



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

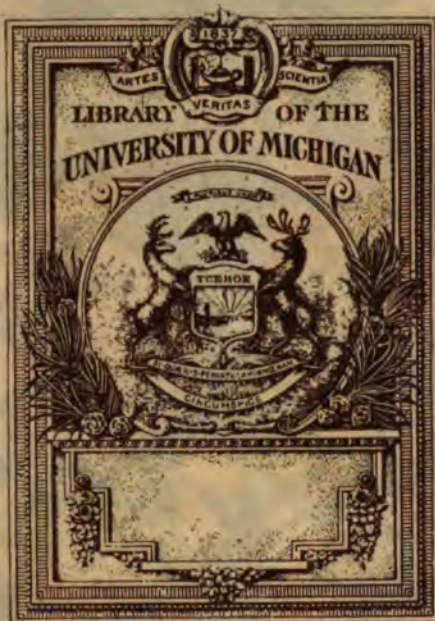
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

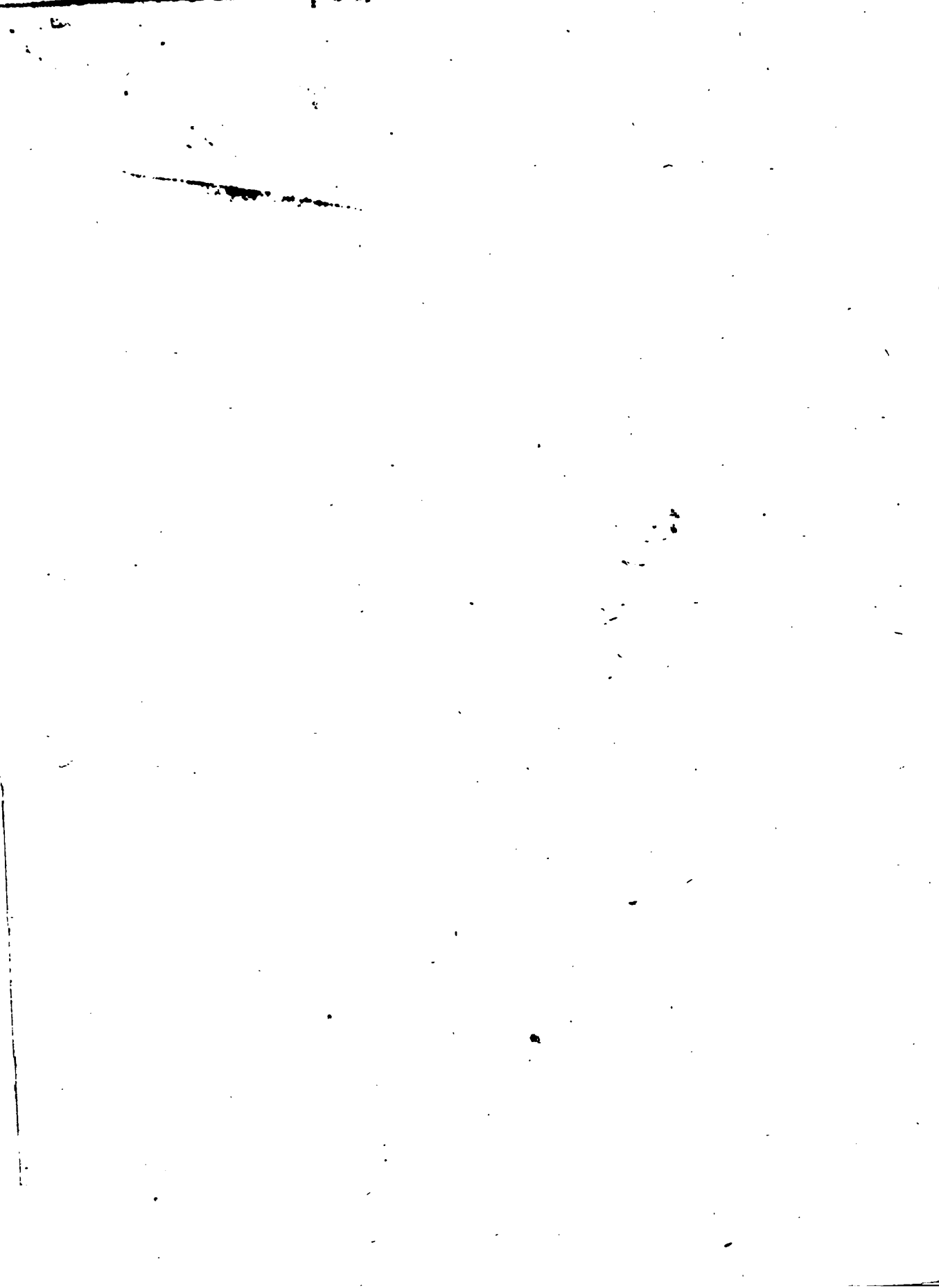
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>







Handwritten signature or name, possibly "Handlan", written in cursive script.



E L E M E N S
D U
CALCUL INTÉGRAL

SECONDE PARTIE,

PAR LES PP.

LE SEUR, ET JACQUIER,

*De la Société Royale de Londres, de l'Académie de Berlin,
de l'Institut de Boulogne, & Correspondans
de l'Académie Royale des Sciences.*

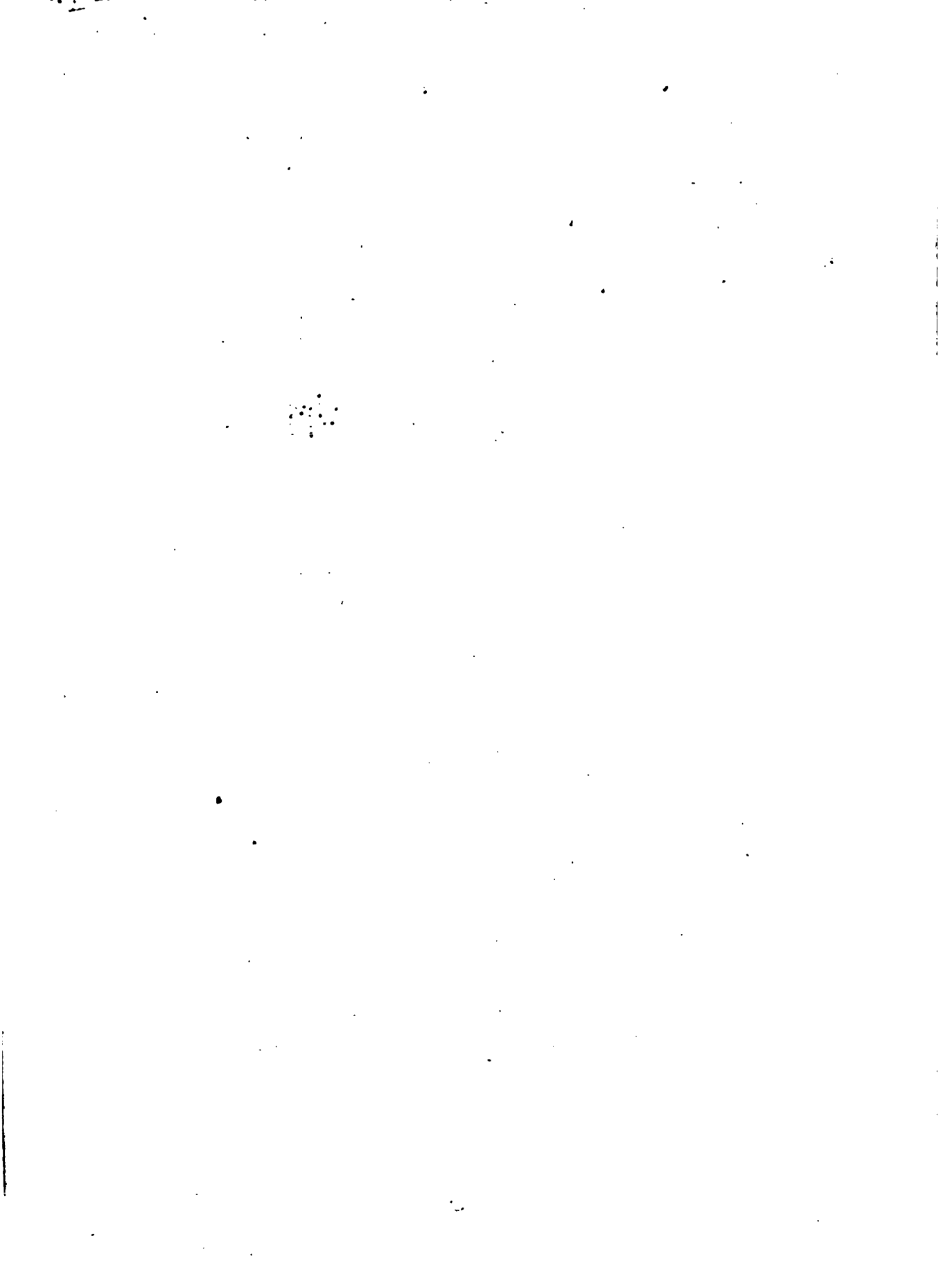


A PARIS, RUE DAUPHINE,

*Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, fils aîné, Libraire
du Roi pour le Génie & l'Artillerie.*

M. DCC. LXVIII. (1768)

Avec Approbation.





AVERTISSEMENT.

QUOIQUE nous ayons exposé le plan de nôtre Ouvrage dans la Préface qui est à la tête du premier Volume, nous croyons cependant, d'après les réflexions, que nous a communiquées un Sçavant illustre, & dont nous respectons les conseils, devoir ajouter un Avertissement à cette seconde Partie. Nous avons rendu dans la Première en general, les hommages de respect dû aux grands Hommes, dont les découvertes ont enrichi nôtre travail: les noms celebres de M.^{rs} Euler, D'Alembert, Clairaut, Fontaine, de la Grange, de Condorcet, font plus d'honneur à ceux

qui les citent, qu'ils n'en font à ces Hommes illustres bien supérieurs à nos foibles eloges. Si nous n'avons pas honoré plutôt nôtre Ouvrage par des Noms aussi glorieux, c'est par ce que dans les decouvertes, que ces sçavants Mathematiciens ont faites, nous nous sommes presque toujours ecartés de leur forme de démontrer, nous faisant une loi de suivre nos principes, & d'y ramenér ce qui étoit decouvert par les autres. Or il eût été injuste dans des choses, qui nous appartiennent en partie, & qui peuvent être vicieuses dans la forme, de citer les Inventeurs, aux quels on auroit pû attribuer des fautes, qui étoient a nous. D'ailleurs il eût falû quelques fois entrer dans des altercations trop éloignées de nôtre but, en recherchant les premiers Auteurs d'une decouverte, qui font souvent très-douteux.

Il reste à nous disculper d'une varieté de methodes, dont nous nous sommes servis dans plusieurs occasions. Nous avons crû cette diversité utile,

pour indiquer aux Commencants les différentes routes dans la recherche de la verité. De plus il nous paroît que parmi les différentes methodes de Calculs, on peut rarement en assigner une, qui soit generalement la plus commode; il faut souvent varier les methodes selon les cas, pour une plus grande facilité.

Enfin la plus grande partie de ce dernier Volume ayant eté imprimé en nôtre absence, nous ne pouvons nous dispensér de renouveler publiquement nôtre reconnoissance à M.^r de Keralio, qui a pris le soin de verifiér nos Calculs, & qui ne nous permettoit pas de le louer autant que nous l'estimons; il regarderoit nos eloges comme une faute qu'il voudroit corriger.





E L E M E N S

D U

CALCUL INTÉGRAL :



SECONDE PARTIE.

De l'intégration des Différentielles
à plusieurs variables.

CHAPITRE PREMIER.

*De l'intégration des Différentielles du premier ordre
qui contiennent plusieurs variables mêlées,
& dont les Intégrales exactes sont
des suites finies.*

CCCXXVI.

Lorsque les variables d'une différentielle du premier ordre sont séparées, on peut toujours en trouver l'intégrale exacte algébriquement, ou par la quadrature des courbes, en cherchant séparément par les

A

methodes de la premiere Partie les intégrales de chacun des termes, dont cette différentielle est composée, & qui ne renferment qu'une seule variable, & en unissant ces intégrales particulieres avec leurs signes $+$ ou $-$, pour en former l'intégrale entiere, a laquelle on ajoute la constante suivant la regle (Art. XIV.). Mais quand les variables sont mêlées, c'est a dire, multipliées, ou divisées les unes par les autres dans la différentielle qu'on veut intégrer, on a besoin d'autres methodes, soit pour reduire cette différentielle a une autre, dans laquelle les variables soient separées, soit pour l'intégrer sans separer auparavant les variables ou les indeterminées. Nous expliquerons dans ce Chapitre les principales methodes pour intégrer, sans separation de variables, les différentielles du premier ordre, qui naissent de la différentiation des quantités exprimées par des suites finies, qu'on appelle *fonctions finies*.

CCCXXVII.

Une différentielle de cette sorte etant proposée, on peut d'abord essayer de l'intégrer en la comparant avec les formules generales de même espece, dont on connoît les intégrales par le Calcul différentiel. On sçait, par exemple, que la différentielle du produit xy est $x dy + y dx$, que celle de la fraction $\frac{x}{y}$ est

$\frac{y dx - x dy}{y^2}$ que celle de la puissance n^m est $n n^{m-1} dn$,

que celle du logarithme de n est $\frac{dx}{x}$, &c., n & y re-

présentent dans ces formules générales des variables quelconques, simples ou composées, comme on voudra.

Donc, si la différentielle proposée peut se réduire par substitution à quelqu'une de ces formules générales de différentielles, on en trouvera tout d'un coup l'intégrale, en faisant les mêmes substitutions dans l'intégrale connue de cette formule générale. C'est ainsi qu'en

comparant la différentielle $m u^n n^{m-1} du + n n^m u^{n-1} du$ avec la formule de même espèce $y dx + x dy$, on trou-

ve qu'en substituant u^n pour y , & n^m pour x dans cette formule, elle se réduit à la différentielle proposée; d'où l'on conclut qu'en faisant les mêmes substitutions

dans xy intégrale de $y dx + x dy$, on aura $u^n n^m$ pour l'intégrale de $m u^n n^{m-1} dx + n n^m u^{n-1} du$. On voit de même que l'intégrale de la différentielle

$$\frac{m u^n z^{m-1} dz + n z^m u^{n-1} du}{u^n z^m}$$

de $z^m u^n$; par ce qu'en substituant $z^m u^n$ au lieu de n

dans la différentielle $\frac{dx}{x}$, on la réduit à la différentielle

proposée; d'où l'on conclut qu'en substituant aussi

$x^m u^n$ au lieu de x dans $L. x$, qui est l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, on aura $L. x^m u^n$ pour l'intégrale de la différentielle proposée. Il est clair qu'on pourroit faire ainsi des Tables de différentielles très-complicées, par le moyen desquelles on auroit des intégrales très-difficiles. Mais, quoique ce moyen d'intégration soit souvent fort utile, surtout pour ceux qui sont fort exercés dans le Calcul différentiel, il n'est pas aisé de l'employer, quand les différentielles qu'on se propose d'intégrer ne sont pas reductibles à une forme déjà connue; par ce qu'on n'a point de règle générale & sûre pour le choix des formules, ny pour les substitutions. Il faudra alors se servir des méthodes, que nous allons expliquer après quelques préparations.

CCCXXVIII.

Une différentielle quelconque égale à zero se nomme *équation différentielle*; & on l'appelle simplement *quantité*, ou *fonction différentielle*, lorsqu'on ne la suppose point égale à zero. Cette distinction est nécessaire dans plusieurs cas; car si on différentie une quantité variable, qui n'est point en forme d'équation, la différentiation ne pourra faire évanouir, que les quantités constantes, qui ne sont point mêlées avec les variables. Mais si la quantité qu'on différentie est en forme d'équation, la

Différentiation pourra faire disparaître, entre les constantes, quelque facteur mêlé de variables, qui multiplie, ou divise toute l'équation différentielle. Par exemple, en différenciant la quantité $ax^2 - by^2 + c$, dans laquelle c est supposée constante, on aura la fonction différentielle $2axdx - 2byydy$. Mais, si on suppose $ax^2 - by^2 + c = 0$, & qu'on différencie, on aura l'équation différentielle $2axdx - 2byydy = 0$, laquelle, étant divisée par le facteur commun & variable x , se réduit à l'équation $2adx - 2bydy = 0$. De même la fonction différentielle $\frac{axydx + by^2dx - cxy^2dy}{xx + yy}$ étant égalée à zéro, & divisée par le facteur commun $\frac{y}{xx + yy}$ devient $axdx - bydy = 0$.

CCCXXIX.

On appelle *exacte*, ou *complète*, la quantité différentielle, dont l'intégrale est une fonction finie de variables & de constantes; ou bien c'est une différentielle, qui peut naître de la différentiation d'une fonction en termes finis. Ainsi $2axdx - byydy$ est une différentielle exacte ou complète, par ce que son

intégrale $ax^2 - by^2$ est une fonction finie, ou par ce qu'on la peut trouver par la différentiation de cette fonction.

CCCXXX.

Supposé que $A, B, C, D, \text{&c.}$ soient des fonctions différentes des variables $x, y, z, u, \text{&c.}$, & de constantes, l'expression $\frac{(dA)}{dy}$, dans laquelle dA est entre deux parenthèses, signifie le quotient qu'on trouve en divisant par dy la différentielle de la fonction A , prise en ne faisant varier que y , & en regardant comme constantes toutes les autres variables, dont A peut être composée. De même $\frac{(dB)}{dx}$, ou $\frac{(dC)}{dz}$ expriment les quotiens qu'on trouve, en divisant par dx , ou par dz les différentielles dB , ou dC , prises en ne regardant comme variable, que x , dans la fonction B , ou que z dans la fonction C , & considérant toutes les autres variables qui sont dans B , ou dans C , comme des constantes. Supposé, par exemple, que $A = ax^m y^n$, cette expression $\frac{(dA)}{dy}$ signifiera $nax^m y^{n-1}$; si $B = x^2 y^3 z$, l'expression $\frac{(dB)}{dx}$ signifiera $2y^3 zn$; car la différentielle

de $x^n y^n$ prise dans la supposition que y seule soit variable, & que x soit constante est $n x^n y^{n-1} dy$, & $\frac{dA}{dy} = n x^n y^{n-1}$.

CCCXXXI.

LEMME. Supposé que A soit une fonction de deux variables x , & y , & de constantes, & qu'on ait trouvé l'intégrale $S. Adx$, en prenant x pour variable & y pour constante; si on différencie de nouveau cette intégrale $S. Adx$, en faisant varier y , traitant x comme constante, la différentielle $d.S. Adx$ sera $dy. X$

$S. \frac{dA}{dy} dx$. Pour donner une idée plus nette de cette

proposition, soit $A = x^m y^n$, & $Adx = y^n x^m dx$. L'intégrale $S. Adx$ de la différentielle Adx , en prenant y

pour constante, sera $\frac{y^n x^{m+1}}{m+1}$; & la différentielle de cette

intégrale, en prenant y pour la seule variable, & x

pour constante sera $\frac{n x^{m+1} y^{n-1} dy}{m+1}$. Il faut donc démon-

trer que cette différentielle est $= dy. S. \frac{dA}{dy} dx$, dA

étant la différentielle de A prise en faisant varier y , &

regardant x comme constante; ce qui est évident dans

cet exemple, puisque $\frac{(dA)}{dy} = n^m y^{n-1}$, $\frac{(dA)}{dy} d n =$
 $n y^{n-1} n^m d n$, $S. \frac{(dA)}{dy} d n = S. n y^{n-1} n^m d n =$
 $\frac{n y^{n-1} n^{m+1}}{m+1}$, en traitant y comme constante dans cette

intégration. Donc $\frac{n x^{m+1} y^{n-1} dy}{m+1} = dy S. \frac{(dA)}{dy} d n$.

En general la quantité $S. A d n$ etant composée de deux variables n & a , en la différentiant tour a tour felon n & a , on aura la différentielle totale $A d n + d a . S. \frac{(dA)}{da} d n$. Car supposons que A soit l'ordonnée d'une courbe, dont a est le parametre, & $d n$ la différentielle de l'abscisse; en faisant varier l'abscisse, le parametre demeurant le même, il est clair que la différentielle de l'aire sera $A d n$. Mais si on fait ensuite varier le parametre a , l'abscisse restant la même, il est evident que la différentielle $A d n$ sera augmentée d'une seconde différentielle, qui ne peut resulter que de la variation du parametre a , en différentiant l'ordonnée A . Il faut donc différentier A en faisant varier a seulement, & en multipliant la différentielle, qui en proviendra par la différentielle $d n$ de l'abscisse; il est clair qu'on aura la seconde partie de la différentielle cherchée. Or si on différentie A en ne supposant que a de variable, le coefficient de la différentielle da e-

rant,

tant, après la différentiation, $\frac{(dA)}{dx}$, on voit par les différentiations précédentes, que la seconde différentielle cherchée sera $S. \frac{(dA)}{dx} \cdot dx \cdot da$. Mais, comme la quantité dont on fait varier le paramètre est la même dans la même courbe, il est clair que da , qui est variable par rapport à la première Partie de la différentielle, sera constante dans la seconde, & par conséquent on pourra le mettre hors du signe d'intégration, ce qui changera l'expression précédente en celle-cy, $da \cdot S. \frac{(dA)}{dx} dx$. Donc la différentielle totale de $S. Adx$ est $Adx + da \cdot S. \frac{(dA)}{dx} dx$. Cette démonstration ne peut avoir aucune difficulté, si on la compare avec les exemples précédents.

On pourroit aussi démontrer ce Lemme d'une autre manière. Supposons M une fonction de x , de y & de constantes; & soit Adx la différentielle de cette fonction, dans la supposition de y constante. Si on veut avoir la différentielle totale, on supposera qu'elle soit $Adx + Bdy$. Or B doit être tel que $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$

(XXVII.) Donc $dB = \frac{dA}{dy} dx$, & en intégrant dans la supposition de x seule variable, on aura $B = S. \frac{dA}{dy} dx$,

& $Bdy = dy S. \frac{dA}{dy} dx$. Mais Adx est la différentielle de M , en regardant x seule comme variable. Donc la différentielle totale $Adx + Bdy = Adx + dy S. \frac{dA}{dy} dx$.

CCCXXXII.

THEOREME. 1.° $Adx + Bdy$ étant une quantité différentielle du premier ordre a deux variables x & y , dans laquelle A & B font des fonctions de ces deux variables, & de constantes; cette différentielle ne peut être exacte, a moins qu'on n'ait l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; & si on a cette equation, la différentielle $Adx + Bdy$ sera exacte.

2.° $Adx + Bdy + Cdz$ étant une différentielle du premier ordre a trois variables x, y, z , dans laquelle A, B, C representent des fonctions composées de ces mêmes variables, & de constantes, cette différentielle ne peut être exacte, a moins qu'on n'ait ces trois equations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$; & si on a ces trois equations, la différentielle $Adx + Bdy + Cdz$ sera complete.

3.° $Adx + Bdy + Cdz + Ddu + Ec$ étant une quantité différentielle du premier ordre a tant de va-

riables $x, y, z, u, \text{ \& } c.$ qu'on voudra, dans laquelle $A, B, C, D, \text{ \& } c.$ representent des fonctions composées de ces mêmes variables, & de constantes; cette différentielle ne peut être complete, a moins que deux de ses termes quelconques pris a volonté ne fassent toujours une différentielle exacte, en ne regardant comme variables, que les deux seules quantités, dont les différentielles se trouvent dans ces deux termes, en sorte qu'on ait autant d'equations, comme $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\text{ \& } c.$, qu'il y a de manieres de combiner les lettres, ou fonctions $A, B, C, D, \text{ \& } c.$ deux a deux; & lorsque ces equations auront lieu, la différentielle $A dx + B dy + C dz + D du + \text{ \& } c.$ sera complete.

Nous avons démontré (Part. I. Chap. I.) la premiere partie de chacun des cas de ce Theoreme; & la seconde partie, qui est l'inverse de la premiere est renfermée dans le Lemme precedent.

CCCXXXIII.

PROBLEME. Une quantité différentielle quelconque du premier ordre a tant de variables qu'on voudra, étant proposée, trouver si elle est complete, &, lorsqu'elle est exacte, trouver son intégrale.

SOLUTION. On cherchera d'abord si la différentielle proposée fournit toutes les équations, qui doivent avoir lieu pour la rendre complète, suivant le Theoreme precedent. Si elle ne donne point ces équations, on l'abandonnera; si elle les donne, on trouvera son intégrale algebrique, ou dependante des quadratures par la methode suivante, que nous avons démontrée (Part. I. Chap. I.).

Soit $A dx + B dy + C dz + D du + \text{C}c$. la quantité différentielle proposée, qu'on suppose complète. On prendra (par la Premiere Partie de ces Elemens) l'intégrale $S. A dx$ du premier terme $A dx$, en ne supposant de variable, que x , & en regardant comme constantes toutes les autres variables $y, z, u, \text{C}c$, qui peuvent se trouver dans la fonction A . Ensuite on prendra de même l'intégrale $S. B dy$ du second terme $B dy$, en ne supposant que y de variable, & traitant toutes les autres quantités comme constantes dans la fonction B ; & on rejettera de cette intégrale $S. B dy$ tous les termes qui se trouvent déjà dans l'intégrale $S. A dx$, & on ajoutera le reste R a l'intégrale $S. A dx$, pour avoir la somme $S. A dx + R$. On continuera a prendre de la même maniere l'intégrale $S. C dz$, en traitant seulement z comme variable, & toutes les autres comme constantes; on rejettera encore de cette intégrale $S. C dz$ tous les termes qui se trouvent déjà dans

l'intégrale trouvée $S. Adx + R$, & on ajoutera le reste que nous désignerons par R' à l'intégrale trouvée $S. Adx + R$, pour avoir $S. Adx + R + R'$. Ayant pris ainsi l'une après l'autre les intégrales de tous les termes de la quantité différentielle proposée, on aura son intégrale exacte, à laquelle on pourra ajouter une constante. On s'assurera qu'on ne s'est point trompé dans l'intégration en différentiant l'intégrale trouvée, & en comparant la différentielle avec la proposée, à laquelle elle doit être égale. Au reste on voit bien qu'on peut commencer & continuer l'intégration par quel terme on voudra, & qu'on doit choisir les termes les plus commodes pour le calcul.

On peut encore abréger quelquefois le calcul en opérant de cette manière. On prend d'abord l'intégrale $S. Adx$ du premier terme, comme nous venons de le dire; ensuite, au lieu de prendre l'intégrale $S. Bdy$ du second terme, on différentie l'intégrale trouvée $S. Adx$ en ne supposant que y de variable, on ôte cette différentielle du second terme Bdy , & s'il reste quelque chose, on prend l'intégrale de ce reste dans la même supposition, que y seule soit variable, & désignant cette intégrale par R , on l'ajoute à la première intégrale $S. Adx$, pour avoir la somme $S. Adx + R$, comme dans la première méthode. Après cela, au lieu de prendre l'intégrale $S. Cdx$ du troisième terme dans

la supposition que la seule x soit variable, on différencie la somme $S. Adx + R$ dans la même supposition, on ôte cette différentielle du troisième terme Cdx , & s'il reste quelque chose, on prend l'intégrale de ce reste, encore dans la même supposition de x seule variable, & designant cette intégrale par R' , on l'ajoute à la première somme $S. Adx + R$, pour avoir la seconde somme $S. Adx + R + R'$. On continue de la même manière, jusqu'à ce qu'on soit parvenu au dernier terme de la quantité différentielle proposée; & la dernière somme qu'on trouve est l'intégrale cherchée, à laquelle on peut ajouter une constante. Nous avons déjà donné quelques exemples de ce Problème dans la première partie, auxquels nous en ajouterons icy plusieurs autres, comme en leur propre lieu.

EXEMPLE I. On propose la quantité différentielle
 $axy + ay dx + 2bx dx + 2cy dy = (ay + 2bx) dx + (ax + 2cy) dy = Adx + Bdy$, en faisant $A = ay + 2bx$, & $B = ax + 2cy$. La différentielle de A , en supposant x constante, & y variable, est ady , par conséquent $\frac{dA}{dy} = a$; la différentielle de B , en supposant y constante, & x variable, est adx par conséquent $\frac{dB}{dx} = a$. Donc $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, & la différentielle proposée est complète. L'intégrale du premier terme Adx ,

+ B

en supposant y constante, & x variable, est $ayx + bxx$; celle du second terme Bdy ; en supposant x constante, & y variable, est $axy + cy^2$, dont il faut rejeter axy , qui se trouve déjà dans l'intégrale du premier terme $S.Adx$. L'intégrale cherchée sera donc $ayx + bxx + cy^2$, qui est exacte, puisqu'en la différentiant, on retrouve la différentielle proposée.

On trouve la même intégrale par la seconde méthode. Car en différentiant l'intégrale $S.Adx$, ou $ayx + bxx$, dans la supposition que y seule soit variable, on a la différentielle $andy$, qui, étant ôtée de Bdy , ou de $andy + 2cydy$, laisse pour reste $2cydy$, dont l'intégrale est cy^2 ; par conséquent l'intégrale de la différentielle proposée est $ayx + bxx + cy^2$, comme par l'autre méthode.

EXEMPLE II. La quantité différentielle proposée

est $\frac{y^4 dx - x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy}{(xx + yy)^2} = Adx + Bdy$, en faisant

$A = \frac{y^4 - x^2 y^2}{(xx + yy)^2}$, & $B = \frac{2x^3 y}{(xx + yy)^2}$. On trouve d'abord

que cette différentielle est exacte, par ce qu'elle donne

l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$. L'intégrale $S.Adx$, en sup-

posant y constante, & x variable, est $\frac{xy^2}{xx + yy}$, & en

supposant x constante, & y variable, l'intégrale $S.Bdy$

est aussi $\frac{xy^2}{xx+yy}$, qu'on doit rejeter, par ce qu'elle est la même que celle du premier terme $S. Adx$. Donc l'intégrale cherchée est $\frac{xy^2}{xx+yy}$ par la première méthode.

Par la seconde méthode. En différenciant l'intégrale $S. Adx$, ou $\frac{xy^2}{xx+yy}$ dans la supposition de y variable, & de x constante, on trouve sa différentielle = $\frac{2x^2y dy}{(xx+yy)^2}$ la même que Bdy , d'où l'on conclut que l'intégrale entière de la différentielle proposée est $\frac{xy^2}{xx+yy}$.

EXEMPLE III. On propose la différentielle $dy \times L.n + \frac{y dx}{x} + \frac{a dx}{aa+xx} = Adx + Bdy$, en faisant $A = \frac{y}{x} + \frac{aa}{aa+xx}$, & $B = L.n$. On trouve que l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$ a lieu, & par conséquent que la différentielle est complète. L'intégrale $S. Adx$ du premier terme, en ne supposant que x variable, est $y L.n + S. \frac{a dx}{aa+xx} = y L.n + N$, N étant un arc de cercle, dont le rayon est a , & la tangente x . L'intégrale $S. Bdy$ du second terme prise dans la supposition de x constante, & de y variable est $y L.n$, qu'on doit rejeter,

ter, par ce qu'elle se trouve déjà dans l'intégrale $\int A dx$.
Donc l'intégrale cherchée est $\int Lx + N$. On trouve
la même intégrale par la seconde méthode.

EXEMPLE IV. Différentielle proposée

$$\frac{zy dx + zx dy + 3az^2 y^2 dy - xy dz}{zz} = A dx + B dy + C dz,$$

en faisant $A = \frac{y}{z}$, $B = \frac{x}{z} + 3ay^2$, $C = -\frac{xy}{zz}$; on

trouve les trois équations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{1}{z} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} =$

$-\frac{y}{zz} = \frac{(dC)}{dx}$, & $\frac{(dB)}{dz} = -\frac{x}{zz} = \frac{(dC)}{dy}$. La différen-

tielle proposée est donc complète. L'intégrale $\int A dx$,

en supposant y & z constantes, est $\frac{y^2 x}{z}$; l'intégrale

$\int B dy$, en ne supposant que y variable, est $\frac{xy}{z} + ay^3$;

dont il faut rejeter $\frac{xy}{z}$, qui se trouve déjà dans l'in-

tégrale $\int A dx$, & écrire la somme $\frac{xy}{z} + ay^3$. Enfin

l'intégrale $\int C dz$, dans la supposition que z seule soit

variable, est $\frac{xy}{z}$, qu'il faut encore rejeter, & marquer

pour l'intégrale entière $\frac{xy}{z} + ay^3$.

On la trouve de même par la seconde méthode.

Car si on différentie l'intégrale $\int A dx$, ou $\frac{xy}{z}$ en ne

faisant varier que y , on aura $\frac{x dy}{dz}$, qu'on ôte de $B dy$,
 ou de $\frac{x dy}{z} + 3 ay^3 dy$: il reste $3 ay^3 dy$, dont l'inté-
 grale est ay^3 , qu'on ajoute a la premiere intégrale
 trouvée $S. Adx$, ou $\frac{xy}{z}$, la somme est $\frac{xy}{z} + ay^3$. On
 différentie cette somme, dans la supposition que x seu-
 le soit variable, on trouve $-\frac{y^3 dz}{z^2}$, qu'on ôte de
 $C dz$, & par ce qu'il ne reste rien, on marque $\frac{xy}{z} +$
 ay^3 pour l'intégrale cherchée.

EXEMPLE V. On propose la différentielle a qua-
 tre variables $ax dx + 3x^2 dx + bxdy + 2cydy + axdz$
 $+ bydz + u^2 dz + 2xudu + 3u^2 du = Adx + Bdy +$
 $Cdz + Ddu$, en supposant $A = ax + 3x^2, B = bx +$
 $2cy, C = ax + by + uu, D = 2xu + 3u^2$; on trouve
 les six equations $\frac{(dA)}{dy} = 0 = \frac{(dB)}{dx}, \frac{(dA)}{dz} = a = \frac{(dC)}{dx},$
 $\frac{(dA)}{du} = 0 = \frac{(dD)}{dx}, \frac{(dB)}{dz} = b = \frac{(dC)}{dy}, \frac{(dB)}{du} = 0 =$
 $\frac{(dD)}{dy}, \frac{(dC)}{du} = 2x = \frac{(dD)}{dz}$; d'ou l'on conclut que la
 différentielle proposée est exacte. Pour en trouver l'in-

tégrale par la première méthode, on prendra l'intégrale du premier terme $A dx$, en supposant x seule variable, & toutes les autres constantes, & l'on aura $S. A dx = axx + x^3$. On trouvera, en supposant y seule variable dans B , que $S. B dy = bxy + cy^2$; & que $S. C dz = axz + byz + uuz$, en supposant la seule z variable dans $C dz$; on rejettera de $S. C dz$ les termes $axz + byz$, qui se trouvent déjà dans les premières intégrales $S. A dx + S. B dy$, & on ajoutera le reste $u^2 z$ aux autres intégrales, pour avoir la somme $axx + x^3 + bxy + cy^2 + u^2 z$. Enfin en supposant que u seule soit variable dans le dernier terme $D du$, on trouve $S. D du = xuu + u^3$, dont il faut rejeter le terme xuu qui se trouve dans les intégrales précédentes, & on aura pour l'intégrale cherchée la somme $axx + x^3 + bxy + cy^2 + u^2 z + u^3$, qui est exacte; puisqu'en la différenciant, on retrouve la différentielle proposée.

On trouve la même intégrale par la seconde méthode. Car dans la supposition, que la seule x soit variable, on trouve $S. A dx = axx + x^3$, dont la différentielle, en faisant varier la seule y , est zero. L'intégrale $S. B dy$, dans la supposition que la seule y soit variable, est $bxy + cy^2$. En différenciant la somme

$axx+x^3+bx y+cy^2$, ne faisant varier que x , on a la différentielle $axdx+bydx$, qu'on ôte de Cdx , ou de $axdx+bydx+u^2dx$; il reste u^2dx , dont l'intégrale, dans la supposition de x seule variable, est u^2x , qu'on ajoute a la somme déjà trouvée, pour avoir la seconde somme $axx+x^3+bx y+cy^2+u^2x$. On différentie cette somme en supposant tout constant, excepté u ; & on trouve la différentielle $2xudu$, qu'on retranche de Ddu , ou de $2xudu+3u^2du$; le reste est $3u^2du$, dont l'intégrale u^3 , étant ajoutée a la seconde somme, donne pour l'intégrale cherchée, $axx+x^3+bx y+cy^2+u^2x+u^3$, telle qu'on l'avoit trouvée par la premiere methode.

CCCXXXIV.

Il est evident qu'on peut toujours intégrer par les methodes du Probleme precedent l'équation différentielle quelconque du premier ordre $A dx+B dy+C dz+D du+Gc.=0$, lorsque la quantité différentielle $A dx+B dy+C dz+D du+Gc.$, qui est égale a zero, est une différentielle exacte, ou qu'elle fournit les equations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dA)}{du} = \frac{(dD)}{dx}$;

Cc., qui sont nécessaires pour la rendre complète. Mais, si elle ne donne pas ces équations, ou si elle n'est pas complète, lorsqu'on ne la considère pas comme égale à zéro; on n'en doit pas conclure qu'elle n'a point d'intégrale exacte, & en termes finis, lorsqu'elle est en forme d'équation, ou qu'on la considère comme égale à zéro. Car il pourroit se faire (Art. CCCXXVIII.) qu'elle eût perdu après la différentiation un facteur variable, que nous désignerons par *M*, de sorte que, si on retrouvoit ce facteur, & qu'on rétablît la différentielle par la multiplication à la forme $MA dx + MB dy + MC dz + MD du + Cc. = 0$, qu'elle avoit avant qu'on l'eût divisée par *M*, elle deviendrait une différentielle complète d'une fonction finie *V* composée des variables *x, y, z, u, Cc.*, & de constantes; & pour lors elle donneroit les équations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$, $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$, $\frac{(d.MA)}{du} = \frac{(d.MD)}{dx}$, *Cc.*, qui sont nécessaires pour qu'elle soit complète, & on auroit $MA du + MB dy + MC dz + MD du + Cc. = dV$.

CCCXXXV.

Soit proposée, par exemple, l'équation différentielle $2ax - 2by dx - bndy = 0$, ou $A dx + B dy = 0$, en supposant $A = 2ax - 2by$, & $B = -bn$; par con-

sequent $\frac{(dA)}{dy} = -2b$, & $\frac{(dB)}{dx} = -b$, ce qui fait

voir que la différentielle $2adx - 2bydx - bxdy$, ou $A dx + B dy$ n'est point exacte. Neantmoins on ne doit pas conclure de la que l'équation $A dx + B dy = 0$ ne puisse pas acquérir une forme qui la rende intégrable, en multipliant tous les termes par un facteur variable M , & en la réduisant à la forme $MA dx + MB dy = 0$. Mais supposé que $MA dx + MB dy$ soit une diffé-

rentielle complete, on aura l'équation $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{M(dA)}{dy} + \frac{A(dM)}{dy} = \frac{M(dB)}{dx} + \frac{B(dM)}{dx} = 0$; equation qui fera

d'une grande utilité pour déterminer le facteur M . Car la difficulté est réduite à prendre pour M une fonction des variables x , y , & de constantes assez generale, & avec des exposans & des coefficients indeterminés, pour que cette fonction étant substituée au lieu de M dans l'équation que nous venons de trouver, elle en fasse évanouir tous les termes homologues, & fournisse des equations particulieres pour déterminer les exposans & les coefficients indeterminés.

Prenons pour M dans nôtre exemple la fonction $x^m y^n$ avec les exposans indeterminés m & n , nous aurons $\frac{(dM)}{dy} = n x^m y^{n-1}$, $\frac{(dM)}{dx} = m y^n x^{m-1}$, $\frac{M(dA)}{dy}$

$= -2bn^m y^n$, & $\frac{B(dM)}{dx} = -bmy^n x^m$. Donc l'é-

quation $\frac{M(dA)}{dy} + \frac{A(dM)}{dy} - \frac{M(dB)}{dx} - \frac{B(dM)}{dx} = 0$

deviendra $-2bn^m y^n + 2anx^m y^{n-1} - 2bnx^m y^n +$

$bx^m y^n + bmy^n x^m = 0$, ou $-bn^m y^n - 2bnx^m y^n +$

$bmy^n x^m + 2anx^m y^{n-1} = 0$, & égalant à zero tous

les termes homologues, on aura ces deux equations $-$

$b - 2bn - bm = 0$, & $2an = 0$, ce qui donne $n = 0$;

& $m = 1$; donc le facteur $M = x^m y^n = x$; ainsi l'équa-

tion complete sera $2andy - 2byxdx - bx^2 dy = 0$, &

en prenant les intégrales de part & d'autre, on aura

$ax^2 - bx^2 y = C$ constante.

Si on avoit l'équation différentielle $aydx + bxdy$, qu'on voit par les methodes precedentes n'être pas complete, on trouveroit par le même calcul que cy-devant

le facteur $M = x^m y^n = \frac{1}{xy}$, & la différentielle complet-

te, en retablissant le facteur qui avoit disparu par la

multiplication, deviendroit $\frac{aydx + bxdy}{xy} = \frac{adx}{x} + \frac{bdy}{y}$,

dont l'intégrale exacte est $aL.x + bL.y = L.x^a y^b$. Nous

avons rapporté brièvement ces exemples aisés de deux

facteurs, dont l'un avoit disparu par la division, l'autre

par la multiplication. Mais nous allons éclaircir cette méthode importante dans la suite de ce Chapitre.

CCCXXXVI.

Supposé que dans l'équation différentielle à trois variables $A dx + B dy + C dz = 0$, la quantité $A dx + B dy + C dz$ ne soit pas une différentielle complète, & qu'on veuille la rendre exacte, en la multipliant par un facteur variable M ; en regardant la chose comme faite, la différentielle $MA dx + MB dy + MC dz$ fera exacte, & donnera par conséquent les trois équations

$$\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}, \quad \frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}, \quad \frac{(d.MB)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dy},$$

ou les trois suivantes

$$\text{I.} \quad \frac{A(dM)}{dy} + \frac{M(dA)}{dy} = \frac{B(dM)}{dx} + \frac{M(dB)}{dx}$$

$$\text{II.} \quad \frac{A(dM)}{dz} + \frac{M(dA)}{dz} = \frac{C(dM)}{dx} + \frac{M(dC)}{dx}$$

$$\text{III.} \quad \frac{B(dM)}{dz} + \frac{M(dB)}{dz} = \frac{C(dM)}{dy} + \frac{M(dC)}{dy}$$

Par la première de ces trois équations on trouve

$$\frac{(dM)}{dy} = \frac{B(dM)}{A dx} + \frac{M(dB)}{A dx} - \frac{M(dA)}{A dy};$$

$$\text{par la troisième équation on a } \frac{(dM)}{dy} = \frac{B(dM)}{C dz} + \frac{M(dB)}{C dz} - \frac{M(dC)}{C dy},$$

d'où

d'où l'on tire $\frac{CB(dM)}{dx} + \frac{CM(dB)}{dx} - \frac{CM(dA)}{dy} =$

$\frac{AB(dM)}{dz} + \frac{AM(dB)}{dz} - \frac{AM(dC)}{dy}$; par la seconde equation

on a $\frac{(dM)}{dx} = \frac{A(dM)}{Cdz} + \frac{M(dA)}{Cdz} - \frac{M(dC)}{Cdx}$; en substituant

cette valeur de $\frac{(dM)}{dx}$ dans l'equation precedente on

trouve $\frac{AB(dM)}{dz} + \frac{BM(dA)}{dz} - \frac{BM(dC)}{dx} + \frac{CM(dB)}{dx}$

$- \frac{CM(dA)}{dy} = \frac{AB(dM)}{dz} + \frac{AM(dB)}{dz} - \frac{AM(dC)}{dy}$; en

retranchant de coté & d'autre le terme $\frac{AB(dM)}{dz}$, on

a $\frac{BM(dA)}{dz} - \frac{BM(dC)}{dx} + \frac{CM(dB)}{dx} - \frac{CM(dA)}{dy} =$

$\frac{AM(dB)}{dz} - \frac{AM(dC)}{dy}$; & en divisant par M qui se

trouve dans tous les termes, on aura l'equation de

condition $\frac{B(dA)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} -$

$\frac{A(dC)}{dy} + \frac{C(dA)}{dy} = 0$, qui fait connoître la relation

que les fonctions A, B, C doivent avoir entr'elles,

afin que la proposée $A dx + B dy + C dz = 0$ soit in-

tegrable; car autrement il fera impossible de trouver

le facteur M , qui la rende integrable. On voit par

là qu'il y a une infinité d'equations différentielles a trois

variables, qui ne peuvent provenir de la différentiation d'aucune equation en termes finis, & qu'il ne faut pas entreprendre d'intégrer.

CCCXXXVII.

Lors donc qu'on se propose d'intégrer une equation différentielle quelconque a trois variables $A dx + B dy + C dz = 0$, il faut commencer par examiner si elle donne les trois equations $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$, $\frac{(dA)}{dz} = \frac{(dC)}{dx}$, $\frac{(dB)}{dz} = \frac{(dC)}{dy}$; & si elle les donne, on l'intégrera par le Probleme precedent; si elle ne les donne point, on examinera si elle fournit l'equation de condition $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + Cc = 0$; & si cette equation n'a point lieu, on abandonnera la proposée comme impossible; mais si l'equation de condition a lieu, on cherchera le facteur variable M par la methode des indeterminées au moyen des trois equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$, $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$, $\frac{(d.MB)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dy}$.

CCCXXXVIII.

De même lorsqu'on se propose d'intégrer une equation différentielle a tant de variables qu'on voudra

$A dx + B dy + C dz + D du + E ds + Gc = 0$; il faut d'abord examiner, comme dans le Probleme precedent, si la différentielle $A dx + B dy + C dz + Gc$ est exacte, & alors l'intégrer par l'une ou l'autre methode du même Probleme. Si elle n'est point complete, pour sçavoir si elle pourra le devenir par la multiplication d'un facteur variable M , on supposera la chose faite, ou que la différentielle $MA dx + MB dy + MC dz + MD du + Gc$ est exacte. Il est evident par le Probleme precedent, que dans cette supposition toutes les différentielles de trois termes $MA dx + MB dy + MC dz$; $MA dx + MB dy + MD du$; Gc , qu'on peut former en prenant trois termes quelconques dans l'équation proposée, & multipliés par M seront des différentielles completes, pourvû qu'on y suppose constantes toutes les lettres, excepté les trois dont les différentielles sont dans ces trois termes. Donc (Art. CCCXXXVI.) on aura autant d'équations de condition de la même nature que $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} - \frac{A(dC)}{dy} + \frac{C(dA)}{dy} = 0$, qu'il y a de manieres de prendre les lettres ou fonctions A, B, C, D, E, Gc trois a trois; & si l'équation différentielle proposée $A dx + B dy + C dz + D du + E ds + Gc = 0$, ne donne point toutes ces equations de condition, il sera impossible de trouver le facteur M , & il faudra l'abandonner.

28 ELEMENS DU CALCUL INTE'GRAL

Mais si toutes les equations de condition ont lieu ; on cherchera M par la methode des indeterminées au

moyen des equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$, $\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$, $\mathcal{C}c.$

CCCXXXIX.

Il ne fera cependant pas necessaire d'examiner si toutes les equations de condition comme $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \mathcal{C}c. = 0$ ont lieu, par ce que quelques unes de ces equations suivent toujours des autres, en forte qu'ayant verifié celles-cy, on est sûr de celles qui n'en font que des conséquences. Pour le faire voir, pre-nons l'equation a quatre variables $A dx + B dy + C dz + D du = 0$, qui par la combinaison des quatre lettres A, B, C, D , donne les quatre equations de condition suivantes.

La 1.^{re} $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \frac{B(dA)}{dz} - \frac{A(dC)}{dy} + \frac{C(dA)}{dy} = 0$, qui est tirée de l'equation $A dx + B dy + C dz = 0$.

La 2.^{de} $\frac{B(dD)}{dx} - \frac{D(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{du} - \frac{B(dA)}{du} = 0$

$$\frac{A(dD)}{dy} + \frac{D(dA)}{dy} = 0, \text{ qui vient de l'equation } Adx + Bdy + Ddu = 0.$$

$$\text{La 3.}^{\text{me}} \frac{C(dD)}{dx} - \frac{D(dC)}{dx} + \frac{A(dC)}{du} - \frac{C(dA)}{du} = 0$$

$$\frac{A(dD)}{dz} + \frac{D(dA)}{dz} = 0, \text{ qui vient de l'equation } Adx + Cdz + Ddu = 0.$$

$$\text{La 4.}^{\text{me}} \frac{C(dD)}{dy} - \frac{D(dC)}{dy} + \frac{B(dC)}{du} - \frac{C(dB)}{du} = 0$$

$$\frac{B(dD)}{dz} + \frac{D(dB)}{dz} = 0, \text{ tirée de l'equation } Bdy + Cdz + Ddu = 0.$$

Or il est aisé de voir que, si l'on prend a volonté trois de ces equations de condition, la quatrieme en fera necessairement une suite. Prenant, par exemple, les trois premieres, on aura par la premiere

$$\frac{(dA)}{dy} = \frac{A(dC)}{Cdy} + \frac{B(dA)}{Cdz} - \frac{A(dB)}{Cdz} + \frac{(dB)}{dx} - \frac{B(dC)}{Cdx}$$

on aura par la seconde

$$\frac{(dA)}{dy} = \frac{A(dD)}{Ddy} + \frac{B(dA)}{Ddu} - \frac{A(dB)}{Ddu} + \frac{(dB)}{dx} - \frac{B(dD)}{Ddx}$$

$$\text{d'ou l'on tire } \frac{DA(dC)}{dy} + \frac{DB(dA)}{dz} - \frac{DA(dB)}{dz} - \frac{DB(dC)}{dx}$$

$$= \frac{CA(dD)}{dy} + \frac{CB(dA)}{du} - \frac{CA(dB)}{du} - \frac{CB(dD)}{dx}, \text{ ou}$$

$$\frac{BC(dD)}{dx} - \frac{BD(dC)}{dx} = \frac{CA(dD)}{dy} - \frac{DA(dC)}{dy} + \frac{CB(dA)}{du}$$

$$-\frac{CA(dB)}{du} - \frac{DB(dA)}{dz} + \frac{DA(dB)}{dz}. \text{ En multipliant}$$

tous les termes de la troisieme equation de condition par B , on aura

$$\frac{BC(dD)}{dx} - \frac{BD(dC)}{dx} + \frac{BA(dC)}{du} - \frac{BC(dA)}{du} - \frac{BA(dD)}{dz} \\ + \frac{BD(dA)}{dz} = 0,$$

ou

$$\frac{BC(dD)}{dx} - \frac{BD(dC)}{dx} = \frac{BC(dA)}{du} - \frac{BA(dC)}{du} + \frac{BA(dD)}{dz} \\ - \frac{BD(dA)}{dz}$$

on aura donc l'equation

$$\frac{CA(dD)}{dy} - \frac{DA(dC)}{dy} + \frac{CB(dA)}{du} - \frac{CA(dB)}{du} - \frac{DB(dA)}{dz} + \\ \frac{DA(dB)}{dz} = \frac{BC(dA)}{du} - \frac{BA(dC)}{du} + \frac{BA(dD)}{dz} - \frac{BD(dA)}{dz}$$

ou

$$\frac{CA(dD)}{dy} - \frac{DA(dC)}{dy} - \frac{CA(dB)}{du} + \frac{DA(dB)}{dz} = - \\ \frac{BA(dC)}{du} + \frac{BA(dD)}{dz}$$

ou en divisant par A , & rangeant les termes

$$\frac{C(dD)}{dy} - \frac{B(dC)}{dy} + \frac{B(dC)}{du} - \frac{C(dB)}{du} - \frac{B(dD)}{dz} +$$

$$\frac{D(dB)}{dz} = 0, \text{ qui est la quatrieme equation de con-} \\ \text{dition.}$$

CCCXL.

Donc lorsqu'on voudra sçavoir si l'intégration d'une equation différentielle a quatre variables est possible. Il ne faudra examiner que trois des equations de condition qu'elle donne. On prouve de la même maniere que des dix equations de condition que donne une equation différentielle a cinq variables, il suffira d'en verifier six, pour determiner si l'equation différentielle proposée est possible; que des vingt equations de condition que donne une equation différentielle a six variables. Il suffira d'en examiner dix, & en general on trouve que, le nombre des variables etant n , le nombre des *equations de condition nécessaires* est $\frac{n-1 \cdot n-2}{2}$.

CCCXLI.

Lorsqu'on aura trouvé que l'equation différentielle proposée $A dx + B dy + C dz + Cc = 0$ est possible, ou qu'elle donne toutes les equations de condition nécessaires, pour qu'étant multipliée par un facteur variable M , elle puisse devenir une différentielle complete; il faudra prendre pour M une fonction generale composée de toutes les variables de la différentielle proposée avec des coefficients & des exposans indeterminés, qu'on determinera ensuite par le secours des equations $\frac{d(MA)}{dy}$

$$= \frac{(d.MB)}{dx}; \frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}; \frac{(d.MB)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dy}; \text{ \&c.}$$

reduites aux equations developpees $\frac{M(dA)}{dy} + \frac{A(dM)}{dy} =$

$$\frac{M(dB)}{dx} + \frac{B(dM)}{dx}; \frac{M(dA)}{dz} + \frac{A(dM)}{dz} = \frac{M(dC)}{dx} + \frac{C(dM)}{dx};$$

\&c. Mais il seroit inutile d'employer toutes ces equations, dont le nombre seroit celui des différentes manieres, dont les lettres $A, B, C, D, \text{ \&c.}$ peuvent être prises deux a deux; il n'en faudra employer que le nombre qui est d'une unité moindre que celui des variables de l'equation proposée.

Car si l'equation différentielle $A dx + B dy + C dz = 0$, qui contient trois variables est possible, elle donnera les trois equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}; \frac{(d.MA)}{dz} =$

$$\frac{(d.MC)}{dx}; \frac{(d.MB)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dy}, \text{ ou deux seulement de ces}$$

equations avec la troisieme equation de condition $\frac{B(dC)}{dx}$

$$= \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} = \text{ \&c.} = 0, \text{ qui est une suite neces-}$$

saire des trois premieres (Art. CCCXXXVI.); enforte que

$$\text{deux equations quelconques des trois } \frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx};$$

$$\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}; \frac{(d.MB)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dy} \text{ renferment necessai-}$$

rement la troisieme, & qu'il seroit par consequent inutile

tile d'employer plus de deux de ces trois equations pour determiner le facteur M .

De même, si l'equation différentielle $A dx + B dy + C dz + D du = 0$, qui contient quatre variables, est

possible, elle donnera six equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$;

$\frac{(d.MA)}{dz} = \frac{(d.MC)}{dx}$; $\mathcal{C}c.$, & trois equations de condition ;

comme $\frac{B(dC)}{dx} - \frac{C(dB)}{dx} + \frac{A(dB)}{dz} - \mathcal{C}c. = 0$, qui font

chacune une suite necessaire de deux des autres six equations, enforte qu'il seroit inutile d'employer plus de trois de ces six equations pour determiner le facteur M .

On prouve de la même maniere, que, si l'equation différentielle proposée a cinq variables, est possible, on n'aura besoin que de quatre equations de la forme

$\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB)}{dx}$ pour determiner M , & on trouve

en general, que le nombre de ces fortes d'equations necessaires pour determiner M , est d'une unité moindre que celui des variables de l'equation proposée.

CCCXLII.

Quant a la forme a donner au facteur M , nous ne connoissons point de methode generale pour la trouver ; mais on pourra toujours en venir a bout dans les cas particuliers, en essayant, comme on a fait

(Art. CCCXXXV.). On reuffira dans un grand nombre de cas par la methode suivante. Il faudra prendre pour

M une fraction $\frac{1}{R}$, dont le denominateur R foit une

fonction positive, ou fans divifeur variable, d'un degre au deffus des fonctions $A, B, C, D, \text{ \& } c.$, dans laquelle foient toutes les quantités, dont ces fonctions font composées, avec des coefficients indeterminés. Cette regle est fondée fur deux remarques qui derivent de la différentiation des quantités. On observe en premier lieu que la plupart des fonctions, qui n'ont pas un certain facteur commun a tous leurs termes, n'ont pas non plus ce même facteur commun a leurs différentielles; d'où l'on conclut que dans le grand nombre de cas, ou cette remarque a lieu, la différentielle $MA dx + MB dy + MC dz + \text{ \& } c.$, qui a le facteur commun M a tous ses termes, l'aura auffi a son intégrale, que nous designerons par V ; puisque, si M n'étoit point un facteur commun a tous les termes de la fonction V , il ne feroit pas non plus un facteur commun a tous les termes de la différentielle dV , ou de $MA dx + MB dy + MC dz + \text{ \& } c.$ On a remarqué en fecond lieu, que, si une fonction a un denominateur variable, la différentielle de cette fonction aura auffi un denominateur, qui fera un multiple de celui de l'intégrale. Ainfi la fonction $\frac{x}{y}$ ayant le denominateur variable y , fa diffé-

rentielle $\frac{y dx - x dy}{yy}$ a aussi le denominateur yy multiple de y . Donc, si, en supposant ces deux remarques, on met au lieu du facteur M la quantité $\frac{P}{Q}$, dans laquelle P & Q sont deux fonctions positives; P fera, par la premiere remarque, un facteur commun de la fonction V , dont la différentielle $dV = \frac{P}{Q} A dx + \frac{P}{Q} B dy +$

$\frac{P}{Q} C dz + \mathcal{C}c.$, & Q contiendra, par la seconde remarque, le denominateur de la fonction V . Si l'on imagine donc que la différentielle $\frac{P}{Q} A dx + \frac{P}{Q} B dy +$

$\frac{P}{Q} C dz + \mathcal{C}c.$ soit divisée par son intégrale V , P disparaîtra du numerateur, & Q se divisera par le denominateur de l'intégrale, de maniere, qu'il ne restera après la division, qu'une fonction R d'un degré de plus, que celui de $A, B, C, \mathcal{C}c.$; car la quantité

$\frac{A dx + B dy + C dz + \mathcal{C}c.}{R}$, qui provient de cette division, est egale a $\frac{dV}{V}$, ou a la différentielle du logarithme de la fonction cherchée V , & par conséquent elle doit être d'un degré au dessous de l'unité comme dans la fraction $\frac{V^0}{V^1} = \frac{1}{V}$; la fonction V^1 est d'un degré au dessus de

V° , & V° d'un degré au dessous de V^{I} . Mais, par ce que $\frac{dV}{V}$, ou $d.L.V$ est la différentielle d'une fonction $L.V.$, il s'enfuit que le Theoreme (Art. CCCXXXII.) a toujours lieu, & qu'à la place de M on peut mettre $\frac{\text{I}}{R}$ dans les equations que donne ce Theoreme, R étant la fonction positive la plus generale d'un degré d'une unité de plus que $A, B, C, D, \text{C}c.$ avec des coefficients indeterminés, & s'il y a des radicaux dans $A, B, C, \text{C}c.$, il faudra aussi qu'ils entrent dans R en se combinant avec $n, y, z, \text{C}c.$ de toutes les manieres possibles.

Au lieu donc des equations $\frac{M(dA)}{dy} + \frac{A(dM)}{dy} = \frac{M(dB)}{dx} + \frac{B(dM)}{dx}$; $\frac{M(dB)}{dz} + \frac{B(dM)}{dz} = \frac{M(dC)}{dy} + \frac{C(dM)}{dy}$; $\text{C}c.$

en mettant $\frac{\text{I}}{R}$ a la place de M , & $-\frac{dR}{RR}$ a la place de

dM , on aura les equations suivantes $\frac{R(dA)}{dy} - \frac{A(dR)}{dy} =$

$\frac{R(dB)}{dx} - \frac{B(dR)}{dx}$; $\frac{R(dB)}{dz} - \frac{B(dR)}{dz} = \frac{R(dC)}{dy} - \frac{C(dR)}{dy}$;

$\text{C}c.$, car on aura $\frac{M(dA)}{dy} = \frac{(dA)}{Rdy}$; $\frac{A(dM)}{dy} = -\frac{A(dR)}{RRdy}$;

$\frac{M(dB)}{dx} = \frac{(dB)}{Rdx}$; & $\frac{B(dM)}{dx} = -\frac{B(dR)}{RRdx}$; par consequent

$\frac{(dA)}{Rdy} - \frac{A(dR)}{RRdy} = \frac{(dB)}{Rdx} - \frac{B(dR)}{RRdx}$, & en multipliant

tout par $R R$; on aura $\frac{R(dA)}{dy} - \frac{A(dR)}{dy} = \frac{R(dB)}{dx} - \frac{B(dR)}{dx}$, & ainsi autres equations.

On determinera par le secours de ces equations les coefficients de R , & par consequent R même; ensuite on integrera la différentielle complete $\frac{A dx + B dy + C dz + \dots}{R}$ par le Probleme (Art. CCCXXXIII.), & après avoir trouvé cette intégrale on l'égalera a une constante, ce qui donnera l'intégrale cherchée. Pour éclaircir cette methode, nous allons l'appliquer a un exemple.

CCCXLIII.

Soit proposé d'intégrer l'equation $m dx + n dy + p dz = 0$, ou $A dx + B dy = 0$, en faisant $A = m + ky$, & $B = nx + ny + p$; puisque A & B sont des fonctions d'un degré de x & de y , il faut; suivant la methode precedente, prendre pour R la fonction generale de x & de y de deux degrés avec les coefficients indeterminés b, c, e, f, g , & supposer $R = x^2 + bxy + cx + ey^2 + fy + g$; on aura par ces suppositions $\frac{(dA)}{dy} = k$, $\frac{(dB)}{dx} = m$, $\frac{(dR)}{dy} = bx + 2ey + f$, $\frac{(dR)}{dx} = 2x + by + c$.

Substituant ces quatre quantités dans l'équation

$$\frac{R(dA)}{dy} - \frac{A(dR)}{dy} - \frac{R(dB)}{dx} + \frac{B(dR)}{dx} = 0, \text{ on aura les}$$

valeurs suivantes

$$\frac{R(dA)}{dy} = kx^2 + kbn y + kcn + key^2 + kfy + kg$$

$$-\frac{A(dR)}{dy} = -bn^2 - \frac{2exy}{kby} - fn - 2key^2 - kfy$$

$$-\frac{R(dB)}{dx} = -mx^2 - mby - mcx - mey^2 - mfy - mg$$

$$+\frac{B(dR)}{dx} = 2mn^2 + \frac{mbxy + mcx}{+2nxy + 2px} + nby^2 + \frac{+ncy}{+pby} + pc$$

$$\text{Somme.} \left\{ \begin{array}{cccccc} kx^2 + 2nxy + kcn + nby^2 + ncy + kg \\ +m & -2e & -f & -me & +pb & -mg \\ -b & & +2p & -ke & -mf & +pc \end{array} \right\} = 0$$

equation dans laquelle faisant chaque terme $= 0$, on aura six equations du premier degré, $k + m - b = 0$, $2n - 2e = 0$, $kc - f + 2p = 0$, $nb - me - ke = 0$, $nc + pb - mf = 0$, $kg - mg + pc = 0$, qui donneront les coefficients $b = k + m$, $c = \frac{pk - pm}{km - n}$, $e = n$,

$$f = \frac{pk^2 + pkm - 2pn}{km - n}, \quad g = -\frac{pp}{km - n}, \text{ qu'il faudra sub-}$$

stituer dans la valeur de R , ou dans $x^2 + bny + cn + Cc$, & ensuite celle de R étant substituée dans

$$\frac{A dx + B dy}{R}, \text{ on aura}$$

$$\frac{(x+ky)dx+(mx+ny+p)dy}{x^2+(k+m)xy+\frac{pk-pm}{km-n}x+ny^2+\frac{pk^2+pkm-2pn}{km-n}y-\frac{p^2}{km-n}}$$

$\frac{A dx}{R} + \frac{B dy}{R}$, différentielle qu'on intégrera par le Probleme (Art. CCCXXXIV.), & dont l'intégrale étant égale à une constante, fera l'équation intégrale de la proposée.

Pour intégrer la différentielle précédente, ou $\frac{A dx}{R} + \frac{B dy}{R}$ suivant le Probleme cité, on prendra d'abord l'intégrale du premier terme $\frac{A dx}{R}$ en traitant la seule x comme variable, & y comme constante. Ensuite on prendra l'intégrale du second terme $\frac{B dy}{R}$, en regardant y seulement comme variable, & x comme constante, & on retranchera la première intégrale de la seconde; ou bien, après avoir trouvé la première intégrale, on la différenciera en supposant y seule variable, & x constante, & on retranchera cette différentielle de $\frac{B dy}{R}$, & on fera le reste, comme il est prescrit dans le même Probleme.

Or si on suppose y constante dans la différentielle $\frac{A dx}{R}$, & qu'on fasse $ky = a$, $(k+m)y + \frac{pk-pm}{km-n} = b$,

& $ny^2 + \frac{pk^2 + pkm - 2pn}{km - n}y - \frac{p^2}{km - n} = q$, on aura

$\frac{Adx}{R} = \frac{(x+a)dx}{xx+bx+q}$, en regardant a, b, q comme des constantes, & cette différentielle étant rationnelle, on l'intégrera facilement (Part. I. Chap. IV.).

Le denominateur $xx+bx+q$ a pour facteurs $x + \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - q}$, & $x + \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - q}$, de sorte qu'en supposant le premier facteur $= x+r$, & le second $= x+t$, la différentielle sera $\frac{x+a}{(x+r)(x+t)}dx$
 $= \frac{r-a}{(r-t)(x+r)}dx + \frac{a-t}{(r-t)(x+t)}dx$, dont l'intégrale
 est $\frac{r-a}{r-t}L_{x+r} + \frac{a-t}{r-t}L_{x+t}$; or $\frac{r-a}{r-t} =$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{4}bb - q} + \frac{1}{2}b - a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb - q}} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}b - a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb - q}}, \quad \& \quad \frac{a-t}{r-t} =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{4}bb - q} - \frac{1}{2}b + a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb - q}} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}b - a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb - q}}; \text{ donc l'intégra-}$$

le précédente sera $\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}b - a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb - q}}\right) \times$

$$L_{x + \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - q}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}b - a}{2\sqrt{\frac{1}{4}bb - q}}\right) \times$$

L

$L. x + \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - q}$. En substituant dans cette

intégrale les valeurs de a, b, q , elle devient

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}k}{\sqrt{(k+m)^2 - 4n}}\right) \times$$

$$L. x + \frac{k+m}{2}y + \frac{p(k-m)}{2km-2n} + \frac{1}{2}\left(y - \frac{p}{km-n}\right)\sqrt{(k+m)^2 - 4n}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}k}{\sqrt{(k+m)^2 - 4n}}\right) \times$$

$$L. x + \frac{k+m}{2}y + \frac{p(k-m)}{2km-2n} - \frac{1}{2}\left(y - \frac{p}{km-n}\right)\sqrt{(k+m)^2 - 4n}$$

cette quantité étant égale à une constante fera l'intégrale complète de l'équation différentielle proposée $(x+ky)dx + (mx+ny+p)dy=0$; car si l'on prend la différentielle, & qu'on l'égale ensuite à zéro, on retrouve cette équation.

Nous avons choisi pour exemple cette équation différentielle, qu'on voit aisément être la plus générale de son degré. Car si l'on avoit proposée l'équation $(ax+by+c)dz + (ez+fy+g)dy=0$, en divisant par a , on auroit eû $(z + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a})dz + (\frac{e}{a}z + \frac{f}{a}y + a\frac{g}{a})dy=0$; en faisant $z + \frac{c}{a} = x$, ou $z = x$

— $\frac{c}{a}$, & $dx = dn$, on auroit trouvé $(n + \frac{b}{a}y)dn + (\frac{c}{a}n - \frac{ce}{aa} + \frac{f}{a}y + \frac{g}{a})dy = 0$, & en supposant $\frac{b}{a} = k$, $\frac{c}{a} = m$, $\frac{f}{a} = n$, $\frac{g}{a} - \frac{ce}{aa} = p$, on auroit $(n + ky)dn + (mn + ny + p)dy = 0$.

CCCXLIV.

Il arrive souvent que les equations particulieres font connoître aisément la forme du multiplicateur cherché. Pour le faire voir nous reprendrons l'equation

generale de condition $\frac{M(dA)}{dy} + \frac{A(dM)}{dy} = \frac{M(dB)}{dx} + \frac{B(dM)}{dx}$; dans laquelle M represente le multiplicateur.

Supposons sa différentielle $dM = Pdx + Qdy$, P & Q etant des fonctions de x & de y , on aura (Art. CCCXXX.)

$\frac{(dM)}{dy} = Q$, & $\frac{(dM)}{dx} = P$; d'où l'on voit, en substituant dans l'equation precedente, que, pour rendre une

différentielle complete, il faut que $\frac{M(dA)}{dy} + A Q =$

$\frac{M(dB)}{dx} + B P$, ou bien $\frac{BP - AQ}{M} = \frac{(dA)}{dy} - \frac{(dB)}{dx}$; la-

quelle equation suffit pour determiner la fonction M dans les cas particuliers. Si on supposoit $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$,

on auroit $BP - AQ = 0$, & par conséquent $P = 0$, $Q = 0$. Donc $Pdx + Qdy = dM = 0$, c'est à dire la différentielle de $M = 0$, d'ou il s'enfuit que le facteur M peut être l'unité, ou une constante quelconque; ce qui est le cas des différentielles complètes. Il est donc évident que, pour rendre une différentielle complète, il ne faut que satisfaire à l'équation de condition précédente, & quoiqu'on n'ait pas de méthode générale, comme nous l'avons déjà observé, on voit cependant qu'on pourra toujours trouver ce facteur, si l'équation différentielle n'est pas absurde. Il y a même plusieurs cas, dans lesquels cela reussit facilement. Tels sont les cas des différentielles homogènes, & de celles dans lesquelles une des variables ne passe pas le premier degré. Nous donnerons un Exemple de ces dernières, & nous traiterons fort au long dans la suite des premières.

CCCXLV.

Soit l'équation différentielle $pdx + qydx + rdy = 0$, dans laquelle p, q, r désignent des fonctions de x , en sorte que la variable y ne passe point le premier degré. Pour rendre cette différentielle complète, on la comparera avec la forme $A dx + B dy = 0$, ce qui donne $A = p + qy$, & $B = r$; d'ou l'on tire $\frac{dA}{dy} = q$, &

$\frac{(dB)}{dx} = \frac{dr}{dx}$. En faisant, comme cy-devant, $dM = Pd\ast + Qdy$, on aura $\frac{BP - AQ}{M} = q - \frac{dr}{dx} = \frac{rP - (p + qy)Q}{M}$, en substituant a la place de A , B leurs valeurs. Or il est aisé de trouver le facteur M par le moyen de cette equation; car $\frac{BP - AQ}{M}$ etant egal a $q - \frac{dr}{dx}$, c'est a dire, $BP - AQ = \left(q - \frac{dr}{dx}\right)M$, on voit que, $q - \frac{dr}{dx}$ etant une fonction de \ast seulement, par la nature de la différentielle proposée, on peut supposer M egale a une fonction de \ast , enforte que Q devienne $= 0$, & $dM = Pd\ast$, d'ou l'on a $q - \frac{dr}{dx} = \frac{rP}{M}$, & $q d\ast - dr = \frac{r dM}{M}$. Donc $\frac{dM}{M} = \frac{q dx}{r} - \frac{dr}{r}$, & en intégrant $L.M = S. \frac{q dx}{r} - L.r$; donc $M = \frac{x}{r} e^{S. \frac{q dx}{r}}$, en supposant e le nombre, dont le logarithme hyperbolique est l'unité (Art. xxxiv.). Ce facteur M rendra la différentielle complete, & son intégrale fera $S. \left(\frac{p dx}{r} e^{S. \frac{q dx}{r}}\right) + y e^{S. \frac{q dx}{r}} = C$ constante, comme on le voit en retournant a la différentielle par les regles de la premiere Partie.

On pourra de la même manière rendre complète l'équation différentielle $py^n dx + qy dx + r dy = 0$, avec les mêmes conditions, que dans la précédente, c'est à dire, en supposant p, q, r des fonctions de x seule. Car alors on auroit $A = py^n + qy$, & $B = r$; d'où l'on tire $\frac{(dA)}{dy} = npy^{n-1} + q$, & $\frac{(dB)}{dx} = \frac{dr}{dx}$. Donc en supposant, comme cy-devant, $dM = P dx + Q dy$, on aura $\frac{rP - py^n Q - qyQ}{M} = npy^{n-1} + q - \frac{dr}{dx}$. Soit $M = \phi y^m$, ϕ étant une fonction de x seulement, on aura $P = \frac{y^m d\phi}{dx}$, & $Q = m\phi y^{m-1}$, & en substituant ces valeurs; on trouve l'équation $\frac{r d\phi}{\phi dx} - mpy^{n-1} - mq = npy^{n-1} + q - \frac{dr}{dx}$. Or, pour faire usage de cette équation, il faut faire $n = -m$, elle se change en celle-cy $\frac{r d\phi}{\phi dx} = (1-n)q - \frac{dr}{dx}$, ou bien $\frac{d\phi}{\phi} = \frac{(1-n)q dx}{r} - \frac{dr}{r}$, & en intégrant, comme cy-devant, $\phi = \frac{1}{r} e^{(1-n)S \cdot \frac{q dx}{r}}$. Donc, à cause de $n = -m$, le facteur $M = \phi y^m$ devient $= \frac{y^{-n}}{r} e^{(1-n)S \cdot \frac{q dx}{r}}$, & l'intégrale $\frac{y^{1-n}}{1-n} e^{(1-n)S \cdot \frac{q dx}{r}} + S \cdot \left(\frac{p dx}{r} e^{(1-n)S \cdot \frac{q dx}{r}} \right) = C$.

Si on fait dans cette intégrale $n=0$, on la réduit au cas précédent. Si $n=1$, la différentielle devient $pydx+qydx+rdy=0$, &, a cause de $1-n=0$, le facteur sera $\frac{1}{y}$, & l'équation est réduite a cette forme $\frac{pdx+qdx}{r}+\frac{dy}{y}=0$, dont l'intégrale $\int \frac{(p+q)dx}{r}+L.y=C$, comme il est évident. Au reste on pourroit réduire aisément la différentielle $py^n dx+qydx+rdy=0$ a la forme $pdx+qydx+rdy$. Il ne faut pour cela que diviser par y^n , on auroit $pdx+qy^{1-n}dx+ry^{-n}dy=0$, &, en faisant $y^{1-n}=z$, on auroit $(1-n)y^{-n}dy=dz$, & l'équation devient $pdx+qzdx+\frac{1}{1-n}rdz=0$, qui a la même forme que la précédente.

CCCXLVI.

On peut quelquefois simplifier les methodes précédentes, en partageant la différentielle en plusieurs parties intégrables séparément. Soit, par exemple, l'équation $Xy^q dy+X'y^{q+1}dx+X''y^r dx=0$, dans laquelle X, X', X'' sont des fonctions quelconques de x , & q, r des exposans quelconques. On éprouvera d'abord le facteur Py^n , P étant une fonction de x , & n un expo-

fant indéterminé, & pour une plus grande facilité on supposera $x = -r$, en sorte que le facteur devienne $P y^{-r}$; on voit qu'il suffira de diviser la différentielle proposée par y^r , & de considérer P comme le facteur. En divisant de plus par X , & designant par Q, Q' les quotiens $\frac{X}{X}, \frac{X'}{X}$, la différentielle devient, en la multi-

pliant par le facteur $P, P y^{q-r} dy + Q P y^{q-r+1} dx + Q' P dx = 0$. Or, si P est une fonction de x , il est évident que $Q' P$ le sera aussi, & que $S. Q' P dx$ se réduit à une intégrale d'une seule variable.

Il ne faut donc plus que rendre complète la différentielle $P y^{q-r} dy + Q P y^{q-r+1} dx$; or il faut pour cela que $\frac{d(P y^{q-r})}{dx} = \frac{d(Q P y^{q-r+1})}{dy}$, c'est à dire,

$$\frac{y^{q-r} (dP)}{dx} = (q-r+1) y^{q-r} Q P; \text{ d'ou l'on tire } \frac{dP}{P} = (q-r+1) Q dx, \text{ \& en intégrant } L.P = S. (q-r+1) Q dx = S. (q-r+1) Q dx. \text{ L.e. Donc } P = e^{S. (q-r+1) Q dx}, \text{ \& en substituant cette valeur de } P$$

dans l'équation réduite, on aura l'intégrale $\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1} \times e^{S. (q-r+1) Q dx} + e^{S. (q-r+1) Q dx} . S. Q' dx = C$.

CCCXLVII.

Nous éclaircirons les méthodes précédentes par l'exemple d'une différentielle à trois variables. Soient proposées les équations $dx + a dy + (bx + cy) T d\tau = 0$; $k dx + a' dy + (b'x + c'y) \tau dT = 0$, dans lesquelles x, y, τ sont trois variables, & T une fonction quelconque de τ , les autres quantités étant des constantes. On multipliera l'une des deux équations, par exemple, la première, par un coefficient indéterminé, & constant g , & l'ayant ajoutée ainsi à la seconde, on multipliera le tout par un facteur P , qu'on suppose être une fonction de τ ; l'équation deviendra $(gP + kP) dx + (gaP + a'P) dy + \{ (gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y \} T d\tau = 0$. Supposons maintenant que cette équation soit une différentielle complète, on aura

$$\text{I. } \frac{d(gP + kP)}{d\tau} = \frac{d[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]}{dx}$$

$$\text{II. } \frac{d(gaP + a'P)}{d\tau} = \frac{d[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]}{dy}$$

$$\text{III. } \frac{d(gP + kP)}{dy} = \frac{d(gaP + a'P)}{dx}$$

P étant par la supposition une fonction de τ , qu'on regarde comme constante dans la troisième équation, il est

est clair que cette equation se reduit a $0=0$, puisque

$dP=0$, mais les deux autres donnent $\frac{(g+k)dP}{dt} =$

$(gb+b')P$, & $\frac{(ga+a')dP}{dt} = (gc+c')P$; d'où l'on

tire $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k} dt$, & $\frac{dP}{P} = \frac{gc+c'}{ga+a'} dt$, & en ega-

lant ces deux valeurs de $\frac{dP}{P}$, & divisant par dt , on

aura $\frac{gb+b'}{g+k} = \frac{gc+c'}{ga+a'}$, equation du second degré, qui

donnera deux valeurs de g , qu'on pourra par consé-

quent regarder comme connûe. Or, g étant donnée;

on connoîtra P ; car l'equation $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}$ donne P

$= e^{\frac{gb+b'}{g+k} t}$. Donc l'equation différentielle $(gP+kP) \times$

$d x + (gaP+a'P) dy + \{ (gbP+b'P) x + (gcP$

$+c'P) y \} T dt = 0$ est complete, & son intégrale

CCCXLVIII.

REMARQUE. Nous avons déjà observé dans la re-

marque qui termine le premier Chapitre Part. I.;

qu'ayant trouvé un facteur M qui rende une différentielle complète, on peut trouver une infinité d'autres facteurs, qui satisferont aux conditions d'intégrabilité. Car, puisque la différentielle $M(Adx + Bdy)$ est intégrable, par supposition, soit z , fonction de x , & de y , égale à l'intégrale de cette différentielle & de plus soit Z une fonction quelconque de z ; il est clair que Zdz est intégrable, & par conséquent aussi $MZ(Adx + Bdy) = Zdz$ fera intégrable; donc, si l'on trouve un facteur M , qui rende complète la différentielle $Adx + Bdy$, on en pourra trouver une infinité d'autres MZ , prenant pour Z une fonction quelconque de l'intégrale $S.M(Adx + Bdy)$. Il faut observer qu'il est quelque fois très-commode de partager une equation différentielle en plusieurs parties, & d'examiner si on peut les rendre complètes séparément par un facteur commun, car alors l'intégrale pourra devenir très-aisée. Soit, par exemple, la différentielle $\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{m-1} y^n dx + \delta x^m y^{n-1} dy = 0$, que nous partageons en deux parties $\alpha y dx + \beta x dy$, & $\gamma x^{m-1} y^n dx + \delta x^m y^{n-1} dy$; nous avons démontré dans la remarque citée, que la première partie devoit être complète par le facteur $x^{m-1} y^{n-1}$, & la seconde partie par le facteur $x^{m-n} y^{n-1}$, m & n étant des

quantités indéterminées, on pourra, pour egaler les facteurs, supposer $\alpha n - 1 = \gamma m - \mu$, & $\beta n - 1 = \delta m - \nu$, d'où l'on tire $n = \frac{\gamma m - \mu + 1}{\alpha} = \frac{\delta m - \nu + 1}{\beta}$, & par conséquent $m = \frac{\alpha \nu - \beta \mu - \alpha + \beta}{\alpha \delta - \beta \gamma}$, & $n =$

$\frac{\gamma \nu - \delta \mu - \gamma + \delta}{\alpha \delta - \beta \gamma}$; substituant ces valeurs de m, n , on aura

un facteur commun, & la différentielle sera complète, dont l'intégrale $\frac{1}{n} x^{\alpha n} y^{\beta n} + \frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = C$. Il seroit inutile d'expliquer icy les différens cas de cette intégrale. Il suffit d'observer qu'elle est algébrique, lorsque m & n sont des quantités réelles. Cette méthode de separer les différentielles abrege beaucoup les calculs. Au reste il faut remarquer qu'une différentielle totale multipliée par un facteur devient très-souvent complète, quoiqu'aucune partie de cette différentielle ne puisse être complétée separement.



C H A P I T R E II.

De la methode de M. Newton pour intégrer par les series les equations différentielles a plusieurs variables mêlées $x, y, z, \&c.$, lorsque ces equations ne contiennent que les premieres différences $dx, dy, dz, \&c.$, ou leurs produits.

CCCXLIX.

LA methode que nous allons expliquer, & qu'on trouve dans le *Traité De la Methode des Fluxions & des series infinies*, suppose la theorie des suites, telle qu'on la trouve dans ce celebre Auteur, & dans tous les bons Ouvrages d'Algebre. Car premiere-ment, si l'equation différentielle, qu'on se propose d'intégrer par cette methode, contient des fractions dont les denominateurs soient des quantités variables & com-

plexes, comme $\frac{1}{1+xx}$, $\frac{\frac{1}{2x^2-x^2}}{\frac{1}{1+x^2-3x}}$, il faut reduire

ces fractions en suites infinies de termes simples, par la division continuée a l'infini, & ecrire la suite $1-x^2+x^4-x^6+x^8 \&c.$ au lieu de la fraction $\frac{1}{1+xx}$: la

suite $2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}} - 73x^3 \text{ \&c.}$

au lieu de la fraction $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^2 - 3x}$, & ainsi des autres. De

même si l'équation différentielle proposée contient des radicaux de quantités variables & complexes, comme

$\sqrt{aa + xx}$, $\sqrt{\frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}}$, il faut les réduire par l'extraction

des racines continuée, ou par le binôme de M. Newton, ou par les autres méthodes connues à des suites infinies de termes simples, & écrire la série

infinie $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} -$

$\frac{21x^{12}}{1024a^{11}} + \text{\&c.}$, ou $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5} - \frac{5a^8}{128x^7} +$

$\frac{7a^{10}}{256x^9} - \frac{21a^{12}}{1024x^{11}} + \text{\&c.}$ au lieu de $\sqrt{aa + xx}$, & la

série infinie $1 + \frac{1}{2}bn^2 + \frac{3}{8}b^2n^4 + \frac{5}{16}b^3n^6 + \text{\&c.}$

$$+ \frac{1}{2}a \quad + \frac{1}{4}ab \quad + \frac{3}{16}ab^2$$

$$- \frac{1}{8}aa \quad - \frac{1}{16}a^2b$$

$$+ \frac{1}{16}a^3$$

au lieu de $\sqrt{\frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}}$.

Enfin il arrive souvent dans l'usage de cette methode, qu'on a besoin de trouver en suites infinies de termes simples les racines des equations affectées de toutes sortes de degrés; par exemple la racine y de l'equation affectée du troisieme degré $y^3 + aay + aay - x^3 + 2a^3 = 0$, qu'on trouve par les methodes connues $= a - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3} + \text{C}c.$ a l'infini; ou la racine y de l'equation affectée du onzieme degré $\frac{63y^{11}}{2816} + \frac{35y^9}{1152} + \frac{5y^7}{112} + \frac{3y^5}{40} + \frac{1}{6}y^3 + y - x = 0$, qu'on trouve $= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 \text{C}c.$

Il faut remarquer, qu'on ne donne icy le nom de quantités *composées*, qu'à celles qui le sont par rapport aux variables, & qu'on appelle *simples* toutes les quantités qui ne sont composées, que par rapport aux constantes, qu'elles renferment, par ce qu'on peut les reduire a des quantités simples, en les supposant egales a quelque constante. Ainsi les quantités $\frac{ax+bx}{c}$, $\frac{x}{a+b}$, $\frac{bcc}{ax+bx}$, $\frac{b^2}{ax+bx}$, $\sqrt{ax+bx}$, $\text{C}c.$ sont regardées comme simples, par ce qu'on peut les reduire aux

quantités simples $\frac{cx}{c}$, $\frac{x}{c}$, $\frac{bcc}{cx}$, $\frac{b^4}{c^2x}$, \sqrt{cx} , ou $e^{\frac{x}{2}}$ $x^{\frac{1}{2}}$,
 en supposant $a+b=c$.

CCCL.

Lorsque l'équation différentielle proposée ne contient que deux variables x , & y avec les premières différencielles dx & dy , ou leurs produits quelconques dx^2 , dy^2 , dx^3 , dy^3 , $dx dy$, $dx^2 dy$, &c; si on veut l'intégrer par la méthode suivante, il faudra la disposer de manière, qu'on ait d'un côté du signe d'égalité la raison $\frac{dy}{dx}$, ou $\frac{dx}{dy}$, & de l'autre côté la valeur de cette raison exprimée par une suite finie, ou infinie de termes simples; ce qu'on pourra toujours faire par l'Article précédent, comme nous allons le voir dans les exemples suivans.

Soit proposée l'équation différentielle $ady - xdy - adx + xdx - ydx = 0$, on la réduit d'abord à l'é-

quation $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{a-x}$, ou à l'équation $\frac{dx}{dy} = \frac{a-x}{a-x+y}$:

Dans le premier cas le dénominateur $a-x$ de la fraction $\frac{y}{a-x}$ étant une quantité variable, & complexe, on réduit cette fraction à la série infinie de termes simples

$$\frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4} \text{ \&C.}, \text{ d'où l'on tire } \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{a}$$

$$+ \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4} + \text{ \&C.}.$$

Mais, si on examine l'équation différentielle proposée, on trouve par les méthodes du Chapitre précédent, que la différentielle $ady - xdy - adx + xdx - ydx$ est complète, & que son intégrale est $\frac{1}{2}xx - ax - yx + ay$. Il seroit donc inutile dans ce cas de chercher l'intégrale par une suite infinie.

Si l'équation proposée est $dy^2 = dx dy + x^2 dx^2$, en la divisant par dx^2 , on aura d'abord $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + x^2$, ou $z^2 = z + x^2$, en supposant $\frac{dy}{dx} = z$, & en tirant la racine z de cette équation, on trouve $z = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + xx}$. Or $\sqrt{\frac{1}{4} + xx} = \frac{1}{2} + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} \text{ \&C.}$ Donc en substituant cette suite infinie de termes simples au lieu de $\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$, on aura $\frac{dy}{dx} = 1 + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} \text{ \&C.}$, ou $\frac{dy}{dx} = -xx + x^4 - 2x^6 + 5x^8 - 14x^{10} \text{ \&C.}$, selon qu'on ajoute-

ajoutera $\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$ & $\frac{1}{2}$, ou qu'on l'en soustraira. On

voit de plus qu'en multipliant par dx l'équation $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + xx}, \text{ on aura } dy = \frac{1}{2} dx \pm dx \sqrt{\frac{1}{4} + xx},$$

&, en prenant les intégrales de côté & d'autre, $y =$

$$\frac{1}{2} x \pm S. dx \sqrt{\frac{1}{4} + xx}.$$

Si l'équation proposée étoit $dy^3 + ax dx^2 dy +$
 $aadx^2 dy - x^3 dx^3 - 2a^3 dx^3 = 0$; en divisant toute

l'équation par dx^3 , on auroit $\frac{dy^3}{dx^3} + \frac{ax dy}{dx} + \frac{aad y}{dx} -$

$$x^3 - 2a^3 = 0, \text{ ou } x^3 + axx + aax - x^3 - 2a^3 = 0,$$

en supposant $\frac{dy}{dx} = z$, & en tirant la racine z de cet-

te équation affectée du troisième degré, on trouve $z =$

$$\frac{dy}{dx} = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3} \text{ &c.}, \text{ comme}$$

nous l'avons déjà dit (Art. CCCXLIX.).

CCCLI.

Partout où se trouvera le rapport $\frac{dy}{dx}$, ou $\frac{dx}{dy}$ des
 premières différences des deux variables x & y , pour distin-
 guer plus facilement une de ces variables de l'autre, nous

nommerons *Quantités relatives* la variable & sa différentielle qui seront dans le numerateur de la fraction, qui exprime ce rapport, & nous appellerons *Quantités correlatives* l'autre variable & sa différentielle, qui seront dans le denominateur de la même fraction. Ainsi dans le rapport ou dans la fraction $\frac{dy}{dx}$, y & dy sont des quantités relatives, x & dx des quantités correlatives, au contraire dans la fraction $\frac{dx}{dy}$, x & dx sont des quantités relatives, y & dy des correlatives.

CCCLII.

Tous ces preliminaires supposés, on peut reduire les equations différentielles, dont il est icy question, a trois especes, ou a trois classes. La première classe comprend les equations différentielles a deux variables x & y , mais qui ne contiennent que l'une de ces deux variables finies x , ou y avec leurs premières différences dx & dy , élevées a telles puissances, ou produits qu'on voudra. On peut représenter toutes les equations de cette classe par cette forme $A dx^m + B dy^m + C dx^n dy^{m-n} + D dx^p dy^{m-p} + Cc. = 0$, en supposant que $A, B, C, D, Cc.$ sont des fonctions de constantes, & de la seule variable x , ou y qui se trouve dans l'equation, & que les exposans $m, n, p, m-n, m-p$ sont des nombres entiers &

positifs. La seconde classe est pour les equations différentielles, qui contiennent deux variables finies avec leurs premieres différences élevées a telles puissances ou produits qu'on voudra. On peut aussi représenter toutes les equations de cette classe par la forme $A d x^m + B d y^m + C d x^n d y^{m-n} + D d x^p d y^{m-p} + Cc. = 0$, en supposant que $A, B, C, D, Cc.$ sont des fonctions de x , de y , & de constantes, & les exposans des nombres entiers & positifs. La troisieme classe renferme toutes les equations différentielles, qui contiennent plus de deux variables avec leurs premieres différences élevées a des puissances ou produits quelconques.

CCCLIII.

PROBLEME I. Trouver les intégrales des equations différentielles de la premiere classe.

SOLUTION. Prenez pour quantité correlative celle des deux variables, qui est la seule finie dans l'equation proposée, & disposez cette equation de maniere, que vous ayez d'un côté la raison de la différence de l'autre variable a la différence de celle-cy, & de l'autre côté la valeur de cette raison exprimée par une suite de termes simples (Art. CCCL.). Multipliez cette valeur ou cette suite par la variable correlative; ensuite divisez chaque terme simple de ce produit par l'exposant

de la variable correlative dans ce terme; ce qui resultera de cette operation fera l'intégrale de la variable relative. Ainsi l'équation proposée étant $dy^2 = dx dy + x^2 dx^2$, on prendra pour quantité correlative la variable x , qui est la seule finie dans cette equation, & on la reduira (Art. CCCL.) a la forme $\frac{dy}{dx} = 1 + xx - x^4 + 2x^6$ Cc.; on multipliera cette suite par x , & on aura le produit $x + x^3 - x^5 + 2x^7$ Cc.; ensuite divisant chaque terme simple de ce produit par l'exposant de x dans ce terme, on trouve $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$ Cc. Cette suite fera l'intégrale de dy , c'est a dire, $y = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{2x^7}{7}$ Cc.

DEMONSTRATION . Puisque $\frac{dy}{dx} = 1 + xx - x^4 + 2x^6$ Cc., en multipliant de côté & d'autre par dx , on aura $dy = dx + x^2 dx - x^4 dx + 2x^6 dx$ Cc., & en intégrant de côté & d'autre, on aura l'intégrale de dy , ou y egale a l'intégrale de toute la suite $dx + x^2 dx - x^4 dx + 2x^6 dx$ Cc. Or on trouve cette intégrale, en intégrant chaque terme en particulier suivant la regle

generale $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, c'est a dire, en multipliant dans chaque terme le coefficient constant ou variable de dx par x , & divisant ce produit par l'exposant de x dans ce terme. Ainsi on trouve $\int dx$, en multipliant 1 par x , pour avoir le produit x , & en divisant ce produit par 1 exposant de x^1 ; & de même $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, en multipliant x^2 par x , & divisant ce produit par l'exposant 3 de x dans x^3 , & ainsi des autres; d'où l'on voit que dans la solution du Probleme on n'a fait que suivre les regles generales d'intégration. *C. Q. F. D.*

Nous ajouterons icy quelques autres exemples de cette solution.

Si l'equation proposée est $\frac{dy}{dx} = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} +$

$\frac{131x^3}{512aa}$ &c., on trouvera $y = ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048aa}$

&c. de même si l'equation etoit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x^2} +$

$\frac{3}{x^2} = x^{-3} - x^{-2} + ax^{-2} + x^{\frac{3}{2}}$, on trouvera $y =$

$\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{ax^{-1}}{\frac{1}{a}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + 2ax^{-1} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

Si on a l'equation $\frac{dx}{dy} = \frac{2bbc}{\sqrt{ay^3}} + \frac{3yy}{a+b} +$

$\sqrt{by+cy} = \frac{2bbc}{\sqrt{a}} y^{-\frac{1}{2}} + \frac{3yy}{a+b} + y^{\frac{1}{2}} \sqrt{b+c}$ on trou-

vera $\kappa = -\frac{4bbc}{\sqrt{ay}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{2}{3} \sqrt{by^3+cy^3}$; puisque

la valeur de $\frac{dx}{dy}$, ou la suite $\frac{2bbc}{\sqrt{a}} y^{-\frac{3}{2}} + \frac{3y^2}{a+b} +$

$y^{\frac{1}{2}} \sqrt{b+c}$ etant multipliée par la correlative y devient

$\frac{2bbcy^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} + \frac{3y^3}{a+b} + y^{\frac{3}{2}} \sqrt{b+c}$, & en divisant cha-

que terme de cette suite par l'exposant de y dans ce

terme, on trouve $\kappa = -\frac{4bbc}{\frac{1}{y^2} \sqrt{a}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \times$

$\sqrt{b+c} = -\frac{4bbc}{\sqrt{ay}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{2}{3} \sqrt{by^3+cy^3}$.

De la même façon l'equation $\frac{dy}{dz} = z^{\frac{2}{3}}$ donne $y =$

$\frac{3}{5} z^{\frac{5}{3}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{ab}{cx^{\frac{1}{3}}}$ donne $y = \frac{3abx^{\frac{2}{3}}}{2c}$; mais l'equation

$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$ donne $y = \frac{a}{0}$; car, si on multiplie $\frac{a}{x}$ par κ ,

le produit sera a , ou ax^0 , & si on divise par l'exposant de x dans a , ou dans ax^0 , le quotient sera $\frac{a}{0}$, quantité infinie, qui doit être la valeur de y .

CCCLIV.

Quand on trouvera dans la valeur du rapport $\frac{dy}{dx}$

un terme simple, come $\frac{a}{x}$, ou une fraction dont le denominateur est la variable correlative d'une seule dimension, on pourra intégrer ce terme par les logarithmes hyperboliques puisque $S. \frac{a dx}{x} = a L. x$, ou bien ayant supposé la variable correlative x egale a la somme ou a la différence d'une autre variable z , & d'une constante c prise a volonté, on substituera cette somme, ou cette différence au lieu de x , & dz au lieu de dx . Par exemple, si l'equation est $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$, on aura dy

$$= \frac{a dx}{x}, y = a L. x; \text{ ou bien, ayant supposé } x = c + z,$$

$$\text{on aura } dx = dz, \frac{a}{x} = \frac{a}{c+z} = \frac{a}{c} - \frac{az}{c^2} + \frac{az^2}{c^3} -$$

$$\frac{az^3}{c^4} \mathcal{O}c.; \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = \frac{a}{c} - \frac{az}{c^2} + \frac{az^2}{c^3} - \frac{az^3}{c^4} \mathcal{O}c., \&$$

$$\text{par la solution du Probleme } y = \frac{az}{c} - \frac{az^2}{2cc} + \frac{az^3}{3c^3}$$

$-\frac{x^4}{4c^4} \mathcal{C}c$. On pourra ensuite remettre $x-c$ au lieu

de x dans cette valeur de y :

Si l'équation proposée étoit $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + 3 - xx$;
 ou $dy = \frac{2dx}{x} + 3dx - xx dx$, en se servant des logarithmes hyperboliques on auroit $y = 2L.x + 3x - \frac{1}{3}x^3$, ou bien en substituant $1+z$ au lieu de x , on auroit $\frac{dy}{dz} = \frac{2}{1+z} + 3 - (1+z)^2$, & en réduisant par la division la fraction $\frac{2}{1+z}$ en série infinie $2 - 2z + 2zz - 2z^3 + 2z^4 \mathcal{C}c$, on trouveroit $\frac{dy}{dz} = 4 - 4z + zz - 2z^3 + 2z^4 \mathcal{C}c$, & par la solution du problème $y = 4z - 2zz + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{2}{5}z^5 \mathcal{C}c$.

Si l'équation étoit $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} - x^{\frac{1}{2}}$, ou
 $dy = x^{-\frac{1}{2}} dx + x^{-1} dx - x^{\frac{1}{2}} dx$, en intégrant de côté & d'autre, on auroit $y = 2x^{\frac{1}{2}} + L.x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.
 Mais si on vouloit substituer $1-z$ pour x , & $-dz$ pour dx , on auroit $\frac{dy}{dz} = (1-z)^{-\frac{1}{2}} + (1-z)^{-1}$

$$= (1-z)^{-\frac{1}{2}}, \text{ ou } \frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{1-z} + \sqrt{1-z};$$

Or le terme $\frac{1}{1-z}$ donne par la division la serie infini-

me $1+z+z^2+z^3 \text{ \&c.}$; le terme $\sqrt{1-z}$ donne

par l'extraction de la racine la serie $1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}zz-\frac{1}{16}z^3 \text{ \&c.}$,

& le terme $\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}zz-\frac{1}{16}z^3 \text{ \&c.}}$

donne par la division $1+\frac{1}{2}z+\frac{3}{8}zz+\frac{5}{16}z^3 \text{ \&c.}$, &

suivant la solution du Probleme $y = z + zz + \frac{1}{2}z^3$

$$- \frac{11}{32}z^4 \text{ \&c.}$$

CCCLV.

On peut résoudre le même Probleme par une autre methode generale assez facile, & qui n'est qu'un Corollaire de ce que nous venons de dire. Soit proposé d'intégrer l'equation différentielle a deux variables $A dx^m + B dy^m + C dx^n dy^{m-n} + D dx^p dy^{m-p} + \text{ \&c.} = 0$, dans laquelle $A, B, C, D, \text{ \&c.}$ sont des fonctions de constantes & de la seule variable x , & les exposans $m, n, p, m-n, \text{ \&c.}$ des nombres entiers positifs. On prend pour cela une troisieme variable z

qu'on suppose $= \frac{dy}{dx}$, d'où l'on tire $dy = z dx$; $dy^m = z^m dx^m$; $dy^{m-n} = z^{m-n} dx^{m-n}$; $dy^{m-p} = z^{m-p} \times dx^{m-p}$; &c. On substitue ces valeurs au lieu de dy^m , dy^{m-n} , dy^{m-p} , &c. dans l'équation proposée, & on la change en $A dx^m + B z^m dx^m + C z^{m-n} dx^m + D z^{m-p} dx^m + \text{&c.} = 0$, qu'on divise par le facteur commun dx^m . Le quotient est $A + B z^m + C z^{m-n} + D z^{m-p} + \text{&c.} = 0$, équation à deux variables x , z ; puisque A , B , C , D , &c. ne contiennent que la variable x avec des constantes. On trouvera donc par cette équation la valeur de z en x , & en constantes. On substituera cette valeur au lieu de z dans $z dx$, qui deviendra par cette substitution une différentielle d'une seule variable x ; on l'intégrera donc par les méthodes de la première partie, & son intégrale sera égale à y , puisque $z dx = dy$.

Supposons qu'on veuille intégrer l'équation $A dx^2 + B dy^2 + C dx dy = 0$, on aura dans l'équation générale $D = 0$, $m = 2$, $n = 1$, & en faisant $z = \frac{dy}{dx}$, on trouvera $A + B z^2 + C z = 0$, ou $z^2 + \frac{Cz}{B} = -\frac{A}{B}$,

d'où l'on tire $x = \frac{-C \pm \sqrt{CC - 4AB}}{2B}$; $dy = x dx =$

$$\frac{-C dx \pm dx \sqrt{CC - 4AB}}{2B}, \text{ \& } y = -S. \frac{C dx}{2B} \pm$$

$$S. \frac{dx \sqrt{CC - 4AB}}{2B} + Q \text{ constante.}$$

Si on suppose de plus $A = b$, $C = a$, $B = \frac{1}{2}x$,
par conséquent $2B = x$, & $CC - 4AB = aa - 2bx$,

on aura $dy = -\frac{adx}{x} \pm \frac{dx}{x} \sqrt{aa - 2bx}$, &, en intégrant de part & d'autre $y = Q$. constante $-aL.x \pm$

$$S. \frac{dx}{x} \sqrt{aa - 2bx}. \text{ Or } S. \frac{dx}{x} \sqrt{aa - 2bx} = 2\sqrt{aa - 2bx}$$

$$+ aL. \frac{\sqrt{aa - 2bx} - a}{\sqrt{aa - 2bx} + a} \text{ (Art. LI.)}. \text{ Donc } y = Q \pm$$

$$2\sqrt{aa - 2bx} - aL.x \pm aL. \frac{\sqrt{aa - 2bx} - a}{\sqrt{aa - 2bx} + a}, \text{ en pre-}$$

nant les logarithmes hyperboliques.

CCCLVI.

PROBLEME II. Trouver par les series les intégrales des equations différentielles de la seconde classe, ou de celles qui contiennent les deux variables finies x & y , avec leurs premieres différences dx & dy élevées a quelques puissances ou produits que ce soit.

SOLUTION. 1.° Il faut reduire l'equation proposée a la forme prescrite, en mettant d'un côté du

figne d'égalité le rapport $\frac{dy}{dx}$, ou $\frac{dx}{dy}$ des premières différences, & de l'autre côté la valeur de ce rapport exprimée par une suite finie, ou infinie de termes simples (Art. CCCL.). Par exemple, si l'équation proposée est $dy = dx - 3x dx + y dx + xx dx + xy dx$, il faudra la réduire à la forme $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + y + xx + xy$, en divisant par dx .

2.° L'équation étant ainsi préparée, on disposera ses termes suivant les dimensions des deux variables x , & y , mettant en premier lieu ceux qui ne sont point affectés de la variable relative, ensuite ceux où cette variable se trouve. Ainsi dans l'exemple proposé on écrira $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + xx + y + xy$, mettant en premier lieu les termes $1 - 3x + xx$, dans lesquels la variable relative y ne se trouve point, & rangeant ces termes suivant les dimensions de la correlative x dans chaque terme; plaçant ensuite les termes $y + xy$, où la relative y se rencontre, & en commençant par ceux, où les dimensions sont les plus petites.

3.° Ayant décrit un rectangle $ABDC$, & l'ayant divisé, comme on le voit (*Fig. 1.*) par des lignes horizontales EF , PQ , LM , & par la verticale KH , écrivez dans le rectangle horizontal $KBFR$ la suite des termes, où la variable relative ne se trouve

point, c'est a dire, la suite $1 - 3x + x^2$, dans nôtre exemple. Ecrivez aussi du haut en bas dans le rectangle vertical $ERSP$ l'autre suite de termes, où se trouve la variable relative; c'est icy la suite $+y + xy$:

4.° Prenez le premier, ou le plus bas terme de la suite horifontale, ou la variable relative ne se trouve point, & qui est placée dans le rectangle $KRFB$; multipliez ce terme par la variable correlative, & divisez le produit par l'exposant de la correlative dans ce même produit. Ecrivez ensuite le quotient de cette division dans le rectangle horifontal le plus bas $NHDM$, pour le premier terme de la serie, qui doit exprimer la valeur de la variable relative. Dans nôtre exemple il faut multiplier le premier, ou le plus bas terme 1 de la suite $1 - 3x + x^2$ par la variable correlative x , diviser le produit x par l'exposant 1 de x dans ce même produit x^1 , & écrire le quotient x ; qui vient de cette division dans le rectangle $NHDM$ a côté de la relative y ; x fera le premier terme de la serie qu'on cherche, & qui doit exprimer la valeur de y en x .

5.° Pour trouver le second terme de cette serie; substituez dans tous les termes de la suite verticale placée dans le rectangle $ERSP$ le premier terme que vous venez de trouver, au lieu de la variable relative, & écrivez la valeur de chaque terme dans le rectangle

$RSQF$ a côté de ce même terme, & dans le rang, qui convient a la dimension de la variable correlative dans cette valeur. Ainsi dans nôtre exemple il faut substituer x au lieu de y dans les termes $+y, +xy$, ce qui donnera les valeurs $+x, +xx$. On écrira donc la valeur $+x$, a côté de y au second rang, sous le terme de même dimension $-3x$, & la valeur $+xx$ a côté de xy au troisieme rang sous le terme de même dimension $+xx$ de la suite horifontale $1-3x+x^2$. Après ces operations prenez dans le rectangle $KSQB$ la somme des termes dans lesquels la variable correlative a la plus petite dimension après le plus bas terme de la suite horifontale, qui est icy 1 : Cette somme sera dans nôtre exemple $-3x+x^2 = -2x$, comme on la voit au second rang dans le rectangle des sommes $SNMQ$. Multipliez cette somme par la variable correlative, & ayant divisé le produit par l'exposant de la correlative dans ce même produit, écrivez le quotient de cette division dans le rectangle $NHDM$ pour le second terme de la serie, qui doit exprimer la valeur de la variable relative. Ainsi dans nôtre exemple, on multiplie la somme $-2x$ par la correlative x , & ayant divisé le produit $-2x^2$ par l'exposant 2 de x dans ce produit, on écrit le quotient $-xx$ pour le second terme de la serie, qui doit exprimer la valeur de y en x .

6.° De même pour trouver le troisieme terme de cette serie, on substituera dans tous les termes de la fuite verticale placée dans le rectangle $ERSP$ le second terme de la serie, ou le quotient qu'on vient de trouver, au lieu de la variable relative, & on écrira la valeur de chaque terme a côté de ce même terme dans le rectangle $RSQF$, & au rang qui convient a la dimension de la variable correlative dans cette valeur. Dans nôtre exemple on substituera $-nn$ au lieu de y dans les deux termes $+y$ & $+ny$; ce qui donnera les valeurs $-nn$, & $-n^3$. On écrira donc $-nn$ a côté de $+y$ au troisieme rang sous le terme de même dimension $+nn$ de la fuite horifontale $1-3n+nn$, & la valeur $-n^3$ a côté de $+ny$ au quatrieme rang. Ensuite on prendra dans le rectangle la somme des termes, dans lesquels la variable correlative a la plus petite dimension, après ceux dont on a pris la somme dans le nombre precedent. Cette somme est icy $nn - nn + nn = nn$. On la multipliera par la variable correlative, & ayant divisé le produit par l'exposant de la correlative dans ce même produit, on écrira le quotient de cette division dans le rectangle $NHDM$, pour le troisieme terme de la serie, qui doit être la valeur de la variable relative. Dans nôtre exemple on multipliera la somme $+nn$ par n , & ayant divisé le pro-

duit x^3 par l'exposant 3, on écrira $+\frac{x^3}{3}$, ou $\frac{1}{3}x^3$ pour le troisième terme cherché.

7.° En continuant d'opérer de la même manière; on trouvera le quatrième terme, qui est icy $-\frac{1}{6}x^4$.

Car la somme $+\frac{1}{3}x^3 - x^3 = -\frac{2}{3}x^3$ étant multipliée par x donne le produit $-\frac{2}{3}x^4$ qu'on doit diviser par l'exposant 4, pour avoir le quotient, ou le quatrième terme $-\frac{2}{12}x^4 = -\frac{1}{6}x^4$. Enfin on trouvera, en continuant les mêmes opérations, le cinquième terme, & tous les autres suivants, de sorte qu'on aura $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$ &c.

Ce Probleme est celui dont M. Newton parle en ces termes dans la methode des fluxions: *Sic demum ad finem perduci hoc valde intricatum & omnium aliorum difficillimum Problema, quando duæ solum sunt fluentes quantitates, una cum fluxionibus suis in proposita æquatione.* Ensuite, parlant de la demonstration du même Probleme, il ajoute: *Hoc pacto solutum est Problema, sed lætæ demonstratio. Cum autem tot & tam varia contineat hoc Problema, ut demonstratio synthetice sine maximis ambagibus deduci nequeat ex genuinis ejus fundamentis, sufficiet*

*sufficiet eam breviter indicare analytice. Proposita igitur aequatione, & opere peracto, tenta num ex aequatione re-
perta regredi liceat ad propositam: la demonstration de
Newton ne consiste qu'a verifier l'operation, lorsqu'elle
est faite, & a examiner si elle rend la différentielle pro-
posée. Mais nous donnerons icy une demonstration ge-
nerale de ce beau Probleme, tirée des principes du cal-
cul différentiel.*

DEMONSTRATION. Puisque $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x + xx$
 $+ y + xy$, en multipliant de côté, & d'autre par dx ,
on aura $dy = dx - 3x dx + xx dx + y dx + xy dx$; &
en intégrant, on aura $y = x - xx + \frac{1}{3} x^3 + S. y dx +$
 $S. xy dx$, d'où l'on voit que x est le premier terme de
la serie, qui doit exprimer la valeur de la variable re-
lative y en x , & qu'on trouve ce terme en intégrant
 dx , c'est a dire, en multipliant 1 par la correlative x ,
& en divisant le produit x par l'exposant 1 de x dans
le même produit, ce qui est l'operation prescrite N.° 4.

Si on suppose presentement, comme on a coutume
de faire dans l'analyse, que la serie qu'on cherche, &
qui doit exprimer la valeur de y en x , soit trouvée,
& qu'elle soit representée par $x + X$, x etant son pre-
mier terme, & X la suite de tous ses autres termes
après le premier, en substituant $x + X$ au lieu de y
dans les deux termes $+ y$, $+ xy$, on aura $y + xy =$

K,

$n + nn + X + nX$, & l'équation $dy = dn - 3ndn + nndn + (y + ny)dn$ deviendra $dy = dn - 3ndn + nndn + ndn + nnndn + (X + nX)dn$; & en intégrant de côté & d'autre, on aura $y = n - nn + \frac{2}{3}n^3 + S.(X + nX)dn$; par où l'on voit que le second terme de la serie, qui doit exprimer la valeur de y en n , est $-nn$, & qu'on trouve ce second terme en substituant le premier terme n pour y dans $+y + ny$, & en intégrant la différentielle $dn(-3n + n)$, ou $-2ndn$, c'est à dire, en multipliant la somme $-2n$ par la correlative n , & en divisant le produit $-2nn$ par l'exposant 2 de n dans ce même produit, pour avoir le quotient $-nn$. C'est l'operation prescrite N.° 5.

Supposant de la même maniere que la serie qu'on cherche soit $n - nn + X'$, X' representant la suite des termes de cette serie après les deux premiers $n - nn$, on aura $y = n + X = n - nn + X'$; par consequent $X = -nn + X'$, & en substituant $-nn + X'$ au lieu de X dans les deux termes $+X + nX$, on aura $+X + nX = -nn - n^3 + X' + nX'$, & l'équation $dy = dn - 2ndn + 2n^2dn + (X + nX)dn$ deviendra $dy = dn - 2ndn + 2n^2dn - n^3dn + (X' + nX')dn$, & en

$$-n^2dn$$

intégrant de part, & d'autre on aura $y = x - xx +$

$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + S.(X' + xX')dx$; d'où l'on conclût

que $\frac{1}{3}x^3$ est le troisieme terme de la serie, qui doit

exprimer la valeur de y en x , & qu'on trouvera ce

troisieme terme, en substituant le second terme $-xx$

pour X dans $X + xX$, ce qui donne $-xx - x^3$,

qu'on trouve aussi en substituant $-xx$ pour y dans

$y + xy$, & en intégrant la différentielle $(x^2 + x^2 -$

$x^2)dx$, ou $+x^2dx$; c'est a dire, en multipliant la

somme x^2 de $+x^2 + x^2 - x^2$ par la correlative x ,

pour avoir le produit x^3 , & en divisant ce produit par

l'exposant 3 de x dans le même produit, pour avoir le

quotient $+\frac{1}{3}x^3$. C'est l'operation prescrite N.º 6.

