci dicono che il suo centro sta nel piano normale, alle distanze ρ e $-\tau\frac{d\rho}{ds}$ dalla binormale e dalla normale principale. Ad essa tende la sfera MM′M″M‴ quando M′, M″, M‴ tendono a fissarsi in M. Evidentemente la circonferenza MM′M″ tende anch'essa a collocarsi sulla detta sfera limite; e poichè d'altra parte il suo piano tende ad osculare la curva, in M, è chiaro che *la circonferenza osculatrice è l'intersezione della sfera osculatrice col piano osculatore.* Dunque ρ è il raggio del circolo osculatore, sicchè per le curve storte, come per le curve piane, *la flessione d'una linea qualunque è la curvatura della sua circonferenza osculatrice.* Ora, tornando alle condizioni (25), osserviamo che la prima obbliga la sfera a passare per M; la seconda a toccare la curva, in M; la terza a passare per la circonferenza osculatrice; e la quarta, fra le infinite sfere *toccate ed attraversate* dalla curva, in M, ne distingue una, che non attraversa la curva, poichè il suo contatto è generalmente del terzo ordine: è dessa la sfera osculatrice.

252. Per decidere se la curva, intorno ad M, è interna o esterna alla sfera osculatrice, si calcoli la distanza h di M′ a tale sfera. Supposto finito il raggio $\mathfrak{R}$, da

$$(\mathfrak{R}+h)^2=(x-\xi+\delta x)^2+(y-\eta+\delta y)^2+(z-\zeta+\delta z)^2$$

si deduce, trascurando gli infinitesimi d'un ordine superiore al quarto,

$$\mathfrak{R}h=\sum(x-\xi)\delta x+{}^1/_2\sum\delta x^2 ;$$

e poichè, chiamando u, v, w, come nel § 244, le coordinate di M′ rispetto al triedro fondamentale in M, si ha

$$\delta x=au+\alpha v+\lambda w\quad ,\quad \delta y=bu+\beta v+\mu w\quad ,\quad \delta z=cu+\gamma v+\nu w\ ,$$

si ha pure, ricordando le (26),

$$\mathfrak{R}h=-\nu\rho+v\tau\frac{d\rho}{ds}+{}^1/_2(u^2+v^2+w^2) .$$

In questa formola si può, in virtù delle (19), trascurare v^2, limitare w^2 al suo primo termine, e calcolare u fino al termine del terzo ordine; ma v e w debbono essere calcolati fino ai termini del quarto ordine, e ciò si può fare agevolmente servendosi anche della formola (21):

$$v=\left(-1+\frac{d\rho}{2\rho}+\frac{d\tau}{4\tau}\right)\frac{ds^3}{6\rho\tau}\ ,\quad w=\frac{ds^2}{2\rho}-\frac{ds^2\,d\rho}{6\rho^2}-\left(\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2+1+\frac{\rho^2}{\tau^2}\right)\frac{ds^4}{24\rho^3}\ .$$

Ora, posto per brevità $\varkappa=\frac{\rho}{\tau}+\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)$, è facile trovare

$$\mathfrak{R}h=\frac{\varkappa\, ds^4}{24\rho\tau}\ ; \tag{28}$$

e siccome, d'altra parte, la (27) dà, per differenziazione,

$$\mathfrak{R}d\mathfrak{R}=\varkappa\tau\, d\rho\ , \tag{29}$$

si ottiene finalmente

$$h=\frac{ds^4 d\mathfrak{R}}{24\rho\tau^2 d\rho}\ .$$

Dunque, esclusi i punti nei quali è $d\rho=0$, un arco convenientemente piccolo, preso intorno ad M, è tutto esterno o tutto interno alla sfera osculatrice, in M, secondo che il volume di questa e l'area del circolo osculatore variano, o pur no, nello stesso senso.

253. Per trovare la condizione che dev'essere soddisfatta affinchè la sfera surosculi la curva, ossia per sapere in quali punti della curva il contatto fra questa e la sua sfera osculatrice va oltre il terzo ordine, basta derivare l'ultima delle (25), tenendo conto delle precedenti; ma, per non omettere alcun caso, bisogna tornare ad eseguire tutte le derivazioni, senza alterare la forma dei successivi risultati. Così facendo, le ultime due condizioni ci si presentano sotto la forma

$$\frac{1}{\rho}\sum\lambda(x-\xi)=-1\quad,\quad\frac{1}{\rho\tau}\sum\alpha(x-\xi)=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\ ; \tag{30}$$

poi, derivando ancora quest'ultima, si trova $\varkappa/\rho\tau=0$. Al medesimo risultato si giunge subito se si osserva che nella condizione trovata sta quanto occorre e basta, in virtù di (28), perchè h riesca d'un ordine superiore al quarto. Ora, esclusa l'ipotesi $1/\rho=0$ (perchè $\mathfrak{R}$ si suppone finito), ed esclusa anche (per la stessa ragione) l'ipotesi $1/\tau=0$ con $d\rho\gtrless 0$, si vede che *la sfera surosculatrice si presenta, oltrechè nei punti soddisfacenti alla condizione* $\varkappa=0$, *anche in altri punti*, caratterizzati dal fatto che la torsione vi si annulla, quantunque la sfera resti finita. In questi ultimi punti la seconda condizione (30) è soddisfatta identicamente, e per conseguenza accade che la curva ha un contatto del terzo ordine con tutte le sfere che passano per la circonferenza osculatrice; ma ad una sola di esse spetta il nome di sfera osculatrice, ed è sempre quella determinata in principio. Adunque la condizione $\varkappa=0$, sufficiente per la surosculazione, non è necessaria; ma in tutti i casi la (29) ci dice che, se non è $d\rho=0$, si ha $d\mathfrak{R}=0$. Ne segue, in particolare, che *una curva attraversa la sua sfera osculatrice tutte le volte che questa diventa minima o massima*, o pure *quando stacca da un piano osculatore stazionario un circolo minimo o massimo*; ed in questo secondo caso si verifica l'opposto di ciò che avviene ordinariamente, giacchè la curva non attraversa alcuna delle altre sfere contenenti la circonferenza osculatrice.

254. Ora si consideri una *curva sferica*, ossia una linea tracciata sopra una data sfera, di raggio R. È chiaro che non vi può essere, in ciascun punto, altra sfera osculatrice, anzi surosculatrice, se non la sfera che contiene la curva. Dunque si deve costantemente avere $\varkappa=0$, o pure $d\rho=0$ ed $1/\tau=0$; e nel secondo caso si trova nuovamente $\varkappa=0$. Questa è dunque una condizione necessariamente soddisfatta lungo qualsiasi linea sferica. Per dimostrare che la condizione stessa è sufficiente perchè la linea appartenga ad una sfera, deriviamo le (26). Dalla prima si deduce

$$a-\frac{d\xi}{ds}=-\lambda\frac{d\rho}{ds}+\alpha\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)+\left(\frac{a}{\rho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)\rho+\lambda\frac{d\rho}{ds}\,.$$

Dunque

$$\frac{d\xi}{ds}=-\varkappa\alpha\quad,\quad\frac{d\eta}{ds}=-\varkappa\beta\quad,\quad\frac{d\zeta}{ds}=-\varkappa\gamma\,. \tag{31}$$

Se si ha $\varkappa=0$ lungo tutta la curva, la (29) mostra che $\mathfrak{R}$ ha un valore costante R, e le (31) ci dicono che anche ξ,η,ζ sono costanti, d'onde segue che i punti della curva si trovano tutti alla distanza *costante* R dal punto *fisso* (ξ,η,ζ). Dunque *la condizione necessaria e sufficiente perchè una curva sia sferica è* $\frac{\rho}{\tau}+\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)=0.$

255. Nel caso generale le formole (31) mostrano che *le tangenti al luogo dei centri delle sfere osculatrici d'una curva son parallele alle binormali nei corrispondenti punti della curva*. Inoltre, quadrando e sommando, si trova il differenziale dell'arco della seconda curva

$$d\sigma=-\varkappa ds\;, \tag{32}$$

e si vede che, quando un punto M percorre una curva, il centro della sfera osculatrice tende ad avvicinarsi al piano osculatore, in M, o tende ad allontanarsene, secondo che $\varkappa$ è positivo o negativo. Siccome (§§ 234, 236) i coseni direttori delle normali principali, in due punti corrispondenti delle due curve, sono proporzionali a $d\alpha, d\beta, d\gamma$, si vede che le dette normali sono fra loro parallele, e però anche le tangenti della prima curva sono parallele alle corrispondenti binormali della seconda curva, dimodochè questa è sempre osculata dai piani normali all'altra. Rappresentando con ρ_1 e τ_1 i suoi raggi di curvatura, e dirigendone le normali principali in senso opposto a quello delle normali principali della prima curva, si ha, ricordando le (11),

$$\frac{\lambda}{\rho}=\frac{d\alpha}{ds}=-\varkappa\frac{d\alpha}{d\sigma}=\varkappa\frac{\lambda}{\tau_1}\quad,\quad\frac{\lambda}{\tau}=\frac{d\alpha}{ds}=-\varkappa\frac{d\alpha}{d\sigma}=\varkappa\frac{\lambda}{\rho_1}\ .$$

Dunque $\rho_1=\varkappa\tau$, $\tau_1=\varkappa\rho$, cioè

$$\rho_1=\rho+\tau\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\rho}{ds}\right)\quad,\quad\tau\tau_1=\rho\rho_1\ .$$

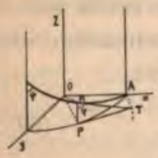
Particolarmente notevoli sono i *circoli storti*, ossia le curve a flessione costante (ρ=R) ed a torsione non nulla. Le sfere osculatrici d'un circolo storto son tutte uguali fra loro ($\mathfrak{R}=\rho$), ed i loro centri stanno sopra un altro circolo storto ($\rho_1=\rho$). *Le sole curve osculate da infinite sfere uguali sono i circoli storti*, perchè, in virtù di (29), se ρ non è costante, non può essere costante $\mathfrak{R}$ senza che sia $\varkappa=0$, nel qual caso, come abbiamo visto nel precedente paragrafo, le sfere osculatrici coincidono in una, che contiene tutta la curva. Tornando al caso generale osserviamo, per finire, che, mercè le formole (29) e (32), riesce facile il calcolo dell'*angolo $d\mathfrak{I}$ di due sfere osculatrici infinitamente vicine.* Infatti dalla formola evidente $d\sigma^2=d\mathfrak{R}^2+\mathfrak{R}^2 d\mathfrak{I}^2$ segue immediatamente

$$\frac{d\mathfrak{I}}{ds}=\frac{\varkappa\rho}{\mathfrak{R}^2}=\frac{1}{\tau}\,\frac{d\log\mathfrak{R}}{d\log\rho}\ .$$

Questo rappórto, chiamato *torsione sferica* da Demartres, è un altro elemento utile per la discussione delle curve storte.

Esercizii.

256. **Eliche:** *a)* Consideriamo un' *elica circolare*, ossia una curva che incontra sotto un angolo costante φ le generatrici d'un cilindro circolare, di raggio r. Prendiamo come asse delle z l'asse del cilindro, e perpendicolarmente ad esso conduciamo, per un punto A della curva, l'asse delle x. Sia θ, per qualunque punto M dell'elica, l'angolo che la projezione di OM sul piano xy fa con l'asse x. Siccome, per definizione, c dev' essere costantemente uguale a $\cos\varphi$, bisogna che sia $z=s\cos\varphi$, fissando in A l'origine degli archi. Le coordinate di M sono dunque $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, $z=s\cos\varphi$. Ne segue, differenziando,



$$dx=-r\operatorname{sen}\theta\, d\theta\quad,\quad dy=r\cos\theta\, d\theta\quad,\quad dz=\cos\varphi\, ds\ ;$$

quindi, quadrando e sommando, $ds^2 = r^2 d\theta^2 + \cos^2\varphi . ds^2$; poi, successivamente,

$$ds = \frac{r d\theta}{\operatorname{sen}\varphi} \quad , \quad s = \frac{r\theta}{\operatorname{sen}\varphi} .$$

Già la relazione $z = s\cos\varphi$ dimostra che, se T è il piede della tangente sul piano xy, il segmento MT è appunto uguale ad s; ed ora vediamo che, se P è la projezione di M sul detto piano, si ha $\mathrm{PT} = s \operatorname{sen}\varphi = r\theta = \operatorname{arco} \mathrm{AP}$; e però, quando M si sposta lungo l'elica, T descrive una sviluppante di circolo. Intanto i coseni direttori della tangente all'elica sono

$$a = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \quad , \quad b = \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \quad , \quad c = \cos\varphi \ ,$$

d' onde si trae, derivando e ricordando la prima terna (11),

$$\frac{\lambda}{\rho} = -\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta}{r} \quad , \quad \frac{\mu}{\rho} = -\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta}{r} \quad , \quad \nu = 0 \ ;$$

poi

$$\rho = \frac{r}{\operatorname{sen}^2\varphi} \quad , \quad \lambda = -\cos\theta \quad , \quad \mu = -\operatorname{sen}\theta \quad , \quad \nu = 0 \ .$$

Dunque le normali principali dell'elica incontrano ad angolo retto l'asse del cilindro. Inoltre si noti che *il raggio di flessione è costante.* I coseni direttori della binormale sono

$$\alpha = c\mu = -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \quad , \quad \beta = -c\lambda = \cos\varphi\cos\theta \quad , \quad \gamma = b\lambda - a\mu = -\operatorname{sen}\varphi \ ;$$

e basta derivare α o β, o pure uno dei coseni direttori della normale principale, per ottenere, ricordando le altre formole (11), il valore del raggio di torsione: $\tau = r/\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$. Dunque, come si vede, anche *il raggio di torsione è costante*: il suo valore è positivo, nel caso attuale, perchè (§ 244) l' elica da noi considerata è sinistrorsa. Del resto i risultati precedenti sono applicabili anche ad un' elica destrorsa, purchè si supponga $\operatorname{sen} 2\varphi < 0$.

b) Segnaliamo due importanti superficie, alle quali si è condotti nello studio dell'elica circolare. Una è il luogo delle tangenti, che si chiama *elicoide sviluppabile.* Già si è visto che le sezioni piane, perpendicolari all'asse del cilindro, son tutte uguali alla sviluppante del circolo di raggio r. Per rendersi conto della forma della superficie è utile conoscerne anche il profilo, ossia la sezione fatta con un piano che contenga l'asse. Siccome le equazioni della tangente sono, chiamando R la costante $r\cot\varphi$,

$$\frac{x - r\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta} = \frac{y - r\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{z - \mathrm{R}\theta}{\cot\varphi}$$

si ottiene, per $y = 0$,

$$x = r/\cos\theta \quad , \quad z = \mathrm{R}(\theta - \operatorname{tg}\theta) \ .$$

Son queste, nel piano xz, le equazioni d' una curva a noi già nota (§ 200, *c*). Le normali principali formano un altro *elicoide*, detto *a piano direttore* perchè le sue generatrici son tutte parallele ad un piano. Le equazioni d'una normale principale sono $y = x\operatorname{tg}\theta$, $z = R\theta$. Ne risulta, eliminando θ, l'equazione dell'elicoide:

$$y = x\operatorname{tg}\frac{z}{R}.$$

c) I calcoli del primo esercizio si possono eseguire più generalmente (con r funzione di θ) per qualsivoglia *elica cilindrica*, cioè per quelle curve che, tracciate sopra un cilindro qualunque, ne incontrano le generatrici sotto un angolo costante φ. Invece di ripetere i calcoli vogliamo mostrare, andando per la via più breve, come si arriva a scoprire un' importante proprietà caratteristica di tali curve. Richiamiamo le formole

$$\frac{dc}{ds} = \frac{\nu}{\rho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{\tau}, \quad \frac{d\nu}{ds} = -\frac{c}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau},$$

ed osserviamo che, nell' ipotesi di c costante, la prima formola dà $\nu = 0$, poi la seconda mostra che γ è costante. Ora, siccome si ha sempre $c^2 + \gamma^2 + \nu^2 = 1$, si può porre $\gamma = \cos(\varphi + {}^1/_2\pi) = -\operatorname{sen}\varphi$, se $c = \cos\varphi$, computando φ, nel piano rettificante, a partire dalla tangente, nel senso opposto a quello del moto degli indici d'un orologio, per un osservatore posto sulla parte positiva della normale principale. Ciò premesso, la terza formola dà $\operatorname{tg}\varphi = \tau/\rho$, e però *il rapporto delle curvature è costante.* Inversamente, se ciò ha luogo, si conduca per ciascun punto M, nel piano rettificante, la retta definita dai coseni

$$l = a\cos\varphi - \alpha\operatorname{sen}\varphi, \quad m = b\cos\varphi - \beta\operatorname{sen}\varphi, \quad n = c\cos\varphi - \gamma\operatorname{sen}\varphi,$$

dove l'angolo φ, costante, è definito dalla precedente uguaglianza. Si ha, in virtù delle (11),

$$\frac{dl}{ds}\Big/\lambda = \frac{dm}{ds}\Big/\mu = \frac{dn}{ds}\Big/\nu = \frac{\cos\varphi}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\tau} = 0,$$

cioè l, m, n sono costanti, e però la curva è un'elica cilindrica, perchè è tracciata sopra un cilindro, e ne incontra le generatrici sotto l'angolo costante φ. Dunque, *perchè una curva sia un'elica cilindrica, occorre e basta che le sue curvature si mantengano in un rapporto costante.* Se poi le curvature si conservano entrambe costanti, l'elica è necessariamente circolare: essa è tracciata sopra un cilindro, il cui raggio è $\rho\tau^2/(\rho^2 + \tau^2)$. Lasciamo al lettore la cura di dimostrare questo teorema, dovuto a Puiseux.

d) Si chiama poi *elica conica* ogni curva che incontra (obliquamente) sotto un angolo costante ψ le generatrici d'un cono. Quando il cono è circolare, l'elica incontra evidentemente sotto un angolo costante φ (tale che, chiamando χ l'inclinazione delle generatrici sull'asse, è $\cos\varphi = \cos\chi\cos\psi$) anche le generatrici del cilindro che la projetta parallelamente all'asse, ed è per conseguenza un'elica cilindrica, e si chiama, per questa ragione, *elica cilindro-conica*: essa è, per così dire, la spirale logaritmica dello spazio. L'asse ed il vertice del cono si prendano come asse delle z e come origine delle coordinate; e si chiami R la distanza di M dall'origine. Si deve avere

$$\cos\psi = \frac{x}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{R}\frac{dz}{ds},$$

sia $\cos\psi = dR/ds$; e poichè, per ipotesi, non è $\cos\psi = 0$ (nel qual caso si avrebbe $= costante$, e la curva apparterrebbe ad una sfera), si ha $R = s\cos\psi$, ponendo rigine degli archi nel vertice del cono. D'altra parte $r = R\,\mathrm{sen}\,\chi$; dunque $= ms\,\mathrm{sen}\,\psi$, dove per brevità si è posto $m = \mathrm{sen}\,\chi\cot\psi$. Intanto le coordinate di punto qualunque della curva sono $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = r\cot\chi$, e si ha

$$dr^2 = m^2\,\mathrm{sen}^2\psi(dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2) = \cos^2\psi dr^2 + m^2r^2\,\mathrm{sen}^2\psi d\theta^2\ ,$$

onde si trae $dr = mr\,d\theta$, poi $\log r = m\theta + costante$. Dunque la sezione retta del indro, su cui la curva considerata è un'elica, è una spirale logaritmica. Ora, se osserva che

$$\frac{dr}{ds} = m\,\mathrm{sen}\,\psi\quad ,\quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{mr}\frac{dr}{ds} = \frac{\mathrm{sen}\,\psi}{r} = \frac{1}{ms}\ ,$$

trovano facilmente i coseni direttori della tangente

$$a = (m\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\psi\quad ,\quad b = (m\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\psi\quad ,\quad c = \cos\varphi\ ,$$

oi, derivando ancora, quelli della normale principale

$$\lambda = -(\cos\theta + m\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\psi}{ms}\quad ,\quad \mu = -(\mathrm{sen}\,\theta - m\cos\theta)\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\psi}{ms}\quad ,\quad \nu = 0\ .$$

Dunque le normali principali sono perpendicolari all'asse del cono, ma non l'incontrano: *esse sono normali al cilindro, non al cono.* Quadrando e sommando le ultime formole, ed osservando che $1 + m^2 = \dfrac{\mathrm{sen}^2\varphi}{\mathrm{sen}^2\psi}$, si ottiene il valore di ρ, e se ne deduce poi subito quello di $\tau = \rho\,\mathrm{tg}\,\varphi$:

$$\rho = \frac{ms}{\mathrm{sen}\,\varphi}\quad ,\quad \tau = \frac{ms}{\cos\varphi}\ .$$

Dunque *nell'elica cilindro-conica i raggi di curvatura sono proporzionali all'arco,* computato a partire dal vertice del cono. Si può dimostrare che, inversamente, se in una curva si ha $\rho = ks$, $\tau = k's$, essa è necessariamente un'elica cilindro-conica, tracciata sopra un cono circolare, in cui l'inclinazione χ delle generatrici sull'asse è definita da $\mathrm{tg}\,\chi = k'^2 \Big/ \sqrt{k^2 + k'^2 + k^2k'^2}$.

257. Quando ad un piano, considerato come un velo flessibile ma inestendibile, si dà una qualsiasi forma cilindrica, tutte le rette, che hanno nel piano una certa direzione, diventano le generatrici del cilindro, ed ogni altra retta si cambia in un'elica, e non cessa di segnare sulla superficie il più breve cammino fra due qualunque dei suoi punti, sufficientemente vicini. Ciò si esprime dicendo che le eliche cilindriche sono le *geodetiche* dei rispettivi cilindri. Il concetto di geodetica verrà più oltre presentato sotto un altro aspetto, ed esteso ad una superficie qualunque; ma noi già possiamo ricercare quali sono le geodetiche delle superficie coniche, cioè in quali curve si cambiano le rette d'un piano inestendibile quando a questo si dà, per via di semplice flessione, la forma d'un cono. Si noti che tali

curve non sono le eliche coniche, le quali provengono invece da quelle spirali logaritmiche, che hanno il polo nel vertice del cono. Ora, limitandoci al caso d'un cono circolare, se A è la projezione del vertice O sulla retta che si vuol considerare, se l è la lunghezza del segmento OA, ed R la distanza di O ad un punto qualunque M della retta, si ha $R^2 = s^2 + l^2$, ponendo in A l'origine degli archi. Chiamiamo inoltre φ l'angolo OMA, ossia, nello spazio, l'inclinazione della tangente sulla generatrice. È chiaro che

$$\frac{dR}{ds} = \cos\varphi = \frac{s}{R} \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{l}{R} \quad , \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R} \ ;$$

e, poichè $ds^2 = dR^2 + r^2 d\theta^2$, si ha pure $d\theta/ds = \operatorname{sen}\varphi/r$, dove, essendo χ l'inclinazione della generatrice sull'asse z (asse del cono), è $r = R\operatorname{sen}\chi$. Ciò premesso, la derivazione di $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cot\chi$ rispetto ad s fornisce i coseni direttori della tangente

$$a = -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta + \cos\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\chi \ , \ b = \operatorname{sen}\varphi\cos\theta + \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\chi \ , \ c = \cos\varphi\cos\chi \ ,$$

poi (derivando ancora) quelli della normale principale

$$\lambda = -\frac{\rho}{R}\operatorname{sen}^2\varphi\cot\chi\cos\chi\cos\theta \ , \ \mu = -\frac{\rho}{R}\operatorname{sen}^2\varphi\cot\chi\cos\chi\operatorname{sen}\theta \ , \ \nu = \frac{\rho}{R}\operatorname{sen}^2\varphi\cos\chi ,$$

ossia

$$\lambda = -\cos\chi\cos\theta \quad , \quad \mu = -\cos\chi\operatorname{sen}\theta \quad , \quad \nu = \operatorname{sen}\chi \ ,$$

dopo avere osservato (quadrando e sommando) che

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R}\cot\chi = \frac{l^2}{R^3}\cot\chi \ .$$

Dunque le normali principali sono perpendicolari alle generatrici, ed incontrano l'asse: *esse sono perpendicolari alla superficie del cono.* Inoltre *la flessione varia in ragione inversa del cubo del segmento staccato dalla curva sulla generatrice, a partire dal vertice.* I coseni direttori della binormale sono

$$\alpha = -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\chi \ , \ \beta = \cos\varphi\cos\theta - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\chi \ , \ \gamma = -\operatorname{sen}\varphi\cos\chi \ .$$

Basta derivare l'ultimo per trovare il valore della torsione:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{R}\cot\chi = \frac{ls}{R^3}\cot\chi \ .$$

Si noti la relazione $s\tau = l\rho$. Orbene si dimostra che questa è vera per le geodetiche di qualsivoglia superficie conica, ma non sussiste per altre curve. È, in altri termini, *proprietà caratteristica delle geodetiche dei coni il variare del rapporto delle curvature in ragione inversa dell'arco.*

258. Data a studiare la curva rappresentata dalle equazioni

$$x = \frac{R}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})\cos\theta \quad , \quad y = \frac{R}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})\operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = R\theta \ ,$$

.iuci dal notare che, essendo $y = x\,\mathrm{tg}\,\theta$, $z = \mathrm{R}\theta$, la curva sta (§ 256, *b*) so-
ı elicoide a piano direttore. D' altra parte la sua projezione sul piano xy è
·ale rappresentata, in coordinate polari, dall'equazione $r = \frac{\mathrm{R}}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})$; e
$z = \mathrm{R}\theta$. Dunque la curva appartiene anche alla superficie di rotazione

$$r = \frac{\mathrm{R}}{2}\left(e^{\frac{z}{\mathrm{R}}} + e^{-\frac{z}{\mathrm{R}}}\right).$$

sta il *catenoide*, importante superficie, generata dalla rotazione della cate-
$x = \frac{\mathrm{R}}{2}\left(e^{\frac{z}{\mathrm{R}}} + e^{-\frac{z}{\mathrm{R}}}\right)$ intorno all'asse z, sua direttrice. Adunque la curva
sta si trova all' intersezione d' un catenoide con un elicoide a piano diret-
[ntanto si ottiene, differenziando le coordinate,

$$(e^{\theta} - e^{-\theta})\cos\theta - (e^{\theta} + e^{-\theta})\,\mathrm{sen}\,\theta], \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{\mathrm{R}}{2}[(e^{\theta} - e^{-\theta})\,\mathrm{sen}\,\theta + (e^{\theta} + e^{-\theta})\cos\theta], \quad \frac{dz}{d\theta} = \mathrm{R};$$

i, successivamente,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{2}}(e^{\theta} + e^{-\theta}), \quad s = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{2}}(e^{\theta} - e^{-\theta}),$$

· $\theta = 0$ si vuole che sia $s = 0$. I coseni direttori della tangente sono dunque

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(k\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}(k\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta), \quad c = \frac{\sqrt{2}}{e^{\theta} + e^{-\theta}},$$

per brevità si è posto $k = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$. Siccome $-a\,\mathrm{sen}\,\theta + b\cos\theta = 1/\sqrt{2}$, si
che *la curva taglia a 45° i paralleli del catenoide.* Se poi si osserva che

$$\frac{dk}{d\theta} = 1 - k^2,$$

va, differenziando ancora,

$$-\frac{k}{\sqrt{2}}(\mathrm{sen}\,\theta + k\cos\theta), \quad \frac{db}{d\theta} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\cos\theta - k\,\mathrm{sen}\,\theta), \quad \frac{dc}{d\theta} = -\frac{k\sqrt{2}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

gue, quadrando e sommando, $\varepsilon = k\,d\theta$; quindi

$$\rho = \frac{1}{k}\frac{ds}{d\theta} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{2}}\frac{(e^{\theta} + e^{-\theta})^2}{e^{\theta} - e^{-\theta}} = s + \frac{2\mathrm{R}^2}{s},$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{sen}\,\theta + k\cos\theta), \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - k\,\mathrm{sen}\,\theta), \quad \nu = -\frac{\sqrt{2}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

nente

$$\alpha = \frac{2\cos\theta}{e^{\theta} + e^{-\theta}}, \quad \beta = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{e^{\theta} + e^{-\theta}}, \quad \gamma = -\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

Siccome $\beta/\alpha = \operatorname{tg}\theta$, è chiaro che la binormale incontra l'asse delle z: *essa è dunque normale al catenoide.* Per calcolare la torsione basta prendere una delle (11), per esempio $d\gamma/ds = \nu/\tau$, da cui si deduce

$$\tau = \frac{R}{4}(e^{\theta} + e^{-\theta})^2 = R + \frac{s^2}{2R} \, . \, .$$

È poi facile dimostrare che *τ è uguale al segmento di binormale, compreso fra la curva e l'asse delle z.* Infatti, per le note (§ 190, c) proprietà della catenaria, il detto segmento è appunto uguale ad r^2/R. Si noti, per finire (*cfr.* § 257), che *il rapporto delle curvature varia proporzionalmente all'arco.*

259. **Curve di Bertrand**: *a*) Cerchiamo se può darsi che le normali principali d'una curva (M) siano normali principali di un'altra curva (M$_1$). A ciascun punto (x, y, z) della prima curva corrisponde, sull'altra, un punto M_1, le cui coordinate sono $x_1 = x + \lambda p$, $y_1 = y + \mu p$, $z_1 = z + \nu p$, se p è la distanza MM_1. Ai coseni direttori della tangente ad (M$_1$), in M_1, si deve poter dare la forma

$$a_1 = a\cos\psi - \alpha\operatorname{sen}\psi \quad , \quad b_1 = b\cos\psi - \beta\operatorname{sen}\psi \quad , \quad c_1 = c\cos\psi - \gamma\operatorname{sen}\psi \; ,$$

chiamando ψ l'angolo di cui la tangente stessa, osservata da M, deve rotare (nel senso inverso degli indici d'un orologio) per diventar parallela alla tangente, in M, ad (M). Intanto si ha

$$\frac{dx_1}{ds} = a - \left(\frac{a}{\rho} + \frac{\alpha}{\tau}\right)p + \lambda\frac{dp}{ds} \; , \; ecc.;$$

quindi

$$\frac{dp}{ds} = 0 \quad , \quad 1 - \frac{p}{\rho} = \frac{ds_1}{ds}\cos\psi \quad , \quad \frac{p}{\tau} = \frac{ds_1}{ds}\operatorname{sen}\psi \; , \tag{33}$$

e per conseguenza dev'essere

$$p = costante \quad , \quad \frac{1}{\rho} + \frac{\cot\psi}{\tau} = \frac{1}{p} \, . \tag{34}$$

Fin qui abbiamo soltanto espresso che le normali principali di (M) sono *normali* ad (M$_1$); ma perchè siano le normali *principali* bisogna ancora che si abbia

$$\frac{da_1}{ds_1} = \frac{\lambda}{\rho_1} \quad , \quad \frac{db_1}{ds_1} = \frac{\mu}{\rho_1} \quad , \quad \frac{dc_1}{ds_1} = \frac{\nu}{\rho_1} \; ,$$

vale a dire, osservando che

$$\frac{da_1}{ds} = \left(\frac{\cos\psi}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\tau}\right)\lambda - (a\operatorname{sen}\psi + \alpha\cos\psi)\frac{d\psi}{ds} \; , \; ecc.,$$

bisogna che sia

$$\frac{d\psi}{ds} = 0 \quad , \quad \frac{1}{\rho_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{\cos\psi}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\tau} \; , \tag{35}$$

quindi $\psi = costante$; e così vediamo che *i triedri fondamentali delle due curve sono rigidamente connessi fra loro.* Inoltre, in virtù di (34), *fra le curvature di* (M) *sussiste una relazione lineare, a coefficienti costanti.* Dunque (M) non è una curva qualunque: essa è una *curva di Bertrand*, nome che si dà ad ogni linea, le cui curvature siano vincolate da una relazione

$$\frac{p}{\rho} + \frac{q}{\tau} = 1\ , \tag{36}$$

con p e q costanti.

b) Si noti che, inversamente, data una simile linea, tutte le condizioni trovate innanzi sono soddisfatte, e però esiste una seconda linea, che ammette le stesse normali principali: le due curve determinano segmenti uguali a p sulle comuni normali principali, e le tangenti negli estremi di ciascun segmento fanno fra loro un angolo costante $\psi = \operatorname{arc\,tg}(p/q)$. Evidentemente la seconda linea è, come la prima, una curva di Bertrand, che soddisfa alla stessa (36), a parte il cambiamento di p in $-p$. Ciò permette di calcolare facilmente le curvature di (M_1), giacchè dalla terza formola (33) si ha $ds_1/ds = \sqrt{p^2+q^2}/\tau$, e però è chiaro che dev'essere anche $ds/ds_1 = \sqrt{p^2+q^2}/\tau_1$. Ne segue $\tau\tau_1 = p^2+q^2$, vale a dire che *le torsioni, in due punti che si corrispondono sulle due linee, formano un prodotto costante.* Poi, applicando la (36) alla curva (M_1),

$$\frac{p}{\rho_1} = \frac{q}{\tau_1} - 1 = \frac{q\tau}{p^2+q^2} - 1 = \frac{(p\tau + q\rho)q}{(p^2+q^2)\rho} - 1 = \frac{(q\tau - p\rho)p}{(p^2+q^2)\rho}\ ,$$

cioè

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{q\tau - p\rho}{(p^2+q^2)\rho}\ , \tag{37}$$

come si può anche dedurre dalla seconda formola (35). Finalmente osserviamo che la risposta data alla questione proposta riesce illusoria quando $p=0$, ossia per le curve a torsione costante (non nulla) ed a flessione variabile, perchè allora (M_1) coincide con (M). Questa conclusione non vale per le curve a torsione nulla (curve piane), per le quali si ha infatti $\psi = 0$, dimodochè le formole (33) e (35) forniscono soltanto i noti risultati

$$p = costante\ ,\quad \frac{ds_1}{ds} = 1 - \frac{p}{\rho}\ ,\quad \rho_1 = \rho - p\ ,$$

relativi ai sistemi di curve parallele (§ 225, *b*). E nemmeno vale quando è costante anche la flessione, perchè allora la condizione (36) è soddisfatta per infinite coppie di valori di p e di q, vale a dire che *un'elica circolare si può in infiniti modi considerare come una curva di Bertrand.* Così le eliche circolari ci si presentano come *caratterizzate, fra le curve storte, dalla proprietà di avere*, come le curve piane, *le normali principali in comune con infinite altre linee.* Queste sono, naturalmente, eliche circolari; ed una, in particolare, deve ridursi ad una retta: essa corrisponde ai valori di p e q soddisfacenti alla (36) ed alla (37) per $\rho_1 = \infty$, ossia

$$p = \frac{\rho\tau^2}{\rho^2+\tau^2}\ ,\quad q = \frac{\tau\rho^2}{\rho^2+\tau^2}\ ,$$

ed è l'asse comune dei cilindri, sui quali son tracciate le eliche.

APPLICAZIONI ALLE SUPERFICIE.

Prime nozioni.

260. **Piano tangente.** Alle infinite linee che si possono tracciare, per un punto M, sopra una superficie, conduciamo, in M, le tangenti: queste si dicono anche *tangenti alla superficie.* Ciascuna di esse è definita, in direzione, da coseni proporzionali ai differenziali (§ 231) delle coordinate x, y, z del punto M, supposto mobile lungo una linea della superficie. Ora, se la superficie è rappresentata dall'equazione $f(X, Y, Z)=0$, i detti differenziali sono vincolati dalla relazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0\ , \tag{1}$$

la quale esprime che la tangente considerata, qualunque essa sia, è perpendicolare alla retta definita in direzione dai coseni

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\quad \mathfrak{M}=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\quad \mathfrak{N}=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial z}\ .$$

Dunque *tutte le tangenti in* M *stanno in un piano.* È questo il *piano tangente* alla superficie nel punto M; e la perpendicolare ad esso, condotta per M, è la *normale* alla superficie. Il piano tangente è dunque rappresentato dall'equazione

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0\ . \tag{2}$$

Se poi si vuol fare uso delle derivate parziali p e q di z, rispetto ad x ed y, i coseni direttori della normale sono

$$\mathfrak{L}=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad \mathfrak{M}=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,\quad \mathfrak{N}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ,$$

e l'equazione del piano tangente prende la forma più semplice

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)\ . \tag{3}$$

Se ci riferiamo a cose dette precedentemente (§ 169) vediamo che la normale alla superficie $f=0$, in un punto M, è precisamente la retta secondo la quale più rapidamente tende a variare la funzione f, mentre secondo le tangenti la funzione tende a conservare il valore 0: essa ha, infatti, nei punti M′ del piano tangente, infinitamente vicini ad M, valori infinitesimi del secondo ordine rispetto ad MM′.

261. È anche utile saper calcolare $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ nel caso che la superficie sia data mediante le equazioni

$$x = \varphi(u, v) \quad , \quad y = \chi(u, v) \quad , \quad z = \psi(u, v) \; ,$$

con u e v che variano indipendentemente l'una dall'altra. Perchè queste tre equazioni rappresentino una superficie, occorre e basta che due delle tre funzioni x, y, z siano indipendenti, e per conseguenza (§ 179) che nella matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{Vmatrix}$$

non siano tutti nulli i minori del secondo ordine. Ciò premesso, quando v si mantiene costante, le equazioni precedenti definiscono una linea della superficie, e $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ sono proporzionali ai coseni direttori della tangente alla detta linea, nel punto che si considera, mentre $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ sono invece proporzionali ai coseni direttori della tangente alla linea che si ottiene mantenendo costante u, e lasciando variare la sola v. Dalle condizioni di perpendicolarità

$$\sum \mathfrak{L} \frac{\partial x}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum \mathfrak{L} \frac{\partial x}{\partial v} = 0 \; ,$$

si deduce che $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sono proporzionali ai suddetti minori; e poichè la somma dei quadrati di questi minori è uguale al quadrato della matrice, ed ha, per conseguenza, il valore $ab - c^2$, dove

$$a = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \quad , \quad b = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \quad , \quad c = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \; ,$$

è chiaro che si ha

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \quad , \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \quad , \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} .$$

262. **Esercizii.** Cerchiamo l'equazione di quel *cono circoscritto* alla superficie

$f(X, Y, Z) = 0$, che ha il vertice in un punto P, di coordinate ξ, η, ζ, ossia del cono formato da tutte le tangenti condotte per P alla superficie. Si esprime che il punto M, di coordinate x, y, z, appartiene alla superficie, e che il piano tangente in M passa per P, scrivendo

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad (\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \,. \qquad (4)$$

Queste uguaglianze, se vi si considerano x, y, z come le coordinate correnti, sono le equazioni della *linea di contatto* del cono con la superficie; e così, nelle applicazioni, si può determinare il *contorno apparente* d'una superficie, per uno che la osservi da P, cioè la linea che separa la parte della superficie, visibile da P, dalla parte invisibile; o, anche, la *linea di separazione fra ombra e luce* quando la superficie si trova immersa in un fascio di raggi provenienti dall'unico punto luminoso P. Se poi si vuol determinare l'*ombra portata* sopra un'altra superficie, all'equazione di questa bisogna aggregare l'equazione del cono circoscritto per trovare il contorno dell'ombra; e per avere l'equazione del cono basta eliminare x, y, z fra le (4) e le equazioni della generatrice PM:

$$\frac{X - \xi}{x - \xi} = \frac{Y - \eta}{y - \eta} = \frac{Z - \zeta}{z - \zeta} \,.$$

In particolare, immaginando P infinitamente lontano, l'eliminazione di x, y, z fra le equazioni

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}$$

fornirà l'equazione del *cilindro circoscritto* alla superficie parallelamente ad una data direzione (A, B, C). Tornando al caso generale, notiamo che l'eliminazione si può eseguire in forma molto semplice se si considera la funzione

$$F(t) = f\big(\xi + t(X - \xi) \,,\, \eta + t(Y - \eta) \,,\, \zeta + t(Z - \zeta)\big) \,,$$

e si osserva che la seconda uguaglianza (4) diventa $F'(t) = 0$, d'onde si vede che *l'equazione del cono circoscritto risulta dall'eliminazione di* t *fra* $F(t) = 0$ *ed* $F'(t) = 0$.

263. **Singolarità**. In ciò che precede è implicita la supposizione che le derivate prime di f non siano tutte nulle nel punto M, altrimenti la relazione (1) sarebbe illusoria. Quando invece si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \,, \qquad (5)$$

il punto M è un *punto singolare*, in quanto che le tangenti, in M, alla superficie, invece di stare in un piano, formano un cono: ciò si può subito riconoscere scrivendo l'equazione della superficie, per i punti (X, Y, Z) infinitamente vicini ad M, sotto la forma (§ 138)

$$\sum(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\Big[(X - x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots + 2(X - x)(Y - y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdots\Big] + \cdots = 0 \,.$$

Se i valori di $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, calcolati in M, non sono tutti nulli, si vede, trascurando gli infinitesimi superiori, che intorno ad M la superficie si comporta come il *piano* (2), e si ritrova così più rapidamente l'equazione del piano tangente. Se, invece, le coordinate di M soddisfano alle (5), i punti infinitamente vicini ad M, sulla superficie, si possono considerare, a prescindere da infinitesimi d'un ordine superiore al secondo, come situati sul *cono quadrico*

$$(X-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(Y-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\cdots+2(X-x)(Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cdots=0\ ;$$

e così via. La ricerca di questi punti singolari d'una superficie (detti anche *punti conici*, o *doppii*, *tripli*, ecc.) si fa dunque con un procedimento del tutto simile a quello che si è tenuto per le curve piane (§ 208), e l'indole della singolarità si riconosce mediante sezioni piane nella superficie, infinitamente vicine al punto che si considera. Si noti che nelle superficie i punti singolari possono anche, succedendosi con continuità, formare *linee singolari*: così, projettando una curva piana da un punto, preso fuori del suo piano, si ottiene un cono, che ammette come linee multiple tutte quelle generatrici che passano nei punti multipli della curva considerata; ed anche sono linee multiple d'una superficie di rotazione tutti i paralleli generati dai punti multipli del meridiano; *ecc.* Altre singolarità, analoghe alle inflessioni delle curve piane, ci si presenteranno fra breve.

264. **Rette osculatrici**. Tornando ai punti ordinarii proponiamoci di studiare il modo di comportarsi della superficie intorno ad uno di essi, M. Presa l'equazione del piano tangente sotto la forma (3), si calcoli la distanza h di questo piano da un punto qualunque M′, infinitamente vicino ad M sulla superficie:

$$h=\frac{\delta z-p\delta x-q\delta y}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ .$$

Intanto si ha

$$\delta z=p\delta x+q\delta y+{}^1/_2(r\delta x^2+2s\delta x\delta y+t\delta y^2)+\cdots,$$

dove p, q, r, s, t hanno il solito significato (§ 164), e s'intendono calcolati in M. Dunque, trascurando gli infinitesimi d'un ordine superiore al secondo,

$$h=\frac{rdx^2+2sdxdy+tdy^2}{2\sqrt{1+p^2+q^2}}\ . \tag{6}$$

Ogni coppia di valori di dx e dy, insieme al corrispondente $dz=pdx+qdy$, definisce la direzione d'una retta, tangente ad infinite linee che passano per M, sulla superficie; e si può sempre immaginare che M' appartenga ad una qualunque di queste linee. Basta poi far girare la tangente intorno ad M, nel piano tangente, perchè M' possa occupare qualunque posizione in un pezzo ς di superficie, convenientemente piccolo, circostante ad M. Quando la tangente compie un giro, due volte accade che h diventa d'un ordine superiore al secondo, cioè nelle due posizioni per le quali si annulla il numeratore dell'espressione (6). Così, fra le infinite tangenti, si è condotti a distinguerne due, che si chiamano *rette osculatrici*, perchè, fra tutte le rette che passano per M, son quelle che più si accostano alla superficie, intorno ad M. Tali rette possono essere immaginarie, o reali e distinte, secondo che $rt-s^2$ è positivo o negativo. Nel primo caso il punto M si dice *ellittico*, ed *iperbolico* nel secondo. Per $rt-s^2=0$ si presenta una singolarità: le due rette osculatrici si confondono in una, ed il punto si dice *parabolico*. Quando M è un punto ellittico, h conserva un segno invariato, e però ς *sta tutto da una parte del piano tangente*, dimodochè si può dire che, nella linea d'intersezione della superficie col suo piano tangente, M è un punto isolato. Invece, se M è un punto iperbolico, le rette osculatrici, reali, determinano sul piano tangente due regioni, per una delle quali h è positivo, mentre per l'altra è negativo, e però ς *è attraversato dal piano tangente*. Inoltre, se M' sta in questo piano, o, più generalmente, se appartiene ad una curva osculata, in M, dal piano stesso, la distanza h è nulla o infinitesima almeno del terzo ordine, e però deve annullarsi il numeratore dell'espressione (6). Dunque le rette osculatrici sono tangenti a tutte le curve della superficie, che nel punto M ammettono come piano osculatore il piano tangente; ed in particolare la intersezione della superficie col piano tangente ha due rami che passano per M tangenzialmente alle rette osculatrici, vale a dire che, in tale intersezione, M è un punto doppio. Inversamente, tutte le volte che una curva della superficie tocca una retta osculatrice, h diventa d'un ordine superiore al secondo, e però la curva è osculata dal piano tangente, o pure (§ 247) la sua flessione è nulla nel punto che si considera. Finalmente osserviamo che, se la funzione $rt-s^2$ è continua, i punti ellittici ed i punti iperbolici sono raccolti in analoghe regioni della superficie, confinanti fra loro per mezzo di linee, costituite dai punti parabolici: questi si trovano (*cfr.* § 205) all'intersezione della superficie data con la superficie $rt-s^2=0$.

265. **Indicatrice di Dupin.** Per vedere più da vicino ciò che accade intorno alle due specie di punti, poniamo l'origine in M, e dirigiamo l'asse delle z normalmente alla superficie: ciò non altera il segno di $rt-s^2$, poichè si è visto che questo segno caratterizza fatti geometrici, indipendenti dalla scelta degli assi. In questo caso è $p=0$, $q=0$, ed intorno ad M

la superficie si comporta come il paraboloide $z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$, ellittico o iperbolico secondo che $rt - s^2 > 0$, o $rt - s^2 < 0$. Le rette osculatrici sono appunto quelle due generatrici rettilinee del paraboloide, immaginarie o reali, che stanno nel piano $z = 0$. Se poi è $rt - s^2 = 0$, M è un punto parabolico, intorno al quale la superficie si comporta come un cilindro parabolico. Ora tagliamo la superficie con due piani $z = \pm l$, paralleli ed infinitamente vicini al piano tangente. L'equazione della sezione è

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 2l \ ,$$

e rappresenta una coppia di ellissi, una reale e l'altra immaginaria, o pure una coppia di iperboli complementari, secondo che il punto M è ellittico o iperbolico. Projettata la sezione sul piano tangente, immaginiamo che si dilati intorno al centro finchè la sua equazione diventi

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 1 \ .$$

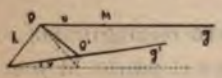
La *parte reale* di questa coppia di coniche si chiama *indicatrice di Dupin*: essa è incontrata da ogni diametro in due punti reali, ed ammette come assintoti, immaginarii o reali, le rette osculatrici.

266. **Linee notevoli**. Fra tutte le linee che si possono tracciare sopra una superficie sono particolarmente notevoli le *linee assintotiche*, cioè quelle che in ogni loro punto toccano una retta osculatrice. Un'assintotica si può immaginare generata da un punto M, il quale prenda a spostarsi lungo una simile retta, fino ad M', per muoversi poi lungo la retta analoga, che passa per M', fino ad M''; *ecc.* Se invece di spostarsi successivamente lungo le rette osculatrici, cioè tangenzialmente agli *assintoti* dell'indicatrice di Dupin, il punto si muove sempre tangenzialmente agli *assi* dell'indicatrice stessa, la linea così generata si chiama *linea di curvatura*. Ogni superficie è dunque coperta da un doppio sistema di linee di curvatura, sempre reali, e tali che per ogni punto della superficie passano, tagliandosi ad angolo retto, una linea d'un sistema ed una dell'altro sistema. Passano anche, per ogni punto iperbolico, due assintotiche egualmente inclinate su ciascuna linea di curvatura, e generalmente oblique fra loro. Per un'osservazione fatta nel § 264, i piani osculatori d'una linea assintotica sono i piani che toccano la superficie lungo la linea stessa, salvo che non sia costantemente $1/\rho = 0$, nel qual caso (§ 240) la linea è retta, e si può sempre considerare (§ 241) come osculata dai piani tangenti. Dunque le assintotiche *hanno, in ciascuno dei loro punti, la normale principale situata nel piano tangente alla superficie.* Invece passano per ogni punto d'una superficie infinite linee, dette *linee geodetiche*, le quali *hanno come normale principale la normale alla superficie.* In seguito si vedrà che il più breve cammino fra due punti

(non troppo lontani) d'una superficie è segnato appunto dall'arco di geodetica che li congiunge. Evidentemente una retta è geodetica ed assintotica su qualunque superficie, giacchè ognuna delle sue normali si può sempre considerare come normale principale.

Superficie rigate.

267. Quando una retta si muove nello spazio, occupando successivamente una semplice infinità di posizioni, essa genera una *superficie rigata*. Fissata la retta in una posizione $\mathfrak{g}$, se ne consideri un'altra $\mathfrak{g}'$, che si farà poi tendere a $\mathfrak{g}$. La comune perpendicolare a $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ incontra $\mathfrak{g}$ in un punto, mobile insieme a $\mathfrak{g}'$, il quale può tendere ad una posizione limite Q quando $\mathfrak{g}'$ tende a $\mathfrak{g}$. Il punto Q si chiama *punto centrale* della generatrice. Se, rispetto all'arco infinitesimo QQ' del luogo dei punti centrali, la distanza h delle corrispondenti generatrici è del primo ordine, come avviene in generale, la superficie si dice *gobba*, e la curva (Q) è la sua *linea di stringimento*. Nel caso contrario la superficie si chiama *sviluppabile*, e (Q) è il suo *spigolo di regresso*.



268. Siano a, b, c i coseni direttori di $\mathfrak{g}$, ed x, y, z le coordinate di un punto qualunque di questa retta. Si sa dalla Geometria analitica che l'angolo φ di $\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}'$ è dato dalla formola $\operatorname{sen}^2\varphi = \Sigma(b\delta c - c\delta b)^2$, in cui col segno δ si distinguono le variazioni subìte dalle varie quantità nel passaggio da $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}'$. Siccome h è la projezione, sulla comune perpendicolare a $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$, del segmento rettilineo che va dal punto (x, y, z) al punto $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$, e poichè i coseni direttori della comune perpendicolare sono proporzionali a $b\delta c - c\delta b$, $c\delta a - a\delta c$, $a\delta b - b\delta a$, è chiaro che si ha

$$h = \sum \frac{b\,\delta c - c\,\delta b}{\operatorname{sen}\varphi}\,\delta x = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\begin{vmatrix} a & \delta a & \delta x \\ b & \delta b & \delta y \\ c & \delta c & \delta z \end{vmatrix},$$

o, in forma più concisa, $h\operatorname{sen}\varphi = [a, \delta a, \delta x]$. Ne segue, omettendo nei due membri gli infinitesimi d'un ordine superiore al terzo,

$$h\varphi = [a, da, dx] + {}^1/_2[a, da, d^2x] + {}^1/_2[a, d^2a, dx] + \ldots.$$

Perchè h sia d'un ordine superiore al primo occorre e basta che si abbia $[a, da, dx] = 0$. Questa è dunque la *condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie considerata sia sviluppabile*; ed importa notare che tale condizione sussiste intatta quando a, b, c non ono proprio i coseni direttori, ma quantità proporzionali ai coseni stessi. ra si osservi che, quando è soddisfatta la detta condizione, spariscono all'espressione di $h\varphi$ anche i termini del terzo ordine, perchè

$$[a\,,da\,,d^2x]+[a\,,d^2a\,,dx]=d[a\,,da\,,dx]\ .$$

unque *in una superficie sviluppabile la distanza di due generatrici infinitamente vicine è infinitesima almeno del terzo ordine* rispetto al corrispondente arco dello spigolo di regresso.

269. Ciò premesso, la teoria delle curve storte ci fornisce subito un esempio di superficie sviluppabile. È infatti evidente che il luogo delle tangenti ad una curva storta è una superficie sviluppabile, che ammette come spigolo di regresso la curva considerata, perchè, se $(x\,,y\,,z)$ è un punto della curva, gli elementi della terza verticale, nel determinante $[a\,,da\,,dx]$, sono proporzionali (§ 231) a quelli della prima. Inversamente, se $[a\,,da\,,dx]=0$, ai punti (x,y,z) se ne possono sostituire, se occorre, altri $(x+at\,,y+bt\,,z+ct)$, tali che le tangenti al luogo di questi punti siano le generatrici della superficie, per la qual cosa basta che i differenziali delle coordinate siano proporzionali ad $a\,,b\,,c$, e per conseguenza che si possa determinare t in modo che

$$\frac{dx+tda}{a}=\frac{dy+tdb}{b}=\frac{dz+tdc}{c}\ .$$

Ora, la condizione perchè queste equazioni siano fra loro compatibili è appunto $[a\,,da\,,dx]=0$. Dunque *ogni superficie sviluppabile si può considerare come il luogo delle tangenti ad una curva storta.* Di questa proprietà possiamo anche renderci conto osservando che, se per $\mathfrak{g}$ si conduce il piano parallelo a $\mathfrak{g}'$, la distanza di Q' al detto piano è h; e poichè tale distanza è infinitesima del terzo ordine, in generale accade che il piano così costruito (§ 243) è appunto quello che oscula lo spigolo di regresso nel punto Q. Per dimostrare poi che $\mathfrak{g}$ è la tangente allo spigolo stesso, basta far vedere che la distanza a $\mathfrak{g}$ della projezione di Q' sul piano osculatore è d'un ordine superiore al primo; e siccome questa distanza è uguale al prodotto di QQ' per un angolo infinitesimo, il teorema è dimostrato.

270. Ora supponiamo che $x\,,y\,,z$ siano le coordinate del punto centrale Q, e cerchiamo di determinare il piano tangente in un punto qualunque M d'una superficie rigata. La generatrice $\mathfrak{g}$ sarà determinata dalle coordinate $x\,,y\,,z$, e dai proprii coseni direttori, e queste quantità dipendono tutte da una sola variabile u, che può essere l'*arco* dello spigolo di regresso o della linea di stringimento, computato a partire da una

origine A, arbitrariamente fissata sulla curva. Un punto M sarà poi determinato, sulla corrispondente generatrice, dalla sua distanza v al punto centrale. Così le coordinate di M dipendono dai parametri u e v nel seguente modo: $X = x + av$, $Y = y + bv$, $Z = z + cv$. Inoltre

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{dx}{du} + v\frac{da}{du}\ , \text{ ecc.} \quad ; \quad \frac{\partial X}{\partial v} = a \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = b \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = c\ . \qquad (1)$$

Se la superficie è sviluppabile, si ha $\frac{dx}{du} = a$, $\frac{da}{du} = \frac{\lambda}{\rho}$, *ecc.*, e le ultime formole diventano

$$\frac{\partial X}{\partial u} = a + \frac{\lambda v}{\rho} \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = b + \frac{\mu v}{\rho} \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = c + \frac{\nu v}{\rho}\ ;$$

quindi (§ 261) i coseni direttori $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ della normale alla superficie, nel punto M, sono proporzionali ai determinanti della matrice

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \end{Vmatrix}\ ,$$

cioè ai coseni direttori α, β, γ della binormale. Come si vede $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ sono indipendenti da v. Dunque *il piano tangente in un punto d'una superficie sviluppabile tocca la superficie lungo tutta la generatrice.*

271. Nel caso d'una rigata gobba $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ sono proporzionali alle quantità

$$b(dz + v\,dc) - c(dy + v\,db) = (b\,dz - c\,dy) + v(b\,dc - c\,db)\ , \text{ ecc.}$$

Intanto si ha, continuando a chiamare α, β, γ i coseni direttori della comune perpendicolare a $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$,

$$\frac{\alpha}{b\,dc - c\,db} = \frac{\beta}{c\,da - a\,dc} = \frac{\gamma}{a\,db - b\,da} = \frac{1}{\varphi}\ ;$$

ed analogamente, se λ, μ, ν sono i coseni direttori della perpendicolare comune alla retta $\mathfrak{g}$ ed a QQ',

$$\frac{\lambda}{b\,dz - c\,dy} = \frac{\mu}{c\,dx - a\,dz} = \frac{\nu}{a\,dy - b\,dx} = \frac{1}{h}\ .$$

Dunque, posto $h = R\varphi$, i coseni $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ sono proporzionali alle quantità $\lambda + \frac{v}{R}\alpha$, $\mu + \frac{v}{R}\beta$, $\nu + \frac{v}{R}\gamma$, e per $v = 0$ coincidono con λ, μ, ν. Le normali corrispondenti ai valori 0 e v del parametro v fanno dunque fra loro un angolo ψ, definito da ciascuna delle uguaglianze

$$\cos\psi = \mathcal{L}\lambda + \mathcal{M}\mu + \mathcal{N}\nu \quad , \quad \operatorname{sen}\psi = \mathcal{L}\alpha + \mathcal{M}\beta + \mathcal{N}\gamma\ .$$

In virtù della prima si ha

$$\mathcal{L}=\left(\lambda+\frac{v}{\mathrm{R}}\alpha\right)\cos\psi \;,\quad \mathfrak{M}=\left(\mu+\frac{v}{\mathrm{R}}\beta\right)\cos\psi \;,\quad \mathfrak{N}=\left(\nu+\frac{v}{\mathrm{R}}\gamma\right)\cos\psi \;;$$

poi, moltiplicando per α, β, γ, e sommando, si ottiene $\operatorname{sen}\psi=\frac{v}{\mathrm{R}}\cos\psi$, cioè

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{v}{\mathrm{R}}\,.$$

Questa formola, dovuta a Chasles, mostra che, quando il punto di contatto, partendo dalla linea di stringimento, percorre una generatrice, il piano tangente alla superficie rota d'un angolo, la cui tangente trigonometrica è proporzionale al cammino percorso dal punto. Si noti che, per conoscere gli infiniti piani tangenti ad una rigata gobba, lungo una data generatrice, basta conoscere il valore di R, che per questa ragione si chiama il *parametro distributore* dei piani tangenti. Per interpetrare geometricamente il teorema di Chasles assumiamo come assi delle x e delle y la generatrice $\mathbf{g}$ e la comune perpendicolare a $\mathbf{g}$ e $\mathbf{g}'$. Le equazioni della normale alla superficie, nel punto M, sono $x=v$, $y=z\operatorname{tg}\psi$, e però la formola di Chasles diventa $xz=\mathrm{R}y$. Dunque *le normali ad una rigata gobba, lungo una generatrice, formano un paraboloide iperbolico.*

272. Torniamo alle sviluppabili per osservare che, se la curva (M) incontra ad angolo retto le generatrici, ossia, come si suol dire, se (M) è una *trajettoria ortogonale* delle generatrici, è soddisfatta la condizione di ortogonalità $\Sigma a d\mathrm{X}=0$. Intanto, poichè in virtù delle (7) si ha

$$d\mathrm{X}=\left(a+\frac{\lambda v}{\rho}\right)du+a\,dv \;,\; \text{ecc.}$$

è $\Sigma a d\mathrm{X}=d(u+v)$, e però la predetta condizione equivale a dire che $u+v$ è costante, cioè *arco* AQ + QM = *costante*. Ne segue che due trajettorie ortogonali qualunque intercettano, sulle infinite generatrici, segmenti uguali all'arco che staccano dallo spigolo di regresso, e che se un filo inestendibile, fissato in un punto A, e teso sul detto spigolo, si svolge scostandosi da questo gradualmente, e mantenendosi sempre teso nello spazio, ciascuno dei suoi punti descrive una trajettoria ortogonale (M). È per tale ragione che alle (M) si dà anche il nome di *sviluppanti* dello spigolo di regresso: questo è, del resto, una curva qualunque.

273. Inversamente questa curva si chiama *sviluppata* di ciascuna (M) perchè (come nelle curve piane) *le sue tangenti sono normali* ad ogni curva (M). Riferiamoci al triedro fondamentale d'una di queste curve, e

cerchiamo a quale condizione deve soddisfare una normale per poter generare una superficie sviluppabile. Se la normale che si vuol considerare fa l'angolo φ con la normale principale, la sua direzione è definita dai coseni

$$l = \alpha \operatorname{sen}\varphi + \lambda\cos\varphi \quad , \quad m = \beta\operatorname{sen}\varphi + \mu\cos\varphi \quad , \quad n = \gamma\operatorname{sen}\varphi + \nu\cos\varphi \; .$$

Invece

$$l' = \alpha\cos\varphi - \lambda\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad m' = \beta\cos\varphi - \mu\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad n' = \gamma\cos\varphi - \nu\operatorname{sen}\varphi$$

sono i coseni direttori d'una seconda normale che, insieme alla prima ed alla tangente, costituisce una terna ortogonale, dimodochè

$$\begin{vmatrix} a & l' & l \\ b & m' & m \\ c & n' & n \end{vmatrix} = 1 \; .$$

Ciò premesso, si è visto (§ 268) che la condizione $[l, dl, a] = 0$ è necessaria e sufficiente perchè la prima normale generi una sviluppabile. Or poichè per le formole di Frenet (§ 237) si ha

$$dl = l'(d\varphi - \eta) - a\varepsilon\cos\varphi \; , \; ecc.$$

il determinante che precede diventa $[l, l', a](d\varphi - \eta) = \eta - d\varphi$, e però la condizione cercata è

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\tau} \; . \tag{8}$$

Il significato geometrico di questa condizione si scopre calcolando la rotazione ω, verso la normale principale, della normale considerata. È noto (§ 238) che

$$\omega\operatorname{sen}\varphi = \sum \lambda dl = (d\varphi - \eta)\sum \lambda l' = (\eta - d\varphi)\operatorname{sen}\varphi \; ;$$

quindi $\omega = \eta - d\varphi$, risultato evidente. La condizione $\omega = 0$ significa dunque che, nel moto d'un punto lungo una curva, ogni normale che rota nel piano normale (in cui si suppone fissata la normale principale) *in modo da spostarsi nello spazio perpendicolarmente al piano stesso*, genera una superficie sviluppabile.

274. Dimostriamo, per finire, due proposizioni, che possono immediatamente dedursi dalle precedenti:

a) In virtù dell'ultima osservazione, lo spostamento della generatrice avviene in modo che il piano osculatore dello spigolo di regresso è sempre perpendicolare al piano normale di (M), d'onde segue che questo è anche il piano rettificante del predetto spigolo. In altri termini *il piano normale della sviluppante coincide col piano rettificante della sviluppata*;

b) Trovata una funzione φ, che soddisfa alla (8), se ne ottengono infinite altre mercè l'addizione d'una costante arbitraria. Ne segue che, *se si fanno rotare d'uno stesso angolo arbitrario le generatrici d'una sviluppabile, intorno ad una loro trajettoria ortogonale, esse non cessano di costituire una superficie sviluppabile.* Gli spigoli di regresso di tutte queste sviluppabili sono appunto le infinite sviluppate della trajettoria considerata.

Inviluppi.

275. Si consideri la famiglia di superficie, rappresentata dall'equazione $f(x, y, z, a) = 0$ per gli infiniti valori del parametro a. Una qualunque di esse, individuata da un particolare valore a del parametro, è incontrata da un'altra, individuata dal valore $a + h$, secondo una certa curva, la quale può tendere ad occupare, sulla prima superficie, una posizione limite, quando h tende a zero. In questa posizione essa si chiama *caratteristica* della corrispondente superficie, nella famiglia considerata; ed il luogo delle caratteristiche di tutte le superficie della famiglia si chiama *inviluppo* delle superficie stesse. Può anche darsi che, per quanto piccolo sia h, le superficie (a) ed $(a + h)$ non s'incontrino; ma ciò non impedisce l'esistenza, sulla superficie (a), di punti di massimo infinito avvicinamento (*cfr.* § 220) alla superficie $(a + h)$, ossia di punti che, a prescindere da infinitesimi d'un ordine superiore ad h, possano riguardarsi come punti comuni alle due superficie. In questo caso la caratteristica della superficie (a) è il limite a cui tende il luogo di siffatti punti, quando h tende a zero. Mediante considerazioni analoghe a quelle che sono state fatte nel piano, si dimostra subito che *l'equazione dell'inviluppo si ottiene eliminando* a *fra le equazioni* $f = 0, \frac{\partial f}{\partial a} = 0$. Ed è anche facile dimostrare che *ogni superficie della famiglia è toccata dalla superficie inviluppo lungo la propria caratteristica.* Basta infatti osservare che l'equazione dell'inviluppo è l'equazione stessa della famiglia di superficie, in cui si pensa a come funzione delle coordinate, soddisfacente a $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, e che le derivate parziali prime del primo membro della detta equazione sono, per conseguenza,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z},$$

sono cioè appunto uguali a $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, come nell'ipotesi di a costante.

276. **Esempio.** Un notevole esempio d'inviluppo ci è dato da qualunque semplice infinità di piani. La caratteristica di ciascun piano è necessariamente una retta: l'inviluppo è dunque una superficie rigata; e siccome, per l'ultimo teorema, questa superficie dev'essere toccata da un unico piano lungo ciascuna generatrice,

essa è sviluppabile. Reciprocamente, per quanto si è visto nel § 270, ogni superficie sviluppabile è l'inviluppo della semplice infinità dei piani osculatori d'una certa curva. Partendo da ciò è facile scoprire un importante carattere analitico delle superficie sviluppabili. L'equazione d'un piano tangente ad una superficie qualunque è $Z = pX + qY + (z - px - qy)$. Perchè la superficie sia sviluppabile occorre e basta che $p, q, z - px - qy$ *dipendano da un sol parametro*, per la qual cosa è necessario e sufficiente (§ 179) che la matrice jacobiana di queste tre funzioni abbia nulli tutti i suoi minori del secondo ordine. Siccome si ha

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r \;,\quad \frac{\partial q}{\partial x} = s \;,\quad \frac{\partial}{\partial x}(z - px - qy) = -(rx + sy)\;,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = s \;,\quad \frac{\partial q}{\partial y} = t \;,\quad \frac{\partial}{\partial y}(z - px - qy) = -(sx + ty)\;,$$

la matrice di cui si tratta è

$$\begin{vmatrix} r & s & rx + sy \\ s & t & sx + ty \end{vmatrix} \;,\quad \text{ed equivale a} \quad \begin{vmatrix} r & s & 0 \\ s & t & 0 \end{vmatrix} \;.$$

Affinchè siano nulli i suoi minori del secondo ordine è necessario e sufficiente che sia nullo $rt - s^2$. Dunque *la relazione* $rt - s^2 = 0$ *caratterizza le superficie sviluppabili.* In altri termini son queste le sole superficie costituite da punti tutti parabolici (§ 264). Si noti che per le rigate gobbe è sempre $rt - s^2 < 0$, perchè per ogni punto passa certamente un'assintotica reale: questa è la generatrice rettilinea. Sulle sviluppabili i due sistemi di assintotiche coincidono in uno, cioè nel sistema delle generatrici rettilinee; ma esiste inoltre un'assintotica isolata, ed è lo spigolo di regresso. Ciò non contradice alle cose dette innanzi, perchè si può facilmente constatare (§ 294; *b*) che sullo spigolo di regresso r, s, t diventano infiniti.

277. Ora si consideri una famiglia doppiamente infinita di superficie, rappresentata dall'equazione $f(x, y, z, a, b) = 0$ per tutte le coppie di valori dei parametri a e b; e dopo aver fissata una superficie S, corrispondente ad una data coppia (a_0, b_0), si prenda arbitrariamente una funzione φ, e si ponga $b = b_0 + \varphi(a) - \varphi(a_0)$. Si è in tal modo ricondotti al caso precedente, e si ottiene sopra S una particolare caratteristica, corrispondente alla data funzione φ. Orbene, quando per φ si prendono tutte le possibili funzioni, le infinite caratteristiche così ottenute *passano tutte per certi punti di* S. Infatti la caratteristica corrispondente ad una data φ soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a) = 0 \;,$$

e però le appartengono quei punti di S, nei quali si ha simultaneamente $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$, i quali punti sono, come si vede, indipendenti dalla scelta di φ. Adunque in questo caso, invece di avere una linea sopra ogni superficie, si hanno dei punti discreti, i quali costituiscono, al variare della superficie, l'*inviluppo* della famiglia considerata; e l'equazione di tale inviluppo risulta dall'eliminazione di a e b fra le equazioni

$$f=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial a}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial b}=0 \; .$$

Anche in questo caso *l'inviluppo tocca tutte le superficie inviluppate.* In particolare una superficie qualunque si può considerare come l'inviluppo dei suoi piani tangenti.

278. Talvolta la famiglia di superficie è data mediante l'equazione $f(x, y, z, a, b, c, \ldots)=0$. e fra gli n parametri $a, b, c, \ldots$ si danno ν relazioni $\varphi=0, \psi=0, \ldots$, essendo $\nu=n-1$ o $\nu=n-2$ secondo che la famiglia è semplicemente o doppiamente infinita. Allora, per trovare l'equazione dell'inviluppo, bisogna esprimere che la matrice

$$\left\| \begin{array}{llll} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} & \ldots\ldots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial c} & \ldots\ldots \\ \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \psi}{\partial c} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right\|$$

ha uguali a zero tutti i minori dell'ordine $\nu+1$. Si ottengono così $n-\nu$ relazioni, e l'equazione cercata risulta dall'eliminazione degli n parametri fra l'equazione della famiglia di superficie, le ν relazioni date fra i parametri stessi, e le $n-\nu$ relazioni ottenute. Può anche darsi che nell'equazione della famiglia non compariscano esplicitamente i parametri e le coordinate, vale a dire che l'equazione sia data sotto la forma

$$f(u, v, w, \ldots)=0 \; ,$$

dove $u, v, w, \ldots$ sono funzioni di x, y, z e dei parametri; ma è chiaro che, in questo caso, le derivate parziali rispetto ad un parametro a si formano prendendo, per esempio,

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial a}+\ldots \; , \text{ ecc.}$$

279. **Esercizii:** *a)* Per cercare l'inviluppo delle superficie omotetiche ad una data $f(x, y, z)=0$ rispetto ad un centro P, si osservi, prima di tutto, che se ξ, η, ζ sono le coordinate di P, e se si pone

$$F(t)=f(\xi+t(x-\xi) \; , \; \eta+t(y-\eta) \; , \; \zeta+t(z-\zeta)) \; ,$$

l'equazione $F(t)=0$ rappresenta appunto, per ciascun valore di t, una di quelle superficie, ed in particolare, per $t=1$, la superficie data. Ora, poichè l'equazione dell'inviluppo risulta dall'eliminazione di t fra $F(t)=0$ ed $F'(t)=0$, si vede (§ 262) che l'inviluppo cercato è il cono circoscritto dal vertice P alla data superficie. Così, per esempio, se si dà un ellissoide riferito ai suoi assi, e se si pone

$$f=-1+\sum\frac{x^2}{a^2}\ ,\quad f_0=-1+\sum\frac{\xi^2}{a^2}\ ,\quad f_1=-1+\sum\frac{\xi x}{a^2}\ ,$$

si trova $F(t)=(f+f_0-2f_1)t^2-2(f_0-f_1)t+f_0$; e basta esprimere che il discriminante $ff_0-f_1^2$ di questa funzione di t è nullo, per ottenere l'equazione del cono circoscritto all'ellissoide:

$$\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)^2 .$$

b) Si chiama *tubo*, o superficie *canale*, l'inviluppo d'una semplice infinità di sfere uguali. Basta derivare l'equazione della sfera

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=R^2\ ,$$

supponendovi x, y, z funzioni dell'arco della linea centrale (luogo dei centri delle sfere inviluppate), per ottenere

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0\ , \tag{9}$$

ed accorgersi che *la caratteristica sta nel piano normale* della predetta linea. Ne segue che un tubo si può considerare come generato dalla circonferenza d'un circolo costante, il cui centro si va spostando sempre normalmente al piano del circolo stesso. All'equazione del tubo si giunge eliminando fra le due precedenti equazioni quell'unica variabile indipendente s, in funzione della quale si suppongono espressi x, y, z, a, b, c. In modo del tutto simile si procede per trovare l'inviluppo d'una qualsiasi infinità semplice di sfere, dopo avere scritto $-R\frac{dR}{ds}$ al posto di 0 nel secondo membro della (9). La caratteristica è dunque, in generale, un circolo (minore) della sfera, reale sol quando il valore assoluto di dR/ds non superi 1. In altri termini non esiste inviluppo reale quando la sfera si va dilatando o contraendo più rapidamente che non si sposti il suo centro. In particolare per $R=s+costante$ l'inviluppo si riduce ad una linea, sviluppante (§ 272) della linea centrale; e le sfere si comportano (*cfr.* § 227, *f*) come i circoli osculatori d'una curva piana. Invece le sfere osculatrici d'una curva storta sono inviluppate sempre da una superficie, luogo delle circonferenze osculatrici della curva stessa.

c) Proponiamoci di trovare l'inviluppo dei piani $\alpha x+\beta y+\gamma z=l$, nell'ipotesi che la distanza l sia legata ai coseni direttori α, β, γ mediante la relazione

$$\frac{\alpha^2}{l^2-a^2}+\frac{\beta^2}{l^2-b^2}+\frac{\gamma^2}{l^2-c^2}=0\ . \tag{10}$$

Qui i parametri sono α, β, γ, l, e soddisfano alla condizione (10) ed all'altra $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Si deve dunque (§ 278) considerare la matrice

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ x & y & z & 1 \\ \dfrac{\alpha}{l^2 - a^2} & \dfrac{\beta}{l^2 - b^2} & \dfrac{\gamma}{l^2 - c^2} & \sigma \end{Vmatrix},$$

nella quale si è posto, per brevità,

$$\sigma = \frac{l\alpha^2}{(l^2 - a^2)^2} + \frac{l\beta^2}{(l^2 - b^2)^2} + \frac{l\gamma^2}{(l^2 - c^2)^2} .$$

Mediante le solite trasformazioni si può alla matrice precedente sostituire l'altra

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{x}{\alpha}\sigma - \dfrac{1}{l^2 - a^2} & \dfrac{y}{\beta}\sigma - \dfrac{1}{l^2 - b^2} & \dfrac{z}{\gamma}\sigma - \dfrac{1}{l^2 - c^2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{l^2 - a^2} & \dfrac{1}{l^2 - b^2} & \dfrac{1}{l^2 - c^2} & \sigma \end{Vmatrix} .$$

Affinchè questa abbia nulli tutti i minori del terzo ordine bisogna che sia

$$\frac{x}{\alpha}\sigma - \frac{1}{l^2 - a^2} = \frac{y}{\beta}\sigma - \frac{1}{l^2 - b^2} = \frac{z}{\gamma}\sigma - \frac{1}{l^2 - c^2} .$$

Il comune valore di queste tre quantità si ottiene moltiplicando la prima per α^2, la seconda per β^2, la terza per γ^2, e sommando. In tal modo, ricordando la (10), si trova $l\sigma$, e però

$$x = l\alpha + \frac{1}{l^2 - a^2} \cdot \frac{\alpha}{\sigma} , \quad y = l\beta + \frac{1}{l^2 - b^2} \cdot \frac{\beta}{\sigma} , \quad z = l\gamma + \frac{1}{l^2 - c^2} \cdot \frac{\gamma}{\sigma} .$$

Quadrando e sommando si ottiene ancora

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 + \frac{2l}{\sigma}\sum \frac{\alpha^2}{l^2 - a^2} + \frac{1}{\sigma^2}\sum \frac{\alpha^2}{(l^2 - a^2)^2} = l^2 + \frac{1}{l\sigma} ,$$

e per conseguenza si potrà scrivere

$$x = \frac{l\alpha}{l^2 - a^2}\left(l^2 - a^2 + \frac{1}{l\sigma}\right) = \frac{l\alpha}{l^2 - a^2}(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) , \text{ ecc.} ;$$

quindi

$$\frac{x}{x^2+y^2+z^2-a^2} = \frac{l\alpha}{l^2-a^2} , \quad \frac{y}{x^2+y^2+z^2-b^2} = \frac{l\beta}{l^2-b^2} , \quad \frac{z}{x^2+y^2+z^2-c^2} = \frac{l\gamma}{l^2-c^2} .$$

Moltiplicando ancora per x, y, z, e sommando, si trova l'equazione

$$\sum \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} = \sum \frac{l\alpha x}{l^2 - a^2} = l^2 \sum \frac{\alpha^2}{l^2 - a^2} + \frac{1}{\sigma}\sum \frac{l\alpha^2}{(l^2 - a^2)^2} = 1 .$$

facilmente riducibile alla forma più semplice

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0 .$$

Dunque (§ 146, *d*) l'inviluppo cercato è la *superficie delle onde*.

280. Applicazione utile della precedente teoria, ed importante in quanto serve a completare la teoria delle curve, è la *ricerca degli inviluppi delle facce del triedro fondamentale* d'una curva qualunque. Se in ciascuna delle tre equazioni

$$\sum a(X-x)=0 \quad , \quad \sum \alpha(X-x)=0 \quad , \quad \sum \lambda(X-x)=0 ,$$

che rappresentano il piano *normale*, il piano *osculatore*, il piano *rettificante*, si considerano $x, y, \ldots, \nu$ come funzioni dell'arco s, soddisfacenti alle note (§ 239) relazioni

$$\frac{dx}{ds}=a \quad , \quad \frac{da}{ds}=\frac{\lambda}{\rho} \quad , \quad \frac{d\alpha}{ds}=\frac{\lambda}{\tau} \quad , \quad \frac{d\lambda}{ds}=-\frac{a}{\rho}-\frac{\alpha}{\tau} \quad , \text{ ecc. },$$

si ottiene rispettivamente, derivando,

$$\sum \lambda(X-x)=\rho \quad , \quad \sum \lambda(X-x)=0 \quad , \quad \sum l'(X-x)=0 , \tag{11}$$

dopo aver posto, per l'ultima,

$$l'=a\,\text{sen}\,\varphi+\alpha\cos\varphi \quad , \quad m'=b\,\text{sen}\,\varphi+\beta\cos\varphi \quad , \quad n'=c\,\text{sen}\,\varphi+\gamma\cos\varphi , \tag{12}$$

con $\text{tg}\,\varphi=\tau/\rho$. Dunque:

a) Come si poteva prevedere, i piani osculatori inviluppano la *sviluppabile delle tangenti*, ossia quella sviluppabile che ammette come spigolo di regresso la curva considerata;

b) L'inviluppo dei piani normali si chiama *sviluppabile polare*, ed è il *luogo degli assi dei circoli osculatori*. Evidentemente qualunque retta del piano normale, che generi una sviluppabile, non ne può toccare lo spigolo di regresso altrove che sull'asse del circolo osculatore. Ne segue subito che la sviluppabile polare d'una curva è anche il *luogo delle sviluppate* della curva stessa; e si può aggiungere, in virtù d'una precedente osservazione (§ 274, *a*), che le dette sviluppate *sono geodetiche* della sviluppabile polare. Per determinare lo spigolo di regresso di questa superficie bisogna derivare la prima delle (11). Si costituisce così il sistema

$$\sum a(X-x)=0 \quad , \quad \sum \lambda(X-x)=\rho \quad , \quad \sum \alpha(X-x)=-\tau\frac{d\rho}{ds} ,$$

che dà (§ 251) per X, Y, Z i valori ξ, η, ζ, coordinate del centro della sfera osculatrice. Dunque *lo spigolo di regresso della sviluppabile polare è il luogo dei centri delle sfere osculatrici;*

c) Finalmente la superficie inviluppata dai piani rettificanti, alla quale si dà il nome di *sviluppabile rettificante*, contiene la curva. Questa ne incontra le generatrici sotto un angolo, generalmente variabile, che dipende unicamente dal rapporto delle sue curvature. È chiaro che, su tale superficie, la curva considerata *è una geodetica*. Se poi, per determinare lo spigolo di regresso della sviluppabile rettificante d'una curva, si vuol conoscere il segmento t staccato da questa curva sulla generatrice, a partire dal detto spigolo, bisogna derivare la terza equazione (11). Così, osservando che, se l, m, n sono i coseni direttori della generatrice, per le (12) si ha $dl' = ld\varphi$, $dm' = md\varphi$, $dn' = nd\varphi$, si ottiene

$$\frac{d\varphi}{ds}\sum l(X - x) = \sum l'a = \operatorname{sen}\varphi ,$$

cioè $td\varphi = \operatorname{sen}\varphi . ds$, e si giunge a spiegare, fra le altre cose, perchè soltanto le eliche cilindriche (§ 256, *c*) ammettono superficie rettificanti cilindriche.

Curvatura.