De même si on suppose que la serie qu'on cher-

che soit $x - xx + \frac{1}{3}x^3 + X''$, X'' representant la suite

des termes de cette serie après les trois premiers $x -$

$xx + \frac{1}{3}x^3$, on aura $y = x - xx + X' = x - xx + \frac{1}{3}x^3$

$+ X''$; par consequent $X' = \frac{1}{3}x^3 + X''$; & en substi-

tuant $\frac{1}{3}x^3 + X''$ au lieu de X' dans les deux termes

$X' + xX'$, on aura $X' + xX' = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + X'' +$

xX'' , & l'équation $dy = dx - 2x dx + x^2 dx - x^3 dx +$

$(X' + xX') dx$ deviendra $dy = dx - 2x dx + x^2 dx$

$- x^3 dx + \frac{1}{3}x^4 dx + (X' + xX'') dx$, &, en intégrant,

$+ \frac{1}{3}x^3 dx$

on aura $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + S. (X' +$

$xX'') dx$; d'où l'on conclût que $-\frac{1}{6}x^4$ est la quatrième

terme de la série, qui doit exprimer la valeur de y en x , &

qu'on trouve ce quatrième terme en substituant le troisième

$+ \frac{1}{3}x^3$ pour X' dans $X' + xX'$; ce qui donne $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4$,

qu'on trouve aussi en substituant $+ \frac{1}{3}x^3$ pour y dans $y + xy$,

& en intégrant la différentielle $(-x^3 + \frac{1}{3}x^3 dx)$, ou

$-\frac{2}{3}x^3 dx$, c'est à dire, en multipliant la somme

$-\frac{2}{3}x^3$ de $-x^3 + \frac{1}{3}x^3$ par la correlative x , pour

avoir le produit $-\frac{2}{3}x^4$, & en divisant ce produit par

l'exposant 4 de x dans le même produit, pour avoir

$$-\frac{2}{12}x^4 = -\frac{1}{6}x^4. \text{ C'est l'operation prescrite N.}^\circ 7.$$

On voit clairement qu'on peut demontrer toutes les autres operations prescrites dans la solution, & que cette demonstration peut s'appliquer a tous les cas: donc &c. *C. Q. F. D.*

Nous allons eclaircir par des Exemples les difficultés qui peuvent se rencontrer dans la pratique de cette methode.

CCCLVII.

EXEMPLE I. L'equation proposee etant $\frac{dy}{dx} = 1 +$

$$\frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4} \text{ &c. a l'infini, on ecrit le terme}$$

1 dans le rectangle horizontal *K R F B* (*Fig. 2.*), & toute la suite des autres termes dans le rectangle vertical *ERSP*. On multiplie le terme 1 par x , & ayant divisé le produit x par l'exposant 1 de x , on ecrit le quotient x dans le rectangle *NHDM*, pour le premier terme de la suite qui doit exprimer la valeur de y en x .

On substitue dans tous les termes du rectangle vertical *ERSP* le quotient ou le premier terme x au lieu de y , & on ecrit la valeur de chaque terme a côté de ce même terme dans le rectangle *RSQF* au

rang qui convient a la dimension de la correlative dans la valeur de ce terme. Ainsi on écrit $\frac{x}{a}$ valeur du terme $\frac{y}{a}$ a côté de ce terme au second rang; $\frac{x^2}{a^2}$ valeur du terme $\frac{x^2 y}{a^2}$ a côté du même terme au troisieme rang; $\frac{x^3}{a^3}$ valeur de $\frac{x^2 y}{a^3}$ a côté de ce terme au quatrieme rang, &c. Ensuite, pour trouver le second terme de la serie qu'on cherche, on multiplie $\frac{x}{a}$ par x , pour avoir le produit $\frac{x^2}{a}$, qu'on divisera par l'exposant 2; & on écrira le quotient $\frac{x^2}{2a}$ dans le rectangle $NHDM$ pour le second terme de la serie. Pour trouver le troisieme terme de cette serie, on substitue le second terme $\frac{x^2}{2a}$ au lieu de y dans tous les termes du rectangle vertical $ERSP$; on écrit la valeur de chaque terme a son rang dans le rectangle $RFQS$, marquant $\frac{x^2}{2a^2}$ a côté du terme $\frac{y}{a}$ au troisieme rang; $\frac{x^3}{2a^3}$ a côté du terme $\frac{x^2 y}{a^2}$ au quatrieme rang, &c. On prend ensuite la somme des termes du troisieme rang, qui est \rightarrow

$\frac{x^2}{2aa} + \frac{x^2}{aa} = \frac{3x^2}{2aa}$, & on la multiplie par x , pour avoir le produit $\frac{3x^3}{2aa}$, qu'on divise par l'exposant 3, & on écrit le quotient $\frac{x^3}{2aa}$ pour le troisieme terme de la serie dans le rectangle *NHDM*. En continuant de même les operations préscrites dans la solution du probleme, on trouve $y = x + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{2aa} + \frac{x^4}{2a^3} + \frac{x^5}{2a^4} + \frac{x^6}{2a^5}$ &c. a l'infini.

Il faut remarquer que dans cet Exemple on ne s'est proposé de pousser la serie qui exprime la valeur de y en x , que jusqu'a la fixieme dimension de x , & que c'est pour cette raison, qu'on a ômis dans l'operation tous les termes, qu'on prévoyoit devoir être inutiles pour cette fin, comme on l'a indiqué par le signe &c., qu'on a ajouté a toutes les suites interrompües.

CCCLVIII.

EXEMPLE II. Si on propofoit l'equation $\frac{dy}{dx} = -$

$$3x + 3xy + yy - xyy + y^3 - xy^3 + y^4 - xy^4 \text{ &c.}$$

$$+ 6xxy - 6xx + 8x^2y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4 \text{ &c. ;}$$

& qu'on ne voulût pousser la serie qui doit exprimer la va-

leur de y en x , que jusqu'à la septieme dimension de x , on disposerait les termes de l'equation selon l'ordre prescrit, en plaçant les termes, ou la relative y ne se trouve point, dans le rectangle horizontal $K R F B$ (*Fig. 3.*)

sans passer au de la du terme $-14x^6$, puisqu'on veut rejeter de la serie qui doit exprimer la valeur de y en x tous les termes dans lesquels la dimension de x surpasse 7, & puisqu'il faut, suivant la regle, multiplier par la correlative x tous les termes qui sont dans le rectangle $K B Q S$, ou toutes les sommes du rectangle $S N M Q$, pour trouver les termes de la serie qu'on cherche. On mettroit ensuite dans le rectangle vertical $E R S P$ les autres termes de l'equation, dans lesquels la relative y se trouve, sans aller au delà des termes, qui donnent jusqu'à la fixieme dimension de x , lorsqu'on substitue les valeurs de y en x dans ces mêmes termes. Ainsi puisqu'on trouve, suivant la regle, que le premier terme de la serie qu'on cherche, est $-\frac{3}{2}xx$,

& qu'il faut substituer $-\frac{3}{2}xx$ pour y , dans les termes du rectangle vertical $E R S P$, ce qui donnera $+10x^4y = -15x^6$; $-xyy = -\frac{9}{4}x^5$, & $y^3 = -\frac{27}{8}x^6$; on voit bien qu'il seroit inutile, lorsqu'on ne veut pousser la serie que jusqu'à la septieme dimension de x , de

de marquer dans le rectangle vertical $ERSP$ les termes $+12x^5y\mathcal{O}c.$, $-xy^3\mathcal{O}c.$, $+y^4\mathcal{O}c.$

Après avoir ainsi disposé les termes de l'équation dans le rectangle $AXTB$, on trouvera sans difficulté les quatre premiers termes $-\frac{3}{2}xx - 2x^3 - \frac{25}{8}x^4 -$

$\frac{21}{20}x^5$ de la valeur de y ; mais comme les puissances y^2 ;

$y^3\mathcal{O}c.$ se trouvent dans les termes du rectangle vertical

$ERSP$, & puisque, pour trouver les autres termes

de la serie, qui doit exprimer la valeur de y , il faut

substituer dans ce rectangle les valeurs de ces puissances

en x , on aura besoin des premiers termes du quar-

ré, du cube, &c. de la serie $-\frac{3}{2}x^2 - 2x^3 - \frac{25}{8}x^4\mathcal{O}c.$;

qu'on trouvera en multipliant cette serie par elle même

autant de fois, qu'il sera nécessaire; ce qui donnera

$yy = +\frac{2}{4}x^4 + 6x^5 + \frac{107}{8}x^6\mathcal{O}c.$, $y^3 = -\frac{27}{8}x^6\mathcal{O}c.$,

en negligéant les autres termes, ou la dimension

de x surpasse 6; par ce qu'on ne veut point icy

pouffer la serie qu'on cherche au delà de la septie-

me dimension de x . Nous avons marqué les pre-

miers termes de ces puissances dans le rectangle $CXTD$,

& il faudroit en augmenter le nombre successivement,

a mesure qu'on voudroit pousser plus loin la serie qui exprime la valeur de y . On trouve de cette maniere

$$y = -\frac{3}{2} x x - 2 x^3 - \frac{25}{8} x^4 - \frac{21}{20} x^5 - \frac{111}{16} x^6 - \frac{367}{35} x^7$$

Cc. quantité negative; d'où l'on conclût que l'une des deux variables x & y , augmente, tandis que l'autre diminue. Au reste on voit par cet Exemple comment il faut proceder dans tous les autres cas, qui renferment les puissances quelconques de la quantité relative.

CCCLIX.

EXEMPLE III. On refoud de la même maniere les equations dans lesquelles la quantité relative est élevée a des puissances fractionaires; par exemple, si

on propose l'equation $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y - 4yy + 2yx^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5} xx$

$+ 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$, dans laquelle la quantité relative x est

élevée a la puissance fractionaire $\frac{1}{2}$; on en disposera

les termes, suivant l'ordre prescrit, dans le rectangle $ACDB$ (*Fig. 4*). Ensuite on multipliera le premier

terme $+\frac{1}{2} y$ par la quantité correlative y , & ayant

divisé le produit $\frac{1}{2} y^2$ par l'exposant 2, on écrira le

quotient $\frac{1}{4} yy$ dans le rectangle $NHDM$ pour le pre-

mier terme de la serie, qui doit exprimer la valeur de x en y . Pour trouver le second terme de cette serie,

on substituera $\frac{1}{2}y$ pour $x^{\frac{1}{2}}$, & $\frac{1}{16}y^4$ pour xx dans les termes du rectangle vertical $ERSP$, & on écrira dans le rectangle $RSQF$ y^2 pour $2yx^{\frac{1}{2}}$ a côté de ce terme au second rang, & $-\frac{1}{20}y^4$ pour $-\frac{4}{5}xx$ a côté de ce terme a son rang. On prendra la somme des termes $-4yy + yy = -3yy$, qu'on multipliera par x pour avoir le produit $-3y^3$; on divisera ce produit par l'exposant 3; le quotient sera $-y^3$, qu'on écrira pour le *second terme* de la serie dans le rectangle $NHDM$. Après cette operation on commencera a chercher les premiers termes de la racine quarrée de x , c'est a dire, de la serie $\frac{1}{4}yy - y^3$ &c. On trouve que les deux premiers termes de cette racine sont $\frac{1}{2}y - yy$, & que les deux premiers termes de xx , ou du quarré de la serie $\frac{1}{4}yy - y^3$ &c. sont $\frac{1}{16}y^4 - \frac{1}{2}y^5$.

Mais, par ce qu'on ne veut pousser icy cette serie, que jusqu'au terme où la dimension de y ne passe pas 5, on ômettra tous les termes dans lesquels cet-

te dimension de y surpasse 4. On substituera donc d'abord dans les termes du rectangle vertical $ERSP$, $+ \frac{1}{2}y - yy$ pour $x^{\frac{1}{2}}$, & on aura $2yx^{\frac{1}{2}} = +yy - 2y^3$, qu'on écrira dans le rectangle $RSQF$ a son rang. On écrira de même $-\frac{1}{20}y^4$ pour $-\frac{4}{5}xx$ dans le même rectangle a côté de $-\frac{4}{5}xx$, & a son rang. Ensuite on multipliera le terme $+7y^{\frac{5}{2}}$, qui se trouve seul de sa dimension, par la correlative y , pour avoir le produit $+7y^{\frac{7}{2}}$, qu'on divisera par l'exposant $\frac{7}{2}$, ce qui donnera le quotient $2y^{\frac{7}{2}}$, qu'on écrira dans le rectangle $NHDM$ pour le troisieme terme de la serie ou de la valeur de x en y . On aura donc $x = \frac{1}{4}yy - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}}$ & $x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}y - yy - 2y^{\frac{5}{2}}$ en substituant dans le rectangle $ERSP$ $\frac{1}{2}y - yy - 2y^{\frac{5}{2}}$ au lieu de $x^{\frac{1}{2}}$, on aura $+2yx^{\frac{1}{2}} = +yy - 2y^3 + 4y^{\frac{7}{2}}$, qu'on devroit écrire dans le rectangle

$RSQF$ a côté du terme $+2yn^{\frac{1}{2}}$. Mais, comme on a déjà écrit les deux termes $+yy-2y^3$, on n'a plus qu'à ajouter le troisième terme $+4y^{\frac{7}{2}}$. De même en substituant dans le rectangle $ERSP$ $\frac{1}{16}y^4$ pour xx , on aura $-\frac{4}{5}xx = -\frac{1}{20}y^4$, qu'on a déjà marqué dans le rectangle $RSQF$. On prendra la somme des termes correspondans $+2y^3-2y^3$, qui, étant zero, ne donne rien. Ensuite on prendra le terme $4y^{\frac{7}{2}}$, qui est seul de sa dimension, on le multipliera par y , pour avoir le produit $4y^{\frac{9}{2}}$, qu'on divisera par l'exposant $\frac{9}{2}$, & on écrira le quotient $+\frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}}$ dans le rectangle $NHDM$ pour le quatrième terme de la suite. On aura donc $x = \frac{1}{4}yy - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} \text{ \&cc.}$, dont la racine carrée, où $x^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{2}y - yy + 2y^{\frac{5}{2}} - y^3 \text{ \&cc.}$ Enfin, en substituant dans le rectangle $ERSP$ $\frac{1}{2}y - yy + 2y^{\frac{5}{2}} - y^3$ au lieu de $x^{\frac{1}{2}}$, on aura $+2yn^{\frac{1}{2}} =$

$+yy - 2y^3 + 4y^{\frac{7}{2}} - 2y^4$, qu'on devoit écrire dans le rectangle $RSQF$ a côté du terme $+2y^{\frac{1}{2}}$; mais, comme on a déjà marqué les trois premiers termes $+yy - 2y^3 + 4y^{\frac{7}{2}}$, on se contentera d'ajouter le quatrième terme $-2y^4$. Pour la valeur du terme $-\frac{4}{5}xx = -\frac{1}{20}y^4$, on voit qu'on l'a déjà écrite. Ainsi, pour trouver le cinquième terme de la serie, ou de la valeur de x en y , on prendra la somme des termes correspondans $-2y^4 - \frac{1}{20}y^4 = -\frac{41}{20}y^4$; on multipliera cette somme par y , pour avoir $-\frac{41}{20}y^5$, & après avoir divisé ce produit par l'exposant 5, on écrira le quotient $-\frac{41}{100}x^5$ pour le cinquième terme de la serie dans le rectangle $NHDM$, & on aura $x = \frac{1}{4}yy - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^5$ &c. On voit bien qu'on peut prolonger cette serie autant qu'on voudra par les mêmes operations continuées.

CCCLX.

EXEMPLE IV. Lorsque la quantité relative a des exposans fractionnaires; on peut encore la reduire en nombres entiers par la methode ordinaire, c'est a dire, en egalant cette quantité relative avec son exposant fractionnaire a une autre variable dont l'exposant soit un nombre entier, & en substituant celle-cy au lieu de la premiere dans toute l'equation. Par exemple, si l'equation

proposée est $\frac{dy}{dx} = 3xy^{\frac{2}{3}} + y$ dans laquelle la quantité relative y a pour exposant la fraction $\frac{2}{3}$, on supposera $y^{\frac{1}{3}} = z$, ou $y = z^3$, ce qui donnera en différen-

tiant $dy = 3z^2 dz$; en substituant $3zx dz$ au lieu de dy , zx au lieu de $y^{\frac{2}{3}}$, & z^3 au lieu de y , l'equation deviendra $\frac{3zx dz}{dx} = 3zxz + z^3$, ou en divisant par $3zx$; $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{3}z$, & en cherchant la valeur de z en x par la methode de Newton, on trouvera la serie

$z = \frac{1}{2}xx + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{216} + \frac{x^5}{3240} \text{ \&c.}$ Remettez $y^{\frac{1}{3}}$ au lieu

de z dans cette equation, vous aurez $y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}xx + \frac{x^3}{18}$

$+ \frac{x^4}{216} \mathcal{O}'c.$, &, en faisant le cube de côté & d'autre,
 $y = \frac{1}{8} x^6 + \frac{1}{24} x^7 + \frac{7}{864} x^8 \mathcal{O}'c.$ De même si l'équation
 proposée étoit $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy}$, ou $\frac{dy}{dx} = 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$,
 en supposant $xz = y$, on auroit $2z dx = dy$, $x = y^{\frac{1}{2}}$,
 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}z$, & l'équation deviendroit $\frac{2z dz}{dx} = 2z +$
 $x^{\frac{1}{2}}z$, &, en divisant par $2z$, $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$, d'où l'on
 tire $dz = dx + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} dx$, &, en intégrant de côté &
 d'autre, $z = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$; par conséquent $y^{\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$,
 &, en quarrant de part & d'autre, $y = xx + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} +$
 $\frac{1}{9}x^3$.

M. Newton fait a propos de cet Exemple une
 remarque importante, que nous ne devons pas ômet-
 tre; c'est qu'on peut trouver une infinité de series dif-
 férentes pour exprimer la valeur de la quantité relati-
 ve par la quantité correlative, & par des constantes.

Par

Par exemple, dans l'équation $\frac{dy}{dx} = 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$, qu'on

vient de résoudre, & qui a donné $y = xx + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$.

Si, après avoir supposé $x = y^2$, & changé l'équation

en $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$, ou $dz = dx + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} dx$, on ajoute

une constante quelconque C après l'intégration, on aura

$z = C + x + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}$, intégrale qui rendra en différenciant

la même équation $dz = dx + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} dx$, ou $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2} dx$, & on aura zz , ou $y = CC + 2Cx + \frac{2}{3} Cx^{\frac{3}{2}}$

$+ xx + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$, serie différente de la première

$xx + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$, & qu'on peut varier à l'infini, en

donnant à la constante C telle valeur qu'on voudra.

Cette remarque est générale, & peut s'appliquer à toutes les équations dont il s'agit dans le Problème II.

Car toutes ces équations peuvent être représentées par

$\frac{dy}{dx} = z$, z étant une suite quelconque de termes sim-

ples, composés des deux variables y & x , & de constantes. Or, si $\frac{dy}{dx} = z$, on aura $dy = z dx$, & en intégrant de part & d'autre, $y = \int z dx$, mais on peut ajouter une constante quelconque C , & écrire $y = C + \int z dx$, quelque soit la serie qui exprime l'intégrale $\int z dx$, ou la premier valeur de y . De plus on peut prendre pour le premier terme de la serie, qui doit exprimer la valeur de y , tel nombre, ou telle quantité constante qu'on voudra, substituer ensuite cette quantité, ou ce premier terme pour y dans tous les termes du rectangle vertical $ERSP$ (*Fig. 5.*), & continuer l'operation a l'ordinaire, pour trouver les autres termes de la serie, ou de la valeur de y . Ainsi dans l'exemple, dont nous sommes servis pour la demonstration du Probleme II., si on prend 1 pour le premier terme de la valeur de y , & qu'on substitue 1 pour y dans les termes $+y$, & $+xy$ du rectangle vertical $ERSP$, on aura $+y = 1$, qu'on écrira a côté du terme $+y$ dans le rectangle $RSQF$ sous le terme $+1$ du rectangle $KRFB$, & on marquera de même $+x$ pour $+xy$ a côté de ce terme dans le rectangle $RSQF$ sous $-3x$. Ensuite on fera la somme des plus bas termes $+1 + 1 = 2$, on multipliera cette somme par la correlative x pour avoir le produit $2x$, qu'on divisera par l'exposant 1, & on

écrira le quotient $+2x$ dans le rectangle $NHDM$, pour le second terme de la série qui doit exprimer la valeur de y . On continuera les opérations à l'ordinaire, & on trouvera $y = 1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$ &c., & de cette façon on peut trouver tant d'autres valeurs de y qu'on voudra, en prenant 2, ou 3, ou un autre nombre quelconque, pour le premier terme; ou bien en représentant ce premier terme par une constante arbitraire a (*Fig. 6.*), qu'on pourra ensuite déterminer, comme on jugera à propos.

Il faut observer dans le cas, où la quantité qu'on veut extraire, est affectée d'une dimension fractionnaire, comme dans l'Exemples IV., qu'on fera bien de prendre l'unité, ou quelque autre nombre commode pour le premier terme de la série; & même cela devient nécessaire, quand, pour avoir la valeur de cette dimension fractionnaire, l'on ne pourroit tirer autrement la racine, à cause du signe négatif; comme aussi, lorsqu'il n'y a aucun terme, qu'on puisse mettre dans le rectangle horizontal $KRFB$, d'où l'on tire le premier terme de la série, ou de la valeur de y .

CCCLXI.

Si dans l'équation proposée $\frac{dy}{dx} = z$, la suite z contient quelque terme, qui ait l'une ou l'autre varia-

ble, ou sa puissance au denominateur, il faut suivant la regle generale (Art. CCCXLIX.) reduire ce terme a une serie infinie, en changeant cette variable en une autre jointe a une constante arbitraire avec le signe

\pm ou $-$. Par exemple, si l'equation est $\frac{dy}{dx} = 3y$

$- 2x \pm \frac{x}{y} - \frac{2y}{xx}$, il faudra reduire les termes $\frac{x}{y}$ &

$\frac{2y}{xx}$ en series infinies par la division, en changeant la

variable y en $u \pm b$, ou en $b - u$, & x en $z \pm c$, ou en $c - z$, b & c etant des constantes arbitraires, & en

divisant ensuite les numerateurs par leurs denominateurs, pour avoir des series infinies de termes simples, dans lesquels les exposans des variables soient positifs.

Mais comme la raison $\frac{dy}{dx}$ demeure la même, soit qu'on

crive $y \pm b$, ou $y - b$ au lieu de y , & $x \pm c$, ou $x - c$ au lieu de x , puisque la différentielle de $y \pm b$, & celle de $y - b$ est toujours dy , & la différentielle

de $x \pm c$, & de $x - c$ est toujours dx , de même que la différentielle de $b - y$ est $-dy$, & celle de $c - x$

est $-dx$; ce qui donnera $\frac{-dy}{-dx} = \frac{dy}{dx}$; on rendra le

calcul plus simple en ce cas, en se contentant de substituer $y \pm b$, ou $b - y$ au lieu de y , & $x \pm c$, ou $c - x$ au lieu de x dans l'equation, sans employer de

nouvelles variables, & en operant ensuite suivant les regles prescrites. Ainsi dans l'equation proposee, si on ecrit $1-y$ pour y , & $1-x$ pour x , on aura $\frac{dy}{dx} = 1-3y+2x+\frac{1-x}{1-y}+\frac{2y-2}{1-2x+xx}$, & par la division a l'infini $\frac{1-x}{1-y} = 1-x+y-xy+yy-xy^2+y^3-xy^3 \text{ \&c.}$, & $\frac{2y-2}{1-2x+xx} = 2y-2+4xy-4x+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4 \text{ \&c.}$; d'où l'on tirera $\frac{dy}{dx} = -3x+3xy+y^2-xy^2+y^3-xy^3 \text{ \&c.}$
 $+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4 \text{ \&c.}$
 Equation deja resolue (Art. CCCLVIII.).

CCCLXII.

Neantmoins il n'est pas toujours necessaire dans ce cas de reduire l'equation a une autre forme. Par exemple, si l'equation proposee etoit $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} - xx$, on pourroit bien la reduire a une autre forme en substituant $1+y$ au lieu de y ; mais il sera plus court d'operer sans cette reduction, comme on va le voir. Apres avoir dispose les termes de l'equation a l'ordinaire, en plaçant $-xx$ dans le rectangle horizontal

$KRFB$, & $\frac{1}{y}$ dans le rectangle vertical $ERSP$, on prend 1 pour le premier terme de la valeur de y ; on substitue cette valeur 1 pour y dans le terme $\frac{1}{y}$. Ensuite on prend la somme des termes les plus bas du rectangle $KSQB$, & trouvant qu'il n'y a que le terme 1, on le multiplie par la correlative n , & divisant le produit n par l'exposant 1, on écrit le quotient n pour le second terme de la valeur de y dans le rectangle $NHDM$. Pour trouver le troisième terme, on substitue $1+n$ pour y dans le terme $\frac{1}{y}$, c'est à dire, qu'on divise 1 par $1+n$; le quotient est $1-n$ &c. On écrit donc ce quotient, ou plutôt à cause qu'on a déjà marqué le premier terme 1, on écrit $-n$ à côté du terme $\frac{1}{y}$ dans le rectangle $RSQF$. On prend ensuite dans le rectangle $KSQB$ la somme des termes les plus bas après 1, & ne trouvant que $-n$, on en déduit suivant la règle $-\frac{1}{2}nn$ pour le troisième terme de la valeur de y .

Pour trouver le quatrième terme, on substitue $1+n-\frac{1}{2}nn$ pour y dans le terme $\frac{1}{y}$, & trouvant $\frac{1}{y} = 1-n+\frac{3}{2}nn$ &c., on écrit cette valeur, ou plu-

tôt son dernier terme $+\frac{3}{2}nn$ dans le rectangle $RSQF$, après $1-n$, sous $-nn$. On prend la somme des termes $-nn+\frac{3}{2}nn=\frac{1}{2}nn$, qu'on multiplie par n , pour avoir le produit $\frac{1}{2}n^3$. On divise ce produit par l'exposant 3, & on écrit le quotient $+\frac{1}{6}n^3$ pour le quatrième terme de la valeur de y . On peut continuer de la même manière pour les autres termes.

Il n'est pas non plus nécessaire que les dimensions de l'autre variable soient toujours positives. Car de l'équation $\frac{dy}{dx}=3+2y-\frac{y^2}{x}$ on tire $y=3x-\frac{3}{2}xx+2x^3$ &c. comme on le voit (*Fig. 8.*).

L'équation $\frac{dy}{dx}=-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{xx}$ donnera aussi $y=\frac{1}{x}$ sans la réduction des termes $\frac{1}{x}$, & $\frac{1}{xx}$, en faisant l'opération comme elle est marquée (*Fig. 9.*).

Il faut observer icy en passant que, dans le nombre infini de séries, qu'on peut trouver pour exprimer la valeur de la quantité relative par la correlative, il s'en trouve souvent qui sont finies, comme dans l'exemple précédent; il n'est pas même difficile de trouver

ces suites finies, en prenant une constante arbitraire pour le premier terme de la serie, & en lui donnant après la solution quelque valeur convenable, pour rendre finie la serie entiere.

CCCLXIII.

On peut encore, assez facilement & sans aucune reduction du terme $\frac{y}{2x}$, tirer la valeur de y de l'equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + 1 - 2x + \frac{1}{2}xx, \text{ en supposant, a la}$$

maniere des analystes, qu'on a trouvé ce qu'on cherche. Ainsi après avoir disposé les termes de l'equation a l'ordinaire, on met $2ex$ pour le premier terme de la valeur de y , prenant $2e$ pour le coefficient numerique qui n'est pas encore connu. On substitue $2ex$ au lieu de y dans le terme $+\frac{y}{2x}$ du rectangle vertical

$ERSP$ (Fig. 10.), on trouve $+\frac{y}{2x} = e$, qu'on ecrit

a côté du terme $\frac{y}{2x}$ au premier rang dans le rectangle

$RSQF$; on fait la somme $1+e$ des termes les plus bas du rectangle $KSQB$; on la multiplie par la correlative x , & ayant divisé le produit $x+ex$ par l'exposant 1 de x , on a le quotient $x+ex$ pour le premier terme de la valeur de y . Puis donc qu'on a supposé

ce premier terme $= 2en$, on aura $n + en = 2en$, d'où l'on tire $e = 1$. Donc le premier terme de la valeur réelle de y fera $2n$. On se fert de même d'un terme supposé $2fn$ pour représenter le second terme de la valeur de y ; on substitue $2fn$ au lieu de y dans le terme $+\frac{y}{2x}$ du rectangle $ERSP$, & trouvant $\frac{y}{2x} = +fn$, on écrit $+fn$ à côté du terme $+\frac{y}{2x}$ & au second rang dans le rectangle $RSQF$. Ensuite on prend la somme $-2n + fn$ des termes correspondans dans le rectangle $KPQB$; on la multiplie par n , pour avoir le produit $-2n^2 + fn^2$, qu'on divise par l'exposant 2, & le quotient $-n^2 + \frac{1}{2}fn^2$ doit être le second terme de la valeur de y ; puis donc que nous avons supposé ce second terme $= 2fn$, nous aurons l'équation $-n^2 + \frac{1}{2}fn^2 = 2fn^2$, d'où l'on tire $f = -\frac{2}{3}$. Donc le second terme de la valeur réelle de y fera $-\frac{4}{3}nn$. On trouve de la même manière que le coefficient supposé $2g$ dans le troisième terme donne $g = \frac{1}{10}$, & que le troisième terme de la valeur réelle de y est $+\frac{1}{5}n^3$.

Enfin on trouve de même que le coefficient supposé $2b$ du quatrième terme est zero; d'où l'on conclût qu'il n'y a plus d'autres termes, que l'opération se termine là, & que la valeur réelle de y est exactement $2x - \frac{4}{3}xx + \frac{1}{5}x^3$.

On refoudra a peu près de la même maniere l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{4x}$, en supposant $y = e^{nx}$, le coefficient e , & l'exposant n étant des constantes inconnües; car, en substituant e^{nx} au lieu de y dans l'équation proposée, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{nx}}{4x}$, ou $dy = \frac{3e^{nx-1}dx}{4}$, &, en intégrant de part & d'autre, $y = \frac{3e^{nx}}{4n}$; par conséquent $n = \frac{3}{4}$, & e indéterminé. On aura donc $y = e^{x^{\frac{3}{4}}}$, & on pourra donner au coefficient e telle valeur qu'on voudra.

CCCLXIV.

On peut quelque fois commencer l'opération par la plus haute puissance de la quantité correlative, en descendant par degrés aux puissances inférieures, comme dans cette équation $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx} + \frac{1}{xx} + 3 + 2x - \frac{4}{x}$.

Car, après avoir disposé les termes d'une manière contraire à l'ordinaire, en commençant par le plus haut terme $2x$, comme on le voit (*Fig. II.*), on trouvera suivant la méthode xx pour le premier terme de la valeur de y . Ensuite pour trouver le second terme, on substituera xx pour y dans le terme $+\frac{y}{xx}$ du rectangle $ERSP$, & on écrira sa valeur 1 dans le rectangle $RSQF$ au second rang sous le terme $+3$, on prendra la somme 4 des deux termes correspondans $+1$, & $+3$, on la multipliera par x , & ayant divisé le produit $4x$ par l'exposant 1, on aura $+4x$ pour le second terme. On trouvera l'un après l'autre les autres termes de la valeur de y en suivant la règle prescrite.

CCCLXV.

PROBLEME III. Trouver les intégrales des équations de la troisième classe, c'est à dire, de celles qui contiennent plus de deux variables avec leurs premières différences, & leurs produits quelconques.

SOLUTION. 1.° Lorsque l'équation proposée contient trois variables, si la relation de deux de ces variables est déterminée par l'état de la question, on se servira de cette relation donnée, pour trouver le rapport des différences de ces deux variables, ce qui don-

nera le moyen de chasser de l'équation proposée l'une ou l'autre de ces variables, & sa différence. On réduira par là l'équation de trois variables a deux, & on la refoudra par le Probleme I., ou II. Mais si la relation de deux des trois variables n'est pas déterminée par l'état de la question, on pourra former cette relation a volonté, & deduire le rapport des différences, pour chasser ensuite de l'équation proposée une des variables avec sa différence, & la reduire a une equation a deux variables, qu'on refoudra par les Problemes precedents.

2.^o Si l'équation proposée contient quatre variables, on la reduira a une equation de trois variables seulement, lorsque la relation entre deux de ces variables sera donnée par l'état de la question, & on refoudra ensuite l'équation, comme nous venons de le dire. Mais, si la relation entre deux variables n'est pas donnée par l'état de la question, on pourra choisir cette relation a volonté, & chasser une des quatre variables de l'équation, qu'on refoudra ensuite comme dans le cas precedent. On operera de la même maniere sur les equations qui contiendront plus de quatre variables, en reduisant celles de cinq variables a quatre, celles de six variables a cinq, & ainsi des autres.

Soit proposée l'équation a trois variables $z dx - dxz + x dy = 0$, dans laquelle la relation entre deux

de ces variables n'est point déterminée. On formera donc à volonté une relation entre deux de ces variables: par exemple, entre x & y , en supposant $x=y$, ou $x=yy$, &c., ou bien entre y & z , en supposant $2y = z + z$ &c. Nous choisirons icy la relation $x=yy$, qui donnera, en différentiant, $dx=2ydy$. Substituant donc $2ydy$ pour dx , & yy pour x dans l'équation proposée, on aura $4yddy - dz + yydy = 0$, d'où l'on tire en intégrant $2yy - z + \frac{1}{3}y^3 = 0$, ou $z = 2yy + \frac{1}{3}y^3$ pour la relation de z & de y . Et en écrivant x pour yy , & $x^{\frac{3}{2}}$ pour y^3 , on aura $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$. Ainsi dans le nombre infini de relations, que peuvent avoir les trois variables x, y, z , nous en avons trouvé une qui est représentée par ces équations $x=yy$, $2yy + \frac{1}{3}y^3 = z$, & $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

CCCLXVI.

REMARQUE. Il nous reste quelques réflexions à faire sur l'application des méthodes précédentes.

1.° Lorsque l'équation différentielle proposée ne contient que deux variables x & y avec leurs premières différences dx & dy élevées à des puissances ou produits dx^2, dx^3 &c., dy^2, dy^3 , &c., $dx dy$, $dx^2 dy$,

Cc. On se servira des methodes du second Chapitre pour la reduire a la forme $\frac{dy}{dx}=z$, ou $\frac{dx}{dy}=z$, z etant une suite finie ou infinie de termes composés des variables x, y , & de constantes.

2.^o Après avoir reduit l'équation a cette forme, ou, ce qui est la même chose, a la forme $A dx + B dy = 0$, dans laquelle A & B sont des fonctions de x , de y , & de constantes, on cherchera par la methode du Chapitre I. si la quantité différentielle $A dx + B dy$ est exacte; &, si elle se trouve complete, on l'intégrera par les methodes aisées du même Chapitre. Si elle n'est pas complete, on cherchera le facteur commun pour la rendre complete. Mais, si on trouve trop de difficulté dans cette recherche du facteur commun, on aura recours aux methodes des Problemes I. & II. du second Chapitre, pour trouver au moins par approximation la valeur de y en x , ou celle de x en y par des series, entre lesquelles on choisira celles qui seront les plus simples, ou qui convergeront le plus vite.

3.^o Quand l'équation différentielle contiendra plus de deux variables, on examinera si on peut determiner par l'état de la question quelque nouvelle relation entre quelques-unes de ces variables, & alors on se servira de cette relation pour chasser une de ces variables &

la différence de l'équation. Si on ne trouve point de nouvelle relation entre deux variables, on examinera par les méthodes du Chapitre I. si l'équation n'est pas impossible en general, comme il arrive souvent, & alors on n'en cherchera point l'intégrale generale. Mais, si elle est possible, on examinera si elle est exacte, & alors on l'intégrera par les méthodes du Chapitre I.; ou bien on cherchera à la rendre complete en la multipliant par un facteur commun, si on peut le trouver; sinon, on aura recours à la méthode du Probleme precedent. Ce Chapitre renferme un Commentaire sur la méthode elegante que M. Newton ne fait que proposer dans son *Traité des Fluxions*; & nous l'avons expliquée d'autant plus volontiers, qu'elle nous a paru très-belle, & que nous ne savons pas qu'elle ait été démontrée par Personne.



C H A P I T R E III.

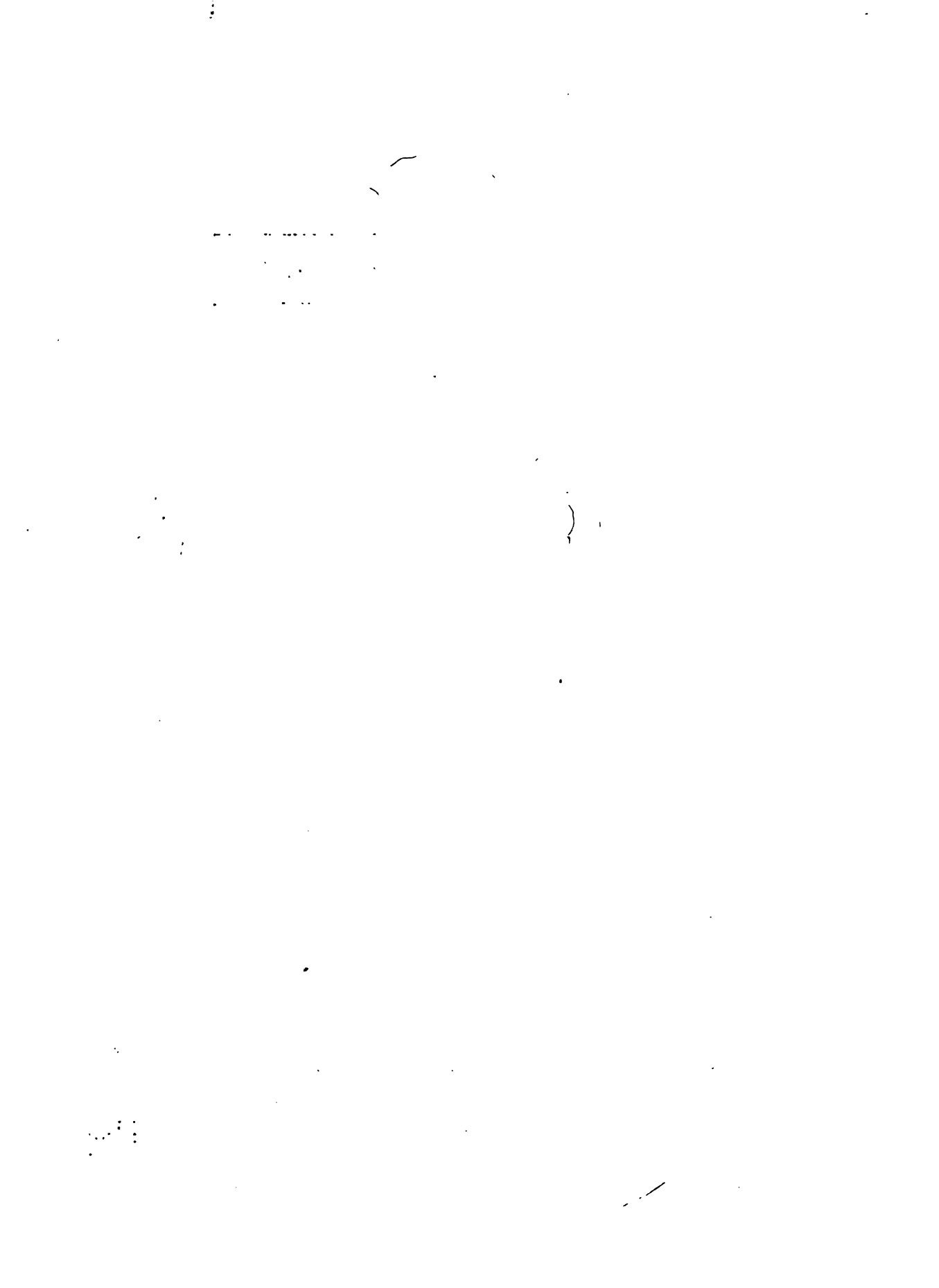
De la separation des indeterminées dans les equations différentielles, qui ne contiennent que les premieres différences des variables, ou leurs puissances, pour les intégrer ensuite par les methodes de la premiere Partie.

CCCLXVII.

Toutes les equations différentielles du premier ordre, qui ne contiennent que deux variables séparées x & y , peuvent se reduire a cette forme generale $Xdx = Ydy$, dans laquelle X represente une fonction quelconque de x sans y ; & Y une fonction de y sans x . En intégrant de part & d'autre par les methodes de la premiere Partie, on aura $\int Xdx = \int Ydy$, plus ou moins une constante arbitraire, ou déterminée par l'état de la question. Si ces deux intégrales sont des fonctions algebriques de x , & de y , l'equation $\int Xdx = \int Ydy$ sera aussi algebrique, & ses racines donneront les valeurs de x par y , & celles de y par x . Si cette equation n'est point algebrique, on pourra toujours trouver x par y , ou y par x , au moyen des quadratures des courbes. Car $\int Xdx$ fera l'aire d'une courbe, dont l'abscisse sera x , & l'ordonnée perpendiculaire

K		B
R	$1 - 2x + xx$	
y	$+ x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 \&c.$	F
xy	$+ xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 \&c.$	Fig. 1
s		
mm.	$1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5 \&c.$	Q
N	$x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6 \&c.$	M
H		D

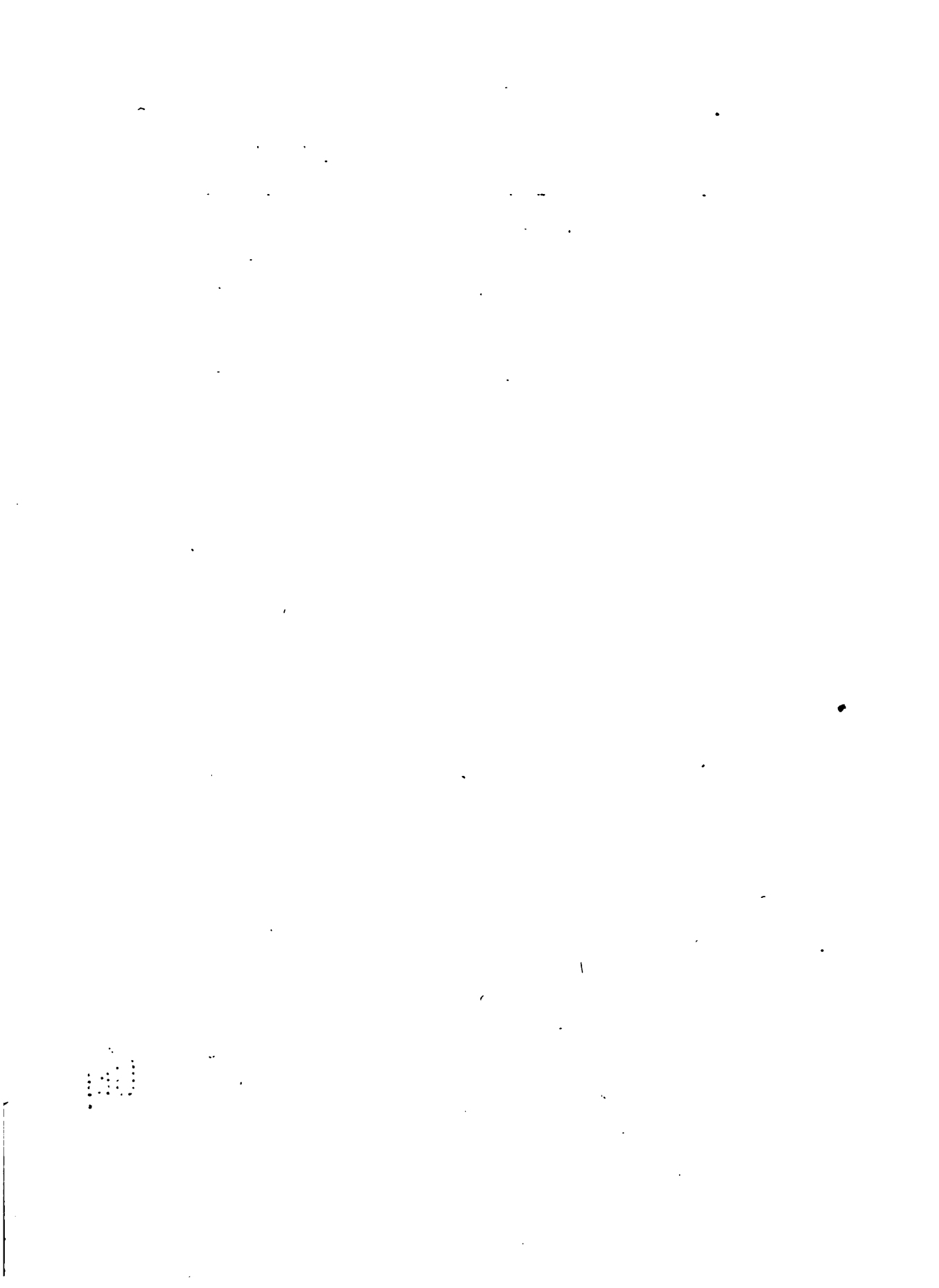
K		B
R	1	
$\frac{y}{a}$	$+ \frac{x}{a} + \frac{xx}{2aa} + \frac{x^3}{2a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5} \&c.$	F
$\frac{xy}{aa}$	$+ \frac{xx}{aa} + \frac{x^3}{2a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5} \&c.$	Fig. 2
$\frac{xy}{a^3}$	$+ \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5} \&c.$	
$\frac{x^2y}{a^3}$	$+ \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^5}{2a^5} \&c.$	
$\frac{x^4}{a^4}$	$+ \frac{x^5}{a^5} \&c.$	
$\frac{x^4y}{a^5}$	$+ \frac{x^5}{a^5} \&c.$	
&c.		S
mm.	$1 + \frac{x}{a} + \frac{3xx}{2aa} + \frac{2x^3}{a^3} + \frac{5x}{2a^4} + \frac{3x^5}{a^5} \&c.$	Q
N	$x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{2aa} + \frac{x^4}{2a^3} + \frac{x^5}{2a^4} + \frac{x^6}{2a^5} \&c.$	M
H		D

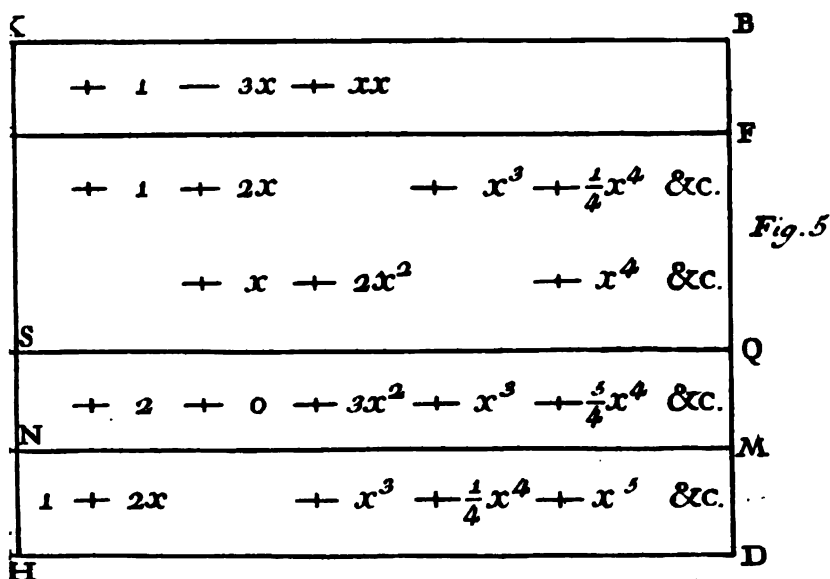
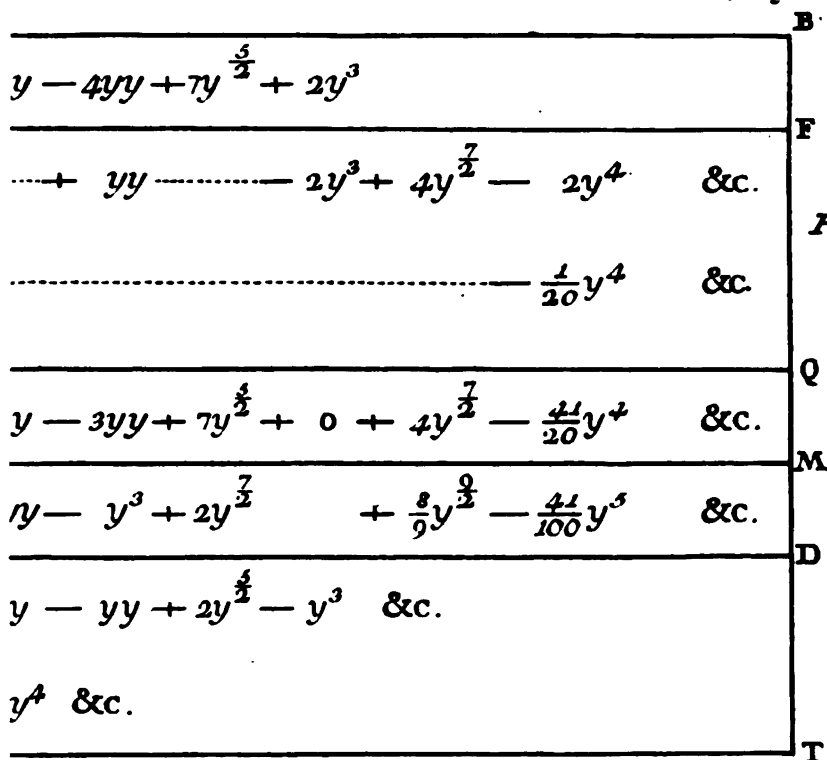


$- 6xx - 8x^3 - 10x^4 - 12x^5 - 14x^6 \quad \&c.$	B
$----- \frac{9}{2}x^3 - 6x^4 - \frac{75}{8}x^5 - \frac{273}{20}x^6 \quad \&c.$	F
$----- 9x^4 - 12x^5 - \frac{75}{4}x^6 \quad \&c.$	
$----- 12x^5 - 16x^6 \quad \&c.$	
$----- 15x^6 \quad \&c.$	
$----- + \frac{9}{4}x^4 + 6x^5 + \frac{107}{8}x^6 \quad \&c.$	
$----- \frac{9}{4}x^5 - 6x^6 \quad \&c.$	
$----- \frac{27}{8}x^6 \quad \&c.$	
$- 6xx - \frac{25}{2}x^3 - \frac{91}{4}x^4 - \frac{333}{8}x^5 - \frac{367}{5}x^6 \quad \&c.$	Q
$- 2x^3 - \frac{25}{8}x^4 - \frac{91}{20}x^5 - \frac{111}{16}x^6 - \frac{367}{35}x^7 \quad \&c.$	M
$+ 6x^5 + \frac{107}{8}x^6 \quad \&c.$	D
$\&c.$	T

Fig. 3







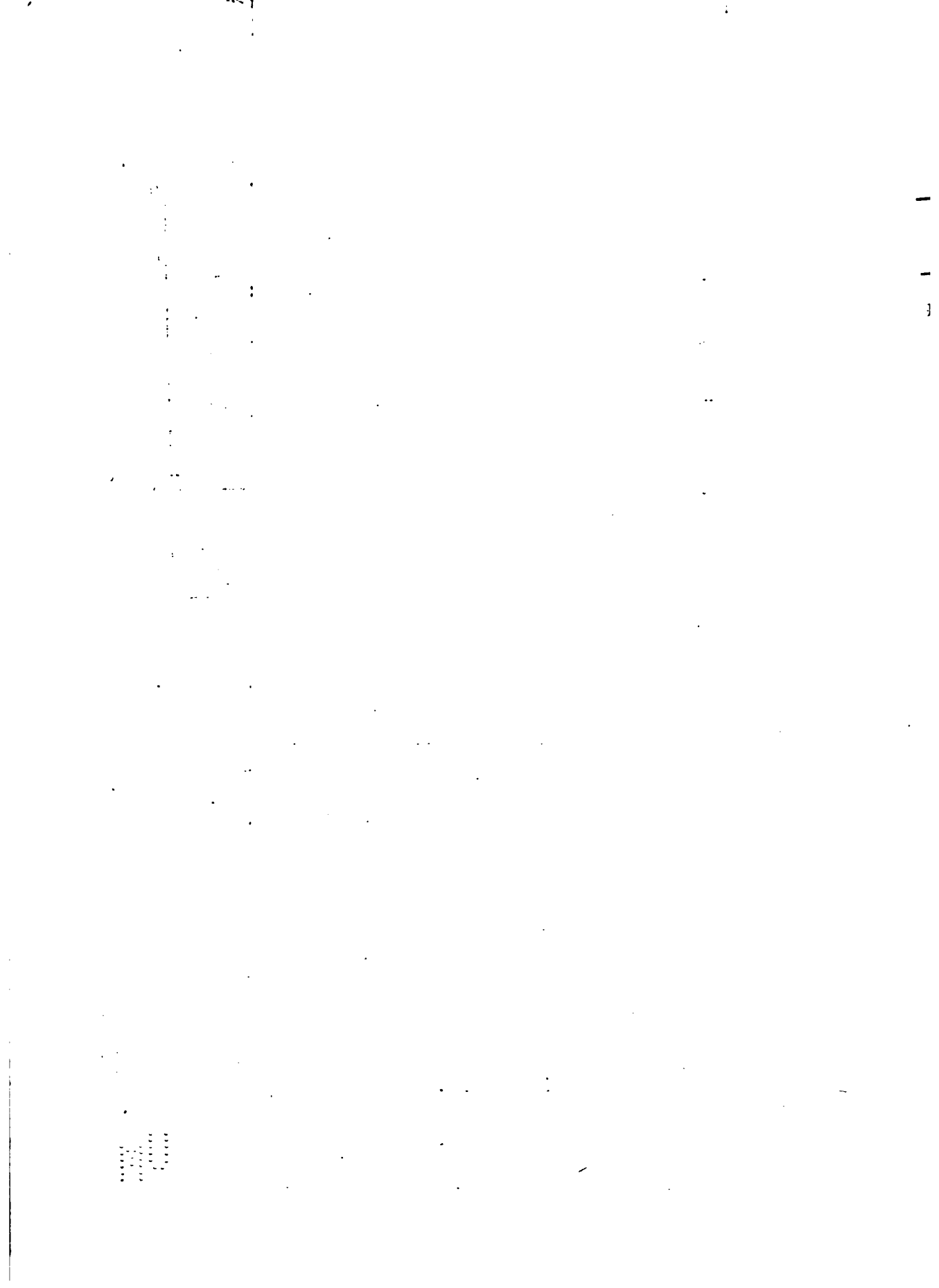
11

A	K					B
					$+ 1 - 3x + xx$	
E	R					F
		$+ y$			$\left\{ \begin{array}{l} + a + x - xx + \frac{1}{3}x^3 \ \&c. \\ \dots\dots + ax + axx + \frac{2}{3}ax^3 \ \&c. \end{array} \right.$	
		$+ yx$			$\left\{ \begin{array}{l} + ax + xx - x^3 \ \&c. \\ \dots\dots + axx + ax^3 \ \&c. \end{array} \right.$	
P	S					Q
		<i>Somm</i>			$\left\{ \begin{array}{l} + 1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 \ \&c. \\ + a + 2ax + 2axx + \frac{5}{3}ax^3 \ \&c. \end{array} \right.$	
L	N					M
		$y =$			$a + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 \ \&c.$	
					$+ ax + axx - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{5}{12}ax^4 \ \&c.$	
C	H					D

Fig. 6

A	K					B
					$'' \quad '' \quad - xx$	
E	R					F
		$\frac{1}{y}$			$\dots\dots 1 - x + \frac{3}{2}xx \ \&c.$	
P	S					Q
		<i>Somm</i>			$\dots\dots 1 - x + \frac{1}{2}xx \ \&c.$	
L	M					N
		$y =$			$1 + x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 \ \&c.$	
C	H					D
		$\frac{1}{y} =$			$1 - x + \frac{3}{2}xx \ \&c.$	
X						T

Fig. 7



	B
	F
$3xx \ \&c.$	
$9xx \ \&c.$	
	Q
$6xx \ \&c.$	
	M
$2x^3 \ \&c.$	
	D

Fig. 9

	A	K	B
		$-\frac{1}{xx} + \frac{1}{x}$	
E	R		F
	$-y$	$\frac{1}{x}$	
P	S		Q
	Somm.	$-\frac{1}{xx}$	o
L	N		M
	$y =$	$+\frac{1}{x}$	
C		H	D

	B
$1 - 2x + \frac{1}{2}xx$	
	F
$e + fx + gxx + hx^3$	
	Q
$1 - 2x + \frac{1}{2}xx$	
$e + fx + gxx + hx^3$	
	M
$y = 2ex + 2fx + 2gx^3 + 2hx^4$	
$y = \begin{cases} x - xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}hx^4 \\ +ex + \frac{1}{2}fx + \frac{1}{3}gx^3 \end{cases}$	
$y = 2x - \frac{1}{3}xx + \frac{1}{3}x^3$	
	D

Fig. 10

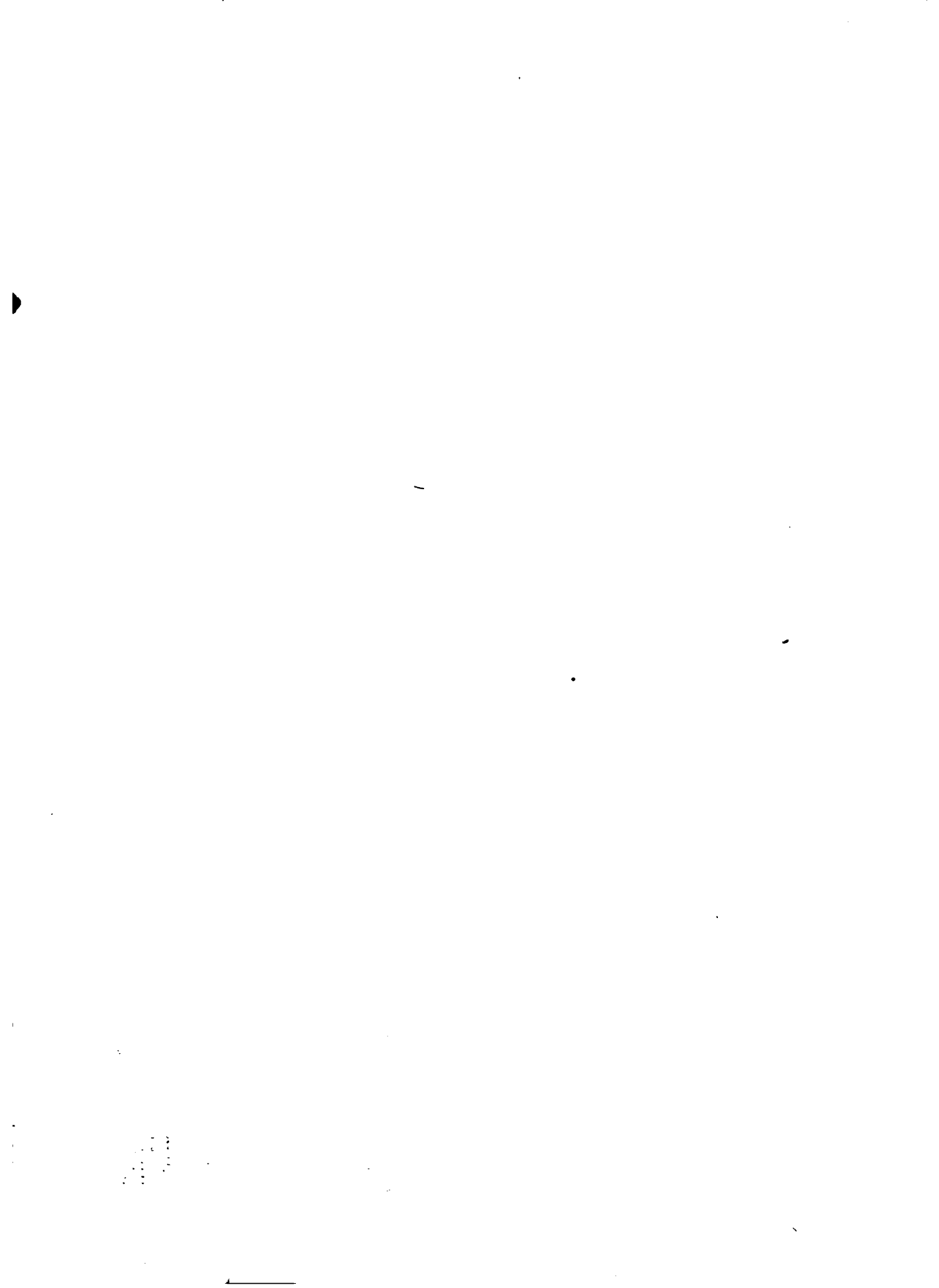


Planche VI pag. 103

$-\frac{4}{x} + \frac{1}{xx}$	B
$-\frac{4}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4} \&c.$	F
$0 + \frac{1}{xx} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4} \&c.$	Q
$-\frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{6x^3} \&c.$	M
	D

Fig. 11

$\frac{m+2}{(m+2)} + \frac{b^3ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \&c.$	
$2x + \frac{b^3Cx^2}{2} + \&c.$	
$\frac{m+2}{(m+2)} + \frac{b^3ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \&c.$	
$2x + \frac{b^3Cx^2}{2} + \&c.$	
$\frac{b^3ax^{m+3}}{(m+2)(m+3)} + \frac{b^3ax^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + \&c.$	
$\frac{b^3Cx^2}{2} + \frac{b^3Cx^3}{6} + \&c.$	

Fig. 12

—

—

— +

— +
3)

+ .

—

+

— +
3)

+

—

$$\frac{m+1}{1+3^2}$$

$$\frac{m+1}{3(3m+1)}$$

—

$$\frac{1}{(m+1)}$$

$$\frac{1}{(m+1)}$$

$$\frac{1}{(1+2)^2}$$

—

4

$$\frac{2}{5} + \frac{4b^4 a^5 x^{5m+8}}{(m+1)^2 (2m+3)^2 (3m+5)} + \&c.$$

$$\frac{-5}{-5} + \frac{2b^4 a^5 x^{5m+8}}{(m+1)^2 (2m+3)^2 (4m+7)} + \&c.$$

$$+ \frac{8b^4 a^5 x^{5m+8}}{(m+1)^2 (2m+3) (3m+5) (4m+7)} + \&c.$$

$$+ \frac{4b^4 a^5 x^{5m+8}}{(m+1)^2 (2m+3)^2 (3m+5)} + \&c.$$

$$\frac{5}{5} + \frac{2b^4 a^5 x^{5m+8}}{(m+1)^2 (2m+3)^2 (4m+7)} + \&c.$$

$$+ \frac{8b^4 a^5 x^{5m+8}}{(m+1)^2 (2m+3) (3m+5) (4m+7)} + \&c.$$

Fig. 13

$$\frac{x^{4m+7}}{1+3)^2 (4m+7)} + \frac{4b^4 a^5 x^{5m+9}}{(m+1)^2 (2m+3)^2 (3m+5) (5m+9)} + \&c.$$

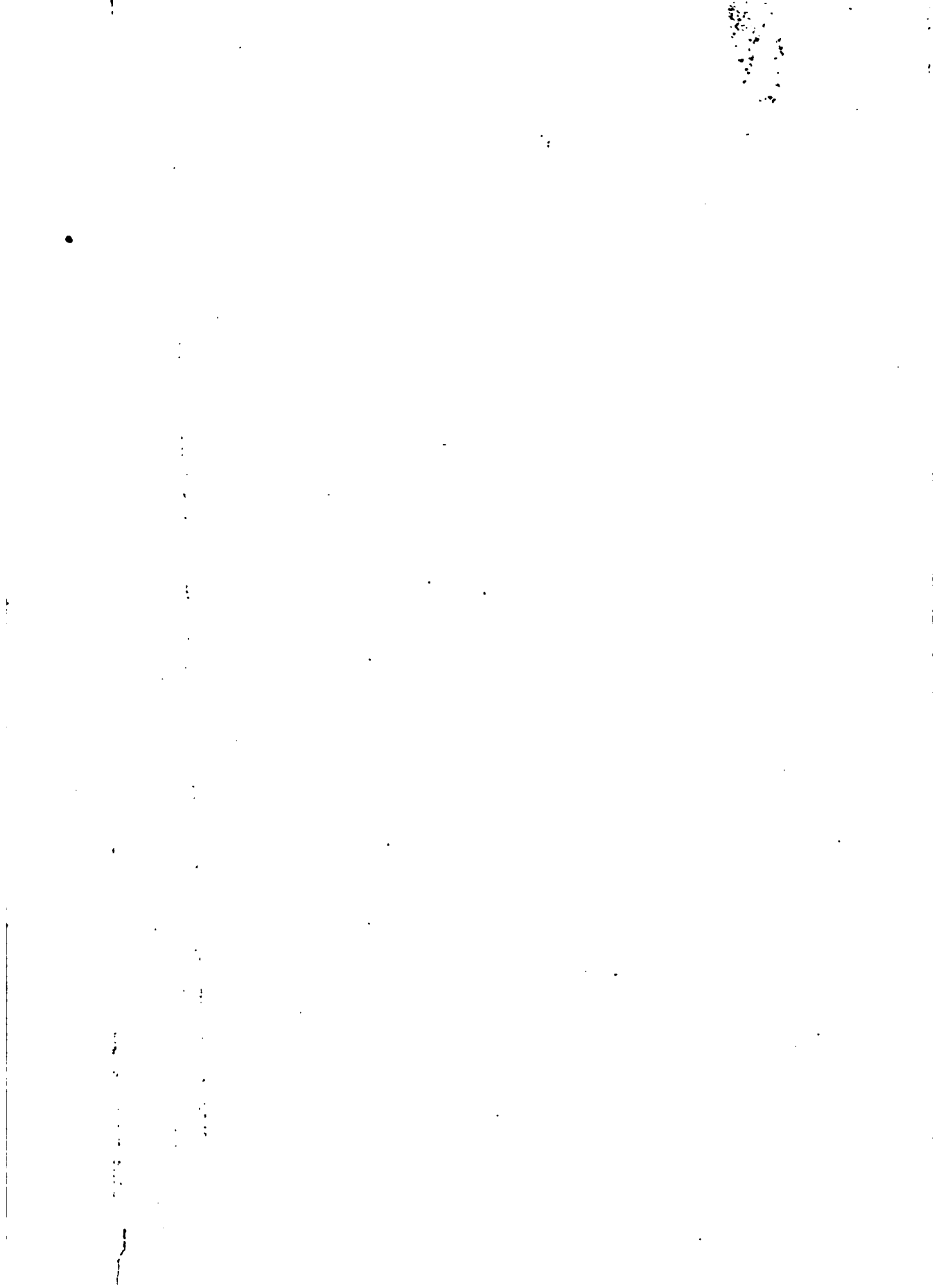
$$\frac{x^{4m+7}}{-3) (3m+5) (4m+7)} + \frac{2b^4 a^5 x^{5m+9}}{(m+1)^2 (2m+3)^2 (4m+7) (5m+9)} + \&c.$$

$$+ \frac{8b^4 a^5 x^{5m+9}}{(m+1)^2 (2m+3) (3m+5) (4m+7) (5m+9)} + \&c.$$

$$\frac{4b^3 a^5 x^{5m+8}}{(m+1)^2 (2m+3)^2 (3m+5)} + \&c.$$

$$\frac{2b^3 a^5 x^{5m+8}}{(m+1)^2 (2m+3)^2 (4m+7)} + \&c.$$

$$\frac{8b^3 a^5 x^{5m+8}}{(1+1)^2 (2m+3) (3m+5) (4m+7)} + \&c.$$



laire X ; & de même $S. Y dy$ fera l'aire d'une autre courbe, qui aura y pour abscisse, & Y pour ordonnée. En supposant donc qu'on ait décrit ces deux courbes, si on determine l'abscisse x dans la première, on aura l'aire $S. X dx$, qui correspond a cette abscisse; &, en prenant dans l'autre courbe une aire egale a l'aire donnée $S. X dx$, on aura l'abscisse y , qui respond a cette aire dans la seconde courbe. Mais il sera plus court & plus exact dans la pratique de reduire dans ces cas les deux intégrales en series, & d'en faire une equation, dont on trouvera les racines par les methodes connues.

CCCLXVIII.

Si l'equation, dont on veut separer les variables x & y renferme les puissances $dx^2, dx^3, &c. dy^2, dy^3, &c.$ des premieres différences de ces variables, il faudra la reduire a une equation différentielle du premier ordre, ou qui ne contienne plus que les simples différences dx & dy . On pourra toujours le faire par la methode que nous avons expliquée au commencement du Chapitre precedent, en substituant une variable z au lieu du rapport $\frac{dx}{dy}$, ou $\frac{dy}{dx}$ dans l'equation proposée, & en cherchant ensuite les racines de l'equation, qui resulte de cette substitution, & dans laquelle on considere z comme l'inconnue; par ce moyen nous redui-

sons la question de la separation des indeterminées aux equations différentielles du premier ordre, qui ne contiennent plus de puissances, ny de produits des premieres différences des variables.

CCCLXIX.

On n'a point trouvé jusqu'à present de methode generale pour separer les variables dans toutes les equations différentielles, même du premier ordre; mais lorsqu'on se propose d'intégrer une equation de cette sorte, & qu'on ne trouve point de moyens pour en separer les indeterminées, ou que les methodes, dont on pourroit se servir, sont trop difficiles, ou trop longues dans la pratique, on peut toujours avoir recours aux methodes, que nous avons expliquées dans les Chapitres precedents pour intégrer, sans separer les variables avant l'intégration. Il est même remarquable que la methode de M. Newton est generale, pour les separer par l'intégration même, & pour trouver en même tems les valeurs d'une variable par l'autre exactement, ou du moins par approximation. De plus en prenant bien l'esprit de cette methode, on pourroit l'appliquer aux equations, dans lesquelles les variables ont des exposans en lettres, comme celles-cy, $dy = ax^m dx + by^n dx$; $dy = ax^m dx + by^2 x^n dx$; &c., parmi lesquelles

les il s'en trouve, dont les variables n'ont jamais pu être séparées: nous en parlerons dans la suite.

CCCLXX.

Les principaux moyens dont on se fert pour la séparation des variables, sont les règles ordinaires de l'Algebre, & les transformations, surtout celles qui se font par la substitution de variables avec des exposans & des coefficients indeterminés, qu'on determine ensuite par les conditions qu'il faut remplir pour la séparation qu'on cherche. Ces moyens se presentent quelque fois, comme d'eux mêmes. Par exemple on voit facilement que les variables se separent dans l'équation $\frac{x^m dx}{(a+by^n)^r} =$

$\frac{y^p dy}{(f+gx^q)^r}$, par la simple multiplication, qui donne

$x^m dx (f+gx^q)^r = y^p dy (a+by^n)^r$. Dans l'équation $x^m dx (a+by^n)^r = y^p dy (f+gx^q)^r$, par la simple division, qui donne $\frac{x^m dx}{(f+gx^q)^r} = \frac{y^p dy}{(a+by^n)^r}$; dans l'équation

$x^2 dx^2 + axy dx dy = b dy^2$, en ajoutant de part & d'autre $\frac{1}{4} aayy dy^2$, pour avoir $x^2 dx^2 + axy dx dy + \frac{1}{4} aayy dy^2 = \left(\frac{1}{4} a^2 y^2 + b\right) dy^2$, &, en tirant la racine

quarrée, $x dx + \frac{1}{2} ay dy = dy \left(\frac{1}{4} a^2 y^2 + b \right)^{\frac{1}{2}}$; dans l'équation $a dx = y dy - x dy$, en supposant $y - x = z$, ou $y = x + z$; ce qui donne $dy = dx + dz$, & par la substitution, $adx = z dz + x dx$, d'où l'on tire $adx - x dx = z dz$, & $dx = \frac{z dz}{a - z}$; dans l'équation $a dx = (x + y)^2 dy$, en supposant $x + y = z$, d'où l'on tire $dx = dz - dy$, & par substitution, $a dz - a dy = z^2 dy$, ou $a dz = (aa + zz) dy$, & enfin $\frac{a dz}{aa + zz} = dy$.

CCCLXXI.

Les moyens de separation dependent fort souvent de l'usage, & de l'adresse du Calculateur. Il n'est pas toujours facile de les trouver, lors même qu'ils sont possibles; & il y a des equations, qui paroissent assez simples & qui sont celebres, par ce qu'on n'a pû jusqu'à present en separer les indeterminées par une methode generale: telle est celle-cy $dy = ax^m dx + by^2 x^n dx$; qui est connue sous le nom d'*Equation du Comte Riccati*. Il ne nous reste donc qu'à expliquer les methodes, qui ont le plus d'etendue, quoiqu'elles ne soient pas absolument generales. Nous commencerons par la separation des indeterminées dans les equations homo-

genes, c'est a dire, dans lesquelles la somme des dimensions des variables $x, y, z, \text{ \&c.}$ est la même dans chacun des termes de l'équation, soit que ces variables soient mêlées, soit qu'elles soient séparées; telles sont

$$\begin{aligned} & \text{les equations. } x^2 dy + ay^2 dx = bxy dy + cx^2 dx + \\ & fxy dz; \quad ax^{\frac{1}{2}} y dx + y^{\frac{1}{2}} x dy = x^{\frac{3}{2}} dy; \quad dx \sqrt{xx + yy} \\ & + dy \sqrt{ay^2 + fxy} = x dy + by^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

CCCLXXII.

PROBLEME I. Separer les indeterminées dans les equations homogenes a deux variables x & y .

SOLUTION. Toutes ces equations se reduisent a la forme $A dx + B dy = 0$, dans laquelle A, B representent des fonctions homogenes de x , & de y , c'est a dire, des fonctions, dans lesquelles la somme des dimensions de x , & de y est la même. Soit la somme de ces dimensions representée par n , & soit fait $y = ux$; ou $\frac{y}{x} = u$; il est clair que les fonctions A, B se reduiront a cette forme $A = x^n V$, & $B = x^n V'$, les expressions V, V' designant des fonctions de u seulement; ou de $\frac{y}{x}$. Car puisque A, B sont des fonctions homogenes de la dimension n , & V, V' des fonctions de u seulement, ou de $\frac{y}{x}$; il est evident que V, V' doivent être des

fonctions de dimension nulle, c'est a dire, dans lesquelles y & x ayent le même nombre de dimensions au numerateur, & au denominateur. Cela etant posé, on aura $x^n V dx + x^n V' dy = 0$, en substituant au lieu de A , & B leurs valeurs respectives $x^n V$, $x^n V'$, & en divisant par x^n , on aura $V dx + V' dy = 0$, mais $dx = \frac{udy - ydu}{u^2}$: donc $\frac{Vudy - Vydu}{u^2} + V'dy = 0$, & $Vudy - Vydu + u^2 V'dy = 0$, & par consequent $Vudy + u^2 V'dy = Vydu$, d'où l'on tire $\frac{dy}{y} = \frac{V du}{Vu + u^2 V'}$. Or V , V' ne renferment d'autre variable que u . Donc les variables sont separées generalement dans ces sortes d'equations.

On voit bien que V , V' etant des fonctions de u seulement, on pourroit faire $y = u^n x$, au lieu de $y = ux$, la separation des variables se feroit de la même maniere, on auroit alors $\frac{dy}{y} = \frac{nVu^{n-1} du}{u^{2n} V' + Vu^n}$. Il est clair qu'on pourroit aussi au lieu de u prendre une fonction quelconque de u ; par exemple $\sqrt{aa + uu}$; ce qui rend quelque fois la separation plus commode, surtout dans les différentielles qui renferment des radicaux; il faut dans ces cas faire le choix des exposans ou des fonctions, qui rendent la transformation plus simple.

EXEMPLE I. Soit l'équation $y^3 dx + y^2 x dy + b x^3 dy = 0$, on aura en comparant avec la forme $A dx + B dy = 0$, $A = y^3$, $B = y^2 x + b x^3$, $n = 3$, & par conséquent $A = x^3 V$, & $B = x^3 V'$; d'où l'on tire $V = \frac{A}{x^3}$, & $V' = \frac{B}{x^3}$; par conséquent $V = \frac{y^3}{x^3}$, $V' = \frac{y^2 x + b x^3}{x^3} = \frac{y^2}{x^2} + b$; or, à cause de $\frac{y}{x} = u$, on aura $V = u^3$, & $V' = u^2 + b$, lesquelles valeurs, étant substituées dans l'équation $\frac{V du}{V u + u^2 V'} = \frac{dy}{y}$, donnent $\frac{u du}{2 u^2 + b} = \frac{dy}{y}$, & en intégrant $L. y = \frac{1}{4} L. (2 u^2 + b) + L. C$, & $y = C (2 u^2 + b)^{\frac{1}{4}}$, ou $y^4 = C^4 (2 u^2 + b)$, & en remettant pour u sa valeur $\frac{y}{x}$, on aura enfin $y^4 = C^4 \left(\frac{y^2}{x^2} + b \right)$.

EXEMPLE II. Soit l'équation différentielle $a x dy + dx \sqrt{x x + y y} = 0$, dans laquelle les variables n'ont qu'une dimension. En faisant $x = y \sqrt{u u - 1}$, on aura $dx = dy \sqrt{u u - 1} + \frac{y u du}{\sqrt{u u - 1}} = \frac{dy (u u - 1) + y u du}{\sqrt{u u - 1}}$; donc l'équation $a x dy + dx \sqrt{x x + y y} = 0$ se change en cette

autre $aydy\sqrt{uu-1} + \frac{[dy(uu-1)+yudu]\sqrt{xx+yy}}{\sqrt{uu-1}} = 0.$

Mais $\sqrt{uu+yy}=yu$, a cause de $u=y\sqrt{uu-1}$;

donc l'équation se réduit a celle-cy, $\frac{dy}{y} + \frac{uudu}{u^3+auu-u-a}$

$= 0$, différentielle rationnelle qu'on intégrera par les méthodes du Chapitre IV. de la première Partie; en la réduisant aux différentielles logarithmiques, & multi-

pliant par $2aa-2$, on aura $\frac{2aa-2}{y}dy + \frac{2aadu}{u+a} - \frac{(a+1)du}{u+1} + \frac{(a-1)du}{u-1} = 0$, dont l'intégrale est $(2aa$

$-2)L.y + 2aaL.(u+a) - (a+1)L.(u+1) + (a-1)L.(u-1) = L.C$, ou bien $y^{2aa-2} \times (u+$

$a)^{2aa} \times (u+1)^{-a-1} \times (u-1)^{a-1} = C$, &, en sub-

stituant la valeur de u , on aura $y^{2aa-2} \times$

$\left(\frac{\sqrt{xx+yy+ay}}{y}\right)^{2aa} \times \left(\frac{\sqrt{xx+yy+y}}{y}\right)^{-a-1} \times$

$\left(\frac{\sqrt{xx+yy-y}}{y}\right)^{a-1} = C$. Si on observe dans cette équation

que le facteur y^{2aa-2} du premier membre a pour exposant $2aa-2$, & que dans les autres facteurs la quantité y qui se trouve au dénominateur est élevée aux exposans $2aa$, $-a-1$, & $a-1$ respectivement dont la somme $= 2aa-2$, on voit qu'en divisant

l'équation

l'équation se réduit à celle-ci $(\sqrt{xx+yy+ay})^{2aa} \times$
 $(\sqrt{xx+yy+y})^{-a-1} \times (\sqrt{xx+yy-y})^{a-1} = C,$
 ou $(\sqrt{xx+yy+ay})^{2aa} \times \frac{(\sqrt{xx+yy+y})^{a-1}}{(\sqrt{xx+yy+y})^{2a}} \times$
 $(\sqrt{xx+yy-y})^{a-1} = C,$ ou $(\sqrt{xx+yy+ay})^{2aa}$
 $\times x^{2a-2} \times (\sqrt{xx+yy+y})^{-2a} = C,$ ou enfin
 $(\sqrt{xx+yy+ay})^{aa} \times x^{a-1} \times (\sqrt{xx+yy+y})^{-a}$
 $= C^{\frac{1}{2}}.$

Nous nous sommes arrêtés sur cette équation, laquelle, quoique simple en apparence, ne laisse pas que de demander des calculs assez longs. La substitution de $x = y\sqrt{uu-1}$ a délivré tout d'un coup cette équation de radicaux, au lieu qu'en faisant $x = yu$, on auroit eût la différentielle irrationnelle $\frac{dy}{y} + \frac{du\sqrt{uu+1}}{uu+u\sqrt{uu+1}} = 0.$

EXEMPLE III. Soit la différentielle

$$a\sqrt{y^2 dy^2 - 2yx dx dy + y^2 dx^2} = yx dy - y^2 dx \text{ qui paroît compliquée, mais dans laquelle il fera facile de separer les variables par la simple substitution de } x = y, \text{ de laquelle on tire } a = \frac{-y^2 du}{\sqrt{dy^2 - u^2 dy^2 + y^2 du^2}} \&$$

$a^2 dy^2 - a^2 u^2 dy^2 + a^2 y^2 du^2 = y^4 du^2$; donc $y^4 du^2 - a^2 y^2 du^2 = a^2 dy^2 - a^2 u^2 dy^2$, & par l'extraction des racines $\frac{du}{\sqrt{1-uu}} = \frac{ady}{\sqrt{y^2-a^2}}$, equation dans laquelle les

variables sont séparées, & que nous avons intégrée dans la premiere Partie Chap. II.

CCCLXXIII.

PROBLEME II. Intégrer les equations différentielles homogenes, a trois & tant de variables qu'on voudra, lorsque ces equations ne renferment point de constantes.

SOLUTION. Soit $Adu + Bdy + Cdz = 0$ l'equation a intégrer, dans laquelle A, B, C sont des fonctions homogenes des variables u, y, z sans constantes. Nous ne lui donnons que trois variables, par ce que celles qui en ont un plus grand nombre ne demandent pas d'autres calculs. On s'assûrera d'abord par les regles du premier Chapitre, que l'equation est possible; car, si elle se trouvoit absurde, il faudroit l'abandonner. Ensuite on fera $y = nu$, & $z = nr$, & on substituera ces valeurs de y & de z dans toute l'equation. Il est evident, qu'en substituant nu pour y , & nr pour z dans la fonction A , qui renferme des u , des y , & des z sans constantes, cette fonction se changera en une

autre, qui sera composée de x élevée à une puissance du degré de la fonction A & multipliée par une fonction de u & de t : de même la fonction B , qu'on suppose de la même dimension que la fonction A , se changera en une autre fonction composée de la même puissance de x , multipliée par une autre fonction de u , & de t , & ainsi de la fonction C . Supposant donc que m représente le degré des fonctions A, B, C , & que F, G, H soient des fonctions différentes de u & de t : substituons $x^m F$ pour A , $x^m G$ pour B , & $x^m H$ pour C ; mettons aussi pour dy la valeur $x du + u dx$, & pour dz , la valeur $x dt + t dx$, il est évident qu'on aura la transformée suivante $x^m dx (F + Gu + Ht) + x^{m+1} G du + x^{m+1} H dt = 0$, ou, en divisant tous les termes par x^{m+1} , $\frac{dx}{x} + \frac{G du + H dt}{F + Gu + Ht} = 0$. Or dans l'équation mise sous cette forme il est clair, que les x sont séparées des u & des t sans x , puisque les fonctions F, G, H ne contiennent que des u , & des t sans x . L'intégrale de cette équation sera donc $L. x + S. \frac{G du + H dt}{F + Gu + Ht}$ égale à une constante; & puisqu'on suppose qu'on a reconnu d'abord que l'équation proposée étoit intégrable, & que nous venons de voir que son intégrale est toujours $L. x + S. \frac{G du + H dt}{F + Gu + Ht}$, il faut nécessairement que la différentielle $\frac{G du + H dt}{F + Gu + Ht}$ soit complète. On trouvera donc son inté-

grale par les Problemes du Chapitre I., & l'ayant ajoutée au logarithme hyperbolique de x , on aura l'intégrale cherchée.

CCCLXXIV.

COROLLAIRE I. De ce que l'équation $A dx + B dy + C dz = 0$ s'est changée en $\frac{dx}{x} + \frac{G du + H dt}{F + Gu + Ht} = 0$, qui est une différentielle complète, on peut tirer tout de suite le facteur M , par lequel il auroit fallu multiplier tous les termes pour l'intégrer sans la séparation des indéterminées. Car il est aisé de voir que $A dx + B dy + C dz$ n'est devenue cette même différentielle complète, qu'en divisant tous les termes par $x^{m+1} \times (F + Gu + Ht)$, ou, ce qui revient au même, par $x A + y B + z C$; puisque $x^{m+1} F = x A$, $x^{m+1} G u = x^m G u x = B u x = B y$, & $x^{m+1} H t = x^m H t x = C t x = C z$. Donc $\frac{A dx + B dy + C dz}{A x + B y + C z}$ est une différentielle complète; par conséquent $\frac{1}{A x + B y + C z}$ étoit le facteur M cherché, qui avoit disparu par l'égalité à zero, & qui étant rétabli, rend la différentielle complète.

CCCLXXV.

COROLLAIRE II. On peut deduire de là aisément le beau Theoreme de M. Fontaine sçavoir, que;

si $A dx + B dy + C dz$ est une différentielle homogène sans constantes, & telle que m soit le degré des fonctions A, B, C , l'intégrale de cette différentielle sera

$$\frac{Ax + By + Cz}{m+1}.$$

Pour le démontrer, reprenons la quantité $x^m dx (F + Gu + Hr) + x^{m+1} G du + x^{m+1} H dr$,

qui est ce que devient $A dx + B dy + C dz$, en faisant $y = xu$, & $z = xr$; il est aisé de voir que, si

cette quantité est intégrable, son intégrale ne peut être

autre chose, que $\frac{x^{m+1}}{m+1} (F + Gu + Hr)$, que l'on a

en intégrant le premier nombre $x^m dx (F + Gu + Hr)$;

x seule variant, & qu'il ne faut lui ajouter aucune

fonction de u & de r ; puisque, si l'on en ajoutoit une,

lorsqu'on la différentieroit ensuite, ce qui en viendrait

ne seroit point multiplié par x^{m+1} , comme le sont

les termes $x^{m+1} G du$, & $x^{m+1} H dr$. Cela posé,

remettons dans $\frac{1}{m+1} x^{m+1} (F + Gu + Hr)$ la fraction

$\frac{y}{x}$ pour u , la fraction $\frac{z}{x}$ pour r , A pour $x^m F$,

B pour $x^m G$, & C pour $x^m H$, & nous aurons

$\frac{Ax + By + Cz}{m+1}$ pour l'intégrale de $A dx + B dy + C dz$.

CCCLXXVI.

COROLLAIRE III. Puisque $A dx + B dy + C dz$ *etc.* étant des fonctions homogenes, comme dans le Corollaire precedent, on a toujours l'intégrale

$\frac{Ax + By + Cz \text{ etc.}}{m+1}$, il s'ensuit que, pour avoir l'intégrale

de ces sortes de différentielles, il suffit de substituer a la place de dx, dy, dz *etc.* leurs variables respectives, & diviser ce qui en provient par le nombre qui exprime le degré de dimension de cette fonction ainsi reduite. Supposons que V soit une fonction homogene de x, y, z , enforte que $dV = A dx + B dy + C dz$,

on aura toujours $V = \frac{Ax + By + Cz}{n}$, en supposant que n soit la dimension homogene de cette fonction. Il est evident que le nombre n est egal a $m+1$, puisque par la substitution des variables a la place de leurs différentielles, le degré de dimension doit croître d'une unité. Nous éclaircirons ce Corollaire par quelques exemples.

1.° Soit $dV =$

$$\frac{2y^3 dy - 3yyx dy + 3yxx dx - 2x^3 dx + y^3 dx - x^3 dy}{(y-x)^2};$$

en substituant x pour dx , & y pour dy , on aura, en divisant par 2, degré de la dimension homogene

$$\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{2(y-x)^2} = \frac{y^3 + x^3}{y-x} = V.$$

2.^o Soit $dV = \frac{-4ydy + 4xdx}{(yy + xx)^3}$, on aura, en fai-

sant les mêmes substitutions, $\frac{-4y^3 + 4xx}{(yy + xx)^3} = nV$, &, en

divisant par n , qui dans ce cas devient -4 , on aura

$$\frac{yy - xx}{(yy + xx)^3} = V.$$

3.^o Soit $dV = 2x d\kappa L \frac{y+x}{y-x} + \frac{2xx(ydx - xdy)}{yy - xx}$;

on aura, en substituant, & en divisant par 2 degré de

la dimension $V = \kappa \kappa L \frac{y+x}{y-x}$.

On voit par ces Exemples, qu'on pourra intégrer facilement par cette voie toutes les différentielles de cette forme, & d'un nombre quelconque de variables; ce qui deviendroit souvent très-pénible par d'autres méthodes.

Il est évident, que les deux Corollaires précédens subsisteront, en supposant un nombre quelconque de fonctions $B, C, \text{&c.} = 0$, & par conséquent supposant que V soit une fonction homogène de la seule variable κ . On auroit dans ce cas $V = a\kappa^n$, & en différentiant $dV = n a \kappa^{n-1} d\kappa$; on auroit, substituant κ à la place de $d\kappa$, & divisant par n , l'intégrale précédente $a\kappa^n$.

CCCLXXVII.

PROBLEME III. Rendre homogene l'équation generale de son degré $(x+ay)dx+(bx+cy+f)dy=0$, pour l'intégrer par la separation des indeterminées.

SOLUTION. 1.° Si les coefficients a & b étoient les mêmes & avec les mêmes signes dans cette équation, on n'auroit pas besoin de separer les indeterminées pour l'intégrer, puisqu'alors $x dx \pm a(y dx + x dy) + cy dy + f dy = 0$, & son intégrale $\frac{x}{2} x x \pm a x y + \frac{x}{2} c x y + f y = C$ constante.

2.° Si le terme f étoit nul, l'équation seroit homogene, & on auroit ce qu'on cherche.

3.° Si f n'est point zero, ny $a=b$, ny de même signe, on supposera $x=z+p$, & $y=u+q$; z & u étant deux nouvelles variables, & p, q deux constantes indeterminées, ou arbitraires; d'où l'on tirera $dx=dz$, & $dy=du$, & substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on la changera en $(z+au+p+aq)dz + (bz+cu+bp+cq+f)du=0$. Or cette transformée seroit homogene, si les termes de quantités constantes $p+aq$, & $bp+cq+f$ étoient egaux a zero, puisqu'alors l'équation deviendroit $(z+au)dz + (bz+cu)du=c$. Il faut donc supposer $p+aq=0$, &
 $bp+cq+f=0$.

$bp + cq + f = 0$; d'où l'on tire $p = -\frac{af}{ab-c}$, & $q = \frac{f}{ab-c}$; par conséquent $x = z - \frac{af}{ab-c}$, & $y = u + \frac{f}{ab-c}$. Donc, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation proposée, on la réduira à l'équation homogène $(z + au)dz + (bz + cu)du = 0$. Ensuite on séparera les indéterminées dans cette équation par le Problème I. en faisant $z = us$, & $dz = uds + sdu$; ce qui donnera, par substitution, & en divisant par u , l'équation $(s+a)uds + (ss + as + bs + c)du = 0$, d'où l'on aura $\frac{du}{u} + \frac{(s+a)ds}{ss + as + bs + c} = 0$ &, en intégrant, $L. u + S. \frac{(s+a)ds}{ss + as + bs + c} = C$. constante.

Il faut remarquer que, si dans l'équation proposée on avoit $ab = c$, les constantes $p = -\frac{af}{ab-c}$, & $q = \frac{f}{ab-c}$ seroient infinies, & la méthode dont nous nous sommes servis, ne seroit rien connoître. Mais, si dans ce cas on substitue ba au lieu de c dans l'équation, elle devient $(x + ay)dx + (bx + bay + f)dy = 0$, ou $(x + ay)dx + (x + ay)b dy + f dy = 0$; supposant maintenant $x + ay = r$, on aura $x = r - ay$, $dx = dr - a dy$, $(x + ay)dx = r dr - a r dy$, $(x + ay)b dy = b r dy$, & l'équation entière sera $r dr - a r dy + b r dy +$

Q

$f dy = 0$, ou $\frac{r dr}{br - ar + f} + dy = 0$, equation dans laquelle les indeterminées sont séparées.

CCCLXXVIII.

Si on vouloit intégrer l'équation homogene precedente $(z + au) dz + (bz + cu) du = 0$ sans separer les indeterminées, on trouvera aisément le facteur qui rendra cette différentielle complete. Il ne faudra pour cela qu'avoir recours au Corollaire I. du Probleme II. (Art. CCCLXXIV.), où nous avons démontré que le facteur dans les différentielles homogenes étoit generalement $\frac{1}{Ax + By + Cz + Cv}$, & par consequent dans le cas

present, $= \frac{1}{Ax + By} = \frac{1}{z(z + au) + u(bz + cu)}$; & en

substituant a la place de u , z , & de leurs différentielles, leurs valeurs respectives, on retrouvera la même différentielle, dans laquelle nous avons déterminé le facteur par une methode plus longue (Art. CCCXLIII.).

On pourroit trouver, si on vouloit, d'autres facteurs (Art. CCCXLVIII.); & il ne faut pas ômettre que cela est quelquefois necessaire: par exemple, si $Ax + By = 0$, comme il arrive dans l'équation $y dx - x dy = 0$. Le facteur $\frac{1}{Ax + By}$ seroit $\frac{1}{xy - xy}$; & par consequent il faudroit diviser la différentielle par $0. xy$, c'est

a dire, par zero; mais puisqu'on peut prendre un multiple quelconque de ce diviseur (par l'endroit cité) on prendra

$$x^o y^2, \text{ \& la différentielle complete fera } \frac{y dx - x dy}{y^3},$$

dont l'intégrale est $\frac{x}{y}$. Si on vouloit prendre le mul-

$$\text{tiplicateur } \frac{1}{xy}, \text{ on auroit alors } \frac{y dx - x dy}{xy} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y},$$

dont l'intégrale est $L.x - L.y = L.\frac{x}{y}$.

CCCLXXIX.

Si dans la différentielle du Probleme precedent on ajoutoit un coefficient, qui ne fût point affecté de variables, pour lui donner cette autre forme $(g + ex + ay) dx + (bx + cy + f) dy = 0$, en supposant de même que dans cette solution, $x = z + p$, & $y = u + q$.

On auroit l'equation $(g + ep + aq + ez + au) dz + (f + bp + cq + bz + cu) du = 0$, dans laquelle faisant $g + ep + aq = 0$, & $f + bp + cq = 0$, on aura la transformée homogene $(ez + au) dz + (bz + cu) du = 0$, dont le

facteur = $\frac{1}{ez z + (a+b)zu + cuu}$. On pourra donc de même

intégrer cette différentielle par la separation des indéterminées, ou, sans les separer, en multipliant par le facteur; mais nous avons déjà intégré ailleurs cette différentielle.

CCCLXXX.

PROBLEME IV. Trouver les conditions que doivent avoir les exposans des variables dans les equations différentielles de tant de termes qu'on voudra a deux variables seulement, pour qu'on puisse les rendre homogenes, & les intégrer ensuite par la separation des indeterminées.

SOLUTION. 1.° Lorsque les equations n'ont que trois termes, on peut toujours les représenter par cette formule generale $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, les exposans des variables étant des nombres quelconques ou zero. Supposant d'abord que la somme des exposans n'est pas la même dans chaque terme, puisqu'alors l'équation seroit homogene, on fera $y = z^\pi$, z étant une nouvelle variable, & l'exposant π une constante arbitraire. On aura $dy = \pi z^{\pi-1} dz$, $y^n = z^{\pi n}$, $y^q = z^{\pi q}$, $y^s = z^{\pi s}$, & par substitution $az^{\pi n} x^m dx + bz^{\pi q} x^p dx + c\pi x^r z^{\pi s + \pi - 1} dz = 0$. Or pour rendre cette equation homogene, il faut que la somme des exposans soit la même dans chaque terme. On aura donc ces deux egalités, $\pi n + m = \pi q + p = r + \pi s + \pi - 1$. On tire de la premiere $\pi = \frac{p-m}{n-q}$ & substi-

uant dans la seconde cette valeur au lieu de π , on trouve $(s - q + 1)(p - m) = (p - r + 1)(n - q)$, equation qui exprime la condition que doivent avoir les exposans de la proposée, pour qu'on puisse la rendre

homogene par la substitution de $x^{\frac{p-m}{n-q}}$ au lieu de y .

Neantmoins cette substitution est impossible, lorsque $p = m$, ou $n = q$; mais alors on pourra separer tout d'un coup les indeterminées dans l'equation proposée;

car si $p = m$, elle devient $x^{m-r} dx + \frac{c y^s dy}{a y^n + b y^q} = 0$, &

si $n = q$, elle devient $a x^{m-r} dx + b x^{p-r} dx - c y^{s-n} dy = 0$.

2.° Lorsque les equations sont composées de quatre termes, on peut toujours les représenter par cette formule generale $a y^n x^m dx + b y^q x^p dx + c x^r y^s dy + f x^t y^r dy = 0$. On supposera encore $y = z^\pi$, & on trouvera par substitution $a z^{\pi n} x^m dx + b z^{\pi q} x^p dx + c \pi x^r z^{\pi s + \pi - 1} dz + f \pi x^t z^{\pi r + \pi - 1} dz = 0$, on aura donc les trois equations suivantes entre les sommes des exposans $\pi n + m = \pi q + p = r + \pi s + \pi - 1 = s + \pi r + \pi - 1$. La premiere equation $\pi n + m = \pi q + p$ donne $\pi = \frac{p-m}{n-q}$; la seconde equation $\pi q + p = r + \pi s + \pi - 1$, après avoir substitué la valeur de π ,

qu'on vient de trouver, & avoir reduit le tout, donne
 $(p-r+1)(n-q) = (s-q+1)(p-m)$, pour la
 premiere condition des expofans. La troisieme equation
 $\pi q + p = r + \pi r + \pi - 1$, après la substitution de
 la valeur de π & la reduction donne $(p-r+1) \times$
 $(n-q) = (r-q+1)(p-m)$ pour la seconde
 condition des expofans; & s'ils ont ces deux conditions,
 l'equation de quatre termes propofée deviendra homoge-
 ne par la substitution de $z^{\frac{p-m}{n-q}}$ au lieu de y .

3.° On voit facilement qu'on trouvera de la
 même maniere, que les expofans doivent avoir trois
 conditions pour les equations de cinq termes, quatre
 conditions pour les equations de fix termes, & ainfi
 de fuite. C. Q. F. T.

CCCLXXXI. :

On peut fe servir de ce Probleme pour examiner
 fi les expofans des deux variables dans une equation
 propofée ont les conditions requisés pour qu'on puiſſe
 rendre cette equation homogene, en ſuppoſant une de
 ſes variables y , ou x , egale a z^{π} , z etant une nouvel-
 le variable avec ſon expofant arbitraire π . On n'a
 pour cela qu'a comparer l'equation propofée avec la
 formule generale qui luy convient, determiner les ex-
 poſans de la formule generale par ceux qui leur repon-

dent dans la proposée, & substituer ensuite leurs valeurs dans les equations de condition, que fournit le Probleme. Si ces equations de condition se verifient, on pourra rendre l'equation proposée homogene par la substitution de z^x , & on aura la valeur de l'exposant x . Si on proposoit, par exemple, l'equation de trois

termes $4y^3 x^{\frac{1}{2}} dx + 3y^2 dx - b x^{\frac{1}{2}} dy = 0$, on la compareroit avec la formule generale de trois termes

$a y^n x^m dx + b y^q x^p dx + c x^r y^s dy = 0$, & on trouveroit

$n = 3, m = \frac{1}{2}, q = 2, p = 0, r = \frac{1}{2}, s = 0$; en substituant ces valeurs dans l'equation de condition $(s - q + 1)(p - m) = (p - r + 1)(n - q)$, on trouveroit

l'egalité $(0 - 2 + 1)(0 - \frac{1}{2}) = (0 - \frac{1}{2} + 1)(3 - 2)$,

ou $-1 \times -\frac{1}{2} = +\frac{1}{2} \times 1$. On en concluroit donc

que l'equation proposée peut être rendue homogene en

supposant $y = z^x$, & $x = \frac{p - m}{n - q} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{3 - 2} = -\frac{1}{2}$; par

conséquent $y = z^{-\frac{1}{2}}$. En effet, si on suppose $y =$

$z^{-\frac{1}{2}}$, & qu'on substitue $z^{-\frac{3}{2}}$ pour y^3 , z^{-1} pour y^2 ;

& $-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$ pour dy dans l'equation proposée, elle

devient $4x^{-\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx + 3x^{-1} dx + 3x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx = 0$,
 equation homogene.

CCCLXXXII.

PROBLEME V. Separer les indeterminées dans l'équation différentielle a deux variables $aXy^n dy + by^{n+1} X'dx + cy^q X''dx = 0$, dans laquelle X , X' , X'' font des fonctions quelconques de x & de constantes.

SOLUTION. 1.° En divisant toute l'équation d'abord par y^q , & après par aX , on la réduit a l'équation $y^{n-q} dy + \frac{by^{n-q+1} X'dx}{aX} + \frac{cX''dx}{aX} = 0$, dans laquelle on a le premier terme $y^{n-q} dy$ tout en y , & le dernier terme $\frac{cX''dx}{aX}$ tout en x .

2.° Donc, si on pouvoit trouver une fonction V de x & de constantes, telle qu'en multipliant toute l'équation ainsi reduite, elle rendît ses deux premiers termes $Vy^{n-q} dy + \frac{Vby^{n-q+1} X'dx}{aX}$ une différentielle exacte, on trouveroit l'intégrale de toute l'équation en cherchant celle de la différentielle exacte par la methode du Chapitre I., & ensuite celle du dernier terme $\frac{cVX''dx}{aX}$ par les methodes de la premiere Partie, puis-

que

que ce dernier terme ne contiendrait qu'une seule variable x .

3.° Cela posé, si on suppose $\frac{by^{n-q+1}VX'}{aX} = A$,

& $Vy^{n-q} = B$, & par conséquent toute la différentielle exacte $= Adx + Bdy$, on aura (Art. CCCXXXII.)

l'équation $\frac{(dA)}{dy} = \frac{(dB)}{dx}$; c'est à dire, qu'en prenant

la différentielle de A en ne faisant varier que y , & en la divisant par dy , & ensuite la différentielle de B , en ne faisant varier que x , & divisant par dx , on

aura l'équation $\frac{(n-q+1)bVX'y^{n-q}}{aX} = \frac{y^{n-q}dV}{dx}$; d'où

l'on tire $\frac{(n-q+1)bX'dx}{aX} = \frac{dV}{V}$, & en intégrant de

part & d'autre $L.V = S. \frac{(n-q+1)bX'dx}{aX}$. En prenant

e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; c'est à dire, en supposant $L.e = 1$, on a

$$S. \frac{(n-q+1)bX'dx}{aX} = S. \frac{(n-q+1)bX'dx}{aX}. L.e =$$

$L.e^{S. \frac{kbX'dx}{aX}}$, en mettant k pour $n-q+1$. On aura

donc $L.V = L.e^{S. \frac{kbX'dx}{aX}}$, & en repassant des logarithmes

aux nombres $V = e^{S. \frac{kbX'dx}{aX}}$. Donc puisque l'inté-

grale $S. \frac{kbX'dx}{aX}$ peut toujours se trouver par les me-

thodes de la premiere Partie, on connoîtra la valeur de la fonction V de x , qu'on cherchoit, & on pourra par consequent intégrer l'équation proposée.

4.° Si on met $e^{\int \frac{bb'X'dx}{aX}}$ pour V dans l'équation $Vy^{n-q} dy + \frac{by^k V X'dx}{aX} + \frac{cV X''dx}{aX} = 0$, la quantité

$Vy^{n-q} dy + \frac{by^k V X'dx}{aX}$, ou $Bdy + Adx$ fera une

différentielle exacte, dont l'intégrale peut se trouver par les methodes du Chapitre I., en intégrant le seul

terme Bdy , ou $Vy^{n-q} dy$, dans la supposition de y seule variable, & de x constante. Or l'intégrale de ce

terme dans cette supposition est $\frac{Vy^{n-q+1}}{n-q+1} = \frac{Vy^k}{k}$.

Donc l'intégrale de toute l'équation fera $\frac{Vy^k}{k} +$

$\int \frac{cV X''dx}{aX} = C$ constante, & en remettant $e^{\int \frac{bb'X'dx}{aX}}$

pour V , on aura $\frac{y^k}{k} \cdot e^{\int \frac{bb'X'dx}{aX}} + \int \left(\frac{cX''dx}{aX} \times e^{\int \frac{bb'X'dx}{aX}} \right)$

$= C$; par consequent $y^k = \frac{kC - \int \left(\frac{cX''dx}{aX} \cdot e^{\int \frac{bb'X'dx}{aX}} \right)}{\int \frac{bb'X'dx}{aX}} =$

$kC \cdot e^{\int \frac{bb'X'dx}{aX}} - \int \left(\frac{kcX''dx}{aX} \cdot e^{\int \frac{bb'X'dx}{aX}} \right) \times e^{\int \frac{bb'X'dx}{aX}}$,

$$\& y = \left[k C . e^{S. - \frac{k b X' dx}{a X}} - S. \left(\frac{k c X'' dx}{a X} . e^{S. \frac{k b X' dx}{a X}} \right) \times \right.$$

$\left. e^{S. - \frac{k b X' dx}{a X}} \right]^{\frac{1}{k}}$; les indeterminées feront donc toujours séparées, & l'équation intégrée par cette methode.

C. Q. F. T.

Si k , ou $n - q + 1$ étoit zero, les quantités qui sont divisées par k deviendroient infinies, & la methode paroîtroit ne rien donner; mais dans ce cas on auroit $n - q = -1$, & l'équation proposée se reduiroit

$$\text{a celle-cy } \frac{dy}{y} + \frac{b X' dx}{a X} + \frac{c X'' dx}{a X} = 0, \text{ dont l'intégrale}$$

$$\text{est } L. y + \frac{b}{a} S. \frac{X' dx}{X} + \frac{c}{a} S. \frac{X'' dx}{X} = C \text{ constante.}$$

CCCLXXXIII.

COROLLAIRE I. Si dans l'équation proposée on suppose $X' = x^n$, & $X = x^{n+1}$, on aura $\frac{(n-q+1)b X' dx}{a X}$

$$= \frac{(n-q+1)b dx}{a x} = \frac{dV}{V} \text{ (par la Solution precedente}$$

N.º 3.), & en intégrant de part & d'autre $\frac{(n-q+1)b}{a} \times$

$L. x = L. V$, ou $b L. x = L. V$, en écrivant b pour

$\frac{(n-q+1)b}{a}$; par conséquent $L. x^b = L. V$, & $x^b = V$.

Donc en substituant x^b pour V , & x^{n+1} pour X dans

l'intégrale $\frac{V y^k}{k} + S. \frac{e V X'' dx}{a X} = C$, cette intégrale devien-

dra $\frac{x^b y^k}{k} + S. \frac{c}{a} X'' x^{b-n-1} dx = C$, ou $y^k =$

$$\frac{Ck - \frac{c}{a} S. X'' x^{b-n-1} dx}{x^b}$$

CCCLXXXIV.

COROLLAIRE II. Si l'équation proposée étoit $a x^m y^n dy + b y^{n+1} x^p dx - dx = 0$; en la comparant avec celle du Probleme $a X y^n dy + b y^{n+1} X' dx + c y^q X'' dx = 0$, on trouveroit $X = x^m$, $X' = x^p$, $+ c y^q X' = -1$; par conséquent $y^q = y^0 = 1$, $X'' = x^0 = 1$, & $c = -1$, & $\frac{(n-q+1) b X' dx}{a X} = \frac{(n+1) b x^{p-m} dx}{a}$;

$$S. \frac{(n-q+1) b X' dx}{a X} = \frac{(n+1) b x^{p-m+1}}{(p-m+1) a} ; V =$$

$e^{\frac{(n+1) b x^{p-m+1}}{(p-m+1) a}}$, & l'intégrale de toute l'équation

$$\frac{V y^k}{k} + S. \frac{e V X'' dx}{a X} = C \text{ deviendroit } \frac{y^k}{k} e^{\frac{(n+1) b x^{p-m+1}}{(p-m+1) a}}$$

$$+ S. \left(-\frac{1}{a} x^{-m} dx \times e^{\frac{(n+1) b x^{p-m+1}}{(p-m+1) a}} \right) = C.$$

CCCLXXXV.

LEMME I. Toutes les equations différentielles a deux variables & a trois termes peuvent se reduire a cette forme $dy = ax^m dx + by^q dx$.

DEMONSTRATION. Puisque ces equations ont necessairement deux termes, où se trouve la différence d'une même variable, & un troisieme terme, où est la différence de l'autre variable, il est evident qu'elles peuvent toujours être comprises sous cette forme generale $Az^\alpha u^\beta du = Bu^\gamma z^\delta dz + Cu^\lambda z^\mu dz$, dans laquelle A, B, C designent des constantes quelconques, & les exposans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ des nombres quelconques ou zero. Or divisant toute cette equation par $Az^\alpha u^\gamma$, on la reduit a celle-cy $u^{\beta-\gamma} du = \frac{B}{A} z^{\delta-\alpha} dz + \frac{C}{A} u^{\lambda-\gamma} z^{\mu-\alpha} dz$, qu'on peut exprimer ainsi $u^\pi du = Ez^\tau dz + Fu^\sigma z^\rho dz$; & si on fait $u^{\pi+1} = y$, ou $u = y^{\frac{1}{\pi+1}}$, on en tirera $u^\pi du = \frac{dy}{\pi+1}$, $u^\sigma = y^{\frac{\sigma}{\pi+1}}$, & par substitution $dy = (\pi+1)Ez^\tau dz + (\pi+1)Fy^{\frac{\sigma}{\pi+1}} z^\rho dz$; qu'on peut exprimer ainsi $dy = Gz^\tau dz + Hy^q z^\rho dz$. De même, si on fait $z^{\sigma+1} = x$, ou $z = x^{\frac{1}{\sigma+1}}$, on en

tirera $z^\sigma dz = \frac{dx}{\sigma+1}$, $z^\tau = x^{\frac{\tau}{\sigma+1}}$, $dz = \frac{x}{\sigma+1} x^{\frac{1}{\sigma+1}-1} dx$,

$x^\tau dz = \frac{x}{\sigma+1} x^{\frac{\tau-\sigma}{\sigma+1}} dx$, & par substitution $dy = \frac{G}{\sigma+1} x$

$x^{\frac{\tau-\sigma}{\sigma+1}} dx + \frac{H}{\sigma+1} y^q dx$, ou $dy = ax^m dx + by^q dx$, en

mettant a pour $\frac{G}{\sigma+1}$, b pour $\frac{H}{\sigma+1}$, & m pour $\frac{\tau-\sigma}{\sigma+1}$.

C. Q. F. D.

CCCLXXXVI.

PROBLEME VI. Une equation différentielle quelconque a deux variables, & a trois termes étant donnée, separer les indeterminées pour l'intégrer ensuite, ou l'intégrer en les separant.

SOLUTION. Nous venons de demontrer que l'equation proposée peut toujours se reduire a cette forme $dy = ax^m dx + by^q dx$, qu'on pourra résoudre comme il suit.

1.° Si $m=0$, ou si l'equation est $dy = a dx + by^q dx$, on aura $\frac{dy}{a+by^q} = dx$, dans laquelle les variables sont separées.

2.° Si $q = \frac{m}{m+1}$, ou si l'equation est $dy = ax^m dx + by^{\frac{m}{m+1}} dx$, on la rendra homogene en faisant $x =$

$z^{\frac{1}{m+1}}$, & on separera ensuite les indeterminées (Art. CCCLXXII.). Car, si on suppose $x = z^{\frac{1}{m+1}}$, on aura $x^m = z^{\frac{m}{m+1}}$, $dx = \frac{1}{m+1} z^{-\frac{1}{m+1}} dz$, $x^m dx = \frac{1}{m+1} dz$, & l'equation deviendra $dy = \frac{a dz}{m+1} + \frac{b}{m+1} y^{\frac{m}{m+1}} \times z^{-\frac{m}{m+1}} dz$, ou $(m+1) z^{\frac{m}{m+1}} dy = a z^{\frac{m}{m+1}} dz + b y^{\frac{m}{m+1}} dz$, qui est homogene.

3.° Si $q = 1$, ou si l'equation proposée est $dy = a x^m dx + b y dx$, on pourra la mettre sous cette forme $-y^0 dy + f x^m y^0 dx + g y^1 dx = 0$, & la comparer avec la formule du Probleme precedent $a X y^n dy + c y^q X' dx + b y^{n+1} X' dx = 0$, ce qui donnera $a = -1$, $n = 0$, $X = x^0 = 1$, $c = f$, $q = 0$, $X' = x^m$, $b = g$, $X' = x^0 = 1$, & en substituant ces valeurs dans l'intégrale de ce Probleme, on aura celle de l'equation proposée $dy = (f x^m + g y) dx$.

4.° Enfin on peut toujours intégrer l'equation proposée, en separant en même tems les indeterminées, par la methode de Newton, que nous avons expliquée

dans le Chapitre precedent, quelques soient les nombres donnés m & q . On peut même trouver une infinité de suites, qui exprimeront la valeur de y en x , en laissant l'exposant m indeterminé, & prenant un nombre quelconque, comme 1, 2, 3, &c., $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. pour l'exposant q , & même en laissant aussi cet exposant indeterminé, & en formant par les formules de Newton les puissances q des suites qui expriment les valeurs de y en x . Car puisque $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S.by^q dx$, on aura, en ajoutant une constante arbitraire C , $y = C + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S.by^q dx$; ce qui peut fournir une infinité de suites différentes pour la valeur de y en x , & en constantes, comme nous l'avons fait voir. Nous allons donner quelques exemples de cette methode, en laissant l'exposant m indeterminé.

CCCLXXXVII.

EXEMPLE I. Soit proposée l'équation $dy = ax^m dx + by dx$; en intégrant de côté & d'autre, on aura $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S.by dx$, & en prenant $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ pour le premier terme de la suite, qui doit exprimer la valeur de y en x & en constantes, & X pour la somme des autres termes

mes de cette même suite, de sorte que $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} +$

X , on aura $by dx = \frac{bax^{m+1}}{m+1} dx + bXdz$; $S. by dz =$

$\frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + S.bXdz$, & $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$

$+ S.bXdz$: de même si on suppose que X' soit la somme de tous les termes de la suite X après le premier de cette suite

$\frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$, de sorte qu'on ait

$X = \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + X'$; on aura aussi $bXdz =$

$\frac{bbax^{m+2} dz}{(m+1)(m+2)} + bX'dz$; $S.bXdz = \frac{b^2ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$

$+ S.bX'dz$, & $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} +$

$\frac{b^2ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + S.bX'dz$. En supposant de même

$X' = \frac{b^2ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + X''$, on trouvera

$S.bX'dz = \frac{b^3ax^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + S.bX''dz$,

& $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{b^2ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$

$+ \frac{b^3ax^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + S.bX''dz$, & ainsi de

suite à l'infini.

Il est donc evident que la methode de Newton a lieu dans les equations differentielles avec des exposans indeterminés, & qu'on peut se servir de ses Tables, ou rectangles de la même maniere qu'on s'en fert, lorsque les exposans sont tous donnés en nombres comme nous allons le faire voir en cherchant la suite qui exprime la valeur de y en x , dans la supposition que le premier terme de cette suite soit une constante arbitraire C , qu'on ajoute a l'intégrale, de sorte qu'on ait $y = C + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S. by dx$. Car en supposant $y = C + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + X$, on aura $by dx = bC dx + \frac{bax^{m+1} dx}{m+1} + bXd x$, en intégrant de part & d'autre, $S. by dx = bCx + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + S. bXd x$, & $y = C + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + bCx + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + S. bXd x$. En continuant l'operation, comme dans la Table (*Planche VI. Fig. 12.*) on trouvera

$$y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{b^2ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{b^3ax^{m+4}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + C + bCx + \frac{b^2Cx^2}{2} + \frac{b^3Cx^3}{6}$$

On voit bien que, si l'exposant m étoit un nombre entier negatif quelconque, il y auroit toujours des

termes dans la valeur de y , qui auroient zero pour denominatedeur, & qui feroient par consequent infinis, puisque ces denominatedeurs sont composés de facteurs $m+1$, $m+2$, $m+3$, &c. Il faudra donc alors se servir des préparations que Newton prescrit, en substituant au lieu de x la même variable, ou une autre avec une constante arbitraire; ou bien il faudra intégrer par les logarithmes: par exemple, si on suppose $m = -1$, l'intégrale de $a x^m dx$, ou de $\frac{a dx}{x}$ prise par les logarithmes sera $a L. x$, & on aura $y = a L. x + S. b y dx = a L. x + S. (b a L. x \times dx + b X dx) = a L. x + b a x L. x - b a x + S. b X dx$, & on pourra continuer en intégrant toujours par les logarithmes suivant cette regle connue, que l'intégrale de la différentielle logarithmique $c x^n L. x \times dx$ est $\frac{c x^{n+1}}{n+1} L. x - \frac{c x^n}{n+1}$. On pourroit pousser ces remarques beaucoup plus loin, & elles meritent d'exercer la sagacité des jeunes Geometres.

CCCLXXXVIII.

EXEMPLE II. Soit proposée l'équation, qu'on appelle communément *du Comte Riccati*, $dy = a x^m dx + b y^2 dx$. On peut la résoudre, comme dans l'Exemple

precedent, sans se servir des Tables ou rectangles de Newton. Car en intégrant de part & d'autre, on aura d'abord $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + S. by^2 dx$; supposant ensuite, que la série qui doit exprimer la valeur de y en x soit $= \frac{ax^{m+1}}{m+1} + X$, on aura $y^2 = \frac{a^2 x^{2m+2}}{(m+1)^2} + \frac{2ax^{m+1}X}{m+1} + XX$, & la différentielle $byy dx = \frac{ba^2 x^{2m+2} dx}{(m+1)^2} + \frac{2bax^{m+1}X dx}{m+1} + bXX dx$, & en prenant les intégrales de côté & d'autre, on trouvera $S. byy dx = \frac{ba^2 x^{2m+3}}{(m+1)^2 (2m+3)} + S. \frac{2bax^{m+1}X dx}{m+1} + S. bXX dx$; par conséquent $y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{ba^2 x^{2m+3}}{(m+1)^2 (2m+3)} + S. \frac{2bax^{m+1}X dx}{m+1} + S. bXX dx$: supposant encore $X = \frac{ba^2 x^{2m+3}}{(m+1)^2 (2m+3)} + X'$; & substituant cette valeur de X dans les différentielles $\frac{2bax^{m+1}X dx}{m+1}$, & $bXX dx$, on trouvera, en prenant les intégrales, d'autres termes de la suite qui doit exprimer la valeur de y en x ; mais le calcul sera plus court, si on le fait par la méthode de Newton, comme on le voit dans la Table (*Planche VII. Fig. 13.*).

CCCLXXXIX.

La methode, dont nous nous sommes servis pour refoudre les deux equations precedentes par les Tables, ou rectangles de Newton, fournit generalement la separation & l'integration en même tems, lorsqu'elles sont possibles; il ne faut cependant pas ômettre la methode particuliere, qu'on a coutume d'employer, pour traiter l'equation du dernier exemple, $dy + ay^2 dx = bx^m dx$. On peut determiner une infinité de valeurs de m , dans lesquelles cette equation seroit separable; on observe pour cela que les variables peuvent être separées, si on change l'equation proposée en une autre, ou ay^2 & b soient multipliés par une même puissance de x . Cette transformation se fait par le moyen des coefficients, & des exposans indeterminés, & en introduisant une nouvelle inconnue. Supposons $y = Ax^p + x^q t$, on aura, en differentiant, $dy = pAx^{p-1} dx + qx^{q-1} t dx + x^q dt$, & substituant a la place de dy & y^2 leurs valeurs respectives, l'equation precedente deviendra $pAx^{p-1} dx + qx^{q-1} t dx + x^q dt + a(Ax^p + x^q t)^2 \times t dx + aAAx^{2p} dx + 2aAx^{p+q} t dx = bx^m dx$.

Maintenant pour satisfaire a la condition requisé, supposons $p-1=2p$, $pA+aAA=0$, $p+q=q-1$, $q+2aA=0$, d'où l'on tire $p=-1$, $A=\frac{1}{a}$, $q=-2$, & on a la transformée $x^{-2}dt+a x^{-4} \times ttdx=b x^m dx$. Or, puisque l'on veut que ay^2 & b soient multipliés par une même puissance de x , on voit que $m=-4$, & que dans ce cas l'équation est separable.

Soit fait de plus $t=\frac{x}{z}$, l'équation precedente deviendra $dz+b x^{m+2} z^2 dx=a x^{-2} dx$, & supposant $z=A' x^{p'}+x^{q'} t'$, on aura en operant comme dans la substitution precedente $p' A' x^{p'-1} dx+q' x^{q'-1} t' dx+x^{q'} dt'+b x^{2q'+m+2} t' t' dx+b A'^2 x^{2p'+m+2} dx+2b \times A' x^{p'+q'+m+2} t' dx=a x^{-2} dx$. Soit fait, comme cy-devant, $2p'+m+2=p'-1$, $p A'+b A'^2=0$, $q'+2b A'=0$, $q'-1=p'+q'+m+2$; on aura $p'=-m-3$, $A'=\frac{m+3}{b}$, $q'=-2m-6$, & la seconde transformée sera $x^{-2m-6} dt'+b x^{-3m-10} t' t' dx=a x^{-2} dx$, ou $dt'+b x^{-m-4} t' t' dx=a x^{2m+4} dx$; & puisque

$-m-4$ doit être $= 2m+4$, il s'ensuit que $m = -\frac{8}{3}$, autre cas de separabilité. En faisant de nouveau $t = \frac{x}{z}$, & $z' = A''x^{p''} + x^{q''}t''$, & continuant successivement les mêmes operations, on trouvera que l'equation est separable si $m = -\frac{12}{5}$, $m = -\frac{16}{7}$, $m = -\frac{20}{9}$, &c., & generalement si r est un nombre entier positif quelconque 1, 2, 3, &c., l'equation sera separable dans tous les cas de $m = -\frac{4r}{2r-1}$; ainsi en supposant $r = 1$, on aura $m = -4$; si $r = 2$, on aura $m = -\frac{8}{3}$, &c. De plus si on considere la loi des exposans, on verra que dans la premiere substitution $y = Ax^p + x^q t$, on a $p = -1$, $q = -2$; dans la seconde substitution $z = A'x^{p'} + x^{q'} t'$ on a $p' = -m-3$, $q' = -2m-6$, & ainsi de suite, on voit que le second exposant est toujours le double du premier, en sorte que l'exposant p etant $-rm-2r-1$, l'exposant q sera $-2rm-4r-2$, d'où il sera aisé en reprenant les substitutions precedentes de former l'expression generale de $y =$

$$Ax^{-1} + x^{-2} \cdot \frac{x}{Ax^{-m-3} + x^{-2m-6}} \cdot \frac{x}{Ax^{-2m-5} + x^{-4m-10}} \cdot \text{etc.} \times x.$$

x étant une variable qu'on determine par la substitution dans les equations separées.

Si au lieu de substituer $y = Ax^p + x^q x$, comme on a fait d'abord dans l'equation $dy + ay^2 dx = bx^m dx$, on eût supposé premièrement $y = \frac{x}{z}$ & ensuite $z = Ax^p + x^q x$, on trouveroit, en suivant les mêmes operations, une infinité d'autres valeurs de m , qui rendroient l'equation separable. On separeroit avec la même facilité les variables dans l'equation $x^q dy + ay^2 x^n dx = bx^m dx$. Il ne faut pour cela que diviser par x^q , & faire $x^{n-q+1} = z$.

Enfin on peut appliquer cette methode aux equations qui renferment différentes puissances de dx & dy . Car il est necessaire que ces sortes d'equations soient homogenes par rapport aux dimensions de dx & dy . C'est pourquoy on pourra diviser l'equation par une dimension de dx , qui soit egale a la somme des dimensions de dx & dy , & on refoudra l'equation en regardant $\frac{dy}{dx}$ comme l'inconnuë. D'où il est evident qu'on pourra traiter ces equations, comme si elles ne contenoient

noient dx & dy qu'au premier degré. Nous ne nous arrêterons pas davantage à l'explication de cette méthode, laquelle, quoiqu'elle renferme une infinité de cas, en laisse cependant une infinité d'autres, au lieu que la méthode tirée des rectangles de Newton fournit une Solution générale, & donne la séparation & l'intégration par la même opération.

CCCXC.

LEMME II. Toutes les equations différentielles du premier ordre à deux variables, & à quatre termes, peuvent se réduire à l'une ou l'autre de ces deux formules.

$$\text{I. } ax^m dx + by^p x^n dx + cy^r dx - dy = 0.$$

$$\text{II. } ax^m dx + by^p dx + cy^r x^r dy - dy = 0, \text{ ou} \\ adx + by^p x^r dx + cy^r x^r dy - dy = 0.$$

DEMONSTRATION. Dans toutes les equations de cette sorte la différence d'une des deux variables se trouve dans un seul terme, ou dans deux termes, ou dans trois; car elle ne peut pas être dans tous les quatre termes, par ce qu'alors toute l'equation pourroit être divisée par cette différence, & deviendroit finie. Il n'y a donc que deux cas: le premier quand la différence d'une des deux variables se trouve dans un seul terme de l'equation, & par conséquent la différence de

l'autre variable dans le trois autres termes; le second cas, quand les deux différences se trouvent chacune dans deux termes.

Supposé que les deux variables soient z & u , on peut représenter généralement le premier cas par l'équation $Az^{\alpha}u^{\beta}du + Bu^{\gamma}z^{\delta}dz + Cu^{\lambda}z^{\mu}dz + Du^{\nu}z^{\rho}dz = 0$, en prenant A, B, C, D pour des quantités quelconques, & $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \rho$ pour des nombres aussi quelconques, ou zero. Or cette équation étant divisée par $Az^{\alpha}u^{\beta}$ se réduit à la forme $u^{\beta-\gamma}du + Ez^{\delta-\alpha}dz + Fu^{\lambda-\gamma}z^{\mu-\alpha}dz + Gu^{\nu-\gamma}z^{\rho-\alpha}dz = 0$, & celle-ci en faisant $u^{\beta-\gamma+1} = y$, ou $u^{\beta-\gamma}du = \frac{dy}{\beta-\gamma+1}$, & $u = y^{\frac{1}{\beta-\gamma+1}}$, se réduit comme dans le Lemme précédent à la forme $dy + Hz^{\delta-\alpha}dz + Ky^{\gamma}z^{\mu-\alpha}dz + Ly^{\gamma} \times z^{\rho-\alpha}dz = 0$; & cette équation, en faisant de plus $z^{\rho-\alpha+1} = x$, ou $z^{\rho-\alpha}dz = \frac{dx}{\rho-\alpha+1}$, & $z = x^{\frac{1}{\rho-\alpha+1}}$ devient $dy + Mx^m dx + Ny^{\gamma}x^n dx + Py^{\gamma}dx = 0$, ou enfin, en prenant a, b, c pour des quantités quelconques, & m, p, n, s pour des nombres quelconques ou zero, $ax^m dx + by^p x^n dx + cy^s dx - dy = 0$.

On peut de même représenter généralement le second cas par l'équation $Az^{\alpha}u^{\beta}du + Bz^{\delta}u^{\gamma}du + Cu^{\lambda} \times$

$z^a dz + Du^r z^s dz = 0$, laquelle, etant divisée par $Az^a u^a$,

devient $u^{\beta-\lambda} du + Ez^{\delta-a} u^{\gamma-\lambda} du + Fz^{\mu-a} dz +$

$Gu^{\nu-\lambda} z^{\epsilon-a} dz = 0$, & celle-cy en faisant $u^{\beta-\lambda+1}$

$= y$, ou $u^{\beta-\lambda} du = \frac{dy}{\beta-\lambda+1}$, & $u = y^{\frac{1}{\beta-\lambda+1}}$, devient

$dy + Hz^{\delta-a} y^r dy + Kz^{\mu-a} dz + Ly^r z^{\epsilon-a} dz = 0$.

Or cette equation, en supposant $z^{\delta-a+1} = x$, se re-

duit a cette forme $ax^m dx + by^p dx + cy^s y^n dy - dy = 0$;

& si, au lieu de supposer $z^{\delta-a+1} = x$, on avoit fait

$z^{\mu-a+1} = x$, on auroit eû la troisieme forme $adx +$

$by^p x^1 dx + cy^s y^n dy - dy = 0$.

CCCXCI.

PROBLEME VII. Une equation différentielle quelconque du premier ordre a deux variables & a quatre termes etant donnée, en separer les indeterminées avant de l'intégrer, ou en l'integrant.

SOLUTION. Cas I. Lorsque l'equation proposée est $ax^m dx + by^p x^n dx + cy^s dx - dy = 0$.

I. ° Si dans cette equation $p = \frac{m-n}{m+1}$, & $s = \frac{m}{m+1}$,

on la rendra homogene en faisant $x = z^{\frac{1}{m+1}}$. Car on aura

$$dx = \frac{1}{m+1} z^{\frac{-m}{m+1}} dz, \quad x^m = z^{\frac{m}{m+1}}, \quad x^m dx = \frac{1}{m+1} dz;$$

$$x^n = z^{\frac{n}{m+1}}, \quad x^n dx = \frac{1}{m+1} z^{\frac{n-m}{m+1}} dz. \text{ Substituant ces va-}$$

leurs dans l'equation proposee, elle devient $\frac{ax dz}{m+1} +$

$$\frac{by}{m+1} y^{\frac{m-n}{m+1}} z^{\frac{n-m}{m+1}} dz + \frac{c}{m+1} y^{\frac{m}{m+1}} z^{\frac{-m}{m+1}} dz - dy = 0,$$

equation homogene, dont on pourra separer les indeterminées, & ensuite intégrer (Art. CCCLXXII.).

2.° Si dans l'equation proposee on fait $y = x^\delta u$; δ etant un exposant indeterminé, & u une nouvelle variable, on aura $y^p = x^{\delta p} u^p$, $y^s = x^{\delta s} u^s$, $dy = \delta u x^{\delta-1} dx + x^\delta du$, & par substitution la proposee deviendra $ax^m dx + bu^p x^{\delta p+n} dx + cu^s x^{\delta s} dx -$

$\delta u x^{\delta-1} dx - x^\delta du = 0$, equation de cinq termes, qu'on peut reduire a trois, en supposant que deux des cinq se detruisent par la determination de l'exposant arbitraire δ . Apres avoir tenté différentes suppositions de deux termes egalés a zero, on trouve que la seule qu'on puisse faire sans absurdité est $bu^p x^{\delta p+n} dx - \delta u x^{\delta-1} dx = 0$; d'où l'on tire $p = 1$, $\delta p + n = \delta - 1$

$n = s - 1$, ou $n = -1$, & $b = s$; ce qui réduit l'équation proposée à celle-cy $a x^m dx + b y x^{-1} dx + c y^s dx - dy = 0$, qu'on ramène à l'équation de trois termes $a x^m dx + c u^s x^{b s} dx - x^b du = 0$, ou $a x^{m-b} dx + c u^s x^{b s - b} dx - du = 0$, en faisant $y = x^b u$.

Si dans cette équation de trois termes $m = b s$, on aura $a x^{m-b} dx + c u^s x^{m-b} dx = du$, & $x^{m-b} dx = \frac{du}{a + c u^s}$, équation dans laquelle les indéterminées sont séparées.

Si dans la même équation $s = 1$, on aura $a x^{m-b} dx + c u dx - du = 0$, ou $u^0 du - c u^1 dx - x^{m-b} dx = 0$, qu'on pourra réduire par le Problème (Art. CCCLXXXII.). Si on avoit $s = 2$, l'équation auroit la forme de celle de Riccati, dont nous venons de parler. Enfin si on avoit $s = \frac{m}{m+1}$, ou si l'équa-

tion étoit $a x^{m-b} dx + c u^{\frac{m}{m+1}} x^{\frac{-b}{m+1}} dx - du = 0$, on pourroit toujours la rendre homogène, & par conséquent en séparer les indéterminées. Car en faisant $\frac{-b}{m+1} + 1$, ou $\frac{m+1-b}{m+1} = z$, on aura $x^{\frac{-b}{m+1}} dx =$

$$\frac{m+1}{m+1-b} dz, \quad x = z^{\frac{m+1}{m+1-b}} \quad dz = \frac{m+1}{m+1-b} z^{\frac{1}{m+1-b}} dz,$$

$$\& x^{m-b} = \frac{m+1}{m+1-b} z^m dz, \quad \& \text{l'équation, après la}$$

$$\text{substitution, seroit} \quad \frac{m+1}{m+1-b} a z^m dz + \frac{m+1}{m+1-b} \times$$

$$c u^{\frac{m}{m+1}} dz - du = 0, \quad \text{qu'on rendroit homogène en sup-}$$

$$\text{posant} \quad z = V^{\frac{m}{m+1}}, \quad \text{puisqu'on auroit} \quad z^m = V^{\frac{m}{m+1}}, \quad dz =$$

$$\frac{1}{m+1} V^{\frac{-m}{m+1}} dV, \quad z^m dz = \frac{1}{m+1} dV, \quad \& u^{\frac{m}{m+1}} dz =$$

$$\frac{1}{m+1} u^{\frac{m}{m+1}} V^{\frac{-m}{m+1}} dV.$$

3.° Enfin, en mettant l'équation proposée sous cette forme $\frac{dy}{dx} = ax^m + by^p x^n + cy^s$, on la pourra toujours intégrer en séparant en même tems les indéterminées par la méthode de Newton, quelques nombres donnés que soient les exposans p & s , quand bien même les exposans m , & n demeureroient indéterminés. On n'aura pour cela, qu'à placer le terme ax^m dans le rectangle horizontal au haut de la table, & les deux autres termes $+by^p x^n$ & $+cy^s$ dans le rectangle vertical vers la gauche, & operer ensuite suivant les règles de la méthode, comme dans le Probleme

precedent. On peut en faire un effai sur l'equation $dy = ax^m dx + by^n dx + cy^2 dx$, sur laquelle on a beaucoup travaillé, apparemment a cause de sa ressemblance avec celle de Riccati. Cette equation n'est qu'un cas particulier de celles que nous traitons dans ce Probleme.

CAS II. Lorsque l'equation proposée est $ax^m dx + by^p dx + cy^r x^s dy - dy = 0$.

1.° Si dans cette equation on a $p = \frac{m}{m+1}$, & $s = -\frac{r}{m+1}$, on la rendra homogene en faisant $x = z^{\frac{1}{m+1}}$, car on aura $x^m = z^{\frac{m}{m+1}}$, $dx = \frac{1}{m+1} z^{\frac{-m}{m+1}} dz$, $x^m dx = \frac{1}{m+1} dz$; $y^p = y^{\frac{m}{m+1}}$; $y^p dx = \frac{1}{m+1} y^{\frac{m}{m+1}} \times z^{\frac{-m}{m+1}} dz$; $y^r = y^{\frac{-r}{m+1}}$; $x^r = z^{\frac{r}{m+1}}$; $y^r x^r dy = y^{\frac{-r}{m+1}} \times z^{\frac{r}{m+1}} dy$, & toute l'equation après la substitution fera $\frac{1}{m+1} adz + \frac{1}{m+1} by^{\frac{m}{m+1}} z^{\frac{-m}{m+1}} dz + cy^{\frac{-r}{m+1}} z^{\frac{r}{m+1}} dy - dy = 0$.

2.° Si on prend pour le second cas l'autre equation generale $ax^m dx + by^p x^r dx + cy^s x^n dy - dy = 0$, &

que dans cette equation on ait $c = -b$, $s = p - 1$, & $n = r + 1$, enforte que la propofée foit $adx + by^p x^r \times dx - by^{p-1} x^{r+1} dy - dy = 0$. On pourra toujours l'intégrer par le Probleme (ART. CCCLXXXII.) en fai-
 fant $y = ux$. Car on aura par cette fupposition $y^p = u^p x^p$; $y^{p-1} = u^{p-1} x^{p-1}$; $dy = udx + xdu$; & après les fubstitutions, la propofée fera $adx + bu^p x^{p+r+1} dx - bu^{p-1} x^{p+r+1} (udx + xdu) - udx - xdu = 0$ ou \times
 $(a - u)dx - xdu - bu^{p-1} x^{p+r+1} du = 0$, qui a la forme requifé dans le Probleme cité (Art. CCCLXXXII.) comme on le voit evidemment en écrivant y pour x , & x pour u dans cette derniere equation, qui fe change par là en $(a - x)y^0 dy - y^1 x^0 dx - by^{p-1} \times y^{p+r+1} dx = 0$.

3.° Enfin puiſque dans le fecond cas on a $\frac{dy}{dx} = \frac{ax^m + by^p}{1 - cy^r x^r}$, ou encore $\frac{dy}{dx} = \frac{a + by^p x^r}{1 - cy^r x^r}$, on pourra toujours refoudre ces cas par la Methode de Newton, en reduifant l'une ou l'autre de ces fractions en ſeries, ce qu'on peut toujours faire par la divifion continuée a l'infini.

CCCXCII.

REMARQUE. Il faut bien observer qu'on ne doit pas confondre la separation des variables avec l'intégration des equations différentielles; c'est a dire, qu'on ne doit pas regarder une equation, comme n'étant pas intégrable, par ce que les indeterminées ne sont point separables. C'est une attention que plusieurs Geometres paroissent n'avoir pas faite. Ainsi, par exemple, dans la celebre equation de Riccati, lorsqu'on ne peut parvenir a separer les variables, on a coûtume d'abandonner ces cas, & on desespere de leur intégration. Or nous avons fait voir generalement par la Methode de Newton, comment on pouvoit intégrer cette equation; & la separation des indeterminées est renfermée dans l'intégration même.

Il nous reste a observer que les equations que nous avons traitées dans ce Chapitre peuvent quelques fois se ramener plus aisément aux methodes du Chapitre premier, en cherchant les facteurs qui peuvent rendre les equations intégrables. Soit, par exemple, l'equation de quatre termes $dy + pydx + qyydx + rdx = 0$, dans laquelle p, q, r sont des fonctions de x seulement. Il faut supposer premierement que u , fonction de x , est une des valeurs particulieres de y , qui satisfait a l'equation proposée, c'est a dire, qui la rend

egale a zero par la substitution, enforte qu'on ait $du + pudx + qu^2 dx + rdx = 0$. Donc, si on fait de plus $y = u + \frac{1}{z}$, on aura en différentiant & en substituant, $du - \frac{dz}{zz} + pudx + \frac{pdx}{z} + qu^2 dx + \frac{2qu dx}{z} + \frac{qdx}{zz} + rdx = 0$; & par consequent, en ôtant la seconde equation de la premiere, nous aurons

$$\left. \begin{array}{ccccccc} du - \frac{dz}{zz} + pudx + \frac{pdx}{z} + qu^2 dx + \frac{2qu dx}{z} + \frac{qdx}{zz} + rdx & & & & & & \\ - du & - pudx & - qu^2 dx & & & & - rdx \end{array} \right\} = 0.$$

Donc $-\frac{dz}{zz} + \frac{pdx}{z} + \frac{2qu dx}{z} + \frac{qdx}{zz} = 0$, ou

$$\frac{dz - (p + 2qu)z dx - q dx}{zz} = 0, \text{ ou } dz - (p + 2qu) \times$$

$z dx - q dx = 0$. Or, en comparant cette derniere equation avec l'expression (Art. CCCXLV.), dans laquelle y repond icy a z , on trouve $r = 1$, $q = -(p + 2qu)$. Donc le facteur M , qui dans l'endroit

cité est $\frac{1}{r} e^{\int \frac{q dx}{r}}$, fera icy $e^{\int -(p + 2qu) dx}$, & ce facteur

rendra intégrable l'equation différentielle $dz - (p + 2qu)z dx - q dx = 0$. Mais l'equation différentielle

proposée est $\frac{dz - (p + 2qu)z dx - q dx}{zz} = 0$, il faudra

donc, pour faire évanouir le dénominateur $z z$, multiplier le facteur cy-dessus par $z z$; ainsi le facteur convenable à la différentielle proposée fera $z z X$

$$e^{-S.(p+2qu)dx} = \frac{1}{(y-u)^2} e^{-S.(p+2qu)dx} \quad (\text{à cause}$$

$$\text{de } \frac{1}{z} = y-u) = \frac{1}{(y-u)^2} \cdot X, \text{ en supposant } X =$$

$e^{-S.(p+2qu)dx}$, & multipliant la différentielle

$$\frac{dz - (p+2qu)z dx - q dx}{z z} = 0 \text{ par ce facteur, on aura}$$

$$\text{l'intégrale } Xz - S.q X dx = C = \frac{X}{y-u} - S.q X dx;$$

& par conséquent tous les facteurs cherchés (Art. CCCXLVIII.) seront renfermés dans $\frac{X}{(y-u)^2} \cdot X'$; X'

étant une fonction quelconque de l'intégrale $Xz - S.q X dx$, ou $\frac{X}{y-u} - S.q X dx$; d'où l'on voit que,

u étant une fonction connue de x par la supposition, on aura aussi $X = e^{-S.(p+2qu)dx}$, fonction pareille-

ment donnée de x .

Si on vouloit appliquer cette remarque à l'équation de Riccati $dy + yy dx - ax^m dx = 0$, qui n'en est qu'un cas particulier, on trouveroit les facteurs qui la rendroient intégrable, pour tous les cas de l'exposant

m , dans lesquels les indeterminées seroient separables. Car, en comparant ces deux equations, on aura $p=0$, $q=1$, $r=-ax^m$, & le facteur cy-dessus devient par la substitution $\frac{1}{(y-u)^2} \cdot e^{-S.2udx}$, par lequel multipliant l'equation, on aura, en substituant, l'intégrale $\frac{1}{y-u} \cdot e^{-2S.udx} - S.e^{-2S.udx} dx = C$, & en supposant que X' est une fonction quelconque de cette intégrale, tous les facteurs seront contenus dans la forme $\frac{X'}{(y-u)^2} \cdot X e^{-2S.udx}$, comme nous avons démontré.

Nous éclaircirons cette remarque par un exemple :

Soit l'equation différentielle $dy + y du + y y dx - \frac{dx}{x} = 0$,

on aura, en comparant, $p=1$, $q=1$, $r=-\frac{1}{x}$. Or

la valeur de $y = \frac{1}{x}$ satisfait à cette equation, comme on le voit en substituant les valeurs respectives dans la différentielle proposée, qui devient $=0$: donc $u =$

$\frac{1}{x}$, & $X = e^{-S.(1+\frac{1}{x})dx} = \frac{1}{xx} \cdot e^{-x}$, & par consé-

quent on aura le facteur $\frac{1}{xx} \cdot e^{-x} \times \frac{1}{(y-u)^2} = e^{-x} \cdot X$

$\frac{1}{(xy-1)^2}$, à cause de $(y-u)^2 = \frac{(xy-1)^2}{xx}$. Maintenant;

si on multiplie l'équation proposée par ce facteur, elle

deviendra $\frac{1}{(xy-1)^2} \cdot e^{-x} (dy + yy dx + y dx - \frac{dx}{x}) = 0,$

dont l'intégrale, en considérant x comme constante, se

trouve par les méthodes du Chapitre I. $\frac{-e^{-x}}{x(xy-1)} + X,$

& différenciant de nouveau cette intégrale, en regardant

y comme constante, on aura $\frac{e^{-x} dx (xxy + 2xy - x - 1)}{xx(xy-1)^2}$

$+ dX$. Or cette différentielle doit être égale à l'autre

membre $\frac{e^{-x}}{(xy-1)^2} (y dx + yy dx - \frac{dx}{x})$, dans lequel, à

cause de y constante, on fait $dy = 0$; cette comparaison

donne $dX = \frac{e^{-x} dx}{xx(xy-1)^2} (xxyy - 2xy - 1) = \frac{1}{xx} \cdot X$

$e^{-x} dx$, en divisant par $(xy-1)^2 = xxyy - 2xy - 1$:

donc l'intégrale complète est enfin $-\frac{e^{-x}}{x(xy-1)} +$

$S. \frac{1}{xx} e^{-x} dx = C$ quantité constante.



C H A P I T R E IV.

*Exposition de différentes Methodes qui ont rapport
aux Chapitres precedents.*

CCCXCIII.

Nous commencerons par les Methodes qu'on a trouvées pour ramener plusieurs equations différentielles a la formule generale $Xy^n dy + y^{n-1} X' dx + y^q X'' dx = 0$, dans laquelle X, X', X'' representent des fonctions quelconques de x & de constantes, & qu'on peut toujours intégrer par le Probleme (Art. CCCLXXXII.). La premiere methode est celle des transformations; car, si on substitue dans cette formule différentes fonctions de x prises a volonté, pour X, X', X'' & une nouvelle variable z pour xy , ou en general z^λ pour $x^\mu y^\nu$; λ, μ, ν etant des exposans arbitraires, qu'on determine ensuite comme on veut; il est evident qu'on trouvera par ce moyen autant d'equations différentielles qu'on voudra, toutes reductibles a la formule generale de l'Article cité. C'est ainsi qu'on a pu trouver les Theoremes suivans.

CCCXCIV.

THEOREME I. Si dans l'equation $(ay^n dy + x^n dx)P + b(x dy - y dx)Q = 0$, a & b sont des constantes quelconques; P & Q des fonctions homogenes de x & de y , de mêmes, ou de différentes dimensions entr'elles, on pourra toujours ramener cette equation a la formule generale (Art. CCCLXXXII.) en faisant $x = yz$.

DEMONSTRATION. L'equation proposée etant divisée par P devient $ay^n dy + x^n dx + b(x dy - y dx) \times \frac{Q}{P} = 0$. Or, si on substitue dans cette equation yz pour x , $y^n z^n$ pour x^n , & $z dy + y dz$ pour dx , on aura $ay^n dy + z^{n+1} y^n dy + y^{n+1} z^n dz + b(yz dy - yz dy - y^2 dz) \frac{Q}{P} = 0$, ou $(a + z^{n+1}) y^n dy + y^{n+1} \times z^n dz - \frac{bQ}{P} y^2 dz = 0$; &, puisque Q est une fonction homogene de x , & de y , supposé que μ soit la somme des exposans de ces deux variables dans chaque terme de Q ; en substituant yz au lieu de x dans cette même fonction, il est evident qu'on aura $Q = y^\mu Z$, Z etant une fonction de z . De même supposé que λ

soit la somme des exposans de x & de y dans chaque terme de la fonction homogène P ; en substituant yz pour x dans cette fonction, on aura $P = y^\lambda Z'$, Z' étant une fonction de z ; par conséquent $\frac{Q}{P} = \frac{y^\mu Z}{y^\lambda Z'} = y^{\mu-\lambda} Z'' = y^\nu Z''$, en supposant $\mu - \lambda = \nu$, & mettant Z'' fonction de z , pour $\frac{Z}{Z'}$. Donc l'équation proposée fera $(a + x^{n-1})y^n dy + y^{n-1}x^n dz - by^{n-2}Z'' dz = 0$, qui a la forme requisé, puisque $a + x^{n-1}$ est une fonction de x , aussi bien que x^n , & que $-bZ''$.

C. Q. F. D.

EXEMPLE. Soit l'équation proposée $(x^2 dx + ay^2 dy) \times (fx^{-1}y^2 + gy) + b(x dy - y dx) \times (bn^2y^2 + Kyx^3) = 0$. En la comparant avec celle du Theoreme, on trouve $n = 2$, $P = fx^{-1}y^2 + gy$, $Q = bn^2y^2 + Kyx^3$; & en faisant $x = yz$, on a $P = \frac{f + gzy}{z} = y \cdot \frac{f + gzy}{z} = y^\lambda Z'$; par conséquent $\lambda = 1$, & $Z' = \frac{f + gzy}{z}$. De même $Q = bz^2y^4 + Kz^3y^4 = y^4(bz^2 + Kz^3) = y^\mu Z$; par conséquent $\mu = 4$, & $Z = bz^2 + Kz^3$,

$K z^3$, d'où l'on tire $\nu = \mu - \lambda = 3$, & $\frac{Z}{Z'} = \frac{b z^3 + K z^4}{f + g z}$

$= Z''$. Donc l'équation transformée fera $(a + z^3) y^2 dy + y^3 z^2 dz - b y^5 \cdot \frac{b z^3 + K z^4}{f + g z} dz = 0$.

CCCXCV.

THEOREME II. Si dans l'équation $(x^n dx + ay^{\frac{-n-1-c}{c}} dy) P + b(x dy + cy dx) Q = 0$; a, b, c étant des constantes quelconques, & P & Q étant des fonctions de x & de y telles, qu'ayant multiplié l'exposant de l'une de ces deux variables par c , ce qui reste du produit, après en avoir ôté l'exposant de l'autre variable, soit le même dans chaque terme de P , & que cette même condition se trouve aussi dans chaque terme de Q , on pourra toujours réduire cette équation à la formule générale (Art. CCCLXXXII.) en faisant $y x^c = z$.

DEMONSTRATION. Cette équation étant divisée

par P devient $x^n dx + ay^{\frac{-n-1-c}{c}} dy + (x dy + cy dx) \frac{bQ}{P} = 0$. Or puisque $y x^c = z$, on aura $x^c dy + cy x^{c-1} dx = dz$, $x dy + cy dx = \frac{dz}{x^{c-1}} = x^{1-c} dz$, $y = z x^{-c}$,

$$y^{\frac{-n-c-1}{c}} = z^{\frac{-n-c-1}{c}} n^{n+c+1}, \quad dy = x^{-c} dz -$$

$$c z x^{-c-1} dx, \quad y^{\frac{-n-c-1}{c}} dy = x^{n+1} z^{\frac{-n-c-1}{c}} dz -$$

$$c z^{\frac{-n-1}{c}} x^n dx; \quad \& \text{ par substitution } x^n dx + a x^{n+1} \times$$

$$z^{\frac{-n-c-1}{c}} dz - a c z^{\frac{-n-1}{c}} x^n dx + \frac{bQ}{P} x^{1-c} dz = 0, \quad \text{ou}$$

$$\left(1 - a c z^{\frac{-n-1}{c}}\right) x^n dx + a x^{n+1} z^{\frac{-n-c-1}{c}} dz + \frac{bQ}{P} x^{1-c} dz$$

$= 0$. Mais par la condition du Theoreme, chaque ter-

me de P etant supposé $y^\lambda x^\mu$ doit donner $\lambda c - \mu = k$

constante; d'où l'on tire $\mu = \lambda c - k$, & $y^\lambda x^\mu = y^\lambda x^{\lambda c - k}$.

$$= \frac{y^\lambda x^{\lambda c}}{x^k} = \frac{z^\lambda x^{-\lambda c} x^{\lambda c}}{x^k} = \frac{z^\lambda}{x^k}, \quad \text{en mettant pour } y \text{ la}$$

valeur $z x^{-c}$; par consequent chaque terme de P aura

pour numerateur une puissance de z , comme z^λ , &

tous les termes auront pour denominateur commun la

puissance x^k . On prouvera de même que chaque terme

de Q aura pour numerateur une puissance de z , com-

me z^λ , & que tous les termes auront pour denomina-

teur commun la puissance x^b . Donc le quotient $\frac{Q}{P}$ aura

la forme $\frac{x^{b-k}}{Z}$, Z étant une fonction de x & de constantes; $\frac{bQ}{P x^{b-k}}$ fera aussi une fonction de x , & de constantes, que nous désignerons par Z' . Donc l'équation trans-

formée sera $\left(1 - acx^{\frac{-n-1}{c}}\right) x^n dx + ax^{n+1} x^{\frac{-n-c-1}{c}} dx + Z' x^{1+b-c-k} dx = 0$, qui a la forme requise, puis-

que $1 - acx^{\frac{-n-1}{c}}$, & $ax^{\frac{-n-c-1}{c}}$ sont des fonctions de x , & que les exposans de x sont tels qu'ils doivent être. C. Q. F. D.

CCCXCVI.

COROLLAIRE. Si on suppose $c = \frac{c}{f}$ dans l'équation

du Theoreme, elle deviendra $\left(x^n dx + ay^{\frac{-fn-f-c}{c}} dy\right) P + b(x dy + \frac{c}{f} y dx) Q = 0$, ou $\left(x^n dx + ay^{\frac{-fn-f-c}{c}}\right) P + g(fx dy + cy dx) Q = 0$, en supposant $g = \frac{b}{f}$. Donc

en faisant $y^{\frac{c}{f}} = z$, cette equation pourra toujours se reduire a la formule generale (Art. CCCLXXXII.), lorsque P , & Q auront les conditions prescrites dans le Theoreme, en ecrivant $\frac{c}{f}$ au lieu de c .

EXEMPLE. Soit l'équation proposée $(x^2 dx + ay^8 dy)y - (-3x dy + y dx)ax = 0$. En la comparant avec l'équation $(x^n dx + ay^{\frac{-fn-f-e}{e}})P + g(fx dy + cy dx)Q = 0$, on trouve $n = 2$, $g = -1$, $f = -3$, $e = 1$, $\frac{-fn-f-e}{e} = +8$, $P = y$, $Q = ax$, & les deux fonctions P & Q , c'est à dire yx^0 , & ay^0x ont les conditions requises. Donc en faisant $yx^{-\frac{1}{3}} = z$, on réduira la proposée à la formule (Art. CCCLXXXII.). Et en effet après avoir fait les substitutions convenables pour y & dy , on trouve que cette équation devient $(1 + \frac{a}{3}z^9)x^2 dx + ax^3 z^8 dz + \frac{3ax^2 dz}{z} = 0$, qui a la forme requise.

CCCXCVII.

THEOREME III. Si dans l'équation $ax^n dx + by^m dy + (x dy - y dx)(\frac{Q}{P} + \frac{S}{R}) = 0$, dans laquelle Q & P font des fonctions homogenes de x & de y , de mêmes, ou de différentes dimensions entr'elles, ou dont la différence des dimensions est zero, ou un nom-

bre quelconque k , & S , R sont aussi des fonctions homogenes de x & de y , telles que l'excès des dimensions de S sur celles de R soit $n-1$, on pourra toujours reduire cette equation a la formule (Art. CCCLXXXII.), en faisant $x=yz$.

DEMONSTRATION. Puisque $x=yz$, on aura $x^n=y^n z^n$, $dx=zd y+ydz$, $x^n dx=z^{n+1} y^n dy+y^{n+1} z^n dz$, $x dy-y dx=zydy-xydy-y^2 dz=-y^2 dz$; & par substitution, l'equation proposée deviendra $ax^{n+1} y^n dy+ay^{n+1} z^n dz+by^n dy-y^2 \times dz\left(\frac{Q}{P}+\frac{S}{R}\right)=0$, ou $(ax^{n+1}+b)y^n dy+ay^{n+1} \times z^n dz-y^2 dz\left(\frac{Q}{P}+\frac{S}{R}\right)=0$. Or Q , P , & S , R étant des fonctions homogenes de x & de y , en substituant zy au lieu de x dans ces fonctions, on aura (par les conditions du Theoreme) $\frac{Q}{P}=y^k Z$, Z étant une fonction de z ; & de même $\frac{S}{R}=y^{n-1} Z'$, Z' étant encore une fonction de z ; par conséquent $\frac{Q}{P}+\frac{S}{R}=y^k Z+y^{n-1} Z'$; & $-y^2 dz\left(\frac{Q}{P}+\frac{S}{R}\right)=-y^{k+2} Z dz-y^{n+1} Z' dz$: donc l'equation transformée

fera $(ax^{n+1} + b)y^n dy + (ax^n - Z')y^{n+1} dz - y^{k+2} Z dz = 0$, qui a la forme requiſé. C. Q. F. D.

EXEMPLE. Soit l'equation propoſée $ax^7 dx + by^7 dy + (x dy - y dx) \cdot X \left(n^2 + y^2 + \frac{x^8 y + y^8 x}{x^3 + y^3} \right) = 0$. En la comparant avec celle du Theoreme, on trouve $n=7$, $\frac{Q}{P} = n^2 + y^2$, $\frac{S}{R} = \frac{x^8 y + y^8 x}{x^3 + y^3}$, &, ſuivant les conditions requiſés, $k=2$, & $9-3=6=n-1$. En ſubſtituant xy pour x , & $x dy + y dz$ pour dx dans la propoſée, on la change en $ax^8 y^7 dy + ay^8 x^7 dz + by^7 dy + (xy dy - xy dy - y^2 dz) \cdot X \left(x^2 y^2 + y^2 + \frac{x^8 y^9 + y^9 x}{x^3 y^3 + y^3} \right) = 0$, ou bien $(ax^8 + b)y^7 dy + y^8 \left[ax^7 - \left(\frac{x^8 + x}{x^3 + 1} \right) \right] dz - y^4 (x^2 + 1) dz = 0$, equation, qui a la forme qu'on demande, & qu'on peut rendre plus ſimple, en la diviſant par y^4 , qui ſe trouve dans tous les termes.

CCCXCVIII.

THEOREME IV. Si dans l'equation $ax^m dx + by^n dy + (x dy + cy dx) \left(\frac{P}{Q} + \frac{S}{R} \right) = 0$, P, Q, R, S ſont des fonctions de x , & de y , telles qu'en ſuppoſant

$x y^{\frac{1}{c}} = z$, on ait $\frac{Q}{P} = y^k Z$, & $\frac{S}{R} = y^f Z'$, Z & Z' étant des fonctions de z , cette équation pourra se réduire à la formule de l'Article CCCLXXXII., toutes les fois qu'on aura $n = -\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1$, & k ou $f = -\frac{m}{c} - 1$.

DEMONSTRATION. L'équation proposée est

$$a x^m dx + b y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1} dy + (x dy + c y dx) \times (y^k Z + y^f Z') = 0, \text{ en faisant } n = -\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1,$$

& supposant $x y^{\frac{1}{c}} = z$. Or cette supposition donne

$$x = z y^{-\frac{1}{c}}, \quad x^m = z^m y^{-\frac{m}{c}}, \quad dx = y^{-\frac{1}{c}} dz - \frac{1}{c} \times z y^{-\frac{1}{c} - 1} dy, \quad y^{\frac{1}{c}} dx + \frac{1}{c} x y^{\frac{1}{c} - 1} dy = dz, \text{ \& } x dy +$$

$$c y dx = c y^{-\frac{1}{c} + 1} dz; \text{ donc, par substitution, la proposée}$$

$$\text{devient } a y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c}} z^m dz - \frac{a}{c} z^{m+1} y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1} dy$$

$$+ b y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1} dy + c y^{k - \frac{1}{c} + 1} Z dz + c y^{f - \frac{1}{c} + 1} \times$$

$$Z' dz = 0. \text{ Cette équation, en supposant } k = -\frac{m}{c}$$

$$- 1, \text{ devient } y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c}} (a z^m + c Z) dz + y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1} \times$$

$$(b - \frac{a}{c} z^{m+1}) dy + cy^{f - \frac{1}{c} + 1} Z' dz = 0; \text{ \& en sup-}$$

posant $f = -\frac{m}{c} - 1$, & laissant k , elle devient

$$y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c}} (az^m + cZ') dz + y^{-\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1} (b - \frac{a}{c} z^{m+1}) dy$$

+ $cy^{k - \frac{1}{c} + 1} Z dz = 0$. Deux equations, qui sont dans le cas de la formule de l'Article CCCLXXXII. C. Q. F. D.

EXEMPLE. Soit l'equation proposee $ax^6 dx +$

$$by^{\frac{5}{2}} dy + (x dy - y dx) \left\{ \frac{x^2 y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{7}{2}}}{x^3 + xy} + \frac{x^3 y}{x + y^2} \right\} = 0.$$

En comparant cette equation avec celle du Theoreme, on trouve qu'elle a les conditions requises. Car on a

$$m = 6, c = -2, n = \frac{5}{2} = -\frac{m}{c} - \frac{1}{c} - 1 = 3 + \frac{1}{2}$$

$$- 1, xy^{\frac{1}{2}} = xy^{-\frac{1}{2}} = z, x = zy^{\frac{1}{2}}, \frac{x^2 y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{7}{2}}}{x^3 + xy} =$$

$$\frac{z^2 y^{\frac{7}{2}} + y^{\frac{7}{2}}}{z^3 + zy^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^{\frac{7}{2}}(z^2 + 1)}{z^3 + z}; \text{ par consequent } k = 2 = -$$

$$\frac{m}{c} - 1 = 3 - 1, \text{ \& } Z = \frac{z^2 + 1}{z^3 + z}; \frac{x^3 y}{x + y^2} = \frac{z^3 y^{\frac{3}{2} + 1}}{zy^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{y^2 z^3}{z+1} = y^f Z'; \text{ par conséquent } f=2, \text{ \& } Z' = \frac{z^3}{z+1}.$$

En substituant toutes ces valeurs dans la formule du

Theoreme $y^{-\frac{m}{c}-\frac{1}{c}} (az^m + cZ) dz + y^{-\frac{m}{c}-\frac{1}{c}-1} \times$

$$(b - \frac{a}{c} z^{m+1}) dy + cy^{f-\frac{1}{c}+1} Z' dz = 0, \text{ on la chan-}$$

$$\text{ge en } y^{\frac{2}{c}} \left[az^6 - \left(\frac{2z^2+2}{z^3+z} \right) \right] dz + y^{\frac{5}{c}} \left(b + \frac{1}{2} az^7 \right) dy$$

$$- \frac{2y^{\frac{2}{c}} z^3 dz}{z+1} = 0, \text{ equation qui est dans le cas de la}$$

formule de l'Article CCCLXXXII., & qu'on peut rendre

plus simple en la divisant par $y^{\frac{5}{c}}$, qui se trouve dans tous les termes.

CCCXCIX.

THEOREME V. Si dans l'equation $dx - \frac{nx dy}{y} =$

$$\frac{y^{t+n-1} x^r Z dy + y^t x^r Z' dx}{y^m x^p Z' + y^q x^b Z''}, \text{ on fait } \frac{x}{y^s} = z, \text{ \& que } Z, Z',$$

Z'', Z''' soient des fonctions de z & de constantes, cette equation se reduira a la formule de l'Article CCCLXXXII., toutes les fois qu'on aura ces deux egalites $q=t$; & $b=r$, ou ces deux cy $m=t$, & $p=r$.

DEMONSTRATION. Puisque $xy^{-n} = z$, on aura

Y

$$x = zy^n; y^{-n} dx - nxy^{-n-1} dy = dz; dx = \frac{nx dy}{y} =$$

$y^n dz; dx = y^n dz + nxy^{n-1} dy; &$ en substituant pour x & pour dx leurs valeurs en y & en z dans l'equation proposee, elle deviendra $y^n dz =$

$$\frac{y^{s+n-1+n} z^r Z dy + y^{s+n} z^r Z' (y^n dz + nxy^{n-1} dy)}{y^{m+p} z^p Z' + y^{q+bn} z^b Z''}, & \text{ par}$$

reduction $y^{m+p} z^p Z'' dz + y^{q+bn} z^b Z'' dz =$
 $y^{s+n-1+n} z^r Z dy + ny^{s+n} z^{r+1} Z' dy +$
 $y^{s+n} z^r Z' dz, \text{ ou bien } y^{s+n} (z^r Z +$
 $nz^{r+1} Z') dy + y^{s+n} z^r Z' dz - y^{m+p} z^p Z'' dz$
 $- y^{q+bn} z^b Z'' dz = 0.$ Or si on a ces deux egalites

$q = r, & b = r,$ on aura aussi $q + bn + n = r + nr + n,$ & le terme $y^{q+bn} z^b Z' dz = y^{s+n} \times z^r Z'' dz;$ par consequent

$y^{s+n} z^r Z' dz - y^{q+bn} \times z^b Z'' dz = y^{s+n} (z^r Z' dz - z^r Z'' dz);$ & l'equation deviendra $y^{s+n} (z^r Z + nz^{r+1} Z') dy + y^{s+n} (z^r Z' - z^r Z'') dz - y^{m+p} z^p Z'' dz = 0,$

qui a les conditions qu'exige la formule de l'Art. CCCLXXXII. Puisque la difference des exposans de y dans les deux premiers termes est l'unité, & que les quantites qui se

trouvent dans les parenthèses sont toutes des fonctions de z .

On trouve de même en supposant les deux autres égalités $m=r$, & $p=r$, que le terme $y^{m+p+n} \times z^p Z'' dz = y^{r+r+n} z^r Z'' dz$; par conséquent $y^{r+r+n} \times z^r Z' dz - y^{m+p+n} z^p Z'' dz = y^{r+r+n} (z^r Z' - z^r \times Z'') dz$, d'où l'on tire la même conclusion.

EXEMPLE I. Soit proposée l'équation $dx - \frac{ndy}{y} = \frac{Fdy}{F'+y^k F''}$, dans laquelle F, F', F'' sont des fonctions de

$\frac{x}{y}$ & de constantes. En la comparant avec l'équation générale du Theoreme, on trouve d'abord $-\frac{nx}{y} = -$

$\frac{x}{y}$, d'où l'on tire $n=1$, & $\frac{x}{y^n}$ ou $z = \frac{x}{y}$; par conséquent F, F', F'' sont des fonctions de z & de constantes. On trouve ensuite les quatre équations suivantes

$y^{r+n-1} z^r Z = F$; $y^r z^r Z' = 0$; $y^m z^p Z'' = F'$; $y^q z^b Z''' = y^k F''$; desquelles on tire $r=0=r$, & $Z = F$; $Z' = 0$; $m=0=p$; & $Z' = F'$; $q=k$; $b=0$; & $Z'' = F''$, ce qui donne les deux égalités $m=r$, & $p=r$; en substituant les valeurs qu'on vient de trouver dans la formule du Theoreme, on voit qu'elle devient $Fdy -$

$yF dx - y^{k+1} F' dx = 0$, equation, qui a les conditions requises.

EXEMPLE II. Soit proposée l'équation $dx + \frac{x dy}{y} = \frac{ay^3 x^3 dy + by^6 x^4 dx}{c + fy^5 x^3}$. En la comparant avec l'équation

du Theoreme, on trouve d'abord $n = -1$; $\frac{x}{y^n} = z =$

$\frac{x}{y^{-1}}$, & $x = zy^{-1}$. En substituant cette valeur de x

dans la fraction $\frac{ay^3 x^3 dy + by^6 x^4 dx}{c + fy^5 x^3}$, on la change en

$\frac{az^3 dy + by^3 z^4 dx}{c + fy^2 z^3}$, & en continuant la comparaison, on

trouve les quatre equations suivantes $y^{t+n-1} x^r Z =$

ax^3 ; $y^t x^r Z' = by^2 z^4$; $y^m x^p Z'' = c$; & $y^q x^b Z''' = fy^2 z^3$,

desquelles on tire $t+n-1 = t-2 = 0$; $t = 2$; $r = 0$,

& $Z = ax^3$; $Z' = bz^4$; $m = 0$, $p = 0$, & $Z'' = c$, $q = 2$,

$b = 0$, & $Z''' = fz^3$; ce qui donne les deux égalités $q = r$,

& $b = r$. Ces valeurs etant substituées dans la for-

mule generale du Theoreme, elle devient $y^0 (ax^3 -$

$bx^5) dy + y^1 (bz^4 - fz^3) dx - y^{-1} c dx = 0$, ou $y (ax^3$

$- bx^5) + y^2 (bz^4 - fz^3) dx - c dx = 0$, equation qui

a les conditions que demande la formule de l'Article CCCLXXXII.

CCCC.

Avant de passer a d'autres methodes, qui ont rapport aux Chapitres precedens, nous joindrons icy un Probleme, qui peut être d'un grand usage dans les equations différentielles que nous venons de traiter.

PROBLEME I. Soit l'équation différentielle $dy + yXdz + y^2X'dz + X''dz = 0$, X , X' , X'' designant des fonctions de z , & étant données deux valeurs de y en fonctions de z , qui satisfassent a l'équation proposée; c'est a dire, qui la rendent par les substitutions $= 0$, résoudre généralement cette equation, & trouver le facteur qui la rende intégrable.

SOLUTION. Supposons que P , Q soient les fonctions de z , qui satisfassent a l'équation, on aura par les conditions du Probleme $dP + PXdz + P^2X'dz + X''dz = 0$, & $dQ + QXdz + Q^2X'dz + X''dz = 0$.

Soit fait $\frac{y-P}{y-Q} = z$, ou $y = \frac{P-Qz}{1-z}$, on aura en différentiant $dy = \frac{dP - z dP + P dz - Q dz - z dQ + z^2 dQ}{(1-z)^2}$, & substituant les valeurs de y & dy dans la différentielle proposée, & multipliant par $(1-z)^2$, nous aurons

$$\begin{aligned} & (1-z)dP - z(1-z)dQ + (P-Q)dz + X(1-z) \\ & z)Pd\pi - X(1-z)Qzd\pi + X'P^2d\pi - 2X'PQzd\pi \\ & + X'Q^2zzd\pi + X''(1-z)^2d\pi = 0. \end{aligned}$$

De plus substituant dans cette equation a la place de dP , dQ leurs valeurs que donnent les deux equations différentielles precedentes, on aura en ordonnant les termes

$$\begin{aligned} & -X(1-z)Pd\pi - X'(1-z)P^2d\pi - X''(1-z)d\pi + (P-Q)dz = \\ & + Xz(1-z)Qd\pi + X'z(1-z)Q^2d\pi + X''z(1-z)d\pi \\ & + X(1-z)Pd\pi + X'P^2d\pi \qquad + X''(1-z)^2d\pi \\ & - Xz(1-z)Qd\pi - 2X'PQzd\pi \\ & \qquad + X'Q^2z^2d\pi \end{aligned}$$

Enfin effaçant les termes qui se detruisent, & ordonnant l'equation nous aurons $X'zP^2d\pi + X'zQ^2d\pi - 2X'PQzd\pi + (P-Q)dz = 0$, ou $X'(P-Q)d\pi + \frac{dz}{z} = 0$, & $\frac{dz}{z} = -X'(P-Q)d\pi$, d'où l'on aura en intégrant $z = e^{-\int X'(P-Q)d\pi}$, & par consequent on aura generalement l'intégrale $e^{\int X'(P-Q)d\pi} + \frac{y-P}{y-Q} = c$. constante, en substituant $\frac{y-P}{y-Q}$ a la place de z .

Maintenant pour trouver le facteur cherché, il suffit d'observer que l'équation proposée a été multipliée, après les substitutions, par $(1-z)^2$, & divisée par $z(P-Q)$. Donc, en multipliant tout d'un coup par $\frac{(1-z)^2}{(P-Q)z}$, l'équation sera intégrable, & le facteur sera

$$\frac{(1-z)^2}{(P-Q)z}, \text{ ou } \frac{P-Q}{(y-Q)(y-P)}, \text{ a cause de } z = \frac{y-P}{y-Q}.$$

On voit par ce Probleme qu'ayant des solutions particulieres des equations différentielles de la forme proposée, on peut en trouver aisément la solution generale, & les facteurs qui les rendent intégrables. L'équation de Riccati est un Cas de cette forme.

CCCCI.

Si, au lieu de chercher le facteur, on supposoit au contraire qu'il fût donné, tel que $(y+P)^n$, & qu'on voulût déterminer les fonctions X, X' d'une equation différentielle telle que $y dy + y X dx + X' dy = 0$, enforte que ce facteur rendît l'équation intégrable. Il faudroit se servir de la methode du Chapitre I.

(Art. CCCXXXII.), c'est a dire, qu'on feroit $\frac{1}{dx} \cdot X$

$$d. \{y(y+P)^n\} = \frac{1}{dy} \cdot d. (Xy + X') \times (y+P)^n;$$

$d.$ designant la différentielle de la quantité renfermée

dans les parenthèses, & en supposant P une fonction de x seulement. Si on différencie par le Theoreme cité, en considerant y comme constante dans le premier membre & x dans le second, on aura la différentielle

$$\text{suivante } ny(y+P)^{n-1} \frac{dP}{dx} = X(y+P)^n + n(Xy + X')(y+P)^{n-1}, \text{ \& en divisant par } (y+P)^{n-1},$$

nous aurons $\frac{nydP}{dx} = (n+1)Xy + X'P + nX'$; d'où

$$\text{l'on tire } X = \frac{nydP}{(n+1)dx}, \text{ \& } X' = -\frac{XP}{n} = -\frac{PdP}{(n+1)dx};$$

\& en substituant on aura l'équation $ydy + \frac{nydP}{n+1} -$

$$\frac{PdP}{n+1} = 0, \text{ laquelle, etant multipliée par } (y+P)^n,$$

fera intégrable. Or cette equation etant homogene fera aussi intégrable en la divisant par $(n+1)Xy + nYP - PP = (y+P)\{(n+1)y - P\}$ (Art. CCCLXXIV.). Donc, puisqu'on a les deux facteurs

$$(y+P)^n, \text{ \& } \frac{1}{(y+P)\{(n+1)y - P\}}, \text{ en divisant l'un}$$

par l'autre, \& égalant le quotient qui en resulte a une constante arbitraire, on aura l'intégrale complete.

Ainsi l'intégrale de la différentielle $ydy + \frac{nydP}{n+1} -$

$$\frac{PdP}{n+1} = 0 \text{ sera generalement } (y+P)^{n+1} \{(n+1)Xy - P\} = C \text{ constante.}$$

CCCCII.

Si on vouloit prendre un facteur plus compliqué, tel que $(yy + Py + Q)^n$, on trouveroit par les mêmes methodes les fonctions X, X', enforte que l'équation différentielle précédente devient intégrable. On aura (Art. CCCXXXII.) $\frac{1}{dx} d. \{y (yy + Py + Q)^n\} = \frac{1}{dy} . d \{Xy + X'\} X (yy + Py + Q)^n$. Mais puisque X, X', P, Q sont des fonctions de x, on aura en différentiant comme cy-dessus $ny (yy + Py + Q)^{n-1} X \left(y \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \right) = X (yy + Py + Q)^n + n (Xy + X') X (2y + P) X (yy + Py + Q)^{n-1}$, &, en divisant par $(yy + Py + Q)^{n-1}$, nous aurons $nyy \frac{dP}{dx} + ny \frac{dQ}{dx} = (2n + 1) Xyy + (n + 1) XPy + XQ$, & en comparant les termes homologues, on a les equations 1.° $(2n + 1) Xyy = ndP$; 2.° $(n + 1) XPd x + 2n X'd x = ndQ$; 3.° $XQ + nX'P = 0$. La première de ces equations donne $X = \frac{ndP}{(2n + 1) dx}$, & la dernière $X' = -\frac{XQ}{nP}$, ou $X' = -\frac{QdP}{(2n + 1)Pd x}$; lesquelles valeurs étant substi-

tuées dans la seconde equation, on aura $n dQ =$

$$\frac{n(n+1)PdP}{2n+1} - \frac{2nQdP}{(2n+1)P}, \text{ ou bien } (2n+1)PdQ +$$

$$2QdP = (n+1)P^2 dP. \text{ Enfin multipliant par } P^{\frac{-2n+1}{2n+1}},$$

$$\& \text{ en intégrant, on trouvera } (2n+1)P^{\frac{1}{2n+1}} Q = C.$$

$$\text{const. } + (n+1)S.P^{\frac{2n+3}{2n+1}} dP, \text{ ou } (2n+1)P^{\frac{1}{2n+1}} Q =$$

$$C.\text{const. } + \frac{2n+1}{4} P^{\frac{4n+4}{2n+1}}; \text{ ce qui donne } Q =$$

$$\frac{C}{(2n+1)P^{\frac{1}{2n+1}}} + \frac{1}{4} P^{\frac{4n+2}{2n+1}} = \alpha P^{\frac{-1}{2n+1}} + \frac{1}{4} P^2, \text{ en sup-}$$

$$\text{posant } \alpha = \frac{C}{2n+1}. \text{ Donc, puisque } Xdx = \frac{ndP}{2n+1}, \& X'dx$$

$$= -\frac{\frac{-2n-3}{\alpha P^{\frac{2n+1}{2n+1}}} dP}{2n+1} - \frac{PdP}{4(2n+1)}, \text{ l'equation différentielle}$$

$$ydy + \frac{nydP}{2n+1} - \frac{PdP}{4(2n+1)} - \frac{\alpha}{2n+1} P^{\frac{-2n-3}{2n+1}} dP = 0 \text{ de-}$$

$$\text{viendra intégrable, si on la multiplie par } \left(yy + Py + \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} P^2 + \alpha P^{\frac{-1}{2n+1}} \right)^n.$$

Si on supposoit $n = -1$, ou $\frac{-2n-3}{2n+1} = 1$, l'équation précédente deviendroit homogène; & en faisant $\frac{-2n-3}{2n+1} = 0$, ou $n = -\frac{3}{2}$, le terme $P^{\frac{-2n-3}{2n+1}}$ se réduit à 1, d'où l'on voit que ces deux Cas sont très-faciles. Mais, si on ne suppose pas $\frac{-2n-3}{2n+1} = 0$, ou $= 1$, il y aura plus de difficulté. Soit fait $\frac{-2n-3}{2n+1} = m$, & par conséquent $2n = \frac{-m-3}{m+1}$ l'équation différentielle sera $y dy + \frac{1}{4}(m+3)y dP + \frac{1}{8}(m+1)P dy + \frac{1}{2}\alpha(m+1)P^m dP = 0$ & elle deviendra intégrable, en la multipliant par le facteur $\left(yy + Py + \frac{1}{4}P^2 + \alpha P^{m+1} \right)^{\frac{-m-3}{2(m+1)}}$, comme on voit en substituant dans le facteur déjà trouvé la valeur de n en m .

Si on prenoit pour P des fonctions quelconques de x , on voit que ces équations pourroient devenir si compliquées, qu'on les traiteroit difficilement par d'autres méthodes que par celle-cy, qui en donne la résolution assez aisément.

CCCCIII.

Nous allons exposer dans les Problemes suivans d'autres methodes pour intégrer par le moyen de l'Article CCCLXXXII. plusieurs equations différentielles a deux variables x & y , qui renferment des fonctions quelconques du rapport $\frac{dx}{dy}$, & qu'il seroit souvent difficile d'intégrer autrement. Nous supposons toujours dans ces Problemes $z = \frac{dx}{dy}$, ou $z dy = dx$.

PROBLEME II. Intégrer l'equation $x = yZ + Z'$, dans laquelle Z & Z' sont des fonctions quelconques de z , ou de $\frac{dx}{dy}$.

SOLUTION. En différentiant l'equation proposée, on trouve $dx = Z dy + y dZ + dZ' = z dy$, d'où l'on tire $Z dy - z dy + y dZ + dZ' = 0$, & $dy + \frac{y dZ}{Z - z} + \frac{dZ'}{Z - z} = 0$. Or cette equation est dans le cas de la formule de l'Art. CCCLXXXII. Car puisque Z , Z' , & $Z - z$ sont des fonctions de z , il est evident qu'on aura $dZ = F dz$, & $dZ' = F' dz$, F & F' étant aussi des fonctions de z , & par conséquent $\frac{dZ}{Z - z} = V dz$, & $\frac{dZ'}{Z - z} = V' dz$, V , & V' étant encore des fonctions de

z : donc l'équation $dy + \frac{y dz}{z-z} + \frac{dz}{z-z} = 0$ se réduit à

cette forme $y^0 dy + y^1 V dz + y^0 V' dz = 0$, qui a les conditions requises dans l'Article CCCLXXXII. En prenant e pour le nombre dont le logarithme est l'unité, & C pour une constante quelconque, on trouve aisément par cet Article l'équation $y e^{S \cdot V dz} + S \cdot (V' dz \times$

$e^{S \cdot V dz}) = C$, & $y = \frac{C - S \cdot (V' dz \times e^{S \cdot V dz})}{S \cdot V dz}$. On aura donc

la valeur de z en y ; & substituant cette valeur dans l'équation $dx = z dy$, on trouvera aussi par les méthodes de la première Partie $x = S \cdot z dy$; par conséquent on aura la relation entre y , & x . C. Q. F. T.

CCCCIV.

PROBLEME III. Trouver les Cas d'intégrabilité de l'équation $x^m y^n z^r = F$, dans laquelle on suppose $z = \frac{dx}{dy}$, & F une fonction de la quantité $x^2 y^s z^t$.

SOLUTION. En faisant $x^2 y^s z^t = u$, F fera une

fonction de u , & on aura $x = u^{\frac{1}{2}} y^{\frac{s}{2}} z^{\frac{t}{2}}$; $x^m =$

$u^{\frac{m}{2}} y^{\frac{ms}{2}} z^{\frac{mt}{2}}$; $y^n z^r = \frac{F}{x^m} = F u^{-\frac{m}{2}} y^{\frac{ms}{2}} z^{\frac{mt}{2}}$; $y^n =$

$$F u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} x^{\frac{mt-rq}{q}} ; y^{\frac{nq-ms}{q}} = F u^{-\frac{m}{q}} z^{\frac{mt-rq}{q}} ; y = F^{\frac{q}{nq-ms}} u^{\frac{-m}{nq-ms}} z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}} ; \& y^{-\frac{s}{q}} = F^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{ms}{nqq-mqs}} \times$$

$$z^{\frac{-mts+rqs}{nqq-mqs}} ; \text{ en mettant cette valeur de } y^{-\frac{s}{q}} \text{ dans}$$

$$\text{l'équation } x = u^{\frac{x}{q}} z^{\frac{t}{q}} y^{-\frac{s}{q}}, \text{ on aura } x = u^{\frac{x}{q}} z^{\frac{t}{q}} \times$$

$$\left(F^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{ms}{nqq-mqs}} z^{\frac{-mts+rqs}{nqq-mqs}} \right) = F^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{n}{nq-ms}} z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}.$$

$$\text{Supposant, pour abréger le calcul, } V = F^{\frac{-s}{nq-ms}} \times$$

$$u^{\frac{n}{nq-ms}}, \& V' = F^{\frac{q}{nq-ms}} u^{\frac{-m}{nq-ms}}, \text{ on aura } x = Vz^{\frac{rs-nt}{nq-ms}},$$

$$\& y = V' z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}}, V, V' \text{ étant des fonctions de } u.$$

$$\text{On trouvera en différentiant } dx = z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV +$$

$$\left(\frac{rs-nt}{nq-ms} \right) V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz, \& dy = z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}} dV' +$$

$$\frac{mt-rq}{nq-ms} V' z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}-1} dz, \& \text{l'équation } dx = x dy \text{ devien}$$

$$\text{dra par substitution } z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV + \frac{rs-nt}{nq-ms} V z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}-1} dz$$

$$= z^{\frac{mt-rq+nq-ms}{nq-ms}} dV' + \frac{mt-rq}{nq-ms} z^{\frac{mt-rq}{nq-ms}} V' dz. \text{ Nous}$$

designerons cette equation par (A), & nous chercherons les Cas dans lesquels on peut l'intégrer, ou, ce qui revient au même, separer les deux indeterminées u & z ; car alors on aura la valeur de z par u , ou celle de u par z , & en substituant une de ces valeurs dans les deux equations, que nous avons trouvées cy-dessus entre y , & les variables u & z , & entre x , & ces mêmes variables, on en tirera l'equation entre y & x .

CAS I. Lorsque $tm - rq = 0$. Car alors l'equation

$$(A) \text{ devient } z^{\frac{rs-nr}{nq-ms}} dV + \frac{rs-nr}{nq-ms} V z^{\frac{rs-nr}{nq-ms}-1} dz =$$

$z dV'$, ou $(a+1)Vz^a dz + z^{a+1} dV - z dV' = 0$, en

supposant $\frac{rs-nr}{nq-ms} = a+1$. Or cette equation a les con-

ditions requises dans l'Article CCCLXXXII., puisque V , & V' etant des fonctions de u , on aura $dV = V'' du$, & $dV' = V''' du$, V'' & V''' etant encore des fonctions de u .

Mais il n'est pas necessaire dans ce premier cas de chercher l'intégrale de l'equation (A). Car puisque tm

$-rq = 0$, ou $q = \frac{tm}{r}$, si on fait $\frac{t}{r} = p$, on aura $t =$

pr ; $q = pm$; $x^q y^s z^t = y^s x^{pm} z^{pr}$, & l'equation proposée

fera $y^n x^m z^r = \phi(y^s x^{pm} z^{pr})$, en mettant $\phi(y^s x^{pm} z^{pr})$

pour exprimer la fonction de $x^q y^s z^t$, que nous avons

appellée F . Donc, en faisant $x^m z^r = k$, on aura $x^{p^m} \times z^{p^r} = k^p$, & $y^n k = \varphi(y^s k^p)$. Or il suit évidemment de cette dernière equation entre k & y , & leurs puissances ou fonctions, que k est une fonction de y , que nous désignerons par V ; on aura donc $x^m z^r = V$, & $x^{\frac{m}{r}} z = V^{\frac{1}{r}}$, ou à cause de $z = \frac{dx}{dy}$, $x^{\frac{m}{r}} \cdot \frac{dx}{dy} = V^{\frac{1}{r}}$, & $x^{\frac{m}{r}} dx = V^{\frac{1}{r}} dy$, equation dans laquelle les variables x & y sont séparées, & qu'on peut intégrer facilement.

CAS II. Lorsque $rs - nr = 0$. Car alors l'equation

$$(A) \text{ devient } dV = z^{\frac{m t - r q}{n s - m s} + 1} dV' + \frac{m t - r q}{n q - m s} V' z^{\frac{m t - r q}{n q - m s}} dz,$$

qui a les conditions de l'Article CCCLXXXII.

On trouvera aussi dans ce Cas, comme dans le précédent l'intégrale de l'equation proposée sans chercher celle de l'equation (A). Car puisque $rs - nr = 0$ ou $\frac{s}{r} = \frac{r}{n}$, en faisant $\frac{s}{r} = \frac{r}{n} = p$, on aura $s = pr$, & l'equation proposée $x^m y^n z^r = \varphi(x^q y^s z^t)$ deviendra $x^m y^n z^r = \varphi(x^q y^{p^n} z^{p^r})$; donc en faisant $y^n z^r = k$, on aura $y^{p^n} z^{p^r} = k^p$, & $x^m k = \varphi(x^q k^p)$; par conséquent k sera une fonction de x , que nous désignerons

rons par X ; donc $y^n z^r = X$; $y^{\frac{n}{r}} z = X^{\frac{1}{r}}$; ou $y^{\frac{n}{r}} \cdot \frac{dx}{dy} = X^{\frac{1}{r}}$, & $\frac{dx}{X^{\frac{1}{r}}} = \frac{dy}{y^{\frac{n}{r}}}$, equation separée & facilement intégrable.

CAS III. Lorsque $nq - ms + tm - rq = rs - nt$.

Car alors on a $\frac{tm - rq}{nq - ms} = \frac{nq - ms + tm - rq}{nq - ms} - 1 =$

$\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1$; par conséquent l'équation (A) devient

$$z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} dV + \frac{rs - nt}{nq - ms} V z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz = z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} dV' +$$

$$\left(\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1 \right) V' z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz, \text{ ou } z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} dV =$$

$$z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}} dV' = \left(\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1 \right) V' z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz =$$

$$\left(\frac{rs - nt}{nq - ms} \right) V' z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz, \text{ d'où l'on tire}$$

$$\frac{dV - dV'}{\left(\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1 \right) V' - \left(\frac{rs - nt}{nq - ms} \right) V} = \frac{z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - 1} dz}{z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}}}, \text{ equation}$$

dans laquelle les indéterminées sont séparées.

Il reste un autre Cas, lorsque $nq - ms = 0$, alors

l'équation $y^{\frac{nq - ms}{q}} = F u^{\frac{m}{q}} z^{\frac{m - r}{q}}$, a cause de $\frac{nq - ms}{q}$

$= 0$, devient $F u^{-2} z^{-2} = 1$, ou $z^{-2} = F u^{-2}$ fonction de u , & l'équation proposée rentre dans le cas des équations homogènes, toutes les fois que $n = -m$, & $q = -s$.

CCCCV.

PROBLEME IV. Trouver les cas d'intégrabilité de l'équation $x = y^k z^r \phi u + \phi' u$; ϕu & $\phi' u$ étant deux fonctions de la même quantité $u = y^p z^n$, & $z = \frac{dx}{dy}$.

SOLUTION. 1.° Puisque $y^p z^n = u$, on aura $z^n = u y^{-p}$; $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}$; $z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}}$; $y^k z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{k - \frac{pr}{n}}$, & l'équation proposée sera $x = u^{\frac{r}{n}} y^{k - \frac{pr}{n}} \phi u + \phi' u = V y^{k - \frac{pr}{n}} + V'$, en supposant $V = u^{\frac{r}{n}} \phi u$, & $V' = \phi' u$; on tire de là $dx = y^{k - \frac{pr}{n}} dV + (k - \frac{pr}{n}) \times V y^{k - \frac{pr}{n} - 1} dy + dV'$. Donc, à cause de l'équation

$\frac{dx}{dy} = z$, ou $dx = z dy$, on aura $y^{k-\frac{pr}{n}} dV + (k-\frac{pr}{n}) \times$

$V y^{k-\frac{pr}{n}-1} dy + dV = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$, ou $(k-\frac{pr}{n}) \times$

$V y^{k-\frac{pr}{n}-1} dy - u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy + y^{k-\frac{pr}{n}} dV + dV = 0$.

Or cette equation, en supposant $k-\frac{pr}{n}-1 = -\frac{p}{n}$,

est dans le cas de la formule de l'Article CCCLXXXII.,

puisque'elle devient $\left[(k-\frac{pr}{n})V - u^{\frac{1}{n}} \right] y^{-\frac{p}{n}} dy +$

$y^{-\frac{p}{n}+1} dV + dV = 0$, dans laquelle V , V' , &

$(k-\frac{pr}{n})V - u^{\frac{1}{n}}$ sont des fonctions de u . On trou-

vera donc par l'Article CCCLXXXII. la valeur de u en

z , & celle de z en u , & ayant substitué une de ces

deux valeurs dans les equations $y = u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}}$, & $z =$

$V y^{k-\frac{pr}{n}} + V'$, on en dedrira ensuite une equation

entre y & u .

2.° De la supposition $y^p z^n = u$, ou $y = u^{\frac{1}{p}} z^{-\frac{n}{p}}$

on tire $y^k = u^{\frac{k}{p}} z^{\frac{r-nk}{p}}$; $y^k z^r = u^{\frac{k}{p}} z^{\frac{r-nk}{p}}$, & $dy =$
 $\frac{1}{p} z^{\frac{r-nk}{p}} u^{\frac{k}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{k}{p}} z^{\frac{r-nk}{p}-1} dz$; par conséquent

$$dx = z dy = \frac{1}{p} z^{1-\frac{n}{p}} u^{\frac{k}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{k}{p}} z^{\frac{r-nk}{p}} dz. \text{ On}$$

a d'ailleurs par l'équation proposée $x = u^{\frac{k}{p}} z^{\frac{r-nk}{p}} \phi u +$

$$\phi' u = V'' z^{\frac{r-nk}{p}} + V', \text{ en faisant } u^{\frac{k}{p}} \phi u = V'', \text{ \& } \phi' u = V',$$

& on tire de la $dx = z^{\frac{r-nk}{p}} dV'' + (r - \frac{nk}{p}) \times$

$$V'' z^{\frac{r-nk}{p}-1} dz + dV'. \text{ On aura donc } \frac{1}{p} z^{1-\frac{n}{p}} u^{\frac{k}{p}-1} du$$

$$- \frac{n}{p} u^{\frac{k}{p}} z^{\frac{r-nk}{p}} dz = z^{\frac{r-nk}{p}} dV'' + (r - \frac{nk}{p}) V'' z^{\frac{r-nk}{p}-1} dz$$

+ dV' , équation qu'on voit bien être dans le Cas de

l'Article CCCLXXXIII., lorsque $1 - \frac{n}{p} = r - \frac{nk}{p}$. Car

si on écrit dans cette équation $1 - \frac{n}{p}$ pour $r - \frac{nk}{p}$,

$$\text{elle deviendra } \frac{1}{p} z^{1-\frac{n}{p}} u^{\frac{k}{p}-1} du - \frac{n}{p} u^{\frac{k}{p}} z^{\frac{r-nk}{p}} dz =$$

$$z^{1-\frac{n}{p}} dV'' + \left(1 - \frac{n}{p}\right) V'' z^{-\frac{n}{p}} dz + dV', \text{ ou bien}$$

$$\left[\left(1 - \frac{n}{p}\right) V'' + \frac{n}{p} u^{\frac{1}{p}} \right] z^{-\frac{n}{p}} dz + \left(V'' - \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1} \right) \times$$

$$z^{1-\frac{n}{p}} du + dV' = 0, \text{ en faisant } dV'' = V''' du. \text{ On}$$

peut aussi écrire $z^0 V^{IV} du$ pour dV' , en supposant

$dV' = V^{IV} du$. La proposée s'intégrera ensuite comme

dans le Cas précédent.

CCCCVI.

Les equations différentielles, que nous venons de traiter, renferment des fonctions de $\frac{dy}{dx}$; mais il arrive assez souvent que par la substitution de $\frac{dy}{dx} = z$, ou $dy = z dx$, on parvienne a des equations finies, & même algebriques entre x & y , sans employer les methodes ordinaires d'intégration; c'est ce que nous allons éclaircir par des Exemples.

Soit la différentielle $y dx - x dy = a \sqrt{dx^2 + dy^2}$; en débarassant cette equation du signe radical, on aura $yy dx^2 - 2xy dx dy + xx dy^2 = aadx^2 + aady^2$; &

faisant $dy = z dx$, & divisant par dx , l'équation se réduit à cette forme $y = zx + a\sqrt{1+zx}$, qui renferme encore une expression différentielle à cause de $\frac{dy}{dx} = z$. Si on différencie une seconde fois l'équation $y = zx + a\sqrt{1+zx}$, on aura $dy = z dx + x dz + \frac{az dz}{\sqrt{1+zx}}$. Or substituant $z dx$ à la place de dy , on aura $x dz + \frac{az dz}{\sqrt{1+zx}} = 0$, & divisant par dz on aura $x = \frac{-az}{\sqrt{1+zx}}$. Enfin à cause de $y = zx + a\sqrt{1+zx}$, on trouvera par substitution $y = \frac{a}{\sqrt{1+zx}}$. Il fera maintenant aisé de faire disparaître la variable z des deux équations $x = \frac{-az}{\sqrt{1+zx}}$, & $y = \frac{a}{\sqrt{1+zx}}$; il ne faut qu'ajouter ensemble les carrés xx & yy , on aura $xx + yy = \frac{a^2 z^2 + a^2}{1+zx} = a^2$, équation algébrique entre les variables x & y , d'où l'on voit ce cas assez singulier, qu'une différentiation réitérée peut conduire à l'intégrale cherchée.

On refoudroit de même l'équation plus compliquée

$$y dx - x dy = a \sqrt[3]{dx^3 + dy^3},$$

dont on auroit de la peine à trouver l'intégrale par d'autres voyes. Nous sup-

poserons $dy = x dx$, pour avoir $\sqrt[3]{dx^3 + dy^3} =$

$$dx \sqrt[3]{1 + x^3}, \text{ \& par consequent } y - x^2 = a \sqrt[3]{1 + x^3},$$

\& $y = x^2 + a \sqrt[3]{1 + x^3}$; maintenant par une double dif-

$$\text{férentiation, on trouve } dy = 2x dx + \frac{ax^2 dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}};$$

$$\text{d'où l'on tire } 0 = x dx + \frac{ax^2 dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}, \text{ ou } x = \frac{-ax^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}},$$

\& $y = \frac{a}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$ \& en ajoutant les cubes, on trou-

$$\text{vera } y^3 + x^3 = \frac{a^3(1-x^6)}{(1+x^3)^2} = -a^3 + \frac{2a^3}{1+x^3}; \text{ d'où l'on}$$

$$\text{tire } \frac{1}{1+x^3} = \frac{a^3+x^3+y^3}{2a^3}, \text{ \& par consequent } y = \frac{a}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$$

$$= \frac{(a^3+x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}}{a \sqrt[3]{4}}, \text{ \& enfin } 4a^3 y^3 = (a^3+x^3+y^3)^2.$$

CCCCVII.

Si on vouloit intégrer par les methodes ordinaires

$$\text{l'équation precedente } y^2 dx^2 - 2xy dx dy + x^2 dy^2 =$$

$$a^2 dx^2 + a^2 dy^2, \text{ ou } dy^2 = \frac{-2xy dx dy - a dx^2 + y^2 dx^2}{aa - xx},$$

on auroit en multipliant le numerateur & le denomi-
nateur par $aa - xx$, & en tirant la racine quarrée dy

$$= \frac{-xy dx + a dx \sqrt{xx + yy - aa}}{aa - xx}, \text{ comme il est aisé de}$$

s'en as urer en quarrant de nouveau, & en substituant

pour $aa dx^2$, & pour $aa dx^2 + aady^2$ leurs valeurs
respectives que donnent les equations precedentes; car

on aura alors une expression identique: donc l'equation
proposée deviendra $aady - xx dy + xy dx = a dx \times$

$\sqrt{xx + yy - aa}$, dont il faut maintenant chercher

l'intégrale. Soit pour cela $y = u \sqrt{aa - xx}$; on aura

$$\sqrt{xx + yy - aa} = \sqrt{(aa - xx)(uu - 1)}, \text{ \& } dy =$$

$$du \sqrt{aa - xx} - \frac{xx dx}{\sqrt{aa - xx}}; \text{ d'où l'on tire } aady - xx dy$$

$$+ xy dx = du (aa - xx)^{\frac{3}{2}} = a dx \sqrt{aa - xx} \cdot \sqrt{uu - 1},$$

$$\text{ou } \frac{du}{\sqrt{uu - 1}} = \frac{a dx}{aa - xx}, \text{ equation dans laquelle les va-}$$

riables x & u sont séparées.

Nous observerons maintenant que, refondre une
equation soit différentielle, soit intégrale, n'est autre
chose que de trouver une valeur de x en y , ou de y
en x , qui étant substitu e dans cette equation donne

$$0 = 0.$$

$o = o$. Or si on fait dans la transformée $\sqrt{uu-1}$
 $= o$, ou $uu = 1$, on voit que cette condition satisfait
 a l'equation, puisque le membre $adx\sqrt{aa-xx}$.
 $\sqrt{uu-1}$ s'évanouït en même tems que $du(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$,
 a cause de $uu = 1$, & par consequent $du = o$. Donc
 en substituant $u = \pm 1$, on aura $y = \pm \sqrt{aa-xx}$,
 ou $xx + yy = aa$, comme cy-dessus.

Si on vouloit intégrer l'equation $\frac{du}{\sqrt{uu-1}} = \frac{adx}{aa-xx}$
 par le moyen des logarithmes, on auroit $L.(u + \sqrt{uu-1} - 1) = \frac{1}{2} L. n^2 \left(\frac{a+x}{a-x} \right)$, & $u + \sqrt{uu-1} = n \times$
 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$; n étant une constante arbitraire; d'où l'on
 tire $u = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$; & par consequent
 $y = u \sqrt{aa-xx} = \frac{n}{2} (a+x) + \frac{1}{2n} (a-x)$, equation
 différente de la premiere. Enfin on trouveroit encore
 un autre resultat, en considerant la transformée $x dz$
 $+ \frac{ax dz}{\sqrt{1+zz}} = o$; il est clair que, cette equation étant
 multipliée par dz , on pourra regarder dz comme zero,
 c'est a dire, z comme constante que nous nommerons

n ; d'où l'on tire immédiatement $zx + a\sqrt{1+zx} = nx$
 $+ a\sqrt{1+nx} = y$.

On voit aisément qu'on intégreroit de la même façon toutes les equations de cette forme $ydx - xdy =$

$a\sqrt[n]{\alpha dx^n + \beta dx^{n-v} dy^v + \gamma dx^{n-\mu} dy^\mu} + Cc$; car sup-

posant $dy = zdx$, on auroit $y = zx +$

$a\sqrt[n]{\alpha + \beta z^v + \gamma z^\mu} + Cc$, & différenciant de nouveau,

& divisant par dz , on trouvera $x =$
 $\frac{-v\alpha\beta z^{v-1} - \mu\alpha\gamma z^{\mu-1}}{n\sqrt[n]{(\alpha + \beta z^v + \gamma z^\mu + Cc)^{n-1}}}$, & $y =$

$\frac{n\alpha a + (n-v)\alpha\beta z^v + (n-\mu)\alpha\gamma z^\mu + Cc}{n\sqrt[n]{(\alpha + \beta z^v + \gamma z^\mu + Cc)^{n-1}}}$, d'où on tirera,

en chassant z , une equation algebrique entre x & y .

Or, puisqu'on a aussi $dz = 0$, & $x = m$ constante, on

aura $y = mx + a\sqrt[n]{\alpha + \beta m^v + \gamma m^\mu} + Cc$.

CCCCVIII.

Ces différentes manieres de considerer les différen-
 tielles précédentes, d'où naissent différentes intégrales,
 donnent lieu a un cas bien singulier, & a une espece
 de paradoxe dans le Calcul Intégral. On s'imagine
 communément qu'ayant une equation différentielle quel-
 conque, on n'a qu'à chercher son intégrale, & ajouter

une constante a cette intégrale, pour avoir la plus grande generalité possible, & on ne doute pas alors d'avoir une intégrale qui satisfasse a toutes les solutions possibles. Nous venons cependant de demontrer qu'on peut trouver une valeur de x en y , qui n'est pas contenue dans l'équation intégrée, quoiqu'elle donne une resolution de l'équation différentielle. Ainsi dans l'exem-

ple $aady - xx dy + xy dx = a dx \sqrt{xx + yy - aa}$,

où les variables sont mêlées, nous avons fait voir que

par la substitution de $y = u \sqrt{aa - xx}$, on a la separée

$\frac{du}{\sqrt{uu-1}} = \frac{a dx}{aa - xx}$, dont l'intégrale prise dans toute

son étendue seroit $u + \sqrt{uu-1} = n \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$; d'où

nous avons tiré l'équation $y = \frac{n}{2} (a+x) + \frac{1}{2n} (a-x)$.

Or il est evident que cette intégrale, quelque generale qu'elle soit a cause de la constante indefinie, ne renferme pas l'équation $yy + xx = aa$, qui satisfait cependant a la différentielle proposée.

On peut ramener toutes les equations différentielles, qui sont dans ce cas de singularité, c'est a dire, qui échappent a l'intégration ordinaire, a la forme generale $V dz = Z(P dx + Q dy)$, dans laquelle z est une fonction quelconque des deux variables x & y , & Z une fonction quelconque de z ; V , P , & Q étant

aussi des fonctions quelconques des variables x & y . Car il est evident qu'en faisant $Z=0$, cette supposition satisfait a la question, puisque de là on tire z egale a une constante, & par consequent $dz=0$; ce qui fait evanôir les deux membres de l'equation, comme il le faut. Ou bien, ce qui revient au même, ces fortes d'equations singulieres sont renfermées dans la forme $\frac{d \cdot \varphi xy}{\varphi xy} = d \cdot \theta xy$, dans laquelle θxy est une fonction quelconque de x & de y ; φxy une autre, & $\boxed{\varphi xy}$ designe une autre fonction de la fonction φxy , mais telle que, φxy étant egale a zero, $\boxed{\varphi xy}$ le soit aussi. Toutes les equations renfermées dans cette forme auront la singularité, dont nous traitons. Car on voit aisément les deux solutions que donne cette equation différentielle; l'une est $C + \theta xy = S. \frac{d \cdot \varphi xy}{\boxed{\varphi xy}}$, que l'on trouvera en intégrant, & l'autre est $\varphi xy = 0$, que l'on a sans intégration, ce qui peut servir a expliquer ce paradoxe; car on voit par là qu'il ne se trouve que dans des Problemes, qui n'avoient pas besoin d'intégration pour être resolus. Cette reflexion pourroit s'eclaircir par des Problemes de Geometrie; mais ces discussions n'entrent pas dans le plan de nôtre Ouvrage: il nous suffit d'avoir fait voir que ce Cas ne peut

faire une exception a la regle generale du Calcul Intégral.

C'est par cette même raison qu'il arrive quelque fois qu'une equation différentielle n'est pas intégrable, ny même separable, dont on peut trouver neantmoins la resolution par une equation finie, qui satisfait a la question. Ainsi l'equation différentielle $aa(aa-xx)dy + aaxydx = (aa-xx)(ydx - xdy)\sqrt{xx+yy-aa}$, qui se reduit a la forme generale precedente, & dont on tenteroit en vain, l'intégration est cependant resolvable par la supposition de $yy+xx=aa$. Car supposant $yy+xx-aa=0$, les deux membres de l'equation s'évanouissent. Puisque le second membre de l'equation $(aa-xx)(ydx - xdy)\sqrt{xx+yy-aa}$ est multiplié tout entier par $\sqrt{yy+xx-aa}=0$, il est evident que ce membre est $=0$. De plus $yy+xx=aa$ & par consequent $2ydy + 2xdx$, ou $ydy + xdx = 0$; mais le premier membre, a cause de $aa-xx=y^2$, devient $aa y^2 dy + aaxy dx = aay(ydy + xdx)$; donc il est $=0$. On le verroit plus clairement, en supposant $y = z\sqrt{aa-xx}$; car alors l'equation prendra la forme $aadz = (ydx - xdy)\sqrt{xx-1}$, & faisant $Z = \sqrt{xx-1}$, ou aura $\sqrt{xx-1}=0$, ou $x=1$, & par consequent $yy+xx=aa$.

CCCCIX.

LEMME. Si on multiplie, ou si on divise une différentielle quelconque par une fonction de son intégrale, le produit ou le quotient sera une différentielle, qu'on pourra toujours intégrer par la première Partie du Calcul Intégral.

DEMONSTRATION. Soit dx une différentielle quelconque dont l'intégrale est x , & X une fonction de x ; il est évident que le produit Xdx & le quotient $\frac{dx}{X}$ seront des différentielles à une seule variable x . On pourra donc les intégrer l'une & l'autre par les méthodes de la première Partie, & l'intégrale du produit, $\int Xdx$ sera égale à l'aire d'une courbe dont l'abscisse sera x , & l'ordonnée perpendiculaire X ; l'intégrale du quotient, $\int \frac{dx}{X}$ sera égale à l'aire d'une autre courbe, qui aura x pour abscisse, & $\frac{1}{X}$ pour ordonnée perpendiculaire. C. Q. F. D.

CCCCX.

COROLLAIRE. Supposé qu'une équation différentielle soit composée de deux membres, dont l'un soit intégrable, & que F représente une fonction quelconque de son intégrale, & que l'autre membre soit le

produit Qdy d'une différentielle exacte dy par une quantité quelconque Q ; si, en multipliant toute cette equation différentielle par la fonction F de l'intégrale de son premier membre, on trouve dans le second membre multiplié par cette même fonction, ou dans $FQdy$, que le produit FQ est une fonction quelconque de l'intégrale y de la différentielle exacte dy ; toute l'equation ainsi multipliée sera intégrable par les méthodes de la première Partie. Cela est évident par le Lemme, puisque, par cette multiplication, le premier membre de l'equation deviendra le produit d'une différentielle par une fonction de son intégrale, & que le second membre deviendra aussi le produit d'une autre différentielle par une fonction de son intégrale.

Pour rendre plus clair ce Corollaire important soit une equation différentielle $ydx = 0$. En ajoutant de côté & d'autre $x dy$, on aura $ydx + xdy = xdy$; l'intégrale du premier membre $ydx + xdy$ de cette equation est xy ; le second membre $x dy$ est le produit de la différentielle exacte dy par la quantité x . Supposons premièrement que F soit une fonction quelconque de l'intégrale xy du premier membre; en multipliant toute l'equation $ydx + xdy = xdy$ par F , on aura $F(ydx + xdy) = Fxdy$; le premier membre $F.d(xy)$ sera intégrable par le Lemme précédente, & le second membre $Fxdy$ le sera aussi, lorsque le produit Fx sera une fonction de y .

CCCCXI.

On se sert avantageusement du Corollaire précédent pour trouver quelques formules d'équations intégrables par le moyen de l'équation $z = \frac{dx}{dy}$, ou $dx - zdy = 0$. On met pour cela cette équation sous la forme suivante $dx - zdy - ydz + ydz = 0$. Ensuite on la multiplie par une fonction X de x , & on y ajoute $zydX - zydX$, ce qui ne la change pas. On a par là l'équation $Xdx - Xzdy - Xydz - zy dX + yXdz + zy dX = 0$, ou bien $Xdx - Xzdy - Xydz - zy dX = -yXdz - zy dX$. Or le premier membre de cette équation est intégrable, & son intégrale est, comme on le voit en prenant la différentielle, $\int Xdx - yzX$. Le second membre est la différentielle de $-zX$ multipliée par y . Donc, en multipliant toute l'équation par une fonction ϕ ($\int Xdx - Xyz$) de l'intégrale $\int Xdx - Xyz$ de son premier membre, on aura pour produit l'équation $\phi(\int Xdx - Xyz) \{Xdx - d.(Xyz)\} = -d.(zX) \times y \phi(\int Xdx - Xyz)$, qui sera intégrable, lorsque $y \times \phi(\int Xdx - Xyz)$ sera une fonction de zX (Art. CCCCX.).

CCCCXII.

THEOREME VI. L'équation $Xdx - d.(Xyz) = -y.d.(zX)$ est intégrable, lorsque l'intégrale du premier

premier membre $S. X d x - X y z$ est égale à une fonction du produit de y multiplié par une fonction de $X z$.

DEMONSTRATION. Soit $\phi'(Xz)$ une fonction de Xz ; $\phi'\{y\phi'(Xz)\}$ une fonction du produit $y \times \phi'(Xz)$. On a, par la supposition, $S. X d x - X y z = \phi'\{y.\phi'(Xz)\}$. En considérant $y.\phi'(Xz)$, comme une seule inconnue u , & le membre $S. X d x - X y z$, comme une autre inconnue t , on aura $t = \phi'(u)$; d'où il suit, par la nature des équations, que u sera égale à quelque fonction de t , que nous désignerons par $\phi(t)$, ou par $\phi(S. X d x - X y z)$; on aura donc $\phi(S. X d x - X y z) = y.\phi'(Xz)$; & puisque $X d x - d.(X y z) = -y.d.(Xz)$, en divisant de côté & d'autre par des quantités égales, on aura $\frac{X d x - d.(X y z)}{\phi(S. X d x - X y z)}$

$$= \frac{-y.d.(Xz)}{y.\phi'(Xz)} = \frac{-d.(Xz)}{\phi'(Xz)}, \text{ equation, dont chaque}$$

membre est une différentielle divisée par une fonction de son intégrale; donc cette équation, & par conséquent la proposée seront intégrables (Lemme Article CCCCIX.). C. Q. F. D.

CCCCXIII.

COROLLAIRE. L'équation $X d x - d.(X y z) = -y.d.(Xz)$ est intégrable, lorsqu'on a cette autre équation $S. X d x = a y X z + b y X^n z^n$; a, b, n étant

constantes. Car cette dernière équation, en ôtant $y Xz$ de part & d'autre, devient $S. X dz - y Xz = ay Xz - y Xz + by X^n z^n = y \{ a Xz - Xz + b (Xz)^n \} = y \cdot \varphi'(Xz)$. On aura donc $\frac{X dz - d.(Xy z)}{S. X dz - Xy z} = \frac{-y \cdot d.(Xz)}{y \cdot \varphi'(Xz)} = \frac{-d.(Xz)}{\varphi'(Xz)}$, & , en intégrant de part & d'autre, $L.(S. X dz - Xy z) = S. \frac{-d.(Xz)}{\varphi'(Xz)} + C$. constante.

EXEMPLE. Supposé que dans les deux équations du Corollaire on ait $a=1$, $b=2$, $n=1$, $X=x^{\frac{1}{2}}$, ou que ces deux équations soient $x^{\frac{1}{2}} dz - d.(y x^{\frac{1}{2}} z) = -y \cdot d.(y x^{\frac{1}{2}} z)$, & $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = y x^{\frac{1}{2}} z + 2 y x^{\frac{1}{2}} z = 3 y x^{\frac{1}{2}} z$, on aura pour intégrales $L.\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - y x^{\frac{1}{2}} z\right) = S. \frac{-d.\left(x^{\frac{1}{2}} z\right)}{2 x^{\frac{1}{2}} z} + C$
 $= -\frac{1}{2} L.\left(x^{\frac{1}{2}} z\right) + L.q$, en mettant $L.q$ pour la constante C . Or $\frac{1}{2} L.\left(x^{\frac{1}{2}} z\right) = L.\left(x^{\frac{1}{2}} z\right)^{\frac{1}{2}}$, & $L.q = L.\left(x^{\frac{1}{2}} z\right)^{\frac{1}{2}} = L. \frac{q}{\left(x^{\frac{1}{2}} z\right)^{\frac{1}{2}}}$; donc $L.\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - y x^{\frac{1}{2}} z\right) =$

L. $\frac{q}{\left(\frac{1}{x^2 z}\right)^{\frac{1}{2}}}$, & en repassant des logarithmes aux nom-

bres, $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - y x^{\frac{1}{2}} z = \frac{q}{\left(\frac{1}{x^2 z}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{x^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}}$; par consequent

$\frac{2}{3} x^{\frac{7}{4}} z^{\frac{1}{2}} - y x^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{2}} = q$. Si on substitue dans cette equa-

tion la valeur de $z = \frac{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{3} y x^2} = \frac{2x}{9y}$, qu'on tire de l'e-

quation $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = 3y x^2 z$, on aura $\frac{2}{3} x^{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2x}{9y}} - y x^{\frac{3}{4}}$.

$\sqrt{\frac{8x^3}{9^3 y^3}} = q$, equation sans z , ou sans $\frac{dx}{dy}$, & par laquel-

le on peut trouver la valeur de x en y , & celle de y en x .

CCCCXIV.

THEOREME VII. Si on a l'equation $x + Z + a$

$= \frac{y y z dz}{2 dZ} + \frac{z dZ}{2 dz}$, dans laquelle a est une constante, Z

une fonction de z , & $x = \frac{dx}{dy}$, ou $dx - x dy = 0$, on

aura aussi l'équation suivante $(x - yz + Z + a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot S. \frac{-dz}{\sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}}$.

DEMONSTRATION. L'équation proposée, en ôtant yz de part & d'autre, devient $x - yz + Z + a = \frac{yyzdz}{2dZ} + \frac{zdz}{2dz} - yz = \frac{zdz}{2dZ} \left(y - \frac{dZ}{dz} \right)^2$, comme on le voit clairement, en faisant le carré de $\left(y - \frac{dZ}{dz} \right)$, qui est $yy - \frac{2ydZ}{dz} + \frac{dZ^2}{dz^2}$, & le multipliant par $\frac{zdz}{2dZ}$; car le produit est $\frac{yyzdz}{2dZ} - yz + \frac{zdz}{2dz}$. Donc en prenant la racine quarrée des deux membres de l'équation, on aura $(x - yz + Z + a)^{\frac{1}{2}} = \left(y - \frac{dZ}{dz} \right) \times \sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}$. Mais, par l'hypothèse, $dx - xdy = 0$; par conséquent $dx - xdy - ydz + dZ = -ydz + dZ$, donc $\frac{dx - xdy - ydz + dZ}{(x - yz + Z + a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-ydz + dZ}{\left(y - \frac{dZ}{dz} \right) \sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}} = \frac{-dz \left(y - \frac{dZ}{dz} \right)}{\left(y - \frac{dZ}{dz} \right) \sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}} = \frac{-dz}{\sqrt{\frac{zdz}{2dZ}}}$; & par ce que $dx - xdy - ydz + dZ$ est la différentielle de $(x - yz + Z + a)$;

en intégrant chaque membre de cette dernière equa-

tion, on aura $(x - yz + Z + a)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{2} S. \frac{-dz}{\sqrt{\frac{1}{2} dz}}$.

C. Q. F. D.

CCCCXV.

THEOREME VIII. L'équation $dx - zdy = 0$ est intégrable, lorsqu'on a l'équation $x - yz + Z + a = \varphi \left\{ Z' \left(y - \frac{dZ}{dz} \right) \right\}$, dans laquelle Z & Z' sont des fonctions de z , & $\varphi \left\{ Z' \left(y - \frac{dZ}{dz} \right) \right\}$ une fonction du produit $Z' \times \left(y - \frac{dZ}{dz} \right)$.

DEMONSTRATION. Puisque $x - yz + Z + a = \varphi \left\{ Z' \left(y - \frac{dZ}{dz} \right) \right\}$, on aura $\varphi'(x - yz + Z + a) = Z' \times \left(y - \frac{dZ}{dz} \right)$, & parce que l'équation $dx - zdy = 0$ se réduit à celle-cy $dx - zdy - ydz + dZ = -ydz + dZ$, on aura $\frac{dx - zdy - ydz + dZ}{\varphi'(x - yz + Z + a)} = \frac{-(ydz - dZ)}{\varphi'(x - yz + Z + a)} = \frac{-dz \left(y - \frac{dZ}{dz} \right)}{Z' \left(y - \frac{dZ}{dz} \right)} = \frac{-dz}{Z'}$. Et puisque les deux membres de cette equa-

tion sont deux différentielles divisées chacune par une fonction de leur intégrale, ces deux membres sont intégrables (par le Lemme Art. CCCCIX.). C. Q. F. D.

CCCCXVI.

Nous allons expliquer dans les Problemes suivans une methode generale pour intégrer, un nombre quelconque N d'equations, renfermant le nombre $N+1$ de variables $x, y, z, u, \text{ \&c.}$, chaque equation etant de la forme $adx+bdy+cdz+\text{ \&c.}+(bx+ky+lz+\text{ \&c.})Tdx+\theta dx=0$, dans laquelle $a, b, c, \text{ \&c.}$, $b, k, l, \text{ \&c.}$ sont des constantes quelconques, ou zero, T une fonction de x , la même dans toutes les equations, & θ une fonction de x , qui peut être différente dans les différentes equations, ou zero. Pour intégrer ces equations, on les multiplie toutes, excepté une que nous supposérons toujours être la premiere, par différents facteurs constans, mais indeterminés. Ensuite on ajoute toutes les equations ainsi multipliées a la premiere, on a celle qui resulte de cette somme; on determine les valeurs des facteurs ou coefficients constants, de telle sorte que cette equation se reduise a la forme de l'Article CCCLXXXII., ou a une autre, dont les variables puissent se separer. Nous avons deja traité deux equations de cette forme dans l'Art. CCCXLVII., mais nous devons expliquer icy plus au long ce que nous avons dit brièvement dans l'endroit cité.

CCCCXVII.

PROBLEME V. Trouver les intégrales des deux equations $dx + (ax + by)dt = 0$, $dy + (bx + ky)dt = 0$.

SOLUTION. On multiplie d'abord la seconde de ces equations par un facteur constant & indéterminé A ; elle devient $A dy + (bx + kA y)A dt = 0$. On ajoute cette equation a la premiere, ce qui donne la somme $dx + A dy + \{(a + bA)x + (b + kA)y\} dt = 0$. Ensuite on fait en sorte, que dans cette equation la quantité qui est multipliée par dt devienne un multiple de $x + Ay$, intégrale de la différentielle $dx + A dy$, afin qu'ayant supposé $x + Ay = u$, & M étant une constante indéterminée, l'equation prenne la forme $du + M u dt = 0$, ou $\frac{du}{u} + M dt = 0$, dans laquelle les variables u & t sont séparées. On aura donc par cette hypothese $ax + bAx + by + kAy = Mx + MAy$; & en comparant terme a terme les deux membres de cette equation, $ax + bAx = Mx$, & $by + kAy = MAy$; d'où l'on tire $M = a + bA$, & $M = \frac{b + kA}{A}$; par conséquent $a + bA = \frac{b + kA}{A}$, & par les regles connues de l'Algebre, $bAA + aA - kA = b$, & $A = -\left(\frac{a - k}{2b}\right) \pm$

$\frac{\sqrt{(a-k)^2+4bb^2}}{2b}$. On a donc par là deux valeurs de A ; & supposant $x+Ay=u$, ou $dx+Ady=du$, puisque $M=a+bA$, on aura $du+(a+bA)udx=0$, ou $\frac{du}{u}+(a+bA)dx=0$, & $\frac{du}{u}=-dx(a+bA)$; & en intégrant, $Lu=C-x(a+bA)$, C étant une constante. Donc en prenant e pour le nombre, dont le logarithme est l'unité, ou en supposant $Le=1$, & $Lg=C$, on aura $Lu=Lg-x(a+bA)L.e=Lg-xL.e^{-(a+bA)}=Lge^{-(a+bA)}$, & par conséquent $u=ge^{-(a+bA)}$, cela posé, soient p, p' les deux valeurs de A trouvées cy-dessus; & au lieu de l'équation $x+Ay=u$, on aura ces deux-cy $x+py=u$, & $x+p'y=u'$; & de même au lieu de l'équation $u=ge^{-(a+bA)}$, on aura les deux suivantes $u=ge^{-(a+bp)}$, & $u=g'e^{-(a+b'p)}$. Des deux équations $x+py=u$, & $x+p'y=u'$ on tire aisément les valeurs de y & de x ; car en retranchant la seconde équation de la première, on a $py-p'y=u-u'$, & $y=\frac{u-u'}{p-p'}$; & par la première équation on trouve $x=u-py=u-\left(\frac{pu-pu'}{p-p'}\right)=\frac{p'u-pu'}{p'-p}$. Dans ces valeurs de x & de y , on mettra pour u & pour u' leurs

leurs valeurs $ge^{-t(a+bp)}$, & $g'e^{-t(a+bp')}$, & on déterminera les constantes g & g' par les valeurs que x & y doivent avoir, lorsque $t=0$, où est égale à quelque grandeur connue, & on aura les intégrales cherchées.

Cette Solution ne peut souffrir de difficultés, que dans le cas où l'équation $bAA+aA-kA-b=0$ ne donne point deux valeurs de A , ce qui arrivera si $b=0$, ou $b=0$, & dans le cas où les deux valeurs de A sont égales. Or 1.° Si $b=0$, une des valeurs de A est $=0$, & l'autre est $\frac{k-a}{b}$; c'est pourquoi il n'y a qu'à supposer dans les formules précédentes $p'=0$, & l'on aura les valeurs de y & de x . 2.° Si $b=0$, la seconde équation $dy+(bx+ky)dt=0$ fera $dy+kydt=0$, ou $\frac{dy}{y}=-kdt$, d'où l'on tire

$y=me^{-kt}$, m étant une constante, & par conséquent y sera une fonction de t , que nous désignerons par θ ; & en substituant cette valeur de y dans la première équation $dx+axdt+bydt=0$, elle devient $dx+axdt+b\theta dt=0$, équation qui se réduit à la formule de l'Art. CCCLXXXII., & qu'on intègre par cet Article.

3.° Si les deux valeurs de A , p & p' sont égales, on aura toujours $u=ge^{-t(a+bp)}$, en mettant p pour A ; substituant ensuite cette valeur de u dans l'équation

$x + py = u$, on aura $x = ge^{-t(a+bp)} - py$. On mettra cette valeur de x dans la seconde equation $dy + bx dt + ky dt = 0$, & elle deviendra $dy + ky dt + bge^{-t(a+bp)} dt - bpy dt = 0$, ou $dy + (k - bp)y dt + bge^{-t(a+bp)} dt = 0$, equation qui se réduit encore à la formule de l'Art. CCCLXXXII. 4.° Enfin si les valeurs de A étoient imaginaires, le Probleme se résoudroit toujours de la même manière. Car nous avons vu (Art. XCVIII.) que les exponentielles imaginaires se réduisent toujours à $A + B\sqrt{-1}$, $A - B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles; & si les valeurs de x & de y devoient être réelles, les imaginaires en disparaîtroient.

CCCCXVIII.

PROBLEME VI. Trouver les intégrales des deux equations $dx + (ax + by)T dt + \theta dt = 0$, $dy + (bx + ky)T dt + \theta' dt = 0$, dans lesquelles T est une fonction de t , & θ , θ' aussi des fonctions quelconques de t , ou zero.

SOLUTION. Elle est à peu près la même que celle du Probleme précédent. Car en multipliant la seconde equation par A , & ajoutant le produit à la première equation, on aura $dx + A dy + \{(a + bA)x$

$\rightarrow (b+kA)y \} Tdr + (\theta + \theta' A)dt = 0$. Ensuite si on fait $dx + Ady = du$, ou $x + Ay = u$, & $(a+bA)x + (b+kA)y = Mx + MAy$, on trouvera, comme dans le Probleme precedent, $M = a+bA = \frac{b+kA}{A}$; A

$$= -\left(\frac{a-k}{2b}\right) \pm \frac{\sqrt{(a-k)^2 + 4bb^2}}{2b}, \text{ \& } du + (a+bA) \times$$

$x \} Tdr + (\theta + \theta' A)dt = 0$, equation qu'on integrera par la methode de l'Art. CCCLXXXII. Supposé presentement que les deux valeurs de A soient p , & p' , on trouvera encore, comme dans le Probleme precedent, $y = \frac{x-x'}{p-p'}$, & $x = \frac{p'u - p'x'}{p-p'}$, & dans ces deux valeurs de y & de x on mettra pour u & pour u' leurs valeurs trouvees par l'Art. CCCLXXXII. C. Q. F. T.

CCCCXIX.

COROLLAIRE. Il ne fera pas plus difficile d'integrer les deux equations $dx + mdy + (ax + by)Tdr + \theta dt = 0$; $dy + ndx + (bx + ky)Tdr + \theta' dt = 0$. On multipliera la seconde equation par A , & ayant ajouté ce produit a la premiere equation, on aura $(1+nA)dx + (m+A)dy + (a+bA)xTdr + (b+kA)yTdr + (\theta + A\theta')dt = 0$. On fera ensuite $(1+nA)x + (m+A)y = u$, & $(a+bA)x + (b+kA)y = M(1+nA)x + M(m+A)y$; d'où l'on tirera M

$= \frac{a+bA}{1+nA}$; $M = \frac{b+kA}{m+A}$; $\frac{a+bA}{1+nA} = \frac{b+kA}{m+A}$, & $du + MuT dt + (\theta + Ab') dt = 0$. On fera le reste comme dans le Probleme precedent, en se servant de l'equation $(1+nA)x + (m+A)y = u$, au lieu de $x + ay = u$, & ayant egard aux différentes valeurs de A & de M .

On voit bien encore que, si dans les equations proposées, les deux premiers termes dx & dy estoient multipliés par des constantes quelconques, la solution n'en seroit pas plus difficile; & d'ailleurs il est evident qu'en divisant chaque equation par la constante qui multiplie son premier terme, on la reduiroit a la forme proposée dans ce Corollaire.

CCCCXX.

PROBLEME VII. Intégrer les trois equations $dx + (ax + by + cz) dt = 0$; $dy + (bx + ky + lz) dt = 0$; $dz + (mx + ny + pz) dt = 0$.

SOLUTION. En multipliant la seconde de ces equations par une constante indeterminée A , & la troisieme par une constante indeterminée B , les trois equations feront alors $dx + (ax + by + cz) dt = 0$; $A dy + (Abx + Aky + Alz) dt = 0$; $B dz + (Bmx + Bny + Bpz) dt = 0$. On les ajoutera ensemble, la somme fera $dx + A dy + B dz + \{ (a + Ab + Bm)x$

$+(b + Ak + Bn)y + (c + Al + Bp)z \} dt = 0$. Ensuite on supposera $dx + A dy + B dz = du$, ou, en intégrant, $x + Ay + Bz = u$, & $(a + Ab + Bm)x + (b + Ak + Bn)y + (c + Al + Bp)z = M(x + Ay + Bz) = Mu = Mn + MAy + MBz$; afin d'avoir l'é-

quation $du + Mudt = 0$, ou $\frac{du}{u} = -M dt$, dans laquelle les variables u & t sont séparées, & dont l'intégrale est $L.u = -Mt + C$ constante, ou $u = ge^{-Mt}$.

Puis on comparera terme à terme les deux membres de l'équation $(a + Ab + Bm)x + (b + Ak + Bn)y + (c + Al + Bp)z = Mn + MAy + MBz$, en égalant entre eux les termes homologues, & on aura les trois équations suivantes, $M = a + Ab + Bm$; $MA = b + Ak + Bn$; $MB = c + Al + Bp$; d'où l'on tire les deux équations $a + Ab + Bm = \frac{b + Ak + Bn}{A} =$

$\frac{c + Al + Bp}{B}$. La première de ces deux équations $a + Ab$

$+ Bm = \frac{b + Ak + Bn}{A}$ donne $B = \frac{bAA + Aa - Ak - b}{n - m}$, &

substituant cette valeur de B dans la seconde équation

$a + Ab + Bm = \frac{c + Al + Bp}{B}$, on aura, après avoir fait

les réductions ordinaires, une équation du troisième degré, qui donnera trois valeurs de A .

Cela posé, soient p, p', p'' les trois valeurs de A ; q, q', q'' les trois valeurs correspondantes de B , & r, r', r'' les trois valeurs correspondantes de M ; au lieu de l'équation $u = g e^{-Mt}$, on aura ces trois autres équations $u = g e^{-rt}$; $u' = g' e^{-r't}$; $u'' = g'' e^{-r''t}$, & au lieu de l'équation $x + Ay + Bz = u$, on aura les trois équations suivantes $x + py + qz = g e^{-rt}$; $x + p'y + q'z = g' e^{-r't}$; $x + p''y + q''z = g'' e^{-r''t}$. De ces trois équations on tirera les valeurs de x, y, z , & on déterminera les constantes g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z , lorsque $t = 0$, ou est égal à une constante donnée. C. Q. F. T.