281. **Teorema di Meusnier**. Prendiamo a studiare la flessione delle linee tracciate sopra una superficie, e consideriamo, in un punto M, una curva, la cui tangente abbia la direzione (a, b, c), e la cui normale principale faccia con la normale alla superficie l'angolo φ. Un punto M′ della curva, infinitamente vicino ad M, si projetti in P sul piano tangente, ed in Q sulla tangente. Quando si trascurano gli infinitesimi d'un ordine superiore al secondo, il punto M′ si può considerare (§ 246) come situato nel piano osculatore, dimodochè M′Q risulta parallelo alla normale principale, come M′P è parallelo alla normale, in M, alla superficie. Così, nel triangolo rettangolo M′PQ, l'angolo M′ è uguale a φ, il lato M′P ha (§ 264) la lunghezza

$$h = \frac{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}{2\sqrt{1 + p^2 + q^2}} ,$$

ed il lato M′Q è (§ 244) uguale a $d\sigma^2/2\rho$, rappresentando con $d\sigma$ il differenziale sostituibile alla lunghezza dell'arco MM′. Se i precedenti valori si sostituiscono nella relazione $M'P = M'Q . \cos\varphi$, si ottiene

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{ra^2 + 2sab + tb^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} . \tag{13}$$

Ora si considerino tutte le curve della superficie, tangenti fra loro nel facilmente riducibile alla forma più semplice

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+$$

Dunque (§ 146, *d*) l'inviluppo cercato è la *supe*

280. Applicazione utile della prece
quanto serve a completare la teoria dell
luppi delle facce del triedro fondamenta
ciascuna delle tre equazioni

$$\sum a(X-x)=0 \quad , \quad \sum \alpha(X-$$

che rappresentano il piano *norma*
cante, si considerano $x, y, \ldots,$
alle note (§ 239) relazioni

$$\frac{dx}{ds}=a \quad , \quad \frac{da}{ds}=\frac{\lambda}{\rho}$$

si ottiene rispettivamente,

$$\sum \lambda(X-x)=\rho$$

dopo aver posto, per l'ul

$$l'=a \operatorname{sen}\varphi+\alpha\cos\varphi$$

con $\operatorname{tg}\varphi=\tau/\rho$. Dunque

a) Come si po
luppabile delle
spigolo di regresso

b) L'invilu
ed è il *luogo de*
retta del piano
lo spigolo di
gue subito ch
sviluppabile
dente osser
sviluppabi
perficie

determin
re, e del
esembri

di qualunque curva
sul piano oscula
, che tocca la curva

normali sono i circoli massimi, ed i
curvatura. Ne segue, applicando il
in un punto d'una linea sferica, è la
oscula la curva nel punto considerato.
§ 251) che, per una curva qualunque, la
della sfera osculatrice col piano oscu-

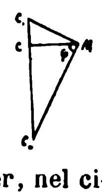
i paralleli sono generalmente sezioni
appartengono all'asse di rotazione; e poichè i
asse, anche i centri di curvatura delle se-
appartengono all'asse di rotazione. Per con-
punto M *d'una superficie di rotazione normal-*
curvatura, corrispondente al punto M, *sull'asse*

, e per tutte le curve della superficie
M, il secondo membro di (13) è nullo, e
relazione è soddisfatta dalle linee assin-
$\frac{1}{2}\pi$, mentre $1/\rho$ è generalmente diverso
curve tangenti, in M, ad una retta oscula-
piano tangente alla superficie, φ è diverso da
$=0$, come già si è visto, per altra via, nel
sezione fatta nella superficie mediante un
delle rette osculatrici in M, ha nulla la fles-
se si considera la sezione fatta nella super-
in M, si trova che *ciascun ramo della*
uale ai $^2/_3$ *della flessione dell'assinto-*
interessante teorema di Beltra-
intanto che il teorema di Meus-

53, p. 258. Vedi anche *Geometria intrinseca,*

' o toccano le rette osculatrici, sia perchè
·lla non è più applicabile, sia perchè
·nte in un punto, e tangenti fra

·detica. La quan-
normale, tangente alla
. normale, mentre a
·*a*. L'asse del circolo oscu-
·one in un punto C_0 (centro di
. curvatura geodetica) il
. . evidentemente misurate
. ·l MC_1 (raggi di curvatura
·ica). Si noti che la curvatura geo-
·ra della projezione della curva sul



·i virtù dello stesso teorema di Meusnier, nel ci-
·urva sul piano tangente, la curvatura della sezione
·lla curva stessa, è appunto senφ/ρ. Al concetto di cur-
·· di curvatura geodetica si è condotti nel modo più na-
· ·i analizza lo spostamento angolare della tangente. La ro-
·8) di questa verso la normale alla superficie è

$$\omega = \sum \mathfrak{L} d\alpha = \varepsilon \sum \mathfrak{L} \lambda = \varepsilon \cos\varphi \; .$$

. ·re la rotazione della medesima retta verso la perpendicolare che le
·i può condurre nel piano tangente, definita in direzione dai coseni $\mathfrak{L}'$,
$\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, è

$$\omega' = \sum \mathfrak{L}' d\alpha = \varepsilon \sum \mathfrak{L}' \lambda = \varepsilon \operatorname{sen}\varphi \; .$$

Lo spostamento angolare ε della tangente nello spazio si può dunque considerare come risultante dalle rotazioni ω ed ω', i cui rapporti a ds, cioè

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \; , \quad \frac{\omega'}{ds} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho} \; ,$$

sono appunto la curvatura normale e la curvatura geodetica. La prima serve, per conseguenza, a misurare l'inflessione più o meno grande della curva *fuori la superficie*, mentre la seconda serve, invece, a misurare la deviazione *sulla superficie*. È importante osservare che le linee *geodetiche* sono, in ogni punto, *a curvatura geodetica nulla*, mentre le *assintotiche* sono *a curvatura normale nulla*. In altri termini, quando un punto si muove lungo una geodetica, si può dire che la tangente alla curva percorsa si sposta sempre *normalmente alla superficie*. Invece tutto lo spopunto M, e si distingua, fra esse, quella che sta nel piano determinato dalla comune tangente (a, b, c) e dalla normale alla superficie, e che si chiama *sezione normale.* Per tutte queste curve il secondo membro di (13) ha un valore unico, e però si può dire altrettanto del primo. Ne segue che, se ρ_0 è il raggio di curvatura della sezione normale, si ha

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \quad , \quad \text{cioè} \quad \rho = \rho_0 \cos\varphi$$

supponendo ρ_0 finito. Dunque *il centro di curvatura di qualunque curva della superficie, in un punto* M, *si ottiene projettando sul piano osculatore il centro di curvatura di quella sezione normale, che tocca la curva in* M.

282. **Esempii:** *a)* Sulla sfera le sezioni normali sono i circoli massimi, ed il centro della sfera è il loro comune centro di curvatura. Ne segue, applicando il teorema di Meusnier, che *il centro di curvatura, in un punto d'una linea sferica, è la projezione del centro della sfera sul piano che oscula la curva nel punto considerato.* Questa proprietà risulta anche dal fatto (§ 251) che, per una curva qualunque, la circonferenza osculatrice è l'intersezione della sfera osculatrice col piano osculatore.

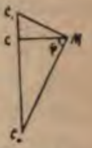
b) Sopra una superficie di rotazione i paralleli sono generalmente sezioni *oblique.* I loro centri di curvatura appartengono all'asse di rotazione; e poichè i loro piani sono perpendicolari a questo asse, anche i centri di curvatura delle sezioni normali, tangenti ai paralleli, appartengono all'asse di rotazione. Per conseguenza *la sezione piana, fatta in un punto* M *d'una superficie di rotazione normalmente al meridiano, ha il suo centro di curvatura, corrispondente al punto* M, *sull'asse di rotazione.*

283. Per una linea assintotica, e per tutte le curve della superficie che la toccano in un dato punto M, il secondo membro di (13) è nullo, e quindi si ha $\cos\varphi/\rho = 0$. Questa relazione è soddisfatta dalle linee assintotiche in ogni punto, perchè $\varphi = {}^1/_2\pi$, mentre $1/\rho$ è generalmente diverso da zero. Invece per tutte le curve tangenti, in M, ad una retta osculatrice, ma non osculate dal piano tangente alla superficie, φ è diverso da ${}^1/_2\pi$, e però si deve avere $1/\rho = 0$, come già si è visto, per altra via, nel § 264. Così, per esempio, ogni sezione fatta nella superficie mediante un piano, condotto per una sola delle rette osculatrici in M, ha nulla la flessione in questo punto. Invece, se si considera la sezione fatta nella superficie mediante il piano tangente in M, si trova che *ciascun ramo della sezione ha, in* M, *una flessione uguale ai* ${}^2/_3$ *della flessione dell'assintotica che la tocca nel detto punto.* Questo interessante teorema di Beltrami * sarà dimostrato nel § 305. Si vede intanto che il teorema di Meus-

* *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1865, p. 258. Vedi anche *Geometria intrinseca*, p. 174.

nier non è valido per le curve che toccano le rette osculatrici, sia perchè la costruzione geometrica che ne risulta non è più applicabile, sia perchè le infinite curve osculate dal piano tangente in un punto, e tangenti fra loro, *non hanno la medesima flessione.*

281. **Curvatura normale e curvatura geodetica.** La quantità $\cos\varphi/\rho$, che misura la curvatura della sezione normale, tangente alla curva che si considera, si chiama *curvatura normale,* mentre a $\operatorname{sen}\varphi/\rho$ si dà il nome di *curvatura geodetica.* L'asse del circolo osculatore incontra il piano della predetta sezione in un punto C_0 (centro di curvatura normale), ed in C_1 (centro di curvatura geodetica) il piano tangente: le due curvature sono evidentemente misurate dalle inverse delle lunghezze MC_0 ed MC_1 (raggi di curvatura normale e di curvatura geodetica). Si noti che la curvatura geodetica non è che la curvatura della projezione della curva sul piano tangente. Infatti, in virtù dello stesso teorema di Meusnier, nel cilindro che projetta la curva sul piano tangente, la curvatura della sezione normale, tangente alla curva stessa, è appunto $\operatorname{sen}\varphi/\rho$. Al concetto di curvatura normale e di curvatura geodetica si è condotti nel modo più naturale quando si analizza lo spostamento angolare della tangente. La rotazione (§ 238) di questa verso la normale alla superficie è



$$\omega = \sum \mathcal{L}da = \varepsilon \sum \mathcal{L}\lambda = \varepsilon\cos\varphi\ .$$

Invece la rotazione della medesima retta verso la perpendicolare che le si può condurre nel piano tangente, definita in direzione dai coseni $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$, è

$$\omega' = \sum \mathcal{L}'da = \varepsilon \sum \mathcal{L}'\lambda = \varepsilon \operatorname{sen}\varphi\ .$$

Lo spostamento angolare ε della tangente nello spazio si può dunque considerare come risultante dalle rotazioni ω ed ω', i cui rapporti a ds, cioè

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{\cos\varphi}{\rho}\ ,\quad \frac{\omega'}{ds} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\ ,$$

sono appunto la curvatura normale e la curvatura geodetica. La prima serve, per conseguenza, a misurare l'inflessione più o meno grande della curva *fuori la superficie*, mentre la seconda serve, invece, a misurare la deviazione *sulla superficie.* È importante osservare che le linee *geodetiche* sono, in ogni punto, *a curvatura geodetica nulla*, mentre le *assintotiche* sono *a curvatura normale nulla.* In altri termini, quando un punto si muove lungo una geodetica, si può dire che la tangente alla curva percorsa si sposta sempre *normalmente alla superficie.* Invece tutto lo spostamento angolare della tangente ad un'assintotica avviene sempre *tangenzialmente alla superficie.*

285. La curvatura d'una sezione normale è

$$\frac{1}{\rho}=\frac{ra^2+2sab+tb^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{14}$$

Per avere un'immagine geometrica del variare di ρ, quando la sezione rota intorno ad un punto M, poniamo l'origine in M, e dirigiamo l'asse delle z normalmente alla superficie, dimodochè $p=q=c=0$. Posto $a=\cos\theta$, e conseguentemente $b=\operatorname{sen}\theta$, la (14) diventa

$$\frac{1}{\rho}=r\cos^2\theta+2s\cos\theta\operatorname{sen}\theta+t\operatorname{sen}^2\theta\ . \tag{15}$$

Ora si porti su ciascuna tangente, a partire da M, un segmento misurato dalla radice quadrata del valore assoluto del corrispondente raggio di curvatura. L'estremo del raggio vettore così costruito ha, nel piano tangente, le coordinate $x=\sqrt{\pm\rho}.\cos\theta$, $y=\sqrt{\pm\rho}.\operatorname{sen}\theta$, che soddisfano, in virtù di (15), all'equazione $rx^2+2sxy+ty^2=\pm 1$. Dunque (§ 265) in ciascun punto *la curvatura delle sezioni normali varia* (da una sezione all'altra) *in ragione inversa del quadrato del corrispondente diametro dell'indicatrice di Dupin.* In particolare essa è nulla per le sezioni determinate dalle rette osculatrici, e raggiunge il minimo ed il massimo valore per le sezioni corrispondenti agli assi dell'indicatrice, le quali si chiamano le *sezioni principali.* Le curvature $1/\rho_1$ ed $1/\rho_2$ di queste sezioni sono le *curvature principali.*

286. **Teorema di Eulero.** Se riferiamo la figura agli assi dell'indicatrice, sparisce nella (15) il termine in $\cos\theta\operatorname{sen}\theta$; e siccome per $\theta=0$ dev'essere $\rho=\rho_1$, come per $\theta={}^1/_2\pi$ si deve avere $\rho=\rho_2$, si ha $1/\rho_1=r$, $1/\rho_2=t$, e conseguentemente

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\theta}{\rho_1}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\rho_2}\ .$$

Questo è il teorema di Eulero. Scritta la precedente uguaglianza nell'uno o nell'altro dei seguenti modi

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}=\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)\operatorname{sen}^2\theta\quad,\quad\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho}=\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)\cos^2\theta\ ,$$

e supposto, per fissare le idee, $1/\rho_1<1/\rho_2$, essa mostra immediatamente che si ha sempre

$$\frac{1}{\rho_1}\leqq\frac{1}{\rho}\leqq\frac{1}{\rho_2}\ .$$

Nei punti ellittici ρ_1 e ρ_2 sono dello stesso segno, vale a dire che i centri principali di curvatura, C_1 e C_2, si trovano da uno stesso lato del piano tangente; e poichè dall'ultima limitazione segue che ρ dev'essere compreso fra ρ_1 e ρ_2, si vede che *i centri di curvatura delle sezioni normali cadono tutti nel segmento* C_1C_2. Invece nei punti iperbolici il piano tangente separa C_1 da C_2, e ρ può essere positivo o negativo. Nel primo caso si ha $\rho \geqq \rho_2 > 0$, e nel secondo $\rho \leqq \rho_1 < 0$, sicchè *i centri di curvatura di tutte le sezioni normali cadono fuori del segmento* C_1C_2.

287. **Calcolo delle curvature principali.** I teoremi di Eulero e di Meusnier mostrano che *basta conoscere le due curvature principali*, in un punto M d'una superficie, *per conoscere la flessione di qualunque curva* tracciata per M sulla superficie, purchè non osculata dal piano tangente in M. Ha dunque importanza il saper *determinare i raggi principali di curvatura in un punto d'una superficie.* Per la formola (14) la questione si riduce a cercare il minimo ed il massimo del trinomio

$$ra^2 + 2sab + tb^2 ,$$

sapendo che fra le variabili a e b sussiste la relazione

$$(1 + p^2)a^2 + 2pqab + (1 + q^2)b^2 = 1 , \tag{16}$$

che si ottiene eliminando c fra $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ e la condizione di ortogonalità $pa + qb - c = 0$ della tangente con la normale alla superficie. Ripetendo qui un calcolo già eseguito (§ 145, c) in condizioni più generali, si è condotti a porre

$$ra + sb = k[(1 + p^2)a + pqb] , \quad sa + tb = k[pqa + (1 + q^2)b] ; \tag{17}$$

poi, eliminando k, si ottiene un'altra equazione in a e b, che serve, insieme alla (16), a determinare le direzioni degli assi dell'indicatrice, e per conseguenza le sezioni principali. Eliminando invece a e b si trova

$$\begin{vmatrix} r - k(1 + p^2) & s - kpq \\ s - kpq & t - k(1 + q^2) \end{vmatrix} = 0 ,$$

cioè

$$rt - s^2 - [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]k + (1 + p^2 + q^2)k^2 = 0 . \tag{18}$$

D'altra parte, moltiplicando la prima delle (17) per a, la seconda per b, e sommando, si ottiene

$$ra^2 + 2sab + tb^2 = k[(1 + p^2)a^2 + 2pqab + (1 + q^2)b^2] = k .$$

Dunque k, diviso per $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, rappresenta appunto il valore minimo o massimo di $1/\rho$; e poichè le radici k_1 e k_2 dell'equazione (18) sono legate dalle relazioni

$$k_1+k_2=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{1+p^2+q^2}\quad,\quad k_1k_2=\frac{rt-s^2}{1+p^2+q^2}\,,$$

si ha pure

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}\quad,\quad \frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}\,. \tag{19}$$

Son queste le formole che servono a far conoscere le curvature principali. Con un calcolo facile, posto

$$\mathfrak{L}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\quad,\quad \mathfrak{M}=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,,$$

si riconosce che alle (19) si può anche dar la forma più concisa

$$\mathrm{H}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}\quad,\quad \mathrm{K}=\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)}\,, \tag{20}$$

rappresentando con H e K, per conformarsi all'uso, la *somma* ed il *prodotto* delle curvature principali.

288. Fermiamoci un istante ad osservare che nelle formole (20) le derivazioni parziali sono da eseguire supponendo x ed y variabili indipendenti. Evidentemente si potrebbe anche, per esempio, esprimere H nell'uno o nell'altro dei seguenti modi:

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}\quad,\quad \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}\,.$$

Senonchè le derivate parziali rispetto ad una data variabile hanno significati differenti nelle tre espressioni. Se, per esempio, invece di z si vuol considerare y come funzione delle altre due variabili, supposte indipendenti, si ha, distinguendo mediante parentesi le derivate prese in questa ipotesi,

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\quad,\quad \frac{\partial}{\partial y}=q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

e però

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}=\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}\right).$$

Similmente

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{N})}{\partial(x,y)}=q\,\frac{\partial((\mathfrak{L},\mathfrak{N}))}{\partial((x,z))}\,;$$

quindi, eliminando le derivate di $\mathfrak{M}$ mediante le relazioni

$$p\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+q\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}=\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial x} \quad , \quad p\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial y}+q\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}=\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y} \; ,$$

si trova

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)}=\frac{1}{q}\,\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{N})}{\partial(x,y)}=\frac{\partial((\mathfrak{L},\mathfrak{N}))}{\partial((x,z))} \; .$$

289. **Curvatura media**. Si deve a Sofia Germain il concetto di *curvatura media*. Si chiama così la media aritmetica $^1/_2$H delle curvature principali. Per giustificare tale denominazione si osservi, in primo luogo, che se ρ e ρ' sono i raggi di curvatura di due sezioni normali qualunque, perpendicolari fra loro, si ha, per la formola di Eulero,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\theta}{\rho_1}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\rho_2} \quad , \quad \frac{1}{\rho'}=\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\rho_1}+\frac{\cos^2\theta}{\rho_2} \; ;$$

poi, sommando,

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=\mathrm{H} \; .$$

Ora consideriamo $2n$ tangenti, equamente distribuite intorno ad M; basta immaginarle associate per coppie di tangenti ortogonali per convincersi che, se si fa crescere n all'infinito, la *media aritmetica delle curvature normali* resta sempre uguale al valore di $^1/_2$H in M.

290. Le superficie a curvatura media *costante* hanno importanza nei fenomeni capillari, e sono state sperimentalmente realizzate da Plateau *. Particolarmente importanti sono poi le superficie a curvatura media *nulla*, cioè le superficie per le quali, in ogni punto, i raggi principali di curvatura sono uguali, ma diretti in sensi opposti: ciò equivale a dire che l'indicatrice di Dupin consta di due iperboli equilatere complementari, d'onde la seguente proprietà caratteristica: *le assintotiche si tagliano, in ogni punto, ad angolo retto*. Analiticamente queste superficie sono caratterizzate, in virtù della prima formola (19), dall'equazione differenziale

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0 \; .$$

Esse portano il nome di *superficie ad area minima*, o semplicemente superficie minime, perchè ogni contorno chiuso, tracciato sopra una simile superficie, ne stacca un'area minore di quella che lo stesso contorno stacca da ogni altra superficie: ciò sarà dimostrato in altra parte del Corso.

* Vedi, per esempio, il *Cours de physique*, di Jamin ($3^{\text{ème}}$ éd., t. I, p. 225), o il cap. IV delle *Leçons sur la capillarité*, di H. Poincaré. Vedi anche *Geometria intrinseca*, p. 101.

291. **Esempii:** *a)* Un esempio di superficie minima ci si presenta subito fra le superficie di rotazione. Presto vedremo che il meridiano passante per M è una delle sezioni principali; l'altra è tangente al parallelo, in M. I raggi principali di curvatura sono dunque il raggio di curvatura del meridiano ed il segmento (§ 282, *b*) staccato sulla normale, a partire da M, dall'asse di rotazione. Questi raggi debbono, in una superficie minima, essere diretti in sensi opposti, e però il meridiano deve rivolgere la convessità verso l'asse di rotazione. Esso deve inoltre esser tale che *il suo centro di curvatura sia simmetrico, rispetto al punto che si considera, del punto d'incontro della normale con una retta fissa.* Già si è visto (§ 196, *l*) che questa proprietà appartiene alla catenaria, e si vedrà in seguito che non può verificarsi in altre curve. Dunque *il catenoide* (§ 258) *è l'unica superficie minima di rotazione.*

b) Anche l'*elicoide a piano direttore* (§ 256, *b*) è di area minima. Infatti, poichè le generatrici sono le normali *principali* di un'elica circolare e di altre eliche (§ 259, *b*), in numero infinito, tracciate su cilindri concentrici, è chiaro che queste eliche costituiscono uno dei due sistemi di assintotiche, mentre l'altro è formato, come su qualunque rigata, dalle generatrici rettilinee. Constatata così l'ortogonalità dei due sistemi di assintotiche, resta dimostrato che la superficie è di area minima. Reciprocamente sopra una rigata minima un sistema di assintotiche è necessariamente costituito dalle trajettorie ortogonali delle generatrici, e però queste linee ammettono le generatrici stesse come normali *principali*, d'onde segue (§ 259, *b*) che ognuna di esse, avendo in comune le normali principali con infinite altre linee, è un'elica circolare. Dunque la superficie (costituita, come si vede, dalle normali principali di un'elica circolare) è un elicoide a piano direttore. In tal modo si giunge al seguente teorema di Catalan: *l'elicoide a piano direttore è l'unica rigata minima.*

292. **Curvatura totale.** A Gauss si deve il concetto di *curvatura totale.* Si chiama così il prodotto delle curvature principali:

$$\mathrm{K} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}\,. \tag{21}$$

L'analogia fra la curvatura totale delle superficie e la curvatura delle linee piane apparisce quando, supponendo data l'equazione della superficie sotto la forma $f(x, y, z) = 0$, si cerca di esprimere K mediante le successive derivate parziali di f. Si ha infatti, in virtù di note formole (§ 175),

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{(\Delta f)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}\,. \tag{22}$$

Così i punti parabolici delle superficie (§ 264) ci si presentano come gli analoghi dei punti d'inflessione delle curve piane, e la distinzione fra punti ellittici e punti iperbolici sta tutta nel segno di K. È bene sapere che una terza misura della curvatura

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^{\,2}}+\frac{1}{\rho_2^{\,2}}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{H}^2-\mathrm{K}$$

è stata proposta da Casorati come rispondente in modo più fedele delle altre al concetto volgare di curvatura. Ma non si attribuisca soverchia importanza alle discussioni sulla più conveniente misura della curvatura d'una superficie: ciò che importa è la conoscenza di entrambi i raggi ρ_1 e ρ_2, o, in loro vece, di due funzioni qualunque, tra loro indipendenti, dei raggi stessi; e le funzioni (19), mentre analiticamente ci si presentano nel modo più naturale, sono anche quelle che intervengono nelle più importanti questioni geometriche e meccaniche. Così, per esempio, supponiamo che, data una superficie, si voglia applicare su di essa un'altra superficie, considerata come una sottilissima membrana flessibile ma inestendibile. Gauss ha dimostrato * che occorre, perchè ciò sia possibile, che nei punti corrispondenti, cioè nei punti che vengono a coincidere quando una superficie si applica sull'altra, *le curvature totali siano uguali fra loro.* La curvatura totale rappresenta dunque qualche cosa di invariabile, di permanente, in ogni punto d'una superficie che si deforma per semplice flessione. Segue ancora dal teorema di Gauss che le sole superficie sulle quali è possibile (come sul piano e sulla sfera) trasportare da un posto ad un altro una figura qualunque, senza alterarne la forma, sono le superficie a curvatura totale costante, che si chiamano brevemente superficie *a curvatura costante*. È questa un'osservazione di grande importanza per lo studio dei postulati fondamentali della Geometria.

293. **Esempii**: *a)* Notevoli esempii di superficie a curvatura costante sono ancora forniti dalle superficie di rotazione. Sulla *sfera* di raggio a la curvatura è dappertutto uguale ad $1/a^2$; ma vi sono infinite altre superficie ** a curvatura totale costante, positiva o negativa. La *pseudosfera*, cioè la superficie generata da una trattrice (§ 227, *d*) che rota intorno all'assintoto, ha la curvatura totale, in ogni punto, uguale a $-1/a^2$, se a è la lunghezza (costante) della tangente fra il punto di contatto e l'assintoto. Sappiamo infatti che il centro di curvatura C_1 si projetta in T, al piede della tangente, sull'asse di rotazione, e che l'altro centro principale di curvatura, C_2, sta sull'asse; ed ora nel triangolo rettangolo TC_1C_2 si ha

$$MC_1 \,.\, MC_2 = MT^2 \;, \quad \text{cioè} \quad \rho_1\rho_2 = -a^2 \;.$$

* Vedi, per esempio, il *Calcul différentiel*, di Boussinesq, p. 298*.

** *Geometria intrinseca*, p. 178.

b) Le superficie applicabili per semplice flessione sul piano debbono essere a curvatura *nulla*, vale a dire tali che in tutti i punti si abbia $rt - s^2 = 0$; esse sono dunque (§ 276) le superficie sviluppabili. Secondo Casorati la sola superficie a curvatura nulla sarebbe il piano, mentre un cilindro circolare avrebbe la metà della curvatura d'una sfera dello stesso raggio. Tornando al concetto di Gauss, è importante notare che le geodetiche, in quanto segnano il più breve cammino fra due punti, restano tali nell'applicazione d'una superficie sopra un'altra, diguisachè, se una sviluppabile si applica sul piano, *le sue geodetiche si rettificano.* In particolare si rettifica qualunque curva quando se ne applica sul piano la sviluppabile rettificante (§ 280, *c*), vale a dire che per ogni curva si può far passare una sviluppabile tale, che, quando questa si applica sopra un piano, la curva si trasforma in una retta. Le sviluppate della curva (§ 280, *b*) si rettificano invece, tutte, quando si applica sul piano la sviluppabile polare. E qui vogliamo far notare che, siccome la sviluppabile polare di qualunque curva piana è un cilindro, le sviluppate d'una tal curva son sempre eliche cilindriche.

294. **Esercizii**: *a)* Per una quadrica a centro, riferita ai suoi assi, si può calcolare la curvatura totale mediante la formola (22) prendendo

$$f = {}^1/_2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

Prima si osservi che, essendo $\sum \frac{Xx}{a^2} = 1$ l'equazione del piano tangente, la distanza h di questo piano al centro è data dalla formola

$$\frac{1}{h^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \Delta f\,;$$

quindi la (22) dà

$$K = -\frac{h^4}{a^4 b^4 c^4}\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & a^2 & 0 & 0 \\ y & 0 & b^2 & 0 \\ z & 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{h^4}{a^2 b^2 c^2}.$$

Dunque (*cfr.* § 196, *h*) *nelle quadriche a centro la curvatura totale varia come la quarta potenza della distanza fra il piano tangente ed il centro.*

b) Proponiamoci di calcolare le curvature principali in un punto qualunque M d'una superficie sviluppabile. Le coordinate di M si possono porre sotto la forma $X = x + av$, $Y = y + bv$, $Z = z + cv$, dove a, b, c rappresentano i coseni direttori della generatrice, ed x, y, z le coordinate del punto Q, in cui la generatrice tocca lo spigolo di regresso. Queste sei quantità dipendono unicamente dall'arco u dello spigolo, mentre v, indipendente da u, rappresenta la lunghezza del segmento QM. Ciò premesso, poichè si sa (§ 270) che i coseni direttori della normale alla superficie son quelli α, β, γ della binormale di (Q), si vede subito che $p = -\alpha/\gamma$, $q = -\beta/\gamma$, d'onde si deduce

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{b}{v\gamma^2} \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{a}{v\gamma^2} \, ,$$

cioè

$$ra + sb = sa + tb = 0 \quad , \quad r\lambda + s\mu = -\frac{\rho b}{v v\gamma^2} \quad , \quad s\lambda + t\mu = \frac{\rho a}{v v\gamma^2} \, ;$$

quindi

$$r = -\frac{\rho b^2}{v v\gamma^3} \quad , \quad s = \frac{\rho a b}{v v\gamma^3} \quad , \quad t = -\frac{\rho a^2}{v v\gamma^3} \, .$$

La (21) dà $K = 0$: ciò era da prevedere, sia perchè già si è visto (§ 276) che in tutti i punti d'una sviluppabile è $rt - s^2 = 0$, sia perchè il coincidere dei due sistemi di assintotiche nell'unico sistema delle generatrici ci dice che una delle sezioni principali, in un punto qualunque M, è la generatrice stessa che passa per M, giacchè le tangenti a tali sezioni debbono dividere per metà gli angoli delle rette osculatrici. Dunque una delle curvature è nulla: l'altra è data dalla prima formola (19), ed è

$$\frac{1}{R} = -\left|(1-\beta^2)a^2 + 2\alpha\beta ab + (1-\alpha^2)b^2\right| \frac{\rho}{v v\gamma^2} = -(1 - c^2 - \nu^2)\frac{\rho}{v v\gamma^2} = -\frac{\rho}{v v} \, ,$$

sicchè $R = -v \operatorname{tg}\varphi$, dove φ è l'angolo di cui deve rotare, in un senso già definito (§ 280), la tangente allo spigolo di regresso, per coincidere con la generatrice della sviluppabile rettificante; e poichè la lunghezza R va portata nel senso positivo della binormale, si vede che *i centri di curvatura normale delle trajettorie ortogonali delle generatrici d'una sviluppabile appartengono alla sviluppabile rettificante dello spigolo di regresso.* Alla medesima conclusione si giunge anche osservando che la generatrice della sviluppabile rettificante dello spigolo di regresso è in pari tempo (§§ 274, *a*; 280, *b*, *c*) l'asse dei circoli osculatori di tutte le trajettorie ortogonali, d'onde si deduce, invocando il teorema di Meusnier, che la detta generatrice incontra i piani perpendicolari alla generatrice della prima sviluppabile nei centri di curvatura delle corrispondenti sezioni, lungo la generatrice stessa.

295. Terminiamo generalizzando le formole (19) in guisa da renderle immediatamente applicabili al caso che x, y, z siano date in funzione di due variabili indipendenti u, v. Richiamiamo le formole finali del § 261

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \, , \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \, , \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, , \qquad (23)$$

nelle quali

$$a = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \quad , \quad b = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \quad , \quad c = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \, .$$

Essendo

$$\frac{\partial(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{N}} \frac{\partial(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})}{\partial(u, v)} \, , \text{ ecc.}$$

si ha pure, per la seconda formola (20),

$$\sqrt{ab-c^2}\,.\,\mathrm{K}=\frac{1}{\mathcal{L}}\,\frac{\partial(\mathcal{M},\mathcal{N})}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\mathcal{M}}\,\frac{\partial(\mathcal{N},\mathcal{L})}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\mathcal{N}}\,\frac{\partial(\mathcal{L},\mathcal{M})}{\partial(u,v)}\,.$$

Moltiplicando queste tre espressioni rispettivamente per $\mathcal{L}^2, \mathcal{M}^2, \mathcal{N}^2$, e sommando, si ottiene

$$\sqrt{ab-c^2}\,.\,\mathrm{K}=\mathcal{L}\,\frac{\partial(\mathcal{M},\mathcal{N})}{\partial(u,v)}+\mathcal{M}\,\frac{\partial(\mathcal{N},\mathcal{L})}{\partial(u,v)}+\mathcal{N}\,\frac{\partial(\mathcal{L},\mathcal{M})}{\partial(u,v)}\,, \tag{24}$$

ossia

$$\sqrt{ab-c^2}\,.\,\mathrm{K}=\begin{vmatrix} \mathcal{L} & \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} & \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \\ \mathcal{M} & \dfrac{\partial\mathcal{M}}{\partial u} & \dfrac{\partial\mathcal{M}}{\partial v} \\ \mathcal{N} & \dfrac{\partial\mathcal{N}}{\partial u} & \dfrac{\partial\mathcal{N}}{\partial v} \end{vmatrix}\,.$$

La (24) si può anche trasformare in modo da far comparire esplicitamente, nell'espressione di K, le derivate parziali prime e seconde di x, y, z rispetto ad u, v. Ponendola sotto la forma

$$(ab-c^2)\mathrm{K}=\sum\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,\frac{\partial(\mathcal{M},\mathcal{N})}{\partial(u,v)}\,,$$

si riconosce subito che il secondo membro è il prodotto delle matrici

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{Vmatrix}\,,\quad \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} & \dfrac{\partial\mathcal{M}}{\partial u} & \dfrac{\partial\mathcal{N}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} & \dfrac{\partial\mathcal{M}}{\partial v} & \dfrac{\partial\mathcal{N}}{\partial v} \end{Vmatrix}\,.$$

D'altra parte, se si esegue la moltiplicazione, e se si tien conto delle uguaglianze ottenute derivando parzialmente le condizioni di ortogonalità

$$\sum\mathcal{L}\frac{\partial x}{\partial u}=0\,,\quad \sum\mathcal{L}\frac{\partial x}{\partial v}=0\,,$$

si trova che gli elementi del determinante prodotto sono

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=-\sum\mathcal{L}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=-\frac{\mathcal{A}}{\sqrt{ab-c^2}}\,,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}=-\sum\mathcal{L}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=-\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{ab-c^2}}\,,$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=-\sum\mathcal{L}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=-\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{ab-c^2}}\,,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}=-\sum\mathcal{L}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-\frac{\mathcal{B}}{\sqrt{ab-c^2}}\,,$$

per brevità si è posto

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix} , \quad \mathcal{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix} , \quad \mathcal{C} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} .$$

que

$$K = \frac{\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{C}^2}{(ab - c^2)^2} . \tag{25}$$

286. Similmente per calcolare H partiamo dalla prima formola (20), ibiando il segno del secondo membro affinchè i coseni $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ siano si col segno che vien loro dalle (23) per $u = x$, $v = y$. Evidentemente

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} = \frac{\partial(\mathcal{L}, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\mathcal{M}, x)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \cdot \frac{1}{\mathcal{N}} \left[\frac{\partial(\mathcal{L}, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathcal{M}, x)}{\partial(u, v)} \right] , \text{ ecc.};$$

ndi $\sqrt{ab - c^2}$. H si può esprimere mediante una qualunque delle tre erenze

$$\frac{\partial(\mathcal{N}, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathcal{M}, z)}{\partial(u, v)} , \quad \frac{\partial(\mathcal{L}, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathcal{N}, x)}{\partial(u, v)} , \quad \frac{\partial(\mathcal{M}, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathcal{L}, y)}{\partial(u, v)} ,$$

pettivamente divise per $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$. Ne segue, moltiplicando per $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{N}^2, \mathcal{M}^2$, e sommando,

$$\sqrt{ab - c^2} \,.\, H = \sum \mathcal{L} \left[\frac{\partial(\mathcal{N}, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathcal{M}, z)}{\partial(u, v)} \right] ,$$

vero

$$\sqrt{ab - c^2} \,.\, H = \sum \left[\left(\mathcal{M} \frac{\partial z}{\partial v} - \mathcal{N} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \left(\mathcal{M} \frac{\partial z}{\partial u} - \mathcal{N} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right] .$$

anto un calcolo facile dà

$$- \mathcal{N} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \left(c \frac{\partial x}{\partial v} - b \frac{\partial x}{\partial u} \right) , \quad \mathcal{M} \frac{\partial z}{\partial u} - \mathcal{N} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \left(a \frac{\partial x}{\partial v} - c \frac{\partial x}{\partial u} \right) ,$$

mque

$$(ab - c^2) H = \sum \left[- b \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - a \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} + c \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right) \right] ,$$

inalmente

$$H = \frac{\mathcal{A} b + \mathcal{B} a - 2 \mathcal{C} c}{(ab - c^2)^{3/2}} . \tag{26}$$

È facile verificare che le formole (25) e (26) si riducono alle (19) per $u=x$, $v=y$, giacchè in questa ipotesi le funzioni $a, b, c, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ diventano $1+p^2, 1+q^2, pq, r, t, s$.

Determinazione e proprietà delle linee notevoli d'una superficie.

297. **Linee di curvatura; ombelichi.** Per determinare le linee di curvatura (§ 266) d'una superficie data, si ha, eliminando k fra le (17),

$$\frac{(1+p^2)dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)dy}{s\,dx+t\,dy}, \tag{27}$$

cioè

$$\left(\frac{r}{1+p^2}-\frac{s}{pq}\right)\frac{dx^2}{1+q^2}-\left(\frac{t}{1+q^2}-\frac{r}{1+p^2}\right)\frac{dx\,dy}{pq}+\left(\frac{s}{pq}-\frac{t}{1+q^2}\right)\frac{dy^2}{1+p^2}=0, \tag{28}$$

d'onde, immaginando espresse le funzioni p, q, r, s, t nelle sole variabili indipendenti x ed y, si ricavano due equazioni

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y)\quad,\quad\frac{dy}{dx}=\psi(x,y)\ ; \tag{29}$$

e da queste, considerate separatamente, si potrà risalire, nel modo che verrà spiegato verso la fine del Corso, alle equazioni di due famiglie di cilindri paralleli all'asse z, i quali tagliano la superficie secondo le sue linee di curvatura. Si osservi che, se le coordinate x, y, z d'un punto M della superficie soddisfano anche alle altre due equazioni

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}, \tag{30}$$

e solo in questa ipotesi, la (28) è soddisfatta identicamente, sicchè in M concorrono infinite linee di curvatura. Siffatti punti, che si chiamano *ombelichi*, sono generalmente in numero finito; ma possono anche formare linee della superficie: ciò avviene quando le (30) si riducono ad una sola equazione. L'indeterminazione della direzione delle tangenti alle linee di curvatura, in un ombelico, non può esser dovuta ad altro che all'indeterminazione della coppia degli assi nell'indicatrice di Dupin, cioè all'esser questa un circolo. Ne segue (§ 265) che intorno agli ombelichi la superficie si comporta come una sfera, perchè spostando infinitamente poco il piano tangente, perpendicolarmente alla normale, si determinano nella superficie sezioni circolari infinitesime. Ciò permette di veder subito che sopra un ellissoide, per esempio, si hanno quattro ombelichi reali, che sono gli estremi dei diametri conjugati alle due serie di sezioni circolari. Del resto si può verificare che le condizioni (30) equivalgono appunto all'unica $\rho_1=\rho_2$, giacchè dalle (19) si trae, con un calcolo facile,

$$\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)^2$$
$$=\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^3}\left[(1+p^2+q^2)\left(\frac{r}{1+p^2}-\frac{t}{1+q^2}\right)^2+p^2q^2\left(\frac{r}{1+p^2}+\frac{t}{1+q^2}-\frac{2s}{pq}\right)^2\right],$$

e si vede che per l'eguaglianza $\rho_1=\rho_2$ le (30) sono sufficienti e necessarie.

298. Le normali condotte ad una superficie lungo una curva qualunque costituiscono una rigata generalmente gobba, che chiamasi *normalia*. Fra le infinite normalie, che passano per un punto, quante e quali sono sviluppabili? La condizione necessaria e sufficiente perchè la normale in M generi una sviluppabile, quando M si sposta sulla superficie data, è (§ 268)

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx \\ q & dq & dy \\ -1 & 0 & dz \end{vmatrix}=0 .$$

Il determinante scritto nel primo membro è uguale a

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx+pdz \\ q & dq & dy+qdz \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} dx+pdz & dp \\ dy+qdz & dq \end{vmatrix} .$$

Dunque dev'essere

$$\frac{dx+pdz}{dp}=\frac{dy+qdz}{dq}\,; \tag{31}$$

ma questa eguaglianza non differisce dalla (27), come si riconosce subito osservando che

$$dz=pdx+qdy\quad,\quad dp=rdx+sdy\quad,\quad dq=sdx+tdy\ .$$

Passano dunque per ogni punto della superficie due normalie sviluppabili, le cui tracce sulla superficie sono appunto le linee di curvatura. Gli spigoli di regresso di tutte queste normalie formano una superficie a due falde, che si può anche considerare come il *luogo di tutti i centri principali di curvatura*. Questa seconda superficie è dunque, rispetto alla prima, l'analoga della sviluppata * d'una curva. La precedente proprietà caratteristica delle linee di curvatura si può enunciare dicendo che *ogni linea di curvatura è trajettoria ortogonale delle generatrici sopra una sviluppabile, costituita da normali alla superficie*, ed aggiungendo che tale proprietà non appartiene ad altre linee. Da ciò è facile dedurre, ricordando un precedente teorema (§ 274, *b*), che una curva, quando è linea

* Per le principali proprietà delle sviluppate delle superficie vedi *Geometria intrinseca*, p. 170.

di curvatura sopra una superficie, conserva questo suo carattere su tutte le superficie che tagliano la data, lungo la curva stessa, sotto un angolo costante. Ne segue, in particolare, che, *quando un piano taglia una superficie sotto un angolo costante, l' intersezione è necessariamente linea di curvatura*; ed inversamente, *se una linea di curvatura è piana, il suo piano taglia la superficie sotto un angolo costante.* Altrettanto si può affermare, più generalmente, per le curve sferiche, giacchè sopra una sfera ogni curva è linea di curvatura.

299. **Formole di Rodrigue**. La condizione perchè il punto (x,y,z) generi una linea di curvatura, sopra una data superficie, si può immediatamente scrivere esprimendo che il piano normale alla linea considerata deve (§ 274, *a*) coincidere col piano rettificante d' una sviluppata di questa linea, le cui tangenti sono normali alla superficie, sicchè si deve avere

$$\frac{dx}{d\mathfrak{L}}=\frac{dy}{d\mathfrak{M}}=\frac{dz}{d\mathfrak{N}}\,. \tag{32}$$

Son queste le *formole di Rodrigue*, che si riducono ad una sola se si tien conto della condizione di perpendicolarità $\mathfrak{L}dx+\mathfrak{M}dy+\mathfrak{N}dz=0$. Inversamente, quando le (32) sono soddisfatte, si ha pure

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{L} & d\mathfrak{L} & dx \\ \mathfrak{M} & d\mathfrak{M} & dy \\ \mathfrak{N} & d\mathfrak{N} & dz \end{vmatrix}=0\,,$$

vale a dire (§ 268) che la normale alla superficie genera una sviluppabile, e però il punto (x,y,z) si sposta lungo una linea di curvatura. Del resto le (32) si possono anche trarre dall' ultima condizione, poichè questa, elevata al quadrato, si riduce facilmente alla forma

$$(d\mathfrak{N}\,dy-d\mathfrak{M}\,dz)^2+(d\mathfrak{L}\,dz-d\mathfrak{N}\,dx)^2+(d\mathfrak{M}\,dx-d\mathfrak{L}\,dy)^2=0\,,$$

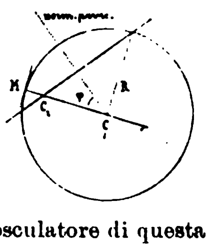
e si spezza quindi nelle (32). È poi facile vedere che il comune valore dei rapporti (32) rappresenta, a prescindere dal segno, il corrispondente raggio principale di curvatura. Finalmente dalle formole di Rodrigue si passa alla condizione (31) differenziando $\mathfrak{L}=-\mathfrak{N}p$, $\mathfrak{M}=-\mathfrak{N}q$, ed osservando che $d\mathfrak{L}+pd\mathfrak{N}$, $d\mathfrak{M}+qd\mathfrak{N}$, e per conseguenza anche $dx+pdz$, $dy+qdz$, sono proporzionali a dp, dq.

300. **Esempii:** *a)* Sulle superficie di rotazione le linee di curvatura sono i *meridiani* ed i *paralleli*. Infatti le normali alla superficie, lungo ciascun meridiano, stanno nel piano del meridiano, e le normali lungo un parallelo concorrono sull' asse di rotazione. Più semplicemente basta osservare che il piano di qualunque meridiano o parallelo incontra la superficie ad angolo costante. Del resto, quando si è trovato uno dei due sistemi di linee di curvatura, l' altro è determinato dalla

condizione che le sue linee incontrino ortogonalmente quelle del primo. Ai due sistemi di linee corrispondono le due falde della sviluppata, delle quali una è generata dalla rotazione della sviluppata del meridiano intorno al medesimo asse, e l'altra si riduce (§ 282, *b*) a questa sola retta. Per esempio un catenoide costituisce, insieme all'asse di rotazione, la sviluppata d'una pseudosfera.

b) Sopra una sviluppabile ogni *generatrice* è linea di curvatura (§ 294, *b*) perchè le normali alla superficie, lungo una generatrice, stanno in un piano. Se le generatrici si fanno rotare d'un angolo retto intorno ad una loro *trajettoria ortogonale*, esse diventano normali alla superficie senza cessare (§ 271, *b*) di costituire una sviluppabile; e si riconosce così, direttamente, che le trajettorie ortogonali delle generatrici formano l'altro sistema di linee di curvatura. La sviluppata ha poi una falda all'infinito, e l'altra (§ 294, *b*) è la sviluppabile rettificante dello spigolo di regresso.

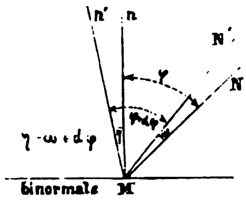
c) Su qualunque inviluppo d'una semplice infinità di sfere le *caratteristiche* sono linee di curvatura, giacchè (§ 275) lungo ciascuna di esse le normali alla superficie sono i raggi stessi della sfera inviluppata, i quali concorrono nel centro C_1. Ne segue che uno dei due centri principali di curvatura è C_1; l'altro si determina facilmente, nel caso d'un tubo (§ 279, *b*), osservando che appartiene allo spigolo di regresso della sviluppabile generata *da una normale* alla linea centrale, e che per conseguenza (§ 280, *b*) deve stare sull'asse del circolo osculatore di questa linea. I raggi principali di curvatura sono dunque



$$\rho_1 = R \quad , \quad \rho_2 = R - \frac{\rho}{\cos\varphi} \, ,$$

come si può anche stabilire con soli calcoli, facendo uso delle (19) e ponendo $\Sigma\lambda(X - x) = \cos\varphi$, o più semplicemente prendendo $u = s$, $v = \varphi$, e servendosi delle formole (25) e (26). Osserviamo, per finire, che la sviluppata d'un tubo è costituita dalla sviluppabile polare della linea centrale e da questa linea stessa.

301. **Torsione geodetica**. La proprietà caratteristica delle linee di curvatura, trovata nel § 298, è intimamente connessa al concetto di *torsione geodetica*, introdotto da Bertrand per dar la misura della deviazione angolare del piano tangente, intorno ad una tangente, quando il punto di contatto si sposta nella direzione della tangente stessa. È naturale assumere come misura di tale deviazione il rapporto a $d\sigma$ (differenziale dell'arco) dell'angolo di cui rota la projezione, sul piano normale, della normale alla superficie, angolo (§ 273) già trovato uguale ad $\eta - d\varphi$. È questo rapporto



$$\tau = \frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{d\sigma}$$

che si chiama torsione geodetica. Evidentemente la proprietà caratteristica, accennata in principio, si può esprimere dicendo che le linee di curvatura sono, in ogni punto, *a torsione geodetica nulla*. La torsione geodetica rappresenta dunque, per le linee di curvatura, qualche cosa di analogo a ciò che la curvatura normale (§ 284) è per le assintotiche; ed entrambe restano invariate, in ciascun punto, per tutte le curve che ammettono la stessa tangente, mentre la curvatura geodetica varia, per queste curve, insieme alla posizione del piano osculatore. Vedremo inoltre che vi è analogia fra le leggi che reggono le variazioni della curvatura normale e quelle che presiedono al variare della torsione geodetica nelle infinite direzioni intorno ad un punto, in quanto che l'una e l'altra son misurate da funzioni quadratiche omogenee dei coseni che definiscono tali direzioni.

302. Ed infatti, se con a', b', c' si rappresentano i coseni direttori della tangente alla superficie, perpendicolare a quella che si considera, è chiaro che, essendo

$$\mathfrak{L} = \alpha \operatorname{sen} \varphi + \lambda \cos \varphi \quad , \quad a' = \alpha \cos \varphi - \lambda \operatorname{sen} \varphi \ , \ \text{ecc.}$$

si ha

$$\frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma} = -\frac{a}{\rho} \cos \varphi - a'\tau \ , \quad \frac{d\mathfrak{M}}{d\sigma} = -\frac{b}{\rho} \cos \varphi - b'\tau \ , \quad \frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} = -\frac{c}{\rho} \cos \varphi - c'\tau . \tag{33}$$

Queste sono, per così dire, le formole di Frenet (*cfr.* § 238) relative alla terna di direzioni, definita dal determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} a & a' & \mathfrak{L} \\ b & b' & \mathfrak{M} \\ c & c' & \mathfrak{N} \end{vmatrix} = 1 .$$

Moltiplicando le (33) una volta per a, b, c, ed un'altra per a', b', c', si ottiene, sommando,

$$\frac{\cos \varphi}{\rho} = -\sum a \frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma} \ , \quad \tau = -\sum a' \frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma} .$$

Ora, poichè $\mathfrak{L} = -\mathfrak{N}p$, $\mathfrak{M} = -\mathfrak{N}q$, dove $\mathfrak{N} = 1/\sqrt{1+p^2+q^2}$, se si tien conto delle condizioni di ortogonalità $pa + qb = c$, $pa' + qb' = c'$, le ultime formole diventano

$$\frac{\cos \varphi}{\rho} = a\left(p\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dp}{d\sigma}\right) + b\left(q\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dq}{d\sigma}\right) - c\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} = \mathfrak{N}\left(a\frac{dp}{d\sigma} + b\frac{dq}{d\sigma}\right),$$

$$\tau = a'\left(p\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dp}{d\sigma}\right) + b'\left(q\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dq}{d\sigma}\right) - c'\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} = \mathfrak{N}\left(a'\frac{dp}{d\sigma} + b'\frac{dq}{d\sigma}\right).$$

La prima formola non differisce dalla (13), della quale abbiamo così un'altra dimostrazione; la seconda ci dà

$$\tau = \frac{raa' + s(ab' + ba') + tbb'}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} ; \qquad (34)$$

e questa si può porre sotto una forma analoga alla (13) osservando che

$$\begin{aligned} a' &= \mathcal{M}c - \mathcal{N}b = -\mathcal{N}(b + qc) = -\mathcal{N}[pqa + (1 + q^2)b] , \\ b' &= \mathcal{N}a - \mathcal{L}c = \mathcal{N}(a + pc) = \mathcal{N}[(1 + p^2)a + pqb] . \end{aligned}$$

Così si ottiene

$$\tau = \frac{-(ra + sb)[pqa + (1 + q^2)b] + (sa + tb)[(1 + p^2)a + pqb]}{1 + p^2 + q^2} :$$

e si ricade sulla condizione (27), caratteristica delle linee di curvatura, quando si pone $\tau = 0$.

303. Per la ricerca delle proprietà di τ è più comodo l'uso della (34):

a) Una prima proprietà si scopre subito osservando che, se alla direzione (a, b, c) si sostituisce (a', b', c'), a questa bisogna sostituire la direzione $(-a, -b, -c)$, dimodochè τ non fa che cambiar segno. Dunque due linee d'una superficie, che s'incontrano ad angolo retto, hanno, nel punto d'incontro, torsioni geodetiche opposte nel segno, ma uguali in valore assoluto;

b) Se (a_1, b_1, c_1) ed (a_2, b_2, c_2) sono le direzioni delle tangenti alle linee di curvatura, si può sempre porre

$$\begin{aligned} a &= a_1 \cos\theta + a_2 \operatorname{sen}\theta , \quad & a' &= -a_1 \operatorname{sen}\theta + a_2 \cos\theta , \\ b &= b_1 \cos\theta + b_2 \operatorname{sen}\theta , \quad & b' &= -b_1 \operatorname{sen}\theta + b_2 \cos\theta . \end{aligned}$$

Sostituendo in (34) questi valori, ed osservando che

$$ra_1a_2 + s(a_1b_2 + a_2b_1) + tb_1b_2 = 0 ,$$

si ottiene la formola

$$\tau = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) \operatorname{sen}\theta \cos\theta , \qquad (35)$$

che mostra chiaramente come varia τ intorno a ciascun punto;

c) Se al prodotto delle curvature normali nelle direzioni (a, b, c) ed (a', b', c') si aggiunge il prodotto delle torsioni geodetiche nelle medesime direzioni, dopo avere osservato che l'espressione

$$(ra^2 + 2sab + tb^2)(ra'^2 + 2sa'b' + tb'^2) - [raa' + s(ab' + ba') + tbb']^2$$

si riduce identicamente ad $(rt - s^2)\mathcal{N}^2$, si ottiene l'importante formola

$$K = \frac{1}{\rho\rho'} - \tau^2 , \qquad (36)$$

che si può anche stabilire servendosi dell'espressione (35) di τ, e della formola di Eulero. Scrivendo infatti quest'ultima nei due modi indicati nel § 286, si ottiene subito, moltiplicando,

$$\tau^2=\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{1}{\rho^2}+\frac{H}{\rho}-K=\frac{1}{\rho\rho'}-K .$$

301. **Linee assintotiche; teoremi di Enneper e di Beltrami.** La ricerca delle assintotiche è fondata sull'equazione

$$rdx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0 , \tag{37}$$

esprimente che la curvatura normale di simili curve è nulla. La medesima equazione esprime anche l'ortogonalità della normale principale con la normale alla superficie, giacchè il primo membro è identicamente uguale a $-pd^2x-qd^2y+d^2z$. La (37) si può dunque scrivere in forma più generale così:

$$\mathfrak{L}d^2x+\mathfrak{M}d^2y+\mathfrak{N}d^2z=0 .$$

Quando x, y, z sono date in funzione di due variabili indipendenti u, v, se si osserva che

$$d^2x=\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 , \text{ ecc.}$$

l'ultima equazione diventa

$$\mathfrak{A}du^2+2\mathfrak{C}du\,dv+\mathfrak{B}dv^2=0 , \tag{38}$$

dove $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ hanno il significato stabilito in fine del § 295. Si vedrà in seguito che l'equazione (37) caratterizza (come la (28), che ha la stessa forma) due semplici infinità di superficie, le quali intersecano la data superficie lungo le linee assintotiche. Del resto, per fare lo studio di queste linee, sopra una superficie data, non è indispensabile conoscere le loro equazioni, perchè, note le curvature principali della superficie, si hanno formole per calcolare le curvature delle assintotiche. Noi non potremmo qui dimostrare, senza uscire dai limiti imposti a questo Corso, la formola * di Bonnet, che dà la *flessione* delle assintotiche espressa mediante ρ_1 e ρ_2; ma è facile dedurre dalla (36) il seguente teorema di Enneper: *la torsione delle assintotiche si calcola estraendo la radice quadrata della curvatura totale, cambiata di segno.* Infatti per le assintotiche, come per tutte le curve che hanno le normali principali ugualmente inclinate sulle normali alla superficie (e quindi anche per le geodetiche), la torsione geodetica non differisce dalla torsione assoluta; e però, essendo $1/t=\tau$, $1/\rho=0$, la formola (36) dà $t=\pm\sqrt{-\rho_1\rho_2}$.

* *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1865, p. 268.

305. Dimostriamo, per finire, il *teorema di Beltrami*, enunciato nel § 283. Si ponga l'origine in un punto qualunque M della superficie; si prenda, nel piano tangente, la tangente ad un'assintotica come asse delle x, e la normale principale come asse delle y, conducendo l'asse delle z (normale alla superficie) nella direzione *negativa* della binormale. Le formole (19), trovate nel § 211, sono applicabili a qualunque curva, tangente all'assintotica ed osculata in M dal piano tangente alla superficie; sicchè, se x, y, z sono le coordinate $(u, w, -v)$ d'un punto M', infinitamente prossimo ad M sulla curva che si considera, si ha

$$\lim \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2\rho} \quad , \quad \lim \frac{z}{x^3} = \frac{1}{6\rho\tau} \ .$$

In particolare queste formole valgono per l'assintotica, quando per ρ ed τ si pongono i valori ρ_0 ed τ_0 che questi raggi hanno sull'assintotica, in M. D'altra parte all'equazione della superficie si può, intorno ad M, dar la forma

$$z = {}^1/_2(rx^2 + 2sxy + ty^2) + kx^3 + \dots \ .$$

Siccome, per ipotesi, una delle rette osculatrici è l'asse delle x, si ha $r = 0$. Inoltre la (34) dà * $s = 1/\tau_0$; quindi, se si fa tendere M' ad M,

$$k = \lim \frac{z}{x^3} - \frac{1}{\tau_0} \lim \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{1}{3\tau} - \frac{1}{\tau_0}\right) .$$

In particolare, se M' tende ad M lungo l'assintotica, $k = -1/3\rho_0\tau_0$. Dal confronto fra i due valori di k segue l'interessante formola di Bonnet

$$2\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\tau_0}{\tau} = 3 \ ,$$

che racchiude come caso particolare $(\tau = \infty)$ il teorema di Beltrami.

306. **Linee geodetiche; formole di Weingarten.** La definizione (§ 266) delle geodetiche d'una superficie si traduce immediatamente nelle equazioni

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} : \mathfrak{L} = \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} : \mathfrak{M} = \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} : \mathfrak{N} \ , \tag{39}$$

in cui s è la lunghezza dell'arco. Si noti che queste due equazioni si riducono in realtà ad una sola, giacchè

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = 0 \quad , \quad \sum \mathfrak{L}\frac{dx}{ds} = 0 \ .$$

Del resto ad una sola equazione si perviene se, invece di esprimere che la

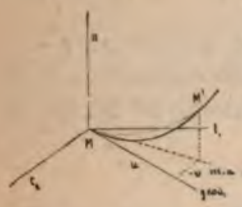
---

* Con questi valori di r e di s resta nuovamente dimostrato il teorema di Enneper, giacchè $K = rt - s^2 = -1/\tau_0^2$.

normale principale coincide con la normale alla superficie, si scrive che la binormale sta nel piano tangente:

$$\sum \mathfrak{L}(dy\,d^2z - dz\,d^2y) = 0 \ .$$

Ben raramente accade che si sappia dalle (39) risalire all'equazione in x, y, z, con due costanti arbitrarie, atta a rappresentare, insieme all'equazione della superficie, la doppia infinità delle geodetiche. Si può tuttavia fare lo studio di queste curve senza conoscerne le equazioni in termini finiti, ed è particolarmente importante per le applicazioni il sapere come le geodetiche si comportano in regioni limitatissime della superficie. Posta l'origine sulla superficie, in M, si dirigano gli assi x ed y secondo le tangenti alle linee di curvatura; poi si consideri un arco $\mathrm{MM}' = \sigma$ sulla geodetica definita dall'angolo θ, che la sua tangente in M fa con Mx. Se fra le sezioni normali, che passano per M, si costruisce quella che passa anche per M′, si determina sulla superficie un altro arco $\mathrm{MM}' = \sigma + \delta$. Il piano di questa sezione si suole in pratica assumere come osculatore alla geodetica, quantunque, per farlo diventar tale, vi sia da imprimergli una certa *deviazione* angolare ε: questa, computata nel senso del moto degli indici d'un orologio, per un osservatore posto sulla parte positiva dell'asse z (normale principale), si calcola subito osservando che $\operatorname{tg}\varepsilon = -v/u$, dove u e v sono (§ 244) le distanze di M′ al piano normale ed al piano osculatore. Quindi, cambiando in σ il ds delle formole (19) del § 244, si ottiene $\varepsilon = \sigma^2/6\rho\tau$, vale a dire che *la deviazione ε è infinitesima del secondo ordine* rispetto all'arco σ. Questa conclusione, così semplice e del resto prevedibile, chiude in sè una delle proposizioni fondamentali della Geodesia. Nella pratica si suole anche, e con maggior ragione, trascurare δ, cioè considerare l'arco MM′, misurato lungo una sezione normale, come un arco di geodetica; e ciò si giustifica dimostrando che $\delta = {}^2/_5\,\sigma\varepsilon^2$, vale a dire che *la differenza fra i due archi è infinitesima del quinto ordine*. Questo ed altri importanti risultati si possono dedurre dalle *formole di Weingarten*, le quali danno le coordinate x, y, z di M′ in funzione di σ e di θ. Siccome si ha, per le citate formole (19),



$$u = \sigma - \frac{\sigma^3}{6\rho^2} + \dots \ , \quad v = -\frac{\sigma^3}{6\rho\tau} + \dots \ , \quad w = \frac{\sigma^2}{2\rho} + \frac{\sigma^3}{6}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho} + \dots ,$$

si ottiene subito $z = w$, ed inoltre

$$x = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta = \sigma\cos\theta - \frac{\sigma^3}{6\rho}\left(\frac{\cos\theta}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\tau}\right) + \dots ,$$

$$y = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta = \sigma\operatorname{sen}\theta - \frac{\sigma^3}{6\rho}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} + \frac{\cos\theta}{\tau}\right) + \dots .$$

D' altra parte, in virtù del teorema di Eulero (§ 286) e della formola (35), ricordando che per le geodetiche è $\tau = 1/\varkappa$, si ha

$$\frac{\cos\theta}{\rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\varkappa} = \frac{\cos\theta}{\rho_1} \quad , \quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} + \frac{\cos\theta}{\varkappa} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho_2} \; .$$

Dunque

$$x = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6\rho\rho_1} + \ldots\right)\cos\theta \quad , \quad y = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6\rho\rho_2} + \ldots\right)\operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = \frac{\sigma^2}{2\rho} + \ldots \; .$$

307. **Applicazione alle superficie di rotazione**: *a)* Per determinare le *assintotiche*, si prenda l'asse di rotazione come asse z; e sia $z = f(x)$, nel piano xz, l'equazione del meridiano: l'equazione della superficie è $z = f(\mathrm{R})$, con $\mathrm{R} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ne segue, derivando,

$$p = \frac{x}{\mathrm{R}} f'(\mathrm{R}) = x\varphi(\mathrm{R}) \quad , \quad q = \frac{y}{\mathrm{R}} f'(\mathrm{R}) = y\varphi(\mathrm{R}) \; ;$$

poi,

$$r = \varphi(\mathrm{R}) + \frac{x^2}{\mathrm{R}}\varphi'(\mathrm{R}) \quad , \quad s = \frac{xy}{\mathrm{R}}\varphi'(\mathrm{R}) \quad , \quad t = \varphi(\mathrm{R}) + \frac{y^2}{\mathrm{R}}\varphi'(\mathrm{R}) \; .$$

Ora l'equazione (37) diventa

$$(dx^2 + dy^2)\varphi(\mathrm{R}) + (x\,dx + y\,dy)^2 \frac{\varphi'(\mathrm{R})}{\mathrm{R}} = 0 \; ,$$

ovvero, facendo uso di coordinate polari nel piano xy,

$$(d\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}^2 d\theta^2)\varphi(\mathrm{R}) + \mathrm{R}\varphi'(\mathrm{R})d\mathrm{R}^2 = 0 \; ;$$

quindi

$$\pm \frac{d\theta}{d\mathrm{R}} = \sqrt{-\frac{f''(\mathrm{R})}{\mathrm{R}f'(\mathrm{R})}} \; . \tag{40}$$

Più direttamente si giunge a questa equazione partendo dalla (38), giacchè per $u = \mathrm{R}$, $v = \theta$, si trova facilmente $\mathfrak{A} = \mathrm{R}f''(\mathrm{R})$, $\mathfrak{B} = \mathrm{R}^2 f'(\mathrm{R})$, $\mathfrak{C} = 0$. Nel Calcolo integrale si apprenderà a risalire dall'equazione (40) ad un'altra, in termini finiti, $\pm(\theta - \theta_0) = \mathrm{F}(\mathrm{R})$, che rappresenta due famiglie di curve, projezioni delle assintotiche sul piano xy. Tali curve possono dedursi tutte dall'unica $\theta = \mathrm{F}(\mathrm{R})$ per simmetria rispetto all'asse polare e rotazione intorno al polo.

b) Solo in casi specialissimi è possibile la completa determinazione delle *geodetiche*; ma si può tuttavia pervenire, nel caso generale, a trarre dalle (39) un notevole teorema, che agevola molto la discussione delle geodetiche e permette di rendersi conto del loro andamento sulle superficie di rotazione. Infatti si deve avere

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} : x = \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} : y \quad , \quad \text{ossia} \quad x\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} - y\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = 0 \; ,$$

o, ancora, successivamente,

$$\frac{d}{ds}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad , \quad x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = c \; ;$$

dove c è una costante arbitraria. Sia ψ l'angolo d'una geodetica col *meridiano*, e si noti che, essendo $-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0$, i coseni direttori della tangente al *parallelo*, e dx/ds, dy/ds, dz/ds i coseni direttori della tangente alla geodetica, si ha

$$\operatorname{sen}\psi = -\operatorname{sen}\theta \, . \frac{dx}{ds} + \cos\theta \, . \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right),$$

cioè $\mathrm{R}\operatorname{sen}\psi = c$. Dunque *le geodetiche d'una superficie di rotazione incontrano i meridiani sotto angoli, il cui seno varia, lungo ciascuna geodetica, come la curvatura dei paralleli.* Questo teorema, dovuto a Clairaut, è utilissimo in Geodesia. Esso impone dei limiti alla regione solcata dalle geodetiche corrispondenti ad un dato valore (non nullo) di c. Infatti R non può diventare minore di c, in valore assoluto, e però, se immaginiamo che si percorra una geodetica nel senso in cui vanno decrescendo i paralleli, la curva andrà deviando sempre più dai meridiani, per accostarsi ai paralleli, e finirà per toccare il parallelo di raggio c, senza poterlo oltrepassare.

308. **Esercizii**: *a)* Ci sono già note (§ 291, *b*) le assintotiche dell'*elicoide a piano direttore*; ma noi vogliamo qui ritrovarle col procedimento indicato nel § 304. L'equazione della superficie è $z = a\theta$, dove $\theta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} +$ multiplo arbitrario di π. Ne segue

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ay}{x^2 + y^2} \quad , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ax}{x^2 + y^2} \, . \tag{41}$$

Derivando ancora si riconosce che r, s, t sono proporzionali a $-2xy$, $x^2 - y^2$, $2xy$, sicchè l'equazione (37) diventa $-xydx^2 + (x^2 - y^2)dxdy + xydy^2 = 0$, e si scinde nelle due

$$ydx - xdy = 0 \quad , \quad xdx + ydy = 0 \; ,$$

la prima delle quali fornisce le generatrici ($y = kx$), mentre l'altra dà $x^2 + y^2 =$ *costante*. Le assintotiche dei due sistemi sono dunque tra loro ortogonali, e però, come già si sapeva, la superficie è di area minima. Più rapidamente si giunge al medesimo risultato prendendo $u = \mathrm{R}$, $v = \theta$, ed applicando l'equazione (38), che si riduce a $d\mathrm{R}\,d\theta = 0$, giacchè $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = -a$. Le assintotiche sono dunque rappresentate dalle equazioni $\mathrm{R} =$ *costante* (eliche) e $\theta =$ *costante* (generatrici rettilinee).

b) Della medesima superficie proponiamoci di cercare le linee di curvatura, le quali sono evidentemente le trajettorie a 45° delle generatrici rettilinee. Per determinarle analiticamente si sostituiscano i valori (41), ossia

$$p = -\frac{a}{\mathrm{R}}\operatorname{sen}\theta \quad , \quad q = \frac{a}{\mathrm{R}}\cos\theta \; ,$$

nell'equazione (31). Questa diventa

$$\frac{\dfrac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\cos\theta - \left(1 + \dfrac{a^2}{\mathrm{R}^2}\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\dfrac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\, d\theta} + \frac{\dfrac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\operatorname{sen}\theta + \left(1 + \dfrac{a^2}{\mathrm{R}^2}\right)\cos\theta\, d\theta}{\dfrac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\, d\theta} = 0 \, .$$

e si riduce a

$$\pm\frac{d\theta}{dR}=\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\quad,\quad \text{ossia}\quad \mp d\theta=\frac{d\psi}{\operatorname{sen}\psi}\,,$$

ponendo $R=a\cot\psi$. Il secondo membro dell'ultima equazione è (§ 51, *b*) il differenziale di $\log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$. Dunque, successivamente,

$$e^{\mp(\theta-\theta_0)}=\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\quad,\quad R=\frac{a}{2}\left(e^{\pm(\theta-\theta_0)}-e^{\mp(\theta-\theta_0)}\right).$$

Queste curve, projezioni delle linee di curvatura sul piano direttore, si ottengono tutte facendo girare intorno al polo la spirale $R={}^1/_2a(e^{\theta}-e^{-\theta})$. Questa esce dal polo come una spirale di Archimede, e tende a convertirsi, all'infinito, in una coppia di spirali logaritmiche, che incontrano i raggi vettori sotto l'angolo di 45°.

c) Per determinare le assintotiche del *catenoide*, si faccia uso delle (40), osservando che la funzione $z=f(R)$ è implicitamente definita dall'equazione del meridiano: $R={}^1/_2a\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)$. Questa, derivata due volte di seguito rispetto a z, ci dà

$$\frac{1}{f'(R)}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}-e^{-\frac{z}{a}}\right)\quad,\quad -\frac{f''(R)}{f'^3(R)}=\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)=\frac{R}{a^2}\,,$$

sicchè la (40) diventa

$$\pm\frac{d\theta}{dR}=\frac{f'(R)}{a}\quad,\quad \text{d'onde}\quad \pm a(\theta-\theta_0)=f(R)\,.$$

Le projezioni delle assintotiche sul piano del circolo di gola sono dunque rappresentate, in coordinate polari, dall'equazione che si ottiene scrivendo $\pm a(\theta-\theta_0)$ al posto di z nell'equazione del meridiano:

$$R=\frac{a}{2}\left(e^{\pm(\theta-\theta_0)}+e^{\mp(\theta-\theta_0)}\right).$$

Tutte queste linee si ottengono facendo girare intorno al polo la spirale

$$R={}^1/_2a(e^{\theta}+e^{-\theta})\,,$$

sicchè basta conoscere una delle assintotiche per conoscerle tutte. Le equazioni

$$x={}^1/_2a(e^{\theta}+e^{-\theta})\cos\theta\quad,\quad y={}^1/_2a(e^{\theta}+e^{-\theta})\operatorname{sen}\theta\quad,\quad z=a\theta\,,$$

rappresentano appunto una delle assintotiche, da noi già studiata nel § 258. Ora la proprietà che ha questa curva di tagliare a 45° i paralleli del catenoide ci apparisce come evidente, giacchè, essendo (§ 291, *a*) il catenoide una superficie minima, le assintotiche debbono appunto incontrare sotto un angolo di 45° le linee di curvatura, ossia i meridiani ed i paralleli. Anche l'altra proprietà, concernente il raggio di torsione, è una conseguenza immediata del teorema di Enneper. Infatti, se si designa con n il segmento di normale alla superficie, fra il punto di incidenza e l'asse di rotazione, i raggi principali di curvatura sono $\rho_1 = n$ e $\rho_2 = -n$, e la formola finale del § 304 dà subito $\tau = \pm n$.

d) Notevoli sono anche le assintotiche della *pseudosfera* (§ 294, *a*). Sia ψ l'inclinazione della tangente sull'asse di rotazione, dimodochè

$$R = a \operatorname{sen}\psi \quad , \quad f'(R) = -\cot\psi \, ,$$

e per conseguenza $f''(R) = 1/a \cos\psi \operatorname{sen}^2\psi$. La (40) diventa $\pm d\theta = d\psi/\operatorname{sen}\psi$, e se ne deduce $\pm(\theta - \theta_0) = \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$; poi

$$R = \frac{2a}{e^{\pm(\theta-\theta_0)} + e^{\mp(\theta-\theta_0)}} \, .$$

Questa equazione rappresenta le infinite posizioni che una *spirale di Poinsot* $R = 2a/(e^\theta + e^{-\theta})$ può occupare rotando intorno al polo. Per conoscere le assintotiche della pseudosfera, basta discuterne una. Si consideri quella che corrisponde a $\theta = -\log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$, e si osservi che

$$\frac{dz}{d\psi} = a \frac{dz}{dR} \cos\psi = -a \frac{\cos^2\psi}{\operatorname{sen}\psi} = -\frac{a}{\operatorname{sen}\psi} + a \operatorname{sen}\psi \, .$$

Ne segue $z = -a\left(\log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + \cos\psi\right)$. L'assintotica che si vuol considerare è dunque rappresentata dalle equazioni

$$x = \frac{2a\cos\theta}{e^\theta + e^{-\theta}} \quad , \quad y = \frac{2a \operatorname{sen}\theta}{e^\theta + e^{-\theta}} \quad , \quad z = a\left(\theta - \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}\right) .$$

Procedendo come nel § 258 si trova facilmente $s = a\theta$. Dunque ogni arco (non troppo grande) di assintotica è lungo quanto l'arco che i meridiani negli estremi vanno a staccare dal parallelo massimo. Ora siano l, m, n i coseni direttori dell'asse di rotazione rispetto al triedro fondamentale della curva. La differenziazione di z dà

$$l = \frac{dz}{ds} = -\frac{\operatorname{sen}\psi}{a} \frac{dz}{d\psi} = \cos^2\psi \, .$$

D'altra parte (§ 239)

$$\frac{dl}{ds} = \frac{n}{\rho} \quad , \quad \frac{dm}{ds} = \frac{n}{\tau} \, , \tag{42}$$

ed i valori di m e di τ ci sono già noti. Infatti $m = -\operatorname{sen}\psi$ è il coseno dell'angolo che la binormale (normale alla superficie) fa con l'asse z. Inoltre il teorema di Enneper dà subito $\tau = \pm a$. Prendiamo $\tau = a$ (assintotica sinistrorsa), ed osserviamo che dalla seconda formola (42) risulta

$$n = a\frac{dm}{ds} = \frac{dm}{d\theta} = \cos\psi \operatorname{sen}\psi \, .$$

Ne segue, sostituendo nella prima formola (42),

$$\rho = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \psi} = \frac{a}{4} (e^{\theta} + e^{-\theta}) = \frac{a}{4} \left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right) .$$

Si noti che, nel punto di contatto dell'assintotica col parallelo massimo, il raggio di curvatura è $^1/_2 a$, mentre dovrebbe avere, in virtù del teorema di Beltrami (§ 283), il valore $^2/_3 a$: ciò si spiega osservando che il detto parallelo (luogo delle cuspidi dei meridiani) è una linea singolare della superficie.

CALCOLO INTEGRALE

L' INTEGRAZIONE.

Concetti fondamentali.

309. Si chiama *integrale* di $f(x)dx$, e si rappresenta con $\int f(x)dx$, ogni funzione $F(x)$, che ha per differenziale $f(x)dx$. In altri termini, quando si scrive $\int f(x)dx = F(x)$, si vuole affermare che $f(x)dx = dF(x)$. Siccome da queste due uguaglianze si deduce, eliminando l'uno o l'altro dei simboli F ed f,

$$f(x)dx = d\int f(x)dx \quad , \quad \int dF(x) = F(x) \ ,$$

si vede che i segni d e $\int$ si elidono a vicenda; e però, se si chiama *integrazione* l'operazione, rappresentata dal segno $\int$, mediante la quale, data la funzione f, si trova F, si può dire che *l'integrazione è l'operazione inversa della differenziazione.* Già è noto (§ 66, b) che, se $F(x)$ è una funzione che ammette il differenziale $f(x)dx$, *tutte* le altre funzioni, dotate del medesimo differenziale, sono rappresentate da $F(x)+C$, dove C è una *costante arbitraria*; ma la differenza dei valori che l'integrale di $f(x)dx$, corrispondente ad un dato valore di C, prende negli estremi di un dato intervallo (a, b), è perfettamente determinata, giacchè nel formarla sparisce il valore di C. A tale differenza, che si rappresenta con $\int_a^b f(x)dx$, si dà il nome di integrale *definito* (fra i limiti a e b), per distinguerla dall'integrale *indefinito* $\int f(x)dx$. Adunque

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad , \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ ;$$

ma queste definizioni non sono soddisfacenti, perchè nulla ci dicono sull'esistenza dell'integrale, nè sul modo di calcolarlo; esse sono da ritenere piuttosto come definizioni di simboli, e però noi cercheremo di trasformarle in altre, che valgano a definire le operazioni stesse rappresentate da quei simboli.

310. Prima, per ottenere un'interpetrazione dell'integrale definito, osserviamo che $F'(x)=f(x)$, ed applichiamo il teorema di Lagrangia (§ 65) in n intervalli $h_1, h_2, \dots, h_n$, nei quali si è arbitrariamente spezzato l'intervallo (a,b). Chiamando α_i un *determinato* valore appartenente all'intervallo (x_{i-1}, x_i) di grandezza h_i, e β_i il corrispondente valore di $f(x)$, si ha

$$F(x_1)-F(a)=h_1\beta_1\ ,\ F(x_2)-F(x_1)=h_2\beta_2\ ,\ \dots\ ,\ F(b)-F(x_{n-1})=h_n\beta_n\ .$$

Sommando si ottiene $F(b)-F(a)=\sigma_n$, dopo aver posto

$$\sigma_n=h_1\beta_1+h_2\beta_2+\cdots+h_n\beta_n\ .$$

Dunque, se si fa crescere n all'infinito, si può scrivere $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n=\infty}\sigma_n$, cioè il valore dell'integrale si può considerare come limite della successione $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, i cui termini sono, del resto, tutti uguali fra loro. Ciò premesso, vogliamo dimostrare che, *se la funzione* $f(x)$ *è continua, si può ad ogni* α_i *sostituire un numero qualunque dell'intervallo* (x_{i-1}, x_i), purchè si supponga che, nel crescere di n all'infinito, *tutti* gli intervalli parziali tendano simultaneamente a zero. Infatti, trovato quel numero h, che, in virtù del teorema di Cantor (§ 38), si può sempre far corrispondere ad ogni numero positivo ε, e supponendo che $h_1, h_2, \dots, h_n$ siano stati già resi tutti minori di h, si avrà $|f_i-\beta_i|<\varepsilon$ per qualunque valore f_i che la funzione assume nell'intervallo h_i. Dunque, posto

$$\tau_n=h_1f_1+h_2f_2+\cdots+h_nf_n\ ,$$

si avrà pure

$$|\tau_n-\sigma_n|\leqq\sum_1^n h_i|f_i-\beta_i|<\varepsilon\sum_1^n h_i=(b-a)\varepsilon\ .$$

Ne segue, osservando che $(b-a)\varepsilon$ si può prendere piccolo quanto si vuole,

$$\lim_{n=\infty}\tau_n=\lim_{n=\infty}\sigma_n=\int_a^b f(x)dx\ ,$$

vale a dire che anche i numeri $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ (che non sono più tutti uguali fra loro) tendono al valore dell'integrale.

311. **Definizione dell'integrale**. Ora, lasciandoci guidare dalle precedenti considerazioni, e largheggiando il più che sia possibile nelle

condizioni che avremo da imporre, siamo in grado di formulare la seguente definizione: « Se, *qualunque sia il modo* di dividere l'intervallo (a, b) in intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, i quali tendano a zero quando n cresce all'infinito, e *qualunque siano i numeri* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, compresi fra i limiti (inferiore e superiore) di $f(x)$ in ciascuno dei predetti intervalli (non esclusi i limiti stessi), la somma $h_1 f_1 + h_2 f_2 + \ldots + h_n f_n$ tende sempre ad uno stesso limite, questo si chiama l'*integrale definito* di $f(x)dx$ fra a e b, e si rappresenta con $\int_a^b f(x)dx$ ». Se poi al limite b, supposto *variabile*, si sostituisce x, lasciando *arbitrario* il limite a, si ottiene la definizione dell'*integrale indefinito* $F(x)$. In tutti i casi $f(x)dx$ si chiama *elemento* dell'integrale; sicchè un integrale è da considerare come una *somma* di infiniti elementi infinitesimi.

312. Fra le proprietà generali degli integrali notiamo subito la seguente

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \ , \qquad (k \text{ costante})$$

immediata conseguenza della definizione, come anche l'altra

$$\int_a^b (u + v + \ldots)dx = \int_a^b udx + \int_a^b vdx + \ldots ,$$

evidentemente vera fintantochè le funzioni $u, v, \ldots$ di x sono in numero finito. Basta infatti passare al limite nelle uguaglianze

$$\sum_1^n kh_i f_i = k\sum_1^n h_i f_i \ ; \quad \sum_1^n h_i(u_i + v_i + \cdots) = \sum_1^n h_i u_i + \sum_1^n h_i v_i + \cdots ,$$

ammettendo l'esistenza degli integrali di $fdx, udx, vdx, \ldots$. Ora conviene sbarazzare la nozione d'integrale dalle varie restrizioni che ancora racchiude:

a) E prima di tutto, per non essere obbligati a supporre $a < b$, conveniamo che sia, in ogni caso,

$$\int_a^b = -\int_b^a , \qquad (1)$$

convenzione questa ben naturale se si riflette che, quando l'intervallo $b - a$ si considera come negativo, tali conviene anche supporre che siano gli intervalli $h_1, h_2, \ldots$, nei quali va suddiviso, mentre restano inalterati i corrispondenti valori $f_1, f_2, \ldots$. In altri termini ogni elemento $f(x)dx$ ha il segno di $f(x)$, o il segno opposto, secondo che, variando x dall'estremo a all'estremo b, il dx è positivo o negativo. Dopo ciò è facile dimostrare che si ha sempre

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b, \tag{2}$$

proprietà evidente quando c è compreso fra a e b. Nel caso opposto, se per esempio si ha $a < b < c$, si ottiene subito, osservando (1),

$$\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

b) La definizione di $\int_a^b f(x)dx$ richiede che $f(x)$ sia ***finita*** nell'intervallo d'integrazione (a, b); ma questa restrizione si può togliere in parte convenendo di porre, quando $f(x)$ diventa infinita in uno o più punti c,

$$\int_a^b = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\eta=0} \int_{c+\eta}^b.$$

c) Si danno anche integrali estesi ad ***intervalli infiniti***; ma essi debbono essere considerati come limiti dei valori di altri integrali, estesi ad intervalli finiti. In altri termini si ha, per definizione,

$$\int_a^{\pm\infty} = \lim_{x=\pm\infty} \int_a^x, \quad \int_{\pm\infty}^a = \lim_{x=\pm\infty} \int_x^a,$$

ed inoltre

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^a + \int_a^{\infty}.$$

È facile constatare che le proprietà precedentemente segnalate per gli integrali estesi ad un intervallo finito sussistono anche nel caso d'un intervallo infinito.

d) In seguito all'ultima definizione non è lecito considerare un integrale, esteso ad un intervallo infinito, come il limite d'una somma $h_1 f_1 + h_2 f_2 + \ldots.$ Giova tuttavia segnalare un caso, abbastanza generale, in cui, dopo avere spezzato l'intervallo (a, ∞) in infiniti intervalli $h_1, h_2, h_3, \ldots$, tendenti a zero, ed aver preso in ciascun intervallo h_i, fra i limiti di $f(x)$ in questo intervallo, un valore f_i, si può affermare che

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim (h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 + \cdots).$$

Ciò accade quando, nel dividere con la medesima legge un intervallo qualunque (x, ∞), si trova come limite della somma analoga una quantità $\rho(x)$, tendente a zero per x infinito. Infatti è chiaro che si ha

$$\int_a^x f(x)dx = \rho(a) - \rho(x) \quad , \quad \int_a^\infty f(x)dx = \rho(a) \ .$$

313. Tra le infinite possibili divisioni dell'intervallo (a, b) la più semplice è senza dubbio quella in parti uguali, per la quale si ha

$$\tau_n = h(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = (b - a)\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} \ ,$$

e conseguentemente

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ .$$

Per questa ragione si dà al secondo membro il nome di *valor medio* di $f(x)$ nell'intervallo (a, b). Siccome tutti i numeri f_i sono compresi fra il limite inferiore λ ed il limite superiore μ di $f(x)$ in (a, b), altrettanto si può dire della loro media aritmetica, e per conseguenza anche il valor medio di $f(x)$ è compreso fra λ e μ. Ciò premesso, si consideri la funzione

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(x)dx \ ,$$

ed attribuito ad x un incremento h si osservi, ricordando la proprietà (2), che si ha

$$\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) = \int_x^{x+h} f(x)dx = hf_0 \ ,$$

dove f_0, valor medio di $f(x)$ in $(x, x+h)$, si conserva finito nel tendere di h a zero, dimodochè $\lim \mathrm{F}(x+h) = \mathrm{F}(x)$. Dunque *la funzione* F(x) *è continua.*

314. Si può affermare qualche cosa di più quando è continua la funzione da integrare, perchè allora λ e μ sono (§ 37) valori di $f(x)$ in (a, b); e nel passare dall'uno all'altro $f(x)$ diventa certamente uguale (§ 35) almeno una volta, nell'intervallo stesso, al suo valor medio, sicchè, per un conveniente numero ξ dell'intervallo (a, b), si ha

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi) \ . \qquad (3)$$

Ed ora è facile dimostrare che la definizione dell'integrale, data nel § 311, concorda con quella data in principio, in quanto che *la derivata di*

F(x) *è* f(x). Infatti, se si applica la (3) nell'intervallo $(x, x+h)$, si ottiene $F(x+h)-F(x)=hf(\xi)$, dove ξ, compreso fra x ed $x+h$, tende a zero. Ne segue

$$F'(x)=\lim \frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim f(\xi)=f(x) .$$

Dopo ciò è chiaro che la formola (3) non è che l'espressione del teorema di Lagrangia, applicato all'integrale indefinito. Solo quando $f(x)$ è discontinua la nuova e l'antica definizione possono trovarsi in disaccordo; ed effettivamente si dimostra * che *l'integrale di $f(x)dx$*, secondo il nuovo concetto, *può non esistere, quantunque* f(x) *ammetta una funzione primitiva.*

Integrabilità.