CCCCXXI.

REMARQUE. Si l'équation en A n'a pas trois racines inégales, comme nous l'avons supposé, on pourra toujours, pourvû que cette équation ait au moins une racine, réduire le Probleme present au cas du Corollaire du Probleme VI. Car soit p la valeur de A , q la valeur de B , & r la valeur de M , au lieu de l'équation $x + Ay + Bz = u = L. g e^{-Mt}$, on aura $x + py + qz = L. e^{-rt}$; & l'on réduira les trois équations données à deux, en faisant évanouir par le moyen de cette dernière équation une des variables, par

exemple, z . Mais il peut se faire que l'équation en A n'ait aucune racine, ce qui arrivera, si les coefficients qui affectent les différentes puissances de A , sont égaux à zero. En ce cas, si le terme tout connu de l'équation s'évanouit aussi, c'est une marque, qu'on peut donner à A telles valeurs qu'on voudra, & le Probleme devient alors plus simple. Si le terme tout connu de l'équation ne s'évanouit pas, on augmentera, ou on diminuera à volonté un des coefficients a , b , c , b , &c. d'une quantité infiniment petite, pour rétablir un des termes de l'équation, & on aura pour lors par la règle du Parallelogramme de Newton, une valeur infinie de A , qui servira à résoudre le Probleme. Mais ce n'est pas icy le lieu de démontrer cette dernière réflexion, qui demanderait une trop longue explication, laquelle d'ailleurs appartient à l'Algebre finie.

Il est facile d'intégrer par le Probleme trois équations qui contiendront les variables x , y , z multipliées par des constantes, & par une fonction quelconque de t , avec leurs différences aussi multipliées par des constantes, & par une même fonction de t , & de plus un terme quelconque θdt , $\theta' dt$, $\theta'' dt$, qui ne renferme que des constantes avec t . On n'aura pour cela, qu'à operer comme dans le Probleme VI., & dans son Corollaire; enfin on voit assez, par tout ce que nous avons dit, comment il faudroit procéder pour intégrer

quatre, cinq, &c., & autant d'equations qu'on voudra, pourvû qu'elles ayent la forme préscrite dans l'Article premier de cette methode. Au reste on rend l'ingenieuse methode, que nous venons d'expliquer, beaucoup plus generale, en se servant de facteurs variables, & indeterminés, & de la propriété des equations, qu'on suppose être des différentielles exactes. Car si l'on a voit en general un nombre quelconque N d'equations différentielles renfermant le nombre $N+1$ de variables combinées entr'elles de quelque façon que ce soit; en multipliant toutes ces equations, excepté la premiere, respectivement par des quantités $M, M', M'', \text{&c.}$ que l'on supposeroit être des fonctions indeterminées de ces variables, on ajouteroit ces produits a la premiere equation; puis multipliant le tout par un facteur P , que l'on supposera aussi être une fonction de ces variables, on supposeroit de plus que l'equation totale est une différentielle complete, & on deduiroit les equations particulieres qui naissent de cette substitution. Nous avons deja donné un Exemple de cette methode (Art. CCCXLVII.); nous en joindrons icy un autre.

Si l'on a voit les deux equations $A dx + B dy + C dz = 0$; $A' dx + B' dy + C' dz = 0$, dans lesquelles A, B, C, A', B', C' sont des quantités qui ne renferment que des constantes, & les trois variables x, y, z combinées comme on voudra; on multiplieroit la seconde

conde equation par M , on ajouteroit le produit a la premiere, & multipliant le tout par P , on auroit $P(A+A'M)dx + P(B+B'M)dy + P(C+C'M)dz = 0$; or, pour que celle-cy soit une différentielle complete, il faut (Art. CCCXXXII.) qu'on ait les trois equations suivantes

$$\frac{d.(P(A+A'M))}{dy} = \frac{d.(P(B+B'M))}{dx};$$

$$\frac{d.(P(A+A'M))}{dz} = \frac{d.(P(C+C'M))}{dx}; \quad \frac{d.(P(B+B'M))}{dz} =$$

$$\frac{d.(P(C+C'M))}{dy}. \text{ C'est a dire } \frac{dP}{dy}(A+A'M) +$$

$$P \cdot \frac{d.(A+A'M)}{dy} = \frac{dP}{dx}(B+B'M) + P \cdot \frac{d.(B+B'M)}{dx};$$

$$\frac{dP}{dz}(A+A'M) + P \cdot \frac{d.(A+A'M)}{dz} = \frac{dP}{dx}(C+C'M) +$$

$$P \cdot \frac{d.(C+C'M)}{dx}; \quad \frac{dP}{dz}(B+B'M) + P \cdot \frac{d.(B+B'M)}{dz} =$$

$$\frac{dP}{dy}(C+C'M) + P \cdot \frac{d.(C+C'M)}{dy}. \text{ Si, a l'aide des}$$

deux dernieres equations, on tire les valeurs de $\frac{dP}{dx}$,

& de $\frac{dP}{dy}$, & qu'on les substitue dans la premiere, on

aura, après reduction faite, $(C+C'M) \left(\frac{d.(A+A'M)}{dy} \right.$

$$\left. - \frac{d.(B+B'M)}{dx} \right) + (A+A'M) \left(\frac{d.(B+B'M)}{dz} -$$

$$\frac{d.(C+C'M)}{dy} \right) + (B+B'M) \left(\frac{d.(C+C'M)}{dx} - \frac{d.(A+A'M)}{dz} \right)$$

$= 0$. equation independante de P . On cherchera donc pour M une fonction de x, y, z , la plus generale qui soit possible, & qui puisse satisfaire a cette equation. Ayant trouvé M , on cherchera pour P une fonction de x, y, z , qui satisfasse a deux quelconques des trois equations, qu'on a trouvées d'abord cy-dessus; ce qui, a la verité, exige souvent beaucoup de recherches; mais cela est du moins toujours possible.

CCCXXII.

La Methode que nous venons d'expliquer pourroit aussi s'appliquer a des quantités, différentielles qui ne seroient point reduites en equations, & qui renfermeroient certaines conditions. Telles seroient, par exemple, les deux quantités différentielles de cette forme $\alpha ds + \beta du$, & $\rho \alpha du + r \beta ds + du \cdot \varphi(u, s) + ds \cdot \varphi'(u, s)$, dans lesquelles ρ , & r designent des constantes données; $\varphi(u, s)$ & $\varphi'(u, s)$ des fonctions quelconques de u , & de s . On pourroit par les methodes precedentes rendre ces deux différentielles completes; c'est a dire, determiner les valeurs α , & β en sorte que les deux différentielles proposées soient intégrables.

Supposons pour cela que l'une & l'autre différentielle soit complete, on divisera par la constante ρ tous les termes de la seconde différentielle, & faisant $\frac{r}{\rho} = n$

& divisant la seconde différentielle par \sqrt{n} , on écrira les deux différentielles comme il suit $\beta\sqrt{n} \cdot \frac{du}{\sqrt{n}} + \alpha ds$; $\frac{\alpha du}{\sqrt{n}} + \beta\sqrt{n} \cdot ds + \frac{du \cdot \phi(u, s)}{\sqrt{n}} + \frac{ds \cdot \phi'(u, s)}{\sqrt{n}}$. Or,

puisque chacune des deux différentielles doit être complète, il est clair que leur somme, & leur différence doit aussi être une différentielle complète. Donc 1.° si

on les ajoute ensemble, & qu'on fasse $\alpha + \beta\sqrt{n} = m$,

& $\frac{u}{\sqrt{n}} + s = t$, on aura une transformée $m dt + d\tau \times$

$F(t, s) + ds \cdot \Pi(t, s)$, qui doit être une différentielle complète; les expressions $F(t, s)$, $\Pi(t, s)$ désignent les fonctions de t , & de s , qui proviennent de la substitution

de $(t-s)\sqrt{n}$ au lieu de u . Or, par le theoreme fondamental, & par la condition, nous aurons

$\frac{dm}{ds} + \frac{d \cdot F(t, s)}{ds} = \frac{d \cdot \Pi(t, s)}{ds}$. Donc en prenant s pour variable & t pour constante, on aura $m = -F(t, s)$

$+ F_t + S \cdot \frac{ds \cdot d \cdot \Pi(t, s)}{ds}$; F_t désigne une fonction de t .

2.° Si de la premiere des différentielles proposées on ôte

la seconde, & qu'on fasse $\frac{u}{\sqrt{n}} - s = y$, & $\beta\sqrt{n} - \alpha = \mu$,

ou, ce qui revient au même, si on multiplie la seconde de ces différentielles par -1 , & qu'on les ajoute ensemble, on aura une transformée $\mu dy + dy \phi' \times$

$(y, s) \rightarrow ds \cdot F''(y, s)$, qui doit être une différentielle com-
 plette; $F''(y, s)$ est une fonction de y, s . Donc on aura
 par le theoreme cité $\frac{d\mu}{ds} + \frac{d_s(y, s)}{ds} = \frac{d \cdot F'' \cdot (y, s)}{dy}$, &, en
 supposant s variable, & y constante, on aura $\mu = -$
 $\int \varphi'(y, s) \rightarrow \varphi''(y) + S \cdot \frac{d_s \cdot d \cdot F''(y, s)}{dy}$, l'expression $\varphi''(y)$
 designant une fonction de y ; on a donc les valeurs
 des quantités m, μ ; d'où l'on tirera les valeurs de α ,
 & de β , puisque $\alpha + \beta \sqrt{n} = m$, & $\beta \sqrt{n} - \alpha = \mu$, c'est
 a dire, $\alpha = \frac{m - \mu}{2}$, & $\beta = \frac{m + \mu}{2\sqrt{n}}$. Il n'y auroit aucu-
 ne difficulté dans l'intégration, quand même \sqrt{u} seroit
 imaginaire, car on pourra toujours faire evanouir les
 imaginaires de α , & de β , si ces quantités doivent être
 réelles, comme nous avons observé cy-dessus. Nous
 pourrions faire usage de la même methode dans des
 différentielles plus compliquées, telles que $\alpha ds + \beta du$,
 & $p\alpha du + p\beta ds + \gamma\beta ds + \mu\alpha ds + du \cdot \varphi(u, s) \rightarrow ds \cdot X$
 $\varphi'(u, s)$. On rendroit ces deux différentielles complet-
 tes de la même maniere; mais il suffit d'avoir indiqué
 la methode, d'autant plus que nous aurons occasion
 dans la suite de traiter de ces mêmes différentielles,
 en parlant des différentielles du second ordre; & nous
 reprendrons quelque fois des différentielles du premier
 ordre, qu'on manie plus aisément par des différentielles
 des ordres superieurs.

CHAPITRE V.

Des Regles generales du Calcul Intégral des différentielles des ordres supérieurs.

CCCCXXIII.

Nous ne repeterons point icy ce que nous avons déjà dit dans le dernier Chapitre de la première Partie sur les notions générales des différentielles des ordres supérieurs, & sur l'intégration de celles qui ne renferment qu'une seule variable x , & dans lesquelles la première différence dx est supposée constante. Nous donnerons les règles générales pour réduire les différentielles du second ordre à celles du premier, les différentielles du troisième ordre à celles du second, & ainsi de suite, lorsque la chose est possible; & pour découvrir quand elle est impossible; en commençant par les différentielles à une seule variable x , dans lesquelles la première différence x n'est pas supposée constante, & venant ensuite aux différentielles qui renferment plusieurs variables. Au reste un principe très-simple & très-second pour trouver ces règles générales est de choisir une différentielle générale d'un ordre quelconque, de la différentier en supposant la différence d'une

des variables constante, ou en laissant tout variable & d'en deduire ensuite les regles pour reduire cette différentielle a celle d'un ordre inférieur qu'on avoit choisie. Ce principe d'invention nous a été d'une grande utilité dans tout le Calcul Intégral des différentielles du premier ordre, soit pour trouver les regles generales de ce Calcul, soit pour demontrer celles qu'on avoit deja trouvées.

CCCCXXIV.

Soit $X d x$ une différentielle generale du premier ordre a une seule variable x , dans laquelle on suppose que X est une fonction quelconque de x & de constantes, & $d x$ variable. Si on la différentie, on aura $X d d x + X' d x^2$, pour la différentielle du second ordre, dans laquelle X' sera encore une fonction de x , & de constantes, telle que $X' = \frac{d X}{d x}$, puisque la différentielle de $X d x = X d d x + d x . d X = X d d x + d x . X' d x$. On conclura de cette formule generale, que toute différentielle du second ordre a une seule variable finie x , & dans laquelle $d x$ est aussi variable, ne peut-êre exacte ou reducible a une différentielle du premier ordre, a moins qu'elle ne puisse se reduire a la forme $X d d x + X' d x^2$, dans laquelle X est une fonction de x & de constantes, & $X' = \frac{d X}{d x}$. Donc, si on propose

d'intégrer une différentielle quelconque du second ordre, qui ne renferme qu'une variable finie x , avec dx aussi variable, il faudra d'abord voir s'il est possible de la réduire à la forme $Xddx + X'dx^2$, & ensuite si, après cette réduction, on trouve $X' = \frac{dX}{dx}$; car si elle n'a pas ces deux conditions, elle ne fera pas intégrable; c'est à dire, qu'on ne pourra pas la réduire à une différentielle du premier ordre. Mais, si elle a ces deux conditions, on aura d'abord son intégrale Xdx , qu'on pourra ensuite intégrer par les méthodes de la première Partie.

EXEMPLE. On propose d'intégrer la différentielle du second ordre $ax^2ddx + 2axdx^2 + b^2xddx + b^2dx^2 + cx^{-3}ddx - 3cx^{-4}dx^2$, ou $(ax^2 + b^2x + cx^{-3})ddx + (2ax + b^2 - 3cx^{-4})dx^2$. En la comparant avec la formule générale $Xddx + X'dx^2$, on aura $X = ax^2 + b^2x + cx^{-3}$, & $X' = 2ax + b^2 - 3cx^{-4}$. Il faut donc voir si $X' = \frac{dX}{dx}$. Or en prenant la différentielle de $ax^2 + b^2x + cx^{-3}$, on trouve $2axdx + b^2dx - 3cx^{-4}dx$, &, divisant par dx , le quotient est $2ax + b^2 - 3cx^{-4} = X'$. Donc la différentielle

proposée a la condition requise & son intégrale est $X dx = ax^2 dx + b^2 x dx + cx^{-3} dx$, comme on peut s'en assurer en prenant la différentielle de cette intégrale. Si on vouloit de plus l'intégrale de $X dx$, on trouveroit $\frac{1}{3} ax^3 + \frac{1}{2} b^2 x^2 - \frac{1}{2} cx^{-2} + C$ constante qu'on determineroit par la regle ordinaire.

CCCCXXV.

Soit $X ddx + X' dx^2$ la différentielle generale du second ordre a une seule variable x reductible ou non reductible au premier ordre. Si on la différencie en faisant varier dx & ddx , on aura pour la différentielle du troisieme ordre $X d^3 x + ddx.dX + 2 X' dx ddx + dx^2 . X dX = X d^3 x + X'' dx ddx + 2 X' dx ddx + X''' dx^3$, en supposant $dX = X'' dx$, & $dX' = X''' dx$, ou $X'' = \frac{dX}{dx}$, & $X''' = \frac{dX'}{dx}$.
 Donc si on propose d'intégrer ou de reduire au second ordre une différentielle du troisieme ordre, qui ne renferme qu'une seule variable finie x , & dans laquelle les différences dx & ddx soient aussi variables, il faudra d'abord la reduire a la forme $X d^3 x + X'' dx ddx + 2 X' dx ddx + X''' dx^3$, & voir ensuite si elle a les conditions requises, ou si elle donne les equations $X'' = \frac{dX}{dx}$;

$\frac{dX}{dx}$, & $X'' = \frac{dX'}{dx}$. Si elle n'a pas ces conditions, elle sera irréductible; si elle les a, son intégrale sera $X dd\pi + X'd\pi^2$.

EXEMPLE. Soit proposée la différentielle du troisième ordre $a\pi^3 d^3\pi + 3a\pi^2 d\pi dd\pi + 2b\pi^2 d\pi ddd\pi + 2b\pi d\pi^3$, en la comparant terme à terme avec la formule générale $X d^3\pi + X'' d\pi dd\pi + 2X' d\pi ddd\pi + X''' d\pi^3$, on trouve $X = a\pi^3$, $X'' = 3a\pi^2$, $X' = b\pi^2$, $X''' = 2b\pi$. Il faut donc voir si on trouve aussi les deux égalités $X'' = \frac{dX'}{dx}$, & $X''' = \frac{dX''}{dx}$. Or puisque $X = a\pi^3$, on aura $dX = 3a\pi^2 d\pi$, par conséquent $\frac{dX}{dx} = 3a\pi^2 = X''$, & puisque $X' = b\pi^2$, on aura $dX' = 2b\pi d\pi$; par conséquent $\frac{dX'}{dx} = 2b\pi = X'''$: donc l'équation proposée a les conditions requises, & son intégrale est $X dd\pi + X'd\pi^2 = a\pi^3 dd\pi + b\pi^2 d\pi^2$.

CCCCXXVI.

On pourroit trouver quelques difficultés dans la comparaison de la différentielle proposée avec la formule

Ff

générale. Car cette formule étant exprimée ainsi $X d^3 X + (X'' + 2 X') dx ddx + X''' dx^3$ & la différentielle proposée de cette manière $ax^3 d^3 x + (3ax^2 + 2bx^2) dx ddx + 2bx dx^3$ on trouveroit d'abord $X = ax^3$, & $X'' = 2bx$, mais on pourroit être embarrassé pour déterminer les valeurs de X' & de X''' par l'équation $X'' + 2 X' = 3ax^2 + 2bx^2$. Cette difficulté disparoit en faisant attention aux deux égalités $X'' = \frac{dX'}{dx}$, & $X''' = \frac{dX''}{dx}$, lorsque la différentielle proposée est intégrable, ou reductible au second ordre. Car puisqu'on a déjà trouvé $X = ax^3$ & que $X' = \frac{dX}{dx} = \frac{3ax^2 dx}{dx}$, on aura $X'' = 3ax$, & par conséquent $2 X' = 2bx^2$, & $X' = bx^2$, à cause de l'équation $X'' + 2 X' = 3ax^2 + 2bx^2$. On peut appliquer ces réflexions à tous les cas.

CCCCXXVII.

Si on suppose que la seconde différence ddx soit constante, on aura $d^3 x = 0$, & la formule générale deviendra $(X'' + 2 X') dx ddx + X''' dx^3$, & on aura les deux égalités $X''' = \frac{dX''}{dx}$, & $X'' = \frac{dX'}{dx}$. Dans la même

supposition la différentielle proposée dans l'exemple précédent sera $(3ax^2 + 2bx^2)dx + 2bx dx^2$. En la comparant avec la formule générale, on trouve $X'' = 2bx$, & $X'' + 2X' = 3ax^2 + 2bx^2$; & par l'égalité $X'' = \frac{dX'}{dx}$, on aura $2bx dx = dX'$, ce qui donne par intégration $X' = bx^2$, & par conséquent $X'' = 3ax^2$ par l'équation $X'' + 2X' = 3ax^2 + 2bx^2$. Enfin, par ce que $X'' = \frac{dX'}{dx}$, on aura $3ax^2 dx = dX'$, & en intégrant, $X' = ax^3$.

Donc l'intégrale $X dx + X' dx^2$ sera $ax^3 dx + bx^2 dx^2$. On voit assez par tout ce que nous venons de dire comment on peut appliquer notre méthode aux différentielles à une seule variable du quatrième ordre, ensuite à celles du cinquième ordre, & aux autres suivantes.

CCCCXXVIII.

On a souvent besoin, surtout dans les questions de *maximis* & *minimis*, de supposer une quantité différentielle égale à zéro. Lorsque cette équation différentielle est du premier ordre, & ne contient qu'une seule variable x , on n'a pas besoin du calcul intégral pour la résoudre. Car, si on a l'équation $X dx = 0$, en divisant par dx , on trouve d'abord l'équation $X = 0$, qui

ne renferme plus de différences. Mais si l'équation différentielle a une seule variable x est d'un ordre supérieur, & qu'elle contienne des différences de divers ordres dx , ddx , d^3x , &c., on ne peut la résoudre de cette manière, & il faut avoir recours au calcul intégral. Dans ce cas on cherchera d'abord, si l'équation différentielle proposée est intégrable, par la méthode que nous venons d'expliquer, & on l'intégrera, si la chose est possible. Mais si la quantité différentielle de cette équation n'est pas exacte, ou n'a pas les conditions requises dans l'état où elle se trouve, on la multipliera par une fonction indéterminée de x , que nous désignerons par M ; ensuite on déterminera la valeur de M par les conditions requises, pour rendre exacte la quantité différentielle qu'on a multipliée.

CCCCXXIX.

Toutes les équations différentielles du second ordre a une seule variable sont intégrables par cette méthode. Car soit $X d d x + X' d x^2 = 0$ l'équation différentielle générale du second degré a une seule variable x . En la multipliant par M , que nous supposons être une fonction indéterminée de x , on aura $M X d d x + M X' d x^2 = 0$, & puisque $M X d d x + M X' d x^2$ est une différentielle exacte du second ordre, dans laquelle

MX & MX' font des fonctions de x (par hyp.), on aura (Art. CCCCXXIV.) l'équation $MX'dx = d.(MX) = MdX + XdM$, & l'intégrale cherchée fera $MXdx = 0$. de l'équation $MX'dx = MdX + XdM$, on tire

$$\frac{X'dx - dX}{X} = \frac{dM}{M}, \text{ \&, en intégrant, } S. \frac{X'dx}{X} - L. X =$$

$$L. M, \text{ \& } S. \frac{X'dx}{X} = L. XM; \text{ \& en supposant } L. e = 1,$$

$$\text{on aura } e^{S. \frac{X'dx}{X}} = XM \text{ \& } M = \frac{e^{S. \frac{X'dx}{X}}}{X}. \text{ Donc l'in-}$$

$$\text{tégrale cherchée fera } \frac{e^{S. \frac{X'dx}{X}}}{X} \cdot Xdx = e^{S. \frac{X'dx}{X}} dx = 0,$$

$$\text{\& en divisant par } dx, e^{S. \frac{X'dx}{X}} = 0, \text{ ou, en intégrant}$$

$$\text{encore l'équation } e^{S. \frac{X'dx}{X}} dx = 0, \text{ on aura } S. e^{S. \frac{X'dx}{X}} dx = C \text{ constante. C. Q. F. D.}$$

CCCCXXX.

Il n'en est pas de même de toutes les équations différentielles du troisième ordre à une seule variable; car il s'en trouve une infinité, qui n'ont pas toutes les conditions requises pour être réduites au second ordre; même après qu'on les a multipliées par une fonction indéterminée de x , de sorte qu'on ne peut trouver le facteur M , qui les rende intégrables; mais, lorsqu'elles

auront toutes les conditions necessaires, on pourra les resoudre par la même methode.

CCCCXXXI.

La différentielle generale du second ordre a une seule variable x , ou $Xddx + X'dx^2$ peut facilement se reduire a la forme d'une différentielle du premier ordre a deux variables x & y . Car en supposant $ddx = dy$, & par consequent $dx = y$, & substituant, on changera la proposée en $Xdy + X'ydx$, dont on pourra chercher l'intégrale par les regles que nous avons données pour l'intégration des différentielles du premier ordre a deux variables; & en remettant ensuite dx pour y dans cette intégrale, elle deviendra une différentielle du premier ordre a une seule variable x . De même la différentielle generale du troisieme ordre, qu'on peut exprimer par cette formule $Xd^3x + X'dx ddx + X''dx^3$ se reduit a la forme d'une différentielle du second ordre a deux variables x, z , en faisant $d^3x = ddz$; $ddx = dz$ & $dx = z$; ce qui changera la proposée en $Xddz + X'dz dz + X''z dx^2$, & cette différentielle du second ordre se reduit a une différentielle du premier ordre a trois variables x, z, u , en faisant de plus $ddz = du$, & $dz = u$, & la proposée deviendra

$X du + X' z dz + X'' z dz + X''' z^2 dn$. Il est evident qu'on pourra faire les mêmes transformations a l'égard des différentielles a une seule variable du 4.^e, 5.^e, &c. ordre, qui pourront toutes se reduire a des différentielles inférieures a plusieurs variables. Mais nous n'indiquons cette methode, que pour sa generalité, elle conduiroit a des calculs trop embarassants, il vaut mieux se servir de la premiere, qui est très-simple. Il nous reste a observer que cette premiere methode fournit immédiatement la différentielle du premier ordre, si cela est possible. Mais il arrive souvent qu'une différentielle d'un ordre supérieur n'est pas reductible a une différentielle d'un ordre inférieur, & on le connoîtra aisément par les operations que nous avons prescrites.

Ainsi la différentielle du troisieme ordre $ax^3 d^3 x + 3ax^2 dx ddx + 2bx^2 dx ddx + 2bx dx^3$, que nous avons reduite a la différentielle $ax^3 ddx + bx^2 dx^2$, n'est pas reductible a une différentielle du premier ordre, puisqu'en prenant cette différentielle du premier ordre par la methode que nous avons démontrée, & la différentiant de nouveau, on ne retrouve pas la différentielle du second ordre $ax^3 ddx + bx^2 dx^2$, comme il le faudroit. Nous allons appliquer cette même methode aux différentielles a plusieurs variables, de quelqu'ordre

qu'elles soient, & quelque soit le nombre des variables.

CCCCXXXII.

Soit $A dx + B dy$ la différentielle generale du premier ordre a deux variables x & y , dans laquelle A & B representent des fonctions quelconques de x & de y , & a laquelle on peut reduire toutes les différentielles du second ordre a deux variables, lorsqu'elles sont reductibles au premier ordre. Si on la différentie en supposant dx & dy variables, on aura pour sa différentielle $A ddx + dA \cdot dx + B ddy + dB \cdot dy$, & en supposant que A' , A'' , B' , B'' soient encore des fonctions de x & de y , & que $dA = A' dx + A'' dy$, & $dB = B' dy + B'' dx$, on aura la formule generale $A ddx + A' dx^2 + A'' dx dy + B ddy + B' dy^2 + B'' dy dx$, ou $A ddx + A' dx^2 + (A'' + B'') dx dy + B ddy + B' dy^2$, qui sera reductible a la différentielle du premier ordre $A dx + B dy$, quand on aura les deux equations, ou conditions $dA = A' dx + A'' dy$, & $dB = B' dy + B'' dx$, & on trouvera d'abord les deux termes $A ddx$, $B ddy$ de la formule generale, en comparant avec ceux de la différentielle proposée du second ordre, où se trouvent aussi les secondes différences ddx & ddy . Lors donc qu'on se proposera d'intégrer, ou de reduire au premier ordre

ordre une différentielle quelconque du second ordre a deux variables x & y , dans laquelle dx & dy ont été supposés variables, on la comparera terme a terme avec la formule generale $A dx dx + A' dx^2 + (A'' + B') \times dx dy + B dd y + B' dy^2$, & on determinera d'abord les valeurs des fonctions A & B par la comparaison des termes, où se trouvent les secondes différences $dx dx$ & ddy ; on prendra $A dx + B dy$ pour l'intégrale de la proposée du second ordre; ensuite on différenciera l'intégrale trouvée $A dx + B dy$, & si la différentielle convient avec la proposée, on aura ce qu'on cherche, si elle ne convient pas, la proposée ne sera pas reducible au premier ordre.

Par exemple, si la proposée étoit $ax^2y ddx + 2ay dx^2 + (ax^2 + 3b^2y^2x^2) dx dy + b^2x^3y^2 ddy + 2b^2x^2y dy^2$, en comparant le terme $ax^2y ddx$ avec le terme correspondant $A dx dx$ de la formule generale, on trouve $A = ax^2y$; & de même en comparant le terme $b^2x^3y^2 ddy$ avec le terme correspondant $B ddy$ de la formule generale, on trouve $B = b^2x^3y^2$ ce qui donne pour l'intégrale de la proposée $ax^2y dx + b^2x^3y^2 dy = A dx + B dy$; & on trouve icy que la

différentielle convient avec la différentielle du second ordre proposée, d'où l'on conclut que $ax^2y dx + b^2x^3y^2 dy$ est la véritable intégrale cherchée du premier ordre.

CCCCXXXIII.

Si on suppose $d\kappa$ constante dans la différentielle générale du premier ordre $A d\kappa + B dy$, la différentielle du premier terme $A d\kappa$, ou $d(A d\kappa)$ sera $A' d\kappa^2 + A'' d\kappa dy$, en supposant que $A' d\kappa$ est la différentielle de A prise dans l'hypothèse de κ seule variable dans A ; par conséquent, si on prend l'intégrale du terme $A' d\kappa$ en ne faisant varier que κ dans A' , cette intégrale sera A . Donc dans la supposition de $d\kappa$ constante, la formule générale de la différentielle du second ordre sera $A' d\kappa^2 + (A'' + B'') d\kappa dy + B ddy + B' dy^2$, qu'on trouve en effaçant dans la formule de l'Article précédent le premier terme $A d d\kappa$, qui devient nul, à cause de $d\kappa$ constante, ou de $d d\kappa = 0$. Cette formule sera réductible à une différentielle du premier ordre $A d\kappa + B dy$, quand on aura les deux équations de condition $dA = A' d\kappa + A'' dy$, & $dB = B' dy + B'' d\kappa$, & alors en comparant la formule $A' d\kappa^2 + (A'' + B'') d\kappa dy + B ddy + B' dy^2$ avec la diffé-

rentielle proposée du second ordre, dans laquelle $d\pi$ est supposée constante, on trouvera d'abord la valeur de B par la comparaison du terme $Bddy$ avec son correspondant pris dans la différentielle proposée; & on trouvera aussi la valeur de A' par la comparaison du terme $A'd\pi^2$ avec son correspondant pris dans la différentielle proposée; ensuite on intégrera le terme $A'd\pi$ dans la supposition de π seule variable & l'intégrale sera A . Donc en substituant les deux valeurs de A & de B dans la formule $A'd\pi + Bdy$, on aura l'intégrale, ou la réduite de la différentielle proposée du second ordre, à laquelle on ajoutera une constante indéterminée $Cd\pi$, qu'on déterminera ensuite par l'état de la question suivant la règle. Enfin pour s'assurer que l'intégrale trouvée est exacte, on en prendra la différentielle, & on la comparera avec la proposée du second ordre. Si elles conviennent, on aura ce qu'on cherchoit; si elles ne conviennent point, la proposée ne sera pas réductible au premier ordre.

EXEMPLE. Soit proposée la différentielle du second ordre $2ay\pi d\pi^2 + (a\pi^2 + 3b^2\pi^2y^2)d\pi dy + b^2 \times \pi^3y^2ddy + 2b^2\pi^3ydy^2$, dans laquelle $d\pi$ est constante. En la comparant avec la formule générale, on trouve d'abord $Bddy = b^2\pi^3y^2ddy$; par conséquent

$B = b^2 x^3 y^2$. On trouve ensuite $A' d x^2 = 2 a y x d x^2$; par conséquent $A' = 2 a y x$, $A' d x = 2 a y x d x$, & en intégrant $2 a y x d x$, en ne faisant varier que x , on aura l'intégrale $a y x^2 = A$. Donc la proposée du second ordre se réduit à la différentielle du premier ordre $a y x^2 d x + b^2 x^3 y^2 d y + C d x$, & cette réduite est exacte, puisque sa différentielle est la même que la proposée.

CCCCXXXIV.

Il peut arriver que dans la différentielle proposée du second ordre il manque quelque terme de ceux qui se trouvent dans la formule générale, & que néanmoins cette différentielle soit réductible au premier ordre; par exemple, si la proposée étoit $2 a y x d x^2 + (a x^2 + 3 b x^2) d x d y + b x^3 d d y$, dans laquelle $d x$ est constante, & qui n'a point de terme correspondant au terme $B' d y^2$ de la formule générale, on trouveroit $B' = 0$, $B = b x^3$, & $A' = 2 a y x$; par conséquent $A' d x = 2 a y x d x$; & en intégrant ce terme dans la supposition de x seule variable, on auroit $A = a y x^2$. Donc l'intégrale cherchée, ou la réduite du premier ordre seroit $a y x^2 d x + b x^3 d y + C d x$, qui est encore exacte, puisque sa différentielle est la même que la proposée.

CCCCXXXV.

On trouvera par la même methode les formules generales, & les equations de condition, pour reduire les différentielles du troisieme ordre a deux variables, aux différentielles du second ordre, les différentielles du quatrieme ordre a celles du troisieme, & ainsi de suite, lorsqu'elles sont reductibles, & pour connoître lorsqu'elles sont reductibles, soit qu'elles renferment des différences constantes, ou que ces différences soient toutes variables, il n'y aura d'autres difficultés, que celles qui viennent de la longueur inevitable des calculs.

Car soit $A dx^2 + A' dx dy + B dy^2 + B' dy^2$ la différentielle generale du second ordre a deux variables x & y , dans laquelle dx est supposée constante, A, A', B, B' des fonctions de x , de y , & de constantes. En la différentiant terme par terme, on trouve que la différentielle du troisieme ordre est $dA dx^2 + A' dx ddy + dA' dx dy + B d^3 y + dB ddy + 2B' dy ddy + dB' dy^2$. Or puisque A, A', B, B' sont des fonctions de x & de y , on aura les equations suivantes $dA = A'' dx + A''' dy$, en supposant $A'' = \frac{(dA)}{dx}$, & $A''' = \frac{(dA)}{dy}$. C'est a dire que A'' sera une fonction de x & de y , & de constantes, qu'on trouve en differentiant la fonction A , dans la supposition de x seule variable, & de y constante, &

que A''' fera aussi une fonction de x , de y , & de constantes, qu'on trouve en différenciant la fonction A dans la supposition de y seule variable, & de x constante.

$$dA' = A^{IV} dx + A^V dy, \text{ en supposant } A^{IV} = \frac{(dA')}{dx}, \text{ \& } A^V = \frac{(dA')}{dy}$$

$$dB = B'' dy + B''' dx, \text{ en supposant } B'' = \frac{(dB)}{dy}, \text{ \& } B''' = \frac{(dB)}{dx}$$

$$dB' = B^{IV} dy + B^V dx, \text{ en supposant } B^{IV} = \frac{(dB')}{dy}, \text{ \& } B^V = \frac{(dB')}{dx}$$

Si on substitue ces valeurs dans la différentielle générale du troisième ordre $dAdx^2 + A'dxdy + Cc.$ que nous avons trouvée cy-dessus, elle deviendra $A''dx^3 + A'''dydx^2 + A'dydx^2 + A^{IV}dydx^2 + A^Vdx^2dy^2 + Bd^3y + B''dyddy + B'''dxddy + 2B'dyddy + B^{IV} \times dy^3 + B^Vdx^2dy^2 = A''dx^3 + (A''' + A^{IV})dydx^2 + (A' + B''')dxddy + (A^V + B^V)dx^2dy^2 + Bd^3y + (2B' + B'')dyddy + B^{IV}dy^3$; formule que nous désignerons par (K).

Lors donc qu'on voudra intégrer, ou réduire au second ordre une différentielle quelconque du troisième ordre, à deux variables x & y , dans laquelle dx soit constante, on la comparera avec la formule générale (K), & on déterminera d'abord les valeurs de A'' , de B , & de B^{IV} par la comparaison des termes $A''dx^3$;

$B d^3 y$, $B^{IV} dy^3$ avec les termes correspondans pris dans la différentielle proposée. Ensuite on trouvera la valeur de A par l'équation $\frac{(dA)}{dx} = A''$, qui donne $dA = A' dx$, & $A = S. A' dx$, en prenant cette intégrale dans la supposition de x seule variable, & de y constante dans la fonction A'' . Après cela on trouvera la valeur A'' par l'équation $A'' = \frac{(dA)}{dy}$. De là, & de l'équation entre le terme de la formule générale $(A'' + A^{IV}) dy dx^2$, & le terme correspondant de la différentielle proposée, on tirera la valeur de A^{IV} . On tirera la valeur de B'' par l'équation $\frac{(dB)}{dx} = B''$; & de là, & de l'équation entre le terme $(A' + B'') dx ddy$, & le terme correspondant de la proposée, on tirera la valeur de A . Pour trouver celle de B' on cherchera d'abord la valeur de B'' par l'équation $B'' = \frac{(dB)}{dy}$; ensuite on se servira de l'équation entre le terme $(2B' + B'') \times dy ddy$, & le terme correspondant de la proposée, pour déterminer la valeur de $2B'$, & par conséquent celle de B' . Après ces opérations on aura les valeurs de A , de A' , de B , & de B' , qu'on substituera dans la différentielle générale du second ordre $A dx^2 + A' dx dy$

$+ B d d y + B d y^2$; & on aura l'intégrale ou la reduite cherchée, dont on s'assûrera en prenant sa différentielle & en comparant cette différentielle avec la proposée: Si elles conviennent, on aura l'intégrale cherchée, en y ajoutant la constante indeterminée $C d x^2$; si elles ne conviennent pas, la proposée ne sera pas reductible au second ordre.

EXEMPLE. Soit proposée la différentielle du troi-
 sieme ordre $a y d x^3 + a x d y d x^2 + (b y + 2 c x) d x d d y$
 $+ (b + f) d x d y^2 + c x^2 d^3 y + 2 f x d y d d y$, dans laquel-
 le $d x$ est constante. En la comparant avec la formule
 generale (K), on trouvera d'abord $A'' = a y$, $B = c x^2$,
 & $B^{IV} = 0$. Ensuite $A = S. A'' d x = a y x$, $A''' = \frac{(d A)}{d y} =$
 $a x$; $a x + A^{IV} = A x$: donc $A^{IV} = 0$; $B'' = \frac{(d B)}{d x} =$
 $\frac{2 c x d x}{d x} = 2 c x$; $A' + 2 c x = b y + 2 c x$, donc $A' = b y$; B'
 $= \frac{(d B)}{d y} = 0$; $2 B' + B'' = 2 B' = 2 f x$; $B' = f x$. On aura
 donc $A = a y x$, $A' = b y$, $B = c x^2$, & $B' = f x$, & en
 substituant ces valeurs dans la différentielle generale du
 second ordre, elle devient $a y x d x^2 + b y d x d y + c x^2 d d y$
 $+ f x d y^2 + C d x^2$, en ajoutant la constante $C d x^2$; &
 en la différentiant, on retrouve exactement la proposée.

CCCCXXXVI.

On trouve par la même méthode les formules générales, & les equations de condition pour reduire les différentielles a 3, 4, 5, &c. variables d'un ordre supérieur aux différentielles d'un ordre inférieur d'un degré, lorsqu'elles sont reductibles, & pour connoître quand elles sont irreductibles.

Car soit $A dx + B dy + C dz$ la différentielle générale du premier ordre a trois variables: x, y, z , dans laquelle: A, B, C sont des fonctions quelconques de ces variables & de constantes. En la différentiant on trouve la formule générale des différentielles du second ordre a trois variables: $A dd x + d A dx + B dd y + d B dy + C dd z + d C dz$, en supposant que les trois différences dx, dy, dz sont variables. Nous désignerons cette formule par (H), & nous formerons les equations suivantes:

$$dA = A' dx + A'' dy + A''' dz, \text{ en supposant } A' = \frac{(dA)}{dx}; A'' = \frac{(dA)}{dy}; A''' = \frac{(dA)}{dz}$$

$$dB = B' dx + B'' dy + B''' dz, \text{ en supposant } B' = \frac{(dB)}{dx}; B'' = \frac{(dB)}{dy}; B''' = \frac{(dB)}{dz}$$

$$dC = C' dx + C'' dy + C''' dz, \text{ en supposant } C' = \frac{(dC)}{dx}; C'' = \frac{(dC)}{dy}; C''' = \frac{(dC)}{dz}$$

Si on substitue dans la formule (H) les valeurs de dA , de dB , & de dC , que donnent ces equations, cette formule deviendra: $A dd x + A' dx^2 + A'' dy dx +$

Hh

$A''' dx dx + B ddy + B' dx dy + B'' dy^2 + B''' dx dy +$
 $C ddz + C' dx dz + C'' dy dz + C''' dz^2 = A ddz + A' dz^2$
 $+ (A'' + B') dx dy + (A''' + C') dx dz + B ddy + B'' dy^2$
 $+ (B''' + C'') dy dz + C ddz + C''' dz^2$, formule que
 nous designerons par (K).

Lors donc qu'on se proposera de reduire au premier ordre une différentielle quelconque du second ordre a trois variables x, y, z , dans laquelle les trois différences dx, dy, dz seront aussi variables, on la comparera avec la formule generale (K), & on determinera d'abord les valeurs de A , de B , & de C ; celle de A en égalant $A ddz$ au terme correspondant de la différentielle proposée, celle de B en égalant $B ddy$ au terme correspondant de la proposée, & celle de C en égalant $C ddz$ au terme correspondant de la proposée. Ensuite on substituera ces valeurs au lieu de A, B, C dans la formule generale du premier ordre $A dx + B dy + C dz$, qui sera l'intégrale cherchée, lorsque la différentielle proposée du second ordre sera reductible au premier ordre; & on s'en assurera en différentiant cette intégrale, & en comparant la différentielle avec la proposée.

Si on suppose que l'une des trois différences premières dx, dy, dz soit constante, on effacera dans la formule (K) le terme où se trouve la seconde différen-

ce de la variable, dont la premiere différence est supposée constante. Ainsi si on suppose dx constante, on effaçera dans la formule (K) le terme $Addx$, qui devient nul a cause de $ddx=0$, & le reste fera la formule generale convenable a la supposition de dx constante.

EXEMPLE. Soit proposée la différentielle du second ordre a trois variables avec leurs premieres différences aussi variables $ax^3y^2ddx+3ay^2x^2dx^2+(2ax^3y+bx^2)dx dy+bxz^2ddy+2bxzdydz$. On aura par les comparaisons prescrites $Addx=ax^3y^2ddx$, $Bddy=bxz^2ddy$, & $C=0$, d'où l'on tire $A=ax^3y^2$, $B=bxz^2$, & $C=0$; par conséquent l'intégrale sera $ax^3y^2+bxz^2dy$, qui est exacte, puisqu'en la différentiant on retrouve la différentielle proposée.

CCCCXXXVII.

Ces exemples suffisent pour faire comprendre la generalité de la methode, & il seroit trop long d'entrer dans de plus grands details. Nous ajouterons icy un mot sur une autre methode également generale, que nous avons indiquée en parlant des différentielles d'ordres supérieurs a une seule variable. C'est d'introduire dans la différentielle proposée d'un ordre supérieur de nouvelles variables, avec leurs différences moins hautes de l'unité, que les plus hautes différences de chaque variable dans la proposée; enforte, par

exemple, que, si la plus haute différence de x dans la différentielle proposée est $d^3 x$, on suppose $d^3 x = ddx$, par conséquent $ddx = dx$; si la plus haute différence de y dans la proposée est ddy , on suppose $ddy = du$; par conséquent $dy = u$, & ainsi des autres différences. On substitue ensuite dans la proposée les valeurs trouvées d'une manière convenable pour diminuer d'un degré l'ordre de cette différentielle, & on cherche après cela l'intégrale de la différentielle proposée réduite à la forme d'une différentielle d'un ordre inférieur d'un degré par les règles qui sont propres à cet ordre.

Soit, par exemple, $A dx^2 + A' dx dy + B dy^2$ la différentielle générale du second ordre à deux variables x & y , dans laquelle on suppose dx constante. En faisant $dx = c$ constante, & $ddy = du$, par conséquent $dy = u$, on la réduira à la forme d'une différentielle du premier ordre à trois variables x, y, u , & elle deviendra, en substituant, $Acdx + A'cdy$ ou $(A'udx) + Bdu + B'udy$, dont on cherchera l'intégrale par les règles qu'on a données pour intégrer les différentielles du premier ordre à trois variables; & quand on aura trouvé cette intégrale, on y remettra dx au lieu de c , & dy au lieu de u , & on aura une différentielle du premier ordre à deux variables x & y , pour l'intégrale ou la réduite de la proposée du second ordre.

Nous allons passer maintenant à l'application de notre première méthode générale aux mêmes différentielles mises en équations, c'est à dire, égalées à zero.

CCCCXXXVIII.

On voit bien d'abord que, si ces différentielles prises absolument & sans être égalées à zero, sont intégrables, ou réductibles à un ordre inférieur, on trouvera leurs intégrales par les règles que nous avons données, & que ces intégrales égalées à zero, ou à une constante de leur ordre seront les intégrales des équations proposées. Mais si ces mêmes différentielles ne sont pas réductibles à un ordre inférieur dans l'état où elles sont, il n'en faut pas conclure qu'elles soient irréductibles sous la forme d'équations; car il pourroit arriver qu'en les multipliant par un facteur commun, elles devinssent réductibles, comme nous l'avons déjà éprouvé dans les équations différentielles du premier ordre (Chap. I. Part. II.). Lors donc qu'on a trouvé par les règles précédentes, que la quantité différentielle, qui est égale à zero dans l'équation proposée, n'est pas exacte dans l'état où elle est, il faudra la multiplier par un facteur indéterminé, qu'on supposera composé, comme il sera convenable, de variables & de constantes; & ensuite on déterminera ce facteur, lorsqu'il sera possible, par les équations auxquelles il devra

fatisfaire. C'est ce que nous allons expliquer plus en detail.

CCCCXXXIX.

Supposé que $Eddx + Fdx^2 + Gdx dy + Hddy + Kdy^2 = 0$ soit l'équation différentielle quelconque du second ordre, qu'on se propose de reduire au premier ordre, & que E, F, G, H, K soient des fonctions des deux variables x, y , & de constantes, avec les premieres différences dx & dy variables. On cherchera d'abord par les regles precedentes, si cette différentielle prise absolument & dans l'état où elle est, peut se reduire au premier ordre, & lorsqu'on aura trouvé qu'elle n'est pas reductible en cet état, on la multipliera par un facteur indeterminé M , qu'on supposera être une fonction quelconque des variables x, y , & de constantes, & on la changera dans l'équation $MEddx + MFdx^2 + MGdx dy + MHddy + MKdy^2 = 0$, qu'on regardera comme une equation reductible au premier ordre. On la comparera dans cette supposition avec la formule generale $Addx + A'dx^2 + (A'' + B'')dx dy + Bddy + B'dy^2$, qui est reductible a la différentielle du premier ordre $A dx + B dy$, lorsqu'on a les quatre equations $A = \frac{(dA)}{dx}$,

$A'' = \frac{(dA)}{dy}$, $B' = \frac{(dB)}{dy}$, & $B'' = \frac{(dB)}{dx}$. Car les deux autres equations $dA = A'dx + A''dy$, & $dB = B'dy + B''dx$ ne font que des consequences necessaires des quatre premieres. Cette comparaison donnera les cinq equations suivantes $A = ME$, $A' = MF$, $A'' + B'' = MG$, $B = MH$, $B' = MK$, d'où l'on tirera l'equation $MF = \frac{(d.ME)}{dx}$, au lieu de l'equation $A' = \frac{(dA)}{dx}$; l'equation $MK = \frac{(d.MH)}{dy}$, au lieu de $B' = \frac{(dB)}{dy}$; $A'' = \frac{(dA)}{dy} = \frac{(d.ME)}{dy}$; $B'' = \frac{(dB)}{dx} = \frac{(d.MH)}{dx}$, & l'equation $MG = \frac{(d.ME)}{dy} + \frac{(d.MH)}{dx}$, au lieu de l'equation $MG = A'' + B''$. On aura donc les trois equations suivantes

$$\text{I. } MF = \frac{(d.ME)}{dx} = \frac{M(dE)}{dx} + \frac{E(dM)}{dx}.$$

$$\text{II. } MK = \frac{(d.MH)}{dy} = \frac{M(dH)}{dy} + \frac{H(dM)}{dy}.$$

$$\text{III. } MG = \frac{(d.ME)}{dy} + \frac{(d.MH)}{dx} = \frac{M(dE)}{dy} + \frac{E(dM)}{dy} + \frac{M(dH)}{dx} + \frac{H(dM)}{dx}.$$

On trouve par la premiere de ces trois equations

$$\frac{(dM)}{dx} = \frac{MF}{E} - \frac{M}{E} \cdot \frac{(dE)}{dx}, \text{ \& par la seconde } \frac{(dM)}{dy} = \frac{MK}{H}$$

$-\frac{M}{H} \cdot \frac{(dH)}{dy}$; substituant ces valeurs, de $\frac{(dM)}{dx}$ & de $\frac{(dM)}{dy}$ dans la troisieme equation, & divisant par M , qui se trouve dans tous ses termes, elle devient $G = \frac{EK}{H}$ —

$$\frac{E(dH)}{Hdy} + \frac{(dF)}{dy} + \frac{(dH)}{dx} + \frac{FH}{E} - \frac{H}{E} \cdot \frac{(dE)}{dx},$$
 equation de

condition, que doit donner la proposée, pour qu'on puisse la rendre reductible au premier ordre, en la multipliant par M . Si la proposée ne donne point cette equation de condition, il faudra l'abandonner comme irreductible; mais si elle donne cette equation, on prendra pour le facteur M une fonction generale des variables x & y , & de constantes indeterminées, & on cherchera ensuite a determiner le tout au moyen des

$$\text{deux equations, } MF = \frac{M(dE)}{dx} + \frac{E(dM)}{dy}, \text{ \& } MK =$$

$$\frac{M(dH)}{dy} + \frac{H(dM)}{dx},$$
 auxquelles le facteur M doit satisfaire.

EXEMPLE. Soit proposée l'équation du second ordre: $ax^2y ddx + 3ayn:dn^2 + (2an^2 + 2by^3) dndy +$

$4ny^3 ddy + 4bny^2 dy^2 = 0$. Si on compare la quantité différentielle de cette equation avec la formule generale

$$Addx + A'dn^2 + (A'' + B'') dndy + B'ddy + B'by^2,$$

on trouvera $A = ax^2y$, $B = by^3$, & $A'dx + B'dy =$

$$ax^2y dx$$

$ax^2y dx + by^3 dy$. Mais en différenciant cette quantité, on trouve que la différentielle $ax^2y ddx + 2ayx dx^2 + (ax^2 + by^3) dx dy + by^3 ddy + 3by^2 dy^2$ ne convient pas avec la proposée; d'où l'on conclut que la quantité

$ax^2y dx + by^3 dy$ n'est pas l'intégrale qu'on cherche. Il faut donc voir si on pourra trouver un facteur M , fonction de x & de y , qui, en multipliant la proposée, la rende intégrable. Pour cela on comparera la proposée

avec la formule générale $E ddx + F dx^2 + G dx dy + H ddy + K dy^2$, & on aura les valeurs suivantes $E =$

ax^2y , $F = 3ayx$, $G = 2ax^2 + 2by^3$, $H = by^3$, $K = 4by^2$; & substituant ces valeurs dans l'équation de condition

$$G = \frac{EK}{H} - \frac{E(dH)}{Hdy} + \frac{(dE)}{dy} + \frac{(dH)}{dx} + \frac{FH}{E} - \frac{H}{E} \cdot \frac{(dE)}{dx},$$

on trouve $2ax^2 + 2by^3 = \frac{ax^2y \times 4by^2}{by^3} - \frac{ax^2y \times 3by^2}{bx^3} +$

$$ax^2 + by^3 + \frac{3ayx \times by^3}{ax^2y} - \frac{by^3}{ax^2y} \cdot 2axy = 4ax^2 - 3ax^2$$

$$+ ax^2 + by^3 + 3by^3 - 2by^3 = 2ax^2 + 2by^3 \text{ . } \text{Donc}$$

l'équation de condition a lieu; & on cherchera le facteur

M au moyen des deux équations $MF = \frac{(d.EM)}{dx}$,

$$\& MK = \frac{(d.HM)}{dy}, \text{ ou } 3ayxM = \frac{(d.ax^2yM)}{dx}, \& 4by^2M =$$

$\frac{(d. bxy^3M)}{dy}$. Supposons $M = x^m y^n$, les exposans m & n étant indeterminés, on doit donc avoir les deux equations $3ay^{n+1}x^{m+1} = \frac{(d. ax^{m+2}y^{n+1})}{dx} = (m+2) \times ax^{m+1}y^{n+1}$, & $4bx^{m+1}y^{n+2} = \frac{(d. bx^{m+1}y^{n+3})}{dy} = (n+3)bx^{m+1}y^{n+2}$; d'où l'on tire $m+2=3$, & $n+3=4$; par conséquent $m=1$, & $n=1$. Le facteur M fera donc xy , & en effet si l'on multiplie l'équation proposée par xy , elle devient $ax^3y^2 ddx + 3ay^2x^2 dx^2 + (2ax^3y + 2bnxy^4) dx dy + bx^2y^4 ddy + 4bx^2y^3 dy^2 = 0$, & son intégrale exacte est $ax^3y^2 dx + bx^2y^4 dy = 0$.

CCCCXL

Nous ne pousserons pas plus loin l'application de cette premiere methode. On comprend facilement par ce que nous avons dit sur les différentielles du troisieme ordre & des supérieurs a 2, 3, &c. variables, & par les Articles precedens, comment on peut s'en servir pour les equations a 2, 3, &c. variables des ordres plus élevés que le second. Toute la difficulté consiste dans la longueur des calculs, qui est inévitable, lorsqu'

il s'agit des equations différentielles du 3.^e, 4.^e, &c. ordre, & surtout lorsqu'elles contiennent plus de deux variables. Il n'est pas même nécessaire que nous traitions icy des equations différentielles, dans lesquelles on suppose une premiere différence, comme dx , constante, car nous allons donner une methode generale pour rendre variables toutes les premieres différences dans toutes les equations différentielles, où l'on en aura supposé une constante, & reciproquement nous donnerons la methode de rendre a volonté une des deux différences constante, & enfin nous expliquerons par d'autres methodes la maniere d'intégrer les equations différentielles d'un ordre supérieur, dans lesquelles on suppose une premiere différence constante. Au reste on voit par tout ce que nous avons déjà dit (Article CCCCXXXVII.), qu'en mettant dans l'equation du second ordre a deux variables une constante au lieu de la différence premiere qu'on a supposé constante, par exemple, c au lieu de dx , & une variable u pour la premiere différence dy de l'autre variable, on réduit cette equation du second ordre a la forme d'une equation du premier ordre a trois variables, qu'on traitera comme telle par les methodes, que nous avons expliquées fort au long dans le Chapitre L. de la seconde Partie; & on pourra réduire de même les equations différentielles du troisieme ordre a la forme de celles du second ordre, & ainsi des autres.

CCCCXLI.

Soit $A dx^2 + B dx dy + C dy^2 + D ddy = 0$ une equation différentielle a deux variables, & du second ordre, dans laquelle la premiere différence dx est supposée constante, on la ramenera aisément a une différentielle, qui ne renfermera aucune différence constante.

On divisera cette equation par dx , pour avoir $A dx + B dy + \frac{C dy^2}{dx} + \frac{D \cdot d(dy)}{dx} = 0$. Il est clair qu'a

cause de dx supposée constante, on peut écrire $\frac{D \cdot d(dy)}{dx}$

a la place de $\frac{D ddy}{dx}$; mais si l'on veut que dx soit

variable, on aura alors en différentiant $d\left(\frac{dy}{dx}\right) =$

$\frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}$, & par consequent l'equation se change

en celle-cy $A dx + B dy + \frac{C dy^2}{dx} + D \left(\frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}\right)$,

qui n'a aucune différence constante. L'operation seroit la même pour les différentielles des ordres supérieurs.

Soit la différentielle du troisieme ordre $A dx^3 + B dx^2 dy + C dy^2 dx + D dy^3 + E dx ddy + F dy ddy + G d^3 y = 0$, dans laquelle dx est toujours supposée constante. On

aura, en divisant par dx^2 , $A dx + B dy + \frac{C dy^2}{dx} +$

$$\frac{Ddy^3}{dx^3} + \frac{Eddy}{dx} + \frac{Fdyddy}{dx^2} + \frac{Gd^2y}{dx^2} = 0, \text{ que l'on pourra}$$

$$\text{aussi ecrire ainsi } Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} +$$

$$E \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) + F \cdot \frac{dy}{dx} \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) + G \cdot d\left[\left(\frac{1}{dx}\right) d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0,$$

dans laquelle equation on fera tout varier dans les différentiations indiquées par la lettre d ; on aura alors une equation a différences troisiemes sans aucune constante. Il est evident qu'on pourroit de la même maniere faire varier dx , & rendre dy constante. Car dans l'equation différentielle precedente du se-

$$\text{cond ordre } Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

on pourra différentier $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ en supposant dx variable, & dy constante. On feroit la même chose dans l'equation différentielle du troisieme ordre, en faisant varier dx , & rendant dy constante dans tous les termes affectés du signe de différentiation. Cette transformation est utile dans bien des cas, car il arrive souvent que le choix de la différentielle, qu'on suppose constante, facilite beaucoup l'intégration comme nous le verrons dans la suite.

CCCCXLII.

On peut faire les transformations precedentes par le moyen de quelques substitutions, qui peuvent sou-

vent être d'un grand usage. Soient x, y les deux variables, on introduit une nouvelle variable p , en faisant $p dx = dy$, on fait de plus $q dx = dp$, $r dx = dq$, ou $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, &c. ; dx étant constante. Si on veut maintenant rendre variables dx , & dy , on aura en différentiant $dp = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}$, & par conséquent $q = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^3}$, & $dq =$

$$\frac{dx^2 d^3y - 3 dx ddx ddy + 3 dy ddx^2 - dx dy d^3x}{dx^4}, \text{ \& ainsi de}$$

suite. Soit, par exemple, l'expression différentielle $\frac{x ddy}{dx^2}$, dans laquelle dx est supposée constante. En faisant $p dx = dy$, $dp = q dx$, elle se change en qx ; mais cette quantité laquelle en apparence ne renferme aucune différentielle, en substituant la valeur de $q = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^3}$, devient $\frac{x dx ddy - x dy ddx}{dx^3}$, qui n'a plus aucune différentielle constante.

De même si on avoit la différentielle $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx}$, dans laquelle on suppose dy constante, on feroit $dy = p dx$, $dp = q dx$, l'expression précédente se changera en cette autre: $\frac{p(1 + pp)}{q}$, & substituant à la place de p & de q leurs valeurs, on aura la différentielle sans

constantes $\frac{dy(dx^2+dy^2)}{dyddx-dxddy}$. Il arrive assez souvent dans

la solution des Problemes qu'on suppose ydx , & $\sqrt{dx^2+dy^2}$ constantes. On changeroit de la même façon ces différentielles en d'autres expressions sans diffé-

rentielles constantes. Soit la différentielle $\frac{ydddx+xdxy}{dx dy}$,

dans laquelle on suppose ydx constante, on aura par

la substitution $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$, laquelle, en ne suppo-

sant aucune différentielle constante, devient $-1 +$

$$\frac{xdy}{ydx} - \left(\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^2dy} \right) =$$

$$\frac{xdxdy^2 - ydx^2dy - yxdxddy + yxdyddx}{ydx^2dy}. \text{ Enfin soit}$$

$\frac{dx^2+dy^2}{ddy}$, dans laquelle on suppose constante

$\sqrt{dx^2+dy^2}$; en faisant, comme cy-devant, $dy =$

pdx , & $dp = qdx$, la différentielle se réduit a cette

forme $\frac{(1+pp)^2}{q}$, & en substituant $\frac{dy}{dx}$ a la place de

p , & $\frac{dxddy-dyddx}{dx^3}$ a la place de q , on aura

$$\frac{(dx^2+dy^2)^2}{dx^2ddy-dx dyddx}, \text{ expression qui ne renferme plus au-}$$

cune différentielle constante. Il est evident que, si on

vouloit au contraire transformer une différentielle d'un

ordre supérieur quelconque, dans laquelle on n'auroit supposé aucune différentielle constante, en une autre, dans laquelle on regarderoit comme constante quelque différentielle, il ne faudroit que supposer cette différentielle égale à zero, par exemple, $ddx=0$, $d^2x=0$, ou $ddy=0$, $d^3y=0$, &c. De même, si on avoit une différentielle, dans laquelle on auroit supposé une des différentielles constante, on pourroit la réduire à une autre expression, dans laquelle on supposeroit l'autre différentielle constante, il faudroit seulement ramener la première expression à une autre, qui n'auroit plus de différentielles constantes, & faire ensuite celle qu'on voudroit égale à zero.

CCCCXLIII.

On peut déduire de ces transformations une méthode aisée pour examiner les équations différentielles à deux variables d'un ordre quelconque, c'est à dire, pour déterminer si ces différentielles sont absurdes, & si elles ne peuvent avoir lieu dans la solution d'aucun Problème.

Etant proposée une équation différentielle d'un ordre quelconque, dans laquelle on n'a supposé aucune différentielle constante, on fera dx constante, & on réduira ensuite l'équation à une forme, qui ne suppose
aucune

aucune différentielle constante en écrivant comme cy-
 devant $d^2y - \frac{dy ddx}{dx}$ a la place de ddy , & $d^3y -$

$\frac{3 ddx ddy}{dx} + \frac{3 dy ddx^2}{dx^2} - \frac{dy d^3x}{dx}$ a la place de d^3y . Cela

étant fait, on observera si l'équation qui en résulte
 convient avec la proposée. Si cela se trouve, la propo-
 sée renferme un rapport déterminé entre les variables
 x & y ; mais, si cela n'arrive pas, l'équation sera va-
 gue, & ne fournira aucun rapport certain entre x & y .

Car puisqu'on ne suppose aucune différentielle constante,
 il est libre de choisir la constante, & ayant supposé
 l'une ou l'autre différentielle constante, la supposition
 doit donner le même rapport entre les variables, autre-
 ment l'équation n'exprimerait aucun rapport déterminé.

Or les équations différentielles a deux variables provien-
 nent d'équations finies entre ces variables, & elles ex-
 priment par conséquent un certain rapport entre x & y ,
 en sorte que, y étant une fonction de x , l'équation dif-
 férentielle doit devenir identique, en substituant x a la
 place de y , & ses différentielles au lieu de dy , dy^2 , &c.

Nous allons éclaircir cette méthode importante par l'é-
 quation suivante $P ddx + Q ddy + R dx^2 + S dx dy +$
 $T dy^2 = 0$, qui n'a point de différentielle constante, &
 dans laquelle P, Q, R, S, T sont des fonctions de x
 & de y . On fait dx constante, & l'équation devient

$Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = 0$, a cause de $ddx = 0$ on réduit ensuite cette différentielle a une autre forme qui n'a plus de différentielle constante, & on a $-\frac{Qdy dx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = 0$, qui ne diffère de la première, que dans le premier terme; il faut donc observer si $P = -\frac{Qdy}{dx}$. Si cela arrive, l'équation proposée exprimera un rapport déterminé entre x & y , qu'on pourra trouver par le calcul intégral; autrement l'équation sera absurde ou impossible, & par conséquent il sera inutile d'en chercher l'intégrale dans cet état. Il faut donc, afin que la proposée ne soit point absurde, que $Pdx + Qdy = 0$. Or cela peut arriver de deux façons; car l'équation $Pdx + Qdy = 0$ peut être identique, c'est à dire, $P = -\frac{Qdy}{dx}$, ou bien $Pdx + Qdy = 0$ peut être l'équation différentielle du premier degré, par la différentiation de laquelle on a eû la différentielle proposée du second ordre. Dans ce cas on auroit la différentielle de $Pdx + Qdy = Pddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0$, laquelle étant soustraite de la différentielle proposée, donne $Rdx^2 + Sdx dy + Tdy^2 = dPdx + dQdy$. Or $dy = -\frac{Pdx}{Q}$; donc, en substituant, on pourra faire disparaître les différentielles, & on aura une équation finie

entre x & y : par conséquent l'équation proposée pourra se résoudre dans ce cas sans le secours du calcul intégral, & elle sera du nombre de celles que nous avons traitées ailleurs. Nous ajouterons un exemple d'une équation impossible.

Soit donc l'équation sans aucune différentielle constante $yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0$; on aura, en comparant avec l'équation générale précédente $P = yy$, $Q = -xx$, & par conséquent $yydx - xxdy = 0$, laquelle équation étant différenciée une seconde fois, & égalée à la proposée donneroit $ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydx dy - 2xdy dy$; mais puisque

$dy = \frac{yydx}{xx}$, on aura, en éliminant les différentielles,

$$y - \frac{2^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{x}, \text{ ou } x^3 - y^3 + any =$$

$2xyy - 2xny$. Voyons maintenant si cette équation convient avec la différentielle $yydx - xxdy = 0$, on aura en différenciant & formant l'égalité $3xxdx - 3yydy + andy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xndy - 4xydx$, ou bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{3yy - ax - 2xx + 4xy}, \text{ de laquelle}$$

l'équation, & de $dy = \frac{yydx}{xx}$, on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$, & par

conséquent $3x^4 + 4x^3y + any = 3y^4 + 4xy^3 - anyy$,

$$\text{ou } axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x+y} = 3y^3 + xyy - xx y$$

— $3x^3$. Mais nous avons déjà trouvé l'équation finie

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3, \text{ laquelle étant soustrai-}$$

te de la précédente, donne $2y^3 - xyy + xxy - 2x^3$

$$= 0, \text{ équation qui peut se résoudre en celles-cy, } 0 = y$$

$$- x, \text{ \& } 0 = 2yy + yx + 2xx. \text{ La première } y - x = 0,$$

ou $y = x$ peut satisfaire à l'équation trouvée $dy =$

$$\frac{yy dx}{xx}; \text{ mais elle est incompatible avec l'équation finie}$$

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy, \text{ à moins qu'on ne}$$

fasse $a = 0$, ou qu'on ne suppose x & y constantes, dans

lequel cas $dx = 0$, & $dy = 0$ satisfait à toutes les

équations différentielles; ce qui est absurde, & par con-

sequent la différentielle proposée est impossible.

CCCCXLIV.

Nous allons faire voir maintenant l'usage des trans-

formations précédentes pour faciliter les intégrations des

différentielles supérieures. Soit l'équation différentielle

$$dx^2 dy - dy^3 = adx ddy + x dx ddy, \text{ dans laquelle}$$

on suppose dx constante, & qu'on ne voit pas tout

d'un coup être intégrable. Nous rendons dx variable

en écrivant, comme nous avons dit cy-dessus $dx dy -$

$\frac{dy^3}{dx} = (adn + ndn) d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, & en prenant dy constante dans la différentiation indiquée par la parenthese, nous aurons la différentielle $dx dy - \frac{dy^3}{dx} = -(adn + ndn) \frac{dy dx}{dx^2}$, laquelle étant reduite devient $dx^2 + x dx - adn - ndn - dy^2 = 0$, dont on trouve aussitôt l'intégrale en faisant $dx = du$, $n = u$; car la différentielle se change en $u dx + x du + a du - dy^2 = 0$. L'intégrale des trois premiers termes est $ux + au$, & l'intégrale du quatrième $-dy^2$ est $-y dy$, à cause de dy constante. Donc l'intégrale totale est $xdx + adx - y dy + C dy = 0$, en remettant la valeur de u , & ajoutant la constante $C dy$ du même ordre que l'intégrale. Enfin en intégrant de nouveau on aura $\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}y^2 + Cy + C' = 0$, comme il est evident.

CCCCXLV.

Quoiqu'on ne puisse pas établir de règle générale pour le choix de la différentielle constante, ce choix cependant est fort souvent indiqué à un Calculateur expérimenté par la forme de l'équation proposée, comme on verra par les deux Exemples suivants.

Soit l'équation différentielle $2 X x^3 dy^3 = dy^3 + dx^2 dy - x dy ddx + x dx ddy$, ou $X =$

$$\frac{dy^3 + dx^2 dy - x dy ddx + x dx ddy}{2 x^3 dy^3}, \text{ dans laquelle } X \text{ repre-}$$

sente une fonction quelconque de x . Nous observons dans cette equation, que les deux termes $dx^2 dy + x dx ddy$ divisés par dx donnent $dx dy + x ddy$, dont l'intégrale est $x dy$. On remarque encore que $dx^2 dy - x dy ddx$ divisés par $-x^2 dy$, donnent $\frac{-dx^2 + x ddx}{xx}$, dont l'intégrale est $\frac{dx}{x}$, d'où l'on voit qu'on peut détruire également deux termes dans la proposée, en supposant constante l'une, ou l'autre intégrale $x dy$, ou $\frac{dx}{x}$.

Supposons en premier lieu $x dy = C$ constante; donc $x ddy + dy dx = 0$, & en multipliant par dx , on aura encore $x dx ddy + dy dx^2 = 0$, ce qui réduit la différentielle proposée à celle-cy $X = \frac{dy^3 - x dy ddx}{2 x^3 dy^3}$.

Mais: $x ddy + dx dy = 0$, d'où l'on tire $dy = -\frac{x ddy}{dx}$; donc en substituant cette valeur à la place de dy , nous aurons: $X = \frac{x dy^2 ddy}{2 x^3 dx dy^3} = \frac{x dy ddx}{2 x^3 dy^3}$.

$$\frac{-x dy^3 ddy - x dy dx ddx}{2x^3 dx dy^3} = \frac{-dy^3 ddy - dy dx ddx}{2x^3 dx dy^3}. \text{ Mais}$$

$x dy = C$ par la supposition. Donc $dy = \frac{C}{x}$, & $X =$

$$\frac{-dy ddy - dx ddx}{2C^2 dx}, \text{ ou } X dx = \frac{-dy ddy - dx ddx}{2C^2}, \text{ \&,}$$

en intégrant, $\int X dx = \frac{-dy^2 - dx^2}{4C^2} \mp C = \frac{-dy^2 - dx^2}{4x^2 dy^2}$

$\mp C$, en remettant a la place de C la valeur $x dy$.

On auroit pû intégrer cette différentielle tout d'un coup, après être arrivé a l'equation $X =$

$$\frac{dy^3 - x dy ddx}{2x^3 dy^3}, \text{ en multipliant par } dx; \text{ car on auroit}$$

$$X dx = \frac{dx}{2x^3} - \frac{dx ddx}{2x^2 dy^2}, \text{ dont l'intégrale, a cause de}$$

$$x^2 dy^2 \text{ constante, est } \int X dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2 dy^2} \mp C,$$

comme cy-dessus.

Supposons en second lieu $\frac{dx}{x}$ constante; cette sup-

position donne $\frac{x ddx - dx^2}{xx} = 0$, & en multipliant par

$-x dy$, on a $-x dy ddx + dx^2 dy = 0$, equation qui

fait evanouïr le second & le troisieme termes de la

différentielle proposée qui devient $X = \frac{dy^3 + x dx ddy}{2x^3 dy^3}$,

& en multipliant par dx nous aurons $X dx =$

$\frac{dx dy^3 + x dx^2 ddy}{2x^2 dy^3} = \frac{dx}{2x^2} + \frac{dx^2 ddy}{2x^2 dy^3}$. Or si dans le ter-

me $\frac{dx^2 ddy}{2x^2 dy^3}$, on fait $ddy = du$, & par consequent

$dy = u$, & $dy^3 = u^3$, on aura la différentielle $\frac{1}{2} x^{-2} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{dx^2}{x^2} \cdot u^{-3} du$, dont l'intégrale est

$$S. X dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2 u^2} \pm C = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2 dy^2}$$

$\pm C$, en mettant la valeur de u , & ajoutant la constante; ce qui donne la même intégrale que la précédente.

Soit enfin proposée l'équation suivante $xy(dx ddy - dy ddx) = y dy dx^2 - yy dR dy^2 - x dx dy^2$, dans laquelle R est une fonction quelconque de y . Nous remarquons que dans cette équation il y a trois termes, sçavoir, $xy ddy ddx + y dy dx^2 - x dx dy^2$, lesquels divisés par $yy dy$ forment une différentielle complète

$\frac{xy ddx + y dx^2 - x dx dy}{yy}$, dont l'intégrale est $\frac{xdx}{y}$. On

prend donc pour constante $\frac{xdx}{y}$; ce qui donne en dif-

férentiant $\frac{xy ddx + y dx^2 - x dx dy}{yy} = 0$. Donc la propo-

sée se réduit à $xy dxdy + yy dR dy^2 = 0$, c'est à

dire, $dR = \frac{-x dx dy}{y dy^2}$, dont l'intégrale est $R = \frac{xdx}{y dy}$

$\pm C$,

$\pm C$, comme il est evident, $\frac{x dx}{y}$ etant supposée constante.

On peut conclure de ces exemples que, pour rendre l'intégration plus facile, il faut observer si dans la différentielle proposée il y a deux, trois, ou plusieurs termes, qui etant multipliés, ou divisés par un facteur commun, puissent s'intégrer; on en prend l'intégrale, & c'est cette intégrale qu'on suppose constante.

CCCCXLVI.

Nous ajouterons icy une methode generale pour intégrer les equations différentielles des ordres supérieurs, lorsqu'elles ne sont pas intégrables dans l'état où elles se trouvent, & qu'il faut les multiplier par un facteur pour les rendre exactes. Nous commencerons par les equations a deux variables x & y , dans lesquelles il n'y a point de différences qui passent le second ordre, a quelques puissances que soient élevées les premieres différences dx & dy . Nous supposerons qu'une de ces premieres différences est constante; mais il sera facile d'en conclure comment il faudroit se conduire, si elles estoient toutes deux variables.

CCCCXLVII.

Soit $A dy + B = 0$ l'equation generale qui peut représenter toute equation différentielle a deux variables

x & y , dans laquelle dx est constante, & qui ne contient d'autre différence seconde que ddy , avec des puissances quelconques des premieres différences dx & dy , A & B etant des fonctions quelconques de x , y , dx , dy , & de constantes. On écrit ainsi cette equation $Addy + \frac{(B-K)}{dy} dy + \frac{K}{dx} . dx = 0$, qui est la même que la precedente, puisque $\frac{(B-K)}{dy} dy + \frac{K}{dx} . dx = B - K + K = B$.

On multiplie cette equation par un facteur indéterminé M , qu'on suppose être une fonction de x , y , dx , dy , & de constantes; & l'on a le produit $MAdy + M \frac{(B-K)}{dy} dy + \frac{MK}{dx} . dx = 0$, qu'on suppose être une différentielle complete, que nous designerons par (O). Cela posé, nous aurons trois différences, sçavoir, ddy , dy , & dx . Regardant donc ces trois différences, comme celles d'autant de variables dy , y , & x , & la différentielle complete (O), comme la même que celle-cy, $MAdy + MB'dy + MCdx$, en supposant $B' = \frac{B-K}{dy}$, & $C = \frac{K}{dx}$, on aura (Art. CCCXXXVI.) ces trois equations $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.MB')}{ddy}$; $\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{(d.MC)}{ddy}$; $\frac{(d.MB')}{dx} = \frac{(d.MC)}{dy}$, ou, en remettant les valeurs de B' & de C , les trois suivantes

$$\text{I. } \frac{(d. MA)}{dy} = \frac{(d. M. \frac{B-K}{dy})}{ddy};$$

$$\text{II. } \frac{(d. MA)}{dx} = \frac{(d. \frac{MK}{dx})}{ddy};$$

$$\text{III. } \frac{(d. M. \frac{B-K}{dy})}{dx} = \frac{(d. \frac{MK}{dx})}{dy}.$$

De ces trois equations on pourroit par le même Art. CCCXXXVI. en deduire une où M n'entreroit plus, & qui serviroit a determiner K ; ensuite on determineroit M au moyen de deux des trois equations precedentes. Mais on peut simplifier cette recherche, & la borner a chercher pour M une fonction de x, y, dx, dy , qui satisfasse a ces deux equations.

La différentielle du produit $\frac{1}{dy} \cdot M(B-K)$ prise en ne faisant varier que dy , après qu'on l'a divisée par ddy , est $-\frac{1}{dy^2} \cdot M(B-K) + \frac{1}{dy} \cdot \frac{[d.(MB-MK)]}{ddy} =$
 $-\frac{1}{dy^2} \cdot M(B-K) + \frac{1}{dy} \cdot \frac{(d.MB)}{ddy} - \frac{1}{dy} \cdot \frac{(d.MK)}{ddy}.$

Donc la premiere des trois equations cy-dessus se re-

duit a celle-cy, $\frac{(d. MA)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} \cdot M(B-K) + \frac{1}{dy} \cdot$

$\frac{(d. MB)}{ddy} - \frac{1}{dy} \cdot \frac{(d. MK)}{ddy}.$ Nous la designerons par (P) :

La seconde équation $\frac{(d.MA)}{dx} = \frac{(d.\frac{MK}{dx})}{dy} = \frac{x}{dx} \cdot X$
 $\frac{(d.MK)}{dy}$ donne $\frac{(d.MK)}{dy} = dx \cdot \frac{(d.MA)}{dx}$, & substituant
 cette valeur dans l'équation (P), on aura $\frac{(d.MA)}{dy} =$
 $-\frac{x}{dy^2} \cdot M(B-K) + \frac{x}{dy} \cdot \frac{(d.MB)}{dy} - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{(d.MA)}{dx}$; d'où
 l'on tire $M(B-K) = dy \cdot \frac{(d.MB)}{dy} - dx \cdot dy \cdot \frac{(d.MA)}{dx} -$
 $dy^2 \cdot \frac{(d.MA)}{dy}$, & $MK = MB - dy \cdot \frac{(d.MB)}{dy} + dx \cdot dy \cdot X$
 $\frac{(d.MA)}{dx} + dy^2 \cdot \frac{(d.MA)}{dy}$; d'où il sera facile d'avoir K,
 dès que M sera connu.

Substituant les valeurs de $M(B-K)$, & de
 MK , qu'on vient de trouver dans la première équation
 $\frac{(d.MA)}{dy} = \frac{(d.M.\frac{B-K}{dy})}{dy}$, & dans la troisième
 $\frac{(d.M.\frac{B-K}{dy})}{dx} = \frac{(d.\frac{MK}{dx})}{dy}$, on aura les deux équations
 suivantes

$$\text{I. } \frac{(d.MA)}{dy} = \frac{[d.\left\{\frac{(d.MB)}{dy} - dx \frac{(d.MA)}{dx} - dy \frac{(d.MA)}{dy}\right\}]}{ddy}$$

$$\text{II. } \frac{[d.\left\{\frac{(d.MB)}{dy} - dx \frac{(d.MA)}{dx} - dy \frac{(d.MA)}{dy}\right\}]}{dx} =$$

$$\frac{[d.\left\{\frac{MB}{dx} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{(d.MB)}{dy} + dy \frac{(d.MA)}{dx} + \frac{dy^2}{dx} \cdot \frac{(d.MB)}{dy}\right\}]}{dy}$$

Nous designerons la premiere de ces deux equations par (Q), & la seconde par (R).

La question est donc reduite a trouver pour M une fonction de x, y, dx, dy & de constantes, qui satisfasse a ces deux equations. Mais quoique cela soit toujours possible, cela n'est pas egalement facile. Nous nous contenterons d'examiner quelques equations plus limitées, mais cependant très-étendues, après avoir observé qu'en écrivant 1 pour M dans les deux dernieres equations, on aura les deux equations de condition necessaires, pour qu'une equation différentielle quelconque du second ordre a deux variables $x, & y$, avec dx constante, soit intégrable dans l'état où elle est.

CCCCXLVIII.

Soit proposé d'intégrer l'équation du second ordre $Edx^2 + Fdx dy + Gdy^2 + Hddy = 0$, dans laquelle dx est constante. E, F, G, H , & le facteur M qui lui manque pour la rendre intégrable, sont des fonctions de x, y , & de constantes, qui ne renferment ny dx , ny dy .

Si l'on compare cette equation a l'équation generale $Addy + B = 0$, on aura $A = H; B = Edx^2 + Fdx dy + Gdy^2$, & par consequent $MB = ME dx^2 + MF dx dy + MG dy^2$; substituant ces valeurs de A , de

MB , & de B dans les deux equations (Q) & (R), que nous avons trouvées cy-dessus pour determiner M , & faisant attention a la supposition que nous faisons, sçavoir, que E, F, G, H , & M , ne renferment ny dx ; ny dy , la premiere equation (Q) deviendra $\frac{(d.MH)}{dy} = MG$, & la seconde equation (R), après y avoir aussi substitué pour $\frac{(d.MH)}{dy}$ sa valeur MG , deviendra

$$\frac{[d. \{ MF dx + MG dy - dx \frac{(d.MH)}{dx} \}]}{dx} = \frac{[d. \{ ME dx + dy \frac{(d.MH)}{dx} \}]}{dy},$$

car, si on prend la différentielle de MB en ne faisant varier que dy , on aura $d.MB = MF dx + 2MG dy$; par consequent $\frac{(d.MB)}{dy} = MF dx + 2MG dy$; & $\frac{(d.MB)}{dy} - dx \frac{(d.MA)}{dx} - dy \frac{(d.MA)}{dy} = MF dx + 2MG dy - dx \frac{(d.MH)}{dx} - dy \frac{(d.MH)}{dy}$. La différentielle de toute cette quantité, en ne faisant varier que dy , & divisant par dy , est $2MG - \frac{(d.MH)}{dy}$. Donc la premiere equation (Q) fera $\frac{(d.MH)}{dy} = 2MG - \frac{(d.MH)}{dy}$, ou $\frac{(d.MH)}{dy} = 2MG$, & $\frac{(d.MH)}{dy} = MG$.

Si dans le premier membre de la seconde equation (R) on substitue $MF dx + 2MG dy$ pour $\frac{(d.MB)}{dy}$, &

MG pour $\frac{(d.MH)}{dy}$, ce premier membre deviendra

$$\frac{[d. \{ MF dx + MG dy - dx \frac{(d.MH)}{dx} \}]}{dx};$$

& si dans le second membre de la même equation (R) on substitue $ME dx + MF dy + \frac{MG dy^2}{dx}$ pour $\frac{MB}{dx}$; $MF dy + \frac{2 MG dy^2}{dx}$,

pour $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{(d.MB)}{ddy}$, & $\frac{MG dy^2}{dx}$ pour $\frac{dy^2}{dx} \cdot \frac{(d.MA)}{dy}$, ce second

membre deviendra $\frac{[d. \{ ME dx + dy \frac{(d.MH)}{dx} \}]}{dy}$. La se-

conde equation fera donc telle que nous l'avons dit.

Or, puisque par la premiere equation $MG = \frac{(d.MH)}{dy}$, en prenant la différentielle de part & d'autre, & ne faisant varier que x , & divisant ensuite par dx ,

$$\text{on aura } \frac{(d.MG)}{dx} = \frac{[d. \{ \frac{(d.MH)}{dy} \}]}{dx} = \frac{[d.(d.MH)]}{dx dy};$$

substituant cette valeur de $\frac{(d.MG)}{dx}$ dans la seconde equation; après en avoir divisé chaque membre par dx , & se ressouvenant que dx est toujours constante, on trouve

$$\frac{(d.MF)}{dx} = \frac{[d.(d.MH)]}{dx dx} = \frac{(d.ME)}{dy},$$

entendant par cette expression qu'on doit différentier MH en faisant varier x , & diviser ensuite par dx , puis différentier le resultat en faisant varier x , & diviser encore par dx . Les

deux equations $\frac{(d.MF)}{dx} - \frac{[d.(d.MH)]}{dx.dx} = \frac{(d.ME)}{dy}$, & MG
 $= \frac{(d.MH)}{dy} = \frac{M(d.H)}{dy} + \frac{H(dM)}{dy}$ font celles que nous
 avons a traiter actuellement pour intégrer la proposée.

Observons maintenant que dans cette dernière equation il n'y a que y qui soit regardée comme variable. Cela posé; en multipliant toute l'equation par dy , puis la divisant par MH , & transposant, on trouve $\frac{dM}{M} = \frac{Gdy}{H} - \frac{d.H}{H}$; prenant l'intégrale, en regardant y seule comme variable, puisque la différentiation a été faite dans cette supposition, on aura $L.M = S. \frac{Gdy}{H} - L.H + L.X$; on ajoute pour constante la quantité $L.X$, par laquelle on entend une fonction de x & de constantes; c'est par ce qu'on a supposé x constante dans la différentiation.

En supposant $L.e = 1$, on aura $L.M = S. \frac{Gdy}{H} - L.H + L.X$
 $L.e - L.H + L.X = L.e^{S. \frac{Gdy}{H}} - L.H + L.X$, d'où
 l'on tire $M = \frac{X}{H} e^{S. \frac{Gdy}{H}}$. Si l'on substitue cette valeur
 de M dans l'equation $\frac{(d.MF)}{dx} - \frac{[d.(d.MH)]}{dx.dx} = \frac{(d.ME)}{dy}$
 & que l'on divise ensuite par $e^{S. \frac{Gdy}{H}}$, on aura l'equation,

tion, qui doit déterminer X . Or, comme X doit être une fonction de x , il s'en suit que pour que l'équation soit intégrable par la multiplication d'un facteur composé seulement de x , de y , & de constantes, il faut que dans celle-cy toutes les y disparaissent.

Supposons, par exemple, que l'équation proposée soit $2y dx^2 + (2x + 3yx) dx dy + 2x^2 dy^2 + x^2 y ddy = 0$, qui n'est point intégrable dans l'état où elle est; on aura donc $H = x^2 y$, $G = 2x^2$, $F = 2x + 3yx$, $E = 2y$; donc $\frac{G}{H} dy = \frac{2dy}{y}$, S. $\frac{G}{H} dy = L.y^2$, & $M = \frac{X}{x^2 y} e^{L.y^2}$. Or $e^{L.y^2} = y^2$; car, puisque $L.e = 1$, on aura $L.y^2 . L.e = L.y^2$; par conséquent $L.e^{L.y^2} = L.y^2$ & $e^{L.y^2} = y^2$. Donc $M = \frac{Xy^2}{x^2 y} = \frac{Xy}{x^2}$. Substituant cette valeur de M , & celles de H , F , E dans l'équation $\frac{(d.MF)}{dx} - Gc.$, on aura $\frac{2y dX}{x dx} - \frac{2yX}{x^2} + \frac{3y^2 dX}{x dx} - \frac{3y^2 X}{x^2} - \frac{y^2 d dX}{dx^2} = \frac{4yX}{x^2}$; ou bien $\frac{2y dX}{x dx} - \frac{6yX}{x^2} + \frac{3y^2 dX}{x dx} - \frac{3y^2 X}{x^2} - \frac{y^2 d dX}{dx^2} = 0$. Egalant donc a zero la somme des termes affectés de la même puissance de y , on aura les deux équations $\frac{2y dX}{x dx} - \frac{6yX}{x^2} = 0$, &

$\frac{3y^2 dX}{x dx} - \frac{3y^2 X}{x^2} - \frac{y^2 ddX}{dx^2} = 0$. Divisant ensuite la pre-

miere equation par y , & l'autre par y^2 , on aura, après reduction faite, $\frac{dx}{X} = \frac{3dx}{x}$, & $-x^2 ddX +$

$3x dX dx - 3X dx^2 = 0$. La premiere equation etant

intégrée donne $L.X = 3L.x = L.x^3$; par consequent

$X = x^3$, & cette valeur substituée dans la seconde, y

satisfait. On a donc $X = x^3$, & par consequent

$$M = \frac{Xy}{x^2} = xy.$$

Maintenant, si l'on remonte a la valeur de MK deja trouvée, on aura $MK = 2xy^2 dx^2 + 3x^2 y^2 dx dy$, & $M(B - K) = 2x^2 y dx dy + 2x^3 y dy^2$, enforte que l'equation rapportée a la forme generale $MAddy + M \frac{(B-K)}{dy} dy + \frac{MK}{dx} dx = 0$ devient $x^3 y^2 ddy + (2x^2 y dx + 2x^3 y dy) dy + (2xy^2 dx + 3x^2 y^2 dy) X dx = 0$. On trouvera par les methodes que nous avons données, que cette différentielle est complete, & que son intégrale, en ajoutant la constante, est $x^3 y^2 dy + x^2 y^2 dx + c dx = 0$.

On peut prendre pour second exemple l'équation $2dx^2 + (3x + y + 2)dydx + 2xdy^2 + (x^2 + xy)Xddy = 0$, qui s'intégrera de la même manière. On trouvera $X = x$, & $M = x + y$.

CCCCXLIX.

Si après la substitution de la valeur de M dans l'équation $\frac{(d.MF)}{dx} \mathcal{C}c$, tous les y disparaissent d'eux-mêmes, l'équation qui doit donner X est alors différentielle du second ordre, enforte qu'il semble que dans ce cas la méthode n'est d'aucune utilité. Mais il faut observer que l'équation, qu'on aura alors, sera de cette forme $Adx^2 + BXdx^2 + CdXdxdx + EdXdX = 0$; A , B , C , E étant des fonctions de x , & de constantes. Or, pour intégrer cette équation, on l'écrit ainsi $AM'dx^2 + BM'Xdxdx + (C - K')M'dxdX + K'M'dxdX + EM'ddX = 0$, qui est la même que la précédente multipliée par le facteur M' . On suppose ensuite que, M' & K' étant des fonctions de x seulement, les quatre derniers termes de cette équation forment ensemble une différentielle exacte; alors le premier terme Adx^2 dans lequel A est une fonction de x , & dx constant s'intégrera aisément. Les équations qui résultent de cette supposition sont (Art. CCCXXXII.).

$$\text{I. } \frac{(d.EM')}{dx} = \frac{[d.(K'MdX + BM'Xd\pi)]}{d d X};$$

$$\text{II. } \frac{(d.EM')}{dX} = \frac{[d.(C-K')M'd\pi]}{d d X};$$

$$\text{III. } \frac{[d.(K'MdX + BM'Xd\pi)]}{dX} = \frac{[d.(C-K')M'd\pi]}{dx};$$

$$\text{IV. } \frac{[d.(C-K')M'd\pi]}{dx} = \frac{(d.BM'Xd\pi)}{dX}.$$

Mais, par ce que K' , M' , A , B , C . ne renferment point X , la seconde equation est nulle, la premiere se reduit a $\frac{(d.EM')}{dx} = K'M'$, & la troisieme

avec la quatrieme se reduit a $\frac{[d.(C-K')M]}{dx} = BM'$,

a cause de la constante $d\pi$. De l'equation $\frac{(d.EM')}{dx} =$

$K'M'$ on tire $\frac{E(d.M')}{dx} + \frac{M'(dE)}{dx} = K'M'$, & $\frac{dM'}{M'} =$

$\frac{K'd\pi}{E} - \frac{dE}{E}$; & en intégrant $L.M' = S. \frac{K'}{E} d\pi - L.E +$

$L.H$; H etant une constante, &, en supposant $L.e = 1$,

on aura $M' = \frac{H}{E} e^{S. \frac{K'}{E} d\pi}$. De l'autre equation

$\frac{[d.(C-K')M]}{dx} = BM'$ on tire $\frac{M[d.(C-K')]}{dx} +$

$\frac{(C-K')(d.M)}{dx} = BM'$; $(C-K')dM' = BM'd\pi -$

$M'.d.(C-K')$, & $\frac{dM'}{M'} = \frac{B d\pi - d.(C-K')}{C-K'}$, En égalant

cette valeur a l'autre $\frac{K'dx-dE}{E}$, qu'on a trouvée cy-

dessus, on aura l'equation $\frac{Bdx-d.(C-K')}{C-K'} = \frac{K'dx-dE}{E}$,

& par consequent $BE d\pi - E dC + E dK' = (C - K') K' d\pi - (C - K') dE$, ou $BE d\pi - K'(C - K') d\pi + (C - K') dE - E dC + E dK' = 0$, equation diffé-

rentielle du premier ordre seulement, dont depend la valeur de K' . Supposant donc qu'on ait déterminé K' par le moyen de cette equation, on aura M' par l'equa-

tion $M' = \frac{H}{E} e^{\int \frac{K'}{H} dx}$; alors K' & M' étant trouvés,

on aura X en mettant les valeurs de K' & de M'

dans l'equation $AM'd\pi^2 + BM'Xd\pi^2 + (C - K') \times M'd\pi dX + K'M'd\pi dX + EM'ddX = 0$, & en intégrant.

Or comme cette equation ne peut manquer d'être a present une différentielle complete, & qu'on peut lui donner cette forme $(AM'd\pi + BM'Xd\pi + K'M'dX)d\pi + \{(C - K')M'd\pi\}dX + EM'ddX = 0$, & la regarder comme une différentielle complete a trois variables π , X , & dX ; on peut prendre pour son intégrale celle du premier terme $(AM'd\pi + BM'Xd\pi + K'M'dX)d\pi$, en ne faisant varier que π , & traitant X , dX , & $d\pi$ dans la parenthese comme constantes; ce qui donne pour l'intégrale $d\pi.S.AM'd\pi + Xd\pi.S.BM'd\pi + dX.X.S.K'M'd\pi + Ld\pi = 0$, $Ld\pi$ étant la constante ajoutée

a l'intégrale. Or cette dernière equation s'intègre facilement par la formule de l'Article CCCLXXXII. On aura donc X , dès qu'on aura K' . Ainsi on peut dire généralement que toutes les fois qu'il ne manquera à l'equation $Edx^2 + Fdx dy + Gdy^2 + Hddy = 0$ qu'un facteur composé de x , de y , & de constantes pour être une différentielle complète, cette equation sera toujours réductible à une equation différentielle du premier ordre, quelles que soient d'ailleurs E , F , G , H .

Mais si, après la substitution de la valeur de M dans l'equation $\frac{(d.MF)}{dx} Cc$, l'equation renferme encore des y , que l'on ne puisse faire disparaître sans assujettir les coefficients E , F , G , H à certaines conditions; c'est une preuve que le facteur M doit de plus renfermer des dx & des dy . Alors il faut avoir recours à la méthode générale (Article CCCXLVII.). On s'y prendra de même pour trouver dans quels cas toute equation différentielle du second ordre, d'une forme connue, peut-être intégrée par la multiplication d'un facteur composé de x , y , & constantes, ou de x , dy , & constantes, ou de y , dx , & constantes &c.

CCCCL.

A l'égard des equations différentielles du troisième ordre, en les supposant représentées généralement par

$A d^3 y + B = 0$, A & B étant des fonctions de x , y , $d x$, $d y$, $d d y$, & constantes; & supposant de plus que M est le facteur composé de x , y , $d x$, $d y$, $d d y$, & constantes, qui peut la rendre intégrable, on pourra l'écrire ainsi $A M d^3 y + M \frac{B-K}{d d y} d d y + M \cdot \frac{K-H}{d y} \cdot d y + \frac{M H}{d x} \cdot d x = 0$; alors il faudra que $\frac{(d. A M)}{d y} = \frac{(d. M \frac{B-K}{d d y})}{d^3 y}$; $\frac{(d. M A)}{d y} = \frac{(d. M \frac{K-H}{d y} d y)}{d^3 y}$; $\frac{(d. A M)}{d x} = \frac{(d. \frac{M H}{d x})}{d^3 y}$; $\frac{(d. M \frac{B-K}{d d y})}{d y} = \frac{(d. M \frac{K-H}{d y})}{d d y}$; $\frac{(d. M \frac{B-K}{d d y})}{d x} = \frac{(d. \frac{M H}{d x})}{d d y}$; $\frac{(d. M \frac{K-H}{d y})}{d x} = \frac{(d. \frac{M H}{d x})}{d y}$. C'est à l'aide de ces équations qu'on déterminera K , H , & M . On voit comment on doit s'y prendre, pour les équations différentielles d'ordres plus élevés.

CCCCLI.

REMARQUE. Le calcul intégral va de pair avec le calcul différentiel, lorsque les différentielles qu'on se propose d'intégrer sont complètes. Car la règle générale du calcul différentiel peut s'exprimer ainsi: " Différentiez la quantité proposée successivement par rapport à chaque variable qu'elle contient, comme si toutes

„ les autres variables étoient constantes: prenez ensuite la
 „ somme de toutes les différentielles particulières, que
 „ vous aurez trouvé de cette manière, cette somme fera
 „ la différentielle totale de la quantité proposée, soit que
 „ cette quantité ne contienne que des variables finies,
 „ soit qu'elle renferme des différences quelconques. ” On
 „ déduit de là par l'Article CCCXXXIII. la règle générale
 „ pour intégrer toute différentielle complète, de
 „ quelqu'ordre qu'elle soit, & quelque nombre de variables
 „ qu'elle contienne. La voici: “ Marquez les variables,
 „ dont les différences se trouvent dans la différentielle
 „ proposée: rassemblez dans une somme totale
 „ tous les termes affectés de la différence d'une même
 „ variable, en commençant par ceux, où se trouve la
 „ différence de l'ordre le plus élevé: ensuite intégrez cette
 „ somme, comme si toutes les autres variables étoient
 „ constantes: après quoi différenciez l'intégrale, que vous
 „ venez de trouver, en faisant varier successivement toutes
 „ les variables qu'elle renferme: puis retranchez cette
 „ différentielle de la proposée. S'il ne reste rien, l'intégrale
 „ trouvée sera celle que vous cherchez, en lui ajoutant une
 „ constante de son ordre. S'il y a un reste, il ne renfermera
 „ pas la variable, par rapport à laquelle vous avez intégré.
 „ Suivez à l'égard de ce reste le même procédé, dont vous
 „ vous êtes servi à l'égard de toute la différentielle proposée,
 „ regardant ce reste com-
 „ me

» me une autre différentielle proposée, & ainsi de suite
 » par rapport a chaque variable. Vous trouverez de cet-
 » te maniere l'intégrale de toute la proposée, si elle est
 » complete; c'est a dire, qu'elle sera reduite a la diffé-
 » rentielle d'un ordre inférieur d'un degré, d'où elle étoit
 » venuë par la différentiation." Nous avons donné plu-
 sieurs exemples de cette regle pour les différentielles du
 premier ordre dans l'Article CCCXXXIII.; nous en ajou-
 terons un icy pour les différentielles du second ordre,
 après avoir observé que par cette regle generale on
 peut toujours trouver, si une différentielle quelconque
 dans l'état où elle se trouve est complete, ou non.
 Car, si elle est complete, on en trouvera facilement
 l'intégrale; par conséquent, si on ne peut pas en trou-
 ver l'intégrale, c'est une preuve qu'elle n'est pas com-
 plette, & alors si cette différentielle est en equation,
 ou si elle est supposée egale a zero, il faudra chercher
 par les methodes connus le facteur qui la rendra com-
 plette, si la chose est possible.

EXEMPLE. Soit proposée la différentielle
 $x^3 y^2 ddy + 2x^2 y dx dy + 2x^3 y dy^2 + 2xy^2 dx^2 +$
 $3x^2 y^2 dy dx$, dans laquelle on suppose dx constante.
 On doit considerer cette différentielle comme renfer-
 mant trois variables dy , y , & x , puisque ddy , dy , &
 dx font les différences premieres de dy , de y , & de x .
 Le terme où se trouve la différentielle de l'ordre le

plus élevé est $x^3 y^2 ddy$, dont on prendra l'intégrale en regardant dy comme la seule variable, & les autres y & x comme constantes. Cette intégrale est $x^3 y^2 dy$, dont la différentielle, en faisant tout varier, est $x^3 y^2 ddy + 2x^3 y dy^2 + 3y^2 x^2 dx dy$, laquelle, étant retranchée de la proposée, laisse pour reste $2x^2 y dx dy + 2xy^2 dx^2$. Regardant ce reste comme une autre différentielle proposée a deux variables y & x , on prendra l'intégrale du terme $2x^2 y dx dy$ en ne faisant varier que y , & par ce que dx est constante, on aura l'intégrale $x^2 y^2 dx$, dont la différentielle, en faisant varier x & y , est $2x^2 y dx dy + 2y^2 x dx dy$; on voit qu'en retranchant cette différentielle du premier reste, il ne reste plus rien. Donc l'intégrale cherchée fera $x^3 y^2 dy + x^2 y^2 dx + C dx$, en ajoutant la constante du même ordre $C dx$. On auroit trouvé la même intégrale en se servant, dans le reste $2x^2 y dx dy + 2y^2 x dx dy$, du terme $2y^2 x dx dy$ au lieu du terme $2x^2 y dx dy$, ou en intégrant tout le reste $(2x^2 y dy + 2y^2 x dx) dx$ dans la supposition de x seule variable.

Il nous reste maintenant à faire quelques remarques sur les équations différentielles, qui ont besoin d'un facteur pour être complètes. Si on suppose x, y les deux variables d'une équation différentielle, & qu'en faisant dx constante, on prenne, comme cy-devant $dy = p dx, dp = q dx, dq = r dx, dr = s dx, \text{ \&c.}$, les équations différentielles de tous les degrés pourront être ramenées aux formes suivantes

$$\text{I.}^{\text{er}} \text{ Degré } \dots p = \varphi(x, y);$$

$$\text{II.}^{\text{e}} \text{ Degré } \dots q = \varphi(x, y, p);$$

$$\text{III.}^{\text{e}} \text{ Degré } \dots r = \varphi(x, y, p, q) \text{ \&c.}$$

L'expression φ désigne des fonctions quelconques des quantités renfermées entre les parenthèses. S'il s'agit de trouver un facteur, qui rende complète une équation différentielle du second degré, ce facteur pourra être représenté par q , de même que p est le facteur des différentielles du premier ordre. Mais il faut observer que ce facteur peut être une fonction des deux variables seulement, ou qu'il peut encore renfermer le rapport des différentielles $\frac{dy}{dx}$; ce qui rend quelquefois selon les différens cas l'intégration plus ou moins difficile. Il est bien clair que le cas le plus aisé est celui où le facteur est une fonction d'une seule variable. On voit bien que $P, Q, R, S, T, \text{ \&c.}$ designant des fonctions quelconques des variables x, y , on pourra

avoir différens ordres de facteurs pour les seules equations différentielles du second degré.

I.^{er} Ordre P ;

II.^e Ordre $P dx + Q dy$;

III.^e Ordre $P dx^2 + Q dx dy + R dy^2$ &c.

On pourroit continuer ces ordres plus loin; mais on entreroit alors dans des calculs fort embarrassants. Les cas les plus simples sont ceux, dans lesquels le rapport des différentielles $\frac{dy}{dx}$ est de dimension nulle, ou du premier, ou second degré. Le facteur peut être affecté de quantités fractionnaires, irrationnelles, ou transcendentes, dont nous avons déjà donné des Exemples.

Toute différentielle du second ordre $q = \varphi(x, y, p)$, dans laquelle dx est supposée constante, se réduit à cette forme $ddy = dx^2 \cdot \varphi(x, y, \frac{dy}{dx})$. Or étant proposée une différentielle quelconque du second degré, qui ne soit pas une différentielle complète, on essayera d'abord le facteur de la première forme P , s'il ne réussit pas, on prendra le facteur de la seconde forme, & ainsi de suite.

Soit, par exemple, la différentielle du second degré $2ay ddy - 4ady^2 - y^{n+5} dx^2 (1 + xx)^{\frac{n-1}{2}} = 0$, dans laquelle dx est supposée constante. Après avoir

éprouvé que le facteur du premier ordre ne peut reuffir, on employera $Pdx + Qdy$, & l'équation propofée etant d'abord mife fous cette forme $2ad dy - \frac{4ady^2}{y}$

$- y^{n+4} dx^2 (1 + xx)^{\frac{n-1}{2}} = 0$, on la multipliera enfuite par le facteur $Pdx + Qdy$, & elle deviendra

$$2aPdxddy - \frac{4aPdx dy^2}{y} - Py^{n+4} dx^2 (1 + xx)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$+ 2aQdyddy - \frac{4aQdy^3}{y} - Qy^{n+4} dx^2 dy (1 +$$

$$xx)^{\frac{n-1}{2}} = 0; \text{ laquelle doit être integrable par la fuppo-}$$

fition. Or, fi on examine les deux termes $2aPdxddy + 2aQdyddy$, on voit aifément qu'ils ne peuvent

provenir que de la différentiation de $2aPdx dy + aQdy^2$. On pourra donc regarder $2aPdx dy + aQdy^2$

comme la premiere partie de l'intégrale cherchée.

Maintenant, fi l'on prend la différentielle de cette premiere partie, on aura, en l'ôtant de la propofée, &

$$\text{ordonnant l'équation, } -Py^{n+4} dx^2 (1 + xx)^{\frac{n-1}{2}} -$$

$$Qy^{n+4} dx^2 dy (1 + xx)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{4aPdx dy^2}{y} - \frac{4aQdy^3}{y}$$

$$- 2ad x^2 dy \frac{(dP)}{dx} - 2ad x dy^2 \frac{(dP)}{dy} - a dy^3 \frac{(dQ)}{dy} -$$

$adxdy^2 \frac{(dQ)}{dx} = 0$. On a substitué dans cette dernière equation a la place de dP l'expression $d\kappa \frac{(dP)}{dx} + dy \frac{(dP)}{dy}$, & a la place de dQ la valeur $d\kappa \frac{(dQ)}{dx} + dy \frac{(dQ)}{dy}$. L'expression $d\kappa \frac{(dP)}{dx}$ signifie la différentielle de P en faisant varier κ seulement, & $dy \frac{(dP)}{dy}$ represente la différentielle de P en considerant y seule comme variable, & par conséquent la différentielle totale est composée de deux. On dira la même chose de la différentielle de Q . Or si, on examine la différentielle précédente, on voit qu'à cause de $d\kappa$ constante, elle ne peut être intégrable, a moins que les termes affectés de dy^3 , & dy^2 ne se détruisent respectivement; donc $\frac{4\kappa Q dy^3}{y} + ady^3 \frac{(dQ)}{dy} = 0$, & $\frac{4\kappa P dx dy^3}{y} + 2ad\kappa dy^2 \frac{(dP)}{dy} + ad\kappa dy^2 \frac{(dQ)}{dx} = 0$, d'où l'on tire $\frac{4Q}{y} + \frac{(dQ)}{dy} = 0$, ou $4Q dy + y dy \frac{(dQ)}{dy} = 0$, & $\frac{4P}{y} + 2 \frac{(dP)}{dy} + \frac{(dQ)}{dx} = 0$. Maintenant pour tirer la valeur de Q de la première equation, nous considererons κ comme constante, & on aura $dy \frac{(dQ)}{dy} = dQ$; puis

que $dy \frac{(dQ)}{dy}$ signifie la différentielle de Q en ne faisant varier que y . Donc, a cause de $4Qdy + ydQ = 0$, on aura, en intégrant, $Qy^4 = K$ fonction de x seulement, & par conséquent $Q = \frac{K}{y^4}$, & $\frac{(dQ)}{dx} = \frac{1}{y^4} \frac{(dK)}{dx}$; d'où l'on voit que $\frac{(dK)}{dx}$ est une fonction de x . De plus, en considérant x aussi comme constante dans l'équation $\frac{4P}{y} + 2 \frac{(dP)}{dy} + \frac{(dQ)}{dx} = 0$, on aura $4Pdy + 2y dP + \frac{dy}{y^3} \cdot \frac{(dK)}{dx} = 0$, & en multipliant par y , & intégrant, nous aurons $2Pyy - \frac{1}{y} \cdot \frac{(dK)}{dx} = 2L$, L étant une fonction de x seulement, d'où l'on tire $P = \frac{L}{yy} + \frac{1}{2y^3} \cdot \frac{(dK)}{dx}$. Mais $\frac{(dP)}{dx} = \frac{1}{yy} \cdot \frac{(dL)}{dx} + \frac{1}{2y^3} \frac{(ddK)}{dx^2}$, donc, en substituant & effaçant les termes qui se détruisent, on aura l'autre partie de l'intégrale $-dx^2 \cdot S. \left\{ (1 + xx)^{\frac{n-1}{2}} (Ly^{n+2} dx + \frac{1}{2} y^{n+1} \times d\left(x \frac{(dK)}{dx} + Ky^n dy\right) \right\} - 2adx^2 \cdot S. \left(\frac{dy}{yy} \cdot \frac{(dL)}{dx} + \frac{dy}{2y^3} \cdot \frac{(ddK)}{dx^2} \right)$ cette quantité étant composée de deux parties, dont l'une est multipliée par $-dx^2$, & l'autre par $-2adx^2$,

si, faisant abstraction du facteur $-dx^2$, on fait dans la premiere $L=0$, la différentielle se reduira $aKy^n dy (1+xx)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2}y^{n+1} d\kappa \frac{(dK)}{dx} (1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$, dont l'intégrale sera $\frac{Ky^{n+1}}{n+1} (1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$; il ne faut pour cela que faire la différentielle $\frac{y^{n+1}dK}{n+1} (1+xx)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{(n-1)Ky^{n+1}x dx}{n+1} \times (1+xx)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2}y^{n+1} dK (1+xx)^{\frac{n-1}{2}}$, c'est a dire; $2(n-1)Kx d\kappa = (n-1)dK(1+xx)$; d'où l'on tire $K=1+xx$, de sorte que le premier membre de l'intégrale precedente sera $-\frac{1}{n+1}y^{n+1} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}}$, & l'autre membre, a cause de $L=0$, & de $\frac{(dK)}{dx^2}=2$, deviendra $-2a dx^2 \cdot S. \frac{dy}{y^3} = \frac{a dx^2}{yy}$; donc la seconde partie de l'intégrale sera $-\frac{1}{n+1}y^{n+1} dx^2 (1+xx)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{a dx^2}{yy}$. De plus, puisque $L=0$, & $K=1+xx$, on aura $\frac{(dK)}{dx}=2x$, d'où l'on tire $P=\frac{x}{y^3}$ & $Q=\frac{1+xx}{y^4}$. Donc

la

la première partie de l'intégrale fera $\frac{2axdx dy}{y^3} +$
 $\frac{a(1+xx)dy^2}{y^4}$, & par conséquent l'intégrale complète,
 en ajoutant la constante Cdx^2 , fera $\frac{adx^2}{y} + \frac{2axdx dy}{y^3} +$
 $\frac{a(1+xx)dy^2}{y^4} - \frac{1}{n+1}y^{n+1}dx^2(1+xx)^{\frac{n+1}{2}} = Cdx^2$, &
 en multipliant par y^4 , on aura $\frac{1}{n+1}y^{n+5}dx^2(1+xx)^{\frac{n+1}{2}}$
 $= a(yydx^2 + 2xydx dy + (1+xx)dy^2) -$
 Cy^4dx^2 .

Si dans l'équation différentielle proposée on suppo-
 soit $n = -2$, elle se changeroit en celle-cy $2ayddy$
 $- 4ady^2 - y^3dx^2(1+xx)^{-\frac{3}{2}} = 0$. Dans laquelle le
 facteur simple $P = \frac{1}{y^3}$ suffiroit pour la rendre différen-
 tielle complète; & en multipliant l'équation par ce
 facteur, elle deviendrait $\frac{2ayddy - 4ady^2}{y^3} -$

$\frac{dx^2}{(1+xx)\sqrt{1+xx}} = a$, dont l'intégrale, en ajoutant la
 constante adx , devient $\frac{2ady}{yy} - \frac{xdx}{\sqrt{1+xx}} = adx$, &, en

intégrant de nouveau, on aura $-\frac{2a}{y} - \sqrt{1+xx} = ax + b$. Ce cas particulier n'a aucune difficulté, & il est le seul, dans lequel le facteur simple P puisse réussir. Mais si on confidère l'exposant quelconque n , on voit que ces sortes de cas deviennent très-complicés, & que leur solution dépend beaucoup de l'adresse & de la sagacité du Calculateur.



C H A P I T R E VI.

De quelques methodes particulieres pour intégrer, ou pour reduire aux ordres inférieurs les equations différentielles des ordres supérieurs, lorsqu'elles ont certaines conditions.

CCCCLII.

LEs equations différentielles a deux variables x & y , de quelqu'ordre qu'elles soient, peuvent souvent s'intégrer, ou se reduire a un ordre inférieur, en supposant le rapport $\frac{dx}{dy}$, ou $\frac{dy}{dx}$ egal a une nouvelle variable z , en substituant dans l'equation proposée $z dy$ au lieu de dx , ou $z dx$ au lieu de dy . Lorsque la variable finie x ne se trouve point dans l'equation proposée, on suppose $dx = z dy$; & si c'est la variable finie y , qui manque, on fait $dy = z dx$. Si l'equation proposée contient des différences supérieures ddy , d^3y , d^4y , &c., & que dx soit constante, on suppose $dy = z dx$, d'où l'on tire $ddy = dz dx$, $d^3y = ddz dx$, $d^4y = d^3z dx$, &c. Si au contraire l'equation proposée contient des différences supérieures ddx , d^3x , d^4x ,

Œc., dy étant constante, on fait $d\ast = z dy$, d'où l'on tire $dd\ast = dz dy$, $d^3\ast = ddz dy$, $d^4\ast = d^3z dy$, *Œc.* On va voir l'usage de ces méthodes dans les Problèmes suivants.

CCCCLIH.

PROBLEME I. Intégrer l'équation différentielle à deux variables $A dy^n + B d\ast^n + C dy^m d\ast^{n-m} + D dy^p d\ast^{n-p} + E dy^q d\ast^{n-q} + \text{Œc.} = 0$, dans laquelle les coefficients $A, B, C, D, E, \text{Œc.}$ sont des fonctions quelconques d'une seule variable \ast , ou y , & de constantes, ou zero, & les exposans $m, n, p, q, \text{Œc.}$ des nombres quelconques.

SOLUTION. CAS I. Lorsque la variable \ast ne se trouve point dans l'équation proposée, ou que les coefficients $A, B, C, D, E, \text{Œc.}$ sont des fonctions de la seule variable y , & de constantes, ou zero. On supposera suivant la règle $d\ast = z dy$, d'où l'on tirera $d\ast^n = z^n dy^n$, $d\ast^{n-m} = z^{n-m} dy^{n-m}$, $d\ast^{n-p} = z^{n-p} \times dy^{n-p} \text{Œc.}$ Substituant ces valeurs dans la proposée, & divisant par dy^n , on aura l'équation finie à deux variables z & y , $A + Bz^n + Cz^{n-m} + Dz^{n-p} +$

$Ez^{n-1} + Cc. = 0$, par laquelle on déterminera la valeur de z en y , ou celle de y en z , & en constantes. On substituera une de ces deux valeurs dans la différentielle $z dy$, & on aura $z dy = R dy$, ou $z dy = Z dz$, R étant une fonction de y & de constantes, & Z une fonction de z & de constantes, & l'équation $dx = z dy$ sera changée en $dx = R dy$, ou $dx = Z dz$. On intégrera de côté & d'autre par les règles de la première Partie du Calcul Intégral, & on aura $x = S. R dy + Q$ constante, ou $x = S. Z dz + Q$. La première intégrale donnera immédiatement la valeur de x en y , qu'on vouloit trouver. Si on se sert de la seconde intégrale $x = S. Z dz + Q$, on trouvera encore la valeur de x en y , en comparant cette équation avec l'autre $A + Bz^n + Cz^{n-m} + Dz^{n-p} + Ez^{n-1} + Cc. = 0$, puisque ces deux équations ne contiennent que les trois variables ou inconnues x , z , & y .
 C. Q. F. T.

CAS II. Lorsque la variable y manque dans l'équation différentielle proposée, ou que les coefficients $A, B, C, D, Cc.$ sont des fonctions de la seule variable x , & de constantes, ou zero. On supposera $dy = x dx$, d'où l'on tirera $dy^n = x^n dx^n$, $dy^m = x^m dx^m$, $Cc.$ substituant ces valeurs dans la proposée, & divisant par dx^n , on aura l'équation finie $Az^n + B + Cz^m + Dz^p$

$+Ez^2 + Cc = 0$, par laquelle on déterminera la valeur de z en x , ou celle de x en z , on substituera une de ces valeurs dans la différentielle zdx , & en procédant comme dans le premier cas, on trouvera la valeur de x en y , au moyen de l'équation $dy = zdx$.
C. Q. F. T.

CCCCLIV.

PROBLEME II. Intégrer ou reduire au premier ordre l'équation generale du second ordre a deux variables $Addy + Bdy^2 + Cxdy + Ddx^2 = 0$, dans laquelle dx est constante, & les coefficients A, B, C, D sont des fonctions quelconques de l'une des deux variables x , ou y , & de constantes, ou zero.

SOLUTION I. Puisque dx est constante, on supposera, suivant la regle, $dy = zdx$, d'où l'on tirera $ddy = dzdx$, $dy^2 = z^2 dx^2$, & $dx dy = z dx^2$. Substituant ces valeurs dans l'équation proposée & divisant par dx , on aura $A dx + Bz^2 dx + Cx dx + D dx = 0$, equation différentielle du premier ordre a deux variables x & x , lorsque y manque dans la proposée. Si c'est x qui manque dans l'équation proposée, on substituera $\frac{dy}{z}$ au lieu de dx dans l'équation du premier ordre qu'on vient de trouver, elle deviendra $A dx + Bx dy + C dy + \frac{D dy}{z}$,

ou, en multipliant par z , $Azdz + Bz^2dy + Czdy + Ddy = 0$, equation différentielle du premier ordre a deux variables z & y .

On cherchera l'intégrale de l'équation reduite au premier ordre par les regles que nous avons données pour intégrer les equations différentielles du premier ordre a deux variables, & on determinera par cette intégrale la valeur de z en x , ou en y , ou celle de x , ou de y en z . On substituera une de ces valeurs dans la différentielle zdx , & on separera par ce moyen les variables dans l'équation $dy = zdx$, ou $\frac{dy}{z} = dx$, qu'on intégrera ensuite par les regles de la premiere Partie du Calcul Intégral, & on trouvera, comme dans le Probleme precedent, la valeur de x en y .

C. Q. F. T.

SOLUTION II. Lorsque x manque dans l'équation proposée, on peut supposer $dx = zdy$. Car, puisque dx est constante, on aura, en différentiant, $0 = zddy + dx dy$; par consequent $ddy = -\frac{dx dy}{z}$, & en substituant cette valeur, & zdy au lieu de dx dans la proposée, on aura $-\frac{A dz dy}{z} + B dy^2 + Cz dy^2 + D z^2 dy^2 = 0$, ou, en divisant par dy , & multipliant par z , $-Adz + Bz dy + Cz^2 dy + Dz^3 dy = 0$, equa-

tion différentielle du premier ordre a deux variables x & y . En intégrant cette equation, on trouvera la valeur de x en y , ou celle de y en x , & substituant une de ces deux valeurs dans l'equation $dx = x dy$, on trouvera l'intégrale $x = S. x dy + Q$ constante, par où l'on determinera la valeur de x en y , comme dans le Probleme premier.

CCCCLV.

COROLLAIRE. Il est aisé de voir que l'intégration se fera de la même maniere, & par les mêmes substitutions, lorsque l'equation proposée dans le Probleme second aura dans tous ses termes des puissances quelconques de dx , ou de dy , ou leurs produits; bien entendu que toutes les différentielles soient homogenes dans tous les termes.

On peut quelquefois se servir des mêmes methodes, quoique dans les equations différentielles a deux variables x & y , la constante ne soit ny dx , ny dy , mais une fonction, comme $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ou comme $y dx$; on va le voir dans les Exemples suivants.

CCCCLVI.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'equation $\mathcal{R} dy du = 2ay ddx + adx dy$, dans laquelle \mathcal{R} est une fonction quel-

quelconque de y & de constantes, & du est supposée

constante & égale à $\sqrt{dn^2 + dy^2}$. On voit, que les deux variables finies x & u manquant dans cette equation, & du étant constante, on supposera $dx = z du$, ce qui donne $ddx = dz du$, & par substitution $r dy du = 2ay dz du + az dy du$, & en divisant par du , $r dy = 2ay dz + az dy$, equation différentielle du premier ordre à deux variables x & y . Le facteur qui rend cette equation complete est $\frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}}$; car en la

multipliant par ce facteur, ou en la divisant par $2y^{\frac{1}{2}}$,

elle devient $\frac{r dy}{2y^{\frac{1}{2}}} = \frac{2ay dz + az dy}{2y^{\frac{1}{2}}}$, dont l'intégrale est

$$S. \frac{r dy}{2y^{\frac{1}{2}}} + Q \text{ constante} = az y^{\frac{1}{2}}, \text{ d'où l'on tire } z = r',$$

r' étant une fonction de y & de constantes

$$S. \frac{r dy}{2y^{\frac{1}{2}}} + Q = \frac{2ay dz + az dy}{2y^{\frac{1}{2}}}. \text{ Or puisque } du = \sqrt{dn^2 + dy^2}, \text{ \&}$$

que $dx = z du$, on aura $dn^2 = x^2 du^2 = x^2 dx^2 + x^2 dy^2$, & $dx = \frac{z dy}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{r' dy}{\sqrt{1-r'^2}} = r' dy$, en sup-

posant que r' est une fonction de y , & de constantes

$$= \frac{r'}{\sqrt{1-r'^2}}$$
. On trouvera donc l'intégrale $u = S. r' dy$
 par les regles de la premiere Partie du Calcul Intégral.

CCCCLVII.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'équation
 $r y^2 dy dn^2 + du dd u = 0$, dans laquelle r est une fon-
 ction de y & de constantes, $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & la
 différentielle $y dn$ constante. On voit que les deux va-
 riables finies u & n manquent dans cette equation; &
 par ce que $y dn$ est constante, on supposera $du = x y dn$,
 d'où l'on tire $ddu = y dn dx$, & par substitution $r y^2 dy dn^2$
 $+ y^2 x dx dn^2 = 0$, $r dy = -x dx$, & , en intégrant,
 $S. r dy = -\frac{x^2}{2} + Q$ constante, Or $x = \frac{du}{y dx}$, $x^2 = \frac{du^2}{y^2 dx^2}$
 $= \frac{dx^2 + dy^2}{y^2 dx^2}$; on aura donc $S. r dy = Q - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{2y^2 dx^2} \right)$,
 $2y^2 dx^2 \cdot S. r dy = 2Qy^2 dx^2 - dx^2 - dy^2$, $dy^2 = (2Qy^2$
 $- 1 - 2y^2 \cdot S. r dy) dx^2$, & $dn = \frac{dy}{\sqrt{2Qy^2 - 1 - 2y^2 \cdot S. r dy}}$;

equation intégrable par les regles de la premiere Partie
 du Calcul Intégral.

CCCCLVIII.

EXEMPLE III. On propose d'intégrer l'équation

$Ry^3 dy dx^2 = dx dy du^2 + y du^2 ddx - y dx du ddu$, dans laquelle R est une fonction quelconque de y , & de constantes, & dx ou du peut être prise pour constante.

Si on prend dx pour constante, on aura $ddx = 0$, le terme $y du^2 ddx$ disparaîtra, & l'équation deviendra $Ry^3 dy dx^2 = dy du^2 - y du ddu$, dans laquelle x , & u manquent. On supposera donc $du = z dx$; ce qui donne $ddu = dz dx$, &, par substitution, $Ry^3 dy dx^2 = z^2 dy dx^2 - y z dx dx^2$, ou $Ry^3 dy = z^2 dy - y z dz$. Divisant par y^3 , on aura $R dy = z^2 y^{-3} dy - y^{-2} z dz$, &, en intégrant de côté & d'autre, $S. R dy = -\frac{1}{2} z^2 y^{-2} + Q$ constante, &, en mettant pour z sa valeur, $\frac{du}{dx}$, on aura $S. R dy = Q - \frac{du^2}{2y^2 dx^2}$.

Si on prend du pour constante, on aura $ddu = 0$, le terme $y dx du ddu$ disparaîtra, & l'équation proposée deviendra $Ry^3 dy dx^2 = dx dy du^2 + y du^2 ddx$. Supposant $dx = z du$, on aura $ddx = dz du$, & par substitution $Ry^3 dy \cdot z^2 du^2 = z dy du^2 + y dz du^2$, ou bien $R dy$

$= \frac{z dy + y dz}{y^3 z^3}$. Donc, en intégrant, on a $S. r dy = -$

$\frac{1}{2y^2 z^2} + Q$ constante & en remettant pour x la valeur

$\frac{dx}{du}$, l'intégrale cherchée est $S. r dy = Q - \frac{du^2}{2y^2 dx^2}$,

comme auparavant.

CCCCLIX.

PROBLEME III. Intégrer l'équation différentielle du troisieme ordre $A dx^3 + B dy ddy + C dx ddy + D dy^3 + E dx dy^2 + F dx^2 dy + G dx^3 = 0$, dans laquelle dx est constante, & les deux variables finies x & y ne se trouvent pas, c'est a dire, que les coefficients A, B, C, D, E, F, G . sont tous constans, ou zero.

SOLUTION. En supposant suivant la regle $dy = x dx$, on aura $ddy = dx dx$, $d^3 y = dx dx dx$; & par substitution & divisant par dx , la proposée deviendra $A dx + B x dx dx + C dx dx + D dx dx + E x^2 dx^2 + F x dx^2 + G dx^3 = 0$, equation du second ordre a deux variables x & dx , dans laquelle la variable finie x ne se trouve point. On trouvera donc par le Probleme II. l'intégrale de cette equation, par laquelle on deter-

minera la valeur de x en n , & en constantes, ou celle de n en x . On substituera une de ces valeurs dans la différentielle $x dn$, & on intégrera l'équation $dy = x dn$, dans laquelle les variables sont séparées. Enfin procédant comme dans le Probleme I. on trouvera la valeur de y en n & constantes, ou celle de n en y .
C. Q. F. T.

CCCCCLX.

COROLLAIRE. On intégrera de la même manière, & par les mêmes substitutions, lorsque les puissances quelconques de dx , dy , ddy , ou leurs fonctions se trouveront dans quelque terme que ce soit de l'équation proposée.

EXEMPLE. On propose d'intégrer l'équation $dy ddy d^3 y + 2 dx dy ddy^2 - dx^2 dy^4 - 3 dx^6 = 0$, dans laquelle dx est constante, & où les deux variables finies x & y ne se trouvent point. On supposera donc $dy = x dx$, d'où l'on tirera $ddy = dx dx$, $d^3 y = dx dx dx$, & par substitution $x dx dx dx dx^3 + 2 x dx x^2 \times dx^4 - x^4 dx^6 - 3 dx^6 = 0$, & en divisant par dx^3 , $x dx dx dx + 2 x dx x^2 dx - x^4 dx^3 - 3 dx^3 = 0$, équation à deux variables x & z , dans laquelle dx est constante,

où la variable x ne se trouve pas, & qu'on intégrera (Art. CCCCLV.) en faisant $dz = u dx$. Car cette supposition donnera $ddz = du dx$, $z dz = z u dx$, & en substituant & divisant par dx^2 , la dernière equation deviendra $z u du + 2 z u^2 dx - z^4 dx - 3 dx = 0$, ou bien, en remettant $\frac{dz}{u}$ au lieu de dx , $z u^2 du + 2 u^2 z dz - z^4 dz - 3 dz = 0$, equation du premier ordre à deux variables z & u , dont on cherchera l'intégrale par les règles que nous avons données pour cette sorte d'equations. Cette intégrale donnera la valeur de u en z & constantes, qu'on substituera dans l'equation $dz = u dx$, ou $\frac{dz}{u} = dx$, & en intégrant par les règles de la première Partie du Calcul Intégral, on trouvera la valeur de z en x . On substituera cette valeur de z dans l'equation $dy = z dx$, & en intégrant on trouvera la valeur de y en x & constantes.

CCCCLXI.

PROBLEME IV. Intégrer l'equation du troisième ordre $A d^3 y + B dx ddy + C dx^3 = 0$, dans laquelle dx est constante, & les coefficients A, B, C sont des fonctions quelconques de la seule variable x & de constantes, ou zero.

SOLUTION. Supposant $dy = x dx$, & substituant $ddz dx$ au lieu de d^3y , & $dz dx$ au lieu de ddy , la proposée devient $A ddz + B dz dx + C dx^2 = 0$, equation du second ordre a deux variables z & x , dans laquelle dx est constante, & où la variable finie z ne se trouve point. On cherchera donc par le Probleme II. la valeur de z en x , ou celle de x en z , & substituant une de ces valeurs dans la différentielle $x dx$, on trouvera, en intégrant l'équation $dy = x dx$, la valeur de y en x , comme dans les Problemes précédents.

CCCCLXII.

COROLLAIRE. L'intégration se fera de la même manière, & par les mêmes substitutions, lorsque les puissances quelconques de dx & de ddy , où leurs fonctions se trouvent dans quelque terme que ce soit de l'équation proposée, pourvu que dy & ses puissances n'y soient pas.

CCCCLXIII.

PROBLEME V. Intégrer l'équation différentielle du quatrième ordre a deux variables $A d^4y + B dx d^3y + C dx^2 ddy + D dx^4 = 0$, dans laquelle dx est constante, & les coefficients A, B, C, D sont aussi constants,

ou zero; c'est a dire, que les deux variables finies x , & y , & la premiere différence dy , avec ses puissances, ne s'y trouvent point.

SOLUTION. Supposant $dy = xdx$, & substituant $d^3 x dx$ pour $d^4 y$, $d^2 x dx$ pour $d^3 y$, & $dx dx$ pour $d^2 y$, la proposée devient $A d^3 x + B d dx dx + C dx dx^2 + D dx^3 = 0$, equation du troisieme ordre a deux variables x & x , dans laquelle dx & les coefficients A, B, C, D sont constans. On intégrera donc cette equation par le Probleme III., & on aura la valeur de x en x , ou celle de x en x ; substituant ensuite une de ces valeurs dans la différentielle $x dx$, on trouvera, comme dans les Problemes precedents, la valeur de y en x , en intégrant l'equation $dy = x dx$, ou $\frac{dy}{x} = dx$.

C. Q. F. T.

CCCCLXIV.

On peut appliquer cette methode aux equations différentielles a deux variables du cinquieme ordre, dans le cas où les deux variables finies x & y , & les différences dy , & ddy avec leurs fonctions manquent, dx étant constante. On peut passer de là aux equations différentielles des autres ordres supérieurs, & trouver les equations nécessaires pour les rendre intégrables.

Parmi

Parmi les equations qui ne sont pas susceptibles de la methode precedente, par ce que les deux variables finies s'y trouvent, il y en a quelques unes qu'on y peut remanier en prenant pour constante une différentielle, telle que tous les termes affectés de l'une des deux variables finies disparaissent, & qu'il ne reste que ceux qui contiennent l'autre. L'equation $dx^3 - dx dy^2 = y dx ddx + 2x dy ddy$, dans laquelle on peut prendre dx , ou dy pour constante, est dans ce cas. Car si on suppose dx constante, on aura $ddx = 0$, le terme $y dx ddx$ disparaîtra, & l'equation deviendra $dx^3 - dx dy^2 = 2x dy ddy$, dans laquelle la variable finie y ne se trouve pas. Si on suppose dy constante, le terme $2x dy ddy$ disparaîtra, & on aura $dx^3 - dx dy^2 = y dx ddx$, ou $dx^2 - dy^2 = y ddx$, equation dans laquelle la variable finie x manque.

Plusieurs autres cas se rameneront facilement a la methode precedente par de simples substitutions. Par exemple, si dans l'equation $x^m ddx = y ddy + dy^2 + y^2 dy^2$, on suppose $y dy = dz$, ou $\frac{1}{2} yy = z$, on aura $y ddy + dy^2 = ddz$, $y^2 dy^2 = dz^2$, & en substituant $x^m ddx = ddz + dz^2$, equation dans laquelle la variable finie x ne se trouve pas.

Mais nous allons expliquer une methode fondée sur les principes du Calcul Exponentiel, par laquelle on pourra transformer un grand nombre d'equations différentielles, qui renferment leurs deux variables finies, en d'autres dans lesquelles l'une des deux ne se trouve pas.

CCCCLXV.

LEMME. Supposé que e soit le nombre dont le logarithme est l'unité, & que $x = e^{bu}$, b étant constante, & u variable, on aura $dx = be^{bu} du$, $ddx = be^{bu} (ddu + bdu^2)$, $d^3x = be^{bu} (d^3u + 3bduddu + bbdu^3)$, &c.

DEMONSTRATION. Puisqu'on suppose $x = e^{bu}$, & $L.e = 1$, on aura $L.x = L.e^{bu} = bu.L.e = bu$; &, en différentiant, $d.L.x = \frac{dx}{x} = bdu$; $dx = bxdu = be^{bu} du$; en prenant les secondes différences, $ddx = bxddu + bdxdu = be^{bu} ddu + bbe^{bu} du^2 = be^{bu} (ddu + bdu^2)$; en prenant les troisiemes différences, $d^3x = be^{bu} (d^3u + 2bduddu) + bbe^{bu} du (ddu + bdu^2) = be^{bu} (d^3u + 3bduddu + bbdu^3)$, & ainsi de suite. C. Q. F. D.

• CCCCLXVI.

COROLLAIRE I. Si on suppose dx constante, on aura $ddx = 0 = be^{bu}(ddu + bdu^2)$; par conséquent $ddu = -bdu^2$.

CCCCLXVII.

COROLLAIRE II. Si on suppose $y = e^{ku}t$, k étant constante, & t variable, on aura $dy = e^{ku}(ktdu + dt)$, & $ddy = e^{ku}(ktddu + kktdu^2 + 2kdtdu + ddt)$. Car, puisque $y = e^{ku}t$, on aura, en différentiant, $dy = t.d.e^{ku} + e^{ku}dt = kt e^{ku}du + e^{ku}dt = e^{ku}(ktdu + dt)$; & en prenant les secondes différences, on trouve $ddy = e^{ku}.d(ktdu + dt) + (ktdu + dt)d.e^{ku} = e^{ku}(ktddu + kdtdu + ddt) + ke^{ku}du(ktdu + dt) = e^{ku}(ktddu + kktdu^2 + 2kdtdu + ddt)$.

CCCCLXVIII.

COROLLAIRE III. Si dans une equation différentielle a deux variables x & y , on suppose $x = e^{bu}$, & $y = e^{ku}t$, & qu'on substitue les valeurs qu'on tire de

ces deux suppositions au lieu des variables x , & y , & de leurs différences dx , dy , ddx , ddy , &c., l'équation sera transformée dans une autre à deux variables u , & r , telle que la variable finie u ne se trouvera que dans les exposans de e , ou dans les quantités exponentielles e^{bu} , e^{ku} ; & si l'équation proposée ne contient pas les premières différences dx , dy , ou leurs puissances, & les secondes différences ddx , ddy , & qu'on fasse disparaître toutes les quantités exponentielles dans l'équation transformée, elle deviendra une équation à deux variables u , & r , dans laquelle la variable finie u manquera, & qui ne contiendra que les premières différences du , dr , & leurs puissances, & les secondes différences ddu , ddr ; cette équation pourra s'intégrer alors (par le Probleme Art. CCCCLIII.): Nous allons faire voir dans les Problemes suivans, que cette methode reussit: 1.° Lorsque l'équation proposée n'a que deux termes, & qu'elle est comprise dans cette formule $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, dans laquelle dx est supposée constante: 2.° Lorsque la somme des exposans des variables x & y , & de leurs différences premières & secondes dx , dy ; ddx , ddy est la même dans chaque terme de l'équation proposée; car alors en supposant $x = e^u$, & $y = e^r$, on pourra faire disparaître par la division toutes les quantités exponentielles de l'équation transformée: 3.° Lorsque la somme des

exposans de l'une des deux variables, par exemple de x , & de ses différentielles, est la même dans chaque terme de l'équation proposées; car alors en supposant cette variable $x = e^u$, on pourra encore faire disparaître par la division les quantités exponentielles de la transformée.

CCCCLXIX.

PROBLEME VI. Intégrer les équations différentielles, telles que $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, dans laquelle dx est constante.

SOLUTION. Soit $x = e^{bu}$, & $y = e^{ku} r$; b & k font des constantes arbitraires, qu'on déterminera dans la suite de l'opération. La supposition de $x = e^{bu}$ donne $x^m = e^{mbu}$; $dx = b e^{bu} du$, $dx^p = b^p e^{pbu} du^p$; l'autre supposition de $y = e^{ku} r$ donne $y^n = e^{nku} r^n$; $dy = e^{ku} \times (kr du + dr)$; $dy^{p-2} = e^{pku-2ku} (kr du + dr)^{p-2}$; $ddy = e^{ku} (kr ddu + kkr du^2 + 2kdr du + ddr)$; & parce que dx est constante, on aura (CCCCLXVI.) $ddu = -bdu^2$, & en substituant pour ddu cette valeur dans celle de ddy , on trouve $ddy = e^{ku} (-kbr du^2 + kkr du^2 + 2kdr du + ddr) = e^{ku} (ddr + 2kdr du + (kk - kb) \times$

$r du^2$). En écrivant toutes ces valeurs dans l'équation proposée, elle devient $a e^{mbu} b^p e^{pbu} du^p = e^{nku} r^n \cdot \times e^{pk u - 2ku} (kr du + dr)^{p-2} \cdot e^{ku} \{ ddr + 2kdr du + (kk - kb) r du^2 \}$; c'est à dire, $ab^p e^{mbu + pbu} du^p = e^{nku + pk u - ku} r^n (kr du + dr)^{p-2} (ddr + 2kdr du + (kk - kb) r du^2)$. Pour faire disparaître les exponentielles de cette équation, on n'a qu'à les supposer égales, & ensuite diviser, & on aura $mbu + pbu = nku + pk u - ku$, ou $\frac{b}{k} = \frac{n+p-1}{m+p}$. On peut donc prendre le nombre qu'on voudra pour l'une des constantes indéterminées b , ou k , & déterminer ensuite l'autre constante par l'équation que nous venons de trouver. Ainsi si l'on prend $b = n+p-1$, somme des exposants de y , & de ses différences dans le terme $y^n dy^{p-2} ddy$, on aura $k = m+p$, somme des exposants de u , & de du dans l'autre terme $a u^m du^p$; si l'on prend $k = 1$, on aura $b = \frac{n+p-1}{m+p}$, &c. en divisant toute l'équation transformée par la quantité exponentielle, qu'on suppose présentement être la même dans les deux termes, cette équation devient $a^b du^p = r^n (kr du + dr)^{p-2} \{ ddr + 2kdr du + (kk - kb) r du^2 \}$, laquelle ne contient plus qu'une

des variables finies t , avec les premières différences du , dt , & la seconde différence ddt nous désignerons cette équation par (A).

On pourra l'intégrer en supposant $du = zdt$, car on aura par cette supposition $ddu = dzdt + zddt$; & par la supposition de du constante, & de $du = zdt$, on a $ddu = -bdzdt = -bzdzdt^2$; donc $-bzdzdt^2 = dzdt + zddt$; d'où l'on tire $ddt = -bzdt^2 - \frac{dzdt}{z}$.

Substituant dans l'équation (A) la valeur de du , & celle de ddt , on aura $ab^p z^p dt^p = t^n (kzdt + dt)^{p-2} \times \left\{ -bzdzdt^2 - \frac{dzdt}{z} + 2kzdzdt^2 + (kk - kb)z^2 t dt^2 \right\}$,

ou bien, en divisant par dt^{p-1} , & multipliant par z , on aura (B) $ab^p z^{p+1} dt = t^n (kzdt + dt)^{p-2} (\overline{2k - b} \cdot z dzdt + \overline{kk - kb} \cdot z^2 dt - dz)$, équation du premier ordre à deux variables z & t , dont on cherchera l'intégrale par les règles données pour cette sorte d'équations, après y avoir substitué les valeurs de b & de k , qu'on aura déterminées; & on aura par cette intégrale la valeur de z en t , ou celle de t en z ; d'où l'on tirera, par les règles de la première Partie du Calcul Intégral, $S. z dt$, après avoir substitué dans la différentielle $z dt$ la valeur de z en t , ou celle de t en z .

CCCCLXX.

COROLLAIRE I. Supposant qu'on ait pris $b = n + p - 1$, & par conséquent $k = m + p$, les suppositions de $x = e^{bx}$, de $y = e^{kx} t$, de $du = x dt$, & par conséquent de $u = S. x dt$, donneront $x = e^{\overline{n+p-1} \cdot S. x dt}$, & $y = e^{\overline{m+p} \cdot S. x dt} t$, ou $L. x = (n + p - 1) S. x dt$. \times $L. e = (n + p - 1) S. x dt$, & $L. y = (m + p) S. x dt$. \times $L. e + L. t = (m + p) S. x dt + L. t$.

CCCCLXXI.

COROLLAIRE II. Dans les mêmes suppositions on aura $S. x dt = \frac{L. x}{n + p - 1}$, & en différentiant, $x dt = \frac{dx}{(n + p - 1)x}$; on aura de plus $L. y = (m + p) S. x dt + L. t = \frac{m + p}{n + p - 1} L. x + L. t = L. x^{\frac{m + p}{n + p - 1}} + L. t = L. t x^{\frac{m + p}{n + p - 1}}$; par conséquent $y = t x^{\frac{m + p}{n + p - 1}}$; $t = y x^{\frac{-m - p}{n + p - 1}}$, & $dt = x^{\frac{-m - p}{n + p - 1}} dy - \left(\frac{m + p}{n + p - 1} \right) \times y x^{\frac{-m - p}{n + p - 1} - 1} dx$; d'où l'on tire $x = \frac{dx}{(n + p - 1) x^{\frac{n - m - 1}{n + p - 1}} dy - (m + p) y x^{\frac{-m - p}{n + p - 1} - 1} dx}$. Donc, si on

si on a la valeur de x en t , ou celle de t en x , on pourra trouver le rapport de x à y . Car puisque

$$t = y x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}, \text{ si on a la valeur de } x \text{ en } t, \text{ on aura}$$

celle de z en $y x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}$, qu'on pourra substituer dans

$$\text{l'equation } z = \frac{dx}{(n+p-1)x^{\frac{n-m-1}{n+p-1}} dy - (m+p)y x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dx}$$

qui deviendra par là une equation différentielle du premier ordre à deux variables x & y , qu'on intégrera par les regles connus.

CCCCLXXII.

EXEMPLE I. On propose de reduire au premier ordre l'equation $x dx dy = y ddy$, dans laquelle dx est constante. Comparant cette equation reduite à la forme

$$x dx = y dy^{-1} ddy, \text{ avec la formule generale}$$

$$a x^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy, \text{ on trouvera } a = 1, m = 1$$

$$= n = p, \frac{b}{k} = \frac{n+p-1}{m+p} = \frac{1}{2}; \text{ donc, si l'on prend}$$

$$k = 1, \text{ on aura } b = \frac{1}{2}, \text{ \& mettant ces valeurs dans}$$

$$\text{l'equation du premier ordre (B), ou } a b^p x^{p+1} dt =$$

$$x^n (k x t + 1)^{p-2} (\overline{2k - b} \cdot x x dt + \overline{kk - kb} \cdot x^3 dt -$$

dz), on aura $\frac{1}{2}z^2 dt = t(zt + 1)^{-1} \left(\frac{3}{2}z z dt + \frac{1}{2}z^3 dt - dz \right)$; &, en reduisant, $z^3 t dt + z^2 dt = 3z^2 t dt + z^3 t dt - 2t dz$.

Mais, si on prend, comme nous avons fait dans le Coroll. I., $b = n + p - 1 = 1$, & par consequent $k = m + p = 2$, on aura par l'equation (B), $z^2 dt = t(2zt + 1)^{-1} (3z z dt + 2z^3 dt - dz)$; &, en reduisant, $2z^3 dt + z^2 dt = 3z z t dt + 2z^3 t dt - t dz$.

CCCCCLXXIII.

EXEMPLE II. Soit proposé de reduire au premier degré l'equation $\frac{xdx}{x} = \frac{ddy}{ydy}$, ou $an^{-1}dn = y^{-1} \times dy^{-1}ddy$, dans laquelle dn est constante. Comparant cette equation avec la formule generale, on trouve $m = -1$, $p = 1$, $n = -1$; on auroit donc dans ce cas $\frac{b}{k} = \frac{n+p-1}{m+p} = -\frac{1}{0}$, nombre infini; d'où l'on conclût que la methode ne peut servir dans cet exemple. Mais alors la reduction au premier ordre est facile, car on a $aydydx = xddy$; or dn etant constante, l'intégrale du terme $aydydx$ est $\frac{1}{2}ay^2dx$, & l'intégrale de l'autre terme $xddy$ est $x dy - y dx$; puis que la différentielle de $x dy - y dx$, en supposant dn

constante, est $xddy + dxdy - dxdy - xddy$: on aura donc $\frac{1}{2}ayydx = xdy - ydx + Cdx$, C étant une constante.

Il seroit inutile de rapporter un plus grand nombre d'exemples, qui peuvent tous se résoudre aisément par le Probleme précédent. Ainsi on voit que l'équation $y^2ddy = xdx dy$, qui a embarrassé autrefois les plus grands Calculateurs, se réduit facilement par la méthode du Probleme. Nous allons maintenant passer au second Cas, c'est à dire, lorsque la somme des exposans des variables & de leurs différences premières, & secondes est la même dans chaque terme de l'équation.

CCCCLXXIV.

PROBLEME VII. Intégrer les équations différentielles qui se rapportent à la formule générale $a x^m \times y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + b x^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} + Cc = ddy$, dans laquelle dx est constante, & la somme des dimensions des variables finies x & y , & de leurs différences dx , dy , ddy est la même dans chaque terme.

SOLUTION. Il est facile de voir par le Lemme précédent, & ses Corollaires, que, si on suppose dans ces sortes d'équations: $x = e^r$, & $y = e^s$, les quantités

exponentielles feront, après les substitutions, les mêmes dans tous les termes de l'équation transformée, & qu'on pourra par conséquent les faire disparoitre par la division. Car, puisque $x = e^u$, on aura $x^m = e^{mu}$, $x^n = e^{nu}$, $dx = e^u du$, $dx^p = e^{pu} du^p$, & de même, puisque $y = e^u r$, on aura $y^{-m-1} = e^{-mu-u} r^{-m-1}$; $y^{-n-1} = e^{-nu-u} r^{-n-1}$; $dy = e^u (r du + dr)$; $dy^{2-p} = e^{2u-pu} (r du + dr)^{2-p} \text{ \& c.}$; $ddy = e^u \times (ddr + 2 du dr + r du^2 + r ddu)$, & , a cause de du constante, qui donne $ddu = -du^2$, on aura $ddy = e^u (ddr + 2 du dr)$.

Substituant ces valeurs dans la formule proposée, elle devient $e^u (ddr + 2 du dr) = a e^{mu} . e^{-mu-u} r^{-m-1} . \times e^{pu} du^p . e^{2u-pu} (r du + dr)^{2-p} + b \text{ \& c.} = a e^u r^{-m-1} \times du^p (r du + dr)^{2-p} + b e^u r^{-n-1} du^q (r du + dr)^{2-q} + \text{ \& c.}$, & divisant toute l'équation par la quantité exponentielle e^u , qui se trouve dans tous les termes, on aura $ddr + 2 du dr = ar^{-m-1} du^p (r du + dr)^{2-p} + br^{-n-1} du^q (r du + dr)^{2-q} + \text{ \& c.}$, equation a deux variables u & r , dans laquelle la variable finie u ne se trouve pas, & qui ne contient que les premières différences du , dr avec leurs puissances ou produits, & la seconde différence ddr au premier degré.

On supposera donc $du = z dt$, ce qui donne $ddu = z ddt + dz dt$; mais les suppositions de dx constante, & de $du = z dt$ donnent $ddu = -du^2 = -z^2 dt^2$; donc $-z^2 dt^2 = z ddt + dz dt$, & $ddt = -\frac{dz dt}{z} - z dt^2$. Donc, en substituant, on aura l'équation suivante $-\frac{dz dt}{z} - z dt^2 + 2z dt^2 = z dt^2 - \frac{dz dt}{z} = at^{-m-1} x^p dt^p (z t dt + dt)^{2-p} + bt^{-n-1} x^q dt^q (z t dt + dt)^{2-q} + Cc.$, ou bien (A) $z dt - \frac{dz}{z} = at^{-m-1} x^p dt (2t + 1)^{2-p} + bt^{-n-1} x^q dt (z t + 1)^{2-q} + Cc.$, equation différentielle a deux variables x & t , & qui ne contient que les premières différences dx , dt , ou leurs fonctions, dont on cherchera l'intégrale par les règles données pour cette sorte d'équations.

Mais puisque $du = z dt$, & par conséquent $u = S. z dt$, on pourra réduire tout de suite la proposée, en faisant $x = e^{S. z dt}$, & $y = e^{S. z dt} t$; car ces deux suppositions donnent (par le Lemme Art. CCCCLXV. & ses Corollaires) $dx = e^{S. z dt} z dt$; $dy = e^{S. z dt} (z t dt + dt)$, & $ddy = e^{S. z dt} (z ddt + dz dt + z z dt^2)$, d'où l'on tire, a cause de $ddy = 0$, $ddt = -z dt^2 - \frac{dz dt}{z}$ comme on l'a trouvé cy-dessus.

CCCCLXXV.

EXEMPLE I. Soit proposée l'équation $x dx dy - y dx^2 = yy ddy$. Pour la comparer avec la formule générale, on l'écrit ainsi $xy^{-2} dx dy - y^{-1} dx^2 = ddy$, & on trouve $a=1$, $m=1$, $p=1$, $n=0$, $b=-1$, $q=2$. Substituant ces valeurs dans l'équation (A), elle devient: $z dt - \frac{dz}{z} = t^{-2} z dt (zt+1) - t^{-1} z^2 dt (zt+1)^0 = \frac{z^2 t dt + z dt}{t^2} - \frac{z^2 dt}{t} = \frac{z dt}{t^2}$; d'où l'on tire $z^2 t^2 dt - t^2 dz = z^2 dt$; $z^2 t^2 dt - z^2 dt = t^2 dz$; $dt - \frac{dz}{z} = \frac{dz}{z^2}$; & en intégrant, $t + \frac{t}{z} = -\frac{t}{z} + C$ constante; c'est à dire, $t^2 z + z = -t + Ctz$, & $z = \frac{t}{Ct - t^2 - 1}$. Mais $du = z dt$, & $z = \frac{du}{dt}$; donc $\frac{du}{dt} = \frac{t}{Ct - t^2 - 1}$, & $du = \frac{t dt}{Ct - t^2 - 1}$. D'un autre côté on a $u = e^x$, par conséquent $L.u = x$, & en différentiant $\frac{dx}{x} = du$. Donc $\frac{dx}{x} = \frac{t dt}{Ct - t^2 - 1}$. On a aussi $y = e^x t = xt$; $t = \frac{y}{x}$; $dt = \frac{x dy - y dx}{xx}$. Substituant ces valeurs de t , & de dt dans l'équation $\frac{dx}{x} = \frac{t dt}{Ct - t^2 - 1}$, on trouvera par réduction $Cy dx = y dy + x dx$.

CCCCLXXVI.

EXEMPLE II. Soit proposée l'équation $y^2 dx^3 + x^2 dy^3 - yx dxdy^2 - yxdydn^2 + yx^2 dxddy - xy^2 \times dxddy = 0$, dans laquelle dx est constante, & qui est dans le cas du Probleme precedent, puisque la somme des exposans des variables finies x , y , & de leurs différences dx , dy , & ddy est la même, sçavoir 5, dans chaque terme. On supposera donc, comme dans la solution du Probleme $x = e^u$, & $y = e^u r$, d'où l'on tire $dx = e^u du$, $dy = e^u (r du + dr)$, & a cause que $ddx = 0$, $ddy = e^u (ddr + 2 r dudr)$. Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, elle deviendra après les réductions ordinaires la transformée (B) $dr^3 + 2 r dudr^2 - r^2 dr du^2 + r dr du^2 + r du ddr - r^2 du ddr = 0$, dans laquelle la variable finie u ne se trouve pas.

On fera donc $du = z dr$, d'où l'on tirera, comme dans la solution du Probleme, $ddu = -du^2 = -z^2 dr^2 = dz dr + z ddr$, & $ddr = -z dr^2 - \frac{dz dr}{z}$. Après avoir substitué ces valeurs dans l'équation (B), on aura la reduite $dr + 2 r z dr - r dz + r^2 dz = 0$, ou bien $(r^2 - r) dz + 2 r z dr + dr = 0$, equation qui

est dans le Cas de l'Art. CCCLXXXII., & dont l'intégrale trouvée par la methode de cet Article est

$$(t-1)^2 z + t - L.t = C \text{ constante.}$$

Mais par la supposition de $du = z dt$, on a $z = \frac{du}{dt}$; donc, en substituant cette valeur de z dans l'intégrale, qu'on vient de trouver, on aura $(t-1)^2 du + t dt - dt.L.t = C dt$, ou $du = \frac{C dt - t dt + dt.L.t}{(t-1)^2}$, &c,

en intégrant, $du = \frac{t-C-t.L.t}{t-1} + Q$. constante. D'un

autre côté on a $x = e^u$, & $y = e^u t$; ce qui donne

$$u = L.x; y = xt, \text{ \& } t = \frac{y}{x}.$$

Donc ces valeurs de u ,

$$\text{ \& de } t \text{ étant substituées dans l'intégrale qu'on vient de trouver, on aura } L.x = \frac{\frac{y}{x} - C - \frac{y}{x} L.\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 1} + Q =$$

$$\frac{y - Cx - y L.y + y L.x - Qx + Qy}{y - x};$$

d'où l'on tire, en supposant $C + Q = m$, & $1 + Q = n$, $y L.x - x.L.x =$

$$ny - mx - y L.y + y L.x, \text{ \& } ny - mx = y L.y -$$

$$x L.x.$$

Ces deux exemples suffisent pour faire comprendre la resolution de tous les autres semblables. Au reste

il est clair que l'équation différentielle $y^2 ddy = x dx dy$,

dont

dont nous avons fait mention, & qui est résoluble par le premier cas, l'est aussi par celui-cy. Nous passerons maintenant au troisieme cas, sçavoir, lorsque la somme des expofans de l'une des deux variables & de ses différences est la même dans chaque terme de la proposée.

CCCCLXXVII.

PROBLEME VIII. Intégrer les equations différentielles qui se rapportent a la formule generale $d x^m d d y = P x^m d y^{m+2} + Q x^{m-n} d x^n d y^{m+2-n} + R x^{m-p} \times d x^p d y^{m+2-p} + \text{C}c.$, dont la somme des expofans de x , & de $d x$ est la même, sçavoir m , dans tous les termes $d x$ est constante, & $P, Q, R, \text{C}c.$ sont des fonctions quelconques de y .

SOLUTION. Supposant $x = e^u$, on aura $x^m = e^{m u}$; $x^{m-n} = e^{m u - n u}$; $d x^m = e^{m u} d u^m$; $d x^n = e^{n u} \times d u^n$, $\text{C}c.$, & $d d u = -d u^2$. Après avoir substitué ces valeurs dans la formule, & l'avoir divisée par $e^{m u}$, qui se trouve dans tous les termes, on trouve la transformée $d u^m d d y = P d y^{m+2} + Q d u^n d y^{m+2-n} + R d u^p d y^{m+2-p} + \text{C}c.$, dans laquelle la variable finie u ne se trouve pas.

On fera donc $du = z dy$, d'où l'on tire $ddu = -du^2 = -z^2 dy^2 = z ddy + dz dy$; par conséquent $ddy = -z dy^2 - \frac{dz dy}{z}$. En substituant ces valeurs dans la transformée, elle devient $-z^{m+1} dy^{m+2} - z^{m-1} dy^{m+1} dz = P dy^{m+2} + Q z^n dy^{m+2} + R z^p \times dy^{m+2} \text{ \&c.}$, & en divisant par dy^{m+1} , on a $-z^{m+1} dy - z^{m-1} dz = P dy + Q z^n dy + R z^p dy \text{ \&c.}$; equation du premier ordre a deux variables z & y , dont on cherchera l'intégrale par les regles connues; ce qui donnera la valeur de z en y , qu'on substituera dans l'equation $du = z dy$. On trouvera ensuite, par la premiere Partie du Calcul l'intégrale $u = S. z dy$, &, par ce que $L.u = u$, on aura $L.u = S. z dy$, equation, qui ne contiendra que les deux variables u & y , & des constantes.

Il est evident qu'on auroit reduit tout de suite la proposée, en supposant $u = e^{S.z dy}$; car cette supposition donne (par le Lemme Art. CCCCLXV. & ses Corollaires) $du = e^{S.z dy} z dy$; $ddu = e^{S.z dy} (dz dy + z ddy + z^2 dy^2) = 0$, par conséquent $ddy = -z dy^2 - \frac{dz dy}{z}$ comme on l'a trouvé plus haut.

EXEMPLE. On propose d'intégrer l'équation $2adx^2dy$

$+axdxddy = 2xdx dy^2 + 2x^2ydddy$, dans laquelle dx est constante, la somme des exposans de x & de dx est 2 dans tous les termes, & les coefficients $2a$ & 2 des deux termes où se trouvent dy , sont des fonctions

de y^0 , & de constantes. Supposant $x = e^{S.zdy}$, on aura

$dx = e^{S.zdy} z dy$; $ddy = -z dy^2 - \frac{dz dy}{z}$; ces valeurs

étant substituées dans l'équation proposée, elle devient

$$2ae^{2S.zdy} z^2 dy^3 - ae^{2S.zdy} z^2 dy^3 - ae^{2S.zdy} dz dy^2 = 2e^{2S.zdy} z dy^3 - 2e^{2S.zdy} z dy^3 - \frac{2e^{2S.zdy} dz dy^2}{z};$$

& en divisant par $e^{2S.zdy}$, qui se trouve dans tous les termes, on a, après la réduction, & après avoir divisé

par dy^2 , $az^2 dy - adz = -\frac{z dz}{z}$, ou bien $ady =$

$$\frac{az dz - z dz}{z^3},$$

équation dont l'intégrale est $ay = -\frac{a}{z} +$

$\frac{1}{z} + C$. constante. On peut trouver par cette intégrale

la valeur de z en y , la substituer ensuite dans la différentielle $z dy$, & trouver en intégrant l'équation finie $L.x$

$= S.z dy$. On peut aussi par la supposition de $L.x =$

$S.z dy$ réduire la proposée à une équation, qui ne contienne que les premières différences; car puisque

$L. x = S. x dy$, on aura, en différenciant, $\frac{dx}{x} = x dy$; $x = \frac{dx}{x dy}$, &, remettant cette valeur dans l'intégrale $ay = -\frac{a}{x} + \frac{1}{xz} + C$, on aura $ay dx^2 = xx dy^2 - ax dx dy + C dx^2$.

CCCCLXXVIII.

PROBLEME IX. Intégrer les equations différentielles, qui sont contenues dans la formule generale $dx^{m-1} ddx = P x^m dy^{m+1} + Q x^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} + R x^{m-p} dx^p dy^{m-p+1} + Cc.$, dans laquelle dy est constante, $P, Q, R, Cc.$ sont des fonctions de y , la somme des exposans de x & de ses différences dx, ddx est m dans tous les termes.

SOLUTION. On suppose, comme cy-dessus $x = e^u$, $dx = e^u du$, $ddx = e^u (ddu + du^2)$, & substituant ces valeurs dans la formule, on a, en divisant par e^{m+1} qui se trouve dans tous les termes, la transformée $du^{m-1} + du^{m-1} ddu = P dy^{m+1} + Q du^n dy^{m-n+1} + R du^p \times dy^{m-p+1} + Cc.$, dans laquelle u manque. Il faut donc supposer $du = x dy$: ce qui donne $ddu = dx dy$,

a cause de dy constante. Substituant ces valeurs dans

la transformée, elle devient $z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} \times dy^m dz = P dy^{m+1} + Q z^n dy^{m+1} + R z^p dy^{m+1} + Cc.$; & en divisant par dy^m , on a $z^{m+1} dy + z^{m-1} dz = P dy + Q z^n dy + R z^p dy + Cc.$, equation différentielle du premier ordre, a laquelle on parviendroit d'abord, en faisant $x = e^{S \cdot z dy}$.

EXEMPLE. Soit proposée l'equation $z dx dy = a ddz - y ddz$, ou $x^\circ ddz = \frac{z dx dy}{a - y}$, dans laquelle dy est constante, la somme des exposans de x , & de ses différences dx & ddz est 1 dans chaque terme, & le coefficient $\frac{z}{a - y}$ du terme où se trouve dy est une fonction de y . On fera donc $x = e^{S \cdot z dy}$, $dx = e^{S \cdot z dy} \times z dy$, $ddz = e^{S \cdot z dy} (z^2 dy^2 + z ddy + dz dy)$. Mais comme dy est constante, on aura $ddy = 0$, par conséquent $ddz = e^{S \cdot z dy} (z^2 dy^2 + dz dy)$. Substituant ces valeurs dans la proposée, on trouve $z x dy^2 = a z^2 dy^2 + a dz dy - z x y dy^2 - y dy dz$; & en divisant par dy , on a $z x dy = a z^2 dy + a dz - z x y dy - y dz$, equation du premier ordre. On peut reduire tout de suite la

proposée en la mettant sous cette forme $z dx dy + y ddx = addx$, dont l'intégrale, en supposant dy constante, est $y dx + x dy = adx + C dy$.

CCCCLXXIX.

Les methodes precedentes peuvent s'appliquer également a toutes les equations différentielles de quelque ordre qu'elles soient, pourvû qu'elles se trouvent renfermées dans les cas enonçés cy-dessus. Soit par exemple l'equation generale

$$A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2} + \frac{D d^3 y}{dx^3} \dots \dots \dots + \frac{N d^n y}{dx^n} = 0$$

dans laquelle les quantités A, B, C, D &c. representent des constantes, ou des variables finies & des constantes avec les conditions requises. Soit fait $y = e^{S \cdot z dx}$, on aura (par le Lemme Art. CCCCLXV.)

$$\frac{dy}{dx} = e^{S \cdot z dx} z; \quad \frac{ddy}{dx^2} = e^{S \cdot z dx} \left(z z + \frac{dz}{dx} \right); \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = e^{S \cdot z dx} \left(z^3 + \frac{3z dz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2} \right)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = e^{S \cdot z dx} \left(z^4 + \frac{6z z dz}{dx} + \frac{4z d dz}{dx^2} + \frac{3 dz^2}{dx^2} + \frac{d^3 z}{dx^3} \right)$$

Si on substitue ces valeurs dans l'equation proposée, elle sera divisible par $e^{S \cdot z dx}$, & elle deviendra de l'ordre $n - 1$. Il est evident que cette methode est applicable aux trois cas precedents; par exemple au premier, en faisant les coefficients egaux a zero, excepté ceux des deux termes qu'on veut reduire a un ordre

inférieur, & dans les deux autres cas, on déterminera $A, B, C, D, \text{ \& } c.$, enforte que les termes ayent les conditions necessaires. Donc en general une equation différentielle du degré n contenue dans les cas precedents pourra toujours s'abaisser au degré $n - 1$. Mais nous traiterons cette equation plus generalement dans le Chapitre suivant.

CCCCLXXX.

La methode que nous avons expliquée (Article ccccxvi. & suivants) pour intégrer un nombre quelconque d'equations différentielles du premier ordre, peut facilement s'étendre aux equations différentielles de tous les ordres, c'est a dire, que si l'on a un nombre N d'equations différentielles renfermant le nombre $N + 1$ de variables $x, y, z, u, \text{ \& } c.$, chaque equation pouvant se reduire a la forme suivante $(K) 0 = \theta + ax + by + cz$

$$+ \text{ \& } c. + \frac{a'dx}{dt} + \frac{b'dy}{dt} + \frac{c'dz}{dt} + \text{ \& } c. + \frac{a''ddx}{dt^2} + \frac{b''ddy}{dt^2} + \frac{c''ddz}{dt^2} + \text{ \& } c. + \frac{a''''d^3x}{dt^3} + \frac{b''''d^3y}{dt^3} + \frac{c''''d^3z}{dt^3} + \text{ \& } c. \dots \dots + \frac{A d^n x}{dt^n} + \frac{B d^n y}{dt^n} + \frac{C d^n z}{dt^n} + \text{ \& } c.,$$

dans laquelle dt est constante, θ une fonction quelconque de x , & $a, b, c, \text{ \& } c., a', b', c', \text{ \& } c., a'', b'', c'', \text{ \& } c. \dots \dots A, B, C, \text{ \& } c.$ font des constantes quelconques, ou zero; on pourra toujours intégrer ces equations par la methode de

l'Art. CCCCXVI. en supposant $dx = p dt$, $ddx = q dt^2$,
 $d^3x = r dt^3$, &c. jusqu'à $d^{n-1}x = s dt^{n-1}$, & de
même $dy = p' dt$, $ddy = q' dt^2$, $d^3y = r' dt^3$ &c.
jusqu'à $d^{n-1}y = s' dt^{n-1}$; $dz = p'' dt$, $ddz = q'' dt^2$,
 $d^3z = r'' dt^3$ &c. jusqu'à $d^{n-1}z = s'' dt^{n-1}$, p , q , r ,
 s , &c. p' , q' , r' , s' , &c. p'' , q'' , r'' , s'' , &c. étant de
nouvelles variables. Car, puisque dt est constante, en
différentiant les équations $dx = p dt$, $ddx = q dt^2$,
 $d^3x = r dt^3$, $d^{n-1}x = s dt^{n-1}$, on aura $ddx =$
 $d p dt$, $d^3x = d q dt^2$, $d^n x = d s dt^{n-1}$; par con-
séquent $\frac{a'' ddx}{dt^2} = \frac{a' dp}{dt}$; $\frac{a''' d^3x}{dt^3} = \frac{a'' dq}{dt}$; $\frac{A d^n x}{dt^n} =$
 $\frac{A ds}{dt}$. On aura de même $ddy = d p' dt$; $d^3y =$
 $d q' dt^2$; $d^n y = d s' dt^{n-1}$, & par conséquent
 $\frac{b' ddy}{dt^2} = \frac{b'' dp'}{dt}$; $\frac{b''' d^3y}{dt^3} = \frac{b'' dq'}{dt}$; $\frac{B d^n y}{dt^n} = \frac{B ds'}{dt}$. On
trouvera de même les valeurs des différentielles ddz ,
 d^3z , &c. ddu , d^3u , &c. substituant ces valeurs dans
la formule (K), elle devient $0 = \theta + ax + by + ez$
 $+ \text{&c.} + \frac{a' dx}{dt} + \frac{b' dy}{dt} + \frac{c' dz}{dt} + \text{&c.} + \frac{a'' dp}{dt} + \frac{b'' dp'}{dt} +$
 $\frac{c'' dp''}{dt} + \text{&c.} + \frac{a''' dq}{dt} + \frac{b''' dq'}{dt} + \frac{c''' dq''}{dt} + \text{&c.} + \dots +$

$\frac{A ds}{dt} + \frac{B ds'}{dt} + \frac{C ds''}{dt} + \text{Ctc.}$; equation qui ne contient

que les variables $t, u, y, z, \text{Ctc.}$ avec leurs premieres différences $dt, du, dy, dz, \text{Ctc.}$ & les premieres différences $dp, dq, dr, ds, \text{Ctc.}$ $dp', dq', dr', ds', \text{Ctc.}$ $dp'', dq'', \text{Ctc.}$ des variables $p, q, r, s, \text{Ctc.}$, $p', q', r', \text{Ctc.}$, $p'', q'', \text{Ctc.}$ On aura de plus autant d'equations de la forme requise par l'Art. CCCCXVI., qu'on aura introduit de nouvelles variables $p, p', p'', \text{Ctc.}$ $q, q', q'', \text{Ctc.}$ $r, r', r'', \text{Ctc.}$ $s, s', s'', \text{Ctc.}$ dans la formule (k). Car, puisque $du = p dt$, on aura $du - p dt = 0$; & puisque $ddu = q dt^2 = dp dt$, on aura $dp = q dt$, & $dp - q dt = 0, \text{Ctc.}$, & de même $dy - p' dt = 0$, $dp' - q' dt = 0, \text{Ctc.}$ Donc toutes ces equations pourront s'intégrer par la methode de l'Art. CCCCXVI. en les multipliant toutes, excepté la premiere, par différentes constantes indeterminées, & pratiquant ensuite les autres operations que prescrit cette methode. C'est ce que nous allons éclaircir par quelques exemples.

CCCCCLXXI.

EXEMPLE I. On propose d'intégrer l'equation différentielle du second ordre $T ddu + a T du dt + b u T dt^2 + T' dt^2 = 0$, dans laquelle dt est constante, & T, T' sont des fonctions quelconques de t . Divi-

T t

fant cette equation par $T dt^2$, & supposant $\frac{T'}{T} = \theta$
 fonction de t , on la reduit a la forme (K), ou $o = \theta$
 $+ b x + \frac{a dx}{dt} + \frac{d dx}{dt^2}$. On fera donc $dx = p dt$, d'où
 l'on tire, en différenciant, $d dx = dp dt$, & substituant
 cette valeur de $d dx$ dans la proposée, on aura $o = \theta$
 $+ b x + \frac{a dx}{dt} + \frac{dp}{dt}$, ou $dp + a dx + b x dt + \theta dt = o$,
 & $dx - p dt = o$; deux equations a trois variables t ,
 x , p , qui ont les conditions qui exige la methode de
 l'Art. ccccxvi. On multipliera donc la seconde equation
 par un facteur constant, & indeterminé A . On
 ajoutera le produit $A dx - A p dt = o$ a la premiere
 equation, & on aura la somme $dp + (A + a) dx +$
 $(b x - A p) dt + \theta dt = o$. On supposera ensuite, sui-
 vant la methode, $b x - A p = M p + M(A + a)x$,
 M etant un autre facteur constant & indeterminé; &
 en comparant terme a terme les deux membres de
 cette equation, on aura $b x = M(A + a)x$, & $-A p$
 $= M p$, d'où l'on tire $M = -A$, & $M = \frac{b}{A + a}$; par
 consequent $A = -\frac{b}{A + a}$; $A A + A a = -b$, & $A =$
 $\frac{-a \pm \sqrt{a a - 4 b}}{2}$; ce qui donne deux valeurs de A , que
 nous exprimerons par A , & A' , & aussi deux valeurs
 correspondantes de M , que nous designerons par M &

M'. En substituant ces valeurs dans l'équation $bx - Ap = Mp + M(A+a)u$, & supposant $p + (A+a)u = u$, & $p + (A'+a)x = u'$, l'équation $dp + (A+a)dx + (bx - Ap)dt + \theta dt = 0$ se change en ces deux autres $du + Mndt + \theta dt = 0$, & $du' + M'u'dt + \theta dt = 0$, qu'on intégrera par l'Article CCCLXXXII. On trouvera donc u & u' en t , & en constantes; & ensuite les deux équations $p + (A+a)x = u$, & $p + (A'+a)x = u'$ donneront la valeur de x en t .

CCCLXXXII.

EXEMPLE II. On propose d'intégrer l'équation différentielle du troisième ordre $Td^3x + aTddndt + bTdxdt^2 + cnTdt^3 + Tdt^3 = 0$, ou, en divisant par Tdt^3 , & supposant $\frac{T}{T} = \theta$, $0 = \theta + cx + \frac{bdx}{dt} + \frac{addx}{dt^2} + \frac{d^3x}{dt^3}$, qui a la forme requise. On supposera donc $dx = pdt$, $ddx = qdt^2$; d'où l'on tirera, en différentiant, $ddx = dpdt$, $d^3x = dqdt^2$, &, par substitutions, $0 = \theta + cx + \frac{bdx}{dt} + \frac{adp}{dt} + \frac{dq}{dt}$, ou $dq + adp + bdx + cxdt + \theta dt = 0$. Or ces trois équations peuvent s'intégrer par l'Art. CCCXVI. en multipliant la seconde de ces équations par la constante in-

determinée A , & la troisieme par la constante indeter-
 minée B , & ajoutant les deux produits $A dx - A p dt$
 $= 0$, & $B dp - B q dt = 0$ a la premiere equation
 pour avoir la somme $dq + (a+B)dp + (b+A)dx$
 $+ (cx - Ap - Bq)dt + \theta dt = 0$. On fera ensuite
 $cx - Ap - Bq = M \{ q + (a+B)p + (b+A)x \}$
 $= M(b+A)x + M(a+B)p + Mq$, M etant un
 autre facteur constant & indeterminé; &, en egalant
 les termes homologues, on aura les trois equations sui-
 vantes $M(b+A)x = cx$; $M(a+B)p = -Ap$;
 $Mq = -Bq$; d'où l'on tire $M = \frac{c}{b+A}$; $M = \frac{-A}{a+B}$;
 $M = -B$; par consequent $\frac{c}{b+A} = -\frac{A}{a+B} = -B$;
 d'où l'on deduera, après avoir fait les reductions ordi-
 naires, une equation du troisieme degre, qui donnera
 trois valeurs de A , que nous designerons par A , A' ,
 A'' , & les trois valeurs correspondantes de B par B ,
 B , B'' , celles de M par M , M' , M'' . En substituant
 ces valeurs dans l'equation $cx - Ap - Bq = M \{ q +$
 $(a+B)p + (b+A)x \}$, & supposant $q + (a+B)p$
 $+ (b+A)x = u$; $q + (a+B')p + (b+A')x = u'$;
 $q + (a+B'')p + (b+A'')x = u''$, l'equation $dq +$
 $(a+B)dp + (b+A)dx + (cx - Ap - Bq)dt +$
 $\theta dt = 0$ se changera dans ces trois autres equations
 $du + M u dt + \theta dt = 0$, $du' + M' u' dt + \theta dt = 0$,

$d u'' + M u' dt + \theta dt = 0$, qu'on intégrera par l'Article CCCLXXXII. On trouvera donc les valeurs de u , de u' , & de u'' en t & en constantes, & ensuite les trois equations $q + (a + B)p + (b + A)x = u$; $q + (a + B)p + Cc$. donneront les valeurs de x en t & constantes.

CCCCLXXXIII.

EXEMPLE III. On propose d'intégrer les deux equations suivantes du second & du troisieme ordre.

$$0 = T + ax + by + \frac{cdx}{dt} + \frac{fdy}{dt} + \frac{ddx}{dt^2}.$$

$$0 = T' + gx + \frac{hdy}{dt} + \frac{d^3y}{dt^3}.$$

Dans lesquelles dt est constante, & T, T' sont des fonctions de t . On fera $dx = pdt$, $dy = qdt$, & $ddy = rdt^2$, d'où l'on tirera, en différentiant, $ddx = dpdt$, $ddy = dqdt$, $d^3y = drdt^2$; par consequent $dqdt = rdt^2$, & $dq = rdt$. Substituant $dpdt$ au lieu de ddx , & $drdt^2$ au lieu de d^3y dans les equations proposées, on les changera en ces deux autres

$$dp + cdx + fdy + (ax + by) dt + T dt = 0$$

$$dr + bdy + gx dt + T' dt = 0$$

& on aura de plus les trois equations suivantes $dx - pdt = 0$; $dy - qdt = 0$; $dq - rdt = 0$. Ces cinq equa-

tions ont toutes les conditions qu'exige la methode de l'Art. CCCCXVI.

On multipliera donc les quatre dernieres de ces equations par les constantes indeterminées A, B, C, E , & ajoutant les quatre produits a la premiere equation, on aura la somme (H), $dp + Edq + Adr + (c + B)dx + (f + bA + C)dy + (ax + gAx + by - Bp - Cq - Er)dt + (T + AT')dt = 0$. Ensuite, M etant un facteur constant & indeterminé, on supposera suivant la methode $(a + gA)x + by - Bp - Cq - Er = M\{p + Eq + Ar + (c + B)x + (f + bA + C)y\} = Mu$ & en developpant le second membre de cette equation, & egalant tous les termes homologues, on aura les equations suivantes: $M = -B$, $ME = -C$; $MA = -E$; $M(c + B) = a + gA$; $M(f + bA + C) = b$, & l'equation (H) deviendra $du + Mudt + (T + AT')dt = 0$, qu'on pourra intégrer par l'Article CCCLXXXII. après avoir determiné les valeurs de A & de M par les equations qu'on vient de trouver. Car, puisque $B = -M$, $E = -MA$, & $C = -ME = M^2 A$. Si on substitue ces valeurs de B , de C , & de E dans les deux equations $M(c + B) = a + gA$, & $M(f + bA + C) = b$, elles deviendront $M(c - M) = a + gA$ & $M(f + bA + M^2 A) = b$, d'où l'on tire $A =$

$$\frac{CM - M^2 - a}{\delta} = \frac{b - fM}{bM + M^3} \text{ \& de là une equation du cin-}$$

quieme degré qui donnera cinq valeurs de M , d'où l'on deduira les cinq différentes valeurs correspondantes des facteurs A, B, C, E . On fera le reste comme dans les exemples precedents au moyen des deux equations $du + Mudr + (T + AT')dr = 0$, & $p + Eq + Ar + (c + B)x + (f + bA + C)y = u$.



C H A P I T R E VII.

Methode pour trouver l'intégrale complete de l'equation

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^2y}{dx^3} + \frac{Ed^3y}{dx^4} \dots\dots$$

$+ \frac{Nd^ny}{dx^n}$ &c. Dans laquelle dx est constante, & les coefficients $A, B, C, D, E,$ &c. sont aussi constants, ou des fonctions de la variable $x,$ & de constantes.

CCCCLXXXIV.

SI on suppose que u soit une quantité composée, comme on voudra, de constantes & de variables $x, y, z,$ &c., parmi lesquelles x ait sa premiere différence constante; on sçait que la premiere intégrale de la différentielle $d^n u$ fera $d^{n-1} u$, a laquelle il faudra ajouter la constante du même ordre $A d x^{n-1}$, pour la rendre complete, A étant une constante arbitraire.

La seconde intégrale de la différentielle proposée $d^n u$ fera $d^{n-2} u$, & $d^{n-2} u + A x d x^{n-2}$, a laquelle il faudra ajouter la constante du même ordre $B d x^{n-2}$, pour avoir la seconde intégrale complete, $d^{n-2} u +$
 $A x d x^{n-2}$

$Ax dx^{n-2} + B dx^{n-2}$, B étant une constante arbitraire. La troisième intégrale complète de la différentielle proposée sera $d^{n-3}u + \frac{1}{2} Ax^2 dx^{n-3} + Bx dx^{n-3} + C dx^{n-3}$, C étant une troisième constante arbitraire; par où l'on voit que la dernière intégrale complète & finie de la différentielle proposée aura la forme $u + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Cc. + Q$, qui contiendra autant de constantes arbitraires $A, B, C, D, Cc. Q$, qu'il y aura d'unités dans l'exposant n de l'ordre de la différentielle proposée $d^n u$. Il est clair que tout ce que nous venons de dire, doit s'appliquer aux intégrales des mêmes différentielles, lorsqu'elles sont en forme d'équations, de sorte que la première équation intégrale complète de l'équation différentielle $d^n u = 0$ sera $d^{n-1}u + Adx^{n-1} = 0$, la seconde équation intégrale complète de l'équation $d^n u = 0$ sera $d^{n-2}u + Ax dx^{n-2} + B dx^{n-2} = 0$. La troisième sera $d^{n-3}u + \frac{1}{2} Ax^2 dx^{n-3} + Bx dx^{n-3} + C dx^{n-3} = 0$, & l'équation intégrale complète & finie sera $u + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Cc. + Q = 0$, qui contient autant de constantes arbitraires, qu'il y a d'unités dans l'exposant n .

CCCCLXXXV.

Il est donc nécessaire de bien distinguer les intégrales complètes d'avec les incomplètes & particulières; car $u + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \dots + Q = 0$ est la seule intégrale complète & finie de l'équation $d^n u = 0$. Mais si dans cette intégrale on détermine une ou plusieurs des constantes arbitraires, ou si on les suppose égales à des constantes arbitraires ou à zéro, on aura autant d'intégrales incomplètes ou particulières, qu'on aura fait de suppositions, & chacune de ces intégrales satisfera à l'équation différentielle $d^n u = 0$, mais elles ne la rempliront pas dans toute son étendue. Nous allons éclaircir cette matière importante par deux exemples.

EXEMPLE I. On propose d'intégrer l'équation différentielle du premier ordre $aady + yydx = (aa + xx)dx$. On voit d'abord, qu'on satisfait à cette équation en supposant $y = x$, puisqu'en substituant x au lieu de y , & dx au lieu de dy dans l'équation proposée, elle devient $aadx + xx dx = (aa + xx)dx$, qui est une équation identique, dont tous les termes se détruisent mutuellement. Donc $y - x = 0$ est une équation intégrale de la proposée; mais elle n'est pas complète, puisqu'elle ne contient ni la constante a , qui

est déjà dans l'équation proposée, ny la constante arbitraire qui doit toujours se trouver dans l'intégrale complete d'une différentielle du premier ordre. L'intégrale

complete de la proposée est $y = x + \frac{Aaa.e^{-\frac{x^2}{aa}}}{aa + A.S.e^{-\frac{x^2}{aa}} dx}$,

dans laquelle A est une constante arbitraire, & $L.e = 1$. Car si on suppose $y = x + z$, on aura $dy = dx + dz$, & substituant ces valeurs au lieu de y , & de dy dans l'équation proposée, elle devient $aadz + 2xzdx + xzdx = 0$, qui est dans le Cas de l'Art. CCCLXXXII. & dont l'intégrale trouvée par cet Article est $z =$

$\frac{Aaa.e^{-\frac{x^2}{aa}}}{aa + A.S.e^{-\frac{x^2}{aa}} dx}$. Donc l'intégrale complete sera $y = x$

$+ \frac{Aaa.e^{-\frac{x^2}{aa}}}{aa + A.S.e^{-\frac{x^2}{aa}} dx}$, qui rend l'intégrale particuliere

$y = x$, en supposant $A = 0$.

EXEMPLE II. On veut intégrer l'équation différentielle du second ordre, $0 = -y + \frac{xdy}{dx} + \frac{axddy}{dx^2}$, qui est

un cas particulier de nôtre formule generale $0 = Ay +$

$\frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + Cc$. On voit d'abord que l'équation

$y = x = 0$, ou $y = x$ est une intégrale particulière de la proposée, puisqu'en substituant x pour y , dx pour dy , & ddx ou zero pour ddy , la proposée devient $0 = -x + x + 0$, equation identique. Mais il s'en faut bien que cette equation finie $y = x$ soit l'intégrale complete de la proposée, & qu'elle en remplisse toute l'étendue, puisque cette intégrale complete doit renfermer deux constantes arbitraires, outre la constante a , qui se trouve déjà dans la différentielle proposée. On voit encore, & par la même raison, que cette equation finie $y = Ax$, dans laquelle A est une constante arbitraire, est une intégrale incomplete de la proposée.

L'intégrale finie & complete est $Ax + Bx \cdot S. \frac{e^{-\frac{a}{x}} dx}{xx}$, qui, outre la constante a , contient deux autres constantes indeterminées A & B . On trouve cette intégrale en supposant $y = Ax + xz$; ce qui donne $dy = Adx + xdz + zdz$; $ddy = 2dx dz + x d dz$, & par substitution, $0 = -y + \frac{xdy}{dx} + \frac{axddy}{dx^2} = -Ax - xz + Ax + xz + \frac{x^2 dz}{dx} + \frac{2axdz}{dx} + \frac{ax^2 d dz}{dx^2}$; d'où l'on tire $x dz dx + 2a dx dz + ax^2 d dz = 0$; & en divisant le tout par $ax dz$, $\frac{dx}{a} + \frac{2dx}{x} + \frac{d dz}{dz} = 0$, ou $\frac{2dx}{x} + \frac{d dz}{dz}$

$= -\frac{dx}{a}$. L'intégrale du premier membre est $2Lx$
 $+ Ldz = Lx^2 + Ldz = Lx^2 dx$. L'intégrale du
 second membre est $-\frac{x}{a} = -\frac{x}{a} \cdot L.e = L.e^{-\frac{x}{a}}$. Donc
 la première intégrale complète de l'équation $\frac{2dx}{x} +$
 $\frac{ddz}{dz} = -\frac{dx}{a}$, en ajoutant la constante arbitraire
 du même ordre $L.Bdx$, fera $Lx^2 dz = L.e^{-\frac{x}{a}} +$
 $L.Bdx$, ou $Lx^2 dz = L.B.e^{-\frac{x}{a}} dx$; par conséquent
 $x^2 dz = B.e^{-\frac{x}{a}} dx$; $dz = \frac{B.e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$; &, en intégrant
 encore, on aura $z = B.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$. Donc l'intégrale
 complète de la proposée fera $y = Ax + B.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$
 qui, outre la constante a , contient les deux constantes
 arbitraires A & B , comme il convient.

On n'a point ajouté de constante arbitraire en in-
 tégrant l'équation $dz = \frac{B.e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$, par ce qu'elle étoit
 inutile. Car, si on fait $z = C + B.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$, on

aura pour l'intégrale complete cherchée $y = Ax + Cx$

$$+ Bx.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}}dx}{xx} = (A+C)x + Bx.S.\frac{e^{-\frac{x}{a}}dx}{xx}.$$

Or on peut exprimer la somme $A+C$ par une seule lettre A' , qui represente une constante quelconque.

CCCCLXXXVI.

Quoiqu'il soit evident, par ce que nous avons dit, que toutes les equations intégrales particulieres soient contenues dans l'intégrale complete, ou que celle-cy soit composée de plusieurs intégrales particulieres, qui peuvent quelquefois servir a decouvrir l'intégrale complete, comme nous l'avons vû dans les deux exemples precedents, il arrive neantmoins fort souvent que les intégrales particulieres qu'on connoît, ne sont d'aucun secours pour trouver l'intégrale complete, ou même une intégrale plus etendue, que les particulieres données. Mais l'equation generale que nous traitons icy, $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + Cc.$ a cet avantage, que, si on connoît quelques valeurs particulieres de y en x , & constantes, on peut aisément en deduire d'autres valeurs plus etendues qui renferment les valeurs données, & même si on a un nombre suffisant de ces valeurs particulieres de y , on pourra en deduire la valeur generale, ou l'intégrale complete qu'on cherche.

CCCCLXXXVII.

Il est clair que, si p est un valeur convenable de y en x & constantes, de sorte qu'on ait $y = p$, alors on aura aussi $y = \alpha p$, α étant une constante arbitraire. Car, si la valeur p étant substituée au lieu de y dans la quantité $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + Cc$. rend cette quantité égale à zero, la valeur αp étant aussi substitué au lieu de y la fera évanouir de la même manière; on pourra donc introduire de cette façon une constante arbitraire α dans l'équation intégrale particulière $y = p$. De même, si on a de plus l'équation $y = q$, qui satisfasse à l'équation proposée, on aura encore $y = \beta q$, β étant une autre constante arbitraire; & de ces deux valeurs $y = \alpha p$, & $y = \beta q$, on en deduirra une troisième $y = \alpha p + \beta q$; car, si la quantité $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + Cc$. devient égale à zero par les substitutions particulières de αp , & de βq au lieu de y , il est évident qu'elle s'évanouira de même par la substitution de la somme $\alpha p + \beta q$ au lieu de y .

CCCCLXXXVIII.

De même si p, q, r, s, Cc . sont des fonctions de x , telles que chacune d'elles étant substituée au lieu

de y dans la quantité $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \mathcal{C}c$. la rende egale a zero, alors la somme $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \mathcal{C}c$. etant substituée au lieu de y dans la même quantité, la rendra aussi nulle; de sorte que, si $p, q, r, s, \mathcal{C}c$. sont des valeurs particulieres de y en x , qui satisfassent a l'équation différentielle proposée, on en deduirait tout d'un coup une valeur beaucoup plus étendue de y en x , sçavoir, $y = \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \mathcal{C}c$, qui satisfera a l'équation proposée, & cette valeur sera generale, & donnera l'intégrale complete, si elle contient autant de constantes arbitraires, qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle proposée. Il est donc facile, lorsqu'on a un nombre suffisant de valeurs particulieres de y en x , d'en deduire sa valeur complete, c'est a dire, celle qui comprend toutes les valeurs de y , qui satisfont a l'équation proposée, & qui donne l'intégrale complete de cette equation en termes finis.

CCCCLXXXIX.

Ainsi pour trouver l'intégrale finie & complete de l'équation proposée $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \dots + \frac{Nd^n y}{dx^n}$, il ne s'agit plus que de chercher des valeurs particulieres de y en x , telles qu'étant
substi-

substituées dans cette equation, elles la rendent identique; & de trouver autant de ces valeurs particulieres, qu'il est necessaire, pour que prises toutes ensemble, elles renferment autant de constantes arbitraires, qu'il y a d'unités dans l'exposant n . C'est pourquoy, si chaque equation particuliere, qui exprime la valeur de y en x , ne contient qu'une constante arbitraire, il faudra trouver le nombre n de ces equations particulieres, pour en deduire l'intégrale finie & complete de l'equation proposée. Mais, si parmi ces equations particulieres il s'en trouvent quelques-unes, qui renferment plusieurs constantes arbitraires, on pourra trouver l'intégrale complete avec un nombre de ces equations particulieres d'autant moindre, que chacune d'elles contiendra plus de constantes arbitraires.

CCCCXC.

Nous ne connoissons point de methode generale pour trouver le nombre suffisant d'equations particulieres entre y & x , lorsque les coefficients A, B, C, D, E, \dots, N de la proposée renferment des fonctions de x ; mais on a cette methode, lorsque tous ces coefficients sont supposés constants, c'est ce que nous allons expliquer.

Soit donc proposé de trouver l'intégrale finie & complete de l'equation différentielle $0 = Ay + \frac{B dy}{dx} +$

X x

$\frac{C d d y}{d x^2} + \frac{D d^3 y}{d x^3} \dots + \frac{N d^n y}{d x^n}$, dans laquelle la différence $d x$, & tous les coefficients $A, B, C, \text{ \& } c. N$ sont des quantités constantes. Nous designerons cette equation ainsi determinée par (H).

Pour la resoudre generalement, nous observerons d'abord que, si on suppose $y = e^{b x}$, b etant une constante indeterminée, & $L. e = 1$, on aura (Art. CCCCLXV.) $\frac{d y}{d x} = b e^{b x}$; $\frac{d d y}{d x^2} = b^2 e^{b x}$; $\frac{d^3 y}{d x^3} = b^3 e^{b x}$ $\text{ \& } c. \frac{d^n y}{d x^n} = b^n e^{b x}$, & qu'en substituant ces valeurs dans l'equation proposée (H), & divisant par $e^{b x}$, qui se trouve dans tous les termes, on aura l'equation algebrique suivante, que nous designerons par (K), $o = A + B b + C b^2 + D b^3 \dots + N b^n$, dont l'inconnue est b , & qui est du degre n .

Si on tire de cette equation (K) quelque valeur de b , & qu'on la substitue dans l'equation $y = e^{b x}$, on aura une valeur particuliere de y en x & constantes, laquelle etant substituée au lieu de y dans la proposée (H) la rendra identique. Supposé, par exemple, qu'une des racines de l'equation (K) soit f , de sorte qu'on ait $b = f$, ou $b - f = o$, diviseur de cette equation (K), on aura aussi $y = e^{f x}$ equation integrale particuliere de

la proposée (H); d'où l'on tire (Art. CCCCLXXXVII.) $y = \alpha e^{fx}$, autre equation intégrale particuliere, qui renferme une constante arbitraire α . Or l'equation algebrique (K) du degré n contient le nombre n de racines, ou de diviseurs simples, comme $b - f = 0$, soit que ces racines soient egales ou intégrales, réelles ou imaginaires. Donc, si toutes ces racines sont inégales entr'elles, on aura le nombre n de valeurs particulieres de y en x , dont chacune contiendra une constante arbitraire, & la somme de ces valeurs particulieres renfermera le nombre n de constantes arbitraires, & donnera la valeur complete de y en x & constantes, ou l'intégrale finie & complete de l'equation proposée (H); de sorte que, si on designe toutes les racines inégales de l'equation (K) par $f, f', f'', f''', \text{ \&c.}$ respectivement, on aura pour l'intégrale cherchée $y = \alpha e^{fx} + \beta e^{f'x} + \gamma e^{f''x} + \delta e^{f'''x} + \text{ \&c.}$, & si toutes ces racines sont réelles, cette intégrale sera aussi toute réelle, & ne dependra que des logarithmes.

CCCCXCI.

On pourra aussi trouver l'intégrale réelle & complete de l'equation (H) en termes finis, lorsque l'equation algebrique (K) aura des racines egales, & des racines imaginaires. Pour en trouver le moyen, il ne

faut que considerer attentivement la relation, qui est entre l'équation différentielle (H), ou $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + Cc\dots\dots\dots + \frac{Nd^n y}{dx^n}$, & l'équation algebrique (K), ou $0 = A + Bb + Cb^2\dots\dots\dots + Nb^n$. Cette relation est telle, que, si dans l'équation différentielle (H) on écrit b^0 pour y , b^1 pour $\frac{dy}{dx}$, b^2 pour $\frac{ddy}{dx^2}$, b^3 pour $\frac{d^3y}{dx^3}$, & generalement b^k pour $\frac{d^k y}{dx^k}$, cette equation (H) deviendra l'équation algebrique (K), & au contraire, si dans l'équation (K) on écrit y pour b^0 , $\frac{dy}{dx}$ pour b^1 , $\frac{ddy}{dx^2}$ pour b^2 , & generalement $\frac{d^k y}{dx^k}$ pour b^k , on retablira l'équation différentielle (H). D'où l'on conclût que si dans les diviseurs de l'équation algebrique (K) on écrit y au lieu de b^0 , $\frac{dy}{dx}$ au lieu de b^1 , & generalement $\frac{d^k y}{dx^k}$ au lieu de b^k , on formera une equation différentielle, qui sera contenue dans la proposée (H), & de laquelle on tirera une valeur particuliere de y en x , qui etant substituée dans cette equation (H), la rendra identique. Par exemple si $b - f$, ou $b^1 - fb^0 = 0$ est un diviseur de l'e-

quation algebrique (K), on en tirera l'equation différentielle $\frac{dy}{dx} - fy = 0$, ou $\frac{dy}{y} = f dx$, dont l'intégrale est $L.y = f x = f x . L.e = L.e^{f x}$; par conséquent $y = e^{f x}$, qui donne l'intégrale particuliere $y = a e^{f x}$, avec une constante arbitraire a , comme nous l'avons déjà trouvé cy-dessus.

CCCCXCII.

On comprend par ce que nous venons de dire, que, si on a un diviseur quelconque $a + b b + c b^2$, ou $a b^0 + b b^1 + c b^2 = 0$ de l'equation algebrique (K) on en tirera par les substitutions prescrites (Article CCCCXCI.) l'equation différentielle $a y + \frac{b dy}{dx} + \frac{c ddy}{dx^2} = 0$, qui donnera une valeur de y en x , laquelle satisfera a l'equation proposée (H), & on pourra par cette observation trouver l'intégrale complete qu'on cherche, lorsque l'equation algebrique (K) a des racines egales entr'elles. Car, si on suppose que le quaré $(f - b)^2$, ou $f f b^0 - 2 f b^1 + b^2 = 0$ soit un diviseur de l'equation (K), on en tirera par les substitutions prescrites l'equation différentielle $f f y - \frac{2 f dy}{dx}$

$\rightarrow \frac{dd y}{dx^2} = 0$; on cherchera ensuite l'intégrale complete

& finie de cette equation, en supposant $y = e^{f x} u$, d'où

l'on tirera $\frac{dy}{dx} = f e^{f x} u + \frac{e^{f x} du}{dx}$, & $\frac{ddy}{dx^2} = f f e^{f x} u +$

$\frac{2 e^{f x} du}{dx} + \frac{e^{f x} ddu}{dx^2}$; substituant ces valeurs dans l'equa-

tion différentielle $f f y - \frac{2 f dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, elle de-

vient, par la destruction mutuelle de tous les autres

termes $\frac{e^{f x} ddu}{dx^2} = 0$, ou $ddu = 0$. Or, en intégrant

cette equation, on trouve d'abord $du = \beta dx$, quantité

dans laquelle β est une constante arbitraire; &, en in-

tegrant encore, on a $u = \beta x + \alpha$; α étant une autre

constante arbitraire. Substituant donc cette valeur de

u dans l'equation supposée $y = e^{f x} u$, on aura $y = e^{f x} \times$

$(\alpha + \beta x)$, valeur de y , qui contient deux constantes

arbitraires, & qu'on trouve pour deux racines egales

de l'equation algebrique (K).

De même si l'equation (K) a pour diviseur le

cube $(f - b)^3$, en le developpant & faisant les substi-

tutions prescrites, on en deduirá l'equation différentielle

$f^3 y - \frac{3 f^2 dy}{dx} + \frac{3 f ddy}{dx^2} - \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$, qui sera contenue

dans la proposée (H), & en supposant $y = e^{f x} u$, on

trouvera par substitutions $d^3 u = 0$. En intégrant cette equation, on trouve d'abord $ddu = 2\gamma d^2 x$, 2γ étant une constante arbitraire quelconque; en intégrant encore, on a $du = 2\gamma x dx + \beta dx$, β étant une nouvelle constante arbitraire, & enfin en intégrant pour la troisieme fois, on trouve $u = \gamma x^2 + \beta x + \alpha$, α étant une troisieme constante arbitraire. On aura donc $y = e^{f x} u = e^{f x} (\alpha + \beta x + \gamma x^2)$, valeur particuliere de y , qui comprend trois constantes arbitraires pour trois racines egales de l'equation (K). On trouvera de la même façon, que, si $(f - b)^4$ est un diviseur de l'equation (K), on aura $y = e^{f x} (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)$, & generalement que, si le diviseur est $(f - b)^k$, la valeur de y sera $e^{f x} (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots + \mu x^{k-1})$, de sorte que cette valeur contiendra le nombre K de constantes.

CCCCXCIII.

On ne peut pas douter que les valeurs de y , telles que nous venons de les trouver par les diviseurs de plusieurs dimensions de l'equation (K) ne satisfassent aussi a l'equation (H), de maniere qu'étant substituées

au lieu de y dans cette equation, elles la rendront identique. Car soit l'equation (M) , ou $p + qb + rb^2 + sb^3 + Cc = 0$, un diviseur composé comme on voudra de l'equation (K) ; qu'on en forme par les substitutions prescrites l'equation différentielle $(L) 0 = p y + \frac{q dy}{dx} + \frac{r ddy}{dx^2} + \frac{s d^3y}{dx^3} + Cc$. Il est evident que la valeur complete de y , qui donne l'intégrale de cette equation, se trouve en joignant ensemble toutes les valeurs particulieres de y , qu'on tire des diviseurs simples de l'equation (M) . Or les diviseurs simples de cette equation (M) sont aussi les diviseurs simples de l'equation (K) : donc la valeur complete de y , qu'on tire du diviseur composé $p + qb + rb^2 + sb^3 + Cc$, & qui donne l'intégrale complete de l'equation (L) fera aussi une valeur de y , qui etant substituée dans l'equation différentielle proposée (H) la rendra identique, & donnera une intégrale particuliere de cette equation.

CCCCXCIV.

Nous avons donc trouvé toutes les valeurs possibles de y , dont la somme donne l'intégrale complete réelle & finie de l'equation différentielle proposée (H) , lorsque les racines de l'equation algebrique correspondante (K) sont toutes réelles, inégales ou égales. Il
ne

ne nous reste plus qu'à trouver ces valeurs particulieres de y , avec le nombre requis de constantes arbitraires, dans le cas où l'équation (K) contient des racines imaginaires. Or on sçait que ces racines imaginaires sont toujours en nombre pair dans l'équation algebrique où elles se trouvent, & qu'elles peuvent toujours être partagées deux par deux, de façon que leur produit & leur somme soient des quantités toutes réelles. Lors donc que l'équation algebrique (K) contiendra des racines imaginaires, elle aura toujours pour diviseur une equation réelle du second degré, de la forme $m m - 2 m \text{Cos. } V. b + b b = 0$, V étant un angle, ou un arc de cercle, dont le rayon est l'unité (Art. CXLV.), & dont les deux racines imaginaires seront $b = m \text{Cos. } V + m \text{Sin. } V. \sqrt{-1}$, & $b = m \text{Cos. } V - m \text{Sin. } V. \sqrt{-1}$ (Art. CXLV.). Il n'est donc plus question que de trouver les valeurs particulieres de y , qui repondent aux diviseurs réels de la forme $m m - 2 m b. \text{Cos. } V + b b = 0$, & qui contiennent chacun deux constantes arbitraires.

Pour cet effet nous reduirons d'abord par les substitutions prescrites le diviseur $m m - 2 m b. \text{Cos. } V + b b = 0$, a l'équation différentielle $0 = m m y - 2 m \times \frac{dy}{dx} \text{Cos. } V + \frac{d^2y}{dx^2}$, & nous chercherons l'intégrale de cette equation en supposant $y = e^{m x. \text{Cos. } V} z$, d'où l'on

Y y

tire $dy = m \text{Cos. } V \cdot e^{mx \cdot \text{Cos. } V} u dx + e^{mx \cdot \text{Cos. } V} du$, &
 $ddy = mm \overline{\text{Cos. } V^2} \cdot e^{mx \cdot \text{Cos. } V} u dx^2 + 2m \text{Cos. } V \cdot X$
 $e^{mx \cdot \text{Cos. } V} du dx + e^{mx \cdot \text{Cos. } V} ddu$. Substituant ces va-
 leurs de y , dy , ddy dans l'équation différentielle $o =$
 $mm y - 2m \frac{dy}{dx} \text{Cos. } V + \frac{ddy}{dx^2}$, on la transformera en
 $o = mm e^{mx \cdot \text{Cos. } V} u - 2mm \overline{\text{Cos. } V^2} e^{mx \cdot \text{Cos. } V} u - 2m X$
 $\text{Cos. } V e^{mx \cdot \text{Cos. } V} \frac{du}{dx} + mm \overline{\text{Cos. } V^2} e^{mx \cdot \text{Cos. } V} u + 2m X$
 $\text{Cos. } V e^{mx \cdot \text{Cos. } V} \frac{du}{dx} + e^{mx \cdot \text{Cos. } V} \frac{ddu}{dx^2}$, & en effaçant
 les termes qui se détruisent, & divisant par $e^{mx \cdot \text{Cos. } V}$,
 on aura $mm u + mm \overline{\text{Cos. } V^2} \cdot u - 2mm \overline{\text{Cos. } V^2} u + \frac{ddu}{dx^2}$
 $= o$, ou $mm u (1 - \overline{\text{Cos. } V^2}) + \frac{ddu}{dx^2} = o$, ou bien,
 par ce que dans le cercle, dont le rayon est l'unité,
 $\overline{\text{Sin. } V^2} = 1 - \overline{\text{Cos. } V^2}$, $mm \overline{\text{Sin. } V^2} u + \frac{ddu}{dx^2} = o$, &
 $mm \overline{\text{Sin. } V^2} u dx^2 + ddu = o$. Pour intégrer cette equa-
 tion, on la multipliera par $2 du$, & on aura
 $mm \overline{\text{Sin. } V^2} \cdot 2u du dx^2 + 2du ddu = o$, dont l'intégra-
 le, en ajoutant la constante arbitraire du même ordre,
 $a^2 m^2 \overline{\text{Sin. } V^2} dx^2$, fera $mm \overline{\text{Sin. } V^2} u u dx^2 + du^2 =$

$\alpha^2 m^2 \overline{\text{Sin. } V^2} d u^2$; d'où l'on deduit $\frac{d u^2}{a^2 - u^2} = m^2 \overline{\text{Sin. } V^2} \times$

$d u^2$, &, en tirant la racine quarrée, $\frac{d u}{\sqrt{a^2 - u^2}} =$

$m \overline{\text{Sin. } V} d u$. Or $\frac{d u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{\frac{d u}{a}}{\sqrt{1 - \frac{u u}{a a}}} = d s$, element

d'un arc de cercle s , dont le Sinus est $\frac{u}{a}$, & le rayon

1 . On aura donc $d s = m \overline{\text{Sin. } V} d u$, dont l'intégrale,

en ajoutant la constante arbitraire B , est $s = m u \overline{\text{Sin. } V}$

$+ B$. Puis donc que la quantité $m u \overline{\text{Sin. } V} + B$ peut

être prise pour un arc de cercle, dont le Sinus est $\frac{u}{a}$,

& le rayon 1 , si l'on designe par $A' (m u \overline{\text{Sin. } V} + B)$

cet arc de cercle, dont le Sinus est $\frac{u}{a}$, on aura

$\frac{u}{a} = \text{Sin. } A' (m u \overline{\text{Sin. } V} + B)$, & par consequent

$u = a \cdot \text{Sin. } A' (m u \overline{\text{Sin. } V} + B)$, & substituant cette

valeur de u dans l'equation supposée $y = e^{m x \cdot \text{Cos. } V} u$,

on aura $y = a e^{m x \cdot \text{Cos. } V} \text{Sin. } A' (m u \overline{\text{Sin. } V} + B)$ va-

leur convenable de y pour les deux racines imaginai-

res, ou pour le diviseur $m m - 2 m b \cdot \text{Cos. } V + b b = 0$.

CCCCXCV.

Ainsi nous avons trouvé toutes les valeurs particulières de y , dont la somme donne l'intégrale complète, réelle, & finie de l'équation différentielle proposée (H), lorsque les racines de l'équation algébrique correspondante (K) sont toutes réelles ou imaginaires, toutes inégales. Toute la difficulté est donc réduite présentement à trouver les valeurs de y , avec le nombre requis de constantes arbitraires, dans le cas où l'équation (K) contient des racines imaginaires égales entr'elles, c'est à dire, lorsque cette équation (K) a pour diviseur le quarré ou le cube, ou une autre puissance de la quantité réelle $mm - 2mb \text{ Cos. } V + bb = 0$. Or puisque $mm - 2mb \text{ Cos. } V + bb = (b - m \text{ Cos. } V - m \text{ Sin. } V \sqrt{-1}) \cdot (b - m \text{ Cos. } V + m \text{ Sin. } V \sqrt{-1})$, on aura le quarré $(mm - 2mb \text{ Cos. } V + bb)^2 = (b - m \text{ Cos. } V - m \text{ Sin. } V \sqrt{-1})^2 \cdot (b - m \text{ Cos. } V + m \text{ Sin. } V \sqrt{-1})^2$, & généralement la puissance $(mm - 2mb \text{ Cos. } V + bb)^k = (b - m \text{ Cos. } V - m \text{ Sin. } V \sqrt{-1})^k \cdot (b - m \text{ Cos. } V + m \text{ Sin. } V \sqrt{-1})^k$. Il ne s'agit donc plus, que de trouver les valeurs de y , dans le cas où l'équation (K) a pour diviseur une puissance de la forme $(b - m \text{ Cos. } V - m \text{ Sin. } V \sqrt{-1})^k \times (b - m \text{ Cos. } V + m \text{ Sin. } V \sqrt{-1})^k$.

CCCCXCVI.

Nous avons vu cy-dessus que, si l'équation algèbre (K) a pour diviseurs ou pour facteurs les équations suivantes $b - f = 0$, $(b - f)^2 = 0$, $(b - f)^3 = 0$, $(b - f)^k = 0$, les valeurs de y qui répondent à chacune de ces équations, seront respectivement $y = e^{fx} a$, $y = e^{fx} (a + \beta x)$, $y = e^{fx} (a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)$, $y = e^{fx} (a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} \dots + \nu x^{k-1})$, a , β , γ , δ , etc. & ν étant des constantes arbitraires. Donc, si on fait successivement $f = m \text{Cos. } V + m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}$, & $f = m \text{Cos. } V - m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}$, le diviseur simple $b - m \text{Cos. } V - m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1} = 0$ de l'équation (K) donnera $y = \alpha e^{m x \text{Cos. } V + m x \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}}$, & le diviseur simple $b - m \text{Cos. } V + m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1} = 0$ donnera $y = \alpha' e^{m x \text{Cos. } V - m x \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}}$, α & α' étant deux constantes arbitraires; par conséquent le produit de ces deux diviseurs $(b - m \text{Cos. } V - m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}) \cdot (b - m \text{Cos. } V + m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}) = mm - 2mb \text{Cos. } V + bb$ donnera $y = \alpha e^{m x \text{Cos. } V + m x \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} +$

$\alpha' e^{m \times \text{Cos. } V - m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} = e^{m \times \text{Cos. } V} (\alpha e^{m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} + \alpha' e^{-m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}})$. Mais nous avons trouvé cy-dessus que le diviseur $mm - 2mb \text{Cos. } V + bb = 0$ donne $y = \alpha'' e^{m \times \text{Cos. } V} \cdot \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + B)$, α'' & B étant deux constantes arbitraires. On aura donc l'égalité $e^{m \times \text{Cos. } V} (\alpha e^{m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} + \alpha' e^{-m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}}) = \alpha'' e^{m \times \text{Cos. } V} \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + B)$; d'où, en divisant par $e^{m \times \text{Cos. } V}$, on tire $\alpha e^{m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} + \alpha' e^{-m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} = \alpha'' \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + B)$, & en multipliant de part & d'autre par \varkappa^k , on trouve $\alpha \varkappa^k e^{m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} + \alpha' \varkappa^k e^{-m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} = \alpha'' \varkappa^k \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + B)$.

CCCCXC VII.

Supposé presentement que le quarré $(mm - 2mb \times \text{Cos. } V + bb)^2$, ou le produit des deux quarrés imaginaires $(b - m \text{Cos. } V - m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1})^2 \times (b - m \times \text{Cos. } V + m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1})^2$ soit un diviseur de l'équation algebrique (K) , & qu'on veuille trouver la valeur de y , qui repond a ce diviseur, on fera $f = m \times \text{Cos. } V + m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}$, & ensuite $f = m \text{Cos. } V - m \times$

$\text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}$, & le facteur $(b - m \text{Cos. } V - m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}) \times \sqrt{-1}$ donnera (Art. precedent) $y = e^{fx} (\alpha + \beta x)$
 $= e^{m \times \text{Cos. } V + m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} (\alpha + \beta x)$. Le facteur $(b - m \text{Cos. } V + m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1})^2$ donnera $y =$
 $e^{m \times \text{Cos. } V - m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} (\alpha' + \beta' x)$. La somme de ces deux valeurs de y donnera la valeur de y , qui repond au quarré proposé $(mm - 2mb \text{Cos. } V + bb)^2$, cette valeur fera donc $y = e^{m \times \text{Cos. } V + m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} (\alpha + \beta x) + e^{m \times \text{Cos. } V - m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} (\alpha' + \beta' x) = e^{m \times \text{Cos. } V} \times (\alpha e^{m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} + \alpha' e^{-m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}}) + e^{m \times \text{Cos. } V} \times (\beta x e^{m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} + \beta' x e^{-m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}})$. Or (Article preced.) $\alpha e^{m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} + \alpha' e^{-m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} = \alpha'' \text{Sin. } A' (m \times \text{Sin. } V + B')$, & $\beta x e^{m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} + \beta' x e^{-m \times \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} = \beta'' x \text{Sin. } A' (m \times \text{Sin. } V + B'')$; α'' , β'' , B' , B'' etant quatre constantes arbitraires. Donc la valeur de y qui repond au diviseur $(mm - 2mb \text{Cos. } V + bb)^2$ de l'equation (K) fera $y = e^{m \times \text{Cos. } V} \{ \alpha'' \text{Sin. } A' \times (m \times \text{Sin. } V + B') + \beta'' x \text{Sin. } A' (m \times \text{Sin. } V + B'') \}$.

CCCCXCVIII.

On trouvera de la même manière la valeur de y , qui répond au diviseur $(mm - 2mb \text{Cos. } V + bb)^k$, ou $(b - m \text{Cos. } V - m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1})^k \times (b - m \text{Cos. } V + m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1})^k$. Car en substituant $m \text{Cos. } V + m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}$ au lieu de f dans l'équation $y = e^{fx} (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{C}c \dots + v' x^{k-1})$, on trouve que le facteur $(b - m \text{Cos. } V - m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1})^k$ donne $y = e^{m x \text{Cos. } V + m x \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{C}c \dots + v' x^{k-1})$; & en substituant $m \text{Cos. } V - m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}$ au lieu de f dans l'équation $y = e^{fx} (\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \delta' x^3 + \text{C}c \dots + v' x^{k-1})$, on trouve que l'autre facteur $(b - m \text{Cos. } V + m \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1})^k$ donne $y = e^{m x \text{Cos. } V - m x \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} (\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \delta' x^3 + \text{C}c \dots + v' x^{k-1})$; la somme de ces deux valeurs de y fera la valeur de y , qui répond au diviseur proposé $(mm - 2mb \text{Cos. } V + bb)^k$; par conséquent cette valeur fera $y = e^{m x \text{Cos. } V} \times e^{m x \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{C}c \dots + v' x^{k-1}) + e^{m x \text{Cos. } V} \times e^{-m x \text{Sin. } V \cdot \sqrt{-1}} (\alpha' + \beta' x +$

$$\begin{aligned}
 & (\beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \text{C}c. \dots \dots + r n^{k-1}) = e^{m x \text{Cos. } V} \times \\
 & (\alpha e^{m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + \alpha' e^{-m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + \beta n e^{m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} \\
 & + \beta' n e^{-m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + \gamma n^2 e^{m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + \\
 & \gamma' n^2 e^{-m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + \delta n^3 e^{m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + \\
 & \delta' n^3 e^{-m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + \text{C}c. \dots \dots + r n^{k-1} \times \\
 & e^{m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + r n^{k-1} e^{-m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}}). \text{ Or} \\
 & \alpha e^{m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + \alpha' e^{-m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} = \alpha'' \text{Sin. } A' (m n \times \\
 & \text{Sin. } V + B'); \quad \beta n e^{m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + \beta' n e^{-m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} \\
 & = \beta'' n \text{Sin. } A' (m n \text{Sin. } V + B'); \quad \gamma n^2 e^{m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + \\
 & \gamma' n^2 e^{-m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} = \gamma'' n^2 \text{Sin. } A' (m n \text{Sin. } V + B''); \\
 & \text{C}c., \text{ \& } \text{generalement } r n^{k-1} e^{m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} + r n^{k-1} \times \\
 & e^{-m x \text{Sin. } V. \sqrt{-1}} = r n^{k-1} \text{Sin. } A' (m n \text{Sin. } V + C'); \quad \alpha'', \\
 & \beta'', \gamma'', \text{C}c., B', B'', B'', \text{C}c., \text{ \& } C' \text{ etant des con-} \\
 & \text{stantes arbitraires. Donc la valeur de } y, \text{ qui repond} \\
 & \text{au diviseur de l'equation (K) } (m m - 2 m b \text{Cos. } V + \\
 & b b)^k \text{ fera } y = e^{m x \text{Cos. } V} \{ \alpha'' \text{Sin. } A' (m n \text{Sin. } V + B') + \\
 & \beta'' n \text{Sin. } A' (m n \text{Sin. } V + B'') + \gamma'' n^2 \text{Sin. } A' (m n \text{Sin. } V + \\
 & B''') + \delta'' n^3 \text{Sin. } A' (m n \text{Sin. } V + B^{IV}) + \text{C}c. \dots \dots + \\
 & r n^{k-1} \text{Sin. } A' (m n \text{Sin. } V + C') \}.
 \end{aligned}$$

CCCCXCIX.

Il fuit de ce que nous avons dit jusqu'icy que, si on refout toute l'équation algebrique (K) en facteurs réels, tels que $b-f=0$, $bb-2mb\text{Cos. } V+mm=0$, ou leurs puissances $(b-f)^k=0$, $(bb-2mb\text{Cos. } V+mm)^k=0$, la valeur de y , qu'on tirera de chaque facteur simple $b-f=0$ contiendra une constante arbitraire; celle qu'on tirera de chaque facteur de deux dimensions, $bb-2mb\text{Cos. } V+mm$, contiendra deux constantes arbitraires; celle qu'on tirera de chaque puissance $(bb-2mb\text{Cos. } V+mm)^k=0$ contiendra le nombre $2k$ de constantes arbitraires, de sorte que chaque facteur donnera une valeur de y , qui renfermera autant de constantes arbitraires que ce facteur aura de dimensions; par conséquent la somme de toutes ces valeurs particulieres de y renfermera autant de constantes arbitraires, qu'il y aura de dimensions dans le produit de tous ces facteurs, c'est a dire, dans l'équation (K), ou qu'il y aura d'unités dans son exposant; & cette somme donnera l'intégrale complete, réelle, & finie de l'équation différentielle proposée (H).

D.

Il fuit de plus que cette intégrale ne dependra que des quadratures de l'hyperbole & du cercle, & que dans tous les cas particuliers on pourra la trouver par les tables des logarithmes, & par celles des Sinus. Elle dependra des logarithmes seulement dans le cas où l'équation algebrique (K) ne contiendra que des racines réelles, ou qu'elle pourra se refoudre toute entiere en facteurs réels, tels que $b-f$, ou $(b-f)^k$; elle dependra des sinus d'arcs de cercle seulement, dans le cas où l'équation (K) ne contiendra que des racines imaginaires, ou qu'elle pourra se refoudre toute entiere en facteurs réels, tels que, $bb-2mb\text{Cos.}\sqrt{+mm}$, ou $(bb-2mb\text{Cos.}\sqrt{+mm})^k$; enfin elle dependra des logarithmes, & des sinus d'arcs de cercle, ou de la quadrature de l'hyperbole, & de celle du cercle, dans le cas où l'équation (K) aura des racines réelles, & des racines imaginaires, ou qu'elle pourra se refoudre partie en facteurs réels, tels que $b-f$, & $(b-f)^k$, partie en facteurs réels, tels que $bb-2mb\text{Cos.}\sqrt{+mm}$, & $(bb-2mb\text{Cos.}\sqrt{+mm})^k$. Nous allons appliquer toute cette theorie aux Problemes suivants.

DI.

PROBLEME I. Trouver l'intégrale complete en termes finis & réels de l'équation différentielle (H),
 $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^2y}{dx^3} + \text{C}c\dots + \frac{Nd^n y}{dx^n}$, dans laquelle la différence dx est constante, & les coefficients $A, B, C, D, \text{C}c\dots, N$ sont aussi des quantités constantes ou zero.

SOLUTION. I.° On écrira dans l'équation différentielle proposée x au lieu de y , b au lieu de $\frac{dy}{dx}$, bb au lieu de $\frac{ddy}{dx^2}$, & généralement b^k au lieu de $\frac{d^k y}{dx^k}$; & on en formera l'équation algebrique (K), ou $o = A + Bb + Cb^2 + Db^3 + \text{C}c\dots + Nb^n$, du degré n .

2.° On decomposera toute cette equation en facteurs réels, tels que $b - f = 0$, $(b - f)^k = 0$, $bb - 2mb \text{Cos. } V + mm = 0$, $(bb - 2mb \text{Cos. } V + mm)^k = 0$.

3.° On cherchera les valeurs particulieres de y , qui repondent a chacun de ces facteurs, & chaque facteur simple, comme $b - f = 0$, qui n'a point d'autre facteur egal, donnera $y = e^{fx}$; chaque facteur composé de plusieurs facteurs simples & egaux entr'eux, comme $(b - f)^k = 0$, donnera $y = e^{fx} (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$

$\mathcal{C}c \dots + r n^{k-1}$); chaque facteur de deux dimensions, comme $bb - 2mb \text{Cos. } V + mm = 0$, qui n'a point d'autre egal donnera $y = e^{m \times \text{Cos. } V} \{ a \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + B') \}$; chaque facteur composé de plusieurs de ces facteurs de deux dimensions egaux entr'eux, comme $(bb - 2mb \text{Cos. } V + mm)^k = 0$, donnera $y = e^{m \times \text{Cos. } V} \times \{ a \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + B') + \beta \times \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + C') + \gamma n^2 \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + D') + \delta n^3 \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + E') + \mathcal{C}c \dots + r n^{k-1} \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + N') \}$ les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mathcal{C}c, B', C', D', E', \mathcal{C}c, N'$ signifiant des constantes arbitraires; $\text{Sin. } V$ signifiant le sinus d'un arc, ou d'un angle V , dont le rayon est l'unité, & $\text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + M')$ signifiant le sinus d'un arc, ou d'un angle $= m \times \text{Sin. } V + M'$ pris dans le même cercle dont le rayon est 1.

4.° On fera la somme de toutes ces valeurs particulieres de y , & on l'egalera a y . Cette equation fera l'intégrale complete, réelle, & finie de l'equation différentielle proposée (H). C. Q. F. T.

DII.

EXEMPLE I. Trouver l'intégrale complete de l'equation différentielle du second ordre $0 = ay + \frac{b dy}{dx} + \frac{c ddy}{dx^2}$.

En écrivant dans cette équation 1 pour y , b pour $\frac{dy}{dx}$, & bb pour $\frac{d^2y}{dx^2}$, on forme l'équation algébrique $0 = a + bb + cbb$, ou, en divisant par c , $bb + \frac{bb}{c} + \frac{a}{c} = 0$. Cette équation est composée de deux facteurs simples, $b + \frac{b}{2c} + \frac{\sqrt{bb - 4ac}}{2c} = 0$, & $b + \frac{b}{2c} - \frac{\sqrt{bb - 4ac}}{2c} = 0$, qui seront réels & inégaux si $bb > 4ac$; ils seront réels & égaux, si $bb = 4ac$, & ils seront imaginaires, si $bb < 4ac$.

Dans le premier Cas on comparera l'un après l'autre ces deux facteurs avec la formule $b - f = 0$, qui donne $y = \alpha e^{fx}$. Par la comparaison du premier facteur on trouve $f = \frac{-b - \sqrt{bb - 4ac}}{2c}$; par conséquent

$y = \alpha e^{\frac{-bx - x\sqrt{bb - 4ac}}{2c}}$. Par la comparaison du second

facteur on trouve $f = \frac{-b + \sqrt{bb - 4ac}}{2c}$, & $y =$

$\beta e^{\frac{-bx + x\sqrt{bb - 4ac}}{2c}}$. La somme de ces deux valeurs particulières de y donnera l'intégrale cherchée

$$y = \alpha e^{\frac{-bx - x\sqrt{bb - 4ac}}{2c}} + \beta e^{\frac{-bx + x\sqrt{bb - 4ac}}{2c}}.$$

Dans le second Cas, ou $bb = 4ac$, & $b = 2\sqrt{ac}$,
 l'equation différentielle proposée fera $0 = ay + \frac{2dy}{dx}\sqrt{ac}$
 $+ \frac{cdy}{dx^2}$, & l'equation algebrique $bb + 2b\sqrt{\frac{a}{c}} + \frac{a}{c}$
 $= (b + \sqrt{\frac{a}{c}})^2 = 0$. On la comparera avec la for-
 mule $(b - f)^2 = 0$, qui donne $y = e^{fx} (\alpha + \beta x)$, &
 on aura $f = -\sqrt{\frac{a}{c}}$, & pour l'intégrale cherchée $y =$
 $e^{-x\sqrt{\frac{a}{c}}} (\alpha + \beta x)$.

Dans le troisieme Cas des facteurs imaginaires, on
 comparera l'equation $bb + \frac{bb}{c} + \frac{a}{c} = 0$ avec la for-
 mule $bb - 2mb \text{Cos. } V + mm = 0$, qui donne $y =$
 $e^{m x \text{Cos. } V} \{ \alpha \text{Sin. } A' (m x \text{Sin. } V + B') \}$, & on aura
 $mm = \frac{a}{c}$; $2m \text{Cos. } V = \frac{b}{c}$; d'où l'on tire $m = \sqrt{\frac{a}{c}}$;
 $\text{Cos. } V = -\frac{b}{2mc} = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$, & $\text{Sin. } V = \frac{\sqrt{4ac - bb}}{2\sqrt{ac}}$,
 a cause que dans le cercle, dont le rayon est 1,
 $\text{Sin. } V = \sqrt{1 - \text{Cos. } V^2}$. L'intégrale cherchée sera donc
 $y = e^{-\frac{bx}{2c}} \{ \alpha \text{Sin. } A' \left(\frac{x\sqrt{4ac - bb}}{2c} + B' \right) \}$.

DIII.

EXEMPLE II. Trouver l'intégrale complète de l'équation différentielle du troisième ordre, $0 = y - \frac{3a^2 ddy}{dx^2} + \frac{2a^3 d^3y}{dx^3}$.

On trouve par les substitutions prescrites cette équation algébrique $0 = 1 - 3a^2 b^2 + 2a^3 b^3$, ou, en divisant par $2a^3$, $b^3 - \frac{3b^2}{a} + \frac{1}{2a^3} = 0$. Cette équation se résout en deux facteurs, $b + \frac{1}{2}a = 0$, & $(b - \frac{1}{a})^2 = 0$. Le premier facteur simple étant comparé avec la formule $b - f = 0$ donne $f = -\frac{1}{2}a$, & $y = \alpha e^{fx} = \alpha e^{-\frac{x}{2}}$.

L'autre facteur étant comparé avec la formule $(b - f)^2 = 0$ donne $f = \frac{1}{a}$, & $y = e^{fx} (\beta + \gamma x) = e^{\frac{x}{a}} (\beta + \gamma x)$.

Donc l'intégrale complète sera $y = \alpha e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{a}} (\beta + \gamma x)$.

DIV.

EXEMPLE III. Intégrer l'équation différentielle

$$0 = y - \frac{a^3 d^3y}{dx^3}.$$

L'équa-

L'équation algébrique, qu'on trouve par les substitutions prescrites, est $0 = 1 - a^3 b^3$, ou $b^3 - \frac{1}{a^3} = 0$, qui se résout en ces deux facteurs, $b - \frac{1}{a} = 0$, & $bb + \frac{b}{a} + \frac{1}{aa} = 0$. Le premier facteur simple, étant comparé avec la formule $b - f = 0$, donne $f = \frac{1}{a}$, & $y = ae^{\frac{x}{a}}$; l'autre facteur, ne pouvant se résoudre en facteurs simples & réels, doit être comparé avec la formule $bb - 2mb \cos.V + mm = 0$. Cette comparaison donne $m = \frac{1}{a}$, & $\cos.V = -\frac{1}{2}$; d'où l'on tire $\sin.V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. a cause de $\sin.V = \sqrt{1 - \cos.V^2}$. On aura donc $y = e^{m x \cos.V} \{ \beta \sin. A'(m x \sin.V + B') \} = e^{-\frac{x}{2a}} \{ \beta \sin. A' X (\frac{x\sqrt{3}}{2a} + B') \}$. L'intégrale complète sera $y = ae^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{2a}} \sin. A' (\frac{x\sqrt{3}}{2a} + B')$.

DV.

EXEMPLE IV. Intégrer l'équation différentielle du quatrième ordre $0 = y - \frac{d^4 y}{dx^4}$.

On en formera par substitution l'équation algébrique $0 = 1 - a^4 b^4$, ou $0 = b^4 - \frac{1}{a^4} = (b - \frac{1}{a}) \times (b + \frac{1}{a}) (bb + \frac{1}{aa})$. Les deux facteurs simples & réels $b - \frac{1}{a} = 0$, & $b + \frac{1}{a} = 0$ donnent $y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{a}}$. Le troisième facteur $bb + \frac{1}{aa} = 0$, étant comparé avec la formule $bb - 2mb \text{Cos. } V + mm = 0$, donne $m = \frac{1}{a}$, & $\text{Cos. } V = 0$; d'où l'on tire $\text{Sin. } V = 1$, à cause de $\text{Sin. } V = \sqrt{1 - \text{Cos. } V^2}$. Or la formule $bb - 2mb \text{Cos. } V + mm = 0$ donne $y = e^{m x \text{Cos. } V} \times \gamma \text{Sin. } A'(m x \text{Sin. } V + B')$ dans le cas présent à cause de l'exposant $m x \text{Cos. } V = 0$, qui rend $e^{m x \text{Cos. } V} = 1$. Donc l'intégrale complète de l'équation différentielle proposée sera $y = \alpha e^{\frac{x}{a}} + \beta e^{-\frac{x}{a}} + \gamma \text{Sin. } A'(\frac{x}{a} + B')$.

DVI

EXEMPLE V. Intégrer l'équation différentielle

$$o = y + \frac{a^2 d^2 y}{dx^2}.$$

L'équation algébrique qui en résulte par les substitutions est $o = 1 + a^2 b^4$; d'où l'on tire $o = b^4 + \frac{1}{a^4}$

$$= \left(b b + \frac{b \sqrt{2}}{a} + \frac{1}{a a} \right) \left(b b - \frac{b \sqrt{2}}{a} + \frac{1}{a a} \right).$$

En comparant chacun de ces facteurs avec la formule $b b - 2 m \text{Cos. } V + m m = o$, on trouve pour tous les deux

$$m = \frac{1}{a}, \text{ pour le premier } m \text{Cos. } V = -\frac{1}{a \sqrt{2}}, \text{ \& pour}$$

le second $m \text{Cos. } V = \frac{1}{a \sqrt{2}}$; par conséquent pour tous

les deux $m \text{Sin. } V = \frac{1}{a \sqrt{2}}$. Il résulte de là que l'intégrale

complete de l'équation différentielle proposée fera

$$y = \alpha e^{-\frac{x}{a \sqrt{2}}} \text{Sin. } A' \left(\frac{x}{a \sqrt{2}} + B' \right) + \beta e^{\frac{x}{a \sqrt{2}}} \text{Sin. } A' \times \left(\frac{x}{a \sqrt{2}} + C' \right).$$

DVII.