315. **Teorema.** *Affinchè esista* $\int_a^b f(x)dx$ *è necessario e sufficiente che si possa formare una divisione dell'intervallo* (a, b) *in intervalli* $h_1, h_2, \ldots, h_n$, *tale che, chiamando* Θ_i *l'oscillazione di* f(x) *in* h_i, *la somma*

$$\omega_n=h_1\Theta_1+h_2\Theta_2+\cdots+h_n\Theta_n$$

abbia per limite zero quando i detti intervalli, crescendo in numero, tendono simultaneamente ad annullarsi.

a) Se l'integrale esiste, vuol dire che la somma $\tau_n=\sum_1^n h_i f_i$ ha un limite, sempre lo stesso, comunque si scelgano i numeri f_i nei rispettivi intervalli. In particolare, quando si mettono per $f_1, f_2, \ldots, f_n$ una volta i limiti superiori di $f(x)$ nei corrispondenti intervalli, ed un'altra i limiti inferiori, si ottiene, sottraendo, $\lim \omega_n=0$, qualunque sia il modo di spezzare l'intervallo (a, b) in parti infinitesime;

b) Inversamente, se $\lim\omega_n=0$ per qualunque modo di divisione, *le somme*

$$\tau'_{n'}=\sum_1^{n'} h'_i f'_i \quad , \quad \tau''_{n''}=\sum_1^{n''} h''_i f''_i$$

non possono tendere a limiti differenti. Consideriamo infatti la divisione in intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, operata mediante i punti delle due divisioni. Un intervallo h' consta d'uno o più intervalli h; e se per ciascuno di questi si prende ad arbitrio un valore f, compreso fra i limiti estremi dei valori di $f(x)$, si ha

$$h'_i f'_i = h_{r+1}f_{r+1}+h_{r+2}f_{r+2}+h_{r+3}f_{r+3}+\cdots+h_s f_s$$
$$+h_{r+1}(f'_i-f_{r+1})+h_{r+2}(f'_i-f_{r+2})+\cdots+h_s(f'_i-f_s) .$$

---

* Volterra « *Giornale di Matematiche* » 1881, p. 334.

La seconda parte di questa somma non supera, in valore assoluto, il prodotto di $\mathcal{O}'_i$ per $h_{r+1}+h_{r+2}+\ldots+h_s=h'_i$. Dunque

$$\tau'_{n'}=\tau_n+\rho'_{n'} \quad , \quad \tau''_{n''}=\tau_n+\rho''_{n''} \; ,$$

dove

$$|\rho'_{n'}|\leqq\omega'_{n'} \quad , \quad |\rho''_{n''}|\leqq\omega''_{n''} \; .$$

Ne segue

$$\tau'_{n'}-\tau''_{n''}=\rho'_{n'}-\rho''_{n''} \quad , \quad |\tau'_{n'}-\tau''_{n''}|\leqq\omega'_{n'}+\omega''_{n''} \; .$$

Ora, poichè $\omega'_{n'}$ ed $\omega''_{n''}$ tendono a zero quando tutti gli intervalli parziali tendono ad annullarsi, anche $\tau'_{n'}-\tau''_{n''}$ tende a zero, e però non può $\tau'_{n'}$ tendere ad un limite senza che $\tau''_{n''}$ tenda allo stesso limite;

c) Vogliamo inoltre dimostrare che τ_n *tende necessariamente ad un limite, quando* ω_n *tende a zero.* Dato ε positivo e piccolo quanto si vuole, si può trovare un numero δ, tale che, quando gli intervalli h siano tutti minori di δ, si abbia $\omega_n<{}^1/_2\varepsilon$. Possiamo supporre che, crescendo n, gli intervalli h finiscano per mantenersi costantemente inferiori a δ, e diventino una volta $h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n'}$, ed un'altra $h''_1, h''_2, \ldots, h''_{n''}$. Siano $\tau_{n'}$ e $\tau_{n''}$ i corrispondenti valori di τ_n, ed $\omega_{n'}$, $\omega_{n''}$ quelli di ω_n. È chiaro che a queste somme si possono applicare le considerazioni fatte precedentemente per le τ' e τ'', e scrivere

$$|\tau_{n'}-\tau_{n''}|\leqq\omega_{n'}+\omega_{n''}<\varepsilon \; ,$$

per ogni coppia di valori di n' ed n'', superiori ad un certo numero. Dunque τ_n tende (§ 9) ad un limite finito;

d) Ci resta soltanto da far vedere che, *quando la somma* ω_n *tende a zero per un determinato modo di spezzare* (a, b) *in parti infinitesime, essa tende a zero per qualunque altro modo di divisione.* Se, per una data divisione in intervalli $h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n'}$, si ha $\lim\omega'_{n'}=0$, si può, dato $\varepsilon>0$, supporre che $\omega'_{n'}$ sia già stato reso inferiore ad ε; poi, in un altro modo di divisione, si può sempre supporre che gli intervalli parziali $h''_1, h''_2, \ldots, h''_{n''}$ siano già diventati minori di η/n', designando con η un altro numero positivo, arbitrariamente piccolo. Ciò premesso, consideriamo la divisione in intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, ottenuta mercè i punti delle due divisioni. Si ha

$$\begin{aligned} h'_i\mathcal{O}'_i &= h_{r+1}\mathcal{O}_{r+1}+h_{r+2}\mathcal{O}_{r+2}+h_{r+3}\mathcal{O}_{r+3}+\cdots+h_s\mathcal{O}_s \\ &+h_{r+1}(\mathcal{O}'_i-\mathcal{O}_{r+1})+h_{r+2}(\mathcal{O}'_i-\mathcal{O}_{r+2})+\cdots+h_s(\mathcal{O}'_i-\mathcal{O}_s) \; , \end{aligned}$$

ovvero, osservando che $\mathcal{O}_{r+1}, \mathcal{O}_{r+2}, \ldots, \mathcal{O}_s$ non superano $\mathcal{O}'_i$,

$$h'_i\mathcal{O}'_i \geqq h_{r+1}\mathcal{O}_{r+1}+h_{r+2}\mathcal{O}_{r+2}+\cdots+h_s\mathcal{O}_s \; ;$$

poi, sommando, $\omega'_{n'} \geqq \omega_n$. D'altra parte si consideri $\omega''_{n''}$. Questa somma ha in comune con ω_n tutti i termini corrispondenti ad intervalli h'', nell'interno dei quali non cadono punti della prima divisione. Gli altri termini di $\omega''_{n''}$ sono in numero minore di n', appunto perchè corrispondono ad intervalli h'', in ciascuno dei quali cade almeno uno degli $n'-1$ punti della prima divisione; e poichè ciascuno dei detti termini è inferiore al prodotto di η/n' per un'oscillazione, che certamente non supera l'oscillazione totale Θ di $f(x)$ in (a,b), la loro somma è inferiore ad $\eta\Theta$. Dunque

$$\omega''_{n''} < \omega_n + \eta\Theta \quad , \quad \text{e però} \quad \omega''_{n'} < \omega'_{n'} + \eta\Theta < \varepsilon + \eta\Theta \; .$$

Se gli intervalli continuano ad impicciolire, l'ultima disuguaglianza non cessa di esser vera, vale a dire che $\omega'_{n''}$ diventa e resta inferiore alla quantità $\varepsilon + \eta\Theta$, arbitrariamente piccola. Dunque $\lim \omega''_{n''} = 0$.

316. Dal criterio d'integrabilità, testè dimostrato, vogliamo ora trarre alcune utili conseguenze:

a) Quando esiste l'integrale di f(x)dx, *esiste anche l'integrale di* |f(x)|dx. Infatti l'oscillazione Θ' di $|f(x)|$ in qualunque intervallo, evidentemente uguale all'oscillazione Θ di $f(x)$ quando questa funzione non cambia segno nell'intervallo che si considera, è invece minore di Θ nel caso opposto. Ne segue $\Theta'_i \leqq \Theta_i$, poi $\omega'_n \leqq \omega_n$, e però, se $\lim \omega_n = 0$, è $\lim \omega'_n = 0$. Inoltre si noti che, essendo $\left|\sum_1^n h_i f_i\right| \leqq \sum_1^n |h_i f_i|$, al limite $(n=\infty)$ si ha

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx \; .$$

b) La somma di due o più funzioni integrabili, in numero finito, è una funzione integrabile. Questa proposizione, già segnalata (§ 312) come immediata conseguenza della definizione dell'integrale, si può anche stabilire, mediante il criterio d'integrabilità, osservando che l'oscillazione d'una somma di funzioni, in qualunque intervallo, non supera la somma delle oscillazioni delle funzioni nel medesimo intervallo. Infatti, se λ', μ' sono i limiti di u, e λ'', μ'' quelli di v, si ha $\lambda' + \lambda'' \leqq u + v \leqq \mu' + \mu''$, e però il limite inferiore λ di $u+v$ non è minore di $\lambda' + \lambda''$, ed il limite superiore μ non supera $\mu' + \mu''$, sicchè l'oscillazione di $u+v$ è

$$\Theta = \mu - \lambda \leqq \Theta' + \Theta'' \; .$$

Applicando questa conclusione in ciascun intervallo h_i si trova

$$\omega_n \leqq \omega'_n + \omega''_n \; ,$$

d'onde segue che, se $\lim \omega'_n = 0$, $\lim \omega''_n = 0$, si ha pure $\lim \omega_n = 0$.

c) Il prodotto di due o più funzioni integrabili, in numero finito, è una funzione integrabile. Infatti, se si rappresenta con c un numero non minore del più grande dei numeri $0, -\lambda', -\lambda''$, si ha

$$(\lambda'+c)(\lambda''+c) \leqq (u+c)(v+c) \leqq (\mu'+c)(\mu''+c) ;$$

quindi

$$\lambda'\lambda'' - c(\mathfrak{O}'+\mathfrak{O}'') \leqq uv \leqq \mu'\mu'' + c(\mathfrak{O}'+\mathfrak{O}'') ,$$

e però

$$\mathfrak{O} \leqq \mu'\mu'' - \lambda'\lambda'' + 2c(\mathfrak{O}'+\mathfrak{O}'') = \mu'\mathfrak{O}'' + \lambda''\mathfrak{O}' + 2c(\mathfrak{O}'+\mathfrak{O}'')$$

e finalmente $\mathfrak{O} < k(\mathfrak{O}'+\mathfrak{O}'')$, rappresentando con k un numero maggiore di $\mu'+2c$ e $\lambda''+2c$. Questa conclusione si può applicare in ciascun intervallo h_i lasciando inalterati i valori di c e di k, giacchè

$$\lambda' \leqq \lambda'_i \;,\; \lambda'' \leqq \lambda''_i \;,\; \mu' \geqq \mu'_i \;,\; \mu'' \geqq \mu''_i \;.$$

Ne segue $\mathfrak{O}_i < k(\mathfrak{O}'_i + \mathfrak{O}''_i)$, poi $\omega_n < k(\omega'_n + \omega''_n)$, e però $\lim \omega_n = 0$ se, come si suppone, $\lim \omega'_n = 0$ e $\lim \omega''_n = 0$.

d) Se f(x) *è integrabile, anche* 1/f(x), purchè si conservi finita nell'intervallo d'integrazione, *è integrabile.* Se, per esempio, $f(x)$ si mantiene sempre maggiore d'un certo numero positivo, il suo limite inferiore λ è positivo, ed i limiti di $1/f(x)$ sono $\lambda' = 1/\mu$, $\mu' = 1/\lambda$. Ne segue

$$\mathfrak{O}' = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mathfrak{O}}{\lambda\mu} \leqq \frac{\mathfrak{O}}{\lambda^2} ;$$

ed in ciascun intervallo h_i si ha pure $\mathfrak{O}'_i \leqq \mathfrak{O}_i/\lambda_i^2 \leqq \mathfrak{O}_i/\lambda^2$; quindi $\omega'_n \leqq \omega_n/\lambda^2$, e finalmente $\lim \omega'_n = 0$ se $\lim \omega_n = 0$.

e) Il quoziente di due funzioni integrabili, se resta finito nell'intervallo d'integrazione, *è una funzione integrabile.* Infatti se u e v, supposte finite, sono integrabili, è integrabile anche $1/v$, finita per ipotesi, ed è per conseguenza integrabile u/v, prodotto di u per $1/v$.

f) Altra immediata conseguenza del criterio d'integrabilità, che dobbiamo segnalare per servircene fra breve, è l'integrabilità delle funzioni (finite) che *variano sempre in un senso,* sian pure affette da discontinuità (necessariamente ordinarie) nell'intervallo d'integrazione. Per siffatte funzioni le oscillazioni $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \ldots, \mathfrak{O}_n$ sono uguali ai valori assoluti delle differenze

$$f(x_1) - f(a) \;,\; f(x_2) - f(x_1) \;,\; \ldots \;,\; f(b) - f(x_{n-1}) \;,$$

le quali hanno tutte il medesimo segno; e però la loro somma è uguale all'oscillazione totale $\mathfrak{O}$, valore assoluto di $f(b) - f(a)$. Dunque, se x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ dividono (a, b) in parti uguali, si ha

$$\omega_n = \sum_1^n h_i \mathfrak{O}_i = h\mathfrak{O} \quad , \quad \lim \omega_n = 0 \;.$$

Da ciò segue anche l'integrabilità di qualunque funzione finita, che abbia un numero finito di minimi e di massimi nell'intervallo d'integrazione: basta spezzare questo intervallo in parti tali, che in ciascuna la funzione varii sempre in un senso.

317. Fermiamoci per poco a dimostrare due teoremi, molto utili nello studio degli integrali definiti:

a) Il concetto di valor medio (§ 313) d'una funzione integrabile $f(x)$ si può estendere attribuendo all'intervallo (a, b), in ciascun punto x, una *densità* $\varphi(x)$, necessariamente positiva, ossia sostituendo $\varphi(x)dx$ a dx, come se la grandezza di ciascun intervallo h_i fosse invece $h_i\varphi_i$. Essendo $\lambda \leqq f_i \leqq \mu$, sarà pure

$$\lambda \sum_1^n h_i\varphi_i \leqq \sum_1^n h_i f_i \varphi_i \leqq \mu \sum_1^n h_i \varphi_i ,$$

giacchè $\varphi_i > 0$; e però, ammessa l'integrabilità di $\varphi(x)$, d'onde (§ 316, *c*) segue quella di $f(x)\varphi(x)$, si avrà

$$\lambda \int_a^b \varphi(x)dx \leqq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leqq \mu \int_a^b \varphi(x)dx ,$$

ovvero

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f_0 \int_a^b \varphi(x)dx ,$$

dove f_0 è un numero intermedio fra λ e μ. Questo risultato è noto sotto il nome di *primo teorema della media.*

b) Ora si supponga in più che $f(x)$ varii sempre in un senso, ma in compenso $\varphi(x)$ sia obbligata soltanto ad essere integrabile. Si ha

$$\sum_1^n h_i f_i \varphi_i = (f_1 - f_2)h_1\varphi_1 + (f_2 - f_3)(h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2) + \cdots$$
$$+ (f_{n-1} - f_n)(h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + \cdots + h_{n-1}\varphi_{n-1}) + f_n(h_1\varphi_1 + \cdots + h_n\varphi_n) .$$

Siccome le differenze $f_1 - f_2, f_2 - f_3, \ldots$ son tutte dello stesso segno, si può scrivere

$$\sum_1^n h_i f_i \varphi_i = k_n(f_1 - f_n) + f_n \sum_1^n h_i \varphi_i ,$$

designando con k_n un valore intermedio fra quelli delle somme

$$h_1\varphi_1 , \; h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 , \; \ldots , \; h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + \cdots + h_{n-1}\varphi_{n-1} .$$

Al crescere indefinito di n, se si riflette (§ 316, *f*, *c*) che la funzione $f(x)\varphi(x)$ è integrabile, si vede che nell'ultima eguaglianza k_n *deve* tendere ad un limite k, sicchè l'eguaglianza stessa diventa.

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = k[f(a)-f(b)]+f(b)\int_a^b \varphi(x)dx \,.$$

Evidentemente k ha un valore intermedio fra quelli che assume l'integrale $\int_a^x \varphi(x)dx$ quando il limite superiore x varia da a a b. Siccome (§ 313) il detto integrale è una funzione continua di x, esiste in (a, b) un numero ξ, tale che $k=\int_a^\xi \varphi(x)dx$. D'altra parte, per la proprietà (2), si ha $\int_a^b \varphi(x)dx = k + \int_\xi^b \varphi(x)dx$. Dunque

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)dx \,.$$

È questo il *secondo teorema della media*, dovuto a Bonnet. Si noti che, se $f(x)$ fosse discontinua negli estremi, bisognerebbe ad $f(a), f(b)$, sostituire rispettivamente $f(a+0), f(b-0)$, poichè son questi i limiti di f_1, f_n.

318. **Applicazioni**: *a)* Per vedere se l'integrale di $f(x)dx$, esteso all'intervallo (a, b), ha un significato quando $f(x)$ diventa infinita in qualche punto c di tale intervallo, bisogna (§ 312, b) esaminare se

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \quad , \quad \int_{c+\eta}^b f(x)dx$$

tendono, per ε ed η tendenti a zero, a limiti finiti. Consideriamo, per fissare le idee, il primo di questi limiti, ed osserviamo che per la sua esistenza (§ 23) occorre e basta che tenda a zero

$$\int_a^{c-\alpha} f(x)dx - \int_a^{c-\beta} f(x)dx = \int_{c-\beta}^{c-\alpha} f(x)dx$$

quando α e β, tra loro indipendenti, tendono a zero. Per vedere se questa condizione è soddisfatta si può adoperare il primo teorema della media. Se, per esempio, $f(x)$ diventa infinita in modo che $\lim\limits_{x=c}(x-c)^r f(x) = k \gtrless 0$, ossia, come si suol dire, infinita dell'ordine r, si ha

$$\int_{c-\beta}^{c-\alpha} f(x)dx = \int_{c-\beta}^{c-\alpha} (x-c)^{-r} g(x)dx = g_0 \int_{c-\beta}^{c-\alpha} (x-c)^{-r}dx \,,$$

giacchè $(x-c)^{-r}$ non cambia segno a sinistra di c; e la funzione $g(x)$, che tende a k ed è integrabile (come prodotto di due funzioni integrabili), ha certamente un valor medio g_0, tendente a k per α e β infinitesimi. Ora, poichè x^{-r} ammette una funzione primitiva proporzionale ad x^{1-r} per $r \gtrless 1$, ed uguale a $\log x$ per $r=1$, la questione si riduce a vedere, nel primo caso, per quali valori di r tende a zero $\alpha^{1-r} - \beta^{1-r}$. Ciò accade solo per $r < 1$. Per $r=1$ si è condotti a considerare $\log \frac{\alpha}{\beta}$, che non tende ad un limite. Dunque l'integrale proposto ha un significato solo *quando* f(x) *diventa infinita d'un ordine inferiore al primo.*

b) Analogamente domandiamoci quando è che l'integrale di $f(x)dx$, esteso (§ 312, *c*) ad un intervallo infinito, può avere un significato. Affinchè esista il limite di $\int_a^b f(x)dx$, per b infinito, occorre e basta che tenda a zero

$$\int_a^\alpha f(x)dx - \int_a^\beta f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(x)dx$$

quando α e β, tra loro indipendenti, crescono all'infinito. Ora suppongasi che, per x infinito, $f(x)$ si comporti in modo che $\lim_{x=\infty} x^r f(x) = k \gtrless 0$. Si ha

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx = \int_\beta^\alpha x^{-r} g(x)dx = g_0 \int_\beta^\alpha x^{-r}dx \; ,$$

dove g_0 tende a k. Deve dunque tendere a zero $\alpha^{1-r} - \beta^{1-r}$, per la qual cosa occorre e basta che sia $r > 1$. Per conseguenza l'integrale considerato ha un significato sol *quando, per* x *infinito,* f(x) *diventa infinitesima d'un ordine superiore al primo.*

c) L'integrale di $f(x)dx$, esteso ad un intervallo infinito, non esiste se la funzione $xf(x) = g(x)$ tende, per x infinito, ad un limite finito, diverso da zero; ma può esistere quando $g(x)$ *non tende* ad un limite, ed esiste certamente se l'integrale di questa funzione, esteso a qualunque intervallo, si conserva minore, in valore assoluto, d'un numero k. Applicando infatti il secondo teorema della media si ottiene

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \frac{1}{\alpha}\int_\alpha^\xi g(x)dx + \frac{1}{\beta}\int_\xi^\beta g(x)dx \; ,$$

e conseguentemente

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| < k\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \quad , \quad \lim \int_\alpha^\beta f(x)dx = 0 \; ,$$

per α e β crescenti all'infinito.

319. **Criterio di Riemann.** Vi è un mezzo assai semplice, proposto da Riemann *, per constatare l'integrabilità d'una funzione $f(x)$, in base al criterio dimostrato nel § 315. Dato un numero positivo ε, sia l_n la som-

* *Gesammelte Werke*, p. 227.

ma di quelli, fra gli intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, nei quali l'oscillazione di $f(x)$ supera ε. L'oscillazione di $f(x)$ in ciascuno di questi intervalli non supera l'oscillazione totale Θ; e negli altri intervalli parziali, la cui somma è $b-a-l_n$, essa non supera ε. Dunque

$$\omega_n \leqq (\Theta - \varepsilon) l_n + (b-a)\varepsilon \, .$$

Se $\lim l_n = 0$ per ogni ε, si può, dato un numero positivo η, piccolo quanto si vuole, prendere $(b-a)\varepsilon = {}^1/_2\eta$, determinare la corrispondente somma l_n, e far crescere n finchè sia e resti $\Theta l_n < {}^1/_2\eta$. Allora sarà pure $\omega_n < \eta$; quindi $\lim \omega_n = 0$. Reciprocamente, quando è soddisfatta questa condizione, siccome si ha $\omega_n > \varepsilon l_n$, è $\lim l_n = 0$ per ciascun valore di ε; vale a dire che si potrà, per ogni numero positivo η, far crescere abbastanza il numero degli intervalli parziali affinchè finisca per essere $l_n < \eta$. Adunque *per l'integrabilità d'una funzione occorre e basta che, per ogni coppia di numeri positivi ε ed η, arbitrariamente piccoli, si riesca a spezzare l'intervallo d'integrazione in guisa che la somma degli intervalli parziali, nei quali l'oscillazione della funzione supera ε, sia minore di η.*

320. Se, per esempio, $f(x)$ è continua, il teorema di Cantor (§ 38) ci dice che si può, dato ε, rendere gli intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sufficientemente piccoli perchè *in tutti* l'oscillazione di $f(x)$ sia minore di ε; ed allora si avrà $l_n = 0$. Dunque *ogni funzione continua è integrabile.* Ma è chiaro, e ci è già noto (§ 316, f), che anche le funzioni discontinue possono essere integrabili: tali sono, per esempio, le *funzioni generalmente continue* (§ 31, a), giacchè i punti di discontinuità, in numero finito, si possono chiudere in intervalli arbitrariamente piccoli. Integrabili sono anche le *funzioni con infinite discontinuità*, tutte le volte che i punti, intorno ai quali cadono infiniti punti di discontinuità, nell'intervallo d'integrazione, sono in numero finito. Infatti, isolando prima questi punti in intervalli piccoli quanto si vuole, restano altri punti di discontinuità, in numero finito, i quali si possono chiudere alla loro volta in intervalli arbitrariamente piccoli; e la somma di tutti questi intervalli (i soli che possano contribuire alla formazione di l_n) è piccola quanto si vuole. In parecchi altri casi * una funzione è integrabile malgrado le infinite discontinuità che può presentare lungo l'intervallo d'integrazione; ed è facile * dimostrare che delle sole *funzioni totalmente discontinue* (§ 31, c) si può dire che *non sono mai integrabili*, perchè, prendendo ε sufficientemente piccolo, vi sarà sempre, intorno ad ogni punto dell'intervallo d'integrazione, almeno un intervallo infinitesimo, in cui l'oscillazione si manterrà maggiore di ε. Ad ogni modo si vede che, se *la continuità è condizione suffi-*

* Dini « *Fondamenti*, ecc. » pp. 245-249.

ciente per l'integrabilità, essa *non è necessaria*. Invece (§ 41, *e, f*) si sa che *la continuità è condizione necessaria per la derivabilità*, ma *non è sufficiente*. Adunque il campo delle funzioni integrabili include quello delle funzioni derivabili, ed è assai più esteso. Nondimeno l'integrazione è un'operazione di gran lunga più difficile, praticamente, della derivazione; e, mentre si hanno regole generali per derivare qualunque funzione data, non si conoscono, per integrare, se non alcuni piccoli espedienti, i quali tuttavia sono largamente sufficienti per le integrazioni che occorrono nella pratica, ed abilmente adoperati conducono a risultati importantissimi anche nell'alta Matematica.

Regole d'integrazione.

321. **Integrazione diretta.** La regola che prima si presenta per calcolare un integrale è quella che risulta immediatamente dalla definizione; ed il modo più naturale di applicarla consiste nel dividere in n parti uguali h l'intervallo d'integrazione (dimodochè sia $nh = b - a$), prendendo per ciascun intervallo parziale il valore della funzione in uno degli estremi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h=0} h \left\{ f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \cdots + f(a+nh) \right\} . \quad (4)$$

Ma altri modi di divisione si possono immaginare, che riescono talvolta più convenienti. Per esempio, se $a > 0$, si potrà porre $aq^n = b$ (con $q > 1$ tendente ad 1 per n infinito), e si avrà

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{q=1} a(q-1) \left\{ f(a) + qf(aq) + q^2 f(aq^2) + \cdots + q^{n-1} f(aq^{n-1}) \right\} . \quad (5)$$

Con la medesima legge si può dividere l'intervallo d'integrazione anche nel caso che abbia un estremo nel punto 0; si deve allora cominciare dall'altro estremo, ma bisogna ricordarsi (§ 312, *d*) che un tal procedimento non è rigoroso. Rappresentando con q un numero che tende ad 1 crescendo, si trova

$$\int_0^a f(x)dx = \lim_{q=1} a(1-q) \left\{ f(a) + qf(aq) + q^2 f(aq^2) + q^3 f(aq^3) + \cdots \right\} . \quad (6)$$

322. **Esempii:** *a*) Se $f(x) = e^x$, si ha, applicando la (4),

$$\int_0^x e^x dx = \lim_{h=0} h(e^h + e^{2h} + \cdots + e^{nh}) = (e^x - 1) \lim_{h=0} \frac{h}{e^h - 1} = e^x - 1 ,$$

In forma indefinita $\int e^x dx = e^x + C$.

b) Ecco un caso in cui è più utile la (5):

$$\int_a^x \frac{dx}{x} = \lim_{q=1} n(q-1) = \lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{x}{a}} - 1\right) = \log\frac{x}{a} \; .$$

Analogamente si ha

$$\int_a^x \log x\, dx = \lim_{q=1} \sum_1^n (aq^i - aq^{i-1}) \log(aq^i)$$

$$= x\log x - a\log a - (x-a)\lim_{q=1} \frac{\log q}{q-1} = x(\log x - 1) - a(\log a - 1) \; .$$

In forma indefinita

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C \quad , \quad \int \log x dx = x(\log x - 1) + C \; .$$

Bisogna tuttavia notare che in questi risultati è implicita l'ipotesi $x > 0$, giacchè nel campo dei numeri reali la funzione $\log x$ non esiste per $x \leqq 0$. Così, per esempio, la funzione primitiva di $1/x$ per $x < 0$ non è $\log x$, ma $\log(-x)$.

c) Il calcolo precedente non è più applicabile quando $a=0$; ma dal risultato ottenuto si deduce subito, ricordando (§ 313) la necessaria continuità delle funzioni integrali,

$$\int_0^x \log x dx = x(\log x - 1) - \lim_{a=0} a(\log a - 1) = x(\log x - 1) \; .$$

Al medesimo risultato si giunge facilmente mediante la (6):

$$\int_0^x \log x dx = x \lim_{q=1}\left(\log x + \frac{q\log q}{1-q}\right) = x(\log x - 1) \; ;$$

o, con maggior rigore, dopo aver richiamata una precedente formola (§ 94, *c*), mediante la (4):

$$\int_0^x \log x dx = \lim_{h=0} h \log(n!\,h^n) = \lim_{n=\infty} \frac{x}{n}\left(n\log n - n + \ldots + n\log\frac{x}{n}\right) = x(\log x - 1) \; .$$

d) Facile è il calcolo dell'integrale $\int_0^{1/_2\pi} \log \operatorname{sen} x dx$ quando è nota * la formola

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n}\ldots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \; .$$

* Vedi, per esempio, il nostro *Lehrbuch der Analysis*, p. 338, o il « *Lehrbuch der Algebra* » di Weber, t. I, p. 424.

Infatti, posto $nh = {}^1/_2\pi$, si trova subito

$$\int_0^{1/_2\pi} \log \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{h=0} h \log \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \frac{\pi}{2} \lim_{n=\infty} \log \frac{n^{\frac{1}{2n}}}{2^{1-\frac{1}{n}}} = -\,{}^1/_2\pi \log 2 \ .$$

e) Per calcolare l'*integrale di Poisson* $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ dividiamo l'intervallo (x, ∞) in intervalli tutti uguali ad h, e cerchiamo di calcolare il limite $\rho(x)$ di

$$h\left(e^{-(x+h)^2} + e^{-(x+2h)^2} + e^{-(x+3h)^2} + \dots\right)$$

per h tendente a zero. Posto $e^{-h^2} = q$, è facile calcolare $\rho(0)$ servendosi del formola (§ 101, *c*)

$$\lim_{q=1} (q + q^4 + q^9 + \dots) \sqrt{1-q} = {}^1/_2 \sqrt{\pi} \ .$$

Si ha infatti

$$\rho(0) = \lim_{h=0} h(q + q^4 + q^9 + \dots) = {}^1/_2 \sqrt{\pi} \lim_{h=0} \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-h^2}}} = {}^1/_2 \sqrt{\pi} \ .$$

Ora, poichè $e^{-(x+z)^2} < e^{-x^2} \cdot e^{-z^2}$, è chiaro che

$$0 < \rho(x) < \rho(0) e^{-x^2} \quad , \quad \lim_{x=\infty} \rho(x) = 0 \ ;$$

e però, ricordando ciò che si è detto innanzi (§ 312, *d*), si può affermare che

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = {}^1/_2 \sqrt{\pi} \ .$$

f) Similmente, per calcolare l'*integrale di Dirichlet* $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$, bisogna s pere (§ 125) che si ha

$$\operatorname{sen} h + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2h + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3h + \dots = {}^1/_2(\pi - h) \ ,$$

purchè h, positivo, sia minore di 2π. Ne segue subito

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim_{h=0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2} \ .$$

A questo risultato giunge Fourier * con procedimento analogo, assolutamen privo di rigore, partendo dalla formola

$$\operatorname{sen} h + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3h + {}^1/_5 \operatorname{sen} 5h + \dots = \frac{\pi}{4} (-1)^{\left[\frac{h}{\pi}\right]}$$

facile conseguenza di quella testè ricordata. Se si divide $(0, \infty)$ in infiniti int

* *Oeuvres*, t. I, p. 402.

valli, il primo dei quali abbia la grandezza h, e gli altri una grandezza doppia, si trova come valore dell'integrale

$$\lim_{h=0}(\operatorname{sen} h + {}^1/_3 \operatorname{sen} 3h + {}^1/_5 \operatorname{sen} 5h + \ldots) = {}^1/_2\pi - \lim_{h=0} \operatorname{sen} h = {}^1/_2\pi .$$

Si noti che si ha pure

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx = \lim_{h=0} \frac{1}{h} (\operatorname{sen}^2 h + {}^1/_4 \operatorname{sen}^2 2h + {}^1/_9 \operatorname{sen}^2 3h + \ldots)$$

$$= \lim_{h=0}(\operatorname{sen} 2h + {}^1/_2 \operatorname{sen} 4h + {}^1/_3 \operatorname{sen} 6h + \ldots) :$$

quindi

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx = \lim_{h=0} \frac{\pi - 2h}{2} = \frac{\pi}{2} ,$$

sicchè i due integrali valgono entrambi ${}^1/_2\pi$, quantunque il secondo abbia gli elementi inferiori, in valore assoluto, a quelli del primo: ciò si spiega osservando che tali elementi son tutti positivi, mentre quelli del primo sono alternativamente positivi e negativi negli intervalli $(0, \pi), (\pi, 2\pi), (2\pi, 3\pi), \ldots$

g) Calcolando $\int_0^1 \log(-\log x)dx$ mediante la (6), si è condotti a cercare il limite di

$$(1-q)\left\{\log(-\log q) + q\log(-2\log q) + q^2\log(-3\log q) + \ldots\right\}$$

$$= \log(-\log q) + \sum_1^\infty q^n \log\frac{n+1}{n} = \log\frac{\log q}{q-1} - \sum_1^\infty q^n\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) .$$

per $q < 1$ tendente ad 1. In virtù del teorema di Abel (§ 99) si ha

$$\lim_{q=1-0} \sum_1^\infty q^n\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n=\infty}(\mathrm{H}_n - \log n) .$$

È noto (§ 73, *j*) che questo limite esiste, ed è la *costante di Eulero*. Si ottiene così il valore, trovato da Mascheroni,

$$\int_0^1 \log(-\log x)dx = -0{,}5772156\,64\ldots..$$

h) Proponiamoci ora di calcolare l'importante integrale $\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx$, che si chiama *integrale euleriano* di seconda specie: il suo valore è il limite, per h tendente a zero, di

$$h^\mu(1^{\mu-1}e^{-h} + 2^{\mu-1}e^{-2h} + 3^{\mu-1}e^{-3h} + \ldots) ,$$

cioè, ponendo $e^{-h} = q$, e richiamando un precedente risultato (§ 101, *f*),

$$\lim_{q=1} h^{\mu-1}(1^{\mu-1}q + 2^{\mu-1}q^2 + 3^{\mu-1}q^3 + \ldots) = \Gamma(\mu) \lim_{h=0}\left(\frac{h}{1-e^{-h}}\right)^\mu = \Gamma(\mu) .$$

Dunque

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx = \Gamma(\mu) .$$

i) Dalla nota * proprietà $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\mathrm{sen}\,\pi x$ si deduce, ricordando la formola invocata nel quarto esempio,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\mathrm{sen}\frac{\pi}{n}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}\dots\mathrm{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}}} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}{\sqrt{n}} ,$$

come, del resto, si può anche direttamente dedurre dalla definizione stessa (§ 13, *h*) della funzione Γ. Ciò premesso, si ha

$$\lim_{h=0} h\log\Gamma(h)\Gamma(2h)\dots\Gamma(nh) = \lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\left\{(n-1)\log\sqrt{2\pi} - \log\sqrt{n}\right\} ,$$

e per conseguenza

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)dx = \log\sqrt{2\pi} .$$

Ora si può, seguendo Lerch, calcolare, più generalmente, il medesimo integrale fra i limiti μ e $\mu+1$, qualunque sia $\mu > 0$. Designiamone il valore con $f(\mu)$, ed osserviamo che

$$f(\mu) = \int_a^{\mu+1} - \int_a^{\mu} , \quad f'(\mu) = \log\Gamma(\mu+1) - \log\Gamma(\mu) = \log\mu .$$

Ne segue, in virtù d'un risultato precedente, $f(\mu) = \mu(\log\mu - 1) + f(0)$, e si giunge così alla *formola di Raabe*

$$\int_\mu^{\mu+1} \log\Gamma(x)dx = \mu\log\mu - \mu + \log\sqrt{2\pi} .$$

323. Integrazione immediata. Il metodo indicato e svolto nei paragrafi precedenti è, nella maggior parte dei casi, praticamente inattuabile, in quanto che ci manda incontro a difficoltà (ricerche di somme), per superare le quali occorre appunto (§ 110) la conoscenza della funzione primitiva F della funzione f da integrare. I vantaggi che sembra presentare la doppia arbitrarietà del modo di spezzare l'intervallo d'integrazione in parti infinitesime, e della scelta dei valori della funzione, sono puramente illusorii. Infatti, qualunque legge si segua per la divisione dell'intervallo, è ovvio che il *miglior* modo di scegliere i valori di f consisterebbe proprio nel prendere, per ciascun intervallo parziale, quel valore di

* *Analisi algebrica*, p. 485, o *Lehrbuch der Analysis*, p. 396.

f, il cui prodotto per la grandezza dell'intervallo è uguale all'incremento che subisce F da un estremo all'altro dell'intervallo stesso, giacchè in tal modo la somma di cui si dovrebbe cercare il limite risulterebbe immediatamente uguale (§ 310) al valore dell'integrale. Con ciò si vede che quel metodo, per l'eccessiva generalità sua, non ci somministra un mezzo preciso per vincere la difficoltà essenziale, che risiede appunto nella conoscenza della funzione primitiva F. Miglior consiglio è dunque affidarsi alle conoscenze già acquistate (§§ 47-50) nel calcolo delle derivate, ed in base al teorema dimostrato nel § 314 scrivere immediatamente

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C \quad , \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \, ,$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C \quad , \quad \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C \quad , \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \, ,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C \quad , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C \, ;$$

poi, tenendo sempre presenti i valori di questi otto integrali, cercare di ridurre ad essi, con opportuni artificii, tutti gli altri che si ha l'occasione d'incontrare nella pratica del calcolo.

324. **Esempii**: *a)* Spesso s'incontrano integrali della forma

$$\int \frac{du}{u} = \log|u| + C \, .$$

Per esempio

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log|\cos x| + C \, ,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{{}^1/_2 \, dx}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C \, ,$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int\left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = x - \log(e^x+1) + C \, ,$$

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}\,dx = 2\int \frac{d\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}$$

$$= 2\log\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) + C = \log(e^x + e^{-x} + 2) + C \, ,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1} = \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = {}^1/_2 \int \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx + {}^1/_2 \int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$$

$$= {}^1/_2 \left\{ x + \log|\operatorname{sen} x + \cos x| \right\} + C \, .$$

b) Il calcolo di $\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x}$ si esegue rapidamente ponendo

$$a/\cos\alpha = b/\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{a^2+b^2} \ .$$

L' integrale diventa

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log |\operatorname{tg} {}^1/_2 (x+\alpha)| + C \ ;$$

poi, sostituendo ad α il suo valore $\operatorname{arctg}(b/a)$, si trova

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \left| \frac{b \operatorname{sen} x - a \cos x + \sqrt{a^2+b^2}}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} \right| + C \ .$$

c) Sono anche frequentissimi gli integrali della forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \ .$$

Per esempio

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C \ ,$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} \ldots$$

Similmente, se si osserva che $\int u du = {}^1/_2 u^2 + C$, si ottengono immediatamente risultati

$$\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = {}^1/_2 (\operatorname{arc\,sen} x)^2 + C \quad , \quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\, dx = {}^1/_2 (\operatorname{arc\,tg} x)^2 + C \ .$$

d) Altri esercizii:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C \ ,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \cos^2 x\, dx = {}^1/_2 \int (1+\cos 2x) dx = {}^1/_2 x + {}^1/_2 \int \cos 2x\, dx = {}^1/_2 (x + \operatorname{sen} x \cos x) + C$$

Più generalmente, fondandosi sulla formola di trigonometria

$$\cos mx \cos nx = {}^1/_2 \left\{ \cos(m-n)x + \cos(m+n)x \right\} \ ,$$

si può calcolare qualunque integrale della forma $\int \cos\alpha x . \cos\beta x . \cos\gamma x \ldots dx$. Per esempio, dato a calcolare l' integrale di $\cos x \cos 2x \cos 3x . dx$, si ha

$$\cos x \cos 2x = {}^1/_2 (\cos x + \cos 3x) \ ;$$

quindi

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = {}^1/_4 (1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) \ ;$$

finalmente

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx = {}^1/_4 (x + {}^1/_2 \operatorname{sen} 2x + {}^1/_4 \operatorname{sen} 4x + {}^1/_6 \operatorname{sen} 6x) + C \ .$$

e) Altri integrali sono riducibili alla forma $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$. Sia dato a calcolare, per esempio, l'integrale

$$\int \frac{x^2 dx}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2},$$

proposto da Hermite *. Seguendo la via semplicissima, indicata da W. W. Beman, si può, dopo avere osservato che

$$x\cos x - \operatorname{sen} x = \left(\cot x - \frac{1}{x}\right) x \operatorname{sen} x = (x - \operatorname{tg} x)\cos x ,$$

scindere la funzione da integrare in

$$\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}}{\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)^2} + \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{(x - \operatorname{tg} x)^2};$$

quindi, poichè

$$d\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{x^2}\right)dx \quad , \quad d(x - \operatorname{tg} x) = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx ,$$

si trova la funzione primitiva

$$\frac{1}{\cot x - \frac{1}{x}} + \frac{1}{x - \operatorname{tg} x} = \frac{x \operatorname{sen} x + \cos x}{x\cos x - \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \frac{1}{x}}{1 - \frac{\operatorname{tg} x}{x}};$$

e finalmente

$$\int \frac{x^2 dx}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2} = \operatorname{tg}\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right) + C .$$

325. **Integrazione per sostituzione.** Per calcolare $\int f(x)dx$ è spesso conveniente assumere un'altra variabile $t = \varphi(x)$. Se da questa relazione si può ricavare $x = \psi(t)$, dimodochè $dx = \psi'(t)dt$, è chiaro che

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt ,$$

e può darsi che sotto la nuova forma l'integrale sia più facilmente calcolabile. Se la prima integrazione si estende fra i limiti a e b, la seconda dovrà estendersi da $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$, purchè t varii, fra questi limiti, sempre in un senso, e si mantenga continua, nel qual caso si potrà evidente-

* *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, p. 260.

mente scrivere

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt\,, \tag{7}$$

rappresentando, per brevità, con $g(t)$ la funzione $f(\psi(t))\psi'(t)$. Se, invece, mentre x varia sempre in un senso da a fino a b, t varia prima in un senso fino ad $x=c_1$, poi in senso opposto fino ad $x=c_2$, *ecc.*, bisogna scindere la seconda integrazione in due o più integrazioni, estese ad intervalli, in ciascuno dei quali sia soddisfatta la condizione che t varia, con continuità, sempre in un senso; e si avrà

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c_1)} g_1(t)dt + \int_{\varphi(c_1)}^{\varphi(c_2)} g_2(t)dt + \dots\,,$$

chiamando $g_1(t)$ la $g(t)$, calcolata in base all'espressione $\psi_1(t)$ di x nell'intervallo $(a\,,c_1)$, come $g_2(t)$ è calcolata in base all'espressione $\psi_2(t)$ di x in $(c_1\,,c_2)$, e così via. Per esempio, se t, nel variare di x da a fino a b, partendo dal valore $\alpha=\varphi(a)$ ritorna a questo valore $\alpha=\varphi(b)$ passando (necessariamente) per un minimo o per un massimo $\beta=\varphi(c)$, è chiaro che i valori di x nell'intervallo $(a\,,c)$ saranno rappresentati da una funzione $\psi_1(t)$, e nell'intervallo $(c\,,b)$ da un'altra funzione $\psi_2(t)$, giacchè ad ogni valore di t, compreso fra α e β, debbono corrispondere due valori di x. Ne segue

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta g_1(t)dt + \int_\beta^\alpha g_2(t)dt = \int_\alpha^\beta \{g_1(t) - g_2(t)\}\,dt\,,$$

mentre, se non si avesse cura di fare questa osservazione, si potrebbe cadere nel grossolano errore di affermare che l'integrale è nullo perchè $\int_\alpha^\alpha = 0$. Ciò valga a mostrare la necessità, quando si vogliono stabilire i limiti della nuova integrazione, di studiare attentamente il modo di variare della nuova variabile. Se poi questa avesse discontinuità, per esempio una discontinuità ordinaria nel punto $x=c$, è chiaro che si dovrebbe scrivere

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c-0)} g(t)dt + \int_{\varphi(c+0)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt - \int_{\varphi(c-0)}^{\varphi(c+0)} g(t)dt\,.$$

Ciò accade anche quando $\varphi(x)$, cambiando segno, diventa infinita per $x=c$, nel qual caso si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\pm\infty} g(t)dt + \int_{\mp\infty}^{\varphi(b)} g(t)dt\,,$$

pervenendo così ad un valore generalmente diverso da quello che si otterrebbe applicando ciecamente la (7), giacchè, se con $G(t)$ si designa l'integrale indefinito di $g(t)dt$, ne differisce per $G(\pm\infty)-G(\mp\infty)$.

326. **Esempii:** *a)* Ponendo successivamente $x=at$, a/t, $a(1-t)$, si calcolano i seguenti integrali:

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C\,,$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\mp\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pm\frac{1}{a}\arccos t+C=\pm\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C\,,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\mp\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pm\arccos t+C=\pm\arccos\frac{a-x}{a}+C\,.$$

Nell'ultimo esempio si debbono prendere i segni superiori o i segni inferiori secondo che a è positivo o negativo. Lo stesso si deve fare nel penultimo, secondo che si vuole estendere l'integrazione a valori positivi o a valori negativi di x; e del resto dall'uno all'altro di questi casi si passa cambiando x in $-x$, ed osservando che $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$. Il doppio segno si deve ai radicali quadratici, che si suppongono presi sempre col segno $+$, sicchè, per esempio, si ha $\sqrt{cx^2}=|x|\sqrt{c}$, e non $\sqrt{cx^2}=x\sqrt{c}$.

b) Mercè la sostituzione $x=\cos\theta$ si calcolano questi altri integrali:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=-2\int\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=-(\theta-\operatorname{sen}\theta)+C=\operatorname{arc\,sen}x+\sqrt{1-x^2}+C'\,,$$

$$\sqrt{1-x^2}\,dx=-\int\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta=-{}^1/_2(\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta)+C={}^1/_2\left(\operatorname{arc\,sen}x+x\sqrt{1-x^2}\right)+C'\,,$$

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\cos^2\theta\,d\theta=-{}^1/_2(\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta)+C={}^1/_2\left(\operatorname{arc\,sen}x-x\sqrt{1-x^2}\right)+C'\,.$$

Invece per calcolare $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ conviene porre $x=\cot\theta$, supponendo $\operatorname{sen}\theta>0$, ciò che non limita la variabilità di x. L'integrale si trasforma in

$$-\int\frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\log\cot\frac{\theta}{2}+C=\log\frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+C\,.$$

Dunque

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C\,.$$

c) Proponiamoci di calcolare $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$, l'integrale si trasforma in

$$\tfrac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{dx}{x^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}-\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Di questi quattro integrali il primo ed il secondo si trasformano, mercè la sostituzione $x=1/t$, in

$$-\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}=-\sqrt{t^2+1}+c'\quad,\quad-\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}=-\sqrt{t^2-1}+c''\ ;$$

il terzo è stato calcolato precedentemente, ed il quarto vale $\operatorname{arcsen} x+c'''$. Dunque

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}+\tfrac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\tfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x+C\,.$$

d) Per calcolare $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$ supponiamo prima $q>\tfrac{1}{4}p^2$, e facciamo $x+\tfrac{1}{2}p=t\sqrt{q-\tfrac{1}{4}p^2}$, dimodochè $dx=\sqrt{q-\tfrac{1}{4}p^2}.dt$, e

$$x^2+px+q=(x+\tfrac{1}{2}p)^2+(q-\tfrac{1}{4}p^2)=(q-\tfrac{1}{4}p^2)(1+t^2)\,.$$

Si ottiene subito

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{\sqrt{q-\tfrac{1}{4}p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\tfrac{1}{2}p}{\sqrt{q-\tfrac{1}{4}p^2}}+C\,.$$

Invece, se $q<\tfrac{1}{4}p^2$, si ponga $x+\tfrac{1}{2}p=t\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$. L'integrale dato si trasforma in

$$\int\frac{dt}{t^2-1}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-\tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}=\tfrac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\,,$$

diviso per $\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$. Dunque

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}}\log\left|\frac{x+\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}}{x+\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}}\right|+C\,.$$

Del resto le due forme dell'integrale si equivalgono in virtù delle relazioni

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}\quad,\quad\log x=2i\operatorname{arc\,tg}\left(i\,\frac{1-x}{1+x}\right),$$

facili conseguenze d'una nota formola * di Eulero.

* *Analisi algebrica*, p. 312.

e) Quasi senza calcolo si determinano i valori degli integrali

$$\int_0^{1/2\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx \quad , \quad \int_0^{1/2\pi} \cos^2 x\,dx$$

se si osserva che ciascuno di essi si cambia nell'altro quando ad x si sostituisce $1/2\,\pi - x$, e che la loro somma è $\int_0^{1/2\pi} dx = 1/2\,\pi$. Il comune valore dei due integrali è dunque $1/4\,\pi$. Similmente, cambiando x in $\pi - x$, si ottiene subito

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx = 1/2\,\pi \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx = 1/2\,\pi(\operatorname{arctg}\cos x)_\pi^0 = 1/4\,\pi^2.$$

f) In modo analogo si riesce a determinare l'integrale $\int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen} x\,dx$, già calcolato precedentemente (§ 322, *d*). Si ha

$$\int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{1/2\pi} \log\cos x\,dx = 1/2 \int_0^{1/2\pi} \log(\operatorname{sen} x \cos x)\,dx \;,$$

cioè, cambiando x in $1/2\,x$ nell'ultimo integrale,

$$\int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen} x\,dx = 1/4 \int_0^\pi \log(1/2 \operatorname{sen} x)\,dx = -\,1/4\,\pi \log 2 + 1/4 \int_0^\pi \log \operatorname{sen} x\,dx \;.$$

Se poi, cambiando x in $\pi - x$, si osserva che

$$\int_{1/2\pi}^\pi \log \operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen} x\,dx \;,$$

si può anche scrivere

$$\int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen} x\,dx = -\,1/4\,\pi \log 2 + 1/2 \int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen} x\,dx \;,$$

d'onde si trae $\int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen} x\,dx = -\,1/2\,\pi \log 2.$

g) Similmente si ha, mercè il cambiamento di x in $1 - x$,

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx = \int_0^1 \log\Gamma(1-x)\,dx = 1/2 \int_0^1 \log\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}\,dx$$

$$= 1/2 \log\pi - 1/2 \int_0^1 \log \operatorname{sen}\pi x \,.\, dx.$$

L'ultimo integrale, se vi si pone $\pi x = \theta$, diventa

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\pi} \log \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\log 2 \ .$$

Dunque (*cfr.* § 322, *i*)

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \log \sqrt{2\pi} \ .$$

h) Dato a calcolare $\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx$, che per $a = 0$ si riduce all'integr[ale] di Poisson (§ 322, *e*), si cambii x in a/x, prendendo $a > 0$. L'integrale pro[po]sto si trasforma in $-\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} d\frac{a}{x}$, ed è per conseguenza uguale a

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} d\left(x-\frac{a}{x}\right) = \frac{1}{2}e^{-2a}\int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2} d\left(x-\frac{a}{x}\right) .$$

Ora, se si cambia $x - \dfrac{a}{x}$ in x, è chiaro che, quando l'antica x va da 0 [al]l'infinito, la nuova va da $-\infty$ a ∞, *sempre crescendo*, sicchè

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{1}{2}e^{-2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^{2a}} \ .$$

i) Per calcolare $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{1 - k\cos x}$, dove k è da supporre non maggiore di 1 [in] valore assoluto, si divida per metà l'intervallo d'integrazione, e nella metà [de]stra si cambii x in $\pi - x$. L'integrale diventa

$$\int_0^{1/2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{1 - k\cos x} + \int_0^{1/2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{1 + k\cos x} = 2\int_0^{1/2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{1 - k^2\cos^2 x} \ .$$

Se si pone $\operatorname{tg} x = t$, l'ultimo integrale si trasforma in

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1-k^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{k^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1-k^2}{1-k^2+t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\operatorname{arc\,tg} t - \sqrt{1-k^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{1-k^2}}\right)_0^{\infty} = \frac{\pi}{2k^2}\left(1-\sqrt{1-k^2}\right) ,$$

sicchè

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{1 - k\cos x} = \frac{\pi}{1 + \sqrt{1 - k^2}} .$$

j) Per mostrare come si debba andar cauti, quando si cambia la variabile d'integrazione, nel fissare i nuovi limiti, osserviamo che, se si tenesse conto unicamente dei valori estremi della nuova variabile, si correrebbe il rischio di pervenire a risultati assurdi come questo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{d\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = -\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = 0 .$$

Evidentemente il valore dell'integrale è $\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg}(-1) = {}^1/_2\pi$. L'errore sta in ciò che, quando si cambia x in $1/x$, l'intervallo $(-1, 1)$ non si trasforma in sè stesso, sì bene in $(-1, -\infty) + (\infty, 1)$, dimodochè si ha

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \int_{-1}^{-\infty} \frac{d\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} + \int_{\infty}^{1} \frac{d\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} ;$$

quindi, cambiando anche x in $-x$ nel primo dei due integrali del secondo membro,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = 2\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} .$$

k) Quando si presenta un integrale della forma

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)dx}{1 + \varphi^2(x)} , \qquad (8)$$

si è naturalmente condotti ad assumere come nuova variabile $t = \varphi(x)$. Così, purchè $\varphi(x)$ si mantenga finita e continua in (a, b), si ha subito, come valore dell'integrale,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arc\,tg} \varphi(b) - \operatorname{arc\,tg} \varphi(a) ;$$

ma, quando $\varphi(x)$ soffre discontinuità fra i limiti dell'integrazione, bisogna ricordarsi delle osservazioni fatte in fine del precedente paragrafo. Se, per esempio, in un sol punto c, fra a e b, la funzione φ cambia segno passando per l'infinito, l'integrale proposto si scinde in

$$\int_{\varphi(a)}^{\pm\infty} d \operatorname{arc\,tg} t + \int_{\mp\infty}^{\varphi(b)} d \operatorname{arc\,tg} t = \left(\pm\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\varphi(a)\right) + \left(\operatorname{arc\,tg}\varphi(b) \pm \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \operatorname{arc\,tg}\varphi(b) - \operatorname{arc\,tg}\varphi(a) \pm \pi ;$$

e però, più generalmente, se nel crescere continuo di x da a fino a b accade ch $\varphi(x)$ diventa infinita k volte passando dal positivo al negativo, e k' volte pa sando dal negativo al positivo, si ha

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)\,dx}{1+\varphi^2(x)} = \operatorname{arc\,tg}\varphi(b) - \operatorname{arc\,tg}\varphi(a) + (k-k')\pi \ .$$

l) Nel medesimo tipo (8) si può far rientrare l'integrale $\int_0^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2}$ giacchè la funzione $\varphi(x) = x - [x]$ ha la derivata $\varphi'(x) = 1$, esclusa la sinist di ciascun valore intero di x, dove cessa la continuità di φ. A tali discontinui si deve se, per $x \geq 1$, il valore dell'integrale non è $\operatorname{arc\,tg}(x-[x])$, come si p facilmente constatare scrivendo

$$\int_0^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=[x]-1} \int_\nu^{\nu+1} \frac{dx}{1+(x-\nu)^2} + \int_{[x]}^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=[x]-1} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{x-[x]} \frac{dx}{1+x^2} = {}^1/_4\pi[x] + \operatorname{arc\,tg}(x-[x]) \ .$$

Più generalmente

$$\int_0^x f(x-[x])dx = [x]\int_0^1 f(x)dx + \int_0^{x-[x]} f(x)dx \ .$$

m) L'integrale $\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$ si calcola immediatamente mercè sostituzione $x^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta$, che lo trasforma in $\int d\theta$, sicchè

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}} + C \ .$$

Similmente, per calcolare $\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,xdx$, si ponga $x = a\cos^2\frac{\theta}{2} + b\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$ d'onde segue

$$x-a = (b-a)\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \ , \quad b-x = (b-a)\cos^2\frac{\theta}{2} \ , \quad dx = {}^1/_2(b-a)\operatorname{sen}\theta\, d$$

L'integrale proposto diventa

$$\frac{b-a}{8}\int\left(a+3b-4b\cos\theta+(b-a)\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{b-a}{8}\left((a+3b)\theta - 4b\operatorname{sen}\theta + (b-a)\operatorname{sen}\theta\cos\right.$$

quindi

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,xdx = {}^1/_4(b-a)(a+3b)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + {}^1/_4(a-3b-2x)\sqrt{(x-a)(b-x)} +$$

In particolare

$$\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\, x\,dx = \frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)\ .$$

n) La medesima sostituzione potrebbe servire a calcolare il valore dell'integrale

$$\mathfrak{I} = \int_a^b [(x-a)(b-x)]^{-3/2} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{x-a}+\frac{\beta^2}{b-x}\right)} dx\ ,$$

incontrato da Beltrami nel trattare * un problema di propagazione del calore; ma noi vogliamo qui seguire la via indicata dallo stesso Beltrami, assumendo come variabile d'integrazione

$$t = {}^1/_2 \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{x-a}{b-x}\right),$$

con α e β positivi. Essendo

$$\frac{x-a}{\alpha e^t} = \frac{b-x}{\beta e^{-t}} = \frac{b-a}{\alpha e^t + \beta e^{-t}}\ ,$$

si trova subito

$$2\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x} = \frac{(\alpha e^t+\beta e^{-t})^2}{\alpha\beta(b-a)}\ ;$$

poi

$$\mathfrak{I} = \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}(b-a)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta(e^{2t}+e^{-2t})}{b-a}}\cdot(\alpha e^t+\beta e^{-t})dt\ .$$

Basta cambiare t in $-t$, e prendere la media aritmetica delle due espressioni, per trovare

$$\mathfrak{I} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}(b-a)^{-2} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha\beta}{b-a}(e^t-e^{-t})^2} d(e^t-e^{-t})\ .$$

È naturale assumere come nuova variabile d'integrazione $\theta = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{b-a}}(e^t-e^{-t})$, che varia evidentemente, crescendo sempre, da $-\infty$ a $+\infty$, sicchè, ricordando il valore dell'integrale di Poisson (§ 322, *e*),

$$\mathfrak{I} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-3/2} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2}d\theta = \sqrt{\pi}\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-3/2} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}\ .$$

o) È facile porre la funzione di Kronecker (§ 13, *e*) sotto forma d'integrale definito. Infatti, se nell'integrale di Dirichlet (§ 322, *f*) si cambia x in $\pm kx$, se-

* *Memorie dell'Accademia di Bologna*, 4ª serie, t. VIII.

condo che k è positivo o negativo, si ottiene

$$^1/_2\pi = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pm \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} kx}{x}\,dx \ :$$

e poichè, per $k = 0$, il secondo integrale è nullo, si vede che

$$\operatorname{sgn} k = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} kx}{x}\,dx \ . \tag{9}$$

In modo analogo si dimostra che

$$|k| = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 kx}{x^2}\,dx \ . \tag{10}$$

Da questi risultati è facile dedurne altri, alquanto più generali. Proponiamoci, per esempio, di calcolare gli integrali

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} \alpha x \,.\, \cos \beta x \,.\, \frac{dx}{x} \quad , \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} \alpha x \,.\, \operatorname{sen} \beta x \,.\, \frac{dx}{x^2} \ , \tag{11}$$

che si riducono agli integrali (9) e (10) per $\beta = 0$ e $\beta = \alpha$, rispettivamente. Il primo si scinde subito in

$$^1/_2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)x}{x}\,dx + {}^1/_2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)x}{x}\,dx \ ;$$

e però, in virtù di (9),

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} \alpha x \,.\, \cos \beta x \,.\, \frac{dx}{x} = {}^1/_4 \pi \left\{ \operatorname{sgn}(\alpha + \beta) + \operatorname{sgn}(\alpha - \beta) \right\} .$$

In altri termini l'integrale considerato ha rispettivamente i valori

$$^1/_2 \pi \operatorname{sgn} \alpha \quad , \quad {}^1/_4 \pi \operatorname{sgn} \alpha \quad , \quad 0 \ ,$$

secondo che il valore assoluto di β è inferiore, uguale o superiore a quello di α. Similmente il secondo integrale (11) si scinde in

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 \dfrac{\alpha + \beta}{2} x}{x^2}\,dx - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 \dfrac{\alpha - \beta}{2} x}{x^2}\,dx \ ,$$

e però, per la (10), vale $^1/_4 \pi \left\{ |\alpha + \beta| - |\alpha - \beta| \right\}$. In altri termini, se si designa con α il più piccolo, in valore assoluto, dei numeri α, β, si ha

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} \alpha x \,.\, \operatorname{sen} \beta x \,.\, \frac{dx}{x^2} = {}^1/_2 \pi \alpha \operatorname{sgn} \beta \ .$$

Innumerevoli altri integrali si possono ricavare dai precedenti mercè l'ausilio della trigonometria. Così, elevando alla n^{ima} potenza $2i\,\mathrm{sen}\,x = e^{ix} - e^{-ix}$, si trova facilmente, per n *dispari*,

$$\mathrm{sen}^n x = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \left\{ \mathrm{sen}\,nx - \frac{n}{1}\,\mathrm{sen}(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\mathrm{sen}(n-4)x - \ldots \pm \ldots \mathrm{sen}\,x \right\};$$

quindi, moltiplicando i due membri per $\mathrm{sen}\,x\,\frac{dx}{x^2}$, ed integrando, dopo aver richiamata l'identità

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu} = \pm \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu)}{1.2.3\ldots\nu},$$

segnalata in fine del § 91, si ottiene, cambiando ancora n in $2n-1$, ed x in $1/x$,

$$\int_0^\infty \left(\mathrm{sen}\frac{1}{x}\right)^{2n} dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

A misura che n cresce, l'integrale tende a zero assintoticamente ad $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

327. **Integrazione per parti.** Siano u e v due funzioni di x. Dalla formola $duv = udv + vdu$ si deduce, integrando,

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (12)$$

Questa relazione permette di calcolare $\int udv$ quando è noto $\int vdu$: ciò si chiama *integrare per parti*. Proposta un'integrazione, si può in infiniti modi dare alla funzione da integrare la forma $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, in guisa che $\psi(x)dx$ sia il differenziale d'una funzione *nota* v; ma bisogna aver cura di scegliere $\psi(x)$ in modo che l'integrazione di $v\varphi'(x)dx$ si presenti più facile di quella di $f(x)dx$. Si vede perciò che l'integrazione per parti (come quella per sostituzione) è da considerare soltanto come un procedimento atto a facilitare il calcolo d'un integrale, preparandolo all'integrazione immediata. Non è tuttavia infrequente il caso che nel secondo membro della (12) comparisca l'integrale stesso che si vuol calcolare, con un coefficiente diverso dall'unità. In tali casi l'integrazione per parti riesce un vero e proprio metodo d'integrazione, poichè dalla relazione (12) si trae allora, senza ulteriori calcoli, il valore dell'integrale proposto.

328. **Esempii**: *a)* Si calcola subito l'integrale di $\sqrt{1-x^2}\,dx$ scrivendo

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il secondo integrale si scinde in

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen} x - \int \sqrt{1-x^2}\, dx \ .$$

Dunque (*cfr.* § 326, *b*)

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = {}^1/_2 (x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc\,sen} x) + C \ .$$

b) Per calcolare gli integrali di $\operatorname{sen}\log x . dx$ e $\cos\log x . dx$ si noti che l'integrazione per parti, applicata ad entrambi, dà

$$\int \operatorname{sen}\log x . dx = x \operatorname{sen}\log x - \int \cos\log x . dx \ , \quad \int \cos\log x . dx = x\cos\log x + \int \operatorname{sen}\log x . dx \ ;$$

d' onde si trae

$$\int \operatorname{sen}\log x . dx = \frac{x}{2}(\operatorname{sen}\log x - \cos\log x) + C \ , \quad \int \cos\log x . dx = \frac{x}{2}(\operatorname{sen}\log x + \cos\log x) + C$$

Similmente, applicando l'integrazione per parti agli integrali di

$$e^x \operatorname{sen} x . dx \quad , \quad e^x \cos x . dx \ ,$$

si ottiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = - e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \quad , \quad \int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x dx \ :$$

quindi

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = {}^1/_2 e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C \quad , \quad \int e^x \cos x dx = {}^1/_2 e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + C \ .$$

Del resto questi integrali non differiscono sostanzialmente dai precedenti, ai quali si riducono infatti mercè la sostituzione $x = \log t$.

c) Analogamente si ha

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x d \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \cos x + x - \int \cos^2 x dx = {}^1/_2 (x + \operatorname{sen} x \cos x) + C \ ,$$

$$\int x \cos x dx = \int x d \operatorname{sen} x = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C \ ,$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = 2x \operatorname{sen} x + (2 - x^2)\cos x + C \ ,$$

$$\int x^n \cos x dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sen} x dx = x^n \operatorname{sen} x + n x^{n-1}\cos x - n(n-1)\int x^{n-2}\cos x dx$$

$$= (x^n - n(n-1)x^{n-2} + \dots)\operatorname{sen} x + (n x^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots)\cos x + C \ ,$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x . dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \log\sqrt{1+x^2} + C \ ,$$

$$\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x\log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C \ ,$$

$$\int \log(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx = x\log(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + {}^1/_2(\operatorname{arc\,sen} x - x) + C \ ,$$

$$\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\int e^x d\sqrt{e^x - 1} = 2e^x\sqrt{e^x - 1} - 2\int e^x \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$= 2e^x\sqrt{e^x - 1} - 2\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}} + 2\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}} = {}^2/_3 (e^x + 2)\sqrt{e^x - 1} + C \ ,$$

$$\int \frac{x dx}{(e^x + e^{-x})^2} = {}^1/_4 \int x d\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = {}^1/_4 \left(x\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \log(e^x + e^{-x}) \right) + C \ .$$

In particolare

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(e^x+e^{-x})^2} = {}^1/_4 \log 2 \; .$$

Finalmente, se si pone $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\theta$, sicchè $x=\cot\theta$, si trova, integrando per parti,

$$\int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{\theta=0} \theta^2\cot\theta + 2\int_0^{{}^1/_2\pi} \theta\cot\theta\, d\theta \;,$$

e per conseguenza (§ 326, f)

$$\int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)^2 dx = 2\int_0^{{}^1/_2\pi} \theta\, d\log \operatorname{sen}\theta = -2\int_0^{{}^1/_2\pi} \log\operatorname{sen}\theta\,.\,d\theta = \pi\log 2 \; .$$

d) Per calcolare * l'integrale di $\frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos x}e^x dx$, si applichi l'integrazione per parti

$$\int \frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos x} e^x dx = \frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos x} e^x - \int \frac{1+\cos x+\operatorname{sen}x}{(1+\cos x)^2} e^x dx \;,$$

ed all' ultima espressione differenziale si dia la forma

$$\frac{e^x dx}{1+\cos x} + \frac{e^x \operatorname{sen} x\, dx}{(1+\cos x)^2} = \frac{de^x}{1+\cos x} + e^x d\,\frac{1}{1+\cos x} = d\,\frac{e^x}{1+\cos x} \; .$$

Ne segue

$$\int \frac{1+\operatorname{sen}x}{1+\cos x} e^x dx = e^x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C \; .$$

Si potrebbe anche evitare l'integrazione per parti moltiplicando numeratore e denominatore per $1-\cos x$, e spezzando l'espressione da integrare in

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)e^x dx + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)e^x dx = -d(e^x\cot x) + d\,\frac{e^x}{\operatorname{sen}x} \; .$$

e) Dato a calcolare l'integrale di $x^m\log^n x\,.\,dx$ per $m>-1$, ed n intero e positivo, si trova, integrando per parti, ed applicando ripetutamente il primo risultato che si ottiene,

$$\int x^m \log^n x\,.\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \log^{n-1} x\,.\,dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log^n x - \frac{n}{m+1}\log^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\log^{n-2}x - \ldots \pm \frac{n!}{(m+1)^n}\right) + C \; .$$

---

* Dal *Glasgow University Calendar*, 1901-1902, dove il lettore potrà trovare altri utili esercizii.

In particolare, siccome per ogni $\nu > 0$, e per $m > -1$, la funzione $x^{m+1}\log^\nu x$ nulla per $x = 1$, tende ad annullarsi (§ 71, *a*) alla destra di 0, si ha

$$\int_0^1 x^m \log^n x \,.\, dx = \frac{(-1)^n . n!}{(m+1)^{n+1}} \,. \tag{13}$$

Analogamente si ottiene

$$\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x} dx$$
$$= -\left(x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \ldots + n!\right)e^{-x} + C :$$

ed in particolare, se si osserva (§ 71, *a*) che $(x^\nu e^{-x})_\infty^0 = 0$ per ogni $\nu > 0$,

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!(e^{-x})_\infty^0 = n! \tag{14}$$

Quando è noto questo risultato, è facile servirsene per calcolare l'integrale (13) mercè la sostituzione $x = e^{-\frac{t}{m+1}}$. Infatti

$$\int_0^1 x^m \log^n x \,.\, dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \frac{(-1)^n . n!}{(m+1)^{n+1}} \,.$$

Del resto la formola (14) è inclusa in un'altra dimostrata (§ 322, *h*) precedentemente, giacchè $n!$ è il valore di $\Gamma(n+1)$ per n intero.

f) L'integrazione per parti, applicata agli integrali

$$a_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} \cos x \, dx \quad , \quad b_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \,,$$

dà

$$a_n = (x^n e^{-x} \operatorname{sen} x)_0^\infty - \int_0^\infty (nx^{n-1} - x^n) e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \,,$$

$$b_n = (x^n e^{-x} \cos x)_\infty^0 + \int_0^\infty (nx^{n-1} - x^n) e^{-x} \cos x \, dx \,,$$

ossia

$$a_n = b_n - nb_{n-1} \quad , \quad b_n = -a_n + na_{n-1} \,.$$

Queste relazioni si compendiano nell'unica $c_n = \frac{1}{2}(1+i)nc_{n-1}$ ponendo $a_n + i$ con $i^2 = -1$, uguale a c_n. Ne segue, dopo avere osservato che $c_0 = \frac{1}{2}(1 +$

$$c_n = n!\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} = n!\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} e^{(n+1)\frac{i\pi}{4}} \,.$$

unque

$$a_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \cos(n+1)\frac{\pi}{4} \quad , \quad b_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{4} .$$

iù generalmente, se $\cos\alpha > 0$,

$$e^{-x\cos\alpha}\cos(x\operatorname{sen}\alpha)dx = n!\cos(n+1)\alpha \quad , \quad \int_0^\infty x^n e^{-x\cos\alpha}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha)dx = n!\operatorname{sen}(n+1)\alpha .$$

a queste formole si deducono le precedenti prendendo $\alpha = {}^1/_4\pi$, e cambiando x $x\sqrt{2}$.

g) Sia dato a calcolare l'integrale fra 0 ed ${}^1/_2\pi$ di $\operatorname{sen}^n x.dx$, per n intero positivo. L'integrazione per parti dà

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^n x.dx = \int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{n-1} x.d(-\cos x) = (n-1)\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x.\cos^2 x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x.dx - (n-1)\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^n x.dx ,$$

onde si trae

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^n x.dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{n-2} x.dx = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{n-4} x.dx = \dots ,$$

cchè si finisce per incontrare uno dei seguenti integrali

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} dx = {}^1/_2\pi \quad , \quad \int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen} x.dx = 1 ,$$

condo che n è pari o dispari; quindi

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^n x.dx = \begin{cases} \dfrac{1.3.5\dots(n-1)}{2.4.6\dots\dots n}\cdot\dfrac{\pi}{2} \; , & \text{se } n \text{ è } \textit{pari} ; \\[2ex] \dfrac{2.4.6\dots(n-1)}{3.5.7\dots\dots n} \; , & \text{se } n \text{ è } \textit{dispari}. \end{cases} \tag{15}$$

qui è facile dedurre la *formola di Wallis* * facendo uso delle disuguaglianze e-lenti

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{2n+1} x.dx < \int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{2n} x.dx < \int_0^{{}^1/_2\pi} \operatorname{sen}^{2n-1} x.dx .$$

* *Analisi algebrica*, p. 480.

che ora si possono trasformare in queste altre:

$$\frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)} < \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}\,.$$

Ne segue

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\,.$$

Dunque, osservando che, per n infinito, $2n/(2n+1)$ tende all'unità,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots\,.$$

Dopo ciò è facile constatare (§ 96, c) che, crescendo n, le due espressioni tendono ad assumere la forma unica $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$; vale a dire che si ha

$$\lim_{n=\infty}\sqrt{n}\int_0^{{}^1/_2\pi}\operatorname{sen}^n x\,.\,dx=\sqrt{{}^1/_2\pi}\,.$$

$b)$ L'integrale $\mathfrak{J}_n=\int_0^\infty x^n e^{-x^2}dx$ ci è noto (§ 322, e) per $n=0$, e si ca facilmente per $n=1$, giacchè si ha

$$\mathfrak{J}_1={}^1/_2\int_0^\infty e^{-x^2}d(x^2)={}^1/_2\left(e^{-x^2}\right)_\infty^0=\frac{1}{2}\,.$$

Del resto, qualunque sia n, il cambiamento di x in $\sqrt{x}$ dà $\mathfrak{J}_n={}^1/_2\Gamma\Big(\frac{n}{}$
Ma, supponendo ignorata questa relazione, il valore di $\mathfrak{J}_n$ per n intero s calcolare per parti, nel seguente modo:

$$\mathfrak{J}_n={}^1/_2\int_0^\infty x^{n-1}d\left(-e^{-x^2}\right)={}^1/_2\left(x^{n-1}e^{-x^2}\right)_\infty^0+\frac{n-1}{2}\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x^2}dx=\frac{n-1}{2}\,,$$

$$\mathfrak{J}_n=\left|\begin{array}{ll}\dfrac{1.3.5\ldots(n-1)}{2^{\frac{n}{2}}}\,\mathfrak{J}_0\,, & \text{se } n \text{ è } \textit{pari};\\[2ex] \dfrac{2.4.6\ldots(n-1)}{2^{\frac{n+1}{2}}}\,, & \text{se } n \text{ è } \textit{dispari}.\end{array}\right.$$

Ciò premesso, per calcolare $\mathfrak{J}_0$, si osservi * che l'espressione

$$\mathfrak{J}_{n+1}+2\alpha\mathfrak{J}_n+\alpha^2\mathfrak{J}_{n-1}=\int_0^\infty x^{n-1}(x+\alpha)^2e^{-x^2}dx$$

* *Stieltjes, Nouv. Annales de Mathématiques*, 1890, p. 479.

è positiva per tutti i valori reali di α, e ciò richiede che sia $\mathfrak{J}_{n-1}\mathfrak{J}_{n+1} > \mathfrak{J}_n^2$, cioè

$$\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}} \quad , \quad \text{mentre} \quad \frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n} \cdot \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \frac{2}{n} .$$

Dunque si ha

$$\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n} > \sqrt{\frac{2}{n}} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}} ,$$

e per conseguenza, successivamente,

$$\sqrt{\frac{2}{n}} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}} > \sqrt{\frac{2}{n+1}} \quad , \quad \lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{J}_n \sqrt{n}}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \sqrt{2} \quad , \quad \lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{J}_{2n}\sqrt{n}}{\mathfrak{J}_{2n+1}} = 1 .$$

Basta ora sostituire le espressioni (16) nell' ultima eguaglianza (§ 96, c) per ottenere

$$\mathfrak{J}_0 = {}^1/_2 \lim \frac{2.4.6 \ldots\ldots\ldots 2n}{1.3.5 \ldots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = {}^1/_2 \sqrt{\pi} .$$

È poi facile constatare che le (16) tendono a confondersi, per n infinito, nell'unica forma assintotica

$$\mathfrak{J}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{2e}\right)^n} .$$

i) Proponiamoci di calcolare l' integrale

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x} \cdot dx ,$$

con a e b positivi, seguendo la via indicata * da Lerch. L' integrale ci è (§ 328, c) già noto per $a = b = 1$; e fra breve ne ritroveremo il valore $k = \pi \log 2$. Più generalmente, per $a = b$, il valore dell' integrale è ka, come subito si vede cambiando x in ax. Ne segue

$$2\mathfrak{J} + k(a+b) = \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x}\right)^2 dx .$$

Intanto (§ 13, d)

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{x^2 - ab} + \left| \begin{array}{lll} \pi & , \text{ se } & x < \sqrt{ab} ; \\ 0 & , \text{ se } & x > \sqrt{ab} . \end{array} \right.$$

Dunque

$$2\mathfrak{J} + k(a+b) = \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{ab - x^2}\right)^2 dx + \int_{\sqrt{ab}}^\infty \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{x^2 - ab}\right)^2 dx$$

$$= \pi^2 \sqrt{ab} - 2\pi \int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{ab - x^2}\, dx + \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{(a+b)x}{x^2 - ab}\right)^2 dx .$$

* *Giornale di Matematiche*, Marzo 1903.

Per calcolare l'ultimo integrale si cambii x in ab/x, e si osservi che

$$\int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 dx = -\int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 d\,\frac{ab}{x} = {}^1/_2 \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 d\left(x - \right.$$

Se poi si cambia $x - \dfrac{ab}{x}$ in x, l'integrale diventa

$${}^1/_2 \int_{-\infty}^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a+b}{x}\right)^2 dx = \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a+b}{x}\right)^2 dx = k(a+b)\ .$$

Dunque

$$\mathfrak{J} = {}^1/_2\pi^2 \sqrt{ab} - \pi \int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\, dx\ .$$

Ora si potrebbe senz'altro applicare l'integrazione per parti; ma si rende più agevole il calcolo spezzando l'integrale in

$$\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,.\,dx + \int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}\,.\,dx\ .$$

Si ottiene infatti, integrando per parti,

$$\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,.\,dx = \sqrt{ab}\,.\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{a}{2}\log\frac{a+b}{a}\ ;$$

quindi

$$\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\,.\,dx = {}^1/_2\pi\sqrt{ab} - {}^1/_2\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}\ ,$$

e finalmente

$$\mathfrak{J} = \frac{\pi}{2}\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}\ .$$

j) Mostriamo, per finire, come dal primo integrale (11) possa facilmen dedursi il secondo mediante l'integrazione per parti. Essendo

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha x\,.\operatorname{sen}\beta x}{x}\right)_\infty^0 = \lim_{x=0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\operatorname{sen}\beta x = \alpha\lim_{x=0}\operatorname{sen}\beta x = 0\ ,$$

si ha

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}\alpha x\,.\operatorname{sen}\beta x\,.\frac{dx}{x^2} = \int_0^\infty \operatorname{sen}\alpha x\,.\operatorname{sen}\beta x\,.\,d\left(-\frac{1}{x}\right) = \int_0^\infty (\beta\operatorname{sen}\alpha x\cos\beta x + \alpha\operatorname{sen}\beta x\cos$$

$$= {}^1/_4\pi\beta\left\{\operatorname{sgn}(\alpha+\beta) + \operatorname{sgn}(\alpha-\beta)\right\} + {}^1/_4\pi\alpha\left\{\operatorname{sgn}(\beta+\alpha) + \operatorname{sgn}(\beta-\alpha)\right\}$$

$$= {}^1/_4\pi(\alpha+\beta)\operatorname{sgn}(\alpha+\beta) - {}^1/_4\pi(\alpha-\beta)\operatorname{sgn}(\alpha-\beta) = {}^1/_4\pi\left\{\,|\alpha+\beta| - |\alpha-\beta|\right.$$

329. Integrazione per serie. *Se in un dato intervallo finito* (a, b) *la serie di funzioni continue*

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$$

converge uniformemente, si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \int_a^b u_3(x)dx + \cdots .$$

Sappiamo infatti (§ 81) che, nelle condizioni dell'enunciato, $f(x)$ è, come le $u(x)$, una funzione continua, e per conseguenza (§ 320) integrabile, dimodochè, chiamato $\varphi_n(x)$ il *resto* della serie data, si può scrivere

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx + \int_a^b \varphi_n(x)dx .$$

Ora, dato ε positivo e piccolo quanto si vuole, si sa che si può trovare un numero tale, che per *tutti* i valori di n superiori a questo numero, e *qualunque sia* x, si abbia $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$. Dunque (§ 316, *a*) si avrà pure

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)dx\right| \leqq \int_a^b |\varphi_n(x)|dx < (b-a)\varepsilon ,$$

e conseguentemente

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = 0 \quad , \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots .$$

In particolare si noti che l'integrazione termine a termine è sempre applicabile alle serie di potenze.