EXEMPLE VI. Trouver l'intégrale complete de

l'équation différentielle d'un ordre quelconque $o = \frac{d^n y}{dx^n}$.

L'équation algébrique qui en résulte est $o = b^n$. Or toutes les racines de cette équation étant égales entr'elles, on doit la comparer avec la formule $(b - f)^k = o$, & on aura $k = n$, & $f = o$; par conséquent $e^x = e^o = 1$, & l'intégrale complete fera $y = a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{C}c. \dots \dots + \nu x^{n-1}$.

On trouve la même intégrale complete, mais d'une manière beaucoup plus longue, par la méthode ordinaire. Car par la première intégration on trouve $\alpha = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; multipliant cette équation par dx , on aura $\alpha dx = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}}$, & en intégrant une seconde fois on trouve $\alpha x + \beta = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$; multipliant encore par dx , on aura $\alpha x dx + \beta dx = \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-3}}$; & en intégrant pour la troisième fois, on trouve $\frac{1}{2} \alpha x x + \beta x + \gamma = \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}$; & continuant ainsi d'intégrer le nombre de fois n , & changeant les expressions des constantes arbitraires, on trouvera la même intégrale complete que nous avons déterminée cy-dessus.

DVIII.

REMARQUE I. Si on prend un nombre quelconque de facteurs réels d'une ou de deux dimensions, ou leurs puissances, comme $b+a$, $bb+ab+c$, $(b+a)^k$, $(bb+ab+c)^k$, & qu'on egale leur produit a zero, on aura une equation algebrique de la forme (K), dont on connoitra tous les facteurs réels; substituant ensuite dans les termes de cette equation y pour b^0 , $\frac{dy}{dx}$ pour b , $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour b^2 , & generalement $\frac{d^ny}{dx^n}$ pour b^n , on en formera une equation différentielle de la forme (H), & de l'ordre qu'on voudra, dont on trouvera facilement l'intégrale par le Probleme precedent, & on pourroit de cette maniere construire une Table generale des différentielles de tous les ordres de la forme (H) & de leurs intégrales respectives, en prenant des facteurs convenables. Supposé, par exemple, qu'on prenne les trois facteurs réels, $b+1$, $bb+b+1$, & $(bb-b+1)^2$, & qu'on egale leur produit a zero, on aura l'equation algebrique du septieme degré, $0 = 1 + bb + b^3 + b^4 + b^5 + b^7$, dont on formera par les substitutions prescrites l'equation différentielle du septieme or-

dre, $0 = y + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^5 y}{dx^5} + \frac{d^7 y}{dx^7}$. On trou-
 vera l'intégrale complete de cette equation, en cher-
 chant les valeurs particulieres de y , qui repondent a
 chacun des trois facteurs qu'on a choisi, & en égalant
 la somme de ces valeurs particulieres a la variable y .
 Le premier facteur $b + 1$ donnera $y = \alpha e^{-x}$; le second
 facteur $bb + b + 1$ donnera $y = \beta e^{-\frac{x}{2}} \text{Sin. } A' \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + B' \right)$;
 le troisieme facteur $(bb - b + 1)^2$ donnera $y = \gamma e^{\frac{x}{2}} \times$
 $\text{Sin. } A' \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + C' \right) + \delta x e^{\frac{x}{2}} \text{Sin. } A' \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + D' \right)$; par
 consequent l'intégrale complete sera $y = \alpha e^{-x} +$
 $\beta e^{-\frac{x}{2}} \text{Sin. } A' \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + B' \right) + \gamma e^{\frac{x}{2}} \text{Sin. } A' \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + C' \right)$
 $+ \delta x e^{\frac{x}{2}} \text{Sin. } A' \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + D' \right)$. On peut aussi pren-
 dre b , ou la puissance quelconque b^k pour un des fa-
 cteurs réels, dont le produit forme l'equation alge-
 brique (K), & en comparant le facteur b avec la
 formule $b = f$, on aura $f = 0$, & la valeur de
 y , qui repond au facteur b , sera $y = \alpha e^{f x} = \alpha$, a cause

de l'exposant $f^n = 0$. De même en comparant le facteur b^k avec la formule $(b-f)^k$, on aura $f = 0$, & $y = a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \dots + \nu x^{k-1}$.

DIX.

REMARQUE II. Nous avons donné dans l'Art. III. de la première Partie des méthodes générales, & des Tables pour résoudre en facteurs réels d'une ou de deux dimensions le binôme $b^n \pm c^n$, & le trinôme $b^{2n} \pm ac^n b^n \pm c^{2n}$, lorsque n est un nombre entier positif quelconque. Donc, si on suppose $b^n \pm c^n = 0$, & $b^{2n} \pm ac^n b^n \pm c^{2n} = 0$, & que dans ces deux équations algébriques on substitue y pour b^n , $\frac{d^n y}{dx^n}$ pour b^n , & $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$ pour b^{2n} , on aura les deux équations différentielles de la forme (H), $\frac{d^n y}{dx^n} \pm c^n y = 0$, & $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} \pm \frac{ac^{2n} y}{dx^{2n}} \pm c^{2n} y = 0$, dont on pourra toujours trouver les intégrales complètes par le Problème précédent. Il est bon d'observer icy que, si les deux équations algébriques étoient $b^{-n} \pm c^{-n} = 0$, & $b^{-2n} \pm ac^{-n} x$

$b^{-n} \pm c^{-2n} = 1$, on les réduiroit facilement à la forme des deux premières $b^n \pm c^n = 0$, & $b^{2n} \pm ac^n b^n \pm c^{2n} = 0$, dans lesquelles n est un nombre entier positif. Car, en multipliant toute l'équation $b^{-n} \pm c^{-n} = 0$ par $c^n b^n$, on la change en $c^n \pm b^n = 0$, d'où l'on tire facilement $b^n \pm c^n = 0$; & de même, en multipliant l'autre équation par $c^{2n} b^{2n}$, on la changera en $c^{2n} \pm ac^n b^n \pm b^{2n} = 0$, d'où l'on tire aisément $b^{2n} \pm ac^n b^n \pm c^{2n} = 0$. Il ne s'agit donc plus, que d'intégrer les deux équations $\frac{d^n y}{dx^n} \pm c^n y = 0$, & $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} \pm \frac{ac^n d^n y}{dx^n} \pm c^{2n} y = 0$, dans lesquelles n est un nombre entier positif, & dx constante; c'est ce que nous allons faire en détail dans les Problèmes suivants.

D X.

PROBLEME II. Trouver l'intégrale complète de l'équation différentielle $0 = c^n y - \frac{d^n y}{dx^n}$.

SOLUTION. On la réduit d'abord à l'équation algébrique $0 = c^n - b^n$, ou $b^n - c^n = 0$, qui est toujours divisible par $b - c = 0$, quelque soit le nombre n pair

n pair ou impair, & si ce nombre est pair, elle a de plus $b+c=0$ pour facteur simple. Il suit de là, qu'on aura toujours la valeur particuliere $y=e^{cx}$, quelque soit le nombre n , & si ce nombre est pair, on aura de plus l'autre valeur particuliere $y=e^{-cx}$. Tous les autres facteurs simples de l'equation $b^n - c^n = 0$ sont imaginaires, & ils sont tous contenus dans les facteurs réels de deux dimensions, qu'on trouve par la formule generale $bb - 2cb \cdot X \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n} + cc = 0$ (Art. CLXIII.), dans laquelle π designe la demie circonference d'un cercle, dont le rayon est 1., & 2μ un nombre pair quelconque pas plus grand que n , par conséquent $2\mu\pi$ un arc du même cercle au rayon 1.

Comparant cette formule generale $bb - 2cb \cdot \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n} + cc = 0$ avec le facteur trinome $bb - 2mb \cdot \text{Cos.} V + mm = 0$, on trouve $m=c$, $\text{Cos.} V = \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n}$, $V = \frac{2\mu\pi}{n}$, & $\text{Sin.} V = \text{Sin.} \frac{2\mu\pi}{n}$, de sorte que le facteur

$$bb - 2cb \cdot \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n} + cc = bb - 2mb \text{Cos.} V + mm = 0$$

$$\text{donnera } y = \alpha e^{m\pi \text{Cos.} V} \text{Sin. } A' (m\pi \text{Sin.} V + B') =$$

$$\alpha e^{c\pi \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c\pi \text{Sin.} \frac{2\mu\pi}{n} + B'). \text{ Or, comme on}$$

trouve (Art. CLXIII.) tous les facteurs réels de deux dimensions du binome $b^n - c^n$, en substituant successivement au lieu de 2μ tous les nombres pairs plus petits que n dans la formule generale $bb - 2cb \times \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n} + cc = 0$; si on fait successivement les mêmes

$$\text{substitutions dans la valeur generale } y = \alpha e^{c\pi \cdot \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n}} \times$$

$\text{Sin. } A' (c\pi \text{Sin.} \frac{2\mu\pi}{n} + B')$, on aura les valeurs particulieres de y , qui repondent a tous les facteurs réels de

deux dimensions du binome $b^n - c^n = 0$. La valeur particuliere de y , sçavoir $y = \alpha e^{c^x}$, qui repond au facteur simple $b - c$ fera aussi contenue dans la valeur

$$\text{generale } y = \alpha e^{c\pi \cdot \text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c\pi \text{Sin.} \frac{2\mu\pi}{n} + B').$$

Car, en faisant $2\mu = 0$, on aura $\text{Cos.} \frac{2\mu\pi}{n} = \text{Cos.} 0 = 1$;

$\text{Sin.} \frac{2\mu\pi}{n} = 0$, & la valeur generale de y deviendra $y =$

$\alpha e^{c^x} \text{Sin. } A' (B')$, qu'on peut exprimer par $\alpha' e^{c^x}$, en

faisant le produit des deux constantes arbitraires a & $\text{Sin. } B' = a'$, ou en l'exprimant par une seule constante arbitraire α . De même, si n est un nombre pair, la valeur

particulière de y , sçavoir $y = \alpha e^{-cx}$, qui répond au facteur simple $b + c$ sera encore contenue dans la valeur

$$\text{générale } y = \alpha e^{cx \cdot \text{Cos. } \frac{2\mu\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(c \times \text{Sin. } \frac{2\mu\pi}{n} + B' \right).$$

Car en faisant $2\mu = n$, on aura $\text{Cos. } \frac{2\mu\pi}{n} = \text{Cos. } \pi =$

-1 , & $\text{Sin. } \frac{2\mu\pi}{n} = \text{Sin. } \pi = 0$, & la valeur générale $y =$

$$\alpha e^{cx \cdot \text{Cos. } \frac{2\mu\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(c \times \text{Sin. } \frac{2\mu\pi}{n} + B' \right) \text{ deviendra } y =$$

$\alpha e^{-cx} \text{Sin. } A' (B')$, qu'on peut exprimer par $y = \alpha e^{-cx}$,

en mettant la constante arbitraire α au lieu du produit

$\alpha \text{Sin. } A' (B')$.

On trouvera donc toutes les valeurs particulières

de y , si dans la valeur générale $y = \alpha e^{cx \cdot \text{Cos. } \frac{2\mu\pi}{n}} \times$

$\text{Sin. } A' \left(c \times \text{Sin. } \frac{2\mu\pi}{n} + B' \right)$ on substitue successivement

au lieu de 2μ tous les nombres de la suite $0, 2, 4,$

$6, 8, \text{ \&c.}$ jusqu'à n inclusivement, lorsque n est un

nombre pair, & jusqu'à n exclusivement, lorsque n est

impair. Donc en faisant la somme de toutes les va-

leurs particulieres de y , on aura pour l'intégrale complete de l'équation différentielle proposée $y = \alpha e^{cx} + \beta e^{cx \cos. \frac{2\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \pi \text{Sin. } \frac{2\pi}{n} + B') + \gamma e^{cx \cos. \frac{4\pi}{n}} \times \text{Sin. } A' (c \pi \text{Sin. } \frac{4\pi}{n} + C') + \delta e^{cx \cos. \frac{6\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \pi \times \text{Sin. } \frac{6\pi}{n} + D') + \mathcal{O}c.$, en continuant les termes de cette suite, jusqu'à ce qu'elle renferme le nombre n de constantes arbitraires, ou, ce qui revient au même, jusqu'à ce que le coefficient de π , ou $\frac{2\mu}{n}$ devienne plus grand que l'unité. Si n est un nombre impair, le dernier terme de cette suite sera $\nu e^{cx \cos. \frac{n-1.\pi}{n}} \times \text{Sin. } A' (c \pi \text{Sin. } \frac{n-1.\pi}{n} + N')$. Car, si n est un nombre impair, $n-1$ fera le nombre pair le plus grand de la suite 0, 2, 4, 6, $\mathcal{O}c.$, jusqu'à n exclusivement; & si n est un nombre pair, le nombre n fera le plus grand de la suite 0, 2, 4, 6, $\mathcal{O}c.$, jusqu'à n inclusivement.

Donc, quelque soit le nombre n , on trouvera facilement l'intégrale complete de l'équation différentielle proposée. C. Q. F. T.

EXEMPLE I. On demande l'intégrale complète de l'équation différentielle du quatrième ordre $o = y - \frac{d^4 y}{dx^4}$.

En comparant cette équation différentielle avec l'équation générale $o = c^n y - \frac{d^n y}{dx^n}$ on trouve $n = 4$, & $c = 1$. Donc l'intégrale complète sera $y = \alpha e^x + \beta e^{x \cos. \frac{\pi}{2}} \text{Sin. } A' (x \text{Sin. } \frac{\pi}{2} + B') + \gamma e^{x \cdot \cos. \pi} \text{Sin. } A' \times (x \text{Sin. } \pi + C') = \alpha e^x + \beta \text{Sin. } A' (x + B') + \gamma e^{-x}$; puisque $\cos. \frac{\pi}{2} = 0$, $\text{Sin. } \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos. \pi = -1$, & $\text{Sin. } \pi = 0$.

EXEMPLE II. On demande l'intégrale de cette équation différentielle du cinquième ordre $o = y - \frac{d^5 y}{dx^5}$.

En la comparant avec l'équation différentielle $o = c^n y - \frac{d^n y}{dx^n}$, on trouve $n = 5$, & $c = 1$. Donc l'intégrale complète sera $y = \alpha e^x + \beta e^{x \cos. \frac{2\pi}{5}} \text{Sin. } A' \times (x \text{Sin. } \frac{2\pi}{5} + B') + \gamma e^{x \cos. \frac{4\pi}{5}} \text{Sin. } A' (x \text{Sin. } \frac{4\pi}{5} + C')$ ou $y = \alpha e^x + \beta e^{x \cos. 72^\circ} \text{Sin. } A' (x \text{Sin. } 72^\circ + B') + \dots$

$\gamma e^{x \text{Cos.} 144^\circ} \text{Sin. } A' (\neq \text{Sin. } 36^\circ + C')$. Car puisque 2π est la circonférence du cercle de 360° , $\frac{2\pi}{5}$ fera de 72° , & $\frac{4\pi}{5}$ de 144° . Or $\text{Cos. } 144^\circ = -\text{Sin. } 36^\circ$, & $\text{Sin. } 144^\circ = \text{Sin. } 36^\circ$.

DXI.

PROBLEME III. Trouver l'intégrale complete de l'équation différentielle $o = c^n y + \frac{d^n y}{dx^n}$.

SOLUTION. Cette différentielle se réduit par les substitutions prescrites à l'équation algebrique $b^n + c^n = o$, qui, dans les cas où n est un nombre impair a pour diviseur simple $b + c = o$, d'où l'on tire $y = a e^{-c x}$. Tous les autres diviseurs simples sont imaginaires, & ils sont tous contenus dans les facteurs réels de deux dimensions, qu'on trouve par la formule generale $b b - 2 c b \text{Cos. } \frac{2\mu + 1 \cdot \pi}{n} + c c = o$, en substituant dans la fraction $\frac{2\mu + 1 \cdot \pi}{n}$ tous les nombres impairs plus petits que n au lieu de $2\mu + 1$ (Art. CLXI.). En comparant cette formule generale avec le trinome $b b -$

$2mb \text{Cos. } V + mm = 0$, on trouve $m = c$; $\text{Cos. } V =$

$$\text{Cos. } \frac{2\mu+1.\pi}{n}; \quad V = \frac{2\mu+1.\pi}{n}; \quad \& \quad \text{Sin. } V = \text{Sin. } \frac{2\mu+1.\pi}{n};$$

de forte que le facteur $bb - 2mb \text{Cos. } V + mm = 0 = bb - 2cb \text{Cos. } \frac{2\mu+1.\pi}{n} + cc$ donnera la valeur generale

$$y = \alpha e^{m \times \text{Cos. } V} \text{Sin. } A'(m \times \text{Sin. } V + B') =$$

$$\alpha e^{c \times \text{Cos. } \frac{2\mu+1.\pi}{n}} \text{Sin. } A'(c \times \text{Sin. } \frac{2\mu+1.\pi}{n} + B'); \quad \& \quad \text{la}$$

valeur particuliere $y = \alpha e^{-cx}$, qui repond au facteur $b+c=0$, lorsque n est un nombre impair sera auffi

$$\text{contenue dans cette valeur generale } y = \alpha e^{c \times \text{Cos. } \frac{2\mu+1.\pi}{n}} \times \text{Sin. } A'(c \times \text{Sin. } \frac{2\mu+1.\pi}{n} + B')$$

en substituant $2\mu+1$ pour n ; car alors on a $\text{Cos. } \frac{2\mu+1.\pi}{n} = \text{Cos. } \pi = -1$,

$\& \text{Sin. } \frac{2\mu+1.\pi}{n} = \text{Sin. } \pi = 0$, ce qui rend $y = \alpha e^{-cx} \times$

$\text{Sin. } A'(B')$, ou $y = \alpha e^{-cx}$, en mettant une feule constante arbitraire α , pour le produit $\alpha \text{Sin. } A'(B')$.

On trouvera donc toutes les valeurs particulieres

de y , si dans la valeur generale $y = \alpha e^{c \times \text{Cos. } \frac{2\mu+1.\pi}{n}} \times$

$\text{Sin. } A'(c \times \text{Sin. } \frac{2\mu+1.\pi}{n} + B')$ on substitue successivement

tous les nombres impairs 1, 3, 5, 7, $\mathcal{C}c$. qui ne font pas plus grands que l'exposant n (Art. CLXI.) & la somme de toutes ces valeurs particulieres de y donnera l'intégrale complete cherchée

$$y = e^{cx \cos \frac{\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \pi \text{ Sin. } \frac{\pi}{n} + B') + \beta e^{cx \cos \frac{3\pi}{n}} \times$$

$$\text{Sin. } A' (c \pi \text{ Sin. } \frac{3\pi}{n} + C') + \gamma e^{cx \cos \frac{5\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \pi \text{ Sin. } \frac{5\pi}{n}$$

+ D') + $\mathcal{C}c$. en continuant cette suite jusqu'a ce qu'elle

contienne le nombre n de constantes arbitraires, ce qui arrivera, si on substitue successivement toutes

les fractions $\frac{1}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{5}{n}$, $\frac{7}{n}$, $\mathcal{C}c$. qui ne surpassent point l'unité. Lorsque n sera un nombre pair, le der-

nier terme de la suite sera $\rho e^{cx \cos \frac{n-1 \cdot \pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \pi \times$

$\text{Sin. } \frac{n-1 \cdot \pi}{n} + N')$. Mais, si n est un nombre im-

pair, le dernier terme sera ρe^{-cx} , & le penultieme

$\rho e^{cx \cos \frac{n-2 \cdot \pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \pi \text{ Sin. } \frac{n-2 \cdot \pi}{n} + M')$. On au-

ra donc dans tous les cas l'intégrale complete de la différentielle proposée. C. Q. F. T.

EXEMPLE. On propose de trouver l'intégrale complete de cette equation différentielle du septieme

$$\text{ordre } o = y + \frac{d^7 y}{dx^7}.$$

En

En la comparant avec l'équation différentielle

$$0 = c^n y + \frac{d^n y}{dx^n}, \text{ on trouve } c = 1, \text{ \& } n = 7; \text{ donc, en}$$

substituant ces valeurs dans la formule generale, on aura pour l'intégrale complete de la proposée $y =$

$$\alpha e^{x \cdot \text{Cos. } \frac{\pi}{7}} \text{Sin. } A' (\ast \text{Sin. } \frac{\pi}{7} + B') + \beta e^{x \text{Cos. } \frac{3\pi}{7}} \text{Sin. } A' \times$$

$$(\ast \text{Sin. } \frac{3\pi}{7} + C') + \gamma e^{x \text{Cos. } \frac{5\pi}{7}} \text{Sin. } A' (\ast \text{Sin. } \frac{5\pi}{7} + D')$$

$$+ \delta e^{-x}.$$

DXII.

PROBLEME IV. Trouver l'intégrale complete de

l'équation différentielle $\frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} \pm \frac{2ac^n d^n y}{dx^n} - c^{2n} y = 0.$

SOLUTION. Cette différentielle se reduit par sub-

stitutions a l'équation algebrique $b^{2n} \pm 2ac^n b^n - c^{2n}$

$= 0,$ qui est le produit des deux facteurs réels $b^n \pm$

$ac^n - c^n \sqrt{aa+1} = 0,$ & $b^n \pm ac^n + c^n \sqrt{aa+1} = 0.$

Or puisque $\sqrt{aa+1} > a,$ il est evident que $\pm ac^n -$

$c^n \sqrt{aa+1}$ est une quantité negative, qu'on peut

supposer $= -p^n,$ & qu'au contraire $\pm ac^n + c^n \times$

$\sqrt{aa+1}$ est une quantité positive, qu'on peut sup-

poser $= -q^n$. Donc les deux facteurs seront $b^n - p^n = 0$, & $b^n + q^n = 0$. On trouve par le Probleme II. que la valeur generale de y , qui repond au facteur $b^n - p^n = 0$, est $y = \alpha e^{px} + \beta e^{px \cos. \frac{2\pi}{n}} \text{Sin. } A'(px \times \text{Sin. } \frac{2\pi}{n} + B') + \gamma e^{px \cos. \frac{4\pi}{n}} \text{Sin. } A'(px \text{ Sin. } \frac{4\pi}{n} + C') + \mathcal{C}c.$, & par le Probl. III. la valeur generale de y qui repond a l'autre facteur $b^n + q^n = 0$, est $y = \alpha' e^{qx \cos. \frac{\pi}{n}} \text{Sin. } A'(q \text{ Sin. } \frac{\pi}{n} + B'') + \beta' e^{qx \cos. \frac{3\pi}{n}} \times \text{Sin. } A'(q \text{ Sin. } \frac{3\pi}{n} + C'') + \gamma' e^{qx \cos. \frac{5\pi}{n}} \text{Sin. } A'(q \times \text{Sin. } \frac{5\pi}{n} + D'') + \mathcal{C}c.$, en substituant q au lieu de p dans la formule generale du dit Probleme, & en ecrivant α' au lieu de α , β' au lieu de β , B'' au lieu de B' , C'' au lieu de C' , $\mathcal{C}c.$ pour eviter la confusion.

La somme de ces deux valeurs de y donnera; pour l'intégrale complete de la différentielle proposée, l'equation suivante

$$y = \left\{ \begin{aligned} &\alpha e^{p x} + \beta e^{p x \cos. \frac{2\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(p * \text{Sin. } \frac{2\pi}{n} + B' \right) + \\ &\gamma e^{p x \cos. \frac{4\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(p * \text{Sin. } \frac{4\pi}{n} + C' \right) + \\ &\delta e^{p x \cos. \frac{6\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(p * \text{Sin. } \frac{6\pi}{n} + D' \right) + \mathcal{C}c. \\ &+ \alpha' e^{q x \cos. \frac{\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(q * \text{Sin. } \frac{\pi}{n} + B'' \right) + \\ &\beta' e^{q x \cos. \frac{3\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(q * \text{Sin. } \frac{3\pi}{n} + C'' \right) + \\ &\gamma' e^{q x \cos. \frac{5\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(q * \text{Sin. } \frac{5\pi}{n} + D'' \right) + \mathcal{C}c. \\ &\text{C. } \mathcal{Q}. \text{ F. T.} \end{aligned} \right.$$

DXIII.

LEMME I. Supposé que π soit la demie circonférence d'un cercle, dont le rayon est 1, & τ un arc de cercle, dont le Cofinus soit $a \ll 1$, on trouvera tous les facteurs réels de deux dimensions du trinome general $b^{2n} + 2ac^n b^n$ (ou $2c^n b^n \text{Cos. } \tau$) $+ c^{2n} = 0$, en substituant successivement dans la formule $bb - 2cb \text{Cos. } X$ $\left(\frac{\mu\pi - \tau}{n} \right) + cc = 0$ tous les nombres impairs 1, 3, 5, 7 $2n - 1$, au lieu de μ .

On demontre cette proposition par la methode que nous avons donnée Art. CLVII. Car soit $b^2 - 2cb \cos M + c^2 = 0$. Le facteur réel indeterminé du trinome general proposé, une des deux racines de ce facteur fera $b = c \cos M + c \sqrt{\cos^2 M - 1} = c \cos M + c \sin M \times \sqrt{-1}$, a cause de l'egalité $\overline{\cos^2 M} + \overline{\sin^2 M} = 1$. On aura donc (Art. CLVII.) $b^n = c^n \cos nM + c^n \sin nM \times \sqrt{-1}$, & $b^{2n} = c^{2n} \cos 2nM + c^{2n} \sin 2nM \cdot \sqrt{-1}$. Si on substitue ces valeurs de b^{2n} , & de b^n dans le trinome general $b^{2n} + 2c^n b^n \cos \tau + c^{2n} = 0$, il deviendra $c^{2n} \cos 2nM + c^{2n} \sin 2nM \cdot \sqrt{-1} + 2c^{2n} \times \cos nM \cos \tau + 2c^{2n} \sin nM \cos \tau \cdot \sqrt{-1} + c^{2n} = 0$, d'où l'on tirera suivant la methode de l'Art. CLVII. les deux equations suivantes

$$I. c^{2n} \cos 2nM + 2c^{2n} \cos nM \cdot \cos \tau + c^{2n} = 0;$$

ou, en divisant par c^{2n} , $\cos 2nM + 2 \cos nM \cdot \cos \tau + 1 = 0$.

$$II. c^{2n} \sin 2nM \cdot \sqrt{-1} + 2c^{2n} \sin nM \cdot \cos \tau \times \sqrt{-1} = 0, \text{ ou, en divisant par } c^{2n} \sqrt{-1}, \sin 2nM + 2 \sin nM \cdot \cos \tau = 0.$$

Or on a toujours (Art. LXXIII.) $\text{Cos. } 2nM = 2\overline{\text{Cos. } nM}^2 - 1$, & $\text{Sin. } 2nM = 2 \text{Sin. } nM. \text{Cos. } nM$.

Donc, en substituant $2\overline{\text{Cos. } nM}^2 - 1$ au lieu de $\text{Cos. } 2nM$ dans la première equation, & $2 \text{Sin. } nM. \text{Cos. } nM$ au lieu de $\text{Sin. } 2nM$ dans la seconde, on aura par la première equation, $2\overline{\text{Cos. } nM}^2 + 2 \text{Cos. } nM. \text{Cos. } \tau = 0$, & en divisant par $2 \text{Cos. } nM$, $\overline{\text{Cos. } nM} + \text{Cos. } \tau = 0$; & on trouvera par la seconde equation $2 \text{Sin. } nM. \times \text{Cos. } nM + 2 \text{Sin. } nM. \text{Cos. } \tau = 0$, & en divisant par $2 \text{Sin. } nM$, on aura encore $\overline{\text{Cos. } nM} + \text{Cos. } \tau = 0$; on aura donc par ces deux equations $\overline{\text{Cos. } nM} = -\text{Cos. } \tau$.

Mais, $\text{Cos. } \tau$ étant positif, on a $-\text{Cos. } \tau = \text{Cos. } (\pi - \tau) = \text{Cos. } (3\pi - \tau) = \text{Cos. } (5\pi - \tau) = \dots$, & généralement $-\text{Cos. } \tau = \text{Cos. } (\mu\pi - \tau)$, μ étant un nombre impair quelconque. Donc dans cette supposition on aura $\overline{\text{Cos. } nM} = \text{Cos. } (\mu\pi - \tau)$, par conséquent l'arc $nM = \mu\pi - \tau$, & $M = \frac{\mu\pi - \tau}{n}$. Substituant cette valeur de M dans le facteur indéterminé $bb - 2cb \text{Cos. } M + cc = 0$, il devient $bb - 2cb. \text{Cos. } \left(\frac{\mu\pi - \tau}{n}\right) + cc = 0$, formule qui donnera tous les facteurs réels de deux dimensions du trinôme général proposé, en substituant successivement au lieu de μ tous les nombres impairs jusqu'à $2n - 1$ inclusivement; car il en est inutile d'en substituer de plus grands, par ce qu'ils donne-

roient les mêmes quantités qu'on auroit déjà trouvées par les mêmes substitutions. C. Q. F. D.

DXIV.

LEMME II. Dans la supposition du Lemme précédent, on trouve tous les facteurs réels de deux dimensions du trinôme general $b^{2n} - 2ac^n b^n$ (ou $-2c^n b^n \text{Cos. } \tau$) $+ c^{2n} = 0$, en substituant successivement dans la formule $bb - 2cb \text{Cos. } \left(\frac{\mu\tau - \tau}{n}\right) + cc = 0$, tous les nombres pairs 2, 4, 6, 8..... $2n$ au lieu de μ .

On demontre cette proposition comme la précédente. Car, en supposant que $bb - 2cb \text{Cos. } M + cc = 0$ soit le facteur double indéterminé du trinôme general proposé, on aura $b = c \text{Cos. } M + c \text{Sin. } M \sqrt{-1}$, & ayant substitué cette valeur de b , ou ses puissances au lieu de b^{2n} , & de b^n dans le trinôme general proposé, il deviendra $c^{2n} \text{Cos. } 2nM + c^{2n} \text{Sin. } 2nM \sqrt{-1} - 2c^{2n} \text{Cos. } nM \text{Cos. } \tau - 2c^{2n} \text{Sin. } nM \text{Cos. } \tau \sqrt{-1} + c^{2n} = 0$, d'où l'on tirera, comme dans la démonstration précédente, $\text{Cos. } nM - \text{Cos. } \tau = 0$, & $\text{Cos. } nM = \text{Cos. } \tau$. Mais, $\text{Cos. } \tau$ étant positif, on a toujours

$\text{Cos. } \tau = \text{Cos.}(2\pi - \tau) = \text{Cos.}(2\pi + \tau) = \text{Cos.}(4\pi - \tau)$
 $= \text{Cos.}(4\pi + \tau) = \text{Cos.}(\mu\pi \pm \tau)$, μ étant un nom-
 bre pair quelconque. On aura donc $\text{Cos. } nM = \text{Cos. } X$
 $(\mu\pi - \tau)$, $nM = \mu\pi - \tau$, & $M = \frac{\mu\pi - \tau}{n}$; par confe-
 quent la formule des facteurs doubles deviendra $bb -$
 $2cb \text{Cos.}\left(\frac{\mu\pi - \tau}{n}\right) + cc = 0$; & on trouvera ces facteurs
 réels en substituant successivement dans cette formule
 tous les nombres pairs, jusqu'à $2n$ inclusivement, au
 lieu de μ ; car il seroit inutile d'en substituer de plus
 grands. C. Q. F. D.

DXV.

PROBLEME V. Trouver l'intégrale complete de
 l'équation différentielle $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + \frac{2ac^n d^n y}{dx^n} + c^{2n}y = 0$.

SOLUTION. On réduit cette différentielle à l'équation
 algébrique $b^{2n} + 2ac^n b^n + c^{2n} = 0$, qui est le pro-
 duit des deux facteurs $b^n + ac^n + c^n \sqrt{aa - 1} = 0$, &
 $b^n + ac^n - c^n \sqrt{aa - 1}$, dans lesquels $a > 1$, ou $a = 1$,
 ou $a < 1$, ce qui donne trois Cas.

CAS I. Lorsque $a > 1$, $\sqrt{aa-1}$ sera un nombre positif moindre que a ; par conséquent $+ac^n \pm c^n \sqrt{aa-1}$ sera aussi une quantité positive, & les deux facteurs pourront s'exprimer par $b^n + p^n = 0$, & $b^n + q^n = 0$, en faisant $ac^n + c^n \sqrt{aa-1} = +p^n$, & $ac^n - c^n \sqrt{aa-1} = +q^n$; la somme des deux valeurs générales de y , qui repondent a ces deux facteurs, & qu'on trouve par le Probleme III. donnera pour l'intégrale complete de la différentielle proposée l'équation suivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{p \times \text{Cos. } \frac{\pi}{n}} \text{Sin. } A' (p \times \text{Sin. } \frac{\pi}{n} + B') + \\ \beta e^{p \times \text{Cos. } \frac{3\pi}{n}} \text{Sin. } A' (p \times \text{Sin. } \frac{3\pi}{n} + C') + \\ \gamma e^{p \times \text{Cos. } \frac{5\pi}{n}} \text{Sin. } A' (p \times \text{Sin. } \frac{5\pi}{n} + D') + \text{Cc.} \\ + \alpha' e^{q \times \text{Cos. } \frac{\pi}{n}} \text{Sin. } A' (q \times \text{Sin. } \frac{\pi}{n} + B'') + \\ \beta' e^{q \times \text{Cos. } \frac{3\pi}{n}} \text{Sin. } A' (q \times \text{Sin. } \frac{3\pi}{n} + C'') + \\ \gamma e^{q \times \text{Cos. } \frac{5\pi}{n}} \text{Sin. } A' (q \times \text{Sin. } \frac{5\pi}{n} + D'') + \text{Cc.} \end{array} \right.$$

CAS

CAS II. Lorsque $a=1$, l'équation différentielle

proposée devient $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + \frac{2c^n d^n y}{dx^n} + c^{2n}y = 0$, & son

équation algébrique est le carré $b^{2n} + 2c^n b^n + c^{2n} =$

$(b^n + c^n)^2 = 0$, dont les facteurs seront aussi carrés ;

or les facteurs réels de deux dimensions du binôme

$b^n + c^n = 0$ sont contenus dans la formule $\{bb -$

$2cb \text{Cos.} \left(\frac{2\mu+1}{n} \right) \pi + cc \}^2 = 0$, & par le Probl. I.

La valeur générale de y , qui répond à ce carré, est

$$y = \alpha e^{\frac{c^n \text{Cos.} \left(\frac{2\mu+1}{n} \right) \pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(c^n \text{Sin.} \frac{(2\mu+1)\pi}{n} + B' \right)$$

$$+ \beta e^{\frac{c^n \text{Cos.} \left(\frac{2\mu+1}{n} \right) \pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(c^n \text{Sin.} \frac{(2\mu+1)\pi}{n} + C' \right).$$

Donc, en substituant successivement dans cette valeur

générale de y au lieu de $2\mu+1$ les nombres impairs

1, 3, 5, 7, 9, &c., qui ne sont pas plus grands que

n , comme dans le Problème III., on aura pour l'inté-

grale complète de la différentielle proposée l'équation

suivante

$$y = \left\{ \begin{aligned}
 & \alpha e^{c x \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{n}} \operatorname{Sin.} A' \left(c x \operatorname{Sin.} \frac{\pi}{n} + B' \right) + \\
 & \beta e^{c x \operatorname{Cos.} \frac{3\pi}{n}} \operatorname{Sin.} A' \left(c x \operatorname{Sin.} \frac{3\pi}{n} + C' \right) + \\
 & \gamma e^{c x \operatorname{Cos.} \frac{5\pi}{n}} \operatorname{Sin.} A' \left(c x \operatorname{Sin.} \frac{5\pi}{n} + D' \right) + \mathcal{C}'c. \\
 & + \alpha' n e^{c x \operatorname{Cos.} \frac{\pi}{n}} \operatorname{Sin.} A' \left(c x \operatorname{Sin.} \frac{\pi}{n} + B'' \right) + \\
 & \beta' n e^{c x \operatorname{Cos.} \frac{3\pi}{n}} \operatorname{Sin.} A' \left(c x \operatorname{Sin.} \frac{3\pi}{n} + C'' \right) + \\
 & \gamma' n e^{c x \operatorname{Cos.} \frac{5\pi}{n}} \operatorname{Sin.} A' \left(c x \operatorname{Sin.} \frac{5\pi}{n} + D'' \right) + \mathcal{C}''c.
 \end{aligned} \right.$$

CAS III. Lorsque $a < 1$, les deux facteurs $b^n + ac^n \pm c^n \sqrt{aa - 1} = 0$ sont imaginaires. Mais, en prenant l'arc τ dans un cercle, dont le rayon est 1, de sorte que $\operatorname{Cos.} \tau = a$, on trouvera (Lemme I.) tous les facteurs réels de deux dimensions de l'équation algébrique $b^{2n} + 2ac^n b^n$ (ou $+ 2c^n b^n \operatorname{Cos.} \tau$) $+ c^{2n} = 0$, en substituant successivement dans la formule $bb - 2cb \operatorname{Cos.} \frac{\mu\pi - \tau}{n} + cc = 0$ tous les nombres impairs 1, 3, 5, 7, $2n - 1$. au lieu de μ . Or la valeur générale de y , qui répond à cette formule, est

(Prob. I.) $y = \alpha e^{c x \cos. \frac{\mu \pi - \tau}{n}} \text{Sin. } A' (c n \text{Sin. } \frac{\mu \pi - \tau}{n} + B')$.

Donc, en substituant successivement dans cette valeur generale de y tous les nombres impairs 1, 3, 5, 7, $2n - 1$ au lieu de μ , on aura, pour l'intégrale complete de la différentielle proposée, l'équation suivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{c x \cos. \frac{\pi - \tau}{n}} \text{Sin. } A' (c n \text{Sin. } \frac{\pi - \tau}{n} + B') + \\ \beta e^{c x \cos. \frac{3\pi - \tau}{n}} \text{Sin. } A' (c n \text{Sin. } \frac{3\pi - \tau}{n} + C') + \\ \gamma e^{c x \cos. \frac{5\pi - \tau}{n}} \text{Sin. } A' (c n \text{Sin. } \frac{5\pi - \tau}{n} + D') + \\ \dots \dots \dots + \epsilon^{c x \cos. \frac{(2n-1)\pi - \tau}{n}} \times \\ \text{Sin. } A' (c n \text{Sin. } \frac{(2n-1)\pi - \tau}{n} + M') . \\ \text{C. Q. F. T.} \end{array} \right.$$

.DXVI.

PROBLEME VI. Trouver l'intégrale complete de

l'équation différentielle $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} - \frac{2ac^n d^n y}{dx^n} + c^{2n} y = 0$.

SOLUTION. On refout ce Probleme comme le precedent, car l'equation algebrique, qu'on tire par substitutions de la differentielle proposee, est $b^{2n} - 2ac^n b^n + c^{2n} = 0$, qui est le produit des deux facteurs $b^n - ac^n - c^n \sqrt{aa-1} = 0$, & $b^n - ac^n + c^n \sqrt{aa-1} = 0$, dans lesquels a est > 1 , ou $= 1$, ou < 1 , ce qui donne trois Cas.

CAS I. Lorsque $a > 1$, les deux facteurs sont reels, & peuvent s'exprimer par $b^n - p^n = 0$, & $b^n - q^n = 0$, en faisant $ac^n + c^n \sqrt{aa-1} = p^n$, & $ac^n - c^n \sqrt{aa-1} = q^n$. La somme des deux valeurs generales de y , qui repondent a ces deux facteurs, & qu'on trouve par le Probleme II. donnera, pour l'integrale complete de la differentielle proposee, l'equation suivante

$$y = \left\{ \begin{aligned} &\alpha e^{px} + \beta e^{p \times \text{Cos. } \frac{2\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(p \times \text{Sin. } \frac{2\pi}{n} + B' \right) + \\ &\gamma e^{p \times \text{Cos. } \frac{4\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(p \times \text{Sin. } \frac{4\pi}{n} + C' \right) + \\ &\delta e^{p \times \text{Cos. } \frac{6\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(p \times \text{Sin. } \frac{6\pi}{n} + D' \right) + Cc. \\ &+ \alpha' e^{qx} + \beta' e^{q \times \text{Cos. } \frac{2\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(q \times \text{Sin. } \frac{2\pi}{n} + B'' \right) \\ &+ \gamma' e^{q \times \text{Cos. } \frac{4\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(q \times \text{Sin. } \frac{4\pi}{n} + C'' \right) + \\ &\delta' e^{q \times \text{Cos. } \frac{6\pi}{n}} \text{Sin. } A' \left(q \times \text{Sin. } \frac{6\pi}{n} + D'' \right) + C'c. \end{aligned} \right.$$

CAS II. Lorsque $a=1$, l'équation différentielle proposée devient $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} - 2c^n \frac{d^n y}{dx^n} + c^{2n} y = 0$, & son équation algébrique est le carré $b^{2n} - 2c^n b^n + c^{2n} = (b^n - c^n)^2 = 0$, dont les facteurs seront aussi carrés. Or les facteurs réels de deux dimensions du binôme $b^n - c^n = 0$ sont contenus dans la formule $bb - 2cb \text{Cos. } \times \frac{2\mu\pi}{n} + cc = 0$, par conséquent les carrés de ces facteurs seront contenus dans le carré $(bb - 2cb \text{Cos. } \frac{2\mu\pi}{n} +$

$cc)^2 = 0$, &, par le Probleme I, la valeur generale de

y , qui repond a ce quarré est $y = \alpha e^{cx \text{Cos. } \frac{2\mu\pi}{n}} \text{Sin. } A' X$
 $(c \times \text{Sin. } \frac{2\mu\pi}{n} + B') + \beta \pi e^{cx \text{Cos. } \frac{2\mu\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \times \text{Sin. } \frac{2\mu\pi}{n} +$
 $C')$. Donc, en substituant successivement dans cette va-
 leur generale de y au lieu de 2μ les nombres 0, 2, 4,
 6, 8, &c. pas plus grands que n , comme dans le Pro-
 bleme II, on aura pour l'intégrale complete l'équation
 suivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{cx} + \beta e^{cx \text{ Cos. } \frac{2\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \times \text{Sin. } \frac{2\pi}{n} + B') + \\ \gamma e^{cx \text{ Cos. } \frac{4\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \times \text{Sin. } \frac{4\pi}{n} + C') + \\ \delta e^{cx \text{ Cos. } \frac{6\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \times \text{Sin. } \frac{6\pi}{n} + D') + \text{&c.} \\ + \alpha' \pi e^{cx} + \beta' \pi e^{cx \text{ Cos. } \frac{2\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \times \text{Sin. } \frac{2\pi}{n} + B'') \\ + \gamma' \pi e^{cx \text{ Cos. } \frac{4\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \times \text{Sin. } \frac{4\pi}{n} + C'') + \\ \delta' \pi e^{cx \text{ Cos. } \frac{6\pi}{n}} \text{Sin. } A' (c \times \text{Sin. } \frac{6\pi}{n} + D'') + \text{&c.} \end{array} \right.$$

CAS III. Lorsque $a < 1$, les deux facteurs $b^n - ac^n \pm c^n \sqrt{aa-1}$ seront imaginaires; mais en prenant l'arc τ dans le cercle, dont le rayon est 1, de forte que $\text{Cos. } \tau = a$, on trouvera (Lem. II.) tous les facteurs réels de deux dimensions de l'équation algébrique $b^{2n} - 2ac^n b^n$ (ou, $-2c^n b^n \text{Cos. } \tau$) $+ c^{2n} = 0$, en substituant successivement dans la formule $bb - 2cb \times \text{Cos. } \frac{\mu\pi - \tau}{n} + cc = 0$ tous les nombres pairs 2, 4, 6, 8, $2n$ au lieu de μ . Or la valeur générale de y , qui répond à cette formule est (Probleme I.) $y = \alpha e^{c \times \text{Cos. } \frac{\mu\pi - \tau}{n}} \text{Sin. } A' \{c \times \text{Sin. } (\frac{\mu\pi - \tau}{n}) + B'\}$. Donc, en substituant successivement dans cette valeur générale de y tous les nombres pairs jusqu'à $2n$ inclusivement au lieu de μ , on aura pour l'intégrale complète de la différentielle proposée, l'équation suivante

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \alpha c \frac{c x \operatorname{Cos.} \frac{2\pi - \tau}{n}}{n} \operatorname{Sin.} A' \left(c x \operatorname{Sin.} \frac{2\pi - \tau}{n} + B' \right) + \\ \beta c \frac{c x \operatorname{Cos.} \frac{4\pi - \tau}{n}}{n} \operatorname{Sin.} A' \left(c x \operatorname{Sin.} \frac{4\pi - \tau}{n} + C' \right) + \\ \gamma c \frac{c x \operatorname{Cos.} \frac{6\pi - \tau}{n}}{n} \operatorname{Sin.} A' \left(c x \operatorname{Sin.} \frac{6\pi - \tau}{n} + D' \right) + \\ \mathcal{C}c \dots \dots \dots + \gamma c \frac{c x \operatorname{Cos.} \frac{2n\pi - \tau}{n}}{n} \times \\ \operatorname{Sin.} A' \left(c x \operatorname{Sin.} \frac{2n\pi - \tau}{n} + M' \right). \end{array} \right.$$

DXVII.

REMARQUE. Nous avons traité dans ce Chapitre l'intégrale de l'équation $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \mathcal{C}c \dots \dots \dots + \frac{Nd^n y}{dx^n}$, dans la supposition des coefficients $A, B, C, D, \mathcal{C}c$. constants. Nous avons de plus observé qu'il n'y a point de méthode générale pour trouver le nombre suffisant d'équations particulières entre y & x , lorsque les coefficients de la proposée renferment des fonctions de x ; mais quoiqu'on n'ait pas cette méthode pour l'équation générale précédente, il y a cependant des méthodes d'une assez grande étendue dans des cas particuliers. C'est ce que nous allons expliquer dans le Chapitre suivant.

CHA.

C H A P I T R E V I I I .

De quelques Methodes particulieres pour trouver les intégrales complètes des equations différentielles

du second ordre $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$, &

$0 = D + Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$, dans lesquelles

dx est constante, & A, B, C, D

sont des fonctions de x.

DXVIII.

PROBLEME I. L'équation $y = X$ fonction connue de x étant une intégrale particulière de l'équation différentielle $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$, trouver l'intégrale complète de cette equation.

SOLUTION. En divisant l'équation proposée par C , & supposant $\frac{A}{C} = P$, $\frac{B}{C} = Q$, cette equation deviendra $P y + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, dans laquelle P & Q seront encore des fonctions de x . Or, puisque $y = X$, on aura, en différentiant, $dy = dX$, $ddy = ddX$,

E c e

&, substituant ces valeurs pour y , dy , ddy dans l'équation $P y + \frac{Q dy}{dx} + \frac{dd y}{dx^2} = 0$, elle deviendra $P X +$

$\frac{Q d X}{dx} + \frac{d d X}{dx^2} = 0$. Supposons maintenant que l'équation

$y = X z$ soit une autre intégrale particulière de l'équation différentielle proposée, on aura, en différen-

tiant, $dy = z d X + X dz$, $ddy = z d d X + 2 dz d X + X d d z$, &, substituant ces valeurs pour y , dy ,

ddy dans l'équation différentielle $P y + \frac{Q dy}{dx} + \frac{dd y}{dx^2}$

$= 0$, elle deviendra $P X z + \frac{Q z d X}{dx} + \frac{Q X dz}{dx} + \frac{z d d X}{dx^2}$

$+ \frac{2 dz d X}{dx^2} + \frac{X d d z}{dx^2} = 0$, équation que nous désignerons

par (M). Mais, par ce qu'on vient de trouver $P X +$

$\frac{Q d X}{dx} + \frac{d d X}{dx^2} = 0$, on aura aussi $P X z + \frac{Q z d X}{dx} +$

$\frac{z d d X}{dx^2} = 0$, & retranchant cette quantité de l'équation

(M), il restera $\frac{Q X dz}{dx} + \frac{2 dz d X}{dx^2} + \frac{X d d z}{dx^2} = 0$, &

multipliant le tout par $\frac{dx^2}{X dz}$, on aura $Q dz + \frac{2 d X}{X} +$

$\frac{d dz}{dz} = 0$. L'intégrale de cette quantité différentielle

est $S. Q dz + 2 L. X + L. dz = S. Q dz L. c + L. X^2 +$

$L. dz = L. e^{S. Q dx} X^2 dz$, en supposant $L. e = 1$. Il faut egaler cette intégrale a une constante arbitraire du même ordre $L. \beta dx$, pour avoir l'équation $L. (e^{S. Q dx} X^2 dz) = L. \beta dx$, ou $e^{S. Q dx} X^2 dz = \beta dx$, qui sera l'intégrale complete de l'équation différentielle $Q dx + \frac{2 dX}{X} + \frac{dz}{z} = 0$. On aura donc $dz = \frac{\beta e^{-S. Q dx}}{X^2}$, &, en intégrant, $z = \beta. S. \frac{e^{-S. Q dx}}{X^2}$. Par conséquent l'équation $y = Xz = \beta X. S. \frac{e^{-S. Q dx}}{X^2}$ sera une autre intégrale particuliere de l'équation différentielle proposée, &, en supposant que α soit une constante arbitraire, on aura $y = \alpha X + \beta X. S. \frac{e^{-S. Q dx}}{X^2}$ pour l'intégrale complete de la proposée. C. Q. F. T.

DXIX.

COROLLAIRE I. Si dans l'équation différentielle proposée $P y + \frac{Q dy}{dx} + \frac{d dy}{dx^2} = 0$ le coefficient P est egal a la quantité $\frac{-Q X' - X''}{X}$, dans laquelle $X' = \frac{dX}{dx}$, & $X'' = \frac{d X'}{dx}$; l'équation $y = X$ fonction de x sera un intégrale

particulière de la proposée, & son intégrale complète sera l'équation $y = \alpha X + \beta X \cdot S. \frac{e^{-\int Q dx}}{X^2}$, quelque soit

Q . Car si on suppose $P = \frac{-QX' - X''}{X}$, l'équation diffé-

rentielle proposée sera (N) $-y \cdot \frac{QX' + X''}{X} + \frac{Qdy}{dx} +$

$\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Or en faisant $y = X$, on aura $dy = dX$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx} = X'$, $\frac{ddy}{dx} = dX'$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dX'}{dx} = X''$, & sub-

stituant X pour y , X' pour $\frac{dy}{dx}$, & X'' pour $\frac{ddy}{dx^2}$ dans

l'équation différentielle (N), elle deviendra $-X \cdot X$

$\frac{QX' + X''}{X} + QX' + X'' = 0$, équation identique. Donc

l'équation $y = X$ sera une intégrale particulière de

l'équation différentielle (N), & par conséquent l'équa-

tion $y = \alpha X + \beta X \cdot S. \frac{e^{-\int Q dx}}{X^2}$ en sera l'intégrale

complète.

DXX.

COROLLAIRE II. Si on prend pour X & pour Q deux fonctions quelconques de x , & qu'on les substitue pour X & pour Q dans la formule, $-y \cdot \frac{QX' + X''}{X} +$

$\frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, & dans son intégrale $y = \alpha X +$

$X.S. \frac{e^{-s} \cdot Q^{\prime} dx}{X^2}$, on aura une equation différentielle

second ordre de la forme proposée dans le Problème

I. avec son intégrale complète, & on pourra trouver

de cette manière une infinité d'equations différentielles

de cette forme avec leurs intégrales complètes.

DXXI.

EXEMPLE I. En prenant $X = x^m$, on aura dX

$m x^{m-1} dx$, $\frac{dX}{dx} = X' = m x^{m-1}$, $\frac{dX'}{dx} = m \cdot \overline{m-1} \cdot X$

$-2 = X''$, & substituant ces valeurs pour X , X' ,

et X'' dans l'equation différentielle (N), elle deviendra

$-y \left(\frac{m Q x^{m-1} + m \cdot \overline{m-1} \cdot x^{m-2}}{x^m} \right) + \frac{Q dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, ou

$-m y \cdot \frac{Q x + m - 1}{x^2} + \frac{Q dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, & son intégrale

complète sera $y = \alpha x^m + \beta x^m \cdot S. \frac{e^{-s} \cdot Q^{\prime} dx}{x^2 m}$, quelque

soit Q . Si donc l'on prend $Q = a x^n$, l'equation diffé-

rentielle sera $-m y \left(a x^{n-1} + \overline{m-1} \cdot x^{-2} \right) + \frac{a x^n dy}{dx} +$

$\frac{ddy}{dx^2} = 0$, & son intégrale complète $y = \alpha x^m + \beta x^m \cdot X$

$$S. \frac{c \frac{ax^{n+1}}{n+1} dx}{x^{1m}}, \text{ a cause de } S. Q dx = S. ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}.$$

DXXII.

EXEMPLE II. En prenant $X = ax^m + bx^n + cx^p + Cc$, on aura $X' = m ax^{m-1} + n bx^{n-1} + p cx^{p-1} + Cc$, $X'' = m \cdot \overline{m-1} \cdot ax^{m-2} + n \cdot \overline{n-1} \cdot bx^{n-2} + p \cdot \overline{p-1} \cdot cx^{p-2} + Cc$, & substituant ces valeurs dans l'équation différentielle $-y \cdot \frac{QX' + X''}{X} + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, elle deviendra $-y \{ Q(m ax^{m-1} + n bx^{n-1} + p cx^{p-1} + Cc) + m \cdot \overline{m-1} \cdot ax^{m-2} + n \cdot \overline{n-1} \cdot bx^{n-2} + p \cdot \overline{p-1} \cdot cx^{p-2} + Cc \} + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, & son intégrale complete fera $y = \alpha(ax^m + bx^n + cx^p + Cc) + \beta(ax^m + bx^n + cx^p + Cc) S. \frac{e^{-S} Q dx}{(ax^m + bx^n + cx^p + Cc)^2}$.

DXXIII.

COROLLAIRE III. Lorsqu'on voudra intégrer une équation différentielle du second ordre de la forme pro-

posée dans le Probleme I., si on peut la reduire a une des formules différentielles trouvées par le Corollaire II., on aura tout d'un coup son intégrale complete. Supposé, par exemple, qu'on se propose d'intégrer l'équation différentielle du second ordre $ddy + ax^2 dy dx - ayx dx^2 = 0$, ou $-ayx + \frac{ax^2 dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, on voit facilement qu'on peut la comparer avec la formule différentielle de l'Exemple I. $-my(ax^{n-1} + \overline{m-1} \cdot x^{-2}) + \frac{ax^n dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, & qu'on aura $ax^n = ax^2$, par conséquent $n=2$; & encore $my(ax^{n-1} + \overline{m-1} \cdot x^{-2}) = my(ax + \overline{m-1} \cdot x^{-2}) = amy$, d'où l'on tire $ma + \overline{m \cdot m - 1} \cdot x^{-2} = ax$; par conséquent $m-1=0$, & $m=1$. Donc l'intégrale complete de l'équation différentielle proposée $ddy + ax^2 dy dx - ayx dx^2$ sera $y = \alpha x + \beta x \cdot S. \frac{e^{-\frac{1}{3}ax^3 dx}}{xx}$.

DXXIV.

LEMME. L'équation différentielle de l'ordre n ,

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + Gc..... + \frac{Nd^ny}{dx^n},$$

dans laquelle dn est constante, & les coefficients $A, B, C, D, \text{ \&c.}$ sont des fonctions de x , peut toujours s'abaisser d'un degré, ou se reduire a l'ordre $n - 1$.

La demonstration de ce Lemme est renfermée dans l'Art. CCCCLXXIX.. Il ne faut que faire $y = e^{\int z dx}$, & $Le = 1$; en prenant les différences, on aura $\frac{dy}{dx} = e^{\int z dx} z$; $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int z dx} (z z + \frac{dz}{dx})$; $\frac{d^3y}{dx^3} = e^{\int z dx} \times (z^3 + \frac{2z dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2})$; &c. substituant ces valeurs pour $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ \&c.}$ dans l'equation différentielle proposée, on la reduit a celle-cy, $0 = A e^{\int z dx} + B e^{\int z dx} z + C e^{\int z dx} (z z + \frac{dz}{dx}) + D e^{\int z dx} (z^3 + \frac{2z dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}) + \text{ \&c.}$, & en divisant par $e^{\int z dx}$, qui se trouve dans tous les termes, on aura $0 = A + B z + C (z z + \frac{dz}{dx}) + D (z^3 + \frac{2z dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}) + \text{ \&c.}$, equation a deux variables x & z , d'un ordre moindre d'un degré, que la proposée. Car si on suppose $n = 1$, la proposée sera $0 = Ay + \frac{B dy}{dx}$, & la reduite $0 = A + B z$.

Si

Si on suppose $n = 2$, la proposée sera $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$, & la reduite $o = A + Bz + C\left(zz + \frac{dz}{dx}\right)$.

Si $n = 3$, la proposée sera $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3}$, & la reduite, $o = A + Bz + C\left(zz + \frac{dz}{dx}\right) + D\left(z^3 + \frac{zzdz}{dx} + \frac{ddz}{dx^2}\right)$, & ainsi des autres.

DXXV.

PROBLEME II. Trouver l'intégrale complete de l'equation différentielle du second ordre $o = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$, ou $o = Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2}$, en la reduisant d'abord a une equation différentielle du premier ordre.

SOLUTION. En supposant $y = e^{\int z dx}$, on reduira la proposée a l'equation suivante $o = P + Qz + zz + \frac{dz}{dx}$, ou $o = Pdx + Qzdx + zzdx + dz$, qui est du premier ordre, & ne contient que deux variables x , & z , a cause que les coefficients P & Q sont des fonctions de x ; on cherchera ensuite l'intégrale de cette equation par les methodes que nous avons données

pour les equations différentielles de cette espece, & on aura par cette intégrale la valeur de x en x & constantes, ou $x = X$ fonction connue de x . Substituant donc cette fonction au lieu de x dans la différentielle $x dx$, on trouvera, par la premiere Partie, l'intégrale $S. X dx = S. x dx$, qui sera une autre fonction de x , & par ce que $y = e^{S. x dx}$, on aura $y = X'$, fonction connue de x , equation qui sera une intégrale particuliere de la différentielle proposée, $o = P y + \frac{Q dy}{dx} + \frac{d dy}{dx^2}$. On trouvera donc par le Probleme I. l'intégrale complete de la proposée, qui sera $y = x X' + \beta X' \cdot X S. \frac{e^{-S. Q dx dx}}{X^2}$. C. Q. F. T.

DXXVI.

PROBLEME III. Trouver les cas, dans lesquels l'equation différentielle (M) du second ordre ($a + b x^n$) $\frac{x^2 d dy}{dx^2} + (c + f x^n) \frac{x dy}{dx} + (g + b x^n) y = o$, aura pour intégrale particuliere, l'une ou l'autre des deux equations suivantes, ou toutes les deux,

I. $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \mathcal{C}c.$ suite finie, dans laquelle les coefficients $A, B, C, D, \mathcal{C}c.$ sont constans.

II. $y = Ax^p + Bx^{p-n} + Cx^{p-2n} + Dx^{p-3n} + \mathcal{C}c.$ autre suite finie avec les coefficients constans.

PREMIER CAS GENERAL.

SOLUTION. On suppose dans ce premier Cas que l'equation finie $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \mathcal{C}c.$ est une intégrale particuliere de l'equation différentielle (M). On aura donc, en différentiant dans la supposition de dx constante, $dy = mAx^{m-1}dx + \overline{m+n} \cdot Bx^{m+n-1}dx + \overline{m+2n} \cdot Cx^{m+2n-1}dx + \mathcal{C}c.,$ & $ddy = m \cdot \overline{m-1} \cdot Ax^{m-2}dx^2 + \overline{m+n} \cdot \overline{m+n-1} \cdot Bx^{m+n-2}dx^2 + \overline{m+2n} \cdot \overline{m+2n-1} \cdot Cx^{m+2n-2}dx^2 + \mathcal{C}c.$ Substituant ces valeurs pour $y, dy, \& ddy$ dans l'equation différentielle (M) on aura l'equation identique suivante

particuliere de la proposee, & son integrale complete
 fera l'equation $y = aX + \beta X.S. \frac{e^{-s.Q} dx}{X^2}$, quelque soit
 Q . Car si on suppose $P = \frac{-QX' - X''}{X}$, l'equation diffé-
 rentielle proposee fera $(N) - y. \frac{QX' + X''}{X} + \frac{Qdy}{dx} +$
 $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Or en faisant $y = X$, on aura $dy = dX$,
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx} = X'$, $\frac{ddy}{dx^2} = dX'$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dX'}{dx} = X''$, & sub-
 stituant X pour y , X' pour $\frac{dy}{dx}$, & X'' pour $\frac{ddy}{dx^2}$ dans
 l'equation différentielle (N) , elle deviendra $-X. \times$
 $\frac{QX' + X''}{X} + QX' + X'' = 0$, equation identique. Donc
 l'equation $y = X$ fera une integrale particuliere de
 l'equation différentielle (N) , & par consequent l'equa-
 tion $y = aX + \beta X.S. \frac{e^{-s.Q} dx}{X^2}$ en fera l'integrale
 complete.

DXX.

COROLLAIRE II. Si on prend pour X & pour Q
 deux fonctions quelconques de x , & qu'on les substitue
 pour X & pour Q dans la formule, $-y. \frac{QX' + X''}{X} +$

$\frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, & dans son intégrale $y = \alpha X + \beta X.S. \frac{e^{-s.Qdx}}{X^2}$, on aura une equation différentielle du second ordre de la forme proposée dans le Probleme I. avec son intégrale complète, & on pourra trouver de cette maniere une infinité d'equations différentielles de cette forme avec leurs intégrales complètes.

DXXI.

EXEMPLE I. En prenant $X = x^m$, on aura $dX = mx^{m-1}dx$, $\frac{dX}{dx} = X' = mx^{m-1}$, $\frac{dX'}{dx} = m(m-1).X^{m-2} = X''$, & substituant ces valeurs pour X , X' , X'' dans l'equation différentielle (N), elle deviendra $-y \left(\frac{mQx^{m-1} + m(m-1).x^{m-2}}{x^m} \right) + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, ou $-my \cdot \frac{Qx + m-1}{x^2} + \frac{Qdy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, & son intégrale complète fera $y = \alpha x^m + \beta x^m.S. \frac{e^{-s.Qdx}}{x^{2m}}$, quelque soit Q . Si donc l'on prend $Q = ax^n$, l'equation différentielle fera $-my \left(ax^{n-1} + m-1.x^{-2} \right) + \frac{ax^ndy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} = 0$, & son intégrale complète $y = \alpha x^m + \beta x^m.X$

On voit par là que le coefficient A n'est point déterminé, & qu'il sera par conséquent une constante arbitraire, dont la détermination donnera celle de tous les coefficients suivans, après qu'on aura trouvé la valeur réelle & finie de l'exposant m par l'équation $a m \cdot \overline{m-1} + c m + g = 0$.

On voit encore que les valeurs de ces coefficients étant une fois déterminées, si un seul d'entr'eux est égal à zero, tous les suivans s'évanouissent, & la suite $A x^m + B x^{m+n} + C x^{m+2n} + \mathcal{O}c$. finira par le terme qui précède tous ceux, dont les coefficients s'évanouissent. Ainsi, si on suppose $B=0$, le coefficient C , qui est égal au produit de $-B$ par une autre quantité s'évanouira, & tous les autres coefficients suivans s'évanouiront par la même raison; la suite finira par le premier terme $A x^m$, qui précède le terme $B x^{m+n}$, & l'intégrale particulière de l'équation différentielle proposée (M) sera $y = A x^m$. Si on suppose que le premier coefficient qui s'évanouit soit C , on aura $D=0$, $E=0$, $\mathcal{O}c$, & $y = A x^m + B x^{m+n} = A x^m - \frac{A x^{m+n} (b + f m + b m \cdot \overline{m-1})}{c n + a n (2 m + n - 1)}$, & ainsi des autres; en sorte que dans tous ces Cas l'équation finie $y = A x^m + B x^{m+n} + C x^{m+2n} + \mathcal{O}c$. sera un intégrale particulière de l'équation différentielle proposée (M), dont on trouvera l'intégrale complete & finie par le Probl. I.

Enfin, si on fait attention aux valeurs des coefficients A, B, C, D, \mathcal{C} . que nous avons trouvées cy-dessus, on comprendra que, P représentant un de ces coefficients quelconques, & Q le coefficient qui suit après P , on aura la formule generale

$$Q = \frac{-P(b + f.m + Nn + b.m + Nn.m + Nn - 1)}{cn.N + 1 + an.N + 1(2m + n.N + 1 - 1)}, \text{ \& que}$$

cette formule sera telle qu'en y écrivant successivement 0, 1, 2, 3, 4, \mathcal{C} . au lieu de N , on aura, l'une après l'autre, les valeurs des coefficients B, C, D, E, \mathcal{C} . Car si on suppose $N=0$, & $P=A$, on aura

$$Q = \frac{-A(b + fm + bm.m - 1)}{cn + an(2m + n - 1)} = B. \text{ Si on suppose } N=1$$

$$\text{\& } P=B, \text{ on aura } Q = \frac{-B(b + f.m + n + b.m + n.m + n - 1)}{2cn + 2an(2m + 2n - 1)}$$

$=C$, & ainsi des autres. Donc la suite $Ax^m + Bx^{m+n}$

$+ Cx^{m+2n} + \mathcal{C}$. sera finie toutes les fois, qu'après avoir substitué pour m la valeur déterminée par l'équa-

tion $am.m - 1 + cm + g = 0$, & pour N un nombre

entier positif quelconque, ou zero dans la fraction ge-

nerale (F), ou $\frac{b + f(m + Nn) + b(m + Nn)(m + Nn - 1)}{cn(N + 1) + an(N + 1)(2m + n.N + 1 - 1)}$

cette fraction s'évanouira; & alors le nombre des ter-

mes de la suite finie $Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$

\mathcal{C} . sera $N + 1$. Or la fraction (F) s'évanouit, lorf-

que, son denominateur etant une quantité finie, son numerateur devient $=0$, & encore, lorsque, le numerateur etant une quantité finie, le denominateur devient infini. Mais, par ce qu'on suppose que toutes les quantités $a, b, c, f, b, n, m, \& N$, qui entrent dans cette fonction, sont des quantités finies, ou zero, son denominateur ne peut devenir infini, non plus que son numerateur. Il suffira donc de trouver les Cas particuliers ou le numerateur $b+f(m+Nn)+b(m+Nn)(m+Nn-1)$ s'évanouït par les substitutions préscrites des valeurs de m & de N , pourvû qu'en faisant les mêmes substitutions dans le denominateur $cn(N+1)+an(N+1)(2m+n\overline{N+1}-1)$, il ne s'évanouïsse pas aussi. Car, comme la raison de deux quantités infiniment petites, ou qui s'évanouïssent a la fois peut-être une quantité finie, on ne doit pas conclure que la fraction (F) s'évanouït, par ce que son numerateur devient nul, si son denominateur s'évanouït en même tems.

On trouvera donc les cas particuliers dans lesquels l'équation différentielle (M) aura pour intégrale particulière l'équation finie $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \mathcal{C}c$, en se servant des deux equations $am.\overline{m-1} + cm + g = 0$, & $b+f(m+Nn)+b(m+Nn)(m+Nn-1) = 0$; Car, après avoir substitué dans la seconde

de

de equation la valeur réelle, & finie de m , qu'on aura déterminée par la premiere equation, on cherchera la valeur de N , que donne la seconde equation, & dans tous les cas, où cette valeur sera un nombre entier positif, ou zero, on aura pour intégrale particuliere de la proposée (M), l'equation finie $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \dots$, en substituant dans cette intégrale la valeur de m , & les valeurs des coefficients B, C, D, \dots . Déterminés par les formules que nous avons données cy-dessus, après avoir mis dans ces formules pour m , & pour N leurs valeurs, pourvû cependant qu'en substituant les mêmes valeurs de m , & de N dans le denominateur general $cn(N+1) + an(N+1)(2m+n.N+1-1)$, il ne s'évanouisse pas. C. Q. F. T.

SECOND CAS GENERAL.

SOLUTION. On suppose dans ce second Cas que l'equation finie $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + D'x^{p-3n} + \dots$ est une intégrale particuliere de l'equation différentielle proposée (M). Donc, en prenant les premieres & les secondes différences dans la supposition de dx constante, on aura $dy = pA'x^{p-1}dx + \overline{p-n} \cdot B'x^{p-n-1}dx + \overline{p-2n} \cdot C'x^{p-2n-1}dx + \dots$;

Ggg

$ddy = p \cdot \overline{p-1} \cdot A' x^{p-2} dx^2 + \overline{p-n} \cdot \overline{p-n-1} \cdot X$
 $B' x^{p-n-2} dx^2 + \overline{p-2n} \cdot \overline{p-2n-1} \cdot C x^{p-2n-2} dx^2$
 $+ Cc$. substituant ces valeurs pour y , dy , ddy dans
 l'equation différentielle (M), on aura l'equation iden-
 tique suivante

$$\left. \begin{aligned}
 & b p \cdot \overline{p-1} \cdot A' x^{p-2n} + b \cdot \overline{p-n} \cdot \overline{p-n-1} \cdot B' x^p + b \cdot \overline{p-2n} \cdot \overline{p-2n-1} \cdot C x^{p-2n} + Cc \\
 & \quad + ap \cdot \overline{p-1} \cdot A x^p + a \cdot \overline{p-n} \cdot \overline{p-n-1} \cdot B' x^{p-n} + Cc \\
 & + fp \cdot A' x^{p-2n} + f \cdot \overline{p-n} \cdot B' x^p + \quad \quad \quad f \cdot \overline{p-2n} \cdot C x^{p-2n} + Cc \\
 & \quad \quad \quad + cp \cdot A x^p \quad \quad \quad + c \cdot \overline{p-n} \cdot B' x^{p-n} + Cc \\
 & + b A' x^{p-2n} \quad \quad \quad + b \cdot B' x^p \quad \quad \quad + b \cdot C x^{p-2n} + Cc \\
 & \quad \quad \quad + g A' x^p \quad \quad \quad + g B' x^{p-n} + Cc
 \end{aligned} \right\} = 0$$

En egalant a zero les termes homologues de cette equation identique, le premier terme donnera l'equation $b + fp + bp \cdot \overline{p-1} = 0$, par laquelle on determinera la valeur de l'exposant p , que nous supposerons réelle & finie; car, si elle etoit imaginaire ou infinie, l'equation $y = A' x^p + B' x^{p-n} + C x^{p-2n} + Cc$. n'auroit point lieu.

Le second terme donnera $(b + f \cdot \overline{p-n} + b \cdot X \overline{p-n} \cdot \overline{p-n-1}) B' + (g + cp + ap \cdot \overline{p-1}) A' = 0$. Substituant dans cette equation la valeur de $b = -fp$

$-bp.p-1$, on trouvera, réduction faite, $B' = \frac{A'(g+cp+ap.p-1)}{fn+bn(2p-n-1)}$, & opérant de même sur les termes suivants de l'équation identique, on trouvera

$$C' = \frac{B'(g+c.p-n+a.p-n.p-n-1)}{2fn+2bn(2p-2n-1)};$$

$$D' = \frac{C'(g+c.p-2n+a.p-2n.p-2n-1)}{3fn+3bn(2p-3n-1)};$$

$$E' = \frac{D'(g+c.p-3n+a.p-3n.p-3n-1)}{4fn+4bn(2p-4n-1)};$$

Et c.

On voit par là, comme dans le premier Cas, 1.^o que le coefficient A' n'est point déterminé, & qu'il sera par conséquent une constante arbitraire, dont la détermination donnera celle de tous les coefficients suivants, après qu'on aura trouvé la valeur de l'exposant p , par l'équation $b+fp+bp.p-1=0$: 2.^o que les valeurs de ces coefficients étant une fois déterminées, si un seul d'entr'eux est égal a zero, tous les suivants s'évanouiront; la suite $A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \text{Et c.}$ finira par le terme, qui precede tous ceux dont les coefficients s'évanouissent; & l'équation finie $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \text{Et c.}$ fera une intégrale particulière de l'équation différentielle (M), dont on

trouvera l'intégrale complete par le Probleme I. :
 3.^o que P' representant un de ces coefficients quel-
 conque, & Q' le coefficient qui suit P' immediatement,
 on aura la formule generale

$$Q' = \frac{(g + c \cdot \overline{p - N'n} + a \cdot \overline{p - N'n} \cdot \overline{p - N'n - 1})}{f_n(N'+1) + b_n(N'+1)(2p - n \cdot \overline{N'+1} - 1)}$$

qui fera telle qu'en y écrivant successivement les ter-
 mes de la suite naturelle 0, 1, 2, 3, 4, &c. au lieu
 de N' , on aura, l'une après l'autre, les valeurs des
 coefficients B' , C' , D' , &c., d'où l'on conclût que la
 suite $A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \text{&c.}$ sera finie, tou-
 tes les fois qu'après avoir substitué pour p la valeur
 réelle & finie, déterminée par l'équation $b + fp +$
 $bp \cdot \overline{p-1} = 0$, & pour N' un nombre entier positif,
 ou zero dans la fraction generale (G), ou
 $\frac{g + c(p - N'n) + a(p - N'n)(p - N'n - 1)}{f_n(N'+1) + b_n(N'+1)(2p + n \cdot \overline{N'+1} - 1)}$, cette fraction
 s'évanouïra: & alors $N'+1$ sera le nombre des termes
 de la suite finie $A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \text{&c.}$

Or la fraction (G) s'évanouït, lorsque, son deno-
 minateur étant une quantité finie, son numerateur de-
 vient $= 0$. Il suffira donc de trouver les cas particu-
 liers, ou le numerateur $g + c(p - N'n) + a(p -$
 $N'n)(p - N'n - 1)$ s'évanouït par les substitutions

prescrites des valeurs de m , & de N' , pourvû qu'en faisant les mêmes substitutions dans le denominateur, $f n (N' + 1) + b n (N' + 1) (2 p + n. \overline{N' + 1} - 1)$, ce denominateur ne s'évanouisse pas aussi.

On trouvera donc les cas particuliers dans lesquels l'équation différentielle (M) aura, pour intégrale particulière, l'équation finie $y = A' x^p + B' x^{p-n} + C' x^{p-2n} + \mathcal{C}c.$ En se servant des deux équations $b + f p + b p. \overline{p-1} = 0$, & $g + c(p - N'n) + a(p - N'n) \times (p - N'n - 1) = 0$. Car après avoir substitué dans la dernière équation la valeur réelle & finie de p , qu'on aura déterminée par la première équation, on cherchera la valeur de N' que donne la seconde équation, & dans tous les cas, où cette valeur sera un nombre entier positif, ou zero, on aura, pour intégrale particulière de la proposée (M), l'équation finie $y = A' x^p + B' x^{p-n} + C' x^{p-2n} + \mathcal{C}c.$, en substituant dans cette intégrale la valeur de p , & les valeurs des coefficients B' , C' , D' , $\mathcal{C}c.$ déterminées par les formules que nous avons données cy-dessus, après avoir mis dans ces formules pour p , & pour N' leurs valeurs; pourvû cependant qu'en substituant les mêmes valeurs de p & de N dans le denominateur general $f n (N' + 1) + b n (N' + 1) (2 p + n. \overline{N' + 1} - 1)$, il ne s'évanouisse pas. C. Q. F. T.

TROISIEME CAS GENERAL.

SOLUTION. On suppose dans ce troisieme Cas que les deux equations finies $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \mathcal{C}c.$, & $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \mathcal{C}c.$ sont deux intégrales particulieres de l'équation différentielle proposée (M). On résoudra donc ce troisieme Cas par les deux precedents, en se servant des quatre equations suivantes

$$\text{I. } g + cm + am(m-1) = 0.$$

$$\text{II. } b + fp + bp(p-1) = 0.$$

$$\text{III. } b + f(m + Nn) + b(m + Nn)(m + Nn - 1) = 0.$$

$$\text{IV. } g + c(p + N'n) + a(p - N'n)(p - N'n - 1) = 0.$$

On determinera d'abord les valeurs des exposants m & p par la premiere, & par la seconde equation. Si ces valeurs sont réelles & finies, on les substituera au lieu de m , & de p dans les deux autres equations, & on cherchera ensuite les valeurs de N , & de N' , que donnent ces deux dernieres equations. Si ces valeurs sont des nombres entiers positifs, ou zero, les deux equations finies $y = Ax^m + Bx^{m+n} + \mathcal{C}c.$, & $y = A'x^p + B'x^{p-n} + \mathcal{C}c.$ feront deux intégrales particulieres de la différentielle proposée (M); la suite Ax^m

$\rightarrow Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \dots + C'$. ayant le nombre des termes $N+1$, & ses coefficients B, C, C' , etant determinés par les formules du premier cas general; & de même la suite $A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \dots + C''$, ayant le nombre de termes $N'+1$, & ses coefficients etant determinés par les formules du second cas general. On trouvera de cette maniere les cas particuliers, dans lesquels l'equation différentielle (M) a pour intégrales particulieres les deux equations $y = Ax^m + C'$, & $y = A'x^p + C''$. C. Q. F. T.

DXXVII.

COROLLAIRE I. Les deux premieres des quatre equations, dont nous nous sommes servis dans le troisieme Cas general donnent $g = -cm - a(mm - m)$, & $b = -fp - b(pp - p)$. Substituant pour b , sa valeur dans la troisieme equation $b + f(m + Nn) + b(m + Nn)(m + Nn - 1) = 0$, on aura $-fp - b(pp - p) + f(m + Nn) + b(m + Nn)(m + Nn - 1) = 0$, d'où l'on tire $f(-p + m + Nn) = b(pp - p) - b(m + Nn)^2 + b(m + Nn)$; par consequent $f = \frac{[pp - p - (m + Nn)^2 + m + Nn]}{-p + m + Nn} = b \{ 1 - p - (m + Nn) \}$; $\frac{f}{b} = 1 - p - m - Nn$, & $N = \frac{1 - p - m - \frac{f}{b}}{n}$. Or

nous avons démontré, que, si N est un nombre entier positif, ou zero, l'equation finie $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \dots + \mathcal{O}c$, après y avoir substitué la valeur de m tirée de l'equation $g + cm + am \cdot \overline{m-1} = 0$, & les valeurs des coefficients $B, C, D, \mathcal{O}c$. tirées des formules du premier Cas general, sera une intégrale particuliere de l'equation différentielle (M) , & que le nombre des termes de la suite $Ax^m + Bx^{m+n} + \mathcal{O}c$. sera $N+1$; donc ce sera la même chose, lorsque la quantité $\frac{1-p-m-\frac{f}{2}}{n}$ sera un nombre entier positif, ou zero, & alors on trouvera l'intégrale complete de (M) par le Probleme I., puisque la suite finie $Ax^m + Bx^{m+n} + \mathcal{O}c$. est une fonction de x .

De même, si on substitue pour g la valeur $-cm - am(m-1)$ dans la quatrieme equation $g + c(p - N'n) + a(p - N'n)(p - N'n - 1) = 0$, on aura $-cm - a(mm - m) + c(p - N'n) + a(p - N'n)(p - N'n - 1) = 0$, d'où l'on tire $c(-m + p - N'n) = a(mm - m) - a(p - N'n)^2 + a(p - N'n)$; par consequent $c = \frac{a[mm - m - (p - N'n)^2 + p - N'n]}{-m + p - N'n} = a \times \{ 1 - m - (p - N'n) \}$; $\frac{c}{a} = 1 - m - (p - N'n)$, &
 $N' =$

$N' = \frac{-1+p+m+\frac{c}{a}}{n}$. Or nous avons démontré que, si N' est un nombre entier positif, ou zero, l'équation finie $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \text{Ctc.}$, après y avoir substitué la valeur de p tirée de l'équation $b + fp + bp(p-1) = 0$, & les valeurs des coefficients $B', C', D', \text{Ctc.}$ tirées des formules du second Cas general, sera une intégrale particulière de l'équation différentielle (M) , & que le nombre des termes de la suite $A'x^p + B'x^{p-n} + \text{Ctc.}$ sera $N' + 1$; donc ce sera la même chose, lorsque la quantité $\frac{-1+p+m+\frac{c}{a}}{n}$ sera un nombre entier positif ou zero, & alors on trouvera l'intégrale complète par le Probleme I.

Donc lorsqu'après avoir déterminé les valeurs réelles de m & de p par les deux équations $g + cm + am(m-1) = 0$ & $b + fp + bp(p-1) = 0$, on trouve que l'une ou l'autre des deux quantités $\frac{1-p-m-\frac{f}{a}}{n}$, $\frac{-1+p+m+\frac{c}{a}}{n}$ est un nombre entier positif, ou zero, on trouvera l'intégrale complète de (M) par le Probleme I. Mais, si les quantités sont toutes deux des nombres entiers positifs, ou zero, l'intégrale complète

H h h

de (M) fera $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \mathcal{C}c. + A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \mathcal{C}c.$, après avoir substitué dans les deux suites les valeurs de m & de p , & celles des coefficients $A, B, C, \mathcal{C}c., A', B', C', \mathcal{C}c.$, car cette intégrale contiendra deux constantes arbitraires A , & A' , A se trouvant dans tous les termes de la premiere suite, & A' dans tous ceux de la seconde.

DXXVIII.

COROLLAIRE II. Une equation différentielle quelconque, de l'ordre & de la forme de l'equation generale (M), étant donnée, on peut aisément trouver si elle est intégrable par le Probleme III., & quelle est son intégrale complete. Pour cet effet, 1.° On égalera tous les termes de l'equation donnée aux termes homologues de l'equation (M), & on déterminera par là les valeurs des lettres a, b, c, f, g, h , & n . 2.° On substituera ces valeurs dans les deux equations $g + cm + a(mm - m) = 0$, & $h + fp + b(pp - p) = 0$; ensuite on cherchera par ces deux equations les valeurs de m & de p . 3.° Si ces valeurs ne sont ny imaginaires ny infinies, on les substituera, aussi bien que les valeurs des autres lettres a, b, c, f, n dans les deux quantités $\frac{1-p-m-\frac{f}{b}}{n}$, & $\frac{\frac{c}{a}+p+m-1}{n}$. Si après ces sub-

stitutions l'une ou l'autre de ces deux quantités, ou toutes les deux deviennent des nombres entiers positifs ou zero, on trouvera l'intégrale complete de la différentielle proposée par le Corollaire precedent.

EXEMPLE I. Soit l'équation donnée $(1+x^3) \times \frac{x^2 ddy}{dx^2} + (1+2x^3) \frac{xdy}{dx} - y(4+6x^3) = 0$. En la comparant avec l'équation generale (M) , ou $(a+bx^n) \times \frac{x^2 ddy}{dx^2} + (c+fx^n) \frac{xdy}{dx} + y(g+bx^n) = 0$, on trouvera $a=1, b=1, c=1, f=2, g=-4, b=-6, \& n=3$; l'équation $g=-cm-am(m-1)$ devient $4=mm$, d'où l'on tire $m=2$. L'équation $b=-fp-b(pp-p)$ devient $6=pp+p$; d'où l'on tire $p=-3, \& p=2$. En se servant des valeurs $2=m, \& -3=p$, l'équation $N = \frac{1-p-m-\frac{f}{k}}{n}$ devient $N = \frac{1+3-2-2}{3} = 0$, & l'équation $N' = \frac{c+a+p+m-1}{n}$ devient $N' = \frac{1-3+2-1}{3} = -\frac{1}{3}$. On aura donc, pour intégrale particuliere de l'équation donnée $y = Ax^2$; & en effet, si on substitue Ax^2 pour $y, 2Ax dx$ pour $dy, 2Adx^2$ pour ddy dans l'équation donnée, elle

deviendra identique. Mais l'autre intégrale particulière $y = A'x^{-3} + B'x^{-6} + Cc$. n'aura point lieu, puisque N' n'est pas un nombre entier positif ny zero.

Si on s'étoit fervi des valeurs $z = m$, & $z = p$, on auroit eû les equations $N = -\frac{5}{3}$, & $N' = \frac{4}{3}$ qui ne donnent point d'intégrales finies, & $N' = 0$, qui donne l'intégrale $A'x^2$, qui est la même que nous avons trouvée, en supposant $z = m$, & $-z = p$. Enfin, si on se fert des valeurs $-z = m$, & $-z = p$, on aura $N = \frac{4}{3}$, & $N' = -\frac{5}{3}$ qui ne donnent point d'intégrales finies.

EXEMPLE II. Soit l'équation donnée $(1 + x^3) \times \frac{x^2 dy}{dx^2} + (5 + 2x^3) \frac{xy}{dx} - y(12 + 6x^3) = 0$. En la comparant avec l'équation (M), on trouve $a = 1$, $b = 1$, $f = 2$, $c = 5$, $g = -12$, $b = -6$, & $n = 3$. L'équation $g = -cm - a(mm - m)$ devient $12 = mm + 4m$, d'où l'on tire $m = 2$, & $m = -6$. L'autre équation $b = -fp - b(pp - p)$ devient $6 = pp + p$; d'où l'on tire $p = -3$, & $p = 2$. En prenant $m = 2$, & $p = -3$, on trouve $N = \frac{1 - p - m - \frac{f}{i}}{n} = \frac{1 + 3 - 2 - 2}{3}$

$= 0$, & $N' = \frac{\frac{1}{2} + p + m - 1}{3} = \frac{5 - 3 + 2 - 1}{3} = 1$. On aura donc les deux intégrales particulières $y = An^2$, & $y = A'x^p + B'n^{p-n} = A'x^{-3} + B'n^{-6}$. Mais par ce que $B' = \frac{A(g + cp + a \cdot pp - p)}{fn + bn(2p - n - 1)} = \frac{5}{8} A'$, cette intégrale sera $y = An^2 + A'x^{-3} + \frac{5}{8} A'n^{-6}$. En effet, si on substitue cette valeur de y , & les valeurs de ses différences premières & secondes, pour y, dy, ddy dans l'équation donnée, on trouvera qu'elle devient identique.

DXXIX.

COROLLAIRE III. Si, en supposant $Le = 1$, on fait $y = e^{S \cdot u dx}$, on aura, en différentiant, $\frac{dy}{dx} = e^{S \cdot u dx} u$, & $\frac{ddy}{dx^2} = e^{S \cdot u dx} \left(\frac{du}{dx} + uu \right)$. Substituant ces valeurs dans l'équation (M), on aura pour la transformée (V), $(a + b x^n) x^2 du + (a + b x^n) u^2 x^2 dx + (c + f x^n) u x dx + (g + b x^n) dx = 0$; équation différentielle du premier ordre, qui sera intégrable dans tous les cas, dans lesquels on pourra intégrer l'équation (M); c'est à dire, dans tous les cas, dans lesquels, après

avoir déterminé les valeurs de m & de p par les deux equations $g = -cm - a(mm - m)$, & $b = -fp - bX(pp - p)$, on trouvera que N , ou N' est un nombre entier positif, ou zero dans les equations $N = \frac{1-p-m-\frac{f}{i}}{n}$,

& $N' = \frac{\frac{i}{a} + p + m - 1}{n}$. Car si on fait $u = \frac{dy}{y dx}$, on aura

$du = \frac{d dy}{y dx} - \frac{dy^2}{y^2 dx}$, & substituant ces valeurs pour u , &

pour du dans l'equation (V), on retrouvera l'equation

(M). Supposé donc qu'on ait trouvé une intégrale de

l'equation (M) & que cette intégrale soit $y = X$ fon-

ction connue de x , on aura $dy = dX = X' dx$, X' étant

encore une fonction connue de x ; & substituant ces va-

leurs pour y & pour dy dans l'equation $u = \frac{dy}{y dx}$, on

aura $u = \frac{X'}{X}$ fonction connue de x , qui fera une

intégrale de l'equation (V).

DXXX.

REMARQUE. Si on transforme l'equation (V) en d'autres equations différentielles, elles seront toutes intégrables dans les Cas, dans lesquels l'equation (M)

peut s'intégrer; & on peut trouver par là une infinité d'équations différentielles du premier ordre, qu'on pourra intégrer en les réduisant à l'équation différentielle du second ordre (*M*). Nous allons en donner des exemples dans le Probleme suivant & dans ses Corollaires.

D X X X I.

PROBLEME IV. Transformer l'équation différentielle (*V*), $(a+bx^n)x^2 du + (a+bx^n)u^2 x^2 dx + (c+fx^n)u x dx + (g+bx^n)dx = 0$, dans une autre de trois termes de la forme suivante $dz + Pz^2 dx + Qdx = 0$, *P* & *Q* étant des fonctions de *x*.

SOLUTION. En supposant $u = Xz$, on aura $du = z dX + X dz$, & substituant ces valeurs pour *u*, & pour *du* dans l'équation (*V*), on aura la transformée $(a+bx^n)x^2 dX + (a+bx^n)x^2 X dz + (a+bx^n)X^2 z^2 dx + (c+fx^n)Xz x dx + (g+bx^n)dx = 0$. Supposant ensuite $(c+fx^n)Xz x dx + (a+bx^n)Xz x^2 dX = 0$, ou bien, en divisant par zx , $(c+fx^n)X dx + (a+bx^n)X dX = 0$, la transformée dans cette

supposition fera $(a+bx^n)x^2 X dx + (a+bx^n) X x^2 x^2 n^2 dx + (g+bx^n) dx = 0$, ou $dx + x^2 X dx + \frac{(g+bx^n)dx}{(a+bx^n)x^2 X}$, qui a la forme qu'on cherche, pourvu que X soit une fonction de x . Or on trouve cette valeur de X par l'équation $(c+fx^n) X dx + (a+bx^n) x dX = 0$, ou $\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)x} + \frac{dX}{X} = 0$. Car, en donnant au premier membre de cette équation la forme suivante $\frac{acx^{-1}dx + afx^{n-1}dx}{aa+abx^n}$, si on y ajoute, & qu'on en retranche en même tems la quantité $\frac{bcx^{n-1}dx}{aa+abx^n}$, on aura pour ce premier membre

$$\frac{acx^{-1}dx + bcx^{n-1}dx + afx^{n-1}dx - bcx^{n-1}dx}{aa+abx^n} = \frac{cdx}{ax} +$$

$$\frac{(af-bc)x^{n-1}dx}{a(a+bx^n)}; \text{ \& l'équation entière sera } \frac{cdx}{ax} +$$

$$\frac{(af-bc)x^{n-1}dx}{a(a+bx^n)} + \frac{dX}{X} = 0, \text{ dont l'intégrale est } \frac{c}{a} Lx$$

$$+ \frac{(af-bc)}{abn} \cdot L(a+bx^n) + L.X = 0, \text{ en supposant}$$

$$\text{la constante} = 0. \text{ Donc } L.X = \frac{bc-af}{abn} \cdot L(a+bx^n)$$

$$= \frac{c}{a} Lx = L(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} = Lx^{\frac{c}{a}} = L \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}};$$

pair

par consequent $X = \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$, fonction de x .

Donc la transformée $dz + z^2 X dx + \frac{(g+bx^n)dx}{(a+bx^n)x^2 X} = 0$,

en y substituant la valeur de X , qu'on vient de trou-

ver, fera $dz + \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} z^2 dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g+bx^n)x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}}$

$= 0$, que nous designerons par (Z). C. Q. F. T.

DXXXII.

COROLLAIRE I. Cette equation (Z) sera intégrable par le Corollaire III. du Probleme III. toutes les fois qu'après avoir déterminé les valeurs de m , & de p par les deux equations $g = -cm - a(mm - m)$, & $b = -fp - b(pp - p)$, on trouvera que N , ou N' est un nombre entier positif ou zero, dans l'une &

l'autre de ces deux equations, $N = \frac{1-p-m-\frac{f}{b}}{x}$, & N'

$= \frac{\frac{c}{a} + p + m - 1}{x}$. Si N est un nombre entier positif ou

zero, on aura l'equation $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \dots$; $N+1$ étant le nombre des termes

de cette suite, & les coefficients $B, C, D, \mathcal{O}c.$ étant déterminés par le premier Cas general du Probleme III.

Alors on aura $u = \frac{dy}{y dx} =$

$$\frac{mAx^{m-1} + (m+n)Bx^{m+n-1} + (m+2n)Cx^{m+2n-1} + \mathcal{O}c.}{Ax^n + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \mathcal{O}c.}$$

(Probl. III. Coroll. III.), & par ce que les valeurs des coefficients $B, C, D, \mathcal{O}c.$ sont chacune des produits de la constante arbitraire A multipliée par d'autres constantes déterminées (Probl. III. Cas I.), il est évident que cette constante arbitraire A s'évanouira de la valeur de u , en divisant par A le numérateur, & le dénominateur de la fraction qui est $= u$. De plus, par ce que dans la solution du Probleme IV. nous

avons supposé $Xz = u$, $z = \frac{u}{X} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(a+bx^n)^{\dots}} \times$

$$\frac{mAx^{m-1} + (m+n)Bx^{m+n-1} + (m+2n)Cx^{m+2n-1} + \mathcal{O}c.}{Ax^n + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \mathcal{O}c.}$$

$+ A$ constante arbitraire, equation qui fera l'intégrale complete de l'equation différentielle (Z).

Si N' est un nombre entier positif ou zero, on aura l'equation $y = A'x^p + B'x^{p-n} + C'x^{p-2n} + \mathcal{O}c.$; $N'+1$ étant le nombre des termes de cette suite, & les coefficients $B', C', D', \mathcal{O}c.$ étant déterminés par

le second Cas du Probleme III.. Alors on aura $u =$

$$\frac{dy}{y dx} = \frac{p A' x^{p-1} + (p-n) B' x^{p-n-1} + (p-2n) C' x^{p-2n-1} + \text{etc.}}{A' x^p + B' x^{p-n} + C' x^{p-2n} + \text{etc.}}$$

fraction d'où la constante arbitraire A' disparaîtra par la division. Donc l'intégrale complete de l'équation

différentielle (Z) fera dans ce Cas $z = \frac{x^{\frac{c}{a}}}{(a + b x^n)^{\frac{bc-af}{abn}}} \times$

$$\frac{p A' x^{p-1} + (p-n) B' x^{p-n-1} + (p-2n) C' x^{p-2n-1} + \text{etc.}}{A' x^p + B' x^{p-n} + C' x^{p-2n} + \text{etc.}} + A'$$

constante arbitraire.

DXXXIII.

COROLLAIRE II. On peut par différentes suppositions deduire de l'équation (Z) une infinité d'autres equations différentielles toutes intégrables de la même maniere, dont on se fert pour intégrer cette equation (Z). En voici quelques Exemples.

Si on suppose $bc = af$ dans l'équation (Z), elle

deviendra (G) $dz + z^2 x^{-\frac{c}{a}} dx + \frac{(g + b x^n) x^{\frac{c}{a}-2} dx}{a + b x^n} = 0$

& si on fait dans celle-cy $x^{\frac{a-c}{a}} = t$, on aura $x =$

$$t^{\frac{a}{a-c}}, \quad dx = \frac{a}{a-c} t^{\frac{a}{a-c}-1} dt, \quad \& \text{substituant ces valeurs}$$

pour x & pour dx dans l'équation (G), on trouvera,

reduction faite, l'équation (H) $dz + \frac{az^2 dx}{a-c} +$

$$\frac{a \left(g + b x^{\frac{a''}{a-c}} \right) dx}{(a-c) \left(a + b x^{\frac{a''}{a-c}} \right) x} = 0. \text{ des deux equations } g = -$$

$cm - a(mm - m)$, & $b = -fp - b(pp - p)$, par

lesquelles on determine les valeurs des exposans m ,

& p , la premiere ne change point, & la seconde de-

vient $b = -\frac{b}{a}(cp + a.\overline{pp - p})$, en y substituant

$\frac{bc}{a}$ au lieu de f . Des deux autres equations $N =$

$\frac{1-p-m-\frac{c}{a}}{n}$, & $N' = \frac{\frac{c}{a} + p + m - 1}{n}$, la premiere de-

vient $N = \frac{1-p-m-\frac{c}{a}}{n}$, la seconde demeurant la même,

de sorte que, si $N = 0$, on aura aussi $N' = 0$.

Si N est un nombre positif, N' fera le même nombre

pris negativement, & reciproquement. Donc les deux

equations (G) & (H) seront intégrables par le Corol-

laire precedent, lorsqu'on aura $\frac{c}{a} = 1 - p - m$, ou

$\frac{c}{a} = p + m - 1$, & encore lorsque $\frac{1-p-m-\frac{c}{a}}{n}$, ou

$\frac{\frac{c}{a} + p + m - 1}{n}$ fera un nombre entier positif ou negatif.

Si on suppose de plus $c = 0$ dans l'équation (G), elle deviendra $dz + z^2 dx + \frac{(g + bx^n) dx}{(a + bx^n)x^2} = 0$, & on aura les équations $g = -a(mm - m)$, & $b = -b \times (pp - p)$; $N = \frac{1 - p - m}{n}$; & $N' = \frac{p + m - 1}{n}$; par conséquent l'équation, que nous venons de trouver sera intégrable, lorsque $\frac{p + m - 1}{n}$, ou $\frac{1 - p - m}{n}$ sera un nombre entier positif, ou négatif, ou zéro.

Si on suppose $c = a$ dans l'équation (G), elle deviendra $dz + \frac{z^2 dx}{x} + \frac{(g + bx^n) dx}{(a + bx^n)x} = 0$, qui sera intégrable par le Problème précédent, lorsque $\frac{p + m}{n}$ sera un nombre entier, positif, ou négatif, ou zéro.

Si on suppose $c = -a(n - 1)$ dans l'équation (Z), elle deviendra (K), $dz + (a + bx^n)^{\frac{1-f}{bn} - 1} \times z^2 x^{n-1} dx + \frac{(g + bx^n) dx}{x^{n+1} (a + bx^n)^{\frac{1-f}{bn}}} = 0$, & cette même

équation (K), en faisant $(a + bx^n)^{\frac{1-f}{bn}} = t$, après les substitutions & les réductions ordinaires, devient (L),

$$dz + \frac{z^2 dt}{b-f} + \frac{b \left(bg - ab + bt^{\frac{kn}{f-f}} \right) t^{\frac{kn}{f-f} - 1} dt}{(b-f) \left(t^{\frac{kn}{f-f}} - a \right)^2} = 0. \text{ Ces deux}$$

equations (K) & (L) feront intégrables par le Corollaire precedent, lors qu'après avoir déterminé les valeurs de p & de m par les deux equations $b = -fp - b(pp - p)$, & $g = -cm - a(mm - m) = am(n - m)$, on trouvera que N , ou N' est un nombre entier positif, ou zero dans les deux autres equations $N = \frac{1-p-m-\frac{1}{b}}{n}$, & $N' = \frac{\frac{c}{a} + p + m - 1}{n} = \frac{p+m-n}{n}$, qu'on trouve en substituant $-n+1$ pour $\frac{c}{a}$.

DXXXIV.

REMARQUE. On peut encore résoudre le Probleme IV. de la maniere suivante. On suppose $u = Xz + R$, R étant une fonction inconnue de x , & X en étant une autre prise a volonté, & dont on connoit par consequent la différence $dX = X'dx$. On aura, en différentiant $du = Xdz + zX'dx + dR$, & substituant ces valeurs de u , & de du dans l'equation (V), ou $(a + bx^n)x^2 du + (a + bx^n)u^2 x^2 dx + (c + fx^n)u x dx + (g + bx^n)dx = 0$, on trouvera pour la transformée $(a + bx^n)x^2 Xdz + (a + bx^n)u^2 x X'dx + (a + bx^n)X$

$$x^2 dR + (a + bx^n) x^2 X^2 z^2 dx + 2(a + bx^n) x^2 XRz dx \\ + (a + bx^n) x^2 R^2 dx + (c + fx^n) Xz dx + (c + fx^n) X \\ R dx + (g + bx^n) dx = 0.$$

Pour donner a cette transformée la forme qu'on demande dans le Probleme IV., on fera evanouir les trois termes affectés de z , en supposant $(a + bx^n) X x^2 z X' dx + (a + bx^n) x^2 z X' dx + 2(a + bx^n) x^2 XRz dx + (c + fx^n) Xz dx = 0$, & on tirera de cette equation la valeur de $R = -\frac{X'}{2X} - \frac{c + fx^n}{2x(a + bx^n)}$, qui sera une fonction connue de x . Puisqu'on suppose que X & X' sont des fonctions connues de x , & en différentiant, on connoitra dR , que nous supposerons $= R' dx$, R' étant une fonction connue de x .

Or la transformée, après en avoir retranché les trois termes, que nous avons fait evanouir, & substitué $R' dx$ pour dR , devient (I), $(a + bx^n) x^2 X dz + (a + bx^n) x^2 R' dx + (a + bx^n) x^2 X^2 z^2 dx + (a + bx^n) X x^2 R^2 dx + (c + fx^n) R x dx + (g + bx^n) dx = 0$, qu'on réduit, en divisant par $(a + bx^n) x^2 X$, a la forme $dz + z^2 X dx + \left\{ \frac{R'}{X} + \frac{R^2}{X} + \frac{(c + fx^n) R x + (g + bx^n)}{(a + bx^n) x^2 X} \right\} dx = 0$ qui est celle qu'on demandoit dans le Probleme IV.

On trouvera l'intégrale de cette equation (\mathcal{R}) de la même maniere que nous avons trouvé celle de l'equation (\mathcal{Z}) dans tous les Cas, dans lesquels, après avoir déterminé les valeurs de m & de p par les deux equations $g = -cm - a(mm - m)$, & $b = -fp - b(pp - p)$, on trouvera que N , ou N' est un nombre entier positif, ou zero dans les deux autres equations $N = \frac{1-p-m-\frac{f}{b}}{n}$, & $N' = \frac{\frac{c}{a}+p+m-1}{n}$.

On pourra aussi tirer de l'equation (\mathcal{R}) d'autres formules d'equations différentielles intégrables dans les mêmes Cas, & de la même maniere, en faisant différentes suppositions par rapport aux constantes & aux variables, qui entrent dans cette equation. Nous ne nous étendrons point sur cette matiere, qui n'a d'autres difficultés que le choix des suppositions, & la longueur des calculs. Nous remarquerons seulement que, la fonction X étant arbitraire, elle fournit une infinité de suppositions generales différentes.

DXXXV.

PROBLEME V. L'intégrale de l'equation différentielle de trois termes (F), $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = 0$ étant donnée, trouver celle de l'equation différentielle de quatre termes (G), $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = 0$, P , Q , R étant des fonctions de x , & dx constante.

SOLU-

SOLUTION. 1^o Supposé que l'équation $y = X$ fonction connue de x soit l'intégrale donnée de l'équation différentielle (F): prenez la différence dX de cette fonction, & divisez-la par dx , pour avoir X' autre fonction connue de x .

2^o Cherchez (par l'Art. CCCLXXXII.) l'intégrale de l'équation différentielle $dr - \frac{r Q X dx}{X'} - \frac{R X dx}{X'} = 0$, dans laquelle $\frac{Q X}{X'}$, & $\frac{R X}{X'}$ font des fonctions connues de x , & que cette intégrale soit $r = Z$ autre fonction connue de x : prenez en la différence dZ , & divisez-la par dx , pour avoir Z' fonction de x .

3^o Cherchez encore (par le même Article CCCLXXXII.) l'intégrale de l'équation différentielle $dz - \frac{z X' dx}{X} - Z' dx = 0$, & que cette intégrale soit $z = Y$ fonction de x , on aura l'équation $y = Z - Y$ pour l'intégrale de l'équation différentielle de quatre termes (G). C. Q. F. T.

DEMONSTRATION. Si on suppose $dy + T z dx = 0$, T & z étant deux nouvelles variables, on aura $dy = -T z dx$, & $ddy = -T dz dx - z dT dx$. Substituant ces valeurs pour dy , & pour ddy dans l'équation (G), on aura $-\frac{T dz}{dx} - \frac{z dT}{dx} - z P T +$

$\mathcal{Q}y + R = 0$, ou, en multipliant par $\frac{dx}{T}$, & changeant les signes $dz + zP dx + \frac{z dT dx}{T dx} - \frac{\mathcal{Q}y dx}{T} - \frac{R dx}{T} = 0$; ajoutant l'équation $dy + zT dx = 0$, on aura (H), $dy + dz + (zT + zP + \frac{z dT}{T dx} - \frac{\mathcal{Q}y}{T}) dx - \frac{R dx}{T} = 0$. Cette équation (H) seroit intégrable, si elle pouvoit se réduire à la forme (K), $dy + dz + (y + z)V dx - \frac{R dx}{T} = 0$, supposé que V & T fussent des fonctions connues de x ; car en faisant $r = y + z$, on auroit $dr = dy + dz$, & l'équation (K) deviendroit $dr + rV dx - \frac{R}{T} dx = 0$, dont on trouveroit l'intégrale $r = Z$ fonction connue de x (par l'Article CCCLXXXII.), & en différentiant, on auroit $dr = dy + dz = dZ = Z' dx$, & $dy = Z' dx - dz$, Z' étant encore une fonction connue de x . Ensuite substituant pour dy sa valeur $Z' dx - dz$ dans l'équation $dy + zT dx = 0$, on auroit, en changeant les signes, $dz - zT dx - Z' dx = 0$, autre équation, dont on trouveroit encore l'intégrale $z = T$, fonction connue de x (par l'Art. CCCLXXXII.). On auroit donc par les sup-

positions que nous avons faites $y = Z - r$, pour l'intégrale de l'équation différentielle de quatre termes (G). Car, puisque $r = y + z$, $r = Z$, & $z = r$, on aura $y = r - z = Z - r$ fonction connue de x . Il ne s'agit donc plus que de réduire l'équation (H) à la forme (K), & de trouver les valeurs de T & de V en fonctions de x .

Or l'équation (H), ou $dy + dz + (zT + zP + \frac{z dT}{T dx} - \frac{Qy}{T}) dx - \frac{R dx}{T} = 0$ se changera en (K), ou $dy + dz + (z + y)V dx - \frac{R dx}{T} = 0$, si on fait $(T + P + \frac{dT}{T dx})z - \frac{Qy}{T} = Vz + Vy$, ou $T + P + \frac{dT}{T dx} = -\frac{Q}{T}$, & $Q dx + TT dx + PT dx + dT = 0$. De plus, si on suppose $u = e^{S \cdot t dx}$, t étant une nouvelle variable, & $Le = 1$, on aura $du = e^{S \cdot t dx} t dx$, $ddu = e^{S \cdot t dx} t dx + e^{S \cdot t dx} t t dx^2$; & substituant ces valeurs pour du , & pour ddu dans l'équation de trois termes (F) on la transformera dans l'équation suivante, $e^{S \cdot t dx} \times \frac{dt}{dx} + e^{S \cdot t dx} t t + P e^{S \cdot t dx} t + Q e^{S \cdot t dx} = 0$, laquelle

étant divisée par $e^{S \cdot dx}$, & multipliée par dx , devient $Q dx + r dx + P dx + dr = 0$, equation, qui est la même que $Q dx + T dx + P dx + dT = 0$, que nous avons trouvée cy-dessus; donc les valeurs de r , & de T , qu'on trouveroit en intégrant ces deux equations doivent être la même fonction de x .

Maintenant, pour trouver cette fonction de x , qui est $= T$, on fera attention aux trois equations $T = r$, $u = X$, & $u = e^{S \cdot dx}$, d'où l'on tire $X = e^{S \cdot T dx}$, par conséquent $L X = L e^{S \cdot T dx} = S \cdot T dx$. $L e = S \cdot T dx$, a cause de $L e = 1$. En différentiant de part & d'autre, on aura $\frac{dX}{X} = T dx$; mais on suppose icy $dX = X' dx$, donc on aura $T = \frac{X'}{X}$, fonction connue de x ; & puisque $V = -\frac{Q}{T}$, on aura aussi $V = -\frac{Q X'}{X}$, fonction connue de x . Donc l'equation $dr + r V dx - \frac{R dx}{T} = 0$ deviendra $dr - \frac{r Q X' dx}{X} - \frac{R X'}{X} dx = 0$, comme nous l'avons mise dans la solution, & son intégrale fera $z = Y$, fonction connue de x . Donc l'intégrale de l'equation différentielle de quatre termes (G) fera $y = Z - Y$.

C. Q. F. D.

DXXXVI.

COROLLAIRE I. L'équation différentielle de quatre termes (*G*) fera intégrable dans tous les Cas, dans lesquels l'équation différentielle de trois termes (*F*) pourra s'intégrer.

DXXXVII.

COROLLAIRE II. Pour trouver une intégrale de l'équation différentielle de quatre termes $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = 0$, on n'a qu'à retrancher de cette équation le terme *R*, & ayant mis *u* pour *y* dans les autres termes, chercher par les Problemes precedens l'intégrale de l'équation différentielle de trois termes $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = 0$. Ensuite on trouvera l'intégrale de l'équation différentielle de quatre termes par le present Probleme V.

DXXXVIII.

PROBLEME VI. Une intégrale particuliere de l'équation différentielle de trois termes $Au + \frac{Bdu}{dx}$

$\rightarrow \frac{C dd u}{dx^2} = 0$ étant donnée, trouver l'intégrale complète de l'équation différentielle de quatre termes $D \rightarrow Ay \rightarrow \frac{B dy}{dx} \rightarrow \frac{C ddy}{dx^2} = 0$, A, B, C, D étant des fonctions de x , & dx constante.

SOLUTION. 1^o Divisez les deux equations proposées par la fonction C , & ayant fait $\frac{D}{C} = R$, $\frac{A}{C} = P$, $\frac{B}{C} = Q$, reduisez ces deux equations aux suivantes $(F) \frac{dd u}{dx^2} \rightarrow \frac{P du}{dx} \rightarrow Q u = 0$, & $(G) \frac{ddy}{dx^2} \rightarrow \frac{P dy}{dx} \rightarrow Q y \rightarrow R = 0$.

2^o L'intégrale particuliere donnée de l'équation différentielle de trois termes (F) étant supposée $u = X$ fonction connue de x , cherchez par le Probleme I. une autre intégrale particuliere de la même equation (F) , & que cette seconde intégrale soit représentée par l'équation $u = Z$, autre fonction connue de x .

3^o Cherchez ensuite par le Probleme V. les deux intégrales particulieres de l'équation différentielle de quatre termes (G) , lesquelles repondent aux deux intégrales $u = X$, & $u = Z$, & que ces deux intégrales de l'équation (G) soient représentées par les deux equations suivantes $y = V$ fonction connue de x , & $y = Y$ autre fonction connue de x , on aura, pour

l'intégrale complete de l'équation (G), $y = \alpha V + \beta T$, α & β étant deux constantes arbitraires.

Car puisque $y = V$, & $y = T$ sont deux intégrales particulieres de l'équation différentielle (G), ces deux equations $y = \alpha V$, & $y = \beta T$ en seront aussi deux intégrales particulieres & l'équation $y = \alpha V + \beta T$ en fera l'intégrale complete, ainsi qu'on l'a vu dans le Chapitre precedent.

DXXXIX.

On voit par les Problemes precedents, qu'étant donnée l'intégrale d'une equation différentielle de trois termes, de la forme $\frac{ddu}{dx^2} + \frac{Pdu}{dx} + Qu = 0$, on pourra toujours trouver l'intégrale d'une equation différentielle de quatre termes, de la forme $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy + R = 0$, P , Q , R étant des fonctions de x , & dx étant constante; c'est à dire, que, si on suppose $R = 0$ dans l'équation différentielle de quatre termes, & que dans cette supposition on trouve l'intégrale de $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{Pdy}{dx} + Qy = 0$, on trouvera aussi l'intégrale de la différentielle, en supposant R fonction de x .

De même si on trouve l'intégrale de la différen-

tielle de cette forme $D + Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} = 0$; dans la supposition de $D = 0$, on pourra trouver l'intégrale complete de cette différentielle, en supposant D fonction de x . Cette methode seroit applicable aux equations différentielles du 3^{me}, 4^{me}, &c. ordre, avec les mêmes conditions; d'où il paroît qu'on pourroit conclure generalement qu'il en seroit de même a l'égard de toute equation différentielle d'un ordre quelconque; mais nous demontrons directement cette belle proposition de Calcul Intégral.

DXL.

Soit l'equation différentielle (A) $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \dots + \frac{Md^m y}{dx^m} = X$, dans laquelle A , B , C , \dots , M , X sont des fonctions de x ; si on a l'intégrale d'une différentielle d'un degré quelconque de la forme precedente, dans la supposition de $X = 0$, on pourra aussi trouver l'intégrale, dans la supposition de X fonction de x .

Pour le demontrer, on multipliera l'equation (A) par xdx , x étant une variable indeterminée; l'intégrale

le fera $S. Az y dx + S. Bz \frac{dy}{dx} dx + S. Cz \frac{d^2y}{dx^2} dx +$
 $S. Dz \frac{d^3y}{dx^3} dx + \text{C}c. = S. Xz dx$. On changera ensuite
chaque intégrale précédente, sçavoir $S. Bz \frac{dy}{dx} dx$,
 $S. Cz \frac{d^2y}{dx^2} dx$, $S. Dz \frac{d^3y}{dx^3} dx$, en son expression équiva-
lente (Art. CCCXVII.) $Bz y - S. \frac{d \cdot Bz}{dx} y dx$; $Cz \frac{dy}{dx}$
 $- \frac{d \cdot Cz}{dx} y + S. \frac{d^2 \cdot Cz}{dx^2} y dx$; $Dz \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d \cdot Dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} +$
 $\frac{d^2 \cdot Dz}{dx^2} y - S. \frac{d^3 \cdot Dz}{dx^3} y dx$; Cc. en observant que le signe
 d , d^2 , Cc. de différentiation n'affecte que les quantités
variables qui lui sont jointes. On ordonne ensuite les
termes de cette equation par rapport a y , pour avoir
l'expression $y (Bz - \frac{d \cdot Cz}{dx} + \frac{d^2 \cdot Dz}{dx^2} - \text{C}c.) + \frac{dy}{dx} \times$
 $(Cz - \frac{d \cdot Dz}{dx} + \text{C}c.) + \frac{d^2y}{dx^2} (Dz - \text{C}c.) + \text{C}c. +$
 $S. (Az - \frac{d \cdot Bz}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cz}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot Dz}{dx^3} + \text{C}c.) y dx =$
 $S. Xz dx$.