330. **Esempii**: *a)* L'integrazione per serie si può adoperare per isvolgere una funzione in serie di potenze, quando è noto lo sviluppo della sua derivata. Per esempio (§ 91, *e*)

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots ,$$

$$\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

purchè non sia, nei secondi membri, $x^2 > 1$. In virtù di certe formole, segnalate precedentemente (§ 326, *d*), i due sviluppi si equivalgono, giacchè

$$\operatorname{arc\,sen} ix = \operatorname{arc\,tg} \frac{ix}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2i}\log\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x} = i\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) .$$

b) Per calcolare certi integrali definiti è spesso utile l'integrazione per serie. Così, per esempio, l'integrale di $x^x dx$ fra 0 ed 1 si calcola rapidamente facendo uso dello sviluppo (§ 91, *a*)

$$x^x = e^{x\log x} = 1 + \frac{x\log x}{1} + \frac{x^2\log^2 x}{1.2} + \frac{x^3\log^3 x}{1.2.3} + \dots .$$

Integrando, infatti, e ricordando il risultato (13), si ottiene subito

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \log^n x\, dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} ,$$

cioè

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots = 0{,}783\dots .$$

Più generalmente

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{\alpha x+\beta}\log^n x\, dx = \frac{1}{(\beta+1)^{n+1}} - \frac{(n+1)\alpha}{1!(\beta+2)^{n+2}} + \frac{(n+1)(n+2)\alpha^2}{2!(\beta+3)^{n+3}} - \dots .$$

In particolare si noti che

$$-\int_0^1 x^x \log x\, dx = \int_0^1 x^x dx .$$

c) Similmente, se si vuole l'integrale di $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \cdot \frac{dx}{x}$ fra 0 e $+\infty$, si può svolgere in serie di potenze la funzione da integrare; ma si osservi che, mentre tale sviluppo procede secondo le potenze di x nell'intervallo $(0, 1)$, in $(1, \infty)$ la funzione si deve invece sviluppare secondo le potenze di $1/x$. Si può nondimeno evitare questo secondo sviluppo limitando l'integrazione all'intervallo $(0, 1)$: basta scindere l'integrale in

$$2\int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x} + 2\int_1^\infty \log\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{dx}{x} ,$$

ed osservare che il secondo integrale, se vi si sostituisce $1/x$ ad x, diventa

$$\int_1^0 \log\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\cdot x\, d\frac{1}{x} = \int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x} .$$

Dunque l'integrale proposto vale (§ 91, *c*)

$$4\int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x} = 8\int_0^1 \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots\right)dx ,$$

ossia otto volte la somma della serie (§ 127, a)

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}-\sum_1^\infty \frac{1}{4n^2}={}^3/_4\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}={}^1/_8\pi^2\ ,$$

sicchè

$$\int_0^\infty \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{dx}{x}=\pi^2\ .$$

d) **Inversamente si può far servire l'integrazione per serie al calcolo della somma di talune serie, col dare a queste la forma d'integrali definiti. Per esempio, se si vuol conoscere la somma $1+{}^1/_2-{}^1/_4-{}^1/_5+{}^1/_7+\ldots$, basterà osservare che il suo valore è quello dell'integrale (§ 326, d)**

$$\int_0^1 (1+x-x^3-x^4+x^6+\ldots)dx=\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1-2x}{\sqrt{3}}\right)_1^0=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ .$$

Dunque

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ .$$

Similmente la somma della serie ${}^1/_2-{}^1/_3+{}^1/_5-{}^1/_6+{}^1/_8-{}^1/_9+\ldots$ è data dall'integrale

$$\int_0^1 (x-x^2+x^4-x^5+\ldots)dx=\int_0^1 \frac{xdx}{1+x+x^2}=\left(\log\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)_0^1,$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots=\log\sqrt{3}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\ .$$

e) **Il primo dei due risultati or ora ottenuti è incluso, per $\alpha={}^1/_3\pi$, nella nota formola (§ 125)**

$$\operatorname{sen}\alpha+{}^1/_2\operatorname{sen}2\alpha+{}^1/_3\operatorname{sen}3\alpha+\cdots=\frac{\pi-\alpha}{2}+\left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]\pi\ , \qquad (17)$$

che si può stabilire nello stesso modo, cioè integrando fra 0 ed 1 la somma della serie

$$\operatorname{sen}\alpha+x\operatorname{sen}2\alpha+x^2\operatorname{sen}3\alpha+x^3\operatorname{sen}4\alpha+\cdots\ .$$

Poichè $\operatorname{sen}(n-1)\alpha+\operatorname{sen}(n+1)\alpha=2\operatorname{sen}n\alpha\cos\alpha$, si ha identicamente

$$(1+x^2)\sum_1^\infty x^{n-1}\operatorname{sen}n\alpha=\operatorname{sen}\alpha+2x\cos\alpha\sum_1^\infty x^{n-1}\operatorname{sen}n\alpha\ ,$$

d'onde si trae

$$\sum_1^\infty x^{n-1}\operatorname{sen}n\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\ . \qquad (18)$$

Adunque la somma della serie (17), purchè si escludano i valori di α che annullano $\operatorname{sen}\alpha$, si può esprimere nel seguente modo:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)_0^1 = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}(\cot\alpha).$$

Essa (§ 13, *d*) vale dunque $\operatorname{arc\,tg}\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)$, giacchè $\cot\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 1$. L'espressione così ottenuta non differisce dalla (17), e rappresenta la somma della serie anche se α è un multiplo dispari di π, ma non ha significato quando α è un multiplo pari di π, nel qual caso, come si sa, anche la (17) cessa di esser valida.

f) Ad altri notevoli risultati conduce l'integrazione della (18) rispetto ad α, fra 0 ed un valore qualunque di α, eseguita lasciando x costante fra 0 ed 1 escluso, nella quale ipotesi è noto (§ 79, *b*) che la serie converge uniformemente. Si trova subito

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}(1-\cos n\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d(-x\cos\alpha)}{1-2x\cos\alpha+x^2} = {}^1/_2 \log\frac{1-2x\cos\alpha+x^2}{(1-x)^2},$$

ossia, cambiando α in 2α,

$$x\operatorname{sen}^2\alpha + {}^1/_2 x^2\operatorname{sen}^2 2\alpha + {}^1/_3 x^3\operatorname{sen}^2 3\alpha + \dots = {}^1/_4\log\frac{1-2x\cos 2\alpha+x^2}{(1-x)^2}.$$

Se poi si osserva che $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha-\beta}{2}$, si ottiene anche

$$x\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + {}^1/_2 x^2\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}2\beta + {}^1/_3 x^3\operatorname{sen}3\alpha\operatorname{sen}3\beta + \dots = {}^1/_4\log\frac{1-2x\cos(\alpha+\beta)+x^2}{1-2x\cos(\alpha-\beta)+x^2}.$$

Ne segue, ricordando il teorema di Abel (§ 99),

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + {}^1/_2\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}2\beta + {}^1/_3\operatorname{sen}3\alpha\operatorname{sen}3\beta + \dots = {}^1/_2\log\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}}\right|.$$

Questa formola ci mette in grado di calcolare un altro integrale, analogo agli integrali (11). Con procedimento non rigoroso, già adoperato (§ 322, *e*, *f*, *h*) altre volte, si trova facilmente

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}\alpha x\,.\operatorname{sen}\beta x\,.\frac{dx}{x} = {}^1/_2\log\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|.$$

g) Calcoliamo, per finire, l'integrale di Dirichlet (§ 322, *f*) raccogliendone tutti gli elementi che corrispondono ad uno stesso valore assoluto di $\operatorname{sen}x$. Così, preso x fra 0 ed ${}^1/_2\pi$, per gli archi $x, \pi-x, 2\pi+x, 3\pi-x, 4\pi+x, \dots\dots$ si avrà un valore unico del seno, e per gli archi $\pi+x, 2\pi-x, 3\pi+x, 4\pi-x, \dots$ si avrà il medesimo valore, cambiato di segno. Ne segue che l'integrale proposto si può scrivere nel seguente modo:

$$\int_0^{{}^1/_2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\pi+x}-\frac{1}{2\pi-x}+\frac{1}{2\pi+x}+\frac{1}{3\pi-x}-\dots\right)\operatorname{sen}x\,dx.$$

Intanto * la serie fra parentesi vale

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x-n\pi}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-2n\pi}-\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-(2n+1)\pi}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tfrac{1}{2}x-n\pi}+\tfrac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tfrac{1}{2}(\pi-x)-n\pi}=\tfrac{1}{2}\left(\cot\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}x}\,.$$

Dunque

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dx=\tfrac{1}{2}\pi\,.$$

È facile ** porre questo calcolo al sicuro da ogni obiezione.

Integrazione multipla.

331. **Integrazione indefinita.** Da quanto si è venuto fin qui esponendo apparisce chiaro che il problema della semplice integrazione consiste, in fondo, nel determinare y, se si può, quando è nota la funzione $dy/dx=f(x)$. Non si ha un problema sostanzialmente nuovo se la funzione incognita dipende da più variabili, come quando si vuol determinare, per esempio, una funzione z delle variabili indipendenti x ed y conoscendo $\partial z/\partial x=f(x,y)$, giacchè, nel prenderne la derivata parziale rispetto ad x, la z si considera come funzione della sola x, e tale si dovrà, per conseguenza, considerare anche nell'integrarla, vale a dire che si avrà

$$z=\int f(x,y)dx\ ,$$

intendendo che, nell'integrazione, la y sia da trattare come costante, ed avendo perciò cura di osservare che per *costante* arbitraria, in questa integrazione, si deve intendere una quantità *indipendente da* x, che potrà dunque dipendere da y, e propriamente sarà una *funzione arbitraria* di y. Altrettanto dicasi della determinazione di y quando è nota d^2y/dx^2, o di z quando è data, per esempio, $\partial^2z/\partial x^2=f(x,y)$ o qualunque altra derivata, presa sempre rispetto ad una sola variabile. Due o più integrazioni semplici, eseguite successivamente, condurranno in ogni caso al risultato, senza che vi sia nulla da aggiungere alle cose già dette. Il primo problema veramente nuovo che ci si presenta è la determinazione di z quando è data la funzione

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=f(x,y)\,. \qquad (19)$$

Siccome il primo membro è la derivata, rispetto ad x, di $\partial z/\partial y$, *ottenuta*

---

* *Analisi algebrica*, p. 480.

** Vedi il *Calcolo integrale* di d'Arcais, p. 198.

supponendo y *costante*, si ha $\partial z/\partial y = \int f(x, y)dx$; poi, integrando nuovamente, *nell'ipotesi che* x *si mantenga costante*, $z = \int dy \int f(x, y)dx$. Considerando invece il primo membro di (19) come la derivata, rispetto ad y, di $\partial z/\partial x$, si ottiene $z = \int dx \int f(x,y)dy$. Il comune risultato di queste coppie di successive integrazioni semplici, fatte rispetto a variabili diverse, indipendenti fra loro, si chiama *integrale doppio*, e si rappresenta così:

$$z = \int\int f(x, y)dxdy \ . \tag{20}$$

Se in ciascuna integrazione semplice si ha cura di mettere in evidenza la parte arbitraria, si riconosce che, nota una particolare funzione $z = F(x,y)$ soddisfacente alla (19), tutte le funzioni soddisfacenti alla medesima equazione son date dalla formola $z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$, dove φ e ψ sono simboli di funzioni arbitrarie, indipendenti l'una dall'altra. Ciò che nell'integrazione doppia prende il posto della costante arbitraria dell'integrazione semplice è dunque la somma di due funzioni arbitrarie, una della sola x, l'altra della sola y.

332. **Integrazione definita**. Nell'integrazione definita semplice la limitazione imposta alla variabile si può esprimere mediante la disuguaglianza $(x - a)(x - b) \leqq 0$, che definisce appunto l'intervallo (a, b); e, più generalmente, qualunque disuguaglianza $L(x) \leqq 0$ può rappresentare uno o più intervalli, costituenti il campo d'integrazione. Similmente, se il calcolo dell'integrale (20) si esegue in guisa che le variabili x ed y, pur rimanendo indipendenti l'una dall'altra, abbiano i rispettivi campi di variazione vincolati in modo che debba essere costantemente soddisfatta una certa disuguaglianza

$$L(x, y) \leqq 0 \ , \tag{21}$$

il risultato (20) della doppia integrazione si dice *definito*, e la disuguaglianza (21) definisce il campo dell'integrazione. Suppongasi, per fissare le idee, che, per un dato valore di x, dalla (21) si possa trarre

$$a(x) \leqq y \leqq b(x) \ ,$$

e che questa limitazione permetta l'esistenza di y, purchè x resti compresa fra certi limiti α e β, che nei casi più ovvii sono radici dell'equazione $a(x) = b(x)$. Allora l'integrale (20), esteso al campo (21), va calcolato nel seguente modo:

$$z = \int_\alpha^\beta dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)dy \ . \tag{22}$$

In altri termini, se si trova che, nella supposizione di x costante, $F(x, y)$

è una funzione primitiva di $f(x, y)$, si ottiene per z il valore (costante)

$$z = \int_\alpha^\beta \left\{ F(x, b(x)) - F(x, a(x)) \right\} dx .$$

333. **Esempio.** Se il campo dell'integrazione è definito dalla disuguaglianza $x^2 + y^2 \leqq 2x$, si deve avere $-\sqrt{2x - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{2x - x^2}$, e ciò è possibile solo per x compreso fra 0 e 2. Dunque l'integrale (20), esteso al detto campo, ha il valore

$$z = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy ;$$

ma si può anche, invertendo l'ordine delle integrazioni, osservare che, fissato y, dev'essere $1 - \sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq 1 + \sqrt{1 - y^2}$, e però y non può cadere fuori dell'intervallo $(-1, 1)$. Quindi

$$z = \int_{-1}^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx .$$

Ne segue che, se $\varphi(x, y)$ è una funzione primitiva di $f(x, y)$, ottenuta supponendo costante x, e se $\psi(x, y)$ è un'altra funzione primitiva, ottenuta considerando invece y come costante, il valore dell'integrale $\int\int f(x, y) dx dy$, esteso al campo $x^2 + y^2 \leqq 2x$, si può mettere sotto l'una o l'altra delle seguenti forme:

$$\int_0^2 \left\{ \varphi(t, \sqrt{2t - t^2}) - \varphi(t, -\sqrt{2t - t^2}) \right\} dt ,$$

$$\int_{-1}^1 \left\{ \psi(1 + \sqrt{1 - t^2}, t) - \psi(1 - \sqrt{1 - t^2}, t) \right\} dt .$$

334. Poichè un integrale doppio si può considerare come il risultato dell'*integrazione d'un integrale*, è naturale domandarsi anche come si esegua la *derivazione d'un integrale* rispetto ad una variabile, indipendente dalla variabile d'integrazione. Il rapporto incrementale della funzione $\varphi(x) = \int_a^b f(x, y) dy$ è

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} dy = \int_a^b f'_x(x + \theta h, y) dy ,$$

dove θ è compreso fra 0 ed 1. Ora, se ad ogni numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, si può far corrispondere, *qualunque sia* y in (a, b), un numero η, tale che per $|h| < \eta$ si abbia sempre

$$|f'_x(x + h, y) - f'_x(x, y)| < \varepsilon ,$$

è chiaro che si avrà

$$\left| \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \int_a^b f'_x(x, y)dy \right| < (b-a)\varepsilon ,$$

e per conseguenza

$$\varphi'(x) = \lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \int_a^b f'_x(x, y)dy .$$

Qui è utile notare che la condizione precedente è sempre soddisfatta da f'_x quando esiste ed è finita la sua derivata f''_{xx}, giacchè mantenendosi questa, in valore assoluto, minore d'un certo numero l, basterà prendere $|h| < \varepsilon/l$ perchè sia

$$|f'_x(x+h, y) - f'_x(x, y)| < \frac{\varepsilon}{l} |f''_{xx}(x+\theta h, y)| < \varepsilon .$$

Adunque per derivare un integrale rispetto ad una variabile, indipendente dalla variabile d'integrazione, *basta derivare la funzione sottoposta all'integrazione*. Se poi i limiti a e b sono funzioni di x, la derivata si ottiene considerando φ come una funzione composta (§ 131), ed osservando che la derivata d'un integrale rispetto ad un suo limite è (§ 314) la funzione integranda, calcolata nel detto limite, e presa col suo segno o col segno opposto (§ 312, a) secondo che si tratta del limite superiore o del limite inferiore. In tal modo si ottiene subito

$$\varphi'(x) = b'f(x, b) - a'f(x, a) + \int_a^b f'_x(x, y)dy .$$

335. Ciò premesso, tornando all'integrazione, supponiamo nuovamente a e b costanti, e proponiamoci di trovar l'integrale, fra i limiti α e β, dell'integrale $\varphi(x) = \int_a^b f(x, y)dy$. Evidentemente, posto

$$\psi(x, y) = \int_\alpha^x f(x, y)dx \quad , \quad F(x) = \int_a^b \psi(x, y)dy ,$$

si ha

$$F'(x) = \int_a^b \psi'_x(x, y)dy = \int_a^b f(x, y)dy = \varphi(x) ;$$

poi

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) = \int_a^b \psi(\beta, y)dy = \int_a^b dy \int_\alpha^\beta f(x, y)dx .$$

Dunque, per integrare un dato integrale definito, rispetto ad una variabile indipendente dalla variabile d'integrazione, *basta integrare la funzione sottoposta alla data integrazione*. In altri termini, ponendo per $\varphi(x)$ la sua espressione,

$$\int_\alpha^\beta dx \int_a^b f(x, y)dy = \int_a^b dy \int_\alpha^\beta f(x, y)dx \; .$$

Se poi i limiti dell'integrazione proposta sono anch'essi funzioni di x, è sempre possibile sostituir loro limiti costanti rispetto ad un'altra variabile: basta porre $y = a + (b - a)t$.

336. **Nuova definizione.** La precedente definizione dell'integrale doppio ha gli stessi inconvenienti della definizione d'integrale semplice, data in principio del Calcolo integrale: bisogna pertanto trasformarla in guisa che ci permetta di trovare le condizioni per l'esistenza dell'integrale, e ci mostri inoltre la via per calcolarne il valore. Supponiamo *finito* il campo d'integrazione, vale a dire che sia possibile assegnare due intervalli finiti (α, β) e (γ, δ), nei quali debbano rimanere le variabili x ed y, rispettivamente, se si vuole che la limitazione (21) sia soddisfatta. Dividiamo (α, β) in intervalli $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n$, e (γ, δ) in intervalli k_1, $k_2, \ldots, k_m$, tutti tendenti a zero (con m ed n crescenti necessariamente all'infinito), ma senza che alcun legame sussista fra loro. Supponiamo *finita* anche la funzione, e conveniamo di considerarla come nulla fuori del campo d'integrazione. Quando x ed y variano rispettivamente negli intervalli h_i e k_j, rimanendo sempre indipendenti l'uno dall'altro, i valori della funzione restano compresi fra i loro limiti, inferiore e superiore: entro questi limiti si scelga un numero f_{ij}, e si consideri la somma doppia

$$\sum_{i,j} h_i k_j f_{ij} = h_1 k_1 f_{11} + h_1 k_2 f_{12} + h_2 k_1 f_{21} + \cdots + h_n k_m f_{nm} \; .$$

Se questa, al crescere indefinito di m e di n, tende ad un limite che non dipende dalla legge seguìta per costruire gli intervalli h_i e gli intervalli k_j, nè dalla scelta dei numeri f_{ij}, al limite stesso si dà il nome d'*integrale definito* nel campo assegnato. Posta questa definizione, non è difficile trarne conseguenze analoghe a quelle che si sono avute per l'integrazione semplice, ed in particolare se ne può dedurre la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'integrale; ma noi vogliamo qui limitarci alla definizione, rinviando il lettore ai trattati completi di Calcolo.

337. Ci resta tuttavia da far vedere che, se l'integrale esiste, il suo valore si può ottenere nel modo già indicato nel § 332. Infatti, ammessa

a priori l'esistenza dell'integrale, ci sarà lecito far tendere all'infinito prima m, poi n, e scegliere il valore f_{ij} fra il limite inferiore ed il limite superiore dei valori che $f(x, y)$ assume quando, lasciando ferma la x nell'estremo inferiore dell'intervallo h_i, si fa variare y in k_j. Allora la doppia somma considerata precedentemente si scinde in n somme semplici, una delle quali è $h_i(k_1 f_{i1} + k_2 f_{i2} + \ldots + k_m f_{im})$, ed ha per limite

$$h_i \int_\gamma^\delta f(x, y)dy = h_i \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)dy = h_i F_i,$$

rappresentando con F_i il valore che una certa funzione di x prende nell'estremo inferiore dell'intervallo h_i. Ora, se facciamo crescere all'infinito anche n (fin qui mantenuto costante insieme alle h_i), troviamo come limite della doppia somma

$$\lim_{n=\infty}(h_1 F_1 + h_2 F_2 + h_3 F_3 + \cdots + h_n F_n) = \int_\alpha^\beta dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)dy,$$

cioè precisamente il doppio integrale (22). Dopo ciò è chiaro che invertire l'ordine delle integrazioni significa far crescere all'infinito prima n, poi m; ma infiniti altri modi di far tendere m ed n all'infinito si possono immaginare, ed essi debbono tutti somministrare un valore unico per l'integrale perchè sia lecito dire che questo esiste. Se riflettiamo alle svariate forme che può assumere * una somma doppia quando si tenta di ridurla ad una somma di somme semplici, riusciamo a spiegarci perchè la possibilità d'invertire l'ordine delle integrazioni sia tanto limitata. Questa inversione è tuttavia un prezioso mezzo di ricerca, che si adopera spesso con grande utilità; ma nel farne uso non bisognerà mai dimenticare che può condurre a risultati erronei, quando diventa infinita la funzione, o una sua prima derivata, o pure quando è infinito il campo stesso dell'integrazione.

338. **Cambiamento di variabili.** Supponiamo che nell'integrale $\int\int f(x, y)dxdy$ si voglia effettuare la sostituzione $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, assumendo u e v come nuove variabili (indipendenti) d'integrazione. Per la mutua indipendenza delle funzioni x ed y si richiede (§ 180) che sia diverso da zero il determinante

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

* *Analisi algebrica*, p. 170.

Ciò premesso, sia $g(u, v)$ ciò che diventa $f(x, y)$ per la predetta sostituzione, e scriviamo l'integrale nel seguente modo: $\int dy \int f(x, y) dx$. Conveniamo inoltre, per fissare le idee, che le singole integrazioni siano da eseguire sempre nel senso in cui va crescendo la rispettiva variabile, in guisa che i differenziali delle quattro variabili si possano sempre considerare come positivi. Nell'integrazione rispetto ad x deve rimanere costante y, sicchè

$$\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = 0 \ ;$$

quindi

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}} \right) du = \frac{\mathfrak{D}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}} du \ ,$$

e per conseguenza (invertendo, se occorre, i limiti dell'integrazione rispetto ad u) l'integrale diventa

$$\int dy \int g(u, v) \frac{|\mathfrak{D}|}{\left|\dfrac{\partial y}{\partial v}\right|} du = \int du \int g(u, v) \frac{|\mathfrak{D}|}{\left|\dfrac{\partial y}{\partial v}\right|} dy \ ,$$

dove s'intende che v rappresenta la funzione di y e di u, implicitamente definita da $y = \psi(u, v)$ nell'ipotesi (§ 173) che sia $\partial y / \partial v \gtrless 0$. Nell'integrazione attuale (rispetto ad y) è u che deve rimanere costante, sicchè

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = \frac{\partial y}{\partial v} dv \ ;$$

e però l'ultimo integrale doppio (invertendo anche, all'occorrenza, i limiti dell'integrazione rispetto a v) si trasforma in $\int du \int g(u, v) |\mathfrak{D}| dv$. Dunque

$$\int\int f(x, y) dx dy = \int\int g(u, v) |\mathfrak{D}| du dv \ . \qquad (23)$$

Più generalmente si può dimostrare che

$$\int\int \dots \int f(x, y, z, \dots) dx dy dz \dots = \int\int \dots \int g(u, v, w, \dots) \left| \frac{\partial(x, y, z, \dots)}{\partial(u, v, w, \dots)} \right| du dv dw \dots \ .$$

339. Quando alle variabili x, y, si dà il significato di coordinate cartesiane ortogonali, il passaggio alle nuove variabili si può geometricamente interpetrare come un passaggio alle coordinate curvilinee (§ 172, d), per cui il campo d'integrazione viene ad essere altrimenti diviso in elementi infinitesimi mediante le linee u e le linee v. La formola (23) ci dice infatti che, invece di frazionare il detto campo in elementi rettangolari $dx dy$, come vuole la definizione, possiamo decomporlo, mediante le suddette linee, in altri elementi, ciascuno dei quali si può considerare (trascurandone parti infinitesime d'un ordine superiore) come un parallelo-

gramma dai lati $d\sigma$ e $d\tau$, il cui angolo ω ha il seno misurato, per una nota formola (§ 172, d), dal quoziente di $\mathfrak{D}$ per $\frac{d\sigma}{du}\cdot\frac{d\tau}{dv}$, sicchè l'area del parallelogramma è misurata dal valore assoluto di $\operatorname{sen}\omega\,.\,d\sigma d\tau=\mathfrak{D}du\,dv$. Adunque la formola (23) porge l'integrale come somma di infiniti elementi infinitesimi, ottenuti moltiplicando l'area di ciascun parallelogramma per un numero g, intermedio fra i valori che la funzione da integrare assume nel parallelogramma stesso. Si giunge così ad un più largo modo d'intendere la definizione data nel § 336.

340. **Esempii:** *a)* La rappresentazione geometrica del campo d'integrazione agevola grandemente la discussione dei limiti da imporre alle singole integrazioni, sia che si tratti d'invertire l'ordine delle integrazioni stesse, sia che si voglia passare ad altre variabili. Così, nell'esempio del § 333, tutto riesce evidente se si osserva che il campo d'integrazione è un circolo di raggio 1, che tocca Oy nell'origine. Per avere un altro esempio, sia da integrare $\int dx\,dy$ nel triangolo compreso fra le rette $x=1$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$. Si vede subito che

$$\int_0^1 dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy=\int_0^\alpha dy\int_{y/\beta}^{y/\alpha} f(x,y)dx+\int_\alpha^\beta dy\int_{y/\beta}^{1} f(x,y)dx\ .$$

Similmente

$$\int_0^\infty dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^\infty dy\int_y^\infty f(x,y)dx\ .$$

b) L'interpetrazione geometrica della (23) vale anche a risparmiarci, in molti casi, il calcolo di $\mathfrak{D}$. Così, quando si passa, nel piano, dalle coordinate cartesiane alle polari, si ha $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, e

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\ .$$

Dunque

$$\iint f(x,y)dx\,dy=\iint f(r\cos\theta\,,\,r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta\ . \qquad (24)$$

Il medesimo risultato si ottiene geometricamente osservando che le linee r e le linee θ dividono il piano in elementi infinitesimi, ciascuno dei quali si può considerare come un rettangolo, i cui lati sono il segmento dr, che le circonferenze dai raggi r ed $r+dr$ intercettano su qualunque retta passante per l'origine, e l'arco $rd\theta$, che le rette definite dagli angoli θ e $\theta+d\theta$ intercettano sulla circonferenza di raggio r; sicchè l'area del rettangolo è $rd\theta\,.\,dr$.

c) Similmente, nello spazio, chiamando φ la *longitudine* e ψ la *latitudine*, si ha $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\operatorname{sen}\varphi\cos\psi$, $z=r\operatorname{sen}\psi$, e conseguentemente

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)}=r^2\begin{vmatrix}\cos\varphi\cos\psi & \operatorname{sen}\varphi\cos\psi & \operatorname{sen}\psi\\ -\operatorname{sen}\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi & 0\\ -\cos\varphi\operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi & \cos\psi\end{vmatrix}=r^2\cos\psi\ ;$$

quindi

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint f(r\cos\varphi\cos\psi,\, r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi,\, r\,\mathrm{sen}\,\psi)\, r^2\,|\cos\psi|\,dr\,d\varphi\,d\psi\,.$$

Al medesimo risultato si giunge osservando che il punto $M(r, y, z)$, se cresce infinitamente poco la sola r, descrive un elemento rettilineo $MM' = dr$; se cresce la sola φ, esso descrive, in un piano perpendicolare ad Oz, un elemento circolare $MM'' = r\,|\cos\psi|\,d\varphi$: e se cresce la sola ψ, il punto M descrive, nel piano definito dall'angolo φ, un elemento circolare $MM''' = r\,d\psi$. I tre elementi si possono considerare come gli spigoli d'un parallelepipedo rettangolo $MM'M''M'''$, sostituibile al solido compreso tra le sfere $r, r + dr$, i piani $\varphi, \varphi + d\varphi$, ed i coni $\psi, \psi + d\psi$. Il volume d'un tal solido è dunque misurato, a prescindere da infinitesimi d'un ordine superiore, dal prodotto $r\,|\cos\psi|\,d\varphi . r\,d\psi . dr$.

341. **Esercizii:** *a)* Per vedere come l'ordine delle integrazioni possa influire sul risultato, si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}\,, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx = -\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2}\,;$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\,, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Si osservi che, in entrambi i casi, la funzione sottoposta all'integrazione diventa infinita nel punto $(0, 0)$. Nondimeno esistono gli integrali indefiniti

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-y}{x+y} + \varphi(x) + \psi(y)\,, \quad \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{y} + \varphi(x) + \psi(y)\,,$$

ma sono discontinui nel detto punto, in quanto che possono assumere, intorno ad esso, qualsiasi valore arbitrariamente prestabilito.

b) Se nel calcolo d'un integrale si trova conveniente assumere $z = xy$ come nuova variabile, da sostituire, per esempio, alla y, si deve, per applicare la formola (23), osservare che

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial z}{\partial y} = x\,, \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{x}\,.$$

Per esempio (§ 330, *b*)

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 z^z dz \int_z^1 \frac{dx}{x} = -\int_0^1 z^z \log z\,dz = \int_0^1 z^z dz = 0{,}783\ldots\,.$$

Ciò equivale a dividere il piano in tante striscie, di larghezza infinitesima, mediante le iperboli $xy =$ *costante*.

c) Può accadere che le linee u e le linee v costituiscano una *unica* famiglia di linee. Così, per esempio, per rappresentare i punti compresi nella regione limitata da Ox e dalla bisettrice dell'angolo xOy, si può esser condotti a porre x ed y uguali alla media aritmetica ed alla media geometrica di due nuove variabili: $x = {}^1/_2(u+v)$, $y = \sqrt{uv}$. Evidentemente $\mathfrak{D} = (u-v)/4\sqrt{uv}$. Affinchè una delle nuove variabili conservi un valore costante a, è necessario che fra x ed y interceda la relazione che si ottiene eliminando l'altra variabile: $y^2 = 2ax - a^2$. È questa l'unica famiglia di linee u e v, costituita, come si vede, dalle parabole che hanno in comune l'asse Ox e la direttrice Oy. I valori di u e v sono dati, in ciascun punto, dall'espressione $x \pm \sqrt{x^2 - y^2}$. Se si conviene di prendere $u = x + \sqrt{x^2 - y^2}$, e per conseguenza $v = x - \sqrt{x^2 - y^2}$, si ha, lungo la parabola di parametro a,

$$u = x + |x - a| \quad , \quad v = x - |x - a| \; ,$$

e però $u = a$ per $x \leq a$, e $v = a$ per $x \geq a$. Adunque, se nella suddetta regione si divide la parabola in un arco finito, che va dal vertice al punto di contatto con $y = x$, ed un arco infinito, lungo il primo è costante u, mentre $v = 2x - a$ varia da 0 ad a; lungo il secondo è costante v, mentre $u = 2x - a$ varia da a all'infinito. Se, per esempio, si estende l'integrazione al campo compreso fra l'asse Ox e le parabole dai parametri a e b, l'integrale di $f dx dy$ si può scrivere nell'uno o nell'altro dei seguenti modi:

$$\int_0^{\sqrt{ab}} dy \int_{\frac{y^2+a^2}{2a}}^{\frac{y^2+b^2}{2b}} f(x,y)dx = \int_{{}^1/_2 a}^{{}^1/_2 b} dx \int_0^{\sqrt{2ax-a^2}} f(x,y)dy + \int_{{}^1/_2 b}^{{}^1/_2(a+b)} dx \int_{\sqrt{2bx-b^2}}^{\sqrt{2ax-a^2}} f(x,y)dy \; .$$

Adoperando invece le variabili u e v l'integrale prende la forma più semplice

$$\int_a^b \int_0^a f({}^1/_2(u+v), \sqrt{uv})(u-v)d\sqrt{u}\,d\sqrt{v} \; .$$

d) Con procedimento molto in uso, e che non è, ma si può * rendere rigoroso, si riesce a calcolare l'integrale di Dirichlet (§ 330, *g*), osservando che, per x positivo,

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy \; ,$$

e conseguentemente

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x \, dx \, dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x \, dx \; .$$

Intanto, poichè (per $y > 0$)

$$\left(e^{-xy}\cos x\right)_0^\infty = -1 \quad , \quad \left(e^{-xy}\operatorname{sen} x\right)_0^\infty = 0 \; ,$$

l'integrazione per parti dà

$$\int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - y\int_0^\infty e^{-xy}\cos x \, dx = 1 - y^2 \int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x \, dx \; ,$$

* Vedi, per esempio, il *Calculo integral* di Gomes-Teixeira, *Primeira parte*, p. 94; o il *Traité d'Analyse* di Picard, t. I, p. 34.

d' onde si trae

$$(1+y^2)\int_0^\infty e^{-xy}\operatorname{sen} x\,dx = 1 .$$

Dunque

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \left(\operatorname{arc\,tg} y\right)_0^\infty = {}^1/_2\pi .$$

e) Similmente, per calcolare l'integrale $\mathfrak{J} = \int_0^{^1/_2\pi} \operatorname{sen} x . \log \operatorname{sen} x\,dx$, si può scrivere

$$\mathfrak{J} = -\int_0^{^1/_2\pi} \operatorname{sen} x\,dx \int_x^{^1/_2\pi} \cot y\,dy = -\int_0^{^1/_2\pi} \cot y\,dy \int_0^y \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= \int_0^{^1/_2\pi} (\operatorname{tg} {}^1/_2 y - \operatorname{sen} y)dy = \left(\cos y - \log \cos^2 {}^1/_2 y\right)_0^{^1/_2\pi} = -1 + \log 2 .$$

Del resto l'integrale proposto si calcola facilmente per parti, anche in forma indefinita:

$$\int \operatorname{sen} x . \log \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x . \log \operatorname{sen} x + \log \operatorname{tg} {}^1/_2 x + \cos x + C .$$

Ne segue (§ 71, *b*)

$$\mathfrak{J} = -1 + \lim_{x=0}(\cos x . \log \operatorname{sen} x - \log \operatorname{tg} {}^1/_2 x) = -1 + \log 2 .$$

f) Per calcolare il valore $\mathfrak{J}$ dell'integrale di Poisson (§ 322, *e*) si consideri l'integrale doppio

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_0^\infty \mathfrak{J} e^{-x^2}dx = \mathfrak{J}^2 , \tag{25}$$

e si cerchi di calcolarlo in altro modo. Si scriva

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy ,$$

e nella prima integrazione (rispetto ad y), mentre x rimane costante, si sostituisca ad y un'altra variabile t, definita così: $y = tx$. Si ottiene

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx \int_0^\infty e^{-t^2x^2}dt = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2} . x\,dx .$$

Intanto si ha subito

$$\int e^{-(1+t^2)x^2} . x\,dx = -\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{2(1+t^2)} + C \quad , \quad \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2} . x\,dx = \frac{1}{2(1+t^2)} .$$

Dunque, successivamente, osservando che $\mathfrak{I}$ dev'essere positivo,

$$\mathfrak{I}^2 = {}^1/_2 \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \mathfrak{I} = {}^1/_2 \sqrt{\pi} \; .$$

g) Al risultato precedente si perviene anche calcolando l'integrale (25) dopo averlo trasformato secondo la formola (24). Se si osserva che r va da 0 a $+\infty$, e θ da 0 ad ${}^1/_2\pi$, quando x ed y vanno assumendo, indipendentemente l'uno dall'altro, tutti i valori positivi, si ottiene subito

$$\mathfrak{I}^2 = \int_0^\infty \int_0^{{}^1/_2\pi} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4} \left(e^{-r^2}\right)_0^\infty = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \mathfrak{I} = {}^1/_2 \sqrt{\pi} \; .$$

Del resto questo procedimento *, privo di rigore, non differisce in sostanza dal precedente, come è facile riconoscere osservando che $t = \operatorname{tg}\theta$. Per entrambi si richiede inoltre la prova dell'*esistenza* di $\mathfrak{I}$; ma questa risulta subito (§ 318, *b*) dal fatto che, per x infinito, $x^n e^{-x^2}$ tende a zero qualunque sia n.

h) Anche la derivazione (§ 334) rispetto ad una variabile, indipendente dalla variabile d'integrazione, si può utilmente applicare al calcolo di numerosi integrali. Così, per esempio, dal secondo integrale (11) si deduce immediatamente il primo mercè la derivazione rispetto a β, purchè si osservi che la derivata di $|x|$ è $\operatorname{sgn} x$. Similmente dal noto integrale $\Gamma(\alpha)$ si deduce subito (§ 78, *f*), derivandolo rispetto ad α,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \log x \, dx = \left(-\mathbf{C} + 1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1} + \cdots\right) \Gamma(\alpha) \; .$$

In particolare

$$\int_0^\infty e^{-x} \log x \, dx = -\mathbf{C} \quad , \quad \int_0^\infty e^{-x^2} \log x \, dx = -{}^1/_4 \sqrt{\pi} (\mathbf{C} + \log 4) \, .$$

Se nel primo si cambia x in $-\log x$, si ritrova l'integrale di Mascheroni (322, *g*). Dopo un'altra derivazione si trova, per $\alpha = 1$, $\alpha = {}^1/_2$, ecc.,

$$\int_0^\infty e^{-x} \log^2 x \, dx = \mathbf{C}^2 + {}^1/_6 \pi^2 \; , \quad \int_0^\infty e^{-x^2} \log^2 x \, dx = {}^1/_8 \sqrt{\pi} \left\{ (\mathbf{C} + \log 4)^2 + {}^1/_2 \pi^2 \right\} , \text{ecc.}$$

i) Si calcola facilmente l'integrale

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \frac{dx}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \tag{26}$$

mediante la sostituzione $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a} t$, se con a e b si conviene di designare le ra-

* Indicato da Poisson ed emendato da Cayley nel *Quarterly Journal of Mathematics*, 1872, p. 120. Vedi i *Mélanges mathématiques* di Mansion, p. 15, ed il *Traité d'Analyse* di Picard, t. I, p. 103.

dici positive di a^2 e b^2. Derivando separatamente rispetto ad a e b, si ottengono gli integrali

$$\int_0^{1/2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{(a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3 b}\,, \quad \int_0^{1/2\pi} \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^3}\,,$$

la cui somma è

$$\int_0^{1/2\pi} \frac{dx}{(a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = \pi\,\frac{a^2+b^2}{4a^3b^3}\,.$$

Così proseguendo, se per brevità si pone $k_n = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n}$, si trova finalmente

$$\int_0^{1/2\pi} \frac{dx}{(a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x)^{n+1}} = \pi\,\frac{k_n a^{2n} + k_1 k_{n-1} a^{2n-2} b^2 + k_2 k_{n-2} a^{2n-4} b^4 + \ldots + k_n b^{2n}}{2(ab)^{2n+1}}$$

Con procedimento inverso, dall'integrale (26) ne scaturiscono infiniti altri. Prima si osservi, in base all'identità $(a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 x = (a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x) - b^2$, che

$$(a^2 - b^2)\int_0^{1/2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi b}{2a}\,, \quad \text{d'onde} \quad \int_0^{1/2\pi} \frac{2a\operatorname{sen}^2 x\,dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{a+b}\,.$$

Ne segue, integrando rispetto ad a, fra i limiti b ed a, e sostituendo poi $b\sqrt{1-k^2}$ ad a,

$$\int_0^{1/2\pi} \log\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2 x}\,dx = {}^1\!/_2\,\pi\log\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}\,.$$

Come verifica si noti che l'ultimo integrale si annulla per $k=0$, mentre per $k=1$ si riduce a $-{}^1\!/_2\pi\log 2$, valore già ottenuto per altre vie (§§ 322, d; 326, f).

j) L'integrazione per parti riconduce l'uno all'altro gli integrali

$$\int_0^x e^{-ax}\cos bx\,.\,dx\,, \quad \int_0^x e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,.\,dx\,, \qquad (a>0).$$

Si ha infatti

$$b\int_0^x e^{-ax}\cos bx\,.\,dx = \left(e^{-ax}\operatorname{sen} bx\right)_0^x + a\int_0^x e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,.\,dx = a\int_0^x e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,.\,dx\,,$$

$$b\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,.\,dx = \left(e^{-ax}\cos bx\right)_x^0 - a\int_0^x e^{-ax}\cos bx\,dx = 1 - a\int_0^x e^{-ax}\cos bx\,.\,dx\,,$$

d'onde

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,.\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\,, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,.\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}\,. \qquad (27)$$

Integrando il primo rispetto a b, fra i limiti 0 e b, o pure il secondo rispetto ad a, fra i limiti a e $+\infty$, si ottiene

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\ .$$

Per a infinitesimo si ricade sulla formola (9), giacchè il secondo membro tende ad $\frac{1}{2}\pi\operatorname{sgn} b$.

k) Come verifica di taluni risultati precedenti vogliamo indicare un'altra via per giungere all'integrale di Dirichlet; ma prima è necessario dimostrare direttamente l'*esistenza* di tale integrale. Ciò si fa in modo assai rapido richiamando un risultato precedente (§ 318, *c*), ed osservando che

$$\left|\int_\alpha^\beta \operatorname{sen} x\,dx\right| = |\cos\alpha - \cos\beta| \leq 2\ ;$$

ma qui vogliamo, per esercizio, procedere in altro modo. Esiste evidentemente l'integrale

$$\mathfrak{I}_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x+(n-1)\pi}\ ,$$

ed ha un valore compreso fra $2/n\pi$ e $2/(n-1)\pi$, giacchè $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 2$. Ne segue

$$\mathfrak{I}_n > \frac{2}{n\pi} > \mathfrak{I}_{n+1}\ ,\quad \lim_{n=\infty}\mathfrak{I}_n = 0\ ,$$

e però * la serie $\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 - \ldots\ldots$ è convergente. Intanto, se si designa con n il massimo intero contenuto in a/π, si ha

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 - \ldots \pm \mathfrak{I}_n \mp \theta\mathfrak{I}_{n+1}\ ,$$

dove θ è compreso fra 0 ed 1. Dunque, facendo crescere indefinitamente a, e per conseguenza n, esiste

$$\mathfrak{I} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 - \ldots > 0\ .$$

Ciò premesso, si ha (§ 330, *f*, *c*)

$$\mathfrak{I}^2 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{t}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{t}\int_0^\infty \operatorname{sen} x \operatorname{sen} tx\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\int_0^\infty \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2\frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\pi^2\ .$$

Dunque, poichè $\mathfrak{I}$ è positivo, $\mathfrak{I} = \frac{1}{2}\pi$.

* *Analisi algebrica*, p. 128.

l) Dato a calcolare l'integrale $\mathfrak{I}=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,.\,dx$, che per $\alpha=0$ si riduce al noto integrale di Poisson $\mathfrak{I}_0={}^1/_2\sqrt{\pi}$, deriviamolo rispetto ad α, ed integriamo per parti il risultato:

$$\mathfrak{I}'=\int_0^\infty \operatorname{sen}2\alpha x\,.\,d\left(e^{-x^2}\right)=-2\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,.\,dx=-2\alpha\mathfrak{I}\ .$$

Ne segue $\log\mathfrak{I}=-\alpha^2+\log\mathfrak{I}_0$, d'onde $\mathfrak{I}=\mathfrak{I}_0 e^{-\alpha^2}$, ossia

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,.\,dx={}^1/_2\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha^2}\ .$$

m) Calcoliamo, seguendo De la Vallée-Poussin, l'integrale *

$$\mathfrak{I}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\log\left|1-\frac{k}{x}\right|.\,dx\ .$$

nel caso di $|k|\leqq 1$. Posto, per comodo di scrittura, $k=1/\alpha$, l'integrale, se vi si cambia x in kx, diventa $k^2f(\alpha)$, con

$$f(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\log\left|1-\frac{1}{x}\right|.\,dx=\int_0^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\log\left|1-\frac{1}{x^2}\right|.\,dx\ .$$

Ora si ha

$$f'(\alpha)=\alpha\int_0^{\alpha}\log\left|1-\frac{1}{x^2}\right|\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\alpha\int_0^{1}\log\left|1-\frac{k^2}{x^2}\right|\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\alpha\left\{\varphi(k)-\varphi(0)\right\},$$

ponendo

$$\varphi(k)=\int_0^1\log|\,x^2-k^2\,|\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Intanto, se si pone $x=\operatorname{sen}\theta$ e $k=\operatorname{sen}\omega$, si trova

$$\varphi(k)=\int_0^{{}^1/_2\pi}\log|\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}^2\omega|\,.\,d\theta=\int_0^{{}^1/_2\pi}\log|\operatorname{sen}(\theta+\omega)|\,.\,d\theta+\int_0^{{}^1/_2\pi}\log|\operatorname{sen}(\theta-\omega)|\,.\,d\theta$$

$$=\int_{\omega}^{{}^1/_2\pi+\omega}\log|\operatorname{sen}\theta|\,d\theta+\int_{-\omega}^{{}^1/_2\pi-\omega}\log|\operatorname{sen}\theta|\,d\theta=\int_{\omega}^{\omega+{}^1/_2\pi}\log|\operatorname{sen}\theta|\,d\theta-\int_{\omega}^{\omega-{}^1/_2\pi}\log|\operatorname{sen}\theta|\,d\theta\ ,$$

ossia

$$\varphi(k)=\int_{\omega-{}^1/_2\pi}^{\omega+{}^1/_2\pi}\log|\operatorname{sen}\theta|\,d\theta\ .$$

---

* Proposto da Mesnager nell' *Intermédiaire des mathématiciens*, 1903, pp. 207, 293.

La derivata di questa funzione di ω è (§ 334)

$$\log|\,\mathrm{sen}(\omega+{}^1/_2\pi)| - \log|\,\mathrm{sen}(\omega-{}^1/_2\pi)| = \log|\cos\omega| - \log|-\cos\omega| = 0$$

Dunque, successivamente,

$$\varphi'(k)=0\ ,\ \varphi(k)=\varphi(0)\ ,\ f'(\alpha)=0\ ,\ f(\alpha)=f(1)\ .$$

Ora, se si pone $x=\mathrm{sen}\,\theta$ o $x=\cos\theta$, si trova per $f(1)$ l'una o l'altra espressione

$$2\int_0^{1/_2\pi}\cos^2\theta\,.\log\cot\theta\,.d\theta\quad,\quad 2\int_0^{1/_2\pi}\mathrm{sen}^2\theta\,.\log\mathrm{tg}\,\theta\,.d\theta\ ;$$

poi da queste, sommate, si deduce, integrando per parti,

$$f(1)=\int_0^{1/_2\pi}\cos 2\theta\,.\log\cot\theta\,.d\theta = -{}^1/_2\int_0^{1/_2\pi}\mathrm{sen}\,2\theta\,.d\log\cot\theta = {}^1/_2\pi\ .$$

Dunque $\mathfrak{J}={}^1/_2\pi k^2$.

n) Proponiamoci di calcolare * l'integrale $\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$, considerandolo come la derivata, rispetto ad α, della funzione

$$f(\alpha)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{sen}\,\alpha x}{x(1+x^2)}dx\ ,$$

ed osservando che

$$f(\alpha)-f''(\alpha)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{sen}\,\alpha x}{x}dx={}^1/_2\pi\,\mathrm{sgn}\,\alpha\ .$$

Siccome $-e^{-\alpha}(f-f'')$ è la derivata della funzione $e^{-\alpha}(f+f')$, che per $\alpha=0$ si riduce ad $f'(0)=\mathrm{arc\,tg}\,\infty={}^1/_2\pi$, si ha

$$e^{-\alpha}(f+f')-{}^1/_2\pi=-{}^1/_2\pi\int_0^\alpha e^{-\alpha}\mathrm{sgn}\,\alpha\,.d\alpha={}^1/_2\pi(e^{-\alpha}-1)\mathrm{sgn}\,\alpha,$$

d'onde

$$f(\alpha)+f'(\alpha)={}^1/_2\pi e^{\alpha}+{}^1/_2\pi(1-e^{\alpha})\mathrm{sgn}\,\alpha\ ;$$

poi, cambiando α in $-\alpha$,

$$-f(\alpha)+f'(\alpha)={}^1/_2\pi e^{-\alpha}-{}^1/_2\pi(1-e^{-\alpha})\mathrm{sgn}\,\alpha\ .$$

Ne segue, sommando,

$$f'(\alpha)={}^1/_4\pi\left\{(1-\mathrm{sgn}\,\alpha)e^{\alpha}+(1+\mathrm{sgn}\,\alpha)e^{-\alpha}\right\}.$$

---

* Esercizio preso dal *Trattato di Calcolo* del Todhunter, il quale cita le *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. XIX, p. 227.

L'espressione fra parentesi si riduce a $2e^{-\alpha}$ per $\alpha > 0$, a $2e^{\alpha}$ per $\alpha < 0$, a 2 per $\alpha = 0$, sicchè in ogni caso vale $2e^{-|\alpha|}$. Dunque

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx = {}^1/_2\, \pi e^{-|\alpha|} .$$

o) L'ultimo risultato è incluso, con infiniti altri, in una importante formola di Fourier *, che permette di esprimere, mediante un integrale definito, qualunque funzione derivabile ** $f(\alpha)$, data per tutti i valori di α, e tendente a zero per $\alpha = \pm\infty$. Prima si osservi che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\,\mathrm{sgn}(\alpha - \theta)\, d\theta = \int_{-\infty}^{\alpha} f'(\theta)\, d\theta - \int_{\alpha}^{\infty} f'(\theta)\, d\theta = 2f(\alpha) .$$

Ne segue, per la formola (9),

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\, d\theta \int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(\alpha-\theta)x}{x}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\,\mathrm{sen}(\alpha-\theta)x\,.\,d\theta .$$

Intanto l'integrazione per parti dà

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\,\mathrm{sen}(\alpha-\theta)x\,.\,d\theta = x\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos(\alpha-\theta)x\,.\,d\theta .$$

Dunque

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos(\alpha-\theta)x\,.\,d\theta :$$

e però, se si pone

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos\theta x\,.\,d\theta \quad , \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta x\,.\,d\theta ; \tag{28}$$

si ha

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{ \varphi(x)\cos\alpha x + \psi(x)\,\mathrm{sen}\,\alpha x \right\} dx . \tag{29}$$

È questa la *formola di Fourier*. Per esempio, tutte le volte che $f(-\alpha) = f(\alpha)$, le (28) dànno

$$\varphi(x) = 2\int_0^\infty f(\theta)\cos\theta x\,.\,d\theta \quad , \quad \psi(x) = 0 ,$$

e per conseguenza la (29) diventa $f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(x)\cos\alpha x\,.\,dx$. In particolare per $f(\alpha) = e^{-|\alpha|}$, ricordando il primo integrale (27), si ha $\varphi(x) = 2/(1+x^2)$, e si ri

* *Théorie analytique de la chaleur* (Oeuvres, t. I, p. 408).

** Condizione troppo restrittiva. Vedi, per esempio: Poincaré « *Théorie analytique de la propagation de la chaleur* » p. 102.

trova così * il risultato del precedente esercizio. Si noti, per finire, che la precedente dimostrazione della formola di Fourier sussiste tal quale se agli integrali (28) si danno per limiti due radici di $f(\theta)$. Il secondo membro della (29) rappresenta allora $f(\alpha)$ quando α cade fra le due radici, ma si riduce a 0 nel caso opposto. Così per $f(\theta)=\cos\theta$, designando con β una radice di questa funzione, si trova che l' integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x . \cos\beta x}{1-x^2}\,dx$$

(evidentemente privo di significato quando $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ sono entrambi diversi da zero) vale $\frac{1}{2}\pi\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$ per $|\alpha| \leqq |\beta|$, ed è nullo nel caso opposto. Al medesimo risultato si perviene, del resto, riducendo (con facile trasformazione) l'integrale proposto al primo degli integrali (11).

312. **Integrazione dei differenziali totali.** Il problema dell'integrazione multipla si presenta nel modo più naturale come l'estensione del problema trattato in principio (§ 309), quando si propone di determinare una funzione di *due* o *più variabili* indipendenti, il cui *differenziale totale* sia noto. Così, nel caso più semplice, data l'espressione differenziale $u(x,y)dx+v(x,y)dy$, domandiamoci, prima di tutto, se essa è, come si suol dire, un differenziale esatto, cioè se può rappresentare il differenziale di qualche funzione z delle variabili indipendenti x ed y. Ciò equivale a domandarsi se esiste la funzione z per la quale si ha

$$\frac{\partial z}{\partial x}=u(x,y)\quad,\quad\frac{\partial z}{\partial y}=v(x,y)\ ,\tag{30}$$

e si vede subito che per tale esistenza è necessario (§ 130) che sia

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)\ ,\tag{31}$$

almeno nel caso, al quale vogliamo limitarci, che le funzioni u e v e le loro derivate prime siano continue. Ora noi, tentando l'effettiva determinazione di z, incontreremo la condizione *necessaria* (31), ma la troveremo anche *sufficiente* per l'esistenza di z. Integrando (§ 331) infatti la seconda delle (30) si ottiene $z=\int v\,dy+\varphi(x)$; poi, derivando questa uguaglianza rispetto ad x, e tenendo presente la prima delle (30), si vede (§ 331) che dev'essere ancora

$$\varphi'(x)=u(x,y)-\int\frac{\partial v}{\partial x}\,dy\ :$$

ed affinchè il secondo membro sia, come il primo, *indipendente da* y, è

* **Fourier**, *loc. cit.*, p. 395.

necessario e sufficiente che sia nulla la derivata

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u-\int\frac{\partial v}{\partial x}dy\right)=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x},$$

vale a dire che $\partial u/\partial y$ e $\partial v/\partial x$ siano espresse da una stessa funzione $f(x,y)$. Se questa condizione è soddisfatta, si ha

$$z=\int v dy+\int\left(u-\int\frac{\partial v}{\partial x}dy\right)dx=\int udx+\int vdy-\int\int fdxdy:$$

risultato facilmente riducibile alla forma (20). Dunque: *affinchè* $udx+vdy$ *sia un differenziale esatto occorre e basta che si abbia* $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$. Similmente, per l'esistenza d'una funzione Φ delle variabili indipendenti x, y, z, che abbia il differenziale totale

$$d\Phi=udx+vdy+wdz,$$

sono necessarie e sufficienti le condizioni

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{32}$$

Infatti, se si comincia dall'integrare $\partial\Phi/\partial z=w$ (supponendo x ed y costanti), si ottiene $\Phi=\int wdz+\varphi(x,y)$; quindi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u-\int\frac{\partial w}{\partial x}dz,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v-\int\frac{\partial w}{\partial y}dz.$$

Siccome $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ non contengono z, si vede subito che si deve avere

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u-\int\frac{\partial w}{\partial x}dz\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(v-\int\frac{\partial w}{\partial y}dz\right)=0,$$

cioè debbono essere soddisfatte le prime due condizioni (32). Poi, affinchè esista φ, è necessaria e sufficiente, per quanto si è detto nel caso di due variabili indipendenti, la condizione

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u-\int\frac{\partial w}{\partial x}dz\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(v-\int\frac{\partial w}{\partial y}dz\right),$$

cioè precisamente la terza condizione (32). In modo analogo si dimostra, più generalmente, che, *date* n *funzioni* $u_1, u_2, \ldots$ *delle* n *variabili indipendenti* $x_1, x_2, \ldots,$ *le* $\frac{1}{2}n(n-1)$ *condizioni*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\qquad (i,j=1,2,3,\ldots,n)$$

sono necessarie e sufficienti perchè $u_1dx_1+u_2dx_2+\ldots$ *sia un differenziale esatto.*

il quale ci è noto per $n = 1$, perchè si scinde in

$$a\int\frac{(x + {}^1/_2 p)dx}{x^2 + px + q} + (b - {}^1/_2 ap)\int\frac{dx}{x^2 + px + q},$$

dimodochè (§ 326, d) si ha

$$\int\frac{(ax + b)dx}{x^2 + px + q} = a\log\sqrt{x^2 + px + q} + \frac{b - {}^1/_2 ap}{\sqrt{q - {}^1/_4 p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x - {}^1/_2 p}{\sqrt{q - {}^1/_4 p^2}} + C.$$

Per $n > 1$ si può analogamente scrivere

$$\int\frac{(ax + b)dx}{(x^2 + px + q)^n} = -\frac{a}{2(n-1)(x^2 + px + q)^{n-1}} + (b - {}^1/_2 ap)\mathfrak{J}_n,$$

sicchè resta da calcolare l'integrale

$$\mathfrak{J}_n = \int\frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Ora l'integrazione per parti, applicata ad $\mathfrak{J}_{n-1}$, ci dà

$$\mathfrak{J}_{n-1} = \int\frac{d(x + {}^1/_2 p)}{(x^2 + px + q)^{n-1}} = \frac{x + {}^1/_2 p}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + 2(n-1)\left\{\mathfrak{J}_{n-1} - (q - {}^1/_4 p^2)\mathfrak{J}_n\right\}$$

osservando l'identità $(x + {}^1/_2 p)^2 = (x^2 + px + q) - (q - {}^1/_4 p^2)$. Ne segue

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2(n-1)(q - {}^1/_4 p^2)}\left\{(2n-3)\mathfrak{J}_{n-1} + \frac{x + {}^1/_2 p}{(x^2 + px + q)^{n-1}}\right\}.$$

Così da $\mathfrak{J}_1$ si deduce $\mathfrak{J}_2$, poi da questo si deduce $\mathfrak{J}_3$; *ecc.*

345. Esercizii: *a*) Per calcolare l'integrale di $\frac{dx}{x^3 + 1}$ si cominci dal porre

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{c}{x + 1} + \frac{ax + b}{x^2 - x + 1},$$

dimodochè debba essere, identicamente, $c(x^2 - x + 1) + (ax + b)(x + 1) = 1$. Basta fare $x = -1$ per ottenere $c = {}^1/_3$; poi, sostituendo a c il suo valore, risulta $ax + b = -{}^1/_3(x - 2)$. Così l'integrale proposto si scinde in

$${}^1/_3\int\frac{dx}{x + 1} - {}^1/_6\int\frac{(2x - 1)dx}{x^2 - x + 1} + {}^1/_2\int\frac{dx}{x^2 - x + 1};$$

quindi

$$\int\frac{dx}{x^3 + 1} = {}^1/_3\log\frac{|x + 1|}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

b) L'integrale di $\frac{x^5 dx}{x^4 - 1}$ si scinde subito in $\int x dx + \int\frac{x dx}{x^4 - 1}$. Il primo va-

APPLICAZIONI AL CALCOLO DI TALUNE NOTEVOLI CLASSI D'INTEGRALI.

Integrazione dei differenziali razionali.

343. Quando la funzione da integrare è razionale, essa è sempre riducibile alla forma $f(x)/g(x)$, dove $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni intere di x, prime fra loro. Se $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sono le radici di $g(x)$, degli ordini di moltepliciità $r, s, t, \ldots$ rispettivamente, e se $\varphi(x)$ è la funzione intera, quoziente di $f(x)$ per $g(x)$, è noto (§ 109) che la frazione $f(x)/g(x)$ si può decomporre in frazioni semplici, così:

$$\varphi(x) + \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{b_1}{x-\beta} + \cdots + \frac{b_s}{(x-\beta)^s} + \cdots .$$

Quindi

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int \varphi(x)dx + a_1 \log|x-\alpha| + b_1 \log|x-\beta| + c_1 \log|x-\gamma| + \cdots$$
$$- \frac{a_2}{x-\alpha} - \frac{a_3}{2(x-\alpha)^2} - \cdots - \frac{b_2}{x-\beta} - \frac{b_3}{2(x-\beta)^2} - \cdots ;$$

ed il primo integrale, nel secondo membro, si scinde subito in altri, calcolabili immediatamente. Dunque *gli integrali dei differenziali razionali si possono sempre esprimere in forma algebrico-logaritmica*, ossia con simboli algebrici e logaritmici, in numero finito.

344. Se le radici non sono tutte reali, il secondo membro si presenta sotto forma immaginaria, sebbene sia reale quando nel differenziale i coefficienti sono reali. Si potrebbe passare dalla forma immaginaria alla reale adoperando le note relazioni (§ 326, *d*) fra i simboli *arc tg* e *log*; ma si preferisce evitare addirittura gli immaginarii ricordando (§ 110) che le frazioni semplici, relative ad una coppia di radici conjugate di $g(x)$, danno luogo, nello sviluppo di $f(x)/g(x)$, ad una somma di questa forma:

$$\frac{a_1 x + b_1}{x^2+px+q} + \frac{a_2 x + b_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{a_r x + b_r}{(x^2+px+q)^r} .$$

La questione è dunque ridotta al calcolo dell'integrale

$$\int \frac{(ax+b)dx}{(x^2+px+q)^n} ;$$

il quale ci è noto per $n = 1$, perchè si scinde in

$$a\int\frac{(x+{}^1\!/_2 p)dx}{x^2+px+q}+(b-{}^1\!/_2 ap)\int\frac{dx}{x^2+px+q};$$

dimodochè (§ 326, *d*) si ha

$$\int\frac{(ax+b)dx}{x^2+px+q}=a\log\sqrt{x^2+px+q}+\frac{b-{}^1\!/_2 ap}{\sqrt{q-{}^1\!/_4 p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-{}^1\!/_2 p}{\sqrt{q-{}^1\!/_4 p^2}}+C.$$

Per $n>1$ si può analogamente scrivere

$$\int\frac{(ax+b)dx}{(x^2+px+q)^n}=-\frac{a}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}+(b-{}^1\!/_2 ap)\mathfrak{I}_n\,,$$

sicchè resta da calcolare l'integrale

$$\mathfrak{I}_n=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Ora l'integrazione per parti, applicata ad $\mathfrak{I}_{n-1}$, ci dà

$$\mathfrak{I}_{n-1}=\int\frac{d(x+{}^1\!/_2 p)}{(x^2+px+q)^{n-1}}=\frac{x+{}^1\!/_2 p}{(x^2+px+q)^{n-1}}+2(n-1)\left\{\mathfrak{I}_{n-1}-(q-{}^1\!/_4 p^2)\mathfrak{I}_n\right\}$$

osservando l'identità $(x+{}^1\!/_2 p)^2=(x^2+px+q)-(q-{}^1\!/_4 p^2)$. Ne segue

$$\mathfrak{I}_n=\frac{1}{2(n-1)(q-{}^1\!/_4 p^2)}\left\{(2n-3)\mathfrak{I}_{n-1}+\frac{x+{}^1\!/_2 p}{(x^2+px+q)^{n-1}}\right\}.$$

Così da $\mathfrak{I}_1$ si deduce $\mathfrak{I}_2$, poi da questo si deduce $\mathfrak{I}_3$; *ecc.*

345. **Esercizii:** *a*) Per calcolare l'integrale di $\dfrac{dx}{x^3+1}$ si cominci dal porre

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{c}{x+1}+\frac{ax+b}{x^2-x+1},$$

dimodochè debba essere, identicamente, $c(x^2-x+1)+(ax+b)(x+1)=1$. Basta fare $x=-1$ per ottenere $c={}^1\!/_3$; poi, sostituendo a c il suo valore, risulta $ax+b=-{}^1\!/_3(x-2)$. Così l'integrale proposto si scinde in

$${}^1\!/_3\int\frac{dx}{x+1}-{}^1\!/_6\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+{}^1\!/_2\int\frac{dx}{x^2-x+1};$$

quindi

$$\int\frac{dx}{x^3+1}={}^1\!/_3\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt3}+C.$$

b) L'integrale di $\dfrac{x^5dx}{x^4-1}$ si scinde subito in $\int x dx+\int\dfrac{xdx}{x^4-1}$. Il primo vale $\frac{1}{2}x^2$ + *costante*, e nel secondo conviene assumere $x^2 = t$ come variabile d'integrazione:

$$\int \frac{x\,dx}{x^4-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C\,.$$

Dunque

$$\int \frac{x^5\,dx}{x^4-1} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 + C\,.$$

c) Facile è il calcolo dell'integrale

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+x+1} + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} - \int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2}\,.$$

Il terzo integrale, nel secondo membro, si calcola immediatamente, ed il secondo si riduce al primo integrando questo per parti:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + 2\int \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}\,.$$

Ne segue

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\,;$$

e però l'integrale proposto diventa

$$\frac{2(x+2)}{3(x^2+x+1)} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\,,$$

sicchè, finalmente,

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{2(x+2)}{3(x^2+x+1)} + \frac{10}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

Si giunge più rapidamente al risultato eseguendo l'indicata integrazione per parti nel seguente modo:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{x+c}{x^2+x+1} + \int \frac{(x+c)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\,dx\,.$$

Ora si determini c in guisa che sia, per convenienti valori di a e di b,

$$(x+c)(2x+1) = a(x^2+x+1) + b(x^2-x+1)\,.$$

Si vede che dev'essere $2 = c = a + b$, $2c + 1 = a - b$, cioè $c = 2$, ed $a = \frac{7}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$. Dunque

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx\,,$$

d'onde si deduce, come precedentemente, il valore dell'integrale proposto.

d) Dato a calcolare l' integrale di $\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$ bisogna, innanzi tutto, cercare di determinare le costanti c, a, b, a', b' in modo che si abbia identicamente

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{c}{x+1} + \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{a'x+b'}{(x^2+1)^2},$$

ossia $c(x^2+1)^2+(ax+b)(x^2+1)(x+1)+(a'x+b')(x+1)=1$. Per $x^2=-1$ si trova

$$a'x+b' = \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2-1} = -\,{}^1/_2(x-1),$$

e l'eguaglianza fra il primo e l' ultimo membro, vera per un valore immaginario di x, sussiste qualunque sia x, giacchè a' e b' sono reali. Dopo ciò l' identità precedente si riduce a $c(x^2+1)+(ax+b)(x+1)={}^1/_2$, e per $x^2=-1$ dà $ax+b={}^1/_2(a'x+b')$; quindi, sostituendo, si trova $c={}^1/_4$, come, del resto, si può immediatamente dedurre dall' identità primitiva, ponendovi $x=-1$. Ciò premesso, si vede subito che l' integrale proposto equivale a

$$\begin{aligned}&{}^1/_4\int\frac{dx}{x+1} - {}^1/_4\int\frac{x-1}{x^2+1}\,dx - {}^1/_2\int\frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &= {}^1/_4\left(\frac{1}{x^2+1} + \log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \operatorname{arc\,tg} x\right) + {}^1/_2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Intanto

$$\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \int\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int\frac{dx}{x^2+1} - 2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

d' onde

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = {}^1/_2\left(\frac{x}{x^2+1} + \int\frac{dx}{x^2+1}\right).$$

Dunque

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2} = {}^1/_4\left(\frac{x+1}{x^2+1} + \log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + 2\operatorname{arc\,tg} x\right) + C.$$

e) Per calcolare l' integrale di $\frac{dx}{x^4+1}$ si osservi, in primo luogo, che

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

e si ponga

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{a'x+b'}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Siccome il cambiamento di x in $-x$ non altera il primo membro, mentre scambia, nel secondo membro, i denominatori delle due frazioni, altrettanto deve accadere dei numeratori, poichè la decomposizione in frazioni semplici è possibile in un modo solo. Ne segue $a'x+b' = -ax+b$, sicchè dev' essere identicamente

$$1 = (ax+b)(x^2-x\sqrt{2}+1) - (ax-b)(x^2+x\sqrt{2}+1) = 2(b-a\sqrt{2})x^2 + 2b,$$

e però $b = a\sqrt{2} = {}^1/_2$. Dunque

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{(x+\sqrt{2})\,dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{(x-\sqrt{2})\,dx}{x^2-x\sqrt{2}+1} \, .$$

Ora, posto $p = \pm\sqrt{2}$, si vede che basta calcolare l'unico integrale

$$\int \frac{(x+p)\,dx}{x^2+px+1} = {}^1/_2 \int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+1} + {}^1/_2 p \int \frac{dx}{(x+{}^1/_2 p)^2 + {}^1/_2}$$

$$= \log \sqrt{x^2+px+1} + \frac{p}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{2} + \frac{p}{\sqrt{2}}\right) + C \, ,$$

ed osservare (§ 13, d) che

$$\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + \textit{costante} \, .$$

per ottenere

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right) + C \, .$$

f) Più facile ancora è il calcolo del seguente integrale:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = {}^1/_2 \int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} + {}^1/_2 \int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + C \, .$$

Se l'integrazione si estende da 0 ad 1, siccome $\lim\limits_{x=1-0} \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} = -{}^1/_2\pi$, si ottiene $\pi/2\sqrt{2}$ come valore dell'integrale definito; e però, sviluppando in serie di potenze la funzione integranda, si giunge alla formola

$$1 + {}^1/_3 - {}^1/_5 - {}^1/_7 + {}^1/_9 + {}^1/_{11} - \cdots = \pi/2\sqrt{2} \, ,$$

che si può anche dedurre dalla formola (17) del precedente capitolo (§ 330, e) per $\alpha = {}^1/_4\pi$.

g) Dato a calcolare l'integrale di $\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$, cominciamo dal notare che

$$\frac{x^2+1}{x^3+1} = {}^1/_3\left(\frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1}\right) ;$$

poi, cambiando x in x^2, ed osservando che

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{3})^2 = (x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1) \, ,$$

si trova

$$\frac{x^4+1}{x^6+1}=\frac{2}{3(x^2+1)}+{}^1/_6\left(\frac{1}{x^2+x\sqrt{3}+1}+\frac{1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right).$$

Intanto, per $p=\pm\sqrt{3}$,

$$\int\frac{dx}{x^2+px+1}=\int\frac{dx}{(x+{}^1/_2 p)^2+{}^1/_4}=2\,\mathrm{arc\,tg}(2x+p)+C\ .$$

Dunque l' integrale proposto vale

$${}^2/_3\,\mathrm{arc\,tg}\,x+{}^1/_3\,\mathrm{arc\,tg}(2x+\sqrt{3})+{}^1/_3\,\mathrm{arc\,tg}(2x-\sqrt{3})+C\ ,$$

ossia, finalmente,

$$\int\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=-\,{}^1/_3\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}+C\ .$$

Lo sviluppo della funzione integranda in serie di potenze mostra che l' integrale definito, fra 0 ed 1, vale quanto la somma della serie $1+{}^1/_5-{}^1/_7-{}^1/_{11}+\dots$, che noi possiamo d' altra parte calcolare mediante la formola citata nel precedente esercizio. Infatti per $\alpha={}^1/_6\pi$ quella formola dà

$${}^1/_2(1+{}^1/_5-{}^1/_7-\dots)+{}^1/_4\sqrt{3}(1+{}^1/_2-{}^1/_4-{}^1/_5+\dots)+{}^1/_3(1-{}^1/_3+{}^1/_5-\dots)={}^5/_{12}\pi\ ,$$

d' onde si trae (§ 330, *d*)

$$1+{}^1/_5-{}^1/_7-{}^1/_{11}+{}^1/_{13}+{}^1/_{17}-\dots=\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}={}^1/_3\pi\ .$$

Invece sembra che l' espressione da noi trovata per l' integrale indefinito dia 0 (risultato assurdo) come valore dell' integrale definito; ma (326, *k*) si deve notare che, nell' intervallo $(0,1)$, la funzione $3x(x^2-1)/(x^4-4x^2+1)$ diventa infinita per $x=c=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, ed è negativa a sinistra, positiva a destra di c, dimodochè si ha

$$\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=-\,{}^1/_3\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_0^{c-0}-\,{}^1/_3\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c+0}^1$$

$$={}^1/_3\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c-0}^{c+0}={}^1/_3\pi\ .$$

Similmente, se si volesse estendere l' integrazione da 0 all' infinito, si dovrebbe tener conto anche dell' altra radice positiva $c'=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ di x^4-4x^2+1; e si troverebbe come valore dell' integrale

$${}^1/_3\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c-0}^{c+0}+{}^1/_3\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c'-0}^{c'+0}={}^2/_3\pi\ .$$

Come verifica si noti che, se si spezza l'intervallo $(0, x)$ in $(0, 1) + (1, \infty)$, e se nell'integrale esteso all'intervallo $(1, \infty)$ si cambia x in $1/x$, si trova appunto

$$\int_0^\infty \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = {}^2/_3\pi \,.$$

Integrazione dei differenziali irrazionali.

346. Quando l'irrazionalità dell'integrando è unicamente dovuta a potenze della variabile d'integrazione x, con esponenti frazionarii, la sostituzione $x = t^n$, dove n è il minimo comune multiplo dei denominatori degli esponenti, farà subito sparire tale irrazionalità, e l'integrale, sotto la sua nuova forma, sarà calcolabile nel modo che si è visto. Appena però compariscono, nella funzione integranda, irrazionalità più complicate, l'integrazione è quasi sempre impossibile praticamente, nel senso che non esiste alcuna combinazione di simboli algebrici e logaritmici, in numero finito, atta a rappresentare l'integrale proposto. Vi sono tuttavia talune eccezionali classi d'integrali, che si lasciano calcolare con facili artificii. Eccone dei casi particolari importanti:

a) Per calcolare l'integrale di $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ poniamo il radicale uguale a $t - x$, dimodochè

$$x = \frac{t^2-q}{2t+p}\,, \quad t - x = \frac{t^2+pt+q}{2t+p}\,, \quad dx = 2\,\frac{t^2+pt+q}{(2t+p)^2}\,dt\,. \quad (1)$$

L'integrale si trasforma in

$$\int \frac{dt}{t+{}^1/_2 p} = \log|t + {}^1/_2 p| + C\,;$$

quindi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \log|x + {}^1/_2 p + \sqrt{x^2+px+q}\,| + C\,.$$

b) Per calcolare l'integrale di $\dfrac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$ osserviamo che

$$-x^2+px+q = -(x - {}^1/_2 p)^2 + q + {}^1/_4 p^2$$

(dove $q + {}^1/_4 p^2$ è necessariamente positivo, se si vuol rimanere nel campo dei numeri reali), e poniamo

$$x - {}^1/_2 p = t\sqrt{q + {}^1/_4 p^2}\,, \quad \text{dimodochè} \quad -x^2+px+q = (q + {}^1/_4 p^2)(1-t^2)\,.$$

L'integrale proposto diventa $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, e però

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x - {}^1/_2 p}{\sqrt{q + {}^1/_4 p^2}} + C\,.$$

c) L' integrazione per parti dà (*cfr.* § 328, *a*)

$$\int\sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx=(x\pm{}^1/_2p)\sqrt{\pm x^2+px+q}\mp\int\frac{(x\pm{}^1/_2p)^2dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}\,.$$

Ora, in base all' identità $\pm(x\pm{}^1/_2p)^2=\pm x^2+px+q-(q\mp{}^1/_4p^2)$, il secondo membro si trasforma in

$$(x\pm{}^1/_2p)\sqrt{\pm x^2+px+q}-\int\sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx+(q\mp{}^1/_4p^2)\int\frac{dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}\,.$$

Dunque

$$2\int\sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx=(x\pm{}^1/_2p)\sqrt{\pm x^2+px+q}+(q\mp{}^1/_4p^2)\int\frac{dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}\,,$$

e però

$$\int\sqrt{x^2+px+q}\,dx={}^1/_2(x+{}^1/_2p)\sqrt{x^2+px+q}+{}^1/_2(q-{}^1/_4p^2)\log|x+{}^1/_2p+\sqrt{x^2+px+q}\,|+C\,,$$

$$\int\sqrt{-x^2+px+q}\,dx={}^1/_2(x-{}^1/_2p)\sqrt{-x^2+px+q}+{}^1/_2(q+{}^1/_4p^2)\operatorname{arc\,sen}\frac{x-{}^1/_2p}{\sqrt{q+{}^1/_4p^2}}+C\,.$$

347. Più generalmente sia $f(x,y)$ una funzione *razionale* di x e di y, e si consideri l'integrale di $f(x,\sqrt{\pm x^2+px+q})dx$. Per quanto complicata sia l'espressione da integrare, è facile convincersi che *si riesce sempre a renderla razionale*, mediante opportune sostituzioni, e per conseguenza *l'integrale è sempre esprimibile in forma algebrico-logaritmica*. Basta infatti assumere $t=x+\sqrt{x^2+px+q}$ come variabile d'integrazione per vedere, in virtù delle (1), scomparire ogni irrazionalità in $f(x,y)$ quando $y=\sqrt{x^2+px+q}$. Ciò non accade per $y=\sqrt{-x^2+px+q}$; ma vi è un'altra sostituzione, che conviene anche al caso precedente tutte le volte che le radici di y sono reali; ed è questa una circostanza che si verifica certamente nel secondo caso, altrimenti y sarebbe immaginario per tutti i valori di x. Se α e β sono le radici di $\pm x^2+px+q$, basta porre

$$x=\frac{\beta\mp\alpha t^2}{1\mp t^2}\tag{2}$$

per trovare (attribuendo a t un segno conveniente)

$$y=\sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{(\beta-\alpha)t}{1\mp t^2}\,,\quad dx=\pm\frac{2(\beta-\alpha)t\,dt}{(1\mp t^2)^2}\,,$$

e convincersi che $f(x,y)dx$ prende in tal modo la forma $\varphi(t)dt$, con $\varphi(t)$ razionale e reale.

348. Del resto le sostituzioni precedenti servono soltanto a mostrare la possibilità, esente da eccezioni, di ridurre a forma razionale l'espressione da integrare, evitando gli immaginarii; ma nella pratica converrà

invece cominciare dal semplificare, nel modo che segue, l'espressione proposta. La funzione *razionale* $f(x, y)$ si può sempre porre sotto la forma del quoziente di due funzioni intere; e se in ciascuna di queste, ordinata secondo le potenze di y, si sostituisce $(\pm x^2 + px + q)^n$ ad ogni y^{2n}, e $(\pm x^2 + px + q)^n y$ ad ogni y^{2n+1}, si ottiene

$$f(x, y) = \frac{\varphi_1(x) + y\psi_1(x)}{\varphi_2(x) + y\psi_2(x)},$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sono funzioni intere di x; quindi, moltiplicando numeratore e denominatore per $\varphi_2 - y\psi_2$, e ponendo nuovamente

$$y^2 = \pm x^2 + px + q \quad , \quad y = \frac{\pm x^2 + px + q}{y},$$

si trova

$$f(x, y) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{y},$$

con φ e ψ funzionali *razionali* di x. Se poi $\psi(x)$ si decompone (*cfr.* § 313) in frazioni semplici, si vede che, a prescindere da integrali di differenziali razionali, il calcolo dell'integrale proposto si riduce al calcolo d'uno o più integrali dei seguenti tipi

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{\pm x^2 + px + q}} \quad , \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{\pm x^2 + px + q}},$$

con n intero e positivo, ed a reale o immaginario. Mercè la sostituzione $x = a + \frac{1}{z}$ gli integrali del secondo tipo son sempre riducibili a quelli del primo, ed è facile vedere che questi ultimi si riducono finalmente all'unico $\int \frac{dx}{y}$, calcolato nel § 346. Infatti

$$\int x^n \frac{dx}{y} = \pm \int x^{n-1}(\pm x + {}^1/_2 p) \frac{dx}{y} \mp {}^1/_2 p \int x^{n-1} \frac{dx}{y},$$

dove, essendo $y dy = (\pm x + {}^1/_2 p) dx$, si ha

$$\int x^{n-1}(\pm x + {}^1/_2 p) \frac{dx}{y} = \int x^{n-1} dy = x^{n-1} y - (n-1) \int x^{n-2}(\pm x^2 + px + q) \frac{dx}{y}.$$

e per conseguenza, sostituendo nella precedente uguaglianza,

$$n \int x^n \frac{dx}{y} = \pm x^{n-1} y \mp (n - {}^1/_2) p \int x^{n-1} \frac{dx}{y} \mp (n-1) q \int x^{n-2} \frac{dx}{y}.$$

Da questa *formola di riduzione*, per $n = 1, 2, 3, \ldots$, si deduce successivamente

$$\int x \frac{dx}{y} = \pm y \mp {}^1/_2 p \int \frac{dx}{y} \quad ; \quad \int x^2 \frac{dx}{y} = {}^1/_2(\pm x - {}^3/_2 p) y \mp {}^1/_2 (q \mp {}^3/_4 p^2) \int \frac{dx}{y},$$

$$\int x^3 \frac{dx}{y} = {}^1/_3 y^3 - ({}^5/_4 px + q \mp {}^5/_8 p^2) y + {}^1/_4 p (3q \mp {}^5/_4 p^2) \int \frac{dx}{y}, \ldots$$

349. Con procedimento analogo si può, più generalmente, semplificare l'integrazione di qualunque differenziale $f(x, y)dx$, la cui irrazionalità sia unicamente dovuta al radicale quadratico

$$y = \sqrt{a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m} \, .$$

Prima si osservi che, quando m è pari, il grado del polinomio sottoposto al radicale nell'espressione integranda si può sempre abbassare ad $m - 1$: ciò si riconosce facilmente mercè la sostituzione $x = \alpha + \frac{1}{z}$, in cui α è una radice di y. Così, per esempio, tornando al caso di $y = \sqrt{\pm x^2 + px + q}$, se si rappresenta con β l'altra radice di y, si ottiene $yz = \sqrt{\mp(\beta - \alpha)z \pm 1}$; quindi, assumendo il nuovo radicale come variabile d'integrazione, si è condotti appunto alla sostituzione (2). Similmente il caso di $m = 4$ è riducibile ad $m = 3$; ma si cercherebbe invano di ridurre questo al caso di $m = 2$, giacchè in uno studio più profondo di siffatti integrali, i quali diconsi *ellittici*, si dimostra che *non è possibile esprimerli in forma algebrico-logaritmica*, e che il tentarne la trasformazione in integrali di differenziali razionali è come se si cercasse, con deformazione continua, di ridurre a forma sferica la superficie d'un anello *. Mediante un calcolo simile a quello del paragrafo precedente si riesce soltanto a dimostrare che gli integrali ellittici son tutti riducibili ai seguenti

$$\int \frac{dx}{y} \, , \quad \int \frac{x\,dx}{y} \, , \quad \int \frac{dx}{(x - a)y} \, ,$$

i quali si dicono di *prima*, *seconda* e *terza* specie; e si è poi condotti, con opportune sostituzioni, ad assumere come tipici nelle prime due specie gli integrali

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \, , \quad \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \, ,$$

il primo dei quali, preso fra i limiti 0 e φ, si rappresenta con $F(k, \varphi)$, ed il secondo, fra i medesimi limiti, si può scrivere

$$\frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{1 - (1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \, d\varphi = \frac{1}{k^2}\left\{ F(k, \varphi) - E(k, \varphi) \right\} ,$$

convenendo di rappresentare con $E(k, \varphi)$ l'integrale $\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} \, d\varphi$. Il valore φ del limite superiore si chiama *amplitudine*, e k è il *modulo* degli integrali. Nelle applicazioni meccaniche e geometriche sono parti-

* Vedi, per $m > 4$, il *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*, di Hermite; pp. 291-297.

colarmente importanti gli integrali F ed E, corrispondenti all'amplitudine $\frac{1}{2}\pi$. Essi diconsi integrali ellittici *completi*, e si rappresentano così:

$$F(k)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\quad,\quad E(k)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi\;.$$

350. Occupiamoci ora delle sostituzioni alle quali abbiamo soltanto accennato nel paragrafo precedente, e cerchiamo di eseguirle in guisa da evitare gli immaginarii. Prima supponiamo reali le radici α,β,γ di

$$y=\sqrt{\pm x^3+ax^2+bx+c}\;:$$

sia α la più piccola di esse, o la più grande, secondo che x^3 è preceduto dal segno $+$, o dal segno $-$; sia β la radice media, e si rappresenti con k^2 il rapporto di $\beta-\alpha$ a $\gamma-\alpha$, *sempre compreso fra* 0 *ed* 1. La sostituzione $x=\alpha+(\beta-\alpha)\operatorname{sen}^2\varphi$ dà

$$\pm x^3+ax^2+bx+c=|\gamma-\alpha|\,(\beta-\alpha)^2(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi\;;$$

quindi, a prescindere da un fattore costante, *reale*, il radicale y si trasforma nel prodotto di $\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}$ per $\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$, e però

$$\frac{dx}{y}\quad\text{è proporzionale a}\quad\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\;.$$

Al medesimo risultato si giunge quando le radici non sono tutte reali, nella quale ipotesi, supponendo sempre reali i coefficienti, ad y^2 si può dare la forma $\pm(x-\alpha)(x^2+px+q)$, con α, p e q reali. In questo caso si ponga $x=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\,\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. Un calcolo facile dà

$$\pm(x-\alpha)(x^2+px+q)=(\alpha^2+p\alpha+q)^{3/2}(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^4\frac{\varphi}{2}}\;,$$

dove il numero

$$k^2=\frac{1}{2}\left(1\mp\frac{\alpha+\frac{1}{2}p}{\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}\right)$$

è *sempre compreso fra* 0 *ed* 1, giacchè

$$\alpha^2+p\alpha+q=(\alpha+\tfrac{1}{2}p)^2+(q-\tfrac{1}{4}p^2)>(\alpha+\tfrac{1}{2}p)^2\;.$$

Così in entrambi i casi $\int\frac{dx}{y}$ si trasforma in $F(k,\varphi)$; ma il calcolo di $\int\frac{x\,dx}{y}$ si riduce al calcolo dell'uno o dell'altro degli integrali

$$\int\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\quad,\quad\int\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\;,$$

secondo che le radici di y sono, o pur no, tutte reali. Abbiamo visto che il primo è riducibile agli integrali F ed E; ed ora, per mostrare che altrettanto si può affermare del secondo, osserviamo che

$$d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\right)=\left\{\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)-k^2\operatorname{sen}^2\varphi\right\}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,;$$

d'onde segue, integrando,

$$\int_0^\varphi\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}=\mathrm{F}(k,\varphi)-2\mathrm{E}(k,\varphi)+2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,.$$

Quando poi y^2 è un polinomio del quarto grado, abbiamo già detto che, se α è una sua radice, basta la sostituzione $x=\alpha+\frac{1}{z}$ per essere ricondotti al caso precedente; ma se il polinomio non ha radici reali, conviene ricorrere ad un'altra sostituzione, che noi qui ci limitiamo a segnalare, tralasciando la discussione * che vi conduce. Sia dunque

$$y^2=(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')\,,$$

e si supponga *essenzialmente positivo* ciascun fattore del secondo membro. Se si pone

$$(p-p')\lambda=q-q'-\sqrt{(q-q')^2+(p-p')(pq'-qp')}\,,$$
$$(p-p')\mu=q-q'+\sqrt{(q-q')^2+(p-p')(pq'-qp')}\,,$$

la sostituzione da adoperare è

$$x=\frac{\lambda+\mu m\operatorname{tg}\varphi}{1+m\operatorname{tg}\varphi}\,,$$

dove m rappresenta il più piccolo dei numeri

$$\sqrt{\frac{\lambda^2-p\lambda+q}{\mu^2-p\mu+q}}\,,\qquad\sqrt{\frac{\lambda^2-p'\lambda+q'}{\mu^2-p'\mu+q'}}\,.$$

351. La possibilità d'integrare $f(x,y)dx$ in forma algebrico-logaritmica, nell'ipotesi $y^2=\pm x^2+px+q$, è tutta dovuta al fatto che questa equazione rappresenta una conica, la quale è una curva *unicursale* (§ 212) o di *genere zero*. Più generalmente, se in $f(x,y)$ si suppone y vincolato ad x mediante l'equazione $\mathrm{F}(x,y)=0$ d'una curva unicursale qualunque, è chiaro che $f(x,y)dx$ si potrà rendere razionale assumendo come nuova variabile d'integrazione quel parametro t, in funzione del quale x

* Schloemilch « *Théorie des intégrales et des fonctions elliptiques* » (trad. Graindorge, pp. 3-6).

ed y sono esprimibili razionalmente. E così accade che innumerevoli differenziali, la cui irrazionalità è in apparenza assai più complicata di quella dei differenziali ellittici, si lascino agevolmente ridurre a forma razionale, e quindi integrare. Di gran lunga più difficile è la dimostrazione della proposizione contraria: *se la curva* $\mathrm{F}(x, y)=0$ *non è unicursale, l'integrale di* $f(x, y)dx$ *non si può esprimere in forma algebrico-logaritmica.* Ci viene così rivelata l'intima causa dell'impossibilità già segnalata per gli integrali ellittici, giacchè la cubica

$$y^2 = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

generalmente priva di punto doppio, è del genere 1: essa non è unicursale se non quando ammette un punto doppio, per la qual cosa occorre che due delle tre radici di y coincidano in una ($\alpha=\beta$), ed allora basta porre $x=\gamma+t^2$ per rendere razionale l'espressione da integrare. Un po' più generalmente, tutte le volte che y si trova vincolata ad x mediante l'equazione

$$ay^n + bxy^{n-1} + cx^2y^{n-2} + \dots = a'y^{n-1} + b'xy^{n-2} + c'x^2y^{n-3} + \dots,$$

basta porre $y=tx$ per trovare

$$x = \frac{a't^{n-1}+b't^{n-2}+\dots}{at^n+bt^{n-1}+\dots}, \quad y = \frac{a't^n+b't^{n-1}+\dots}{at^n+bt^{n-1}+\dots},$$

e così trasformare $f(x,y)dx$ in $\varphi(t)dt$, con $\varphi(t)$ razionale.