Supposons maintenant l'equation (B), $Az - \frac{d \cdot Bz}{dx}$
 $+ \frac{d^2 \cdot Cz}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot Dz}{dx^3} + \text{C}c. = 0$, l'equation précédente

(A) se reduira a celle-cy (C), $y(Bz - \frac{d.Cz}{dx} + \frac{d^2.Dz}{dx^2} - Cc.) + \frac{dy}{dx}(Cz - \frac{d.Dz}{dx} + Cc.) + \frac{d^2y}{dx^2}(Dz - Cc.) + Cc. = S.z X dx$. Or cette equation est d'un ordre différentiel moins élevé d'une unité que la premiere equation (A). Donc 1^o Si on a une valeur de z , qui satisfasse a l'equation (B), on aura une intégrale de l'equation (A) en substituant cette valeur dans l'equation (C). 2^o Si on peut trouver deux valeurs de z , qui satisfassent a l'equation (B), on aura de même, en substituant ces valeurs dans l'equation (C), deux intégrales de l'equation (A), au moyen desquelles on fera disparoitre la plus haute différentielle de y ; ce qui donnera une seconde intégrale de la proposée; & ainsi de suite on trouveroit différentes intégrales, si on avoit trois, quatre, &c. valeurs différentes de z ; & en general connoissant un nombre de valeurs de z egal a celuy de l'exposant de l'ordre de l'equation (A), on auroit le valeur finie & algebrique de cette equation.

DXLI.

Si on multiplie l'equation (B) par $y dx$, & si on en prend l'intégrale par parties comme nous avons fait a l'égard de l'equation (A), en faisant disparoitre de dessous le signe S. toutes les différences de z , on

aura, en changeant les signes, $y \left(Bz - \frac{d.Cz}{dx} + \frac{d^2.Dz}{dx^2} \right.$
 $\left. - \mathcal{C}c. \right) + \frac{dy}{dx} \left(Cz - \frac{d.Dz}{dx} + \mathcal{C}c. \right) + \frac{d^2y}{dx^2} (Dz - \mathcal{C}c.)$
 $- S. \left(Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \mathcal{C}c. \right) z dx = \text{con-}$
 stante; &, en faisant $Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + D \frac{d^3y}{dx^3} +$
 $\mathcal{C}c. = 0$, & nommant cette equation (D), si on or-
 donne l'equation resultante par rapport a z , nous au-
 rons (E) $z \left\{ \left(B - \frac{d.C}{dx} + \frac{d^2.D}{dx^2} - \mathcal{C}c. \right) y + \left(C - \frac{d.D}{dx} \right. \right.$
 $\left. + \mathcal{C}c. \right) \frac{dy}{dx} + \left(D - \mathcal{C}c. \right) \frac{d^2y}{dx^2} + \mathcal{C}c. \left. \right\} - \frac{dz}{dx} \left\{ \left(C - \right. \right.$
 $\left. \frac{d.D}{dx} + \mathcal{C}c. \right) y + \left(D - \mathcal{C}c. \right) \frac{dy}{dx} + \mathcal{C}c. \left. \right\} + \frac{d^2z}{dx^2} \times$
 $\left\{ \left(D - \mathcal{C}c. \right) y + \mathcal{C}c. \right\} - \mathcal{C}c. = \text{constante.}$ Il est
 clair, par tout ce que nous avons dit dans le Chapitre
 precedent, que, si on peut trouver une valeur de y ,
 qui satisfasse a l'equation (D) on aura une integrale
 de l'equation (B). On auroit donc deux, trois, &c.
 integrales de (B), si on connoissoit deux, trois, &c.
 valeurs de y , & en general on auroit l'integrale finie
 & algebrique de cette même equation, si on avoit un
 nombre de valeurs de y egal a celui de l'exposant de
 l'equation (B).

Or la dernière intégrale contiendra autant de constantes arbitraires, qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle (*B*). Donc si on fait successivement toutes ces constantes, moins une, égale à zéro, il est évident par les principes du Chapitre précédent, qu'on aura autant d'intégrales particulières, & par conséquent autant de valeurs de *x*, qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'équation (*B*). Or cette équation est du même ordre que l'équation (*A*). Donc on trouvera aussi l'intégrale finie & algébrique de (*A*); c'est à dire, que l'équation $Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{dy^2}{dx^2} + D \frac{d^3y}{dx^3} + \dots = X$ fera intégrale algébriquement, toutes les fois qu'on aura *m* valeurs de *n* dans le cas de $X=0$, *m* étant l'exposant de l'ordre différentiel de l'équation.

DXLII.

Si on n'avoit que le nombre de valeurs de *y* exprimé par *m* — 1, c'est à dire, moindre d'une unité que l'exposant de l'ordre différentiel, dans la supposition de $X=0$, on pourroit encore trouver l'intégrale algébrique de l'équation (*A*). Car dans ce cas on auroit un nombre *m* — 1 d'équations (*E*), d'où faisant disparaître les plus hautes différences de *x*, au nombre de *m* — 1, on arriveroit enfin à une équation, qui ne renferme-

roit plus que des premières différences, & de la forme

$$Vz + X' \frac{dz}{dx} = R; \quad V, X' \text{ \& } R \text{ étant des fonctions de } x.$$

Or l'intégrale de cette équation se trouve aisément par de simples substitutions (Article CCCLXXXII.) lesquels

$$\text{donnent l'intégrale cherchée } z = e^{-\int \frac{V'}{V} dx} \left(\text{Const.} + \int \frac{R}{V} e^{\int \frac{V'}{V} dx} dx \right).$$

DXLIII.

REMARQUE. Nous avons déjà observé dans le Problème IV. de ce Chapitre, qu'on peut trouver une infinité d'équations différentielles du premier ordre, intégrables par les méthodes précédentes, après les avoir réduites à une équation différentielle du second ordre. On peut même quelquefois intégrer plus aisément par ces mêmes méthodes des équations différentielles d'un ordre supérieur, en les différentiant de nouveau dans la supposition de dx constante. Soit, par exemple, l'équation différentielle du second ordre (A), $8dx^2 + 2yddy = dy^2 + 4yydx^2$, elle se réduit, en la différentiant une autre fois, à l'équation très-simple du troisième ordre (B) $d^3y = 4dydx^2$, dont on trouve facilement l'intégrale complète (C) $y = a + be^{2x} + ce^{-2x}$, laquelle

454 ELEMENS DU CALCUL INTÉGRAL

equation (C) renferme non seulement l'intégrale complete de l'equation (B), mais contient de plus, comme un cas particulier, l'intégrale complete de l'equation (A), puisque cette equation (A) est d'un ordre moins élevé que (B). Il faut par conséquent limiter l'equation intégrée (C), & en exclure les cas inutiles; ce qu'on fera en différentiant deux fois l'equation (C). Car il faut qu'en substituant les valeurs y, dy, ddy trouvées par cette double différentiation, la nouvelle equation satisfasse a la proposée (A); ce qu'on obtiendra en comparant les constantes; ainsi dans le cas present on aura $c = \frac{a^a - 2}{4b}$, & par conséquent l'intégrale cherchée

$$\text{fera } y = a + be^{2x} + \frac{a^a - 2}{4b} e^{-2x}.$$

C'est icy le lieu de rappeler ce que nous avons observé (Art. ccccxxii.) a l'égard des deux différentielles $\alpha ds + \beta du$, & $\rho \alpha du + \rho \beta du + \gamma \beta ds + \mu \alpha ds + du \cdot \varphi(u, s) + ds \cdot \varphi'(u, s)$. Il s'agit de déterminer les quantités α, β par les conditions que $\alpha ds + \beta du$, & $\rho \alpha du + \rho \beta du + \gamma \beta ds + \mu \alpha ds + du \cdot \varphi(u, s) + ds \cdot \varphi'(u, s)$ soient l'une & l'autre des différentielles completes. On fera $\alpha ds + \beta du = dq$, & substituant dans la seconde différentielle les valeurs de α & β en q , on aura par le theoreme fondamental du calcul, & par les conditions d'intégrabilité, l'equation suivante

$$\rho \frac{(d^2q)}{ds^2} + \rho \frac{(d^2q)}{dsdu} + \frac{d.\phi(u,s)}{ds} = \gamma \frac{(d^2q)}{du^2} + \mu \frac{(d^2q)}{du ds} + \frac{d.\phi'(u,s)}{du}, \text{ d'où l'on tire } \gamma \frac{(d^2q)}{du^2} + \mu \frac{(d^2q)}{u ds} + \frac{d.\phi'(u,s)}{du}$$

$$- \frac{d.\phi'(u,s)}{ds} = \rho \frac{(d^2q)}{ds^2} + \rho \frac{(d^2q)}{dsdu}, \text{ \& par consequent}$$

$$\frac{(d^2q)}{ds^2} + \frac{(d^2q)}{dsdu} = \frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{(d^2q)}{du^2} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{(d^2q)}{ds} + \frac{d.\phi'(u,s)}{\rho du} -$$

$$\frac{d.\phi(u,s)}{\rho ds}, \text{ \& en mettant } \gamma \text{ au lieu de } \frac{d.\phi'(u,s)}{\rho du} -$$

$$\frac{d.\phi(u,s)}{\rho ds}, \text{ } c \text{ au lieu de } \frac{\gamma}{\rho}, \text{ \& } b \text{ a la place de } \frac{\mu}{\rho}, \text{ on}$$

$$\text{aura } \frac{(d^2q)}{ds^2} + \frac{(d^2q)}{dsdu} = c \frac{(d^2q)}{du^2} + b \frac{(d^2q)}{du ds} + \gamma, \text{ ou}$$

$$\frac{(d^2q)}{ds^2} = c \frac{(d^2q)}{du^2} + b \frac{(d^2q)}{du ds} - \frac{(d^2q)}{du ds} + \gamma, \text{ qui se re-}$$

$$\text{duit a } \frac{(d^2q)}{ds^2} = c \cdot \frac{(d^2q)}{du^2} + g \cdot \frac{(d^2q)}{du ds} + \gamma, \text{ en faisant}$$

$$b - 1 = g. \text{ Enfin, si on fait } \frac{dq}{ds} = z, \text{ on decompo-}$$

$$\text{fera l'equation dans les deux suivantes } \frac{dq}{ds} = z, \text{ \& } \frac{dz}{ds}$$

$$= g \cdot \frac{dz}{du} + c \cdot \frac{(d^2q)}{du^2} + \gamma; \text{ comme on voit en différen-}$$

tiant, \& faisant ds constante. Or ces equations sont comprises dans celles, que nous avons traitées (Article

CCCCCLXXX.).

C H A P I T R E IX.

De la Methode des Variations.

Nous etablirons dans ce Chapitre les principes necessaires pour entendre les nouvelles methodes les plus generales, qu'on a trouvées dans l'analyse des infinis, & par lesquelles on a cherché a perfectionner le Calcul Intégral. Nous commencerons par la methode des Variations que M.^r Euler a donnée dans le Tome X. des nouveaux Commentaires de l'Academie de Petersbourg, année 1764. Cette methode comprend le Calcul des Variations, & la maniere d'en faire usage dans la solution des Problemes, d'ailleurs très-difficiles.

ARTICLE PREMIER.

Elemens du Calcul des Variations.

DXLIV.

On suppose d'abord dans ce calcul une equation donnée entre deux variables x & y , que nous designons par (E) , & que nous appellerons l'equation *Principale*, ou *Primitive*. Cette equation exprime une relation

tion donnée entre deux variables, qu'on peut aussi appeler la relation *Principale*, ou *Primitive* entre x & y . Elle est telle, que, quelque valeur déterminée qu'on donne à l'une de ces deux variables, la valeur correspondante de l'autre sera aussi déterminée par l'équation (E), & que chacune d'elles pourra être regardée comme une fonction de l'autre assignable par cette équation. Ainsi lorsque x dans cette équation deviendra $x' = x + dx$, y deviendra $y' = y + dy$, la valeur de y' répondra à celle de x' , & la différence de y' d'avec y précédent, qui est $dy = y' - y$, pourra se trouver par les règles ordinaires du calcul différentiel. De même, si V est une expression composée comme on voudra de x , & de y , elle sera telle, en vertu de la relation donnée entre x & y , ou de l'équation primitive (E), que ses différentes valeurs répondront toujours aux valeurs qu'on donnera à x ; de sorte que, si V' désigne la valeur que V acquiert, lorsque x devient $x' = x + dx$, on aura $V' = V + dV$, & $dV = V' - V$, suivant les premiers principes du calcul différentiel.

DXLV.

De plus puisqu'en vertu de l'équation primitive (E) y peut être regardée comme une fonction de x , & qu'en différentiant cette équation, on trouve la relation des différentielles dy & dx , on aura $dy = p dx$,

Mmm

p étant une fonction de x ; & par la même raison on aura $dp = q dx$, $dq = r dx$, $dr = s dx$, &c., q, r, s , &c. étant toujours des fonctions de x . Nous supposons toujours dans la suite $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$; $s = \frac{dr}{dx}$; &c., ce qui donne, en traitant dx comme constante, $dp = \frac{d^2y}{dx^2}$; $dq = \frac{d^3y}{dx^3}$; $dr = \frac{d^4y}{dx^4}$; $ds = \frac{d^5y}{dx^5}$ &c., & $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{d^2y}{dx^2}$; $r = \frac{d^3y}{dx^3}$; $s = \frac{d^4y}{dx^4}$; &c.

DXLVI.

Après la première supposition d'une relation, ou d'une équation primitive donnée entre x & y , on suppose encore dans le calcul des variations, qu'il arrive un changement quelconque infiniment petit dans cette relation primitive, ou dans l'équation (E) qui l'exprime; de sorte qu'on ait une seconde équation infiniment peu différente de la première (E). Nous désignerons cette seconde équation par (F), & nous l'appellerons *l'Equation variée*, & la relation entre x & y , qu'elle exprime, *la Relation variée*. On suppose de plus que la variable x demeure la même dans ces deux équations (E) & (F); d'où il suit évidemment que les valeurs de y , qui répondent aux valeurs de x dans la première équation (E), ne pourront différer que d'une

quantité infiniment petite des valeurs de y , qui repondent aux mêmes valeurs de x dans la seconde equation (F). Nous designerons par δy l'accroissement infiniment petit, positif ou negatif, que y acquiert par le changement de l'equation primitive (E), en l'equation variée (F); de sorte que, y repondant a x dans la premiere equation, $y + \delta y$ repondra a la même x dans la seconde equation, & δy marquera la variation infiniment petite, qui arrive a y par ce changement d'equation ou de relation entre x & y . De même supposant que y' soit la valeur de y , qui repond a $x + dx$ dans l'equation primitive (E), on pourra exprimer par $y' + \delta y'$ la valeur qui repond a la même quantité $x + dx$ dans l'equation variée (F); & $\delta y'$ marquera la variation de y' , qui naît du changement infiniment petit de l'equation (E) dans l'equation (F). Nous nous servons du caractere δ , au lieu de la lettre d , pour distinguer les variations δy , $\delta y'$, &c. des différentielles dy , dy' , &c.

DXLVII.

COROLLAIRE. Puisque $y' = y + dy$ on aura $\delta y' = \delta(y + dy) = \delta y + \delta dy$, & $\delta \cdot dy = \delta y' - \delta y$, c'est a dire, que la variation de la différentielle dy , qui lui arrive par le changement de l'equation primitive (E) en equation variée (F), est egale a la dif-

férence des variations, qui arrivent a y' & a y par le même changement d'équation. Mais comme y' marque l'état suivant de y , ou ce que devient y , lorsque x devient $x + dx$ dans la première équation (E); de même $\delta y'$ marquera l'état suivant de δy , ou ce que devient δy , lorsque x devient $x + dx$, ou que $y + \delta y$ devient $y' + \delta y'$ dans la seconde équation (F); de sorte que $\delta y' - \delta y$ exprime la différentielle de δy , comme $y' - y$ exprime la différentielle de y ; d'où l'on tire ce principe remarquable; la variation de la différentielle $d y$ est égale a la différentielle de la variation de y . Car, puisque $\delta d y = \delta y' - \delta y$, & que $\delta y' - \delta y = d. \delta y$; il s'ensuit que $\delta. d y = d. \delta y$.

DXLVIII.

DEFINITION I. V étant une expression formée comme on voudra des variables x & y , dont la relation soit exprimée par une équation primitive quelconque (E), la variation de V , que nous désignerons par δV , est l'accroissement que cette quantité V acquiert, lorsque la relation primitive entre x & y subit une variation quelconque infiniment petite, ou lorsque l'équation primitive (E) est changée en une autre infiniment peu différente (F). Il faut donc bien distinguer la différentielle dV de la variation δV . Car dV signifie l'accroissement de la quantité V , lorsque x de-

vient $x \rightarrow dx$, la relation primitive entre x & y , ou l'équation (E) qui l'exprime demeurant la même; & δV marque l'accroissement de V , lorsque la relation entre x & y , où l'équation (E) varie, & devient (F), la variable x demeurant la même dans ces deux équations.

DXLIX.

COROLLAIRE I. Puisque par ce changement de relation, ou d'équation entre x & y , la quantité y reçoit l'accroissement δy , & devient $y \rightarrow \delta y$, x demeurant la même; de quelque manière, que la quantité V soit formé de x & de y , on trouvera sa variation δV , si, après avoir substitué partout $y \rightarrow \delta y$ au lieu de y dans V sans rien changer dans x , on ôte V de la valeur, que cette même quantité V acquiert par cette substitution; car par cette substitution V deviendra $V \rightarrow \delta V$, d'où ôtant V , reste δV .

DL.

COROLLAIRE II. On voit par là, qu'on trouve la variation δV , en différentiant la quantité V dans la supposition de x constante, & en écrivant ensuite dans la différentielle dV la variation δy au lieu de la différentielle dy . Car pour trouver la différentielle dV en traitant x comme constante, on écrit par tout

$y + dy$ au lieu de y dans la quantité V , qui devient par là V' , & on ôte ensuite V de V' , pour avoir $V' - V = dV$, suivant les premiers principes du Calcul Différentiel.

DLI.

COROLLAIRE III. On peut encore trouver la variation δV , en différenciant d'abord la quantité V à l'ordinaire, c'est à dire, en supposant x & y variables, & en effaçant ensuite dans la différentielle dV , tous les termes où se trouve dx ; car, si on écrit dans ce qui restera de cette différentielle, la variation δy au lieu de dy , on aura δV comme dans le Corollaire précédent.

DLII.

DEFINITION II. Le calcul des variations est la méthode de trouver les variations qui arrivent à des quantités formées, comme on voudra, de deux variables x & y , lorsque l'équation, ou la relation primitive entre ces deux variables vient à subir un changement quelconque infiniment petit; ou bien, si V est une quantité formée, ou dépendante, comme on voudra, des deux variables x & y , dont la relation, ou l'équation primitive est supposée donnée, le calcul des variations est la méthode qui enseigne, comment on

peut trouver la variation δV produite par un changement quelconque infiniment petit de cette relation, ou de cette equation primitive.

DLIII.

COROLLAIRE I. Il faut distinguer deux etats de la formule, ou fonction V : l'un qu'on peut appeller son *etat principal*, & l'autre son *etat varié*. Le premier est l'etat de V , lorsque les valeurs de y dans V n'ont point encore reçu de variation, ou qu'elles sont les mêmes que la relation, où l'equation primitive entre les variables x & y l'exige: le second etat de V est celui, où les valeurs de y se trouvent variées, ou qu'au lieu de y on a substitué par tout $y + \delta y$ dans V . Comme donc dans l'etat primitif de V , lorsque la variable x augmente de sa différentielle dx , & devient $x + dx$, y augmente aussi de sa différentielle dy , & devient $y + dy$: de même, lorsque la fonction V passe de son etat primitif a son etat varié $V + \delta V$, la valeur de x demeurant la même dans les deux etats, l'autre variable y augmente de sa variation δy , & devient $y + \delta y$; par où l'on voit, que la variable x , de quelque maniere qu'elle entre dans la formation de la quantité V , ne fait rien pour la variation δV , & que la valeur de cette variation depend uniquement de la variation δy , qu'on conçoit être l'accroissement de y ,

dans le passage de V de son etat principal a son etat varié; de sorte qu'on a toujours $\delta x = 0$, & que, si la quantité V dependoit de la seule variable x , & ne comprenoit point l'autre variable y , on auroit $\delta V = 0$.

DLIV.

COROLLAIRE II. Puisque nous supposons toujours que le changement de la relation, ou de l'equation primitive entre les deux variables x & y , est tel qu'on voudra, pourvû qu'il soit infiniment petit, les différentes variations, qui arriveront a la variable y , suivant les différentes valeurs de x , auxquelles y repond, pourront être telles qu'on voudra, & même independantes les unes des autres. On voit par là, que le calcul des variations est très-étendu, & qu'on peut l'adapter a toutes fortes de conditions données des variations.

DLV.

REMARQUE. Jusqu'icy nous avons expliqué les principes du calcul des variations dans toute leur generalité; peut-être qu'un cas particulier pourra servir a les faire comprendre plus facilement. Soit donc $ax = yy$ l'equation primitive, qui exprime la relation donnée entre les deux variables x & y , & que nous avons designée par (E). On sçait que cette equation appartient a une parabole, dont le parametre est a , l'abscisse

x , &

x , & l'ordonnée correspondante y ; & on voit d'abord que $y = \sqrt{ax}$, fonction de x , & qu'en différenciant, on

$$\text{aura } dy = \frac{\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{1}{2}}}; \text{ d'où l'on tire } \frac{dy}{dx} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} = p; dp$$

$$= -\frac{\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} dx}{4x^{\frac{3}{2}}}, \frac{dp}{dx} = \frac{-a^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}} = q; dq = +\frac{\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} dx}{8x^{\frac{5}{2}}}, \frac{dq}{dx} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}}}{8x^{\frac{5}{2}}} = r; \text{ \&C.}$$

Supposons presentement qu'on introduise un changement infiniment petit dans l'equation primitive $ax = yy$; ce qu'on peut faire d'une infinité de manieres différentes; par exemple, en augmentant le parametre a d'une quantité infiniment petite δa , de sorte que ce parametre devienne $a + \delta a$, & que ax devienne $(a + \delta a)x$; alors il est clair que, pour rendre $yy =$ au produit $(a + \delta a)x$, il faut augmenter aussi la variable y d'une quantité infiniment petite δy , pour avoir l'equation variée $(a + \delta a)x = (y + \delta y)^2$, qui est infiniment peu différente de l'equation primitive $ax = yy$. Cette equation variée appartient a une autre parabole, dont le parametre est $a + \delta a$, l'abscisse x , la même que dans la premiere parabole, & l'ordon-

qui donnera $dV = ax^2 dy + 2bxy dy$, & en écrivant ensuite dans cette équation δV pour dV , & δy pour dy . 3^o En différenciant à l'ordinaire la fonction V , on aura $dV = ax^2 dy + 2axy dx + 2bxy dy + by^2 dx$, effaçant les deux termes, où se trouve dx , & mettant δy pour dy dans ce qui reste, on aura encore $\delta V = ax^2 \delta y + 2bxy \delta y$. Si on veut substituer dans cette variation δV la valeur de δy que nous avons trouvée

$$= \frac{x \delta a}{2y} = \frac{x \delta a}{2Vax}, \text{ on aura } \delta V = \frac{ax^3 \delta a}{2y} + b x^2 \delta a =$$

$$\frac{1}{2} a^2 x^2 \delta a + b x^2 \delta a.$$

Nous regarderons toujours dans la suite la variation δy comme donnée, & nous chercherons, dans cette supposition, la variation δV de la formule V dependante, comme on voudra, des deux variables x

& y , ou de leurs dérivées $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$,

$s = \frac{dr}{dx}$, &c.

DLVI.

THEOREME I. La variation de dV différentielle de la formule quelconque V , est égale à la différentielle de la variation δV de cette formule, ou bien $\delta . dV = d . \delta V$.

DEMONSTRATION. Si on substitue $x \rightarrow dx$ pour x , & $y \rightarrow dy$ pour y dans la quantité V , & que par ces substitutions V devienne V' , on aura $dV = V' - V$ suivant les regles du calcul différentiel. Donc $\delta.dV = \delta(V' - V) = \delta V' - \delta V$; or $d.\delta V$ exprime la différence entre δV , & sa valeur suivante $\delta V'$, que δV acquiert, lorsque x devient $x \rightarrow dx$, & que y devient $y \rightarrow dy$; enforte qu'on a $d.\delta V = \delta V' - \delta V$, comme on a trouvé $dV = V' - V$. Donc $\delta.dV = d.\delta V$.
C. Q. F. D.

DLVII.

COROLLAIRE. En écrivant dV au lieu de V dans l'équation que nous venons de trouver $\delta.dV = d.\delta V$, on aura $\delta.ddV = d.\delta dV$; or $\delta dV = d.\delta V$; donc $\delta.ddV = d.d.\delta V$; par conséquent on aura égalité entre ces trois formes $\delta.ddV = d.\delta dV = d.d.\delta V$.

De même si on écrit encore icy dV pour V , on aura égalité entre ces quatre formes $\delta.dddV = d.\delta ddV = d.d.\delta dV = ddd.\delta V$, ensuite entre ces cinq formes $\delta.d^4 V = d.\delta d^3 V = d^2.\delta d^2 V = d^3.\delta dV = d^4.\delta V$, & généralement on aura $\delta.d^n V = d^n.\delta d^{n-m} V = d^n.\delta V$; & par là on réduit la variation $\delta d^n V$ de la différentielle $d^n V$ de l'ordre quelconque n , à la différentielle

du même ordre $d^n \cdot \delta V$ de la variation δV , & en prenant pour m , un nombre qui ne soit pas plus grand que n , on aura aussi $\delta \cdot d^n V = d^m \cdot \delta d^{n-m} V$.

DLVIII.

THEOREME II. En supposant dx constante, & $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, $s = \frac{dr}{dx}$, &c., on aura les variations suivantes $\delta p = \frac{d \cdot \delta y}{dx}$, $\delta q = \frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2}$, $\delta r = \frac{d^3 \cdot \delta y}{dx^3}$, $\delta s = \frac{d^4 \cdot \delta y}{dx^4}$, &c..

DEMONSTRATION. Puisque dx est constante, & que la variation n'appartient point à la quantité x (Art. DLIII.); à cause de $p = \frac{dy}{dx}$, on aura $\delta p = \frac{\delta \cdot dy}{dx} = \frac{d \cdot \delta y}{dx}$ (Theor. I.). De même, à cause de $q = \frac{dp}{dx}$, on aura $\delta q = \frac{\delta \cdot dp}{dx} = \frac{d \cdot \delta p}{dx} = \frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2}$, en substituant $\frac{d \cdot \delta y}{dx}$ pour δp . à cause de $r = \frac{dq}{dx}$, on aura $\delta r = \frac{\delta \cdot dq}{dx} = \frac{d \cdot \delta q}{dx} = \frac{d^3 \cdot \delta y}{dx^3}$, en substituant $\frac{d^2 \cdot \delta y}{dx^2}$ pour dq . On trouvera de même $\delta s = \frac{\delta \cdot dr}{dx} = \frac{d \cdot \delta r}{dx} = \frac{d^4 \cdot \delta y}{dx^4}$, & ainsi de suite à l'infini. C. Q. F. D.

DLIX.

COROLLAIRE I. Ces différentielles du premier degré, & des autres degrés supérieurs de la variation δy , font déterminées par les variations des valeurs de y , qui repondent aux valeurs suivantes de x , c'est à dire, aux valeurs $x+d\alpha$, $x+2d\alpha$, $x+3d\alpha$, &c. Car si les valeurs suivantes de y , c'est à dire, celles qui repondent aux valeurs $x+d\alpha$, $x+2d\alpha$, $x+3d\alpha$, &c. font designées par y' , y'' , y''' , y'''' , &c., & leurs variations par $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$, $\delta y''''$, &c. on aura par la nature des différentielles $d.\delta y = \delta y' - \delta y$; $d.\delta y' = \delta y'' - \delta y'$; $d.\delta y'' = \delta y''' - \delta y''$; &c.

$$dd.\delta y = d(\delta y' - \delta y) = d.\delta y' - d.\delta y = \delta y'' - \delta y' - \delta y' + \delta y = \delta y'' - 2\delta y' + \delta y.$$

$$d^3.\delta y = d(\delta y'' - 2\delta y' + \delta y) = d.\delta y'' - 2d.\delta y' + d.\delta y = \delta y''' - \delta y'' - 2\delta y'' + 2\delta y' + \delta y' - \delta y = \delta y''' - 3\delta y'' + 3\delta y' - \delta y; \text{ \&c.}$$

DLX.

COROLLAIRE II. Donc si la valeur y , qui repond a x , reçoit la variation δy , & que les valeurs suivantes, y' , y'' , y''' , &c. ne reçoivent aucune variation, enforte qu'on ait $\delta y' = 0$, $\delta y'' = 0$, $\delta y''' = 0$, &c., on aura $d.\delta y = -\delta y$; $dd.\delta y = +\delta y$; $d^3.\delta y = -\delta y$; $d^4.\delta y = +\delta y$; &c.

DLXI.

THEOREME III. La variation de la formule intégrale quelconque $S.Z d\pi$ est égale à l'intégrale de la variation de la différentielle $Z d\pi$; ou $\delta S.Z d\pi = S.\delta.Z d\pi$, en supposant que Z est une quantité formée, ou dépendante, comme on voudra, des deux variables π & γ .

DEMONSTRATION. Soit $V = S.Z d\pi$, on aura, en différenciant, $dV = Z d\pi$; par conséquent $\delta dV = \delta.Z d\pi$. Or $\delta dV = d.\delta V$ (Theor. I.); donc $d.\delta V = \delta.Z d\pi$; &, en intégrant de part & d'autre, $\delta V = S.\delta.Z d\pi$, ou $\delta.S.Z d\pi = S.\delta.Z d\pi$. C. Q. F. D.

DLXII.

PROBLEME I. Trouver la variation δV de la formule V , lorsqu'elle ne renferme que les deux variables finies π & γ .

SOLUTION. 1^o Prenez la différentielle de la fonction V à l'ordinaire, c'est à dire, en faisant varier π & γ ; & cette différentielle sera $dV = Md\pi + Ndy$, M & N étant des fonctions de π & de γ , ou des fonctions de π , en regardant γ comme une fonction de π , en vertu de l'équation primitive.

2^o Ecrivez dans cette différentielle zero pour $d\pi$, & la variation $\delta\gamma$ pour la différentielle dy , & vous aurez $\delta V = N\delta\gamma$ (Art. DLI.). C. Q. F. T. & D.

DLXIII.

PROBLEME II. Trouver la variation δV de la formule V , lorsqu'outre les deux variables finies x & y , elle renferme encore leurs différentielles de quelque ordre que ce soit, ou les rapports de ces différentielles exprimés par $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, $s = \frac{dr}{dx}$, &c., ou bien, ce qui revient au même, lorsque V est une fonction quelconque des quantités x , y , & de leurs dérivées p , q , r , s , &c.

SOLUTION. 1^o Prenez la différentielle de la fonction V par les règles ordinaires du calcul différentiel; & vous aurez $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \text{&c.}$, M , N , P , Q , R , S , &c. étant des fonctions des quantités x , y , p , q , r , s , &c., fonctions qu'on trouve par cette différentiation, & qu'on peut aussi regarder comme des fonctions de x , ou de y en vertu de l'équation primitive entre x & y , & des autres équations $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, &c.

2^o Ecrivez dans cette différentielle zero pour dx , & les variations δV , δy , δp , δq , δr , &c. pour les différentielles dV , dy , dp , dq , dr , &c., & vous aurez la variation $\delta V = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \text{&c.}$

3^o

3.^o Substituez encore dans cette equation les valeurs des variations $\delta p, \delta q, \delta r, \delta s, \text{ \&c.}$ qu'on a trouvées cy-dessus (Art. DLVIII.) en supposant dx constante; & la variation cherchée sera $\delta V = N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \frac{Sd^4\delta y}{dx^4} + \text{ \&c.}$

DEMONSTRATION. La différentielle $dV = Md\kappa + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ \&c.}$ n'est autre chose que l'accroissement que la fonction V acquiert, lorsqu'elle devient V' , ou lorsqu'on substitue dans cette fonction $\kappa + d\kappa, y + dy, p + dp, q + dq, r + dr, \text{ \&c.}$ pour $\kappa, y, p, q, r, \text{ \&c.}$, substitution qui change V en V' , de sorte qu'en retranchant V de V' , on a $dV = V' - V = Md\kappa + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ \&c.}$ suivant les regles generales du calcul différentiel.

Or la variation δV n'est aussi rien autre chose, que l'accroissement que la même formule V acquiert en passant de son etat primitif a son etat varié, qu'on trouve, en substituant dans cette formule $\kappa + o, y + \delta y, p + \delta p, q + \delta q, r + \delta r, \text{ \&c.}$ pour $\kappa, y, p, q, r, \text{ \&c.}$, substitution qui donne a V son etat varié $V + \delta V$, de sorte qu'en retranchant V de $V + \delta V$, il reste δV , qu'on trouve en ecrivant dans la différentielle $Md\kappa + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ \&c.}$ les variations zero pour $d\kappa, \delta y$ pour $dy, \delta p$ pour $dp, \delta q$ pour $dq, \text{ \&c.}$ (Art. DLI.), on aura donc $\delta V = N\delta y$

O o o

474 ELEMENS DU CALCUL INTÉGRAL
 $+ P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{C}c.$, & (par l'Art. DLVIII.)
 $\delta V = N \delta y + \frac{P d \delta y}{dx} + \frac{Q d^2 \delta y}{dx^2} + \text{C}c. \quad C. Q. F. D.$

DLXIV.

PROBLEME III. Trouver la valeur $\delta S. Z d x$ de la formule intégrale $S. Z d x$, dans laquelle Z est une fonction quelconque des deux variables x, y , & de leurs dérivées $p, q, r, s, \text{C}c.$, en supposant toujours $p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{dp}{dx}, r = \frac{dq}{dx}, s = \frac{dr}{dx}, \text{C}c.$

SOLUTION. Puisque la variation $\delta S. Z d x$ est (Theor. III.) égale à $S. \delta Z d x$, il ne s'agit que de trouver la variation $\delta Z d x$, & d'en prendre ensuite l'intégrale; on cherchera donc d'abord, comme dans le Probleme precedent, la différentielle $dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{C}c.$, par la quelle on determinera les valeurs des coefficients $M, N, P, Q, R, \text{C}c.$, & on en deduera la variation $\delta Z = N \delta y + \frac{P d \delta y}{dx} + \frac{Q d d \delta y}{dx^2} + \frac{R d^3 \delta y}{dx^3} + \frac{S d^4 \delta y}{dx^4} + \text{C}c.$; en multipliant par $d x$, & en intégrant ensuite de coté & d'autre, on aura $S. \delta Z d x = S. N \delta y d x + S. P d. \delta y + S. \frac{Q d d \delta y}{dx} + S. \frac{R d^3 \delta y}{dx^2} + S. \frac{S d^4 \delta y}{dx^3} + \text{C}c.$ Or si on se rappelle que, π & τ étant deux variables quelconques, l'intégrale $S. \pi d \tau = \pi \tau - S. \tau d \pi$, & qu'on considere

δy comme une simple variable, que nous designerons par ω , pour eviter la confusion, on comprendra facilement les reductions suivantes

$$S. N \delta y d\pi = S. \delta y d\pi . N ; S. P d. \delta y = S. P d\omega = P \omega \\ - S. \omega dP = \delta y . P - S. \delta y d\pi . \frac{dP}{d\pi} ;$$

$$S. \frac{Q dd. \delta y}{dx} = S. \frac{Q dd\omega}{dx} = \frac{Q d\omega}{dx} - S. \frac{dQ}{dx} d\omega = \frac{Q d\omega}{dx} - \\ \frac{\omega dQ}{dx} + S. \frac{\omega ddQ}{dx} = d. \delta y \frac{Q}{dx} - \delta y . \frac{dQ}{dx} + \\ S. \delta y d\pi . \frac{ddQ}{dx^2} ;$$

$$S. \frac{R d^3 \delta y}{dx^2} = S. \frac{R d^3 \omega}{dx^2} = \frac{R dd\omega}{dx^2} - \frac{dR d\omega}{dx^2} + \frac{\omega ddR}{dx^2} - \\ S. \frac{\omega d^3 R}{dx^2} = \frac{dd. \delta y}{dx^2} . R - \frac{d. \delta y}{dx} . \frac{dR}{dx} + \\ \delta y . \frac{ddR}{dx^2} - S. \delta y d\pi . \frac{d^3 R}{dx^3} ;$$

$$S. \frac{S. d^4 \delta y}{dx^3} = S. \frac{S. d^4 \omega}{dx^3} = Cc.$$

En faisant la somme de toutes ces valeurs, & joignant ensemble les termes des intégrales, qui se repondent, on aura

$$\begin{aligned}
S. \delta Z d\pi &= S. \delta y d\pi. N - S. \delta y d\pi. \frac{dP}{dx} + S. \delta y d\pi. \frac{ddQ}{dx^2} - S. \delta y d\pi. \frac{d^3R}{dx^3} + \dots \\
&+ \delta y. P - \delta y. \frac{dQ}{dx} + d y. \frac{ddR}{dx^2} - \delta y. \frac{d^3S}{dx^3} + \mathcal{O}c. \\
&+ \frac{d\delta y}{dx} Q - \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{dR}{dx} + \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{ddS}{dx^2} - \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^3T}{dx^3} + \mathcal{O}c. \\
&+ \frac{dd.\delta y}{dx^2} \cdot R - \frac{dd.\delta y}{dx^2} \cdot \frac{dS}{dx} + \frac{dd.\delta y}{dx^2} \cdot \frac{ddT}{dx^2} - \mathcal{O}c. \\
&+ \frac{d^3\delta y}{dx^3} \cdot S - \frac{d^3\delta y}{dx^3} \cdot \frac{dT}{dx} + \mathcal{O}c. \\
&+ \frac{d^4\delta y}{dx^4} \cdot T - \mathcal{O}c. \\
&+ \mathcal{O}c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ou } \delta. S. Z d\pi &= S. \delta y d\pi \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \mathcal{O}c. \right) \\
&+ \delta y \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \mathcal{O}c. \right) \\
&+ \frac{d\delta y}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \mathcal{O}c. \right) \\
&+ \frac{dd.\delta y}{dx^2} \left(R - \frac{dS}{dx} + \mathcal{O}c. \right) \\
&+ \frac{d^3\delta y}{dx^3} \left(S - \mathcal{O}c. \right) \\
&\mathcal{O}c.
\end{aligned}$$

On a donc la valeur de la variation $\delta Z d\pi$ dans la supposition de $d\pi$ constante. C. Q. F. T.

DLXV.

COROLLAIRE I. La valeur de la variation $\delta S. Z d\pi$ est composée de la partie intégrale $S. \delta y d\pi \times (N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{Cc.})$, & d'autres parties *absolues*, ou sans intégrale, dans lesquelles se trouvent la variation simple δy , & ses différentielles $d. \delta y$, $dd. \delta y$, $d^3. \delta y$, Cc.

DLXVI.

COROLLAIRE II. On a disposé par les réductions la partie intégrale, de manière qu'elle ne contient que la simple variation δy , & qu'elle ne renferme aucune de ses différentielles. On verra dans la suite que cette forme est très-utile dans l'application du calcul des variations.

DLXVII.

REMARQUE. On peut toujours considérer l'intégrale $S. Z d\pi$, comme l'aire d'une courbe, dont l'abscisse est π , & l'ordonnée perpendiculaire Z ; & si on suppose que, l'abscisse π demeurant la même, l'ordonnée Z augmenté de sa variation δZ , on aura une autre courbe, dont l'aire sera $S. (Z + \delta Z) d\pi = S. Z d\pi + S. \delta Z d\pi$, de sorte que l'intégrale $S. \delta Z d\pi$ sera l'ac-

croissement infiniment petit, ou la variation de l'aire $S.Z d\pi$, lorsque l'ordonnée Z devient partout $Z + \delta Z$; & comme, pour avoir les aires de ces deux courbes, qui repondent a l'abscisse π depuis son commencement, jusqu'a ce qu'elle ait une valeur déterminée a ou depuis $\pi = 0$, jusqu'a $\pi = a$, il faut prendre les intégrales $S.Z d\pi$, & $S.(Z + \delta Z)d\pi$, de maniere qu'elles s'évanouissent par la substitution de zero au lieu de π , & trouver ensuite les valeurs qu'elles acquierent par la substitution de a pour π ; de même, pour trouver la variation de l'intégrale $S.Z d\pi$ depuis $\pi = 0$, jusqu'a $\pi = a$, il faut prendre l'intégrale $S.\delta y d\pi (N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \text{Ctc.})$ de maniere qu'elle s'évanouisse par la substitution de zero au lieu de π , & trouver ensuite la valeur qu'elle acquiert par la substitution de a pour π ; après quoy on trouvera facilement les valeurs des autres parties absolues de la variation en y substituant zero au lieu de π , & ensuite a pour π ; car comme ces autres parties ne renferment point d'intégrations a faire, on peut faire ces substitutions immédiatement.

DLXVIII.

PROBLEME IV. Trouver la variation $\delta S.Z d\pi$ de la formule intégrale $S.Z d\pi$, lorsque la quantité Z contient non seulement les variables π, y , & leurs de-

rivées $p, q, r, s, \text{ \& } c.$, mais de plus une formule intégrale $\Pi = S. Z' dx$, dans laquelle Z' est une fonction quelconque des quantités $x, y, p, q, r, s, \text{ \& } c.$

SOLUTION. Puisque la quantité Z contient les variables $x, y, p, q, r, \text{ \& } c.$, & de plus l'intégrale $\Pi = S. Z' dx$, on peut la regarder comme une fonction des quantités $\Pi, x, y, p, q, r, s, \text{ \& } c.$ ainsi la différentielle prise à l'ordinaire sera $dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{ \& } c.$, par laquelle on déterminera les valeurs des coefficients $L, M, N, P, Q, \text{ \& } c.$, & on en deduirá la variation suivante $\delta Z = L \delta \Pi + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + S \delta s + \text{ \& } c.$ de même, puisque Z' est une fonction de $x, y, p, q, r, s, \text{ \& } c.$, on trouvera sa différentielle $dZ' = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{ \& } c.$, par laquelle on déterminera les valeurs des coefficients $M', N', P', Q', R', \text{ \& } c.$, & on en deduirá la variation $\delta Z' = N' \delta y + P' \delta p + Q' \delta q + R' \delta r + S' \delta s + \text{ \& } c.$, & par le Probleme precedent on aura $\delta \Pi =$

$$\delta S. Z' dx = S. N' \delta y dx + S. P' d. \delta y + S. \frac{Q' d d. \delta y}{dx} + S. \frac{R' d^3 \delta y}{dx^2} + \text{ \& } c.;$$

substituant cette valeur de $\delta \Pi$ dans l'équation $\delta Z = L \delta \Pi + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + \text{ \& } c.$, & mettant pour $\delta p, \delta q, \delta r, \text{ \& } c.$ leurs valeurs, on aura

$$\delta Z = LS.N'\delta y dx + LS.P'd.\delta y + L\frac{S.Q'dd\delta y}{dx} + \frac{S.Rd^3\delta y}{dx^2} + Cc.$$

$$+ N\delta y + \frac{P d.\delta y}{dx} + \frac{Q dd.\delta y}{dx^2} + \frac{R d^3.\delta y}{dx^3} + Cc.$$

Puis donc que $\delta S.Z dx = S.\delta Z dx$, on aura la variation cherché

$$\delta S.Z dx = S.(L dx S.N'\delta y dx) + S.(L dx S.P'd.\delta y) + S.(L dx S.\frac{Q'dd\delta y}{dx}) -$$

$$+ S.N\delta y dx + S.P d.\delta y + S.\frac{Q dd.\delta y}{dx} + S.\frac{R d^3.\delta y}{dx^2} + Cc.$$

Pour delivrer cette formule des signes multipliés d'intégration, supposons $S.L dx = V$, ou $L dx = dV$; &, par ce qu'on a les egalités suivantes $S.(L dx S.N'\delta y dx) = S.(dV S.N'\delta y dx) = V S.N'\delta y dx - S.V N'\delta y dx$; $S.(L dx S.P'd.\delta y) = S.(dV S.P'd.\delta y) = S.V S.P'd.\delta y - S.V P d.\delta y$; $S.(L dx S.\frac{Q'dd.\delta y}{dx}) = S.(dV S.\frac{Q'dd.\delta y}{dx}) = V S.\frac{Q'dd.\delta y}{dx} - S.V.\frac{Q'dd.\delta y}{dx}$, on trouvera

$$\delta S.Z dx = V S.N'\delta y dx + V S.P'd.\delta y + V S.\frac{Q'dd.\delta y}{dx} + V S.\frac{R d^3.\delta y}{dx^2} + Cc.$$

$$+ S.(N - NV)\delta y dx + S.(P - PV)d.\delta y + S.(Q - QV)\frac{dd.\delta y}{dx} +$$

Ces deux formules etant reduites, comme dans le Probleme precedent donneront la variation cherchée

$$\delta Z d\kappa = VS. \delta y d\kappa \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \frac{d^4S'}{dx^4} - \mathcal{O}c. \right)$$

$$+ V \delta y \left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2} - \frac{d^3S'}{dx^3} + \mathcal{O}c. \right)$$

$$+ \frac{V d\delta y}{dx} \left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{ddS'}{dx^2} - \mathcal{O}c. \right)$$

$$+ \frac{V dd\delta y}{dx^2} \left(R' - \frac{dS'}{dx} + \mathcal{O}c. \right)$$

$\mathcal{O}c.$

$$+ S. \delta y d\kappa \left\{ (N - N'V) - \frac{d(P - P'V)}{dx} + \frac{dd(Q - Q'V)}{dx^2} - \frac{d^3(R - R'V)}{dx^3} + \mathcal{O}c. \right\}$$

$$+ \delta y \left\{ (P - P'V) - \frac{d(Q - Q'V)}{dx} + \frac{dd(R - R'V)}{dx^2} - \mathcal{O}c. \right\}$$

$$+ \frac{d\delta y}{dx} \left\{ (Q - Q'V) - \frac{d(R - R'V)}{dx} + \mathcal{O}c. \right\}$$

$$+ \frac{dd\delta y}{dx^2} \left\{ (R - R'V) - \mathcal{O}c. \right\}$$

$\mathcal{O}c.$

DLXIX.

COROLLAIRE I. Les reductions, dont nous nous sommes servis, pouvant se trouver aisément, on peut les ômettre pour exprimer d'une maniere plus courte la variation

$$\delta S. Z d\kappa = VS. d\kappa \left(N' \delta y + \frac{P' d\delta y}{dx} + \frac{Q' dd\delta y}{dx^2} + \frac{R' d^3\delta y}{dx^3} + \mathcal{O}c. \right)$$

$$+ S. d\kappa \left\{ (N - N'V) \delta y + (P - P'V) \frac{d\delta y}{dx} + (Q - Q'V) \frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathcal{O}c. \right\}$$

P P P

Car il est évident que $V S. N' \delta y d x + V S. P' d \delta y +$
 $V S. \frac{Q' d \delta y}{d x} + Cc. = V S. d x \left(N' \delta y + \frac{P' d \delta y}{d x} + \frac{Q' d \delta y}{d x^2} \right.$
 $\left. + Cc. \right)$, & que $S. (N - N' V) \delta y d x + S. (P - P' V) X$
 $d \delta y + S. (Q - Q' V) \frac{d \delta y}{d x} + Cc. = S. d x \left\{ (N - N' V) X \right.$
 $\left. \delta y + (P - P' V) \frac{d \delta y}{d x} + (Q - Q' V) \frac{d \delta y}{d x^2} + Cc. \right\}$.

DLXX.

COROLLAIRE II. Lorsqu'on veut avoir la variation $\delta S. Z d x$, depuis $x = 0$, jusqu'à $x = a$, on prendra l'intégrale $S. L d x = V$, de manière qu'elle s'évanouisse par la substitution de zero au lieu de x , & qu'ensuite cette intégrale V devienne A par la substitution de a pour x , & on pourra écrire A pour V dans la formule qui exprime la variation $\delta S. Z d x$, lorsque la lettre V dans cette formule est hors du signe d'intégration S .

DLXXI.

COROLLAIRE III. Et par ce que les coefficients $L, M, N, P, Q, Cc.$ peuvent être regardés comme des fonctions de x , à cause qu'on suppose que la relation, ou l'équation primitive entre x & y est donnée; l'intégrale $S. L d x$, ou V pourra être traitée comme

une quantité constante A , après qu'on aura substitué dans V la constante a pour la variable x , de sorte que l'intégrale $V S. \delta y d x (N - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} +$

$$\mathcal{C}c.) \text{ deviendra } A S. \delta y d x (N - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \mathcal{C}c.)$$

$$= S. \delta y d x (N' A - \frac{dP'}{dx} A + \frac{ddQ'}{dx^2} A - \mathcal{C}c.); \text{ \& qu'}$$

en ajoutant cette intégrale avec la correspondante

$$S. \delta y d x \{ (N - N' V) - \frac{d.(P - P' V)}{dx} + \frac{dd(Q - Q' V)}{dx^2}$$

$$- \mathcal{C}c. \}, \text{ la somme fera } S. \delta y d x \{ (N + N' A - N' V)$$

$$- \frac{d(P + P' A - P' V)}{dx} + \frac{dd(Q + Q' A - Q' V)}{dx^2} - \mathcal{C}c. \}.$$

De même, si on ajoute la partie absolue $V \delta y \times$

$$(P - \frac{dQ'}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2} - \mathcal{C}c.), \text{ ou } \delta y (P A - \frac{dQ'}{dx} A +$$

$$\frac{ddR'}{dx^2} A + \mathcal{C}c.) \text{ avec la correspondante } \delta y \{ (P - P' V) -$$

$$\frac{d.(Q - Q' V)}{dx} + \frac{dd.(R - R' V)}{dx^2} - \mathcal{C}c. \}; \text{ leur somme fera}$$

$$\delta y \{ (P + P' A - P' V) - \frac{d.(Q + Q' A - Q' V)}{dx} +$$

$$\frac{dd.(R + R' A - R' V)}{dx^2} - \mathcal{C}c. \}. \text{ Enfin si on suppose,}$$

$$\text{pour abréger, } N + (A - V) N' = (N); P + (A - V) P'$$

$$= (P); Q + (A - V) Q' = (Q); R + (A - V) R' =$$

$$(R); \mathcal{C}c., \text{ on aura pour la variation } \delta S. Z d x \text{ prise}$$

jusqu'à $x = a$, la formule suivante

$$\begin{aligned}
\delta S.Z dx &= S. \delta y dx \left\{ (N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd.(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \mathcal{C}c. \right\} \\
&+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd.(R)}{dx^2} - \frac{d^3(S)}{dx^3} + \mathcal{C}c. \right\} \\
&+ \frac{d.\delta y}{dx} \left\{ (Q) - \frac{d.(R)}{dx} + \frac{dd.(S)}{dx^2} - \mathcal{C}c. \right\} \\
&+ \frac{dd.\delta y}{dx^2} \left\{ (R) - \frac{d.(S)}{dx} + \mathcal{C}c. \right\} \\
&+ \frac{d^3\delta y}{dx^3} \left\{ (S) - \mathcal{C}c. \right\} \\
&+ \mathcal{C}c.
\end{aligned}$$

On trouvera la même chose en faisant dans la formule du Corollaire I. les réductions, dont on s'est servi dans les Problemes precedents.

DLXXII.

COROLLAIRE IV. Si la quantité Z de la formule proposée $S.Z dx$ renferme de plus une autre formule intégrale $\Pi = S.Z' dx$, de sorte qu'on ait $dZ = Ld\Pi + L'd\Pi' + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr$, & aussi $dZ'' = M'dx + N'dy + P'dp + Q'dq + R'dr + \mathcal{C}c$. Si on suppose $S.L dx = V$, $S.L' dx = V'$, & de plus, pour abreger, $N - N'V - N''V' = (N)$; $P - P'V - P''V' = (P)$; $Q - Q'V - Q''V' = (Q)$; $R - R'V - R''V' = (R)$, on trouvera la variation

$$\begin{aligned} \delta Z d\pi &= V S. d\pi \left(N' \delta y + \frac{P' d. \delta y}{dx} + \frac{Q' dd. \delta y}{dx^2} + \frac{R' d^3 \delta y}{dx^3} + \mathcal{O}c. \right) \\ &+ V' S. d\pi \left(N'' \delta y + \frac{P'' d. \delta y}{dx} + \frac{Q'' dd. \delta y}{dx^2} + \frac{R'' d^3 \delta y}{dx^3} + \mathcal{O}c. \right) \\ &+ S. d\pi \left\{ (N) \delta y + (P) \frac{d. \delta y}{dx} + (Q) \frac{dd. \delta y}{dx^2} + (R) \frac{d^3. \delta y}{dx^3} + \mathcal{O}c. \right\} \end{aligned}$$

Mais si on veut avoir cette variation jusqu'à $\pi = a$, on supposera qu'ayant substitué a pour π , l'intégrale V devienne A , & l'intégrale $V' = A'$, & ayant fait

$$\begin{aligned} (N) &= N + (A - V) N' + (A' - V') N''; \\ (P) &= P + (A - V) P' + (A' - V') P''; \\ (Q) &= Q + (A - V) Q' + (A' - V') Q''; \\ (R) &= R + (A - V) R' + (A' - V') R''; \mathcal{O}c. \end{aligned}$$

On trouvera la variation cherchée

$$\begin{aligned} \delta S. Z d\pi &= S. d\pi \delta y \left\{ (N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \mathcal{O}c. \right\} \\ &+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} + \mathcal{O}c. \right\} \\ &+ \frac{d. \delta y}{dx} \left\{ (Q) - \frac{d(R)}{dx} + \mathcal{O}c. \right\} \\ &+ \frac{dd. \delta y}{dx^2} \left\{ (R) - \mathcal{O}c. \right\} \\ &+ \mathcal{O}c. \end{aligned}$$

DLXXIII.

PROBLEME V. Trouver la variation $\delta S.Z d\pi$ de la formule intégrale $S.Z d\pi$, lorsque la quantité Z , outre les lettres $\pi, \gamma, p, q, r, \text{C}c.$, renferme la formule intégrale $\Pi = S.Z' d\pi$, dans laquelle la quantité Z' , outre les lettres $\pi, \gamma, p, q, r, \text{C}c.$, contient la formule intégrale $\Pi' = S.Z'' d\pi$, Z' étant une fonction des seules variables $\pi, \gamma, p, q, r, \text{C}c.$

SOLUTION. 1^o Puisque Z est une fonction des quantités $\pi, \gamma, p, q, r, \text{C}c.$, & de $\Pi = S.Z' d\pi$, sa différentielle sera $L d\Pi + M d\pi + N d\gamma + P dp + Q dq + R dr + \text{C}c.$, & sa variation $\delta Z = L \delta \Pi + N \delta \gamma + P \frac{d\delta \gamma}{d\pi} + Q \frac{d d \delta \gamma}{d\pi^2} + R \frac{d^3 \delta \gamma}{d\pi^3} + \text{C}c.$, ou $\delta Z = L \delta \Pi + H$, en supposant $H = N \delta \gamma + \frac{P d \delta \gamma}{d\pi} + \frac{Q d d \delta \gamma}{d\pi^2} + \text{C}c.$; donc $\delta Z d\pi = L d\pi \delta \Pi + H d\pi$, & $\delta S.Z d\pi = S. \delta Z d\pi = S. L d\pi \delta \Pi + S. H d\pi$.

2^o Puisque Z' est une fonction des quantités $\Pi', \pi, \gamma, p, q, r, \text{C}c.$, on aura $dZ' = L' d\Pi' + M' d\pi + N' d\gamma + P' dp + Q' dq + R' dr + \text{C}c.$; $\delta Z' = L' \delta \Pi' + N' \delta \gamma + \frac{P' d \delta \gamma}{d\pi} + \frac{Q' d d \delta \gamma}{d\pi^2} + \frac{R' d^3 \delta \gamma}{d\pi^3} + \text{C}c.$; $\delta Z' = L' \delta \Pi' + H'$, en supposant $H' = N' \delta \gamma + \frac{P' d \delta \gamma}{d\pi}$

$$+ \frac{Q'dd.\delta y}{dx^2} + \mathcal{O}c. ; \delta Z'dx = L'dx\delta\Pi' + H'dx ;$$

$S.\delta Z'dx = S.L'dx\delta\Pi' + S.H'dx$. Donc, puisque $\Pi = S.Z'dx$, $\delta\Pi = \delta S.Z'dx = S.L'dx\delta\Pi' + S.H'dx$.

Mais on vient de trouver cy-dessus $\delta S.Zdx = S.Ldx\delta\Pi + S.Hdx$; donc, en substituant pour $\delta\Pi$ la valeur, on aura la variation cherchée $\delta S.Zdx = S.Ldx.S.L'dx\delta\Pi' + S.Ldx.S.H'dx + S.Hdx$.

3^o Puisque Z'' est une fonction des seules quantités $x, y, p, q, r, \mathcal{O}c.$, on aura $dZ'' = M''dx + N''dy + P''dp + Q''dq + R''dr + \mathcal{O}c.$; $\delta Z'' = N''\delta y + \frac{P''d.\delta y}{dx} + \frac{Q''dd.\delta y}{dx^2} + \frac{R''d^3\delta y}{dx^3} + \mathcal{O}c.$; $\delta Z'' = H''$, en

supposant $H'' = N''\delta y + \frac{P''d.\delta y}{dx} + \frac{Q''dd.\delta y}{dx^2} + \mathcal{O}c.$; $\delta Z''dx = H''dx$; $S.\delta Z''dx = S.H''dx$; &, par ce que $\Pi' = S.Z''dx$, on aura $\delta\Pi' = \delta S.Z''dx = S.\delta Z''dx = S.H'dx$.

Substituant cette valeur de $\delta\Pi'$ dans l'equation $\delta S.Zdx = S.Ldx.S.L'dx\delta\Pi' + S.L'dx.S.H'dx + S.Hdx$, qu'on a trouvé cy-dessus, on aura la variation cherchée $\delta S.Zdx = S.Ldx.S.L'dx.S.H''dx + S.L'dx.S.H'dx + S.Hdx$.

4^o Maintenant pour delivrer cette formule des signes multipliés d'intégration, supposons d'abord $S.Ldx = V$, ou $Ldx = dV$, & nous aurons $S.Ldx.S.H''dx = S.dV.S.H''dx = VS.H''dx - S.VH''dx$, & $S.Ldx.X$

$S.L'dx.S.H'dx = VS.L'dx.S.H'dx - S.VL'dx.S.H'dx$;
 donc $\delta S.Zdx = VS.L'dx.S.H'dx - S.VL'dx.S.H'dx$
 $+ S.L'dx.S.H'dx + S.Hdx$.

5^o Supposant encore $S.L'dx = V'$, ou $L'dx = dV'$, on aura $S.L'dx.S.H'dx = S.dV'.S.H'dx = V'S.H'dx - S.V'H'dx$, & $VS.L'dx.S.H'dx = VV'.S.H'dx - VS.V'H'dx$; donc $\delta S.Zdx = VV'.S.H'dx - VS.V'H'dx - S.VdV'.S.H'dx + VS.H'dx + S.Hdx$.

6^o Supposant enfin $VdV' = dV''$, ou $S.VdV' = V''$, on aura $S.VdV'.S.H'dx = S.dV''.S.H'dx = V''S.H'dx - S.V''H'dx$; & en substituant cette valeur dans la dernière équation, on aura la variation cherchée $\delta S.Zdx = VV'.S.H'dx - VS.V'H'dx - V''S.H'dx + S.V''H'dx + VS.H'dx + S.Hdx$, ou $\delta S.Zdx = (VV' - V'')S.H'dx - V.S.V'H'dx + S.V''H'dx + VS.H'dx + S.Hdx$. En remettant dans cette formule les valeurs de H'' , H' , & H , on aura

$$\begin{aligned} \delta S.Zdx &= (VV' - V'').S.dx \left(N''\delta y + \frac{P''d.\delta y}{dx} + \frac{Q''dd.\delta y}{dx^2} + \text{Ctc.} \right) \\ &- V.S.V'dx \left(N'\delta y + \frac{P'd.\delta y}{dx} + \frac{Q'dd.\delta y}{dx^2} + \text{Ctc.} \right) \\ &+ S.V''dx \left(N''\delta y + \frac{P''d.\delta y}{dx} + \frac{Q''dd.\delta y}{dx^2} + \text{Ctc.} \right) \\ &+ VS.dx \left(N'\delta y + \frac{P'd.\delta y}{dx} + \frac{Q'dd.\delta y}{dx^2} + \text{Ctc.} \right) \\ &+ S.dx \left(N\delta y + \frac{Pd.\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \text{Ctc.} \right) \end{aligned}$$

DLXXIV.

COROLLAIRE I. Si on veut avoir la variation de la formule intégrale $S.Z d\kappa$ depuis $\kappa=0$, jusqu'à $\kappa=a$, on prendra les intégrales $V=S.Ld\kappa$, $V'=S.L'd\kappa$, & $V''=S.L''d\kappa$, de manière qu'elles s'évanouissent en faisant $\kappa=0$, & qu'en supposant ensuite $\kappa=a$, elles deviennent $V=A$, $V'=A'$, $V''=A''$, & on pourra mettre ces valeurs A , A' , A'' pour V , V' , V'' , dans la formule de la variation que nous avons trouvée, lorsque les lettres V , V' , V'' sont hors du signe d'intégration S .

DLXXV.

COROLLAIRE II. Si on suppose, pour abréger,

$$\begin{aligned} N+(A-V)N'+(AA'-A''-AV'+V'')N'' &= (N); \\ P+(A-V)P'+(AA'-A''-AV'+V'')P'' &= (P); \\ Q+(A-V)Q'+(AA'-A''-AV'+V'')Q'' &= (Q); \\ R+(A-V)R'+(AA'-A''-AV'+V'')R'' &= (R); \\ \text{Etc.} \end{aligned}$$

La variation de la formule $S.Z d\kappa$ jusqu'à $\kappa=a$, fera

$$S.d\kappa \left\{ (N) d\delta y + (P) \frac{d.\delta y}{dx} + (Q) \frac{d d.\delta y}{dx^2} + (R) \frac{d^2 y}{dx^3} + \text{Etc.} \right\}$$

DLXXVI.

COROLLAIRE III. Si on fait les réductions comme dans les Problemes precedents, on trouvera pour la variation cherchée jusqu'à $x = a$

$$\begin{aligned} \delta S. Z d x &= S. d x \delta y \left\{ (N) - \frac{d(P)}{d x} + \frac{d d(Q)}{d x^2} - \frac{d^2(R)}{d x^3} + \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{d x} + \frac{d d(R)}{d x^2} - \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \frac{d \delta y}{d x} \left\{ (Q) - \frac{d(R)}{d x} + \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \frac{d d. \delta y}{d x^2} \left\{ (R) - \mathcal{C}c. \right\} \\ &\mathcal{C}c. \end{aligned}$$

DLXXVII.

COROLLAIRE IV. Puisque $V'' = S. V d V'$, on aura $A V' - V'' = S. (A - V) L' d x$. Car $L' d x = d V'$; par conséquent $S. (A - V) L' d x = S. A d V - S. V d V' = A V' - V''$. C'est pourquoy, si on suppose l'intégrale $S. (A - V) L' d x = X$, en prenant cette intégrale de façon, qu'elle s'évanouïsse lorsque $x = 0$, & qu'elle devienne B , lorsque $x = a$, de sorte qu'on ait $S. L' d x = V'$, & qu'en supposant $x = a$, V devienne A ; qu'on ait aussi $S. (A - V) L' d x = X$, & qu'en supposant $x = a$, X devienne $= B$. Dans ces suppositions les valeurs marquées dans le Corollaire II. deviendront telles qu'on les trouve cy-dessous

$$N + (A - V)N' + (B - X)N'' = (N)$$

$$P + (A - V)P' + (B - X)P'' = (P)$$

$$Q + (A - V)Q' + (B - X)Q'' = (Q)$$

$$R + (A - V)R' + (B - X)R'' = (R);$$

Car il est évident dans les suppositions qu'on vient de faire, que $AA' - A'' = B$, & que $AV' - V'' = X$, & par conséquent que $AA' - A'' - AV' + V'' = B - X$.

DLXXVIII.

LEMME. L'équation différentielle $dZ = Z\pi dx + \tau du$, dans laquelle π & τ sont des quantités quelconques constantes ou variables, a pour intégrale l'équation $Z = e^{\int \pi dx} \times S. e^{-\int \pi dx} \tau du$, e étant le nombre, dont le logarithme est l'unité.

Car cette dernière équation étant divisée par $e^{\int \pi dx}$ devient $Z e^{-\int \pi dx} = S. e^{-\int \pi dx} \tau du$, & en différenciant celle-cy, on a $dZ e^{-\int \pi dx} - Z e^{-\int \pi dx} \pi dx = e^{-\int \pi dx} \tau du$, équation différentielle proposée.

DLXXIX.

PROBLEME VI. Trouver la variation $\delta\varphi = \delta S. Z dx$ de la formule intégrale $\varphi = S. Z dx$, dans laquelle la quantité Z , outre les lettres $x, y, p, q, r, \text{&c.}$ contient l'intégrale même φ .

SOLUTION. Puisque Z est une fonction des quantités $\varphi, x, y, p, q, r, \text{&c.}$, sa différentielle sera $dZ = Ld\varphi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{&c.}$, & sa variation $\delta Z = L\delta\varphi + N\delta y + \frac{Pd.\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^2\delta y}{dx^3} + \text{&c.}$; par conséquent $\delta Z dx = Ldx\delta\varphi + Hdx$, en supposant $H = N\delta y + \frac{Pd.\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^2\delta y}{dx^3} + \text{&c.}$, & $S.\delta Z dx = \delta S.Z dx = \delta\varphi = S.Ldx\delta\varphi + S.Hdx$. Donc en supposant $\delta\varphi = z$, on aura $z = S.Lz dx + S.Hdx$, d'où l'on tire, en différentiant, $dz = Lz dx + Hdx$, & en intégrant (par le Lemme precedent), $z = e^{S.Ldx} \times S.e^{-S.Ldx} Hdx$. Donc, si on suppose $S.Ldx = V$, on aura la variation cherchée $\delta S.Z dx = \delta\varphi = z = e^V S.e^{-V} Hdx = e^V \times S.e^{-V} dx (N\delta y + \frac{Pd.\delta y}{dx} + \frac{Qdd.\delta y}{dx^2} + \text{&c.})$. Si on veut avoir cette variation depuis $x=0$, jusqu'à $x=a$, on cherchera la valeur A de l'intégrale $V = S.Ldx$ dans cette supposition, & ayant fait $e^{A-V} N = (N)$; $e^{A-V} P = (P)$; $e^{A-V} Q = (Q)$; $e^{A-V} R = (R)$; &c.; on trouvera par les réductions faites comme dans les Problemes precedents, la formule suivante

$$\begin{aligned}
 \delta S \cdot Z d\kappa &= S \cdot d\kappa \delta y \left\{ (N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \frac{d^4(S)}{dx^4} - \mathcal{C}c. \right\} \\
 &+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \frac{d^3(S)}{dx^3} + \mathcal{C}c. \right\} \\
 &+ \frac{d \cdot \delta y}{dx} \left\{ (Q) - \frac{d(R)}{dx} + \frac{dd(S)}{dx^2} - \mathcal{C}c. \right\} \\
 &+ \frac{dd \cdot \delta y}{dx^2} \left\{ (R) - \frac{d(S)}{dx} + \mathcal{C}c. \right\} \\
 &+ \frac{d^3 \delta y}{dx^3} \left\{ (S) - \mathcal{C}c. \right\} \\
 &\mathcal{C}c.
 \end{aligned}$$

DLXXX.

COROLLAIRE. Si on a l'équation différentielle $d\phi = Z d\kappa$, & que Z contienne l'intégrale $\phi = S \cdot Z d\kappa$, & de plus les lettres $\kappa, y, p, q, r, \mathcal{C}c.$, on pourra trouver par ce Probleme la variation $\delta\phi = \delta S \cdot Z d\kappa$.

DLXXI.

PROBLEME VII. Trouver la variation $\delta S \cdot Z d\kappa = \delta\phi$ de la formule intégrale $\phi = S \cdot Z d\kappa$, dans laquelle la quantité Z renferme non seulement les lettres $\kappa, y, p, q, r, \mathcal{C}c.$, & l'intégrale même ϕ , mais de plus une autre formule intégrale $\Pi = S \cdot Z' d\kappa$, Z' ne contenant que les quantités $\kappa, y, p, q, r, \mathcal{C}c.$

SOLUTION. Puisque Z est une fonction des quantités $\phi, \Pi, \kappa, y, p, q, r, \mathcal{C}c.$, sa différentielle sera

$$dZ = Kd\phi + Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{Cc.}, \text{ \& la variation } \delta Z = K\delta\phi + L\delta\Pi + N\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \text{Cc.}$$

De même, puisque Z' est une fonction des quantités $x, y, p, q, r, \text{Cc.}$ seulement, on aura $dZ' = M'dx + N'dy + P'dp + Q'dq + R'dr + \text{Cc.}; \delta Z' = N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \text{Cc.} = H'$; & par ce que $\Pi = S.Z'dx$, on aura $\delta\Pi = \delta S.Z'dx = S.\delta Z'dx$; par conséquent $\delta\Pi = S.dx(N'\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \text{Cc.}) = S.H'dx$. Supposons

$$H = N\delta y + \frac{P'd\delta y}{dx} + \frac{Q'dd\delta y}{dx^2} + \frac{R'd^3\delta y}{dx^3} + \text{Cc.}, \delta\phi = z,$$

& $L\delta\Pi + H = u$; & par ce que $\delta\phi = S.\delta Z dx = z$, on aura $\delta Z dx = dz$; $\delta Z = \frac{dz}{dx} = Kz + u$; par

conséquent $dz = zKdx + udx$, d'où l'on tire (par le Lemme precedent) $z = e^{\int Kdx} S.e^{-\int Kdx} u dx = \delta\phi$.

Or $u dx = Ldx\delta\Pi + Hdx = LdxS.H'dx + Hdx$; & en

supposant $S.Kdx = V$, on aura $e^{-\int Kdx} u dx = e^{-V} \times$

$LdxS.H'dx + e^{-V} Hdx$, &, en intégrant de part

& d'autre, $S.e^{-\int Kdx} u dx = S.e^{-V} LdxS.H'dx +$

$S.e^{-V} Hdx$.

Soit $S.e^{-V} L dx = V'$, ou $e^{-V} L dx = dV'$; & on aura $S.e^{-S.K dx} u dx = S.dV' S.H'dx + S.e^{-V} \times H dx = V' S.H'dx - S.V'H'dx + S.e^{-V} H dx$; donc la variation cherchée $\delta \varphi = \delta S.Z dx = z = e^{S.K dx} \times S.e^{-S.K dx} u dx = e^V V' S.H'dx - e^V S.V'H'dx + e^V \times S.e^{-V} H dx$; en remettant dans cette formule les valeurs de H' & de H , on aura

$$\begin{aligned} \delta S.Z dx &= e^V V' . S. dx \left(N' \delta y + \frac{P' d\delta y}{dx} + \frac{Q' d d\delta y}{dx^2} + \frac{R' d d d\delta y}{dx^3} + \text{Cc.} \right) \\ &- e^V S.V' dx \left(N' \delta y + \frac{P' d\delta y}{dx} + \frac{Q' d d\delta y}{dx^2} + \frac{R' d^3 \delta y}{dx^3} + \text{Cc.} \right) \\ &+ e^V S.e^{-V} dx \left(N \delta y + \frac{P d\delta y}{dx} + \frac{Q d d\delta y}{dx^2} + \frac{R d^3 \delta y}{dx^3} + \text{Cc.} \right) \end{aligned}$$

Si on veut avoir cette variation depuis $x = 0$, jusqu'à $x = a$, on cherchera la valeur A de l'intégrale V , & la valeur A' de l'intégrale V' dans cette supposition; ensuite on fera, pour abréger,

$$\begin{aligned} e^{A-V} N + e^A (A' - V') N' &= (N) \\ e^{A-V} P + e^A (A' - V') P' &= (P) \\ e^{A-V} Q + e^A (A' - V') Q' &= (Q) \\ e^{A-V} R + e^A (A' - V') R' &= (R) \\ \text{Cc.} & \end{aligned}$$

Et, en faisant les réductions, comme dans les Problèmes précédents, on aura la variation cherchée, jusqu'à $x = a$

$$\begin{aligned} \delta S. Z dx &= S. dx \delta y \left\{ (N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \frac{d \cdot \delta y}{dx} \left\{ (Q) - \frac{d(R)}{dx} + \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \frac{dd \cdot \delta y}{dx^2} \left\{ (R) - \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \mathcal{C}c. \end{aligned}$$

DLXXXII.

COROLLAIRE. Si on a l'équation différentielle $d\phi = Z dx$, & que Z soit une fonction des quantités $\phi, \Pi, x, y, p, q, r, \mathcal{C}c.$, & $\Pi = Z' dx$, Z ne contenant que les lettres $x, y, p, q, r, \mathcal{C}c.$ On pourra trouver par ce Problème la variation $\delta\phi$.

DLXXXIII.

PROBLÈME VIII. Trouver la variation $\delta S. Z dx = \delta\phi$ de la formule intégrale $S. Z dx = \phi$, dans laquelle la quantité Z renferme, outre les lettres $x, y, p, q, r, \mathcal{C}c.$ la formule intégrale $\Pi = S. Z' dx$, & Z' contient encore, outre les lettres $x, y, p, q, r, \mathcal{C}c.$ la formule intégrale $\Pi = S. Z' dx$. SOLU-

SOLUTION. Puisque Z est une fonction des quantités $\Pi, x, y, p, q, r, \text{C}c.$, sa différentielle sera $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{C}c.$, & sa variation $\delta Z = L\delta\Pi + N\delta y + \frac{P\delta\delta y}{dx} + \frac{Q\delta\delta\delta y}{dx^2} + \frac{R\delta^3\delta y}{dx^3} + \text{C}c. = L\delta\Pi + H$; par conséquent $\delta Z dx = L\delta\Pi dx + Hdx$, & la variation cherchée $\delta\varphi = S.\delta Z dx = S.Ldx\delta\Pi + S.Hdx$.

De même, puisque Z' est encore une fonction de $\Pi, x, y, p, q, r, \text{C}c.$, sa différentielle sera $dZ' = L'd\Pi + M'dx + N'dy + P'dp + Q'dq + R'dr + \text{C}c.$, & sa variation $\delta Z' = L'\delta\Pi + N'\delta y + \frac{P'\delta\delta y}{dx} + \frac{Q'\delta\delta\delta y}{dx^2} + \frac{R'\delta^3\delta y}{dx^3} + \text{C}c. = L'\delta\Pi + H'$; $\delta Z' dx = L'dx\delta\Pi + H'dx$; $\delta\Pi = S.L'dx\delta\Pi + S.H'dx$, parce que $\Pi = S.Z'dx$, & $\delta\Pi = S.\delta Z'dx$. Supposant présentement $\delta\Pi = S.\delta Z'dx = z$, on aura, en différentiant, $\delta Z'dx = dz$, $\delta Z' = \frac{dz}{dx} = L'\delta\Pi + H'$; $dz = L'dx\delta\Pi + H'dx$, ou $dz = zL'dx + H'dx$. Donc, en intégrant comme dans les deux Problèmes précédents, on aura $z = e^{S.Ldx} S.e^{-S.Ldx} H'dx$, ou $\delta\Pi = z = e^V S.e^{-V} H'dx$, en faisant $S.L'dx = V$.

Puis donc qu'on a trouvé cy-dessus $\delta\varphi = S. L d\pi \delta\Pi + S. H d\pi$, on aura $\delta\varphi = S. e^V L d\pi \times S. e^{-V} H' d\pi + S. H d\pi$. Si on suppose $e^V L d\pi = dV'$, ou $S. e^V L d\pi = V'$, on aura la variation cherchée $\delta\varphi = S. dV' S. e^{-V} H' d\pi + S. H d\pi = V' S. e^{-V} H' d\pi + S. V' e^{-V} H' d\pi + S. H d\pi$, en remettant dans cette formule les valeurs de H' & de H , on aura

$$\begin{aligned} \delta\varphi = \delta S. Z d\pi = V' S. e^{-V} d\pi \left(N' \delta y + \frac{P' d\delta y}{dx} + \frac{Q' d d\delta y}{dx^2} + \frac{R' d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ - S. e^{-V} V' d\pi \left(N' \delta y + \frac{P' d\delta y}{dx} + \frac{Q' d d\delta y}{dx^2} + \frac{R' d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ + S. d\pi \left(N \delta y + \frac{P d\delta y}{dx} + \frac{Q d d\delta y}{dx^2} + \frac{R d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

Si on veut avoir cette variation depuis $\pi = 0$, jusqu'à $\pi = a$, on prendra l'intégrale $S. e^V L d\pi = A$; dans cette supposition on fera, pour abréger,

$$N + e^{-V} (A - V') N' = (N);$$

$$P + e^{-V} (A - V') P' = (P);$$

$$Q + e^{-V} (A - V') Q' = (Q);$$

Et en faisant la réduction, comme dans les Problemes precedents, on aura la variation cherchée

$$\begin{aligned} \delta S. Z d x &= S. d x \delta y \left\{ (N) - \frac{d(P)}{d x} + \frac{d d(Q)}{d x^2} - \frac{d^3(R)}{d x^3} + \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{d x} + \frac{d d(R)}{d x^2} - \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \frac{d \delta y}{d x} \left\{ (Q) - \frac{d(R)}{d x} + \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \frac{d d. \delta y}{d x^2} \left\{ (R) - \mathcal{C}c. \right\} \\ &\mathcal{C}c. \end{aligned}$$

DLXXXIV.

COROLLAIRE GENERAL. Donc, quelque formule intégrale $\varphi = S. Z d x$, qu'on propose la variation depuis $x = o$, jusqu'à $x = a$, sera toujours exprimée de la manière suivante

$$\begin{aligned} \delta \varphi &= S. d x \delta y \left\{ (N) - \frac{d(P)}{d x} + \frac{d d(Q)}{d x^2} - \frac{d^3(R)}{d x^3} + \frac{d^4(S)}{d x^4} - \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \delta y \left\{ (P) - \frac{d(Q)}{d x} + \frac{d d(R)}{d x^2} - \frac{d^3(S)}{d x^3} + \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \frac{d \delta y}{d x} \left\{ (Q) - \frac{d(R)}{d x} + \frac{d d(S)}{d x^2} - \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \frac{d d \delta y}{d x^2} \left\{ (R) - \frac{d(S)}{d x} + \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \frac{d^3 \delta y}{d x^3} \left\{ (S) - \mathcal{C}c. \right\} \\ &+ \mathcal{C}c. \end{aligned}$$

En prenant $d\pi$ constante, & en déterminant les valeurs des lettres en parentheses (N), (P), (Q), (R), (S), \mathcal{C} . comme dans les Problemes precedents.

On voit de plus, par tout ce que nous avons dit, qu'on peut toujours trouver par le calcul différentiel la variation d'une quantité composée, comme on voudra des formules intégrales, & des formules abso- lues, ou sans intégrales. Par exemple, si la quantité V , dont on veut trouver la variation, contient les formules intégrales quelconques $\varphi = S.Z d\pi$, $\varphi' = S.Z'd\pi$, $\varphi'' = S.Z''d\pi$, \mathcal{C} . en différentiant à l'ordi- naire, on aura $dV = K d\varphi + K'd\varphi' + K''d\varphi'' + \mathcal{C}$. la variation sera $\delta V = K \delta\varphi + K' \delta\varphi' + K'' \delta\varphi'' + \mathcal{C}$. & on trouvera par les regles precedentes les variations particulieres $\delta\varphi$, $\delta\varphi'$, $\delta\varphi''$, \mathcal{C} . Il est encore evi- dent que la variation δV sera toujours exprimée par la formule suivante $\delta V = S.(A) d\pi \delta y + (B) \delta y + (C) \frac{d\delta y}{dx} + (D) \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \mathcal{C}$. dans laquelle (A), (B), (C), (D), \mathcal{C} . sont des fonctions qu'on pourra trou- ver par les regles, qu'on a établies cy-dessus.

ARTICLE SECOND.

*De l'application du Calcul des Variations
à la solution des Problemes.*

DLXXXV.

Les principaux Problemes, qu'on peut proposer de résoudre par le Calcul des Variations, se reduisent aux deux suivants : le premier, qu'on peut appeller *Direct* est celui-cy : la relation, ou l'équation primitive (E) entre les deux variables x & y étant donnée avec sa variation $\delta(E)$, par laquelle on determine la valeur de δy , variation de y , trouver la variation δV d'une formule V composée, comme on voudra, des deux variables x & y , de leurs dérivées, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$, $s = \frac{dr}{dx}$, &c., & même d'intégrales non développées, qui renferment ces variables, & leurs différentielles de quelque ordre que ce soit. Le second Probleme est l'inverse du premier & peut-être énoncé ainsi : une formule quelconque V composée comme dans le Probleme précédent étant donnée, trouver quelle doit être la relation, ou l'équation principale (E) entre les deux variables x & y , pour que la variation δV de cette formule soit égale à une quantité donnée, ou à zero.

DLXXXVI.

On peut résoudre le Probleme direct par les regles du calcul des variations, que nous avons établies dans l'Article I., car on trouvera par ces regles la variation $\delta V = S. (A) du \delta y + (B) \delta y + (C) \frac{d \cdot \delta y}{dx} + (D) \frac{d d \cdot \delta y}{dx^2} + \text{Œc.}$, & en substituant dans cette formule la valeur de la variation δy trouvée par la relation donnée $\delta (E)$, on aura la variation cherchée δV . Il faut seulement remarquer que les différentielles de tous les ordres $dy, ddy, d^3y, \text{Œc.}$, & leurs puissances quelconques $dy^2, \overline{ddy}^2, \overline{d^3y}^2, \text{Œc.}$, $dy^3, \overline{ddy}^3, \overline{d^3y}^3, \text{Œc.}$ peuvent toujours être exprimées par les lettres $p, q, r, s, \text{Œc.}$, & par les puissances de la différentielle constante du . Car $dy = pdu, ddy = dpdu = qdu^2, d^3y = dqdu^2 = rdu^3, \text{Œc.}$, $dy^2 = p^2du^2, dy^3 = p^3du^3, \text{Œc.}$, $\overline{ddy}^2 = q^2du^4, \text{Œc.}$; cette remarque est souvent nécessaire pour rappeler une formule donnée à l'expression $S. Z du$, dont nous nous sommes servis dans l'Article I.. Supposé, par exemple, qu'on ait la formule $V = S. \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y}}$, & qu'on veuille la

reduire a l'expression $S. Z d x$, on n'aura, pour cela, qu'a écrire $p^2 d x^2$ pour $d y^2$ dans la quantité

$\sqrt{d x^2 + d y^2}$, qui par cette substitution deviendra

$= \sqrt{d x^2 + p^2 d x^2} = d x \sqrt{1 + p p}$; d'où l'on tirera

$$S. \frac{d x \sqrt{1 + p p}}{\sqrt{y}} = S. Z d x, \text{ \& } Z = \frac{\sqrt{1 + p p}}{\sqrt{y}}.$$

DLXXXVII.

Pour refoudre le Probleme inverſe, il faudra d'abord trouver, comme dans le Probleme direct la variation δV exprimée en δy ; ce qu'on pourra toujours faire; enfuite on egalera cette expreſſion de δV a la quantité donnée, ou a zero, & on determinera par cette egalité la relation, ou l'equation cherchée (E) entre les deux variables x & y . C'eſt dans cette partie de la ſolution, que conſiſte toute la difficulté du Probleme inverſe. Nous allons la developper, & établir les principes neceſſaires pour la ſurmonter, en appliquant generalement le Calcul des Variations aux Problemes *de Maximis & Minimis*, qui ont donné occaſion a la decouverte de ce calcul, & de pluſieurs autres belles methodes.

DLXXXVIII.

Si V est une fonction quelconque composée de la seule variable z , & de constantes, & qu'on veuille trouver la valeur, qu'on doit donner à z , pour rendre cette fonction V la plus grande, ou la plus petite possible, on demontre dans les elemens ordinaires de la methode de *Maximis & Minimis*, qu'on n'a qu'à prendre la différentielle dV , ou la variation quelconque infiniment petite δV , faire dV , ou $\delta V = 0$, & déterminer par cette equation la valeur de z ; d'où il suit que, si la formule V est une fonction composée d'autant de variables, qu'on voudra $x, y, u, \text{Ctc.}$, on en trouvera toujours le *Maximum*, ou le *Minimum*, en faisant l'operation que nous venons de dire pour chaque variable en particulier, toutes les autres variables étant regardées comme constantes. Car chacune de ces operations donnera une equation entre les variables & les constantes; on trouvera autant d'equations, qu'il y a de variables dans V , & on en determinera les valeurs par la comparaison des equations.

De même si on propose une fonction V composée de constantes & des deux variables x & y , & qu'on demande la valeur qu'il faut donner à la variable y , pour qu'après la substitution d'une quantité donnée x au lieu de x dans cette fonction V , elle devienne un

Maxi-

Maximum, ou un *Minimum*, on n'aura qu'à d'abord substituer dans V la quantité a pour x ; ce qui rendra V une fonction de la variable y , & de constantes, dont on trouvera le *Maximum*, ou le *Minimum* par l'équation dV , ou $\delta V = 0$, comme dans le premier cas; pourvu néanmoins que V soit une fonction développée de x & de y , dans laquelle on puisse substituer actuellement la constante a pour la variable x .

DLXXXIX.

Mais si dans cette dernière équation la quantité V n'est pas une fonction développée de x , & de y : par exemple, si c'est une intégrale $\int Z dx$, dans laquelle Z est une fonction quelconque de x & de y , la question est d'un autre genre, & a besoin d'une méthode bien différente de la première, pour être résolue. Alors on ne peut pas substituer a dans la différentielle $Z dx$, mais il faudroit d'abord prendre l'intégrale $\int Z dx$, en supposant x & y variables, & substituer ensuite dans cette intégrale la constante a au lieu de x , par ce que la valeur de cette intégrale dépend de la relation entre ces deux variables, & que cette valeur même, après la substitution de a pour x , change, lorsque la relation entre x & y vient à changer. Dans ce cas on peut proposer ainsi le Problème: supposé qu'on doive prendre l'intégrale $\int Z dx$, de manière

qu'elle s'évanouïsse, lorsque $x=0$, & qu'elle ait une valeur quelconque, que nous designerons par H , après qu'on aura substitué la constante a au lieu de x , on demande quelle doit être la relation, ou l'équation entre les deux variables x & y , pour que la quantité H soit un *Maximum* ou un *Minimum*.

DXC.

Pour résoudre ce Probleme, nous supposerons d'abord, comme on a coûtume de faire dans l'analyse, que la relation, ou l'équation, qu'on cherche entre x & y , est déjà trouvée, de sorte que, quelque valeur déterminée qu'on prenne pour x , on ait au moyen de cette equation la valeur déterminée de y , & par conséquent celle de Z fonction de x & de y , & pour rendre la chose plus claire, soit AB (*Fig. 14.*) une ligne droite $=a$, autour de laquelle on suppose decrites deux courbes FNE , GMC , telles qu'ayant mené la ligne NM perpendiculaire a AB au point P , l'abscisse commune AP soit $=x$, l'ordonnée $PN=y$, & l'ordonnée correspondante $PM=Z$. Il est evident qu'ayant pris Pp pour dx , on aura $Z dx = PMM'p$, & $\int Z dx =$ l'aire $AGMP$, qui s'évanouït lorsque $x=0$, & devient $AGMCB$, lorsque $x=a$; par conséquent cette aire $AGMCB$ sera la quantité designée par H , qui doit être un *Maximum*, ou un *Minimum*, & dont

la variation δH sera nulle par le principe general de la methode de *Maximis & Minimis*. Supposons presentement que chaque ordonnée PN , où y reçoive une variation quelconque $Nn = \delta y$, & qu'en consequence l'ordonnée correspondante PM reçoive la variation $Mm = \delta Z$; il est clair que l'aire $Mmm'M' = \delta Z dx$ sera la variation de l'aire $PMM'p$, que l'aire $GgmM$ somme des elements $Mmm'M'$, qu'on exprime par $S. \delta Z dx$ sera la variation de l'aire $AGMP$, & que l'aire $GgmcCMG$ sera la variation de l'aire $AGMCB$ prise depuis la premiere ordonnée AG , jusqu'à la dernière BC , ou depuis $x = 0$, jusqu'à $x = a$. Il faudra donc que cette aire $GgmcC = \delta H$ devienne nulle, quelles que soient les variations δy des ordonnées y . Or ces variations sont arbitraires, & independantes les unes des autres, de sorte qu'il n'est pas necessaire de donner des variations a toutes les ordonnées, & qu'on peut supposer qu'elles sont toutes nulles, excepté celle des ordonnées qui sont sur la ligne infiniment petite Pp ; & alors l'aire $GgmcC$, ou la somme des elements $Mmm'M'$ se reduira a cet element seul, & sera $\delta Z dx = \delta H$. Donc lorsque H sera un *Maximum*, ou un *Minimum*, on aura $\delta Z dx = 0$.

DXCL

Cette reflexion fuffit pour refoudre le Probleme propofé, lorsque la quantité Z dans la formule intégrale $\int Z dx$ est une fonction quelconque des deux variables finies x & y . Car dans ces cas on aura la différentielle $dZ = Mdx + Ndy$; par conséquent la variation $\delta Z = N\delta y$, & l'element $\delta Z dx = Ndx\delta y = 0$, quelque soit la variation δy . Or cette variation δy étant entièrement arbitraire, on ne peut avoir dans tous les cas $Ndx\delta y = 0$, à moins que N ne soit $= 0$. On aura donc $N = 0$ pour toutes les valeurs de x , & on déterminera par cette equation la relation cherchée entre x & y , ou l'equation a la courbe FNE .

EXEMPLE. Soit la formule propofée $\int Z dx = \int dx (bb - nxy + \frac{y^3}{c})$; d'où l'on tire $Z = bb - nxy + \frac{y^3}{c}$, $dZ = Mdx + Ndy = -nydx - nxdy + \frac{3y^2dy}{c}$, & $N = -nx + \frac{3y^2}{c}$. Donc, en faisant $N = 0$, on aura $-nx + \frac{3y^2}{c} = 0$, & $\frac{ncx}{3} = y^2$, equation cherchée a la courbe FNE , qui fera une parabole ordinaire, dont le parametre est $\frac{nc}{3}$, l'axe AB ,

& le sommet en A . Si on suppose $\frac{nc}{3} = f$, ou

$$n = \frac{3f}{c}, \text{ on aura } y = f^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}}; y^3 = f^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}}; Z = bb -$$

$$nxy + \frac{y^3}{c} = bb - \frac{2f^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}}}{c}; Z dx = bb dx - \frac{2f^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} dx}{c}$$

& $S. Z dx = bbx - \frac{4f^{\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{3}}}{5c}$, intégrale qui s'évanouit,

lorsque $x=0$, & qui est un *Maximum*, ou un *Minimum*, quelque constante a qu'on y substitue pour x .

DXCII.

Si la quantité Z dans la formule $S. Z dx$ contient avec les variables x & y leurs différentielles quelconques, ou les rapports de ces différentielles exprimés par les lettres $p, q, r, s, \text{ \& } c.$, de sorte que l'on ait $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{ \& } c.$, on trouvera par le Probl. III. de l'Art. I.

$$\begin{aligned} S. Z dx &= S. dx dy \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{ \& } c. \right) = S. (A) dx dy \\ &+ dy \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \text{ \& } c. \right) \dots\dots = (B) dy \\ &+ \frac{d^2y}{dx^2} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{ \& } c. \right) \dots\dots\dots = (C) \frac{d^2y}{dx^2} \\ &+ \frac{d^3y}{dx^3} \left(R - \text{ \& } c. \right) \dots\dots\dots = (D) \frac{d^3y}{dx^3} \\ &+ \text{ \& } c. \end{aligned}$$

ou $\delta S. Z dx = S.(A) dx \delta y + (B) \delta y + (C) \frac{d\delta y}{dx} + (D) \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \text{C.c.}$ variation qu'il faut prendre depuis le commencement de $x=0$, jusqu'au terme de $x=a$, pour qu'elle devienne égale à δH , variation de l'aire $AGCB = H =$ l'intégrale $S. Z dx$ prise depuis A jusqu'à B , ou depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$. Or pour que cette intégrale soit un *Maximum*, ou un *Minimum* il faut par le principe general de la methode de *Maximis & Minimis*, que la variation δH soit toujours nulle, quelque soient les variations δy , quand bien même on ne feroit varier que l'ordonnée PN , qui répond à l'abscisse $AP=x$ moindre que $AB=a$; & c'est par cette égalité $\delta H=0$, qu'on trouve la relation cherchée entre x & y , où l'équation à la courbe FNE c'est ce que nous allons expliquer.

Il faut d'abord remarquer que la formule $S.(A) dx \delta y + (B) \delta y + (C) \frac{d\delta y}{dx} + (D) \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \text{C.c.}$, qui exprime la variation $\delta S. Z dx$, est composée de deux membres dont le premier $S.(A) dx \delta y$ est sous le signe d'intégration, & l'autre $(B) \delta y + (C) \frac{d\delta y}{dx} + (D) \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \text{C.c.}$ ne contient que des parties *absolues*, ou qui ne sont pas sous le signe $S.$. Il faut remarquer en second lieu que, pour avoir toute la variation δH , on doit

supposer $x = a$ dans la formule entiere $S.(A)dx\delta y + (B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \text{Ctc.}$; ce qu'on peut executer actuellement dans le second membre de cette formule, en y substituant partout la constante donnée a au lieu de x , & après cette substitution δy designera dans ce second membre la variation de la dernière ordonnée $y = BC$, qui repond a l'abscisse $AB = a$; & comme cette variation est tout a fait arbitraire, & qu'elle ne depend point des variations precedentes, il est evident qu'on peut la supposer egale a zero; ce qui fera evanouir tout le second membre, dont tous les termes sont multipliés par $\delta y = 0$, ou par $d\delta y = 0$, ou par $dd\delta y = 0$, Ctc.; il ne restera donc plus que le premier membre $S.(A)dx\delta y$, qu'il faudra egaler a zero, pour avoir toute la variation $\delta H = 0$. Or ce premier membre renferme toutes les variations qu'on attribue a toutes les ordonnées precedentes y , puisqu'il contient la somme de tous les elemens $(A)dx\delta y$, qui naissent de la variation de chaque ordonnée y , dont l'abscisse est x ; de sorte que, si l'on suppose qu'il n'y ait qu'une ordonnée y correspondante a l'abscisse x , qui varie, le premier membre $S.(A)dx\delta y$ se reduira au seul element $(A)dx\delta y$. Mais si on suppose de plus que l'ordonnée suivante y' , qui repond a l'abscisse $x + dx$, recoive une variation quelconque $\delta y'$, & qu'ayant

mis dans la fonction (A) l'abscisse $x+d x$, pour x , cette fonction devienne (A') , on aura le membre intégral $S.(A) d x \delta y = (A) d x \delta y + (A') d x \delta y'$, & de même, si on suppose que les ordonnées y'', y''', \dots , qui repondent aux absciffes $x+2 d x, x+3 d x, \dots$, reçoivent les variations $\delta y'', \delta y''', \dots$, le membre intégral $S.(A) d x \delta y$ equivaudra a la fuite $(A) d x \delta y + (A') d x \delta y' + (A'') d x \delta y'' + (A''') d x \delta y''' + \dots$, qu'on peut concevoir continuée d'un côté jusqu'au commencement de $x=0$, & de l'autre côté, jusqu'au terme de $x=a$. Donc quoique la variation δH soit restrainte au terme de $x=a$, neantmoins elle comprend toutes les variations intermediaires a cause du membre intégral $S.(A) d x \delta y$, & puisque la solution du Probleme exige que le membre intégral soit egale a zero, on aura aussi la fuite $(A) d x \delta y + (A') d x \delta y' + (A'') d x \delta y'' + (A''') d x \delta y''' + \dots = 0$. Or les variations $\delta y, \delta y', \delta y'', \delta y''', \dots$ etant toutes arbitraires, & independantes les unes des autres, cette fuite ne peut être egale a zero, a moins que chacune de ses parties ne s'évanouisse, & qu'on n'ait par consequent toutes les equations particulieres $(A) d x \delta y = 0, (A') d x \delta y' = 0, (A'') d x \delta y'' = 0, \dots$, lesquelles sont toutes renfermées dans la seule equation indefinie $(A) d x \delta y = 0$, de sorte que, quelque valeur qu'on donne a l'absciffé x , & a la variation

riation δy de l'ordonnée y , qui répond a cette abscisse, il faut toujours qu'on ait l'équation $(A)'d\kappa\delta y=0$; ce qui ne peut être a moins que la fonction (A) ne soit $=0$, ce fera donc par cette equation $(A)=0$, qu'on trouvera la relation cherchée. entre κ & y , ou l'équation a la courbe FNE . Dans le cas proposé on a la fonction $(A)=N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\mathcal{C}c$.
 Donc dans ce même cas pour trouver la relation entre κ & y , qui rendra l'intégrale $H=S.Zd\kappa$ un *Maximum*, ou un *Minimum*, il faudra faire $N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\mathcal{C}c=0$, & résoudre cette equation.

DXCIII.

EXEMPLE. Soit la formule proposée $S.Zd\kappa=S.\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$. En faisant $p=\frac{dy}{dx}$, ou $p d\kappa=dy$, on aura $\sqrt{dx^2+dy^2}=d\kappa\sqrt{1+pp}$, & $Z=\frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}$.
 Donc $dZ=Md\kappa+Ndy+Pdp=\frac{-dy\sqrt{1+pp}}{2y\sqrt{y}}+\frac{pdp}{\sqrt{y(1+pp)}}$; d'où l'on tire $M=0$, $N=-\frac{\sqrt{1+pp}}{2y\sqrt{y}}$, & $P=\frac{p}{\sqrt{y(1+pp)}}$; $Q=0$, $R=0$, $\mathcal{C}c$. Il faut

donc d'abord faire $N - \frac{dP}{dx} = 0$ pour avoir la relation cherchée entre x , & y , où l'équation a la courbe FNE , qui fera une équation différentielle du second ordre, qu'il faudra intégrer deux fois successivement pour la réduire à une équation finie entre x & y . La première intégration se fera aisément de cette manière, puisque $N - \frac{dP}{dx} = 0$, on aura $Ndx = dP$; $Npdx = pdP$, & $Ndy = pdP$, à cause de $pdx = dy$. Or puisque $M = 0$, & que $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$, on aura $dZ = Ndy + Pdp = pdP + Pdp$, & en intégrant, $Z = Pp + C$ quantité constante. Donc puisque $Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}}$, & que $P = \frac{p}{\sqrt{y(1+pp)}}$, on aura $\frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} = \frac{pp}{\sqrt{y(1+pp)}} + C$, & $C = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{y}} - \frac{pp}{\sqrt{y(1+pp)}} = \frac{1}{\sqrt{y(1+pp)}}$, & en supposant $C = \frac{1}{\sqrt{b}}$, on aura $\frac{1}{b} = \frac{1}{y(1+pp)}$; $y(1+pp) = b$; $pp = \frac{b-y}{y} = \frac{by-yy}{yy}$, $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{by-yy}}{y}$, & $dx = \frac{ydy}{\sqrt{by-yy}}$, équation différentielle du premier ordre, qui renferme une constante arbitraire b .

Pour intégrer encore cette equation, on remar-

quera que la différentielle $\frac{y dy}{\sqrt{by-yy}} = \frac{\frac{1}{2} b dy}{\sqrt{by-yy}}$

$d.\sqrt{by-yy}$, & que $\frac{\frac{1}{2} b dy}{\sqrt{by-yy}}$ est la différentielle

d'un arc de cercle, dont le rayon est $\frac{1}{2} b$, & le sinus

$\sqrt{by-yy}$; de sorte que, si on designe cet arc par α ,

on aura l'intégrale $x = \alpha - \sqrt{by-yy} + c$ constante ar-

bitraire. On peut, si l'on veut, reduire l'arc α a celui

d'un cercle, dont le rayon est l'unité; car si l'on

prend dans ce cercle l'arc β semblable a l'arc α , on

aura $\alpha = \frac{1}{2} b \beta$, & l'equation deviendra $x = \frac{1}{2} b \beta -$

$\sqrt{by-yy} + c$, qui renferme deux constantes b & c

introduites par les deux intégrations qu'on a faites.

On voit par là que cette equation, qui fait que la

formule proposée $S. \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$, devient un *Maximum*,

ou un *Minimum*, n'est point entierement determinée,

puisqu'elle renferme deux constantes arbitraires. On

peut donc ajouter au Probleme proposé deux nouvelles

conditions, qu'on remplira au moyen de ces deux con-

stantes .

Par exemple, si on veut que x étant $= a$, P soit $= 0$, puisque $P = \frac{p}{\sqrt{y(1+pp)}}$, en supposant $P = 0$, on aura $p = 0$; & par ce qu'on a trouvé $p = \frac{\sqrt{by-yy}}{y}$, on aura $\sqrt{by-yy} = 0$, & $b = y$, par conséquent l'arc α fera la demie-circonférence du cercle, dont le diamètre est b , & l'arc β semblable à l'arc α fera aussi la demie-circonférence du cercle, dont le rayon est 1. Donc l'équation $x = \frac{1}{2} b\beta - \sqrt{by-yy} + c$, en y substituant a pour x , & zero pour $\sqrt{by-yy}$ deviendra $a = \frac{1}{2} b\beta + c$, & la constante $c = a - \frac{1}{2} b\beta$, β étant la demie-circonférence du cercle, dont le rayon est 1; par conséquent on aura $x = \frac{1}{2} b\beta - \sqrt{by-yy} + a - \frac{1}{2} b\beta$. Si on veut de plus que, x étant $= 0$, y soit aussi $= 0$, cette équation deviendra $0 = 0 - 0 + a - \frac{1}{2} b\beta$, & $b = \frac{2a}{\beta}$; substituant cette valeur de b dans l'équation $x = \frac{1}{2} b\beta - \sqrt{by-yy} + a - \frac{1}{2} b\beta$, on aura $x = \frac{a\beta}{\beta} - \sqrt{\frac{2a}{\beta}y-yy}$.

DXCIV.

Si la quantité Z dans la formule proposée $S.Z d\kappa$ contient les variables $\kappa, \gamma, p, q, r, \text{ \&c.}$, & des intégrales non développées qui renferment les différentielles de ces variables, on trouvera la variation $\delta S.Z d\kappa$ prise depuis $\kappa=0$, jusqu'à $\kappa=a$, ou $\delta H=S.(A) \times d\kappa \delta \gamma + (B) \delta \gamma + (C) \frac{d\delta \gamma}{d\kappa} + (D) \frac{d d \delta \gamma}{d\kappa^2} + \text{ \&c.}$; & pour que l'intégrale H , où l'intégrale $S.Z d\kappa$ prise depuis $\kappa=0$, jusqu'à $\kappa=a$ devienne un *Maximum*, ou un *Minimum*, il faudra prendre la fonction (A) , qui se trouve dans le membre intégral $S.(A) d\kappa \delta \gamma$, & l'égalier a zero; cette equation $(A)=0$ donnera la relation entre κ & γ , qui rendra la formule H un *Maximum*, ou un *Minimum*; comme il est évident par ce qui a été établi cy-dessus. L'autre membre absolu $(B) \delta \gamma + (C) \frac{d\delta \gamma}{d\kappa} + (D) \frac{d d \delta \gamma}{d\kappa^2} + \text{ \&c.}$ n'appartenant qu'à la valeur des dernières ordonnées γ , qui repondent a l'abscisse κ , lorsqu'elle devient $=a$, ne fert de rien pour trouver cette relation indefinite entre les deux variables κ & γ , qu'on trouve par l'equation $(A)=0$.

DXCV.

Lorsque dans la formule proposée $S.Z d\kappa=H$, la quantité Z contient les lettres $p, q, r, s, \text{ \&c.}$, ou

quelqu'autre intégrale, comme dans les Articles precedents, l'équation $(A) = 0$, qui fait que H devient un *Maximum*, ou un *Minimum* est différentielle du premier ordre, ou d'un ordre supérieur, qu'on réduit à une équation finie par une, ou plusieurs intégrations successives, dont chacune introduit une constante arbitraire dans l'équation intégrée. On pourra substituer dans cette équation autant de différentes valeurs déterminées qu'on voudra, pour chaque constante arbitraire, & trouver par là une infinité de valeurs de H , qui feront toutes des *Masima*, ou des *Minima*. On demande presentement, comment il faut déterminer ces constantes arbitraires, pour trouver les plus grand de tous ces *Masima*, ou le plus petit de tous ces *Minima*?

DXCVI.

Pour résoudre ce nouveau Probleme, on pourra se servir du membre absolu $(B) \delta y + (C) \frac{d \delta y}{d x} + (D) \times \frac{d d \delta y}{d x^2} + \mathcal{C}c$, & déterminer les constantes arbitraires en faisant $(B) = 0$, $(C) = 0$, $(D) = 0$ dans les deux suppositions de $x = a$, & de $x = 0$. Car puisque toute la variation $\delta H = S. (A) d x \delta y + (B) \delta y + (C) \frac{d \delta y}{d x} + (D) \frac{d d \delta y}{d x^2} + \mathcal{C}c$. doit être nulle dans les deux suppo-

fitions de $x=a$, & de $x=0$, pour que H soit un *Maximum*, ou un *Minimum*, & qu'ayant déjà fait le membre intégral $S.(A)dxdy=0$ par l'équation $(A)=0$, sans toucher au membre absolu $(B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + Cc.$, nous avons trouvé par là la relation entre x & y , qui rend déjà H un *Maximum* ou un *Minimum*, on n'aura qu'à supposer de plus que le membre absolu devient nul dans les deux mêmes suppositions de $x=a$, & de $x=0$, pour avoir le plus grand des *Maxima*, ou le plus petit des *Minima*. Mais cette nullité de tout le membre absolu, où l'équation $(B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{d^2\delta y}{dx^2} + Cc.=0$, ne peut avoir lieu généralement à cause de la variation arbitraire δy , à moins que les coefficients (B) , (C) , (D) , $Cc.$ ne deviennent chacun en particulier $=0$ dans les mêmes suppositions de $x=a$, & de $x=0$. Donc &c.

DXCVII.

Nous avons supposé dans tout ce Chapitre, que la formule quelconque V , dont on cherchoit la variation δV ne dependoit que des deux variables x , & y , & de plus que la variation δx de x étoit nulle. Or il n'est pas difficile de rendre ce calcul des variations entièrement general par les principes suivans, que nous avons déjà établis. 1^o Que, V étant tout ce qu'on

voudra, la variation de l'intégrale $S.V$, ou $\delta S.V = S.\delta V$. 2^o Que, la variation de la variable quelconque V étant δV , la variation de sa différentielle dV , ou $\delta dV = d\delta V$, $\delta ddV = dd\delta V$, $\delta d^3V = d^3\delta V$. 3^o Que l'intégrale $S.\pi d\tau = \pi\tau - S.\tau d\pi$, par conséquent que $S.P d\delta y = P\delta y - S.\delta y dP$, &c. 4^o Que L , & u étant des quantités quelconques, l'intégrale de l'équation différentielle $dz = Lzdx + du$ est $z = e^{S.Ldx} S.e^{-S.Ldx} du$. 5^o Que, pour trouver la variation δV de la formule V composée, comme on voudra, des variables x, y, u, z , &c., dont chacune ait sa variation, on n'a qu'à prendre la différentielle $dV = Mdx + Ndy + Pdu + Qdz + \text{&c.}$, & substituer dans cette formule les variations au lieu des différentielles, pour avoir $\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta u + Q\delta z + \text{&c.}$, & si on vouloit que quelques unes de ces changeantes: par exemple, u & z n'eussent point de variations, on n'auroit qu'à effacer dans la différentielle les termes $P\delta u$, & $Q\delta z$, où se trouvent les variations nulles δu , & δz . 6^o Enfin on pourroit désigner par les lettres p, q, r, s , &c., p', q', r', s' , &c., p'', q'', r'', s'' , &c. les différentielles dx, ddx, d^3x , &c., dy, ddy, d^3y , &c., du, ddu, d^3u , &c., en supposant $dx = p, dp = ddx = q, dq = d^3x = r$, &c., $dy = p', dp' = ddy = q', dq' = d^3y = r'$, &c.

DXCVIII.

Etant proposée une formule intégrale indéfinie représentée par $S.V$, dans laquelle V désigne une fonction quelconque déterminée des variables x, y, z , & de leurs différences $dx, dy, dz, ddx, ddy, ddz, \text{Cc.}$, on trouvera aisément par les méthodes précédentes la relation que ces variables doivent avoir entr'elles, pour que la formule $S.V$ devienne un *Maximum*, ou un *Minimum*. Il faudra, suivant la méthode de *Maximis & Minimis*, différentier la proposée $S.V$ en regardant les variables $x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy, ddz$ comme variables, & faire la différentielle qui en résulte $= 0$. Or en désignant ces variations par δ , nous aurons par les principes établis $\delta S.V = 0$, ou $S.\delta V = 0$. Maintenant soit V tel que $\delta V = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x + \text{Cc.} + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + R\delta d^3y + \text{Cc.} + v\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z + \rho\delta d^3z + \text{Cc.}$, nous aurons l'équation $S.n\delta x + S.p\delta dx + S.q\delta d^2x + S.r\delta d^3x + \text{Cc.} + S.N\delta y + S.P\delta dy + S.Q\delta d^2y + S.R\delta d^3y + \text{Cc.} + S.v\delta z + S.\pi\delta dz + S.\chi\delta d^2z + S.\rho\delta d^3z + \text{Cc.} = 0$. Mais $\delta dx = d\delta x, \delta d^2x = d^2\delta x$, & ainsi de suite: donc

V v v

en intégrant par parties, comme nous avons fait précédemment, on aura $S. p d \delta x = p \delta x - S. d p \delta x$; $S. q d^2 \delta x = q d \delta x - d q \delta x + S. d^2 q \delta x$; $S. r d^3 \delta x = r d^2 \delta x - d r d \delta x + d^2 r \delta x - S. d^3 r \delta x$, & ainsi des autres, & l'équation précédente se changera en celle-cy (A):

$$\begin{aligned}
 S. (n - d p + d^2 q - d^3 r + \mathcal{C}c.) \delta x + S. (N - d P + \\
 d^2 Q - d^3 R + \mathcal{C}c.) \delta y + S. (v - d \pi + d^2 \chi - \\
 d^3 \rho + \mathcal{C}c.) \delta z + (p - d q + d^2 r - \mathcal{C}c.) \delta x + \\
 (q - d r + \mathcal{C}c.) d \delta x + (r - \mathcal{C}c.) d^2 \delta x + (P - \\
 d Q + d^2 R - \mathcal{C}c.) \delta y + (Q - d R + \mathcal{C}c.) d \delta y \\
 + (R - \mathcal{C}c.) d^2 \delta y + (\pi - d \chi + d^2 \rho - \mathcal{C}c.) \delta z \\
 + (\chi - d \rho + \mathcal{C}c.) d \delta z + (\rho - \mathcal{C}c.) d^2 \delta z + \\
 \mathcal{C}c. = 0.
 \end{aligned}$$

On en tirera premièrement l'équation (B):

$$\begin{aligned}
 (n - d p + d^2 q - d^3 r + \mathcal{C}c.) \delta x + (N - d P + d^2 Q \\
 - d^3 R + \mathcal{C}c.) \delta y + (v - d \pi + d^2 \chi - d^3 \rho + \\
 \mathcal{C}c.) = 0.
 \end{aligned}$$

Et ensuite l'équation (C):

$$\begin{aligned}
 & (p - dq + d^2r - \mathcal{C}c.) \delta x + (q - dr + \mathcal{C}c.) d\delta x + \\
 & (r - \mathcal{C}c.) d^2\delta x + \mathcal{C}c. + (P - dQ + d^2R - \\
 & \mathcal{C}c.) \delta y + (Q - dR + \mathcal{C}c.) d\delta y + (R - \mathcal{C}c.) \times \\
 & d^2\delta y + \mathcal{C}c. + (\pi - d\chi + d^2\rho) \delta z + (\chi - d\rho + \\
 & \mathcal{C}c.) d\delta z + (\rho - \mathcal{C}c.) d^2\delta z + \mathcal{C}c. = 0.
 \end{aligned}$$

Il faut bien distinguer ces deux equations (B) & (C), comme nous avons expliqué, & de plus il faut se rappeler que dans la dernière equation, chacun de ses termes comme $p\delta x$ dépend d'une intégration partielle de la formule $S.p d\delta x$, & que par conséquent on peut lui ajouter, ou en retrancher une quantité constante. Or la condition par laquelle on doit déterminer cette constante, est qu'elle fasse évanouir le terme $p\delta x$ au point où commence l'intégrale $S.p d\delta x$. Il faudra donc retrancher de $p\delta x$ sa valeur en ce point. Soit donc le premier membre de l'équation (C) exprimé généralement par Z , & soit la valeur de Z ; où commence l'intégrale $S.V$, exprimée par Z' , il est clair que $Z - Z' = 0$ fera l'expression complète de l'équation (C). Enfin pour se délivrer dans les equations trouvées des différences indéterminées δx , δy , δz , $d\delta x$, $d\delta y$, $\mathcal{C}c.$ on observera par la nature du problème, si elles ont entr'elles quelque rapport donné, on les réduira au moindre nombre, & on fera ensuite

egal a zero le coefficient de chacune de celles qui restent . Mais, si elles sont independantes les unes des autres, l'equation (B) fournira tout d'un coup les trois suivantes

$$n - d p + d^2 q - d^3 r + \mathcal{C}c. = 0$$

$$N - d P + d^2 Q - d^3 R + \mathcal{C}c. = 0$$

$$v - d \pi + d^2 \chi - d^3 \rho + \mathcal{C}c. = 0.$$

DXCIX.