352. **Differenziali binomii**. Si chiamano così i differenziali che hanno la forma $x^p(a+bx^m)^q dx$. Rappresentandone brevemente l'integrale con $\vartheta(p, q)$, osserviamo che la sostituzione $a+bx^m=t$ dà

$$\vartheta(p, q) = \frac{1}{mb_{\bullet}}\int\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{p+1}{m}-1} t^q dt\ ;$$

ed il secondo membro si sa calcolare quando $(p+1)/m$ è un numero intero. L'integrazione è immediata se questo intero è positivo; nel caso opposto basterà eseguire la sostituzione $t=\theta^n$, scegliendo il numero intero n in modo che nq sia intero, e riducendo così il differenziale a forma razionale. Se poi $x^p(a+bx^m)^q$ si mette sotto la forma $x^{p+mq}(b+ax^{-m})^q$, si vede, applicando la condizione precedente, che l'integrale si calcola subito (mercè la sostituzione $b+ax^{-m}=t$) anche quando è intero il numero $(p+mq+1)/m$. Dunque, *quando è intero uno dei numeri*

$$\frac{p+1}{m}, \quad \frac{p+1}{m}+q,$$

l'integrale proposto è trasformabile in un integrale di differenziale razionale. È stato inoltre dimostrato * da Tchebychew che *son questi i soli casi, nei quali il differenziale binomio è integrabile in forma algebrico-logaritmica.* Qui si sottintende che il differenziale non sia già razionale (e quindi che p, q, m non siano tutti interi), o che non sia immediatamente riducibile a forma razionale con una sostituzione $x = t^n$, come (*cfr.* § 346) si può fare quando p ed m sono frazionarii, e q intero. Esclusi questi casi, si suppone dunque q frazionario, p ed m interi, ed inoltre $m > 0$, come sempre si può, ponendo, se occorre, $x = 1/t$.

353. Per calcolare o soltanto per semplificare un integrale di differenziale binomio si cerca di esprimerlo mediante integrali analoghi, ma più semplici. A ciò si riesce osservando, in primo luogo, che *si può sempre ridurre* q *ad essere compreso fra* 0 *ed* 1. Infatti, se si suppone $p+1 \gtrless 0$, l'integrazione per parti dà

$$\mathfrak{J}(p,q)=\int (a+bx^m)^q d\frac{x^{p+1}}{p+1} = \frac{x^{p+1}}{p+1}(a+bx^m)^q - \frac{mqb}{p+1}\mathfrak{J}(p+m, q-1) .$$

D'altronde si ha identicamente

$$b\mathfrak{J}(p+m, q-1) = \mathfrak{J}(p,q) - a\mathfrak{J}(p, q-1) .$$

Dunque

$$(p+mq+1)\mathfrak{J}(p,q) = x^{p+1}(a+bx^m)^q + mqa\mathfrak{J}(p, q-1) . \qquad (3)$$

Da questa formola si ricava $\mathfrak{J}(p,q)$ o $\mathfrak{J}(p,q-1)$ secondo che q è positivo o negativo; ed operando più volte di seguito si riesce a sottrarre da $q>0$, o ad aggiungere a $q<0$ tante unità quante si vogliono. Si noti che, quando uno dei coefficienti di $\mathfrak{J}(p,q)$ o di $\mathfrak{J}(p,q-1)$ è nullo, si è in uno dei casi d'integrabilità, ed è la stessa formola (3) che dà il valore di $\mathfrak{J}(p,q-1)$ o di $\mathfrak{J}(p,q)$. Similmente *si può sempre ridurre* p *ad essere compreso fra* 0 *ed* m. Infatti l'integrazione per parti, condotta in altro modo, dà, supponendo $q+1 \gtrless 0$,

$$\mathfrak{J}(p,q) = \int x^{p-m+1} d\frac{(a+bx^m)^{q+1}}{(q+1)mb}$$

$$= x^{p-m+1}\frac{(a+bx^m)^{q+1}}{(q+1)mb} - \frac{p-m+1}{(q+1)mb}\mathfrak{J}(p-m, q+1) .$$

D'altra parte

$$\mathfrak{J}(p-m, q+1) = a\mathfrak{J}(p-m, q) + b\mathfrak{J}(p,q) :$$

quindi

$$(p+mq+1)b\mathfrak{J}(p,q) = x^{p-m+1}(a+bx^m)^{q+1} - (p-m+1)a\mathfrak{J}(p-m, q) . \qquad (4)$$

---

* *Journal de Liouville*, 1853, p. 108

Da questa relazione si ricava $\mathfrak{J}(p,q)$ o $\mathfrak{J}(p-m,q)$ secondo che p è positivo o negativo. Adunque si vede che, mercè l'applicazione delle formole (3) e (4), il calcolo dell'integrale di qualunque differenziale binomio è sempre riducibile al caso in cui si ha

$$p \text{ ed } m \text{ interi }, \quad m>0 \;, \quad 0<q<1 \;, \quad 0<p<m \,.$$

354. **Esercizii:** *a)* Per calcolare $\int \sqrt{x^2+2x-1}\,\frac{dx}{x}$ si ponga il radicale uguale a $t-x$, dimodochè

$$x=\frac{t^2+1}{2(t+1)}\,, \quad \sqrt{x^2+2x-1}=t-x=\frac{t^2+2t-1}{2(t+1)}\,, \quad dx=\frac{t^2+2t-1}{2(t+1)^2}\,dt\,.$$

L'integrale proposto si trasforma in

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{(t^2+2t-1)^2dt}{(t+1)^2(t^2+1)}=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt\;:$$

quindi si ottiene, con un calcolo facile,

$$\sqrt{x^2+2x-1}+\log\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right)-2\,\mathrm{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right)+C$$

come valore dell'integrale. Più rapidamente si giunge al risultato scindendo l'integrale proposto in

$$\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}-\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}\,,$$

ed osservando che

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=\mp\int\frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{2-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}}=\pm\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C'\,,$$

dove (*cfr.* § 326, *a*) bisogna prendere i segni superiori o i segni inferiori secondo che x è positivo o negativo. La prima forma è preferibile appunto perchè non vi è ambiguità nei segni. Del resto l'equivalenza delle due forme risulta dall'identità

$$\pm\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{x-1}{x\sqrt{2}}=2\,\mathrm{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right)-(1\pm 2)\frac{\pi}{4}\,.$$

b) In modo analogo si calcola $\int\sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x}$; ma questo si può anche considerare come l'integrale d'un differenziale binomio, per cui si ha $p=-1$, $m=2$, $q=\frac{1}{2}$. Ora, essendo $\frac{p+1}{m}=0$, è soddisfatta la prima condizione d'integrabilità (come sempre avviene quando $p=-1$, qualunque sia $m \gtrless 0$), e però si è condotti a porre $x^2-1=t^2$: quindi

$$\int\sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x}=\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=t-\mathrm{arc\,tg}\,t+C=\sqrt{x^2-1}\pm\mathrm{arc\,sen}\,\frac{1}{x}+C'\,.$$

c) Se si vuol calcolare l'integrale di $\frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$, considerando questo come un differenziale binomio, si osservi prima che $p=-3$, $m=1$, $q=-{}^1/_2$. Soddisfatta la prima condizione d'integrabilità (come sempre accade per $m=\pm 1$, quando p è intero), basta porre $x-1=t^2$ per rendere razionale il differenziale, e trovare, con una facile integrazione,

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}={}^3/_4\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1}+C\,.$$

d) Nell'integrale di $\frac{x^4dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ si ha $p=4$, $m=2$, $q=-{}^3/_2$, ed è soddisfatta la seconda condizione d'integrabilità, giacchè $\frac{p+1}{m}+q=1$. Bisogna dunque porre $x^{-2}-1=t^{-2}$, cioè

$$x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\;,\quad dx=\frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}\;;$$

ma, nel caso attuale, si giunge più rapidamente al risultato eseguendo prima una integrazione per parti:

$$\int\frac{x^4dx}{(1-x^2)^{3/2}}=\int x^3d(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}-3\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{3x-x^3}{2\sqrt{1-x^2}}-{}^3/_2\operatorname{arc\,sen}x+C\,.$$

Ciò equivale ad applicare la formola (4).

e) Per l'integrale di $\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ si ha $p=-{}^1/_2$, $m={}^1/_4$, $q={}^1/_3$; e poichè $\frac{p+1}{m}=2$, è soddisfatta la prima condizione d'integrabilità. Si è dunque sicuri di giungere al risultato assumendo come variabile $t=1+\sqrt[4]{x}$. Così l'integrale proposto si trasforma in

$$4\int(t-1)t^{1/3}dt={}^3/_7(4t-7)t^{4/3}+C\;;$$

quindi

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx={}^3/_7\left(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C\,.$$

f) Dato a calcolare $\int\frac{x^ndx}{\sqrt{1-x^2}}$ si cominci dall'osservare che, essendo

$$\frac{p+1}{m}=\frac{n+1}{2}\;,\quad\frac{p+1}{m}+q=\frac{n}{2}\;,$$

la riduzione ad integrale di funzione razionale è possibile solo quando n è intero. Secondo che n è dispari o pari, l'integrale è riducibile ad una delle seguenti forme

$$-\int(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt \quad , \quad \int\frac{t^n dt}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}} \, ,$$

ponendo (rispettivamente) $x=\sqrt{1-t^2}$ o $x=t/\sqrt{1+t^2}$. Del resto l'integrazione per parti dà la formola

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{1-x^2}+\frac{n-1}{n}\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}} \, ,$$

che permette di ridurre l'integrale proposto, secondo che n è dispari o pari, ad uno degli integrali

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C \quad , \quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc\,sen} x+C \, .$$

Se si estende l'integrazione da 0 ad 1 si ricade su risultati già noti (§ 328, g), come facilmente si riconosce mediante la sostituzione $x=\operatorname{sen}\theta$.

g) Se si vuol calcolare l'integrale *

$$\int\left(\sqrt[3]{x^3+\sqrt{x^3+x^6}}+\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^3+x^6}}\right)dx \, ,$$

basta osservare che il coefficiente di dx è, in virtù ** della formola di Tartaglia, radice dell'equazione $y^3+3xy-2x^3=0$, per essere subito condotti, ricordando l'osservazione fatta in fine del § 351, ad eseguire la sostituzione $x=3t/(2-t^3)$, che trasforma l'integrale dato in $18\int\frac{(1+t^3)t^3dt}{(2-t^3)^3}$; poi, per $2-t^3=3\theta$, in

$$2\int\frac{\theta-1}{\theta^3}d\theta=\frac{1-2\theta}{\theta^2}+C=\frac{x^2}{y^2}(x^2-2y)+C \, .$$

Intanto si ha $xy^3-2y^2=2x^4-3x^2y-2y^2=(x^2-2y)(2x^2+y)$. Dunque l'integrale proposto vale

$$\frac{x^3\left(\sqrt[3]{x^3+\sqrt{x^3+x^6}}+\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^3+x^6}}\right)-2x^2}{\sqrt[3]{x^3+\sqrt{x^3+x^6}}+\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^3+x^6}}+2x^2}+C \, .$$

Il calcolo precedente si può leggermente abbreviare osservando che $xdy-ydx$ vale x^2dt, d'onde segue

$$\int ydx=\int xdy-\int x^2dt=xy-\int ydx-\int x^2dt={}^1/_2(xy-\int x^2dt)$$
$$={}^1/_2\left(xy+\int\frac{d\theta}{\theta^2}\right)=\frac{x}{2y}(y^2-x)+C=x^2\frac{xy-2}{y+2x^2}+C \; ; \text{ ecc.}$$

---

* Hermite, *Cours d'Analyse*, p 242.

** *Analisi algebrica*, p. 432.

Integrazione dei differenziali trascendenti.

355. Rarissimi sono i casi d'integrabilità (mediante i soliti simboli funzionali) dei differenziali trascendenti; e nei casi più semplici si ricorre a particolari artificii piuttosto che a regole generali. Sono tuttavia da notare i seguenti: se f è simbolo di funzione razionale, si possono *sempre* calcolare gli integrali

$$\int f(e^x)dx \quad , \quad \int f(\operatorname{tg} x)dx \quad , \quad \int f(\operatorname{sen} x, \cos x)dx \ ,$$

assumendo come nuova variabile d'integrazione, in ciascun caso, $t = e^x$, $t = \operatorname{tg} x$, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Così si ottiene

$$\int f(e^x)dx = \int f(t)\frac{dt}{t} \quad , \quad \int f(\operatorname{tg} x)dx = \int \frac{f(t)dt}{1+t^2} \ ,$$

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2} \ , \ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} \ ;$$

ed i secondi membri si calcolano facilmente come integrali di differenziali razionali. Le medesime sostituzioni sono spesso utili anche quando f non è simbolo di funzione razionale.

356. **Esercizii**: *a)* L'integrale di $\frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ si calcola subito mercè la sostituzione $t = e^x$:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C \ .$$

b) Per calcolare l'integrale di $\frac{dx}{a + b\cos x}$ basta prendere $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ come nuova variabile d'integrazione. Si ottiene, secondo che a^2 è maggiore o minore di b^2,

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \pm \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log\left|\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\operatorname{sen} x}{a + b\cos x}\right| + C \ ,$$

dove $\pm$ sta per $\operatorname{sgn}(a+b)$. Dall'una all'altra forma si passa agevolmente mediante le note (§ 326, *d*) relazioni fra i simboli *arctg* e *log*.

c) Similmente si riduce subito il calcolo di $\int \operatorname{tg}^n x dx$ a quello di $\int \frac{t^n dt}{1+t^2}$ mediante la sostituzione $t = \operatorname{tg} x$; ma si può anche, quando n è un numero intero positivo, procedere con successive applicazioni della seguente formola:

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\operatorname{tg}^{n-2} x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx \ .$$

In tal modo si finisce per cadere, secondo che n è dispari o pari, sopra uno dei seguenti integrali:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\log|\cos x| + C \quad , \quad \int dx = x + C\ .$$

Il medesimo procedimento può servire quando n è negativo: ma in questo caso è preferibile osservare che

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^n x} = \int \cot^n x\, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\, dx\ ;\ ecc.$$

d) Per calcolare l'integrale di $\dfrac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ si ponga $\operatorname{tg} x = t^2$. L'integrale proposto si trasforma così nell'altro $2\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^4}$, già calcolato (§ 345, *e*); quindi si ottiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left|\operatorname{sen} x + \cos x + \sqrt{\operatorname{sen} 2x}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C\ .$$

e) Spesso negli integrali della terza forma, indicata nel § 355, si può evitare la sostituzione $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ mediante l'integrazione per parti, accompagnata da opportuni artificii, fra i quali è da notare (*cfr.* § 324, *d*) la moltiplicazione del differenziale per $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Per esempio si può calcolare

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} = -\frac{\cot x}{4}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{3}{2 \operatorname{sen} x}\right) + {}^3/_8 \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

facendo uso della suddetta sostituzione; ma è più conveniente ridurre l'integrale ad uno dei seguenti (*cfr.* § 324, *a*)

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + C \quad , \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\ ,$$

come sempre si può quando si tratta d'integrali della forma $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x}$, con n intero e positivo. Infatti si ha

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^n x}\, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x} - \frac{1}{n-1}\int \cos x\, d\,\frac{1}{\operatorname{sen}^{n-1} x}\ ;$$

quindi, integrando per parti,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x} = \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x} - \frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n-1} x}\ .$$

In modo analogo si calcola $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x}$.

f) La sostituzione $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ dà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \sqrt{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t(1+t^2)}}\ .$$

Ci troviamo dunque in presenza d'un integrale ellittico, che si può anche considerare come l'integrale d'un differenziale binomio, per cui è

$$p = q = -\,{}^1\!/_2\;,\quad m = 2\;,\quad \frac{p+1}{m} = {}^1\!/_4\;,\quad \frac{p+1}{m} + q = -\,{}^1\!/_4\;.$$

Pertanto (§§ 349, 352) è vano sperare che si possa giungere, per qualsiasi via, al esprimere $\int^x \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ in forma algebrico-logaritmica.

g) Nemmeno occorrono sostituzioni per calcolare integrali come $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$, $\int \cos^4 x\,dx$, *ecc.* La trigonometria (*cfr.* § 326, *o*) fornisce le relazioni

$$\operatorname{sen}^3 x = {}^3\!/_4 \operatorname{sen} x - {}^1\!/_4 \operatorname{sen} 3x \quad,\quad \cos^4 x = {}^1\!/_8 \cos 4x + {}^1\!/_2 \cos 2x + {}^3\!/_8\;,$$

dalle quali segue subito

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\,{}^3\!/_4 \cos x + {}^1\!/_{12} \cos 3x + C \;,\quad \int \cos^4 x\,dx = {}^1\!/_{32} \operatorname{sen} 4x + {}^1\!/_4 \operatorname{sen} 2x + {}^3\!/_8\, x + C\;.$$

Similmente, dato a calcolare l'integrale di $\operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx$, si comincerà dallo stabilire le due formole trigonometriche precedenti, per dedurne, mediante moltiplicazione (*cfr.* § 324, *d*),

$$32 \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x = {}^1\!/_2 (3 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 7x)\;;$$

poi, integrando,

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{64}\left(-\,3 \cos x - \cos 3x + {}^1\!/_5 \cos 5x + {}^1\!/_7 \cos 7x\right) + C\;.$$

In modo analogo si calcola qualunque integrale del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$; ma si può anche adoperare una formola di riduzione, che si ottiene mediante l'integrazione per parti:

$$(m+n) \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx\;;\ ecc.$$

h) Basta talvolta la sola integrazione per parti per fare scomparire certe trascendenti sotto il segno d'integrazione. Così, per qualunque coppia di funzioni razionali f e g, si ha

$$\int g'(x) \log f(x)\,dx = g(x) \log f(x) - \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, g(x)\,dx\;,$$

e l'ultimo integrale è sempre esprimibile per mezzo dei soliti simboli funzionali. Per esempio (*cfr.* § 345, *b*)

$$\int x \log(x^4 - 1)\,dx = {}^1\!/_2\, x^2 \log(x^4 - 1) - 2 \int \frac{x^5 dx}{x^4 - 1}$$

$$= (x^2 - 1) \log \sqrt{x^2 - 1} + (x^2 + 1) \log \sqrt{x^2 + 1} - x^2 + C\;.$$

Integrali definiti notevoli.

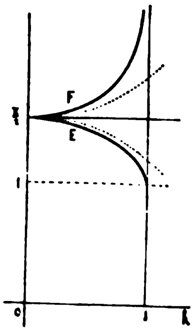
357. **Integrali ellittici**. L'integrale ellittico completo (§ 349) di *prima* specie, $F(k)$, è facilmente calcolabile per serie, giacchè (§ 91, *e*) si ha

$$F(k)=\int_0^{1/_2\pi}\left(1+\frac{1}{2}k^2\mathrm{sen}^2\varphi+\frac{1.3}{2.4}k^4\mathrm{sen}^4\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\mathrm{sen}^6\varphi+\ldots\right)d\varphi:$$

quindi, richiamando la formola (15) del § 328,

$$F(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}k\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}k^3\right)^2+\ldots\right\}. \tag{5}$$

Facile è lo studio del modo di variare di $F(k)$ quando k va da 0 ad 1. Evidentemente $F(k)$ cresce sempre, da $F(0)={}^1/_2\pi$ fino ad



$$F(1)=\lim_{\varphi={}^1/_2\pi}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\lim_{\varphi={}^1/_2\pi}\log\frac{1+\mathrm{tg}\,{}^1/_2\varphi}{1-\mathrm{tg}\,{}^1/_2\varphi}=\infty\,.$$

A destra di $k=0$ la funzione cresce lentamente, giacchè la sua linea rappresentativa si comporta come la parabola $y={}^1/_8\pi x^2$ a destra del vertice; ma finisce poi per crescere rapidamente, tanto che la detta linea diventa assintotica alla retta $k=1$. Per vedere come si comporta la funzione in vicinanza di questo valore di k, osserviamo che il coefficiente di k^{2n} nello sviluppo di $F(k)$ è assintotico (§ 96, *c*) ad $1/2n$, d'onde segue (§ 98) che, a sinistra del valore $k=1$, tende ad esser vera l'eguaglianza

$$F(k)=\log\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\,. \tag{6}$$

Vedi p. [illegible]

358. Similmente si calcola l'integrale ellittico completo $E(k)$ di *seconda* specie, scrivendo

$$E(k)=\int_0^{1/_2\pi}\left(1-\frac{1}{2}k^2\mathrm{sen}^2\varphi-\frac{1}{2.4}k^4\mathrm{sen}^4\varphi-\frac{1.3}{2.4.6}k^6\mathrm{sen}^6\varphi-\ldots\right)d\varphi\,,$$

ed integrando termine a termine:

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}k\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}k^3\right)^2-\ldots\right\}. \tag{7}$$

Quando k cresce da 0 ad 1, questa funzione, decrescendo sempre, va da ${}^1/_2\pi$ fino ad

$$E(1)=\int_0^{1/_2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=1\,.$$

A destra di $k=0$ la sua linea rappresentativa si comporta come la parabola $y = -{}^1/_8\pi x^2$, mentre per $k=1$ essa tocca la retta $k=1$. Per convincersi di ciò basta calcolare la derivata

$$E'(k) = -\frac{\pi}{k}\left\{\left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}k^2\right)^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}k^3\right)^2 + \cdots\right\},$$

ed osservare che

$$kE'(k) = E(k) - F(k)\ ,$$

d'onde segue $\lim_{k=1-0} E'(k) = -\infty$. Per sapere poi, con maggior precisione, come si comporta $E(k)$ a sinistra dell'unità, si noti che, per k tendente ad 1, il teorema di l'Hospital dà

$$\lim \frac{1-E(k)}{(1-k^2)\log\sqrt{1-k^2}} = {}^1/_2 \lim \frac{E'(k)}{\log\sqrt{1-k^2}} = -{}^1/_2 \lim \frac{F(k)}{\log\sqrt{1-k^2}} = {}^1/_2 \,.$$

Dunque, assintoticamente,

$$E(k) = 1 + \frac{1-k^2}{2}\log\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\,. \tag{8}$$

359. Le formole (5) e (7), molto utili per calcolare i valori di F e di E, corrispondenti a valori piccolissimi di k, sono inservibili quando k non è abbastanza piccolo, perchè le serie (5) e (7) convergono lentamente. Se k è vicinissimo ad 1, le formole assintotiche (6) ed (8) servono soltanto a mostrare l'andamento generale di F e di E; ma per calcolare i valori di queste funzioni bisogna rendere più complete le formole stesse, in modo da poter contare sopra una sufficiente approssimazione. Noi qui vogliamo limitarci a far vedere come il calcolo degli integrali F ed E si possa sempre ridurre al calcolo di analoghi integrali, *corrispondenti a valori del modulo, piccoli quanto si vuole.* Questo scopo si raggiunge mercè la *sostituzione di Landen*

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{(1+\mu)\operatorname{sen}\psi}{1+\mu\operatorname{sen}^2\psi}\ , \tag{9}$$

in cui la costante μ (compresa fra 0 ed 1) è definita dall'eguaglianza $k = \frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}$. Un calcolo facile dà

$$\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{1-\mu\operatorname{sen}^2\psi}{1+\mu\operatorname{sen}^2\psi}\ , \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{1-\mu^2\operatorname{sen}^2\psi}}{1+\mu\operatorname{sen}^2\psi}\cos\psi\ ;$$

$\sqrt{1+2\mu\sin^2\psi+\mu^2\sin^4\psi-(1+\mu)^2\sin^2\psi}$

$1+\mu\sin\psi^2$

quindi dalla (9) si trae, differenziando,

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{(1+\mu)\,d\psi}{\sqrt{1-\mu^2\operatorname{sen}^2\psi}}\ ,$$

$\psi\, d\varphi = \frac{(1+\mu\sin^2\psi)(1+\mu)\cos\psi -}{(1+\mu\sin^2\psi)^2}$

e finalmente

$$F(k) = (1 + \mu) F(\mu) , \tag{10}$$

dopo avere osservato che, quando ψ va da 0 ad $\frac{1}{2}\pi$, crescendo sempre, altrettanto fa la variabile primitiva φ. Un calcolo analogo, che per brevità omettiamo, conduce all'altra importante formola

$$E(k) = \frac{2}{1+\mu} E(\mu) - (1-\mu) F(\mu) . \tag{11}$$

È chiaro che le due formole precedenti sussistono anche quando gli integrali non sono completi; ma le amplitudini φ e ψ hanno allora valori differenti, vincolati dalla (9). La (11) porta in luce questo notevole fatto: *ogni integrale ellittico di prima specie si può esprimere mediante due integrali ellittici di seconda specie.*

360. Torniamo agli integrali completi, e facciamo vedere come si possa utilizzare la (10) per calcolare $F(k)$, anche quando k è vicinissimo ad 1. Partendo da k si costruisca una successione di numeri, tali che

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1} , \quad k_1 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2} , \quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_3}}{1+k_3} , \ldots :$$

in generale bisognerà prendere

$$k_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{1+\sqrt{1-k_n^2}} < \frac{1-(1-k_n)}{1+(1-k_n)} < k_n .$$

I numeri k_n, positivi e decrescenti al crescere di n, tendono dunque ad un limite $l < 1$. Questo limite deve soddisfare all'equazione $l = \frac{2\sqrt{l}}{1+l}$, la quale, sbarazzata dalla radice $l=0$, e dall'altra, inammissibile, $l=1$, si riduce a $2+\sqrt{l}+l=0$, priva di radici reali. Dunque $l=0$. Ora l'applicazione ripetuta della formola (10) dà

$$F(k) = (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\ldots(1+k_n)F(k_n) ,$$

dove k_n è *piccolo quanto si vuole*; e così, per n sufficientemente grande, si può calcolare prima $F(k_n)$ mediante la (5), poi $F(k)$. Crescendo n all'infinito si ha $\lim F(k_n) = F(0) = \frac{1}{2}\pi$, e conseguentemente

$$F(k) = \tfrac{1}{2}\pi(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\ldots .$$

Costruita una tavola di valori di F, la formola (11) permette di calcolare analogamente i valori di E. Siffatte tavole, utilissime nelle applicazioni, sono state costruite da Legendre (anche per gli integrali non completi), e diconsi *tavole ellittiche* *. Qui ci limitiamo a ricavarne alcuni valori:

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{3}\right)=1{,}617\ldots\,,\quad \mathrm{F}\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}685\ldots\,,\quad \mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}854\ldots\,,\quad \mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2{,}156\ldots\,,$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{3}\right)=1{,}526\ldots\,,\quad \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}467\ldots\,,\quad \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}350\ldots\,,\quad \mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1{,}211\ldots\,.$$

361. **Esercizii**: *a)* Per l'integrale di $\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$, già trattato (§ 356, *f*) mediante la sostituzione $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, è preferibile la sostituzione più semplice $\operatorname{sen} x = t$, dalla quale si è poi condotti, mercè la sostituzione $t=\cos^2\varphi$ (indicata dalle considerazioni del § 350), all'espressione normale dell'integrale proposto:

$$-2\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}=-\sqrt{2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-{}^1/_2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,.$$

In particolare

$$\int_0^{{}^1/_2\pi}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}=\sqrt{2}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2{,}622\ldots\,.$$

b) Analogamente si calcolano gli integrali $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ e $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ponendo $x=\cos\varphi$. Così essi si trasformano rispettivamente in

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-{}^1/_2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-{}^1/_2\operatorname{sen}^2\varphi}}-\sqrt{2}\int\sqrt{1-{}^1/_2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi\,.$$

In particolare

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}311\ldots\,,\quad \int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\,.\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0{,}599\ldots\,.$$

c) Un po' meno facile è il calcolo degli integrali $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$. La sostituzione $x=-1+\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$, applicata al primo, dà

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,.$$

Al secondo bisogna invece applicare, in virtù delle cose dette in fine del § 350, la sostituzione

$$x=\frac{\operatorname{tg}\varphi-(1+\sqrt{2})}{\operatorname{tg}\varphi+(1+\sqrt{2})}\,.$$

* **Legendre**, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II.

Così l' integrale proposto si trasforma in

$$\int \frac{(2+\sqrt{2})d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}^4\varphi + 6(3+2\sqrt{2})\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi + (3+2\sqrt{2})^2\cos^4\varphi}} .$$

L' espressione sottoposta al radicale risulta dalla moltiplicazione di

$$\operatorname{sen}^2\varphi + (3+2\sqrt{2})^2\cos^2\varphi = (3+2\sqrt{2})^2\left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\operatorname{sen}^2\varphi\right)$$

per $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Dunque

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{(2-\sqrt{2})d\varphi}{\sqrt{1 - \dfrac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\operatorname{sen}^2\varphi}} .$$

Se poi si osserva che

$$\text{per} \quad k^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \quad \text{si ha} \quad \mu = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

si ottiene, applicando la formola (10),

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)F\left(\frac{2\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}927\ldots .$$

d) Dato a calcolare l' integrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}}$, che richiama alla mente un altro già calcolato (§ 326, *i*), si cominci dall'applicare l'integrazione per parti:

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{2}{k}\int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi\, d\sqrt{1-k\cos\varphi} = -\frac{2}{k}\int_0^\pi \sqrt{1-k\cos\varphi}\,.\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{k}\int_0^\pi \frac{k-\cos\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}}\, d\varphi - 2\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{2}{3k}\int_0^\pi \frac{k-\cos\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}}\, d\varphi .$$

L' ultimo integrale, se vi si cambia φ in $\pi - 2\varphi$, diventa

$$2\int_0^{1/2\pi} \frac{k+\cos 2\varphi}{\sqrt{1+k\cos 2\varphi}}\, d\varphi = \frac{2}{k}\int_0^{1/2\pi} \sqrt{1+k\cos 2\varphi}\, d\varphi - \frac{2}{k}(1-k^2)\int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+k\cos 2\varphi}} d\varphi$$

ossia, scrivendo $1 + k - 2k\operatorname{sen}^2\varphi$ per $1 + k\cos 2\varphi$,

$$\frac{2}{k}\sqrt{1+k}\left\{E\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right) - (1-k)F\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right)\right\} .$$

Dunque

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k\cos\varphi}} = \frac{4\sqrt{1+k}}{3k^2} \left\{ E\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right) - (1-k) F\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right) \right\} .$$

e) Un integrale ellittico può pur presentarsi con un modulo $k > 1$; ma è sempre possibile ridurlo ad un modulo compreso fra 0 ed 1. Si considerino, per esempio, gli integrali

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \quad , \quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi \; ,$$

nei quali il limite superiore non può raggiungere il valore $^1/_2\pi$, ma può andare fino ad un valore massimo α, definito dall'eguaglianza $\operatorname{sen}\alpha = 1/k$. Quando φ va da 0 ad α, la variabile ψ, vincolata a φ dalla relazione $\operatorname{sen}\psi = k \operatorname{sen}\varphi$, cresce da 0 ad $^1/_2\pi$; e poichè

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{k^2 - \operatorname{sen}^2\psi}} ,$$

si ha

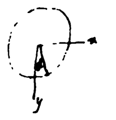
$$\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{1}{k} F\left(\frac{1}{k}\right) \; , \quad \int_0^{\alpha} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{k} F\left(\frac{1}{k}\right) + k \left\{ E\left(\frac{1}{k}\right) - F\left(\frac{1}{k}\right) \right\} .$$

Per esempio

$$\int_0^{^1/_4\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2\varphi}} = 1{,}311\ldots \quad , \quad \int_0^{^1/_4\pi} \sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi = 0{,}599\ldots \; .$$

f) Per un pendolo semplice, di lunghezza l, si dimostra in Meccanica che la durata di un'oscillazione completa, di ampiezza 2α, è misurata dall'integrale

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} ,$$



$y = l\cos\theta,\ x = l\sin\theta$

$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k\cdot}}$

$= \sqrt{\frac{l}{g}} \int$

in cui g è l'accelerazione della gravità nel posto di osservazione. Questa importante formola serve appunto a calcolare g in ciascun luogo della superficie terrestre, e per conseguenza a far conoscere, mediante un gran numero di osservazioni, la forma della superficie stessa. Posto $k = \operatorname{sen}{}^1/_2\alpha$, e $\operatorname{sen}{}^1/_2\theta = k\operatorname{sen}\varphi$, si ha

$$\cos\theta - \cos\alpha = 2\left(\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) = 2k^2\cos^2\varphi \; ;$$

poi, osservando che, quando θ varia da 0 ad α, φ va sempre crescendo da 0 ad $^1/_2\pi$,

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\, F(k) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\operatorname{sen}^4\frac{\alpha}{2} + \frac{25}{256}\operatorname{sen}^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\right) .$$

Se α è piccolissimo si può ridurre T al solo primo termine, *indipendente da α*, e si viene in tal modo a dimostrare l'isocronismo delle piccole oscillazioni. Per avere una maggiore approssimazione basta prendere un termine di più, nello sviluppo di T, o pure, applicando la formola (10), dopo avere osservato che nel caso attuale è $\mu = \mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{4}$, si può scrivere

$$\mathrm{T} = \frac{\pi}{\cos^2 \frac{\alpha}{4}} \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

g) Un altro notevole integrale, che si presenta nello studio dei vortici, è

$$\Phi = \frac{ab}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta}} .$$

Cominciamo dal ridurre alla sola metà inferiore l'intervallo d'integrazione, osservando che la parte dell'integrale, riferentesi alla metà superiore, si trasforma nell'altra mercè il cambiamento di θ in $2\pi - \theta$. Si può inoltre supporre $ab > 0$, perchè, se fosse $ab < 0$, basterebbe cambiare θ in $\pi - \theta$ per essere ricondotti all'a prima ipotesi. D'altra parte si noti che si ha

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta = (a + b)^2 + c^2 - 4ab\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{4ab}{k^2}\left(1 - k^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$

ponendo

$$k^2 = \frac{4ab}{(a + b)^2 + c^2} .$$

Per conseguenza, se si prende come variabile d'integrazione $\varphi = {}^1/_2(\pi - \theta)$, si ottiene

$$\Phi = \frac{k}{2\pi}\sqrt{ab} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = -\frac{k}{\pi}\sqrt{ab} \int_0^{{}^1/_2\pi} \frac{\cos 2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} ;$$

quindi, scrivendo $1 - 2\operatorname{sen}^2\varphi$ al posto di $\cos 2\varphi$,

$$-\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\Phi = k\,\mathrm{F}(k) + \frac{2}{k}\left\{\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\right\} . \tag{12}$$

Le formole (5) e (7) conducono poi all'espressione di Φ **mediante una serie**, che procede secondo le potenze ascendenti di k:

$$\Phi = \frac{\sqrt{ab}}{16}\left(k^3 + {}^3/_4 k^5 + \dots\right) .$$

Ad un'espressione più semplice si giunge passando dal modulo k **al modulo**

$$\mu = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} = \frac{\sqrt{(a + b)^2 + c^2} - \sqrt{(a - b)^2 + c^2}}{\sqrt{(a + b)^2 + c^2} + \sqrt{(a - b)^2 + c^2}} .$$

mercè le formole (10) ed (11). Infatti, se si osserva che

$$\frac{2}{k(1+\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \;,\quad {}^1/_2 k(1+\mu) - \frac{2}{k} = \sqrt{\mu} - \left(\sqrt{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \;,$$

la (12) si trasforma in

$$-\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\,\Phi = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\left\{ E(\mu) - F(\mu) \right\}. \tag{13}$$

In altri termini l' integrale proposto si trova così ridotto alla forma tipica (§ 349) d' un integrale ellittico di seconda specie:

$$\Phi = \frac{2\mu}{\pi}\sqrt{\mu ab}\int_0^{{}^1/_2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\mu^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \,.$$

Svolgendo in serie il secondo membro di (13) si ottiene

$$\Phi = {}^1/_2\sqrt{\mu ab}\left(\mu + \frac{3}{8}\mu^3 + \frac{15}{64}\mu^5 + \cdots\right).$$

Quando k è piccolissimo, questo sviluppo è più conveniente di quello precedentemente dedotto dalla (12); ma per k vicinissimo ad 1 conviene invece applicare direttamente alla (12) la formola assintotica (6).

h) Con un calcolo un po' lungo, ma che non offre difficoltà di sorta *, si giunge al risultato

$$\int_0^{{}^1/_2\pi} \frac{\log \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = -{}^1/_2 F(k)\log k - {}^1/_4\pi F(k') \,,$$

dove $k' = \sqrt{1-k^2}$; e da questo poi scaturiscono, per k vicinissimo ad 1, le formole alle quali si è accennato in principio del § 359. Qui ci limitiamo ad osservare che, se il secondo membro si pone sotto la forma c formule (6) del § 357.

$$-{}^1/_2\left\{F(k) - {}^1/_2\pi\right\}\log k - {}^1/_4\pi\left\{F(k') + \log k\right\},$$

e si fa tendere k a 0, si ottiene, ricordando (§ 322, *d*) che $\int_0^{{}^1/_2\pi} \log \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$ vale $-{}^1/_2\pi \log 2$, e scambiando poi k con k',

$$\lim_{k=1}\left\{F(k) + \log\sqrt{1-k^2}\right\} = \log 4 \;.$$

Questa formola non solo include la (6), ma permette di apportare in questa e

* Schlömilch, *loc. cit.*, p. 37. Vedi anche il *Bulletin de Darboux*, 1897, p. 109.

nella (8) una leggiera correzione, col porre la differenza fra il primo ed il secondo membro della (6) uguale, non a zero, ma a $\log 4$:

$$\mathrm{F}(k)=\log\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\ ,\quad \mathrm{E}(k)=1+\frac{1-k^2}{2}\log\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\ .$$

i) Per dare ai lettori un saggio delle difficili questioni che si possono risolvere mediante gli integrali ellittici, vogliamo qui segnalare due interessanti formole per trarne alcune conseguenze. Quando k va da 0 ad 1, gli integrali $\mathrm{F}(k)$ ed $\mathrm{F}(k')$ variano in modo che il rapporto del secondo al primo va da 0 all'infinito, crescendo sempre; e per conseguenza, dato un numero qualunque x fra 0 ed 1, esisterà sempre un valore di k, ed uno solo, per il quale si avrà

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{x}=\frac{\mathrm{F}(k')}{\mathrm{F}(k)}\ .\qquad x = e^{-\pi\frac{Fk'}{Fk}}$$

Orbene si dimostra che

$$1+2x+2x^4+2x^9+2x^{16}+\dots=\sqrt{\frac{2}{\pi}\mathrm{F}(k)}\ ,$$

dove k è la *funzione di* x, definita dalla precedente uguaglianza. In particolare, quando x si accosta indefinitamente ad 1, si tende ad avere $\mathrm{F}(k)=\pi^2/2\log\frac{1}{x}$, e però la somma della serie tende ad assumere la forma (*cfr.* § 101, *c*)

$$\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{x}}}\ ,\quad\text{ovvero}\quad\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\ .$$

Similmente si ha

$$1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-\dots=\sqrt{\frac{2}{\pi}k'\mathrm{F}(k)}\ ,$$

e per conseguenza (*cfr.* § 101, *d*), ricordando la (6),

$$\lim_{x=1}(x-x^4+x^9-x^{16}+\dots)={}^1/_2-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{k'=0}\sqrt{k'\log\frac{1}{k'}}={}^1/_2\ .$$

Invece per $k=1/\sqrt{2}$, essendo allora anche $k'=1/\sqrt{2}$, è $x=e^{-\pi}$; quindi

$$1+2e^{-\pi}+2e^{-4\pi}+2e^{-9\pi}+\dots=\sqrt{\frac{2}{\pi}\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=1{,}086\dots\ ,$$

$$1-2e^{-\pi}+2e^{-4\pi}-2e^{-9\pi}+\dots=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi}\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=0{,}913\dots\ .$$

Se poi si vuol fare lo scambio di k con k', bisogna ad x sostituire un altro numero x', vincolato ad x dalla relazione $\log\frac{1}{x}\log\frac{1}{x'}=\pi^2$; e siccome, d'altra parte, si ha

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\dots)\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1/4}=\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}\mathrm{F}(k)\mathrm{F}(k')}\ ,$$

si vede che il primo membro rimane inalterato, come il secondo, quando ad x si sostituisce x'; e si riesce in tal modo a dimostrare una relazione segnalata precedentemente (§ 101, c). Finalmente si noti che, quando si passa dal modulo k a $\varkappa = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ mediante la sostituzione di Landen, questa conduce anche, applicata in senso inverso, da k' a $\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$, sicchè, in virtù della (10),

$$F(\varkappa) = (1+k)F(k) \quad , \quad F(\varkappa') = {}^1/_2(1+k)F(k') \;;$$

ed il valore ξ di x, corrispondente a $\varkappa$, è tale che si ha

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{\xi} = \frac{F(\varkappa')}{F(\varkappa)} = \frac{1}{2}\,\frac{F(k')}{F(k)} = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{x} \,,$$

cioè $\xi = \sqrt{x}$. Dunque

$$1 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^4} + 2\sqrt{x^9} + \dots = \sqrt{\frac{2}{\pi}(1+k)F(k)} \,,$$

$$1 - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^4} - 2\sqrt{x^9} + \dots = \sqrt{\frac{2}{\pi}(1-k)F(k)} \,.$$

Cambiando nuovamente k in $\varkappa$ si ottiene

$$1 + 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^4} + 2\sqrt[4]{x^9} + \dots = (1+\sqrt{k})\sqrt{\frac{2}{\pi}F(k)} \,,$$

$$1 - 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^4} - 2\sqrt[4]{x^9} + \dots = (1-\sqrt{k})\sqrt{\frac{2}{\pi}F(k)} \,,$$

e se ne deduce

$$\frac{2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^9} + 2\sqrt[4]{x^{25}} + \dots}{1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots} = \sqrt{k} \,.$$

D'altra parte

$$\frac{1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \dots}{1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots} = \sqrt{k'} \,.$$

Ora, elevando alla quarta potenza e sommando, si trova l'*identità*

$$(2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^9} + 2\sqrt[4]{x^{25}} + \dots)^4 + (1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \dots)^4$$
$$= (1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \dots)^4 \,,$$

dalla quale è poi facile dedurre, uguagliando fra loro i coefficienti delle medesime potenze di x nei due membri, il seguente teorema di aritmetica: *il numero dei modi di spezzare in quattro quadrati un intero dispari è otto volte il numero dei modi di spezzare il quadruplo del medesimo intero nei quadrati di quattro interi dispari positivi.*

362. **Integrali euleriani**. Si chiamano così gli integrali

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx \quad , \quad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx \ ,$$

dei quali il primo si dice di *prima specie*, ed è una funzione delle *due* variabili positive μ e ν, funzione evidentemente simmetrica (come si riconosce cambiando x in $1-x$); ed il secondo, funzione dell'*unica* variabile positiva μ, si dice di *seconda specie*. Abbiamo visto (§ 322, h) che il secondo integrale vale $\Gamma(\mu)$, ed ora ritroveremo questo risultato calcolando il primo integrale nell'ipotesi che ν sia intero e positivo. Se inoltre si suppone $\nu > 1$, l'integrazione per parti dà

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\nu-2}dx$$

$$= \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2}dx - \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx \ ,$$

d'onde si trae

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2}dx \ ;$$

quindi, applicando successivamente questa formola stessa,

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}\cdot\frac{\nu-2}{\mu+\nu-2}\cdots\frac{1}{\mu+1}\int_0^1 x^{\mu-1}dx = \frac{(\nu-1)!}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu-1)}.$$

Ciò premesso, se si cambia x in x/ν, si trova

$$\int_0^\nu x^{\mu-1}\left(1-\frac{x}{\nu}\right)^{\nu-1}dx = \frac{\nu!\,\nu^{\mu-1}}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu-1)} \ ,$$

e per conseguenza, facendo crescere ν oltre ogni limite, e ricordando la definizione (§ 13, h) della funzione Γ,

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx = \Gamma(\mu) \ .$$

Qui si noti che il cambiamento di x in nx conduce alla formola

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-nx}dx = \frac{\Gamma(\mu)}{n^\mu} \ , \tag{14}$$

importante per le sue numerose applicazioni.

363. Ora vogliamo dimostrare che *anche gli integrali di prima specie ono esprimibili mediante la funzione* Γ. La sostituzione $x = y/(1+y)$ dà

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}dy}{(1+y)^{\mu+\nu}},$$

d al secondo membro si può dar la forma d'un integrale doppio mercè applicazione della formola (14), dopo avere, in questa, cambiato μ in $+\nu$, ed n in $1+y$:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^\infty y^{\mu-1}dy\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-(1+y)x}dx = \frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}dy\,.$$

ra, in virtù della stessa (14), si ha

$$\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}dy = \frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu}, \tag{15}$$

per conseguenza

$$\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}dy = \Gamma(\mu)\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-x}dx = \Gamma(\mu)\Gamma(\nu)\,.$$

unque

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\,. \tag{16}$$

Dopo ciò si può calcolare qualunque integrale euleriano facendo uso delle *tavole* (a venti decimali) della funzione Γ, costruite da Gauss *.

364. La formola (16), molto utile nelle applicazioni, si presenta spesso sotto la forma

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{2\mu-1}\theta\,.\cos^{2\nu-1}\theta\,.d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}, \tag{17}$$

alla quale si riduce ponendo $x = \operatorname{sen}^2\theta$. In particolare per $\mu = \nu$, ricordando che $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, se ne può trarre la dimostrazione della *formola di Legendre* (§ 96, *d*). Infatti

$$\frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma(2\mu)} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^{2\mu-1}d\theta = \frac{1}{2^{2\mu-2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen}^{2\mu-1}2\theta\,.d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2\mu-1}}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^{2\mu-1}\theta\,.d\theta = \frac{1}{2^{2\mu-2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen}^{2\mu-1}\theta\,.d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\,\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})},$$

---

* Vedi anche il citato *Traité* di Legendre, t. II.

33

d'onde

$$\Gamma(\mu+{}^1/_2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)}\,.$$

Dopo ciò dalla (17) segue anche, per qualunque valore *positivo* di μ,

$$\int_0^{{}^1/_2\pi}\operatorname{sen}^{2\mu-1}\theta\,.\,d\theta=\int_0^{{}^1/_2\pi}\cos^{2\mu-1}\theta\,.\,d\theta=2^{2\mu-2}\frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma(2\mu)}\,, \tag{18}$$

e si trova così generalizzato un risultato precedente (§ 328, g).

365. Esercizii: a) L'integrale di $\operatorname{tg}^n x\,dx$ fra 0 ed ${}^1/_2\pi$ si può calcolare mediante la (17) ponendo $2\mu-1=n$, $2\nu-1=-n$, sicchè, essendo $\mu+\nu=1$ si ha

$$\int_0^{{}^1/_2\pi}\operatorname{sen}^n x\cos^{-n}x\,dx={}^1/_2\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right):$$

e però, richiamando (§ 322, i) la formola

$$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\mu\pi}\,, \tag{19}$$

si vede che, per $|n|<1$,

$$\int_0^{{}^1/_2\pi}\operatorname{tg}^n x\,dx=\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}\,. \tag{20}$$

In particolare $\displaystyle\int_0^{{}^1/_2\pi}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, come si può anche dedurre da un precedente esercizio (§ 356, d). La restrizione $|n|<1$ risulta, oltrechè dai limiti di validità della formola (17), anche da osservazioni precedenti (§ 318, a), giacchè $\operatorname{tg}^n x$ diventa infinita dell'ordine $|n|$ per $x={}^1/_2\pi$ o per $x=0$, secondo che n è positivo o negativo, e però si può affermare *a priori* che l'integrale *non esiste* per $|n|\geqq 1$.

b) Per calcolare l'integrale di $\dfrac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ fra 0 ed 1, si cambii x in $x^{\frac{1}{n}}$. L'integrale diventa

$$\frac{1}{n}\int_0^1 x^{\frac{1}{n}-1}(1-x)^{-\frac{1}{n}}dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Ne segue, per la (19),

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}=\frac{\pi}{n\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}\,,$$

hè $n > 1$. Del resto anche l'integrale indefinito si lascia facilmente calcolare rma algebrico-logaritmica, giacchè si tratta d'un differenziale binomio, sodcente (§ 352) alla seconda condizione d'integrabilità: basta prendere, per ri) a forma razionale, $x = 1/\sqrt[n]{1+t^n}$.

c) Dato a calcolare l'integrale di $\dfrac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ fra 0 ed $^1/_2\pi$, si può applicare rmola (18), che dà subito

$$\int_0^{^1/_2\pi} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \frac{\Gamma^2(^1/_4)}{2\sqrt{2\pi}},$$

ragone di questo risultato con quello già ottenuto (§ 361, *a*) conduce alla sete *espressione d'un integrale euleriano mediante un integrale ellittico*:

$$\Gamma(^1/_4) = 2\sqrt{\sqrt{\pi}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 3{,}625\ldots\ .$$

e poi dalla (19)

$$\Gamma(^3/_4) = \pi\sqrt{2}/\Gamma(^1/_4) = 1{,}225\ldots\ .$$

d) Anche all'integrale di $\dfrac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$ fra 0 ed 1 si dà facilmente la ormai iana di prima specie. Basta assumere come variabile d'integrazione $t = x^4$ ttenere, in virtù della (16),

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}} = {}^1/_4\int_0^1 t^{\frac{n-3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)},$$

:e, per la formola di Legendre,

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2^{\frac{n-5}{2}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

sempio

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

:agone dell'ultimo risultato con un altro precedente (§ 361, *b*) fornisce la se:e relazione fra i valori di F e di E, corrispondenti al modulo $1/\sqrt{2}$:

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

e) Un altro integrale, facilmente riducibile alla funzione Γ, è

$$\mathfrak{J}=\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^{n-1}\varphi\, d\varphi}{(1+k\cos\varphi)^n}\ .$$

Si può sempre supporre $k \geqq 0$, perchè, se fosse $k<0$, basterebbe cambiare φ in $\pi-\varphi$ per essere ricondotti al caso di $k>0$. Inoltre si osservi che per $n \leqq 0$ la funzione da integrare diventa infinita dell'ordine $1-n \geqq 1$ negli estremi dell'intervallo d'integrazione, d'onde segue (§ 318, *a*) che l'integrale *può esistere* solo per $n>0$; ed effettivamente *esiste* quando è $k<1$, perchè nell'interno del detto intervallo la funzione resta finita e continua. Non esiste, invece, per $k=1$, perchè in questa ipotesi la funzione diventa infinita dell'ordine $n+1>1$ nell'estremo superiore. Se poi è $k>1$, la funzione diventa infinita dell'ordine n per $\varphi=\alpha$, essendo $\cos\alpha=-1/k$. Dunque l'integrale esiste anche per $k>1$, purchè sia $n<1$. Per calcolarlo nel primo caso ($0 \leqq k<1$, $n>0$) basta adoperare la sostituzione $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, notevole per l'uso che se ne fa in varie questioni concernenti l'ellisse, specialmente in Astronomia. A tale sostituzione si è condotti nel modo più naturale quando dall'anomalia eccentrica φ, che definisce la posizione d'un punto sull'ellisse, si vuol passare alle coordinate polari (r,θ), nell'ipotesi che si prenda come polo uno dei fuochi, e si diriga l'asse polare verso l'altro fuoco. Evidentemente r è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, i cui lati sono $ka+a\cos\varphi$ e $b\operatorname{sen}\varphi$, sicchè

$$r^2=a^2\left\{(k+\cos\varphi)^2+(1-k^2)\operatorname{sen}^2\varphi\right\}=a^2(1+k\cos\varphi)^2\ ,$$

cioè $r=a(1+k\cos\varphi)$; quindi

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{1-k^2}\,.\operatorname{sen}\varphi}{1+k\cos\varphi}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{k+\cos\varphi}{1+k\cos\varphi}\ ,$$

d'onde, differenziando l'una o l'altra eguaglianza,

$$d\theta=\frac{\sqrt{1-k^2}\,.d\varphi}{1+k\cos\varphi}\ ;\qquad \text{ossia}\quad r d\theta=b d\varphi\ .$$

Si deduce inoltre dalle medesime uguaglianze

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\sqrt{1-k^2}\,.\operatorname{sen}\varphi}{(1+k)(1+\cos\varphi)}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\ .$$

Ciò premesso, siccome θ va sempre crescendo da 0 a π, quando φ varia da 0 a π, è chiaro che si ha

$$(1-k^2)^{\frac{n}{2}}\int_0^\pi\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{1+k\cos\varphi}\right)^{n-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}=\int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-1}\theta\,.d\theta=2\int_0^{1/2\pi}\operatorname{sen}^{n-1}\theta\,.d\theta\ ,$$

ossia, per la (18),

$$\mathfrak{J} = \frac{2^{n-1}\Gamma^2(^1/_2 n)}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}\Gamma(n)} .$$

Passando al secondo caso ($k > 1$, $0 < n < 1$), si limiti l'integrazione all'intervallo $(0, \alpha)$ per evitare che la funzione integranda possa diventare immaginaria. Mercè la sostituzione $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, osservando che θ va sempre crescendo da 0 ad $^1/_2\pi$ quando φ varia da 0 ad α, si ottiene, con un calcolo analogo al precedente, il risultato

$$\int_0^{\alpha}\frac{\operatorname{sen}^{n-1}\varphi\, d\varphi}{(1+k\cos\varphi)^n} = \frac{1}{(k^2-1)^{n/_2}}\int_0^{^1/_2\pi}\operatorname{sen}^{n-1}\theta\cos^{-n}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}(k^2-1)^{n/_2}} .$$

f) Ora, con un procedimento già adoperato (§ 341, *d*) in un caso particolare, proponiamoci di calcolare gli integrali

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\mu}}dx , \quad \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^{\mu}}dx ,$$

nei quali μ rappresenta un numero positivo, inferiore ad 1 nel primo integrale, a 2 nel secondo. Che gli integrali *non esistano* per altri valori di μ risulta (§ 318, *a*) dall'osservare che le funzioni integrande diventano infinite degli ordini μ e $\mu - 1$, rispettivamente, per $x = 0$. Ciò premesso, si trasformino gli integrali proposti, mediante la (15), in integrali doppii:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y^{\mu-1}e^{-xy}\cos x\, dx\, dy , \quad \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y^{\mu-1}e^{-xy}\operatorname{sen} x\, dx\, dy .$$

Questi, se si richiamano i valori

$$\int_0^{\infty} e^{-xy}\cos x\, dx = \frac{y}{1+y^2} , \quad \int_0^{\infty} e^{-xy}\operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{1+y^2} ,$$

trovati in un precedente esercizio (§ 341, *j*), si riducono subito agli integrali

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\frac{y^{\mu}dy}{1+y^2} , \quad \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\frac{y^{\mu-1}dy}{1+y^2} .$$

Intanto, ricordando il risultato (20), la sostituzione $y = \operatorname{tg}\theta$ dà

$$\int_0^{\infty}\frac{y^n dy}{1+y^2} = \int_0^{^1/_2\pi}\operatorname{tg}^n\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}} ; \qquad (-1 < n < 1).$$

Dunque

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}\,, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^\mu}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\operatorname{sen}\frac{\mu\pi}{2}}\,.$$

In particolare

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{{}^1/_2\pi}\,, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{{}^1/_2\pi}\,.$$

366. Dimostriamo, per finire, un'importante formola, che permette di calcolare $\Gamma(x)$ con grande approssimazione quando x è molto grande. Si parta dalla definizione (§ 13, h)

$$\Gamma(x+1) = \prod_1^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}\,,$$

e si scriva, prendendo i logaritmi dei due membri,

$$\log\Gamma(x) = -\log x + \sum_1^\infty \left\{ x\log(n+1) - (x-1)\log n - \log(x+n) \right\}.$$

Si facciano sparire i logaritmi, nel secondo membro, mediante la formola

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^x dx \int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-xt})\frac{dt}{t}\,.$$

Si trova così, con un calcolo facile,

$$\log\Gamma(x) = \int_0^\infty \left\{ (x-1)e^{-t} - \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right\} \frac{dt}{t}\,; \tag{21}$$

poi, integrando rispetto ad x, fra x ed $x+1$, e ricordando (§ 322, i) la formola di Raabe,

$$x\log x - x + \log\sqrt{2\pi} = \int_0^\infty \left\{ \left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right) e^{-t} + \frac{e^{-xt}}{t} \right\} \frac{dt}{t}\,.$$

Il secondo membro si può spezzare in

$$\int_0^\infty \left\{ \left(x - 1 - \frac{1}{1-e^{-t}} \right) e^{-t} + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{-xt} \right\} \frac{dt}{t} + {}^1/_2 \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-xt}) \frac{dt}{t}\,.$$

Dunque

$$(x-{}^1/_2)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} = \int_0^\infty \left\{\left(x-1-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)e^{-xt}\right\}\frac{dt}{t} .$$

Ora la (21) diventa

$$\log\Gamma(x) = (x-{}^1/_2)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\frac{dt}{t} .$$

Intanto, se si prende $n = 1/(1-e^{-t})$ nelle note (§ 94, c) disuguaglianze

$$1 < \left(n-\frac{1}{2}\right)\log\frac{n}{n-1} < 1 + \frac{1}{12n(n-1)} ,$$

si trova

$$0 < \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < \frac{e^t + e^{-t} - 2}{12t} < \frac{t}{12} ,$$

e per conseguenza si può scrivere

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\frac{dt}{t} = \frac{\theta}{12}\int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{\theta}{12x} ,$$

rappresentando con θ un numero compreso fra 0 ed 1. Dunque

$$\log\Gamma(x) = (x-{}^1/_2)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} + \frac{\theta}{12x} .$$

Passando dai logaritmi ai corrispondenti numeri si trova finalmente

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-{}^1/_2} e^{-x+\frac{\theta}{12x}} .$$

Da questa formola risulta, in particolare, la formola di Stirling (§ 94, c) supponendo x uguale ad un numero intero n, ed osservando che $n! = n\Gamma(n)$

APPLICAZIONI A MISURE GEOMETRICHE.

Lunghezze.

367. Poichè il differenziale, e per conseguenza la derivata dell'arco s d'una curva, rispetto ad una variabile qualunque t, si sa (§§ 184, 231) calcolare, siamo ora in grado di risalire, mercè l'integrazione, alla conoscenza dell'arco stesso in funzione di t:

$$s = \int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,.dt .$$

In particolare per le curve piane, date in coordinate cartesiane (x, y) o in coordinate polari (r, θ), si potrà assumere x o θ, rispettivamente, come variabile d'integrazione, e si avrà

$$s = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad \text{o} \qquad s = \int \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta \; .$$

368. **Esempii**: *a)* Per l'*asteroide*, rappresentata (§ 196, *g*) dall'equazione $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, si ha $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$, $\sqrt{1 + y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3}$; quindi, ponendo l'origine degli archi nel punto $(0, a)$, è $s = a^{\frac{1}{3}} \int_0^x x^{-\frac{1}{3}} dx = {}^3/_2 a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$. In particolare ${}^3/_2 a$ è la lunghezza dell'intero arco compreso nell'angolo xOy, e però *la lunghezza totale dell'asteroide è* $6a$.

b) La *logaritmica* $y = ae^{\frac{x}{a}}$ si può rappresentare ponendo

$$x = a \log \operatorname{tg} \varphi \; , \quad y = a \operatorname{tg} \varphi \; .$$

Ne segue (integrando per parti, o pure moltiplicando per $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)

$$s = a \int \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{a}{\cos \varphi} + a \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = a(\sec \varphi + \log \operatorname{tg} {}^1/_2 \varphi) + \textit{costante}.$$

Se, per esempio, si vuol computare s a partire dal vertice, o punto di massima curvatura $(y = a/\sqrt{2})$, si trova

$$s = a\left(\sec \varphi - \sqrt{{}^3/_2} + \log \frac{\operatorname{tg} {}^1/_2 \varphi}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right).$$

c) Per la *catenaria di eguale resistenza*, rappresentata da $y = -a \log \cos \frac{x}{a}$, si ha $y' = \operatorname{tg} \frac{x}{a}$; quindi

$$s = \int_0^x \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}} = a \log \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right).$$

Ora (§ 196, *m*) siamo in grado di trovare l'equazione intrinseca della curva: basta sommare le uguaglianze

$$e^{\frac{s}{a}} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right) \; , \quad e^{-\frac{s}{a}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right) \; ;$$

e ricordarsi che $\rho \cos \frac{x}{a} = a$.

d) La lunghezza d'un arco della *parabola* $y^2 = 2ax$, diviso per metà dal vertice, è (§ 346, *c*)

$$s = \frac{2}{a} \int_0^y \sqrt{y^2 + a^2}\, dy = \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2} + a \log \frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a} \; .$$

Per esempio l'arco, la cui corda è divisa per metà dal fuoco, ha una lunghezza uguale ad 1,147...volte la lunghezza della corda.

e) La lunghezza (*cfr.* §§ 190, *m*; 361, *a*) della *lemniscata* $r=\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}$ è

$$4\int_0^{1/4\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}}=2\int_0^{1/2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}=2\sqrt{2}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=5{,}244\ldots\,.$$

Similmente per la *sinusoide* $y=\operatorname{sen}x$ si trova, come lunghezza d'un arco completo (ossia compreso fra due punti consecutivi d'inflessione),

$$2\int_0^{1/2\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{1/2\pi}\sqrt{1-{}^1/_2\operatorname{sen}^2 x}\,dx=2\sqrt{2}\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3{,}820\ldots\,.$$

f) La lunghezza totale dell'*ellisse*, definita dai semi-assi a e $b=a\sqrt{1-k^2}$, o dal semi-asse focale e dall'eccentricità k, è

$$4\int_0^{1/2\pi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi=4a\int_0^{1/2\pi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi=4a\mathrm{E}(k)\,.$$

Dunque, se designiamo con R il raggio d'una circonferenza, lunga quanto l'ellisse, possiamo scrivere (§ 358)

$$\mathrm{R}=\frac{2a}{\pi}\mathrm{E}(k)=a\left(1-\frac{k^2}{4}-\frac{3k^4}{64}-\frac{5k^6}{256}-\frac{175k^8}{16384}-\frac{567k^{10}}{65536}-\ldots\right).$$

Si conoscono parecchie espressioni approssimate di R; ma le più semplici sono formate mediante i numeri $a'={}^1/_2(a+b)$, $b'=\sqrt{ab}$, $a''={}^1/_2(a'+b')$, $b''=\sqrt{a'b'}$, *ecc.* Quando k è piccolissimo si può, trascurandone le potenze oltre la *seconda*, limitarsi a prendere $\mathrm{R}=a'$; ma questo valore, sempre troppo debole, non è abbastanza soddisfacente. Se si cerca invece di conservare, nello sviluppo di R, le potenze di k fino alla *sesta*, si è condotti a prendere

$$\mathrm{R}=3b''-2b', \qquad \text{o pure} \qquad \mathrm{R}={}^1/_2(3a'-b')\,,$$

valori preferibili ad a' anche perchè comprendono sempre fra loro il valore esatto di R. Del resto al primo si può sostituire la media aritmetica dei due valori, cioè

$$\mathrm{R}={}^1/_4(3a'-5b'+6b'')\,,$$

il cui sviluppo coincide con quello di R fino alla *decima* potenza di k; *ecc.* Così, per esempio, per $a=1$ e $b={}^1/_2$ si ha

$$a'=\frac{3}{4}\;,\quad b'=\frac{1}{\sqrt{2}}\;,\quad b''=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\;,\quad {}^1/_4(3a'-5b'+6b'')=0{,}7709\ldots\,.$$

Orbene le tavole ellittiche (§ 360) danno appunto $\mathrm{R}=\dfrac{2}{\pi}\mathrm{E}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0{,}7709\ldots\,.$

31

In particolare per le curve piane, date in coordinate cartesiane (x, y) o in coordinate polari (r, θ), si potrà assumere x o θ, rispettivamente, come variabile d'integrazione, e si avrà

$$s=\int \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad \text{o} \qquad s=\int \sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta\,.$$

368. **Esempii:** *a)* Per l'*asteroide*, rappresentata (§ 196, *g*) dall'equazione $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, si ha $y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{1+y'^2}=\left(\frac{a}{x}\right)^{1/3}$; quindi, ponendo l'origine degli archi nel punto $(0, a)$, è $s=a^{\frac{1}{3}}\int_0^x x^{-\frac{1}{3}}dx={}^3/_2\, a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$. In particolare ${}^3/_2\, a$ è la lunghezza dell'intero arco compreso nell'angolo xOy, e però *la lunghezza totale dell'asteroide è* $6a$.

b) La *logaritmica* $y=ae^{\frac{x}{a}}$ si può rappresentare ponendo

$$x=a\log\operatorname{tg}\varphi\ ,\quad y=a\operatorname{tg}\varphi\ .$$

Ne segue (integrando per parti, o pure moltiplicando per $\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi=1$)

$$s=a\int\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}=\frac{a}{\cos\varphi}+a\int\frac{d\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}=a(\sec\varphi+\log\operatorname{tg}{}^1/_2\varphi)+\textit{costante}.$$

Se, per esempio, si vuol computare s a partire dal vertice, o punto di massima curvatura $(y=a/\sqrt{2})$, si trova

$$s=a\left(\sec\varphi-\sqrt{{}^3/_2}+\log\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\varphi}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right).$$

c) Per la *catenaria di eguale resistenza*, rappresentata da $y=-a\log\cos\frac{x}{a}$ si ha $y'=\operatorname{tg}\frac{x}{a}$; quindi

$$s=\int_0^x\frac{dx}{\cos\frac{x}{a}}=a\log\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2a}\right).$$

Ora (§ 196, *m*) siamo in grado di trovare l'equazione intrinseca della curva: basta sommare le uguaglianze

$$e^{\frac{s}{a}}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2a}\right)\ ,\quad e^{-\frac{s}{a}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2a}\right),$$

e ricordarsi che $\rho\cos\frac{x}{a}=a$.

d) La lunghezza d'un arco della *parabola* $y^2=2ax$, diviso per metà dal vertice, è (§ 346, *c*)

$$s=\frac{2}{a}\int_0^y\sqrt{y^2+a^2}\,dy=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}+a\log\frac{y+\sqrt{y^2+a^2}}{a}\,.$$

'er esempio l'arco, la cui corda è divisa per metà dal fuoco, ha una lunghezza guale ad 1,147...volte la lunghezza della corda.

e) La lunghezza (*cfr.* §§ 190, *m*; 361, *a*) della *lemniscata* $r=\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}$ è

$$4\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}=2\sqrt{2}\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=5{,}244\ldots\,.$$

imilmente per la *sinusoide* $y=\operatorname{sen} x$ si trova, come lunghezza d'un arco comleto (ossia compreso fra due punti consecutivi d'inflessione),

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x}\,dx=2\sqrt{2}\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3{,}820\ldots\,.$$

f) La lunghezza totale dell'*ellisse*, definita dai semi-assi a e $b=a\sqrt{1-k^2}$, lal semi-asse focale e dall'eccentricità k, è

$$4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi=4a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi=4a\mathrm{E}(k)\,.$$

nque, se designiamo con R il raggio d'una circonferenza, lunga quanto l'el-se, possiamo scrivere (§ 358)

$$\mathrm{R}=\frac{2a}{\pi}\mathrm{E}(k)=a\left(1-\frac{k^2}{4}-\frac{3k^4}{64}-\frac{5k^6}{256}-\frac{175k^8}{16384}-\frac{567k^{10}}{65536}-\ldots\right).$$

conoscono parecchie espressioni approssimate di R; ma le più semplici sono forte mediante i numeri $a'=\frac{1}{2}(a+b)$, $b'=\sqrt{ab}$, $a''=\frac{1}{2}(a'+b')$, $b''=\sqrt{a'b'}$, *ecc.* ando k è piccolissimo si può, trascurandone le potenze oltre la *seconda*, limisi a prendere $\mathrm{R}=a'$; ma questo valore, sempre troppo debole, non è abbanza soddisfacente. Se si cerca invece di conservare, nello sviluppo di R, le poze di k fino alla *sesta*, si è condotti a prendere

$$\mathrm{R}=3b''-2b', \qquad \text{o pure} \qquad \mathrm{R}=\tfrac{1}{2}(3a'-b')\,,$$

lori preferibili ad a' anche perchè comprendono sempre fra loro il valore esatto R. Del resto al primo si può sostituire la media aritmetica dei due valori, cioè

$$\mathrm{R}=\tfrac{1}{4}(3a'-5b'+6b'')\,,$$

cui sviluppo coincide con quello di R fino alla *decima* potenza di k; ecc. Così, er esempio, per $a=1$ e $b=\frac{1}{2}$ si ha

$$=\frac{3}{4}\,,\quad b'=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad b''=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\,,\quad \tfrac{1}{4}(3a'-5b'+6b'')=0{,}7709\ldots\,.$$

rbene le tavole ellittiche (§ 360) danno appunto $\mathrm{R}=\frac{2}{\pi}\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0{,}7709\ldots$.

g) La lunghezza totale della (§ 190, *k*) *lumaca* $r = a\cos\theta + b$ è

$$2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}\,d\theta = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{(a+b)^2-4ab\,\mathrm{sen}^2\varphi}\,d\varphi = 4(a+b)E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

Se c è il più grande, e μc il più piccolo dei numeri a e b, la formola (11) del § 359 permette di scrivere l'ultima espressione nel modo che segue:

$$8c\left\{E(\mu) - \tfrac{1}{2}(1-\mu^2)F(\mu)\right\}.$$

Per esempio la lunghezza della lumaca con due flessi coincidenti ($b = 2a$) è uguale a 3,341... volte la lunghezza del segmento, che la curva intercetta sul suo asse di simmetria.

h) Se, per calcolare la lunghezza d'un arco dell'*iperbole* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ fra il vertice $(a, 0)$ ed un punto qualunque (x, y) a coordinate positive, si osserva che

$$dx = \frac{a^2y}{b^2x}dy = \frac{ay\,dy}{\sqrt{y^2+b^2}}\ , \quad ds = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)y^2+b^4}{b^2(y^2+b^2)}}\,dy\ ,$$

si è condotti a porre $y = \frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}$, e si ottiene

$$s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}\ ,$$

ponendo $k = a/\sqrt{a^2+b^2}$, sicchè $1/k$ è l'eccentricità. L'integrale precedente, moltiplicato per $1 - k^2 = (1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi) - k^2\cos^2\varphi$, si può scindere in altri due:

$$(1-k^2)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - k^2F(k,\varphi)\,.$$

Intanto l'integrazione per parti dà

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \mathrm{tg}\,\varphi.\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi} + F(k,\varphi) - E(k,\varphi)\,. \qquad (1)$$

Dunque

$$s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}F(k,\varphi) - \sqrt{a^2+b^2}\,E(k,\varphi) + \mathrm{tg}\,\varphi.\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2}\,.$$

Il calcolo di s, in ciascun caso particolare, richiede l'uso delle tavole (a doppia entrata) di Legendre. Si osservi che il crescere indefinito di s, quando φ tende ad $\frac{1}{2}\pi$, si deve unicamente all'ultimo termine, che rappresenta la *distanza del centro alla normale nell'estremo mobile.*

i) Consideriamo la *logociclica* (§ 203, *b*), rappresentata dall'equazione

$$(x+y)(x^2+y^2) = 2axy\ , \qquad (2)$$

o, in coordinate polari, da $r=\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$, se si prende l'asse di simmetria come asse polare. La lunghezza d'un arco qualunque, a partire dal vertice, è

$$s=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\theta \sqrt{\cos^2 2\theta+2\operatorname{sen}^2 2\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta};$$

e però la lunghezza totale del cappio formato dalla curva è

$$a\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\sqrt{\cos^2 2\theta+2\operatorname{sen}^2 2\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=2a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}}{1+\operatorname{sen}\varphi}\,d\varphi$$

$$=2a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Intanto si ha dalla (1)

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\operatorname{tg}\varphi.\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}+F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right):$$

ed un'integrazione per parti ci dà

$$\int_0^\varphi \operatorname{sen}\varphi.\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\left(\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}}{\cos\varphi}\right)_0^\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi\frac{d\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}}{\cos\varphi}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\cos\varphi+\sqrt{1+\cos^2\varphi}}{1+\sqrt{2}}.$$

Dunque

$$\int_0^\varphi(1-\operatorname{sen}\varphi)\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=1-\frac{1-\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\cos\varphi+\sqrt{1+\cos^2\varphi}}{1+\sqrt{2}}+F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right):$$

e finalmente, facendo $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, si trova che *la lunghezza del cappio della logociclica è*

$$2a\left\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}-1)+F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},$$

cioè 2,489... volte la lunghezza del segmento, che la curva stacca dal suo asse di simmetria. La proprietà di avere gli archi esprimibili mediante integrali ellittici delle prime due specie, val quanto dire mediante archi di coniche, appartiene a l infinite altre cubiche unicursali, le quali costituiscono con la logociclica la classe detta delle *cubiche circolari* *. Queste curve possono essere tutte rappresentate dall'equazione (2), in cui si aggiunga al secondo membro un termine della forma $(x+y)(px+qy)$, continuando a designare con $a/\sqrt{2}$ la distanza dell'assintoto al punto doppio.

j) Si consideri la *curva di Viviani*, intersezione d'una sfera con un cilindro, che ha per base un circolo descritto sopra un raggio della sfera come diametro. Dalle equazioni della curva $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$, si ricava $y^2=x(a-x)$, $z^2=a(a-x)$, ed è naturale porre $x=a\cos^2\varphi$, dimodochè, limitandosi al quarto di curva, situato nella regione delle coordinate positive, si ha $y=a\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$, $z=a\operatorname{sen}\varphi$. Quest'ultima eguaglianza ci dice che φ è il valore della latitudine del punto (x,y,z), mentre dall'espressione di x facilmente si deduce che φ è il valore della longitudine del medesimo punto. Dunque la curva di Viviani si può anche definire, *sulla sfera*, come il *luogo dei punti che hanno la longitudine uguale alla latitudine*. Ciò premesso, si ha

$$dx=-a\operatorname{sen}2\varphi\,.\,d\varphi\;,\quad dy=a\cos 2\varphi\,.\,d\varphi\;,\quad dz=a\cos\varphi\,.\,d\varphi\;;$$

quindi, quadrando e sommando, $ds^2=a^2(1+\cos^2\varphi)d\varphi^2$, e però *la lunghezza totale della curva* è

$$4a\int_0^{{}^1/_2\pi}\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi=4a\sqrt{2}\,.\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

In altri termini la curva di Viviani, sulla sfera di raggio a, è lunga quanto l'ellisse descritta sui semi-assi a ed $a\sqrt{2}$, cioè quanto la circonferenza d'un circolo massimo, moltiplicata per 1,216...... Al medesimo risultato si giunge anche più agevolmente se si osserva che, quando si applica il cilindro sopra un piano, la curva si trasforma in due archi completi di sinusoide. Inversamente, per costruire la curva di Viviani, si disegni la coppia di sinusoidi $y=\pm a\operatorname{sen}\dfrac{x}{a}$, e si stacchi dal cartoncino il pezzo compreso fra due archi terminati nei medesimi punti d'inflessione. Curvando il cartoncino in modo che la comune corda degli archi diventi una circonferenza, l'orlo si trasformerà nella curva di Viviani, appartenente alla sfera di raggio a.

Aree piane.

369. Per valutare l'area compresa fra la curva $y=f(x)$, l'asse delle ascisse e le ordinate corrispondenti ai valori a e b dell'ascissa, dividiamo (a,b) in intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$, ed osserviamo che all'area della striscia limitata dalle ordinate condotte negli estremi dell'intervallo h_i si può sostituire quella d'un rettangolo di base h_i, la cui altezza y_i è compresa fra il minimo ed il massimo valore di y in h_i. L'area totale A non cessa così di essere rappresentata dalla somma $\sum_1^n h_i y_i$ quando gli intervalli h_i, crescendo in numero, tendono simultaneamente a zero; e poi-

* Salmon, *Géométrie analytique* (Courbes planes, p. 182).

chè, in queste condizioni, la detta somma non può avere altro limite se non l'integrale di $y dx$ in (a, b), è necessario che sia $A = \int_a^b y dx$. In modo analogo si dimostra che l'area compresa fra un arco della curva $r = f(\theta)$, ed i raggi vettori negli estremi, è $A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$, dove a e b sono i valori estremi di θ. Se poi si tratta di valutare l'area limitata da una curva chiusa, nell'ipotesi più semplice che questa non sia incontrata in più di due punti da qualunque parallela all'asse y, o da qualunque retta uscente dal polo, è chiaro che, se α, β sono il più piccolo ed il più grande dei due valori di y (o di r), che corrispondono a ciascun valore di x (o di θ), e se a, b rappresentano i valori estremi (ordinariamente radici di $\beta - \alpha$) della variabile d'integrazione, si ha

$$A = \int_a^b (\beta - \alpha) dx \quad , \quad A = \frac{1}{2}\int_a^b (\beta^2 - \alpha^2) d\theta \ . \tag{3}$$

A queste formole siamo giunti decomponendo l'area in *elementi* infinitesimi del *primo* ordine; ma possiamo anche decomporla in elementi infinitesimi del *secondo* ordine, assumendo come tali i rettangoli costruiti sui lati dx e dy, nel caso delle coordinate cartesiane, o sui lati dr ed $r d\theta$ quando si fa uso di coordinate polari. Allora, in virtù della definizione stessa degli integrali doppii, si avrà l'una o l'altra delle formole

$$A = \int\int dx dy \quad , \quad A = \int\int r dr d\theta \ ,$$

le quali includono le (3), come si riconosce scrivendo

$$A = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \quad , \quad A = \int_a^b d\theta \int_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)} r dr \ ,$$

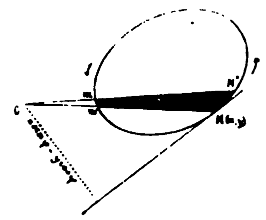
ma sono più generali, in quanto che possono servire a valutare l'area limitata da qualunque curva. Del resto, per un sistema qualsiasi di coordinate curvilinee, si ha (§ 339)

$$A = \int\int \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \ , \tag{4}$$

estendendo l'integrazione all'area da valutare, e convenendo di eseguire le singole integrazioni semplici nel senso in cui vanno crescendo le rispettive variabili.

370. Altre formole sono specialmente utili nel caso che le coordinate

x ed y dei punti del contorno siano date in funzione d'un parametro t, che si farà sempre variare in modo che il punto corrispondente percorra il contorno *lasciando l'area alla sua sinistra.* Prendiamo come elemento l'area del quadrilatero MM'L'L compreso fra due rette infinitamente vicine, uscenti dall'origine; poi, osservando che



$$\mathrm{MM'L'L} = \mathrm{OMM'} - \mathrm{OLL'} = \mathrm{OMM'} + \mathrm{OL'L} ,$$

assumiamo invece come elemento, *positivo* o *negativo*, l'area del triangolo OMM', *considerata* (cfr. § 107, *d*) *col suo segno*:

$$\mathrm{OMM'} = {}^1/_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x+dx \\ 0 & y & y+dy \end{vmatrix} = {}^1/_2 (xdy - ydx) .$$

Questo valore si ottiene anche prendendo la metà del prodotto della *base* ds per l'altezza $x \operatorname{sen}\varphi - y \cos\varphi$. Ora, immaginando sempre espressi x ed y in funzione della variabile d'integrazione t, si ha

$$\mathrm{A} = {}^1/_2 \int (xdy - ydx) . \qquad (5)$$

Siccome poi il valore dell'integrale di $xdy + ydx$, esteso ad un arco qualunque, non è che la differenza dei valori di xy negli estremi dell'arco, è chiaro che si ha $\int(xdy + ydx) = 0$ quando si estende l'integrazione a tutto il contorno. Ne segue che si può dare ad A l'una o l'altra delle forme

$$\mathrm{A} = \int xdy \quad , \quad \mathrm{A} = -\int ydx , \qquad (6)$$

come si riesce a constatare anche eseguendo convenientemente la doppia integrazione $\int\int dxdy$. Finalmente, quando si assume $t = y/x$ come variabile d'integrazione, la (5) prende la forma

$$\mathrm{A} = {}^1/_2 \int x^2 dt , \qquad (7)$$

preferibile alle (6), perchè non richiede la derivazione di x o di y rispetto a t, ed è applicabile, come la (5), a qualunque porzione dell'area, limitata da due raggi vettori. Invece, per potere applicare le (6) al caso d'un arco qualunque, bisogna aggiungere o sottrarre ad A la differenza dei valori di ${}^1/_2 xy$ negli estremi dell'arco, e si ricade in tal modo sulla formola data in principio per l'area compresa fra un arco di curva, un asse, e le perpendicolari all'asse, condotte per gli estremi dell'arco. Del resto la formola (7) non differisce sostanzialmente dalla seconda formola (3), alla quale subito si riduce mercè la sostituzione $t = \operatorname{tg}\theta$.