EXEMPLE. Nous avons deja rapporté (Article DXCIII.) un Exemple, qui renferme le Probleme, que les Geometres appellent *de la Brachistochrone*, ou de la plus vite descente. Soit maintenant ce Probleme exprimé plus generalement par la formule $S. \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$

dans laquelle x represente l'abscisse verticale, & y, z designent les deux ordonnées horisontales, & perpendiculaires l'une a l'autre, la formule proposée fera l'expression du tems, comme on sçait par la Mecanique. Cette expression etant comparée a $S. V$, on a $V =$

$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$, & en différentiant par δ , suivant la

methode de l'Article premier, nous aurons $\delta V =$

$$-\frac{\delta x \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{2x \sqrt{x}} + \frac{dx \delta dx}{\sqrt{x} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} +$$

$$\frac{dy \delta dy}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} + \frac{dz \delta dz}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}; \text{ d'où l'on}$$

tire, en substituant, pour abregé, ds a la place de $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, $n = -\frac{ds}{2x\sqrt{x}}$, $p = \frac{dx}{ds\sqrt{x}}$,

$$P = \frac{dy}{ds\sqrt{x}}; \pi = \frac{dz}{ds\sqrt{x}}, \text{ \& } q, r, N, Q, Cc. = 0,$$

comme on voit en comparant avec la formule generale (Art. DXCVIII.). Cet Exemple renferme plusieurs cas; mais nous ne ferons que les indiquer, parce qu'ils appartiennent a des Problemes de Mecanique, qui n'entrent point dans l'objet de cet Ouvrage.

1.º Si on demande de trouver en general entre toutes les courbes possibles celle de la plus vite descente, on aura dans ce cas $n - dp = 0$, $-dP = 0$, $-d\pi = 0$, c'est a dire, $-\frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$, $-d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$, $-d \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$. Or puisque ces trois equations doivent représenter une même courbe, il faut qu'elles se reduisent a deux seulement. Multiplions la seconde par $2 \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}}$, & l'ajoutant a la troisieme multipliée par $2 \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}}$, on aura $d\left(\frac{1}{x} - \frac{dx^2}{ds^2 \cdot x}\right) = 0$, en substituant ds^2 au lieu de $dx^2 + dy^2 + dz^2$,

&, en différentiant, & divisant par $\frac{z dx}{ds \sqrt{x}}$, on a la première equation $-\frac{ds}{2x \sqrt{x}} - d \cdot \frac{dx}{ds \sqrt{x}} = 0$. Il ne s'agit donc que d'intégrer les deux equations $d \cdot \frac{dy}{ds \sqrt{x}} = 0$, & $d \cdot \frac{dz}{ds \sqrt{x}} = 0$. La première donne $\frac{dy}{ds \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ & la seconde $\frac{dz}{ds \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$, dans lesquelles $\frac{1}{\sqrt{a}}$ & $\frac{1}{\sqrt{b}}$ sont des quantités constantes, d'où l'on tire $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, laquelle equation fait connoître que la courbe est dans un même plan, & par conséquent a simple courbure.

Pour déterminer la nature de cette courbe, nous la rapporterons a deux coordonnées, dont l'une soit x , & l'autre t , on aura $\sqrt{y^2 + z^2} = t$. Mais $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; donc en intégrant $z = \frac{y \sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, d'où l'on tire $z = \frac{t \sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$; $y = \frac{t \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$; $dy = \frac{dt \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$; $ds = \sqrt{dx^2 + dt^2}$, & enfin $\frac{dy}{ds \sqrt{x}} = \frac{dt \sqrt{b}}{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{dx^2 + dt^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, qu'on réduira a $dt = \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{c-x}}$, en faisant $c = \frac{ab}{a+b}$, qui ne dif-

fère de l'exemple premier que par les denominations; car en multipliant le numerateur, & le denominateur par \sqrt{x} , on aura $\frac{x dx}{\sqrt{cx - x^2}} = dt$, la même equation, que dans le premier exemple, qui est l'equation a une cycloide décrite sur une base horifontale par un cercle, dont le diametre $= c$.

2^o Si on vouloit limiter l'equation de telle sorte, que le premier & le dernier point de la *Brachistochrone* fussent donnés, il est evident que les coordonnées x, y, z n'auroient point de variations par rapport a ces points, & que $\delta x, \delta y, \delta z, d\delta x, d\delta y$, & par consequent aussi tous les termes de l'equation (C) seroient $= 0$. Il s'agit donc de determiner la constante c , de telle maniere que la cycloide passe par les deux points donnés. Si le premier point est donné, & qu'un corps partant de ce point doive arriver dans le moindre tems a un plan horifontal donné, il est clair que Z fera nul, & que l'equation (C) donnera $Z' = 0$, c'est a dire, $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} \delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{x}} \delta y + \frac{dz}{ds\sqrt{x}} \delta z = 0$, equation qui n'aura lieu que dans le point où la *Brachistochrone* rencontre le plan.

Or, puisque ce plan est supposé donné de position, l'abscisse x qui y repond sera donnée; ce qui rendra sa variation, $\delta x = 0$, mais le reste de l'equation devra être réel, quelles que soyent δy & δz , on aura donc

$\frac{dy}{ds\sqrt{x}}=0$, & $\frac{dz}{ds\sqrt{x}}=0$, d'où l'on tire $a=\infty$, &

$b=\infty$, à cause de $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$, & $\frac{dz}{ds\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{b}}$; &

la cycloïde se transformeroit alors en une droite verticale.

Mais si le plan donné, au lieu d'être horizontal étoit vertical, & perpendiculaire à l'axe des y , ou des z , on auroit alors, par le même principe, $\delta y=0$, ou $\delta z=0$, & par conséquent $\frac{dx}{ds\sqrt{x}}=0$, $\frac{dz}{ds\sqrt{x}}=0$ dans le premier cas, & $\frac{dx}{ds\sqrt{x}}=0$, $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}=0$ dans le second, d'où l'on tire $\frac{dz}{dx}=0$, & $\frac{dy}{dx}=0$, ce qui fait voir que la tangente de la courbe en ce point est parallèle à l'axe des abscisses, & par conséquent perpendiculaire au plan donné. Ainsi la cycloïde devrait être telle, qu'elle rencontrât le plan donné à angles droits.

Si au lieu d'un plan on supposoit que la *Brachistochrone* dût être terminée par une surface quelconque, il est évident que les variations δx , δy , δz de l'équation (C) dépendroit de la nature de la surface courbe. Soit l'équation différentielle de la surface $dz=Pdx+Qdy$, ou $\delta z=P\delta x+Q\delta y$, substituant cette valeur de δz dans l'équation (C), on aura $\left(\frac{dx}{ds\sqrt{x}}+ \right.$

$$\left(\frac{P dz}{ds \sqrt{x}} \right) \delta x + \left(\frac{dy}{ds \sqrt{x}} + \frac{Q dz}{ds \sqrt{x}} \right) \delta y = 0, \text{ d'où l'on tire}$$

$$\delta x + P dz = 0, \text{ \& } \delta y + Q dz = 0, \text{ ce qui donne } \frac{\delta x}{\delta y} =$$

$\frac{P}{Q}$. Lesquelles equations font connoître que la *Brachy-*

stochrone rencontre encore la surface donnée a angles droits. Si la courbe devoit être terminée par deux surfaces données de position, il faudroit alors dans l'equation (C) faire $Z = 0$, & $Z' = 0$, & en operant comme cy-dessus, on trouveroit pour le premier & le dernier point de la courbe la même propriété, c'est a dire, que la courbe cherchée fera celle, qui entre toutes les cycloides possibles rencontrera les surfaces données a angles droits; on pourroit demontrer cette condition generale de la *Brachystochrone* par la simple Geométrie, mais ce n'est pas icy le lieu.

3^o Si la courbe devoit être toute couchée sur la surface donnée, dont l'equation différentielle soit $dz = P dx + Q dy$, on changera la caractéristique d en δ , pour avoir $\delta z = P \delta x + Q \delta y$, equation qui donne en general le rapport entre δz , δx , δy . Substituant ensuite cette valeur de δz dans l'equation (B), & faisant les deux coefficients de δx , & de δy , chacun

$$= 0, \text{ on aura } -P.d.\frac{dz}{ds\sqrt{x}} - \frac{ds}{zx\sqrt{x}} - d.\frac{dx}{ds\sqrt{x}}$$

X x x

$= 0$; $-Q \cdot d \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$. Ces equations reviennent au même, étant combinées avec l'équation a la surface $dz = P dx + Q dy$. Ce dont il est aisé de s'assurer en multipliant la premiere par $\frac{2 dx}{ds\sqrt{x}}$, & la seconde par $\frac{2 dy}{ds\sqrt{x}}$; & les ajoutant, on aura, en reduisant, $-d \cdot \frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2} = 0$.

On comparera donc une de ces equations a volonté avec l'équation a la surface, pour avoir la *Brachyſtochrone* cherchée. Si le premier, & le dernier point de la courbe étoient donnés, tous les termes de l'équation (C) s'évanouiroient, comme nous avons déjà démontré. Mais si l'un de ces points étoit arbitraire, il faudroit substituer au lieu de δz sa valeur $P \delta x + Q \delta y$, pour avoir les equations $P \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$, & $Q \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$, qu'on traiteroit comme les precedentes. Enfin si l'on ajoutoit cette condition, que le mobile dût arriver dans le tems le plus court, a une courbe tracée sur la surface, supposant la courbe donnée par l'équation $dy = m dx$, on auroit $\delta y = m \delta x$, laquelle valeur de δy étant substituée dans l'équation (C), on fera $P \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}$

+ $\left(Q \frac{dz}{ds \sqrt{x}} + \frac{dy}{ds \sqrt{x}} \right) m = 0$, ou bien $(P + Qm) dz + dx + m dy = 0$, equation qui renferme les conditions pour que la *Brachystochrone* rencontre la courbe donnée.

DC.

REMARQUE. Les exemples precedents font connoître l'utilité de la methode des variations, dans la solution generale du fameux probleme des *Isoperimetres*. Nous avons ômis les details geometriques, dont ces exemples font susceptibles, & qui n'entrent point dans le plan de ce Traité. Il ne sera pas hors de propos de faire entrevoir comme de loin l'avantage de cette methode pour résoudre les Problemes les plus difficiles.

Il est démontré par le sçavant M.^r Euler, que dans les trajectoires, décrites par un nombre de corps quelconque, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'element de la courbe est toujours un *Maximum*, ou un *Minimum*, c'est a dire, soient generalement tant de copps, qu'on voudra, *M, M', M'', &c.*, qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque, & qui soient, si l'on veut, animés par des forces centrales en raison des fonctions quelconques des distances; si *s, s', s'', &c.* denotent les espaces parcourus par ces corps dans le tems *t*, & *v, v', v'', &c.* les vitesses a la fin de

ce tems, la formule $MS.vds + M'S.v'ds' + M''S.v''ds'' + \mathcal{C}c.$ fera toujours un *maximum* ou un *minimum*. On voit que ce Probleme est renfermé generalement dans ce que nous avons dit (Art. DXCVII.). Une explication plus ample de cette belle methode nous meneroit trop loin, surtout, si nous voulions l'appliquer a des Problemes de Mecanique, qui nous éloigneroient de l'objet que nous nous sommes proposé, de ne traiter que du Calcul.



C H A P I T R E X.

*Contenant les principes des plus nouvelles
methodes du Calcul Intégral.*

DCI.

ON sçait que le Calcul Intégral se reduit a la solution de ce Probleme: une fonction, ou une equation différentielle quelconque etant proposée, trouver si elle a les conditions, qui doivent avoir lieu, pour qu'elle ait une intégrale, &, lorsqu'elle a ces conditions, trouver son intégrale. On sçait encore, que, si on pouvoit intégrer toutes les equations différentielles, on pourroit aussi intégrer toutes les fonctions différentielles, qui ont les conditions necessaires pour être intégrables. Car on peut toujours egaler la fonction différentielle proposée a la différence du même ordre d'une nouvelle variable, & reduire par là cette fonction a une equation différentielle du même ordre, qui sera intégrable, lorsque la fonction pourra être intégrée. Supposé, par exemple, que la fonction différentielle $Adx + Bdy + Cc.$ soit intégrable, on pourra l'egaler a la différence du même ordre du d'une nouvelle variable u , & faire $Adx + Bdy + Cc. = du$: equation, qui

sera intégrable, lorsque la fonction $A dx + B dy + C$ pourra être intégrée, puisqu'on aura l'intégrale $S.(A dx + B dy + C) = u + C$ constante; par conséquent l'intégrale u de la fonction proposée $= S.(A dx + B dy) - C$. Lors donc qu'on aura trouvé quelque methode generale, pour intégrer toutes les equations différentielles qui ne sont pas absurdes, on pourra aussi intégrer par la même methode toutes les fonctions différentielles qui seront intégrables, & le Probleme general du Calcul Intégral sera resolu.

DCII.

Deux sçavants Auteurs M.^r Fontaine, & M.^r de Condorcet ont entrepris de resoudre ce Probleme dans toute son etendue. Nous ne pretendons point expliquer icy des Ouvrages aussi sublimes & aussi difficiles, jusqu'à les mettre a la portée du commun des Algebristes. Nous nous contenterons de developper les principes fondamentaux, dont se servent ces grands Calculateurs, & de preparer nos Lecteurs a l'intelligence des methodes generales qu'ils ont données. Nous commencerons par la maniere de différentier les fonctions indeterminées; elle est comme la clef des nouvelles decouvertes, surtout dans la partie du calcul intégral, qui a pour objet les equations de condition.

DCIII.

Supposons que V soit une fonction de plusieurs variables $x, y, z, u, \text{ \& } c.$, & qu'on prenne la différence de cette fonction, en ne faisant varier que x , & qu'on ait $dV = Mdx$, qu'on prenne la différence dV en ne faisant varier que y , & qu'on ait $dV = Ndy$, qu'on prenne dV en ne faisant varier que z , & qu'on ait $dV = Pdz$, & ainsi de suite; on sçait par les premiers principes du calcul différentiel que la différence de la fonction V , en faisant tout varier, sera $dV = Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \text{ \& } c.$

Or suivant la maniere de M.^r Fontaine, pour designer le coefficient M de dx dans la différence de V prise en ne faisant varier que x , on écrit $\frac{dV}{dx}$, de sorte que cette expression signifie la différence dV prise en ne faisant varier que x , & divisée par dx , & que $\frac{dV}{dx} dx$ signifie la même chose que Mdx , c'est à dire, la différence même de la fonction V prise en ne faisant varier que x . Cette expression $\frac{dV}{dx}$ est donc bien différente de celle-cy $\frac{1}{dx} dV$. La première signifie la différence dV prise en ne faisant varier que x , & divisée par dx ; la seconde signifie la différence dV prise en faisant tout varier, & divisée par dx . De même pour designer le coefficient N de dy dans

la différence dV prise en ne faisant varier que y , on écrit $\frac{dV}{dy}$, de sorte que cette expression signifie la différence dV prise en ne faisant varier que y , & divisée par dy , & que $\frac{dV}{dy} dy = Ndy$.

Par la même raison pour désigner le coefficient de dx dans la différence de $\frac{dV}{dx}$, ou dans la différence dM du coefficient M prise en ne faisant varier que x , on écrit $\frac{ddV}{dx^2}$, de sorte que cette expression signifie la différence de $\frac{dV}{dx}$ prise en ne faisant varier que x , & divisée par dx , & que $\frac{ddV}{dx^2} dx$ exprime cette différence même. Pour désigner la différence de $\frac{dV}{dx}$ prise en ne faisant varier que y , & divisée par dy , on écrit $\frac{ddV}{dx dy}$, & $\frac{ddV}{dx dy} dy$ exprime cette différence même.

Il faut remarquer que $\frac{ddV}{dx dy}$ exprime aussi la différence de $\frac{dV}{dy}$ prise en ne faisant varier que x , & divisée par dx , de sorte que ces deux expressions $\frac{ddV}{dx dy}$, & $\frac{ddV}{dy dx}$ ne font qu'une même chose, car nous avons démon-

demontré ailleurs, que si $dV = Mdx + Ndy + Pdz + Qc$, V étant toujours une fonction de x , de y , de z , Qc , on aura $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, en prenant ces expressions à la manière de M.^r Fontaine. Or suivant cette manière $M = \frac{dV}{dx}$, & $N = \frac{dV}{dy}$, & la différence dM prise en ne faisant varier que y , & divisée par dy est $\frac{ddV}{dx dy}$, & la différence dN prise en ne faisant varier que x , & divisée par dx est $\frac{ddV}{dy dx}$; donc $\frac{ddV}{dx dy} = \frac{ddV}{dy dx}$. Enfin les expressions $d \cdot \frac{dV}{dx}$, & $\frac{ddV}{dx}$ signifient également la différence de $\frac{dV}{dx}$, ou du coefficient M , prise en faisant tout varier :

DCIV.

On comprend donc aisément les expressions suivantes, dans lesquelles on suppose que V est une fonction de plusieurs variables x, y, z, u, Qc .

$$dV = Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \mathcal{C}c.$$

$$dV = \frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dz} dz + \frac{dV}{du} du + \mathcal{C}c.$$

$$d \cdot \frac{dV}{dx} \text{ ou } \frac{ddV}{dx} = \frac{dddV}{dx^2} dx + \frac{dddV}{dx dy} dy + \frac{dddV}{dx dz} dz + \frac{dddV}{dx du} du + \mathcal{C}c$$

$$d \cdot \frac{dV}{dy} \text{ ou } \frac{ddV}{dy} = \frac{dddV}{dy dx} dx + \frac{dddV}{dy^2} dy + \frac{dddV}{dy dz} dz + \frac{dddV}{dy du} du + \mathcal{C}c$$

$$d \cdot \frac{dV}{dz} \text{ ou } \frac{ddV}{dz} = \frac{dddV}{dz dx} dx + \frac{dddV}{dz dy} dy + \frac{dddV}{dz^2} dz + \frac{dddV}{dz du} du + \mathcal{C}c$$

$$d \cdot \frac{dV}{du} \text{ ou } \frac{ddV}{du} = \frac{dddV}{du dx} dx + \frac{dddV}{du dy} dy + \frac{dddV}{du dz} dz + \frac{dddV}{du^2} du + \mathcal{C}c$$

$$d \cdot \frac{ddV}{dx^2} \text{ ou } \frac{dddV}{dx^2} = \frac{dddV}{dx^3} dx + \frac{dddV}{dx^2 dy} dy + \frac{dddV}{dx^2 dz} dz + \frac{dddV}{dx^2 du} du + \mathcal{C}c$$

$$d \cdot \frac{ddV}{dx dy} \text{ ou } \frac{dddV}{dx dy} = \frac{dddV}{dx^2 dy} dx + \frac{dddV}{dx dy^2} dy + \frac{dddV}{dx dy dz} dz + \frac{dddV}{dx dy du} du + \mathcal{C}c$$

$\mathcal{C}c. \mathcal{C}c.$

DCV.

La premiere methode de M.^r Fontaine est fondée sur les quatre Theoremes suivants.

THEOREME I. V étant une fonction homogene de plusieurs variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c.$, dont la dimension est e , & la différence $dV = Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \mathcal{C}c.$ on aura $eV = Mx + Ny + Pz + Qu + \mathcal{C}c.$

DEMONSTRATION. En supposant que V & V' sont deux fonctions pareilles, la première des quantités $x, y, z, u, \text{C}c.$; la seconde des quantités infiniment peu, plus ou moins grandes $x', y', z', u', \text{C}c.$, ou $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, u + \delta u, \text{C}c.$, on aura par la méthode des variations $V' - V$, ou $\delta V = M \delta x + N \delta y + P \delta z + Q \delta u + \text{C}c.$ Or puisque les variations $\delta x, \delta y, \delta z, \text{C}c.$ sont arbitraires, on peut supposer qu'elles sont égales, chacune respectivement aux différences $dx, dy, dz, du, \text{C}c.$ prises proportionnelles à leurs intégrales $x, y, z, u, \text{C}c.$ Dans cette supposition on aura $V' - V = \delta V = M dx + N dy + P dz + Q du + \text{C}c.$, & les deux fonctions V & V' seront semblables. Donc, puisque la dimension de V est e , on aura par la propriété des fonctions semblables $V'; V = x^e : x^e = y^e : y^e = z^e : z^e = u^e : u^e$; d'où l'on tire $V' - V : V = x^e - x^e : x^e = y^e - y^e : y^e = z^e - z^e : z^e = \text{C}c.$, ou $dV : V = d.x^e : x^e = d.y^e : y^e = d.z^e : z^e = \text{C}c.$, ou $dV : V = e dx : x = e dy : y = e dz : z = \text{C}c.$; par conséquent $dV = e V \frac{dx}{x}$; $dx : x = dy : y = dz : z = \text{C}c.$, & $dy = y \frac{dx}{x}$; $dz = z \frac{dx}{x}$; $du = u \frac{dx}{x}$; $\text{C}c.$ Donc en substituant pour $dV, dy, dz, du, \text{C}c.$ ces valeurs dans l'équation $dV = M dx + N dy + P dz + Q du + \text{C}c.$, on aura $e V \frac{dx}{x}$

$$\begin{aligned} &= Mdx + Ny \frac{dx}{x} + Pz \frac{dx}{x} + Qu \frac{dx}{x} + \mathcal{C}c, \text{ \& } cV \\ &= Mn + Ny + Pz + Qu + \mathcal{C}c. \text{ C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

DCVI.

Soit, par exemple, $V = axx + byz$, fonction homogene de deux dimensions par rapport aux variables x , y , & z ; on aura $dV = 2axdx + bzd y + bydz$, &, par le Theoreme, $cV = 2V = 2axx + bzy + byz = 2axx + 2byz$; $V = axx + byz$, comme il convient. Mais si la fonction V n'est point homogene par rapport aux variables qu'elle contient, par exemple, si $V = cx + bzy$, le Theoreme premier n'aura point lieu. Car en différenciant on aura $dV = cdx + bzdy + bydz$; mais on n'aura pas $2V = cx + bzy + byz$, puisque $2V = 2cx + 2byz$ par la supposition. La raison en est, qu'on a supposé dans la demonstration du Theoreme que V & V' estoient des fonctions semblables, & qu'on peut faire cette supposition, lorsque V est une fonction homogene par rapport a ses variables. Car en prenant $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$, $\mathcal{C}c$, & faisant de plus $x : dx = y : dy = z : dz = \mathcal{C}c$, les deux fonctions $axx + byz$, & $ax'x' + by'z'$ sont semblables, & la premiere est a la seconde, comme xx est a $x'x'$, & comme yy est a $y'y'$, $\mathcal{C}c$. Mais si la fonction V n'est point homogene

par rapport a ses variables, par exemple, si $V = cx + byz$, les deux fonctions $cx + byz$, & $cx' + by'z'$, même en supposant les proportions $x : dx = y : dy = z : dz$, ne seront point semblables, & la premiere fonction ne sera pas a la seconde, comme xx est a $x'x'$; puisque byz etant a $by'z'$, comme yy est a $y'y'$, ou comme xx est a $x'x'$, cx n'est pas a cx' , comme xx est a $x'x'$, mais comme x est a x' .

DCVII.

On peut neantmoins rendre le Theoreme premier absolument general au moyen d'un parametre p qu'on peut traiter comme variable, ou comme constant suivant le besoin, & qui etant regardé comme l'unité, pour laquelle on peut prendre telle quantité, qu'on veut, servira a rendre la fonction V homogene par rapport aux variables $x, y, z, u, \text{&c.}$ & p . Par exemple, si on a $V = cx + byz$, on fera $V = cpx + byz$, fonction homogene de deux dimensions, qui sera de même valeur que la proposée $cx + byz$, par ce que p represente l'unité. On aura donc, en faisant tout varier, $dV = cxdp + cpdx + bzdy + bydz$; & par le Theoreme premier, $eV = 2V = cxp + cpx + bzy + byz = 2cpx + 2byz$, & divisant par 2, $V = cpx + byz = cx + byz$, en mettant l'unité au lieu du parametre p .

DCVIII.

En general fupposant que V foit une fonction quelconque de dimension e par rapport aux variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c.$, qu'elle contient, & que dans le cas où cette fonction n'est point homogene par rapport a ces variables, on introduira le parametre p dans tous les termes, qui n'ont point la dimension e par rapport aux variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c.$, & qu'on les rende tous de cette même dimension e par rapport aux variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c.$ & p , & on aura par le Theoreme premier $eF = Mx + Ny + Pz + Qu + \mathcal{C}c. + Kp$.

Donc, si on fait $dF = 0$, on aura $Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \mathcal{C}c. + Kdp = 0$, & en divisant par M , coefficient de dx , on aura $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{P}{M}dz + \frac{Q}{M}du + \mathcal{C}c. + \frac{K}{M}dp = 0$, ou, en fupposant $\frac{N}{M} = \alpha, \frac{P}{M} = \beta, \frac{Q}{M} = \gamma, \frac{K}{M} = \pi$, on aura $dx + \alpha dy + \beta dz + \gamma du + \mathcal{C}c. + \pi dp = 0$, les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \mathcal{C}c., \pi$ etant tous de dimension nulle par rapport aux variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c., p$. Si dans cette derniere equation on fait p constant, ou $dp = 0$, elle deviendra $dx + \alpha dy + \beta dz + \gamma du + \mathcal{C}c. = 0$, les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \mathcal{C}c.$ demeurant les mêmes.

DCIX.

Soit maintenant $dx + A dy + B dz + C du + \mathcal{C}c = 0$ une equation, qu'on propose d'intégrer : les coefficients $A, B, C, \mathcal{C}c$. étant des fonctions quelconques des variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c$. Il faut distinguer deux cas dans cette equation : dans le premier cas on suppose que les coefficients $A, B, C, \mathcal{C}c$. sont des fonctions homogenes de dimension nulle des variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c$. , & dans ce cas la question se reduit à trouver une fonction V de ces mêmes variables, dont la différence $M dx + N dy + P dz + Q du + \mathcal{C}c$. divisée par le coefficient M de dx , ou $dx + \frac{N}{M} dy + \frac{P}{M} dz + \frac{Q}{M} du + \mathcal{C}c$. , soit $= dx + A dy + B dz + C du + \mathcal{C}c$. ; on aura donc $A = \frac{N}{M}$, $B = \frac{P}{M}$, $C = \frac{Q}{M}$, $\mathcal{C}c$. , & la différence $M dx + N dy + P dz + Q du + \mathcal{C}c = M dx + M A dy + M B dz + M C du + \mathcal{C}c = dV$. M est une fonction homogene des variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c$. , qui est inconnüe. Supposant que la dimension inconnüe de la fonction V soit e , on aura par le Theoreme premier $eV = Mx + M Ay + MBz + MCu + \mathcal{C}c$. ; donc $\frac{dV}{eV} = \frac{1}{e} \cdot \frac{dV}{V} =$

$$\frac{x}{x+Ay+Bz+Cu+\mathcal{C}c} dx + \frac{A}{x+Ay+Bz+Cu+\mathcal{C}c} dy$$

$$+ \frac{B}{x+Ay+Bz+Cu+\mathcal{C}c} dz + \frac{C}{x+Ay+Bz+Cu+\mathcal{C}c} du$$

$$+ \mathcal{C}c, \text{ \& , en int\eg rant de part \& d'autre par les me-}$$

$$\text{thodes donn\ees precedemment , on aura } \frac{1}{c} L.V =$$

$$S. \left(\frac{x}{x+Ay+Bz+Cu+\mathcal{C}c} dx + \frac{A}{x+Ay+Bz+Cu+\mathcal{C}c} dy + \mathcal{C}c \right).$$

Lorsqu'on aura trouv\ee par cette int\eg ration la valeur de V , on la fera $=c$ constante arbitraire, \& le Probleme sera resolu. Car si on fait $V=c$, on aura $dV = 0 = Mdx + MA dy + MB dz + MC du + \mathcal{C}c$, \& en divisant par M , on retrouvera l'equation propos\ee $dx + A dy + B dz + C du + \mathcal{C}c = 0$. Si la dimension c \e tait nulle, on auroit $x + Ay + Bz + Cu + \mathcal{C}c = 0$, par l'equation $cV = Mx + MAy + MBz + MCu + \mathcal{C}c$.

Dans le second cas on suppose que les coefficients $A, B, C, \mathcal{C}c$ dans l'equation propos\ee $dx + A dy + B dz + C du + \mathcal{C}c$ ne sont point des fonctions homogenes de dimension nulle des variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c$. Mais en introduisant le parametre p dans ces fonctions, on pourra toujours les rendre homogenes, \& de dimension nulle par rapport aux variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c$, \& au parametre p . Alors l'equation propos\ee sera transform\ee en une autre de la forme $dx + \alpha dy$
 $+ \beta dz$

$+ \beta dz + \gamma du + \mathcal{C}c. = 0$, dans laquelle les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \mathcal{C}c.$ sont des fonctions homogenes de dimension nulle des variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c.$, & de p , & la question se reduira a trouver une fonction F des mêmes variables, dont la différence $Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \mathcal{C}c. + Kdp$, divisée par M coefficient de dx , ou $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{P}{M}dz + \frac{Q}{M}du + \mathcal{C}c. + \frac{K}{M}dp$, soit $= dx + \alpha dy + \beta dz + \gamma du + \mathcal{C}c. + \pi dp$, en supposant $\pi = \frac{K}{M}$; & en faisant p constante, ou $dp = 0$, cette quantité $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{P}{M}dz + \frac{Q}{M}du + \mathcal{C}c.$ soit $= dx + \alpha dy + \beta dz + \gamma du + \mathcal{C}c.$, on aura donc $\alpha = \frac{N}{M}$, $\beta = \frac{P}{M}$, $\gamma = \frac{Q}{M}$, $\mathcal{C}c.$, & $\pi = \frac{K}{M}$; & la différence $Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \mathcal{C}c. + Kdp$ sera $Mdx + M\alpha dy + M\beta dz + M\gamma du + \mathcal{C}c. + M\pi dp = dF$. M est une fonction homogene des variables $x, y, z, u, \mathcal{C}c.$, & de p , qui est inconnue, & π est aussi une fonction inconnue de dimension nulle des mêmes quantités.

En supposant que la dimension de la fonction F soit $= e$, on aura par le Theoreme premier $eF =$

Z z z

$Mx + My + M\beta z + M\gamma u + Cc. + M\pi p$; donc

$$\frac{dF}{cF} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dF}{F} =$$

$$\frac{1}{x + ay + \beta z + \gamma u + Cc. + \pi p} dx +$$

$$\frac{a}{x + ay + \beta z + \gamma u + Cc. + \pi p} dy +$$

$$\frac{\beta}{x + ay + \beta z + \gamma u + Cc. + \pi p} dz +$$

$$\frac{\gamma}{x + ay + \beta z + \gamma u + Cc. + \pi p} du + Cc. +$$

$$\frac{\pi}{x + ay + \beta z + \gamma u + Cc. + \pi p} dp,$$

ou en faisant $x + ay + \beta z + \gamma u + Cc. + \pi p = \theta$,

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{dF}{F} = \frac{1}{\theta} dx + \frac{a}{\theta} dy + \frac{\beta}{\theta} dz + \frac{\gamma}{\theta} du + Cc. + \frac{\pi}{\theta} dp,$$

&, en intégrant de côté, & d'autre, $\frac{1}{c} \cdot L.F =$

$$S. \left(\frac{1}{\theta} dx + \frac{a}{\theta} dy + \frac{\beta}{\theta} dz + \frac{\gamma}{\theta} du + Cc. + \frac{\pi}{\theta} dp \right).$$

Lorsqu'on aura trouvé par cette intégration la valeur de la fonction F , on la fera $=c$ constante arbitraire, & le Probleme sera resolu.

Mais π étant une fonction inconnue des variables $x, y, z, u, Cc., p$, on ne peut trouver l'intégrale precedente, si l'on n'a auparavant la valeur de cette fonction π . Il ne s'agit donc plus que de trouver cette valeur de π .

Si on supposoit que la dimension ϵ de F fut $= 0$, on auroit $\pi = \frac{-x - \alpha y - \beta z - \gamma u - \mathcal{C}\epsilon.}{p}$, par l'équation $\epsilon F = Mx + M\alpha y + M\beta z + M\gamma u + \mathcal{C}\epsilon. + M\pi p$, mais cette valeur de π , rendant θ , ou $x + \alpha y + \beta z + \gamma u + \mathcal{C}\epsilon. + \pi p = 0$, ne peut nous servir, & il faut nécessairement en trouver quelqu'autre.

DCX.

On la trouvera par le quatrième des Theoremes, que nous allons demontrer.

THEOREME II. Supposé que V soit une fonction des variables $x, y, z, u, \mathcal{C}\epsilon.$, on aura $\frac{d \cdot S \cdot V dx}{dy} = S \cdot \frac{dV}{dy} dx$, c'est à dire, que la différence de $S \cdot V dx$ prise en ne faisant varier que y , & divisée par dy , est égale à l'intégrale du produit de la différence dx multipliée par la différence dV prise en ne faisant varier que y , & divisée par dy . Nous avons démontré cy-dessus ce Theoreme.

DCXI.

THEOREME III. V étant toujours une fonction des variables $x, y, z, u, \mathcal{C}\epsilon.$, & sa différence $dV =$

$Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + \text{C}c.$, ou aura les equations de condition $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, $\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}$, $\frac{dM}{du} = \frac{dQ}{dx}$, $\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$, $\frac{dN}{du} = \frac{dQ}{dy}$, $\frac{dP}{du} = \frac{dQ}{dz}$ &c. . Nous avons aussi démontré ce Theoreme.

DCXII.

THEOREME IV. Dans la même supposition, en faisant $N = AM$, $P = BM$, $Q = CM$, &c., & par conséquent $dV = Mdx + AMdy + BMdz + CMdu + \text{C}c.$, on aura les equations de condition suivantes.

1.° Pour trois termes $Mdx + AMdy + BMdz$ on aura l'equation

$$A \frac{dB}{dx} - B \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0.$$

2.° Donc pour quatre termes $Mdx + AMdy + BMdz + CMdu$, on aura ces trois equations

$$A \frac{dB}{dx} - B \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0$$

$$A \frac{dC}{dx} - C \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{du} - \frac{dC}{dy} = 0$$

$$B \frac{dC}{dx} - C \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{du} - \frac{dC}{dz} = 0.$$

3.° On trouvera de même les conditions pour cinq termes de la différence de V , pour fix, &c. Nous avons démontré cy-dessus ce Theoreme. On va voir

dans le Probleme suivant la maniere de trouver la fonction π par le Theoreme precedent.

DCXIII.

PROBLEME. Intégrer l'équation $d\kappa + \alpha dy = 0$, dans laquelle α est une fonction homogene de dimension nulle de κ , de y , & de p , ou une fraction donnée, dont le numerateur, & le denominateur sont des fonctions homogenes & de même dimension de κ , de y , & de p .

SOLUTION. La question se réduit a trouver une fonction φ de κ , de y , & de p , dont la différence, en faisant p constant, divisée par le coefficient de $d\kappa$, soit $d\kappa + \alpha dy = 0$ (Art. DCVIII.). Si l'on n'eût pas fait $dp = 0$, on auroit eù $d\kappa + \alpha dy + \pi dp = 0$, π étant une fonction homogene de dimension nulle de κ , de y , & de p , qui est inconnüe; & si l'on n'eût pas divisé par la fonction μ , qui multiplioit $d\kappa$, on auroit eù $\mu d\kappa + \mu \alpha dy + \mu \pi dp = d\varphi$ (Art. DCVIII.), μ étant une fonction homogene de κ , de y , & de p , qui est aussi inconnüe.

En supposant que la dimension de φ etoit $= e$, nous aurons $e\varphi = \mu\kappa + \mu\alpha y + \mu\pi p$; donc $\frac{1}{e} \cdot \frac{d\varphi}{\varphi} =$

$$\frac{1}{\kappa + \alpha y + \pi p} d\kappa + \frac{\alpha}{\kappa + \alpha y + \pi p} dy + \frac{\pi}{\kappa + \alpha y + \pi p} dp, \text{ \&};$$

en intégrant, $\frac{1}{s} \cdot L \cdot \varphi = S. \left(\frac{1}{x+ay+ap} dx + \frac{a}{x+ay+ap} dy + \frac{a}{x+ay+ap} dp \right)$. Il ne s'agit donc plus que d'avoir la fonction π , & nous savons, par le Theoreme IV., qu'à cause de l'équation $\mu dx + \mu a dy + \mu a dp = d\varphi$, cette fonction doit être telle, que $a \frac{d\pi}{dx} - \pi \frac{dx}{dx} + \frac{d\pi}{dy} - \frac{d\pi}{dp} = 0$.

Pour trouver la valeur de π par cette equation, considerons plus particulièrement que nous n'avons encore fait, de quelle maniere on peut concevoir qu'on est arrivé de la fonction φ à l'équation $dx + a dy = 0$. On a différencié en faisant tout varier, & on a eû $A dx + B dy + C dp = d\varphi$; on a réduit les trois fonctions A, B, C au même denominateur D , & on a eû $\frac{1}{D}(E dx + F dy + G dp) = d\varphi$. On a divisé les fonctions E, F, G par leur plus grand facteur commun H , & on a eû $\frac{H}{D}(I dx + K dy + L dp) = d\varphi$. On a encore divisé les fonctions I & K par leur plus grand facteur commun Q , & on a eû $\frac{H}{D}(M Q dx + N Q dy + L dp) = d\varphi$; on a fait $dp = 0$, & on a eû $dx + \frac{N}{M} dy = 0$. Donc, puisque ces deux dernie-

res equations doivent être les mêmes que les deux $dx + \alpha dy + \pi dp = 0$, & $d\pi + \alpha dy = 0$, on aura

$$\alpha = \frac{N}{M}, \text{ \& } \pi = \frac{L}{QM},$$

N & M étant des fonctions homogenes de même dimension de x , de y , & de p ; L & QM étant aussi des fonctions homogenes & de même dimension des mêmes quantités.

En substituant ces valeurs de α , & de π dans l'equation de condition $\alpha \frac{d\pi}{dx} - \pi \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dp} - \frac{d\pi}{dy} = 0$,

$$\text{nous aurons } NQ \frac{dL}{dx} - NL \frac{dQ}{dx} - QL \frac{dN}{dx} + Q^2 X \\ (M \frac{dN}{dp} - N \frac{dM}{dp}) - MQ \frac{dL}{dy} + LM \frac{dQ}{dy} + QL \frac{dM}{dy} \\ = 0.$$

La fonction α étant donnée, on aura les fonctions N & M , en faisant N egal au numerateur, & M egal au denominateur de la fraction α . Si de plus la fonction Q étoit donnée, on auroit très-aisément la fonction L par la methode des indeterminées. L'on prendroit pour L une fonction homogene de x , de y , & de p , de même dimension que QM la plus generale qu'il seroit possible, & avec des coefficients indeterminés; on substitueroit cette valeur de L dans l'equation de condition, qu'on vient de trouver entre M , N , L , Q , & l'on determineroit les coefficients de L par des

equations du premier degré, en satisfaisant a cette equation de condition supposée identique, comme on le verra dans l'exemple que nous rapporterons plus bas. Mais comme la fonction Q est inconnüe de même que L , l'on fera 1.º $Q=1$, on aura l'equation de condition $N \frac{dL}{dx} - L \frac{dN}{dx} + M \frac{dN}{dp} - N \frac{dM}{dp} - M \frac{dL}{dy} + L \frac{dM}{dy} = 0$. 2.º $Q=p$, on aura en faisant $dQ = dp = 0$ dans l'equation generale de condition, & divisant par p , $N \frac{dL}{dx} - L \frac{dN}{dx} + p \left(M \frac{dN}{dp} - N \frac{dM}{dp} \right) - M \frac{dL}{dy} + L \frac{dM}{dy} = 0$. 3.º S'il n'entre aucun radical dans N , ny dans M , l'on fera $Q=ap+bx+cy$. 4.º $Q=ap^2+bp^2x+cpy+d^2x^2+exy+fy^2$. 5.º $Q=ap^3+bp^2x+Cr$, & l'on determinera les coefficients de L , comme si ceux de Q estoient donnés; ensuite l'on verra quels doivent être les coefficients de Q , pour qu'il n'y ait pas de contradiction dans ceux de L .

S'il entre des radicaux dans les fonctions N , M , après avoir essayé les hypotheses de $Q=1$, & de $Q=p$, qui sont très-generales, l'on fera entrer ces mêmes radicaux dans les valeurs successives de Q , & de L , comme autant de nouvelles variables, & de la maniere la plus generale qu'il sera possible, sur quoi on peut voir les Memoires de M.^r Fontaine page 35.

DCXIV.

EXEMPLE. Soit, par exemple, $a = \frac{ap+bx+cy}{a'p+\beta'x+\gamma'y}$,

& l'équation proposée $dx + \frac{ap+bx+cy}{a'p+\beta'x+\gamma'y} dy = 0$ en

supposant $Q = 1$, on aura $N = ap + bx + cy$, $M = a'p + \beta'x + \gamma'y$, $L = Ap + Bx + Cy$, les coefficients

A , B , C étant indéterminés, $\frac{dN}{dx} = b$, $\frac{dN}{dp} = a$,

$\frac{dM}{dy} = \gamma'$, $\frac{dM}{dp} = a'$, $\frac{dL}{dx} = B$, $\frac{dL}{dy} = C$, & en sub-

stituant dans l'équation de condition $N \frac{dL}{dx} - L \frac{dN}{dx} +$

$M \frac{dN}{dp} - N \frac{dM}{dp} - M \frac{dL}{dy} + L \frac{dM}{dy} = 0$, nous aurons

$(aB - a'C - bA + \gamma'A)p + (-b'a' - \beta'C + \gamma'B + a\beta')x + (c\beta - ca' + a\gamma' - bC)y = 0$; équation qui

doit être identique: donc $aB - a'C - bA + \gamma'A = 0$;

$-b'a' + \beta'a - \beta'C + \gamma'B = 0$; $c\beta - ca' + a\gamma' - bC = 0$;

en comparant ces équations, on trouve $A = \frac{-a(ba' - a\beta')}{c\beta' - b\gamma'}$;

$B = \frac{\beta'(ca' - a\gamma') - b(ba' - a\beta')}{c\beta - b\gamma'}$; $C = \frac{\gamma'(ca' - a\beta') - c(ba' - a\beta')}{c\beta' - b\gamma'}$

donc en substituant ces valeurs dans $Ap + Bx + Cy$

$= P$, & ensuite les valeurs de L , & de M dans

$$\frac{L}{QM} = \frac{L}{M} = \pi, \text{ on aura } \pi =$$

$$\frac{-a(b\alpha' - a\beta')x + [\beta'(c\alpha' - a\gamma') - \gamma'(b\alpha' - a\beta')]x + [\gamma'(c\alpha' - a\beta') - c(b\alpha' - a\beta')]y}{(c\beta - b\gamma)(\alpha'p + \beta'x + \gamma'y)}$$

Si l'equation proposee etoit $dx +$

$$\frac{ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy}{a'p^2 + \beta'px + \gamma'py - d'xy - ey^2} dy = 0, \text{ en supposant } Q = p,$$

$$\text{on auroit } N = ap^2 + bpx + cpy + d'x^2 + cxy; M =$$

$$a'p^2 + \beta'px + \gamma'py - d'xy - ey^2; L = Ap^3 + Bp^2x$$

$$+ Cp^2y + Dpx^2 + Epxy + Fpy^2 + Gx^3 + Hx^2y +$$

$$Ixy^2 + Ky^3; \frac{dN}{dx} = bp + 2d'x + cy; \frac{dN}{dp} = 2ap +$$

$$bx + cy; \frac{dM}{dy} = \gamma'p - d'x - 2ey; \frac{dM}{dp} = 2a'p + \beta'x$$

$$+ \gamma'y; \frac{dL}{dx} = Bp^2 + 2Dpx + Epy + 3Gx^2 + 2Hxy$$

$$+ Iy^2; \frac{dL}{dy} = Cp^2 + Epx + 2Fpy + Hx^2 + 2Ixy$$

$$+ 3Ky^2; \& \text{ en substituant ces valeurs dans l'equa-}$$

$$\text{tion de condition } N \frac{dL}{dx} - L \frac{dN}{dx} + p M \frac{dN}{dp} - p N \frac{dM}{dp}$$

$$- M \frac{dL}{dy} + L \frac{dM}{dy} = 0, \text{ l'on aura une equation, qu'on}$$

regardera comme identique, & par laquelle on determinera les coefficients $A, B, C, D, E, \&c.$ de $L,$

on aura donc les valeurs de Q , de M , & de L , & par conséquent celle de $\pi = \frac{L}{QM}$.

Ce que nous avons dit jusqu'à présent dans ce Chapitre, appartient à la première méthode de M.^r Fontaine, sur laquelle nous ne nous étendrons pas davantage: ce que nous venons de dire étant suffisant pour comprendre dans l'Auteur même ce qui regarde cette première méthode.

DCXV.

Il faut voir dans l'Ouvrage même de M.^r Fontaine l'application ingénieuse que ce sçavant Auteur fait de cette première méthode aux équations différentielles des ordres supérieurs. Quant à la seconde méthode, il a donné lui-même une introduction. On ne peut rien faire de mieux que de la lire avec beaucoup d'attention, & la plume à la main. Elle contient des vérités fondamentales, & élémentaires sur les rapports généraux des équations intégrales à leurs différentielles. Nous en parlerons après avoir établi les propositions suivantes, qui pourront répandre quelque lumière sur toute cette matière.

1^o Lorsqu'on parle d'équations, de fonctions, de radicaux, de dénominateurs, de puissances, &c., on entend toujours des quantités qui contiennent une, ou

plusieurs variables, à moins qu'on n'avertisse du contraire.

2^o Les expressions $A_1, A_2, A_3, \text{C}c. a_1, a_2, a_3, \text{C}c., b_1, b_2, b_3, \text{C}c.$ ont la même signification que celles-cy, qui sont moins commodes $A', A'', A''', \text{C}c., a', a'', a''' \text{C}c.$

3^o On prend ordinairement la lettre p pour designer l'unité indéterminée; & par ce qu'on ne change point la valeur d'une quantité en la multipliant, ou en la divisant par l'unité, on se sert de p , & de ses puissances pour conserver l'homogénéité partout où l'on en a besoin.

4^o On appelle equation algebrique, rationnelle, & entiere toute equation différentielle, ou intégrale, qui ne contient ny fonctions transcendentes, ny radicaux, ny denominateurs.

5^o Une equation quelconque étant proposée, on peut toujours la delivrer de denominateurs. On n'a pour cela qu'à reduire toutes les parties en fractions de même denomination, & effacer ensuite le denominateur commun à toute l'equation. Par exemple, si l'equation proposée étoit $a dx + \frac{b x dy^2}{p dx} - \frac{c y dx^2}{p dy} = 0,$ on la reduiroit à celle-cy $\frac{a p dx^2 dy + b x dy^2 - c y dx^2}{p dx dy} = 0,$

& on auroit $a p dx^2 dy + b x dy^2 - c y dx^2 = 0.$

6^o Si l'équation proposée renferme des puissances negatives, c'est a dire des puissances, dont les exposans sont negatifs, on pourra l'en delivrer. Car en faisant passer ces puissances negatives dans les denominateurs, on les rendra positives, & ensuite on pourra debarasser l'équation de denominateurs.

7^o Si une equation contient des radicaux, on pourra l'en delivrer dans quelques Cas, sans augmenter le nombre des variables, & toujours, en egalant chaque radical a une nouvelle variable.

8^o Si elle contient des fonctions transcendantes, ou des intégrales sous le signe d'intégration, on pourra toujours l'en debarasser en egalant ses fonctions où ces intégrales a de nouvelles variables, & quelquefois, sans introduire de nouvelles variables, en différentiant toute l'équation. Par exemple, si l'équation proposée étoit $a dx \int y dx - b x x dy = 0$, on auroit $\int y dx = \frac{b x x dy}{a dx}$, & différentiant, en faisant dx constante, on auroit $y dx = \frac{2 b x dx dy + b x x ddy}{a dx}$, & $a y dx^2 - 2 b x dx dy - b x x ddy = 0$.

9^o Il n'y a point d'equations finies, algebriques, rationnelles, entieres, & homogenes, qui ne soient contenues dans ces suites prolongées a l'infini.

PREMIERE SUITE.

$$Ap + Bx = 0.$$

$$Ap^2 + Bpx + Cx^2 = 0.$$

$$Ap^3 + Bp^2x + Cpxx + Dpx^3 = 0.$$

$$Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + Ex^4 = 0.$$

Uc. a l'infini.

SECONDE SUITE.

$$Ap + Bx + Cy = 0.$$

$$Ap^2 + Bpx + Cpy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0.$$

$$Ap^3 + Bp^2x + Cp^2y + Dpx^2 + Epxy + Fpy^2 + Gx^3 \\ + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3 = 0.$$

$$Ap^4 + Bp^3x + Uc. = 0.$$

Uc. a l'infini.

TROISIEME SUITE.

$$Ap + Bx + Cy + Dz = 0.$$

$$Ap^2 + Bpx + Cpy + Dpz + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + \\ Hxz + Iyz + Kz^2 = 0.$$

$$Ap^3 + Bp^2x + Uc. = 0.$$

Uc. a l'infini.

QUATRIEME SUITE &c.

Uc. *Uc.* *Uc.* a l'infini.

Les coefficients *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *Uc.* designent des constantes indeterminées, ou zero.

10.° Si on prend successivement toutes les différences premières, secondes, troisièmes, &c. de toutes les équations de chaque suite, il est évident qu'on aura toutes les équations différentielles algébriques, rationnelles, & entières, qui auront pour intégrales des équations finies, algébriques, rationnelles, & entières, & que ces intégrales se trouveront dans ces suites. Donc, si on propose d'intégrer une équation différentielle quelconque, qui ait par elle même, ou par réduction, la forme requise, c'est à dire, qui soit algébrique, rationnelle, & entière; si elle a pour intégrale une équation algébrique, rationnelle, & entière, on trouvera cette intégrale en comparant l'équation différentielle proposée avec les formules générales des différentielles des suites, qui sont du même ordre, & du même nombre des variables, que la proposée; & si l'on ne trouve pas dans les différentielles des suites de formule, qui puisse être comparée exactement avec la différentielle proposée, on pourra multiplier successivement cette proposée par différentes fonctions générales, algébriques, rationnelles, & entières des variables qu'elle contient, jusqu'à ce qu'elle acquière une forme, qui puisse être comparée exactement avec quelque une des formules différentielles des suites.

11.° Au reste il faut se souvenir que l'intégrale finie d'une équation différentielle d'un ordre quelconque

doit renfermer, pour être complète, autant de constantes arbitraires, qu'il y a d'unités dans l'exposant de cet ordre. Ainsi les equations des suites precedentes sont toutes des intégrales complettes de leurs différentielles du premier ordre. Car en prenant la premiere différence de chacune de ces equations, le premier terme constant Ap , ou Ap^2 , ou Ap^3 , &c. s'évanouit, & ne se trouve point dans la différentielle du premier ordre; par consequent il devient une constante arbitraire dans l'intégrale de cette différentielle. De même si, en prenant les secondes différences de chaque equation des suites, on suppose qu'une des premieres différences des variables x, y, z, u , &c., par exemple, dx , soit constante, les equations des suites seront toutes des intégrales complettes de leurs différentielles du second ordre, par ce que la seconde différentiation, en supposant dx constante, ou $ddx=0$, fera disparoitre le second terme Bp^2x , ou Bp^2x , ou Bp^3x , &c. dans la différentielle du second ordre; & l'intégrale de cette différentielle contiendra les deux constantes arbitraires A & B , qui ne se trouvent point dans la seconde différence de cette intégrale. Dans la même supposition de dx constante, les equations des suites seront des intégrales complettes de leurs troisiemes différences, par ce que la troisieme différentiation fera disparoitre un troisieme coefficient constant dans la différentielle du

troisie.

troisième ordre. Par exemple, si l'on prend successivement la première, la seconde, & la troisième différence de l'équation de la seconde suite $Ap^2 + Bp\kappa + Cp\gamma + D\kappa^2 + E\kappa\gamma + F\gamma^2 = 0$, on aura pour la différentielle du premier ordre $Bpd\kappa + Cpdy + 2D\kappa d\kappa + E\kappa dy + E\gamma d\kappa + 2F\gamma dy = 0$, dans laquelle le premier terme Ap^2 de l'intégrale a disparu. Donc, si on vouloit intégrer la différentielle $d\kappa + 2dy - 2\kappa d\kappa - 3\gamma dy = 0$; en la comparant avec la formule générale $Bpd\kappa + Cpdy + 2D\kappa d\kappa + E\gamma d\kappa + E\kappa dy + 2F\gamma dy = 0$, on auroit $Bp = 1$, $Cp = 2$, $2D = -2$, $E = 0$, $2F = -3$, & l'intégrale seroit $Ap^2 + \kappa + 2\gamma - \kappa^2 - \frac{3}{2}\gamma^2 = 0$, dans laquelle A est une constante arbitraire. La différentielle générale du second ordre, en faisant $d\kappa$ constante, sera $Cpd^2y + 2Dd\kappa^2 + 2E\gamma d\kappa + E\kappa d^2y + 2Fd\gamma^2 + 2F\gamma d^2y = 0$, dans laquelle le coefficient B a disparu; & si on vouloit intégrer la différentielle du second ordre $d\kappa^2 + 2dy^2 + 2\gamma d^2y = 0$, on auroit $C = 0$, $2D = 1$, $E = 0$, $2F = 2$, & l'intégrale finie seroit $Ap^2 + Bp\kappa + \frac{1}{2}\kappa^2 + \gamma\gamma = 0$, dans laquelle A & B sont deux constantes arbitraires. La différentielle générale du troisième ordre, en faisant $d\kappa$ constante, sera $Cpd^3y + 3E\kappa d^2y + E\kappa d^3y + 6F\gamma d^2y + 2F\gamma d^3y = 0$, dans laquelle les trois

coefficients constans A , B , & D ont disparû : on trouvera donc trois constantes arbitraires dans l'intégrale finie. Mais si l'on prend les différences, qui surpassent le troisieme ordre, même en faisant dx constante, on trouvera que leurs intégrales finies, dans les suites precedentes, ne seront que des intégrales particulieres, ou incomplettes de ces différentielles; & en general si on ne prend aucune différence premiere des variables x , y , z , u , &c. pour constante, les equations finies des suites ne seront que des intégrales incomplettes de toutes leurs différentielles supérieures au premier ordre.

DCXVI.

On comprend, par ce que nous venons de dire, que c'est pour avoir toujours des intégrales complètes, que M.^r Fontaine dans son introduction a la seconde methode suppose, que dans la seconde suite d'equations, qui doivent être les intégrales finies des equations différentielles entre le parametre p , & les variables x , y , les coefficients constants A , B , C , D , E , F , &c. designent des fonctions d'un nombre arbitraire n , s'il s'agit d'une equation aux premieres différences; de deux nombres arbitraires n , m , s'il s'agit d'une equation aux secondes différences; de trois nombres arbitraires n , m , l , s'il s'agit d'une equation aux troisiemes différences, &c. Voyons maintenant dans l'intro-

duction même de M.^r Fontaine l'usage, qu'il fait de ces equations de la seconde suite, & des suppositions precedentes.

Prenez une des formules precedentes, celle du premier degré, ou celle du second, ou celle du troisieme, &c. Substituez au lieu des coefficients indeterminés $A, B, C, D, E, F, \text{ \&c.}$ des fonctions de n a vôtre choix, vous aurez une equation, qui sera l'intégrale d'une equation aux premieres différences. Pour avoir cette equation aux premieres différences, dont vous avez l'intégrale, différenciez cette intégrale, vous aurez deux equations: chassez en n , & l'equation, qui vous restera entre p, x, y, dx, dy , sera l'equation aux premieres différences, dont vous aurez l'intégrale.

Prenez, par exemple, la formule $Ap + Bx + Cy = 0$, & faites $A = 1 - n, B = 2, C = \frac{2 - 5n}{n}$, on aura l'equation $(1 - n)p + 2x + \frac{2 - 5n}{n}y = 0$, qui sera l'intégrale d'une equation aux premieres différences. Pour avoir l'equation aux premieres différences, dont c'est là l'intégrale, on différencie cette intégrale; on aura $2n dx + (2 - 5n)dy = 0$, &, en chassant n , on aura l'equation aux premieres différences $3p dy^2 + 10x dy^2 - 10y dx dy - 2p dx dy - 4x dx dy + 4y dx^2 = 0$, dont l'intégrale est $(1 - n)p + 2x + \frac{2 - 5n}{n}y = 0$.

Prenez une des formules precedentes: mettez dans cette formule pour $A, B, C, D, E, F, \text{ \&c.}$ des fonctions de n , & de m , telles que vous voudrez, & vous aurez une equation, qui sera l'intégrale d'une equation aux secondes différences. Pour avoir cette equation aux secondes différences, dont vous avez l'intégrale, différenciez cette intégrale deux fois, vous aurez trois equations: chassez en les nombres n , & m , & l'equation, qui vous restera entre p, x, y, dx, dy, ddy (on suppose dx constante), sera l'equation aux secondes différences, dont vous avez l'intégrale. Prenez, par exemple, cette formule-cy $Ap^2 + Bpx + Cpy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0$, & faites $A=3, B=2n, C=n-m, D=0, E=3-2m, F=-nm$, vous aurez l'equation $3p^2 + 2npx + (n-m)py + (3-2m)xy - nmy^2 = 0$, qui sera l'intégrale d'une equation aux secondes différences. Pour avoir cette equation aux secondes différences, dont c'est là l'intégrale, différenciez-la deux fois, vous aurez $2npdx + (n-m)pdy + (3-2m)x dy + (3-2m)y dx - 2nmy dy = 0$, & $(n-m)pddy + (3-2m)x ddy + 2(3-2m)(dx dy - 2nmy ddy - 2nmdy^2) = 0$: chassez les nombres n & m de ces trois equations, & l'equation, qui vous restera entre p, x, y, dx, dy, ddy sera celle, dont il s'agit.

Prenez encore une des formules precedentes: mettez dans cette formule au lieu de $A, B, C, D, E, F, \text{ \&c.}$ des fonctions de n , de m , & de l , vous aurez une equation, qui sera l'intégrale d'une equation aux troisiemes différences. Pour avoir cette equation aux troisiemes différences, dont vous avez l'intégrale, différenciez cette intégrale trois fois, vous aurez quatre equations: chassez en les nombres n, m, l , & l'equation, qui vous restera entre $p, x, y, dx, dy, ddy, d^3y$, sera l'equation aux troisiemes différences, dont vous avez l'intégrale.

Pour avoir l'intégrale d'une equation différentielle donnée, il faudra donc que la formule, que l'on choisira, & que les valeurs, que l'on donnera aux coefficients $A, B, C, D, E, F, \text{ \&c.}$ de cette formule en n , si c'est une equation aux premieres différences, qui soit donné; en n , & m , si c'est une equation aux secondes différences; en n , en m , & en l , si c'est une equation aux troisiemes différences, &c., soient telles, que l'on arrive de cette intégrale a l'equation différentielle proposée. De même que pour chaque intégrale il n'y a qu'une seule equation aux premieres, ou aux secondes, ou aux troisiemes différences, &c., dont elle soit l'intégrale: pour chaque equation aux premieres différences, il n'y a qu'une seule equation entre p, x, y , & n , qui en soit l'intégrale: pour chaque equation

aux secondes différences, il n'y a qu'une seule equation entre p , x , y , n , & m , qui en soit l'intégrale: pour chaque equation aux troisiemes différences, il n'y a qu'une seule equation entre p , x , y , n , m , & l , qui en soit l'intégrale &c. Cette intégrale peut se presenter sous une infinité de formes différentes; mais ce sera toujours essentiellement la même equation.

Si vous avez l'intégrale d'une equation aux premieres différences, & que vous determiniez n , c'est a dire, que vous fassiez, par exemple, $n=0$, ou $n=-3$, ou $n=5$, &c., l'equation, que vous aurez, ne fera pas l'intégrale de vôtre equation aux premieres différences, mais elle sera seulement un des cas de cette intégrale; & il en de même des intégrales des equations aux secondes différences, de celles aux troisiemes, &c.; a chaque fois que l'on determine un, ou deux, ou trois, &c. des nombres n , m , l , &c., l'equation, que l'on a, n'est plus qu'un des cas de l'intégrale. Par exemple, si vous faites $n=1$ dans l'intégrale complete $n(1-n)p + 2nx + (2-5n)y = 0$ de l'equation aux premieres différences $3pdy^2 + 10xdy^2 - 10ydx dy - 2pdx dy - 4xdx dy + 4ydx^2 = 0$, l'equation $2x - 3y = 0$, que vous avez, ne sera pas l'intégrale de cette equation aux premieres différences, c'est a dire, que l'equation différentielle $2dx - 3dy = 0$ ne sera pas la même que cette equation aux

premieres différences $3pdy^2 + 10x dy^2 - 18y dx dy - Cc. = 0$; mais l'équation $2x - 3y = 0$ fera seulement un des cas de l'intégrale complete de l'équation aux premieres différences $3pdy^2 + 10x dy^2 - Cc. = 0$; c'est a dire, que tirant de l'équation $2x - 3y = 0$ la valeur d'une des variables, & substituant cette valeur pour la variable dans l'équation différentielle $3pdy^2 + 10x dy^2 - Cc. = 0$, celle-cy deviendra identique. Car puisqu'on a $2x - 3y = 0$, on aura $x = \frac{3}{2}y$, & $dx = \frac{3}{2}dy$; & substituant ces valeurs pour x , & pour dx dans l'équation différentielle $3pdy^2 + 10x dy^2 - Cc. = 0$, elle deviendra $3pdy^2 + 15y dy^2 - 15y dy^2 - 3pdy^2 - yy dy^2 + yy dy^2 = 0$, equation identique.

On peut encore observer icy que, pour chaque equation aux secondes différences, il y a deux intégrales aux premieres différences; car après avoir différentié une fois seulement l'intégrale d'une equation aux secondes différences, on pourra chasser le nombre m , ou le nombre n , & par conséquent avoir une equation aux premieres différences, où il ne restera que n , & une autre, où il ne restera que m , & chacune de ces deux equations fera également l'intégrale de l'équation aux secondes différences, que l'on auroit en différentiant l'intégrale deux fois, & en chassant les deux nombres

m & n ; que par la même raison pour chaque equation aux troisiemes différences il y a trois equations aux secondes, qui en font les intégrales, sçavoir, celle où il ne reste que le nombre l , celle où il ne reste que le nombre m , & celle où il ne reste que le nombre n . Mais bornons nous quant a present aux equations aux premieres différences.

L'intégrale d'une equation aux premieres différences etant donnée, au lieu d'en deduire, comme nous venons de le faire, l'equation aux premieres différences dont elle est l'intégrale, nous pourrons ordonner cette intégrale par rapport a n , & avoir, en la resolvant, n fonction nulle de p , de x , & de y , & en différentiant, avoir $dx + a dy = 0$. Par exemple, l'intégrale $n(1 - n)p + 2nx + (2 - 5n)y = 0$ etant donnée, on peut l'ordonner par rapport a n , & avoir $nn - n \cdot \frac{p + 2x - 5y}{p}$

$$= \frac{2y}{p}, \text{ d'où l'on tire } n = \frac{p + 2x - 5y}{2p} \pm$$

$\frac{\sqrt{(p + 2x - 5y)^2 + 8py}}{2p}$, fonction de dimension nulle de

p , de n , & de y ; & en différentiant, on aura $2n dx + (2 - 5n) dy = 0$, ou $dx + a dy = 0$, en faisant $a = \frac{2 - 5n}{2n}$, & en mettant a la place de n la valeur

qu'on vient de trouver. Resolvez l'equation que vous avez trouvé par le premier procedé, de maniere qu'a

fa place vous en ayez une autre, ou dx & dy ne soient qu'à la première dimension, cette equation sera $dx + xdy = 0$, c'est à dire, précisément la même que par le second procédé.

Dans l'exemple précédent on avoit les deux equations $n(n-1)p + 2nx + (2-5n)y = 0$, & $2ndx + (2-5n)dy = 0$. Par le premier procédé on a substitué dans la première equation la valeur de $n = \frac{2dy}{5dy-2dx}$ tirée de la seconde equation, & on a trouvé

$$l'equation \text{ aux premières différences } 3pdy^2 + 10x dy^2 - 10y dx dy - 2p dx dy - 4x dx dy + 4y^2 dx^2 = 0.$$

Si l'on ordonne cette equation par rapport à dx , on aura en la resolvant $dx + xdy = 0$. Car si, au lieu de substituer la valeur de $n = \frac{2dy}{5dy-2dx}$ dans l'equation $n(1-n)p + 2nx + (2-5n)y = 0$, comme on a fait dans le premier procédé, on substitue dans l'equation $n = \frac{2dy}{5dy-2dx}$ la valeur de n tirée de la première equation, il est évident qu'on doit avoir la même equation aux premières différences $dx + xdy = 0$.

Si vous n'aviez pas fait $dp = 0$, vous auriez eû $dx + xdy + \left(\frac{-x-ay}{p}\right) dp = 0$ par le premier, & par le second procédé. Car, si l'on n'eût pas fait $dp = 0$, on auroit eû $dx + xdy + \pi dp = 0$, π étant une fonction de dimension nulle de p , de x , & de y , qui est incon-

nuë; & si l'on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit dx , on auroit eù $\mu dx + \alpha \mu dy + \pi \mu dp = d\varphi$, μ étant encore une fonction inconnuë de p , de x , & de y , & φ une fonction inconnuë des mêmes quantités, qu'on peut supposer de dimension nulle, puis qu'on peut toujours multiplier ou diviser cette fonction par une puissance de p , qui la rende de dimension nulle. On aura donc par le premier Theoreme fondamental $\mu x + \alpha \mu y + \pi \mu p = 0$, par consequent $x + \alpha y + \pi p = 0$, & $\pi = \frac{-x - \alpha y}{p}$.

Soit donc $dx + \frac{N}{M} dy = 0$ l'equation que l'on propose d'intégrer. Par N , & par M on entend deux fonctions de même dimension de p , de x , & de y , qui n'ont aucun facteur commun, & dont tous les termes sont homogenes, & composés de puissances positives. S'il n'entre aucun radical dans les fonctions N , M , c'est a dire, si l'equation différentielle proposée est renfermée dans l'une des formules suivantes

$$dx + \frac{b_1 p + b_2 x + b_3 y}{\beta_1 p + \beta_2 x + \beta_3 y} dy = 0,$$

$$dx + \frac{b_1 p^2 + b_2 p x + b_3 p y + b_4 x^2 + b_5 x y + b_6 y^2}{\beta_1 p^2 + \beta_2 p x + \beta_3 p y + \beta_4 x^2 + \beta_5 x y + \beta_6 y^2} dy = 0,$$

$$dx + \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1 p^3 + b_2 p^2 x + b_3 p^2 y + b_4 p x^2 + b_5 p x y + b_6 p y^2}{\beta_1 p^3 + \beta_2 p^2 x + \beta_3 p^2 y + \beta_4 p x^2 + \beta_5 p x y + \beta_6 p y^2} + \\ \frac{b_7 x^3 + b_8 x^2 y + b_9 x y^2 + b_{10} y^3}{\beta_7 p^2 + \beta_8 x^2 + \beta_9 x y + \beta_{10} y^2} \end{array} \right\} dy = 0$$

Et. Et.

l'intégrale fera

$$n = \frac{a_1 p^2 + a_2 x + a_3 y}{a_1 p^2 + a_2 x + a_3 y}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a_1 p^2 + a_2 p x + a_3 p y + a_4 x^2 + a_5 x p + a_6 y^2}{a_1 p^2 + a_2 p x + a_3 p y + a_4 x^2 + a_5 x y + a_6 y^2}, \text{ ou}$$

$$n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1 p^3 + a_2 p^2 x + a_3 p^2 y + a_4 p x^2 + a_5 p x y + a_6 p y^2}{a_1 p^3 + a_2 p^2 x + a_3 p^2 y + a_4 p x^2 + a_5 p x y + a_6 p y^2} + \\ \frac{a_7 p y^2 + a_8 x^3 + a_9 x^2 y + a_{10} x y^2 + a_{11} y^3}{a_7 p y^2 + a_8 x^3 + a_9 x^2 y + a_{10} x y^2 + a_{11} y^3} \end{array} \right\}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a_1 p^4 + Cc.}{a_1 p^4 + Cc.}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a_1 p^5 + Cc.}{a_1 p^5 + Cc.}, \text{ ou}$$

Cc. Cc.

S'il entre des radicaux dans les fonctions N, M , l'on fera entrer ces mêmes radicaux dans le numerateur, & dans le denominateur des valeurs successives de n , & de la maniere la plus generale qu'il sera possible.

Supposons, par exemple, qu'il n'y ait qu'un seul radical dans l'equation différentielle proposée, & que ce radical soit $\sqrt{(ap^2 + bpx + cpy + d'x^2 + exy + fy^2)}$.

On fait $z = \sqrt{(ap^2 + bpx + cpy + d'x^2 + exy + fy^2)}$,

on aura $z^2 = ap^2 + bpx + cpy + d'x^2 + exy + fy^2$;

$$\frac{dz}{dx} = \frac{bp + 2dx + ey}{2z} ; \frac{dz}{dy} = \frac{cp + ex + 2fy}{2z}, \text{ la formule}$$

de l'equation proposée fera

$$dx + \frac{b_1p + b_2x + b_3y + b_4z}{\beta_1p + \beta_2x + \beta_3y + \beta_4z} dy = 0, \text{ ou}$$

$$dx + \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1p^2 + b_2px + b_3py + b_4pz + b_5x^2 +}{\beta_1p^2 + \beta_2px + \beta_3py + \beta_4pz + \beta_5x^2 +} \\ \frac{b_6xy + b_7xz + b_8y^2 + b_9yz}{\beta_6xy + \beta_7xz + \beta_8y^2 + \beta_9yz} \end{array} \right\} dy = 0, \text{ ou}$$

Et. Et. Et.

& son intégrale sera

$$x = \frac{a_1p + a_2x + a_3y + a_4z}{\alpha_1p + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4z}, \text{ ou}$$

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1p^2 + a_2px + a_3py + a_4pz + a_5x^2 +}{\alpha_1p^2 + \alpha_2px + \alpha_3py + \alpha_4pz + \alpha_5x^2 +} \\ \frac{a_6xy + a_7xz + a_8y^2 + a_9yz}{\alpha_6xy + \alpha_7xz + \alpha_8y^2 + \alpha_9yz} \end{array} \right\}, \text{ ou}$$

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1p^3 + a_2p^2x + a_3p^2y + a_4p^2z +}{\alpha_1p^3 + \alpha_2p^2x + \alpha_3p^2y + \alpha_4p^2z +} \\ \frac{a_5px^2 + a_6pxy + a_7pxz + a_8py^2}{\alpha_5px^2 + \alpha_6pxy + \alpha_7pxz + \alpha_8py^2} \\ \frac{+ a_9pyz + a_{10}x^3 + a_{11}x^2y + a_{12}x^2z}{+ a_9pyz + a_{10}x^3 + a_{11}x^2y + a_{12}x^2z} \\ \frac{+ a_{13}xy^2 + a_{14}xyz + a_{15}y^3 + a_{16}y^2z}{+ a_{13}xy^2 + a_{14}xyz + a_{15}y^3 + a_{16}y^2z} \end{array} \right\}, \text{ ou}$$

Et. Et. Et.

S'il entre plusieurs radicaux dans les fonctions N , M , on fera pour chaque radical ce qu'on vient de faire pour un seul. On pourra consulter pour le reste l'Ouvrage de M.^r Fontaine, dont nous avons presque copié les paroles dans cet Article DCXVI., en les accompagnant cependant des éclaircissements nécessaires.

DCXVII.

Il ne nous reste plus qu'à donner une idée du Calcul Intégral de M.^r le Marquis de Condorcet. Cet Ouvrage est divisé en deux Parties, dont la première traite des équations différentielles aux différences infiniment petites; la seconde considère les équations aux différences finies, & celles où une même variable égale à une fonction de plusieurs autres, a été successivement supposée varier avec chacune d'entr'elles. Nous ne parlerons que de la première Partie: elle est naturellement divisée en deux sections. M.^r de Condorcet résout pleinement dans la première ce Problème général: *Etant donnée une fonction ou équation différentielle de tel ordre que ce soit, & qui renferme tant de variables qu'on voudra, trouver les équations de condition, qui doivent avoir lieu, pour qu'elle puisse avoir une intégrale de l'ordre inférieur de l'unité, ou même une intégrale finie.* Car, selon la remarque de M.^{rs} d'Alembert & Bezout, lorsqu'un Problème est possible, c'est déjà avoir fait un pas

utile vers la solution, que d'avoir démontré que l'équation différentielle, qui l'exprime, admet une intégrale du degré immédiatement inférieur. Mais il peut arriver souvent qu'une équation susceptible d'une pareille intégrale exprime une chose impossible, & par conséquent n'admette point d'intégrale finie. C'est donc un travail fort utile, que de déterminer dans quel cas une équation proposée peut être amenée à une intégrale finie. Après qu'on s'est assuré qu'une équation différentielle proposée a une intégrale finie possible, il ne reste plus qu'à trouver cette intégrale, c'est le second Problème général que M.^r de Condorcet se propose de résoudre dans la seconde section.

DCXVIII.

Il réduit toutes ses recherches sur les équations de condition à sept Problèmes, dont les quatre premiers roulent sur les fonctions, & les trois derniers sur les équations différentielles. Nous nous contenterons de donner un essai de la méthode, en rapportant la solution du premier Problème avec quelques explications sur des difficultés de calcul, qui pourroient embarasser.

PROBLÈME I. Trouver l'équation de condition qui doit avoir lieu, pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque de deux variables x, y , ou dx est supposé constant, soit la différentielle exacte d'une

fonction des mêmes variables, d'un ordre moins élevé d'une unité.

SOLUTION. Soit V la fonction proposée, B la fonction de l'ordre inférieur, dont V doit être la différence. On fait dans V & dans B , $d\pi = p, dy = p', dp = 0$ a cause de $d\pi$ constante, $ddy = dp' = q', d^3y = d^2p' = dq' = r', d^4y = d^3p' = d^2q' = dr' = s'$, & ainsi de suite on aura V & B fonctions de $\pi, y, p, p', q', r', s', \text{&c.}$, la dernière de ces lettres $p', q', r', s', \text{&c.}$, qui se trouve dans V , ne devant pas se trouver dans B , par ce que B est d'un ordre inférieur à V . Par exemple, si $s' = d^4y$ est la dernière de ces lettres qui se trouvent dans V , $r' = d^3y$ sera la dernière lettre qui se trouve dans B , puisque, V étant une différentielle du quatrième ordre, B ne sera que du troisième par la supposition du Problème. Cette substitution des lettres $p, p', q', r', s', \text{&c.}$, au lieu des différences $d\pi, dy, d^2y, d^3y, d^4y, \text{&c.}$, donnera le moyen de distinguer les $p, p', q', r', s', \text{&c.}$, qui se trouvent dans B , de ceux que la différentiation introduit dans dB .

Cela posé, & en différentiant, suivant la nouvelle manière, on aura, par la supposition, $V = dB = \frac{dB}{d\pi} d\pi + \frac{dB}{dy} dy + \frac{dB}{dp'} dp' + \frac{dB}{dq'} dq' + \frac{dB}{dr'} dr' + \text{&c.}$, & en mettant dans cette valeur de V pour $d\pi, dy, dp',$

$dq', dr', \text{ \&C.}$ leurs valeurs, on aura $V = \frac{dB}{dx} p + \frac{dB}{dy} p' + \frac{dB}{dp} q' + \frac{dB}{dq} r' + \frac{dB}{dr} s' + \text{ \&C.}$, forme que doit nécessairement avoir V , pour être la différentielle exacte de la fonction B .

Pour parvenir à tirer de là l'équation de condition, qu'on cherche, on différentie les deux membres de l'équation cy-dessus. Le premier, en différentiant à l'ordinaire, donne $dV = Nd x + N' dy + P' dp' + Q' dq' + R' dr' + S' ds' + \text{ \&C.}$, ou les coefficients $N, N', P', Q', R', S', \text{ \&C.}$ sont des fonctions connus des quantités $x, y, p, p', q', r', s', \text{ \&C.}$, que contient la fonction donnée V . Le seconde membre, en différentiant suivant la nouvelle manière, donne $d\left(\frac{dB}{dx} p + \frac{dB}{dy} p' + \frac{dB}{dp} q' + \frac{dB}{dq} r' + \frac{dB}{dr} s' + \text{ \&C.}\right) = \left(\frac{ddB}{dx^2} p + \frac{ddB}{dx dy} p' + \frac{ddB}{dx dp} q' + \frac{ddB}{dx dq} r' + \frac{ddB}{dx dr} s' + \text{ \&C.}\right) dx + \left(\frac{ddB}{dy dx} p + \frac{ddB}{dy^2} p' + \frac{ddB}{dy dp} q' + \frac{ddB}{dy dq} r' + \frac{ddB}{dy dr} s' + \text{ \&C.}\right) dy + \left(\frac{dB}{dy} + \frac{ddB}{dp dx} p + \frac{ddB}{dp dy} p' + \frac{ddB}{dp^2} q' + \frac{ddB}{dp dq} r' + \frac{ddB}{dp dr} s' + \text{ \&C.}\right) dp' + \left(\frac{dB}{dq dx} p + \frac{dB}{dq dy} p' + \frac{ddB}{dq^2} q' + \frac{ddB}{dq dr} r' + \frac{ddB}{dq ds} s' + \text{ \&C.}\right) dq' + \left(\frac{dB}{dr dx} p + \frac{dB}{dr dy} p' + \frac{ddB}{dr dq} q' + \frac{ddB}{dr^2} r' + \frac{ddB}{dr ds} s' + \text{ \&C.}\right) dr' + \left(\frac{dB}{ds dx} p + \frac{dB}{ds dy} p' + \frac{ddB}{ds dq} q' + \frac{ddB}{ds dr} r' + \frac{ddB}{ds^2} s' + \text{ \&C.}\right) ds' + \text{ \&C.}$

$$\begin{aligned} & \frac{ddB}{dq' dp'} q' + \frac{ddB}{dq'^2} r' + \frac{ddB}{dq' dr'} s' + \mathcal{O}c.) dq' + \left(\frac{dB}{dq} + \frac{ddB}{dr dx} p \right. \\ & \left. + \frac{ddB}{dr dy} p' + \frac{ddB}{dr dp} q' + \frac{ddB}{dr dq} r' + \frac{ddB}{dr^2} s' + \mathcal{O}c. \right) dr' + \\ & \left(\frac{dB}{dr} + \dots \dots \dots \right) ds' + \mathcal{O}c. \mathcal{O}c., \text{ equation,} \\ & \text{que nous designerons par (G).} \end{aligned}$$

La différence du second membre $\frac{dB}{dx} p + \frac{dB}{dy} p' + \frac{dB}{dp} q' + \frac{dB}{dq} r' + \frac{dB}{dr} s' + \mathcal{O}c.$, se trouve en prenant en particulier la différence de chaque terme de ce second membre. 1° En ne faisant varier que x . 2° En ne faisant varier que y . 3° En ne faisant varier que p' . 4° En ne faisant varier que q' , & ainsi de suite.

Or la différence de tout ce second membre, en ne faisant varier que x , est $\frac{ddB}{dx^2} p dx + \frac{ddB}{dx dy} p' dx + \frac{ddB}{dx dp} q' dx + \frac{ddB}{dx dq} r' dx + \frac{ddB}{dx dr} s' dx + \mathcal{O}c. = \left(\frac{ddB}{dx^2} p + \frac{ddB}{dx dy} p' + \frac{ddB}{dx dp} q' + \frac{ddB}{dx dq} r' + \frac{ddB}{dx dr} s' + \mathcal{O}c. \right) dx$.

De même la différence de tout le second membre prise, comme nous l'avons dit, en ne faisant varier que y , est $\frac{ddB}{dy dx} p dy + \frac{ddB}{dy^2} p' dy + \frac{ddB}{dy dp} q' dy + \frac{ddB}{dy dq} r' dy$

D d d d

$$\begin{aligned}
& + \frac{ddB}{dydr} s' dy + \mathcal{C}c. = \left(\frac{ddB}{dydx} p + \frac{ddB}{dy^2} p' + \frac{ddB}{dydp} q' + \right. \\
& \left. \frac{ddB}{y dq'} r' + \frac{ddB}{dydr} s' + \mathcal{C}c. \right) dy. \text{ La différence du se-} \\
& \text{cond membre prise, comme nous l'avons dit, en ne} \\
& \text{faisant varier que } p', \text{ est } \frac{ddB}{dpdx} p dp' + \frac{ddB}{dpdy} p' dp' + \\
& \frac{dB}{dy} dp' + \frac{ddB}{dp^2} q' dp' + \frac{ddB}{dpdq} r' dp' + \frac{ddB}{dpdr} s' dp' + \mathcal{C}c. \\
& = \frac{dB}{dy} dp' + \frac{ddB}{dpdx} p dp' + \frac{ddB}{dpdy} p' dp' + \frac{ddB}{dp^2} q' dp' + \\
& \frac{ddB}{p dq'} r' dp' + \frac{ddB}{p dr} s' dp' + \mathcal{C}c. = \left(\frac{dB}{dy} + \frac{ddB}{dpdx} p + \right. \\
& \left. \frac{ddB}{dpdy} p' + \frac{ddB}{dp^2} q' + \frac{ddB}{p dq'} r' + \frac{ddB}{p dr} s' + \mathcal{C}c. \right) dp'; \\
& \& \text{ on trouve de même les autres différences du second} \\
& \text{membre, en ne faisant varier que } q', \text{ ensuite en ne} \\
& \text{faisant varier que } r', \&c. \text{ Or } d \frac{dB}{dx}, \text{ ou la différence} \\
& \text{de } \frac{dB}{dx} \text{ prise en faisant tout varier, est } \frac{ddB}{dx^2} dx + \\
& \frac{ddB}{dx dy} dy + \frac{ddB}{dx dp'} dp' + \frac{ddB}{dx dq'} dq' + \frac{ddB}{dx dr} dr' + \frac{ddB}{dx ds'} ds' \\
& + \mathcal{C}c. = \frac{ddB}{dx^2} p + \frac{ddB}{dx dy} p' + \frac{ddB}{dx dp'} q' + \frac{ddB}{dx dq'} r' + \\
& \frac{ddB}{dx dr} s' + \mathcal{C}c.; \text{ par conséquent } d \frac{dB}{dx} \cdot dx = \left(\frac{ddB}{dx^2} p + \right. \\
& \left. \frac{ddB}{dx dy} p' + \frac{ddB}{dx dp'} q' + \frac{ddB}{dx dq'} r' + \frac{ddB}{dx dr} s' + \mathcal{C}c. \right) dx. \text{ On}
\end{aligned}$$

trouve de même que $d \frac{dB}{dy} \cdot dy = \left(\frac{ddB}{dydx} p + \frac{ddB}{dy^2} p' + \frac{ddB}{dydp} q' + \frac{ddB}{dydq} r' + \frac{ddB}{dydr} s' + \text{C}c. \right) dy$, & encore que $\left(\frac{dB}{dy} + d \cdot \frac{dB}{dp} \right) dp' = \left(\frac{dB}{dy} + \frac{ddB}{dpdx} p + \frac{ddB}{dpdy} p' + \frac{ddB}{dp^2} q' + \frac{ddB}{dpdq} r' + \frac{ddB}{dpdr} s' + \text{C}c. \right) dp'$, & encore que $\left(\frac{dB}{dp} + d \cdot \frac{dB}{dq} \right) dq' = \left(\frac{dB}{dp} + \frac{ddB}{dqdx} p + \frac{ddB}{dqdy} p' + \frac{ddB}{dqdp} q' + \frac{ddB}{dq^2} r' + \frac{ddB}{dqdr} s' + \text{C}c. \right) dq'$, & ainsi de suite.

Donc en mettant pour les suites qui multiplient les $dx, dy, dp', dq', dr', ds', \text{C}c.$ leurs valeurs $d \cdot \frac{dB}{dx}, d \frac{dB}{dy}, \frac{dB}{dy} + d \cdot \frac{dB}{dp}, \frac{dB}{dp} + d \cdot \frac{dB}{dq}, \frac{dB}{dq} + d \frac{dB}{dr}, \frac{dB}{dr} + \text{C}c.$ Dans l'équation cy-dessus (G), on aura $d \left(\frac{dB}{dx} p + \frac{dB}{dy} p' + \frac{dB}{dp} q' + \frac{dB}{dq} r' + \frac{dB}{dr} s' + \text{C}c. \right) = d \frac{dB}{dx} \cdot dx + d \frac{dB}{dy} \cdot dy + \left(\frac{dB}{dy} + d \frac{dB}{dp} \right) dp' + \left(\frac{dB}{dp} + d \frac{dB}{dq} \right) dq' + \left(\frac{dB}{dq} + d \frac{dB}{dr} \right) dr' + \left(\frac{dB}{dr} \dots \dots \dots \right) ds' + \text{C}c.$ Mais puisque V , & $\frac{dB}{dx} p + \frac{dB}{dy} p' + \frac{dB}{dp} q' + \frac{dB}{dq} r' + \frac{dB}{dr} s' + \text{C}c.$ doivent être une même chose, leurs différences

doivent être égales terme à terme, on aura donc $Ndx = d \frac{dB}{dx} dx$, & $N = d \frac{dB}{dx}$; $Ndy = d \frac{dB}{dy} \cdot dy$, & $N' = d \cdot \frac{dB}{dy}$; $P'dp' = \left(\frac{dB}{dy} + d \cdot \frac{dB}{dp'} \right) dp'$, & $P' = \frac{dB}{dy} + d \cdot \frac{dB}{dp'}$; $Q' = \frac{dB}{dp'} + d \cdot \frac{dB}{dq'}$; $R' = \frac{dB}{dq'} + d \cdot \frac{dB}{dr'}$; $S' = \frac{dB}{dr'} + \dots$; equations qui donnent les valeurs, que doivent avoir $N, N', P', Q', R', S', \dots$, pour que V soit la différentielle exacte de B . On remarque maintenant que dans cette suite d'equations

$$N' = d \cdot \frac{dB}{dy}$$

$$P' = \frac{dB}{dy} + d \cdot \frac{dB}{dp'}$$

$$Q' = \frac{dB}{dp'} + d \cdot \frac{dB}{dq'}$$

$$R' = \frac{dB}{dq'} + d \cdot \frac{dB}{dr'}$$

$$S' = \frac{dB}{dr'} + \dots$$

Le second membre de la première, & de la dernière ne peuvent avoir qu'un terme, & qu'ainsi chaque $\frac{dB}{dy}$, $\frac{dB}{dp'}$, $\frac{dB}{dq'}$, $\frac{dB}{dr'}$ se trouve dans une equation, & sa différence dans une autre. Mettant donc ces equations sous cette forme

$$N' = d \cdot \frac{dB}{dy}$$

$$dP' = d \cdot \frac{dB}{dy} + d^2 \frac{dB}{dy^2}$$

$$d^2 Q' = d^2 \frac{dB}{dy^2} + d^3 \frac{dB}{dy^3}$$

$$d^3 R' = d^3 \frac{dB}{dy^3} + d^4 \frac{dB}{dy^4}$$

$$d^4 S' = d^4 \frac{dB}{dy^4} + \dots\dots\dots$$

on aura, en retranchant alternativement l'une de l'autre $N' - dP' + d^2 Q' - d^3 R' + d^4 S' - \text{C}c. = 0$, equation identique, qui doit avoir lieu, pour que V soit la différentielle exacte d'une fonction d'un ordre inférieur d'une unité, & qui est par conséquent l'equation de condition cherchée.

DCXIX.

COROLLAIRE. $Z d\ast$ est une différentielle, dans laquelle $d\ast$ est constante, & Z une fonction des variables $\ast, y, p, q, r, s, \text{C}c.$, en supposant $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, $r = \frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$, $s = \frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$, $\text{C}c.$ Par conséquent $dZ = M d\ast + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{C}c.$ Nous avons démontré dans le

Chapitre precedent que, si la relation entre x & y est exprimée par l'équation $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{C}c. = 0$, l'intégrale $\int Z dx$ sera un *Maximum*, ou un *Minimum*, or si on suppose $p' = dy$, $q' = dp' = ddy$, $r' = dq' = d^2y$, $s' = dr' = d^3y$, $\text{C}c.$, Z sera aussi une fonction des variables $x, y, p', q', r', s', \text{C}c.$, puisque les quantités $p, q, r, s, \text{C}c.$ ne sont variables que par ce qu'elles contiennent $dy, ddy, d^2y, d^3y, \text{C}c.$, ou $p', q', r', s', \text{C}c.$, dx étant constante; par conséquent on aura aussi $dZ = Mdx + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ds' + \text{C}c.$

En égalant terme a terme les deux valeurs de dZ , que nous venons de trouver, on aura $Mdx = Mdx$, $M = M$, $Ndy = N'dy$, & $N = N'$; $Pdp = P'dp' = P'dy$, & $P' = \frac{P}{dx}$; $\frac{dP}{dx} = dP'$; $Qdq = \frac{Qd^2y}{dx^2} = Q'dq' = Q'd^2y$, & $\frac{Q}{dx^2} = Q'$, $\frac{dQ}{dx^2} = dQ'$. On trouve de même $\frac{R}{dx^3} = R'$, & $\frac{d^2R}{dx^3} = d^2R'$; $\frac{S}{dx^4} = s'$, & $\frac{d^3S}{dx^4} = d^3S'$, $\text{C}c.$ Substituant ces valeurs dans l'équation $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{C}c. = 0$,

qui rend $S.Zd*$ un *Maximum*, ou un *Minimum*, on aura $N' - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S' - \text{C}c. = 0$, equation de condition, qui doit avoir lieu, pour que la différentielle $Zd*$ ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur. On voit donc par là, que ces deux formules d'equations sont les mêmes. Ce Corollaire contient la demonstration du Theoreme, que M.^r Euler a proposé sans demonstration dans le Tome X. des nouveaux Memoires de Petersbourg, & qu'il appelle: *Egregium Theorema quod in Calculo Integrali eximium usum præstare videtur*. M.^r de Condorcet a fait voir generalement par la methode des variations, que les formules des equations de condition doivent être les mêmes que celles des equations, qui doivent avoir lieu entre les variables, qui entrent dans une fonction intégrale, pour que cette fonction devienne un *Maximum*, ou un *Minimum*. Il faut cependant remarquer que, pour le *Maximum*, ou le *Minimum*, ces equations ne doivent pas être identiques, puisqu'elles doivent donner une relation entre les variables, qui est nécessaire pour que la fonction intégrale indefinie devienne un *Maximum*, ou un *Minimum*. Ce que nous venons de demontrer peut suffire aux Commençants pour comprendre toute la premiere section du Calcul Intégral de M.^r de Condorcet.

DCXX.

Quant a la seconde section, l'Auteur propose la methode d'intégrer toutes les equations différentielles, qui peuvent avoir des intégrales finies; cette methode est expliqué en 35. ou 36. pages. Il faudroit un long Commentaire pour éclaircir les difficultés, qu'on y trouve presqu'a chaque pas, & pour démontrer exactement tout ce qu'on y suppose sans demonstration. Nous nous contenterons de donner un idée generale de cette section, d'autant plus que dans le cours de cet Ouvrage nous avons donné des methodes, qui nous paroissent avoir la même generalité que celle, qui est renfermée dans cette section.

Une equation différentielle quelconque, qu'on a reconnu par la premiere section avoir une intégrale finie, étant proposée, M.^r de Condorcet la prepare d'abord de maniere qu'elle devienne algebrique, rationnelle & entiere, comme nous avons dit cy-dessus. Ensuite il remarque les points, qui distinguent cette equation différentielle de toute autre. Ces points sont l'ordre de l'equation, le nombre & la nature des fonctions transcendantes qui s'y trouvent, le degré où y montent les différences, & celui des equations rationnelles entre les simples variables x , y , &c., & les lettres, qui representent leurs fonctions algebriques, & tran-

transcendantes, le degré où montent les $x, y, \text{C}c.$, & les lettres, qui representent leurs fonctions dans les coefficients des différentielles, & dans les coefficients des equations rationnelles & entieres entre $x, y, \text{C}c.$, & les lettres qui representent leurs fonctions, enfin les coefficients constants.

De ces points distinctifs de l'equation différentielle proposée, il determine les points qui distinguent l'intégrale de cette equation de toute autre equation finie, & il trouve un nombre fini de formules d'intégrales finies, qui renferment necessairement celle de la proposée. Après avoir trouvé les différentes formes dont est susceptible l'intégrale finie d'une equation différentielle d'une forme donnée, il ne reste plus qu'à determiner entre ces formes d'intégrales, celle qui convient aux coefficients donnés de la proposée, & les coefficients de l'intégrale qui en resultent. Pour cela différentiant chaque forme d'intégrale, & la reduisant a la forme de la proposée, on aura une fonction, qui devra être identiquement la même que la proposée; comparant donc terme a terme on trouvera les coefficients de l'intégrale, &c. Mais, comme le remarquent M.^{rs} d'Alembert, & Bezout, ce n'est que par la lecture de l'Ouvrage même, qu'on peut se former une idée suffisante de l'étendue de ces methodes. Il nous suffit de dire qu'elles s'appliquent a toute equation différentielle.

Il faut cependant avouer, que cette methode, & toutes les autres sont sujettes a des inconveniens inevitables. Les Tables construites selon les principes de M.^r de Condorcet contiennent par ordre les différentes formes d'intégrales, qui étant différenciées, produisent les equations différentielles d'une forme donnée. Tel est le principe sur lequel ces Tables sont construites, & elles sont generales a cet egard. Mais si nous donnons des valeurs particulieres aux coefficients de ces formules, qu'on a supposé generaux, il peut arriver que les différentielles, qui en resultent, soient susceptibles d'abaissement, sans que les intégrales changent de forme, comme nous l'avons observé plusieurs fois; & cela arrivera soit que les coefficients des termes plus élevés s'évanouissent, soit que ces différentielles aient des facteurs, alors les différentielles d'un degré donné pourroient avoir pour intégrales, ou les intégrales generales de ce degré, ou des cas particuliers d'intégrales supérieures, dans lesquelles l'abaissement auroit lieu. Il faudroit donc, pour avoir les intégrales de cette dernière classe d'equations, former une Table, qui contient tous ces cas particuliers; d'où l'on voit que cette methode est sujette aux inconveniens que nous avons déjà observé dans les autres, & qui dependent de la nature même du calcul; c'est a dire, que les intégrales peuvent appartenir a des formules moins, ou plus

compliquées. Ce dernier cas appartient aux différentielles, qui auroient un facteur. Il est vrai, que la methode proposée satisferoit a tous les cas possibles; mais la construction des Tables feroit d'un travail immense. C'est pourquoi nous finirons en remarquant que les methodes generales du Calcul Intégral, qu'on a trouvées, ne diminuent point l'utilité des methodes particulieres, que nous devons aux travaux reunis des grands Géometres M.^{rs} Newton, Bernoulli, Euler, d'Alembert, Clairaut, de la Grange, &c., comme M.^r de Condorcet l'avoïe lui-même dans la conclusion generale, qu'il a mis a la fin de son Calcul Intégral en ces termes: *La methode d'intégrer, que je donne dans cet Ouvrage, joint au merite d'être directe, celui de la plus grande generalité qui en est une suite. Mais le defaut d'exiger beaucoup de calcul & de travail, aussi longtems surtout qu'il n'y aura pas de Tables d'intégrales toutes dressées, fait que jusques-là elle ne peut gueres être d'usage que pour les cas, qui ont echappé aux methodes particulieres.*

Fin de la seconde Partie.

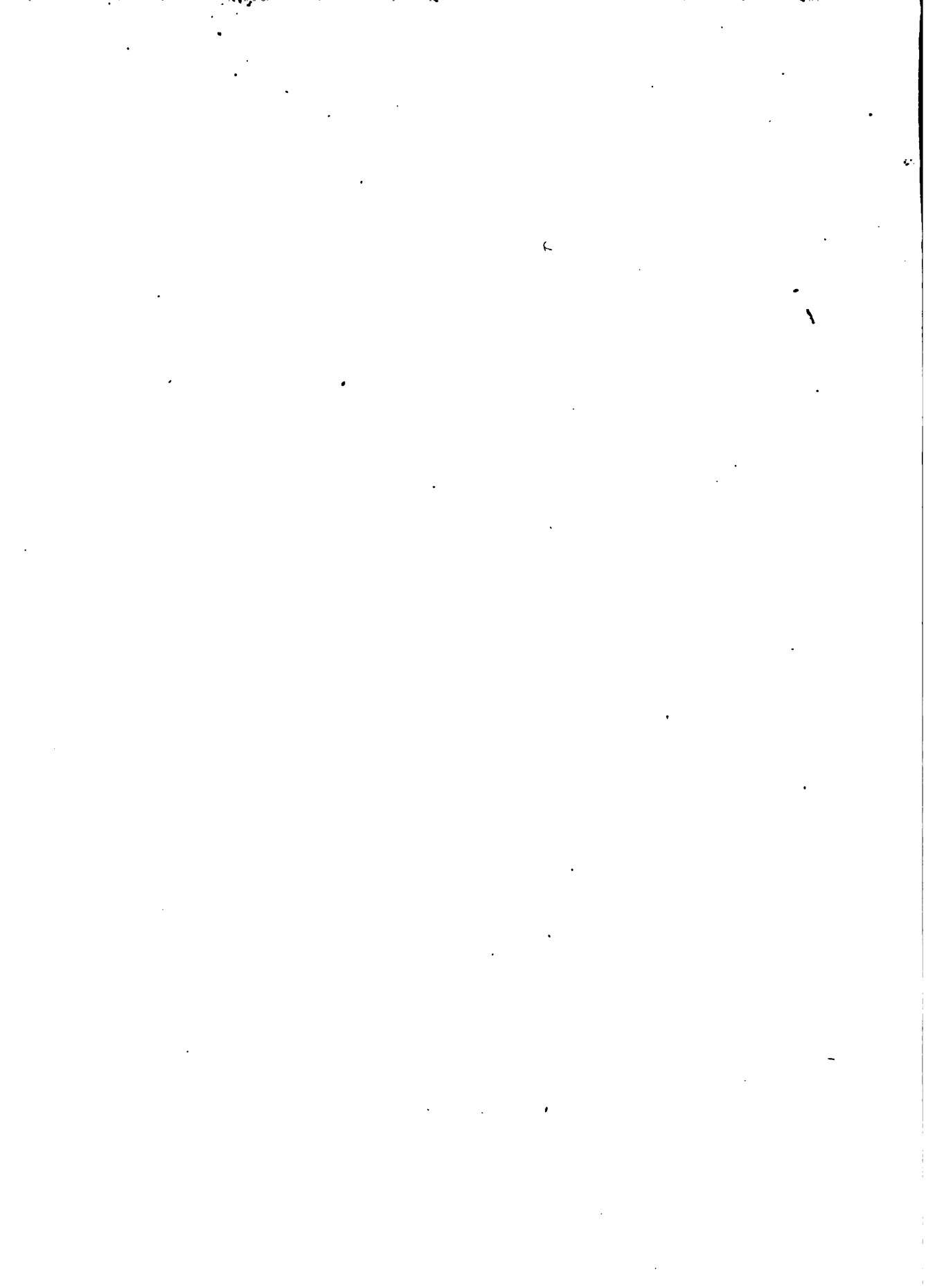
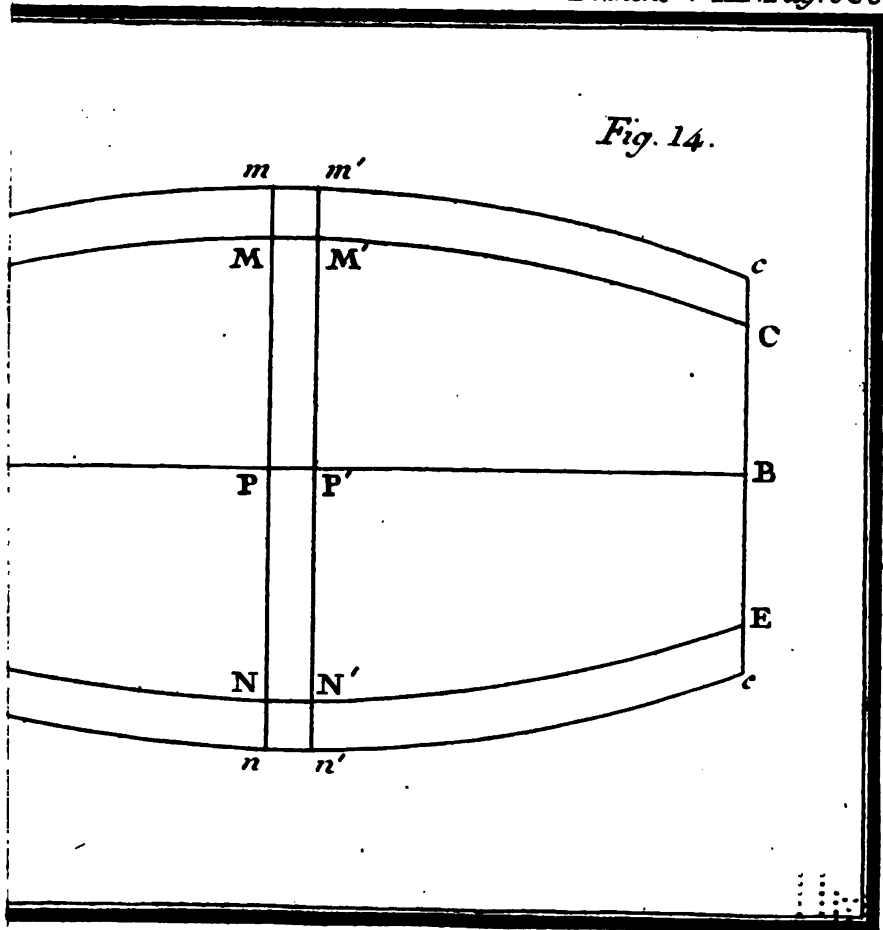


Fig. 14.



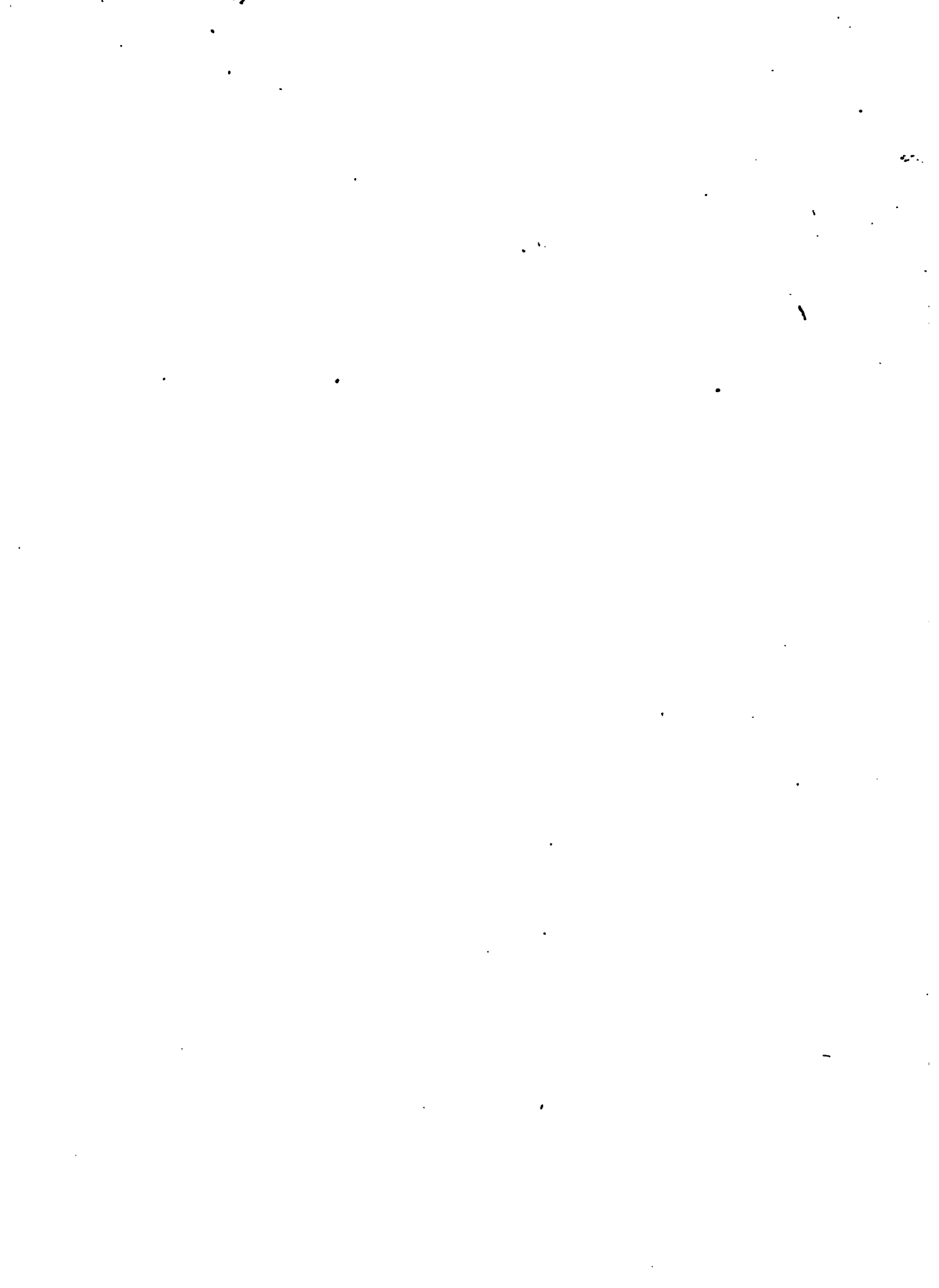
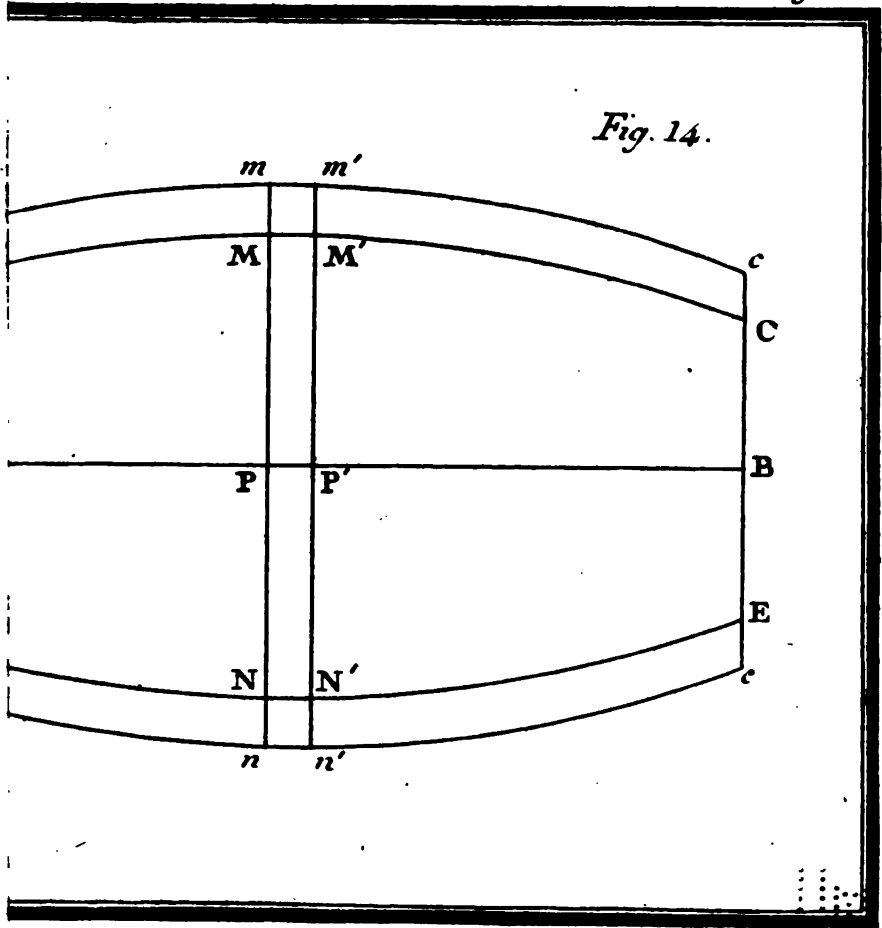
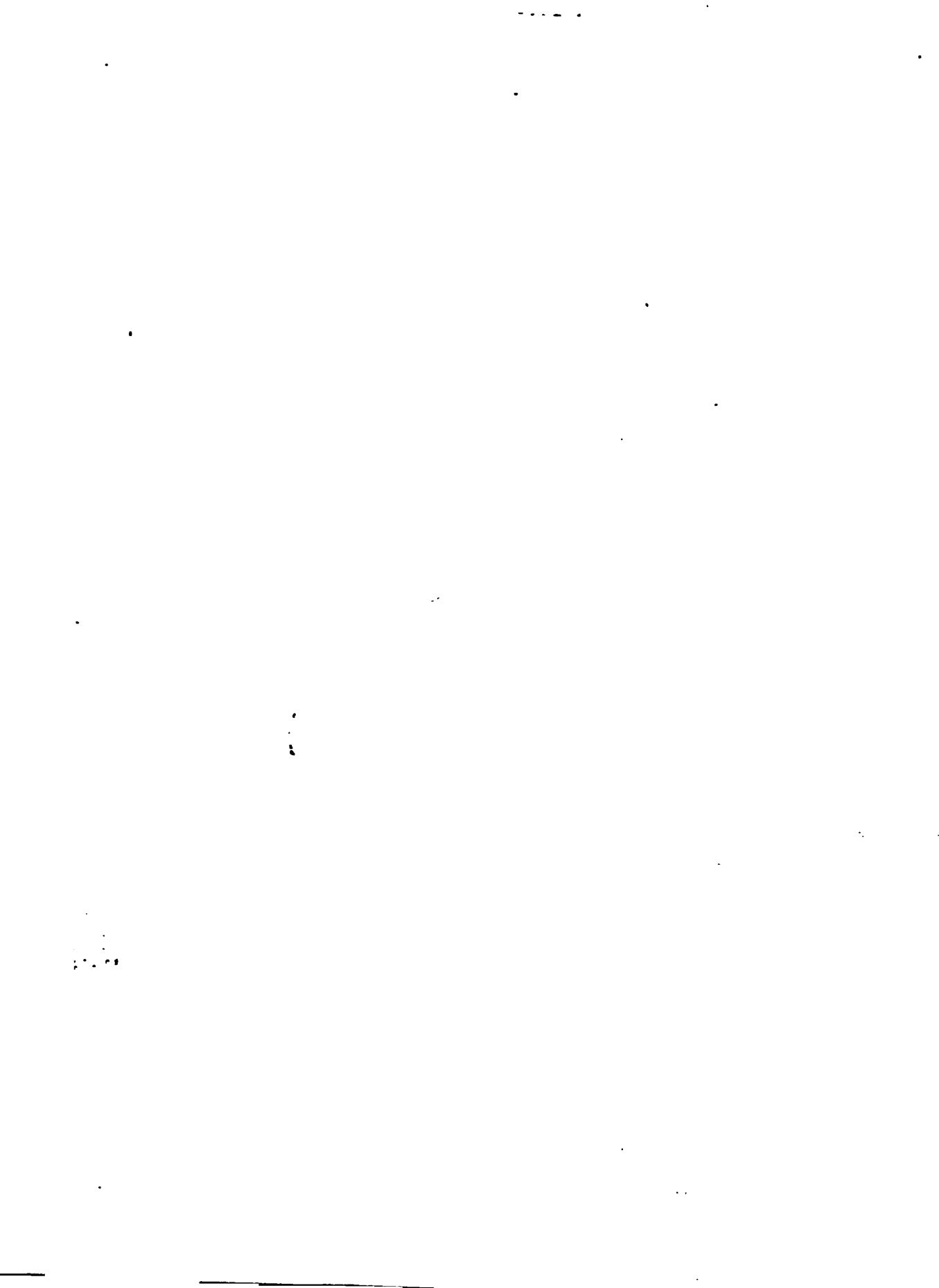


Fig. 14.





T A B L E

D E S C H A P I T R E S

Contenûs dans cette Seconde Partie.

CHAPITRE PREMIER.

<p><i>DE l'intégration des Différentielles du premier ordre, qui contiennent plusieurs variables mêlées, & dont les Intégrales exactes sont des suites finies.</i></p>	<p>Page</p>
--	-------------

CHAPITRE II.

<p><i>De la methode de M.^r Newton pour intégrer par les series les equations différentielles a plusieurs variables mêlées x, y, z, &c., lorsque ces equations ne contiennent que les premieres différences dx, dy, dz, &c., ou leurs produits.</i></p>	<p>52</p>
---	-----------

CHAPITRE III.

De la separation des indeterminées dans les equations différentielles, qui ne contiennent que les premieres différences des variables, ou leurs

	Page
<i>puissances, pour les intégrer ensuite par les méthodes de la première Partie.</i>	104

CHAPITRE IV.

<i>Exposition de différentes Méthodes, qui ont rapport aux Chapitres précédents.</i>	158
--	-----

CHAPITRE V.

<i>Des Règles générales du Calcul Intégral des différentielles des ordres supérieurs.</i>	221
---	-----

CHAPITRE VI.

<i>De quelques méthodes particulières pour intégrer, ou pour réduire aux ordres inférieurs les équations différentielles des ordres supérieurs, lorsqu'elles ont certaines conditions.</i>	291
--	-----

CHAPITRE VII.

<i>Méthode pour trouver l'intégrale complète de l'équation $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cdd^2y}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} \dots \dots \dots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$ &c. Dans laquelle dx est constante, & les coefficients $A, B, C, D, E, \&c.$ sont aussi constants, ou des fonctions de la variable x, & de constantes.</i>	336
--	-----

DES CHAPITRES.

591
Page

CHAPITRE VIII.

De quelques Methodes particulieres pour trouver les intégrales complettes des equations différentielles du second ordre $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$, & $0 = D + Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2}$, dans lesquelles dx est constante, & A, B, C, D sont des fonctions de x .

401

PREMIER CAS GENERAL.

411

SECOND CAS GENERAL.

417

TROISIEME CAS GENERAL.

422

CHAPITRE IX.

De la Methode des Variations.

456

ARTICLE PREMIER. *Elemens du Calcul des Variations.*

ibid.

ARTICLE SECOND. *De l'application du Calcul des Variations a la solution des Problemes.*

501

CHAPITRE X.

Contenant les principes des plus nouvelles methodes du Calcul Intégral.

533

Fin de la Table des Chapitres.