371. **Esempii**: *a)* L'area totale chiusa nella *lemniscata* $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ è

$$A = 2a^2 \int_0^{1/4\pi} \cos 2\theta \, d\theta = a^2 ,$$

vale cioè quanto l'area del triangolo formato dalla tangente in un vertice con le tangenti nel punto doppio. Analogamente, per la *lumaca* $r = a\cos\theta + b$, si trova

$$A = \int_0^{\pi} r^2 d\theta = \int_0^{\pi} ({}^1/_2 a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta + {}^1/_2 a^2 \cos 2\theta) d\theta = \pi({}^1/_2 a^2 + b^2) .$$

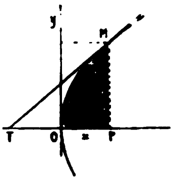
Questo risultato suppone $b \geqq a$, ed in particolare diventa $A = {}^3/_2 \pi a^2$ per la *cardioide*; ma per $b < a$ il valore trovato rappresenta la somma delle aree limitate dai due cappii, esterno ed interno, le quali valgono rispettivamente

$${}^1/_2 \pi({}^1/_2 a^2 + b^2) \pm \left\{ {}^3/_2 b \sqrt{a^2 - b^2} + ({}^1/_2 a^2 + b^2) \operatorname{arc\,sen} \frac{b}{a} \right\} .$$

b) Per la *parabola* $y^2 = 2ax$ si ha

$$A = \int_0^x y dx = \frac{1}{a} \int_0^y y^2 dy = \frac{y^3}{3a} = {}^2/_3 xy .$$

Dunque l'area parabolica OMP è le due terze parti di quella del triangolo TMP. Da ciò è poi facile dedurre che l'area compresa fra qualunque arco di parabola e la sua corda è i ${}^2/_3$ dell'area compresa fra la corda stessa e le tangenti negli estremi. Del resto a questo risultato si può anche giungere direttamente, immaginando che si ripeta il calcolo fatto in principio, dopo aver presa come asse delle y la tangente parallela alla corda, e posta l'origine nel punto di contatto, ed assumendo come elemento dell'area il prodotto di ydx per il seno dell'angolo degli assi.



c) Per la *catenaria* (§ 190, *c*) di parametro a, l'area compresa fra un arco qualunque, la direttrice e le ordinate estreme, vale quanto l'area d'un rettangolo, che ha i lati uguali ad a ed alla lunghezza dell'arco. Infatti, se l'arco ha un estremo nel vertice,

$$A = {}^1/_2 a \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a^2 y' = as :$$

quindi, per un arco qualunque MM', si ha $A = a(s' - s) = a . \text{arco MM}'$.

d) Ad un punto si faccia percorrere una *spirale logaritmica* (§ 190, *e*) finchè ritorni sul primitivo raggio vettore. Questo raggio e l'arco percorso limitano un'area, che si può facilmente valutare in funzione delle distanze a e b del polo agli estremi dell'arco. Posto $b = ae^{2m\pi}$, l'equazione della spirale è $r = ae^{m\theta}$, e si ha

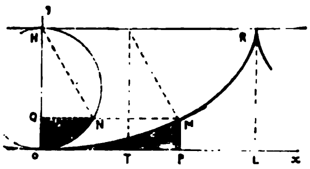
$$A = {}^1/_2 a^2 \int_0^{2\pi} e^{2m\theta} d\theta = \frac{a^2}{4m} (e^{4m\pi} - 1) = \pi \frac{b^2 - a^2}{\log \frac{b^2}{a^2}} .$$

Se la perpendicolare elevata alla corda, nel suo punto di mezzo, incontra in P e Q le tangenti negli estremi, l'area del triangolo (isoscele) OPQ è appunto A. Possiamo poi trovare l'area del circolo di raggio a, immaginando che m tenda a zero, e conseguentemente b ad a:

$$A = \lim \frac{b+a}{2} \cdot \frac{b-a}{2m} = a^2 \lim_{m=0} \frac{e^{2m\pi}-1}{2m} = \pi a^2 .$$

Si noti inoltre che PQ tende verso la lunghezza della circonferenza.

e) Proponiamoci di valutare l'area compresa fra un arco completo (§ 196, a) di *cicloide* e la sua corda. Posta l'origine nel vertice, prendiamo la tangente come asse delle x; siano L ed H le projezioni d'una cuspide R sugli assi, e P, Q le analoghe projezioni d' un punto qualunque M della cicloide. La circonferenza descritta sul diametro OH incontra il segmento MQ in un punto N, ed è noto che la tangente alla cicloide, in M, è appunto parallela ad ON, sicchè

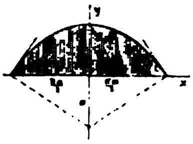


$dy/dx = \mathrm{tg}\,\widehat{\mathrm{NO}x} = y/\mathrm{NQ}$, e però l'area OPM ha il valore $\int_0^x y dx = \int_0^y \mathrm{NQ}.dy$. Essa equivale dunque all'area del mezzo segmento circolare ONQ. Segue da tutto ciò che la metà dell'area cercata si ottiene sottraendo $^1/_2 \pi a^2$ dall'area del rettangolo OLRH, uguale al prodotto di $\mathrm{OL} = \pi a$ per $\mathrm{OH} = 2a$. Dunque

$$A = 2(2\pi a^2 - {}^1/_2 \pi a^2) = 3\pi a^2 ,$$

vale a dire che *l'area cercata è tripla di quella del circolo generatore.*

f) Valutiamo l'area compresa fra l'asse x e l'arco della *quadratrice* $y = x \cot \frac{x}{a}$, limitato ai due punti d'incontro col detto asse, più vicini all'origine. Evidentemente si ha



$$A = 2\int_0^{{}^1/_2 \pi a} x \cot \frac{x}{a}\, dx = 2a^2 \int_0^{{}^1/_2\pi} \theta \cot \theta\, d\theta = 2a^2 \left(\theta \log \operatorname{sen} \theta\right)_0^{{}^1/_2\pi} - 2a^2 \int_0^{{}^1/_2\pi} \log \operatorname{sen} \theta\, d\theta .$$

Intanto, in virtù del teorema di l'Hospital, per θ tendente a zero,

$$\lim (\theta \log \operatorname{sen} \theta) = -\lim \frac{\theta^2}{\operatorname{sen} \theta} = 0 .$$

Dunque (§ 322, *d*)

$$A = -2a^2 \int_0^{{}^1/_2\pi} \log \operatorname{sen} \theta\, d\theta = \pi a^2 \log 2 .$$

g) L'area totale dell'*ellisse*, i cui semi-assi sono a e b, è

$$A = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt .$$

Il calcolo de l'ultimo integrale è facilissimo (§ 328, *a*); ma possiamo evitarlo osservando che per $a = b$ si deve avere $A = \pi a^2$. Dunque, successivamente,

$$\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt = {}^1/_4\pi \quad , \quad A = \pi a b \; .$$

Un po' più lungo è il calcolo in coordinate polari, quando si pone il polo in un fuoco dell'ellisse, nella quale ipotesi, come si sa, l'equazione della curva è

$$r = \frac{b^2/a}{1 - k\cos\theta} \; .$$

Nondimeno si giunge rapidamente al risultato ricordando (§ 365, *e*) che, per le relazioni di r e θ con l'anomalia eccentrica φ, si ha $rd\theta = bd\varphi$ ed $r = a(1 + k\cos\varphi)$. Ne segue

$$A = \int_0^\pi r^2 d\theta = ab\int_0^\pi (1 + k\cos\varphi)d\varphi = \pi ab \; .$$

h) Sia data l'ellisse mediante l'equazione generale

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0 \; ,$$

in cui si può sempre supporre che a e b siano positivi, ed inoltre si abbia

$$ab - h^2 > 0 \quad , \quad D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} < 0 \; .$$

Messa l'equazione sotto la forma $by^2 + 2(hx + f)y + ax^2 + 2gx + c = 0$, si vede che ad ogni valore di x corrispondono due valori di y, i quali si confondono in uno per quei valori α e $\beta > \alpha$ di x, che soddisfano all'equazione

$$b(ax^2 + 2gx + c) - (hx + f)^2 = 0 \; .$$

Questa si può scrivere $c'x^2 - 2g'x + a' = 0$, se si designano con $a', b', \ldots, h'$ i complementi algebrici di $a, b, \ldots, h$ in D. Ciò premesso, la differenza fra i suddetti valori di y è

$$\frac{2}{b}\sqrt{-c'x^2 + 2g'x - a'} = \frac{2\sqrt{c'}}{b}\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)} \; ;$$

quindi, ponendo $x = \alpha + (\beta - \alpha)t$, ed applicando la prima delle (8),

$$A = \frac{2\sqrt{c'}}{b}(\beta - \alpha)^2\int_0^1 \sqrt{t(1 - t)}\,dt \; .$$

Il valore dell'ultimo integrale si può subito avere, senza calcoli, osservando che rappresenta la metà dell'area del circolo $y^2 = x(1 - x)$: esso è dunque ${}^1/_8\pi$. D'altra parte $\beta - \alpha = \frac{2}{c'}\sqrt{g'^2 - a'c'}$, ed è noto * che $a'c' - g'^2$, complemento algebrico di b' nel reciproco di D, ha il valore bD. Dunque

$$A = \frac{-\pi D}{(ab - h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

È del resto facile riconoscere (§ 146, c) che il secondo membro rappresenta il prodotto dei semi-assi, moltiplicato per π.

i) L'area chiusa nel *bicorno* (§ 211, e) si ottiene subito applicando la prima delle (3):

$$A = 2\int_0^a\left(\frac{a^2 - x^2}{2a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a^2 - x^2}{2a + \sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx = 4\int_0^a \frac{a^2 - x^2}{3a^2 + x^2}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Scindendo l'ultimo integrale in

$$-4a^2\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + 16a^4\int_0^a \frac{dx}{(3a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}};$$

e calcolando

$$\int \frac{dx}{(3a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2a^3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,sen} \frac{2x}{\sqrt{3a^2 + x^2}} + C,$$

si trova facilmente $A = (16 - 9\sqrt{3})\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}}$, vale a dire che *l'area cercata si ottiene moltiplicando per* 2,13843... *l'area del massimo circolo inscritto.*

j) L'area chiusa nell'*asteroide* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ è

$$A = 4\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx = 6a^2\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1 - t)^{\frac{3}{2}}\,dt.$$

Ora, mediante il cambiamento di t in $1 - t$, si ottiene

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1 - t)^{\frac{3}{2}}dt = \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1 - t)^{\frac{1}{2}}dt = {}^1/_2\int_0^1 \sqrt{t(1 - t)}\,dt = \frac{\pi}{16}.$$

Dunque $A = {}^3/_8\,\pi a^2$. Del resto l'uso (§ 363) della funzione Γ permette di trovare, più generalmente, l'area compresa fra la curva $x^n + y^n = a^n$ e le parti positive degli assi:

$$A = \int_0^a (a^n - x^n)^{\frac{1}{n}}dx = \frac{a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n} - 1}(1 - t)^{\frac{1}{n}}dt = \frac{a^2\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

* *Analisi algebrica*, p. 31.

Tutte le volte che l'esponente (positivo) n è il quoziente d'un numero pari per un numero dispari, si ha una curva chiusa (analoga all'asteroide o al circolo secondo che $n < 1$ o $n > 1$), che limita un'area quadrupla della precedente; ed in particolare si ritrovano i valori πa^2 e $^3/_8 \pi a^2$ per $n = 2$ ed $n = {}^2/_3$.

k) Per valutare l'area chiusa in uno dei due cappii della curva rappresentata (§ 211. *b*) dall'equazione $x^4 = (x^2 - y^2)y$, si adoperi la formola (7). Si ottiene subito

$$A = {}^1/_2 \int_0^1 (t - t^3)^2 dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{4}{105} .$$

Similmente l'area chiusa nel cappio del *folium* $x^3 + y^3 = 3axy$ è

$$A = 9a^2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + t^3)^2} = 3a^2 \left(\frac{1}{1 + t^3}\right)_1^0 = {}^3/_2 a^2 ,$$

sicchè *il folium divide in tre parti equivalenti l'area del triangolo formato dalle tangenti nel vertice e nel punto doppio.* Più generalmente, per le curve rappresentate dall'equazione $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (2n + 1)ax^n y^n$, si trova $A = (n + {}^1/_2)a^2$.

l) Per calcolare le aree chiuse nei due cappii della curva

$$(x^2 + y^2 - ay)^2 = 2a^2 xy$$

è preferibile l'uso della seconda formola (3), la quale richiede che si scriva l'equazione della curva in coordinate polari: $r = a(\text{sen}\,\theta \pm \sqrt{\text{sen}\,2\theta})$. A ciascun valore di θ fra 0 ed $\alpha = \text{arc tg}\, 2 = 63°26'...$ corrispondono due punti, uno dei quali descrive, nella regione delle x ed y negative, un intero cappio (il più piccolo), mentre l'altro descrive soltanto un arco del cappio maggiore. Questo si completa (variando ancora θ da α ad $^1/_2\pi$) con un altro arco, tangente all'asse y nel punto $y = a$ ed alla retta $y = 2x$ nell'origine. Ne segue che l'area chiusa in questo cappio è

$$A = {}^1/_2 a^2 \int_0^{^1/_2\pi} (\text{sen}\,\theta + \sqrt{\text{sen}\,2\theta})^2 d\theta - {}^1/_2 a^2 \int_\alpha^{^1/_2\pi} (\text{sen}\,\theta - \sqrt{\text{sen}\,2\theta})^2 d\theta ,$$

mentre l'altro cappio limita l'area

$$A' = {}^1/_2 a^2 \int_0^\alpha (\text{sen}\,\theta - \sqrt{\text{sen}\,2\theta})^2 d\theta ,$$

sicchè

$$A - A' = 2a^2 \int_0^{^1/_2\pi} \text{sen}\,\theta \sqrt{\text{sen}\,2\theta}\, d\theta = {}^1/_2 \pi a^2 .$$

Inoltre

$$A + A' = a^2 \int_0^\alpha (\text{sen}^2\theta + \text{sen}\,2\theta) d\theta + 2a^2 \int_\alpha^{^1/_2\pi} \text{sen}\,\theta \sqrt{\text{sen}\,2\theta}\, d\theta .$$

Il primo integrale non presenta difficoltà. Si può calcolare l'altro prendendo $t = \sqrt{\operatorname{tg}\theta}$ come variabile d'integrazione. In tal modo si trova

$$A' = {}^1/_2 a^2 (1 - {}^1/_4 \log 5 - \operatorname{arctg} {}^1/_2) = a^2 . 0{,}06682 \ldots ;$$

poi $A = A' + {}^1/_2 \pi a^2 = a^2 . 1{,}63762 \ldots > 24 A'$.

m) Consideriamo (§ 203, *b*) le curve

$$(x + y)(x^2 - 2kxy + y^2) = 2(1 + k)axy \tag{8}$$

ad assintoto unico ($k^2 < 1$), e proponiamoci di calcolare l'area chiusa nel cappio di ciascuna di esse. Procedendo come nel caso del *folium* ($k = {}^1/_2$) si ottiene

$$A = 4(1 + k)^2 a^2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + t)^2 (1 - 2kt + t^2)^2} ;$$

ma qui conviene assumere come variabile d'integrazione $z = \dfrac{1 - t}{1 + t}$, e scrivere

$$A = {}^1/_2 (1 + k)^2 a^2 \int_0^1 \frac{(1 - z^2)^2 dz}{(1 - k + (1 + k) z^2)^2} .$$

Ora, se si cambia z in $z/\sqrt{m}$, ponendo $m = \dfrac{1 + k}{1 - k}$, si trova

$$A = \frac{a^2}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{m}} \left(\frac{m - z^2}{1 + z^2} \right)^2 dz$$

$$= \frac{a^2}{2\sqrt{m}} \left\{ \sqrt{m} - 2(m + 1) \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{1 + z^2} + (m + 1)^2 \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{(1 + z^2)^2} \right\} ,$$

e finalmente, osservando che

$$\int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{1 + z^2} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{m} \quad , \quad \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{(1 + z^2)^2} = {}^1/_2 \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{m} + \frac{\sqrt{m}}{m + 1} \right) ,$$

si ottiene

$$A = \left\{ m + 3 + \frac{(m + 1)(m - 3)}{\sqrt{m}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{m} \right\} \frac{a^2}{4} .$$

In particolare, nel caso del folium ($m = 3$) e della logociclica ($m = 1$),

$$A = {}^3/_2 a^2 \quad , \quad A = (1 - {}^1/_4 \pi) a^2 .$$

n) Al risultato precedente si giunge anche mediante la prima formola dimostrata nel § 369, facendo prima rotare di $\frac{1}{4}\pi$ gli assi intorno all'origine. Allora l'equazione (8) prende la forma più semplice

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - \frac{x\sqrt{2}}{m}}{a + x\sqrt{2}}} \,.$$

ed un calcolo facile (§ 326, *m*) dà

$$\int_0^x \sqrt{\frac{a - \frac{x\sqrt{2}}{m}}{a + x\sqrt{2}}}\, x\,dx = -\frac{1}{4}\left((m+3)\frac{a}{2} - x\sqrt{2}\right)\sqrt{(a + x\sqrt{2})\left(a - \frac{x\sqrt{2}}{m}\right)}$$

$$+ \left\{ m + 3 + \frac{(m+1)(m-3)}{\sqrt{m}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{\frac{2}{m}}}{a + \sqrt{(a + x\sqrt{2})\left(a - \frac{x\sqrt{2}}{m}\right)}} \right\} \frac{a^2}{8} \,.$$

Basta fare $x = ma/\sqrt{2}$ per ritrovare la precedente espressione di A. Invece per $x = -a/\sqrt{2}$ si ottiene il valore A′ dell'area compresa fra la curva e l'assintoto:

$$A' = A - \frac{(m+1)(m-3)}{8\sqrt{m}} \pi a^2 \,.$$

Per $m = 3$ è $A' = A$, vale a dire che *l'area chiusa nel cappio d'un folium equivale all'area compresa fra la curva ed il suo assintoto*: quest' ultima area è divisa in tre parti equivalenti dalle tangenti nel punto doppio. Per $m = 1$ si ottiene

$$A' = (1 + \tfrac{1}{4}\pi)a^2 \,, \qquad \text{poi} \qquad A + A' = 2a^2 \,.$$

Dunque *l'area totale limitata da una logociclica e dal suo assintoto è quadrupla dell'area limitata da questa retta e dalle tangenti nel punto doppio*. Finalmente, per m infinito, $\lim A = \infty$, $\lim A' = \frac{1}{2}a^2$: il cappio tende ad aprirsi in forma parabolica, tende cioè a spezzarsi in due rami infiniti (*cfr.* § 200, *f*) assintotici entrambi alla parabola $y^2 = \frac{1}{2}a(x\sqrt{2} - a)$, mentre l'area compresa fra la curva ed il suo assintoto rettilineo resta finita.

o) Proponiamoci di calcolare quella parte dell'area di un'ellisse, che è compresa fra i due rami dell'iperbole equilatera omofocale. L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1 \qquad (9)$$

rappresenta infinite coniche omofocali (fra le quali è, per $\lambda = 0$, l'ellisse data), cioè infinite ellissi per $\lambda < b^2$ (interne o esterne all'ellisse data secondo che λ è positivo o negativo), ed infinite iperboli per $\lambda > b^2$, le quali tendono a confondersi con l'asse y quando λ tende ad a^2. Una di queste iperboli è equilatera: essa corrisponde al valore $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ di λ. Distinguiamo con μ i valori di λ, per cui la (9) rappresenta un'iperbole, ed osserviamo che per ogni punto (x, y), preso nell'area considerata, passano due coniche (9), ossia un'ellisse ed un'iperbole, individuate rispettivamente da un valore di λ, compreso fra 0 e b^2, ed un valore di μ, compreso fra $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ ed a^2. I due valori sono le radici dell'equazione (9), cioè dell'equazione $(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)+(\lambda-b^2)x^2+(\lambda-a^2)y^2=0$, sicchè si deve avere $\lambda+\mu=a^2+b^2-x^2-y^2$, $\lambda\mu=a^2b^2-a^2y^2-b^2x^2$, d'onde

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}{a^2-b^2}\,,\quad y^2=-\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}{a^2-b^2}\,,$$

e per conseguenza

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \mu)}\right|=\frac{\frac{1}{4}(\mu-\lambda)}{\sqrt{-(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(a^2-\mu)(b^2-\mu)}}\,.$$

Dunque, applicando la formola (4),

$$A=\int_0^{b^2}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}\int_{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}^{a^2}\frac{(\mu-\lambda)d\mu}{\sqrt{-(a^2-\mu)(b^2-\mu)}}\,.$$

Per eseguire la prima integrazione si ponga $\mu=a^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta$, facendo poi variare θ da $\frac{1}{4}\pi$ a 0. Si ottiene subito, come valore dell'integrale,

$$2\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(a^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta-\lambda)d\theta=\tfrac{1}{2}\pi\left\{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\lambda\right\}+\tfrac{1}{2}(a^2-b^2)\ :$$

quindi

$$A=\tfrac{1}{2}\pi\int_0^{b^2}\frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}d\lambda+\tfrac{1}{2}(a^2-b^2)\int_0^{b^2}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}\,,$$

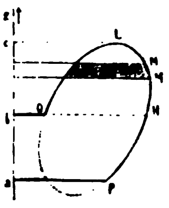
e finalmente (§§ 324, c; 346, a)

$$A=\tfrac{1}{2}\pi ab+\tfrac{1}{2}(a^2-b^2)\log\frac{a+b}{a-b}\,.$$

Aree e volumi nei solidi di rotazione.

372. Dato nel piano un arco di curva, facciamolo rotare intorno ad una retta del piano stesso. Come elemento della superficie così generata si può assumere la striscia compresa fra un parallelo qualunque, di raggio R, ed il parallelo di raggio $R+dR$, e considerarla come la superficie laterale del tronco di cono generato dall'elemento lineare ds. L'area elementare è dunque misurata dal prodotto del lato ds per la media aritmetica delle lunghezze delle basi, cioè $2\pi(R+\frac{1}{2}dR)$, o semplicemente $2\pi R$.

Per conseguenza, trascurando infinitesimi superiori nel differenziale dell'area, ciò che non altera il valore dell'integrale, si vede che l'area cercata è $A = 2\pi \int R ds$, dove ad R *si deve sempre attribuire il segno di* ds. Similmente, se per elemento solido si assume lo strato compreso fra l'elemento superficiale ed i piani dei due paralleli, si vede, considerando tale strato come un cilindro di base πR^2 e di altezza dz (projezione di ds sull'asse di rotazione), che il volume chiuso fra la superficie generata dall'arco ed i piani dei paralleli estremi è $V = \pi \int R^2 dz$. Nel porre i limiti a queste integrazioni si deve tener conto del modo di comportarsi della variabile lungo l'arco generatore PQ, ed aver cura del *segno* del differenziale. Nel calcolo di A la variabile s è di sua natura crescente (se si vuole) da un estremo all'altro di PQ; ma se i bisogni dell'integrazione conducessero a sostituirle un'altra variabile, si dovrà, se occorre, scindere l'integrale in altri, secondo le osservazioni fatte (§ 325) a proposito del cambiamento della variabile d'integrazione. Se, per esempio, come avviene frequentemente quando PQ appartiene ad una curva chiusa, si sostituisce ad s la variabile z, e se questa, prima crescente da a fino a c, decresce poi da c a b, l'integrale $2\pi \int R ds$ fra i limiti a e b di z rappresenterebbe soltanto l'area generata da una parte PH dell'arco PQ, mentre invece si ha



$$A = 2\pi \int_a^c R \frac{ds}{dz} dz + 2\pi \int_c^b R \frac{ds}{dz} dz .$$

e le due aree (essenzialmente positive) rappresentano le aree generate dagli archi PL ed LQ. Similmente

$$V = \pi \int_a^c R^2 dz + \pi \int_c^b R^2 dz :$$

qui la seconda parte è *negativa*, e così dev'essere, giacchè il volume corrispondente all'arco LQ si deve *sottrarre* da quello che corrisponde all'arco PL.

373. **Esempii:** *a)* Per un'*asteroide*, che rota intorno ad una delle sue tangenti inflessionali, si ha

$$A = 4\pi \int_{x=0}^{x=a} x ds = 4\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{12}{5} \pi a^2 .$$

cioè l'area totale della superficie generata è i $^3/_5$ dell'area della sfera circoscritta.

Il volume del solido limitato dalla superficie stessa è (§ 363)

$$V = 2\pi \int_0^a x^2 dy = 3\pi a^3 \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1 - t)^3 dt = 3\pi a^3 \frac{3!\,2^4}{9.7.5.3} = \frac{32\pi a^3}{105} .$$

b) L'area del *catenoide*, fra il circolo di gola ed un parallelo qualunque di raggio y, è (ricordando che $ydx = ads$)

$$A = 2\pi \int y ds = \frac{2\pi}{a} \int_0^x y^2 dx = {}^1/_2 \pi a \int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right) dx = \pi a(x + yy') .$$

Essa è dunque proporzionale al segmento dell'asse di rotazione, staccato dalla normale a partire dal piano del circolo di gola. Ne segue che i coni normali al catenoide, condotti dagli estremi d'un segmento qualunque dell'asse di rotazione, di lunghezza b, staccano dalla superficie una striscia, la cui area è $A = \pi ab$; ed il volume del solido limitato dalla striscia e dai piani dei paralleli estremi è

$$V = \pi \int y^2 dx = {}^1/_2 aA = {}^1/_2 \pi a^2 b .$$

c) Nelle questioni concernenti la *cicloide* giova rammentarsi (§ 371, *e*) che, se si prendono come assi la tangente e la normale nel vertice, il coefficiente angolare della tangente è $dy/dx = y/\sqrt{y(2a - y)}$, e per conseguenza

$$\frac{dx}{\sqrt{2a - y}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{ds}{\sqrt{2a}} .$$

Così, per esempio, se un arco completo di cicloide rota intorno alla tangente nel vertice, esso genera una superficie, la cui area è

$$A = 4\pi \int_0^{4a} y ds = 4\pi \sqrt{2a} \int_0^{2a} \sqrt{y}\, dy = \frac{32}{3} \pi a^2 ,$$

cioè quasi undici volte l'area del circolo generatore (della cicloide); ed il solido limitato da tale superficie e dai piani dei paralleli estremi (*cfr.* § 371, *j*) ha un volume

$$V = 2\pi \int_0^{\pi a} y^2 dx = 2\pi \int_0^{2a} y^{\frac{3}{2}} (2a - y)^{\frac{1}{2}} dy = 16\pi a^3 \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} (1 - t)^{\frac{1}{2}} dt = \pi^2 a^3 .$$

Invece, se l'arco rota intorno alla direttrice, si ottiene un'area *doppia*

$$A = 4\pi \int_0^{4a} (2a - y) ds = 32\pi a^2 - 4\pi \int_0^{4a} y ds = \frac{64}{3} \pi a^2 ;$$

ed il volume è *quintuplo*, giacchè, richiamando i risultati

$$\int_0^{\pi a} y\,dx = {}^1/_2\,\pi a^2 \quad , \quad \int_0^{\pi a} y^2 dx = {}^1/_2\,\pi a^3 \ ,$$

si trova subito

$$\mathrm{V} = 2\pi \int_0^{\pi a} (2a - y)^2 dx = 5\pi^2 a^3 \, .$$

Finalmente, se l'arco rota intorno alla normale nel vertice, bisogna innanzi tutto osservare che la lunghezza d'un arco qualunque, con un estremo nel vertice, è

$$s = \sqrt{2a} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{2ay} \ ;$$

poi, siccome nella cuspide si ha $s = 4a$, $x = \pi a$, si ottiene, integrando per parti,

$$\int_0^{4a} x\,ds = 4\pi a^2 - \int_0^{\pi a} s\,dx = 4\pi a^2 - 2\sqrt{2a} \int_0^{2a} \sqrt{2a - y}\,dy = 4(\pi - {}^4/_3)a^2 \ .$$

Dunque l'area della superficie generata è $8(\pi - {}^4/_3)\pi a^2$.

d) Cerchiamo l'area totale d'uno *sferoide* (ellissoide di rotazione). Dall'equazione del meridiano si trae

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \quad , \quad ds = \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2(b^2 - y^2)}}\, dy \ ;$$

quindi

$$\mathrm{A} = \frac{4\pi a}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\, dy \ .$$

Se lo sferoide è *schiacciato* ($a > b$) basta porre $y = b^2 t / \sqrt{a^2 - b^2}$ per ottenere

$$\mathrm{A} = \frac{4\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} \sqrt{1 + t^2}\, dt = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \ .$$

Quando il meridiano è lievemente eccentrico (come avviene per la superficie terrestre) si ha, approssimativamente, $\mathrm{A} = 4(1 - {}^1/_3 k^2)\pi a^2$. Invece, nel caso d'uno sferoide *allungato*, si ottiene, dopo avere scambiato a con b per rappresentare sempre con $2a$ la lunghezza dell'asse focale,

$$\mathrm{A} = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)y^2}\, dy \ ,$$

dimodochè, posto $y = a^2 t / \sqrt{a^2 - b^2}$, si trova

$$A = \frac{4\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \sqrt{1 - t^2}\, dt = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{b}{a} .$$

Per una lieve eccentricità si ottiene il valore approssimato $A = 4(1 + {}^1/_3 k^2)\pi b^2$. Dunque l'area di qualunque sferoide leggermente eccentrico è approssimativamente uguale all'*area della sfera tangente lungo l'equatore*, moltiplicata per $1 \mp {}^1/_3 k^2$ secondo che lo sferoide è schiacciato o allungato.

e) Cerchiamo l'area ed il volume d'un *toro*, cioè dell'anello generato da un circolo che rota intorno ad una retta del suo piano. Se b è la distanza del centro all'asse di rotazione, ed $a < b$ il raggio del circolo, il raggio del parallelo è $R = b + a\cos\theta$, e si ha $ds = a d\theta$; quindi

$$A = 4\pi a \int_0^{\pi} (b + a\cos\theta) d\theta = 4\pi^2 ab .$$

La superficie ha due piani tangenti singolari, dai quali è toccata lungo due paralleli, che la dividono in una parte esterna ed una parte interna; e per conoscere le aree A′ ed A″ delle due parti basta calcolarne la differenza:

$$A' - A'' = 8\pi a^2 \int_0^{{}^1/_2\pi} \cos\theta\, d\theta = 8\pi a^2 .$$

Similmente il cilindro determinato dai suddetti paralleli divide l'anello in due parti, i cui volumi sono

$$V' = 2\pi a \int_0^{{}^1/_2\pi} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta\, d\theta - 2\pi ab^2 , \quad V'' = 2\pi a \int_{{}^1/_2\pi}^{\pi} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta\, d\theta + 2\pi ab^2 ;$$

sicchè il volume totale dell'anello è

$$V = 2\pi a \int_0^{\pi} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta\, d\theta = 4\pi a^2 b \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 2\pi^2 a^2 b .$$

Inoltre

$$V' - V'' = 4\pi a \int_0^{{}^1/_2\pi} (b^2 + a^2\cos^2\theta)\cos\theta\, d\theta - 4\pi ab^2 = 4\pi a^3 \int_0^{{}^1/_2\pi} \cos^3\theta\, d\theta = {}^8/_3 \pi a^3 .$$

Si noti che le metà delle differenze $A' - A''$ e $V' - V''$ rappresentano l'area ed il volume d'una sfera di raggio a, e che per conseguenza non variano quando l'anello si allarga indefinitamente, pur rimanendo chiuso fra i due piani tangenti singolari, supposti immobili. Di questo fatto avremo fra breve (§ 375) la spiegazione. Finalmente, se $b < a$, la circonferenza incontra l'asse, e l'area della parte visibile della superficie diventa

$$A = 4\pi a \int_0^{\arccos(-b/a)} (b + a\cos\theta)d\theta = 4\pi ab \arccos(-b/a) + 4\pi a\sqrt{a^2 - b^2}:$$

il volume del solido limitato da tale superficie è

$$V = 2\pi a \int_0^{\arccos(-b/a)} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta \, d\theta = 2\pi a^2 b \arccos(-b/a) + {}^2/_3\pi(2a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2} .$$

In particolare per $b = 0$ si ottiene una *sfera* di raggio a, e si trova $A = 4\pi a^2$, $V = {}^4/_3\pi a^3$.

f) Si faccia rotare la *cardioide* $r = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$ intorno al suo asse di simmetria. Il raggio del parallelo, per un dato valore di θ, è $R = r\,\mathrm{sen}\,\theta$; l'elemento lineare è $ds = 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$; quindi, poichè θ varia, lungo la curva, sempre in un senso,

$$A = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{32}{5}\pi a^2 .$$

Per calcolare il volume totale del solido conviene assumere come variabile d'integrazione il raggio vettore r, che dalla cuspide al vertice va sempre crescendo; e siccome si ha

$$\cos\theta = \frac{r-a}{a}, \quad R = r\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{r}{a}\sqrt{2ar - r^2},$$

si ottiene subito

$$V = \frac{\pi}{a^3}\int_0^{2a} r^2(2a - r)(2r - a)dr = {}^8/_3\pi a^3 .$$

Come controllo riesce utile il paragone di questi risultati con quelli che si ottengono considerando, per esempio, la minima sfera circoscritta. Per trovare il raggio R del minimo fra i circoli, che hanno il centro sull'asse di simmetria e la circonferenza tangente alla cardioide, basta osservare (§ 227, *f*) che, dovendo essere $RdR = 0$ per soddisfare alla condizione del minimo, la corda dei contatti deve riuscire normale alla cardioide. Ne segue che il raggio del parallelo di contatto, coincidente col raggio R della sfera cercata, è uguale al massimo valore di $r\,\mathrm{sen}\,\theta$, che si verifica per $\theta = {}^1/_3\pi$, sicchè, essendo $r = {}^3/_2 a$, il detto raggio è $R = {}^3/_4 a\sqrt{3}$. Ora è facile constatare che la sfera di raggio R ha un volume leggermente superiore a quello del solido considerato; ed altrettanto accade per le aree, quantunque non si possa esserne sicuri *a priori*. Il lettore potrà analogamente calcolare il volume del solido generato da una *lumaca* qualunque $r = a\cos\theta + b$, priva di punto doppio ($b > a$), che rota intorno al suo asse di simmetria; e lo troverà uguale a $\frac{4}{3}\pi b(a^2 + b^2)$. Per $b < a$ questa è la misura del volume compreso fra le superficie generate dai due cappii; ma ciascuna di queste superficie, l'interna e l'esterna, limitano due solidi, i cui volumi sono rispettivamente

$$\frac{\pi}{6a}(a-b)^4 \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi}{6a}(a+b)^4 .$$

A questi risultati si giunge quasi senza calcolo mediante un'altra formola, che sarà data in fine del § 380.

Baricentri.

374. Si consideri nello spazio un insieme di punti, costituenti una porzione limitata s d'una linea, d'una superficie, o dello stesso spazio a tre dimensioni. Si dà il nome di *baricentro* di s al punto G, le cui coordinate sono uguali ai valori medii (§ 313), in s, delle corrispondenti coordinate dei punti di s. Se, per fissare le idee, s è una linea, le coordinate ξ, η, ζ di G saranno date dalle uguaglianze

$$\xi s = \int x ds \quad , \quad \eta s = \int y ds \quad , \quad \zeta s = \int z ds \ .$$

Siccome ogni trasformazione lineare eseguita sulle coordinate x, y, z dei punti di s si ripete identicamente su ξ, η, ζ, è chiaro che *la posizione del baricentro non dipende dalla scelta degli assi.* Notiamo subito che, se una figura possiede un piano di simmetria, questo contiene il baricentro. Infatti, se il piano stesso si assume come piano Oxy, ogni elemento zds dell'integrale ζ viene distrutto da un altro $-zds$, sicchè $\zeta = 0$. In particolare si noti che ogni figura piana ha il baricentro nel proprio piano, e che, se una figura possiede un centro di simmetria, in questo punto cade necessariamente il baricentro. Finalmente si osservi che, se una figura si spezza in due parti, s_1 ed s_2, delle quali si conoscono i baricentri, G_1 e G_2, il baricentro della figura totale divide G_1G_2 nel rapporto inverso di s_1 ad s_2. Ciò si deduce subito dalle formole evidenti $\xi s = \xi_1 s_1 + \xi_2 s_2$, ecc.

375. **Teoremi di Guldino.** Riprendiamo le formole del § 372, esprimenti l'area ed il volume generati da un arco s o da un'area σ, che rotano intorno ad una retta del loro piano. Se questa retta si prende come asse delle x, è chiaro che quelle formole si possono scrivere nel seguente modo:

$$A = 2\pi \int y\, ds = 2\pi\eta \cdot s \quad , \quad V = \pi \int y^2 dx = 2\pi \int\int y\, dx\, dy = 2\pi\eta \cdot \sigma \ .$$

Dunque l'area ed il volume di cui si tratta *si ottengono moltiplicando la lunghezza o l'area della figura generatrice per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro della figura stessa*; e se si vuole soltanto la parte di area o di volume, compresa fra due piani meridiani, basterà evidentemente prendere, invece dell'intera circonferenza, il solo arco che ne staccano i detti piani. Ciò premesso consideriamo, più generalmente, un arco s o un'area σ in un piano che si vada spostando nello spazio in guisa da essere costantemente normale alle trajettorie dei suoi punti. È chiaro che, in queste condizioni, uno spostamento infinitesimo si può considerare come dovuto ad una rotazione del piano intorno alla sua caratteristica (§ 275), e però l'area ed il volume elementari, in tal modo generati da s o da σ, si possono ritenere, a prescindere da infinitesimi superiori, come misurati dal prodotto di s o di σ per lo spostamento dl del baricentro. In uno spostamento finito si avrà dunque $A = \int s dl = s\int dl$, $V = \int \sigma dl = \sigma \int dl$, vale a dire che l'area o il volume, generati dalla figura che si considera, *si ottengono moltiplicando* s *o* σ *per la lunghezza del cammino percorso dal rispettivo baricentro.* Questi teoremi sono utili per calcolare certe aree e certi volumi, ma possono anche, inversamente, essere utilizzati per la rapida determinazione dei baricentri di certe figure.

376. **Esempii:** *a)* Per un arco di *catenaria*, simmetrico rispetto alla normale nel vertice, il baricentro G si trova, su questa normale, ad una distanza η dalla direttrice, che si calcola (*cfr.* § 373, *b*) scrivendo $2\pi\eta . 2s = 2\pi ab$, vale a dire $\eta = \frac{ab}{2s} = {}^1/_2 b \cot\varphi$. Dunque G *divide per metà il segmento che sulla normale nel vertice staccano le normali estreme, a partire dalla direttrice.* Invece per G', baricentro dell'area chiusa fra il medesimo arco, la direttrice, e le ordinate estreme, η è dato dalla formola $2\pi\eta . 2as = \pi a^2 b$. Dunque $\eta = {}^1/_4 b\cot\varphi$, vale a dire che G' *è il punto medio di* OG.

b) Il baricentro d'un arco completo di *cicloide* sta sulla normale nel vertice, ad una distanza

$$\eta = \frac{1}{4a}\int y ds = \frac{1}{2\sqrt{2a}}\int_0^{2a} \sqrt{y}\, dy = {}^2/_3 a$$

dal vertice stesso. Dunque (*cfr.* § 373, *c*) l'area che l'arco genera rotando intorno alla base è ${}^4/_3 \pi a . 8a = \frac{32}{3}\pi a^2$. Seguendo la via inversa, quando si sa che il volume generato dall'area compresa fra il detto arco e la base è $5\pi^2 a^3$, si vede che il baricentro di tale area, evidentemente situato sulla normale nel vertice, sta ad una distanza η dalla base, che si calcola subito ponendo $5\pi^2 a^3$ uguale al prodotto di $2\pi\eta$ per $3\pi a^2$. Così si ottiene $\eta = {}^5/_6 a$.

c) Sopra una *circonferenza* di raggio a si consideri un arco LM; siano r, θ le coordinate del baricentro G di LM rispetto al polo O, centro della circonferenza, ed all'asse OL. Per un'osservazione fatta nel § 374 si sa che G sta sulla bisettrice dell'angolo LOM; quindi la definizione del baricentro dà

$$2a\theta . r = 2\int_0^\theta a\cos\varphi . a d\varphi = 2a^2 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \text{cioè} \quad r = a\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} .$$

Dunque (§ 190, *h*) *il luogo dei baricentri degli archi d'una circonferenza, con un estremo comune* L, *è una cocleoide, che ha il vertice in* L, *ed il polo nel centro della circonferenza.* È per questa proprietà che la cocleoide viene utilizzata nei tracciati per la costruzione delle volte *. Se si fa attenzione al modo di spostarsi di G quando M percorre la circonferenza una o più volte, sempre in un senso, indefinitamente, è facile rendersi conto della forma e delle proprietà della cocleoide. Se poi si vuole il baricentro G′ del settore circolare LOM, si ha

$$a^2\theta \,.\, r = 2\int_0^a\int_0^\theta l\cos\varphi \,.\, l dl d\varphi = {}^2/_3\, a^3 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \text{cioè} \quad r = {}^2/_3\, a\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\;;$$

e però G′ divide OG nel rapporto di 2 ad 1.

d) Per determinare rapidamente il baricentro d'una *semi-circonferenza* di raggio a basta osservare che questo punto, evidentemente situato sul diametro perpendicolare alla corda, si trova ad una distanza η dal centro, tale che la moltiplicazione di $2\pi\eta$ per πa, lunghezza della semi-circonferenza, deve produrre l'area $4\pi a^2$ della sfera di raggio a. Dunque $\eta = 2a/\pi$. Similmente per un *semicircolo*, ponendo il volume ${}^4/_3\pi a^3$ uguale al prodotto di $2\pi\eta$ per ${}^1/_2\pi a^2$, area del semi-circolo, si ottiene subito $\eta = 4a/3\pi$. Più generalmente si ritrovano, nello stesso modo, i risultati del precedente esempio, dopo aver ricordato dalla Geometria elementare che l'area della calotta ed il volume del settore sferico, generati dall'arco LM e dal settore LOM, nella rotazione intorno ad OL, sono $2\pi ah$ e ${}^2/_3\pi a^2 h$, dove h è l'altezza $a(1 - \cos 2\theta)$.

e) La superficie del *toro* (*cfr.* § 373, *e*) definito dal raggio a del circolo generatore e dalla distanza b (maggiore di a) del centro del circolo all'asse di rotazione, è $2\pi a \,.\, 2\pi b = 4\pi^2 ab$; il volume è $\pi a^2 \,.\, 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b$. Più generalmente la superficie laterale ed il volume d'un *tubo* (§ 279, *b*), fra due piani qualunque, perpendicolari alla linea dei centri, sono $2\pi al$ e $\pi a^2 l$, se con l si rappresenta la lunghezza dell'arco di questa linea, terminato ai piani stessi. Così, più generalmente ancora, la superficie laterale ed il volume d'una barra primitivamente cilindrica, che si deforma (flettendo e torcendo la linea dei baricentri) in guisa che sia conservata l'area della sezione trasversale, sono invariabili in tutte le forme che la barra va assumendo, fino a diventare, per esempio, un anello, mercè la riunione delle basi.

f) Consideriamo, per finire, una *clotoide*, interessante curva immaginata ** per discutere i fenomeni della diffrazione. Le coordinate d'un punto qualunque sono gli *integrali di Fresnel*

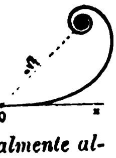
$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}}\,d\varphi \quad , \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{\varphi}}\,d\varphi \;,$$

---

* Vedi, per esempio, il *Cours de construction* di N. de Vos, t. I, p. 276.

** Cornu, *Journal de Physique*, 1874, p. 9.

che non si sanno esprimere in forma finita, ma dei quali già conosciamo (§ 365, f) i valori per φ infinito: $x = y = c = a/2\sqrt{\pi}$. Si vede subito che $dy/dx = \operatorname{tg}\varphi$, sicchè φ è l'inclinazione della tangente sull'asse Ox; e però, crescendo φ da zero all'infinito, la curva esce dall'origine tangenzialmente al detto asse per andare ad avvolgersi assintoticamente intorno al punto (c, c), mentre *la sua curvatura cresce proporzionalmente all'arco*:



$$s = \int_0^\varphi \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} = a\sqrt{2\varphi} \quad , \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{s}{a^2} .$$

La forma della curva mostra chiaramente che x ed y tendono a c oscillando indefinitamente intorno a questo valore; ma, per conoscere le posizioni dei punti della clotoide rispetto al punto assintotico Q, è indispensabile il calcolo approssimato degli integrali * di Fresnel. Così, per esempio, se si divide l'arco OQ in infiniti archi $OP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \ldots$, tutti uguali a $2c$, le coordinate dei punti $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ sono, prendendo c come unità,

$$x = 1{,}560\ldots \; , \; 0{,}977\ldots \; , \; 1{,}212\ldots \; , \; 0{,}997\ldots \; , \; \ldots$$
$$y = 0{,}875\ldots \; , \; 0{,}686\ldots \; , \; 0{,}991\ldots \; , \; 0{,}840\ldots \; , \; \ldots$$

Si noti che P_1 è il punto più distante dall'asse Oy, che P_2 è il punto più vicino, sull'arco P_1Q, all'asse Ox; ecc. Occupiamoci ora della determinazione del baricentro d'un arco qualunque OM. Le coordinate d'un tal punto sono, in virtù della definizione,

$$\xi = {}^1\!/_2\rho\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}\int_0^\theta \frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}\,d\psi \quad , \quad \eta = {}^1\!/_2\rho\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}\int_0^\theta \frac{\operatorname{sen}\psi}{\sqrt{\psi}}\,d\psi .$$

Se con f si rappresenta l'uno o l'altro dei simboli *cos*, *sen*, si ha, ponendo $\psi = t\theta$ ed eseguendo l'integrazione rispetto a θ,

$${}^1\!/_2\rho\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}\int_0^\theta \frac{f(\psi)}{\sqrt{\psi}}\,d\psi = -\,{}^1\!/_2\rho\int_0^\varphi d\theta\int_0^1 \frac{f''(t\theta)}{\sqrt{t}}\,dt = {}^1\!/_2\rho\int_0^1 \frac{f'(0) - f'(t\varphi)}{t\sqrt{t}}\,dt \;;$$

poi, assumendo $t\varphi$ come variabile d'integrazione, ed integrando per parti, l'ultima espressione si trasforma in

$$\frac{a}{2\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{f'(0) - f'(\varphi)}{\varphi\sqrt{\varphi}}\,d\varphi = -\,a\,\frac{f'(0) - f'(\varphi)}{\sqrt{2\varphi}} + \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{f(\varphi)}{\sqrt{\varphi}}\,d\varphi \;;$$

---

* Una tavola dei valori di questi integrali si trova nelle *Oeuvres complètes* di Fresnel, t. I. p. 319. Vedi anche una Memoria di Abria sulla diffrazione della luce nel *Journal de Liouville*, 1849, p. 248. Quanto ai varii procedimenti immaginati per calcolare gli integrali di Fresnel, il lettore potrà consultare le *Leçons d'Optique physique* di Verdet, t. I, p. 328.

e finalmente, ponendo successivamente *cos* e *sen* al posto di f, si ottiene

$$\xi = x - \rho \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \eta = y - \rho(1 - \cos\varphi) .$$

Dunque il baricentro dell'arco OM sta sulla circonferenza osculatrice in M, all'estremità inferiore del diametro perpendicolare alla tangente in O. Ora siano G_1 e G_2 i baricentri degli archi OM_1 ed OM_2, e si noti che, per l'osservazione fatta in fine del § 374, il baricentro G dell'arco M_1M_2 cade in un punto della retta G_1G_2, definito dalla proporzione

$$\frac{G_1G_2}{G_2G} = \frac{s_2 - s_1}{s_1} \quad , \quad \text{ovvero} \quad \frac{GG_1}{GG_2} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} .$$

Dunque *il baricentro d'un arco qualunque di clotoide è il centro di similitudine diretta dei circoli osculatori negli estremi.* Osserviamo, per finire, che se gli estremi d'un arco corrispondono a valori di φ, multipli di 2π, *il baricentro dell'arco cade sulla corda*; ed in particolare, se uno degli estremi è l'origine, il baricentro cade nell'altro estremo.

Aree e volumi qualunque.

377. **Aree** Limitandoci alle superficie usuali ammetteremo come evidente che qualunque particella infinitesima della superficie si possa considerare come situata nel piano tangente. Ogni elemento $dxdy$ nel piano Oxy è la projezione ortogonale d'una particella della superficie, la cui area si può assumere come elemento dell'area A. Questo elemento è dunque misurato dal quoziente di $dxdy$ per il coseno dell'angolo che il piano tangente alla superficie fa col piano Oxy; e per conseguenza (§ 260) si ha

$$A = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy , \tag{10}$$

estendendo l'integrazione a tutte le coppie di valori di x e di y, corrispondenti a punti situati in quella porzione di superficie, di cui si vuol valutare l'area. Questa formola contiene quella del § 372 come caso particolare. Infatti, nel caso d'una superficie di rotazione, posto $\sqrt{x^2+y^2}=R$, $z = f(R)$, si ha

$$p = \frac{x}{R} f'(R) \quad , \quad q = \frac{y}{R} f'(R) \quad , \quad p^2 + q^2 = f'^2(R) ;$$

quindi, passando (nel piano Oxy) dalle coordinate cartesiane alle polari,

$$A = \int\int \sqrt{1 + f'^2(R)} . R d\theta dR = \int\int R d\theta\, ds = 2\pi \int R ds ;$$

ma se si vuole l'area chiusa in una curva qualunque, tracciata sulla superficie, bisogna fermarsi ad $A = \int\int R d\theta ds$, e ciò equivale a prendere come elemento di A l'area della particella limitata sulla superficie dai meridiani θ e $\theta + d\theta$, e dai paralleli R ed R $+ d$R. Tale area si può infatti considerare come quella d'un rettangolo, i cui lati sono gli elementi lineari ds ed $Rd\theta$ del meridiano e del parallelo.

378. **Esempii:** *a)* Per calcolare l'area d'un pezzo qualunque di superficie sulla *sfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, la (10) dà la formola unica $A = \int\int \frac{a}{z}\, dx dy$, in cui rimane soltanto da stabilire i limiti, volta per volta, secondo il contorno del pezzo di superficie che si considera. Se si vuole l'area totale della sfera, si ha, calcolandone la sola ottava parte, situata nella regione delle coordinate positive,

$$A = 8a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 4\pi a \int_0^a dx = 4\pi a^2 \ .$$

Veramente nel caso della sfera è preferibile adoperare l'ultima formola del precedente paragrafo, che diventa $A = a^2 \int\int \cos\psi d\varphi d\psi$: questa si può anche direttamente dedurre dalla formola data in principio, tenendo conto delle relazioni

$$x = a\cos\varphi\cos\psi \ , \quad y = a\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi \ , \quad z = a\,\mathrm{sen}\,\psi \ ,$$

per le quali si ha

$$A = \int\int \frac{a}{z}\, dx dy = \int\int \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)} \frac{d\varphi d\psi}{\mathrm{sen}\,\psi} = a^2 \int\int \cos\psi d\varphi d\psi \ ;$$

ma bisogna aver cura di far sì che l'elemento dell'integrazione si mantenga positivo. Così, per esempio, quando si calcola l'area totale della sfera, tale scopo si raggiunge limitando la variazione di ψ da 0 ad $\frac{1}{2}\pi$, e scrivendo

$$A = 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\psi d\psi = 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi a^2 \ .$$

Se si volesse invece far variare ψ da 0 a π, basterebbe far variare anche φ da 0 a π, e si dovrebbe scrivere

$$A = 2a^2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |\cos\psi|\, d\psi = 4a^2 \int_0^{\pi} d\varphi = 4\pi a^2 \ .$$

b) Ora proponiamoci di valutare, sulla medesima sfera, l'area chiusa nella curva (§ 368, *j*) di Viviani. Questa si projetta sul piano Oxy secondo il circolo $y^2 = x(a - x)$, ed è simmetrica rispetto al piano Oxz; quindi

$$A = 2a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a \int_0^a \mathrm{arc\,sen} \sqrt{\frac{x}{a + x}}\, dx \ .$$

Se con θ si designa l'arco che comparisce sotto l'ultimo integrale, si ha $x=a\,\mathrm{tg}^2\theta$, e l'integrazione per parti dà (§ 324, *d*)

$$\int \theta dx = \theta x - a\int \mathrm{tg}^2\theta\, d\theta = \frac{a}{\cos^2\theta}(\theta - \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) + \textit{costante}\,.$$

Dunque, poichè θ va da 0 ad $^1/_4\pi$ quando x va da 0 ad a, si vede che $A=(\pi-2)a^2$. Molto più rapido è il calcolo quando si fa uso delle coordinate polari:

$$A = 2a^2\int_0^{^1/_2\pi} d\varphi \int_\varphi^{^1/_2\pi} \cos\psi\, d\psi = 2a^2\int_0^{^1/_2\pi}(1-\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi = (\pi-2)a^2\,.$$

c) Cerchiamo di calcolare l'area totale d'un *ellissoide*. Dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

si deduce

$$p=-\frac{c^2x}{a^2z}\,,\quad q=-\frac{c^2y}{b^2z}\,,\quad 1+p^2+q^2=\frac{c^2}{z^2}\left(1-\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}-\frac{\eta^2y^2}{b^2}\right).$$

dove con ε ed η si designano le eccentricità delle sezioni fatte nell'ellissoide dai piani Oxz, Oyz. La formola (10) ci dà

$$A = 8\int\!\!\int \sqrt{\frac{1-\dfrac{\varepsilon^2x^2}{a^2}-\dfrac{\eta^2y^2}{b^2}}{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy\,,$$

dove l'integrazione va estesa a tutte le coppie di valori positivi delle variabili, soddisfacenti alla relazione $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$. Se si rappresenta con t il radicale sottoposto all'integrazione, si trova facilmente

$$(t^2-\varepsilon^2)\frac{x^2}{a^2}+(t^2-\eta^2)\frac{y^2}{b^2}=t^2-1\,,$$

e si è condotti a porre

$$\frac{x}{a}=\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-\varepsilon^2}}\cos\theta\,,\quad \frac{y}{b}=\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-\eta^2}}\,\mathrm{sen}\,\theta\,,$$

con θ variabile da 0 ad $^1/_2\pi$, e t da 1 all'infinito. Prendendo t e θ come variabili d'integrazione, l'integrale precedente si trasforma (§ 338) in

$$\int_1^\infty\!\!\int_0^{^1/_2\pi}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\theta)}\right| t\,dt\,d\theta\,.$$

Intanto, se per brevità si rappresentano con $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ i valori dei radicali che compariscono nelle espressioni di x e di y, si trova

$$\frac{\partial x}{\partial t}=a\varphi'(t)\cos\theta\ ,\ \frac{\partial y}{\partial t}=b\psi'(t)\operatorname{sen}\theta\ ,\ \frac{\partial x}{\partial\theta}=-a\varphi(t)\operatorname{sen}\theta\ ,\ \frac{\partial y}{\partial\theta}=b\psi(t)\cos\theta.$$

Dunque

$$A=8ab\int_1^{\infty}\int_0^{1/2\pi}\left\{\varphi'(t)\psi(t)\cos^2\theta+\varphi(t)\psi'(t)\operatorname{sen}^2\theta\right\}tdtd\theta\ ,$$

dopo avere osservato che, essendo crescenti le funzioni φ e ψ, sono positive le loro derivate. Ora, poichè (§ 326, e) gli integrali di $\cos^2\theta d\theta$ e $\operatorname{sen}^2\theta d\theta$, fra i limiti 0 ed $^1/_2\pi$, sono uguali ad $^1/_4\pi$, si ha

$$A=2\pi ab\int_1^{\infty}\left\{\varphi'(t)\psi(t)+\varphi(t)\psi'(t)\right\}tdt\ ,$$

ossia, finalmente.

$$A=2\pi ab\left\{\int_1^{\infty}\frac{(1-\varepsilon^2)t^2dt}{(t^2-\varepsilon^2)\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}}+\int_1^{\infty}\frac{(1-\eta^2)t^2dt}{(t^2-\eta^2)\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}}\right\}.$$

Più oltre non possiamo andare, nel caso generale, poichè ci troviamo in presenza di integrali ellittici; ma per $\varepsilon=\eta$ e per $\eta=0$ ricadremmo sulle formole (§ 373, d) relative allo sferoide, rispettivamente schiacciato o allungato. Finalmente, quando l'ellissoide non è che lievemente eccentrico, lo sviluppo in serie dà

$$A=4\pi ab\left\{1-{}^1/_6(\varepsilon^2+\eta^2)+\cdots\right\};$$

e poichè $c^2=ab\{1-{}^1/_2(\varepsilon^2+\eta^2)+\ldots\}$, approssimativamente si ha *

$$A=4\pi ab\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{1/3}=4\pi\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2.$$

d) Per calcolare con sufficiente approssimazione l'area d'un ellissoide è necessario servirsi delle tavole (a doppia entrata) di Legendre, e per questo fa d'uopo ridurre la precedente espressione di A ad una combinazione delle forme tipiche F ed E. Posto $\varepsilon=\operatorname{sen}\alpha$, $\eta=k\operatorname{sen}\alpha$, dimodochè

$$k=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}<1\quad ,\quad \alpha=\arccos\frac{c}{a}\ ,$$

la sostituzione $t=\varepsilon/\operatorname{sen}\varphi$ trasforma la suddetta espressione nella seguente:

$$=\frac{2\pi ab}{\operatorname{sen}\alpha}\left\{\cos^2\alpha\int_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}+(1-k^2\operatorname{sen}^2\alpha)\int_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right\}.$$

---

* Per la valutazione approssimata dell'area dell'ellissoide vedi il *Calcul intégral* di Boussinesq, p. 78*, ed una Nota di Peano nei *Rendiconti dei Lincei*, 1890, p. 317.

Già conosciamo (§ 368, h) il valore del primo integrale:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \mathrm{F}(k,\varphi) - \frac{\mathrm{E}(k,\varphi) - \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}{1-k^2}.$$

Ora l'integrazione per parti ci dà, come valore del medesimo integrale,

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} + \mathrm{F}(k,\varphi) - \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

d'onde ricaviamo

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{\mathrm{E}(k,\varphi)}{1-k^2} - \frac{k^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Dunque

$$\mathrm{A} = \frac{2\pi ab}{\operatorname{sen}\alpha}\left\{\cos^2\alpha\,.\,\mathrm{F}(k,\alpha) + \operatorname{sen}^2\alpha\,.\,\mathrm{E}(k,\alpha) + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,.\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\alpha}\right\};$$

e finalmente, sostituendo a k e ad α le loro espressioni in funzione di a, b, c, si giunge alla *formola di Legendre*:

$$\mathrm{A} = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left\{c^2\mathrm{F}\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,;\ \arccos\frac{c}{a}\right) + (a^2-c^2)\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},\ \arccos\frac{c}{a}\right)\right\}$$

Qui, come esercizio, proponiamo al lettore di dimostrare che, se $a^2 = b^2 + c^2$, l'area è misurata da $\pi a^2 + \pi b^2\mathrm{E} + \pi c^2\mathrm{F}$, dove E ed F sono gli integrali *completi*, relativi al modulo $\sqrt{1-\left(\frac{c}{b}\right)^4}$. Così, per esempio, se $a^2 : b^2 : c^2 = 3 : 2 : 1$, si trova $\mathrm{A} = \pi a^2 . 2{,}52620923...$.

379. La formola (10) può servire a dimostrare * che, analogamente a ciò che avviene (§ 192) per le curve piane, se dalla superficie si stacca un pezzo infinitesimo ς intorno ad un punto M, il valore della curvatura totale K, in M, è il limite del rapporto all'*area* A di ς dell'*angolo* solido ω, compreso fra le normali elevate alla superficie lungo il contorno di ς, quando ς tende a ridursi all'unico punto M. La curvatura, supposta continua, sia, per fissare le idee, positiva in M; e ς si prenda abbastanza piccolo perchè in ogni suo punto sia $\mathrm{K} > 0$. Alle variabili x ed y, nella formola (10), possiamo sostituire p e q, le quali sono indipendenti, giacchè (§§ 180, 292)

$$\frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = (1+p^2+q^2)^2\mathrm{K} > 0\,.$$

---

* Vedi anche *Geometria intrinseca*, p. 168.

Ciò premesso, la (10) dà (§ 338)

$$A = \iint \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{3/2}K} = \frac{1}{\varkappa}\iint \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},$$

designando con $\varkappa$ un valor medio fra quelli che K assume in ς. D'altra parte si costruisca un cono, le cui generatrici sian parallele alle normali condotte alla superficie lungo il contorno di ς. Per definizione, l'angolo solido compreso fra queste normali è misurato dall'area ω, che il cono stesso intercetta sulla sfera di raggio 1, col centro nel vertice; e poichè la curvatura di questa sfera è dappertutto uguale ad 1, la formola precedente dà

$$\omega = \iint \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},$$

col medesimo campo d'integrazione. Ne segue $A = \omega/\varkappa$; quindi, in M, col tendere ad M di tutti i punti di ς,

$$K = \lim \varkappa = \lim \frac{\omega}{A}.$$

380. **Volumi.** Se si tratta di calcolare il volume V del solido compreso fra un pezzo di superficie, il cilindro che ne projetta ortogonalmente il contorno sul piano Oxy, e questo piano stesso, si può (*cfr.* § 369) assumere come elemento di V l'analogo volume, relativo ad un elemento della superficie, il quale volume è misurato dalla base $dxdy$ per l'altezza z. Adunque si ha

$$V = \iint z\,dx\,dy, \tag{11}$$

dove z è una funzione di x e di y, data dall'equazione della superficie. Più generalmente si può decomporre un solido qualunque in elementi infinitesimi del terzo ordine $dxdydz$, e fondandosi sulla definizione dell'integrale multiplo si può scrivere

$$V = \iiint dx\,dy\,dz, \tag{12}$$

dove le successive integrazioni si debbono eseguire entro limiti convenienti, da stabilire volta per volta secondo la forma del solido. Se, per esempio, questo ha la forma descritta in principio, si può sempre, dopo aver fissati x ed y, eseguire l'integrazione di dz, da cui risulta il valore di z in superficie, dimodochè si ricade sulla (11). Può anche darsi che, fissando invece z, si conosca il risultato $\sigma(z)$ dell'integrazione di $dxdy$, sia cioè nota l'area della sezione piana fatta nel solido alla distanza z dal piano Oxy. In questo caso la determinazione di V è ridotta ad una integrazione semplice

$$V = \int \sigma(z)\,dz: \tag{13}$$

ciò equivale a decomporre V in elementi infinitesimi del primo ordine, considerando $\sigma(z)dz$ come il volume dello strato che determinano nel solido i piani z e $z+dz$, come si è già fatto nel caso particolare delle superficie di rotazione, per le quali è $\sigma(z)=\pi R^2$. Infinite altre decomposizioni di V in elementi infinitesimi del terzo ordine si possono immaginare; ed è notevole quella (§ 340, *b*) che nasce dall'uso delle coordinate polari: le sfere definite dai raggi r ed $r+dr$, i piani corrispondenti ai valori φ e $\varphi+d\varphi$ della longitudine, ed i coni determinati dai valori ψ e $\psi+d\psi$ della latitudine limitano un solido infinitesimo, che differisce per infinitesimi superiori dal parallelepipedo rettangolo, i cui lati sono dr, $r\,|\cos\psi\,|\,d\varphi$, $rd\psi$. Si giunge così alla formola

$$V=\int\int\int r^2\,|\cos\psi\,|\,dr\,d\varphi\,d\psi\ , \tag{14}$$

che si può anche (§ 338) dedurre dalla (12) per via analitica.

381. Ad un'altra decomposizione in elementi del secondo (*cfr.* § 369) ordine si giunge quando si vuole calcolare il volume V del solido compreso fra un pezzo di superficie ed il cono che da un punto ne projetta il contorno. Messa l'origine nel centro di projezione, è naturale assumere come elemento di V il volume del cono, col vertice nell'origine, che ha per base (§ 377) l'elemento di superficie $\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$. Siccome il volume di questo cono è misurato dalla terza parte del prodotto dell'area della base per l'altezza (distanza dell'origine al piano tangente), si ha

$$V={}^1/_3\int\int(z-px-qy)\,dx\,dy\ , \tag{15}$$

cambiando, se occorre, il segno dell'elemento. Così, per esempio, per calcolare il volume compreso fra una superficie di rotazione ed i coni che ne projettano due paralleli da un punto dell'asse di rotazione, si trova (§ 377) la formola $V={}^2/_3\pi\int(R\,dz-z\,dR)$. Questa, in coordinate polari, se si dirige l'asse polare secondo l'asse di rotazione, prende la forma semplicissima $V={}^2/_3\pi\int r^3 d\cos\theta$, che si può anche dedurre dalla (14). Del resto l'ultima formola non differisce sostanzialmente dalla formola data nel § 372, ed a questa si riduce quando si aggiunge ai due membri il volume del cono, che ha per base il parallelo variabile, di raggio R, ed il vertice nel polo:

$${}^1/_3\pi R^2 z={}^1/_3\pi\int R(R\,dz+2z\,dR)\quad ,\quad V+{}^1/_3\pi R^2 z=\pi\int R^2 dz\ .$$

382. **Esempii:** *a)* Il volume totale dell'*ellissoide* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ è

$$V=8\int\int z\,dx\,dy=8c\int\int\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy\ ,$$

vale a dire, scrivendo i limiti delle successive integrazioni,

$$V = 8c\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,.$$

Per $y = \frac{b}{a} t \sqrt{a^2 - x^2}$ l'integrale di destra si trasforma in

$$b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = {}^1/_4\,\pi b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Dunque $V = 2\pi bc \int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = {}^4/_3\,\pi abc$. A questo risultato si giunge più rapidamente mediante la (15):

$$V = {}^8/_3\,c\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = {}^4/_3\,\pi bc \int_0^a dx = {}^4/_3\,\pi abc\,.$$

Nell'un modo o nell'altro, o pure (*cfr.* § 371, *j*) calcolando prima $\sigma(z)$ per adoperare la (13), si trova più generalmente, per qualunque numero positivo n, quoziente d'un numero pari per un numero dispari, che il volume del solido limitato dalla superficie $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$ è

$$V = 2\int_0^c \sigma(z)dz = \frac{4abc}{n^2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{2}{n}}dt = \frac{8abc}{3n^2}\,\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}\,.$$

In particolare il volume chiuso nell'asteroide solido $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ è $\frac{4\pi}{35}a^3$, cioè poco più della dodicesima parte del volume della sfera circoscritta.

b) Per un ellissoide dato mediante l'equazione

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=1$$

è conveniente l'uso della formola (13), perchè la sezione piana, fatta alla distanza z dal piano Oxy, è rappresentata da un'equazione della forma

$$a'x^2+b'y^2+c'+2f'y+2g'x+2h'xy=0\,,$$

e si sa (§ 371, *h*) che la sua area è $\sigma(z) = -\pi D'/(a'b'-h'^2)^{3/2}$. Ora, fissato z, dal paragone dell'equazione della curva con quella della superficie risulta

$$a'=a\,,\quad b'=b\,,\quad h'=h\,,\quad f'=fz\,,\quad g'=gz\,,\quad c'=cz^2-1\,;$$

poi

$$D' = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - \frac{1}{z^2} \end{vmatrix} z^2 = z^2 D - (ab - h^2) ,$$

e per conseguenza

$$\sigma(z) = \frac{\pi}{\sqrt{ab - h^2}} \left(1 - \frac{z^2 D}{ab - h^2}\right) , \quad \int_0^z \sigma(z) dz = \frac{2\pi z}{3\sqrt{ab - h^2}} + {}^1/_3 z\sigma(z) .$$

I limiti dell'integrazione, per V, sono evidentemente le radici di $\sigma(z)$, cioè $\pm\sqrt{\frac{ab - h^2}{D}}$. Dunque $V = 4\pi/3\sqrt{D}$.

c) Proponiamoci di calcolare il *volume comune a due cilindri circolari*, i cui assi s'incontrano ad angolo retto. Sia a il raggio del cilindro più grande, ka il raggio del più piccolo. Si prendano come assi delle y e delle z gli assi dei due cilindri, sicchè questi abbiano le equazioni $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = k^2 a^2$. Il volume cercato è

$$V = 8\int_0^{ka}\int_0^{\sqrt{k^2a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx dy = 8\int_0^{ka} \sqrt{(a^2 - x^2)(k^2a^2 - x^2)}\, dx ,$$

ossia, ponendo $x = ka \operatorname{sen}\varphi$,

$$V = 8k^2a^3 \int_0^{1/_2\pi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} . \cos^2\varphi d\varphi .$$

L'integrazione per parti dà

$$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} . \cos^2\varphi d\varphi$$

$$= \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} . \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + \int \left(\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} + \frac{k^2 \cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}\right) \operatorname{sen}^2\varphi d\varphi .$$

L'espressione sottoposta all'ultima integrazione si trasforma facilmente in

$$- 2\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} . \cos^2\varphi + \frac{1 + k^2}{k^2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} - \frac{1 - k^2}{k^2\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} .$$

Dunque

$$3k^2 \int_0^{1/_2\pi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} . \cos^2\varphi d\varphi = (1 + k^2) \int_0^{1/_2\pi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} d\varphi - (1 - k^2) \int_0^{1/_2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}}}$$

e finalmente

$$V = {}^8/_3 a^3 \left\{ (1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k) \right\} .$$

In particolare, se i due cilindri sono uguali, $V = {}^{2}/_{3}(2a)^3$. Nel caso generale si ha (§§ 357, 358)

$$V = 2\pi k^2 a^3 \left(1 - \frac{k^2}{8} - \frac{7k^4}{48} - \dots\right),$$

sicchè, col tendere di k a zero, V tende ad essere misurato (come era da aspettarsi) dal prodotto della sezione $\pi k^2 a^2$ del piccolo cilindro per la lunghezza $2a$ del segmento intercettato sul suo asse dall'altro cilindro. Invece, per k vicinissimo ad 1, il volume è approssimativamente uguale a ${}^{2}/_{3}k(2a)^3$.

d) Date due rette perpendicolari, che non s'incontrano, si consideri un segmento rettilineo costante, che si sposti appoggiandosi per gli estremi alle due rette. Rappresenti $2a$ la distanza fra queste rette, ed α l'inclinazione (costante) della retta mobile sulla comune perpendicolare alle rette fisse, dimodochè sia $2a/\cos\alpha$ la lunghezza del segmento mobile. Si ponga l'origine sulla comune perpendicolare, ad eguale distanza dalle rette fisse, e parallelamente a queste si dirigano gli assi delle x e delle y. Scelti in tal modo gli assi, l'equazione della superficie è

$$\frac{x^2}{(a-z)^2} + \frac{y^2}{(a+z)^2} = \mathrm{tg}^2\alpha ,$$

e per conseguenza ogni sezione fatta nella superficie con un piano perpendicolare all'asse delle z è un'ellisse, che per $z = 0$ è una circonferenza, e per $z = \pm a$ tende a convertirsi in un segmento rettilineo collocato sull'una o sull'altra delle rette fisse; gli estremi dei due segmenti sono punti singolari della superficie. Fissato per z un valore fra $-a$ ed a, l'ellisse corrispondente ha i semi assi $(a-z)\mathrm{tg}\alpha$ ed $(a+z)\mathrm{tg}\alpha$; e poichè la somma di questi è costante, ne risulta (§ 227, *c*) che l'inviluppo delle projezioni di tutte le analoghe ellissi sul piano Oxy è un'asteroide. In altri termini la superficie generata dal segmento mobile è tutta chiusa in un cilindro di altezza $2a$, che ha per sezione retta un'asteroide; ed i quattro segmenti curvilinei, secondo i quali essa tocca la superficie laterale del cilindro, costituiscono, insieme ai segmenti rettilinei collocati sulle rette fisse, come un tetraedro, forma schematica del solido generato. Siccome l'area dell'ellisse (§ 371, *g*) corrispondente ad un valore qualunque di z è $\sigma(z) = \pi(a^2 - z^2)\mathrm{tg}^2\alpha$, si trova subito come valore del volume del detto solido

$$V = 2\pi\,\mathrm{tg}^2\alpha \int_0^a (a^2 - z^2)\,dz = {}^{4}/_{3}\pi a^3 \mathrm{tg}^2\alpha ,$$

cioè i ${}^{4}/_{9}$ del volume del cilindro, giacchè questo volume, misurato dal prodotto dell'altezza $2a$ per l'area (§ 371, *j*) della sezione retta ${}^{3}/_{8}\pi(2a\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2$, è $3\pi a^3 \mathrm{tg}^2\alpha$.

e) Consideriamo il *luogo dei punti, tali che la somma delle inverse delle loro distanze alle facce d'un tetraedro regolare sia nulla.* Siano Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 i vertici del tetraedro, e q_i la distanza fra un punto qualunque e la faccia opposta al vertice Q_i, distanza che si suppone positiva o negativa secondo che il punto è interno o esterno al tetraedro. L'equazione della superficie è

$$\frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 0 ; \qquad (16)$$

ma nessuna delle formole dimostrate nei paragrafi precedenti è direttamente applicabile a questo genere di coordinate. Conviene pertanto passare alle coordinate cartesiane, ed è utile prendere come assi delle x, y, z le rette che vanno dai punti medii di Q_0Q_1, Q_0Q_2, Q_0Q_3, rispettivamente ai punti medii di Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2. Se si rappresenta con $2a$ la distanza di due lati opposti, è facile vedere che le coordinate di Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 sono rispettivamente $(-a, -a, -a)$, $(-a, a, a)$, $(a, -a, a)$, $(a, a, -a)$, e che per conseguenza si ha

$$q_0\sqrt{3} = -x-y-z+a \quad , \quad q_2\sqrt{3} = x-y+z+a \; ,$$
$$q_1\sqrt{3} = -x+y+z+a \quad , \quad q_3\sqrt{3} = x+y-z+a \; ;$$

quindi la (16) si trasforma in

$$xyz + {}^1/_2 a(x^2+y^2+z^2-a^2) = 0 \; . \tag{17}$$

Eccoci dunque in presenza d'una superficie del terzo ordine, che possiede quattro punti doppii nei vertici del tetraedro, ha la forma generale d'un tetraedro per così dire gonfiato, è toccata, lungo gli spigoli, dalle facce del cubo circoscritto al tetraedro, ed è tagliata secondo sei parabole dai piani diagonali del cubo. La sezione piana fatta alla distanza z dal piano Oxy è l'ellisse rappresentata dall'equazione $x^2+y^2+\frac{2z}{a}xy = a^2-z^2$, cioè un'ellisse che ha gli assi paralleli ai lati Q_0Q_3 e Q_1Q_2, ed i vertici situati su due delle sei parabole. Le lunghezze dei semi-assi sono $\sqrt{a(a-z)}$ e $\sqrt{a(a+z)}$, e dal fatto che la somma dei loro quadrati è costante si può (§ 227, *c*) dedurre che, al variare di z, l'ellisse, spostandosi e deformandosi, resta tangente a quattro facce del cubo: i punti di contatto percorrono quattro spigoli del tetraedro. Ora, venendo alla questione, basta osservare che l'area dell'ellisse è $\sigma(z) = \pi\iota\sqrt{a^2-z^2}$ per ottenere, applicando la formola (13),

$$V = 2\pi a\int_0^a \sqrt{a^2-z^2}\,dz = {}^1/_2\pi^2a^3 = a^3 . 4{,}9348022\ldots \; .$$

Questo è il volume totale, evidentemente compreso fra il volume ${}^8/_3 a^3$ del tetraedro inscritto ed il volume $8a^3$ del cubo circoscritto. Notiamo, per finire, che l'equazione (17) si può anche porre sotto la forma

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \operatorname{arc\,sen}\frac{y}{a} + \operatorname{arc\,sen}\frac{z}{a} = {}^1/_2\pi \; , \tag{18}$$

sicchè x, y, z, a rappresentano i lati d'un quadrilatero inscritto in una circonferenza di diametro a.

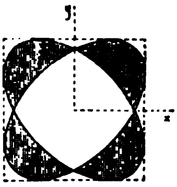
f) Invitiamo il lettore a studiare, più generalmente, le superficie rappresentate dall'equazione (18), con una costante qualunque nel secondo membro. Qui ci limitiamo a considerare quella che corrisponde al valore π della costante, e che per conseguenza è il *luogo dei punti, le cui distanze ai piani d'una terna ortogonale sono uguali ai lati d'un triangolo inscritto in una circonferenza di diametro a.* L'equazione di questa superficie, in forma algebrica, è

$$x^2y^2z^2 + {}^1/_4\, a^2(x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2) = 0 \; .$$

Intorno all'origine, diventando trascurabile il termine del sesto grado rispetto a quelli del quarto, la superficie si comporta come la quaterna di piani

$$-x^4 - y^4 - \dots + 2x^2y^2 = (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) = 0 \; ,$$

intersecantisi secondo tre coppie ortogonali di rette, giacenti sulla superficie. Questa ha dunque un punto quadruplo nell'origine, e sei rette doppie. Tutta chiusa in un cubo di lato $2a$, le cui facce la toccano lungo le circonferenze in esse inscritte, la superficie limita un solido, che ha la forma generale d'un cubo, arrotondato agli angoli e sugli spigoli, e scavato fino al centro, a guisa d'imbuto, in tutte le facce. Per calcolare il volume d'un tal solido valuteremo prima l'area della sezione fatta nella superficie da un piano parallelo ad una faccia del cubo. Questa sezione consta, come si vedrà, di due ellissi uguali, con gli assi in comune, le quali si confondono in una circonferenza quando il piano coincide con una faccia del cubo, e si riducono invece ad una delle tre coppie ortogonali di segmenti rettilinei, appartenenti alla superficie, quando il piano passa per il centro del cubo. Basta dare all'equazione della superficie la forma



$$(x^2 + y^2 - z^2)^2 = 4x^2y^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)$$

per separare le equazioni delle due ellissi, che in coordinate polari, dopo avere posto $z = a\cos\varphi$, si scrivono così:

$$r^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 2\theta} \;, \quad r^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi}{1 - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 2\theta} \; .$$

Ne segue, adoperando la seconda formola (3), che l'area della sezione fatta perpendicolarmente all'asse z, alla distanza z dall'origine, è

$$\sigma(z) = 8a^2\cos^2\varphi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta}{1 - \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2 2\theta} \; ;$$

poi, prendendo come variabile d'integrazione $t = \operatorname{tg}\varphi \cos 2\theta$,

$$\sigma(z) = 4a^2\cos\varphi \int_0^{\operatorname{tg}\varphi} \frac{dt}{1 + t^2} = 4a^2\varphi\cos\varphi \; ,$$

giacchè, dovendo φ variare da 0 ad ${}^1/_2\pi$, è certamente $\operatorname{arc tg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi$. Quindi la (13) dà

$$V = 2\int_0^a \sigma(z)\,dz = 8a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = a^3 \int_0^{\pi} \varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \; ,$$

e finalmente, integrando per parti,

$$V = a^3 (\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)_{\pi}^{0} = \pi a^3 .$$

Questo volume è appena i $^2/_9$ del volume della minima sfera, che chiude in sè l'intera superficie, sfera evidentemente concentrica alla superficie stessa, e tangente ad essa in otto punti, che sono altrettanti ombelichi. Con un calcolo analogo si trova che la capacità di ciascun imbuto è $^1/_4 \pi a^3$, dimodochè il volume della specie di dado, o cubo arrotondato sui vertici, che si ottiene colmando i sei imbuti, è $^5/_2 \pi a^3$; e si verifica che la quantità di solido da portar via su ciascun vertice del cubo per la materiale costruzione del corpo che si sta considerando è una molto piccola frazione del volume totale del cubo, cioè 0,00228.....

EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Equazioni fra due variabili.

383. Il problema dell'integrazione, come lo abbiamo fin qui trattato, è un caso particolarissimo del problema consistente nella *ricerca di quelle funzioni d'una o più variabili indipendenti, le quali funzioni siano legate alle variabili ed alle proprie derivate da una o più relazioni.* Queste si dicono *equazioni differenziali*, e la ricerca delle funzioni incognite è ancora un problema d'integrazione. Così, nel caso più semplice, che tratteremo in primo luogo, è data l'equazione differenziale

$$f(x, y, y', y'', \ldots) = 0 ,$$

e ci si propone di trovare *tutte* le funzioni y per le quali è identicamente soddisfatta l'equazione stessa. Simili equazioni diconsi *ordinarie* per distinguerle da quelle *alle derivate parziali*, nelle quali compariscono, con due o più variabili indipendenti, le derivate delle funzioni incognite rispetto alle diverse variabili. In tutti i casi si chiama *ordine* dell'equazione l'ordine massimo delle derivate, ordinarie o parziali, che sono in essa contenute. Noi ci occuperemo quasi esclusivamente delle equazioni del primo ordine.

384. **Integrale generale ed integrali particolari**. Supponga si l'equazione $f(x, y, y') = 0$ atta a definire y' come funzione *continua* di x e di y; e per ciascun punto (x, y) si tracci una retta, nella dire-

zione definita da un coefficiente angolare uguale al corrispondente valore di y'. Se immaginiamo che un punto mobile M, partendo da una posizione arbitraria M_0, si sposti infinitamente poco, fino ad M_1, lungo la retta tracciata per M_0, poi da M_1 ad M_2 lungo la retta tracciata per M_1, e così via, indefinitamente, è chiaro che l'equazione proposta sarà soddisfatta lungo tutta la linea descritta da M. Se poi si prende, fuori di questa linea, un altro punto iniziale, si riesce a costruire un'altra linea analoga, e poi, partendo sempre da nuovi punti, infinite altre linee, costituenti, tutte, una famiglia $F(x, y, a) = 0$. Questa equazione, atta a definire infinite funzioni y, soddisfacenti all'equazione differenziale proposta, si chiama *integrale generale* dell'equazione stessa, ed include infiniti *integrali particolari*, corrispondenti ai singoli valori della costante a. Adunque l'equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$ *coordina* soltanto i punti del piano lungo una semplice infinità di linee, ma *non vincola* effettivamente y ad x, giacchè la presenza della costante arbitraria a nell'integrale generale permette di fissare a piacimento, per ciascun valore di x, anche il valore di y. Ne segue che, se si vuol *definire* una funzione y mediante un'equazione differenziale del primo ordine, bisogna inoltre imporre la condizione che, per un dato valore di x, la funzione abbia un valore prescritto. In altri termini, *dati arbitrariamente* x_0 *ed* y_0, *esiste una funzione* y *di* x, *che soddisfa alla data equazione* $f(x, y, y') = 0$, *e prende per* $x = x_0$ *il valore* y_0. Per la validità di questo enunciato sono indispensabili alcune restrizioni, che non appariscono dalle precedenti considerazioni; le quali, d'altronde, se ci permettono di renderci conto dell'esistenza, della forma e del significato geometrico dell'integrale generale, non ci dispensano menomamente da una rigorosa dimostrazione analitica *. Qui vogliamo limitarci a richiamare l'attenzione sull'*unicità* dell'integrale generale, cioè sull'impossibilità dell'esistenza di due distinte funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$, le quali possano, uguagliate a costanti arbitrarie, rappresentare l'integrale generale d'una medesima equazione differenziale. Infatti, per l'identità fra i valori di y', ricavati dalle relazioni $u = costante$ e $v = costante$, si richiede che si abbia $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$, e per conseguenza (§ 180) che vi sia un vincolo fra u e v; dimodochè porre v uguale ad una costante è lo stesso che fissare il valore di u, e viceversa.

385. **Integrale singolare.** L'integrale generale $F(x, y, a) = 0$ dell'equazione $f(x, y, y') = 0$ soddisfa ancora a questa equazione allorchè si

* Consultare in proposito il *Lehrbuch der Analysis* (p. 500) di Lipschitz, il *Traité d'Analyse* (t. II, p. 292) di Picard, una Nota di Peano negli *Atti dell'Accademia di Torino* (1885-86, p. 677), due Note di Arzelà nelle *Memorie dell'Accademia di Bologna* (1895, p. 257; 1896, p. 131). A Peano si deve la dimostrazione dell'esistenza dell'integrale, sotto la sola condizione enunciata in principio del paragrafo.

considera a, non come una costante, ma come una funzione di x e di y, implicitamente definita da $F'_a(x, y, a)=0$, giacchè (*cfr.* § 222) il valore di y' ricavato in questa seconda ipotesi è lo stesso di quello che si otterrebbe supponendo a costante. *Integrale singolare* si chiama appunto l'integrale che risulta dall'eliminazione di a fra le equazioni $F=0$ ed $F'_a=0$. Ciò si può esprimere in termini geometrici dicendo che ad una data equazione differenziale del primo ordine non soddisfano soltanto le infinite linee rappresentate dall'integrale generale, ma soddisfa altresì l'inviluppo delle linee stesse, rappresentato dall'integrale singolare. Perciò si suol dire che *l'integrale singolare è l'inviluppo degli infiniti integrali particolari.* Grazie all'esistenza dell'integrale singolare, un punto che si vada spostando con continuità, in modo da soddisfare costantemente ad una data equazione differenziale, non è per questo obbligato a rimanere sopra una linea particolare, ma può trasferirsi su qualunque altra percorrendo un conveniente arco dell'inviluppo *.

386. È notevole che l'integrale singolare si può ottenere senza eseguire alcuna integrazione. Se il primo membro dell'equazione differenziale considerata $f=0$ è una funzione continua, dotata di derivate parziali prime continue, *l'integrale singolare risulta dall'eliminazione di* y' *fra le equazioni* $f=0, \dfrac{\partial f}{\partial y'}=0$. Fissiamo infatti una linea, tra le infinite che sono rappresentate dall'integrale generale, e supponiamo che essa tocchi in A la linea rappresentata dall'integrale singolare. Consideriamo un'altra linea particolare, infinitamente vicina alla prima, e sia A' il punto, infinitamente vicino ad A, nel quale essa tocca la linea singolare. Si capisce che le due linee particolari hanno un punto comune M, infinitamente vicino ad A, le cui coordinate ξ ed η tendono, per conseguenza, alle coordinate x ed y di A quando A' tende a confondersi con A. Ora nel punto M siano η' ed $\eta'+h$ i coefficienti angolari delle due linee particolari, che ivi s'incontrano. Si capisce ancora che, nel tendere di A' ad A, le due tangenti tendono entrambe a confondersi con la tangente in A alla linea singolare, cioè si avrà simultaneamente $\lim\xi=x$, $\lim\eta=y$, $\lim\eta'=y'$, $\lim h=0$. Intanto, poichè M appartiene a due linee soddisfacenti all'equazione differenziale proposta, si deve avere $f(\xi, \eta, \eta')=0$, $f(\xi, \eta, \eta'+h)=0$; e la seconda equazione, quando vi si trascurano le potenze di h, dalla seconda in su, diventa $f'_{y'}(\xi, \eta, \eta')=0$. Dunque, al limite, $f(x, y, y')=0, f'_{y'}(x, y, y')=0$.

* Questa osservazione, così semplice da sembrare superflua, è stata con somma abilità utilizzata da Boussinesq per la *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale* (Paris, Gauthier-Villars, 1878). Vedi anche lo studio del medesimo Autore ***sur divers points de la philosophie des sciences***, p. 82.

387. Per ciò che riguarda l'integrazione delle equazioni differenziali non esiste un metodo applicabile a tutte le equazioni, e noi dobbiamo qui limitarci a segnalare pochi casi, nei quali si giunge alla conoscenza dell'integrale generale per via di speciali procedimenti:

a) Se dall'equazione proposta si suppone ricavata una delle possibili espressioni di y', e se per y' si pone dy/dx, si è condotti ad integrare un'equazione della forma $udx + vdy = 0$, con u e v funzioni di x e di y. L'integrazione è immediata ($\int udx + \int vdy = costante$) se u è funzione della sola x, e v della sola y. Allora si dice che le variabili *sono separate.* Ciò si può sempre ottenere quando u e v sono prodotti di funzioni della sola x per funzioni di y: basta dividere l'equazione per la funzione di y, che comparisce in u, e per la funzione di x, che comparisce in v.

b) A separare le variabili si riesce sempre quando u e v sono funzioni *omogenee*, dello stesso grado. Infatti, posto $y = tx$, dimodochè sia $u = x^n\varphi(t)$, $v = x^n\psi(t)$, l'equazione si trasforma in

$$\varphi(t)dx + \psi(t)(tdx + xdt) = 0 \ ;$$

quindi, dividendo tutto per x e per $\varphi + t\psi$, ed integrando, si ottiene

$$\log x + \int \frac{\psi(t)dt}{\varphi(t) + t\psi(t)} = costante \ .$$

c) Assai facile è l'integrazione dell'equazione differenziale

$$f(x, y, y') = 0$$

tutte le volte che in essa manca x o y, supponendo, beninteso, che non si sappia o non si voglia risolvere l'equazione rispetto ad y', altrimenti da $y' = \varphi(x)$ o $y' = \varphi(y)$ si ricaverebbe subito $y = \int \varphi(x)dx$ o $x = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$, rispettivamente. Supponiamo invece che l'equazione proposta si sappia risolvere rispetto ad x o ad y. Se, per esempio, si ha $x = \varphi(y')$, posto $y' = t$ se ne ricava $y = \int tdx = \int t\varphi'(t)dt$, e l'eliminazione di t fra $x = \varphi(t)$, $y = t\varphi(t) - \int \varphi(t)dt$, fornisce l'equazione cercata in x ed y. Similmente da $y = \varphi(y')$, posto $y' = t$, si deduce $x = \int \frac{dy}{t} = \int \frac{\varphi'(t)}{t} dt$; *ecc.*

d) Le equazioni del *secondo* ordine $f(x, y, y', y'') = 0$, nelle quali manca x o y, sono facilmente riducibili a quelle del primo, perchè, se manca y, si può considerare y' come la funzione incognita, e l'equazione è allora del primo ordine, sicchè l'integrazione, supposta possibile, conduce ad un'equazione $F(x, y', a) = 0$; quindi, integrando ancora, si giunge alla relazione cercata fra x ed y, con *due* costanti arbitrarie, a e b. Se invece manca x, basta assumere y come variabile indipendente, e considerare y' come funzione incognita, osservando che $y''=dy'/dx=y'dy'/dy$, per ottenere così un'equazione del primo ordine, che integrata dà

$$F(y, y', a)=0 \ ; \ ecc.$$

e) Quando l'espressione di y', ricavata da un'equazione differenziale del primo ordine, è del *primo grado* in y, l'equazione si dice *lineare*, e l'integrazione è sempre possibile. Infatti, se si pone $y=uv$, l'equazione $y'+y\varphi(x)=f(x)$ si trasforma in $u'v+(v'+v\varphi)u=f$, e si riduce ad $u'v=f$ se per v si sceglie una funzione soddisfacente alla condizione $v'+v\varphi=0$, cioè, separando le variabili ed integrando, $v=e^{-\int\varphi dx}$. Dunque $u'=fe^{\int\varphi dx}$, e finalmente

$$y=e^{-\int\varphi dx}\int e^{\int\varphi dx}f dx \, .$$

Occorrono dunque due *quadrature*, come si suol dire, ossia due integrazioni semplici, per calcolare l'integrale generale di qualunque equazione differenziale *lineare* del primo ordine.

f) L'*equazione di Bernoulli* $y'+y\varphi(x)=y^n f(x)$ si riduce subito alla precedente: basta dividere tutto per y^n, ed assumere y^{1-n} come funzione incognita.

g) Interessante è l'*equazione di Clairaut* $y=xy'+f(y')$. Derivandola si ottiene $\{x+f'(y')\}y''=0$; quindi, successivamente, $y''=0, y'=a$, $y=ax+f(a)$: questo è l'integrale *generale*. Se non è $y''=0$, si deve avere $x+f'(y')=0$; se fra questa e l'equazione proposta si elimina y', si trova l'integrale *singolare*, e la via seguita per ottenerlo è proprio quella indicata nel § 386.

h) L'equazione $y=x\varphi(y')+\psi(y')$, quando non è un'equazione di Clairaut, è riducibile ad un'equazione lineare, giacchè se ne deduce, derivando,

$$\frac{dx}{dy'}+\frac{x\varphi'(y')+\psi'(y')}{\varphi(y')-y'}=0 \, .$$

L'integrazione fatta considerando x come funzione incognita della variabile indipendente y' dà una relazione della forma $F(x, y', a)=0$, e l'eliminazione di y' fra questa e l'equazione proposta conduce all'integrale generale cercato. Più generalmente, tutte le volte che un'equazione differenziale si può mettere sotto la forma $y=f(x, y')$, si ottiene, derivando,

$$y'=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}y'' \, ;$$

e se questa equazione (del primo ordine rispetto alla funzione incognita y')

si sa integrare, l'eliminazione di y' fra il suo integrale generale, che ha la forma $F(x, y', a) = 0$, e l'equazione proposta, condurrà alla relazione cercata fra x ed y.

i) Se l'espressione di y', ricavata da un'equazione differenziale del primo ordine, è del *secondo grado* in y, l'integrazione si può eseguire solo in casi specialissimi, dei quali ci occuperemo nel paragrafo seguente. Per ora ci limitiamo a segnalare alcune notevoli proprietà di siffatte equazioni

$$y' = y^2\varphi(x) + y\chi(x) + \psi(x) \,,$$

che si chiamano *equazioni di Riccati.* Quando in un modo qualsiasi si arriva a conoscere *un* integrale particolare u, l'integrazione è possibile mediante *due* quadrature, perchè, se si pone $y = u - \frac{1}{z}$, l'equazione prende la forma lineare $z' + (2u\varphi + \chi)z = \varphi$, e però l'integrale generale è

$$y = u - \frac{e^{\int (2u\varphi+\chi)dx}}{\int e^{\int (2u\varphi+\chi)dx} \cdot \varphi dx} \,. \tag{1}$$

Quando si conoscono *due* integrali particolari, l'integrazione si riduce ad *una* quadratura. Infatti, se dall'equazione proposta si sottraggono le identità

$$u' = u^2\varphi + u\chi + \psi \quad , \quad v' = v^2\varphi + v\chi + \psi \,,$$

si ottengono le equazioni

$$\frac{d}{dx}\log(y - u) = (y + u)\varphi + \chi \quad , \quad \frac{d}{dx}\log(y - v) = (y + v)\varphi + \chi \;;$$

quindi, sottraendo queste l'una dall'altra, ed integrando,

$$\frac{y - u}{y - v} = e^{\int (u-v)\varphi dx} \,. \tag{2}$$

Se poi si conoscono *tre* integrali particolari, l'integrazione si esegue *senza* quadrature, giacchè dalla precedente relazione si deduce subito

$$\frac{y - u}{y - v} : \frac{w - u}{w - v} = \textit{costante}.$$

Dunque *il rapporto anarmonico di quattro integrali particolari qualunque dell'equazione di Riccati è costante.* Notiamo, per finire, la forma semplicissima alla quale si può sempre ridurre un'equazione di Riccati, prendendo rispettivamente

$$z = ye^{-\int \chi dx} \quad , \quad t = -\int e^{\int \chi dx} . \varphi dx$$

come funzione incognita e come variabile indipendente. Si ha

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{y' - y\chi}{e^{2\int \chi dx} . \varphi} = -\frac{y^2\varphi + \psi}{e^{2\int \chi dx} . \varphi} = -z^2 - \frac{\psi}{\varphi} e^{-2\int \chi dx} ,$$

e però l'equazione si trasforma in $z' + z^2 = f(t)$.

388. **Esempii**: *a)* Per integrare l'una o l'altra equazione

$$(3x^2 - y^2)ydx - (x^2 - 3y^2)xdy = 0 \ , \ (x^2 - 3y^2)xdx + (3x^2 - y^2)ydy = 0 \ ,$$

basta (§ 387, *b*) porre $y = tx$, per trasformare così le equazioni in

$$\frac{dx}{x} - \frac{(1 - 3t^2)dt}{2t(1 + t^2)} = 0 \quad , \quad \frac{dx}{x} + \frac{(3 - t^2)tdt}{1 - t^4} = 0 \ ,$$

e dedurne, integrando,

$$x = \frac{a\sqrt{2t}}{1 + t^2} \quad , \quad x = a\frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 + t^2} \ ,$$

cioè, rispettivamente, $x^2 + y^2 = a\sqrt{2xy}$, $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$, o, in coordinate polari, $r = a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}$, $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$. Dunque gli integrali dell'una o dell'altra equazione rappresentano (§ 190, *m*) le infinite lemniscate, toccate nel polo dagli assi o dalle bisettrici degli assi. Si noti che due lemniscate qualunque, prese nelle due famiglie, si tagliano, fuori del polo, ad angolo retto. È poi facile verificare che le due equazioni esprimono una proprietà comune alla tangente ed alla normale, cioè la proprietà di fare col raggio vettore un angolo doppio dell'inclinazione del raggio stesso sopra una retta fissa: questa è una tangente nel polo o l'asse normale di simmetria, secondo che si tratta della tangente o della normale. Quando un tal problema si pone in equazione facendo uso di coordinate polari, si ottiene subito $r' = r\cot 2\theta$ o $r' = -r\operatorname{tg} 2\theta$, e l'integrazione riesce assai più facile.

b) Per integrare $(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$ possiamo prendere come nuove variabili $\xi = ax + by + c$, $\eta = a'x + b'y + c'$, salvo che non sia $ab' = ba'$, nel qual caso vi sarebbe già un legame fra ξ ed η. L'equazione diventa $(b'\xi - a'\eta)d\xi - (b\xi - a\eta)d\eta = 0$, e per integrarla basta porre $\eta = t\xi$; *ecc.* Se poi $ab' = ba'$, ed insieme $ac' = ca'$, l'equazione, liberata dal fattore $ax + by + c$, dà $ax + a'y =$ *costante*. Invece per $ac' \gtrless ca'$ si può scrivere

$$(ax + by)d(ax + a'y) + ad(cx + c'y) = 0 \ ,$$

dimodochè, prendendo come nuove variabili $\xi = ax + a'y$, $\eta = cx + c'y$, si giunge ad un' equazione della forma $(\alpha\xi + \beta\eta)d\xi + ad\eta = 0$. Basta poi, per separare le variabili, sostituire $z = \alpha\xi + \beta\eta$ ad η: si ottiene

$$(\beta z - a\alpha)d\xi + adz = 0 \text{ ; ecc. . .}$$

c) L'equazione $y\,\mathrm{sen}\,x + y'\cos x = 1$ è lineare, e però, per integrarla, basta (§ 387, *e*) determinar prima *una* funzione v soddisfacente a $v\,\mathrm{sen}\,x + v'\cos x = 0$, e poi, posto $y = uv$, cercare *tutte* le funzioni u soddisfacenti a $vu'\cos x = 1$. In tal modo si ottiene, successivamente, $v = \cos x$, $u = \mathrm{tg}\,x + a$, $y = \mathrm{sen}\,x + a\cos x$.

d) Data ad integrare l'equazione $(y - xy')\cos y' = 1 - x\,\mathrm{sen}\,y'$, se ne ricavi, per derivarla (§ 387, *h*), l'espressione di y:

$$y = x(y' - \mathrm{tg}\,y') + \sec y' \quad , \quad x\,\mathrm{sen}\,y' + \frac{dx}{dy'}\cos y' = 1 \,.$$

Ora, trattando x come funzione incognita della variabile indipendente y', si trova $x = \mathrm{sen}\,y' + a\cos y'$, e se ne deduce $(1 + a^2)\mathrm{sen}\,y' = x + a\sqrt{1 + a^2 - x^2}$, $(1 + a^2)\cos y' = ax - \sqrt{1 + a^2 - x^2}$; quindi, portando questi risultati nell'equazione differenziale proposta, si giunge all'integrale generale

$$y + x\,\mathrm{arctg}\,\frac{a + x\sqrt{1 + a^2 - x^2}}{1 - x^2} + \sqrt{1 + a^2 - x^2} = 0 \,.$$

Quanto all'integrale singolare, se si applica il procedimento esposto nel § 386, si trova che dev'essere $(y - xy')\mathrm{sen}\,y' = 0$. Ora se si prende $\mathrm{sen}\,y' = 0$, ossia $y' = n\pi$, con n intero, l'equazione dà $y - xy' = (-1)^n$, e ne risulta $y = (-1)^n + n\pi x$. Invece per $y - xy' = 0$ l'equazione si riduce ad $1 - xy' = 0$, e si trova (eliminando y') $y = x\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{1}{x}$; ma è facile verificare che questa funzione *non soddisfa* all'equazione proposta.

e) In modo analogo si può integrare l'equazione $y = xy' + x^2 f(y')$, che si trasforma, per derivazione, in

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{xf'(y')}{2f(y')} + \frac{1}{2f(y')} = 0 \,,$$

d'onde, posto $\varphi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, si ricava $x = -\,{}^1/_2\,\varphi(y')\varphi'(y')$. Eliminando y' fra questa relazione e l'equazione proposta si giunge all'integrale generale.

f) Per integrare $(a^2 - x^2)dy^2 + 2xydxdy + (b^2 - y^2)dx^2 = 0$, se ne ricavi il valore di y, e si noti che l'equazione così ottenuta, $y = xy' \pm \sqrt{a^2y'^2 + b^2}$, è (§ 387, *g*) un'equazione di Clairaut. Dunque l'equazione proposta ammette l'integrale generale $y = cx \pm \sqrt{a^2c^2 + b^2}$, ossia $c^2(a^2 - x^2) + 2cxy + (b^2 - y^2) = 0$, e l'integrale singolare $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

g) Dell'equazione $y^2 + \frac{1}{x^2} + 2y' = 0$ si scorge subito l'integrale particoare $y = 1/x$, e però basta porre $u = 1/x$, $\varphi = -1/2$, $\chi = 0$ nella formola (1) per trovare l'integrale generale

$$\frac{1}{1 - xy} + {}^1/_2 \log x = costante.$$

Un po' più generalmente, cercando di soddisfare all'equazione $y^2 + \frac{1}{x^2} + 2ky' = 0$ con $y = m/x$, si trova che m deve annullare $m^2 - 2km + 1$, e si ottengono così, per $k^2 \gtrless 1$, due integrali particolari

$$u = \frac{k + \sqrt{k^2 - 1}}{x} \quad , \quad v = \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{x} \; ;$$

poi la (2) ci dà l'integrale generale

$$xy = k + \sqrt{k^2 - 1}\, \frac{x^{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}} - a}{x^{-\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}} + a} \, ,$$

che converrà porre, per $k^2 < 1$, sotto la seguente forma:

$$xy = k - \sqrt{1 - k^2}\, \mathrm{tg}\left(a + \frac{\sqrt{1 - k^2}}{2k} \log x\right).$$

Ai medesimi risultati si giunge (*cfr.* § 326, *d*) mediante la sostituzione $xy = z$, che permette di separare le variabili:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2k dz}{z^2 - 2kz + 1} = 0 \; ; \; ecc.$$

h) Consideriamo più generalmente un'equazione di Riccati, già (§ 387, *i*) ridotta alla forma $y' + ay^2 = f(x)$, e segnaliamo infiniti casi nei quali l'equazione si lascia integrare in forma algebrico-logaritmica. Questi casi si riferiscono tutti all'ipotesi di $f(x)$ proporzionale ad una potenza di x: sia $f(x) = bx^n$. Se si pone $y = uz + v$, l'equazione diventa

$$uz' + (v' + av^2) + (u' + 2auv)z + au^2z^2 = bx^n \, ,$$

e si riduce semplicemente a $z' + auz^2 = b\frac{x^n}{u}$ se per u e v si prendono due funzioni tali che le condizioni $v' + av^2 = 0$, $u' + 2auv = 0$ siano soddisfatte. A ciò si riesce prendendo $v = 1/ax$, poi $u = 1/x^2$; e così l'equazione si trasforma in

$z' + a\dfrac{z^2}{x^2} = bx^{n+2}$, e si riduce alla primitiva forma ponendo $z = 1/y_1$, $x = x_1^\nu$. Si ottiene infatti

$$\frac{dy_1}{dx_1} + \nu b y_1^2 x_1^{(n+3)\nu-1} = \nu a x_1^{-(\nu+1)},$$

e basta prendere $\nu = 1/(n+3)$ perchè l'equazione si riduca effettivamente alla forma primitiva, cioè diventi $\dfrac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{n_1}$, dove $a_1 = b/(n+3)$, $b_1 = a/(n+3)$, $n_1 = -(n+4)/(n+3)$. Ora immaginiamo che la sostituzione già adoperata si applichi più volte di seguito. Si costruirà in tal modo una successione di equazioni di Riccati, nelle quali all'esponente n succedono $n_1, n_2, n_3, \ldots$, legati dalla relazione

$$n_{i+1} = -\frac{n_i+4}{n_i+3},$$

essendo $n_0 = n$. Se si aggiunge 2 ai due membri si ottiene

$$n_{i+1} + 2 = \frac{n_i+2}{(n_i+2)+1} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{n_{i+1}+2} = 1 + \frac{1}{n_i+2}.$$

Dunque, cambiando i in $i-1, i-2, \ldots, 2, 1, 0$, e sommando,

$$\frac{1}{n_i+2} = i + \frac{1}{n+2}.$$

Siccome le variabili si separano immediatamente, nell'equazione proposta, quando $n = 0$, si può asserire che *l'equazione è integrabile tutte le volte che nella successione* $n_1, n_2, n_3, \ldots$ *esiste un termine nullo.* Essa è dunque integrabile quando si ha

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2n+4} = \textit{intero}.$$

Veramente occorre che $n/(2n+4)$ sia intero e positivo; ma al caso dell'intero negativo si provvede facendo direttamente nell'equazione data la sostituzione $y = 1/y_1$, $x = x_1^{\frac{1}{n+1}}$. Infatti l'equazione diventa $\dfrac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{n_1}$, essendo $a_1 = b/(n+1)$, $b_1 = a/(n+1)$, $n_1 = -n/(n+1)$, dimodochè si ha

$$\frac{n_1}{2n_1+4} = -\frac{n}{2n+4}.$$

Finalmente, se l'*intero* non è finito, occorrerebbero infinite trasformazioni; ma questo caso, corrispondente all'ipotesi $n = -2$, è stato già trattato per altra via. Dunque, riassumendo, l'equazione $y' + ay^2 = bx^n$ è integrabile per

$$-\frac{n}{4} = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, 1.$$

i) L'equazione del *secondo* ordine $y''=f(x)$ si può sempre (§ 387, *d*) trattare come un'equazione del *primo* ordine, considerando y' come funzione incognita: $y'=\int f(x)dx$, con una costante arbitraria a, inclusa nell'integrale. Poi si ha $y=\int y'dx=xy'-\int xdy'$, cioè $y=x\int f(x)dx-\int xf(x)dx$, con una seconda costante arbitraria b, inclusa nel secondo integrale, sicchè la parte arbitraria di y ha la forma $ax+b$, come si poteva prevedere. Anche l'equazione $y''=f(y)$ si riduce subito al primo ordine (§ 387, *d*) scrivendo $y'dy'$ per $y''dy$, dimodochè si ha, successivamente,

$$^1/_2 y'^2=\int f(y)dy \quad , \quad x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy}} \quad ,$$

con due costanti arbitrarie, introdotte dalle successive integrazioni.

j) Per integrare $y''\cos y+y'^2\operatorname{sen} y=y'$ si moltiplichi tutto per dy, e si ponga $y'dy'$ al posto di $y''dy$. Così, dopo avere sbarazzata l'equazione dall'integrale ovvio $y=costante$, si ottiene l'equazione del primo ordine

$$\frac{dy'}{dy}\cos y+y'\operatorname{sen} y=1 \quad ,$$

che ammette, come si è visto, l'integrale generale $y'=\operatorname{sen} y+\operatorname{tg}\alpha\cos y$; quindi

$$x=\int\frac{dy}{\operatorname{sen} y+\operatorname{tg}\alpha\cos y}=\int\frac{\cos\alpha\,.\,dy}{\operatorname{sen}(y+\alpha)}=a+\cos\alpha\log\operatorname{tg}\frac{y+\alpha}{2} \quad ,$$

con a ed α costanti arbitrarie.

k) Similmente, data l'equazione $y''(1+yy')=y'(1+y'^2)$, si può subito porla sotto la forma

$$\frac{dy}{dy'}=\frac{1+yy'}{1+y'^2} \, ,$$

ed integrarla (§ 387, *e*) trattando y' come variabile indipendente. Si può anche cominciare dal porre l'equazione sotto la forma

$$(1+y'^2)(dy-dy')=(1+yy')dy'-(1+y'^2)dy'=(y-y')y'dy' \, ,$$

per dedurne, successivamente,

$$\frac{d(y-y')}{y-y'}=\frac{y'dy'}{1+y'^2} \quad , \quad y=y'+k\sqrt{1+y'^2} \; ;$$

poi

$$x=\int\frac{y+k\sqrt{y^2+1-k^2}}{y^2-k^2}dy \; ,$$

o finalmente $x=a+k\log\left(y+\sqrt{y^2+1-k^2}\right)+\log\left(y-k\sqrt{y^2+1-k^2}\right)$, con

a e k costanti arbitrarie. In particolare per $k=1$, se prima si prende a uguale a $-\log(1-k^2)$, si scopre l'integrale semplicissimo $y=\sqrt{1+e^x}$.

l) L'equazione $yy'y''=y'^3+y''^2$, quando vi si considera y come variabile indipendente, si riduce ad un'equazione di Clairaut $y'=y\frac{dy'}{dy}-\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2$, e però il suo integrale generale si ottiene integrando $y'=ay-a^2$, ed è, per conseguenza, $y=a+be^{ax}$, con a e b costanti arbitrarie; ma l'integrale singolare $4y'=y^2$ ci rivela l'esistenza di infiniti altri integrali $(a-x)y=4$, non contenuti nell'integrale generale.

m) Finalmente, per vedere come l'uso delle equazioni differenziali possa condurre alla scoperta di notevoli proprietà delle funzioni, si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}+\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}}=0\,, \tag{3}$$

che ammette, evidentemente, l'integrale generale

$$\mathrm{F}(k\,,\varphi)+\mathrm{F}(k\,,\psi)=\mathit{costante}\,, \tag{4}$$

e si cerchi di pervenire per altra via alla conoscenza di tale integrale. Rispetto alla variabile indipendente $x=\mathrm{F}(k\,,\varphi)$ è chiaro che le funzioni $u=\operatorname{sen}\varphi$ e $v=\operatorname{sen}\psi$ hanno le derivate

$$u'=\cos\varphi\,.\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\quad,\quad v'=-\cos\psi\,.\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}\,,$$

e però soddisfano entrambe alle seguenti relazioni:

$$y'^2=(1-y^2)(1-k^2y^2)\quad;\quad y''=-(1+k^2)y+2k^2y^3\,.$$

Ne segue

$$v^2u'^2-u^2v'^2=-(u^2-v^2)(1-k^2u^2v^2)\quad,\quad vu''-uv''=2k^2uv(u^2-v^2)\;;$$

quindi, successivamente,

$$\frac{vu''-uv''}{vu'-uv'}=-\frac{2k^2uv(uv)'}{1-k^2(uv)^2}\quad,\quad\frac{vu'-uv'}{1-k^2u^2v^2}=\mathit{costante}.$$

L'ultima relazione, quando ad $u\,,v\,,u'\,,v'$ si sostituiscono le loro espressioni in φ e ψ, diventa

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\psi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}+\operatorname{sen}\psi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi}=\mathit{costante}. \tag{5}$$

Questa non è se non un'altra forma dell'integrale generale dell'equazione (3); e però, se si rappresenta con $\operatorname{sen}\sigma$ la funzione di φ e ψ, che comparisce nel primo membro di (5), l'osservazione fatta in fine del § 384 permette di asserire che il primo membro di (4) deve potersi mettere sotto la forma $f(\sigma)$. Or poichè, per $\psi = 0$, σ si riduce, in virtù di (5), a φ, è $F(k, \varphi) = f(\varphi)$. Dunque, *se si ha*

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k, \sigma) ,$$

σ è vincolato a φ e ψ dalla relazione

$$(1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\psi) \operatorname{sen}\sigma = \operatorname{sen}\varphi \cos\psi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\psi} + \operatorname{sen}\psi \cos\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} .$$

Questo è l'importante *teorema di addizione* degli integrali ellittici di prima specie *, scoperto da Eulero. È utile notare che l'ultima relazione si può anche porre sotto le seguenti forme:

$$\cos\sigma = \cos\varphi \cos\psi - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\sigma} ,$$

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\operatorname{tg}\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\psi} + \operatorname{tg}\psi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi)(1 - k^2 \operatorname{sen}^2\psi)}} .$$

In particolare per $k = 0$ si ritrovano le formole di trigonometria, che danno i valori di $\operatorname{sen}(\varphi + \psi)$, $\cos(\varphi + \psi)$, $\operatorname{tg}(\varphi + \psi)$. Ancora si noti che, per $\sigma = {}^1/_2\pi$, ponendo $\varphi = \psi$, si riesce a determinare l'amplitudine φ, per la quale $F(k, \varphi)$ diventa uguale ad ${}^1/_2 F(k)$: essa è $\varphi = \operatorname{arc\,cot} \sqrt[4]{1 - k^2}$. Ciò permette di risolvere una questione posta precedentemente (§ 378, *d*).

Applicazioni geometriche.

389. **Curve piane**: *a)* Quando si vuol conoscere la curva, per la quale il segmento staccato dalla tangente sopra un asse, a partire da un punto fisso, sia una funzione prescritta dell'angolo che la tangente stessa fa con l'asse, si ottiene un'equazione di Clairaut, e *la curva cercata è data dall'integrale singolare*, mentre l'integrale generale rappresenta l'insieme delle tangenti. Così, per esempio, se si vuole che il segmento staccato sull'asse delle x, a partire dall'origine, sia proporzionale ad y', come si è condotti a supporre quando si cerca l'antipedale (§ 228) d'una retta rispetto ad un punto, si deve integrare $y = xy' - ay'^2$. Ne segue, derivando, che, o dev'essere $y'' = 0$, e successivamente $y' = k$, $y = kx - k^2 a$, equazione d'una famiglia di rette, tangenti alla parabola $x^2 = 4ay$; o si deve avere $x = 2ay'$, e conseguentemente $x^2 = 4ay$. Similmente, se si domanda per quale curva i segmenti staccati dagli assi sulle tangenti sono di ugual lunghezza, si è condotti ad integrare l'equazione $y = xy' + ay' / \sqrt{1 + y'^2}$, ed anzi basterà (§ 386) determinarne l'integrale singolare: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. L'eliminazione mediante la quale si giunge al risultato non differisce, in fondo, da quella che si dovrebbe fare (§ 221) guardando il problema dal punto di vista della teoria degli inviluppi.

---

* Per le altre specie vedi Schlömilch, *loc. cit.*, p. 59.

b) Analogamente si procede se invece della tangente si considera la normale, nel qual caso l'equazione da integrare ha la forma $x + yy' = f(y')$, e si può subito risolvere (*cfr.* § 387, *b*) rispetto ad y. Del resto si può anche cominciare dal derivare l'equazione, per eliminare poi y fra l'equazione che in tal modo si ottiene, cioè $1 + y'^2 + yy'' = f'(y')y''$, e l'equazione proposta. Si giunge così all'equazione lineare

$$y'\frac{dx}{dy'} = \frac{x}{1+y'^2} + \frac{y'f'(y') - f(y')}{1+y'^2} ,$$

che si sa integrare. Se $F(x, y', a) = 0$ è l'integrale generale, basterà poi fra questa e l'equazione proposta eliminare y' per trovare l'integrale generale cercato. Se, per esempio, si vuole una curva tale che i segmenti staccati dagli assi sulle normali abbiano tutti la lunghezza a, si è condotti ad integrare

$$x + yy' = ay'/\sqrt{1+y'^2} ,$$

e si trova che l'integrale generale risulta dall'eliminazione di y' fra

$$x = \frac{ay'}{2\sqrt{1+y'^2}}\left(1 - k + \frac{1}{1+y'^2}\right) , \quad y = \frac{a}{2\sqrt{1+y'^2}}\left(1 + k - \frac{1}{1+y'^2}\right) .$$

Del resto basta conoscere una curva sola, che risponda alla questione, per conoscerle tutte; e però possiamo limitarci a fare, per esempio, $k = 1/2$. In questa ipotesi le precedenti uguaglianze diventano

$$x = \frac{a}{8(1+y'^2)^{3/2}}\left\{(1+y')^3 - (1-y')^3\right\} , \quad y = \frac{a}{8(1+y'^2)^{3/2}}\left\{(1+y')^3 + (1-y')^3\right\} ,$$

e se ne deduce, per eliminazione di y', $(x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^{2/3}$. Dunque le curve cercate sono *parallele ad un'asteroide*, che ha i vertici sugli assi; e per conseguenza (§ 227, *e*) esse sono, come si poteva prevedere, le infinite *sviluppanti dell'asteroide* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

c) Quando si cerca una curva, tale che il segmento intercettato da un asse sulla normale, a partire dal punto d'incidenza, sia una determinata funzione del segmento intercettato sul detto asse dalla normale, a partire da un punto fisso, si è condotti ad integrare un'equazione della forma $y\sqrt{1+y'^2} = f(x + yy')$. Derivando si ottiene un'equazione che si scinde in

$$1 + y'^2 + yy'' = 0 , \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = f'(x + yy') . \qquad (6)$$

Se fra l'ultima e l'equazione proposta si elimina y', si ottiene l'integrale singolare, che rappresenta la curva cercata. Invece integrando la prima delle (6) si ha $x + yy' = a$, e finalmente, portando il valore di y' nell'equazione proposta, si trova $(x - a)^2 + y^2 = f^2(a)$, equazione d' una famiglia di circonferenze, tangenti alla curva già ottenuta.

d) Se si vuole la curva, per la quale il raggio di curvatura in ciascun punto si esprime mediante una data funzione dell'ascissa del punto stesso, bisogna integrare l'equazione $(1 + y'^2)^{3/2} = y''f(x)$. Qui le variabili si separano subito, e si ha $y'/\sqrt{1 + y'^2} = \int \frac{dx}{f(x)}$; ecc. Per esempio, se $f(x) = a^2/2x$, si ottiene la *curva elastica*, rappresentata dall' equazione $y = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$. Essa è il profilo d' una lama elastica, mantenuta ad un' estremità, e piegata per effetto d' una forza applicata all'altra estremità.

e) Cercare una curva piana, il cui raggio di curvatura sia uguale al segmento staccato sulla normale da una retta fissa, a partire dal punto d' incidenza. L'equazione che si ottiene è

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \pm y\sqrt{1 + y'^2}\ , \quad \text{cioè} \quad 1 + y'^2 = \pm yy''\ .$$

Se si prende il segno —, l'equazione precedente è la stessa di quella ottenuta poco innanzi, e però le circonferenze stanno fra le curve cercate. Invece col segno + si ottiene $1 + y'^2 = yy''$, o, moltiplicando per dy, e scrivendo $y'dy'$ al posto di $y''dy$,

$$\frac{dy}{y} = \frac{y'dy'}{1 + y'^2}\ , \quad y = a\sqrt{1 + y'^2}\ , \quad x = \int \frac{ady}{\sqrt{y^2 - a^2}}\ ;$$

poi, fissando l'origine in modo che per $x = 0$ si abbia $y = a$,

$$x = a\log\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}\ , \quad \text{cioè} \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\ ,$$

equazione d'una *catenaria*.

f) Più generalmente, l'equazione differenziale delle *linee* (§ 196, *k*) *di Ribaucour* è

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = ky\sqrt{1 + y'^2}\ , \quad \text{cioè} \quad 1 + y'^2 = kyy''\ ,$$

e se ne tenta l'integrazione ponendo $y'dy'$ per $y''dy$. Così l'equazione diventa

$$\frac{dy}{y} = k\frac{y'dy'}{1 + y'^2}\ , \quad \text{e dà} \quad y = a(1 + y'^2)^{1/2k}\ , \quad \text{cioè} \quad y' = \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}\ .$$

Ne segue

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}}\ .$$

Questa è l'equazione generale di tutte le linee di Ribaucour. Essa non si può (§ 352) porre sotto forma algebrico-logaritmica se non quando è intero uno dei numeri $\frac{1}{2}k$, $\frac{1}{2}(k-1)$, cioè *quando* k *è un numero intero.* Si ritrovano così la *circonferenza* e la *catenaria* per $k=-1$ e $k=1$; poi la *cicloide* per $k=-2$, la *parabola* per $k=2$; ecc.

g) Più generalmente ancora, la ricerca delle curve, per le quali il raggio di curvatura è una data funzione del segmento di normale, compreso fra il punto d'incidenza ed una retta fissa, è sempre riducibile a due quadrature successive. Sia infatti $n=y/\cos\varphi$ la lunghezza del segmento di normale, e si scriva il valore (§ 192) della curvatura nel seguente modo:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{ds}=-\frac{d}{dy}\cos\varphi=-\frac{d}{dy}\frac{y}{n}=-\frac{1}{n}+\frac{y}{n^2}\frac{dn}{dy}\,.$$

L'equazione $\rho=f(n)$ si trasforma subito in

$$\frac{dy}{y}=\frac{dn}{n}-\frac{dn}{n+f(n)}\,,\quad\text{e dà}\quad y=ne^{-\int\frac{dn}{n+f(n)}}=\varphi(n)\;;$$

poi, successivamente,

$$y'=\frac{\sqrt{n^2-\varphi^2(n)}}{\varphi(n)}\,,\quad x=\int\frac{\varphi(n)\varphi'(n)dn}{\sqrt{n^2-\varphi^2(n)}}\;;\ ecc.$$

Questo problema si presenta tutte le volte che si tratta di determinare le superficie di rotazione, caratterizzate da una data relazione fra i raggi principali di curvatura.

390. **Trajettorie.** Il problema delle trajettorie consiste nella ricerca delle linee, che incontrano sotto un angolo *costante* ω tutte le linee d'una data famiglia $\varphi(x,y,a)=0$. Ciò si esprime scrivendo che, qualunque sia il valore del parametro a, si deve avere

$$y'=\frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\operatorname{tg}\omega}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\operatorname{tg}\omega}\,,$$

cioè

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\operatorname{sen}\omega+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\omega}=\frac{dy}{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\omega+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\operatorname{sen}\omega}\,.$$

Se in questa relazione si sostituisce il valore di a, ricavato da $\varphi=0$, si ottiene un'equazione differenziale del primo ordine, la cui integrazione conduce all'equazione $\psi(x,y,b)=0$ di un'altra famiglia di linee, le quali godono della proprietà richiesta. In particolare la ricerca delle *trajettorie ortogonali* delle linee $\varphi=0$ si fa integrando l'equazione differenziale che risulta dall'eliminazione di a tra $\varphi=0$ e $dx\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x}=dy\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. Ecco alcuni esempii:

a) Per trovare le trajettorie ortogonali delle circonferenze di raggio a, che hanno i centri sopra una retta (che conviene assumere come asse delle ascisse), si deve eliminare b fra le equazioni

$$(x-b)^2+y^2=a^2 \quad , \quad \frac{dx}{x-b}=\frac{dy}{y} ,$$

dimodochè, posto $y=a\,\mathrm{sen}\,\theta$, convenendo che per $\theta={}^1/_2\pi$ sia $x=0$, si ottiene

$$x=\int^{y}\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy=a\int^{\theta}\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta=a\left(\cos\theta+\log\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\right),$$

vale a dire che le trajettorie (le quali sono evidentemente delle *trattrici*) si ottengono spostando parallelamente all'asse delle ascisse la curva rappresentata dalle equazioni $x=a\left(\cos\theta+\log\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\right)$, $y=a\,\mathrm{sen}\,\theta$. Del resto è facile verificare che la sviluppata di questa curva è una catenaria. Per ω qualunque si troverebbero le altre *sviluppanti della catenaria.*

b) Il fascio di circonferenze $x^2+y^2-a^2=2\mu ay$ può essere rappresentato anche dalla sua equazione differenziale $2xydx=(x^2-y^2-a^2)dy$, che si stabilisce eliminando il parametro μ fra l'equazione precedente e quella che se ne trae per differenziazione. Il cambiamento di dy/dx in $-dx/dy$ conduce all'equazione differenziale delle trajettorie ortogonali delle circonferenze del fascio; e poichè l'equazione che in tal modo si ottiene, ossia $2xydy=(y^2-x^2+a^2)dx$, non differisce da quella del fascio se non per lo scambio di x con y, ed il cambiamento di a^2 in $-a^2$, si vede subito, senza che occorra integrare, che le dette trajettorie costituiscono un altro fascio di circonferenze $x^2+y^2+a^2=2\lambda ax$. I due fasci son quelli che servono di fondamento al sistema * delle *coordinate dipolari*

$$u={}^1/_2\log\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \quad , \quad v=\mathrm{arc\,cot}\,\mu \; .$$

c) La determinazione delle trajettorie ortogonali di qualunque famiglia di circonferenze dipende da un'equazione di Riccati. Le coordinate ξ, η del centro d'una circonferenza ed il raggio a siano tre funzioni note dell'arco s della linea dei centri. Sia φ l'inclinazione della tangente a questa linea sull'asse delle ascisse, e θ l'angolo che la tangente ad una trajettoria, nel suo punto d'incontro (x, y) con la detta circonferenza, fa con la normale alla linea dei centri. Si ha

$$x=\xi-a\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) \quad , \quad y=\eta+a\cos(\theta+\varphi) ,$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{ds}=\cos\varphi-\frac{da}{ds}\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi)-a\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{\rho}\right)\cos(\theta+\varphi) ,$$

$$\frac{dy}{ds}=\mathrm{sen}\,\varphi+\frac{da}{ds}\cos(\theta+\varphi)-a\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{sen}(\theta+\varphi) ;$$

* *Analisi algebrica*, p. 320.

quindi, poichè dev'essere $-dx/dy = \operatorname{tg}(\theta + \varphi)$, si vede che la funzione incognita θ soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho} = \frac{\cos\theta}{a} ,$$

in cui ρ, raggio di curvatura della linea dei centri, è una funzione nota di s. Basta ora assumere come funzione incognita $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ per essere condotti ad un'equazione di Riccati:

$$\frac{dt}{ds} + {}^1/_2\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{a}\right)t^2 + {}^1/_2\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{a}\right) = 0 .$$

Del resto la conoscenza dell'integrale generale non è indispensabile per la ricerca delle proprietà delle trajettorie, giacchè, tenendo conto dell'equazione differenziale solo in quanto permette di esprimere la derivata θ' mediante θ e funzioni note di s, le formole precedenti diventano

$$\frac{dx}{ds} = (\operatorname{sen}\theta - a')\operatorname{sen}(\theta + \varphi) \quad , \quad \frac{dy}{ds} = -(\operatorname{sen}\theta - a')\cos(\theta + \varphi) .$$

Dunque il differenziale dell'arco d'una trajettoria ortogonale è $ds_1 = (\operatorname{sen}\theta - a')ds$; e poichè l'angolo di contingenza è manifestamente $d\theta + \frac{ds}{\rho}$, si vede che il raggio di curvatura è dato dalla formola $\rho_1\cos\theta = a(\operatorname{sen}\theta - a')$. In particolare per $a' = 0$ si ritrova, generalizzata, una proprietà della trattrice: *il centro di curvatura in ciascun punto d'una trajettoria ortogonale d'una famiglia di circonferenze uguali appartiene alla corrispondente normale della linea dei centri.* È poi facile vedere che, una volta determinata θ in funzione di s, l'equazione intrinseca delle trajettorie risulterà dall'eliminazione di s fra le uguaglianze

$$s_1 = \int \operatorname{sen}\theta \, . \, ds \quad , \quad \rho_1 = a \operatorname{tg}\theta .$$

Finalmente (§ 227, *f*) per $a' = 1$ si trova che *il centro di curvatura in ciascun punto d'una trajettoria ortogonale delle circonferenze osculatrici d'una curva cade sulla tangente alla curva stessa.*

d) Per trovare le trajettorie ortogonali delle coniche omofocali

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$$

si formi prima, per differenziazione ed eliminazione del parametro λ. l'equazione differenziale di questa famiglia di curve:

$$(y\,dx - x\,dy)(x\,dx + y\,dy) + (a^2 - b^2)dx\,dy = 0 .$$

Siccome il cambiamento di dy/dx in $-dx/dy$ non altera l'equazione, se ne conclude che le trajettorie cercate sono le coniche stesse; e ciò si spiega osservando che, fissati x ed y, si ricavano dalla prima equazione due valori di λ: uno, minore di b^2, corrisponde ad un'ellisse; l'altro, compreso fra b^2 ed a^2, corrisponde ad un'iperbole. Passano dunque per ogni punto del piano, tagliandosi ad angolo retto, un'ellisse ed un'iperbole, che hanno i fuochi in due punti dati; ed i valori di λ, che le individuano nell'intera famiglia delle coniche dotate dei medesimi fuochi, sono (*cfr.* § 371, *o*) le *coordinate ellittiche* del punto.

391. **Superficie**: *a*) Nella rappresentazione di porzioni limitate della superficie terrestre si è condotti a considerare le *linee di livello*, ossia le intersezioni della superficie con piani orizzontali. L'equazione stessa d'una superficie $F(x,y,z)=0$ rappresenta, per ciascun valore di z, una linea di livello, projettata sul piano orizzontale Oxy. L'eliminazione di z fra le equazioni

$$F=0 \qquad e \qquad \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

conduce ad un'equazione differenziale del primo ordine, che rappresenta appunto l'intero sistema delle linee di livello, ed anche, mediante il suo integrale singolare, l'inviluppo delle linee stesse, cioè (*cfr.* § 262) il *contorno dell'ombra* della superficie sopra un piano orizzontale, per un fascio verticale di raggi luminosi. Se poi nell'equazione differenziale delle linee di livello si cambia y' in $-1/y'$, l'integrale generale della nuova equazione rappresenta le projezioni orizzontali delle *linee di massima pendenza*, trajettorie ortogonali delle linee di livello *.

b) La determinazione delle *trajettorie ortogonali delle generatrici* di qualunque superficie rigata si può sempre fare con una sola quadratura. Supponiamo che la posizione d'un punto sulla superficie si definisca mediante (§ 270) le solite coordinate u e v, dimodochè sia $X=x+av$, $Y=y+bv$, $Z=z+cv$, dove x,y,z,a,b,c dipendono soltanto da u. Se si rappresentano con $x',y',\ldots,c'$ le derivate di queste funzioni, si ha

$$dX=(x'+a'v)du+adv \quad , \quad dY=(y'+b'v)du+bdv \quad , \quad dZ=(z'+c'v)du+cdv \; ,$$

e la condizione di ortogonalità $\Sigma a dX=0$ diventa $(ax'+by'+cz')du+dv=0$, da cui subito si ricava, integrando, $v=-\int(ax'+by'+cz')du$. Trovata una trajettoria $v=f(u)$, tutte le altre sono date da $v=f(u)+$ *costante*, e però due trajettorie qualunque intercettano segmenti uguali su tutte le generatrici.

c) Per determinare le *assintotiche* d'una superficie rigata adoperiamo l'equazione (§ 304)

$$\mathfrak{A}du^2+\mathfrak{B}dv^2+2\mathfrak{C}du\,dv=0 \; , \tag{7}$$

in cui

$$\mathfrak{A}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix} \; , \quad \mathfrak{B}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix} \; , \quad \mathfrak{C}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix} \; .$$

* Per una minuta discussione di queste e di altre notevoli linee vedi il *Calcul différentiel* di Boussinesq, pp. 229*-243*.

Qui ad x, y, z bisogna sostituire $X = x + av$, $Y = y + bv$, $Z = z + cv$, sicchè

$$\mathfrak{B} = 0 \quad , \quad \mathfrak{C} = \begin{vmatrix} a & a' & x' \\ b & b' & y' \\ c & c' & z' \end{vmatrix} ,$$

mentre $\mathfrak{A}$ è una funzione quadratica di v, i cui coefficienti dipendono, in generale, da u. Se la superficie è sviluppabile (§ 268) si ha $\mathfrak{C} = 0$, e l'equazione (7) si riduce a $du^2 = 0$, vale a dire che i due sistemi di assintotiche si confondono nell'unico costituito dalle generatrici ($u =$ *costante*). Se la superficie non è sviluppabile, $\mathfrak{C}$ non è nullo, e la (7) si scinde in due equazioni, cioè $du = 0$, a cui soddisfano le generatrici, e

$$\frac{dv}{du} = v^2\varphi(u) + v\chi(u) + \psi(u) \ . \tag{8}$$

Dunque *la determinazione delle curve assintotiche d'una rigata gobba dipende da un'equazione di Riccati.* Ne segue (§ 387, *i*) che *quattro assintotiche qualunque incontrano le generatrici in una quaterna di punti, il cui rapporto anarmonico ha un valore unico per tutte le generatrici* *. Inoltre la conoscenza di due assintotiche, o di un'assintotica, permette di determinare tutte le altre mediante *una* o *due* quadrature, rispettivamente.

d) La riduzione a due quadrature si verifica sempre per le rigate *a piano direttore*, perchè l'annullamento identico di

$$2\mathfrak{C}\varphi(u) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} ,$$

riduce la (8) ad un'equazione lineare, la cui integrazione (§ 387, *e*) richiede appunto due sole quadrature; e d'altra parte il detto annullamento è (§ 137) necessario e sufficiente per l'esistenza di tre *costanti* l, m, n, tali che sia $la + mb + nc = 0$ indipendentemente da u, vale a dire perchè le generatrici sian tutte parallele ad un piano fisso. Similmente si prevede la possibilità di ridurre a due quadrature l'integrazione della (8) quando si tratta di determinare le assintotiche della *superficie formata dalle normali principali d'una curva data*, giacchè questa è appunto una delle linee cercate. Sostituendo ad x, y, z i valori $X = x + \lambda v$, $Y = y + \mu v$, $Z = z + \nu v$, e tenendo presenti (§ 237) le formole di Frenet, si trova

$$\mathfrak{A} = \frac{v}{\tau^2}\left(v\frac{d}{du}\frac{\tau}{\rho} - \frac{d\tau}{du}\right) \quad , \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{\tau} \ ;$$

quindi la (8) assume, nel caso attuale, la forma semplicissima $2\tau d\frac{1}{v} + \frac{d\tau}{v} = d\frac{\tau}{\rho}$

* Di questo teorema si trova in *Mathesis* (1899, p. 159) una dimostrazione geometrica, dovuta ad A. Demoulin.

dopo aver messo in disparte l'integrale $v=0$, noto *a priori*. Ne segue

$$v=2\sqrt{\tau}\Big/\int^{s}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,d\frac{\tau}{\rho}\ ,$$

convenendo di prendere τ positivamente sotto il radicale. In particolare, se si rappresenta con R una lunghezza costante, arbitraria, si ha $v=\dfrac{2R\rho}{R\,.\,\rho}$ per le *linee a torsione costante*, $v=\sqrt{R\tau}$ per le *eliche cilindriche* (§ 256, c), e più generalmente, per qualunque *linea di Bertrand* (§ 259) a torsione variabile, $\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{\sqrt{R\tau}}=$*costante*. Questa non è arbitraria, ma dipende dalla curva che si considera; e per un circolo storto essa rappresenta appunto la flessione del circolo.

e) Per determinare le *geodetiche* dell'elicoide a piano direttore (§ 256, *b*) si proceda nel secondo dei due modi accennati in principio del § 306. Siccome i coseni direttori della normale alla superficie sono proporzionali ad $ay, -ax, x^2+y^2$, si deve avere

$$ay(dy\,d^2z-dz\,d^2y)-ax(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+(x^2+y^2)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0\ ,$$

ossia

$$a(xdx+ydy)d^2z-a(xd^2x+yd^2y)dz+(x^2+y^2)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0\ . \tag{9}$$

Intanto da $x^2+y^2=r^2$, ricordando che $dx^2+dy^2=dr^2+r^2d\theta^2$, si deduce

$$xdx+ydy=rdr\quad ,\quad xd^2x+yd^2y=rd^2r-r^2d\theta^2\ ,$$

ed è noto (§ 159, *c*) che

$$dx\,d^2y-dy\,d^2x=(r^2d\theta^2+2dr^2-rd^2r)d\theta\ ;$$

quindi la (9) si trasforma in

$$r''=\frac{2rr'^2}{r^2+a^2}+r\ ,$$

mettendo da parte l'integrale $\theta=$*costante*, che definisce le generatrici rettilinee. Al primo membro si può dar la forma $r'dr'/dr$; quindi è naturale assumere come funzione incognita $u=r'^2$. Così l'equazione diventa

$$\frac{du}{dr}=\frac{4ru}{r^2+a^2}+2r\ :$$

ed è noto (§ 387, *e*) che questa si può integrare prendendo

$$u=ve^{\int\frac{4rdr}{r^2+a^2}}=(r^2+a^2)^2v\ ,$$

dove la nuova funzione incognita v deve soddisfare all'equazione $\frac{dv}{dr}=\frac{2r}{(r^2+a^2)^2}$.
Ne segue

$$v=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2+a^2}\quad,\quad u=\frac{1}{b^2}(r^2+a^2)(r^2+a^2-b^2)\ ,$$

con b costante arbitraria. Finalmente

$$\pm(\theta-\theta_0)=\int^r\frac{bdr}{\sqrt{(r^2+a^2)(r^2+a^2-b^2)}}\ .$$

Il secondo membro, integrale ellittico, non è calcolabile, generalmente, in forma algebrico-logaritmica: ma per $b=0$ si trovano le generatrici ($\theta=$*costante*), e per $b=a$ un'altra interessante famiglia di geodetiche, facilmente deducibili dalle linee di curvatura (§ 308, b), giacchè si ha

$$\pm(\theta-\theta_0)=\int^r\frac{adr}{r\sqrt{r^2+a^2}}=\log\frac{\sqrt{r^2+a^2}-a}{r}\ ,$$

e finalmente

$$r=\frac{2a}{e^{\pm(\theta-\theta_0)}-e^{\mp(\theta-\theta_0)}}\ .$$

f) Cerchiamo, per finire, le assintotiche e le linee di curvatura della *superficie di Scherk* *

$$\operatorname{sen}\frac{z}{a}=\tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)\left(e^{\frac{y}{a}}-e^{-\frac{y}{a}}\right)\ .$$

Un calcolo facile dà

$$p\cos\frac{z}{a}=\tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\left(e^{\frac{y}{a}}-e^{-\frac{y}{a}}\right)\quad,\quad q\cos\frac{z}{a}=\tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)\left(e^{\frac{y}{a}}+e^{-\frac{y}{a}}\right),$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\cos\frac{z}{a}=\tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\left(e^{\frac{y}{a}}+e^{-\frac{y}{a}}\right)\ ;$$

quindi, introducendo gli angoli ξ ed η, legati ad x ed y mediante le relazioni

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\operatorname{tg}\xi\quad,\quad \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=1/\cos\xi\ ,\ ecc.\ ,$$

si ottiene $\mathfrak{L}=\operatorname{sen}\eta$, $\mathfrak{M}=\operatorname{sen}\xi$, vale a dire che ξ ed η misurano le inclinazioni dell'asse y e dell'asse x, rispettivamente, sul piano tangente. Ciò premesso, se inoltre si osserva che

$$dx=\frac{ad\xi}{\cos\xi}\quad,\quad dy=\frac{ad\eta}{\cos\eta}\ ,$$

* *Giornale di Crelle*, 1834, p. 200. Questa superficie è stata discussa (e sperimentalmente realizzata) da G. Van der Mensbrugghe nel *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 2ème série, vol. XXI, p 552.

si ha, in virtù di note formole (§ 287),

$$\mathrm{H}=0 \quad , \quad \mathrm{K}=-\frac{1}{a^2}\cos^2\xi\cos^2\eta \ .$$

La superficie è dunque *ad area minima*, ed i raggi principali di curvatura hanno, in ciascun punto, il valore assoluto $\frac{1}{4}a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\left(e^{\frac{y}{a}}+e^{-\frac{y}{a}}\right)$. Per la determinazione delle *linee di curvatura* conviene qui fare uso delle formole di Rodrigue (§ 299) scrivendo $dx/d\mathcal{L}=dy/d\mathcal{M}$, ossia $d\xi^2=d\eta^2$, d'onde $\xi\pm\eta=$ *costante*. Per la determinazione delle *assintotiche* bisogna innanzi tutto calcolare r, s, t. Dalle espressioni di p e q si deduce subito, derivando la prima rispetto ad x, la seconda rispetto ad y,

$$r=\frac{1+p^2}{a}\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{a} \quad , \quad t=\frac{1+q^2}{a}\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{a} \ ;$$

poi, ricordando che $\mathrm{H}=0$,

$$s=\frac{(1+q^2)r+(1+p^2)t}{2pq}=\frac{1+q^2}{pq}\,r=\frac{1+p^2}{pq}\,t \ .$$

Intanto si ha

$$\frac{1+p^2}{\cos^2\xi}=\frac{pq}{\mathrm{sen}\,\xi\,\mathrm{sen}\,\eta}=\frac{1+q^2}{\cos^2\eta} \ ,$$

e però l'equazione differenziale delle assintotiche (§ 304) diventa

$$d\xi^2+2\cot\xi\cot\eta\,d\xi d\eta+d\eta^2=0 \ .$$

Questa è facilmente riducibile ad un'altra già trattata (§ 388, f): basta porre $u=\cos\eta, v=\cos\xi$, per trovare

$$(1-u^2)dv^2+2uv\,du\,dv+(1-v^2)du^2=0 \ .$$

L'integrale generale è dunque

$$(1-u^2)\cos^2\alpha-2uv\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha+(1-v^2)\,\mathrm{sen}^2\alpha=0 \ ,$$

ossia

$$\mathrm{sen}\,\alpha\cos\xi+\cos\alpha\cos\eta=1 \ ,$$

con α costante *arbitraria*. L'integrale singolare $\cos(\xi\pm\eta)=0$ rappresenta una linea di curvatura, alla quale sono tangenti, in projezione sul piano xy, tutte le assintotiche. Essa è la linea di contatto della superficie col cilindro circoscritto alla superficie stessa parallelamente all'asse z; e consta di infinite curve uguali, situate nei piani $\cos\frac{z}{a}=0$. Ciascuna curva (come tutte le sezioni fatte con piani perpendicolari all'asse z) rassomiglia ad un'iperbole equilatera. Siccome, nel caso attuale, si ha $\mathcal{L}=\pm\cos\xi, \mathcal{M}=\mathrm{sen}\,\xi$, è chiaro che $d\xi$ è l'angolo di contingenza; e poichè da una precedente formola risulta che il raggio di curvatura è

$$\rho = \frac{a}{\operatorname{sen}\xi\cos\xi} = a(\operatorname{tg}\xi + \cot\xi) ,$$

si ha, per esprimere l'arco, $s = \int \rho d\xi = a \log \operatorname{tg}\xi$, e per conseguenza $\rho = a(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}})$. La curva che si considera è dunque definita da un'equazione intrinseca simile a quella (§ 368, *c*) de la *catenaria di eguale resistenza.*

Equazioni lineari.

392. Continuando a parlare delle equazioni fra due variabili, fermiamoci a considerare specialmente quelle che contengono linearmente la funzione incognita e le sue derivate, cioè le equazioni della forma

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}f_1(x) + y^{(n-2)}f_2(x) + \cdots + y'f_{n-1}(x) + yf_n(x) = f(x) , \tag{10}$$

le quali diconsi *lineari*. Quando $f(x)$ è 0, l'equazione si dice *incompleta*:

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}f_1(x) + y^{(n-2)}f_2(x) + \cdots + y'f_{n-1}(x) + yf_n(x) = 0 . \tag{11}$$

Questa gode evidentemente della proprietà che ogni suo integrale, cioè *ogni* y *soddisfacente alla* (11), *non cessa di soddisfare quando viene moltiplicato per una costante, o sommato con altra funzione analoga.* Ciò premesso è facile dimostrare che, *se* $y_1, y_2, \ldots$ *sono* n *integrali particolari,* linearmente indipendenti, *d'una equazione lineare, incompleta, di* n$^{\text{simo}}$ *ordine, l'integrale generale è*

$$y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \cdots + a_n y_n , \tag{12}$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono costanti arbitrarie. Infatti, limitandoci, per maggior chiarezza, al caso particolare $n = 3$, supponiamo che u, v, w siano tre funzioni, *linearmente indipendenti*, soddisfacenti all'equazione

$$y''' + y''\varphi(x) + y'\chi(x) + y\psi(x) = 0 , \tag{13}$$

dimodochè si abbia identicamente

$$u''' + u''\varphi + u'\chi + u\psi = 0 , \quad v''' + v''\varphi + v'\chi + v\psi = 0 , \quad w''' + w''\varphi + w'\chi + w\psi = 0 .$$

Per la coesistenza di queste quattro relazioni è necessario che ogni funzione y, soddisfacente alla (13), sia legata ad u, v, w dalla relazione

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & y''' \\ u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \end{vmatrix} = 0 ,$$

e ciò richiede (§ 137) che le quattro funzioni siano linearmente vincolate; ma nella relazione fra y, u, v, w non può mancare y, altrimenti sarebbero legati linearmente u, v, w, contrariamente all'ipotesi. Dunque $y = au + bv + cw$, con a, b, c *costanti* non solo, ma costanti *arbitrarie*, perchè l'osservazione fatta in principio permette di asserire che la funzione $y = au + bv + cw$ soddisfa effettivamente alla (13), qualunque siano a, b, c.

393. Quando è noto l'integrale generale dell'equazione (11), quello dell'equazione *completa* (10) si può ottenere con n quadrature, seguendo il procedimento detto da Lagrangia *variazione delle costanti arbitrarie*, tentando cioè di soddisfare alla (10) con la stessa forma (12), in cui si suppone che le a siano funzioni di x, da determinare convenientemente. Sia data, per esempio, l'equazione

$$y''' + y''\varphi(x) + y'\chi(x) + y\psi(x) = f(x) \ , \tag{14}$$

e si conoscano tre integrali particolari u, v, w, linearmente indipendenti, della corrispondente equazione incompleta (13). Cerchiamo di soddisfare alla (14) prendendo $y = au + bv + cw$, dove a, b, c sono *tre* funzioni incognite di x, alle quali possiamo sempre imporre *due* condizioni:

$$a'u + b'v + c'w = 0 \quad , \quad a'u' + b'v' + c'w' = 0 \ .$$

Ora, sostituendo in (14) le espressioni di y e delle sue derivate

$$y' = au' + bv' + cw' \quad , \quad y'' = au'' + bv'' + cw'' \ ,$$
$$y''' = au''' + bv''' + cw''' + a'u'' + b'v'' + c'w'' \ ,$$

si trova, come terza condizione, $a'u'' + b'v'' + c'w'' = f(x)$, sicchè a', b', c' si possono dedurre dal sistema

$$a'u + b'v + c'w = 0 \ , \ a'u' + b'v' + c'w' = 0 \ , \ a'u'' + b'v'' + c'w'' = f(x) \ .$$

Questo ammette una soluzione ben determinata, perchè, essendo u, v, w linearmente indipendenti per ipotesi, il determinante del sistema, cioè

$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix} \ ;$$

è diverso da zero. Trovate così le funzioni a', b', c', si ottengono poi, con semplici quadrature, le espressioni di a, b, c, e conseguentemente l'integrale generale y con *tre* costanti arbitrarie. Nel caso generale, immaginando che nella (12) si sostituisca ad ogni a una conveniente funzione di x, aumentata d'una costante arbitraria, si vede che *la forma dell'integrale generale dell'equazione* (10) *è*

$$y = y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n \,. \qquad (15)$$

Talvolta accade che sia già noto un integrale particolare y_0 dell'equazione *completa*, ed allora basta conoscere n integrali particolari (linearmente indipendenti) $y_1, y_2, \ldots$ della corrispondente equazione *incompleta*, per potere immediatamente scrivere l'integrale generale (15), senza che vi sia bisogno di ricorrere al metodo di Lagrangia. Infatti, posto $y = y_0 + z$ in (10), si vede subito che z deve soddisfare alla (11).

394. **Teorema**. *L'integrazione di un'equazione lineare dell'ordine* n, *quando si conoscono* m *integrali particolari, linearmente indipendenti, della corrispondente equazione incompleta, si può sempre ridurre all'integrazione di un'equazione lineare dell'ordine* n—m, *seguìta da* m *quadrature.*

Siano infatti $y_1, y_2, \ldots$ gli m integrali noti dell'equazione (11), e sia

$$\alpha = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \ldots y_1^{(m-1)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' \ldots y_2^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_m & y_m' & y_m'' \ldots y_m^{(m-1)} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

il loro wronskiano. Si cerchi, come nel precedente paragrafo, di soddisfare alla (10) prendendo $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_m y_m$, ed imponendo alle funzioni $a_1, a_2, \ldots$ la condizione che le loro derivate siano proporzionali ai complementi algebrici degli elementi dell'ultima verticale di α, dimodochè si abbia, chiamando z il coefficiente di proporzionalità,

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i' y_i = 0 \;,\; \sum_{i=1}^{i=m} a_i' y_i^{(\nu)} = 0 \quad (\text{per } \nu = 1, 2, \ldots, m-2) \;,\; \sum_{i=1}^{i=m} a_i' y_i^{(m-1)} = \alpha z \,.$$

È facile vedere che le derivate di $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_m y_m$ sono date dalle formole

$$y^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{i=m} a_i y_i^{(\nu)} \quad (\text{per } \nu < m) \quad , \quad y^{(m)} = \sum_{i=1}^{i=m} a_i y_i^{(m)} + \alpha z \,,$$

$$y^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{i=m} a_i y_i^{(\nu)} + \alpha z^{(\nu-m)} + \alpha_{1,\nu} z^{(\nu-m-1)} + \ldots + \alpha_{\nu-m,\nu} z \quad (\text{per } \nu > m) \,.$$

La loro sostituzione in (10) conduce ad un'equazione della forma

$$\alpha z^{(n-m)} + \alpha_1 z^{(n-m-1)} + \ldots + \alpha_{n-m} z = f(x) .$$

Conosciuto l'integrale generale di questa equazione lineare dell' ordine $n-m$, sono anche note le m funzioni a', dalle quali si può risalire alle a mediante m quadrature. La dimostrazione precedente non è che la naturale estensione di quella che ci ha condotti al risultato del § 393, corrispondente all'ipotesi $m=n$. Per $m=n-1$, ricordando (§ 387, *e*) ciò che si è detto per le equazioni lineari del primo ordine, si vede che *l'integrazione di un'equazione lineare dell'ordine* n, *quando si conoscono* n − 1 *integrali particolari, linearmente indipendenti, della corrispondente equazione incompleta, è riducibile ad* n + 1 *quadrature.*

395. **Esempii:** *a)* L' equazione lineare del *primo* ordine $y'+y\varphi(x)=f(x)$ si può sempre integrare, perchè dell'equazione incompleta $y'+y\varphi(x)=0$ si conosce l'integrale generale $x=ae^{-\int\varphi dx}$, ed il metodo di Lagrangia dà $a'e^{-\int\varphi dx}=f(x)$. Dunque, successivamente,

$$a=\int e^{\int\varphi dx} f dx \quad , \quad y=e^{-\int\varphi dx}\int e^{\int\varphi dx} f dx .$$

b) L' equazione del *secondo* ordine $y''+y'\varphi+y\psi=f$ si può integrare mediante tre quadrature quando è nota una funzione u, soddisfacente alla condizione $u''+u'\varphi+u\psi=0$. Infatti, posto $y=au$, l'equazione diventa $a''u+a'(2u+\varphi)=f$. Questa è del primo ordine in a', e se ne può ricavare a' con due quadrature, poi

$$y=u\int\frac{\int ue^{\int\varphi dx}.f dx}{u^2e^{\int\varphi dx}}dx .$$

c) È utile sapere che l'integrazione di qualunque equazione lineare *incompleta* del secondo ordine si può ridurre a quella di un' equazione di Riccati, seguita da una quadratura. Infatti la sostituzione $y=e^{\int z dx}$ trasforma

$$y''+y'\varphi+y\psi=0 \qquad \text{in} \qquad z'+z^2+z\varphi+\psi=0 .$$

Così le proprietà dell'equazione lineare spiegano quelle dell'equazione di Riccati, e viceversa.

d) Con quattro quadrature si deve poter integrare l'equazione del *terzo* ordine (14), quando si conoscono due funzioni u e v, soddisfacenti alla (13). Ed effettivamente, posto $y=au+bv$, $a'=-vz$, $b'=uz$, $\alpha=uv'-vu'$, si ha

$$y'=au'+bv' \quad , \quad y''=au''+bv''+\alpha z \quad , \quad y'''=au'''+bv'''+\alpha z'+2\alpha' z ;$$

l'equazione si trasforma in $\alpha z'+(2\alpha'+\alpha\varphi)z=f$, e con due quadrature se ne deduce

$$z = \frac{\int a e^{\int \varphi dx} f dx}{a^2 e^{\int \varphi dx}} ;$$

poi, con altre due quadrature, si giunge all'integrale generale

$$y = v\int uz\,dx - u\int vz\,dx .$$

396. **Equazioni a coefficienti costanti.** Quando i coefficienti della funzione incognita e delle sue derivate, nell'equazione (10), hanno valori costanti, è facile trovare n integrali particolari, linearmente indipendenti, dell'equazione incompleta (11), e per conseguenza, con n quadrature, l'integrale generale dell'equazione completa. Si tenti infatti di soddisfare con $y = e^{kx}$ alla (11); questa si muta in una condizione per k, detta *equazione caratteristica:*

$$\varphi(k) = k^n + k^{n-1} f_1 + k^{n-2} f_2 + \ldots + k f_{n-1} + f_n = 0 .$$

Se le radici $k_1, k_2, \ldots$ di $\varphi(k)$ sono tutte distinte, gli n integrali $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots$ sono linearmente indipendenti, perchè il loro wronskiano è il prodotto di e^{-xf_1} per *

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 \ldots k_1^{n-1} \\ 1 & k_2 & k_2^2 \ldots k_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & k_n & k_n^2 \ldots k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{i=n-1} (k_{i+1} - k_i)(k_{i+2} - k_i) \ldots (k_n - k_i) \gtrless 0 .$$

Dunque *l'integrale generale dell'equazione incompleta è*

$$y = a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} + \ldots + a_n e^{k_n x} , \tag{16}$$

dove $a_1, a_2, \ldots$ sono *costanti arbitrarie.* Si attribuisca invece alle a_i il significato di *funzioni*, le cui derivate, definite dal sistema

$$k_1^{\nu} a'_1 e^{k_1 x} + k_2^{\nu} a'_2 e^{k_2 x} + \ldots + k_n^{\nu} a'_n e^{k_n x} = \left| \begin{array}{ll} 0 & , \text{ per } \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2 , \\ f(x) & , \text{ per } \nu = n-1 , \end{array} \right.$$

siano $a'_i = e^{-k_i x} f(x) / \varphi'(k_i)$. Il metodo di Lagrangia conduce ad asserire che *l'integrale generale dell'equazione completa è*

$$y = \frac{e^{k_1 x}}{\varphi'(k_1)} \int e^{-k_1 x} f(x) dx + \frac{e^{k_2 x}}{\varphi'(k_2)} \int e^{-k_2 x} f(x) dx + \ldots + \frac{e^{k_n x}}{\varphi'(k_n)} \int e^{-k_n x} f(x) dx .$$

---

* *Analisi algebrica*, p. 14.

Quando poi l'equazione caratteristica ha radici multiple, il numero degli integrali particolari e^{kx} è inferiore all'ordine dell'equazione, e la formola (16) cessa di rappresentare l'integrale generale dell'equazione incompleta. Si tenti allora di soddisfare alla (11), in modo più generale, con $y=x^{\mu}e^{kx}$. Il primo membro diventa uguale al prodotto di e^{kx} per

$$x^{\mu}\varphi(k)+\mu x^{\mu-1}\varphi'(k)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^{\mu-2}\varphi''(k)+\ldots+\varphi^{(\mu)}(k) :$$

ed è chiaro che, se α è radice multipla dell'ordine r, vale a dire se

$$\varphi(\alpha)=0 \;,\; \varphi'(\alpha)=0 \;,\; \ldots \;,\; \varphi^{(r-1)}(\alpha)=0 \;,$$

l'ultima espressione si riduce identicamente a zero per $k=\alpha$ e per ciascuno dei valori $0,1,2,\ldots,r-1$ di μ. In tal modo si ottengono r integrali particolari: $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x},\ldots, x^{r-1}e^{\alpha x}$. Dunque, se l'equazione caratteristica ammette le radici $\alpha,\beta,\ldots$, degli ordini $r,s,\ldots$, rispettivamente, *l'integrale generale dell'equazione incompleta è*

$$y=(a_0+a_1x+\ldots+a_{r-1}x^{r-1})e^{\alpha x}+(b_0+b_1x+\ldots+b_{s-1}x^{s-1})e^{\beta x}+\ldots ,$$

dove le n costanti $a_0,a_1,\ldots,b_0,b_1,\ldots$ sono arbitrarie. Diciamo, per finire, che, ordinariamente, le equazioni che si presentano sono a coefficienti reali; e, siccome conviene avere y sotto forma reale, si cerca di fare sparire gli immaginarii osservando che alla somma $ae^{(\alpha+i\beta)x}+be^{(\alpha-i\beta)x}$, cui dà luogo, nell'espressione dell'integrale generale, ogni coppia $\alpha\pm i\beta$ di radici conjugate, si può dar la forma reale $(\mathrm{A}\cos\beta x+\mathrm{B}\operatorname{sen}\beta x)e^{\alpha x}$, prendendo reali le nuove costanti arbitrarie $\mathrm{A}=a+b, \mathrm{B}=i(a-b)$.

397. **Esercizii**: *a)* Integrare $y''+y=f(x)$. Qui $k^2+1=0$ è l'equazione caratteristica, e però due integrali particolari dell'equazione incompleta sono e^{ix}, e^{-ix}, ai quali, come si è detto, si possono sostituire $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$. Dunque l'integrale generale di $y''+y=0$ è $y=a\operatorname{sen}x+b\cos x$. Facendo variare le costanti si ottengono le equazioni

$$a'\operatorname{sen}x+b'\cos x=0 \quad , \quad a'\cos x-b'\operatorname{sen}x=f(x) \;,$$

dalle quali si deduce $a'=f(x)\cos x$, $b'=-f(x)\operatorname{sen}x$; poi

$$y=\operatorname{sen}x\int f(x)\cos x\,dx-\cos x\int f(x)\operatorname{sen}x\,dx \;.$$

b) Integrare $y'''=f(x)$. L'equazione caratteristica ammette 0 come radice tripla, e però l'integrale generale di $y'''=0$ è, come si poteva prevedere, $y=a+bx+cx^2$. La variazione delle costanti fornisce il sistema

$$a'+b'x+c'x^2=0 \quad , \quad b'+2c'x=0 \quad , \quad 2c'=f(x) \;,$$

da cui si ricava $a'={}^1/_2 x^2 f(x)$, $b'=-xf(x)$, $c'={}^1/_2 f(x)$. Dunque l'integrale generale di $y'''=f(x)$ è $y={}^1/_2\int x^2 f(x)dx - x\int xf(x)dx + {}^1/_2 x^2\int f(x)dx$. Questo è, del resto, un risultato quasi evidente, perchè, se si pone successivamente

$$\int f(x)dx=f_1(x) \quad , \quad \int f_1(x)dx=f_2(x) \quad , \quad \int f_2(x)dx=f_3(x) \; ,$$

si ottiene, integrando per parti,

$$\int xf(x)dx=xf_1(x)-f_2(x) \quad , \quad \int x^2 f(x)dx=x^2 f_1(x)-2xf_2(x)+2f_3(x) \; ,$$

e l'espressione trovata per l'integrale generale diventa $y=f_3(x)$.

c) Integrare $y^{\text{IV}}+2y'''+2y''+2y'+y=f(x)$. Le radici dell'equazione caratteristica sono $-1, -1, i, -i$. Dunque l'integrale generale dell'equazione incompleta è $y=(a+bx)e^{-x}+\alpha\,\text{sen}\,x+\beta\cos x$. Col metodo di Lagrangia si calcola poi l'integrale generale dell'equazione completa:

$$y={}^1/_2(1+x)e^{-x}\int e^x f(x)dx - {}^1/_2 e^{-x}\int xe^x f(x)dx$$
$$-{}^1/_2\,\text{sen}\,x\int f(x)\,\text{sen}\,x\,dx - {}^1/_2\cos x\int f(x)\cos x\,dx \; .$$

Data $f(x)$, ed eseguite le quattro quadrature indicate, si riesce a porre y sotto la forma (15), ossia a portare in evidenza un integrale particolare y_0, che si può ridurre alla più semplice espressione togliendone tutte le parti soddisfacenti all'equazione incompleta. Così, per esempio, per $f(x)=e^{-x}$ si ottiene $y_0={}^1/_4 x^2 e^{-x}$.

d) Integrare $y=xy'+x^2y''$. Se tentiamo di soddisfare a questa equazione con $y=x^n$, troviamo che si deve avere $1=n+n(n-1)$, cioè $n=\pm 1$. Dunque l'integrale generale è $y=ax+b/x$. Se poi l'equazione da integrare è

$$y=xy'+x^2y''+f(x) \; ,$$

il metodo di Lagrangia dà $y={}^1/_2 x\int f(x)d\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\int f(x)dx$.

e) Per integrare $y+xy'+x^2y''=x$ si ponga, come precedentemente, $y=x^n$ nell'equazione incompleta. Si ottiene $n=\pm i$; e poichè

$$x^{\pm i}=e^{\pm i\log x}=\cos\log x \pm i\,\text{sen}\log x \; ,$$

si vede che $\text{sen}\log x$ e $\cos\log x$ sono due integrali particolari. Siccome poi un integrale particolare dell'equazione completa si scorge immediatamente, ed è ${}^1/_2 x$, si può subito affermare che l'integrale generale dell'equazione proposta è

$$y={}^1/_2 x + a\,\text{sen}\log x + b\cos\log x \; .$$

f) In modo analogo si può integrare $x^2y''-(2\mu-1)xy'+\mu^2y=0$. Ponendo $y=x^n$ si riconosce che vi è un sol valore possibile per n, cioè $n=\mu$; ma la conoscenza dell'integrale particolare x^μ è sufficiente (§ 395, *b*) per trovare l'integrale generale. Posto $y=x^\mu z$, l'equazione diventa $xz''+z'=0$, e dà $z=a+b\log x$.

Dunque $y=x^{\mu}(a+b\log x)$. A questo risultato si giunge anche mediante un cambiamento di variabile indipendente: $x=e^t$. Siccome (§ 159, *a*)

$$y'=e^{-t}\frac{dy}{dt}\quad,\quad y''=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

l'equazione diventa

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\mu\frac{dy}{dt}+\mu^2y=0\,.$$

Questa ha i coefficienti costanti, e la sua equazione caratteristica ammette μ come radice doppia. Dunque il suo integrale generale ha la forma $(a+bt)e^{\mu t}$, e però l'integrale generale dell'equazione proposta è $y=x^{\mu}(a+b\log x)$.

g) Similmente, per integrare $(1-x^2)y''-xy'+y=0$, si ponga $x=\cos t$, dimodochè

$$y'=-\frac{1}{\operatorname{sen} t}\frac{dy}{dt}\quad,\quad y''=-\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}\,.$$

L'equazione si trasforma in $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$, e però ammette gli integrali particolari $\cos t=x, \operatorname{sen} t=\sqrt{1-x^2}$. Dunque l'integrale generale è $y=ax+b\sqrt{1-x^2}$.

h) Le sostituzioni d'una variabile indipendente ad un'altra non sono sempre fatte a caso. Esse vengono spesso determinate dal proposito di ottenere una data semplificazione nell'equazione che si considera. Così, nell'equazione

$$(1+x^2)y''+xy'=\mu^2y\ ,$$

trasformata in

$$(1+x^2)t'^2\frac{d^2y}{dt^2}+\left\{(1+x^2)t''+xt'\right\}\frac{dy}{dt}=\mu^2y\ ,$$

si può fare sparire il termine in dy/dt prendendo $\dfrac{t''}{t'}+\dfrac{x}{1+x^2}=0$, cioè

$$t'=1/\sqrt{1+x^2}\ ,$$

e conseguentemente $t=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Mediante questa sostituzione l'equazione proposta diventa $d^2y/dt^2=\mu^2y$, ed ha per integrale generale $ae^{\mu t}+be^{-\mu t}$. Quindi, osservando che $e^t=x+\sqrt{1+x^2}, e^{-t}=-x+\sqrt{1+x^2}$, si vede che l'integrale generale cercato è

$$y=a(x+\sqrt{1+x^2})^{\mu}+b(-x+\sqrt{1+x^2})^{\mu}\ .$$

i) Per integrare l'equazione $y={}^1/_2y'+xy''$, considerata da Legendre, si prenda come variabile indipendente $x=t^2$, e si osservi che

$$y'=\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\quad,\quad y''=-\frac{1}{4t^3}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{4t^2}\frac{d^2y}{dt^2}\,.$$

L'equazione diventa $d^2y/dt^2 = 4y$, e però il suo integrale generale è

$$y = ae^{2\sqrt{x}} + be^{-2\sqrt{x}} .$$

Lepaige ha trovato che, più generalmente, l'equazione $y = my' + xy''$ è integrabile per infiniti valori di m. Si può infatti (§ 395, c) ridurla, ponendo $y = e^{\int z dx}$, ad un'equazione di Riccati: $x(z' + z^2) + mz = 1$. Se si pone $z = uv$, e si determina v in modo che sia $xv' + mv = 0$ (ciò si ottiene prendendo $v = x^{-m}$), si trova che u deve soddisfare all'equazione $xv(u' + vu^2) = 1$, cioè $u' + u^2x^{-m} = x^{m-1}$. Posto $x = t^\mu$, l'ultima equazione si trasforma in

$$\frac{du}{dt} + \mu u^2 t^{\mu(1-m)-1} = \mu t^{\mu m-1} ,$$

poi $\left(\text{supponendo } m \gtrless 1 \text{ e prendendo } \mu = \dfrac{1}{1-m}\right)$ in $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u^2}{1-m} = \dfrac{t^n}{1-m}$, con $n = -\dfrac{1-2m}{1-m}$, e conseguentemente $\dfrac{n}{2n+4} = m - {}^1/_2$. Dunque (§ 388, h) l'equazione proposta è integrabile per

$$m = \pm {}^1/_2 \;,\; \pm {}^3/_2 \;,\; \pm {}^5/_2 \;,\; \pm {}^7/_2 \;,\; \pm {}^9/_2 \;, \ldots .$$

j) Tentiamo l'integrazione dell'equazione *non* lineare

$$y'' + 3y' + 2(y - y^3) = 0 ,$$

seguendo la via indicata da Mansion. Se si pone $y' + y = z$, l'equazione diventa $z' + 2z = 2y^3$. Il metodo della variazione delle costanti conduce ancora a porre $y = ue^{-x}$, $z = ve^{-2x}$, e le funzioni u, v debbono soddisfare alle condizioni

$$u' = ve^{-x} , \; v' = 2u^3e^{-x} .$$

Eliminando x si ottiene $vdv = 2u^3du$. Dunque $v^2 = u^4 - a^4$. Poi, sostituendo v in $u' = ve^{-x}$ ed integrando,

$$e^{-x} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{u^4 - a^4}} .$$

Nel secondo membro comparisce un integrale ellittico. Se sapessimo esprimere u in funzione di x, avremmo anche l'espressione dell'integrale generale ue^{-x}. Ad ogni modo possiamo sempre ottenere infiniti integrali particolari supponendo $a = 0$, nella quale ipotesi si ha

$$e^{-x} = c \pm \frac{1}{u} \;,\quad y = \frac{\pm 1}{1 - ce^x} .$$

In modo analogo si può trattare, più generalmente, l'equazione

$$y'' + (n + 1)y' + n(y - y^{2n-1}) = 0 ,$$

ed ottenerne l'integrale generale in forma esplicita, finita, per tutti i valori interi di $1/n$. Si trova, per esempio, che l'integrale generale dell'equazione $y^4 - y^3 y'' = 1$ è

$$y^2 = ae^{2x} + be^{-2x} \pm \sqrt{1 + 4ab}\ ,$$

come si può stabilire anche per altra via (§ 387, *d*).

k) L'uso delle serie è assai utile per l'integrazione di certe equazioni differenziali. Per esempio l'equazione $y'' + \frac{4}{x} y' + n^2 y = 0$, che si presenta in Meccanica, si può integrare ricorrendo alla serie

$$f_\nu(x) = 1 - \frac{x^2}{2(\nu+1)} + \frac{x^4}{2.4.(\nu+1)(\nu+3)} - \frac{x^6}{2.4.6.(\nu+1)(\nu+3)(\nu+5)} + \dots .$$

Infatti, se si osserva che $f_\nu''(x) + \frac{\nu}{x} f_\nu'(x) + f_\nu(x) = 0$, e se si pone, nell'equazione proposta, $y = x^\mu f_\nu(nx)$, si trova

$$f_\nu''(nx) + \frac{2\mu+4}{nx} f_\nu'(nx) + \left(1 + \frac{\mu(\mu+3)}{n^2 x^2}\right) f_\nu(nx) = 0\ .$$

Questa non può coincidere con la relazione ottenuta precedentemente se non è $\mu(\mu+3) = 0, \nu = 2\mu + 4$. Dunque dev'essere $\mu = 0, \nu = 4$, o $\mu = -3, \nu = -2$; e però l'integrale generale cercato è $y = af_4(nx) + bx^{-3} f_{-2}(nx)$. Del resto le funzioni f_{-2} ed f_4 si possono esprimere semplicemente in forma finita. Per questo si osservi che $f_{\nu+2}(x) = -\frac{\nu+1}{x} f_\nu'(x)$. Intanto si vede che (§ 91, *a*)

$$f_0(x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots = \cos x\ .$$

Ne segue

$$f_{-2}(x) = 1 + \int_0^x x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x\ ;$$

poi

$$f_2(x) = -\frac{1}{x} f_0'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\ , \quad f_4(x) = -\frac{3}{x} f_2'(x) = \frac{3 \operatorname{sen} x}{x^3} - \frac{3 \cos x}{x^2}\ .$$

Finalmente possiamo scrivere l'integrale generale sotto la forma seguente:

$$y = \frac{a}{x^3}(\operatorname{sen} nx - nx \cos nx) + \frac{b}{x^3}(\cos nx + nx \operatorname{sen} nx)\ .$$

l) Importante è la *serie ipergeometrica* *

$$f(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha(1+\alpha).\beta(1+\beta)}{1.2.\gamma(1+\gamma)} x^2 + \frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha).\beta(1+\beta)(2+\beta)}{1.2.3.\gamma(1+\gamma)(2+\gamma)} x^3 + \dots ,$$

* **Vedi l'*Algebra superiore* di Novi, p. 286, o il *Cours d'Analyse* di Jordan, t. I, p. 154.**

che soddisfa, come facilmente si verifica, all'equazione differenziale (di Gauss)

$$(x - x^2)y'' + \{\gamma - (1 + \alpha + \beta)x\}y' = \alpha\beta y\ .$$

Se si cerca di soddisfare a questa equazione più generalmente con

$$y = x^{\mu} f(\alpha', \beta', \gamma', x)\ ,$$

si trova che si deve avere, o $\mu = 0$, $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$, o pure $\mu = 1 - \gamma$, $\alpha' = 1 + \alpha - \gamma$, $\beta' = 1 + \beta - \gamma$, $\gamma' = 2 - \gamma$. Dunque l'integrale generale è

$$y = af(\alpha, \beta, \gamma, x) + bx^{1-\gamma} f(1 + \alpha - \gamma, 1 + \beta - \gamma, 2 - \gamma, x)\ .$$

È utile sapere che la serie ipergeometrica racchiude come casi particolari gli sviluppi di varie importanti funzioni. Così, per $\beta = \gamma$, o $\alpha = \gamma = 1$, o $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = 2$, si trovano le funzioni $(1 - x)^{-\alpha}$, $e^{\beta x}$, $-\frac{1}{x}\log(1 - x)$. Si osservi, per finire, che i due integrali particolari precedentemente ottenuti si confondono in uno quando $\gamma = 1$; ma è noto che quest'unico integrale è sufficiente per la conoscenza dell'integrale generale. Così, per esempio, per $\beta = 1$ l'equazione diventa

$$(x - x^2)y'' + \{1 - (2 + \alpha)x\}y' = \alpha y\ ,$$

ed ammette l'integrale particolare $(1 - x)^{-\alpha}$; poi un calcolo facile (§ 395, b) mostra che il suo integrale generale è

$$y = a(1 - x)^{-\alpha} + b\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1 - x}{1 + \alpha} + \frac{(1 - x)^2}{2 + \alpha} + \frac{(1 - x)^3}{3 + \alpha} + \dots\right),$$

purchè (ben s'intende) il secondo membro non sia privo di significato.

Equazioni fra più variabili.

398. **Equazioni ai differenziali totali.** Invece di $udx + vdy = 0$ supponiamo data l'equazione

$$udx + vdy + wdz = 0\ , \tag{17}$$

in cui u, v, w sono funzioni *note* di x, y, z. Evidentemente, se si considera una delle tre variabili, per esempio z, come funzione delle altre due (indipendenti), la (17) si scinde in

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}\ , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w}\ , \tag{18}$$

d'onde è facile dedurre che *le funzioni* u, v, w *non possono essere date* *ad arbitrio.* Infatti, essendo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{w} + \frac{v}{w}\frac{\partial}{\partial z}\frac{u}{w} \ , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{v}{w} + \frac{u}{w}\frac{\partial}{\partial z}\frac{v}{w} \ ,$$

cioè

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{w}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{w^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{w^2}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv}{w^3}\frac{\partial w}{\partial z} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{w}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{w^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{w^2}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{w^3}\frac{\partial w}{\partial z} \ ,$$

si vede, eguagliando (§ 130) fra loro queste espressioni, che si deve avere

$$u\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \ . \tag{19}$$

È questa una condizione *necessaria* per l'esistenza d'una relazione fra le variabili x, y, z, i cui differenziali totali siano vincolati dalla (17). Per dimostrare che la condizione stessa è anche *sufficiente*, vogliamo far vedere che, supponendola soddisfatta, è possibile l'integrazione della (17), o del sistema equivalente formato dalle (18). La seconda equazione del sistema si può considerare come un'equazione differenziale *ordinaria*, del primo ordine, fra le variabili y e z; e però, designando con $\varphi(x)$ una funzione *arbitraria*, il suo integrale generale ha la forma

$$f(x, y, z) = \varphi(x) \ , \tag{20}$$

giacchè in questa integrazione x si deve trattare come una costante, da cui pur dipendono v e w. Intanto si noti che, se si deriva la (20) mantenendo costante x, si deve ricadere sull'equazione differenziale da cui si è partiti, e però si ha

$$\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{w}\frac{\partial f}{\partial z} = \mu \ ,$$

dove μ è una conveniente funzione di x, y, z. Ciò premesso, se si vuole che sia soddisfatta anche la prima delle (18), bisogna determinare φ in modo che, derivando la (20) nell'ipotesi di y costante, si abbia

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \mu u \ , \tag{21}$$

per la qual cosa occorre (e basta) che $\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u$ sia una funzione della sola x. Tutto si riduce dunque a far vedere che, se la condizione (19) è soddisfatta, è nulla la derivata di $\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u$ rispetto ad y, presa considerando

z come una funzione di x e di y, definita dall'equazione (20). In altri termini

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) - \frac{v}{w}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = 0 .$$

Intanto si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = \frac{\partial \mu v}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial y} , \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = \frac{\partial \mu w}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial z} ;$$

quindi l'ultima condizione, se vi si aggiunge il termine

$$\frac{\partial \mu w}{\partial y} - \frac{\partial \mu v}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

moltiplicato per u, diventa

$$u\left(\frac{\partial \mu w}{\partial y} - \frac{\partial \mu v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial \mu u}{\partial z} - \frac{\partial \mu w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial \mu v}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial y}\right) = 0 ,$$

e si riduce poi facilmente alla condizione (19), perchè il primo membro è uguale al primo membro di (19), moltiplicato per μ, più

$$u\left(w\frac{\partial \mu}{\partial y} - v\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) + v\left(u\frac{\partial \mu}{\partial z} - w\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) + w\left(v\frac{\partial \mu}{\partial x} - u\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = 0 .$$

Soddisfatta la condizione (19), si può affermare che la relazione (20), in cui si pone per $\varphi(x)$ l'espressione che si deduce dalla (21) mediante una quadratura, è l'integrale dell'equazione (17). Osserviamo, per finire, che quando la (17) è integrabile, il primo membro, moltiplicato per una conveniente funzione di x, y, z, è un differenziale esatto (*cfr.* § 342), perchè, se alla (20) si dà la forma $\Phi(x, y, z) = costante$ (facendo passare tutto in un membro), si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \varphi'(x) = \mu u , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \mu v , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = \mu w ,$$

e però $\mu(udx + vdy + wdz) = d\Phi$. Geometricamente la questione da noi trattata equivale (*cfr.* § 381) a fissare *a priori* una tripla infinità di piani, ed a costruire una famiglia di superficie, tangenti ai piani stessi in punti prestabiliti. Dalle considerazioni precedenti risulta che il problema è generalmente impossibile. Ciò avviene perchè si va in cerca di ***superficie***; ma si noti che esistono sempre infinite *linee* soddisfacenti alle medesime condizioni, anche quando non è soddisfatta la (19). Infatti l'eliminazione di z fra la (17) ed una relazione *arbitraria* $\varphi(x, y, z) = 0$ conduce ad una equazione differenziale del primo ordine fra *due* variabili, e questa ammette sempre una semplice infinità di integrali.

390. **Equazioni ordinarie simultanee.** Ora si domandi quali relazioni debbono intercedere fra tre variabili x, y, z, affinchè i loro differenziali siano proporzionali a funzioni *note* di x, y, z:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} . \qquad (22)$$

Geometricamente ciò equivale a fissare *a priori* le tangenti, in tutti i punti dello spazio, a curve incognite, ed è facile intuire (*cfr.* § 381) che tali curve sono in numero doppiamente infinito, sicchè le loro equazioni, costituenti il sistema integrale delle (22), debbono avere la forma

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \quad , \quad G(x, y, z, a, b) = 0 , \qquad (23)$$

con a e b costanti arbitrarie. Ed effettivamente le (22) altro non sono che due equazioni differenziali *ordinarie*, del *primo* ordine, che in forma più generale si possono scrivere così:

$$f(x, y, z, y', z') = 0 \quad , \quad g(x, y, z, y', z') = 0 . \qquad (24)$$

Da queste equazioni ricaviamo $z = \varphi(x, y, y')$ e $z' = \psi(x, y, y')$. Eguagliando la seconda espressione alla derivata della prima si ottiene una relazione fra x, y, y', y'', cioè un'equazione differenziale del *secondo* ordine fra due sole variabili, x ed y; ed integrando questa equazione si giunge ad avere y espresso in funzione di x e di *due* costanti arbitrarie, a e b; quindi, sotituendo y in $z = \varphi(x, y, y')$, si riesce ad esprimere anche z in funzione di x, a, b. Così le (24), o le (22), sono integrate. Bisogna poi notare che alle (24), ricavandone $y' = dy/dx$ e $z' = dz/dx$, si può sempre dare la forma (22). Similmente, se fra *quattro* variabili x, y, z, t sono date *tre* equazioni differenziali ordinarie, del primo ordine, immaginiamo che se ne ricavino le derivate di x, y, z rispetto a t, e siano $x' = u, y' = v, z' = w$, con u, v, w funzioni *note* di x, y, z, t. Dalla prima ($x' = u$) si ricavi $y = \varphi(t, x, z, x')$ per sostituirlo nelle altre due, le quali in tal modo prendono la forma

$$f(t, x, z, x', z', x'') = 0 \quad , \quad g(t, x, z, x', z') = 0 .$$

Da queste si ricavino $z = \psi(t, x, x', x'')$ e $z' = \chi(t, x, x', x'')$, e si uguagli la seconda espressione alla derivata della prima. La relazione che in tal modo si ottiene fra t, x, x', x'', x''' è un'equazione differenziale del *terzo* ordine, la cui integrazione conduce ad esprimere x in funzione di t e di tre costanti arbitrarie. Sostituendo x in $z=\psi(t,x,x',x'')$, poi x e z in $y=\varphi(t,x,z,x')$, si ottengono analoghe espressioni per y e z. In generale, dato un sistema di n equazioni differenziali ordinarie, del primo ordine, fra $n+1$ variabili,

$$\frac{dx}{u}=\frac{dx_1}{u_1}=\frac{dx_2}{u_2}=\ldots=\frac{dx_n}{u_n},$$

si può ridurre l'integrazione, mediante successive eliminazioni di $n-1$ variabili, all'integrazione d'una sola equazione differenziale, dell'ordine n, fra due variabili, ed ottenerne così il sistema integrale sotto la forma di n equazioni simultanee

$$F_i(x,x_1,x_2,\ldots,x_n,a_1,a_2,\ldots,a_n)=0 \quad , \quad (i=1,2,3,\ldots,n)$$

con n costanti arbitrarie. Grazie alla presenza di queste costanti *un sistema di* n *funzioni, obbligate a prendere valori prescritti per un dato valore della variabile indipendente, si può considerare come definito da* n *equazioni differenziali simultanee del primo ordine.*

400. **Equazioni alle derivate parziali.** La più semplice equazione alle derivate parziali (§ 383) è quella che vincola le derivate parziali p e q d'una funzione incognita z di x e di y alla funzione stessa ed alle variabili indipendenti. Noi vogliamo qui occuparci più particolarmente di quelle equazioni che contengono linearmente p e q, e che per tale ragione diconsi *lineari*. Esse hanno la forma

$$up+vq=w \quad , \tag{25}$$

con u,v,w funzioni *note* di x,y,z. Domandare quali son tutte le funzioni z soddisfacenti ad una simile relazione equivale geometricamente a domandarsi quali superficie sono in ciascun punto (x,y,z) toccate da una retta condotta per questo punto nella direzione (u,v,w), giacchè la (25) si può considerare appunto come la condizione di ortogonalità fra la direzione *nota* (u,v,w) e quella $(p,q,-1)$ della normale (§ 260) ad una delle superficie da costruire. È ovvio che ognuna di queste superficie è il luogo d'una infinità di linee, scelte nella doppia infinità (23), e l'insieme di tutte le possibili superficie si potrà, per conseguenza, rappresentare vincolando *arbitrariamente* tra loro le costanti nelle equazioni (23), sicchè l'equazione di qualunque superficie, soddisfacente alla (25), si potrà ottenere eliminando a e b fra le (23) ed una relazione arbitraria $\omega(a,b)=0$. Questa previsione sarà presto confermata dal calcolo. Sia $f(x,y,z)=0$ una qualsiasi relazione, atta a definire z in funzione di x ed y, in guisa da soddisfare alla (25). Sostituendo $p = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}$, $q = -\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}$ nella (25), questa diventa

$$u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0 , \tag{26}$$

equazione lineare *ed omogenea*, che si può subito integrare appena sia noto il sistema integrale delle (22). Supponiamo infatti risolute le (23) rispetto alle costanti arbitrarie:

$$\varphi(x, y, z) = a \quad , \quad \psi(x, y, z) = b . \tag{27}$$

Qui notiamo che le funzioni φ e ψ sono tra loro indipendenti, perchè, se ciò non fosse, fissato per a un valore, non sarebbe più arbitrario il valore di b. Orbene la (26) è soddisfatta tanto per $f = \varphi$, quanto per $f = \psi$, giacchè la differenziazione delle (27), e la sostituzione di u, v, w alle quantità proporzionali dx, dy, dz, ci dà

$$u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad , \quad u\frac{\partial \psi}{\partial x} + v\frac{\partial \psi}{\partial y} + w\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 . \tag{28}$$

Ciò premesso, qualunque sia la funzione f soddisfacente alla (26), per la compatibilità di questa equazione con le (28) si richiede che sia

$$\frac{\partial(f, \varphi, \psi)}{\partial(x, y, z)} = 0 ,$$

e per conseguenza (§ 180) che tra f, φ, ψ interceda una relazione. Questa involge necessariamente f, altrimenti vi sarebbe un legame tra φ e ψ. Dunque $f = \omega(\varphi, \psi)$. Quanto ad ω, esso è il simbolo d'una funzione arbitraria, perchè, comunque si prenda ω, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y} , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial z} ;$$

quindi

$$\sum u\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\sum u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \psi}\sum u\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 ,$$

sicchè la (26) è soddisfatta. Ed ora si vede che *per soddisfare alla* (25) *basta porre* $\omega(\varphi, \psi) = 0$. Più generalmente, l'integrazione dell'equazione lineare ad n variabili *indipendenti*

$$u_1\frac{\partial x}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial x}{\partial x_2} + \cdots + u_n\frac{\partial x}{\partial x_n} = u \tag{29}$$

si riduce subito all'integrazione dell'equazione lineare *ed omogenea* ad $n+1$ variabili *indipendenti*

$$u_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+u_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0\ , \qquad (30)$$

e per integrar questa basta integrare il sistema di n equazioni ordinarie

$$\frac{dx}{u}=\frac{dx_1}{u_1}=\frac{dx_2}{u_2}=\dots=\frac{dx_n}{u_n}\ ,$$

scrivendone il sistema integrale sotto la forma

$$\varphi_i(x\,,x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)=costante\ , \qquad (i=1\,,2\,,3\,,\dots,n).$$

Si soddisfa alla (30) nel modo più generale con $f=\omega(\varphi_1\,,\varphi_2\,,\dots\varphi_n)$, ed alla (29) ponendo $\omega(\varphi_1\,,\varphi_2\,,\dots,\varphi_n)=0$, dove ω è simbolo di *funzione arbitraria*.

401. È utile sapere che la conoscenza d'un integrale particolare $f=\varphi$ dell'equazione (26) permette di semplificare l'integrazione riducendo da tre a due il numero delle variabili indipendenti. Poichè φ contiene almeno una delle tre variabili, si può sempre supporre che φ dipende da z, cambiando, se occorre, i nomi delle variabili; e per conseguenza si può sostituire φ a z come variabile indipendente. Ora, se si distinguono mediante parentesi le derivate parziali, prese rispetto al nuovo sistema $x\,,y\,,\varphi$ di variabili, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ ,$$

e così l'equazione (26) si trasforma in $u\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$. Il problema si trova in tal modo ridotto all'integrazione (fatta trattando φ come una costante) di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine fra due variabili, $y'=\chi(x\,,y\,,\varphi)$, della quale *basterà determinare un integrale particolare* per giungere alla conoscenza d'un altro integrale ψ della (26). Più generalmente, la conoscenza di ν integrali particolari, indipendenti, dell'equazione (30), ossia di ν funzioni $\varphi_1\,,\varphi_2\,,\dots$ soddisfacenti alla (30), e tali che nessuna di esse sia funzione delle altre, permette di trasformare la (30) in un'equazione analoga con $n-\nu+1$ variabili indipendenti, alla quale si giunge assumendo come variabili $\varphi_1\,,\varphi_2\,,\dots,\varphi_\nu$ al posto di ν variabili x.

402. Per integrare, secondo Lagrangia, un'equazione qualunque alle derivate parziali prime, con due variabili indipendenti,

$$f(x, y, z, p, q) = 0 , \tag{31}$$

si cerchi di ottenere un'altra relazione $g(x, y, z, p, q) = 0$, per potere, aggregandola alla (31), dedurne p e q in funzione di x, y, z, ed in seguito determinare z mercè l'integrazione (§ 398) dell'equazione ai differenziali totali $dz = pdx + qdy$. La derivazione parziale (rispetto ad x, y, z) delle equazioni $f = 0$ e $g = 0$ dà

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0 ;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0 .$$

Se da questo sistema, eliminandone $\partial p/\partial x$ e $\partial q/\partial y$, si deducono le altre quattro derivate parziali di p e q, per sostituirle nella relazione

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z} ,$$

necessaria e sufficiente (§ 342) per l'integrabilità di $dz = pdx + qdy$, si trova l'equazione lineare ed omogenea alle derivate parziali prime, con cinque variabili indipendenti,

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial y} + \left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial g}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial p} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial q} , \tag{32}$$

che si sa (§ 400) integrare mediante quattro equazioni differenziali simultanee del primo ordine. Del resto, secondo un'importante osservazione di Charpit, che verrà giustificata fra breve, *basta determinare un solo* integrale g della (32), con *una* costante arbitraria, per potere poi, integrando $dz = pdx + qdy$, arrivare alla conoscenza della *più generale* funzione $z = F(x, y, a, b)$ soddisfacente alla (31), purchè si convenga di considerare a e b sia come costanti arbitrarie, sia come variabili soggette a certe condizioni. Suppongasi, per maggiore chiarezza, che la (31) sia stata messa sotto la forma $z = \Phi(x, y, p, q)$; sia $z = G(x, y)$ una funzione qualunque soddisfacente a questa equazione, sicchè, identicamente,

$$G = \Phi\left(x, y, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right) .$$

D'altra parte si determinino a e b mediante le equazioni

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x} , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} . \tag{33}$$

Se si riflette che l'equazione proposta dev'essere soddisfatta indipendentemente da a e b quando per z vi si pone $F(x, y, a, b)$, si vede subito che

$$F(x, y, a, b) = \Phi\left(x, y, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \Phi\left(x, y, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right) = G(x, y) .$$

Adunque l'espressione $F(x, y, a, b)$ chiude in sè tutte le possibili funzioni z soddisfacenti all'equazione proposta, e per questa ragione si chiama l'*integrale completo* dell'equazione stessa. Intanto la derivazione parziale dell'identità $F = G$, se si tien conto delle (33), mostra che si deve avere

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0 . \tag{34}$$

Queste relazioni, identicamente vere per a e b costanti, sono soddisfatte anche quando a e b sono convenienti funzioni di x e di y, indipendenti o arbitrariamente vincolate fra loro. Nel primo caso il determinante $\dfrac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)}$ è diverso da zero, e però si deve avere $\partial F/\partial a = 0$, $\partial F/\partial b = 0$, d'onde si ricavano per a e b due funzioni, tra loro distinte, la cui sostituzione in $z = F(x, y, a, b)$ conduce alla conoscenza d'un integrale $z = \varphi(x, y)$, detto *integrale singolare*. Nella seconda ipotesi, posto $b = \omega(a)$, le (34) si riducono all'unica condizione $\dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\partial F}{\partial b}\omega'(a) = 0$, e da queste due uguaglianze si ricavano per a e b due espressioni, includenti un simbolo di funzione arbitraria; sostituendole in $z = F(x, y, a, b)$ si trova ciò che si suol chiamare l'*integrale generale* dell'equazione proposta *.

---

* Per avere esercizii e più ampii dettagli su questa importante teoria, il lettore potrà consultare gli speciali trattati di Forsyth e di Goursat.

APPENDICE

La funzione di Weierstrass.

403. La funzione, alla quale si è accennato in fine del § 41, è

$$f(x) = \cos\pi x + b\cos\pi a x + b^2\cos\pi a^2 x + b^3\cos\pi a^3 x + \dots$$

per convenienti valori di a e di b. È noto che, per $|b| < 1$, la serie (§ 78) converge uniformemente, e rappresenta (§ 81) una funzione *continua*. Ci proponiamo di far vedere che, malgrado la continuità, $f(x)$ è *priva di derivata* per qualsivoglia valore di x. Determiniamo anzitutto, dopo aver fissato x, una successione $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ di numeri *interi*, positivi o negativi, tali che le differenze

$$x - \alpha_0 \quad , \quad ax - \alpha_1 \quad , \quad a^2x - \alpha_2 \quad , \quad a^3x - \alpha_3 \quad , \dots$$

siano tutte maggiori di $-{}^1/_2$, non maggiori di ${}^1/_2$: basta prendere $-\alpha_n$ uguale al massimo intero contenuto in ${}^1/_2 - a^n x$. Poniamo

$$x_n = \frac{\alpha_n - 1}{a^n} \quad , \quad x'_n = \frac{\alpha_n + 1}{a^n} \, ,$$

dimodochè

$$ {}^1/_2 < a^n(x - x_n) \leqq {}^3/_2 \quad , \quad {}^1/_2 \leqq a^n(x'_n - x) < {}^3/_2 \, .$$

Se $a \leqq 3$, si ha

$$x - x_{n+1} \leqq \frac{3}{2a^{n+1}} \leqq \frac{1}{2a^n} < x - x_n \, ,$$

e però

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots \quad , \quad \lim_{n=\infty} x_n = x \, .$$

Similmente

$$x'_0 > x'_1 > x'_2 > x'_3 > \dots \quad , \quad \lim_{n=\infty} x'_n = x \, .$$

Ora si considerino successivamente i due rapporti incrementali, sinistro e destro:

$$\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} \quad , \quad \frac{f(x'_n) - f(x)}{x'_n - x} \, .$$

Il rapporto incrementale sinistro

$$\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}=\sum_0^\infty b^\nu \frac{\cos(\pi a^\nu x)-\cos(\pi a^\nu x_n)}{x-x_n}$$

può scindersi in

$$\sum_0^{n-1}(ab)^\nu \frac{\cos(\pi a^\nu x)-\cos(\pi a^\nu x_n)}{a^\nu(x-x_n)}+\sum_0^\infty b^{n+\nu}\frac{\cos(\pi a^{n+\nu}x)-\cos(\pi a^{n+\nu}x_n)}{x-x_n}. \quad (1)$$

Per la prima somma si osservi che

$$\frac{\cos(\pi a^\nu x)-\cos(\pi a^\nu x_n)}{a^\nu(x-x_n)}=-\pi\,\mathrm{sen}\left(\pi a^\nu\frac{x+x_n}{2}\right)\frac{\mathrm{sen}\left(\pi a^\nu\frac{x-x_n}{2}\right)}{\pi a^\nu\frac{x-x_n}{2}}.$$

Siccome i valori assoluti di $\mathrm{sen}\,x$ e $\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$ non superano mai l'unità, si vede che il valore assoluto dell'ultima espressione non supera π. Ne segue, supponendo anche $b>0$, che la prima delle due somme (1) è inferiore, in valore assoluto, a

$$\pi\sum_0^{n-1}(ab)^\nu=\pi\frac{(ab)^n-1}{ab-1}<\frac{\pi}{ab-1}(ab)^n.$$

Essa può dunque prendere la forma $\frac{\pi\theta}{ab-1}(ab)^n$, con θ compreso fra -1 ed 1. Quanto all'altra somma (1) si osservi che

$$\begin{aligned}&\cos(\pi a^{n+\nu}x)-\cos(\pi a^{n+\nu}x_n)\\ &=-\cos(\pi a^{n+\nu}x_n)\left\{1-\cos\left(\pi a^{n+\nu}(x-x_n)\right)\right\}-\mathrm{sen}(\pi a^{n+\nu}x_n)\,\mathrm{sen}\left(\pi a^{n+\nu}(x-x_n)\right).\end{aligned}$$

Ora, se si suppone che a sia un intero *dispari*, l'arco

$$\pi a^{n+\nu}x_n=\pi a^\nu . a^n x_n=\pi a^\nu(\alpha_n-1)$$

è un multiplo di π, pari o dispari secondo che α_n è dispari o pari. Ne segue

$$\cos(\pi a^{n+\nu}x_n)=-(-1)^{\alpha_n}\quad,\quad \mathrm{sen}(\pi a^{n+\nu}x_n)=0\ ,$$

$$\cos(\pi a^{n+\nu}x)-\cos(\pi a^{n+\nu}x_n)=(-1)^{\alpha_n}\left\{1-\cos\left(\pi a^{n+\nu}(x-x_n)\right)\right\}.$$

La somma considerata si riduce così a

$$(-1)^{\alpha_n}(ab)^n\sum_0^\infty b^\nu\frac{1-\cos\left(\pi a^{n+\nu}(x-x_n)\right)}{a^n(x-x_n)}. \quad (2)$$

I termini sottoposti al segno sommatorio sono tutti positivi o nulli. Il primo è

$$\frac{1-\cos\left(\pi a^n(x-x_n)\right)}{a^n(x-x_n)}$$

L'arco $\pi a^n(x-x_n)$ supera $\frac{1}{2}\pi$, non supera $\frac{3}{2}\pi$. Il suo coseno è dunque negativo o nullo; e però il termine considerato, avendo il numeratore non inferiore all'unità, ed il numeratore non superiore a $\frac{3}{2}$, non è minore di $\frac{2}{3}$. *A fortiori* supera $\frac{2}{3}$ la somma (2). Ne segue che l'espressione (2) può mettersi sotto la forma $(-1)^{\alpha_n}.\frac{2}{3}k(ab)^n$, con $k>1$. Adunque si ha

$$\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}=(-1)^{\alpha_n}(ab)^n\left(\frac{2k}{3}+\frac{\pi\theta}{ab-1}\right).$$

Ora la quantità fra parentesi è sempre maggiore di

$$\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}=\frac{ab-(1+\frac{3}{2}\pi)}{ab-1};$$

essa è dunque positiva se $ab > 1+\frac{3}{2}\pi$. D'altra parte, crescendo n, $(ab)^n$ oltrepassa ogni limite. Dunque il rapporto incrementale sinistro cresce indefinitamente in valore assoluto quando la variabile indipendente tende ad x percorrendo la successione $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Un calcolo del tutto simile al precedente dà

$$\frac{f(x'_n)-f(x)}{x'_n-x}=-(-1)^{\alpha_n}(ab)^n\left(\frac{2k'}{3}+\frac{\pi\theta'}{ab-1}\right),$$

dove k' supera l'unità, e θ' è compreso fra -1 ed 1. Dunque il rapporto incrementale destro cresce indefinitamente in valore assoluto, ma assume un segno opposto, per ogni valore di n, a quello del rapporto sinistro, quando la variabile tende ad x percorrendo la successione $x'_0, x'_1, x'_2, \ldots$. È stata * inoltre dimostrata da Wiener la possibilità di costruire altre successioni, per le quali i rapporti incrementali tendano a qualsivoglia limite prestabilito. Il Wiener si è poi servito della funzione di Weierstrass per dimostrare la possibilità (*cfr.* § 293, *b*) che una superficie *non rigata* sia *sviluppabile*. Ben s'intende che una tal superficie, *priva di piano tangente* in ciascun punto, non è materialmente realizzabile **.

Cenni sul calcolo delle differenze.

404. Data una successione di numeri $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ chiamasi *differenza* d'un termine qualunque ciò che bisogna aggiungere al termine stesso per ottenere il termine seguente. Formare le differenze dei termini d'una successione è

* *Giornale di Crelle*, 1831, p. 221.

** *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, t. II, p. 33.

un'operazione che si rappresenta col simbolo Δ:

$$\Delta u_p = u_{p+1} - u_p \ .$$

Anche il semplice *passare* da un termine al termine seguente si può considerare come un'operazione ∇, tale che si abbia

$$\nabla u_p = u_{p+1} \quad = 1 + \Delta$$

Siccome il secondo membro non è che $u_p + \Delta u_p$, si può dire che *le operazioni* Δ *e* ∇ *sono fra loro legate dalla relazione* $\nabla = 1 + \Delta$. Sostituendo invece ∇u_p ad u_{p+1} nell'espressione di Δu_p, si vede che $\Delta = \nabla - 1$.

405. Ora vogliamo mostrare che i segni operatorii Δ e ∇ si possono sottoporre al calcolo algebrico secondo le norme indicate nel § 112. Prima di tutto si osservi che, per la definizione stessa, se l'operazione ∇ si applica p volte di seguito ad un termine qualunque u_q, o q volte ad u_p, essa produce il termine u_{p+q}, vale a dire che si ha

$$\nabla^p u_q = \nabla^q u_p = u_{p+q} \ ,$$

ovvero, mettendo $\nabla^\nu u_0$ per u_ν,

$$\nabla^p . \nabla^q = \nabla^q . \nabla^p = \nabla^{p+q} \ .$$

Poi si noti che le operazioni Δ e ∇ sono permutabili fra loro, perchè $\nabla\Delta u_p$ rappresenta il termine che segue Δu_p nella successione $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \ldots$, cioè Δu_{p+1}, che si può evidentemente scrivere $\Delta\nabla u_p$. Dunque $\nabla\Delta = \Delta\nabla$. Ne segue che, data una successione di operazioni Δ e ∇, queste si possono eseguire in un ordine qualunque. Ciò premesso, siccome la differenza della somma è manifestamente uguale alla somma delle differenze delle parti, si ha

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \Delta(\nabla - 1) = \Delta\nabla - \Delta = \nabla\Delta - \Delta \\ &= \nabla(\nabla - 1) - (\nabla - 1) = (\nabla - 1)^2 \ .\end{aligned}$$

Più generalmente, ammesso che $\Delta^p = (\nabla - 1)^p$, si ha pure

$$\Delta^{p+1} = \Delta(\nabla - 1)^p = (\nabla - 1)^p \Delta = (\nabla - 1)^{p+1} \ ,$$

e però questa formola sussiste qualunque sia p. Adunque, per esprimere la p^{ima} differenza del primo termine della successione $u_0, u_1, u_2, \ldots$ mediante questi stessi numeri, si ha la formola

$$\Delta^p u_0 = u_p - \frac{p}{1} u_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} u_{p-2} - \ldots \pm u_0 \ . \qquad (1)$$

Per un termine qualunque si ha

$$\Delta^p u_q = \Delta^p \nabla^q u_0 = \nabla^q \Delta^p u_0 = \nabla^q (\nabla - 1)^p u_0 \ ,$$

vale a dire

$$\Delta^p u_q = u_{p+q} - \frac{p}{1} u_{p+q-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} u_{p+q-2} - \ldots \pm u_q \,.$$

Inversamente, se si vuol ricostruire la successione, quando si conoscono le differenze successive del primo termine, si deve adoperare la formola $\nabla^p = (1+\Delta)^p$, che dà

$$u_p = u_0 + \frac{p}{1} \Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \ldots + \Delta^p u_0 \,. \qquad (2)$$

406. **Differenze di 0^q.** Si chiamano così, brevemente, le successive differenze del primo termine della successione $0^q, 1^q, 2^q, 3^q, \ldots$, dimodochè si ha, in virtù della formola (1),

$$\Delta^p 0^q = p^q - \frac{p}{1}(p-1)^q + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^q - \ldots \pm p \,. \qquad (3)$$

Per esempio, formando le differenze dei cubi perfetti, si ottengono i numeri segnati nel seguente quadro:

0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	...
1	7	19	37	61	91	127	169	217	271	......	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	....		
6	6	6	6	6	6	6	6	....			
0	0	0	0	0	0	0	....				
. . . .											

Si vede che, a partire dalla quarta, le differenze di tutti i termini della successione sono nulle. Fra breve si mostrerà che questo è un fatto generale, che permette inversamente di ricostruire per via di addizione la successione primitiva. Ciò può essere utile, nella pratica, per costruire delle tavole di quadrati e di cubi perfetti. Ritorniamo alla formola (3) per dedurne un mezzo rapido di calcolare tutte le differenze di 0^q. Se si cambia p in $p-1$ si ottiene, sommando con (3),

$$\Delta^p 0^q + \Delta^{p-1} 0^q = p^q - \frac{p-1}{1}(p-1)^q + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-2)^q - \ldots \pm 1 \,.$$

Intanto il secondo membro, moltiplicato per p, diventa

$$p^{q+1} - \frac{p}{1}(p-1)^{q+1} + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^{q+1} - \ldots \pm p = \Delta^p 0^{q+1} \,.$$

Dunque

$$\Delta^p 0^{q+1} = p(\Delta^p 0^q + \Delta^{p-1} 0^q) \,. \qquad (4)$$

Adoperando questa formola si costruisce con grande facilità il quadro

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	$\Delta^8 \ldots$
0^1	1							
0^2	1	2						
0^3	1	6	6					
0^4	1	14	36	24				
0^5	1	30	150	240	120			
0^6	1	62	540	1560	1800	720		
0^7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	
0^8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320
...	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Gli elementi della seconda verticale si ottengono partendo da 2, aggiungendo questo numero ad 1, e raddoppiando il risultato; poi al numero 6 così ottenuto si aggiunge 1, si raddoppia il risultato, e si ottiene 14. Similmente a 14 si aggiunge 1, si raddoppia, si ottiene 30; ecc. Per la terza verticale si procede in modo analogo, cioè ogni termine si somma con quello che gli sta a sinistra, ed il risultato si triplica. Così, partendo da 6, si ha $6 + 6 = 12$, che triplicato dà 36; poi $36 + 14 = 50$, che triplicato dà 150; *ecc.* È utile tenere presente il quadro così costruito, perchè le differenze di 0^q si presentano in varie interessanti questioni di Analisi.

407. È anche utile conoscere alcune proprietà, facilmente deducibili dalla (4). In primo luogo si ha $\Delta^p 0^q = 0$ quando $p > q$. Infatti, ammesso che ciò sia vero (come accade per $q = 1$) fino ad un certo valore di q, la formola (4) mostra che la proposizione sussiste quando si cambia q in $q + 1$. Dalla medesima formola, facendo $q = p - 1$, si deduce poi $\Delta^p 0^p = p!$ Finalmente si osservi che $\Delta^p 0^q$ *è sempre divisibile per* p! Infatti, scritta la (4) sotto la forma

$$\Delta^p 0^q = p\Delta^{p-1}0^{q-1} + p\Delta^p 0^{q-1} ,$$

si applichi ripetutamente la formola stessa alla seconda parte del secondo membro. In tal modo si ottiene

$$\Delta^p 0^q = p\Delta^{p-1}0^{q-1} + p^2\Delta^{p-1}0^{q-2} + \ldots + p^{q-p+1}\Delta^{p-1}0^{p-1} .$$

Dunque $\Delta^p 0^q$ è divisibile per p; e siccome il secondo membro contiene soltanto differenze $(p-1)^{\text{ime}}$, si può dire che $\Delta^p 0^q$ è divisibile per $p(p-1)$. Ne segue che ciascun termine del secondo membro, e conseguentemente anche $\Delta^p 0^q$, è divisibile per $p(p-1)(p-2)$; *ecc.* Così, per via di successive deduzioni alternate, si riesce a veder chiaro che $\Delta^p 0^q$ è divisibile per $p!$, qualunque sia q.

408. **Differenze di funzioni**. Ora supponiamo che la successione sia costituita dai valori $f(x), f(x+h), f(x+2h), \dots$ d'una funzione y. La p^{ima} differenza del primo termine è, in virtù di (1),

$$\Delta^p y = f(x+ph) - \frac{p}{1} f(x+(p-1)h) + \frac{p(p-1)}{1.2} f(x+(p-2)h) - \dots \pm f(x) .$$

Se sviluppiamo ciascun termine del secondo membro mediante la formola di Taylor, troviamo che il coefficiente di h^ν è

$$\frac{y^{(\nu)}}{\nu!}\left(p^\nu - \frac{p}{1}(p-1)^\nu + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^\nu - \dots \pm p\right) = \frac{y^{(\nu)}}{\nu!} \Delta^p 0^\nu .$$

Spariscono dunque (per la prima delle tre proprietà dimostrate nel paragrafo precedente) i termini in $h, h^2, \dots, h^{p-1}$, e sparisce anche, come potevamo prevedere, il termine indipendente da h, perchè esso è il prodotto di $f(x)$ per $(1-1)^p = 0$. Per conseguenza si ha

$$\Delta^p y = \sum_{\nu=p}^{\nu=\infty} \frac{h^\nu y^{(\nu)}}{\nu!} \Delta^p 0^\nu . \qquad (5)$$

Questa formola suppone la possibilità dello sviluppo di f in serie indefinita. Per avere una formola generale, con un'espressione del *resto*, si noti che, fissato x, $\Delta^p y$ è una funzione di h, la cui derivata n^{ima} è

$$p^n f^{(n)}(x+ph) - \frac{p}{1}(p-1)^n f^{(n)}(x+(p-1)h) + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^n f^{(n)}(x+(p-2)h) - \dots .$$

Dunque (§ 89) fermandoci nello sviluppo (5) al termine per cui si ha $\nu = n-1$, dovremo ancora aggiungere allo sviluppo stesso

$$R_n = \frac{h^n}{n!} \Delta^p\left(0^n f^{(n)}(x)\right) ,$$

avendo cura di prendere queste ultime differenze ad intervalli θh invece di h. Qui θ rappresenta, secondo il solito, un numero compreso fra 0 ed 1.

409. **Esercizii**: *a*) Per $y = e^x$ si ha $\Delta y = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$; quindi

$$\Delta^p y = e^x (e^h - 1)^p .$$

La formola (5), dopo averne divisi i due membri per e^x, ed aver cambiato h in x, diventa

$$(e^x - 1)^p = \sum_p^\infty \frac{x^\nu}{\nu!} \Delta^p 0^\nu .$$

Siccome al primo membro si può dar la forma

$$\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^p ,$$

si vede subito che

$$\frac{\Delta^p 0^q}{q!}=\mathop{\mathbf{S}}_q^p \frac{1}{r!} ,$$

dove il simbolo $\mathop{\mathbf{S}}_q^p \varepsilon_r$ sta a rappresentare la somma di tutti i prodotti $\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\dots\varepsilon_{r_p}$. con $r_1, r_2, \dots$ numeri interi e positivi, uguali o disuguali, tali che

$$r_1+r_2+\dots+r_p=q .$$

Ciò premesso, l'ultima formola permette di calcolare direttamente $\Delta^p 0^q$. Per esempio, se si vuol calcolare $\Delta^4 0^7$, si deve osservare che le decomposizioni di 7 in somme di quattro numeri interi e positivi sono $1+1+1+4$, $1+1+2+3$, $1+2+2+2$, delle quali la prima e la terza contano per quattro, e la seconda per dodici. Dunque

$$\Delta^4 0^7=7!\left(\frac{4}{4!}+\frac{12}{2!\,3!}+\frac{4}{2!\,2!\,2!}\right)=8400 .$$

b) Per la funzione $y=1/x$ si ottiene

$$\Delta y=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+h}=-\frac{h}{x(x+h)} ,$$

$$\Delta^2 y=\frac{h}{x(x+h)}-\frac{h}{(x+h)(x+2h)}=\frac{2h^2}{x(x+h)(x+2h)} , \dots .$$

In generale

$$\Delta^p y=\frac{(-1)^p p!\,h^p}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+ph)} .$$

Ora, se si fa $h=-1$ e si cambia x in $1/x$, la formola (5) diventa

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\dots(1-px)}=\frac{1}{p!}(\Delta^p 0^p+x\Delta^p 0^{p+1}+x^2\Delta^p 0^{p+2}+\dots) .$$

Se ciascun fattore del primo membro si sviluppa in progressione geometrica, si riconosce facilmente, immaginando effettuato il prodotto, che $\frac{\Delta^p 0^{p+q}}{p!}$ *è la somma di tutti i prodotti di* q *numeri interi e positivi, uguali o disuguali, non superiori a* p. Dopo ciò riesce evidente la proprietà dimostrata in fine del § 407.

c) La segnatura definita nel § 404 permette di adoperare il calcolo simbolico (§ 112) in modo da raggiungere rapidamente certi risultati. Si osservi che

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots = (1 + x\nabla + x^2\nabla^2 + \dots)u_0 \;;$$

ed il simbolo fra parentesi si trasformi in

$$\frac{1}{1 - x\nabla} = \frac{1}{(1-x) - x\Delta} = \frac{1}{1-x} + \frac{x\Delta}{(1-x)^2} + \frac{x^2\Delta^2}{(1-x)^3} + \dots .$$

Si ottiene subito

$$\sum_0^\infty u_\nu x^\nu = \sum_0^\infty \frac{x^\nu \Delta^\nu u_0}{(1-x)^{\nu+1}} .$$

Per esempio, data la serie

$$f(x) = 1^q x + 2^q x^2 + 3^q x^3 + 4^q x^4 + \dots ,$$

se ne può facilmente trovare la somma:

$$f(x) = \frac{x\Delta 0^q}{(1-x)^2} + \frac{x^2\Delta^2 0^q}{(1-x)^3} + \dots + \frac{x^q \Delta^q 0^q}{(1-x)^{q+1}} .$$

Come si vede, $f(x)$ è il quoziente d'un polinomio di grado q per $(1-x)^{q+1}$.

d) Analogamente, per la serie

$$f(x) = \frac{1^q x}{1!} + \frac{2^q x^2}{2!} + \frac{3^q x^3}{3!} + \frac{4^q x^4}{4!} + \dots ,$$

si ha

$$f(x) = e^{x\nabla} = e^x . e^{x\Delta} = e^x \left(\frac{x}{1!} \Delta 0^q + \frac{x^2}{2!} \Delta^2 0^q + \dots + \frac{x^q}{q!} \Delta^q 0^q \right) .$$

Dunque la serie considerata è il prodotto di e^x per un polinomio di grado q, *a coefficienti interi*. Ne segue che *la somma della serie*

$$\frac{1^q}{1!} + \frac{2^q}{2!} + \frac{3^q}{3!} + \frac{4^q}{4!} + \dots$$

è uguale ad un certo numero di volte il numero e. Per esempio

$$\frac{1}{1!} + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \dots = 2e \quad , \quad \frac{1}{1!} + \frac{8}{2!} + \frac{27}{3!} + \dots = 5e .$$

410. Il calcolo delle differenze ha molte utili applicazioni algebriche, per le quali rinviamo il lettore ad altri trattati *. Qui vogliamo limitarci a mostrare

---

* Bertrand, *Algèbre*, 2ème partie, pp. 239, 249, ecc.

come esso si presti a risolvere il problema dell'interpolazione (§ 102), vale a dire a *costruire una funzione* y, *tale che ai valori* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *della variabile indipendente* x *corrispondano i valori* $y_0, y_1, y_2, \ldots$ *della funzione.* Immaginiamo una terza variabile t, che assuma i valori $0, 1, 2, \ldots$ corrispondentemente alle coppie di valori x_0 ed y_0, x_1 ed y_1, *ecc.* Le variabili x ed y, considerate come funzioni di t, debbono assumere i valori x_p ed y_p per $t=p$; e siccome, in generale, u_p non è che $(1+\Delta)^p u_0$, possiamo scrivere, simultaneamente,

$$x=(1+\Delta)^t x_0 \quad , \quad y=(1+\Delta)^t y_0 \,. \tag{6}$$

L'eliminazione di t condurrà, in ciascun caso, alla relazione cercata fra x ed y. Supponiamo, per esempio, che si diano i valori $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, equidistanti per h nell'intervallo (x_0, x_n). In questo caso si ha

$$\Delta x_0 = h \quad , \quad \Delta^2 x_0 = \Delta^3 x_0 = \cdots = 0 \,,$$

e però

$$x = x_0 + t\Delta x_0 + \frac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2 x_0 + \cdots = x_0 + th \,,$$

come, del resto, si poteva facilmente prevedere. Il valore di t, che di qui si ricava, si porti nella seconda uguaglianza (6). Allora questa diventa la *formola* * *di Newton*:

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{\Delta y_0}{1} + \frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2} + \cdots \,.$$

Altre proprietà dei numeri di Bernoulli.

411. I *numeri di Bernoulli* (§ 113) si esprimono facilmente mediante le differenze di 0^q. Consideriamo infatti la successione che ha $u_0=0$ come primo termine, mentre gli altri termini sono definiti così:

$$u_p = 0^q + 1^q + 2^q + \cdots + (p-1)^q \,.$$

La successione delle prime differenze è appunto $0^q, 1^q, 2^q, \ldots$. Dunque $\Delta^p u_0$ è uguale a $\Delta^{p-1}0^q$. Ne segue, adoperando la formola (2) del § 405, e prendendo $p>q$,

$$1^q + 2^q + \cdots + (p-1)^q = \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta 0^q + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots(p-q)}{1.2\ldots(q+1)}\Delta^q 0^q \,.$$

Immaginiamo ordinato il secondo membro rispetto alle potenze di p: il coefficiente di p è

$$-\tfrac{1}{2}\Delta 0^q + \tfrac{1}{3}\Delta^2 0^q - \tfrac{1}{4}\Delta^3 0^q + \cdots \,.$$

---

* Interessante applicazione di questa formola alla *separazione delle radici* è il teorema di Choquet e Matrot (*Mathesis*, 1891, p. 218).

Nel primo membro, se $q > 1$, il coefficiente di p è lo stesso che in $1^q + 2^q + ... + p^q$, cioè (§ 120. *a*) B_q. Per $q = 1$ esso è $B_1 - 1 = -B_1$. Siccome, per ogni altro valore dispari di q, B_q è nullo, si può dire che il coefficiente di p in u_p è $(-1)^q B_q$. Dunque

$$(-1)^{q-1} B_q = {}^1/_2 \Delta 0^q - {}^1/_3 \Delta^2 0^q + {}^1/_4 \Delta^3 0^q - \dots \qquad (1)$$

Questa formola ci permetterà di dimostrare un interessante teorema.

412. **Teorema di Staudt e Clausen.** *Ogni numero di Bernoulli* B_{2n} *è uguale ad un numero intero, diminuito della somma degli inversi di tutti quei numeri primi, che, diminuiti dell'unità, dividono* $2n$.

a) Premettiamo * la dimostrazione del seguente lemma: *ogni numero composto* p, *maggiore di* 4, *divide* (p — 1)! Infatti il numero p, se non è primo o quadrato d'un numero primo, è scomponibile nel prodotto di due fattori, diversi fra loro e dall'unità. Questi fattori figurano nel prodotto $2.3...(p-1)$, e però $(p-1)!$ è divisibile per p. Se p è il quadrato del numero primo μ, il prodotto $2.3...(p-1)$ racchiude i fattori μ e 2μ, e però è divisibile per $2\mu^2$, e conseguentemente per p, purchè si abbia $2\mu < p$, cioè $\mu > 2$. Fa dunque eccezione, fra i valori non primi di p, soltanto $p = 2^2$.

b) Ora domandiamoci in quali casi $\Delta^{p-1} 0^q$ è divisibile per p. Evidentemente ciò avviene, in virtù della proposizione testè dimostrata, per qualunque valore composto di p, maggiore di 4, giacchè un tal valore di p divide $(p-1)!$, che a sua volta (§ 407) divide $\Delta^{p-1}0^q$. Ciò avviene anche per $p = 4$, quando q è pari. In questo caso, infatti, si vede direttamente che il numero

$${}^1/_4 \Delta^3 0^q = {}^3/_4 (3^{q-1} + 1) - 3 . 2^{q-2}$$

è intero, giacchè $3^{q-1} + 1$ è divisibile per 4 Ci resta dunque da esaminare soltanto il caso di p primo.

c) Dividiamo q per $p-1$, e sia $q = k(p-1) + r$. Siccome $r < p-1$, è $\Delta^{p-1}0^r = 0$; e però, se nella nota formola (§ 406)

$$\Delta^{p-1}0^q = (p-1)^q - \frac{p-1}{1}(p-2)^q + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-3)^q - \dots \pm (p-1)$$

si cambia q in r, si ottiene

$$0 = (p-1)^r - \frac{p-1}{1}(p-2)^r + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-3)^r - \dots \pm (p-1),$$

salvo che non sia $r = 0$, nel qual caso bisogna aggiungere ∓ 1 al secondo membro. Dunque $\Delta^{p-1}0^q$ è anche espressa da

$$\left\{(p-1)^q - (p-1)^r\right\} - \frac{p-1}{1}\left\{(p-2)^q - (p-2)^r\right\} + \dots \pm \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(2^q - 2^r) + \rho,$$

dove $\rho = 0$, in generale, e $\rho = (-1)^p$ per $r = 0$. Intanto il teorema ** di Fermat ci dice che il numero primo p, se non divide un numero a, divide $a^{p-1} - 1$. In

* La dimostrazione che qui si dà del teorema di Staudt e Clausen è dovuta a Radicke. Vedi *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1889, p. 503.

** Baltzer, *Elementi di Matematica*, trad. Cremona, 2ª parte, § 13.

altri termini a^{p-1} è un multiplo di p, aumentato di 1; ed altrettanto si può dire, evidentemente, di $a^{k(p-1)}$. Ne segue che la differenza

$$a^q - a^r = a^r \left\{ a^{k(p-1)} - 1 \right\}$$

è divisibile per p. Dunque $\Delta^{p-1}0^q \equiv \rho$ (*mod.* p)

d) Dalla precedente discussione risulta: *solo nel caso che*, p *essendo primo*, q *sia divisibile per* p — 1, *avviene che* $\Delta^{p-1}0^q$ *non è divisibile per* p. Il resto della divisione di $\Delta^{p-1}0^q$ per p è allora $(-1)^p$, uguale (o, per $p=2$, congruo) a -1. Dunque, facendo $q=2n$ nella formola (1), e chiamando $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ tutti i numeri primi, tali che $\alpha-1, \beta-1, \gamma-1, \ldots$ dividano $2n$, si ha

$$B_{2n} = intero - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \cdots\right). \tag{2}$$

Questo teorema facilita la costruzione delle tavole di numeri di Bernoulli. Solo col suo sussidio Adams ha potuto * spingere il calcolo di questi numeri, iniziato da Ohm, fino a B_{124}. Inoltre esso svela in parte la misteriosa connessione che esiste fra la teoria dei numeri di Bernoulli e certe difficili questioni aritmologiche. Così la celebre proposizione di Fermat, che afferma l'impossibilità, per $n>2$, di risolvere in numeri interi e positivi l'equazione $x^n = y^n + z^n$, è stata ** dimostrata da Kummer per tutti i valori primi di n, che non dividono i numeratori di $B_2, B_4, \ldots, B_{n-3}$.

413. Ricordando (§ 123) che i numeri di Bernoulli, con indice pari, sono a segni alternati, ci proponiamo di far vedere, seguendo Lipschitz ***, che altrettanto si può dire delle sole *parti intere* ****, a partire da un certo valore dell'indice. Effettivamente si ha

$$B_2 = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$B_4 = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

$$B_6 = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right)$$

$$B_8 = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

$$B_{10} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11}\right)$$

$$B_{12} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right)$$

$$B_{14} = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$B_{16} = -6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17}\right)$$

$$B_{18} = 56 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{19}\right)$$

$$B_{20} = -528 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}\right)$$

$$B_{22} = 6192 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{23}\right)$$

$$B_{24} = -86579 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \right.$$

$$B_{26} = 1425518 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$B_{28} = -27298230 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{29}\right)$$

. . . .

* *Giornale di Crelle*, 1878, p. 269. Per rendersi conto delle difficoltà materiali di tale calcolo basta sapere che, da B_{100} in poi, i numeratori hanno più di *ottanta* cifre.

** *Giornale di Crelle*, 1850, p. 130.

*** *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1886, p. 142.

**** Su queste si leggano alcune considerazioni di Hermite nel *Giornale di Crelle*, 1876, p. 93.

Siccome B_{2p} è positivo quando p è dispari, *a fortiori* è positiva la sua parte intera, e però bisogna far vedere che la parte intera di B_{2p}, nel caso di p pari e non inferiore ad 8, è negativa. Premettiamo che, se H_n è la somma dei primi n termini della serie armonica, si ha (*cfr.* § 91, *c*)

$$H_{n-1} - \log(n-1) - (H_n - \log n) = -\log\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} > 0 ,$$

e per conseguenza $H_n - \log n < H_{n-1} - \log(n-1) < \ldots < H_1 - \log 1 = 1$, ossia $H_n < 1 + \log n$. Ora, posto $p = 2n$, la parte intera di B_{4n} è, per la (2), certamente inferiore a

$$B_{4n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n+1} < B_{4n} + \log(4n+1) .$$

Intanto (§ 127, *a*), ricordando anche la formola di Stirling, si ha pure

$$-B_{4n} = 2\frac{(4n)!}{(2\pi)^{4n}}\left(1 + \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \cdots\right) > 4\pi\sqrt{e}\left(\frac{2n}{\pi e}\right)^{4n+\frac{1}{2}} .$$

Dunque la parte intera di B_{4n} è inferiore a $\log(4n+1) - 4\pi\sqrt{e}\left(\frac{2n}{\pi e}\right)^{4n+\frac{1}{2}}$; ed il teorema di Lipschitz sarà dimostrato se riusciamo a trovare un valore di n che renda negativa l'ultima espressione, giacchè essa rimarrà evidentemente negativa per ogni valore di n, superiore a quello trovato. Per questo basta determinare n in modo che si abbia, simultaneamente,

$$2n > \pi e \quad , \quad \log(4n+1) < 4\pi\sqrt{e} \, ;$$

e si verifica facilmente che queste disuguaglianze sono soddisfatte per $n = 5$.

Derivate successive delle funzioni di funzioni.

414. Note le successive derivate d'una funzione u, formiamo (§ 409, *a*) la somma

$$U_{p,q} = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{q} \frac{u^{(r)}}{r!} .$$

Siccome la derivata della funzione $\varepsilon_r = u^{(r)}/r!$ è $\varepsilon'_r = (r+1)\varepsilon_{r+1}$, la derivata d'un termine

$$\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_{r_3}\ldots\varepsilon_{r_q} \quad , \quad (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_q = p)$$

di $U_{p,q}$ è

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=q}(r_\nu + 1)\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots\varepsilon_{r_{\nu-1}}\varepsilon_{r_{\nu+1}}\ldots\varepsilon_{r_q} . \tag{1}$$

Perchè uno di questi termini coincida con un termine dato

$$\varepsilon_{\rho_1}\varepsilon_{\rho_2}\varepsilon_{\rho_3}\ldots\varepsilon_{\rho_q} \quad , \quad (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_q = p+1) \tag{2}$$

di $U_{p+1,q}$ bisogna che

$$r_1 = \rho_1 \,,\, \ldots \,,\, r_{\nu-1} = \rho_{\nu-1} \,,\, r_\nu = \rho_\nu - 1 \,,\, r_{\nu+1} = \rho_{\nu+1} \,,\, \ldots \,,\, r_q = \rho_q \;;$$

e però ρ_ν dev'essere maggiore di 1. Se ciò avviene, il termine (2) si trova, come la (1) mostra, ρ_ν volte in $U'_{p,q}$. Dunque il detto termine è contenuto in $U'_{p,q}$ un numero di volte, uguale alla *somma dei numeri* ρ, *maggiori di* 1, ossia $p+1-m$ volte, chiamando m il numero di quei ρ, che sono uguali all'unità. D'altra parte consideriamo i termini

$$\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_{r_3}\ldots\varepsilon_{r_{q-1}} \quad , \quad (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{q-1} = p)$$

di $U_{p,q-1}$, e moltiplichiamo per ε_1 ciascuno di essi, avendo cura di scrivere successivamente il nuovo fattore nei q posti che può occupare, così:

$$\varepsilon_1\varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_{q-1}} \quad , \quad \varepsilon_{r_1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{r_{q-1}} \,,\, \ldots \,,\, \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots\varepsilon_1 \,.$$

Si viene in tal modo a costituire un quadro, nel quale il termine (2) comparisce m volte, mentre la somma di tutti i termini del quadro è, evidentemente, $q\varepsilon_1 U_{p,q-1}$ Dunque il termine (2) è contenuto

$$(p + 1 - m) + m = p + 1$$

volte in $U'_{p,q} + q\varepsilon_1 U_{p,q-1}$, e però si ha

$$U'_{p,q} = (p+1)U_{p+1,q} - qu' U_{p,q} \,. \tag{3}$$

Questa è la proprietà fondamentale dell'algoritmo U. Essa sussiste senza limitazioni se si conviene di supporre $U_{p,q} = 0$ quando q è maggiore di p o minore di 1.

415. Ora siamo in grado di trovare l'espressione generale della p^{ima} derivata d'una funzione $f(x) = \varphi(\psi(x))$ quando sono note le successive derivate delle funzioni φ e ψ. Poniamo, per semplicità, $y = f(x)$, $u = \psi(x)$, sicchè $y = \varphi(u)$, e dimostriamo che

$$\frac{y^{(p)}}{p!} = \frac{\varphi'(u)}{1!}U_{p,1} + \frac{\varphi''(u)}{2!}U_{p,2} + \frac{\varphi'''(u)}{3!}U_{p,3} + \ldots \,. \tag{4}$$

La derivazione rispetto ad x, eseguita avendo riguardo alla (3), non fa che cambiare p in $p+1$; e siccome la formola (4) è manifestamente vera per $p=1$, essa è vera per qualunque valore di p.

416. **Applicazioni**: *a*) La derivata p^{ima} di $y = \varphi(e^x)$ si esprime mediante l'algoritmo (§ 409, *a*)

$$U_{p,q} = \mathop{\mathbf{S}}_p^q \frac{e^{x}}{r!} = e^{qx} \mathop{\mathbf{S}}_p^q \frac{1}{r!} = e^{qx}\frac{\Delta^q 0^p}{p!} \,.$$

La formola (4) dà

$$y^{(p)} = \frac{\varphi'(e^x)}{1} e^x \Delta 0^p + \frac{\varphi''(e^x)}{1.2} e^{2x} \Delta^2 0^p + \frac{\varphi'''(e^x)}{1.2.3} e^{3x} \Delta^3 0^p + \dots . \qquad (5)$$

b) In particolare, se si fa

$$\varphi(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad , \quad \text{dimodochè} \quad \frac{\varphi^{(\nu)}(1)}{\nu!} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\nu-1} \operatorname{sen}(\nu-1)\frac{\pi}{4} ,$$

è noto (§ 116) che $y = e^{\mathrm{E}x}$. Quindi la formola (5) dà, per $x = 0$, la seguente espressione del p^{imo} numero di Eulero mediante le differenze di 0^p:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_p = & -\frac{1}{4}(2\Delta^2 0^p - 2\Delta^3 0^p + \Delta^4 0^p) \\ & + \frac{1}{4^2}(2\Delta^6 0^p - 2\Delta^7 0^p + \Delta^8 0^p) \\ & - \frac{1}{4^3}(2\Delta^{10} 0^p - 2\Delta^{11} 0^p + \Delta^{12} 0^p) + \dots . \end{aligned}$$

c) Per $\varphi(x) = 1/x$ la formola (4) diventa

$$\frac{y^{(p)}}{p!} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ (-1)^\nu y^{\nu+1} \mathrm{U}_{p,\nu} \right\} .$$

Ora, se facciamo successivamente

$$u = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) \quad , \quad u = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) ,$$

e poniamo $x = 0$ nell' ultima formola, questa ci dà le seguenti espressioni dei numeri di Bernoulli e di Eulero:

$$\frac{\mathrm{B}_p}{p!} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ (-1)^{\nu+p} \mathop{\mathrm{S}}_p^\nu \frac{1}{(r+1)!} \right\} \quad , \quad \frac{\mathrm{E}_{2p}}{(2p)!} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ (-1)^\nu \mathop{\mathrm{S}}_p^\nu \frac{1}{(2r)!} \right\} .$$

d) Finalmente, posto

$$y = (1 + \alpha x)(1 + \beta x)(1 + \gamma x) \dots = e^u ,$$

si rappresentino con s_r e c_r la somma delle r^{ime} potenze dei numeri $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, e quella dei prodotti r ad r degli stessi numeri. È chiaro che, per $x = 0$,

$$\frac{y^{(r)}}{r!} = c_r \quad , \quad \frac{u^{(r)}}{r!} = \frac{s_r}{r} .$$

Ciò premesso, se nella formola (4) si fa successivamente $\varphi(x) = e^x$, $\varphi(x) = \log x$, ed $x = 0$, si ritrovano le formole * di Waring.

* *Analisi algebrica*, p. 360.

Cenni sul calcolo delle variazioni.

417. Definita una funzione y della variabile x, immaginiamone un'altra tale che, per ciascun valore di x, il corrispondente valore della nuova funzione differisca infinitamente poco da quello di y. Si suole designare con $y+\delta y$ la nuova funzione, e la quantità infinitesima δy si chiama la *variazione* di y. Essa è una quantità completamente *arbitraria*, sia che si passi da un valore di x ad un altro, sia che si consideri un dato valore di x; sicchè, in realtà, non una, ma infinite funzioni vengono ad essere rappresentate da $y+\delta y$. È facile convincersi che il segno di variazione δ obbedisce alle medesime leggi del segno di differenziazione d. È infatti quasi evidente che

$$\delta(u+v)=\delta u+\delta v \quad , \quad \delta uv=u\delta v+v\delta u \ ; \ \text{ecc.}$$

Inoltre, in virtù della definizione stessa,

$$\delta dy=d(y+\delta y)-dy=d\delta y \quad , \quad \delta\int y dx=\int(y+\delta y)dx-\int y dx=\int\delta y\,.\,dx \ .$$

Ancora, se y è funzione delle funzioni $u, v, w, \ldots$, si ha

$$\delta y=\frac{\partial y}{\partial u}\delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\delta v+\frac{\partial y}{\partial w}\delta w+\cdots \ .$$

Qui importa notare che una funzione y può anche dipendere da una o più funzioni $u, v, w, \ldots$ in guisa che, date queste funzioni, y prenda, qualunque sia x, un determinato valore. Così y non è una funzione di $u, v, w, \ldots$ nel senso ordinario; ma conserva talune proprietà delle ordinarie funzioni, purchè al segno d si sostituisca δ. In particolare, se si vuole che la funzione raggiunga il *minimo* o *massimo* valore, *è necessario che la sua variazione sia nulla.* Si può andare oltre nell'estendere alle variazioni le proprietà dei differenziali; ma qui siamo obbligati a limitarci *.

418. In varie questioni di Geometria e di Meccanica si è condotti a cercare una tal funzione y di x, che l'integrale

$$\mathrm{U}=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'', \ldots)dx$$

prenda il minimo o il massimo valore di cui è suscettibile. La condizione che dev'essere soddisfatta è $\delta\mathrm{U}=\int_{x_0}^{x_1}\delta f.\,dx=0$. Anzitutto si osservi che, se si attri-

* Per maggiori dettagli si consulti il *Cours d'Analyse* di Jordan; t. III, p. 470. Il lettore farà bene a leggere anche la critica del calcolo delle variazioni, fatta da Hadamard nel *Bulletin des Sciences math. et astr.*, 1901, p. 3.

buisce alla funzione incognita y la variazione infinitesima arbitraria δy, si ha

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial f}{\partial y''}\delta y'' + \dots .$$

Poi si noti che

$$\int \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx = \int \frac{\partial f}{\partial y'} d\delta y = \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y - \int \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y dx .$$

Similmente, cambiando y in y',

$$\int \frac{\partial f}{\partial y''}\delta y'' dx = \frac{\partial f}{\partial y''}\delta y' - \int \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y''}\delta y' dx = \frac{\partial f}{\partial y''}\delta y' - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y''}\delta y + \int \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''}\delta y dx :$$

poi, cambiando ancora y in y',

$$\int \frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y''' dx = \frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y'' - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y' + \int \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y' dx$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y'' - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y' + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y - \int \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial f}{\partial y'''}\delta y dx :$$

e così via. Per conseguenza, se si pone

$$\Phi = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial f}{\partial y'''} + \dots ,$$

$$\begin{aligned} \sigma = & \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y''} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y'''} - \dots\right)\delta y \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'''} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{IV}}} - \dots\right)\delta y' \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial y'''} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{IV}}} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{V}}} - \dots\right)\delta y'' + \dots , \end{aligned}$$

si ha $\delta U = \int \Phi \delta y dx + \sigma$; poi, limitando l'integrazione all'intervallo (x_0, x_1), e mettendo l'indice 0 o l'indice 1, rispettivamente, alle quantità calcolate per $x = x_0$ o per $x = x_1$,

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \Phi \delta y dx + \sigma_1 - \sigma_0 .$$

Ora, per l'arbitrarietà di δy, l'eguaglianza $\delta U = 0$ si scinde in $\Phi = 0$ (*equazione indefinita*), che dev'essere verificata per tutti i valori di x, compresi fra x_0 ed x_1; ed in $\sigma_1 - \sigma_0 = 0$ (*equazione ai limiti*). La questione è dunque ridotta all'integrazione dell'equazione differenziale $\Phi = 0$, seguita dalla determinazione delle quantità arbitrarie, fatta in modo da verificare le condizioni ai limiti.

419. **Esempii**: *a*) La *più breve linea* che va da un punto all'altro del piano si determina cercando di rendere minimo l'integrale $U = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$, che rappresenta la lunghezza della curva incognita fra il punto (x_0, y_0) ed il punto (x_1, y_1). Qui si ha

$$f = \sqrt{1+y'^2} \quad , \quad \Phi = -\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad , \quad \sigma = \frac{y'\delta y}{\sqrt{1+y'^2}} \; .$$

L'equazione $\Phi = 0$ dà subito $y' = a$, $y = ax + b$; e le costanti a, b sono determinate dalle condizioni $y_0 = ax_0 + b$, $y_1 = ax_1 + b$. Quanto all'equazione si limiti, essa è soddisfatta identicamente, perchè, essendo obbligate le infinite funzioni y a prendere per $x = x_0$ il valore prescritto y_0, e per $x = x_1$ il valore y_1, si ha sempre $\delta y_0 = 0$, $\delta y_1 = 0$, e conseguentemente

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(\delta y_1 - \delta y_0) = 0 \; .$$

Se invece si fosse domandata la più breve linea fra le rette $x = x_0$ ed $x = x_1$, anche le variazioni δy_1 e δy_0 sarebbero state arbitrarie, e la condizione $\sigma_1 - \sigma_0 = 0$ avrebbe dato $a = 0$, e per conseguenza $y = b$.

b) Cerchiamo la *linea della più celere discesa*, cioè quella linea d'un piano verticale, che si deve far percorrere ad un punto materiale pesante, se si vuole che, partendo da una data posizione M_0, raggiunga nel più breve tempo possibile un'altra posizione prestabilita M_1. Poniamo l'origine in M_0, e conduciamo verticalmente, in giù, l'asse delle y. Dagli elementi della Fisica è noto che, se t è il tempo impiegato a percorrere l'arco $M_0M = s$, si ha $ds/dt = \sqrt{2gy}$, rappresentando con g una certa costante (*cfr.* § 361, *f*). La quantità da render minima è

$$t = \int_0^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx \; ,$$

dimodochè, a prescindere da un fattore costante, qui si ha

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \quad , \quad \Phi = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \quad , \quad \sigma = \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y \; .$$

Siccome f è funzione di y e di y' soltanto, si ha, tenendo presente l'equazione indefinita,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' = y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) .$$

Dunque $f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = costante$, cioè, rappresentando con $1/\sqrt{2a}$ la costante, $y(1+y'^2) = 2a$. Ne segue $dx/\sqrt{y} = dy/\sqrt{2a-y}$; ed è inutile andare oltre, perchè, cambiando x ed y rispettivamente in $\pi a - x$ e $2a - y$, si ritrova una precedente equazione (§ 373, c), che caratterizza la *cicloide*. Questa curva ha una cuspide nel punto di partenza M_0, e la base orizzontale. Le due costanti, cioè a e la costante introdotta dall'integrazione dell'ultima equazione, si determinano esprimendo che la curva passa per M_0 ed M_1. Anche qui l'equazione ai limiti è soddisfatta identicamente, perchè $\delta y_0 = 0$, $\delta y_1 = 0$; ma se al punto mobile si prescrivesse soltanto di arrivare, nel più breve tempo possibile, sulla verticale $x = x_1$, si avrebbe ancora $\delta y_0 = 0$, ma δy_1 sarebbe arbitraria, e l'equazione ai limiti $\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y_1 = 0$ darebbe $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, cioè $y'_1 = 0$, vale a dire che il punto mobile dovrebbe arrivare orizzontalmente sulla verticale assegnata. In questo caso la costante a è determinata dalla condizione che si debba avere, non $y = y_1$, sì bene $y' = 0$ per $x = x_1$.

420. Se anche x_0 ed x_1 potessero variare, cioè se i punti M_0 ed M_1, invece di rimanere fissi o di essere obbligati a non lasciare le rette $x = x_0$ ed $x = x_1$, fossero più generalmente liberi di spostarsi lungo le linee $y = \varphi(x)$ ed $y = \psi(x)$, alla variazione di U già ottenuta verrebbe ad aggiungersi anche quella dovuta al variare dei limiti, cioè

$$\int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} f dx - \int_{x_0}^{x_1} f dx = \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} f dx - \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} f dx = f_1 \delta x_1 - f_0 \delta x_0 .$$

Dunque

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \Phi \delta y dx + (\sigma + f\delta x)_0^1 .$$

Intanto, ai limiti, le δx dipendono dalle δy, perchè, se il punto (x, y) è obbligato soltanto a non lasciare la curva $y = \chi(x)$, si ha, dopo la variazione, che la nuova ordinata è $y + \delta y$, aumentata della variazione dovuta al variare di x, cioè $y'\delta x$; e d'altra parte la medesima ordinata è rappresentata da $\chi(x+\delta x)$, ossia da $\chi(x) + \chi'(x)\delta x$. Ne segue $\delta y = \{\chi'(x) - y'\}\delta x$; quindi

$$\delta y_0 = \{\varphi'(x_0) - y'_0\}\delta x_0 \quad , \quad \delta y_1 = \{\psi'(x_1) - y'_1\}\delta x_1 .$$

421. Riprendiamo il problema della più rapida discesa, supponendo che i punti di partenza e di arrivo siano soltanto obbligati a trovarsi su certe due linee $y = \varphi(x)$ ed $y = \psi(x)$. L'equazione indefinita è sempre la stessa, e però la linea descritta dal punto mobile è sempre una cicloide. Ora, per formare l'equazione ai limiti, si noti che, essendo $y(1+y'^2) = 2a$, si ha

$$f = \frac{\sqrt{2a}}{y} \quad , \quad \sigma = \frac{y'\delta y}{\sqrt{2a}} ,$$

e conseguentemente

$$\sigma + f\delta x = \frac{y}{\sqrt{2a}}\delta y + \frac{\sqrt{2a}}{y}\delta x = \left\{1 + y'\chi'(x)\right\}\frac{\delta x}{\sqrt{2a}} .$$

Dunque

$$(\sigma + f\delta x)_0^1 = \left\{1 + y'_1\psi'(x_1)\right\}\frac{\delta x_1}{\sqrt{2a}} - \left\{1 + y'_0\varphi'(x_0)\right\}\frac{\delta x_0}{\sqrt{2a}} ;$$

e però l'equazione ai limiti si scinde in

$$1 + y'_1\psi'(x_1) = 0 \quad ; \quad 1 + y'_0\varphi'(x_0) = 0 .$$

Queste ci dicono che la cicloide *deve incontrare ad angolo retto le due linee date.*

422. Passando al caso di due o più funzioni $y, z, \ldots$ di x, si abbia l'integrale

$$U = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z', y'', z'', \ldots)dx ,$$

da render minimo o massimo. Immaginando ripetuti i calcoli del § 418, e chiamando Ψ e τ le quantità Φ e σ, relative alla funzione z, si ottiene

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} (\Phi\delta y + \Psi\delta z)dx + (\sigma + \tau)_0^1 .$$

Se fra y e z non esiste alcun vincolo, si avranno due equazioni indefinite invece di una, cioè $\Phi = 0$ e $\Psi = 0$; ma se deve aver luogo una relazione $F(x, y, z) = 0$, le variazioni di y e di z non saranno indipendenti, perchè si avrà

$$\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0 ;$$

e per l'annullamento di δU si richiede soltanto che sia $\Phi \Big/ \frac{\partial F}{\partial y} = \Psi \Big/ \frac{\partial F}{\partial z}$ per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_1.

423. Per esempio, data a cercare sulla superficie $F(x, y, z) = 0$ la linea più breve fra quelle che congiungono due punti, si tratta di rendere minimo l'integrale

$$U = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx .$$

Qui

$$\Phi = -\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} , \quad \Psi = -\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} ,$$

e però, chiamando s l'arco della linea incognita, ed osservando che

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=\frac{dy}{ds}\ , \quad \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=\frac{dz}{ds}\ ,$$

si vede (§ 234) che Φ e Ψ sono proporzionali ai coseni μ, ν degli angoli che la normale principale alla detta linea fa con gli assi delle y e delle z, mentre si sa (§ 260) che $\partial F/\partial y$ e $\partial F/\partial z$ sono proporzionali agli analoghi coseni $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ della normale alla superficie. Basterà assumere y come variabile d'integrazione per provare invece la proporzionalità di λ, ν ad $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$. Ne segue

$$\frac{\lambda}{\mathcal{L}}=\frac{\mu}{\mathcal{M}}=\frac{\nu}{\mathcal{N}}=\pm 1\ ,$$

sicchè le linee più brevi son tali che, in ogni punto, la normale principale coincide con la normale alla superficie. Esse sono dunque (§ 266) le *linee geodetiche*.

424. In altre questioni si vuole che un integrale U diventi minimo o massimo, non per tutte le funzioni da cui dipende l'integrando, ma solo per quelle che mantengono costante un altro integrale V. Allora, immaginando ripetute le considerazioni che si son fatte per la ricerca dei minimi e dei massimi valori delle funzioni di più variabili vincolate, si viene alla conclusione che bisogna porre uguale a zero, non la variazione di U, sì bene quella di $U+\lambda V$, essendo λ una costante da determinare convenientemente.

425. **Esempii:** *a*) Fra le curve di data lunghezza, che congiungono il punto (x_0, y_0) al punto (x_1, y_1), proponiamoci di trovarne una per la quale sia minima o massima l'area chiusa fra la curva stessa, l'asse delle x e le ordinate estreme. Qui si tratta di vedere quale funzione y, fra quelle che lasciano invariato il secondo degli integrali

$$U=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx\ , \quad V=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx\ ,$$

fa prendere al primo un valore minimo o massimo. Posto $f=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$, si è visto (§ 419, *b*) che deve serbarsi costante

$$f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=y+\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}\ .$$

Si chiami b la costante. Allora si ha, ricavando y' ed integrando,

$$x=\int\frac{(b-y)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(b-y)^2}}=a+\sqrt{\lambda^2-(b-y)^2}\ ,$$

e finalmente $(x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2$. Le costanti a, b, λ si determinano mediante le condizioni che la curva contenga i punti dati, e che V prenda il valore costante prestabilito.

b) Cerchiamo ancora fra le curve di lunghezza data, che vanno da M_0 ad M_1, una curva tale, che il baricentro dell'arco M_0M_1 sia il più lontano possibile da una data retta. Prendendo questa come asse delle x, si deve (§ 374) render massimo il primo degli integrali

$$U=\int_{s_0}^{s_1} y\,ds=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad , \quad V=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx \ ,$$

con una funzione y, scelta fra quelle che fanno prendere al secondo integrale un dato valore costante. La funzione f da considerare è $f=(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}$, e si ha

$$f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} \ .$$

L'integrazione di $(y+\lambda)/\sqrt{1+y'^2}=$ *costante* conduce all'equazione d'una *catenaria*.

426. La questione del § 418, estesa nel § 422 al caso di due o più funzioni di x, si può estendere per un altro verso considerando funzioni di due o più variabili indipendenti. Limitiamoci al caso più semplice d'un integrale

$$U=\int\int f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy \ ,$$

esteso ad un dato campo d'integrazione, nel quale z è una funzione incognita di x, y, da determinare in guisa che il valore di U riesca minimo o massimo. Secondo il solito p e q stanno per $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$. Una variazione infinitesima δz produce nella funzione integranda la variazione

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial z}\delta z+\frac{\partial f}{\partial p}\delta p+\frac{\partial f}{\partial q}\delta q \ .$$

Intanto

$$\frac{\partial f}{\partial p}\delta p=\frac{\partial f}{\partial p}\delta\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial\delta z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\delta z\right)-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}.\delta z \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}\delta q=\frac{\partial f}{\partial q}\delta\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial\delta z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\delta z\right)-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}.\delta z \ ;$$

e per conseguenza, posto

$$\Phi=\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} \ ,$$

si ha

$$\delta U = \iint \Phi \delta z . dx dy + \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\delta z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\delta z\right) \right\} dx dy \ .$$

La seconda parte del secondo membro è sempre riducibile alla somma di due integrali semplici, nei quali compariscono i valori che δz prende *solo sul contorno del campo d'integrazione*. Infatti, se (*cfr.* § 332) dalla condizione $L(x, y) \leqq 0$, che definisce il detto campo, si suppone che si ricavi la limitazione $a(x) \leqq y \leqq b(x)$, e se questa permette l'esistenza di y solo per x compreso tra α e β, è chiaro che si ha

$$\iint \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\delta z\right) dx dy = \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial f}{\partial q}\delta z\right)_{y=a}^{y=b} dx \ .$$

In modo analogo si procede per l'altro integrale. Affinchè δU si annulli è dunque necessario che sia $\Phi = 0$ in tutti i punti del dato campo. Integrando l'equazione alle derivate parziali $\Phi = 0$ se ne ricava l'espressione generale di z; e le funzioni arbitrarie che in questa compariscono si determinano scrivendo che si annulla anche l'altra parte di δU. In particolare quest'ultima condizione è soddisfatta quando la funzione z è data sul contorno, dovendo in tal caso essere $\delta z = 0$ in ciascun punto del contorno stesso.

427. Si domandi, per esempio, di far passare per una data curva chiusa una superficie, sulla quale la curva limiti la più piccola area possibile. Si tratta di render minimo l'integrale $\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx dy$, nelle condizioni accennate in fine del precedente paragrafo. Nel caso attuale si ha

$$f = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad ; \quad \Phi = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \ ,$$

e per conseguenza (§ 287) dev'essere

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0 \ .$$

Così vediamo che la superficie da far passare per la data curva è appunto una di quelle che sono state già chiamate *ad area minima*. Ed è precisamente a questa proprietà che si deve la possibilità di realizzare * sperimentalmente, in lamine liquide, tali superficie.

---

* Veggansi le belle *Recherches expérimentales et théoriques* di Plateau nei *Mémoires in-4º de l'Académie de Belgique* (1867, p. 64) ed il cap. III delle *Leçons sur la capillarité* di H. Poincaré. Vedi anche, per una più semplice realizzazione del catenoide, e per una conferma sperimentale del primo risultato ottenuto nel § 425, un interessante lavoro di Van der Mensbrugghe *On the tension of liquid films* (Philosophical Magazine, 1867).

Errori * da correggere, ed aggiunte.

Pag. 238, al posto delle linee 20, 19, 18, 17 (dal fondo), si legga:

... $y^2 = x \operatorname{sen}^2 x$, dotata d'una cuspide nell'origine, possiede infiniti punti isolati ed infiniti punti doppii sull'asse x. Fuori di questo esistono inoltre infiniti punti d'inflessione, le cui ascisse son le radici dell'equazione $1 + 4x^2 = 4x \cot x$. Essi tendono al detto asse quando ci si allontana indefinitamente dall'origine, nel verso positivo, allineandosi *quasi* lungo la curva $xy^2 = 1$. Aggiungiamo che la curva considerata tocca internamente, infinite volte, la parabola $y^2 = x$.

Pag. 423, al posto delle linee 5, 6, 7, 8, si legga:

D'altra parte si consideri la funzione

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots = \frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x},$$

e si osservi che, essendo

$$\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3(2n-3)} + \frac{1}{5(2n-5)} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-1}{2n+1}\right) = \frac{3}{2n+1},$$

si ha

$$f^2(x) > 1 + \frac{3x^2}{5} + \frac{3x^4}{7} + \dots = \frac{3}{x^2}\left(f(x) - 1\right),$$

d'onde, per $x = \dfrac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}}$, risulta

$$1 < \frac{t}{2x} < 1 + \frac{t^2}{12}, \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{t} < \frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-t}}{1-e^{-t}} < \frac{1}{t} + \frac{t}{12}.$$

Dunque

$$0 < \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < \frac{t}{12},$$

. . . .

Pag. 493, alla fine del § 397, si aggiunga, continuando:

Nel caso opposto, cioè quando $\alpha = -n$, con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, si ha invece

$$y = (1-x)^n\left(a + b \log \frac{x}{1-x}\right) + b\left\{(1-x)^{n-1} + \frac{1}{2}(1-x)^{n-2} + \dots + \frac{1}{n}\right\}.$$

Del resto la difficoltà incontrata per $\gamma = 1$ si può evitare osservando che l'equazione proposta non viene alterata nella forma, a parte il cambiamento di γ in $1 + \alpha + \beta - \gamma$, quando vi si sostituisce $1 - x$ ad x. Ne segue che si può scrivere anche

$$y = a(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, 1-\alpha-\beta+\gamma, 1-x) + b f(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma, 1-x),$$

ed in particolare $y = a(1-x)^{-\alpha} + b f(\alpha, 1, 1+\alpha, 1-x)$ per $\beta = \gamma = 1$.

---

* segnalatimi dal mio ex-discepolo D.r V. d'Escamard.